СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
Лекция 2 Идеальный ферми-газ.

Образовский Е. Г.

21 сентября 2022 г.

План лекции:

Идеальный ферми-газ

План лекции:

- **напоминание: основные результаты предыдущей лекции**

Идеальный ферми-газ

План лекции:

- **напоминание: основные результаты предыдущей лекции**
- **условия идеальности вырожденного ферми-газа**

Идеальный ферми-газ

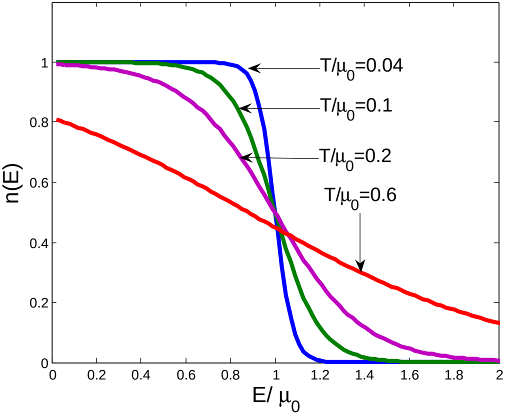
План лекции:

- напоминание: основные результаты предыдущей лекции
- условия идеальности вырожденного ферми-газа
- свойства идеального ферми-газа при низких температурах

Статистика Ферми-Дирака

Среднее значение чисел заполнения уровней с энергией ε_i есть

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \qquad (1)$$



Статистика Ферми-Дирака

Среднее число частиц (электронов) в системе определяется химическим потенциалом

$$\bar{N} = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \approx \int \frac{2V 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \qquad (2)$$

Средняя энергия есть

$$\bar{E} = \sum_i \varepsilon_i \bar{n}_i \approx \int \frac{2V 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \qquad (3)$$

Вырожденный ферми-газ

Среднее число частиц в системе определяется граничным импульсом Ферми $p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$ соотношением

$$N = \int_0^{p_F} \frac{2V4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{Vp_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \tag{4}$$

Откуда

$$p_F = \hbar\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}, \quad \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{5}$$

Средняя энергия равна

$$E = \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m}\frac{2V4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{3N\hbar^2}{10m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{6}$$

Давление вырожденного ферми-газа отлично от нуля даже при нулевой температуре и равно

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = \frac{2N\hbar^2}{10mV}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3} = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\varepsilon_F. \tag{7}$$

Условие идеальности вырожденного ферми-газа

Для вырожденного нерелятивистского электронного газа условие идеальности

$$\varepsilon_F \sim \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \gg \frac{e^2}{\bar{r}} \sim e^2\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}, \qquad (8)$$

где $\bar{r}$ – характерное расстояние между электронами, перепишем в таком виде

$$\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \gg \frac{e^2 m}{\hbar^2} = \frac{1}{a_B} \sim 10^8\ cm^{-1}, \qquad (9)$$

т. е. чем больше плотность ферми-газа, тем более он идеальный! Для электронного газа в металле условие идеальности выполняется плохо, для звезд типа белых карликов – с большим запасом.

Условие идеальности вырожденного ферми-газа

Для вырожденного ультрарелятивистского электронного газа условие идеальности

$$\varepsilon_F \sim c\hbar \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \gg e^2 \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}, \tag{10}$$

где c – скорость света, выглядит так

$$\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \ll 1, \tag{11}$$

т. е. выполняется независимо от плотности (лишь бы она была достаточно большой, чтобы электроны были ультрарелятивистские).

Условие идеальности вырожденного ферми-газа

Учет принципа Паули ослабляет условия идеальности: рассеиваться могут лишь электроны, импульсы которых лежат вблизи поверхности Ферми в слое размером $\sim T$ (в силу законов сохранения энергии и импульса и с учетом, что конечные состояния рассеянных частиц должны быть свободны).

Ферми-газ при $T \ll \mu$

Рассмотрим тепловые свойства идеального ферми-газа при низких температурах $T \ll \mu$. Качественно можно оценить теплоемкость ферми-газа так. При взаимодействии с термостатом частица получает энергию $\sim T$, но в силу принципа Паули эту энергию могут получить только частицы, лежащие вблизи поверхности Ферми в слое толщиной $\sim T$. Таким образом изменение энергии ферми-газа при взаимодействии с термостатом $\Delta E \sim T \cdot TN/\mu$, так что $C \sim NT/\mu \ll N$.

Ферми-газ при $T \ll \mu$

Для количественного описания необходимо научиться вычислять интегралы вида

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}, \qquad (12)$$

при $T \ll \mu$, где $g(\varepsilon)$ медленно (по сравнению с $n(\varepsilon)$)меняющаяся функция. Выделяем из интеграла основной вклад

$$\int\limits_0^\mu g(\varepsilon) d\varepsilon. \qquad (13)$$

Ферми-газ при $T \ll \mu$

Остается два члена:

$$I_1 = \int\limits_0^\mu g(\varepsilon)d\varepsilon \left(\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} - 1 \right) = -\int\limits_0^\mu \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(-\varepsilon+\mu)}+1}, \qquad (14)$$

$$I_2 = \int\limits_\mu^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}, \qquad (15)$$

Ферми-газ при $T \ll \mu$

В первом интеграле делаем замену переменной $x = \beta(\mu - \varepsilon)$, так что $\varepsilon = \mu - x/\beta$, $d\varepsilon = -dx/\beta$, пределы $\varepsilon = 0 \to x = \beta\mu$, $\varepsilon = \mu \to x = 0$. Тогда

$$I_1 = -\int_0^{\beta\mu} \frac{g(\mu - x/\beta)dx/\beta}{e^x + 1} \approx -\int_0^{\infty} \frac{g(\mu - x/\beta)dx/\beta}{e^x + 1}, \qquad (16)$$

где в последнем равенстве использовали условие $\beta\mu \gg 1$.

Аналогично во втором интеграле делаем замену переменной $x = \beta(\varepsilon - \mu)$, так что $\varepsilon = \mu + x/\beta$, $d\varepsilon = dx/\beta$, пределы $\varepsilon = \mu \to x = 0$, $\varepsilon = \infty \to x = \infty$. Тогда

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{g(\mu + x/\beta)dx/\beta}{e^x + 1}. \tag{17}$$

Ферми-газ при $T \ll \mu$

Объединяя два интеграла и разлагая медленно меняющуюся функцию g получаем

$$I_1 + I_2 = \frac{2g'(\mu)}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2 T^2 g'(\mu)}{6}. \tag{18}$$

Окончательно

$$I = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \approx \int_0^\mu g(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2 T^2 g'(\mu)}{6}. \tag{19}$$

Ферми-газ при $T \ll \mu$

Вычислим теплоемкость газа из N электронов в ящике объема V. Число электронов связано с химическим потенциалом соотношением

$$N = A\int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \approx A\left(\frac{2}{3}\mu^{3/2} + \frac{\pi^2 T^2 \mu^{-1/2}}{12}\right), \qquad (20)$$

где $A \equiv m^{3/2}\sqrt{2}/(\pi^2\hbar^3)$. Из условия постоянства числа частиц следует зависимость химического потенциала от температуры

$$A\frac{2}{3}\mu_0^{3/2} = A\frac{2}{3}\mu^{3/2}\left(1 + \frac{\pi^2 T^2}{8\mu_0^2}\right), \qquad (21)$$

Таким образом

$$\mu = \mu_0\left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{12\mu_0^2}\right), \qquad (22)$$

Ферми-газ при $T \ll \mu$

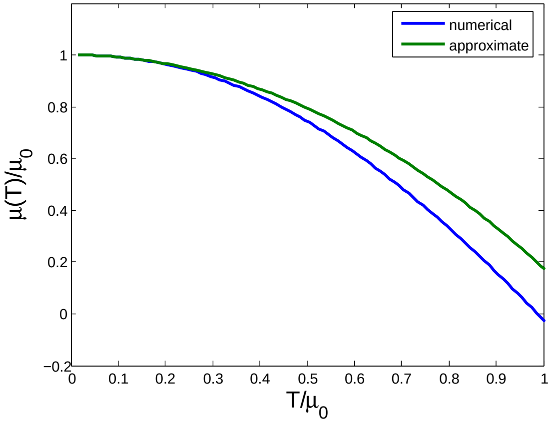


Рис.: Зависимость химического потенциала μ от температуры T

Ферми-газ при $T \ll \mu$

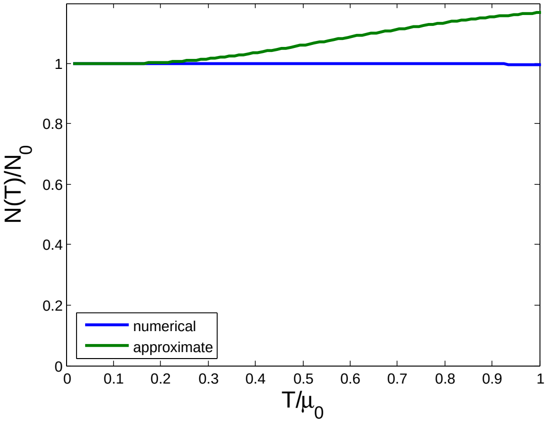


Рис.: Зависимость числа частиц N от температуры T

Ферми-газ при $T \ll \mu$

Аналогично средняя энергия равна

$$E = A \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \approx A \left(\frac{2}{5}\mu^{5/2} + \frac{\pi^2 T^2 \mu^{1/2}}{4} \right), \tag{23}$$

Поделив это выражение на число частиц, получим

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5}\mu_0 \left(1 + \frac{5\pi^2 T^2}{12\mu_0^2} \right), \tag{24}$$

Теплоемкость равна

$$C_V = \frac{\pi^2 T}{2\mu_0} N \sim \frac{m T N^{1/3} V^{2/3}}{\hbar^2}. \tag{25}$$

Отметим, что для $T \ll \mu$

$$C_V \ll N. \tag{26}$$

Ферми-газ при $T \ll \mu$

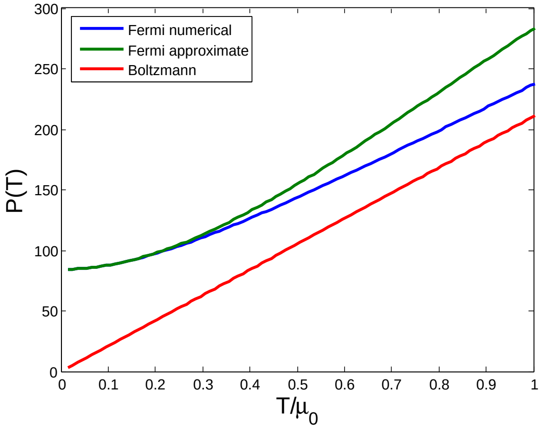


Рис.: Зависимость давления P от температуры T

Парамагнитная восприимчивость электронов

Магнитный момент равен

$$M = \alpha(N_+ - N_-) = \alpha A \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \left[\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \alpha H - \mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon + \alpha H - \mu)} + 1} \right] \approx$$

$$\approx \alpha \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial \mu} 2\alpha H, \qquad (27)$$

где $\alpha = e\hbar/2mc$ – собственный магнитный момент электрона.

При $T \ll \mu_0$ из

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{12\mu_0^2}\right) = \mu_0 - \frac{\pi^2 T^2}{12\mu_0} \qquad (28)$$

находим

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = \frac{\partial \mu_0}{\partial N} \left(1 + \frac{\pi^2 T^2}{12\mu_0^2}\right) = \frac{3\mu_0}{2N} \left(1 + \frac{\pi^2 T^2}{12\mu_0^2}\right). \qquad (29)$$

Тогда магнитный момент равен

$$M = \alpha^2 H \frac{2N}{3\mu_0}\left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{12\mu_0^2}\right), \tag{30}$$

а парамагнитная восприимчивость

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \alpha^2 \frac{2N}{3\mu_0}\left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{12\mu_0^2}\right). \tag{31}$$

При $T \gg \mu_0$ парамагнитная восприимчивость равна

$$\chi = \alpha^2 \frac{N}{T}. \tag{32}$$

Адиабата ферми-газа

Энтропию удобно вычислить с помощью Ω-потенциала:

$$\Omega = F - \mu N \quad \to \quad d\Omega = -SdT - PdV + \mu dN - \mu dN - Nd\mu =$$

$$= -SdT - PdV - Nd\mu. \tag{33}$$

При постоянном объеме

$$d\Omega = -SdT - Nd\mu \quad \to \quad S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{\mu}. \tag{34}$$

С другой стороны

$$\Omega = -T \ln Q = -TAV \int\limits_0^\infty \sqrt{\varepsilon} \ln\left(1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon)}\right) d\varepsilon =$$

$$= -\frac{2}{3} AV \int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} = -\frac{2}{3} AVT^{5/2} \int\limits_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^{-\mu/T} e^x + 1}. \tag{35}$$

Адиабата ферми-газа

Тогда

$$S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_\mu = \frac{5}{3}AVT^{3/2}\int\limits_0^\infty \frac{x^{3/2}dx}{e^{-\mu/T}e^x + 1} +$$

$$+\frac{2}{3}AVT^{5/2}\frac{\mu}{T^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu/T}e^x x^{3/2}dx}{\left(e^{-\mu/T}e^x + 1\right)^2}. \qquad (36)$$

Из условия постоянства числа частиц

$$N = AVT^{3/2}\int\limits_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^{-\mu/T}e^x + 1} \qquad (37)$$

следует, что величина μ/T есть функция от $VT^{3/2}$. Значит, как следует из предыдущей формулы, и энтропия есть функция от $VT^{3/2}$.

Адиабата ферми-газа

Давление равно

$$P = AT^{5/2} \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{3/2}dx}{e^{-\mu/T}e^x + 1}. \tag{38}$$

Если $S = Const$, то $VT^{3/2} = Const$, так что

$$P \sim T^{5/2} \sim V^{-5/3}. \tag{39}$$