Самостоятельная работа к занятию 22

1. Решите краевую задачу $\begin{cases} xy'' + y' = 1, \\ y(1) = 0, \quad y'(2) = 0. \end{cases}$

2. Найдите $n \in \mathbb{N}$, при которых краевая задача имеет решение.

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{9}{4}y = \sin \dfrac{n}{2}x, \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

3. Покажите, что оператор $L[y] = x^2y'' + 2xy' - 2y$ не вырожден на множестве функций, ограниченных на $[0, +\infty)$.

4. Покажите, что оператор $L[y] = y''+y$ вырожден на множестве функций, удовлетворяющих условиям $\begin{cases} y(0) - y'(0) = 0, \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0. \end{cases}$

5. Найдите условие разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} \left(\dfrac{y'}{x}\right)' = f(x) \\ 2y(1) + 3y'(1) = 0, \quad y(2) = 0. \end{cases}$$

6. а) При каких значениях параметра α краевая задача

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = f(x) \\ y(0) + \alpha y'(0) = 0, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

имеет решение при любой правой части?

б) При каких значениях параметра α и условиях на $f(x)$ краевая задача имеет бесконечно много решений?

в) При каких значениях параметра α и условиях на $f(x)$ краевая задача не имеет решения?

Ответы и указания

1. *Указание:* $xy'' + y' = (xy')'$.

Частное решение $y = x$, общее решение $y(x) = C_1 + C_2 \ln x + x$. Подставляя $y(x)$ в краевые условия, получаем $y(x) = -1 - 2\ln x + x$.

2. Общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{ o.o.}}(x) = C_1 \sin\frac{3}{2}x + C_2 \cos\frac{3}{2}x.$$

Функция $e_0(x) = \sin\frac{3}{2}x$ принадлежит ядру оператора $L[y]$. Условия разрешимости

$$\int\limits_0^\pi \sin\frac{n}{2}x \sin\frac{3}{2}x dx = 0.$$

Ответ: n — нечетное и $n \neq 3$, $y(x) = \dfrac{4}{9-n^2}\sin\dfrac{nx}{2} + C\sin\dfrac{3}{2}x$.

3. *Указание:* $y_{\text{ o.o.}}(x) = C_1 x + C_2 x^{-2}$. Следовательно, не существует функции $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$, отличной от нуля, ограниченной как при $x \to 0$, так и при $x \to +\infty$.

4. *Указание:* $y_{\text{ o.o.}}(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Функция $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$ при $C_2 - C_1 = 0$.

Ответ: $e_0(x) = \sin x + \cos x$.

5. *Указание:* $y_{\text{ o.o.}}(x) = C_1 x^2 + C_2$. Функция $e_0(x) = x^2 - 4 \in \operatorname{Ker} L$. Условие разрешимости

$$\int\limits_1^2 f(x)(x^2-4)dx = 0.$$

6. $y_{\text{ o.o.}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$. Так как $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$, то $e_0(x) = Ce^x$.

Если $C(1+\alpha) = 0$, то $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$.

Приведем уравнение к самосопряженному виду:

$$(e^{2x}y')' - 3e^{2x}y = e^{2x}f(x).$$

Для разрешимости краевой задачи необходимо, чтобы правая часть уравнения была ортогональна функции из ядра:

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)e^{3x}dx = 0.$$

Ответ: а) при $\alpha \neq -1$ краевая задача имеет единственное решение для любой $f(x)$;

б) если $\alpha = -1$ и $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)e^{3x}dx = 0$, то краевая задача имеет бесконечно много решений;

в) если $\alpha = -1$ и $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)e^{3x}dx \neq 0$, то краевая задача не имеет решений.