Вопрос

Пусть имеется магнитное поле и направленное к нему под прямым углом электрическое поле. Оба поля однородны и постоянны во времени. Тогда вектор Пойнтинга $\mathbf{S}_P = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$ отличен от нуля. Соответствует ли в этом случае вектору Пойнтинга некоторая плотность потока энергии?

Ответ

Напомним, как из уравнений Максвелла получается выражение для вектора Пойнтинга.

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

Домножим скалярно первое уравнение на $\mathbf{H}$, второе – на $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{H}}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial(\mathbf{HB})}{\partial t}$$
$$\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{Ej} + \frac{\mathbf{E}}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2c}\frac{\partial(\mathbf{ED})}{\partial t}.$$

Теперь вычтем второе уравнение из первого:

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathrm{div}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{Ej} - \frac{1}{2c}\frac{\partial(\mathbf{HB}+\mathbf{ED})}{\partial t}.$$

Домножим полученное уравнение на $\frac{c}{4\pi}$:

$$\mathrm{div}\,\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\mathbf{Ej} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{HB}+\mathbf{ED}}{8\pi}.$$

С учетом $\mathbf{Ej} = \frac{\partial w_{\text{кин}}}{\partial t}$ имеем

$$\mathrm{div}\,\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\frac{\partial w_{\text{кин}}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{HB}+\mathbf{ED}}{8\pi}. \tag{1}$$

Интегрирование этого уравнения по объему области, ограниченной замкнутой поверхностью, даст

$$\int \mathrm{div}\,\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\,dV = \oiint \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\,d\mathbf{S} = -\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{2}$$

Слева стоит поток вектора $\mathbf{S}_P = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ через замкнутую поверхность, справа – скорость уменьшения полной энергии системы в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Аналогично, интегрируя уравнение непрерывности $\mathrm{div}\,\mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

$$\oiint \mathbf{j}d\mathbf{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{3}$$

получаем слева полный ток, протекающий через замкнутую поверхность, справа – скорость уменьшения заряда в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Уравнение (2) получается из (3) заменой заряда на энергию поля. Тогда вектор Пойнтинга $\mathbf{S}_P = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$ приобретает смысл плотности потока энергии электромагнитного поля.

На самом деле аналогия не вполне строгая. В уравнении непрерывности плотность тока уже определена как вектор, i-я компонента которого равна заряду, пересекающему в единицу времени единичную площадку с нормалью $\mathbf{n}_i$. Если бы плотность тока определялась из уравнения непрерывности, она оказалась бы заданной с точностью до произвольного вектора, дивергенция которого равна нулю. Таким вектором является ротор произвольного векторного поля, в частности, любой постоянный вектор.

При выводе из уравнений Максвелла плотность потока энергии не была исходно определена как $\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$. Мы определили ее из уравнения (1), отождествив с вектором Пойнтинга, что в общем случае некорректно: из уравнения (1) плотность потока энергии определяется с точностью до любого вектора, дивергенция которого равна нулю. Поэтому уравнения Максвелла ни подтверждают, ни опровергают утверждение о ненулевом потоке энергии в скрещенных постоянных электрическом и магнитном полях.

Для однозначного определения плотности потока энергии необходимо использовать дополнительные сведения о процессе, связанном с переносом энергии. Например, в случае плоской монохроматической электромагнитной волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, $\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu}\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ происходит такое движение распределения плотности энергии в пространстве, которое безусловно образует поток энергии. Вектор плотности потока энергии, соответствующий электромагнитной волне, равен $\frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$. Его i-я компонента равна энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку с нормалью $\mathbf{n}_i$. Если на этой площадке разместить поглощающую пластину, она будет нагреваться. На этом основании можно уверенно утверждать, что в случае электромагнитной волны вектор Пойнтинга имеет физический смысл плотности потока энергии.

Теперь рассмотрим предельный случай электромагнитной волны нулевой (очень низкой) частоты, который на практике не отличается от случая постоянных скрещенных электрического и магнитного полей. Формально низкочастотная волна осуществляет перенос энергии с плотностью, которая выражается вектором Пойнтинга и, следовательно, отлична от нуля. Однако в статическом пределе $\operatorname{div}\mathbf{S} = 0$, то есть силовые линии вектора Пойнтинга проходят по замкнутым кривым. Это означает отсутствие источников и поглотителей энергии. Напрашивается идея, что для обнаружения такого замкнутого потока энергии в эксперименте достаточно поместить в статическое э-м поле поглощающую пластину и наблюдать затем ее нагрев. Но не понятно даже теоретически, из какого материала должна быть изготовлена такая пластина. Скин-эффект, обусловливающий механизм диссипации энергии переменного э-м поля, в этом случае не работает, поэтому металлическая пластина в качестве поглощающей не годится. Диэлектрик или магнетик – тем более. Таким образом, тезис о существовании ненулевого потока энергии в статическом э-м поле остается под вопросом.

Заметим, что э-м волна вместе с энергией переносит также и импульс. В монографии Мешкова, Чирикова "Электромагнитное поле, часть 1” на стр. 143 изложена идея, что сила, действующая на заряженную частицу в статических полях, образованных суперпозицией электрического и магнитного полей, является следствием передачи импульса от э-м поля заряженной частице. В пользу этой идеи приводятся два соображения. Во-первых, скорость дрейфа заряженной частицы совпадает по направлению с вектором Пойнтинга. Во-вторых, в системе, движущейся со скоростью дрейфа, электрическое поле исчезает [*], а вместе с ним зануляется и вектор Пойнтинга. Получается так, как будто на частицу, движущуюся вместе с потоком энергии (аналогично пылинке, движущейся со скоростью ветра), в сопутствующей системе отсчета силы не действуют и она там покоится. Другой пример, приводящийся в той же монографии, – закручивание цилиндрического конденсатора при изменении магнитного поля, ориентированного вдоль оси цилиндра. Этот эффект можно не только качественно, но количественно интерпретировать в терминах *Э.Д.С. электромагнитной индукции*, а также как результат передачи конденсатору момента импульса э-м поля.

Приведенные примеры все же нельзя признать совершенно убедительными. Ниоткуда не следует, что движение заряженной частицы должно вызываться потоком энергии. Например, электрическое поле и в отсутствие магнитного приводит к ускорению заряженной частицы, хотя вектор Пойнтинга в этом случае равен нулю. В примере же с цилиндрическим конденсатором происходит выход за пределы

[*]Это следует из релятивистского преобразования полей, которое мы будем изучать в конце семестра.

статики, $\operatorname{div}\mathbf{S} \neq 0$, а возникновение плотности потока энергии в переменном э-м поле не доказывает его существование в статическом случае.

В заключение можно сделать вывод, что хотя статическому э-м полю и можно формально приписать некий поток энергии, он фактически не будет проявляться ни в каких процессах. В статическом случае самодостаточным оказывается описание в рамках подхода без привлечения понятия о плотности энергии э-м поля.