Домашняя работа к занятию 27.

1.1 Найдите гармонические в прямоугольнике $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$ функции такие, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0; \quad u\Big|_{x=a} = 0; \quad u\Big|_{y=b} = 0.$$

1.2 Найдите гармонические в цилиндре $\rho \in [0; \rho_0]$, $z \in [0; h]$ функции, которые имеют вид $u(\rho; \varphi; z) = F(\rho) \cdot G(z) \cdot \cos\varphi$ и такие, что

$$u\Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0$$

1.3 Найдите гармонические в параллелепипеде $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$, $z \in [0; c]$ функции такие, что

$$u\Big|_{x=0} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0\,, \quad u\Big|_{y=b} = 0\,, \quad u\Big|_{z=c} = 0$$

2.1 Найдите решения уравнения Лапласа, которые в полярных координатах имеют вид $u(\rho; \varphi) = F(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$. Найдите гармоническую внутри круга $\rho \leqslant \rho_0$ функцию, которая удовлетворяет условию $u\Big|_{\rho=\rho_0} = \cos^2\varphi$.

2.2 Найдите все значения $\varkappa$, при которых уравнение Гельмгольца $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$ имеет в параллелепипеде G: $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$, $z \in [0; h]$ решение, удовлетворяющее на границе условию $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G} = 0$, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=c} = 0$$

3.1 Найдите все значения $\varkappa$, при которых уравнение Гельмгольца $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$ имеет в цилиндре $\rho \in [0;\rho_0]$, $z \in [0;h]$, решения, не зависящие от угла φ и такие, что на границе цилиндра

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} = 0.$$

3.2 Найдите все значения $\varkappa$, при которых уравнение Гельмгольца $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$ имеет в цилиндре $\rho \in [0;\rho_0]$, $z \in [0;h]$, решения такие, что на границе цилиндра производная по нормали обращается в ноль.

Ответы и указания.

1.1 $u_n(x;y) = \cos\dfrac{\pi(2n+1)}{2a}x \cdot \operatorname{sh}\dfrac{\pi(2n+1)}{2a}(y-b)$, $n \in \mathbb{N}$.

1.2 $u_n(\rho;\varphi;z) = \cos\varphi \cdot \sin\dfrac{\pi(2n+1)}{2h}z \cdot I_1\dfrac{\pi(2n+1)}{2h}\rho$, $n \in \mathbb{N}$.

1.3 $u_{mn}(x,y,z) = \sin(\alpha_m x)\cdot\cos(\beta_n y)\cdot \operatorname{sh}\sqrt{\alpha_m^2+\beta_n^2}\,(z-c)$,
где $\alpha_m = \dfrac{\pi(2m+1)}{2a}$, $\beta_n = \dfrac{\pi(2n+1)}{2b}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.1

$$u_0(\rho;\varphi) = A_0\cdot 1 + B_0\cdot\ln\rho,$$

$$u_n(\rho;\varphi) = \rho^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)), \quad n\in\mathbb{N}$$

$$u_{-n}(\rho;\varphi) = \rho^{-n}(C_n\cos(n\varphi) + D_n\sin(n\varphi)), \quad n\in\mathbb{N}$$

Так как $\cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$, то искомая функция $u = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(\dfrac{\rho}{\rho_0})^2\cos 2\varphi$

2.2 $u_{mnk}(x,y,z) = \cos(\alpha_m y)\cdot\cos(\beta_n y)\cdot\cos(\gamma_k z)$, где $\alpha_m = \dfrac{\pi m}{a}$, $\beta_n = \dfrac{\pi n}{b}$, $\gamma_k = \dfrac{\pi k}{c}$, $\varkappa^2_{mnk} = \alpha_m^2 + \beta_n^2 + \gamma_k^2$, $(m,n,k = 0,\ 1,\ 2, ...)$.

3.1 $\varkappa_{m0}^2 = (\frac{\pi m}{h})^2$, $u_{m0} = \cos(\frac{\pi m}{h}z) \cdot 1$, $m \in \mathbb{N}$;
$\varkappa_{0k}^2 = (\frac{\mu_k^1}{\rho_0})^2$, $u_{0k} = 1 \cdot J_0(\frac{\mu_k^1}{\rho_0}\rho)$, где $J_0'(\mu_k^1) = 0$, $k \in \mathbb{N}$
$\varkappa_{mk}^2 = (\frac{\pi m}{h})^2 + (\frac{\mu_k^1}{\rho_0})^2$, $u_{mk} = \cos(\frac{\pi m}{h}z) \cdot J_0(\frac{\mu_k^1}{\rho_0}\rho)$, где $J_0'(\mu_k^1) = 0$, $m,\ k \in \mathbb{N}$

3.2 $\varkappa_{0m0}^2 = (\frac{\pi m}{h})^2$, $u_{0m0} = \cos(\frac{\pi m}{h}z)$, $m = 0,\ 1,\ 2, ...$;
$\varkappa_{nmk}^2 = (\frac{\pi m}{h})^2 + (\frac{\nu_k^n}{\rho_0})^2$, $u_{nmk} = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot J_n(\frac{\nu_k^n}{\rho_0}\rho) \cdot \cos(\frac{\pi m}{h}z)$,
где $J_n'(\nu_k^n) = 0$, $m,\ n = 0,\ 1,\ 2, ...,\ k \in \mathbb{N}$.