Плотность энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

Запишем пару уравнений Максвелла в произвольной среде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Домножим скалярно первое уравнение на $\mathbf{H}$, второе – на $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\tfrac{\mathbf{H}}{c}\tfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\tfrac{1}{2c}\tfrac{\partial(\mathbf{HB})}{\partial t}$$
$$\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{Ej} + \tfrac{\mathbf{E}}{c}\tfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \tfrac{1}{2c}\tfrac{\partial(\mathbf{ED})}{\partial t}$$

Теперь вычтем второе уравнение из первого:

$$\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{div}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\tfrac{4\pi}{c}\mathbf{Ej} - \tfrac{1}{2c}\tfrac{\partial(\mathbf{HB}+\mathbf{ED})}{\partial t}$$

Домножим полученное уравнение на $\frac{c}{4\pi}$:

$$\operatorname{div}\tfrac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\mathbf{Ej} - \tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\mathbf{HB}+\mathbf{ED}}{8\pi}$$

В области вне токов имеем

$$\operatorname{div}\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{HB}+\mathbf{ED}}{8\pi}$$

Интегрирование этого уравнения по объему области, ограниченной замкнутой поверхностью, даст

$$\int \operatorname{div}\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\,dV = \oiint \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\,d\mathbf{S} = -\frac{\partial W}{\partial t} \tag{1}$$

Слева стоит поток вектора $\mathbf{S}_P = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ через замкнутую поверхность, справа – скорость уменьшения энергии электромагнитного поля в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Аналогично, интегрируя уравнение непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

$$\oiint \mathbf{j}\,d\mathbf{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{2}$$

получаем слева полный ток, протекающий через замкнутую поверхность, справа – скорость уменьшения заряда в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Уравнение (1) получается из (2) заменой заряда на энергию поля. Тогда вектор Пойнтинга $\mathbf{S}_P = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$ приобретает смысл плотности потока энергии электромагнитного поля.