Занятие 12

Матричная экспонента.

Среди всех фундаментальных матриц $\mathbf{Y}(t)$ есть только одна, обладающая свойством $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$, что делает ее чрезвычайно удобной.

Действительно, любое решение системы $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{A}\vec{y}$ выражается через фундаментальную матрицу по формуле $\vec{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\cdot\vec{c}$, где $\vec{c}$ — некоторый числовой вектор. Если поставить для системы задачу Коши $\vec{y}(0) = \vec{y_0}$, то из равенства $\vec{y_0} = \mathbf{Y}(0)\cdot\vec{c}$ в силу условия $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$ сразу же получается, что $\vec{c} = \vec{y_0}$. Таким образом, решение поставленной задачи Коши дается формулой $\vec{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\cdot\vec{y_0}$.

Такую замечательную фундаментальную матрицу называют матричной экспонентой и обозначают $\exp(\mathbf{A}t)$ по аналогии со скалярной функцией $y = e^{at}$, являющейся решением задачи Коши $\dot{y} = ay$, $y(0) = 1$. Итак,

$$\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{E} \tag{12.1}$$

Можно показать, что матричная экспонента, как и функция $y = e^{at}$, раскладывается в ряд по степеням t:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}\cdot t + \mathbf{A}^2\cdot\frac{t^2}{2!} + ... + \mathbf{A}^n\cdot\frac{t^n}{n!} + ... \tag{12.2}$$

Посмотрим, каким образом можно найти матричную экспоненту.

Первый способ основан на том, что любые две фундаментальные матрицы связаны друг с другом соотношением $\mathbf{Y}_2(t) = \mathbf{Y}_1(t)\cdot\mathbf{B}$. Достаточно найти какую-нибудь фундаментальную матрицу $\mathbf{Y}(t)$, тогда $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{B}$ с некоторой матрицей $\mathbf{B}$. При $t = 0$ матричная экспонента равна $\mathbf{E}$, то есть $\mathbf{Y}(0)\cdot\mathbf{B} = \mathbf{E}$, откуда $\mathbf{B} = \mathbf{Y}^{-1}(0)$.

Таким образом, взяв произвольную фундаментальную матрицу $\mathbf{Y}(t)$, можно построить матричную экспоненту по формуле

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(0).$$

Пример 1. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

На предыдущем занятии (см. пример 5) мы нашли решение системы $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ и ее фундаментальную матрицу

$$\mathbf{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ 1 & \cos 2t & \sin 2t \\ -1 & 3\cos 2t & 3\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\exp(\mathbf{A}t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ 1 & \cos 2t & \sin 2t \\ -1 & 3\cos 2t & 3\sin 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ 1 & \cos 2t & \sin 2t \\ -1 & 3\cos 2t & 3\sin 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & -0,5\sin 2t & -0,5\sin 2t \\ 0,5\sin 2t & 0,75 + 0,25\cos 2t & -0,25 + 0,25\cos 2t \\ 1,5\sin 2t & -0,75 + 0,75\cos 2t & 0,25 + 0,75\cos 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^t}{4} \begin{pmatrix} 4\cos 2t & -2\sin 2t & -2\sin 2t \\ 2\sin 2t & 3 + \cos 2t & -1 + \cos 2t \\ 6\sin 2t & -3 + 3\cos 2t & 1 + 3\cos 2t \end{pmatrix}$$

Это и есть матричная экспонента.

Второй способ. Матричную экспоненту легко построить, используя специальный базис, состоящий из функций $\psi_k(x)$, с которыми мы познакомились на занятии 9.

Пусть λ_1, λ_2, ... , λ_n — корни характеристического многочлена $\det\Big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\Big)$. Если корень кратный, то он выписан в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Напомним, что $\psi_1(t)=e^{\lambda_1 t}$, $\psi_{k+1}(t)=\int\limits_0^t e^{\lambda_{k+1}(t-\tau)}\psi_k(\tau)d\tau$. Тогда

$$\exp(\mathbf{A}t)=\mathbf{E}\cdot\psi_1(t)+\Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_2(t)+\Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\Big(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_3(t)+\ldots$$
$$\ldots+\Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\Big(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(\mathbf{A}-\lambda_{n-1}\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_n(t) \quad (12.3)$$

Этот способ особенно эффективен в случае кратных корней, поскольку он не требует выяснения их геометрической кратности.

Пример 2. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен $\det\Big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\Big)=(\lambda+1)^2$ имеет корень $\lambda=-1$ кратности 2. Поэтому $\psi_1(t)=e^{-t}$, $\psi_2(t)=te^{-t}$ и

$$\exp(\mathbf{A}t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot e^{-t}+\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot te^{-t}=\begin{pmatrix}e^{-t}-2te^{-t} & 2te^{-t}\\ -2te^{-t} & e^{-t}+2te^{-t}\end{pmatrix}$$

Пример 3. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для матрицы $\mathbf{A}$ размера 2×2, имеющей собственные числа $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$.

$$\psi_1(t)=e^{(\alpha+i\beta)t},\ \ \psi_2(t)=\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}}{(\alpha+i\beta)-(\alpha-i\beta)}=\frac{e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t}{\beta}$$

$$\exp(\mathbf{A}t)=\mathbf{E}\cdot e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+\Big(\mathbf{A}-(\alpha+i\beta)\mathbf{E}\Big)\cdot\frac{e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t}{\beta}=$$
$$=e^{\alpha t}\cos\beta t\cdot\mathbf{E}+\Big(\mathbf{A}-\alpha\mathbf{E}\Big)\cdot\frac{e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t}{\beta}$$

Если $\alpha=0$, то $\exp(\mathbf{A}t)=\mathbf{E}\cdot\cos\beta t+\mathbf{A}\cdot\dfrac{\sin\beta t}{\beta}$.

Если $\beta = 0$, то $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} \cdot e^{\alpha t} + \Big(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E}\Big) \cdot te^{\alpha t}$.

Пример 4. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для матрицы $\mathbf{A}$, являющейся жордановой клеткой, то есть имеющей вид $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет единственное собственное число λ_0 кратности n. Поэтому $\psi_1(t) = e^{\lambda_0 t}$, $\psi_k(t) = \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_0 t}$, $1 < k \leqslant n$. Тогда

$$\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)^k = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{\ldots}^{k-1} & 1 & & 0 \\ & 0 & \ldots & \ddots & \\ & & 0 & \ldots & 1 \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$(1 < k < n)$, (диагональ из единиц смещается вправо), и наконец $\Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)^n = \mathbf{0}$. Тогда по формуле (12.3)

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} \cdot e^{\lambda_0 t} + \Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big) \cdot te^{\lambda_0 t} + \ldots + \Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)^{n-1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_0 t} =$$

$$= e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} & \ldots & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \dfrac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$

Применить метод исключения для решения этой системы невозможно. Поэтому сразу приступим к построению матричной экспоненты.

Корни характеристического многочлена $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 0$. Соответственно, $\psi_1(t) = e^t$, $\psi_2(t) = te^t$, $\psi_3(t) = \int\limits_0^t \psi_2(\tau)d\tau = te^t - e^t + 1$. Таким образом, $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot e^t + \Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)\cdot te^t + \Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)^2\cdot(te^t - e^t + 1)$.

Заметим, что здесь $\Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)^2 = -\Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)$. Поэтому после приведения подобных слагаемых получаем

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A}(e^t-1)+\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2e^t-1 & -e^t+1 & -e^t+1 \\ 3e^t-3 & -2e^t+3 & -3e^t+3 \\ -e^t+1 & e^t-1 & 2e^t-1 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы можно получить в виде линейной комбинации столбцов фундаментальной матрицы

$$\exp(\mathbf{A}t)\cdot\vec{c} = C_1\begin{pmatrix} 2e^t-1 \\ 3e^t-3 \\ -e^t+1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -e^t+1 \\ -2e^t+3 \\ e^t-1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -e^t+1 \\ -3e^t+3 \\ 2e^t-1 \end{pmatrix}.$$

В рассмотренном примере общее решение можно было бы записать проще, используя собственные векторы. Хотя собственное значение $\lambda = 1$ имеет кратность 2, но ранг матрицы $\Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)$ равен 1. Следовательно, значению $\lambda = 1$ соответствует два линейно независимых собственных вектора, и матрица $\mathbf{A}$ имеет набор линейно независимых собственных векторов, образующих базис в $\mathbb{R}^3$. Найдем их.

$$\vec{u}^{[1]}\Big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{[2]}\Big|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{[3]}\Big|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, фундаментальная матрица системы имеет вид

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^t \\ 3 & e^t & 0 \\ -1 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что в столбцах матричной экспоненты стоят линейные комбинации столбцов матрицы $\mathbf{Y}(t)$, например,

$$\begin{pmatrix} 2e^t - 1 \\ 3e^t - 3 \\ -e^t + 1 \end{pmatrix} = -\vec{y}^{[1]} + 3\vec{y}^{[2]} - \vec{y}^{[3]},$$

что еще раз иллюстрирует формулу $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{B}$.

Пример 6. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 2x - y - 2z \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$

В данном случае $\lambda_{1,2,3} = 1$, и мы не будем искать собственные векторы, а сразу перейдем к построению матричной экспоненты.

$\psi_1(t) = e^t,\ \ \psi_2(t) = te^t,\ \ \psi_3(t) = \dfrac{t^2}{2}e^t.$

$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} \cdot e^t + \Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\Big) \cdot te^t + \Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\Big)^2 \cdot \dfrac{t^2}{2}e^t.$

Поскольку $\Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\Big)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \mathbf{0}$, то

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^t + te^t & -te^t & -te^t \\ 2te^t & e^t - 2te^t & -2te^t \\ -te^t & te^t & e^t + te^t \end{pmatrix}.$$

Как видим, в случае кратных корней частные решения могут иметь вид $\begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t}$, где $P_i(t)$ — многочлены, степень которых меньше или равна кратности собственного числа, а в некоторых случаях, как в примере 5, равна нулю. Какова эта степень — зависит от матрицы A, но «умная» формула (12.3) избавляет нас от необходимости изучать ее структуру.

Третий способ. Для построения матричной экспоненты используем матричный ряд (12.2).

Пример 7. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица третьего порядка, имеющая характеристический многочлен $\lambda^3 - \lambda = 0$. По теореме Кэли любая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то есть $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$. Отсюда легко найти все степени матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ и так далее. Итак, $\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A}$. Тогда

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}\Big(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots\Big) + \mathbf{A}^2\Big(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots\Big) = \\ = \mathbf{E} + \mathbf{A}\operatorname{sh} t + \mathbf{A}^2(\operatorname{ch} t - 1).$$

Заметим, что равенство $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ не означает, что порядок матрицы равен трем — собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ могут быть высокой кратности. Тем не менее, полученная формула матричной экспоненты остается справедливой.

<u>Четвертый способ</u>. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет блочно-диагональную структуру $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_2 & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix}$, то

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{A}_1 t) & & \mathbf{0} \\ & \exp(\mathbf{A}_2 t) & \\ \mathbf{0} & & \exp(\mathbf{A}_3 t) \end{pmatrix}.$$

В частности, если матрица $\mathbf{A}$ диагональна: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

то $\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$.

Иногда блочная природа матрицы не столь очевидна, тем не менее можно воспользоваться данным способом построения матричной экспоненты.

Пример 8. Рассмотрим систему с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем соответствующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 4y_5 \\ \dot{y}_2 = 2y_2 + y_4 \\ \dot{y}_3 = -y_3 \\ \dot{y}_4 = 2y_4 \\ \dot{y}_5 = -y_1 + y_5 \end{cases}$$

Она распадается на три подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 4y_5 \\ \dot{y}_5 = -y_1 + y_5 \end{cases}, \quad \dot{y}_3 = -y_3, \quad \begin{cases} \dot{y}_2 = 2y_2 + y_4 \\ \dot{y}_4 = 2y_4 \end{cases}.$$

Соответственно, $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем матричную экспоненту для каждой подсистемы.

$$\exp(\mathbf{A}_1 t) = e^t \cos 2t\mathbf{E} + e^t \frac{\sin 2t}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -0,5\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$\exp(\mathbf{A}_2 t) = e^{-t}, \quad \exp(\mathbf{A}_3 t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь осталось «разнести» эти блоки на соответствующие места матрицы $\exp(\mathbf{A}t)$. Итак,

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^t\cos 2t & 0 & 0 & 0 & 2e^t\sin 2t \\ 0 & e^{2t} & 0 & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ -0,5e^t\sin 2t & 0 & 0 & 0 & e^t\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Пятый способ. Если матрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ подобны, то есть существует такая невырожденная матрица $\mathbf{T}$, что $\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{T}^{-1}$, то $\exp(\mathbf{A}_1 t) = \mathbf{T}\cdot\exp(\mathbf{A}_2 t)\cdot\mathbf{T}^{-1}$.

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет простую структуру, а именно, у нее есть n вещественных собственных чисел λ_1, λ_2, ... , λ_n и n линейно независимых собственных векторов $\vec{u}^{[1]}$, $\vec{u}^{[2]}$, ... , $\vec{u}^{[n]}$, то такую матрицу можно привести к диагональному виду

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}\cdot\mathbf{T}^{-1}$$

при помощи матрицы $\mathbf{T}$, в столбцах которой стоят собственные векторы $\vec{u}^{[1]}$, ... , $\vec{u}^{[n]}$ матрицы $\mathbf{A}$.

Тогда $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{T}\cdot\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\cdot\mathbf{T}^{-1}.$

Легко видеть, что матрица

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{T}\cdot\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} e^{\lambda_1 t}\vec{u}^{[1]} & e^{\lambda_2 t}\vec{u}^{[2]} & \dots & e^{\lambda_n t}\vec{u}^{[n]} \end{array}\right)$$

является фундаментальной, и $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{B}$, где $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}$ — невырожденная матрица перехода.

В курсе линейной алгебры доказывается, что любая матрица подобна так называемой жордановой форме, то есть блочно-диагональной матрице, каждый блок которой является жордановой клеткой. Матричную экспоненту для жордановой клетки мы получили в примере 4, используя функции $\psi_k(t)$. Можно прийти к тому же результату другим путем.

Заметим, что жорданову клетку $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$ можно представить в виде $\mathbf{A} = \lambda_0 \mathbf{E} + \mathbf{G}$, где $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

Известно, что если матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ коммутируют, то $\exp\big((\mathbf{B}+\mathbf{C})t\big) = \exp(\mathbf{B}t)\cdot\exp(\mathbf{C}t)$.

Так как единичная матрица коммутирует с любой матрицей, то $\exp\big((\lambda_0\mathbf{E}+\mathbf{G})t\big) = e^{\lambda_0 t}\mathbf{E}\cdot\exp(\mathbf{G}t)$.

Далее, по формуле (12.2)

$$\exp(\mathbf{G}t) = \mathbf{E} + \mathbf{G}\cdot t + \mathbf{G}^2\cdot\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{G}^k\cdot\frac{t^k}{k!} + \ldots,$$

но так как $\mathbf{G}^k = \mathbf{0}$ при $k \geqslant n$, то ряд превращается в конечную сумму:

$$\exp(\mathbf{G}t) = \mathbf{E} + \mathbf{G}\cdot t + \mathbf{G}^2\cdot\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{G}^{n-1}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы пришли к уже известной нам формуле

$$\exp(\mathbf{A}t) = e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Как видим, матричная экспонента для жордановой клетки строится легко, однако алгоритм приведения матрицы к жордановой форме (особенно в случае кратных собственных чисел) достаточно сложен. Поэтому для построения матричной экспоненты мы рекомендуем использовать другие, более эффективные приемы.

Самостоятельная работа

Найти матричную экспоненту $\exp(\mathbf{A}t)$.

1. Матрица $\mathbf{A}$ такова, что $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{E}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm 2)$

Ответ оставьте в виде $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(0)$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответы и указания к самостоятельной работе

1. $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} \cdot \cos t + \mathbf{A} \cdot \sin t$

2. Указание: найдите фундаментальную матрицу методом исключения

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & e^{2t} & -e^{-2t} \\ 1 & e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

3. $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A^2}\,\dfrac{t^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{t^2}{2} & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Указание: $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \mathbf{0}$

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

5. Указание: выделите подсистемы, соответствующие блокам матрицы $\mathbf{A}$.

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & 0 & 0 & e^{-t}\sin t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ -e^{-t}\sin t & 0 & 0 & e^{-t}\cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 4t & 0,5\sin 4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix}.$$