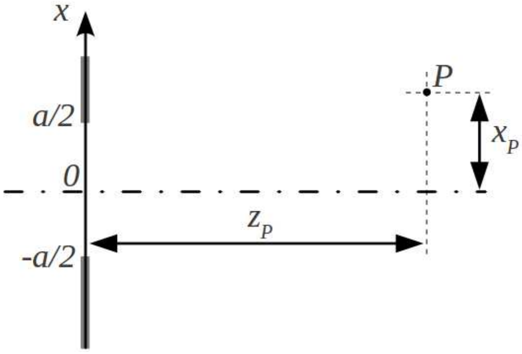
Дифракция Френеля и Фраунгофера

Задача.

Показать на кривой Корню решение, соответствующее первой темной полосе в зоне дифракции Фраунгофера на щели.

Решение.



Выберем систему координат так, чтобы щель лежала в плоскости $z = 0$ и имела размеры $-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, $-\infty < y < \infty$. Экран находится в плоскости $z_p \gg \frac{a^2}{\lambda}$.

Поле в точке $P(x_p, z_p)$ экрана выражается интегралом Кирхгофа, сводящимся заменой переменных к интегралам Френеля:

$$\widehat{E}(z_p, x_p) \sim \int\limits_{x=-a/2}^{x=a/2} \exp\left(ik\frac{(x-x_p)^2}{2z_p}\right) dx =$$

$$= C\left(\int\limits_{\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}\left(-\frac{a}{2}-x_p\right)}^{\xi=0} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi + \int\limits_{\xi=0}^{\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}\left(\frac{a}{2}-x_p\right)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi\right) =$$

$$= C\left(\int\limits_{\xi=0}^{\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}\left(x_p+\frac{a}{2}\right)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi - \int\limits_{\xi=0}^{\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}\left(x_p-\frac{a}{2}\right)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi\right) =$$

$$= C\left(\widehat{J}(u_+) - \widehat{J}(u_-)\right).$$

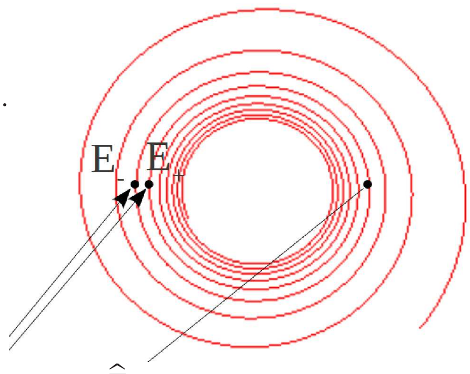
где $u_- = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p - a/2)$, $u_+ = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p + a/2)$.

Искомое поле в точке P пропорционально длине отрезка между концами векторов $\widehat{J}(u_+)$ и $\widehat{J}(u_-)$. Первой темной полосе в зоне дифракции Фраунгофера соответствует $x_p = z_p\lambda/a$ (при этом $\operatorname{sinc}\left(\frac{kx_pa}{2z_p}\right) = 0$). Характерное значение $u_0 = \frac{u_+ + u_-}{2}\Big|_{x_p = z_p\lambda/a} = \sqrt{\frac{2z_p\lambda}{a^2}}$. Для $z_p > 12.5\frac{a^2}{\lambda}$ аргумент $u > 5$ и интеграл Френеля хорошо аппроксимируется формулой:

$$\widehat{J}(u) = 0.5 + \frac{0.318}{u}\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) + i\cdot\left(0.5 - \frac{0.318}{u}\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\right).$$

Взаимное расположения точек $\widehat{E}_- = \widehat{J}(u_-)$ и $\widehat{E}_+ = \widehat{J}(u_+)$ установим, вычислив разность

$$u_+^2 - u_-^2 = \frac{2}{\lambda z_p}\left(\left(x_p + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x_p - \frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{2}{\lambda z_p}\left(4x_p\cdot\frac{a}{2}\right) = 4.$$



Тогда аргументы функций sin и cos, входящих в состав $\widehat{J}(u)$, отличаются на $4\frac{\pi}{2} = 2\pi$ ($2\pi m$ для m-й темной полосы). Теперь становится ясно, что точки $\widehat{E}_-$ и $\widehat{E}_+$ получаются одна из другой перемещением вдоль кривой Корню на полный виток спирали (на рисунке показан увеличенный фрагмент кривой Корню, так что видны только концы векторов $\widehat{E}_\pm$, исходящих из начала графика; справа нанесена точка, соответствующая параметру u_0). Амплитуда поля в первой темной полосе пропорциональна расстоянию между этими точками, которое равно разности радиусов спирали на соседних витках:

$$E(z_p, x_p) = \left|\widehat{E}_- - \widehat{E}_+\right| \approx 0.318C\frac{\Delta u}{u^2} = 0.318C\frac{\Delta u}{u^2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}a}{\frac{2}{\lambda z_p}\left(\frac{\lambda z_p}{a}\right)^2} = \frac{0.318C}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^2}{\lambda z_p}\right)^{3/2}.$$

Этот результат получен подстановкой $x_p = z_p\lambda/a$, т. е. для первой темной полосы в зоне дифракции Фраунгофера. Выясняется, что на самом деле поле в первой темной полосе отлично от нуля. Нулевое поле получается в приближении Фраунгофера. Более точное приближение Френеля дает для темной полосы (причем, не только первой) малое, но все же отличное от нуля поле. Амплитуда поля в темной полосе тем ближе к нулю, чем меньше параметр Френеля $\frac{a^2}{\lambda z_p}$ (число зон, приходящихся на щель, которое в рассматриваемом случае много меньше 1) и, следовательно, чем лучше выполняется приближение Фраунгофера. В графических терминах меньшим параметрам Френеля соответствуют более глубокие (внутренние) витки спирали Корню, характеризующиеся более плотной намоткой.