

СЕМЕСТРОВОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ 1

Задание 1 (сентябрь – октябрь)

1. Маятник, состоящий из частицы массой m , прикрепленной к концу упругого невисокого стержня длиной L , находится в основном состоянии в гравитационном поле. С помощью соотношения неопределённостей оценить неопределённость угла отклонения маятника от вертикали.

2. Доказать, что для потенциала, удовлетворяющего условиям

$$\begin{cases} U(-x) = U(x), \\ U(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty, \end{cases}$$

выполняется соотношение $A^*B + AB^* = 0$ между амплитудой прошедшей волны B и амплитудой отражённой волны A . Доказать, что для несимметричного потенциала, $U(-x) \neq U(x)$, коэффициент прохождения не зависит от направления падающей волны.

3. В узком цилиндре длиной L , закрытом с обоих концов, находятся две частицы с массами m_1 и m_2 . Частицы разделены поршнем массой $M \gg m_1, m_2$. Поршень может двигаться без трения. Используя адиабатическое приближение (вспомните аналитическую механику), найти энергию основного и первого возбуждённого состояния системы.
4. Найти энергии и ширины квазистационарных состояний частицы массой m в потенциале $U(x) = g_1\delta(x - a) + g_2\delta(x + a)$ при условии $mg_{1,2}a/\hbar^2 \gg 1$. Найти отношение вероятностей вылететь частице налево и направо.
5. При $t = 0$ состояние линейного осциллятора с частотой ω задано волновой функцией $\psi(x, 0) = Ae^{iqx}/(x^2 + a^2)$. Определить средние значения координаты и импульса при $t > 0$. Воспользоваться гейзенберговским представлением.
6. Заряженная частица находится в постоянном однородном магнитном поле \mathcal{H} , направленном по оси z . Найти коммутационные соотношения для компонент скорости. Показать, что операторы $\hat{x}_0 = \hat{x} + \hat{v}_y/\omega$ и $\hat{y}_0 = \hat{y} - \hat{v}_x/\omega$, где $\omega = e\mathcal{H}/mc$, коммутируют с гамильтонианом. Найти коммутатор \hat{x}_0 и \hat{y}_0 .

Задание 2 (ноябрь – декабрь)

7. Частица имеет угловой момент $L = 1$ и проекцию m на ось z . Найти вероятности того, что частица имеет проекции момента ± 1 и 0 на ось λ , направленную под углом θ к оси z .
Указание: рассмотреть средние значения операторов λl и $(\lambda l)^2$.
8. Для двух частиц со спином $1/2$ найти среднее значение оператора $(\mathbf{s}_1 \mathbf{a})(\mathbf{s}_2 \mathbf{b})$ по состоянию χ_{00} с полным спином $S = 0$ (здесь \mathbf{a} и \mathbf{b} – постоянные векторы).
9. Гамильтониан взаимодействия двух частиц со спином $1/2$ имеет вид $H = g \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$, где g – константа. В момент времени $t = 0$ первая частица поляризована вдоль оси z , а вторая – вдоль оси x . Найти среднее значение спина \mathbf{S}_1 первой частицы в ненулевой момент времени.
10. Волновая функция трёхмерного ротатора $H = l^2/2I$ в момент времени $t = 0$ равна $\psi(\theta, \phi, t = 0) = A(\sin \theta \cos \phi)^2$. Найти $\psi(\theta, \phi, t > 0)$.
11. Взаимодействие протона и нейтрона, приводящее к образованию дейтрона с энергией связи 2.2 МэВ, моделируется прямоугольной ямой с шириной 1.2 фм. Определить глубину ямы.
12. Найти распределение плотности электрического заряда относительно центра инерции в атоме, состоящем из частицы π^+ (пи-мезон) с массой 140 МэВ/ c^2 и частицы μ^- (мюон) с массой 106 МэВ/ c^2 . Частицы взаимодействуют по закону Кулона, $U(r) = -e^2/r$. Атом находится в основном состоянии.