Урок 15

Дифракция Фраунгофера. Дифракционные решетки

1. (Задача 3.72.) Найти угловое распределение интенсивности света при дифракции Фраунгофера на экране: а) с одной щелью шириной b; б) с двумя щелями ширины b и расстоянием a между ними. В случае «а» оценить относительные интенсивности максимумов, ближайших к главному.

Решение а) Если на плоскость падает нормально плоская волна, то все точки в отверстии (щели) являются синфазными источниками плоских волн во все стороны. Рассмотрим сумму всех плоских волн, которые излучаются с линии отверстия (щели) под углом $varphi$. Разность хода между точкой с координатами x_1 и точкой x_2 будет $\Delta = k(x_2 - x_1)\sin\varphi$. Тогда очевидно, что следующий после нулевого максимума (который расположен при $\varphi = 0$, определяется условием

$$\frac{b}{2}\sin\varphi_1 = \lambda,$$

поскольку каждой точке в левой половине щели будет соответствующая ей точка в правой половине с такой разностью фаз, а, значит, амплитуды всех волн сложатся. Между $\varphi = 0-$ главным максимумом и $\varphi = \varphi_1-$ первым максимумом будет минимум, который определяется условием

$$\frac{b}{2}\sin\varphi = \frac{\lambda}{2}.$$

Таким образом можно получить выражения для всех углов минимумов и максимумов, но наша задача — найти распределение интенсивности для всех углов. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля (в приближении Фраунгофера) каждый участок щели является источником плоских волн вида

$$dE = \frac{E_0}{b}dxe^{i(\omega t - k\Delta)}, \text{ где } \Delta = x\sin\varphi.$$

Амплитуда суммарного поля от щели под углом $varphi$, которое для наблюдения на экране собирается линзой в плоскости изображения, равна

$$E_\Sigma = \frac{E_0}{b}\int\limits_0^b e^{i(\omega t - kx\sin\varphi)}dx = \frac{E_0}{b}e^{i\omega t}\left.\frac{e^{-ikx\sin\varphi}}{-ikx\sin\varphi}\right|_0^b = \frac{E_0}{b}\frac{e^{-ikb\sin\varphi}-1}{-ik\sin\varphi}.$$

Интенсивность

$$I \sim |E|^2 \sim \left|\frac{e^{\frac{-ikb\sin\varphi}{2}}\left(e^{\frac{-ikb\sin\varphi}{2}} - e^{\frac{ikb\sin\varphi}{2}}\right)}{\frac{2ikb\sin\varphi}{2}}\right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{bk\sin\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{bk\sin\varphi}{2}\right)^2},$$

или

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{b\pi \sin\varphi}{\lambda}\right)}{\left(\frac{b\pi \sin\varphi}{\lambda}\right)^2} = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{b\pi \sin\varphi}{\lambda}\right).$$

Для малых углов φ

$$I \approx I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{b\pi\varphi}{\lambda}\right)}{\left(\frac{b\pi\varphi}{\lambda}\right)^2} = I_0\, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{b\pi\varphi}{\lambda}\right).$$

Если условие минимумов интенсивности можно записать точно (это условие равенству нуля синусов в числителе, т.е. $b\sin\varphi = m\lambda$, $m = 1, 2, \ldots$), то для максимумов требуется более аккуратный анализ. Первый максимум функции $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ соответствует $x = 0$. Приближенно можно считать, что максимум этой функции соответствует максимуму синуса в числителе и тогда получается $x_{max} = m\pi + \frac{\pi}{2}$. Так, для первого максимума

$$\frac{b\pi \sin\varphi}{\lambda} = \pi + \frac{\pi}{2} = 1.5\pi,$$

но это приближенное значение. Точное же решение 1.43. Попробуем получить уравнение для точного условия максимума. Беря производную от функции и приравнивая ее нулю, получим

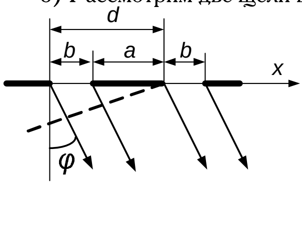
$$\frac{d}{dx}I(x) = \frac{2\sin x \cos x \cdot x^2 - 2x\sin^2 x}{x^4} = 0$$

$$x\frac{\cos x}{\sin x} - 1 = 0, \text{ откуда } \operatorname{tg} x = x.$$

Это точное уравнение для нахождения максимума! Как было указано выше, первый максимум достигается при значении $\frac{b\varpi}{\lambda}\sin\phi = 1.43\pi$. Возникает вопрос — каково отношение интенсивностей в главном (нулевом) и первом максимуме. Очевидно, что

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{1}{\frac{1}{(1.43\pi)^2}} \approx 1 : \frac{1}{20} = 1 : 0.05.$$

б) Рассмотрим две щели шириной b каждая и расстоянием a между краями щели, как это показано на рисунке. Попробуем качественно определить положение минимумов и максимумов. Старые минимумы (минимумы от каждой из щелей), определяемые условиями



$$\frac{b}{2}\sin\varphi = \frac{\lambda}{2} + m\lambda,\ \ b\sin\varphi = (2m+1)\lambda,$$

Новые минимумы, определяемые расстоянием $d = a + b$, т.е. условием

$$d \sin\varphi = \frac{\lambda}{2} + m\lambda.$$

Главные максимумы будут удовлетворять условию

$$d \sin\varphi = m\lambda,\ \ m = 1, 2, ...$$

Рассмотрим теперь как выглядит зависимость интенсивности от параметров задачи. Суммарная амплитуда определяется теперь интегралом не по одной, а по 2 щелям, т.е.

$$E(\varphi) \sim \int\limits_0^b e^{-ikx\sin\varphi} dx + \int\limits_d^{d+b} e^{-ikx\sin\varphi} dx.$$

Делая во втором интеграле очевидную замену переменных $x' = x - d$ и вынося общий множитель за скобку выражение для поля можно записать в виде

$$E(\varphi) \sim \left(1 + e^{-ikd\sin\varphi}\right) \int\limits_0^b e^{-ikx\sin\varphi} dx =$$
$$= 2e^{-ikd\sin\varphi/2} \cos\left(\frac{kd\sin\varphi}{2}\right) e^{-ikb\sin\varphi/2} b \frac{\sin\left(kb\sin\varphi/2\right)}{kb\sin\varphi/2}.$$

Вычисляя квадрат модуля амплитуды и вспоминая выражение для I_0 из предыдущего пункта получим окончательное выражение

$$I\left(\varphi\right) = 4I_0 \,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{bk\sin\varphi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{kd\sin\varphi}{2}\right).$$

2. (Задача 3.73.) Найти угловое распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера в случае нормального падения света на решетку из N щелей с периодом d. Ширина щели b $(d = a + b)$.

Решение Решение этой задачи отличается от решения пункта б) предыдущей задачи только тем, что здесь необходимо вычислить сумму по N щелям. Запишем суммарную амплитуду с помощью интеграла Кирхгофа, учитывая, что при расчетах цилиндрических волн (т.е. когда отверстие, на котором происходит дифракция, бесконечная щель и множитель перед интегралом Кирхгофа

$$E\left(x_p\right)=\sqrt{\frac{k}{2\pi iF}}e^{i(kz-\omega t)}\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{nd}^{nd+b}E_0e^{-ik_xx}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{2\pi iF}}e^{i(kz-\omega t)}E_0\sum_{n=0}^{N-1}\frac{i}{k_x}e^{-ik_x(nd+b)}-e^{ik_xnd}=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{2\pi iF}}e^{i(kz-\omega t)}\frac{E_0 i}{k\sin\theta}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-iknd\sin\theta}\left(e^{-ikb\sin\theta}-1\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{2\pi iF}}\frac{E_0}{(-ik\sin\theta)}\left[e^{i(kz-\omega t)}\right]\left(e^{-ikb\sin\theta}-1\right)\cdot\sum_{n=0}^{N-1}e^{-iknd\sin\theta}.$$

Тогда интенсивность, которая равна вектору Пойнтинга, можно записать в виде

$$I\left(X_p\right)=\frac{c}{4\pi}\frac{kE_0^2b^2}{2\pi F}\left|\frac{e^{-ikb\sin\theta}-1}{2\frac{ikb\sin(\theta)}{2}}\right|^2\left|\frac{e^{-ikNd\sin(\theta)}-1}{e^{-ikd\sin\theta}-1}\right|^2=$$

$$=\frac{c}{8\pi^2}\frac{kb^2E_0^2N^2}{F}\left(\frac{\sin U}{U}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{N\sin\alpha}\right)^2=I_0\left(\frac{\sin U}{U}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin N\alpha}{N\sin\alpha}\right)^2,$$

где $U=\frac{kb\sin\theta}{2},\ \alpha=\frac{kd\sin\theta}{2}$. Для малых θ $U=\frac{kb\theta}{2},\ \alpha=\frac{kd\theta}{2}$.

В точках, где $\alpha_m=m\pi,\ \theta_m=\frac{2m\pi}{ka}=m\frac{\lambda}{a}$ расположены главные максимумы. Их величина зависит от m следующим образом

$$I_m=I_0\left(\frac{\sin U_m}{U_m}\right)\sim\frac{I_0}{m^2}.$$

Между этими главными максимумами имеется вторичные максимумы, которые определяются условиями

$$N\alpha_n=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

Интенсивность в этих вторичных максимумах $I_n\sim I_0N^2U_n^2$, где $U_n=\frac{b\alpha_n}{d},\ \ \alpha_n\sim n\pi$.

Ширина главного максимума у основания (расстояние между минимумами, соседними с главным максимумом) определяется условием

$$N\left(\alpha_m+\Delta\alpha\right)=Nm\pi+\pi,$$

$$\Delta\alpha=\pm\pi/N.$$

Поскольку обычно $N \gg 1$, эта величина очень мала и, следовательно, и мала величина углового размера максимума $\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd}$.

Величина Nd - апертура решетки (поперечный размер решетки). Относительная угловая ширина главного максимума

$$\frac{\Delta\theta_m}{\theta_m} = \frac{1}{mN}.$$

3. (Задача 3.75.) Как изменится угловое распределение интенсивности, если на решетку из задачи 3.73 свет падает под углом α? Под каким углом проходит максимальное изучение?

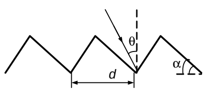
Решение

$$E\left(x, y, z = 0\right) = E_0 e^{ik_x^0 \cdot x} = E_0 e^{ikx\theta_0}$$

$$I\left(x_p\right) \sim \left|\sum \int e^{i\left(k_x^0 - k_x\right)x} dx\right|^2 = \left|\sum \int e^{ikx(\sin\alpha - \sin\theta)} dx\right|^2.$$

Интенсивность в этом случае $I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{bkp}{2}\right) \cdot \left(\sin\frac{Nkpd}{2} \Big/ \sin\frac{kpd}{2}\right)^2$, где $p = \sin\theta - \sin\alpha$. Максимальное излучение проходит под углом $\varphi = \alpha$.

4. (Задача 3.76.) На дифракционную отражающую решетку, параметры которой даны на рисунке, свет падает под углом θ. Каков порядок спектра, имеющего максимальную интенсивность? Какая ширина $\Delta\lambda$ спектра (при длине волны λ) может быть получена при этом без перекрытия спектров соседних порядков?



Решение

$$E_p = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi iF}} \sum_{n=0}^{N} \int\limits_{nd}^{(n+1)d} e^{-ik\theta x} e^{ik2\alpha(x - nd)} =$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi iF}} \sum_{n=0}^{N} e^{ik2\alpha dn} \int\limits_{nd}^{(n+1)d} e^{-ikx(\theta - 2\alpha)} dx =$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi iF}} \sum_{n=0}^{N} e^{-ik2\alpha dn} \int\limits_{0}^{d} e^{-ikt(\theta - 2\alpha)} dt \cdot e^{-ik(\theta - 2\alpha)nd} =$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi iF}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iknd\theta} \int\limits_{0}^{d} e^{-ikt(\theta - 2\alpha)} =$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi iF}} \left[\frac{e^{-ikd(\theta - 2\alpha)} - 1}{-ik(\theta - 2\alpha)}\right] \cdot \frac{1 - e^{-ikNd\theta}}{1 - e^{-ikd\theta}}.$$

Тогда интенсивность

$$I_p \sim |E_p|^2 = I_0 \left| \frac{\sin^2 \frac{kd(\theta-2\alpha)}{2}}{\left[\frac{kd(\theta-2\alpha)}{2}\right]^2} \right| \left(\frac{\sin N \frac{kd\theta}{2}}{N \sin \frac{kd\theta}{2}} \right)^2 .$$

Если углы не малы, то (ЭТО ВСЕ НАДО ПРОВЕРИТЬ)

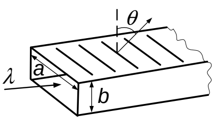
$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kpd}{2} \right) \cdot \left(\sin \frac{Nkp_1 d}{2} \Big/ \sin \frac{kp_1 d}{2} \right)^2 ,$$

где $p_1 = \sin(\varphi - \alpha) - \sin(\alpha + \theta)$, $p = \sin\varphi - \sin\alpha$.

$$\Delta\lambda \simeq \lambda^2 / [2d \cdot \sin(\theta + 2\alpha)].$$

Главный максимум интенсивности наблюдается в порядке $m = 2\alpha d/\lambda$ под углом дифракции $\varphi \simeq \theta + 2\alpha$.

5. (Задача 3.78.) В длинном с прямоугольным сечением a x b волноводе возбуждается волна типа H_{10} с длиной λ. В узкой стенке (a) волновода прорезаны N поперечных узких щелей $N \gg 1$ с периодом d. Найти направление максимального излучения получившейся антенны.



Решение Предположив, что зависимость $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ от времени имееет вид $e^{-i\omega t}$, получим уравнения Максвелла в волноводе (в пустоте) в виде

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\
\operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{i\omega}{c}\mathbf{H}, \\
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\frac{w}{c}\mathbf{E}.
\end{aligned}$$

Граничные условия на поверхности идеального проводника

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad H_n = 0.$$

Используя известное выражение для $\operatorname{rot}\mathbf{a}$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_i = e_{ikl}\frac{\partial a_l}{\partial x_k},$$

где e_{ikl} — символ Леви-Чивита, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, вычислим выражение

$$\operatorname{rot}\left[(\operatorname{rot}\mathbf{a})\right]_j = e_{jpr}\frac{\partial}{\partial x_p}\left[e_{rkl}\frac{\partial a_l}{\partial x_k}\right] = e_{jpr}e_{rkl}\frac{\partial^2 a_l}{\partial x_p \partial x_k} =$$
$$= \left(\delta_{jk}\delta_{pl} - \delta_{jl}\delta_{pk}\right)\frac{\partial^2 a_l}{\partial x_p \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial a_p}{\partial x_p} - \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_p \partial x_p}.$$

Или, в обычных векторных выражениях

$$\operatorname{rot}\left[(\operatorname{rot}\mathbf{a})\right] = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}.$$

Тогда для каждого из векторов поля ($\mathbf{E}$или$\mathbf{H}$) получаем систему уравнений

$$\Delta\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0.$$

Рассматривая волны, бегущие вдоль волновода (вдоль оси z в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(x, y\right)^{-i\omega t + ik_z z}$$

можно показать, что в односвязных волноводах могут быть волны двух типов: либо волны, у которых $H_z = 0$, - волны электрического типа, или E-волны, либо волны, у которых $E_z = 0$, волны магнитного типа, или H-волны

В данной задаче нас интересует H-волна, у которой все компоненты магнитного и электрического полей выражаются через компоненту H_z.

$$E_x = \frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$E_y = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

а для H_z необходимо решить уравнение

$$\Delta H_z + \varkappa^2 H_z = 0$$

с граничным условием

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$$

на границе контура сечения волновода.

Запишем решение, удовлетворяющее всем условиям

$$H_z = C \cdot \cos k_x \cdot x \cdot \cos k_y \cdot y,$$

где

$$\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right),$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + \varkappa^2 = k^2.$$

Заданная в условии задача H_{10} волна $(n_x = 1, \;\; n_y = 0)$ имеет компоненты

$$H_z = C \cdot \cos \frac{\pi}{a} x, \;\; E_z = 0, \;\; E_x = 0, \;\; E_y = A \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$$

.

Таким образом, единственная компонента электрического поля внутри волновода

$$E_y = A \cdot \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\omega t + ik_z z}.$$

Рассматривая каждую из щелей как точечный источник в плоскости $Z - Y$ получаем задачу, аналогичную дифракционной решетке, только с очень узкими (точечными) щелями и не с постоянным вдоль Z значением электрического поля, а с распределением вдоль волновода в соответствии с полученным решением. Тогда под углом $theta$ к нормали (т.е. к оси Y) можно записать сумму полей от каждой из щелей в виде

$$E_y = \sum_{j=1}^{N} e^{i(k_z d - kd \sin \theta)\cdot j} \approx \frac{1}{1 - e^{-i\Delta}}.$$

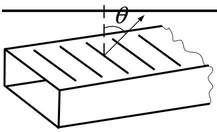
При выводе этой формулы использовалось, что координата j-го источника $z_j = jd$, величина в показателе степени экспоненты $\Delta = k_z d - kd \sin \theta$. Модуль волнового вектора $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, а интенсивность вдоль направления θ, пропорциональная квадрату модуля электрического поля

$$|E_y|^2 \sim \frac{1}{\sin^2 \frac{\Delta}{2}} \to \max \;\; \text{при} \;\; \Delta = 0$$

Из этого условия получаем

$$\sin \theta_{\max} = \frac{k_z}{k} = \frac{\sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}$$

6. (Задача 3.79.) В прямоугольном волноводе с размерами a x b $(a > b)$ распро-



страняется слабо затухающая волна H_{10} с частотой ω и длиной затухания δ. В боковой узкой стенке прорезаны узкие параллельные щели с периодом d. Найти угловое распределение $I(\theta)$ излучения из щелей. Какое количество щелей эффективно участвует в излучении?

Решение Скорость затухания амплитуды волны выражается множителем e^{-z}/δ. Тогда дифракционная сумма, аналогичная предыдущей задаче, запишется в виде

$$E_y \sim \sum_{j=1}^{\infty} e^{i(k_z d - kd\sin\theta + id/\delta)} = \frac{1}{1 - e^{i\Delta - d/\delta}}.$$

Интенсивность излучения вдоль направления θ пропорциональна

$$\begin{aligned} I \sim |E_y|^2 &= \frac{1}{\left(1 - e^{i\Delta - d/\delta}\right)\left(1 - e^{-i\Delta - d/\delta}\right)} = \\ &= \frac{1}{1 + e^{-2d/\delta} - e^{-d/\delta}\left(e^{i\Delta} + e^{-i\Delta}\right)} = \\ &= \frac{1}{1 + e^{-2d/\delta} - 2e^{-d/\delta}\cos\Delta} = \\ &= \frac{1}{\left(1 - e^{-d/\delta}\right)^2 - 2e^{-d/\delta}(1 + \cos\Delta)} \end{aligned}$$

Таким образом

$$I = \frac{I_0}{(1 - e^{-\alpha})^2 + 4e^{-\alpha}\sin^2\frac{\Delta}{2}},$$

где $\alpha = \delta/d$ – затухание волны на периоде решетки, $\Delta = k_z d - kd\sin\theta$. Здесь для H_{10}-волны $k_z = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$; $k = \omega/c$. В излучении эффективно участвует $N \simeq d/\delta$ щелей.

7. (Задача 3.88.)В дифракционной решетке $N \gg 1$ щелей. Пропускная способность каждой последующей щели по амплитуде в $k = 2$ раз меньше, чем у предыдущей, а фазы при прохождении соседних щелей различаются на $\alpha = \pi$. Размер щели мал. Расстояние между щелями – d. Найти интенсивность света в зависимости от угла дифракции θ. Свет с длиной волны λ падает на решетку по нормали. Интенсивность света, прошедшего через первую щель, равна I_0.

Решение Для обычной дифракционной решетки имеем

$$E_\theta = \frac{E_0}{a}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{nd}^{nd+a} e^{ik_x x}\mathrm{d}x = \frac{E_0}{a}\int_0^a e^{ik_x x}\mathrm{d}x \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{ik_x nd} =$$

$$= E_0 e^{ik_x a/2} \cdot \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1 - e^{ik_x N d}}{1 - e^{ik_x d}},$$

где

$$u = \frac{k_x a}{2} = \frac{\pi \sin\theta}{\lambda}.$$

Напомним, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

Тогда

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin Nv}{\sin v}\right)^2,$$

$$v = \frac{k_x d}{2} = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}.$$

В нашем случае из-за узости щели $u \approx 0$ можно положить $\frac{\sin u}{u} \approx 1$, а знаменатель прогрессии

$$q = \frac{e^{i\pi}}{2} \cdot e^{ik_x d} = -\frac{1}{2} e^{ik_x d}.$$

Поскольку $N \gg 1$, то

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} \approx \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 + e^{ik_x d}/2}.$$

Отсюда

$$I(\theta) = I_0 \Big/ \left(1 + \frac{1}{2} e^{ik_x d}\right) \left(1 + \frac{1}{2} e^{-ik_x d}\right),$$

$$I(\theta) = \frac{I_0}{\frac{5}{4} + \cos \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}}.$$