ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим уравнения Максвелла в однородной среде без токов проводимости и объемных зарядов:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{D} = 0\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\tfrac{\partial\mathbf{B}}{c\partial t}\\ &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \tfrac{\partial\mathbf{D}}{c\partial t}\\ &\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Возьмем rot от обеих частей третьего уравнения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{rot}\tfrac{\partial\mathbf{D}}{c\partial t}.$$

Используя тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \nabla\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}$, получим

$$\nabla\operatorname{div}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H} = \frac{\varepsilon\partial\operatorname{rot}\mathbf{E}}{c\partial t}.$$

Учтем, что в однородной среде $\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, и подставим $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ из второго уравнения (1):

$$-\Delta\mathbf{H} = -\frac{\varepsilon\mu\partial^2\mathbf{H}}{c^2\partial t^2}.$$

Получили *волновое уравнение* для **H**, которое обычно записывается в виде

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r},t) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{2}$$

Поскольку система уравнений (1) симметрична относительно замены $\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}$, $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$, то можно без вывода также записать *

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{3}$$

ПЛОСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА

Рассмотрим такое распределение полей **E** и **H**, которое при соответствующем выборе координатных осей может быть записано как

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}(z,t),\ \ \mathbf{H}(x,y,z,t) = \mathbf{H}(z,t).$$

Покажем, что данное решение за пределами статики возможно только в виде плоской поперечной волны.

Выпишем во 2-м и 3-м уравнениях системы (1) $z-$компоненты:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial E_x}{\partial y} - \tfrac{\partial E_y}{\partial x} = 0 = -\mu\tfrac{\partial H_z}{c\partial t}\\ &\tfrac{\partial H_x}{\partial y} - \tfrac{\partial H_y}{\partial x} = 0 = -\varepsilon\tfrac{\partial E_z}{c\partial t}. \end{aligned}$$

*Не забудем, что при выводе (2) использовалось, что $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$. Соответственно (3) справедливо, если $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, то есть в отсутствие объемных зарядов.

Уравнения 1 и 4 системы (1) сведутся к

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \mu\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Отсюда видно, что поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ могут иметь ненулевую $z-$компоненту только при одновременном выполнении условий

$$E_z(\mathbf{r}) = \mathrm{const},\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0,$$
$$H_z(\mathbf{r}) = \mathrm{const},\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0,$$

то есть существование $z-$компоненты у переменного электромагнитного поля не возможно.

Далее без ограничения общности будем рассматривать поле $\mathbf{E}$. Волновое уравнение имеет вид

$$\Delta E(z,t) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(z,t) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет общее решение в виде *плоской* волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{f}_1\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\cdot t\right) + \mathbf{f}_2\left(z + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\cdot t\right). \tag{5}$$

Решение (5) описывает распределение векторного поля, которое движется без изменения формы со скоростью $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ вдоль z (прямая волна), а также в противоположном направлении с той же скоростью (обратная волна).

Теперь установим связь между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в плоской электромагнитной волне.

1. Случай волны, распространяющейся вдоль z ($\xi = z - ut, \nabla\xi = \mathbf{e}_z = +\mathbf{n}$) *:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\cdot(-u) = \frac{u}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi} = \frac{c}{u}\cdot\mathbf{E} = \sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\mathbf{E}.$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = [\nabla\times\mathbf{A}] = \left[\nabla\xi\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\right] = \sqrt{\varepsilon\mu}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\,.$$

2. Случай волны, распространяющейся вдоль $-z$ ($\xi = z + ut, \nabla\xi = \mathbf{e}_z = -\mathbf{n}$):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\cdot u = -\frac{u}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi} = -\frac{c}{u}\cdot\mathbf{E} = -\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\mathbf{E}.$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = [\nabla\times\mathbf{A}] = \left[\nabla\xi\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\right] = -\sqrt{\varepsilon\mu}\,[-\mathbf{n}\times\mathbf{E}] = \sqrt{\varepsilon\mu}\,[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\,.$$

Отсюда видно свойство *поперечности* плоской электромагнитной волны.

---

*Здесь и всюду ниже $u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, $\mathbf{A}$ – вектор-потенциал.

Из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ следует, что в общем случае

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi,$$

где φ – произвольная скалярная функция пространственных координат. В нашем случае зарядов нет, поэтому скалярный потенциал можно положить равнум нулю.