1. Электростатика

Урок 5

Уравнение Пуассона и Лапласа

Уравнение для потенциала с источниками (зарядами) – уравнение Пуассона и уравнение без источников – уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho\,,\ \Delta\varphi = 0. \tag{1}$$

Уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат

$$\Delta\varphi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Уравнение Пуассона в сферической системе координат

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = -4\pi\rho.$$

Граничные условия на границе раздела сред 1 – 2 (n – нормаль из среды 1 в 2).

$$\varphi_1 = \varphi_2\,,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \tag{2}$$

Решение уравнения Пуассона для точечного заряда

$$\Delta\varphi_{\text{точ}} = -4\pi q\delta(\mathbf{r})\,,\ \varphi_{\text{точ}} = \frac{q}{r} + C. \tag{3}$$

Общее решение уравнения Пуассона для распределенной системы зарядов

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int\limits_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int\limits_L \frac{\varkappa(\mathbf{r}')\,d\ell'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{4}$$

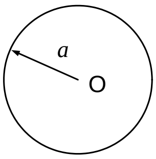
1.1. (Задача 1.47) Используя уравнение Пуассона, симметрию задачи, конечность и непрерывность потенциала и его производной, найти потенциал:

а) шара радиуса a, равномерно заряженного по объему с объемной плотностью ρ;

б) цилиндра радиуса a, равномерно заряженного по объему с линейной плотностью η;

в) слоя толщиной $2a$, равномерно заряженного с объемной плотностью ρ.

Решение а) Потенциал φ удовлетворяет уравнениям Пуассона $\Delta\varphi_1 = -4\pi\rho$



при $R \leqslant a$ и Лапласа $\Delta\varphi_2 = 0$ при $R \geqslant a$. В сферической системе координат с учетом симметрии задачи эти уравнения будут иметь вид:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\right) = -4\pi\rho \qquad \text{при} \qquad R \leqslant a,$$
$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\right) = 0 \qquad \text{при} \qquad R > a.$$

Начало системы координат помещено в центр шара. Интегрируя уравнения, получаем:

$$\varphi_1 = -\tfrac{2}{3}\pi\rho R^2 - \tfrac{A_1}{R} + B_1 \quad \text{при} \qquad R \leqslant a,$$
$$\varphi_2 = -\tfrac{2}{3}\pi\rho R^2 - \tfrac{A_1}{R} + B_1 \quad \text{при} \qquad R > a,$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 – константы интегрирования. Второе слагаемое в выражении для φ_1 содержит член $\sim 1/R$. Значит, напряженность электрического поля будет содержать член $\sim 1/R^2$, который при $R \to 0$ стремится к бесконечности.

Поскольку заряд распределен с конечной объемной плотностью в ограниченной области, то напряженность электрического поля нигде не может быть бесконечной. Для удовлетворения этого условия необходимо, чтобы $A_1 = 0$. Выбирая потенциал равным нулю на бесконечности, положим $B_2 = 0$. Из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ следует условие непрерывности касательных составляющих напряженности электрического поля на поверхности шара: $E_{1\tau}\big|_{R=a} = E_{2\tau}\big|_{R=a}$. Этому условию можно удовлетворить, если $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$.

Из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ следует, что

$$E_{1n}\big|_{R=a} - E_{2n}\big|_{R=a} = 4\pi\sigma,$$

где E_{1n}, E_{2n} – нормальные составляющие вектора $\mathbf{E}$;σ – поверхностная плотность зарядов. Поскольку в задаче поверхностная плотность зарядов равна нулю, то нормальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ на поверхности шара непрерывна. Поэтому

$$-\frac{2}{3}\pi\rho a^2 + B_1 = \frac{A_2}{a},$$

$$-\frac{4}{3}\pi\rho a = \frac{A_2}{a},$$

откуда

$$A_2 = -\frac{4}{3}\pi\rho a^3\ , \quad B_1 = 2\pi\rho a^2.$$

Окончательно распределение потенциала выразится так:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = & -\frac{2}{3}\pi\rho(3a^2 - R^2) & \text{при} \quad R\leqslant a, \\ \varphi_2 = & -\frac{4\pi a^3\rho}{3R} & \text{при} \quad R > a. \end{array}$$

б) Уравнения Пуассона и Лапласа в цилиндрической системе координат с осью Z вдоль оси цилиндра будут иметь вид:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) = & -4\pi\rho & \text{при} \quad r\leqslant a, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) = & 0 & \text{при} \quad r > a, \end{array}$$

поскольку из симметрии задачи потенциал может зависеть только от расстояния до точки наблюдения. Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$\varphi_1 = -\pi\rho r^2 + A_1 \ln r + B_1,$$

$$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2.$$

Чтобы потенциал был конечным при $r = 0$, нужно положить $A_1 = 0$, иначе напряженность электрического поля на оси цилиндра будет бесконечной. Удобно выбрать потенциал равным нулю на оси цилиндра, тогда $B_1 = 0$. Из условия непрерывности потенциала и его производной при $r = a$ находим

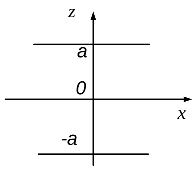
$$A_2 = -2\pi\rho a^2,$$

$$B_2 = 2\pi\rho a^2 \ln a - \pi\rho a^2.$$

Выражая объемную плотность заряда ρ через заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра $\rho = \eta/\pi a^2$, окончательно получаем:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = & -\pi\rho r^2 = -\frac{\eta r^2}{a^2} & \text{при} \quad r\leqslant a, \\ \varphi_2 = & 2\eta \ln\frac{a}{r} - \eta & \text{при} \quad r\geqslant a. \end{array}$$

в) Декартову систему координат выберем таким образом, чтобы оси X и Y лежали в средней плоскости пластины. Потенциал может зависеть только от координаты z, поскольку все точки плоскости $z = \mathrm{const}$ равноправны. Уравнения Пуассона и Лапласа для различных областей принимают вид



$$\begin{array}{lll} \frac{d^2\varphi_1(z)}{dz^2} = & 0 & \text{при} \quad z\leqslant a, \\ \frac{d^2\varphi_2(z)}{dz^2} = & -4\pi\rho & \text{при} \quad -a < z < a, \\ \frac{d^2\varphi_3(z)}{dz^2} = & 0 & \text{при} \quad z > a. \end{array}$$

Решения этих уравнений запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_z + B_1, \\ \varphi_2 &= -2\pi\rho z^2 + A_2 z + B_2, \\ \varphi_3 &= A_3 + B_3. \end{aligned}$$

Выберем потенциал так, чтобы он равнялся нулю при $z = 0$, тогда $B_2 = 0$. Напряженность электрического поля – векторная величина, и, в силу симметрии системы зарядов относительно средней плоскости, напряженность в этой плоскости равна нулю, поскольку направления в сторону положительных и отрицательных z равноправны. Это означает, что

$$\left.\frac{d\varphi_2}{dz}\right|_{z=0} = 0,$$

откуда $A_2 = 0$. Далее, так же как в приведенных выше задачах, воспользуемся непрерывностью потенциала и его производной при $z = \pm a$. Это дает:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4\pi\rho a, & B_1 &= 2\pi\rho a^2, \\ A_3 &= -4\pi\rho a, & B_3 &= 2\pi\rho a^2. \end{aligned}$$

Подставляя константы интегрирования в решение, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\pi\rho a^2\left(1 + \tfrac{2z}{a}\right) && \text{при} \quad z \leqslant -a, \\ \varphi_2 &= 2\pi\rho z^2 && \text{при} \quad -a \leqslant z \leqslant a, \\ \varphi_3 &= 2\pi\rho a^2\left(1 - \tfrac{2z}{a}\right) && \text{при} \quad z \geqslant a, \end{aligned}$$

что можно записать короче следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{cases} -2\pi\rho z^2 & \text{при } -a \leqslant z \leqslant a, \\ 2\pi\rho a^2\left(1 - \dfrac{2|z|}{a}\right) & \text{при } |z| \geqslant a. \end{cases}$$

1.2. (задача 1.48) Найти поле между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов r_1 и r_2, разность потенциалов между которыми равна U.

Решение

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$$

$$r\frac{\partial\psi}{\partial r} = A$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$$\psi = A \ln r + B$$

$$\psi_2 - \psi_1 = A \ln r_2 - A \ln r_1 = U$$

$$A = \frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\psi = \frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r + B$$

$$E_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$