Домашняя работа к занятию 12

1.1 Используя матричную экспоненту, решите матричные задачи Коши ($\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$ — искомая матрица, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — числовые матрицы)

а) $\begin{cases} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{B} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{A} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{B} \end{cases}$

1.2 Известно, что $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t)$ и $\det \mathbf{Y}(0) \neq 0$. Какому уравнению удовлетворяет матрица $\mathbf{Y}^{-1}(t)$?

1.3 Решите матричную задачу Коши $\begin{cases} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{C} \end{cases}$ при условии, что матрица $\mathbf{A}$ невырождена ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — числовые матрицы).

2.1 Найдите матричную экспоненту для матрицы $\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Найдите предел $\exp(\mathbf{A}_\varepsilon t)$ при $\varepsilon \to 1$ и убедитесь, что $\exp(\mathbf{A}_\varepsilon t)$ непрерывно зависит от ε.

2.2 Матрица $\mathbf{A}$ размера $(2n \times 2n)$ имеет следующую блочную структуру: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{B}$ — матрица размера $(n \times n)$. Найдите $\exp(\mathbf{A}t)$.

2.3 Решите матричную задачу Коши $\begin{cases} \ddot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}^2\, \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{E},\ \dot{\mathbf{Y}}(0) = \mathbf{0} \end{cases}$

3.1 Докажите, что если $\mathbf{A}$ — кососимметрическая матрица (то есть $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$), то $\exp \mathbf{A}$ — ортогональная матрица.

3.2 Пусть все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ имеют отрицательную вещественную часть. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \exp(\mathbf{A}t)dt$ сходится и

$$\mathbf{A}^{-1} = -\int\limits_0^{+\infty} \exp(\mathbf{A}t)dt.$$

Предложите аналогичную формулу для вычисления $\mathbf{A}^{-1}$, если все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ имеют положительную вещественную часть.

Используя эти формулы, найдите $\mathbf{A}^{-1}$ в случае, когда матрица $\mathbf{A}$ является жордановой клеткой с собственным значением $\lambda_0 \neq 0$.

Ответы и указания

1.1 а) $\mathbf{Y} = \exp(\mathbf{A}t) \cdot \mathbf{B}$, б) $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \exp(\mathbf{A}t)$

1.2 *Указание*: матрица $\mathbf{Y}(t)$ невырождена во всех точках t, если $\det \mathbf{Y}(t_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке t_0.

Ответ: $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{Y}^{-1}) = -\mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{A}$

1.3 $\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{A}t)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

2.1 *Указание*: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \varepsilon$, $\lambda_3 = 2$.

Ответ: $\exp(\mathbf{A}_\varepsilon t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^t - \varepsilon e^{\varepsilon t}}{1-\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon(e^t - e^{\varepsilon t})}{1-\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon(e^{\varepsilon t} - e^t)}{1-\varepsilon} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ \dfrac{e^t - e^{\varepsilon t}}{1-\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon e^t - e^{\varepsilon t}}{1-\varepsilon} + e^{2t} & \dfrac{e^{\varepsilon t} - \varepsilon e^t}{1-\varepsilon} \end{pmatrix}$

$$\lim_{\varepsilon \to 1} \exp(\mathbf{A}_\varepsilon t) = \begin{pmatrix} e^t + te^t & te^t & -te^t \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ te^t & -e^t + te^t + e^{2t} & e^t - te^t \end{pmatrix}$$

2.2 $\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\mathbf{B}t) & \operatorname{sh}(\mathbf{B}t) \\ \operatorname{sh}(\mathbf{B}t) & \operatorname{ch}(\mathbf{B}t) \end{pmatrix}$

2.3 $\mathbf{Y}(t) = \operatorname{ch}(\mathbf{A}t) = \dfrac{1}{2}\big(\exp(\mathbf{A}t) + \exp(-\mathbf{A}t)\big)$

3.1 *Указание*: воспользуйтесь представлением $\exp \mathbf{A}$ в виде «степенного» ряда.