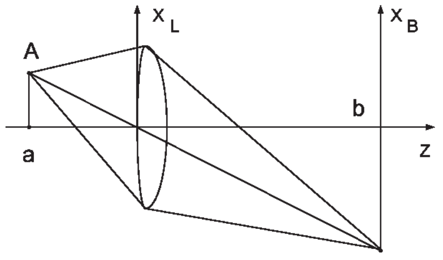
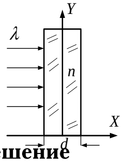


Урок 17

Фурье оптика и голография

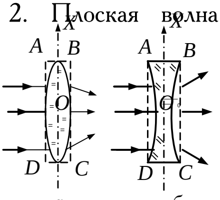
1. Плоская волна падает на прямоугольный плоский сосуд с газом, плотность которого с высотой y падает, так что показатель преломления меняется по закону: $n(y) = n_0(1 - \frac{y^2}{2L^2})$. Ширина сосуда — d. На каком расстоянии от сосуда произойдет фокусировка пучка?



Решение

$f = L^2/(n_0 d)$.

2. Плоская волна падает на тонкую собирающую или рассеивающую линзу с радиусами кривизны R_1 и R_2 и показателем преломления n. Длина волны — λ, угол между волновым вектором и оптической осью линзы мал. Найти зависимость от X фазового сдвига, приобретаемого волной в плоском слое $ABCD$, часть которого занята линзой.



Решение $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi x^2}{\lambda f} = \pm kx^2/(2f)$, где f — фокусное расстояние линзы: $f^{-1} = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2)$; знак «+» («−») для рассеивающей (фокусирующей) линзы.

3. Найти, используя интеграл Кирхгофа (обобщенный принцип Гюйгенса), изображение предмета, расположенного на расстоянии a от тонкой линзы (фокусное расстояние f; изображение получается с помощью параксиального пучка света на расстоянии b, удовлетворяющем формуле линзы $1/a + 1/b = 1/f$).

Решение

Рассмотрим задачу о получении изображения точки A, которая находится слева от плоскости линзы на расстоянии a. Найдем поле в плоскости линзы (перед линзой).

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{k}{2\pi i z} \iint_S E(S) \exp\left\{ i \left(kz - \omega t + k \frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{2z} \right) \right\} dxdy,$$

здесь z — расстояние от плоскости интегрирования (предмета) до линзы. В нашем случае $z = a$, а поле $E(S)$ в плоскости предмета $E(S) = E_0 S_0 \delta(x - x_A)\delta(y)$. Тогда после интегрирование по плоскости изображения получим

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{k S_0}{2\pi i a} E_0 \exp\left\{ ik \left(a + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} \right) \right\}.$$

Поле в плоскости $z = b$ определяется фазовым множителем линзы и интегралом Кирхгофа по апертуре линзы.

$$E_b = \frac{k}{2\pi i b} e^{ikb} \iint_D E(x_L, y_L, 0) \exp\left\{ ik \frac{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2}{2b} - \right.$$
$$\left. -ik \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F} dx_L dy_L \right\}$$

Подставив выражение для $E(x_L, y_L, 0)$, получим

$$E_b = -\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 ab} E_0 \iint_D e^{i\varphi(x_L, y_L)} dx_L dy_L,$$

где

$$\varphi(x_L, y_L) = k \left\{ (a + b) + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} + \frac{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2}{2b} - \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F} \right.$$

$$\varphi(x_L, y_L) = k(a+b) - k \cdot x_L \left\{ \frac{x_A}{a} + \frac{x_B}{b} \right\} - k \cdot y_L \frac{y_B}{b} + \frac{k}{2} \left\{ \frac{x_B^2 + y_B^2}{b} + \frac{x_A^2}{a} \right\}$$

Квадратичные по x_L и y_L члены выражения взаимно сократились в связи с тождеством $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$.

После вычисления интеграла по аппертуре линзы (считая линзу квадратной, $\pm D/2$ по обеим координатам), и вычисления квадрата модуля амплитуды, получим для интенсивности в плоскости $z = b$

$$I_B = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 ab} D^2 E_0 \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_x}{U_x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_y}{U_y} \right)^2,$$

где

$$U_x = \frac{kD}{2}\left(\frac{x_A}{a} + \frac{x_B}{b}\right);\ \ U_y = \frac{kD}{2}\cdot\frac{y_B}{b}.$$

Из приведенного результата видно, что максимум интенсивности изображения приходится на точку, в которой $U_x = U_y = 0$; $x_{B0} = -x_A/a * b$; $y_{B0} = y_A = 0$, что соответствует законам геометрической оптики. А «размытие» пятна точечного источника определяется соотношением $U_x \sim U_y \sim \pi$, что соответствует $\triangle x_B \sim \triangle y_B \sim \frac{\lambda}{D} b$.

4. Показать, что если предмет расположен в передней фокальной плоскости линзы, то распределение амплитуд поля в задней фокальной плоскости представляет собой фурье-образ функции пропускания предмета. Рассмотреть, что получится, если предмет расположен вплотную к линзе.

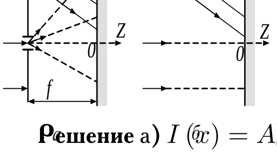
5. Найти создаваемое линзой конечной апертуры изображение точечного источника, находящегося на оси линзы (ограничиться приближением Фраунгофера).

Решение В плоскости изображения $I(\alpha) = I_0 \frac{J_1^2(\alpha D/\lambda)}{\alpha^2}$, где I_0 — интенсивность в апертуре линзы; D — ее диаметр; J_1 — функция Бесселя. *Указание.* Воспользоваться при вычислениях разложением из задачи 3.84.

6. На длиннофокусную собирающую линзу с ирисовой диафрагмой падает параллельный пучок монохроматического света. На расстоянии a от линзы помещен экран, на котором наблюдаются дифракционные кольца. При каких радиусах диафрагмы центр колец будет темным и при каких светлым, если фокусное расстояние линзы равно f?

Решение $R = \sqrt{\frac{ma\lambda f}{|a-f|}}$: светлые при нечетном и темный при четном m.

7. Найти распределение интенсивности I по поверхности голограммы, полученной при перекрытии опорной плоской волны (попавшей на голограмму после прохождения тонкой призмы с углом преломления $\alpha \ll 1$ и показателем преломления n), и а) предметной сферической волны от точечного источника, расположенного на расстоянии f от голограммы; б) плоской предметной волны.



Решение а) $I(x) = A_0^2 + A^2(x) + 2A_0 A(x)\cos\left(\beta x + \frac{kx^2}{2f}\right)$, где $A_0\ (A(x))$ — амплитуда опорной плоской (предметной сферической) волны, $\beta = k\alpha(n-1)$; б) $I(x) = A_0^2 + A^2 + 2A_0 A\cos k\theta x$, где $A_0(A)$ — амплитуда опорной плоской (предметной плоской) волны, θ — угол между опорной и предметной волнами.

8. Найти пропускание T голограмм, полученных в предыдущей задаче (голограммы проявлены до коэффициента контрастности $\gamma = -2$, где $T \sim I^{-\gamma/2}$; считать, что при экспонировании голограмм интенсивность опорной волны была много больше интенсивности предметной волны). Найти волновое поле за голограммами в обоих случаях при освещении ее нормально падающей плоской волной (той же длины волны).

Решение а) Поле за голограммой:

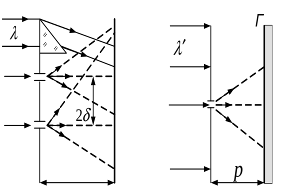
$$U(x) \simeq \left(A_0^2 + A^2\right) e^{ikz} + A_0 A e^{ikz} \cdot e^{i\left(\beta x + \frac{kx^2}{2f}\right)} + A_0 A e^{ikz} \cdot e^{-i\left(\beta x + \frac{kx^2}{2f}\right)};$$

первый член описывает плоский неотклоненный пучок, второй (третий) действует как комбинация призмы, отклоняющей вверх (вниз), и рассеивающей (собирающей) линзы с фокусным расстоянием f, т. е. описывает изображение предмета; б) Поле за голограммой

$$U(x) = A_0 a e^{ikz} + A_0 e^{i(kz+\theta x)} + A_0 b e^{i(kz-\theta x)},$$

где $a = A_0^2 + \frac{\gamma}{2} A^2$, $b = 2\gamma A_0 A$; первый член описывает неотклоненный центральный пучок, а второй (третий) — пучок первого порядка, отклоненный на θ $(-\theta)$.

9. Найти распределение интенсивности по поверхности голограммы, полученной при перекрытии плоского опорного и двух сферических предметных пучков (отверстия находятся в плоскости призмы на расстоянии 2δ друг от друга). Голограмма проявлена до коэффициента контрастности $\gamma = -2$. Изображение восстанавливается с помощью точечного источника, размещенного на расстоянии p от голограммы и имеющего другую длину волны λ'. Найти волновое поле за голограммой и описать физический смысл получившихся выражений. Показать, что: а) действительное изображение находится на расстоянии q от голограммы, таком, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\lambda'}{\lambda f}$; б) линейное увеличение равно $M = \frac{2\Delta}{2\delta} = 1 + \frac{q}{p}$.

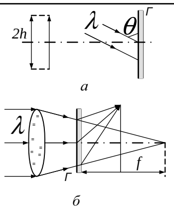


а б

Решение $U(x) = A_0^2 + A^2 \left(1 + \cos \frac{2kx\delta}{f}\right) +$

$$+A_0 A e^{i\beta x} \left[e^{\frac{ik(x-\delta)^2}{2f}} + e^{\frac{ik(x+\delta)^2}{2f}}\right] + A_0 A e^{-i\beta x} \left[e^{\frac{-ik(x-\delta)^2}{2f}} + e^{\frac{-ik(x+\delta)^2}{2f}}\right].$$

10. Голограмму экспонировали по схеме голографии Френеля.



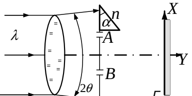
Опорный угол — θ, расстояние от предмета с поперечным размером $2h$ до фотопластинки — l (см. рисунок *а*). Голограмму восстанавливают в лазерном пучке света, сфокусированном на расстоянии f от нее (см. рисунок *б*). Найти расстояние от изображения до голограммы и его размер.

Решение $l' = lf/\left(l+f\right)$; увеличение равно l'/l.

11. Рассмотреть предыдущую задачу при восстановлении изображения с помощью расходящегося пучка света.

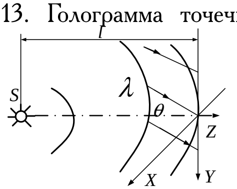
Решение В ответе предыдущей задачи нужно сменить знак f.

12. Голограмму экспонируют по схеме Френеля в пучке света длиной волны λ, расходящемся в конусе с углом θ. Найти расстояние между изображениями двух точечных источников A и B при восстановлении голограммы с помощью плоского пучка.



Решение См. ответ к задаче 3.117.

13. Голограмма точечного источника S экспонируется по схеме Френеля. Разрешение фотоматериала $\delta \gtrsim \lambda$ (длины волны излучения). Какой минимальный размер фотопластинки нужно выбрать, чтобы зря не расходовать фотоматериалы и записать (с учетом конечного разрешения δ) максимальную информацию об объекте? Где при этом должен быть центр пластинки? Найти распределение плотности почернения по поверхности голограммы $I(x,y)$.



Решение $R \leq \lambda l/\delta$. Координаты центра пластинки: $x = 0, y = l\sin\theta$. $I\left(x,y\right) = I_0 + \alpha\sqrt{I_0}\cos^2\left(\frac{kR^2}{2l}+\varphi\right)$, $\varphi = kl - ky\sin\theta$ и $R^2 = x^2 + \left(y - l\sin\theta\right)^2 - l^2\sin^2\theta$.

14. Фурье-голограмму точечного предмета регистрируют на фотопластинке в пучке света длиной волны λ, а восстанавливают в пучке света длиной волны λ'. Найти изображение, если предмет и опорный пучок отстояли на расстоянии Δ. Рассмотреть безлинзовый и линзовый варианты.

Решение *Указание*. Опорное и «предметное» отверстия можно рассматривать как интерференционную схему Юнга.

15. Голограмма Фурье точечного предмета при проявлении получила переменную толщину чувствительного слоя $d(x)=d_0-\varkappa x^2$. Как изменится изображение предмета при восстановлении?

Решение Изображение будет сфокусировано на расстоянии $1/(2\cdot\varkappa)$ от голограммы.

16. Сравнить разрешающие способности голограммы Френеля и Фурье (рассмотреть схемы, использованные в задачах 3.112 и 3.118).

Решение Разрешающая способность голограммы Френеля ограничена зернистостью фотоэмульсии, а голограмма Фурье — полным размером голограммы.

17. Голограмма получена при экспонировании толстослойной эмульсии (голограмма Денисюка), на которую под углом α падает опорный плоский пучок (длина волны — λ), а под углами β_i $(i=1,2)$ — две «предметных» плоских волны. а) Под каким углом следует освещать голограмму при восстановлении? б) Какова при этом разница между действительным и мнимым изображениями? в) Что будет, если при восстановлении голограмму освещать белым светом?

Решение а) Голограмму следует освещать пучком, падающим под углом α (угол падения опорного пучка); при этом восстанавливается полное мнимое изображение «предмета». б) При освещении голограммы пучком под углом β_i (один из «предметных» пучков) восстанавливается лишь часть действительного изображения предмета. *Указание*. Учесть, что голограмма Денисюка представляет собой систему зеркальных слоев серебра фотоэмульсии, расстояние между которыми равно $d_i=\lambda/\left[2\sin\left(\frac{\alpha+\beta_i}{2}\right)\right]$ для каждого из «предметных» пучков.

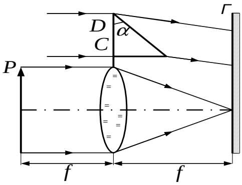
18. Голограмма Денисюка (см. предыдущую задачу) экспонирована последовательно в свете трех лазеров (с разными λ). Найти изображение, полученное при восстановлении в белом свете.

Решение Восстанавливается цветное изображение предмета.

19. Найти функцию пропускания голограммы при голографировании объекта, колеблющегося с амплитудой a и частотой ω, такой, что время экспозиции голограммы $T\gg 2\pi/\omega$. Колебания происходят вдоль оси, перпендикулярной плоскости голограммы.

Решение а) $T\left(x\right)\sim J_0^2\left(k\alpha a\right)$, где $\alpha=x/l\ll 1$, l — расстояние до голограммы, J_0 — функция Бесселя. *Указание*. Записать «предметную» плоскую волну, отражающуюся от объекта в момент времени t.

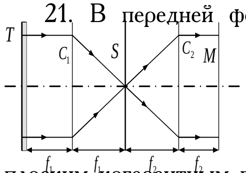
20. Предмет P (функция пропускания $G_0(x,y)$) находится в передней



фокальной плоскости линзы C, расположенной в одной плоскости с призмой D (преломляющий угол α). Предмет и призма освещены плоским когерентным пучком света. Найти функцию пропускания голограммы, расположенной в задней фокальной плоскости линзы (получение фильтра, согласованного с предметом). Указание: использовать результаты задач 3.107 и 3.111.

Решение $T(x) \sim g^2 + a_0 g e^{ik\theta x} + a_0 g^* e^{-ik\theta x}$, где $g(x)$ — Фурье-образ функции пропускания предмета G_0; a_0 — амплитуда опорной волны; θ — угол преломления одного пучка призмой.

21. В передней фокальной плоскости линзы C_1 находится транспарант T с функцией пропускания $F_0(x_0, y_0)$; в задней фокальной плоскости этой линзы размещен фильтр S, согласованный с фрагментом $G_0(x_0, y_0)$ изображения на транспаранте (см. предыдущую задачу). Транспарант освещен плоским когерентным пучком. Найти изображение в задней фокальной плоскости объектива C_2, расположенного так, что фильтр S находится в передней фокальной плоскости этого объектива.

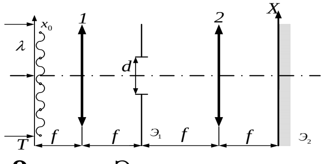


Решение В плоскости M под соответствующим углом наблюдается изображение транспаранта T; на месте фрагмента G наблюдается светящаяся «точка», размер которой близок к размеру фрагмента. *Указание.* Разделить функцию пропускания из предыдущей задачи на искомый фрагмент и остальную часть.

22. Найти спектр пространственных частот при прохождении плоской волны длиной λ через фильтр с функцией пропускания $T(x) = T_0 + \tau\cos(\varkappa x)$, $(T_0 + \tau \lesssim 1)$.

Решение $F(k) \sim T_0\delta(k) + \frac{\tau}{2}\left[\delta(k+\varkappa) + \delta(k-\varkappa)\right]$, т. е. после фильтра имеется неотклоненный пучок к два пучка, идущих под углами $\pm\varkappa\lambda/(2\pi)$ к оси системы.

23. Найти распределение интенсивности по экрану $Э_2$, если пропускание транспаранта $T(x) = T_0 + \tau\cos(\varkappa x)$, а размер щели в экране $Э_1$ $d < \varkappa\lambda f/\pi$. Расстояния между экранами, одинаковыми линзами *1* и *2* и транспарантом равны фокусному расстоянию f линз.



Решение Экран равномерно освещен.

24. В установке, рассмотренной в предыдущей задаче, в качестве транспаранта использована полупрозрачная фотография, сделанная в снегопад. Каким должен быть

размер щели d, чтобы «убрать» изображение падающего снега в плоскости экрана $Э_2$? Чем определяется разрешение «исправленной» фотографии?

Решение $d < \lambda f / (\pi a)$, где a — характерный размер изображения снежинки на фотографии, $\Delta x_{\min} \gtrsim a$. *Указание*. Изображение снега на фотографии в плоскости экрана $Э_1$ описывается пространственной частотой $\varkappa \sim 1/a$.

25. Разрешение «исправленной» фотографии при «очистке от снега» (см. предыдущую задачу) можно улучшить, если в плоскости транспаранта T поместить еще один транспарант с функцией пропускания $T_1(x) = T_0' + \tau' cos(\varkappa_1 x_0)\,, (\tau' \ll T_0', \tau_1 + T' \approx 1)$. Как нужно выбрать $\varkappa_1$, чтобы добиться этого улучшения? Чем теперь определяется разрешение?

Решение $\frac{1}{a} - \frac{\pi d}{\lambda f} < \varkappa_1 < \frac{1}{a} + \frac{\pi d}{\lambda f}$, $\Delta x_{\min} \approx \frac{1}{|\varkappa_1 - 1/a|} < a$. *Указание*. Фильтр T_1 в плоскости экрана $Э_1$ преобразует спектр пространственных частот: $\varkappa \to \pm (\varkappa \pm \varkappa_1)$, где $\varkappa$ — пространственная частота снега.

26. В установке, рассмотренной в задаче 3.130, вместо транспаранта помещена решетка из взаимно перпендикулярных нитей толщиной d и расстоянием a между осями нитей. Щель в экране $Э_1$ параллельна одному из двух направлений нитей. Как будет меняться изображение на экране $Э_2$ по мере уменьшения размера щели? (Опыт Аббе—Портера.)

Решение Если $d \lesssim \lambda f / (\pi a)$, то изображение нитей, параллельных щели, исчезнет.