Лекция 1

Множество, мощность множества

Под *множеством* мы будем понимать любую совокупность некоторых объектов, а сами объекты будем называть *элементами множества.* Чаще всего множества обозначаются большими латинскими буквами. Например, запись $A = \{x, y, z\}$ означает, что множество A состоит из трёх элементов: x, y и z.

Множества называются *равными*, если состоят из одних и тех же элементов. *Пустое множество* – это множество, не содержащее ни одного элемента.

Если множество состоит из конечного числа элементов, то можно говорить о количестве элементов этого множества. Например, множество A выше состоит из трёх элементов. Однако для множеств, состоящих из бесконечного числа элементов, понятие количества не имеет смысла, поэтому говорят о *мощности множества*, то есть понятие мощности обобщает понятие количества на случай бесконечных множеств. Для конечных множеств мощность и количество – слова - синонимы.

Множества могут задаваться с помощью описания свойств, которым удовлетворяют элементы этих множеств однако такой способ может привести к возникновению противоречий (см. парадокс Рассела). Одним из способов разрешить эти противоречия является введение аксиом (см. систему аксиом Цермело – Френкеля). Подробнее об этом можно прочитать в книге К. Куратовского и А. Мостовского "Теория множеств".

Основные числовые множества

Система аксиом Цермело – Френкеля позволяет построить все основные множества, необходимые для нашего курса. Мы не останавливаемся на подробном построении, а интересующиеся могут прочитать подробности в книге Э. Ландау "Основы анализа".

Перечислим основные числовые множества, с которыми мы встретимся в курсе анализа.

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Мы считаем все его свойства известными из школьного курса. Более подробно о его определении (помимо книги Э. Ландау) можно прочитать в книге В. А. Зорича "Математический анализ", часть 1 (определение даётся с помощью индуктивного множества). Во многих учебниках по соответствующей тематике можно увидеть построение множества натуральных чисел с помощью аксиом Пеано. Отметим, что сумма и произведение натуральных чисел снова является натуральным числом, а разность и частное – необязательно. Кроме того, если рассмотреть любое непустое множество, состоящее из некоторых (необязательно всех) натуральных чисел (то есть *подмножество*) натуральных чисел, то в нём всегда найдётся наименьший элемент. Все перечисленные свойства легко выводятся из определения натуральных чисел через индуктивное множество и из аксиом Пеано (см. В. А. Зорич "Математический анализ", часть 1). Для наших целей удобнее считать, что наименьшим элементом множества натуральных чисел является число 1, хотя в некоторой литературе принято начинать натуральные числа с числа 0.

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, состоящее из всех натуральных чисел, числа нуль и чисел, противоположных натуральным. Результаты всех арифметических операций над целыми числами, кроме деления, снова дают целое число.

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Рациональное число представляет собой отношение двух целых чисел, то есть обыкновенную дробь вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}/\{0\}$, то есть одно и то же рациональное число может быть представлено в виде бесконечного числа дробей, например,

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-7}{-14} = \dots .$$

При этом все эти дроби соответствуют единственной точке на числовой прямой (построение числовой прямой мы обсудим в следующей лекции). Чтобы избежать неоднозначности, мы назовём рациональным числом число, представимое в виде $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ и $(m,n) = 1$. Например, если исходить из нашего определения, то $\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{2}$ – рациональные числа, а $\frac{3}{6}$ – нет, так как $(3,6) > 1$.

Все свойства обыкновенных дробей и арифметических действий над ними мы считаем известными из школьного курса и будем опираться на них в наших рассуждениях. Множество рациональных чисел замкнуто относительно всех арифметических операций: сумма, разность произведение и частное двух рациональных чисел является рациональным числом (при этом, на 0 делить запрещено).

Простые геометрические конструкции дают примеры чисел, которые не являются рациональными. Например, в прямоугольном треугольнике с единичными катетами длина гипотенузы, как следует из теоремы Пифагора, равна числу, квадрат которого равен 2. Как мы сейчас увидим, это число не является рациональным.

Пример 1. *Рассмотрим уравнение $x^2 = 2$. Предположим, что у этого уравнения есть рациональное решение, т.е. $x = \frac{p}{q}$, где дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Тогда $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$, откуда следует, что число p^2 чётное, а тогда и число p чётное, т. е. $p = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Поэтому верно равенство $4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$, что означает чётность числа q. Это означает, что дробь $\frac{p}{q}$ сократима вопреки нашему предположению. Таким образом, число, квадрат которого равен 2, не является рациональным, а $x^2 = 2$ – это пример уравнения, не имеющего решения в рациональных числах.*

Число $\sqrt{2}$ относится ко множеству иррациональных чисел, для множества которых можно в некоторых источниках встретить обозначение $\mathbb{I}$.

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, которое является объединением множества рациональных и иррациональных чисел. Подробнее об этом множестве и его свойствах мы напишем ниже. Есть несколько способов построения действительных чисел: с помощью бесконечных дробей, с помощью сечений Дедекинда и с помощью пределов последовательностей. Мы не будем подробно останавливаться на построении вещественных чисел, о котором можно прочитать во многих учебниках по математическому анализу. На множестве вещественных чисел можно определить все основные арифметические операции, о чём ниже мы также поговорим чуть подробнее. При этом множество вещественных чисел, как и множество рациональных, оказывается замкнутым относительно всех арифметических операций. Доказательства этих фактов мы приводить не будем.

Очевидно, справедлива следующая цепочка включений: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Функции

Определение 1. *Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называют множество всевозможных пар (x, y), где первый элемент x каждой пары принадлежит X, а второй ее элемент y принадлежит Y.*

Определение 2. *Функцией f, определённой на множестве X и принимающей значения во множестве Y, называется подмножество декартова произведения $X \times Y$, если* *выполнено следующее условие:* $\forall x \in X\ \exists!$ *пара* $(x, y) \in f$. *При этом пишут* $y = f(x)$. *Элемент* y *называют образом* x, *элемент* x *– прообразом элемента* y, *для функции принято обозначение* $f : X \to Y$.

Множество $f(X)$ *всех элементов* $f(x) \in Y$ *называется образом множества* X. *Короче, это записывается так:*

$$f(X) = \{y \in Y | y = f(x),\ x \in X\},$$

а само X *называется прообразом множества* $f(X)$.

В курсе мы будем изучать в основном функции, определённые на числовых множествах и принимающие числовые значения. Определим некоторые основные виды функций, которые будем использовать в дальнейшем.

Определение 3. *1) Функция* $f : X \to Y$ *называется сюръекцией (накрытием), если для всякого* $y \in Y$ *существует такое* $x \in X$, *что* $y = f(x)$.
2) Функция $f : X \to Y$ *называется инъекцией (вложением), если из равенства* $f(x) = f(y)$ *следует, что* $x = y$.
3) Функция, являющаяся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется биекцией или взаимно-однозначным отображением.

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая задаётся равенством $f(x) = x$, является биекцией (проверьте!), а функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством $g(x) = x^2$, – нет, так как из равенства $a^2 = b^2$ не следует равенство $a = b$. Можно также сказать, что g не является сюръекцией. Функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством $h(x) = x^3 - x$, даёт пример сюръекции, не являющейся инъекцией, а функция $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $p(x) = e^x$, является инъекцией, но не сюръекцией (проверьте это!).

Равномощные множества

Определение 4. *Множества* A *и* B *называются равномощными или эквивалентными, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Другими словами, можно биективно отобразить одно множество на другое. Обозначение:* $A \sim B$ *(читается: "*A *эквивалентно* B*").*

Например, множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y, z\}$ равномощны, так как, например, в соответствие 1 мы можем поставить x, в соответствие $2 - y$, а в соответствие $3 - z$. Вообще, любые два конечных множества с одинаковым числом элементов являются равномощными.

Отметим простейшие свойства равномощных множеств:

$$1)\ A \sim A;\ 2)\ A \sim B \Rightarrow B \sim A;\ 3)\ A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C.$$

Выполнение трёх указанных условий означает, что $\sim$ задаёт *отношение эквивалентности* на множестве всех рассматриваемых множеств (подробнее об отношении эквивалентности будет рассказано в курсе дискретной математики).

Приведём пример двух бесконечных равномощных множеств.

Предложение 1. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

Доказательство. Покажем, как присвоить каждому рациональному числу свой номер так, чтобы любые два разные числа имели разные номера и каждое натуральное число являлось номером какого-нибудь рационального.

Назовём высотой рационального числа $\frac{m}{n}$ величину $h := |m| + n$. Так как дробь несократима, а $n \in \mathbb{N}$, то при фиксированном h знаменатель n принимает не более, чем $h - 1$ значение, а при каждом фиксированном n для m возможны только два варианта $\pm(h-n)$, поэтому различных рациональных чисел с фиксированной высотой h не более, чем $2h$.

Будем нумеровать рациональные числа по возрастанию высоты, а при фиксированной высоте – по возрастанию самих чисел. Число высоты $h = 1$ всего одно – это $\frac{0}{1}$, и оно получит номер 1. Высоту $h = 2$ имеют два рациональных числа: $\frac{-1}{1}$ и $\frac{1}{1}$, они получают номера 2 и 3 соответственно. Высота $h = 3$ будет у чисел $\frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}$, и эти числа получат номера 4, 5, 6 и 7 соответственно. Ясно, что между натуральными и рациональными числами таким образом будет установлено взаимно-однозначное соответствие. $\square$

Определение 5. *Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется счётным множеством.*

Таким образом, показано, что множество рациональных чисел счётно. В дальнейшем мы увидим, что существуют бесконечные несчётные множества.

Принцип полноты. Действительные числа.

Мы выпишем набор свойств, которым должны удовлетворять действительные числа. Далее можно предъявить разные способы конкретного множества, удовлетворяющего всем этим свойствам, а уже это множество назвать вещественными числами. Например в книге Э. Ландау это сделано с помощью сечений Дедекинда. Можно строить действительные числа с помощью аксиомы Архимеда и критерия Коши (оба факта встретятся в нашем курсе). Однако мы рассмотрим множество всех бесконечных десятичных дробей и убедимся, что они удовлетворяют всем выписанным свойствам (правда, проверим выполнение лишь некоторых из них).

Рассмотрим теперь числовые множества A и B.

Определение 6. *Говорят, что множество A лежит левее множества B, если $a \leq b$ для всяких $a \in A$ и $b \in B$.*

Например, если множество A состоит из всех рациональных чисел, меньших 10, а B состоит из всех рациональных чисел, больших 10, то A лежит левее B.

Определение 7. *Пусть множество A лежит левее B. Тогда говорят, что число c разделяет множества A и B, если $a \leq c$ и $c \leq b$ для всех $a \in A, b \in B$.*

Например, число 10 разделяет указанные выше множества.

Теперь зададимся важным вопросом: если взять два подмножества множества рациональных чисел, одно из которых лежит левее другого, то всегда ли найдётся рациональное число, разделяющее два этих подмножества? Отрицательный ответ на этот вопрос будет ясен из следующего примера.

Пример 2. *Пусть $A = \{a : a > 0, a^2 \leq 2\}$, а $B = \{b : b > 0, b^2 \geq 2\}$. Тогда A лежит левее B, т.к. для всех $a \in A, b \in B$ имеем $0 \leq b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, откуда, в силу того, что $a + b > 0$, следует, что $0 \leq b - a$. Докажем,что если число c разделяет множества A*

и B, то оно удовлетворяет равенству $c^2 = 2$, (при этом из примера 1 будет следовать, что c не является рациональным). Предположим противное и заметим, что $1 \leq c \leq 2$, т. к. 1 лежит множестве A, а 2 – во множестве B.

Возможны два случая. Если $c^2 < 2$, то существуют числа, большие c, квадрат которых также меньше 2 (поэтому c не может разделять множества A и B). Действительно, рассмотрим число $c + \frac{2-c^2}{5}$. Тогда $\left(c + \frac{2-c^2}{5}\right)^2 = c^2 + 2c\frac{2-c^2}{5} + \left(\frac{2-c^2}{5}\right)^2 < c^2 + 4\frac{2-c^2}{5} + \frac{2-c^2}{5} = 2$. Таким образом, в этом случае c не разделяет наши множества. Если же $c^2 > 2$, то найдутся числа, меньшие c, квадрат которых также больше 2. Например, возьмём число $c - \frac{c^2-2}{4}$. При возведении его в квадрат получим $c^2 - 2c\frac{c^2-2}{4} + \left(\frac{c^2-2}{4}\right)^2 > c^2 - 4\frac{c^2-2}{4} = 2$.

Таким образом, если найдётся число c, разделяющее множества A и B, то обязательно $c^2 = 2$.

Если допустить, что в этом примере множества A и B состоят лишь из рациональных чисел, то, как мы видим, может не найтись рационального числа, разделяющего два подмножества множества рациональных чисел, одно из которых лежит левее другого.

Важным свойством числового множества является принцип полноты, о котором речь идёт в следующем определении.

Определение 8. *Говорят, что для числового множества выполняется принцип полноты, если для любых двух его подмножеств, одно из которых лежит левее другого, найдётся элемент, разделяющий эти множества.*

Множество действительных чисел, которое мы обозначим $\mathbb{R}$, должно удовлетворять ряду условий. Во-первых, сумма и произведение любых элементов этого множества снова является элементом этого множества. Кроме того, выполнены следующие свойства.

1) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по сложению*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

2) Для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по сложению*:

$$a + b = b + a.$$

3) Существует *нейтральный элемент относительно операции сложения* $0 \in \mathbb{R}$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a + 0 = a$.

4) Для всякого $a \in \mathbb{R}$ найдётся *противоположный элемент* $b \in \mathbb{R}$, такой, что $a + b = 0$ (его обычно обозначают через $-a$).

5) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по умножению*:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

6) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по умножению*:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

7) Существует *нейтральный элемент относительно операции умножения* $1 \in \mathbb{R}$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 1 = a$.

8) Для всякого $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ найдётся *обратный элемент* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, такой, что $a \cdot b = 1$ (его обычно обозначают через a^{-1}).

Отметим, что эти свойства означают, что множество действительных чисел является *абелевой группой по сложению*, а множество всех действительных чисел без нуля является *абелевой группой по умножению.*

9) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *дистрибутивности*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Множества, на котором выполнены эти девять свойств, называется *полем.* Помимо этих девяти свойств есть ещё два.

10) Для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ либо $a \leq b$, либо $b \leq a$, то есть любые два элемента $\mathbb{R}$ можно сравнить (множество, где сравнимы любые два элемента, называется *линейно упорядоченным*). Если $a \leq b$, а $b \leq c$, то $a \leq c$. При этом выполнены два свойства:
а) для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, таких, что $a \leq b$ выполнено $a + c \leq b + c$;
б) для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R},\ c \geq 0$ таких, что $a \leq b$ выполнено $a \cdot c \leq b \cdot c$.

11) На множестве вещественных чисел выполнен принцип полноты.

Отметим, что первые десять свойств выполнены и на множестве рациональных чисел, а вот свойство 11, как следует из примера 2, не выполнено.

Для вещественных чисел определена функция $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Неплохим упражнением будет доказать следующее **неравенство треугольника**, справедливое для всех вещественных чисел: $|a + b| \leq |a| + |b|$; кроме того, можно вывести из этого неравенства полезное следствие, также справедливое для любых действительных a и $b : ||a| - |b|| \leq |a + b|$. Последнее неравенство можно получить из неравенства треугольника, используя следующее свойство модуля: $|x| = \max\{x, -x\}$.

Ниже мы проверим, что некоторые из свойств 1 – 11 выполнены на множестве всех бесконечных десятичных дробей, которые, таким образом, и будут составлять множество $\mathbb{R}$. Конечно, на множестве таких дробей выполнены все указанные свойства, но подробная проверка этого достаточно громоздка и в нашем курсе не проводится, однако интересующиеся могут найти подробности в литературе по математическому анализу (см. Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н.Чубариков “Лекции по математическому анализу”).

Бесконечные десятичные дроби

Из школьного курса математики известно, что любое рациональное число представляется в виде бесконечной периодической десятичной дроби (см., например, учебник по алгебре для 7 класса под редакцией С. М. Никольского). Например, $5 = \frac{5}{1} = 5.(0)$, $\frac{1}{6} = 0.1(6)$, $\frac{15}{7} = 2.(142857)$. Заметим, что если знаменатель рационального числа представляет собой произведение степеней чисел 2 и 5, то такое рациональное число является периодической дробью, период которой может быть записан как с помощью числа 0, так и с помощью числа 9. Например, $0.5 = 0.5(0) = 0.4(9)$. Мы условимся всегда использовать период из числа 0, то есть запретим периоды, состоящие из числа 9. При таком ограничении мы можем утверждать, что любое рациональное число единственным образом представляется в виде периодической десятичной дроби. Верно и обратное (можно попробовать доказать это в качестве упражнения): любой периодической десятичной дроби соответствует некоторое рациональное число.

Кроме периодических десятичных дробей, бывают, конечно, и непериодические. Например, такой является дробь 0.101101110.... Этой дроби не соответствует никакое рациональное число. Числа, записываемые в виде непериодических десятичных дробей, называются иррациональными. Объединение множества рациональных и иррациональных чисел является множеством действительных (или вещественных) чисел, то есть **вещественное число** – это бесконечная (периодическая или непериодическая) десятичная дробь.

Нам нужно проверить выполнение свойств 1 – 11. Мы не будем подробно останавливаться на всех свойствах, а рассмотрим только некоторые из них. Отметим ещё раз, что проверку остальных можно найти в литературе, указанной в описании курса.

Для десятичных дробей мы будем использовать запись

$$\pm a_0.a_1a_2a_3..., a_0 \in \mathbb{N}_0, a_j \in \{0, 1, 2, ..., 9\}, j \in \mathbb{N}.$$

Напомним, что дроби с числом 9 в периоде мы не рассматриваем. Число $\pm 0.000...$ – это число 0. Числа со знаком плюс (обычно отбрасываемым) называются положительными, а со знаком минус – отрицательными. На множестве десятичных дробей вводится отношение порядка, при котором число 0 больше любого отрицательного числа и меньше любого положительного, а положительные числа сравниваются следующим образом: $a_0.a_1a_2a_3... \leq b_0.b_1b_2b_3...$ если и только если эти числа равны или существует такой разряд k, что

$$a_j = b_j \ (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$$

и $a_k < b_k$ (лексикографический порядок). Этот порядок естественным образом переносится на отрицательные дроби. Таким образом, про любые две различные десятичные дроби можно сказать, какая из них больше, то есть множество всех таких дробей является линейно упорядоченным.

На множестве десятичных дробей можно определить сложение и умножение, а также доказать, что все свойства этих операций выполнены. Для примера ниже мы покажем, как определить операцию сложения, но для этого нам понадобится следующая важная теорема, в которой устанавливается справедливость свойства 11 для десятичных дробей.

Теорема 1. *На множестве бесконечных десятичных дробей с введённым выше отношением порядка выполнен принцип полноты.*

Доказательство. Пусть подмножество A множества вещественных чисел лежит левее подмножества B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B – только из неотрицательных, то эти множества разделяет 0.

Если в A есть положительные числа, то B состоит только из положительных чисел, поэтому минимальное значение целой части дробей, принадлежащих множеству B, не меньше 0. Выберем среди всех неотрицательных целых чисел, с которых начинаются элементы B, минимальное и обозначим его через b_0. Далее рассмотрим все элементы множества B, начинающиеся с числа b_0, и выберем из чисел в первых разрядах после запятой минимальный. Обозначим его b_1. Теперь рассмотрим все элементы множества B, начинающиеся с b_0, b_1, и выберем минимальное из чисел во вторых разрядах (пусть b_2) и т.д.

Построим число $c = c_0.c_1c_2c_3...$, где $c_0 = b_0, c_1 = b_1$ и т. д. По построению $c \leq b$ для всякого элемента b из B.

С другой стороны, если бы нашёлся такой элемент $a \in A$, что $c \leq a$ и $c \neq a$, то существовал бы разряд k, для которого $a_k > c_k = b_k$, и $a_0 = c_0 = b_0, ..., a_{k-1} = b_{k-1}$, что означало бы наличие в A элементов, которые больше элементов из B. Тогда мы бы получили противоречие с тем, что A лежит левее B. Поэтому $a \leq c$ для любого $a \in A$, и c разделяет множества A и B.

Если множество B содержит отрицательные элементы, то все элементы множества A отрицательны. Тогда мы рассмотрим все неположительные целые числа, с которых начинаются элементы множества A, выберем из них максимальный, затем выберем все те элементы из A, которые начинаются с этого максимального и возьмём минимальное число в первом разряде после запятой у этих элементов и т.д. Действуя по аналогии со случаем, когда в A есть положительные элементы, снова построим число c, разделяющее элементы множеств A и B. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Контрольный вопрос: почему при построении числа c не может возникнуть период из девяток?

Обратим ещё внимание, что доказано лишь существование числа c, но ничего не сказано о том, единственно ли такое число. Будет полезно проверить, что для множеств из примера 2 такое число единственно, а также привести примеры множеств, для которых разделяющих чисел больше одного. Существуют ли пары подмножеств во множестве действительных чисел, одно из которых левее другого, и для которых существует конечное число разделяющих элементов, большее 1? В дальнейшем мы будем называть десятичную дробь действительным или вещественным числом.

Принцип полноты вещественных чисел позволяет определить операции сложения и умножения вещественных чисел. Для примера остановимся на определении суммы двух положительных вещественных чисел.

Итак, пусть требуется сложить вещественные числа $a = a_0.a_1a_2a_3...$ и $b = b_0.b_1b_2b_3...$. Рассмотрим множества

$$A = \{a_0 + b_0, a_0.a_1 + b_0.b_1, a_0.a_1a_2a_3 + b_0.b_1b_2b_3, ...\}$$

и

$$B = \{a_0 + 1 + b_0 + 1,\ a_0.a_1 + 0.1 + b_0.b_1 + 0.1,\ a_0.\ a_1a_2 + 0.01 + b_0.b_1b_2 + 0.01,\\ a_0.a_1a_2a_3 + 0.001 + b_0.b_1b_2b_3 + 0.001, ...\}.$$

Множество A лежит левее множества B, поэтому найдётся разделяющий эти множества элемент c. Докажем, что такой элемент единственен. Действительно, если бы существовали хотя бы два различных таких элемента (обозначим второй через c'), то, считая для определенности, что $c' < c$, мы бы смогли найти такой разряд k, что $c'_k < c_k$, а $c_0 = c'_0, ..., c_{k-1} = c'_{k-1}$. Пусть $n > k$ – первый разряд после k, такой, что $c'_n \neq 9$. Тогда была бы верна цепочка неравенств:

$$a_0.a_1...a_na_{n+1} + b_0.b_1...b_nb_{n+1} \leq c' \leq c_0.c'_1c'_2...c'_{k-1}c'_k...c'_{n-1}9 \leq c_0.c_1c_2...c_k - 10^{-n} \leq$$

$$\leq a_0.a_1...a_na_{n+1} + b_0.b_1...b_nb_{n+1} + 2 \cdot 10^{-n-1} - 10^{-n}.$$

Однако $a_0.a_1...a_na_{n+1} + b_0.b_1...b_nb_{n+1} \geq a_0.a_1...a_na_{n+1} + b_0.b_1...b_nb_{n+1} + 2 \cdot 10^{-n-1} - 10^{-n}$, поэтому получается противоречие. Таким образом, разделяющий множества A и B элемент единственен. По определению мы полагаем $c = a + b$. Произведение положительных чисел определяется аналогично, после чего все эти действия переносятся на отрицательные числа.

Докажем ещё одно полезное свойство действительных чисел.

Предложение 2. ***(Аксиома Архимеда).*** *Для любого положительного вещественного числа a существует такое натуральное число n, что $na \geq 1$ (с помощью кванторов: $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \wedge a > 0 \exists\, n \in \mathbb{N}:\ na \geq 1$).*

Доказательство. При $a \geq 1$ подойдёт $n = 1$. Если $0 < a < 1$, то

$$a = 0.\underbrace{0...0}_{k-1 \text{ ноль}} a_k a_{k+1}...,\ a_k \neq 0.$$

Тогда при $n = 10^k$ получим $10^k a = a_k.a_{k+1}a_{k+2}... \geq 1$. □

Из аксиомы Архимеда вытекает полезное следствие.

Лемма 1. *1)* $\forall x,\ y \in \mathbb{R}:\ x < y\ \exists\ m/n \in \mathbb{Q}:\ x < \frac{m}{n} < y$; *2)* $\forall x,\ y \in \mathbb{R}:\ x < y\ \exists\ c \in \mathbb{I}:$ $x < c < y$.

Доказательство. 1) $y - x > 0$, поэтому в силу аксиомы Архимеда существует такое число $k \in \mathbb{N}$, что $k(y - x) > 1$, а тогда $2k(y - x) > 2$, поэтому между числами $2kx$ и $2ky$ найдётся число $m \in \mathbb{Z}$ (например, $m = [2ky] - 1$, где $[2ky]$ – наибольшее целое число, не превосходящее $2ky$). Полагая $2k = n$, имеем $nx < m < ny$, что равносильно $x < \frac{m}{n} < y$.
2) Из 1) следует, что найдётся такое рациональное число p/q, что $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{p}{q} < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Тогда $c = \frac{p\sqrt{2}}{q}$. □

Более просто свойство 1 формулируется так: между любыми двумя различными действительными числами лежит рациональное число. В свойстве 2 речь идёт об иррациональном числе.

Из примера 1 следует, что существуют уравнения с рациональными коэффициентами, не имеющие решения в рациональных числах, например, $x^2 = 2$. Корень этого уравнения не является рациональным. Это наблюдение как раз демонстрирует необходимость расширения поля рациональных чисел до поля вещественных чисел (определение поля содержится, например, в книге Э. Б. Винберга "Курс алгебры"). Однако можно сказать, что и вещественных чисел недостаточно для того, чтобы все уравнения с рациональными коэффициентами имели решения. Примером такого уравнения может служить $x^2 + 1 = 0$. Поле действительных чисел допускает дальнейшее расширение, позволяющее решать уравнения, аналогичные приведённому выше. Такое расширение (поле комплексных чисел) будет изучаться в курсе линейной алгебры. Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.