

## Решение дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

1. Примеры дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка
2. Разностные схемы, аппроксимирующие дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка
3. Явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью
  - 3.1. *Исследование устойчивости*
  - 3.2. *Метод решения*
4. Явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью
  - 4.1. *Исследование устойчивости*
  - 4.2. *Метод решения*
5. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью
  - 5.1. *Исследование устойчивости*
  - 5.2. *Метод решения*
6. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью
  - 6.1. *Исследование устойчивости*
  - 6.2. *Метод решения*
7. Влияние наличия искомой функции в составе свободного члена на устойчивость разностных схем
8. Сравнительная характеристика изученных разностных схем
9. Задания для самоконтроля

## 1. Примеры дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка

В разделе "Примеры математических моделей, содержащих дифференциальные уравнения в частных производных" мы рассматривали математическую модель трубчатого реактора, в котором протекает простая необратимая реакция. Баланс по концентрации исходного реагента для нестационарного режима имеет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{dc}{dx} = -k c, \quad c(t=0, x) = c^0(x), \quad c(t, x=0) = \varphi(t),$$

где  $k$  – константа скорости химической реакции;  $c$  – концентрация исходного реагента;  $v$  – линейная скорость потока;  $x$  – координата по длине реактора.

Данное уравнение является одномерным дифференциальным уравнением в частных производных 1-го порядка (см. таблицу в разделе "Типы дифференциальных уравнений, изучаемых в курсе").

Рассмотрим другой пример. Математическая модель процессов массовой кристаллизации включает уравнение баланса числа частиц, имеющее вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \eta \frac{\partial f}{\partial l} = 0, \quad f(t=0, l) = 0, \quad f(t, l=l_3) = \frac{I}{\eta},$$

где  $f$  – функция плотности распределения кристаллов по размерам;  $l$  – размер кристалла;  $\eta$  – скорость роста кристалла;  $I$  – скорость образования зародышей;  $l_3$  – размер зародыша.

Данное уравнение также является одномерным дифференциальным уравнением в частных производных 1-го порядка.

Таким образом, дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка часто встречаются в математических моделях физико-химических и химико-технологических процессов, что обуславливает необходимость знания методик численного решения этих уравнений. Для простоты дальнейшего изложения мы будем рассматривать одномерные дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка в следующем общем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), \tag{5.1}$$

причём параметр  $v$  может быть как положительным, так и отрицательным, но не равным нулю (поскольку при  $v = 0$  уравнение (5.1) будет уже являться обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка; методам решения этих уравнений мы посвятим отдельную главу).

Уравнение (5.1) следует дополнить начальным и граничным условиями:

$$u(t=0, x) = \xi(x); \quad u(t, x=a) = \varphi(t).$$

Для определённости будем пока рассматривать граничное условие 1-го рода, не оговаривая при этом, каким оно должно быть – левым или правым, поскольку без знания методики численного решения уравнения (5.1) этот выбор сделать невозможно.

## 2. Разностные схемы, аппроксимирующие дифференциальные уравнения в частых производных 1-го порядка

Для дифференциального уравнения (5.1) введём разностную сетку и рассмотрим аппроксимацию производных в точке  $(t^n, x_j)$ . Для аппроксимации производной функции  $u$  по времени обычно используется правая конечная разность (со стабилизацией значения независимой переменной  $x$  в точке с порядковым номером  $j$ ):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t^n, x_j} \rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}.$$

Для аппроксимации производной функции  $u$  по координате  $x$  может быть использована как правая конечная разность, так и левая конечная разность; причём стабилизация значения независимой переменной  $t$  может быть как на  $n$ -ом шаге по времени (т.е. в точке  $t^n$ ), так и на  $(n+1)$ -ом шаге по времени (т.е. в точке  $t^{n+1}$ ). Данный выбор позволяет записать для уравнения (5.1) четыре разностные схемы:

1. явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = f(t^n, x_j); \quad (5.2)$$

2. явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = f(t^n, x_j); \quad (5.3)$$

3. неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = f(t^n, x_j); \quad (5.4)$$

4. неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = f(t^n, x_j). \quad (5.5)$$

Учитывая порядок аппроксимации разностных операторов, из которых составлены разностные схемы (5.2)–(5.5), легко видеть, что каждая из них имеет первый порядок аппроксимации и по времени, и по координате:

$$O(\Delta t, h).$$

Чтобы выяснить, какие из разностных схем (5.2)–(5.5) лучше всего подходят для численного решения уравнения (5.1), необходимо провести исследование их устойчивости и сравнить методы их решения.

### 3. Явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью

#### 3.1. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость разностной схемы (5.2) с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член  $f(t^n, x_j)$ , наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоники (3.7):

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} + v \frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{h} = 0.$$

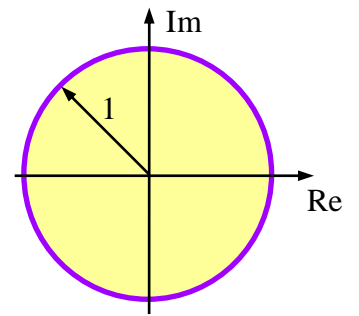
Упрощаем данное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha j}$ , и выражаем  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \frac{e^{i\alpha} - 1}{h} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 + v \frac{\Delta t}{h} - v \frac{\Delta t}{h} e^{i\alpha}.$$

Комплексный вид полученного выражения свидетельствует о том, что необходимое условие устойчивости разностных схем (3.8) также следует рассматривать в применении к комплексным числам. То есть, неравенство

$$|\lambda| \leq 1 \quad (5.6)$$

означает, что для того чтобы разностная схема была устойчива, необходимо чтобы собственные числа оператора перехода были расположены внутри или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости (см. рисунок).



1. Рассмотрим случай  $v < 0$ . Введём следующее обозначение:

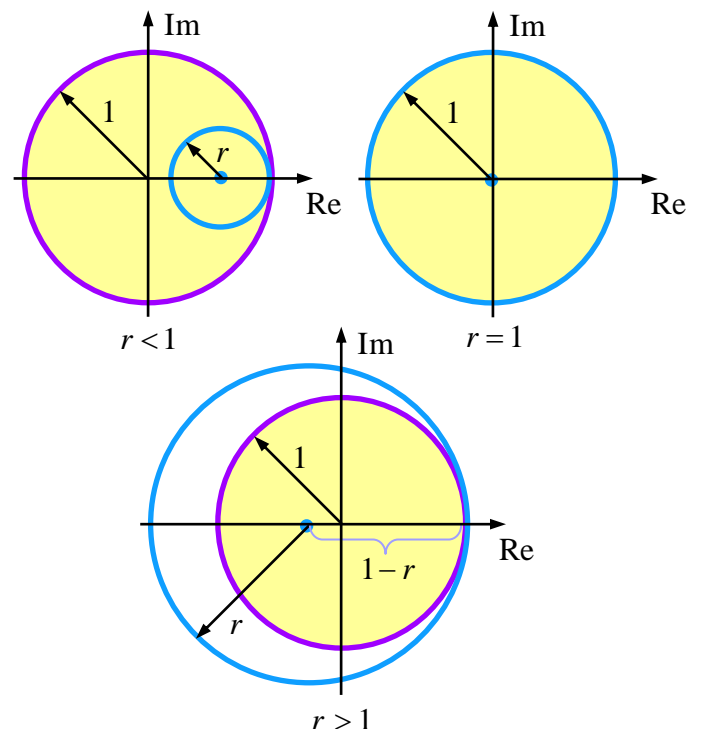
$$r = -v \frac{\Delta t}{h} > 0 \Rightarrow \lambda = 1 - r + r e^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора перехода расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 - r; 0)$  и радиусом:

$$|r e^{i\alpha}| = |r \cos \alpha + i r \sin \alpha| = \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha} = r.$$

Сравнивая расположение этой окружности на комплексной плоскости с условием (5.6), получаем три различных варианта (см. рисунок). Видно, что окружность, соответствующая собственным числам оператора перехода, при  $r < 1$  находится внутри круга, соответствующего условию (5.6); при  $r > 1$  – вне этого круга; а при  $r = 1$  совпадает с его границей. Таким образом, при отрицательном значении параметра  $v$  явная разностная схема (5.2) будет устойчива при выполнении следующего условия:

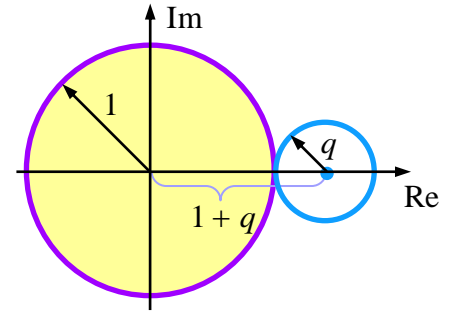
$$r = -v \frac{\Delta t}{h} \leq 1.$$



2. Рассмотрим случай  $\nu > 0$ . Введём следующее обозначение:

$$q = \nu \frac{\Delta t}{h} > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 + q - q e^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора перехода расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 + q; 0)$  и радиусом  $q$ . Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию (5.6) при любом значении  $q$  (см. рисунок). Таким образом, при положительном значении параметра  $\nu$  явная разностная схема (5.2) будет неустойчива.



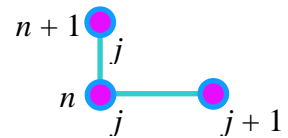
Обобщая полученные результаты, сделаем вывод, что явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью (5.2) является *условно устойчивой*; условие устойчивости имеет вид:

$$-1 \leq \nu \frac{\Delta t}{h} < 0.$$

### 3. Явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью

#### 3.2. Метод решения

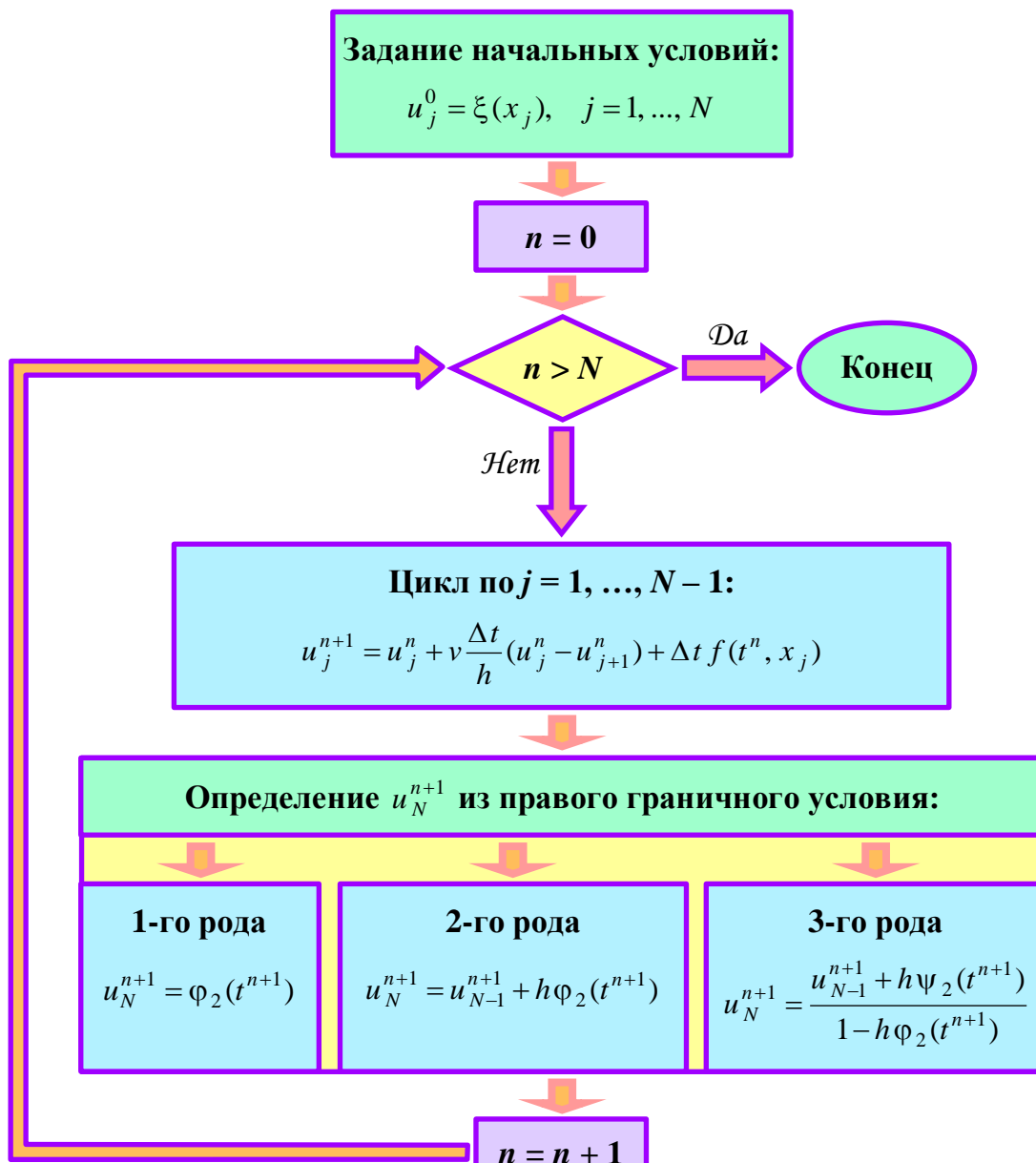
Рассмотрим метод решения разностной схемы (5.2). Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий данную разностную схему, свидетельствует о том, что она содержит одну неизвестную величину – значение функции  $u$  на  $(n + 1)$ -ом шаге по времени. Выражая эту величину из разностной схемы, получаем рекуррентное соотношение



$$u_j^{n+1} = u_j^n + v \frac{\Delta t}{h} (u_j^n - u_{j+1}^n) + \Delta t f(t^n, x_j),$$

позволяющее рассчитать все значения функции  $u$  на  $(n + 1)$ -ом шаге по времени (при известных значениях функции  $u$  на  $n$ -ом шаге), кроме значения на правой границе, для определения которого, очевидно, требуется *правое граничное условие*. Если задано граничное условие 1-го рода, то значение  $u_N^{n+1}$  определяется непосредственно из его разностной аппроксимации; если 2-го или 3-го рода, то – с помощью соотношений (4.4а) и (4.4b), полученных при описании метода решения явной разностной схемы для дифференциального уравнения параболического типа.

Ниже приводится алгоритм решения (в виде блок-схемы) явной разностной схемы с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью (5.2).





#### 4. Явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью

##### 4.1. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость разностной схемы (5.3) с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член  $f(t^n, x_j)$ , наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоники (3.7):

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} + v \frac{\lambda^n e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha(j-1)}}{h} = 0.$$

Упрощаем данное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha j}$ , и выражаем  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \frac{1 - e^{-i\alpha}}{h} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 - v \frac{\Delta t}{h} + v \frac{\Delta t}{h} e^{-i\alpha}.$$

Комплексный вид полученного выражения свидетельствует о том, что для устойчивости разностной схемы (5.3) согласно условию (5.6) требуется, чтобы собственные числа оператора перехода были расположены внутри или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости.

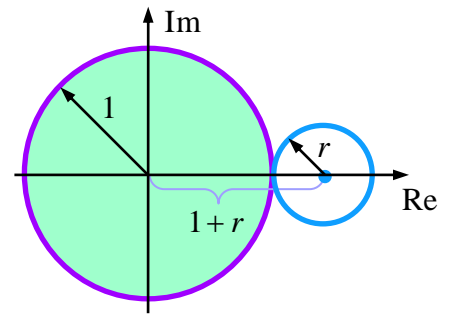
1. Рассмотрим случай  $v < 0$ . Введём следующее обозначение:

$$r = -v \frac{\Delta t}{h} > 0 \Rightarrow \lambda = 1 + r - r e^{-i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора перехода расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 + r; 0)$  и радиусом:

$$|r e^{-i\alpha}| = |r \cos \alpha - i r \sin \alpha| = \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha} = r.$$

Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию (5.6) при любом значении  $r$  (см. рисунок). Таким образом, при отрицательном значении параметра  $v$  явная разностная схема (5.3) будет неустойчива.





2. Рассмотрим случай  $\nu > 0$ . Введём следующее обозначение:

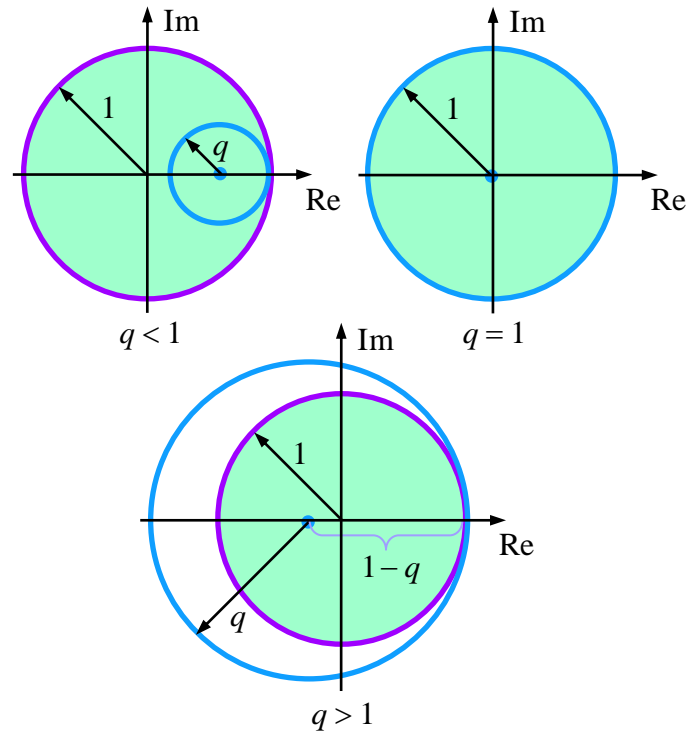
$$q = \nu \frac{\Delta t}{h} > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 - q + q e^{-i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора перехода расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 - q; 0)$  и радиусом  $q$ . Сравнивая расположение этой окружности на комплексной плоскости с условием (5.6), получаем три различных варианта (см. рисунок). Видно, что окружность, соответствующая собственным числам оператора перехода, при  $q < 1$  находится внутри круга, соответствующего условию (5.6); при  $q > 1$  – вне этого круга; а при  $q = 1$  совпадает с его границей. Таким образом, при положительном значении параметра  $\nu$  явная разностная схема (5.3) будет устойчива при выполнении следующего условия:

$$q = \nu \frac{\Delta t}{h} \leq 1.$$

Обобщая полученные результаты, сделаем вывод, что явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью (5.3) является *условно устойчивой*; условие устойчивости имеет вид:

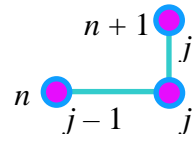
$$0 < \nu \frac{\Delta t}{h} \leq 1.$$



#### 4. Явная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью

##### 4.2. Метод решения

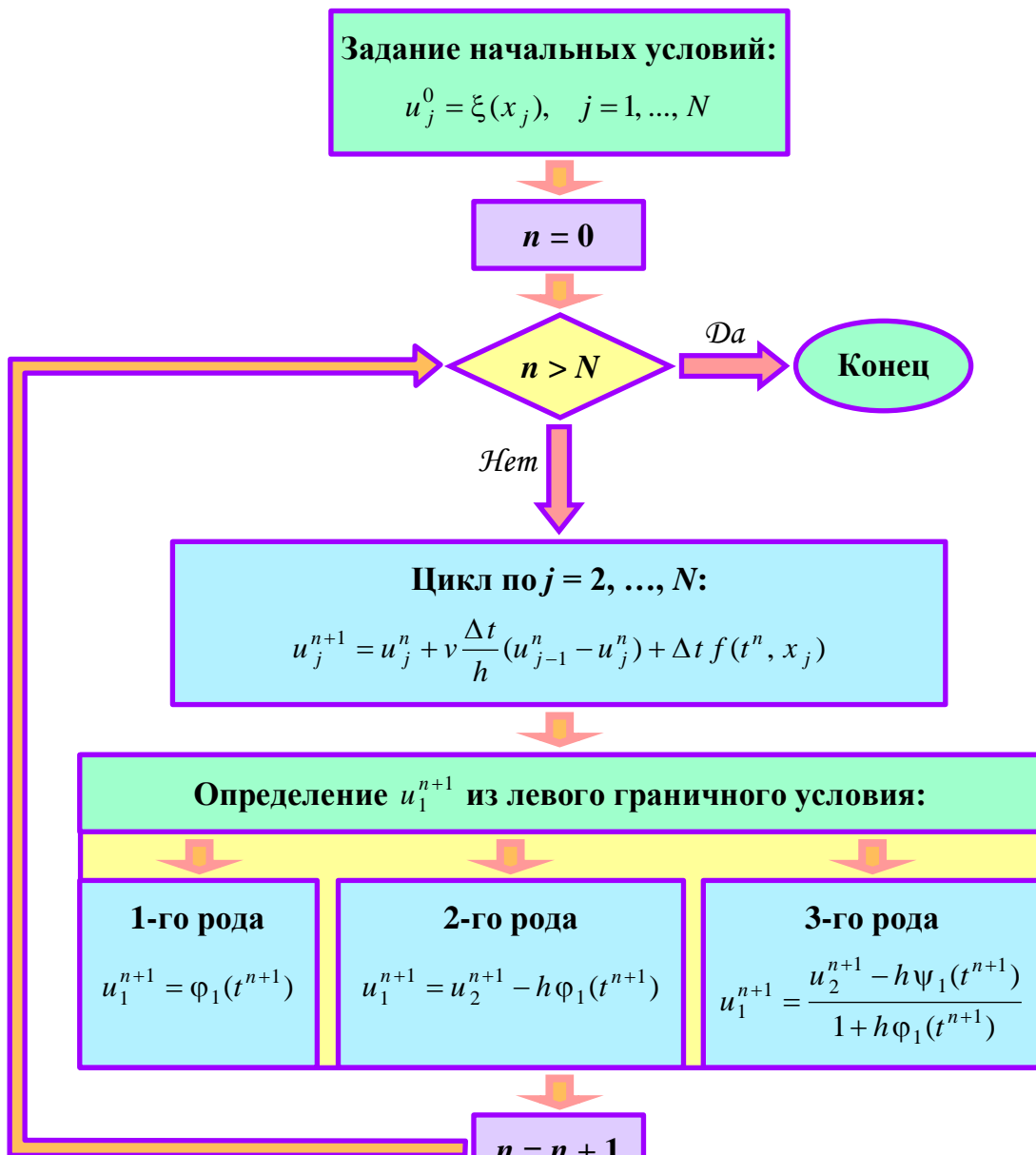
Рассмотрим метод решения разностной схемы (5.3). Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий данную разностную схему, свидетельствует о том, что она содержит одну неизвестную величину – значение функции  $u$  на  $(n + 1)$ -ом шаге по времени. Выражая эту величину из разностной схемы, получаем рекуррентное соотношение



$$u_j^{n+1} = u_j^n + v \frac{\Delta t}{h} (u_{j-1}^n - u_j^n) + \Delta t f(t^n, x_j),$$

позволяющее рассчитать все значения функции  $u$  на  $(n + 1)$ -ом шаге по времени (при известных значениях функции  $u$  на  $n$ -ом шаге), кроме значения на левой границе, для определения которого, очевидно, требуется *левое граничное условие*. Если задано граничное условие 1-го рода, то значение  $u_1^{n+1}$  определяется непосредственно из его разностной аппроксимации; если 2-го или 3-го рода, то – с помощью соотношений (4.4а) и (4.4b), полученных при описании метода решения явной разностной схемы для дифференциального уравнения параболического типа.

Ниже приводится алгоритм решения (в виде блок-схемы) явной разностной схемы с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью (5.3).





## 5. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью

### 5.1. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость разностной схемы (5.4) с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член  $f(t^n, x_j)$ , наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоники (3.7):

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} + v \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha j}}{h} = 0.$$

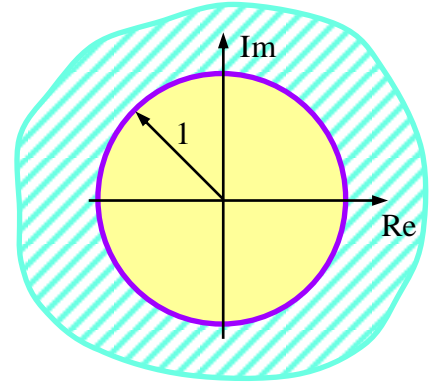
Упрощаем данное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha j}$ , и выражаем величину, обратную  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \frac{\lambda e^{i\alpha} - \lambda}{h} = 0 \Rightarrow \lambda \left( 1 - v \frac{\Delta t}{h} + v \frac{\Delta t}{h} e^{i\alpha} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 - v \frac{\Delta t}{h} + v \frac{\Delta t}{h} e^{i\alpha}.$$

При этом необходимое условие устойчивости разностных схем (5.6) также преобразуем к виду:

$$|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{\lambda} \right| \geq 1. \quad (5.7)$$

Неравенство (5.7) в применении к комплексным числам означает, что для устойчивости разностной схемы (5.4) требуется, чтобы величины, обратные собственным числам оператора перехода, были расположены вне или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости (см. рисунок).



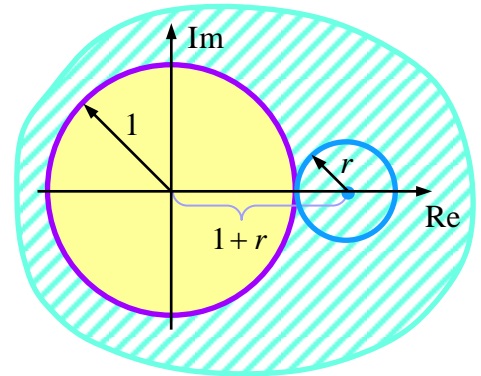
1. Рассмотрим случай  $v < 0$ . Введём следующее обозначение:

$$r = -v \frac{\Delta t}{h} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 + r - r e^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что величины, обратные собственным числам оператора перехода, расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 + r; 0)$  и радиусом:

$$|r e^{i\alpha}| = |r \cos \alpha + i r \sin \alpha| = \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha} = r.$$

Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию (5.7) при любом значении  $r$  (см. рисунок). Таким образом, при отрицательном значении параметра  $v$  неявная разностная схема (5.4) будет устойчива.

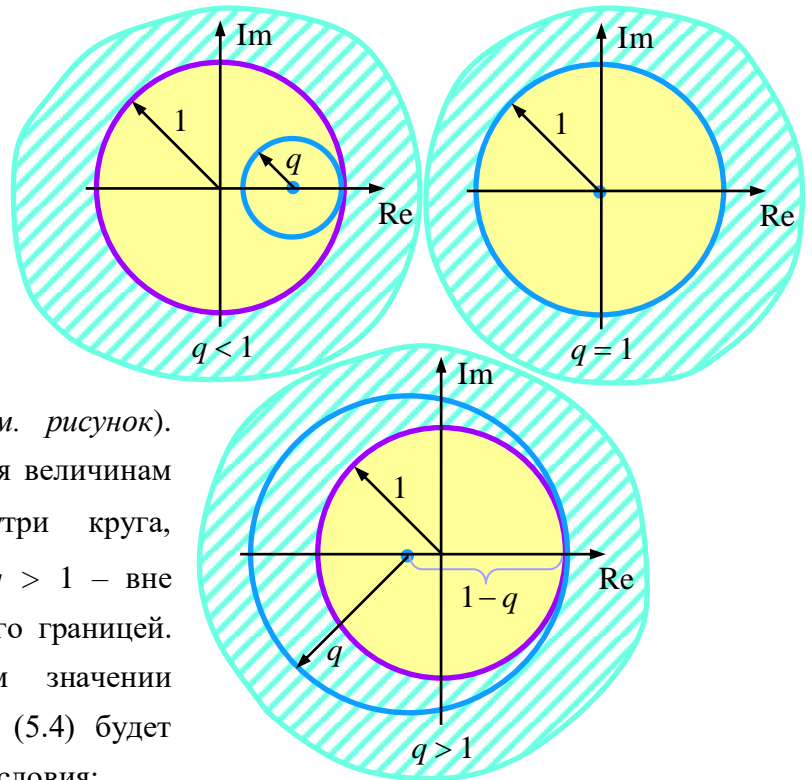


2. Рассмотрим случай  $\nu > 0$ . Введём следующее обозначение:

$$q = \nu \frac{\Delta t}{h} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = 1 - q + q e^{i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что величины, обратные собственным числам оператора перехода, расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 - q; 0)$  и радиусом  $q$ . Сравнивая расположение этой окружности на комплексной плоскости с условием (5.7), получаем три различных варианта (см. рисунок). Видно, что окружность, соответствующая величинам  $1/\lambda$ , при  $q < 1$  находится внутри круга, соответствующего условию (5.7); при  $q > 1$  – вне этого круга; а при  $q = 1$  совпадает с его границей. Таким образом, при положительном значении параметра  $\nu$  неявная разностная схема (5.4) будет устойчива при выполнении следующего условия:

$$q = \nu \frac{\Delta t}{h} \geq 1.$$



Обобщая полученные результаты, сделаем вывод, что неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью (5.4) будет устойчива при выполнении одного из условий:

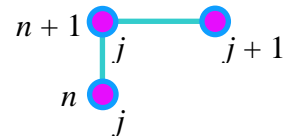
$$\nu < 0 \quad \text{или} \quad \nu \frac{\Delta t}{h} \geq 1. \quad (5.8)$$

Из соотношения (5.8) видно, что в частном случае при отрицательном значении параметра  $\nu$  рассматриваемая разностная схема является абсолютно устойчивой.

## 5. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью

### 5.2. Метод решения

Рассмотрим метод решения разностной схемы (5.4). Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий данную разностную схему, свидетельствует о том, что она содержит две неизвестные величины – значения функции  $u$  на  $(n+1)$ -ом шаге по времени  $u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}$ . То есть, для определения величины  $u_j^{n+1}$  необходимо знать значение функции  $u$  в соседней справа точке на разностной сетке.

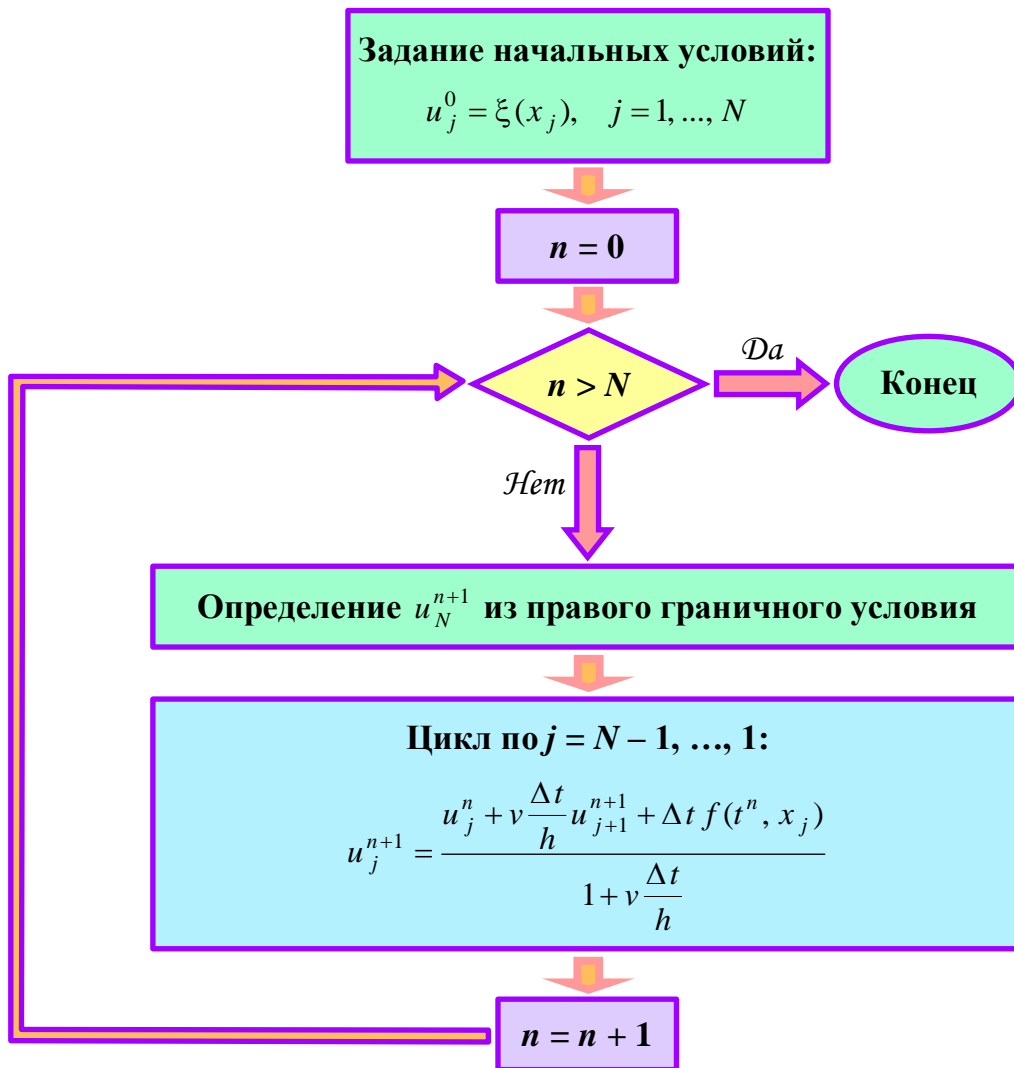


Выражая  $u_j^{n+1}$  из разностной схемы (5.4), получаем рекуррентное соотношение

$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + v \frac{\Delta t}{h} u_{j+1}^{n+1} + \Delta t f(t^n, x_j)}{1 + v \frac{\Delta t}{h}}, \quad (5.9)$$

позволяющее последовательно рассчитать все значения функции  $u$  на  $(n+1)$ -ом шаге по времени  $u_j^{n+1}, j = N-1, \dots, 1$ , если известна величина  $u_N^{n+1}$ , которую можно определить из *правого граничного условия*. Если задано граничное условие 1-го рода, то значение  $u_N^{n+1}$  определяется непосредственно из его разностной аппроксимации; если 2-го или 3-го рода, то для определения величины  $u_N^{n+1}$  необходимо решить систему двух уравнений: разностной аппроксимации правого граничного условия и рекуррентного соотношения (5.9) при  $j = N-1$ .

Таким образом, неявная разностная схема (5.4) по сложности метода решения не уступает соответствующей явной разностной схеме (5.2), а в отношении устойчивости имеет очевидное преимущество. Основываясь на этом, мы рекомендуем для численного решения дифференциального уравнения в частных производных 1-го порядка (5.1) при отрицательном значении параметра  $v$  именно неявную разностную схему с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью (5.4). Ниже приводится алгоритм её решения (в виде блок-схемы).



## 6. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью

### 6.1. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость разностной схемы (5.5) с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член  $f(t^n, x_j)$ , наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоник (3.7):

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} + v \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h} = 0.$$

Упрощаем данное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha j}$ , и выражаем величину, обратную  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \frac{\lambda - \lambda e^{-i\alpha}}{h} = 0 \Rightarrow \lambda \left( 1 + v \frac{\Delta t}{h} - v \frac{\Delta t}{h} e^{-i\alpha} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 + v \frac{\Delta t}{h} - v \frac{\Delta t}{h} e^{-i\alpha}.$$

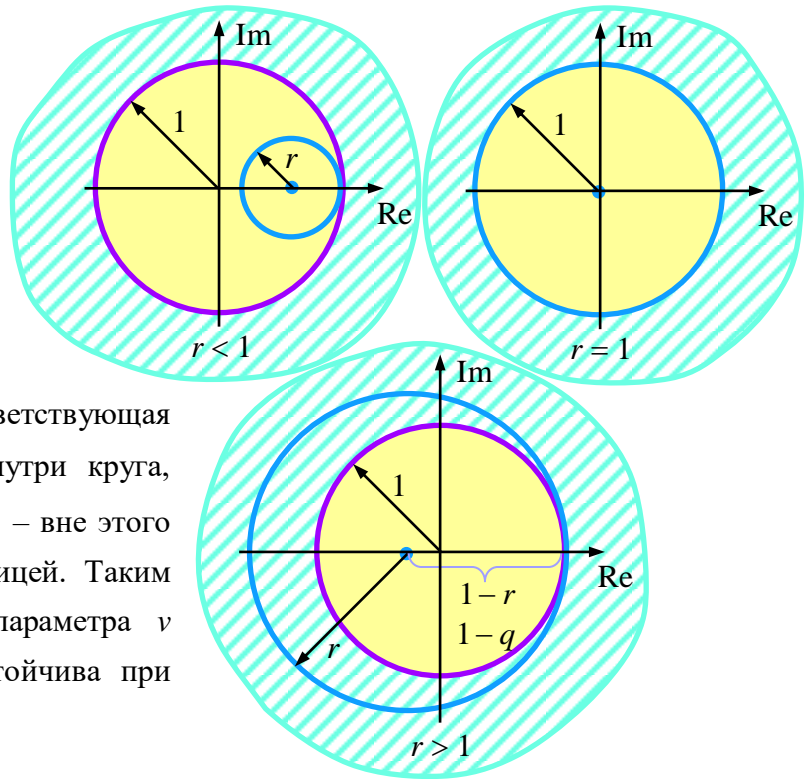
Комплексный вид полученного выражения свидетельствует о том, что для устойчивости разностной схемы (5.5) согласно условию (5.7) требуется, чтобы величины, обратные собственным числам оператора перехода, были расположены вне или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости.

1. Рассмотрим случай  $v < 0$ . Введём следующее обозначение:

$$r = -v \frac{\Delta t}{h} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 - r + r e^{-i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что величины, обратные собственным числам оператора перехода, расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 - r; 0)$  и радиусом  $r$ . Сравнивая расположение этой окружности на комплексной плоскости с условием (5.7), получаем три различных варианта (см. рисунок). Видно, что окружность, соответствующая величинам  $1/\lambda$ , при  $r < 1$  находится внутри круга, соответствующего условию (5.7); при  $r > 1$  – вне этого круга; а при  $r = 1$  совпадает с его границей. Таким образом, при отрицательном значении параметра  $v$  неявная разностная схема (5.5) будет устойчива при выполнении следующего условия:

$$r = -v \frac{\Delta t}{h} \geq 1.$$

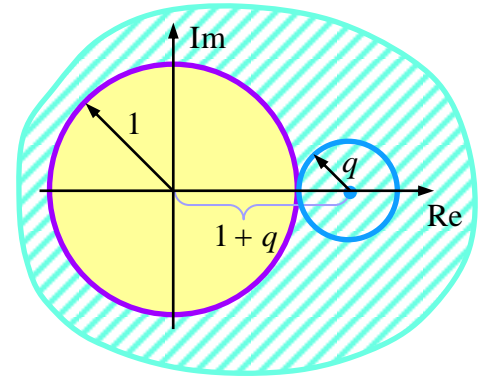




2. Рассмотрим случай  $\nu > 0$ . Введём следующее обозначение:

$$q = \nu \frac{\Delta t}{h} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = 1 + q - q e^{-i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что величины, обратные собственным числам оператора перехода, расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 + q; 0)$  и радиусом  $q$ . Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию (5.7) при любом значении  $q$  (см. рисунок). Таким образом, при положительном значении параметра  $\nu$  неявная разностная схема (5.5) будет устойчива.



Обобщая полученные результаты, сделаем вывод, что неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью (5.5) будет устойчива при выполнении одного из условий:

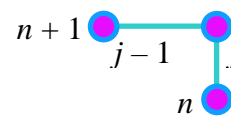
$$\nu > 0 \quad \text{или} \quad \nu \frac{\Delta t}{h} \leq -1. \quad (5.10)$$

Из соотношения (5.10) видно, что в частном случае при положительном значении параметра  $\nu$  рассматриваемая разностная схема является абсолютно устойчивой.

## 6. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью

### 6.2. Метод решения

Рассмотрим метод решения разностной схемы (5.5). Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий данную разностную схему, свидетельствует о том, что она содержит две неизвестные величины – значения функции  $u$  на  $(n + 1)$ -ом шаге по времени  $u_j^{n+1}, u_{j-1}^{n+1}$ . То есть, для



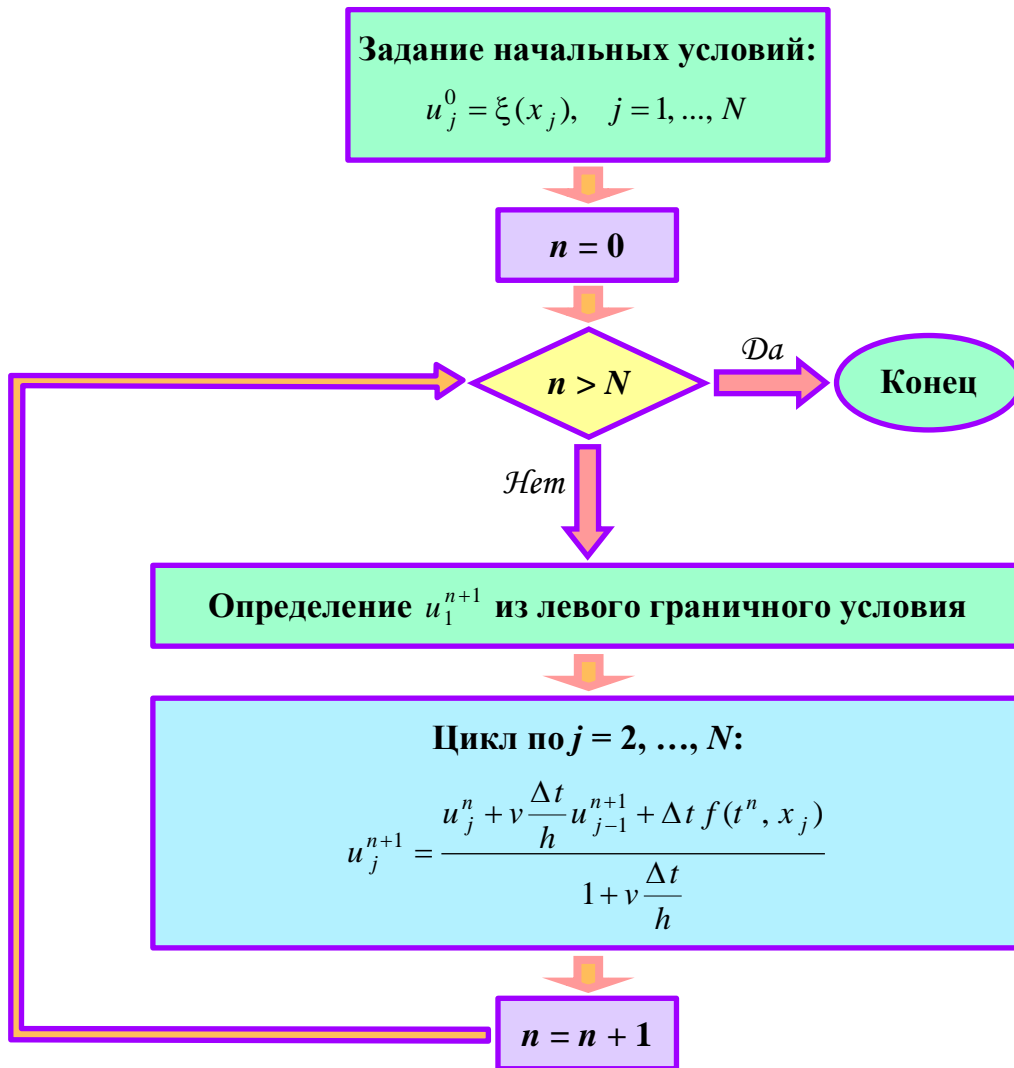
определения величины  $u_j^{n+1}$  необходимо знать значение функции  $u$  в соседней слева точке на разностной сетке.

Выражая  $u_j^{n+1}$  из разностной схемы (5.5), получаем рекуррентное соотношение

$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + v \frac{\Delta t}{h} u_{j-1}^{n+1} + \Delta t f(t^n, x_j)}{1 + v \frac{\Delta t}{h}}, \quad (5.11)$$

позволяющее последовательно рассчитать все значения функции  $u$  на  $(n + 1)$ -ом шаге по времени  $u_j^{n+1}, j = 2, \dots, N - 1$ , если известна величина  $u_1^{n+1}$ , которую можно определить из левого граничного условия. Если задано граничное условие 1-го рода, то значение  $u_1^{n+1}$  определяется непосредственно из его разностной аппроксимации; если 2-го или 3-го рода, то для определения величины  $u_1^{n+1}$  необходимо решить систему двух уравнений: разностной аппроксимации левого граничного условия и рекуррентного соотношения (5.11) при  $j = 2$ .

Таким образом, неявная разностная схема (5.5) по сложности метода решения не уступает соответствующей явной разностной схеме (5.3), а в отношении устойчивости имеет очевидное преимущество. Основываясь на этом, мы рекомендуем для численного решения дифференциального уравнения в частных производных 1-го порядка (5.1) при положительном значении параметра  $v$  именно неявную разностную схему с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью (5.5). Ниже приводится алгоритм её решения (в виде блок-схемы).



## 7. Влияние наличия искомой функции в составе свободного члена на устойчивость разностных схем

Математические модели химических реакторов могут содержать дифференциальные уравнения типа (5.1), свободный член которых включает искомую функцию  $u$  следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = -k u + f(t, x), \quad k \geq 0. \quad (5.12)$$

Следует знать, как это может повлиять на устойчивость разностных схем (5.4), (5.5).

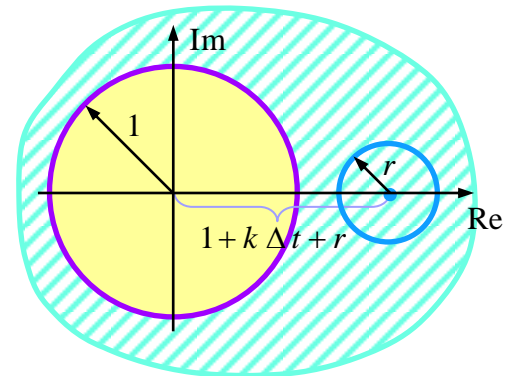
Разностная схема (5.4) абсолютно устойчива при  $v < 0$ . Для уравнения (5.12) она преобразуется к виду:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = -k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j).$$

Величины, обратные собственным числам оператора перехода, для данной разностной схемы будут определяться соотношением:

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + k \Delta t - v \frac{\Delta t}{h} + v \frac{\Delta t}{h} e^{i\alpha} = 1 + k \Delta t + r - r e^{i\alpha}; \quad r = -v \frac{\Delta t}{h} > 0.$$

Следовательно, их расположение на комплексной плоскости будет соответствовать окружности с центром в точке  $(1 + k \Delta t + r; 0)$  и радиусом  $r$ . Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию устойчивости (5.7) при любом значении  $r$  (см. рисунок). Таким образом, при отрицательном значении параметра  $v$  наличие функции  $u$  в свободном члене уравнения (5.12) не повлияет на абсолютную устойчивость неявной разностной схемы с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью.



Аналогично можно доказать, что при  $v > 0$  разностная схема (5.5) также сохранит абсолютную устойчивость; отметим, что для уравнения (5.12) она будет иметь вид:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = -k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j).$$

## 8. Сравнительная характеристика изученных разностных схем

В заключение приведём сравнительную характеристику рекомендуемых для использования разностных схем, аппроксимирующих одномерное дифференциальное уравнение в частных производных 1-го порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = -k u + f(t, x), \quad k \geq 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

1. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате правой конечной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = -k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j).$$

- Имеет порядок аппроксимации  $O(\Delta t, h)$ .
- Абсолютно устойчива при  $v < 0$ .
- Решается с помощью рекуррентного соотношения:

$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + v \frac{\Delta t}{h} u_{j+1}^{n+1} + \Delta t f(t^n, x_j)}{1 + v \frac{\Delta t}{h} + k \Delta t}.$$

- Для решения требуется задание правого граничного условия по координате  $x$ , т.е.

$$u(t, x = 1) = \psi(t).$$

2. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате левой конечной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = -k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j).$$

- Имеет порядок аппроксимации  $O(\Delta t, h)$ .
- Абсолютно устойчива при  $v > 0$ .
- Решается с помощью рекуррентного соотношения:

$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + v \frac{\Delta t}{h} u_{j-1}^{n+1} + \Delta t f(t^n, x_j)}{1 + v \frac{\Delta t}{h} + k \Delta t}.$$

- Для решения требуется задание левого граничного условия по координате  $x$ , т.е.

$$u(t, x = 0) = \varphi(t).$$

Таким образом, определяющим фактором при выборе разностной схемы для аппроксимации одномерного дифференциального уравнения в частных производных 1-го порядка является знак параметра  $v$ .

Сформулируем **правило выбора конечной разности** для аппроксимации производной первого порядка по координате в зависимости от знака стоящего перед ней параметра  $v$ : для того, чтобы разностная схема была устойчива (условно устойчива в случае явной разностной

схемы и абсолютно устойчива в случае неявной разностной схемы) при положительном  $\nu$  для аппроксимации первой производной по координате следует использовать левую конечную разность, при отрицательном  $\nu$  – правую конечную разность. Кроме этого, для решения разностной схемы при положительном  $\nu$  потребуется левое граничное условие, при отрицательном  $\nu$  – правое граничное условие.

Отметим, что данное правило применимо только в случае, если производная первого порядка по координате находится в левой части дифференциального уравнения (т.е., если дифференциальное уравнение представлено в виде (5.1), для которого проводились все исследования). Если же первая производная по координате находится в правой части дифференциального уравнения, то её необходимо перенести в левую и только затем применять правило выбора конечной разности.

### Задания для самоконтроля

1. Из представленных ниже разностных схем выберите наиболее подходящую для решения следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = 4x, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

◇ А.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \Delta t n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 4h(j-1)$
◇ Б.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \Delta t n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 4h(j-1)$
◇ В.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \Delta t n \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 4h(j-1)$
◇ Г.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \Delta t n \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 4h(j-1)$

2. Из представленных ниже разностных схем выберите наиболее подходящую для решения следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 0,2u + t, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

◊ А.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} - 0,2u_j^n + \Delta t n$
◊ Б.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - 0,2u_j^n + \Delta t n$
◊ В.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} - 0,2u_j^{n+1} + \Delta t n$
◊ Г.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} - 0,2u_j^{n+1} + \Delta t n$



3. Выберите граничные условия, которые необходимы для численного решения дифференциальных уравнений из заданий № 1 и № 2.

$\frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = 4x, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1]$	$\begin{aligned} < > u(t, x = 0) = \varphi(t) \\ < > u(t, x = 1) = \psi(t) \end{aligned}$
$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 0,2u + t, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1]$	$\begin{aligned} < > u(t, x = 0) = \varphi(t) \\ < > u(t, x = 1) = \psi(t) \end{aligned}$

4. Выберите правильное решение задачи исследования устойчивости неявной разностной схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 3n \Delta t h (j-1) - \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} - 7u_j^{n+1},$$

аппроксимирующей следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3tx - \frac{\partial u}{\partial x} - 7u.$$

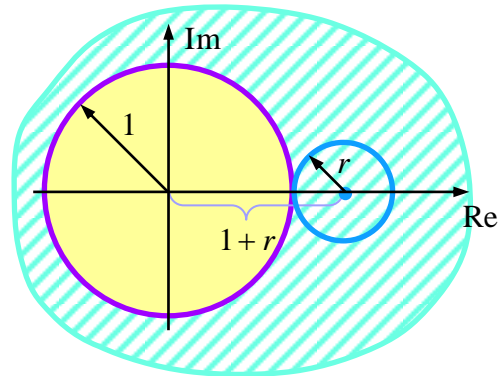
$$\diamond \text{ А. } c_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} = -\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h}.$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = -\frac{\lambda - \lambda e^{-i\alpha}}{h}.$$

$$\lambda \left( 1 + \frac{\Delta t}{h} - \frac{\Delta t}{h} e^{-i\alpha} \right) = 1.$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + r - r e^{-i\alpha}, \quad r = \frac{\Delta t}{h}.$$

Схема абсолютно устойчива.



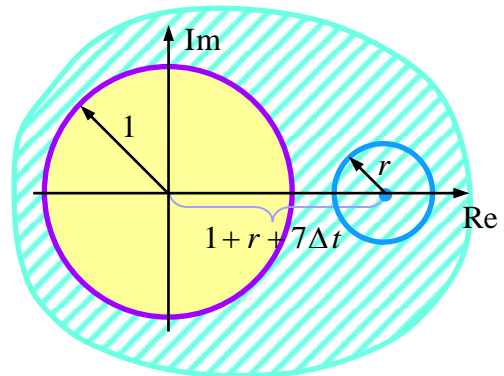
$$\diamond \text{ Б. } c_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} = -\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h} - 7\lambda^{n+1} e^{i\alpha j}.$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = -\frac{\lambda - \lambda e^{-i\alpha}}{h} - 7\lambda.$$

$$\lambda \left( 1 + \frac{\Delta t}{h} + 7\Delta t - \frac{\Delta t}{h} e^{-i\alpha} \right) = 1.$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + r + 7\Delta t - r e^{-i\alpha}, \quad r = \frac{\Delta t}{h}.$$

Схема абсолютно устойчива.

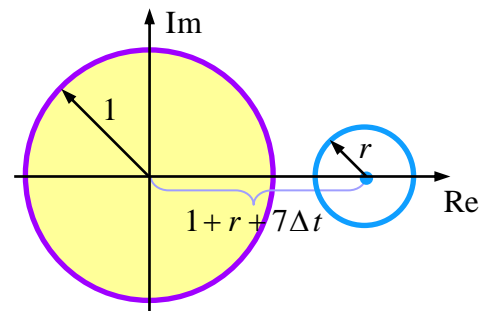


$$\diamond \text{ В. } c_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} = -\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h} - 7\lambda^{n+1} e^{i\alpha j}.$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = -\frac{\lambda - \lambda e^{-i\alpha}}{h} - 7\lambda.$$

$$\lambda = 1 + r + 7\Delta t - r e^{-i\alpha}, \quad r = \frac{\Delta t}{h}.$$

Схема неустойчива.



$$\diamond \Gamma. c_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} = -\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h} - 7\lambda^{n+1} e^{i\alpha j}.$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = -\frac{\lambda - \lambda e^{-i\alpha}}{h} - 7\lambda.$$

$$\lambda \left( 1 + \frac{\Delta t}{h} + 7\Delta t - \frac{\Delta t}{h} e^{-i\alpha} \right) = 1.$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - r + 7\Delta t + r e^{-i\alpha}, \quad r = -\frac{\Delta t}{h}.$$

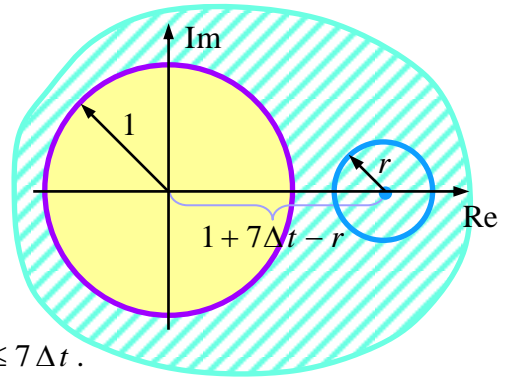


Схема устойчива при выполнении условия  $r \leq 7\Delta t$ .

5. Дифференциальное уравнение в частных производных 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6 \frac{\partial u}{\partial x} = -9t$$

аппроксимируется явной разностной схемой

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 6 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = -9 \Delta t n.$$

Выберите из приведённых ниже уравнений то, которое является рекуррентным соотношением для данной разностной схемы.

◊ А.	$u_j^{n+1} = u_j^n + 6 \frac{\Delta t}{h} (u_{j+1}^n - u_j^n) - 9 \Delta t n$	◊ В.	$u_j^{n+1} = u_j^n + 6 \frac{\Delta t}{h} (u_{j+1}^n - u_j^n) - 9 \Delta t^2 n$
◊ Б.	$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + 6 \frac{\Delta t}{h} u_{j+1}^{n+1} - 9 \Delta t^2 n}{1 + 6 \frac{\Delta t}{h}}$	◊ Г.	$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$

6. Определите, какое из представленных ниже условий обеспечит устойчивость явной разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение из задания № 5, если  $h = 0,1$ .

◊ А.	$\Delta t \leq \frac{1}{10} = 0,1$	◊ Г.	$\Delta t \leq \frac{1}{50} = 0,02$
◊ Б.	$\Delta t \leq \frac{1}{20} = 0,05$	◊ Д.	$\Delta t \leq \frac{1}{60} \approx 0,017$
◊ В.	$\Delta t \leq \frac{1}{30} \approx 0,033$	◊ Е.	$\Delta t \leq \frac{1}{100} = 0,01$

7. Дифференциальное уравнение в частных производных 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0,8 \frac{\partial u}{\partial x} = -2u$$

аппроксимируется неявной разностной схемой

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + 0,8 \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = -2u_j^{n+1}.$$

Выберите из приведённых ниже уравнений то, которое является рекуррентным соотношением для данной разностной схемы.

◊ А.	$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + 0,8 \frac{\Delta t}{h} u_{j-1}^{n+1}}{1 + 0,8 \frac{\Delta t}{h}}$	◊ Г.	$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + 0,8 \frac{\Delta t}{h} u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} \Delta t}{1 + 0,8 \frac{\Delta t}{h}}$
◊ Б.	$u_{j-1}^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} (1 + 0,8 \frac{\Delta t}{h}) - u_j^n + 2u_j^{n+1} \Delta t}{0,8 \frac{\Delta t}{h}}$	◊ Д.	$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + 0,8 \frac{\Delta t}{h} u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} \Delta t}{1 + 0,8 \frac{\Delta t}{h}}$
◊ В.	$u_j^{n+1} = u_j^n - 0,8 \frac{\Delta t}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n) - 2u_j^n \Delta t$	◊ Е.	$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$