Задание 1 (Сдать до 9 октября)

Вариант 1

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [3;1;1]^\top$, $\mathbf{v} = [2;-2;-1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[-1;1;2]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$x - 2y + z + 1 = 0 \text{ и } 2x + y - z - 1 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1;2;3]^\top + t[1;1;1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2;3;4]^\top + u[1;2;1]^\top + v[2;1;1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)

Вариант 2

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [2; -1; 0]^\top$, $\mathbf{v} = [3; 2; 1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[2; 2; 1]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$2x - y + 2z + 1 = 0 \text{ и } x + 2y + 2z - 2 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [4; 2; 1]^\top + t[3; 2; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 2; 3]^\top + u[1; 1; 1]^\top + v[-2; 1; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v}\sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)
Вариант 3

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

   (b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [2;1;4]^\top$, $\mathbf{v} = [4;-2;3]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1;-1;2]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$2x - y - z - 1 = 0 \text{ и } x + 2y - z - 1 = 0,$$

   записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

   (b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1;1;2]^\top + t[1;1;-1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [4;2;3]^\top + u[1;1;1]^\top + v[2;1;-1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

   (a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

   (b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

   равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

   где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)

Вариант 4

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [1;1;4]^\top$, $\mathbf{v} = [2;-7;1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[-2;1;2]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$x + y + z + 1 = 0 \text{ и } x - y + z - 1 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1;3;4]^\top + t[3;1;1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [4;2;3]^\top + u[1;1;1]^\top + v[2;1;-1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)
Вариант 5

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [1; 2; 5]^\top$, $\mathbf{v} = [1; 0; 4]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1; 1; -1]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$x - 2y - 2z - 1 = 0 \text{ и } 2x + y + 2z - 2 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [3; 2; 5]^\top + t[2; 1; 2]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 5; 4]^\top + u[1; 2; 3]^\top + v[-1; 1; 3]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v}\sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)
Вариант 6

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [1; 1; -5]^\top$, $\mathbf{v} = [1; -2; -3]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[-1; 1; 1]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$x + y - z - 1 = 0 \text{ и } x + y + z + 1 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [2; 2; 2]^\top + t[3; 3; 2]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [-1; 3; 2]^\top + u[1; 1; 1]^\top + v[1; 2; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)
Вариант 7

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [4; 2; 1]^\top$, $\mathbf{v} = [-1; 3; 5]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1; -2; -1]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$2x - y + 2z + 1 = 0 \text{ и } 2x + 2y + z - 2 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [3; -1; 3]^\top + t[-2; 1; 2]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 3; 4]^\top + u[1; 2; 3]^\top + v[-1; 1; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)
Вариант 8

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [3; 2; -1]^\top$, $\mathbf{v} = [5; 3; 1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1; 1; -2]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$x + 2y + z + 1 = 0 \text{ и } 2x - y - z - 1 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [2; 0; 3]^\top + t[3; 1; 3]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 4; 4]^\top + u[1; 2; 3]^\top + v[1; 1; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)
Вариант 9

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [5; 2; 2]^\top$, $\mathbf{v} = [-1; 1; -3]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[2; -1; 2]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$x - y - z + 1 = 0 \text{ и } x + y - z - 1 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [2; 5; 2]^\top + t[2; -2; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 2; 2]^\top + u[1; 1; 1]^\top + v[1; 3; 2]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)
Вариант 10

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [4; 0; 5]^\top$, $\mathbf{v} = [2; 3; -2]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1; -1; 1]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$2x + y - 2z + 1 = 0 \text{ и } 2x - 2y - z - 2 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1; 3; 4]^\top + t[1; 1; 2]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 2; 3]^\top + u[3; 2; 2]^\top + v[1; 2; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)

Вариант 11

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество
$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

   (b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [-1;1;1]^\top$, $\mathbf{v} = [4;3;1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[2;1;-2]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями
$$x + 2y - z - 1 = 0 \text{ и } 2x - y + z + 1 = 0,$$
записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

   (b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [3;2;4]^\top + t[1;2;1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1;3;3]^\top + u[1;1;5]^\top + v[1;2;4]^\top$.

7. В пространстве даны прямые
$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

   (a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

   (b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$
равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений
$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$
где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор
$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$
Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)

Вариант 12

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [0; 3; -2]^\top$, $\mathbf{v} = [1; 5; -1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1; -1; -1]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$2x + y - 3z + 2 = 0 \text{ и } x - 2y + 3z + 1 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [3; 2; -2]^\top + t[1; 2; 3]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 5; -1]^\top + u[2; 1; 2]^\top + v[1; 1; 3]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)
Вариант 13

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [2; 1; 2]^\top$, $\mathbf{v} = [5; 3; 2]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1; 1; 2]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$x + y + z - 1 = 0 \text{ и } x - y + z - 1 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1; 2; 3]^\top + t[-1; 2; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 5; 2]^\top + u[1; 4; 2]^\top + v[1; 2; 2]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)

Вариант 14

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [1; 2; 4]^\top$, $\mathbf{v} = [5; 1; -1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[2; 1; 2]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$x - 2y + z - 1 = 0 \text{ и } 2x + y - z + 1 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [-1; 1; 1]^\top + t[3; 4; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 2; 2]^\top + u[2; 3; -1]^\top + v[1; 2; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать до 9 октября)
Вариант 15

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих этим вершинам сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы (используя известные вам виды произведений векторов).

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной вектору, который получен как зеркальное отражение данного вектора $\mathbf{v}$ относительно плоскости с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [2; 3; 5]^\top$, $\mathbf{v} = [1; 1; 4]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1; 1; 1]^\top$.

5. Для пары плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями

$$x + 2y - 3z + 2 = 0 \text{ и } 2x - y - 3z - 1 = 0,$$

записать уравнение одной из них в общем виде, другой – в параметрическом.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [-1; 3; 2]^\top + t[2; 2; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 1; 1]^\top + u[2; 3; -1]^\top + v[1; 2; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + 10b - 10 = 0, \\ bx - z + 5b^2 - 4b - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра b эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $b = -2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать,что при таком повороте произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.