Вопрос

Почему при поиске условий на характеристиках

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ Edx & Edy \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc|c} A & B & c \\ Edx & Edy & d\psi \end{array}\right)$$

могут возникнуть проблемы?

Ответ

Проблемы могут возникнуть, если забыть, что формула

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB| \tag{1}$$

работает только в случае, когда $AC = CA$.

Пример

Например, есть условие на характеристиках

$$\operatorname{rank}\left(\begin{array}{cccc|c} v & \rho & 1 & 0 & 0 \\ c^2/\rho & v & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_\pm dt & 0 & dt & 0 & d\rho \\ 0 & \lambda_\pm dt & 0 & dt & dv \end{array}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} v & \rho & 1 & 0 \\ c^2/\rho & v & 0 & 1 \\ \lambda_\pm dt & 0 & dt & 0 \\ 0 & \lambda_\pm dt & 0 & dt \end{pmatrix},$$

где уравнения характеристик есть

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_\pm = v \pm c.$$

Если мы вычеркнем предпоследний столбец, получим условие:

$$\begin{vmatrix} v & \rho & 1 & 0 \\ c^2/\rho & v & 0 & 0 \\ \lambda_\pm dt & 0 & dt & d\rho \\ 0 & \lambda_\pm dt & 0 & dv \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь можно воспользоваться формулой (1), так матрицы:

$$\begin{pmatrix} v & \rho \\ c^2/\rho & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_\pm dt & 0 \\ 0 & \lambda_\pm dt \end{pmatrix},$$

очевидно, коммутируют. Действительно:

$$\begin{vmatrix} v & \rho & 1 & 0 \\ c^2/\rho & v & 0 & 0 \\ \lambda_\pm dt & 0 & dt & d\rho \\ 0 & \lambda_\pm dt & 0 & dv \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} v & \rho \\ c^2/\rho & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dt & d\rho \\ 0 & dv \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_\pm dt & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} vdt - \lambda_\pm dt & vd\rho + \rho dv \\ c^2 dt/\rho & c^2 d\rho/\rho + vdv \end{vmatrix} = -c\,(c \pm v)\left(dv \pm c\frac{d\rho}{\rho}\right)dt,$$

откуда
$$dv \pm c\frac{d\rho}{\rho} = 0, \quad \Rightarrow \quad J_\pm = v \pm \int c\frac{d\rho}{\rho}.$$

Если выкинуть первый столбец, получим
$$\begin{vmatrix} \rho & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & dt & 0 & d\rho \\ \lambda_\pm dt & 0 & dt & dv \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь уже матрицы
$$\begin{pmatrix} \rho & 1 \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & dt \\ \lambda_\pm dt & 0 \end{pmatrix},$$
не коммутируют. Поэтому при попытке воспользоваться формулой (1) мы получаем неверный результат:
$$\begin{vmatrix} \rho & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & dt & 0 & d\rho \\ \lambda_\pm dt & 0 & dt & dv \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ v & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d\rho \\ dt & dv \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & dt \\ \lambda_\pm dt & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0 & \rho d\rho + dv \\ 0 & v d\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Тем не менее, прямое вычисление дает правильный ответ
$$\begin{vmatrix} \rho & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & dt & 0 & d\rho \\ \lambda_\pm dt & 0 & dt & dv \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ dt & 0 & d\rho \\ 0 & dt & dv \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d\rho \\ \lambda_\pm dt & dt & dv \end{vmatrix} =$$
$$= -\rho \begin{vmatrix} dt & d\rho \\ 0 & dv \end{vmatrix} - v \begin{vmatrix} 0 & d\rho \\ dt & dv \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & d\rho \\ \lambda_\pm dt & dv \end{vmatrix} = -(\rho dv \pm c d\rho) dt.$$

Если же выкинуть первый столбец и поставить вместо него последний, выражение примет вид
$$\begin{vmatrix} 0 & \rho & 1 & 0 \\ 0 & v & 0 & 1 \\ d\rho & 0 & dt & 0 \\ dv & \lambda_\pm dt & 0 & dt \end{vmatrix} = 0.$$

Интересно, что здесь матрицы:
$$\begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d\rho & 0 \\ dv & \lambda_\pm dt \end{pmatrix}$$
также не коммутируют, поэтому, вообще говоря, воспользоваться формулой (1) нельзя. Однако, если мы ей все же воспользуемся, то получим правильный ответ:
$$\begin{vmatrix} 0 & \rho & 1 & 0 \\ 0 & v & 0 & 1 \\ d\rho & 0 & dt & 0 \\ dv & \lambda_\pm dt & 0 & dt \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 0 & \rho dt \\ 0 & v dt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d\rho & 0 \\ dv & \lambda_\pm dt \end{pmatrix} \right| = (\rho dv \pm c d\rho) dt,$$

что может убить веру в математику и вызвать экзистенциальный кризис. Тем не менее, данное протеворечие снимается следующим образом. На самом деле, можно также доказать, что

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |DA - CB|\,, \tag{2}$$

если $AB = BA$ и A невырожденная матрица. В нашем случае:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} d\rho & 0 \\ d\nu & \lambda_{\pm} dt \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} dt & 0 \\ 0 & dt \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрицы A и B коммутируют, значит можно пользоваться формулой (2). Но матрицы D и A, очевидно, тоже коммутируют, то есть $DA = AD$. Следовательно:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |DA - CB| = |AD - CB|\,.$$

Получается, что в этом случае нам просто повезло – только благодаря коммутативности D и A, мы получили верный ответ.

Мораль

Лучше вычеркивать и переставлять столбцы таким образом, чтобы в итоге можно было пользоваться формулой (1).