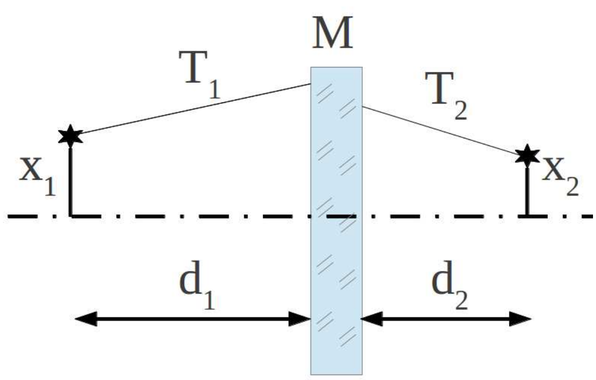
КАРДИНАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Пусть точечный источник расположен слева на расстоянии d_1 от левой границы оптической системы (ОС). Среда вне ОС обладает показателями преломления n_1 и n_2. Матрица ОС M задана *. Требуется найти матрицу A преобразования луча, проходящего путь от точечного источника через ОС до плоскости, находящейся на расстоянии d_2 справа от правой границы ОС, найти положение изображения, увеличение, положение фокусов, главных плоскостей и получить основную формулу ОС в виде формулы тонкой линзы.



Решение

Искомая матрица равна произведению трех матриц: $A = T_2 M T_1$, где $T_{1,2}$ - матрицы соответствующих пустых промежутков. Будем выполнять вычисления последовательно:

$$MT_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{11}\frac{d_1}{n} + m_{12} \\ m_{21} & m_{21}\frac{d_1}{n} + m_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{11}\frac{d_1}{n_1} + m_{12} \\ m_{21} & m_{21}\frac{d_1}{n_1} + m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_{21}\tfrac{d_2}{n_2} + m_{11} \\ a_{12} &= m_{11}\tfrac{d_1}{n_1} + m_{12} + \tfrac{d_2}{n_2}\left(m_{21}\tfrac{d_1}{n_1} + m_{22}\right) \\ a_{21} &= m_{21} \\ a_{22} &= m_{21}\tfrac{d_1}{n_1} + m_{22} \end{aligned}$$

Итак, лучи в исходной и конечной точках связаны матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Если в конечной точке находится **изображение**, то x_2 не должно зависеть от α_1. Этому отвечает условие $a_{12} = 0$:

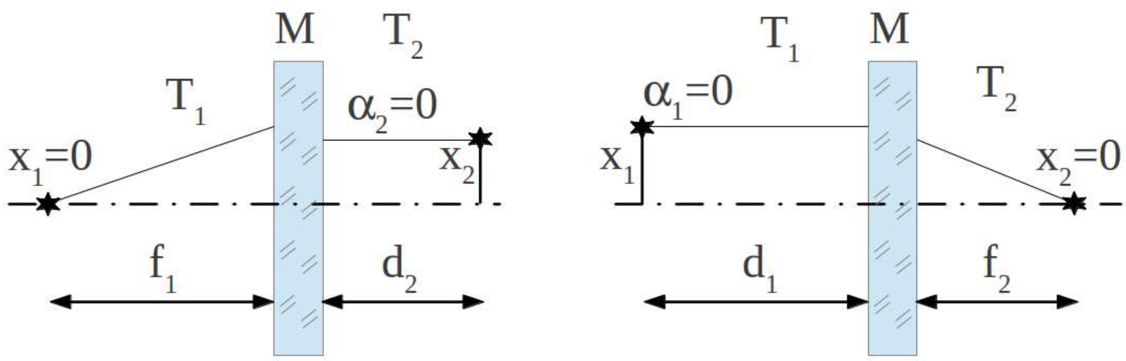
$$a_{12} = m_{11}\frac{d_1}{n_1} + m_{12} + \frac{d_2}{n_2}\left(m_{21}\frac{d_1}{n_1} + m_{22}\right) = 0, \text{ откуда } \frac{d_2}{n_2} = -\frac{m_{11}\frac{d_1}{n_1} + m_{12}}{m_{21}\frac{d_1}{n_1} + m_{22}}$$

С учетом $a_{12} = 0$ размер изображения равен $x_2 = a_{11}x_1$. **Увеличение** равно

$$K = a_{11} = m_{21}\frac{d_2}{n_2} + m_{11} \tag{1}$$

С учетом же DetA=1 $a_{22} = \frac{1}{a_{11}}$, откуда

$$\frac{1}{K} = a_{22} = m_{21}\frac{d_1}{n_1} + m_{22} \tag{2}$$



Когда задано d_2, увеличение вычисляется по формуле (1), когда задано d_1 - по формуле (2).

В дальнейшем будем полагать $n_1 = n_2 = n$.

Положение **фокусов** оптической системы находим из условий $a_{11} = 0$ и $a_{22} = 0$ (тогда $x_2 = 0$ при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ при $x_1 = 0$ соответственно):

$$a_{11} = m_{21}\frac{f_2}{n} + m_{11} = 0 \Rightarrow \frac{f_2}{n} = -\frac{m_{11}}{m_{21}} \text{ (правый фокус)}$$

$$a_{22} = m_{21}\frac{f_1}{n} + m_{22} = 0 \Rightarrow \frac{f_1}{n} = -\frac{m_{22}}{m_{21}} \text{ (левый фокус)}$$

Положение **главных плоскостей** оптической системы находим из условий

$$K = 1 \Rightarrow \frac{z_2}{n} = \frac{1-m_{11}}{m_{21}} \text{ (правая главная плоскость)}$$

$$\frac{1}{K} = 1 \Rightarrow \frac{z_1}{n} = \frac{1-m_{22}}{m_{21}} \text{ (левая главная плоскость)}$$

Если вместо расстояний до границ оптической системы использовать расстояния до соответствующих главных плоскостей (помечая новые величины звездочкой), то получим:

$$\frac{f_1^*}{n} = \frac{f_1}{n} - \frac{z_1}{n} = -\frac{m_{22}}{m_{21}} - \frac{1-m_{22}}{m_{21}} = -\frac{1}{m_{21}}$$

$$\frac{f_2^*}{n} = \frac{f_2}{n} - \frac{z_2}{n} = -\frac{m_{11}}{m_{21}} - \frac{1-m_{11}}{m_{21}} = -\frac{1}{m_{21}} = \frac{f_1^*}{n} = \frac{f^*}{n}$$

$$a_{11} = 1 + m_{21}\frac{d_2^*}{n} = 1 - \frac{d_2^*}{f^*}$$

$$a_{22} = 1 + m_{21}\frac{d_1^*}{n} = 1 - \frac{d_1^*}{f^*}$$

[*] Отметим, что если хотя бы одна из границ ОС и среды сферическая, то элементы матрицы M зависят от $n_{1,2}$.

Тогда из условия $a_{11} \cdot a_{22} = 1$ находим

$$\left(1 - \frac{d_2^*}{f^*}\right) \cdot \left(1 - \frac{d_1^*}{f^*}\right) = 1$$

$$1 + \frac{d_1^* d_2^*}{f^{*2}} - \frac{d_1^* + d_2^*}{f^*} = 1$$

$$\frac{d_1^* d_2^*}{f^{*2}} = \frac{d_1^*}{f^*} + \frac{d_2^*}{f^*}$$

$$\frac{f^*}{d_1^* d_2^*} \times (... = ...): \qquad \frac{1}{f^*} = \frac{1}{d_1^*} + \frac{1}{d_2^*}$$

В случае, когда показатели преломления по разные стороны от оптической системы различаются, формулы модифицируются в соответствии с заменой

$$\frac{d_1}{n} \to \frac{d_1}{n_1},\ \frac{d_2}{n} \to \frac{d_2}{n_2},$$
$$\frac{z_1}{n} \to \frac{z_1}{n_1},\ \frac{z_2}{n} \to \frac{z_2}{n_2},$$
$$\frac{f_1}{n} \to \frac{f_1}{n_1},\ \frac{f_2}{n} \to \frac{f_2}{n_2}.$$

Формула линзы преобразуется к виду: $\frac{1}{\sqrt{f_1^* f_2^*}} = \sqrt{\frac{f_2^*}{f_1^*}} \cdot \frac{1}{d_2^*} + \sqrt{\frac{f_1^*}{f_2^*}} \cdot \frac{1}{d_1^*}$.