Домашняя работа к занятию 9

1.1 Покажите, что функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_n(x)$ линейно независимы. Постройте линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (как можно более низкого порядка), ФСР которого содержит эти функции.

a) $\varphi_1(x) = \operatorname{sh} x$, $\varphi_2(x) = \operatorname{sh}(1-x)$

b) $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$, $\varphi_3(x) = x^3$

c) $\varphi_1(x) \equiv 1$, $\varphi_2(x) = \cos x$, $\varphi_3(x) = e^x$

1.2 Решите задачу Коши $\begin{cases} y^{IV} + 2y'' + y = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1 \end{cases}$

1.3 Постройте *специальную* ФСР для уравнения $y''' + y' = 0$, расположив характеристические числа в следующем порядке: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 0$.

2.1 Решите задачу Коши $\begin{cases} x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0 \\ y(-1) = 1,\ y'(-1) = -1,\ y''(-1) = 1 \end{cases}$

2.2 Постройте линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (как можно более низкого порядка), ФСР которого содержит функцию $xe^{-x}\sin x$.

2.3 Покажите, что условия $a > 0$ и $b > 0$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ стремились к нулю при $x \to +\infty$.

3.1 Покажите, что функция $y = \sin^n x$ при любом $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет некоторому линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $n+1$ и не является решением линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами меньшего порядка.

3.2 Покажите, что функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... $\psi_n(x)$ действительно образуют ФСР соответствующего уравнения.

Ответы и указания

1.1 *Ответ*: a) $y'' - y = 0$, b) $y^{IV} = 0$, c) $y^{IV} - y''' + y'' - y' = 0$

1.2 *Указание*: общее решение уравнения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$$

Из условия $y(0) = 0$ находим, что $C_1 = 0$. Для быстрого определения остальных коэффициентов воспользуемся разложениями Тейлора:

$$y = C_2(x - \frac{x^3}{6} + ...) + C_3 x(1 - \frac{x^2}{2} + ...) + C_4 x(x - \frac{x^3}{6} + ...) =$$
$$= (C_2 + C_3)x + C_4 x^2 - \frac{C_2 + 3C_3}{6} x^3 + ...$$

Отсюда $C_4 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $y = \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x)$

1.3 *Ответ*: $\psi_1(x) = e^{ix}$, $\psi_2(x) = \sin x$, $\psi_3(x) = 1 - \cos x$.

2.1 *Указание*: уравнение является уравнением Эйлера. Его характеристический многочлен $P_3(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$

Общее решение $y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + C_3 x^2$

Ответ: $y = x \ln(-x) + x^2$, $x \in (-\infty; 0)$

2.2 *Указание*: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ имеют кратность 2. Характеристический многочлен $P_4(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2$

Ответ: $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$

2.3 *Указание*: вспомните теорему Виета для корней квадратного уравнения. Рассмотрите случаи вещественных и комплексных корней.

3.1 *Указание*: $\sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n = \frac{e^{inx} + ... + (-1)^n e^{-inx}}{(2i)^n}$

3.2 *Указание*: вспомните, каким данным Коши удовлетворяют эти функции.