Семинар 6. *(19 сентября 2024 г.)*

Характеристические поверхности. Задача Коши для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными

1. *Характеристические поверхности. Корректность постановки задачи Коши*

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\dots,x_n)u_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1,\dots,x_n)u_{x_k} + a(x_1,\dots,x_n)u = f(x), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x)$, $a_k(x)$, $a(x)$, $f(x)$ — вещественнозначные функции, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)| \neq 0$, $u(x) \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Поверхность* $S = \{\Phi(x) = 0 : \nabla\Phi|_S \neq 0, \Phi \in C^1\}$ *называется характеристической поверхностью для уравнения* (1)*, если* $\nabla\Phi$ *удовлетворяет характеристическому уравнению, т.е.*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\dots,x_n)\Phi_{x_i}\Phi_{x_j} = 0. \tag{2}$$

Поставим задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями на поверхности S:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\dots,x_n)u_{x_ix_j} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x_1,\dots,x_n)u_{x_k} + a(x_1,\dots,x_n)u = f(x); \\ u|_S = \varphi(x); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \psi(x), \end{cases} \tag{3}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S.

Теорема 1. *Если* S *— характеристическая поверхность для уравнения* (1)*, то задача Коши* (3) *не является безусловно разрешимой.*

2. *Примеры поиска характеристик по определению*

1) Гиперболическое уравнение $u_{xy} + F(x,y,u_x,u_y,u) = 0$.

Характеристическое уравнение строится по старшей части, поэтому можем положить $F \equiv 0$. Пусть характеристическая кривая задана неявно

$$S : \Phi(x, y) = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\Phi_x \Phi_y = 0.$$

По определению $\nabla\Phi|_S \neq 0$, поэтому либо $\Phi_x \neq 0$ либо $\Phi_y \neq 0$.
Случай 1. $\Phi_x \neq 0$, тогда $\Phi_y = 0$ (из уравнения). По теореме о неявной функции разрешим уравнение $\Phi(x, y) = 0$ относительно x:

$$\Phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x - f(y) = 0.$$

Продифференцируем данное выражение по x и y и подставим производные в хар. уравнение:

$$\Phi_x \Phi_y = 1 \cdot (-f'(y)) = 0 \Rightarrow f'(y) = 0.$$

Отсюда $f(y) \equiv const = C_1$. Тогда первое семейство характеристических кривых задается уравнением $x - f(y) = x - C_1 = 0$, или $x = C_1$.
Случай 2. $\Phi_y \neq 0$, тогда $\Phi_x = 0$ (из уравнения). По теореме о неявной функции разрешим уравнение $\Phi(x, y) = 0$ относительно y:

$$\Phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y - f(x) = 0.$$

Продифференцируем данное выражение по x и y и подставим производные в хар. уравнение:

$$\Phi_x \Phi_y = 1 \cdot (-f'(x)) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

Отсюда $f(x) \equiv const = C_2$. Тогда второе семейство характеристических кривых задается уравнением $y - f(x) = y - C_2 = 0$, или $y = C_2$.
2) Уравнение колебания струны (гиперболическое) $u_{xx} - a^2 u_{yy} = 0$. Зададим

хар. поверхность (кривую) неявно, как и в предыдущем пункте

$$S : \Phi(x, y) = 0.$$

Составим хар. уравнение:

$$\Phi_x^2 - a^2 \Phi_y^2 = 0.$$

Снова рассмотрим два случая.

Случай 1. $\Phi_x \neq 0$, тогда по теореме о неявной функции можно разрешить уравнение $\Phi(x, y) = 0$ относительно x:

$$\Phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x - f(y) = 0.$$

Продифференцируем данное выражение по x и y и подставим производные в хар. уравнение:

$$\Phi_x^2 - a^2 \Phi_y^2 = 1 - a^2(-f'(y))^2 = (1 - af'(y))(1 + af'(y)) = 0.$$

Тогда $f(y) = \pm\dfrac{y}{a} + C_{1,2}$. Отсюда получим два семейства характеристических кривых *(на самом деле это прямые)* $x - f(y) = x \pm \dfrac{y}{a} - C_{1,2} = 0$, или $ax \pm y = C_{1,2}$.

Случай 2. $\Phi_x \neq 0$, тогда по теореме о неявной функции можно разрешить уравнение $\Phi(x, y) = 0$ относительно y:

$$\Phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y - f(x) = 0.$$

Продифференцируем данное выражение по x и y и подставим производные в хар. уравнение:

$$\Phi_x^2 - a^2 \Phi_y^2 = (-f'(x))^2 - a^2 = (f'(x) - a)(f'(x) + a) = 0.$$

Тогда $f(x) = \pm ax + C_{1,2}$. Отсюда получим два семейства характеристических кривых *(на самом деле это прямые)* $y - f(x) = y \pm ax - C_{1,2} = 0$, или $y \pm ax = C_{1,2}$. Полученные в случаях 1 и 2 семейства хар. прямых эквивалентны, поэтому достаточно найти только одно.

Замечание. Из уравнения колебания струны можно получить уравнение

$u_{xy} = 0$ и наоборот.

Итак, гиперболическое уравнение имеет два семейства характеристических прямых.

3) Параболическое уравнение $u_x - au_{yy} = 0$.

Запишем хар. уравнение

$$-a^2\Phi_y^2 = 0 \Leftrightarrow \Phi_y = 0.$$

Значит, $\Phi_x \neq 0$ по определению хар. поверхности. Аналогично предыдущим рассуждениям, выразим $x = f(y)$, продифференцируем и подставим в хар. уравнение:

$$-a^2\Phi_y^2 = -a^2(-f'(y)) = 0 \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) \equiv const = C.$$

Таким образом, у параболического уравнения только одно семейство характеристик — прямые $x = C$.

4) Эллиптическое уравнение $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Пусть хар. кривая задана неявно уравнением $\Phi(x, y) = 0$. Составим хар. уравнение:

$$\Phi_x^2 + \Phi_y^2 = 0$$

Заметим, что равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\Phi_x = \Phi_y = 0$, т.е. $\nabla \Phi|_S = 0$, что невозможно по определению хар. поверхности. Следовательно, эллиптическое уравнение не имеет характеристик.

3. *Задача Коши для гиперболического уравнения при $n = 2$. Теорема о разрешимости задачи Коши. Метод решения*

Рассмотрим гиперболическое уравнение в каноническом виде с двумя независимыми переменными

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \tag{4}$$

и поставим для него задачу Коши с начальными данными на кривой $\gamma : y = \mu(x)$:

$$\begin{cases} u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y); \\ u|_{\gamma:y=\mu(x)} = \varphi(x); \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\gamma:y=\mu(x)} = \psi(x), \end{cases} \tag{5}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к кривой γ. Часто в качестве второго начального условия встречаются условия $u_x|_\gamma = \psi_1(x)$ или $u_y|_\gamma = \psi_2(y)$.
Пусть γ пересекается с координатными осями в точках $(x_0, 0)$ и $(0, y_0)$. Пусть G — криволинейный треугольник, ограниченный кривой γ и прямыми $x = x_0$, $y = y_0$ (характеристиками уравнения (4)) .

Теорема 2. *Пусть* $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y) \in C(\bar{G})$, $\varphi(x) \in C^1([0,x_0])$, $\psi(x) \in C([0,x_0])$. *Тогда существует единственная функция* $u(x,y) \in C^1(\bar{G})$, u_{xy}, $u_{yx} \in C(\bar{G})$, *которая является решением задачи Коши* (5).

Метод решения задачи Коши

1) Если уравнение не в каноническом виде, нужно привести его к виду (4) (см. семинары 3-5).
2) После того, как привели уравнение к каноническому виду, решаем его. В результате интегрирования вместо констант получим две произвольные функции.
3) Возвращаемся к старым переменным. Подставляем начальные условия, находим произвольные функции в явном виде.
Иногда удобнее записать начальные условия в новых переменных. Проинтегрировав уравнение один раз, можно подставить одно начальное условие и найти произвольную функцию. Затем можно проинтегрировать второй раз и найти произвольную функцию в явном виде из второго начального условия.

4. *Примеры решения задач Коши*

№ 34 из задачника Н. Л. Абашеевой. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} u_{xy} = 0; \\ u|_{y=0} = \varphi(x); \\ u_y|_{y=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Решение. Уравнение нам дано уже в каноническом виде, поэтому можно сразу проинтегрировать. Проинтерируем по x:

$$u_y = f(y)$$

и подставим второе начальное условие:

$$u_y\big|_{y=0} = f(0) = \psi(x).$$

Заметим, что $f(0)$ — это константа, а в правой части есть зависимость от x. Если $\psi(x) = \psi \equiv const$, то задача Коши разрешима, но не единственным образом, поскольку найдется бесконечно много функций $f(x)$ таких, что $f(0) = \psi$. Если $\psi(x) \not\equiv const$, то задача Коши не имеет решений. Далее будем искать решение в случае $\psi(x) \equiv const$. Проинтегрируем по переменной y выражение $u_y = f(y)$:

$$u = \int\limits_0^y f(s)ds + g(x),$$

где $g(x)$ — произвольная функция. Подставим первое начальное условие:

$$u\big|_{y=0} = g(x) = \varphi(x) \Rightarrow u = \int\limits_0^y f(s)ds + \varphi(x).$$

Итак, решение задачи Коши — это функция $u = \int\limits_0^y f(s)ds + \varphi(x)$, где $f(x)$ такова, что $f(0) = \psi$.

№ 12.13 (2) из задачника В. С. Владимирова. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = 2x^3; \\ u\big|_{y=x} = \sin x; \\ u_x\big|_{y=x} = \cos x. \end{cases}$$

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду. Запишем хар. уравнение:

$$x\varphi_x\varphi_y - y\varphi_y^2 = 0 \Rightarrow \varphi_y(x\varphi_x - y\varphi_y) = 0.$$

Первое семейство найдем из уравнения $\varphi_y = 0 \Rightarrow \varphi_1(x, y) = x = C_1$.
Второе уравнение можно сразу решить:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|y| + C \Rightarrow \varphi_2(x, y) = xy = C_2.$$

Сделаем замену $\xi = x$, $\eta = xy$ и пересчитаем производные:

$$u_y = xu_\eta; \quad u_{xy} = xu_{\xi\eta} + xyu_{\eta\eta} + u_\eta; \quad u_{yy} = x^2 u_{\eta\eta}$$

Подставим полученные выражения в уравнение:

$$xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = x^2 u_{\xi\eta} + x^2 y u_{\eta\eta} + xu_\eta - x^2 y u_{\eta\eta} - xu_\eta = x^2 u_{\xi\eta} = 2x^3$$

$$u_{\xi\eta} = 2x = 2\xi.$$

Интегрируем по переменной ξ:

$$u_\eta = \xi^2 + f(\eta)$$

затем интегрируем по η:

$$u(\xi, \eta) = \xi^2 \eta + \tilde{f}(\eta) + g(\xi).$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$u(x, y) = x^3 y + \tilde{f}(xy) + g(x).$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} u|_{y=x} = x^4 + \tilde{f}(x^2) + g(x) = \sin x; \\ u_x|_{y=x} = 3x^2 y + y\tilde{f}'(xy) + g'(x)\Big|_{y=x} = 3x^3 + x\tilde{f}'(x^2) + g'(x) = \cos x. \end{cases}$$

Выразим $g(x)$ из первого уравнения

$$g(x) = \sin x - x^4 - \tilde{f}(x^2)$$

и продифференцируем по x:

$$g'(x) = \cos x - 4x^3 - 2x\tilde{f}'(x^2)$$

и подставим во второе уравнение:

$$3x^3 + x\tilde{f}'(x^2) + g'(x) = 3x^3 + x\tilde{f}'(x^2) + \cos x - 4x^3 - 2x\tilde{f}'(x^2) =$$
$$= \cos x - x^3 - x\tilde{f}'(x^2) = \cos x \Rightarrow \tilde{f}'(x^2) = -x^2 \Rightarrow \tilde{f}(t) = -\frac{t^2}{2} + C_1.$$

Тогда

$$g(x) = \sin x - x^4 + \frac{x^4}{2} - C_1.$$

Значит, $\tilde{f}(xy) = -\dfrac{x^2y^2}{2} + C_1$, $g(x) = \sin x - x^4 + \dfrac{x^4}{2} - C_1$. В итоге

$$u(x, y) = x^3y + \tilde{f}(xy) + g(x) = x^3y - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \sin x.$$

ДЗ на 23 сентября: № 12.12, 12.13 (1).