Лекция 5

Электрические схемы переменного тока:

Резонансные цепи,

Характеристики резонансного контура.

Последовательный LC контур: резонанс напряжений,

Параллельный LC контур: резонанс токов.

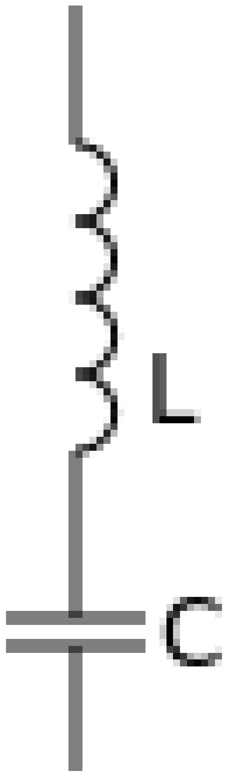
LC контур

Рассмотрим схему в которой будут оба реактивных элемента и катушка индуктивности и электрический конденсатор.

Найдем комплексное сопротивление последовательно соединенных L и C, как показано на рисунке.

Такое соединение называется последовательный LC контур

Последовательный LC контур

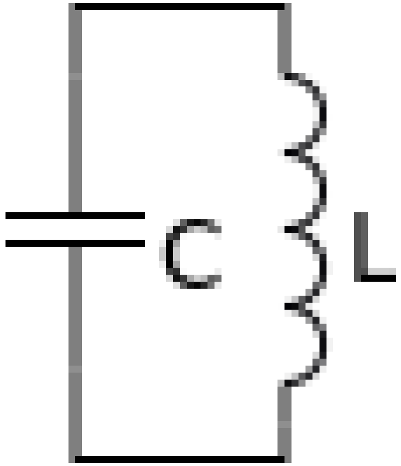


$$Z = Z_L + Z_C = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\frac{1-\omega^2 LC}{\omega C}$$

Видно что:

- Комплексное сопротивление чисто реактивное
- Оно обращается в нуль при ω=1/LC
- При частотах много выше ω=1/LC комплексное сопротивление индуктивное
- При частотах много меньше ω=1/LC комлексное сопротивление емкостное

Параллельный LC контур



$$Z = \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{L}{C} \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = j \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

Видно что:

•Комплексное сопротивление чисто реактивное

•Оно обращается в бесконечность при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

•Комплексная проводимость обращается в нуль при той же частоте

•При частотах много выше $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ комлексное сопротивление емкостное

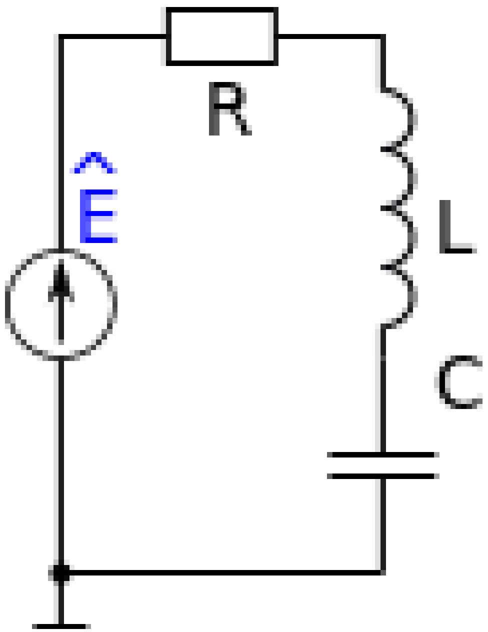
•При частотах много выше - индуктивное

Резонанс в последовательном LC контуре

Рассмотрим теперь следующую схему:

Источник переменного напряжения частотой ω нагружен на последовательный LC контур. Так как мы знаем, что комплексное сопротивление на некоторой частоте обратится в нуль, то на этой частоте значение будет иметь любое последовательно включенное сопротивление, как бы мало оно ни было (это может быть сопротивление проводов, внутреннее сопротивление источника напряжения)

Резонанс в последовательном LC контуре

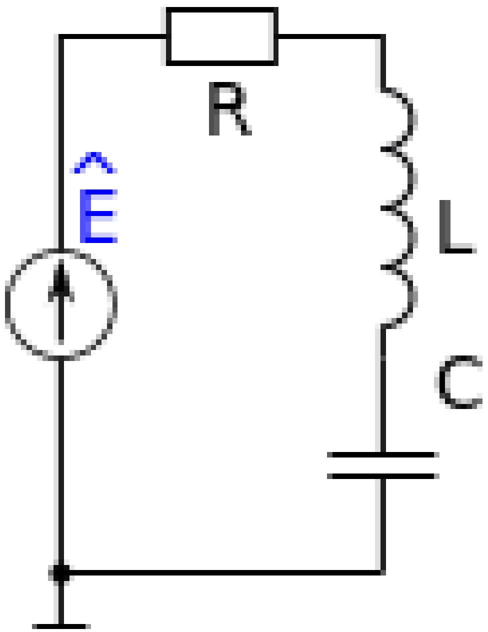


Найдем ток в контуре

$$\hat{I}=\frac{\hat{E}}{R+Z_{LC}}=\frac{\hat{E}}{R+\frac{j(1-\omega^2LC)}{\omega C}}=\frac{\hat{E}\omega C}{\omega RC+j(1-\omega^2LC)}=\frac{\hat{E}\omega C[\omega RC-j(1-\omega^2LC)]}{\omega^2R^2C^2+(1-\omega^2LC)^2}$$

$$\boxed{\left|\hat{I}\right|=\frac{E\omega C}{\sqrt{\omega^2R^2C^2+(1-\omega^2LC)^2}}}$$

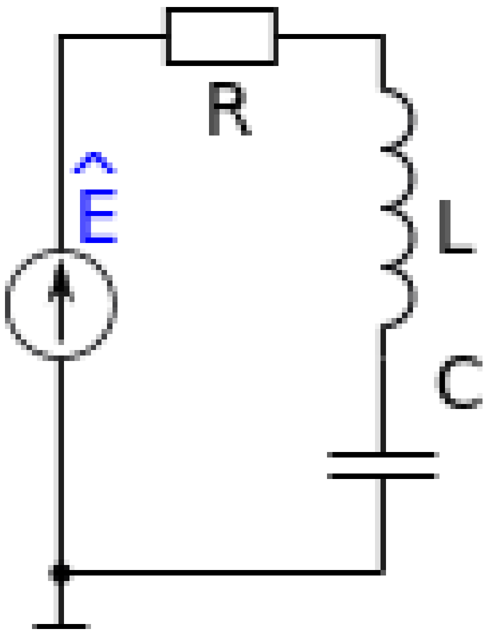
Резонанс в последовательном LC контуре



Частота $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ **, на которой реактивная составляющая сопротивления равна нулю называется резонансной частотой**

$$\hat{I} = \frac{\hat{E}}{R + Z_{LC}} = \frac{\hat{E}}{R + \frac{j(1-\omega^2 LC)}{\omega C}} = \frac{\hat{E}\omega C}{\omega RC + j(1-\omega^2 LC)} = \frac{\hat{E}\omega C[\omega RC - j(1-\omega^2 LC)]}{\omega^2 R^2 C^2 + (1-\omega^2 LC)^2}$$

Резонанс в последовательном LC контуре



При резонансе напряжение суммарное напряжение на реактивной части сопротивления равно нулю.

$$U_{LC} = 0, U_R = E, \hat{I} = \frac{\hat{E}}{R}$$

Теперь посмотрим на напряжения на отдельных элементах:

$$\widehat{U}_L = j\omega_0 L \frac{\hat{E}}{R} = j\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\hat{E}}{R}$$

$$\widehat{U}_C = -j\frac{1}{\omega_0 C}\frac{\hat{E}}{R} = -j\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\hat{E}}{R}$$

Резонанс в последовательном LC контуре

Величина $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = x_C = x_L$называется **Характеристическим сопротивлением (волновым сопротивлением)** контура.

Тогда напряжение на элементах можно выразить так:

$$U_L = U_C = \frac{\rho}{R}E = QE$$

Величина Q – называется **добротностью** контура.

Добротность показывает насколько при резонансной частоте напряжение на каждом из реактивных элементов превышает напряжение прикладываемое к контуру.

Резонанс в последовательном LC контуре

Рассмотрим теперь величину мгновенного значения энергии

$$W_L = \frac{LI^2(t)}{2} = \frac{LI_m^2}{2} sin^2\omega t$$

$$W_C = \frac{CU^2(t)}{2} = \frac{C}{2}[\frac{1}{C}\int I(t)dt]^2 = \frac{C}{2}[\frac{1}{C}\int I_m sin\omega t\, dt]^2 = \frac{I_m^2}{2C\omega^2} cos^2\omega t$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; W_L = \frac{LI_m^2}{2} sin^2\omega_0 t, W_C = \frac{LI_m^2}{2} cos^2\omega_0 t$$

Резонанс в последовательном LC контуре

Найдем суммарную мгновенную мощность на реактивных элементах $W_X = W_L + W_C = \frac{LI_m^2}{2}(sin^2\omega_0 t + cos^2\omega_0 t) = \frac{LI_m^2}{2}$

Видим что суммарная мгновенная мощность W_X не изменяется во времени. Т.е. энергия перекачивается между индуктивностью и емкостью, запасаясь сначала в виде энергии магнитного поля, затем в виде энергии электрического поля и так по кругу.

Потери энергии на активном сопротивлении за период – интеграл мгновенной мощности

Резонанс в последовательном LC контуре

Найдем суммарную мгновенную мощность на реактивных элементах $W_X = W_L + W_C = \frac{LI_m^2}{2}(sin^2\omega_0 t + cos^2\omega_0 t) = \frac{LI_m^2}{2}$

Видим что суммарная мгновенная мощность W_X не изменяется во времени. Т.е. энергия перекачивается между индуктивностью и емкостью, запасаясь сначала в виде энергии магнитного поля, затем в виде энергии электрического поля и так по кругу.

Потери энергии на активном сопротивлении за период – интеграл мгновенной мощности $P = \int_T W_R dt = \int_T RI_m^2 sin^2\omega_0 t dt = \frac{RI_m^2}{2}T$

Резонанс в последовательном LC контуре

Отношение реактивной энергии к активным потерям:

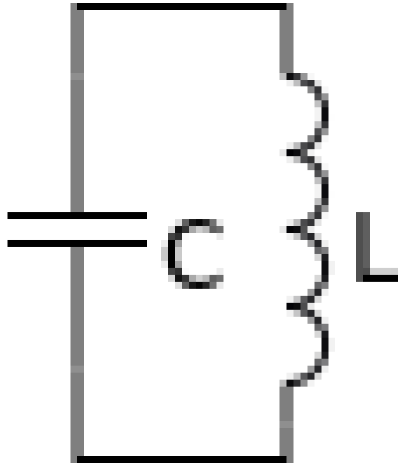
$$\frac{W_X}{W_R} = \frac{1}{2\pi} Q$$

Тогда можно сделать другое определение добротности :

$$\mathrm{Q} = \omega_0 \frac{W_X}{P}, \text{где } P - \text{средняя мощность за период}$$

Параллельный LC контур

$$Z = \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{L}{C}\frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = j\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}$$



Видно что:

•Комплексное сопротивление чисто реактивное

•Оно обращается в бесконечность при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

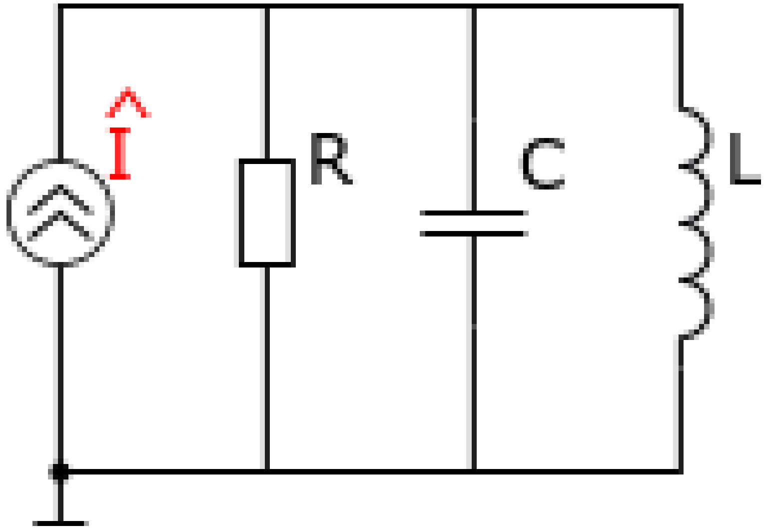
•Комплексная проводимость обращается в нуль при той же частоте

•При частотах много выше $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ комлексное сопротивление емкостное

•При частотах много выше - индуктивное

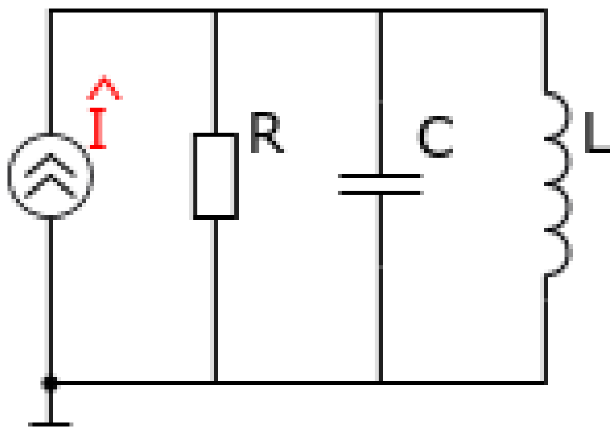
Резонанс в параллельном LC контуре

Так как комплексное сопротивление идеального параллельного LC контура стремится на резонансной частоте к бесконечности, то при рассмотрении такого контура становятся существенными любые по величине параллельно подключенные сопротивления.



Так же можно заметить, что так как проводимость LC контура становится чисто активной на частоте резонанса, то решения для параллельного контура будут аналогичны полученным для последовательного с заменой сопротивления на проводимость, а тока на напряжение.

Резонанс в параллельном LC контуре



Найдем напряжение на контуре

$\hat{U} = \hat{I}Y = \hat{I}(g - jb) = \frac{1}{R} - j(\frac{1}{\omega L} - \omega C)$

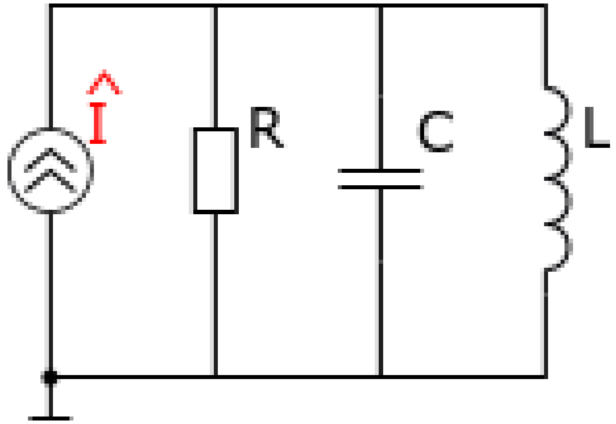
при $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ проводимость $\frac{1}{R}$

Аналогично последовательному LC контуру введем обозначения Q – добротность, и

ρ – характеристическое (волновое) сопротивление контура

$$Q = \frac{R}{\rho} = \frac{1}{g\rho} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$$

Резонанс в параллельном LC контуре



В данных обозначениях получим выражение полностью дуальное последовательному контуру

$$\hat{U} = \hat{I}/Y = \hat{I}/\frac{1}{R}\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] = \hat{I}/\frac{1}{R}[1 + j\xi]$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ резонансная частота,

$\xi = Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})$ – обобщенная расстройка

При этом ток на L и C по отдельности в Q раз больше:

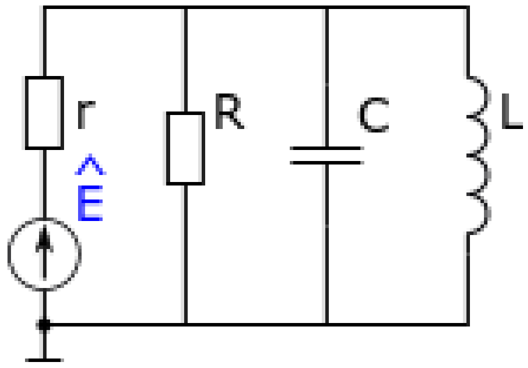
$$I_L = {}^{U}/_{j\omega L} = -j\hat{I}\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = -j\hat{I}Q, I_C = Uj\omega C = j\hat{I}Q$$

Резонанс в параллельном LC контуре

В параллельном LC контуре на резонансной частоте наблюдается резонанс токов.

Резонанс в параллельном LC контуре

Параллельный LC контур запитанный от источника напряжения:

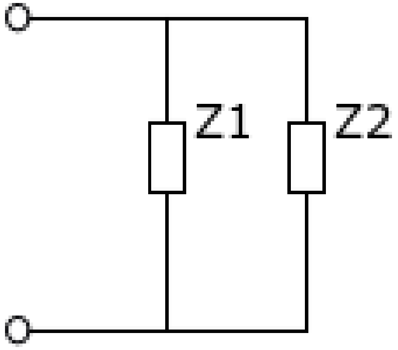


$$Q' = \frac{r||R}{\rho} = \frac{rR}{\rho(r+R)} = Q\,\frac{1}{1+\frac{r}{R}}$$

При таком включении для сохранения добротности необходимо выполнить условие R>>r

Резонанс в параллельном LC контуре

Рассмотрим теперь параллельный контур в общем виде:



$$Z_1 = R_1 + jX_1, Z_2 = R_2 + jX_2$$

$$Y = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{R_1 - jX_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{R_2 - jX_2}{R_2^2 + X_2^2}$$

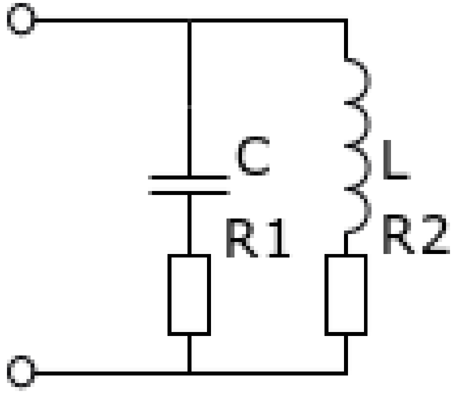
$$Y = \left[\frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2}\right] - j\left[\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2}\right] = \mathrm{g} - \mathrm{jb}$$

Условие резонанса b=0. Если $R_1 \ll |X_1|, R_2 \ll |X_2|$

То условие резонанса $\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} = 0, X_1 = -X_2,$ при этом $Y_0 = \frac{R_1 + R_2}{X^2}$

Резонанс в параллельном LC контуре

Частный случай, контур с потерями в L и C:

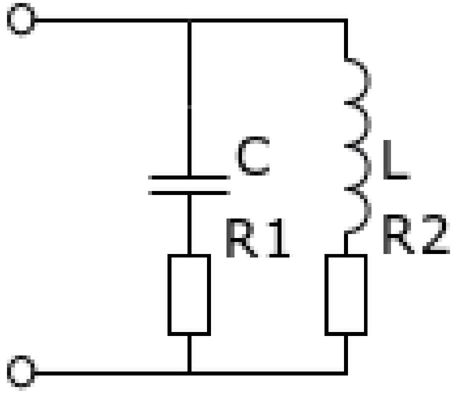


$$\frac{\omega_0 L}{R_1^2+\omega_0^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R_2^2+1/(\omega_0^2 C^2)} = 0;$$

$$\omega_0^2 LC(R_2^2 - LC) = R_1^2 - \frac{L}{C}$$

Введем $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, имеем $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}$

Контур с потерями



Имеем 4 основных варианта:

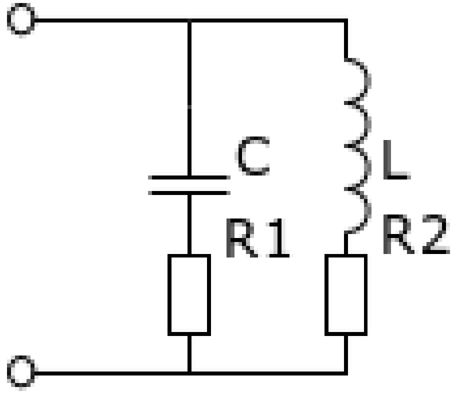
1) $R_1, R_2 \ll \rho$, тогда $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, g_0 = \frac{R_1+R_2}{\rho^2}$

2) $\frac{\rho^2-R_1^2}{\rho^2-R_2^2}$<0, резонанса нет

3) $R_1 = \ R_2 = \rho\ , \omega_0 - \text{любое}$

4) $R_1 = \ R_2, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Контур с потерями

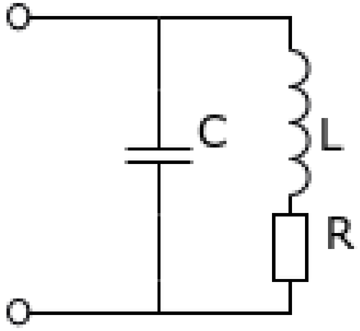


Энергетические соотношения

$$Q = \omega_0 \frac{W_{x\,max}}{P} = \omega_0 \frac{LI_m^2}{2} \frac{1}{\frac{U_m^2}{2} g_0} = \omega_0 \frac{L}{g_0 |Z_1|^2}$$

$$Q \approx \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R_1 + R_2}, R_1, R_2 \ll \rho$$

Контур с потерями



Еще один частный случай: потери только в L

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R^2}{\rho^2}}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{g_0|Z_1|^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{\frac{R}{R^2+\omega_0^2L^2}\cdot(R^2+\omega_0^2L^2)} = \frac{\rho}{R}$$

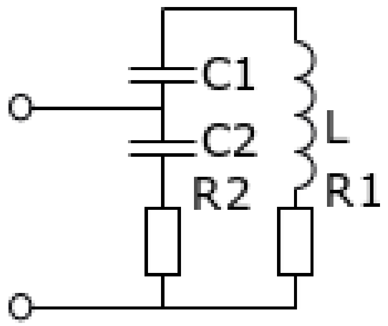
Сопротивление при малой расстройке.

$D = \omega\sqrt{LC}, Z = \frac{1}{j\frac{CD}{\sqrt{LC}}+1/[j\frac{LD}{\sqrt{LC}}+R]} = \rho\frac{D\rho-jR}{DR-j\rho(1-D^2)}$, примем Q>>1,

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}\ , \mathrm{QD} \gg 1;\ \delta = \frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} = D-1$$

$$Z = \rho\frac{Q(\delta+1)-j}{\delta+1-jQ(1-(\delta+1)^2)} = \frac{\rho Q}{1+j2Q\delta}$$

Частичное включение контура



Частичное включение через конденсатор

считаем Q>>1, тогда резонанс $X_1 = -X_2$

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1} - \frac{1}{\omega_0 C_2} = 0, \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}}}$$

$$Y_0 = R_1 + R_2(\omega_0 C_2)^2$$

$$R = R_1 + R_2, C = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2},$$

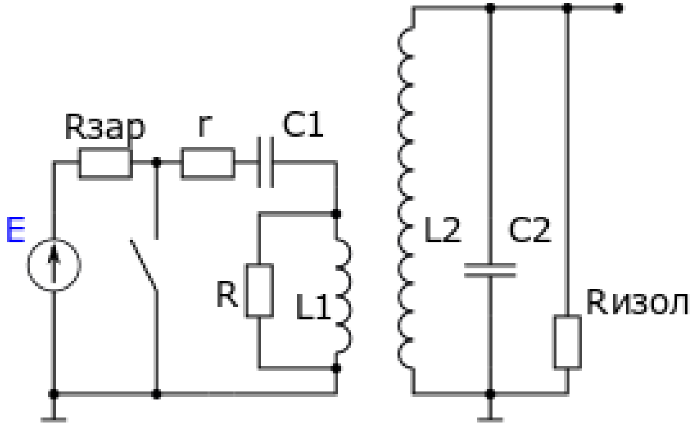
$$p = \frac{C}{C_2} - \text{коэффициент включения контура}$$

$$Y_0 = R(\frac{C}{p})^2/\sqrt{LC}^2 = \frac{R}{\rho^2 p^2} = \frac{1}{p^2 R Q^2};\ R_0 = p^2 R Q^2$$

Использование явления резонанса

Резонансный трансформатор

(характерный пример – трансформатор Тесла)

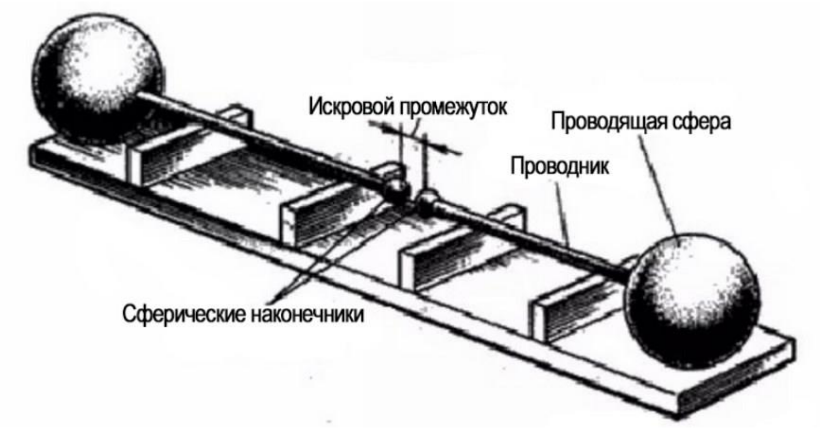


Использование явления резонанса

Радиоустройства:

Антенна, селекция диапазона.

Излучатель Герца:

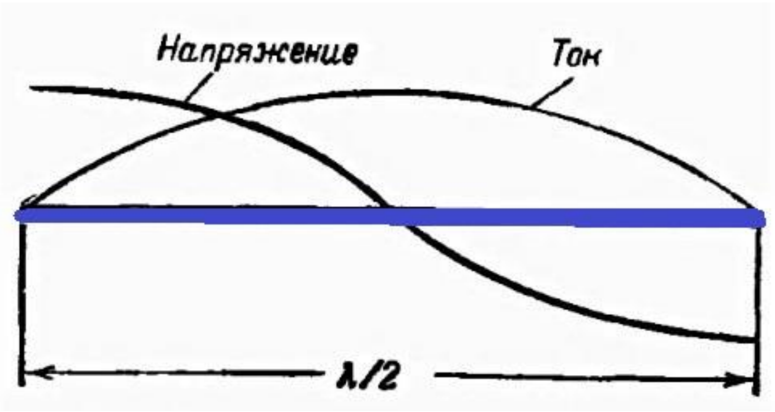


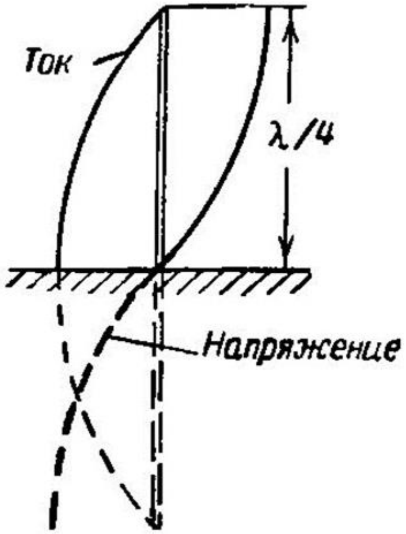
Аналог:

Использование явления резонанса

Радиоприем

Антенны настоящим колебательным контуром не являются, в них наблюдается явление стоячей электромагнитной волны, которое приводит к излучению электромагнитных волн. Однако явление резонанса в них присутствует, примерно как в струне:





Использование явления резонанса

Селекция диапазона

Без использования колебательного контура невозможно (практически невозможно) осуществить прием радиосигнала: