Линейная независимость

Координаты векторов

Задача 1

Докажите, что вектора a_1, a_2, a_3 линейно независимы, где

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Определение

Вектора $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются линейно независимыми, если

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \underset{\text{вектор}}{\underset{\uparrow}{0}} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \underset{\text{число}}{\underset{\uparrow}{0}}$$

Другими словами:

Система линейных уравнений $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ имеет единственное решение (нулевое).

Задача 1

Докажите, что вектора a_1, a_2, a_3 линейно независимы, где

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Докажем, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ *имеет только нулевое решение*:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

А где СЛУ?

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Задача 2

Найти координаты вектора b в базисе a_1, a_2, a_3, где

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Найти координаты вектора b в базисе a_1, a_2, a_3, где

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора: $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Найти координаты вектора b в базисе a_1, a_2, a_3, где

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора: $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Найти координаты вектора b в базисе a_1, a_2, a_3, где

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора: $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1/2$, $\beta_3 = -3/2$

Задача № 681

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$a_1 = [1,\ 2,\ 3,\ -4]^T,\ a_2 = [2,\ 3,\ -4,\ 1]^T,\ a_3 = [2,\ -5,\ 8,\ -3]^T,$$
$$a_4 = [5,\ 26,\ -9,\ -12]^T,\ a_5 = [3,\ -4,\ 1,\ 2]^T.$$

План:

1) Найти линейно независимые вектора

2) Найти координаты остальных векторов

Задача 4

Найдите множество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Задача 4

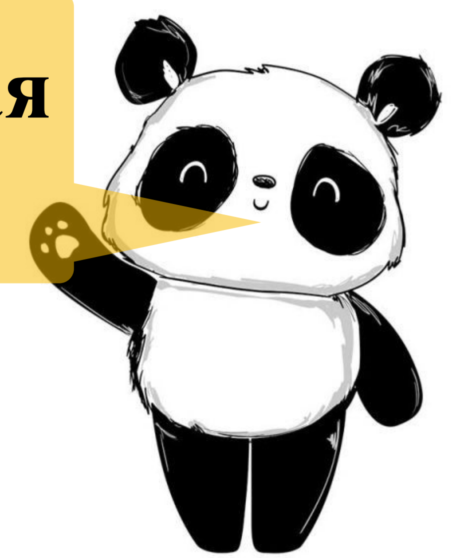
Найдите множество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 15x_3 + 10x_4, \\ x_2 = -7 + 18x_3 - 12x_4, \\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Неопределённая СЛУ



Задача 4

Найдите множество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Ответ:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -15 \\ 18 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_3,\ x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Линейное многообразие

Задача 5

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[1,\ 2,\ 0,\ 1]^T + \alpha[3,\ 1,\ 1,\ 0]^T + \beta[2,\ -2,\ 0,\ 1]^T\}$$

Частное решение полученной СЛУ

(нужно для проверки 😉)

Ответ: $\begin{cases} x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

Задача № 724

Найдите ФСР системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Не успели…