Лекция 10

Линейное программирование

Задача линейного программирования

Целевая функция

$$\sum^{\Sigma} c_j x_j \to \max(min)$$

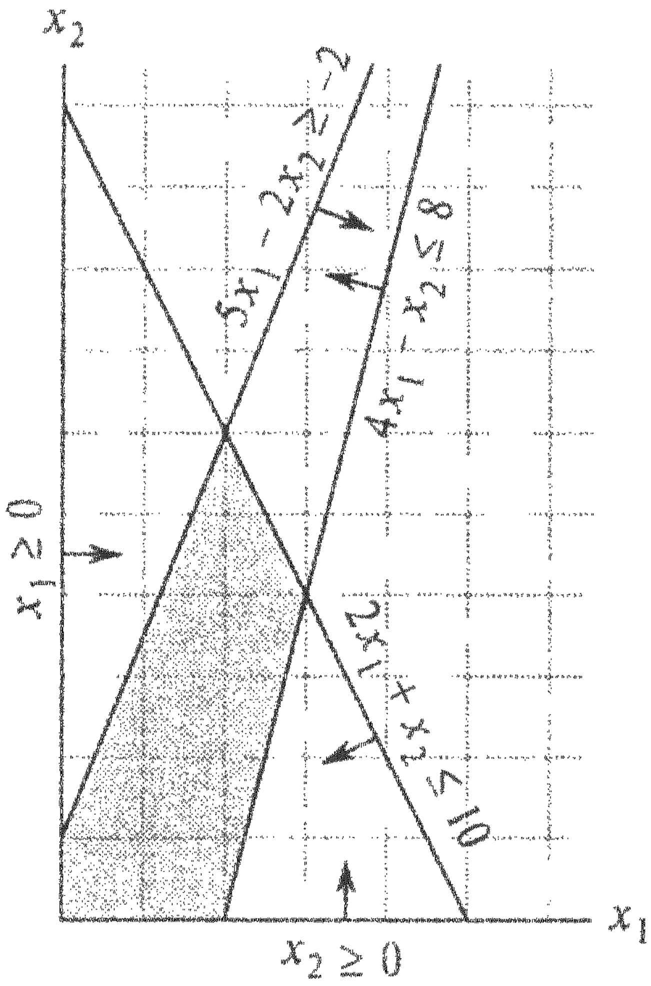
Ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j \left(=, \begin{matrix}\leq \\ \geq\end{matrix}\right) b_i, i = 1, \ldots, m.$$

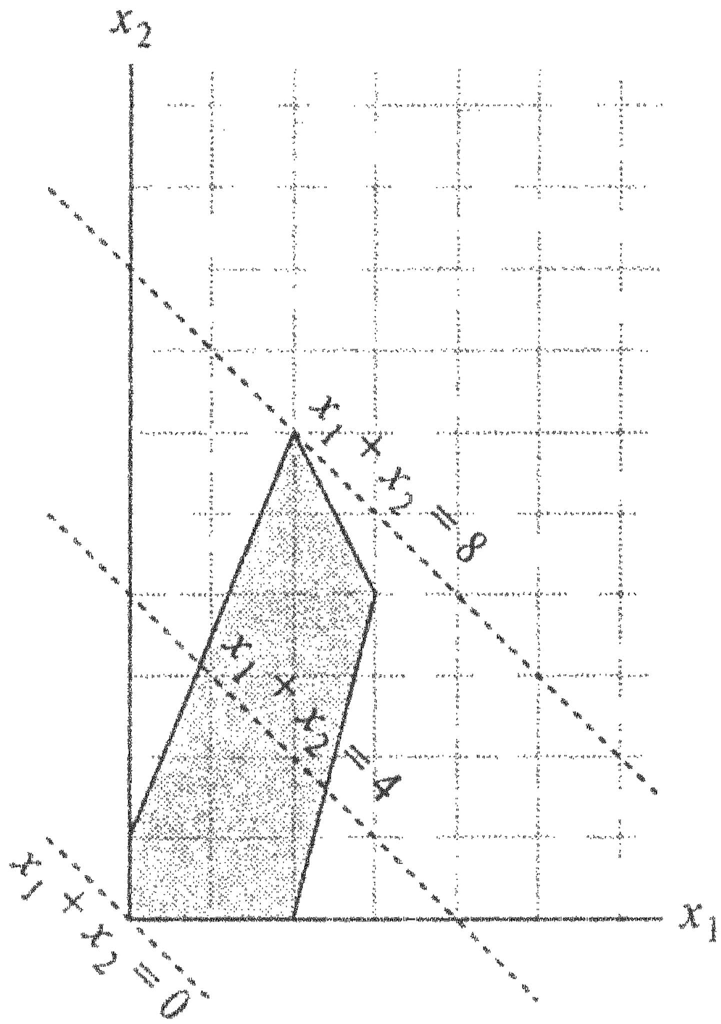
Максимизировать $x_1 + x_2$

при условиях

$$
\begin{aligned}
&4x_1 - x_2 \le 8\\
&2x_1 + x_2 \le 10\\
&5x_1 - 2x_2 \ge -2\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$


x_2
$5x_1 - 2x_2 \geq -2$
$4x_1 - x_2 \leq 8$
$x_1 \geq 0$
$2x_1 + x_2 \leq 10$
$x_2 \geq 0$
x_1

а)


x_2
$x_1 + x_2 = 8$
$x_1 + x_2 = 4$
$x_1 + x_2 = 0$
x_1

б)

Стандартная форма задачи

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1,\ldots,m;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Каноническая форма задачи

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\ldots,m;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Способы преобразования формы

1. Если задача на max, то … .

2. Если ограничение $\le b_i$, а надо $\ge b_i$, то … .

3. Если ограничение $\le b_i$, а надо $= b_i$, то … .

4. Если ограничение $= b_i$, а надо $\ge b_i$, то … .

5. Если x_j–свободная, то … .

Способы преобразования формы

1. Если задача на max, то умножаем целевую функцию на -1.

2. Если ограничение $\leq b_i$, а надо $\geq b_i$, то умножаем ограничение на -1.

3. Если ограничение $\geq b_i$, а надо $= b_i$, то вычитаем y_i, заметим $y_i \geq 0$.

4. Если ограничение $= b_i$, а надо $\geq b_i$, то добавим огр. $\leq b_i$ и $\geq b_i$,.

5. Если x_j–свободная, то представим $x_j = x_j^1 - x_j^2$, заметим что $x_j^1, x_j^2 \geq 0$.

Симплекс-метод работает с канонической формой!

Симплекс-метод

Применяя метод Гаусса можно привести уравнения ограничений к виду.

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & & +a'_{1,m'+1}x_{m'+1}+ & \cdots & +a'_{1,n}x_n & = b'_1 \\
& x_2 & +a'_{2,m'+1}x_{m'+1}+ & \cdots & +a'_{2,n}x_n & = b'_2 \\
& \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & = \cdots \\
& x_{m'} & +a'_{m',m'+1}x_{m'+1}+ & \cdots & +a'_{m',n}x_n & = b'_{m'}
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Случай I. Вам это удалось, и все правые части неотрицательны. Тогда вектор $\left(b'_1;\ldots;b'_{m'};0;\ldots;0\right)$ является допустимым решение задачи.

Определение. Назовем вектор $\left(b'_1;\ldots;b'_{m'};0;\ldots;0\right)$ *базисным допустимым решением*. Переменные $\left(x_1;\ldots;x_{m'}\right)$ будем называть *базисными* переменными, а остальные *свободными* переменными.

Любая базисная переменная выражается через свободные.

$$x_i = b_i' - \sum_{j=m'+1}^{n} a_{ij}' x_j.$$

Подставив эти выражения в целевую функцию, получим её выражение через свободные переменные.

$$z = b_0' + \sum_{j=m'+1}^{n} c_j' x_j.$$

Перепишем это равенство следующим образом.

$$-z + \sum_{j=m'+1}^{n} c_j' x_j = b_0''.$$

Будем работать с системой, приведенной к базисному допустимому виду. Тогда штрихи можно опустить.

Обычно задача линейного программирования записывается с помощью симплекс-таблицы, в которую заносятся только коэффициенты.

	b	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n
$-z$	b_0	0	0	…	0	$a_{0,m+1}$	…	$a_{0,n}$
x_1	b_1	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	$a_{1,n}$
x_2	b_2	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	$a_{2,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	$a_{m,n}$

Величина b_0 равна значению целевой функции на базисном решении, взятом с отрицательным знаком.

С-Т *прямо допустима*, если $b_i \geq 0$, $i=1,\ldots,m$.

С-Т *двойственно допустима*, если $a_{o,j} \geq 0$, $j=m+1,\ldots,n$.

Лемма 1. Если $a_{0,j} \geq 0$, $j=m+1,\ldots,n$, то базисное допустимое решение оптимально.

Доказательство. Рассмотрим произвольные значения свободных переменных. Тогда $-z = b_0 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{0j} x_j \leq b_0$. И, следовательно $z \geq -b_0$.

Пусть для некоторого s величина $a_{0,s}$ отрицательна. Тогда, увеличив значение s-ой свободной переменной на ε, мы получим изменение целевой функции

$$z = -b_0 + a_{0,s}\varepsilon < -b_0.$$

Лемма 2. Если $a_{i,s} \leq 0$, $i=1,\ldots,m$, для некоторого столбца s, то значение целевой функции не ограничено снизу.

Доказательство. Поскольку все $a_{i,s} \leq 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ величины $x_i=b_i-a_{is}\varepsilon \geq 0$ удовлетворяют условию и построенное решение допустимо, но тогда величина $z=-b_0+a_{0s}\varepsilon$ не ограничена снизу. И задача не имеет решения.

Замечание. Если симплекс-таблица прямо и двойственно допустима, то соответствующее базисное решение является оптимальным.

Если величина $a_{i,s} > 0$, то из условия неотрицательности переменных получаем ограничение $\varepsilon \le \frac{b_i}{a_{is}}$.

Положим $\varepsilon = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid i - \text{базисная переменная и } a_{is} > 0 \right\}$. При таком выборе ε уменьшение целевой функции максимально. Кроме того как минимум одна базисная переменная становится равной 0 и, с помощью метода Гаусса, её можно удалить из базиса введя вместо неё в базис переменную s.

	b	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_s	…	x_n
$-z$	b_0	0	…	0	…	0	$a_{0,m+1}$	…	$a_{0,s}<0$	…	$a_{0,n}$
x_1	b_1	1	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	$a_{1,s}$	…	$a_{1,n}$
x_2	b_2	0	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	$a_{2,s}$	…	$a_{2,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	b_i	0	…	1	…	0	$a_{i,m+1}$	…	$a_{i,s}>0$	…	$a_{i,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	$a_{m,s}$	…	$a_{m,n}$

Переход к новой симплекс-таблице

	b	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_s	…	x_n
$-z$	$b_0 - a_{0s}\dfrac{b_i}{a_{i,s}}$	0	…	$-a_{0s}\dfrac{1}{a_{i,s}}$	…	0	$a_{0,m+1} - a_{0s}\dfrac{a_{i,m+1}}{a_{i,s}}$	…	0	…	$a_{0,n} - a_{0s}\dfrac{a_{i,n}}{a_{i,s}}$
x_1	$b_1 - a_{1s}\dfrac{b_i}{a_{i,s}}$	1	…	$-a_{1s}\dfrac{1}{a_{i,s}}$	…	0	$a_{1,m+1} - a_{1s}\dfrac{a_{i,m+1}}{a_{i,s}}$	…	0	…	$a_{1,n} - a_{1s}\dfrac{a_{i,n}}{a_{i,s}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_s	$\dfrac{b_i}{a_{i,s}}$	0	…	$\dfrac{1}{a_{i,s}}$	…	0	$\dfrac{a_{i,m+1}}{a_{i,s}}$	…	1	…	$\dfrac{a_{i,n}}{a_{i,s}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	$b_m - a_{ms}\dfrac{b_i}{a_{i,s}}$	0	…	$-a_{ms}\dfrac{1}{a_{i,s}}$	…	1	$a_{m,m+1} - a_{ms}\dfrac{a_{i,m+1}}{a_{i,s}}$	…	0	…	$a_{m,n} - a_{m,s}\dfrac{a_{i,n}}{a_{i,s}}$

Симплекс-метод

0 шаг. Построить с.-т., соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица должна быть прямо допустимой).

1 шаг. Если с.-т. двойственно допустима, то КОНЕЦ (опт. решение).

2 шаг. Иначе выбрать ведущий столбец s такой что $a_{i,s} < 0$, $s \geq 1$;

3 шаг. Если $\{i | a_{is} > 0, i \geq 1\} \neq \varnothing$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{a_{r0}}{a_{rs}} = min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{is}} \middle| a_{is} > 0, i \geq 1\right\},$$

Иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности ц.ф.).

4 шаг. Преобразовать с.-т., заменить базисную переменную x_r на x_s и перейти на *шаг 1*.

Метод искусственного базиса

Случай II. Вам не удалось найти базисное допустимое решение.

шаг 0. Построить симплекс-таблицу для новой задачи:

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to min,$$

$$a_i x + x_{n+i} = b_i, i = 1, \dots, m;$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n + m.$$

Допустимое решение состоит из искусственных переменных. Выражая базисные через небазисные запишем целевую функцию

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i x)$$

шаг 1. Решить построенную задачу симплекс-методом.

Задача всегда разрешима. (да?)

Получена прямо и двойственно допустимая таблица.

шаг 2. Если оптимальное решение $\xi^*>0$, то КОНЕЦ (исходная задача не имеет допустимых решений).

Иначе удалить из симплекс-таблицы все столбцы, соответствующие искусственным переменным (x_j, $j>n$), и нулевую строку.

шаг 3. Если базисными переменными являются только переменные исходной задачи (x_j, $j\leq n$), то перейти на шаг 7.

шаг 4. Выбрать строку r, соответствующую искусственной переменной x_r.

шаг 5. Если в строке существует ненулевой элемент, то выполнить элементарное преобразование с этим ведущим элементом и перейти на шаг 3.

шаг 6. Если в строке только нули, то удалить ее и перейти на шаг 3. (строки исходной матрицы линейно зависимы)

шаг 7. Добавить нулевую строку в симплекс-таблицу, записав в нее коэффициенты целевой функции исходной задачи, выраженные через небазисные переменные. Получена прямо допустимая симплекс-таблица исходной задачи.

шаг 8. Решить задачу используя симплекс-метод.

В исходную задачу добавили искусственные переменные и решили задачу симплекс-методом. В результате получилась такая симплекс таблица. Что делать дальше?

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$-\xi$	-1	1	1	1	0	0	2	0	1
x_5	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	$-1/2$	0	1	$1/2$	0	$-1/2$
x_7	1	-1	-1	-1	0	0	-1	1	0
x_4	0	2	-3	1	1	0	0	0	1