Плоская монохроматическая волна, распространяющаяся вдоль оси z, по определению описывается выражением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_{0x}\,\mathrm{e}^{i(\omega t-kz)}\cdot\mathbf{e}_x + E_{0y}\,\mathrm{e}^{i(\omega t-kz+\phi)}\cdot\mathbf{e}_y.$$

Зафиксируем плоскость $z=0$ и выясним, какую траекторию описывает конец вектора $\mathbf{E}(t)$. Запишем x- и y-составляющие поля:

$$E_x = E_{0x}\cos\omega t,\quad E_y = E_{0y}\cos(\omega t+\phi).$$

Выразим $\cos\omega t = \frac{E_x}{E_{0x}}$ и подставим в выражение для y-составляющей:

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi = \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\phi - \sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2}\sin\phi,$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2}\sin\phi = \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\phi - \frac{E_y}{E_{0y}},$$

$$\left(1-\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right)\sin^2\phi = \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\phi - \frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2,$$

$$\left(1-\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right)\sin^2\phi = \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\cos^2\phi + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\phi\frac{E_y}{E_{0y}},$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi) + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\phi\frac{E_y}{E_{0y}} = \sin^2\phi,$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\phi = \sin^2\phi.$$

Получилось уравнение эллипса.

Рассмотрим частные случаи.

1. Линейная поляризация:

а) $\phi = 0:\ \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} = \left(\frac{E_x}{E_{0x}} - \frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 0 \Rightarrow E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}\cdot E_x.$

б) $E_{0x} = 0$ или $E_{0y} = 0$.

2. Круговая поляризация:

$$\phi = \pm\frac{\pi}{2},\ \ E_{0y} = E_{0x}:\ \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0x}}\right)^2 = 1.$$