Комбинаторика.

«Комбинаторика — это искусство подсчета мощностей конечных множеств, заданных тем или иным способом».

Правило суммы. Если множество S разбито на непересекающиеся подмножества $S_1, S_2, ..., S_k$, то $|S| = |S_1| + |S_2| + ... + |S_k|$.

Количество реализаций события $A \vee B$ для взаимоисключающих событий А и В равно сумме количеств реализаций событий А и В.

Правило произведения. Если множество S является декартовым произведением множеств $S_1, S_2, ..., S_k$, то $|S| = |S_1 \times ... \times S_k| = |S_1| \cdot ... \cdot |S_k|$.

Количество реализаций события $A \wedge B$ для независимых событий А и В равно произведению количеств реализаций событий А и В.

Решение задачи по комбинаторике — это, прежде всего, построение такой модели разбиения множества, которая позволяет применять правила суммы и произведения.

Пример. Имеется колода из $4n$ ($n \geq 5$) карт, которая содержит карты четырех мастей по n карт каждой масти, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Подсчитать сколькими способами можно выбрать 5 карт так, что среди них окажется не более двух карт каждой масти.

Решение. Разобьем подходящие наборы на два вида (2, 1, 1, 1) и (2, 2, 1, 0) по количеству карт в масти.

По правилу суммы достаточно подсчитать количество наборов каждого вида.

Подсчитаем количество наборов второго вида в два этапа. Вначале выберем масти, которые соответствуют 1 и 0 карт. По правилу произведения это можно сделать $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Затем выберем карты в каждой масти. 0 карт выбирается единственным способом. Одна карта n —способами. Две карты — $\frac{n(n-1)}{2}$ способами. Всего по правилу произведения получаем $12 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot n \cdot 1 = 3n^3(n-1)^2$ наборов второго вида.

Аналогично наборов первого вида 2 $n^4(n\text{-}1)$

Ответ. $S = 2n^4(n-1) + 3n^3(n-1)^2$

Простейшие формулы.

	Перестановки	размещения	сочетания
без повторений	$P_n = n!$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
с повторе-ниями	Пусть есть *r* видов предметов, по n_i предмета каждого вида. Сколько существует различных перестановок этих предметов. $P(n_1,\ldots,n_k) = \dfrac{(n_1+\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}$	Пусть есть алфавит из *n* букв. Сколько существует различных строк ровно k букв данного алфавита. n^k	Пусть есть *n* видов предметов. Сколько существует различных множеств, содержащих ровно к предметов заданных видов. $\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k-1}$

Правило взаимно-однозначного соответствия. Если существует взаимно-однозначное соответствие $f : S \to S^*$, то $|S| = |S^*|$.

Пример. Вывести формулу сочетаний с повторениями.

Решение. Множество однозначно определяется количеством предметов каждого вида. Расположим множество таким образом, что вначале лежат элементы первого вида, затем второго и так далее.

Установим взаимно-однозначное соответствие между множествами и булевыми строками длины $n+k$, содержащими ровно k единиц. Количество элементов i-го вида равно количеству нулей перед i-ой единицей строки. Поскольку последним элементом строки обязательно будет 1, то количество таких строк равно C_{n+k-1}^{k-1}.

Пример. Оценить сверху максимальное количество внутренних точек пересечения диагоналей выпуклого *n*-угольника.

Решение. Пусть никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Тогда каждой точки пересечения диагоналей можно поставить в соответствие четыре вершины, которые соединяются пересекающимися диагоналями. Это соответствие взаимно-однозначное.

Ответ. C_n^4 .

Метод фиксации элемента.

Пример. Доказать, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Доказательство. Зафиксируем выделенный элемент *b.* Разделим *k*-элементные подмножества на две непересекающиеся группы.

I. Подмножества, которые содержат *b.*

II. Подмножества, которые не содержат *b*.

Ясно, что первых C_{n-1}^{k-1}, а вторых C_{n-1}^k.

Определение. *Числом Стирлинга второго рода из n по m*, обозначаемым $S(n,m)$, называется количество неупорядоченных разбиений *n*-элементного множества на *m* непустых подмножеств.

Пример. $S(5,4)=C_5^2=10$;

$S(n,n)=S(n,1)=1$.

Утверждение. $S(n,m)=S(n-1,m-1)+m\cdot S(n-1,m)$.

Доказательство проведем методом фиксации элемента. Выделим элемент *b* и рассмотрим два типа разбиений.

I. Разбиения, в которых $\{b\}$ является элементом разбиения.

II. Разбиения, в которых элемент *b* входит в подмножество разбиений с какими-то другими элементами.

Разбиений первого типа $S(n-1,m-1)$. Разбиения второго типа посчитаем в два этапа. Вначале удалим *b* и разобьём полученное множество на *m* подмножеств $S(n-1,m)$ способами, а затем добавим в одно из *m* подмножеств разбиения элемент *b*.

Подсчет числа отображений конечных множеств.

Будем рассматривать четыре типа отображений.

1. Произвольные.
2. Сюръективное.
3. Инъективное.
4. Биективное.

Обозначим X, $\widetilde{X}$, Y, $\widetilde{Y}$ конечные множества такие, что $|X| = |\widetilde{X}| = m$ и $|Y| = |\widetilde{Y}| = n$. Знак $\sim$ означает, что множество состоит из одинаковых элементов.

Отображения $f : X \to Y$.

Произвольного типа. n^m.
Любой элемент множества *X* независимо отображается в один из элементов множества *Y*.

Сюръекции (*m*≥*n*). $S(m,n)\cdot n!$.
Разбить множество *X* на *n* непустых подмножеств, являющихся прообразом некоторого элемента из *Y*. Каждому подмножеству сопоставить различные элементы из *Y*.

Инъекции (*n*≥*m*). A_n^m.
Упорядочим элементы *X* и сопоставим каждому из них различные элементы *Y*. Получим упорядоченное подмножество из *m* элементов множества *Y*.

Биекции (*n*=*m*). P_n.
Является предельным случаем инъекции и биекции.

Отображения $f : X \to \widetilde{Y}$. (Грибы раскладываем по кучам)

Сюръекции ($m \geq n$). $S(m,n) \cdot$.

Разбить множество X на n непустых подмножеств (куч), являющихся прообразом некоторого элемента.

Произвольного типа. $\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} S(m,i)$.

Поскольку не все элементы из $\widetilde{Y}$ имеют прообраз, то необходимо рассмотреть сюръекции на все i-элементные подмножества $\widetilde{Y}$.

Инъекции ($n \geq m$). 1.

Каждый элемент из X является кучей, порядок куч не важен.

Биекции ($n = m$). 1.

Отображения $f : \widetilde{X} \to Y$. (Раздаём одинаковые монеты)

Произвольного типа. C_{m+n-1}^{n-1}.

Установим взаимно-однозначное соответствие с сочетаниями с повторением. Будем считать монеты первого человека монетами первого вида, монеты второго человека — монетами второго вида и так далее.

Сюръекции ($m \geq n$). C_{m-1}^{n-1}.

Поскольку все элементы из Y имеют прообраз, то не должно быть людей, не получивших монеты. Дадим каждому человеку по одной монете, а оставшиеся m-n монет распределим произвольным образом.

Инъекции ($n \geq m$). C_n^m.

Выбираем m счастливчиков и даём им по монете.

Биекции ($n = m$). 1.

Обозначим $P(m,k)$ количество разложений натурального числа *m* на *k* неупорядоченных положительных натуральных слагаемых. То есть разложения 6=3+2+1=2+1+3, отличающиеся порядком слагаемых считаются одинаковыми. Считаем, что $P(m,k)=0$, если *m*<*k*.

Отображения $f:\widetilde{X}\to\widetilde{Y}$. (Раскладываем одинаковые монеты в стопки)

Сюръекции (*m*≥*n*). $P(m,n)$.

Поскольку все элементы неотличимы, то сюръекция однозначно определяется количеством прообразов каждого элемента из $\widetilde{Y}$.

Произвольного типа. $\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} P(m,i)$.

Поскольку не все элементы имеют прообраз, то возможны нулевые слагаемые. Поэтому суммируем разложения по всем возможным количествам слагаемых.

Инъекции и биекции по одной.

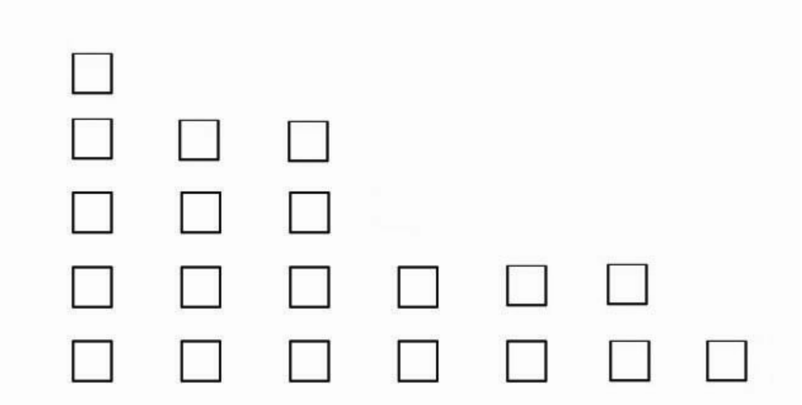
Комбинаторные тождества.

Утверждение. $P(m,n)=\sum_{i=1}^{n} P(m-n,i)$.

Доказательство. Назовем разложение на слагаемые разложением *k*-ого типа, если ровно *k* слагаемых больше 1. Разложений *k*-ого типа ровно $P(m-n,k)$.

Разложения на множители для небольших чисел удобно изображать *диаграммами Ферре*.

Пример. 20=5+4+4+2+2+2+1



Утверждение. Число разложений числа m в неупорядоченную сумму ровно k натуральных слагаемых равно числу представлений m в виде неупорядоченной суммы натуральных слагаемых, наибольшее из которых равно k.

Упражнение. Доказать следующее утверждение.
Утверждение. Число представлений m в виде неупорядоченной суммы попарно различных натуральных слагаемых равно числу представлений m в виде неупорядоченной суммы нечетных слагаемых.

Определение. *Числом Белла* B_m называется число различных разбиений *m*-элементного множества на непустые подмножества.

Тогда количество произвольных отображений вида $f : X \to \widetilde{Y}$ равно числу Белла. $B_m = \sum_{i=1}^{m} S(m,i)$.

Утверждение. $B_m = \sum_{i=1}^{m} C_{m-1}^{i-1} B_{m-i}$.

Доказательство. Применим метод фиксации элемента. Зафиксируем произвольный элемент *b* и рассмотрим содержащее его подмножество разбиения M_b. Назовем разбиение разбиением *i*-го типа, если $|M_b| = i$. Множества разбиений разных типов не пересекаются. Посчитаем количество разбиений *i*-го типа. Вначале собираем множество M_b, что можно сделать C_{m-1}^{i-1}, а затем разбиваем на непустые подмножества остальные *m-i* элементов.

Утверждение. $S(m,n)=\sum_{i=1}^{m-n+1} C_{m-1}^{i-1} S(m-i,n-1)$.

Теорема. $\sum_{k=1}^{n} A_m^k \cdot S(m,k)=m^n$.

Доказательство. Справа стоит выражение для числа произвольных отображений вида $f: X \to Y$. Назовем отображением *k*-ого типа, если $|f(X)|=k$. Отображения *k*-ого типа считаем следующим образом. Вначале выбираем *k*-элементное множество (C_m^k), а затем выбираем сюръекцию на фиксированное множество $S(m,k)\cdot k!$.