Laborator 1-2: Analiza descriptivă a unei caracteristici de calitate. Indicatori de fiabilitate. Fiabilitatea sistemelor

1. Obiectiv

Aplicarea şi asimilarea metodelor statistice de descriere a unei caracteristici a unei componente. Aplicarea şi asimilarea indicatorilor de fiabilitate. Înţelegerea felului în care fiabilitatea unui sistem compus rezultă din fiabilitatea componentelor.

2. Culegerea şi prelucrarea datelor pentru o caracteristică

2.1. Culegerea datelor

Produsul / componenta se analizează spre a stabili caracteristica interesantă. Pentru caracteristici dimensionale, se va desena o schiţă a componentei pe fişa de lucru *RD-1*, indicând caracteristica studiată *X*. Măsurătorile se efectuează asupra unui singur eşantion de volum cu n = de la 40 la 60 de piese. Valorile x_i obţinute se consemnează în tabelul datelor primare (tabelul 1 din fişa de lucru *RD-1*).

2.2. Sortarea datelor

Eşantioanele prelevate şi trecute în tabelul 1 se sortează ascendent, valorile sortate fiind consemnate în tabelul 2 de pe fişa de lucru *RD-1*.

2.3. Gruparea datelor

Pentru gruparea valorilor pe clase (intervale) se precizează următoarele:

1) Amplitudinea variaţiei naturale $w = x_n - x_1$.
2) Numărul intervalelor de grupare: $m \approx \sqrt{n}$, se va rotunji la număr întreg.
3) Amplitudinea intervalului: $\omega = w / (m-1)$.

Parametrii de grup sunt consemnaţi în tabelul 3 de pe fişa de lucru *RD-1*, ţinând cont de următoarele:

1) Intervalele sunt închise la stânga, deschise la dreapta: $[u_i, u_{i+1})$.
2) Limita inferioară a primului interval este: $u_i \approx x_1 - \omega / 2$.
3) Limita superioară a ultimului interval este: $u_{m+1} \approx x_n + \omega / 2$.
4) Clasele de grupare au amplitudini egale.

Se vor înregistra următorii parametri de grup:

1) Valoarea centrală a intervalului *i*: $x_{ci} = (u_i + u_{i+1}) / 2$.

2) Frecvenţa absolută simplă a_i pentru intervalul i este egală cu numărul valorilor $x_i \in [u_i, u_{i+1})$.
3) Frecvenţa absolută cumulată: $A_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$.
4) Frecvenţa relativă simplă: $f_i = {a_i}/{n}$.
5) Frecvenţa relativă cumulată: $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$.

2.4. Prelucrarea datelor prin metoda directă

Metoda directă utilizează datele primare măsurate direct pentru calculul indicatorilor caracteristicii.

Tabelul 1. Indicatori de localizare

Indicator	*Relaţia*	*Funcţia Matlab corespunzătoare*
Media aritmetică	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	`mean`
Media geometrică	$M_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$	`geomean`
Media pătratică	$M_{SQ} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	`norm/sqrt(n)`
Media armonică	$M_H = \frac{n}{\sum_{i=}^{n}\left({1}/{x_i}\right)}$	`harmmean`
Mediana	$Me = \begin{cases} \frac{x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}}{2}, n \text{ even} \\ x_{(n+1/2)}, n \text{ odd} \end{cases}$	`median`
Valoarea centrală	$x_c = {x_1 + x_n}/{2}$	-

Indicatorii calculaţi trebuie să verifice următoarea relaţie:

$$M_H < M_G < \bar{x} < M_{SQ}$$

Tabelul 2. Indicatori de variaţie

Indicator	*Relaţia*	*Funcţia Matlab corespunzătoare*
Dispersia estimată	$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(x - \overline{x}\right)^2$	-
Dispersia eşantionată (corectată)	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x - \overline{x}\right)^2$	-
Abaterea standard estimată	$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{\sigma}^2}$	-
Abaterea standard eşantionată	$s = \sqrt{s^2}$	`std`
Cuartilele (n par)	ordinul 1: $Q_1 = \frac{x_{\left(n/4\right)} + x_{\left(n/4+1\right)}}{2}$ ordinul 2: $Q_2 = \frac{x_{\left(n/2\right)} + x_{\left(n/2+1\right)}}{2}$ ordinul 3: $Q_3 = \frac{x_{\left(3n/4\right)} + x_{\left(3n/4+1\right)}}{2}$	`prctile (25% pentru ordinul 1, 50% pentru ordinul 2, 75% pentru ordinul 3)`
Intervalul intercuartilic	$I_q = Q_3 - Q_1$	`iqr`
Coeficientul de variaţie intercuartilică	$q = I_q / Q_2$	-
Cuartila de ordin α	Se alege x_i pentru care: $\frac{n-i}{n} \in \left[0.1 \div 0.5\right]$ Ordinul α al cuartilei: $\alpha = 100\left(1 - i/n\right)$ $Q_\alpha = Q = x_i$	-
Coeficientul de variaţie	$C_V = s / \overline{x}$	-

Tabelul 3. Indicatori de asimetrie

Indicator	*Relaţia*	*Funcţia Matlab corespunzătoare*
Asimetrie absolută	$a_s = \left\lvert \overline{x} - M_{SQ} \right\rvert$	-
Asimetrie relativă	$\alpha_s = a_s / s$	-

Coeficientul de asimetrie intercuartilic	$\alpha_{SQ} = 1 - 2\frac{Q_2 - Q_1}{Q_3 - Q_1}$	-

2.5. Prelucrarea datelor prin metoda indirectă

Metoda indirectă utilizează parametrii claselor de grupare consemnate în tabelul 3 de pe fişa de lucru.

Tabelul 4. Indicatori de localizare

Indicator	*Relaţia*	*Funcţia Matlab corespunzătoare*
Media aritmetică	$\overline{x}^{\bullet} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_i x_{ci} = \sum_{i=1}^{m} f_i x_{ci}$	-
Modul	$M_0 = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\omega$, unde: $L_1 = \max(a_i)$ este limita inferioară a intervalului modal $\Delta_1 = \max(a_i - a_{i-1})$ $\Delta_2 = \max(a_i - a_{i+1})$	-

Table 4. Indicatori de variaţie

Indicator	*Relaţia*	*Funcţia Matlab corespunzătoare*
Dispersia estimată	$\overline{\sigma}^{\bullet 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_i \left(x_{ci} - \overline{x}^{\bullet}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_i \delta_i^2$	-
Dispersia eşantionată corectată	$s^{\bullet 2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} a_i \left(x_{ci} - \overline{x}^{\bullet}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} a_i \delta_i^2$	-
Abaterea standard eşantionată:	$\overline{\sigma}^{\bullet} = \sqrt{\overline{\sigma}^{\bullet 2}}$	-
Abaterea standard corectată:	$s^{\bullet} = \sqrt{s^{\bullet 2}}$	-
Coeficientul de variaţie	$C_V^{\bullet} = \frac{s^{\bullet}}{\overline{x}^{\bullet}}$	-

Se va calcula *raportul Yule*:

$$\gamma = \frac{\left|\overline{x}^{\bullet} - M_0\right|}{\left|\overline{x} - Me\right|}.$$

2.6. Diagrame grafice

Folosind funcţia Matlab `plot`, se vor vizualiza atât diagrama frecvenţelor simple $a_i = \Phi_1(x_{ci})$ cât şi cea a frecvenţelor cumulate $A_i = \Phi_2(x_{ci})$. Se indică pe histograma frecvenţelor simple indicatorii de localizare calculaţi.

3. Indicatori de fiabilitate

Fiabilitatea se defineşte ca fiind probabilitatea ca un sistem să îşi îndeplinească funcţia specificată, în condiţii specificate clar şi pe o perioadă specificată de timp. *Funcţia de fiabilitate* este:

$$p(t) = \mathrm{Prob}(t > T) = R(t),$$

unde *p(t)* este probabilitatea de bună funcţionare, *R(t)* este fiabilitatea, iar *T* este o limită specificată a duratei de utilizare. Funcţia de fiabilitate este descrescătoare şi ia valori în intervalul [0, 1].

Indicatorii de fiabilitate exprimă într-un fel sau altul, cantitativ sau calitativ, fiabilitatea unui sistem.

3.1. Probabilitatea de bună funcţionare

Fie o populaţie statistică conţinând N_0 produse identice, urmărite de-a lungul intervalului *t*, pe durata căruia *n* produse se defectează, lăsând *N* produse în stare de funcţionare, cu $N = N_0 - n$. În acest caz, probabilitatea de bună funcţionare se calculează experimental cu formula:

$$R(t) = N(t) / N(0) = N / N_0 .$$

3.2. Probabilitatea de defectare

$$F(t) = \mathrm{Prob}(t < T) = n(t) / N(0)$$

Evident, probabilitatea de defectare este complementară probabilităţii de bună funcţionare:

$$F(t) = \frac{N(0) - N(t)}{N(0)} = 1 - \frac{N(t)}{N(0)} = 1 - R(t);\ F(t) + R(t) = 1$$

3.3. Intensitatea de defectare

Se consideră probabilitatea condiţionată *z* ca dispozitivul să se defecteze în intervalul infinitezimal de timp $(t, t + dt)$, în condiţiile în care dispozitivul a funcţionat corect de-a lungul duratei de timp *t*. Această probabilitate va fi dată de:

$z = z(t)dt$, unde *z(t)* este *intensitatea de defectare*, şi caracterizează *viteza de defectare*. Se poate arăta că:

$R(t)=e^{\int_0^t z(t)dt} \underset{z(t)=ct}{=} e^{-zt}$. *z(t)* este tipic aproape constant pe perioada de operare normală a produsului.

3.4. Timpul mediu de funcţionare

Este valoarea medie a vieţii unui anumit tip de dispozitiv. Fie un experiment cu *N(0)* dispozitive, şi notăm cu t_i timpul de bună funcţionare pentru al *i*-lea dispozitiv. Atunci timpul mediu de funcţionare poate fi calculat experimental cu formula:

$MTBF=\frac{1}{N(0)}\sum_{i=1}^{N(0)} t_i$. Se poate arăta că, pe durata de operare normală a dispozitivului:

$MTBF = 1/z$.

De notat că intensitatea de defectare este indicatorul de fiabilitate cantitativ preferat pentru dispozitive nerecuperabile, în timp ce durata medie de funcţionare este în principal utilizată pentru a descrie fiabilitatea dispozitivelor recuperabile.

4. Fiabilitate sistemelor în raport cu defecţiunile bruşte

4.1. Conexiunea serială

În general un echipament este proiectat pe baza primatului criteriului economic şi nu conţine, de regulă, componente redundante, astfel încât defectarea oricărei componente duce la incapacitatea de funcţionare a ansamblului. Din punctul de vedere al fiabilităţii, componentele unui astfel de ansamblu sunt conectate *în serie*, deşi conexiunea electrică ar putea fi de tip paralel (vezi figura 1). Dacă sistemul conţine *n* componente, fiecare caracterizată de către probabilitatea de bună funcţionare $r_i(t)$, şi în condiţiile în care defecţiunile bruşte ale componentelor sunt reciproc independente, atunci probabilitatea de bună funcţionare a sistemului este:

$$R(t)=\prod_{i=1}^{m} r_i(t);\ R(t)=\prod_{i=1}^{m}\exp\left[-\int_0^t z_i(t)dt\right]=\exp\left[-\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{m} z_i(t)\right)dt\right]$$

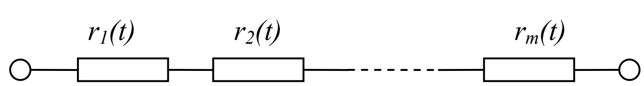

Figura 1. Conexiunea serială

Dacă intensităţile de defectare ale componentelor sunt constante, relaţia anterioară devine:

$R(t)=\exp\left(-t\sum_{i=1}^{m} z_i\right)$. Prin introducerea intensităţii z_s de defectare a sistemului compus, vom avea:

$R(t) = \exp(-z_s t) \Rightarrow z_s = \sum_{i=1}^{m} z_i$. Deci, fiabilitatea sistemului conexiune în serie este mai mică decât a oricăreia dintre componente.

4.2. Conexiunea paralel

Dacă elementele unui sistem compus sunt interconectate în aşa fel încât sistemul îşi pierde capacitatea de bună funcţionare doar dacă toate componentele cedează, se spune că aceste componente sunt conectate *în paralel* din punctul de vedere al fiabilităţii (vezi figura 2).

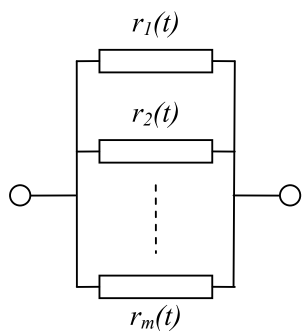

Figure 2. Parallel connection

Dacă defectările bruşte ale componentelor sunt independente, probabilitatea de funcţionare corectă a sistemului compus este dată de:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m} f_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m} \left[1 - r_i(t)\right].$$

Ca atare:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m} \left\{1 - \exp\left[-\int_0^t z_i(t)dt\right]\right\} \underset{zi=ct}{=} 1 - \prod_{i=1}^{m} \left[1 - \exp(-z_i t)\right]$$

Relaţia anterioară arată că fiabilitatea unui ansamblu de componente conectate în paralel este mai mare decât a oricărei componente individuale.

5. Probleme şi cerinţe

1. Fie un lot de test format din 50 de condensatoare de un anumit tip, cu capacitatea nominală de 10 µF. Măsurătorile efectuate asupra capacităţilor reale ale condensatoarelor din lot au rezultat în datele deja trecute în tabelul 1 al fişei de lucru. Efectuaţi analiza descriptivă a caracteristicii capacitate atât prin metoda directă cât şi prin cea indirectă.

2. Un anumit număr de magnetofoane au funcţionat 10000 de ore. În acest timp s-au efectuat 9 reparaţii. Care este timpul mediu de funcţionare şi intensitatea de defectare, dacă aceasta din urmă se consideră constantă?

3. Un lot de 100 de dispozitive este supus unui test cu durata de 5000 de ore. Rezultatele obţinute sunt următoarele: după 1000 de ore apare o defectare, după 1500 de ore alte două defectări, iar după 4000 de ore încă două. Care este intensitatea de defectare şi timpul mediu de funcţionare?

4. Un lot de 10 unităţi este testat până la defectarea tuturor unităţilor. Timpii de funcţionare pentru fiecare element în parte, până la defectare, sunt: 150, 120, 230, 275, 300, 245, 370, 220, 350 şi 400 de ore. Calculaţi timpul mediu între defecte.

5. Se dă probabilitatea de supravieţuire a unui dispozitiv, *R(t)* = 0.985119, pentru un interval de timp de 150 de ore. Care este intensitatea de defectare (presupusă constantă) şi care este probabilitatea de supravieţuire a aceluiaşi dispozitiv pentru un interval de timp de 500 de ore?

6. Se dă sistemul ale cărui componente, din punctul de vedere al fiabilităţii, sunt conectate conform schemei din figura 3. Se cunosc: r_{11} = 0.85, r_{12} = 0.87, r_{13} = 0.88; r_{21} = 0.93; r_{31} = 0.89, r_{32} = 0.90; r_{41} = r_{42} = r_{43} = 0.92; r_{51} = r_{52} = r_{53} = 0.85; r_{61} = 0.91, r_{62} = 0.94, r_{63} = 0.98. Să se calculeze fiabilitatea sistemului.

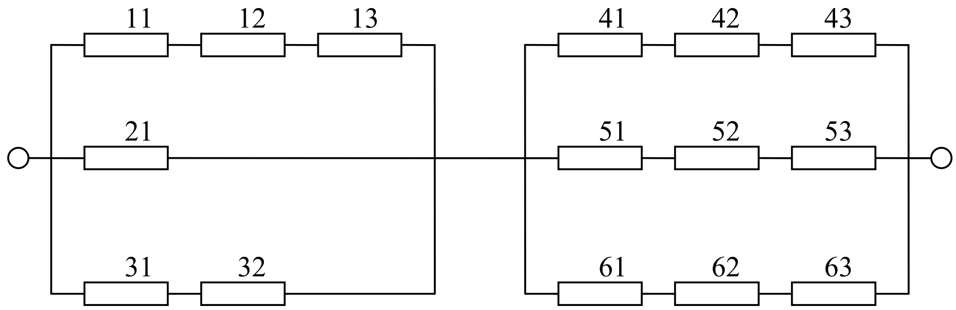

Figura 3. Sistemul compus pentru problema 6