Депекторский Богдан

ШАД МТС
математика

Домашнее задание 2

$\boxed{1}$ найти обратную матрицы (любым методом) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

- воспользуемся формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

, где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A

- найдем определитель матрицы (методом Крамера)

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(-3-(-4)) - 3(1-10) + (2-15) = 5\cdot 1 - 3\cdot(-9) + (-13) = \underline{19}$$

- найдем алгебраические дополнения A_{ij}, воспользуемся формулой

$\bar{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot \det \hat{A}$, где $\bar{A}_{ij}$ - алгебраическое дополнение элемента $a_{ij} \in A$,

$\det \hat{A}$ - матрица, полученная исключением i-ой строки и j-ого столбца из матрицы A

$$\bar{A}_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3+4 = 1$$

$$\bar{A}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-9) = 9 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2-15 = -13$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} \cancel{-}3 & \cancel{-2}\,1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(+3 \cancel{+4} - 2) = -1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(10+15) = -25 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6+3 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-10-1) = 11 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-15-3) = -18$$

- подставляем все в формулу (1) и получаем ответ

$$A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$ где $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$

и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = B$

Решение:

• матричное уравнение имеет вид

$AXB = B = EB$, где E - единичная матрица

$\Rightarrow AX = E$, то есть $X = A^{-1}$

• аналогично задаче $\boxed{1}$ найдем обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1-6) + (3+4) =$$

$$= 2 \cdot (-7) + 7 = -7$$

$$\bar{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\bar{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$\bar{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\bar{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-2+6) = -4$$

$$\bar{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\bar{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2$$

$$\bar{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -11$$

$$\bar{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1-6) = 7$$

$$\bar{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \\ -11 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \\ -11 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ найти ранг матрицы при различных значениях параметра:

<u>Решение:</u>

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

• приведем матрицу к верхнетреугольному виду :)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-\frac{\lambda}{3}(1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4-\frac{\lambda}{3} & 10-\frac{\lambda}{3} & 1-\frac{\lambda}{3} \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-\frac{1}{3}(1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4-\frac{\lambda}{3} & 10-\frac{\lambda}{3} & 1-\frac{\lambda}{3} \\ 0 & \frac{20}{3} & \frac{50}{3} & \frac{5}{3} \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cancel{(3)-\frac{2}{3}(1)}\ \cancel{(4)-2(1)}\ (4)-\frac{2}{3}(1)}$$

HELP

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4-\frac{\lambda}{3} & 10-\frac{\lambda}{3} & 1-\frac{\lambda}{3} \\ 0 & \frac{20}{3} & \frac{50}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\leftrightarrows(3)\ ?} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{20}{3} & \frac{50}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 4-\frac{\lambda}{3} & 10-\frac{\lambda}{3} & 1-\frac{\lambda}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 20 & 50 & 5 \\ 0 & 12-\lambda & 30-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-5(4)} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12-\lambda & 30-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 12-\lambda & 30-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

методом длительных вдумчивых размышлений

используем второй ряд для приведен третьего к более простому виду:

вычислим $\cancel{\left(\frac{12-\lambda}{4}\right)(2)-(3)}$

$$(3)-\left(\frac{12-\lambda}{4}\right)(2)$$

$$(3) = (0\ \ 12-\lambda\ \ 30-\lambda\ \ 3-\lambda) - \frac{12-\lambda}{4}(0\ \ 4\ \ 10\ \ 1) = \left(0\ \ 12-\lambda-(12-\lambda)\ \ 30-\lambda-\frac{10(12-\lambda)}{4}\ \ 3-\lambda-\frac{12-\lambda}{4}\right)$$

$$= \left(0\ \ 0\ \ 30-\lambda-\frac{10(12-\lambda)}{4}\ \ 3-\lambda-\frac{12-\lambda}{4}\right) = \left(0\ \ 0\ \ 1{,}5\lambda\ \ -\frac{3\lambda}{4}\right)$$

$$30-\lambda-\frac{10(12-\lambda)}{4} = 30-\lambda-\frac{120-10\lambda}{4} = 30-\lambda-30+\frac{10\lambda}{4} = -\lambda+\frac{10\lambda}{4} = 1{,}5\lambda$$

$$3-\lambda-\frac{12-\lambda}{4} = 3-\lambda-3+\frac{\lambda}{4} = -\lambda+\frac{\lambda}{4} = -\frac{3\lambda}{4}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}5\lambda & -\frac{3\lambda}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим два случая значения λ:

1) $\lambda \neq 0$
2) $\lambda = 0$, и найдем ранг матрицы

1) $\lambda \neq 0$, тогда матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}5\lambda & -\frac{3\lambda}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

третья строка не нулевая => первые три строки линейно независимы => ранг равен 3

2) $\lambda = 0$, тогда матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

третья строка обнуляется =>
только первые две строки линейно независимы
=> ранг матрицы равен ~~дв~~ 2

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}5\lambda & -\frac{3\lambda}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3, & \text{если } \lambda \neq 0 \\ 2, & \text{если } \lambda = 0 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ исследовать систему и найти решение в зависимости от значения параметра

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9 \end{cases}$$

<u>Решение:</u>

• представим систему уравнений в матричном виде $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -6 & -\lambda \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

• составим матрицу $(A|b)$ и попробуем привести ее к ~~верхне треугольн~~ ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & -\lambda & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(2)-2(1) \\ (3)-(1) \\ (4)-(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -10 & -\lambda-2 & 10 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & -\lambda-2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+10(2)}$$

$$\longrightarrow \cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & -\lambda-2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \xrightarrow{(3)+10(2)} \cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

• исходя из приведенной ступенчатой формы матрицы можем записать систему уравнений и решить ее:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ (8-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

система совместна $\Rightarrow (8-\lambda)x_3 = 0$ истинно для $\forall x_3$, то есть $(8-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 8$.

Рассмотрим $x_3 = t$, где t - любое действительное число, тогда

$x_2 + t = -1 \Rightarrow x_2 = -1 - t$

$x_1 + 4x_2 + 2t = -1 \Rightarrow x_1 + 4(-1-t) + 2t = -1 \Rightarrow x_1 = -1 - 2t + 4 + 4t \Rightarrow x_1 = 3 + 2t$

Таким образом, решения системы в параметрической форме:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -1-t \\ t \end{pmatrix}, \text{ где } t \text{ - любое действительное число}$$

$\boxed{5}$ найти собственные значения и вектора для данной матрицы:

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} = A$$

- для нахождения собственных значений матрицы A необходимо решить характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, где λ - собственное значение матрицы

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7+ & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- найдем определитель по методу Крамера:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -7-\lambda & 8 \\ -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & -7-\lambda \\ 6 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((-7-\lambda)^2 + 56\right) + 3(28-4\lambda)\cdot 48 + 4\left(-28 : (-42-6\lambda)\right)) =$$

$$= (1-\lambda)\left((-7-\lambda)^2 + 56 + (84 - 12\lambda)\cdot 48 + - 112(-42-6\lambda)\right) =$$

$$= (1-\lambda)\left(49 + \underline{14\lambda} - \lambda^2 + 56 + 84\cdot 48 - \underline{12\cdot 48\lambda} + 112\cdot 42 + \underline{112\cdot 6\lambda}\right) =$$

$$= (1-\lambda)\left(-\lambda^2 + 110\lambda\right.$$