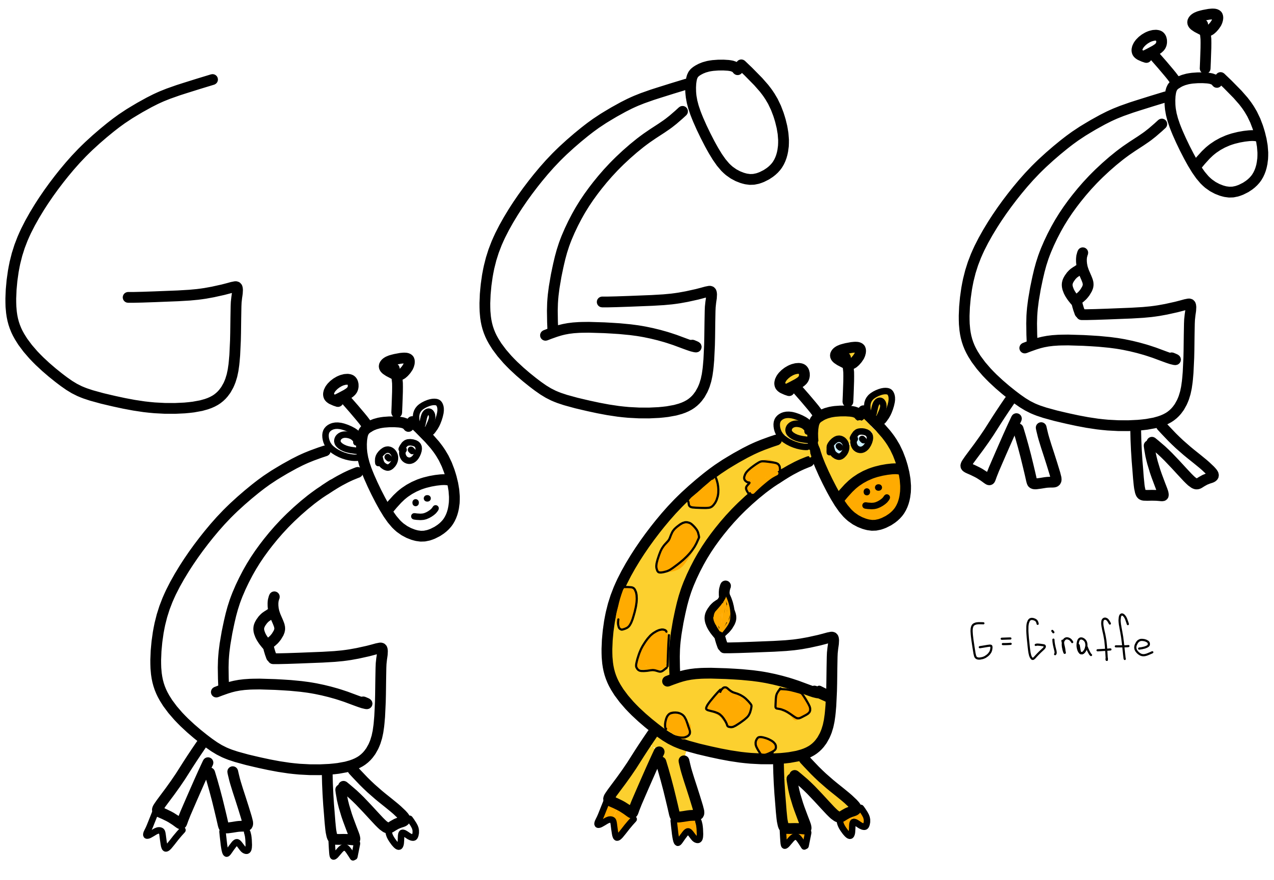
Матрица Грама



Скалярное произведение

V – векторное пространство над $\mathbb{R}$

Скалярное произведение

V – векторное пространство над $\mathbb{R}$

Скалярное произведение: $V \times V \to \mathbb{R}$

- $(a, b) = (b, a)$ для любых $a, b \in V$ **симметричность**

- $(a, \beta b + \gamma c) = \beta(a, b) + \gamma(a, c)$ для любых $a, b, c \in V$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

  линейность по второму аргументу

- $(a, a) \geq 0$ для любых $a \in V$, причём $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

  положительная определённость

Скалярное произведение

V – векторное пространство над $\mathbb{R}$

Скалярное произведение: $V \times V \to \mathbb{R}$

$(a, b) = (b, a)$ для любых $a, b \in V$ симметричность

$(a, \beta b + \gamma c) = \beta(a, b) + \gamma(a, c)$ для любых $a, b, c \in V$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

линейность по второму аргументу

$(a, a) \geq 0$ для любых $a \in V$, причём $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

положительная определённость

V – евклидово пространство

Скалярное произведение

- $(a, b) = (b, a)$ для любых $a, b \in V$
- $(a, \beta b + \gamma c) = \beta(a, b) + \gamma(a, c)$ для любых $a, b, c \in V$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$(\alpha a + \beta b, c) = (c, \alpha a + \beta b) = \alpha (c, a) + \beta (c, b) =$$

$$= \alpha (a, c) + \beta (b, c)$$

Скалярное произведение

V – векторное пространство над $\mathbb{C}$

Скалярное произведение: $V \times V \to \mathbb{C}$

- $(a, b) = \overline{(b, a)}$ для любых $a, b \in V$ эрмитова симметричность

- $(a, \beta b + \gamma c) = \beta(a, b) + \gamma(a, c)$ для любых $a, b, c \in V$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$

  линейность по второму аргументу

- $(a, a) \geq 0$ для любых $a \in V$, причём $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

  положительная определённость

$\Rightarrow$ V – унитарное (эрмитово) пространство

Скалярное произведение

V – векторное пространство над $\mathbb{C}$

Скалярное произведение: $V \times V \to \mathbb{C}$

- $(a, b) = \overline{(b, a)}$ для любых $a, b \in V$ **эрмитова симметричность**

- $(a, \beta b + \gamma c) = \beta(a, b) + \gamma(a, c)$ для любых $a, b, c \in V$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$

  линейность по второму аргументу

- $(a, a) \geq 0$ для любых $a \in V$, причём $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

  положительная определённость

⇒ V – унитарное (эрмитово) пространство

Скалярное произведение

- $(a, b) = \overline{(b, a)}$ для любых $a, b \in V$
- $(a, \beta b + \gamma c) = \beta(a, b) + \gamma(a, c)$ для любых $a, b, c \in V$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$(\alpha a + \beta b, c) = \overline{(c, \alpha a + \beta b)} = \overline{\alpha(c, a) + \beta(c, b)} =$$

$$= \bar{\alpha}\,\overline{(c, a)} + \bar{\beta}\,\overline{(c, b)} = \bar{\alpha}\,(a, c) + \bar{\beta}\,(b, c)$$

Скалярное произведение

- $(a, b) = \overline{(b, a)}$ для любых $a, b \in V$

$$(a,a) = \overline{(a,a)} \Rightarrow (a,a) \in \mathbb{R}$$

- $(a, a) \geq 0$ для любых $a \in V$, причём $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Скалярные величины

Длина вектора:

$$|a| = \sqrt{(a, a)}$$

Неравенство Коши-Буняковского:

$$(a,b)^2 \leq (a,a)(b,b)$$

Угол между векторами: $-1 \leq \frac{(a,b)}{|a|\,|b|} \leq 1$

$$\cos\angle(a,b) = \frac{(a,b)}{|a||b|} \text{ над } \mathbb{R}$$

$\varphi \in [0, \pi]$

$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\cos\angle(a,b) = \frac{|(a,b)|}{|a||b|} \text{ над } \mathbb{C}$$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Примеры

$$\mathbb{R}^3 : (a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$M_n(\mathbb{R}) : (A, B) = tr(A^T B)$$

$$M_n(\mathbb{C}) : (A, B) = tr(A^\dagger B)$$

$$C[0,1] : (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Через координаты

$$V \sim \mathbb{R}^n$$

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

$$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n = (y_1, \ldots, y_n)^T$$

Через координаты

$$V \sim \mathbb{R}^3$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 = (y_1, y_2, y_3)^T$$

Через координаты

$$V \sim \mathbb{R}^3$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$$(x, y) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, y) = x_1(e_1, y) + x_2(e_2, y) + x_3(e_3, y) =$$

$$x_1(e_1, y) = x_1(e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) = x_1 y_1(e_1, e_1) + x_1 y_2(e_1, e_2) + x_1 y_3(e_1, e_3)$$

$$x_2(e_2, y) = x_2(e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) = x_2 y_1(e_2, e_1) + x_2 y_2(e_2, e_2) + x_2 y_3(e_2, e_3)$$

$$x_3(e_3, y) = x_3(e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) = x_3 y_1(e_3, e_1) + x_3 y_2(e_3, e_2) + x_3 y_3(e_3, e_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_j (e_i, e_j)$$

Через координаты

$$V \sim \mathbb{R}^3$$

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$$

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j (e_i, e_j)$$

$$(x, y) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = x^T G y$$

Матрица Грама

$$G(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

Смена базиса

$$(x, y) = x^T G y$$

$$e_1, \dots, e_n \xrightarrow{S} e_1', \dots, e_n'$$

$$x = S x', \quad y = S y'$$

$$(x, y) = x^T G y$$

$$\|$$

$$(x', y') = (Sx')^T G (Sy') = x'^T S^T G S y$$

$$\|$$

$$x'^T G' y'$$

$$\Rightarrow G' = S^T G S$$

Задача 1

Матрица Грама в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Найти длины базисных векторов и угол между ними.
2) Найти длины векторов $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и угол между ними.
3) Ортогонализовать базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1) $(e_1, e_1) = 4, \quad |e_1| = 2$

$|e_2| = \sqrt{(e_2, e_2)} = \sqrt{3}$

$$\cos\angle(e_1, e_2) = \frac{(e_1, e_2)}{|e_1||e_2|} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\angle(e_1, e_2) = \frac{5\pi}{6}$$

$\Rightarrow \quad \cos\angle(x,y) = \dfrac{(x,y)}{|x|\,|y|} = \dfrac{8}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}} = \dfrac{8}{\sqrt{91}}$

Задача 1

Матрица Грама в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Найти длины базисных векторов и угол между ними.
2) Найти длины векторов $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и угол между ними.
3) Ортогонализовать базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

2) $\quad x = (1,-1)^T, \; y = (2,1)^T$

$(x,x) = x^T G x = (1\ -1)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (7\ -6)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 13$

$(y,y) = y^T G y = (2\ 1)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (5\ -3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$

$\Rightarrow |x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{13}, \quad |y| = \sqrt{7}$

$(x,y) = (1\ -1)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (7\ -6)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 8$

Задача 1

Матрица Грама в базисе $(\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Найти длины базисных векторов и угол между ними.
2) Найти длины векторов $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и угол между ними.
3) Ортогонализовать базис $(\vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$.

3) $f_1 = e_1 = (1,0)^T$

$$f_2 = e_2 - \frac{(e_2,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1 = e_2 + \frac{3}{4} e_1 = \left(\frac{3}{4}, 1\right)^T$$

$(e_2,f_1) = (e_2,e_1) = -3$

$(f_1,f_1) = (e_1,e_1) = 4$

Проверка

$$(1\ 0)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} = (4\ -3)\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

В ОНБ $\quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = E$

$$(x, y) = x^T y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Через координаты

$$V \sim \mathbb{C}^3$$

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$$

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$$(x, y) = (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, y) = \overline{x_1}(e_1, y) + \overline{x_2}(e_2, y) + \overline{x_3}(e_3, y) =$$

$$\overline{x_1}(e_1, y) = \overline{x_1}(e_1, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = \overline{x_1}y_1(e_1, e_1) + \overline{x_1}y_2(e_1, e_2) + \overline{x_1}y_3(e_1, e_3)$$

$$\overline{x_2}(e_2, y) = \overline{x_2}(e_2, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = \overline{x_2}y_1(e_2, e_1) + \overline{x_2}y_2(e_2, e_2) + \overline{x_2}y_3(e_2, e_3)$$

$$\overline{x_3}(e_3, y) = \overline{x_3}(e_3, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = \overline{x_3}y_1(e_3, e_1) + \overline{x_3}y_2(e_3, e_2) + \overline{x_3}y_3(e_3, e_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \overline{x_i}y_j(e_i, e_j)$$

Через координаты

$$V \sim \mathbb{R}^3$$

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$$

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \overline{x_i}y_j(e_i, e_j)$$

$$(x, y) = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = x^\dagger G y$$

$x = (1, -i)^T$

$|x|^2 = 1 \cdot 1 + \overline{(-i)}(-i) =$

$= 2$

$|x| = \sqrt{2}$

Матрица Грама

$$G(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

Смена базиса

$$(x, y) = x^\dagger G y$$

$$G' = S^\dagger G S'$$

Геометрический смысл

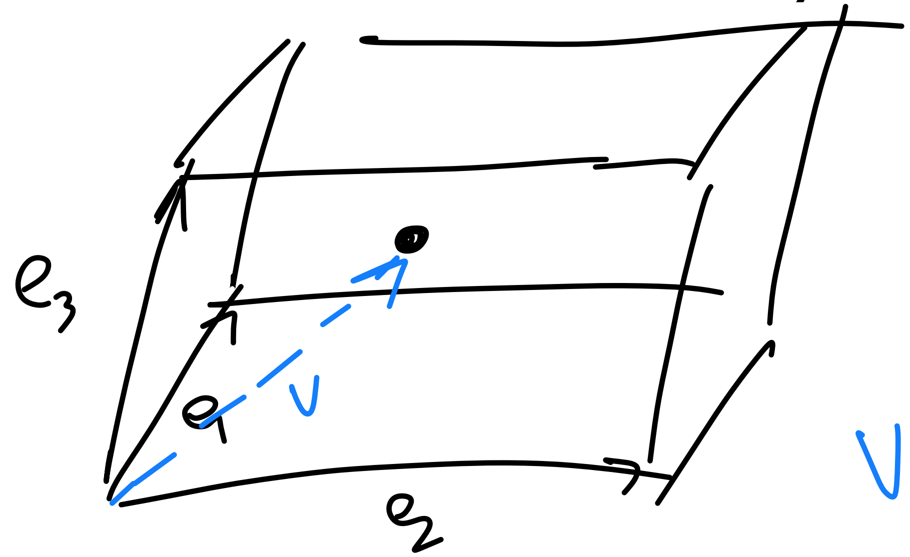
Объём k-мерного параллелепипеда:

$$V(e_1, \dots, e_k) = \sqrt{\det G(e_1, \dots, e_k)}$$

Расстояние от вектора до подпространства:

$$h = \frac{V(e_1, e_2, e_3)}{V(e_1, e_2)}$$

$$\rho(x, U) = \frac{\sqrt{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}}{\sqrt{\det G(e_1, \dots, e_k)}}$$



$e_1, \dots, e_k$ – базис U

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1$$

Задача 2

Найдите расстояние от вектора $x = (-1,\ 1,\ 3,\ 1)^T$ до подпространства $L(a_1, a_2, a_3)$, где $a_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 1)^T$, $a_2 = (2,\ 3,\ 1,\ 0)^T$, $a_3 = (\cancel{3,\ 1,}\ -2,\ -7)^T$.

$$x_\perp = (-1,\ 0,\ 2,\ -1)^T$$

$$|x_\perp| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\rho^2 = \frac{\det G(a_1, a_2, a_3, x)}{\det G(a_1, a_2, a_3)}$$

$$\det G(a_1, a_2, a_3) = 0$$

$$\rho(x, L(a_1, a_2)) = \sqrt{\frac{\det G(a_1, a_2, x)}{\det G(a_1, a_2)}} = \sqrt{\frac{102}{17}} = \sqrt{6}$$

Задача 2

Найдите расстояние от вектора $x = (-1,\ 1,\ 3,\ 1)^T$ до подпространства $L(a_1, a_2, a_3)$, где $a_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 1)^T$, $a_2 = (2,\ 3,\ 1,\ 0)^T$, $a_3 = \cancel{(3,\ 1,}-2,\ -7)^T$.

$(a_1, a_1) = 7$, $(a_1, a_2) = 2+6+1 = 9$

$(a_2, a_2) = 4+9+1 = 14$

$$\boxed{x_\perp = (-1,\ 0,\ 2,\ -1)^T}$$

$|x_\perp| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$$G(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \det G(a_1, a_2) = 7 \cdot 14 - 81 = 17$$

$(a_1, x) = -1+2+3+1 = 5$, $(a_2, x) = -2+3+3 = 4$, $(x, x) = 1+1+9+1 = 12$

$$G(a_1, a_2, x) = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 9 & 14 & 4 \\ 5 & 4 & 12 \end{pmatrix}, \ \det G(a_1, a_2, x) = 102$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 2

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,3,5,4]^\top, [0,1,2,1]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,2,2,-8]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-1,1,1]^\top, [1,-2,1,-1]^\top, [1,0,1,3]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 + x^2 + x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.