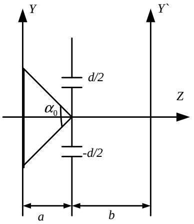
1. Когерентность, интерференция, дифракция

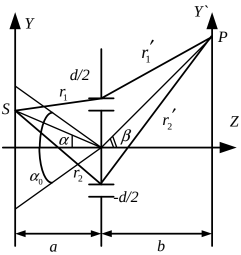
Урок 11

Видность

1.1. (Задача 3.12.) На экране наблюдается картина интерференции от двух параллельных щелей, расположенных на расстоянии d друг от друга в постановке опыта Юнга. Источник некогерентного света находится на большом расстоянии $a \gg d$ от щелей и представляет собой равномерно светящуюся полосу углового размера $\alpha_0 \ll 1$ (см. рисунок), параллельную щелям. Расстояние от экрана до щелей — $b \gg d$, длина волны — λ. Найти зависимость видности $V = (I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min})$ от d для интерференционных полос на экране.



Решение Рассмотрим результат прихода в точку P экрана с координатой y' (расположенную под углом β к оси Z) двух лучей, вышедших из точки S полосы с координатой y (расположенную под углом α к оси Z). С учетом малости поперечных размеров по сравнению с продольными $y, y' \ll a, b$ имеем для путей r_1, r_1' и r_2, r_2' следующие соотношения:



$$r_1 \approx a - \alpha d/2; \;\; r_1' \approx a + \alpha d/2;$$

$$r_2 \approx b - \beta d/2; \;\; r_2' \approx b + \beta d/2.$$

Тогда

$$E_p = E_0\left(e^{ik(r_1+r_1')} + e^{ik(r_2+r_2')}\right) = E_0 e^{ik(a+b)}\left(e^{ik(\alpha+\beta)/2} + e^{-ik(\alpha+\beta)/2}\right) =$$

$$= 2E_0 e^{ik(a+b)}\cos[kd(\alpha+\beta)/2].$$

Поскольку излучение полосы некогерентное, надо складывать интенсивности:

$$\mathrm{d}I_p = |E_p|^2 \mathrm{d}\alpha/\alpha_0 = 4E_0^2\cos^2[kd(\alpha+\beta)/2]\mathrm{d}\alpha/\alpha_0 =$$

$$= 2I_0(1 + \cos[kd(\alpha+\beta)])\mathrm{d}\alpha/\alpha_0,$$

$$I_p = \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} \mathrm{d}I_p = 2I_0\left(1 + \sin\left[kd\left(\frac{\alpha_0}{2} + \beta\right)\right] -\right.$$

$$-\sin\left[kd\left(-\frac{\alpha_0}{2}+\beta\right)\right]/k\alpha_0 d\Big)=$$

$$=2I_0\left(1+\frac{\sin u}{u}\cos kd\beta\right),$$

где $u = kd\alpha_0/2 = \pi d\alpha_0/\lambda$.

Максимальное значение $\cos kd\beta = +1$, а минимальное значение $\cos kd\beta = -1$. Отсюда

$$I_{Pmax} = 2I_0(1+\sin u/u),$$

$$I_{Pmin} = 2I_0(1-\sin u/u).$$

Таким образом,

$$V = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \left|\frac{\sin u}{u}\right| = \left|\frac{\sin \pi d\alpha_0/\lambda}{\pi d\alpha_0/\lambda}\right|.$$

В частности, $V = 0$ при $u = \pi$, т. е. при $\alpha_0 = \lambda/d$. Отсюда виден способ измерения малых угловых величин.

1.2. (Задача 3.18.) Звездный интерферометр Майкельсона представляет собой интерференционную схему Юнга, в которой расстояние d между отверстиями может изменяться. Найти зависимость видности интерференционных полос в интерферометре Майкельсона от расстояния между отверстиями и длины волны λ при наблюдении: а) двойной звезды с угловым размером α (каждая компонента двойной звезды может рассматриваться как точечный источник, светимости обеих компонент одинаковы); б) звезды с большим угловым размером α (рассматривать ее как равномерно излучающий диск или даже как полосу, исправив результат).

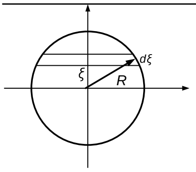
Решение а) Двойная звезда с угловым размером α. Этому случаю соответствует решение задачи 3.7 для двух некогерентных источников. Для получения соответствующей формулы необходимо в выражении для интенсивности из задачи 3.7 заменить $2d$ на d, а $2h/a$ заменить на угол α/ Тогда интенсивность запишется в виде

$$I = 4I_0\left(1+\cos\frac{kdx}{L}\cos\frac{kd\alpha}{2}\right).$$

Видность по определению

$$V = \left|\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}\right| = \cos\left|\frac{kd\alpha}{2}\right| = \cos\left|\frac{2\pi d\alpha}{2\lambda}\right| = \cos\left|\frac{\pi d\alpha}{\lambda}\right|.$$

б) Звезда с большим угловым размером α. Для вычисления суммарной интен-



сивности от круга рассмотрим его как последовательность полос, находящихся на расстоянии ξ от центра и шириной $d\xi$ (см. рис.). Тогда интенсивность от 2-х таких симметричных полос (см. пункт а)) можно записать в виде

$$dI = 4\frac{I_0}{\pi R^2}\left(1+\cos\frac{kdx}{L}\cos\frac{kd\xi}{a}\right)2\sqrt{R^2-\xi^2}\mathrm{d}\xi,$$

где a — расстояние до звезды, а R — ее радиус.

$$I = 4\frac{I_0}{\pi R^2}\left\{4R^2\int\limits_0^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t + 4R^2\int\limits_0^1\cos\frac{kdx}{L}\cos\frac{kdR}{a}t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t\right\}.$$

Первый интеграл равен $\pi/4$, а второй интеграл рассмотрим отдельно

$$I = 4\frac{I_0}{\pi R^2}\left\{\pi R^2 + 4R^2\cos\frac{kdx}{L}\int\limits_0^1\cos\frac{kdRt}{a}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t\right\}.$$

Вспоминая определение функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int\limits_0^1(1-t^2)^{\frac{2n-1}{2}}\cos(xt)\mathrm{d}t,$$

мы видим, что второе слагаемое можно свести к этой функции с $n=1$

$$\int\limits_0^1\cos\frac{kdRt}{a}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{2\frac{kdR}{2a}}J_1\left(\frac{kdR}{a}\right) = \frac{\pi/2}{\pi d\alpha/\lambda}J_1\left(\frac{\pi d\alpha}{\lambda}\right).$$

Собирая вместе оба члена, получим

$$I = 4I_0\left\{1+\frac{2\lambda}{\pi d\alpha}J_1\left(\frac{\pi d\alpha}{\lambda}\right)\cos\frac{kdx}{L}\right\}.$$

Тогда видность

$$V = \left|\frac{2\lambda}{\pi d\alpha}J_1\left(\frac{\pi d\alpha}{\lambda}\right)\right|$$

а) $V = \left|\cos\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right|$; б) $V = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\lambda}{\alpha d}J_1\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)$, где J_1 — функция Бесселя.

1.3. (Задача 3.19.) В звездном интерферометре Майкельсона при наблюдении: а) двойной звезды (система Капелла на расстоянии 44,6 световых лет) и б) красного гиганта (α-Бетельгейзе на расстоянии 652 световых года) видность интерференционных полос при увеличении расстояния между отверстиями ослабевает и при $D = D_0$ обращается в нуль. Определить: а) расстояние ρ_0 между компонентами двойной звезды ($D_0 = 70,8$ см, $\lambda = 5\ 000$ Å) и б) диаметр красного гиганта ($D_0 = 720$ см, $\lambda = 6\ 000$ Å).

Указание: первый корень функции Бесселя $J_1(x)$ равен $x_1 = 3,83...$, $J_1(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(t - x\sin t)\mathrm{d}t$.

Решение

$$dI = 2I_0\left(1 + \cos\phi\left(x,\xi\right)\right)\xi\cdot d\xi$$

$$\cos\phi\left(x,\xi\right) = \cos\left[\left(\frac{x}{L} + \frac{\xi}{a}\right)kd\right]$$

$$\xi = 2\sqrt{R^2 - r^2}dr$$

$$I = 2I_0\left\{\frac{R^2}{2}2\pi + 2\pi\int\limits_{-R}^{R}\cos\left[kd\left(\frac{x}{L} + \frac{\xi}{a}\right)\right]\xi d\xi\right\}$$

$$I = 2I_0\left(\pi R^2 + \frac{2R^2}{\pi R^2}\int\limits_{-R}^{R}\cos\left[kd\left(\frac{x}{L} + \frac{\xi}{a}\right)\right]\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2}d\xi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\cos\left(kd\frac{x}{L}\right)\cos\frac{kd\xi}{a}\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2}}\frac{d\xi}{R} - \int\limits_{-R}^{R}\sin\left(kd\frac{x}{L}\right)\sin\frac{kd\xi}{a}\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2}}d\xi =$$

$$= \frac{4}{\pi}R\int\limits_0^1\left(1 - t^2\right)\cos\frac{kdR}{a}tdt\cdot\cos\frac{kdx}{L} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\cos\frac{kdx}{L}\frac{a}{kd}\frac{\frac{kdR}{a}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot J_1\left(\frac{kdR}{a}\right)$$

$$J_n\left(x\right) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^1\left(1 - t^2\right)^{\frac{2n-1}{2}}\cos xtdt$$

$$V = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\lambda}{\alpha d}J_1\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)$$

а) $1,6\cdot 10^6$ км; б) $6,2\cdot 10^8$ км.