

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

5 семестр, осень 2023

Задание 2

Метод разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Специальные функции.

1. (2 б) В проводящей прямоугольной пластинке, толщина которой h , течет постоянный ток J , втекающая через образующую ($x = -l_1, y = 0$) и вытекающая через другую образующую ($x = l_1, y = 0$). Определить плотность тока в пластинке (т.е. зная, что $\mathbf{j} = -\sigma \nabla u$, найдите u):

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, \quad |x| < l_1, \quad |y| < l_2, \\ u_x(\pm l_1, y) &= -\frac{J}{h\sigma} \delta(y), \quad u_y(x, \pm l_2) = 0.\end{aligned}$$

2. (2 б) Дан стержень ($0 < x < l$) с теплоизолированной боковой поверхностью, начальная температура которого равна нулю, а температура торцов $x = 0$ и $x = l$ равна нулю и $\mu(t)$ соответственно. Решить задачу теплопроводности.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = \mu(t), \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

3. (4 б) Решите краевую задачу $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \omega t, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 1. \end{cases}$
Выясните, при каких значениях ω возникает резонанс.

4. (3 б) Температура боковой поверхности цилиндра $\{r, \varphi, z : r < r_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < z < l\}$ равна $f(\varphi, z)$, где $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$, а температура оснований равна нулю. Решить стационарную задачу теплопроводности. Найти решение в частном случае $f(\varphi, z) = u_0 \cos 3\varphi$.

5. (3 б) Решить задачу теплопроводности для шара B , радиус которого r_0 , если температура поверхности равна нулю, а начальная температура равна $u_0 \frac{r}{r_0} \sin \theta \sin \varphi$.

6. (3 б) Найдите гармоническую вне единичной сферы функцию и такую, что

$$(u - u_r)|_{r=1} = (\sin \varphi + 2 \sin \theta) \sin 2\theta;$$

7. (3 б) Найдите распределение температуры в шаре радиуса R , если оно описывается функцией $u = u(t, r)$, не имеющей особенностей, и подчиняется закону:

$$u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_r|_{r=R} = 1 \quad t > 0.$$

8. (3 б) Найдите колебания газа в круглом замкнутом цилиндре радиуса R и высоты h , вызванные поперечными колебаниями его дна $h = 0$, начавшимися в момент $t = 0$, если при $t > 0$ скорости частиц этого дна равны $f(r) \cos \omega t$, где r - расстояние от частицы до оси цилиндра. Второе дно и боковая стенка цилиндра неподвижны.