Дененторский Богдан

ШAD МТС

математика

Домашнее задание 1

1 Зная, что $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=5$, $(\widehat{a,b})=\frac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении коэфициента α векторы $\vec{p}=\alpha\bar{a}+17\bar{b}$ и $\bar{q}=3\bar{a}-b$ окажутся перпендикулярными

Решение:

- векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ перпендикулярны => их скалярное произведение равно 0
- найдем скалярное произведение p и q (выразим α)

$$(p,q)=(\alpha a+17b,\ 3a-b)=(\alpha a,3a)+(17b,3a)-(\alpha a,b)-(17b,b)=$$

$$=3\alpha|a|^2+(51-\alpha)|a||b|\cos(\widehat{a,b})-17|b|^2=0$$

$$\alpha(3|a|^2-|a||b|\cos(\widehat{a,b}))=17|b|^2-51|a||b|\cos(\widehat{a,b}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=\frac{17|b|^2-51|a||b|\cos(\widehat{a,b})}{3|a|^2-|a||b|\cos(\widehat{a,b})}$$

$$\alpha=\frac{17|5|^2-51|2||5|\cos\frac{2\pi}{3}}{3|2|^2-|2||5|\cos\frac{2\pi}{3}}= \quad \ldots =40$$

Ответ: 40

2 Пусть G - множество всех вектор-столбцов линейного пространства R^n с положительными элементами, то есть

$$G = \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n,\ x_i > 0,\ i = 1,2,\dots n \right\}.$$

Проверить, является ли линейным пространством множество G, если операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \\ \dots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix} \quad и \quad \alpha x = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix}$$

Решение:

· необходимо проверить выполнение свойств линейного пространства
- операции сложение и умножение на скаляр (в условии)
- замкнутость (сложение)

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, тогда $x + y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n)$. Например, для $x_1 = 1$ и $y_1 = -1$ получаем $1 \cdot (-1) = -1 \notin G$ - замкнутость не выполняется
- замкнутость (умножение на скаляр)

Пусть α - любое число, $\alpha x = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots x_n^\alpha)$.
Это не верно, так как умножение вектора на скаляр равно: $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

исходя из не выполнения свойств линейного пространства делаем вывод, что G таковым не является

Ответ: G не является линейным пространством

$\boxed{3}$ Используя определение, доказать, что для любых векторов x, y, z и чисел α, β, φ векторы $\alpha x - \beta y, \varphi y - \alpha z, \beta z - \varphi x$ линейно зависимы

<u>Решение:</u>

- составим систему из векторов в условии и с помощью элементарных преобразований попробуем свести ее к E

$$\begin{matrix} \alpha x - \beta y \\ \varphi y - \alpha z \\ \beta z - \varphi x \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \varphi & -\alpha \\ -\varphi & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} :\alpha \\ :\varphi \\ :(-\varphi) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha}{\varphi} \\ 1 & 0 & -\frac{\beta}{\varphi} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha}{\varphi} \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha} & -\frac{\beta}{\varphi} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha}{\varphi} \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha}{\varphi} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha}{\varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- так как в ходе преобразований одна из строчек обнулилась делаем вывод, что ... - <u>линейно зависимы</u>

$\boxed{4}$ Проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, найти координаты вектора x в этом базисе. По известному координатному вектору y_e найти вектор y:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, y_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

<u>Решение:</u>

- составим матрицу перехода и с помощью элементарных преобразований попробуем свести ее к единичной

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{успех}$$

$\Rightarrow$ векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис в $\mathbb{R}^3$

- разложим вектор x по базису e: $x_e = A^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
- найдем вектор y: $y = A \cdot y_e = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства V, заданного следующим образом: пространство многочленов $p(x) \in P_4$ таких, что $p(1)+p(-1)=0$

Решение:

• $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4$

тогда $p(1)+p(-1) = 2(a_0 + a_2 + a_4) = 0$

$a_0 + a_2 + a_4 = 0$

$a_0 = -a_2 - a_4$ $\Rightarrow$ $p(x) = (-a_2 - a_4) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$p(x) = a_1 x + a_2 (x^2 - 1) + a_3 x^3 + a_4 (x^4 - 1)$

$\Rightarrow$ базис пространства V будут многочлены:

x, x^2-1, x^3, x^4-1

• размерность пространства V равна 4

Ответ: $\{x, x^2-1, x^3, x^4-1\}$, $\dim(V) = 4$