

#### 4. und 5. Labor

##### Numerik für nichtlineare Gleichungssysteme u. Optimierung

**1. Newton-Verfahren Anwendung: Optimierung.** Es seien die Energie-/Kostfunktionen  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$E_L(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{1.5} + \frac{x_2^2}{1.5} + 3 \sin^2 \left( \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{und} \quad E_R(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$$

- a) Man berechne den Gradienten  $\nabla E$  und die Hesse Matrix  $\nabla^2 E$  (für beide  $E$ ).
- b) Man erstelle Kontourdiagramme (für beide  $E$ ). **Hinweis:**  $E_R$  ist die Rosenbrock Funktion aus Labor 1.
- c) Man schreibe ein (allgemeines) Programm für das Newton-Verfahren. Das Newton-Verfahren ist durch

$$x^{n+1} = x^n - [\nabla^2 E(x^n)]^{-1} \nabla E(x^n)$$

gegeben.

- d) Man approximiere die Minima,  $(0, 0)$  für  $E_L$  bzw.  $(1, 1)$  für  $E_R$ , der Funktionen mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Experimentgestaltung: wähle 4 (zufällige) Startpunkte und approximiere die Minima mit Fehler  $\varepsilon < 0.0001$ . Stelle die vom Newton-Verfahren erzeugten Bahnen auf den Kontourdiagrammen dar.

**2. Gradient Descent im Vergleich mit Newton (GD vs. Newton) I: quadratische Energiefunktion.** Gradient Descent (Gradientenverfahren) ist durch die folgende Iteration, mit Schrittweite  $h > 0$ , gegeben

$$x^{n+1} = x^n - h \nabla E(x^n).$$

Es sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$  und die entsprechende Energie  $E_A(x) = \frac{1}{2} x^T A x$  mit  $x = [x_1 \ x_2]^T$ .

- a) Man berechne  $\nabla E_A$ ,  $\nabla^2 E_A$  und erstelle ein Kontourdiagramm für  $E_A$ .
- b) Man untersuche verschiedene Schrittweiten  $h > 0$  für GD.
- c) Man vergleiche die GD Bahnen mit den Newton Bahnen (bei identischen Startpunkten).

**3. Gradient Descent im Vergleich mit Newton (GD vs. Newton) II: allgemeine Energiefunktionen.**

- a) Man untersuche die GD-Schrittweite für  $E_L$  und  $E_R$  aus der 1. Aufgabe.
- b) Man vergleiche Newton und GD für  $E_L$  und  $E_R$ .

**Einreichtermin: Freitag den 04.04, 22<sup>00</sup> Uhr**