ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. А. Александров

ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ

Учебное пособие

Новосибирск
2005

ББК В.162.12
УДК 517.5
А465

Александров В. А. Обобщённые функции: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005. 46 с.

В пособии изложены начальные сведения об обобщённых функциях в объёме, соответстующем программе базового курса «Основы функционального анализа», читаемого студентам 2-го курса общефизического потока физического факультета НГУ. Приведены задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по указанному курсу.

Предназначено студентам и преподавателям физического факультета.

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. А. А. Егоров

Предисловие

Вы держите в руках переработанный конспект лекций одной из девяти тем, читаемых на физическом факультете НГУ в рамках курса «Основы функционального анализа» в середине третьего семестра. Теме «Обобщённые функции» отводится приблизительно три лекции и три семинара. Пособие содержит ту часть обширной теории обобщённых функций, которую можно реально изложить и усвоить за отведённый учебным планом промежуток времени и которая реально необходима студентам для усвоения физических курсов, читаемых в последующем.

Коротко прокомментируем книги, использованные при написании настоящего пособия и рекомендуемые для более глубокого ознакомления с предметом.

Наше изложение наиболее близко ко 2-й главе следующего широко распространённого учебника:

• Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

Ориентированное на физиков систематическое изложение теории δ-функции и её приложений в классической, т. е. неквантовой, теории различных полей и элементарных частиц может быть найдено в книге:

• Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.

Упомянем также книгу, написанную для физиков и инженеров крупным математиком — одним из основателей теории обобщённых функций:

• Шварц Л. Математические методы для физических наук / Пер. с франц. М.: Мир, 1965.

Из более современных книг, написанных физиками для физиков и содержащих как достаточно подробное введение в общую теорию обобщённых функций, так и профессиональное обсуждение задач теоретической физики, при решении которых обобщённые функции играют важную роль, можно указать следующие книги:

• Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики / Пер. с англ. М.: Мир, 1977. Т. 1.

• Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики / Пер. с англ. М.: Мир, 1982. Т. 1.

Более краткое, чем у нас, введение в теорию обобщённых функций, написанное математиками для математиков, можно найти в следующих хорошо известных учебниках:

• Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

• Зорич В. А. Математический анализ. М.: Наука, 1984. Ч. 2.

Тем же читателям, кто хочет познакомиться с теорией обобщённых функций и её приложениями к дифференциальным уравнениям и математической физике глубже, чем это сделано в настоящем пособии, мы рекомендуем следующую книгу:

• Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

Наконец, стоит упомянуть чрезвычайно подробное систематическое изложение теории обобщённых функций и ряда примыкающих к ней вопросов анализа, предпринятое коллективом авторов, возглавляемым И. М. Гельфандом. Для краткости укажем только первую книгу этого шеститомного издания:

• Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959. Вып. 1.

Значительная часть приводимых в настоящем пособии задач позаимствована из следующих сборников:

• Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. М.: Наука, 1974.

• Сборник задач по математическому анализу: Функции нескольких переменных / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. СПб.: Кристалл, 1994.

В этих же сборниках можно найти дополнительные задачи к теме «Обобщённые функции».

Большинство из перечисленных выше книг выдержало много изданий. Читатель может использовать любое из них.

§ 1. Пространства основных и обобщённых функций. Формулы Сохоцкого

Понятие функции является исключительно важным в математике. Оно проделало длительную и нетривиальную эволюцию и в настоящее время используется в нескольких смыслах. Например, в курсе математического анализа, говоря о функции $\varphi : X \to Y$, вы подразумевали, что каждому элементу множества X с помощью некоторого правила φ сопоставлен единственный элемент множества Y. Однако при изучении теории функций комплексного переменного вы познакомились с многозначными функциями, когда одному элементу из X может соответствовать несколько элементов из Y.

Мы приступаем к изучению совершенно новой для вас точки зрения на понятие функциональной зависимости — теории обобщённых функций. С прагматической точки зрения можно считать, что нашей целью является освоение тех многочисленных симпатичных формул, в которых участвует δ-функция Дирака и которые играют столь важную роль, например в электродинамике, или нахождение наиболее общего класса функций, для которых справедливы свойства преобразования Фурье, установленные нами для быстро убывающих функций.

Начнём с определений.

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть $\varphi : G \to \mathbb{C}$. *Носителем* функции φ называется замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества тех точек $x \in G$, в которых $\varphi(x) \neq 0$. Другими словами, точка $x \in G$ принадлежит носителю функции φ, если найдётся последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек из G, сходящаяся к x и такая, что $\varphi(x_n) \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Носитель функции φ обозначается через $\operatorname{supp} \varphi$ (от англ. *support*).

Функция $\varphi : G \to \mathbb{C}$ называется *основной*, или *пробной*, если φ бесконечно дифференцируема и $\operatorname{supp} \varphi$ является ограниченным подмножеством в G. Другими словами, основными мы называем те бесконечно дифференцируемые функции, которые зануляются в некоторой окрестности границы области определения.

Согласно теореме Лебега, известной вам из курса математического анализа, множество в $\mathbb{R}^n$ компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено. Поэтому можно сказать, что носитель основной функции является компактным подмножеством её области определения G. Отметим также, что носитель основной функции не пересекается с границей области G.

Контрпример. Пусть $G \subset \mathbb{R}$ является открытым интервалом $(0, 1)$ и пусть $\varphi : G \to \mathbb{C}$ тождественно равна единице: $\varphi(x) = 1$ для всех

$0 < x < 1$. Конечно, так определённая функция φ бесконечно дифференцируема, но её носитель, очевидно, совпадает с замкнутым отрезком $[0,1]$ и, тем самым, не содержится в множестве G. Поэтому φ не является основной функцией.

Пример. Изучая тему «Преобразование Фурье», мы построили бесконечно дифференцируемую функцию $\omega_{x_0,\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая строго положительна в открытом шаре $|x-x_0| < \varepsilon$ и тождественно равна нулю вне этого шара. Здесь ε — любое положительное число, а x_0 — любая точка пространства $\mathbb{R}^n$.

Для данной области $G \subset \mathbb{R}^n$ и произвольной её точки x_0 найдём столь малое положительное число ε, чтобы замкнутый шар $|x - x_0| \leq \varepsilon$ содержался в G. Тогда сужение функции $\omega_{x_0,\varepsilon}$ на G будет основной функцией для области G.

Легко понять, что сумма двух основных функций и произведение основной функции на число снова являются основными функциями. Поэтому совокупность всех основных функций, определённых в данной области G, является векторным пространством, которое обозначают через $\mathcal{D}(G)$.

Говорят, что последовательность основных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ *сходится* к функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, если (i) существует ограниченное в $\mathbb{R}^n$ замкнутое подмножество M множества G, содержащее носитель каждой функции φ_n, и (ii) для каждого мультииндекса α последовательность производных $D^\alpha\varphi_1, D^\alpha\varphi_2, \dots, D^\alpha\varphi_n, \dots$ равномерно в G сходится к $D^\alpha\varphi$. Другими словами, последовательность основных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, если (i) существует ограниченное в $\mathbb{R}^n$ замкнутое подмножество M множества G такое, что $\operatorname{supp}\ \varphi_n \subset M$ для каждого n, и (ii) для каждого мультииндекса α

$$\sup_{x\in G} |D^\alpha\varphi_n(x) - D^\alpha\varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Всякое отображение $F : \mathcal{D}(G) \to \mathbb{C}$ пространства основных функций во множество комплексных чисел называется *функционалом*. Функционал F называется *линейным*, если для любых $a, b \in \mathbb{C}$ и любых основных функций φ_1 и φ_2 выполняется равенство $F(a\varphi_1 + b\varphi_2) = aF(\varphi_1) + bF(\varphi_2)$, и называется *непрерывным*, если для любой последовательности основных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, сходящейся к какой-нибудь функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, числовая последовательность $F(\varphi_1), F(\varphi_2), \dots, F(\varphi_n), \dots$ сходится к числу $F(\varphi)$.

Теперь мы готовы сформулировать центральное определение данной темы: *обобщённой* функцией называется линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций. Совокупность всех обобщённых функций на G образует линейное пространство и обозначается через $\mathcal{D}'(G)$. Значение обобщённой функции F на основной функции φ мы будем обозначать либо через $F(\varphi)$, либо через (F, φ).

Приведём примеры обобщённых функций.

Пример 1 (регулярные обобщённые функции). Напомним, что $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, если у каждой точки x_0 из G существует окрестность U такая, что интеграл $\int_U |f(x)|\,dx$ конечен. Каждая «обычная» функция $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$ порождает обобщённую функцию по правилу

$$F(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Для этого прежде всего убедимся, что интеграл в формуле (1) сходится. Функция φ непрерывна и принимает ненулевые значения лишь на компактном множестве $\operatorname{supp}\varphi$. По теореме Вейерштрасса о наибольшем значении, модуль этой функции достигает своего наибольшего значения в некоторой точке множества $\operatorname{supp}\varphi$, а значит существует постоянная $C < +\infty$ такая, что $|\varphi(x)| < C$ для всех $x \in G$.

С другой стороны, так как $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, то у каждой точки x_0 из G существует открытая окрестность U такая, что интеграл $\int_U |f(x)|\,dx$ конечен. В частности, эти окрестности U образуют открытое покрытие компактного множества $\operatorname{supp}\varphi$. Одно из важнейших свойств компактных множеств состоит как раз в том, что из всякого открытого покрытия компактного множества можно выделить конечное подпокрытие. Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_N$ — такое конечное подпокрытие для $\operatorname{supp}\varphi$. Тогда мы можем написать

$$\left|\int\limits_G f(x)\varphi(x)\,dx\right| \le \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} |f(x)\varphi(x)|\,dx \le C\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{U_j} |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Что доказывает сходимость интеграла в формуле (1).

Линейность функционала F, определённого формулой (1), очевидна ввиду линейности интергала. Непрерывность F может быть доказана без особого труда с использованием подходящей теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

Однако для упрощения изложения мы будем систематически избегать рассуждений, связанных с проверкой непрерывности возникающих у нас обобщённых функций, оставляя их заинтересованному читателю. Некоторым оправданием такой позиции может служить тот факт, что все известные примеры разрывных линейных функционалов, определённых на всём пространстве, строятся с помощью так называемой аксиомы выбора и задаются довольно хитроумными неявными конструкциями. Вот почему в дальнейшем мы без комментариев будем считать, что *если линейный функционал определён во всём пространстве* $\mathcal{D}(G)$, *то он непрерывен*, каждый раз оставляя подробное доказательство вдумчивому читателю.

Обобщённая функция F называется *регулярной*, если для неё найдётся «обычная» функция $f \in L_{1,\mathrm{loc}}$, которая порождает F по формуле (1). Обобщённая функция, не являющаяся регулярной, называется *сингулярной*.

В следующих трёх примерах строятся наиболее важные сингулярное обобщённые функции.

Пример 2 (δ-функция Дирака). Зададим функционал $\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ с помощью формулы $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

Линейность и непрерывность функционала, заданного такой формулой, очевидны. Тем самым мы определили некоторую обобщённую функцию, впервые построенную одним из основоположников квантовой механики английским физиком-теоретиком П. А. М. Дираком.

Пример 3. Допустим, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ имеет особые точки $-\infty, x_1, x_2, \ldots, x_N, +\infty$ (т. е. плюс-минус бесконечность и все точки, в окрестности которых подынтегральная функция неограничена). Напомним, что интеграл в смысле главного значения v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется как следующий предел собственных интегралов:

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N \to +0}} \left[\int\limits_{-R}^{x_1 - \varepsilon_1} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N-1} \int\limits_{x_j + \varepsilon_j}^{x_{j+1} - \varepsilon_{j+1}} f(x)\,dx + \int\limits_{x_N + \varepsilon_N}^{R} f(x)\,dx \right].$$

Другими словами, надо у каждой особой точки вырезать симметричную окрестность, по оставшемуся множеству подсчитать собственный интергал, а затем устремить размеры удалённых окрестностей к нулю.

Определим линейный непрерывный функционал $\mathcal{P}\frac{1}{x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ формулой

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx.$$

Тот факт, что последнее равенство в этой формуле действительно имеет место для всех основных функций φ, мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Пример 4. Определим ещё две сингулярные обобщённые функции, соответствующие выбору либо верхнего, либо нижнего знака, по формуле

$$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\, dx.$$

Следующая теорема даёт нам пример одного из тех симпатичных соотношений с участием δ-функции, которые используются в квантовой механике, и показывает, как это соотношение может быть строго доказано в рамках изучаемого нами подхода к обобщённым функциям.

Теорема (формулы Сохоцкого). *Справедливы соотношения*

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Доказательство. Фиксируем основную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Пусть она зануляется для всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что $|x| > R$. Тогда по определению обобщённой функции $1/(x + i0)$ имеем

$$\left(\frac{1}{x + i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}\, dx =$$

В числителе прибавим и вычтем число $\varphi(0)$, а затем избавимся от мнимых значений в знаменателе, для чего умножим и разделим подынтегральное выражение на $x - i\varepsilon$. Получим

$$= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx. \qquad (2)$$

Подсчитаем порознь интегралы, фигурирующие в формуле (2).

Поскольку интеграл от нечётной функции по промежутку, симметричному относительно нуля, равен нулю, то

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}\, dx = 0.$$

Следующий интеграл легко находится по формуле Ньютона—Лейбница. Это даёт

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-R}^{R}\frac{-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = -2i\lim_{\varepsilon\to 0+}\operatorname{arctg}\,\frac{R}{\varepsilon} = -i\pi.$$

Наконец, в последнем интеграле в формуле (2) перейдём к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx = \int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx =$$

$$= \text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right).$$

Переход к пределу под знаком интеграла при $\varepsilon\to 0$ возможен, поскольку из неравенства $|x|\le|x+i\varepsilon|$, справедливого для всех вещественных x и ε, вытекает $|[\varphi(x)-\varphi(0)]/(x+i\varepsilon)|\le|[\varphi(x)-\varphi(0)]/x|$. Доопределив последнюю функцию в нуле как $|\varphi'(0)|$, мы получим непрерывную (а значит интегрируемую на конечном промежутке $[-R,R]$) функцию, мажорирующую подынтегральное выражение.

Учитывая проделанные вычисления, можем продолжить равенство (2) следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x+i0},\varphi\right) = -i\pi\varphi(0) + \left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right) = \left(-i\pi\delta+\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right).$$

Последнее равенство показывает, что обобщённые функции (т. е. линейные функционалы) $1/(x+i0)$ и $-i\pi\delta+\mathcal{P}\frac{1}{x}$ одинаково действуют на любую основную функцию. Значит эти обобщённые функции равны между собой.

Формула Сохоцкого, отвечающая выбору знака «минус», доказывается аналогично.

Задачи

1. Пользуясь техникой интегралов, зависящих от параметра, строго обоснуйте тот факт, что линейные функционалы, построенные в примерах 1, 3 и 4, являются непрерывными.

2. Докажите, что δ-функция является непрерывным линейным функционалом на пространстве основных функций.

3. Докажите, что для всякой основной функции φ справедливо равенство

$$\text{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\text{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

§ 2. Сходимость обобщённых функций. Дельта-образные последовательности

В этом и последующих параграфах нам предстоит дать определения тем или иным операциям над обобщёнными функциями, которые вам известны для «обычных» функций. Речь идёт об операциях предельного перехода, замены переменных, умножения, дифференцирования, нахождения свёртки или преобразования Фурье и т. п. В такой ситуации мы будем каждый раз придерживаться одной и той же схемы — прослеживать, как известная вам для «обычных» функций операция может быть переформулирована в виде действия регулярной обобщённой функции на произвольную основную, а затем (уже для всех обобщённых функций, в том числе сингулярных) принимать получившееся тождество за определение. Первую часть этой схемы мы будем называть наводящими соображениями.

Наводящие соображения относительно сходимости функций выглядят так. Если последовательность $f_1,\dots,f_k,\dots$ функций класса $L_{1,\mathrm{loc}}(G)$ сходится к некоторой функции f класса $L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, то несложно показать, что для любой основной функции $\varphi\in\mathcal{D}(G)$ справедливо соотношение

$$(f_k,\varphi)=\int\limits_G f_k(x)\varphi(x)\,dx\underset{k\to\infty}{\to}\int\limits_G f(x)\varphi(x)\,dx=(f,\varphi).$$

С учётом сказанного естественно принять следующее определение. Говорят, что последовательность $F_1,\dots,F_k,\dots$ обобщённых функций из $\mathcal{D}'(G)$ *сходится* к обобщённой функции $F\in\mathcal{D}'(G)$, если для любой основной функции $\varphi\in\mathcal{D}(G)$ числовая последовательность $F_1(\varphi),\dots,$ $F_k(\varphi),\dots$ сходится к числу $F(\varphi)$ при $k\to\infty$. При этом используются обычные обозначения:

$$F=\lim_{k\to\infty}F_k\qquad\text{или}\qquad F_k\underset{k\to\infty}{\to}F.$$

Аналогично определяется сходимость семейства обобщённых функций, зависящего от вещественного параметра.

Пример. Непосредственно из определения функции $1/(x \pm i0)$, данного в предыдущем параграфе, вытекает, что

$$\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}.$$

Говорят, что последовательность $h_1, \ldots, h_k, \ldots$ вещественно-значных функций, определённых во всём пространстве $\mathbb{R}^n$, является *δ-образной*, если

(i) для каждого $k \in \mathbb{N}$ функция $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема в $\mathbb{R}^n$;

(ii) для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $h_k(x) \geq 0$;

(iii) для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует положительное число ε_k такое, что $h_k(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| > \varepsilon_k$, причём $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$;

(iv) $\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\, dx = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Пример δ-образной последовательности легко может быть получен с помощью бесконечно дифференцируемой функции $\omega_{x_0,\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая строго положительна в открытом шаре $|x - x_0| < \varepsilon$ и тождественно равна нулю вне этого шара. Достаточно положить

$$h_k(x) = \frac{\omega_{0,1/k}(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_{0,1/k}(x)\, dx}.$$

Теорема. *Пусть $h_1, \ldots, h_k, \ldots$ — δ-образная последовательность функций. Тогда $\lim_{k\to\infty} h_k(x) = \delta(x)$, где предел, конечно, понимается в смысле теории обобщённых функций.*

Доказательство получается прямым вычислением. В самом деле, пусть φ — произвольная основная функция. Используя определение предела последовательности обобщённых функций и тот факт, что h_k — регулярная обобщённая функция, действующая на основную функцию «с помощью» интеграла, можем записать

$$\Big(\lim_{k\to\infty} h_k, \varphi\Big) = \lim_{k\to\infty} (h_k, \varphi) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\varphi(x) dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{|x|<\varepsilon_k} h_k(x)\varphi(x) dx. \qquad (3)$$

Теперь нам понадобится следующая разновидность теоремы о среднем, которую вы знаете из курса математического анализа: *если G — открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$, функция $f : G \to \mathbb{R}$ непрерывна, а функция $g : G \to \mathbb{R}$ неотрицательна, то найдётся такая точка*

$x_0 \in G$, *что*

$$\int\limits_G f(x)g(x)\,dx = f(x_0)\int\limits_G g(x)\,dx.$$

Используя эту теорему о среднем и свойства iii и iv δ-образной последовательности, преобразуем последнее выражение в формуле (3) к виду

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)\int\limits_{|x|<\varepsilon_k} h_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)\int\limits_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\varphi(x_k) = \varphi(0) = (\delta,\varphi),$$

где x_k — некоторая точка шара $|x| < \varepsilon_k$ (а значит $x_k \to 0$ при $k \to \infty$).

Таким образом мы убедились, что обобщённые функции $\lim_{k\to\infty} h_k$ и δ одинаково действуют на любую пробную функцию φ. Следовательно, эти обобщённые функции совпадают. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема позволяет интерпретировать δ-функцию как плотность такого распределения массы в пространстве, при котором вся масса, равная по величине единице, сосредоточена в одной точке 0. Такое распределение массы является, конечно, абстракцией, получаемой, например, на таком пути. Изучив тело единичной массы под микроскопом, мы заключаем, что с учётом разрешающей способности микроскопа вся масса тела сосредоточена в шаре $|x| < \varepsilon_1$. Заменяя объектив на более мощный, мы последовательно убеждаемся, что вся масса тела сосредоточена в пределах шаров всё уменьшающихся радиусов $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$. Наконец, исчерпав технические возможности нашего микроскопа, мы приходим к выводу, что вся масса нашего тела сосредоточена в одной точке $x = 0$. Аналогия с δ-образной последовательностью очевидна.

Подобная интерпретация обобщённых функций как плотностей распределения физических величин привела к тому, что на Западе обобщённые функции называют распределениями.

Задачи

Докажите следующие предельные соотношения в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

4.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\dfrac{x^2}{4\varepsilon}} \to \delta(x) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to +0.$$

5.

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \pm\delta(x) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to \pm 0.$$

6.

$$\frac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon} \to \pm\delta(x) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to \pm 0.$$

7.

$$\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon} \to \pm\delta(x) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to \pm 0.$$

8. Докажите, что функция $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & \text{если} \quad |x| \le \varepsilon, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

стремится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ к δ-функции при $\varepsilon \to +0$.

Докажите следующие предельные соотношения в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

9.

$$t^m e^{ixt} \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to +\infty \qquad (m \ge 0).$$

10.

$$\frac{e^{ixt}}{x - i0} \to \begin{cases} 2\pi i\delta(x), & \text{при} \quad t \to +\infty, \\ 0, & \text{при} \quad t \to -\infty. \end{cases}$$

11.

$$\frac{e^{ixt}}{x + i0} \to \begin{cases} 0, & \text{при} \quad t \to +\infty, \\ -2\pi i\delta(x), & \text{при} \quad t \to -\infty. \end{cases}$$

12. Найдите пределы в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ последовательностей функций $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k, \ldots$ и $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$, если

$$f_k(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} \qquad \text{и} \qquad F_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_k(x)\,dx.$$

13. Докажите, что

$$\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x} \underset{k\to\infty}{\to} 0, \qquad \text{где} \qquad \left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi\right) = \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx.$$

14. Пусть $n \ge 1$. Докажите, что функция $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$f_\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi\varepsilon})^n} e^{-\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{4\varepsilon}},$$

стремится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к δ-функции при $\varepsilon \to +0$.

Трактуя несобственный интеграл как предел в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ соответствующих собственных интегралов, докажите равенства:

15.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos xy\,dy=\delta(x).$$

16.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}\,dy=\delta(x).$$

17.

$$x\int\limits_0^{+\infty}yJ_0(xy)\,dy=\delta(x),\qquad \text{где}\qquad J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\cos xz}{\sqrt{1-z^2}}\,dz\quad -$$

функция Бесселя с нулевым значком, играющая важную роль в математической физике, небесной механике и др.

18. Трактуя несобственный интеграл как предел в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ соответствующих собственных интегралов, докажите равенство

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(x,y)}\,dy=\delta(x),$$

где $(x,y)=\sum_{j=1}^n x_jy_j$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

19. Трактуя сумму ряда как предел последовательности его частичных сумм, докажите равенство в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-ixk}=\delta(x).$$

§ 3. Замена переменных в обобщённых функциях

Начнём с наводящих соображений, относящихся к линейной замене переменных. Пусть $f\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование и b — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$. Используя правило замены переменной в кратном интеграле, можем написать

$$(f(Ax+b),\varphi(x))=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(Ax+b)\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(y)\varphi(A^{-1}(y-b))\,\frac{dy}{|\det A|}=\left(f(y),\frac{\varphi(A^{-1}(y-b))}{|\det A|}\right).$$

Как уже было сказано выше, для произвольной (не обязательно регулярной) обобщённой функции примем полученное равенство за определение. Если $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование и b — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$, то для произвольной обобщённой функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ определим новую обобщённую функцию $F(Ax+b)$, которая действует на произвольную пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$(F(Ax+b), \varphi(x)) = \left(F(y), \frac{\varphi(A^{-1}(y-b))}{|\det A|}\right).$$

При этом будем говорить, что $F(Ax+b)$ получена из F *линейной заменой переменных.*

Пример 1: $\delta(-x) = \delta(x)$. Это непосредственно следует из вычисления $(\delta(-x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(-x)) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$.

Пример 2 (сдвинутая δ-функция):

$$(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = (\delta(y), \varphi(y+x_0)) = \varphi(x_0).$$

Словами эту формулу читают так: δ-функция, сдвинутая на x_0, сопоставляет всякой пробной функции её значение в точке x_0.

Нелинейная замена переменных в обобщённых функциях есть понятие значительно более деликатное, чем линейная замена переменных. Мы рассмотрим его только применительно к одномерной δ-функции.

Пусть $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ «обычная» (т. е. не обобщённая) функция и h_1, $h_2, \ldots, h_k, \ldots$ — произвольная δ-образная последовательность в $\mathbb{R}$. Символом $\delta(a(x))$ обозначают обобщённую функцию, действующую на произвольную пробную функцию φ по правилу

$$(\delta(a(x)), \varphi(x)) = \lim_{k\to\infty} (h_k(a(x)), \varphi(x)) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_k(a(x))\varphi(x)\, dx.$$

При этом говорят, что $\delta(a(x))$ получена из $\delta(y)$ *заменой переменной* $y = a(x)$.

Отметим, что корректность этого определения нуждается в обосновании: надо убедиться, что использованный в определении предел существует для любой δ-образной последовательности $h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots$ и не зависит от выбора этой последовательности. Мы, однако, не будем углубляться в вопросы обоснования, а посмотрим, к каким выводам приводит это определение.

Теорема. *Пусть функция $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема и имеет только простые нули $x_1, x_2, \ldots$ (напомним, что число y называется простым нулём функции a, если $a(y) = 0$, но $a'(y) \neq 0$). Тогда* *справедливо равенство*

$$\delta(a(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|a'(x_k)|}.$$

Доказательство. Фиксируем основную функцию φ. Пусть R — положительное число, такое что $\varphi(x) = 0$ для всех $|x| > R$. Тогда

$$(\delta(a(x)), \varphi(x)) = \lim_{k\to\infty} (h_k(a(x)), \varphi(x)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(a(x))\varphi(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-R}^{R} h_k(a(x))\varphi(x)\, dx. \qquad (4)$$

Замкнутый отрезок $[-R, R]$ содержит лишь конечное число нулей функции a. В самом деле, в противном случае нашлась бы бесконечная ограниченная последовательность нулей функции a. Как известно, из такой последовательности всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначив предел этой подпоследовательности через x_0, мы видим, что x_0 является нулём функции a и в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечно много нулей a. Однако по условию теоремы все нули функции a, в том числе x_0, являются простыми, а значит у x_0 есть окрестность, не содержащая других нулей функции a. Полученное противоречие доказывает, что в замкнутом отрезке $[-R, R]$ содержится лишь конечное число нулей функции a. Обозначим их через $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Для каждого $j = 1, 2, \ldots, N$ обозначим через I_j открытый интервал, содержащий точку x_j и такой маленький, что функция a строго монотонна на I_j и никакие два интервала I_j не пересекаются.

Поскольку $h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots$ — δ-образная последовательность, то для каждого k существует положительное число ε_k такое, что $h_k(y) = 0$ для всех $|y| > \varepsilon_k$. Более того, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Из последнего вытекает, что существует номер k_0 такой, что для всех $k \geq k_0$ и любой концевой точки x интервала I_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ справедливо неравенство $|a(x)| > \varepsilon_k$.

Заменим интервал I_j содержащимся в нём меньшим замкнутым отрезком $I_{j,k}$ таким, что в любой концевой точке x отрезка $I_{j,k}$ справедливо равенство $a(x) = \pm\varepsilon_k$.

Тогда вне $\cup_{j=1}^{N} I_{j,k}$ имеет место неравенство $|a(x)| > \varepsilon_k$, а значит $h_k(a(x)) = 0$. Вместе с тем сужение функции a на каждый из отрезков $I_{j,k}$ является диффеоморфизмом. В частности, на каждом из отрезков $I_{j,k}$ у функции a есть обратная функция, дифференцируемым образом отображающая отрезок $[-\varepsilon_k, \varepsilon_k]$ на $I_{j,k}$. Обозначим эту обратную функцию через a_j^{-1}.

Учитывая сказанное, мы можем продолжить равенство (4) следующим образом:

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} h_k(a(x))\varphi(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{I_{j,k}} h_k(a(x))\varphi(x)\,dx =$$

На каждом из отрезков $I_{j,k}$ делаем замену переменной $x = a_j^{-1}(y)$:

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{-\varepsilon_k}^{\varepsilon_k} h_k(y)\varphi(a_j^{-1}(y))\,\frac{dy}{|a'(a_j^{-1}(y))|} =$$

Поскольку $h_k(y) = 0$ для $|y| > \varepsilon_k$, то распространим интегрирование на всю числовую прямую и воспользуемся теоремой о сходимости δ-образной последовательности:

$$= \lim_{k\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_k(y)\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\varphi(a_j^{-1}(y))}{|a'(a_j^{-1}(y))|}\right]dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(h_k(y), \sum_{j=1}^{N}\frac{\varphi(a_j^{-1}(y))}{|a'(a_k^{-1}(y))|}\right) = \left(\delta(y), \sum_{j=1}^{N}\frac{\varphi(a_j^{-1}(y))}{|a'(a_j^{-1}(y))|}\right) =$$

Используем определение δ-функции и тот факт, что $a_j^{-1}(0) = x_j$:

$$= \sum_{j=1}^{N}\frac{\varphi(x_j)}{|a'(x_j)|} =$$

Поскольку все нули функции a, кроме $x_1, x_2, \ldots, x_N$, лежат вне отрезка $[-R, R]$, то в каждом из них φ обращается в нуль; поэтому мы можем распространить суммирование на все нули функции a. Воспользовавшись ещё определением сдвинутой δ-функции, получим:

$$= \left(\sum_{j}\frac{\delta(x-x_j)}{|a'(x_j)|}, \varphi(x)\right).$$

Тем самым мы видим, что функции $\delta(a(x))$ и $\sum_j \frac{\delta(x-x_j)}{|a'(x_j)|}$ одинаково действуют на любую пробную функцию, а значит совпадают. Теорема доказана.

Задачи

Считая a вещественным числом, отличным от нуля, докажите следующие равенства в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

20.

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}.$$

21.

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2|a|}.$$

22.

$$\delta(\sin ax) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x + \pi k/a).$$

23. Докажите равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-k).$$

24. Докажите предельное соотношение в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} \to \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x + 2\pi k) \qquad \text{при} \quad r \to 1-0.$$

Обратите внимание, что это предельное соотношение соответствует тому факту, известному вам из темы «Ряды Фурье», что интеграл Пуассона принимает заранее предписанные значения на границе единичного круга. Сумма ряда из обобщённых функций понимается, конечно, как предел последовательности частичных сумм этого ряда.

§ 4. Умножение обобщённых функций

Наводящие соображения таковы: если $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$ и $a : G \to \mathbb{C}$ — бесконечно дифференцируемая функция, то результат действия регулярной обобщённой функции af на произвольную пробную функцию φ может быть представлен в виде

$$(af, \varphi) = \int\limits_G a(x) f(x) \varphi(x)\, dx = \int\limits_G f(x)[a(x)\varphi(x)]\, dx = (f, a\varphi),$$

т. е. как результат действия f на пробную функцию $a\varphi$. (То, что $a\varphi$ является пробной, почти очевидно: она бесконечно дифференцируема и зануляется вне носителя функции φ, а значит — вне некоторого замкнутого ограниченного подмножества в G.)

Эти наводящие соображения делают естественным следующее определение. Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$ и $a : G \to \mathbb{C}$ — бесконечно дифференцируемая функция. *Произведением* обобщённой функции F на бесконечно дифференцируемую функцию a называется новая обобщённая функция aF, действующая на произвольную основную функцию φ по правилу $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$.

Пример 1: $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$. В самом деле, для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ мы имеем $(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta(x), \varphi(x)) = (a(0)\delta(x), \varphi(x))$.

Пример 2: $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$. В самом деле, для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ имеем

$$\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)\right) = \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot\varphi(x)\,dx = (1, \varphi).$$

Замечание. Выше мы научились умножать любую обобщённую функцию на бесконечно дифференцируемую. Может случиться, что результат действия данной конкретной обобщённой функции F на произведение $a\varphi$ корректно определён для любой основной функции φ, хотя a и не является бесконечно дифференцируемой (это верно, например, в отношении δ-функции и произвольной непрерывной функции a). Тогда говорят, что формула $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$ всё равно определяет умножение F на a. Однако значительно более важным является следующее наблюдение: во всём пространстве обобщённых функций нельзя определить операцию умножения двух функций так, чтобы она была коммутативна, ассоциативна и совпадала с ранее введённой операцией умножения для бесконечно дифференцируемых функций. Действительно, если бы такая операция существовала, то на основании примера 1 мы бы получили $(x\delta(x))\mathcal{P}\frac{1}{x} = 0 \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 0$. С другой стороны, пользуясь последовательно коммутативностью и ассоциативностью умножения и примером 2, мы бы получили $(x\delta(x))\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)x)\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)(x\mathcal{P}\frac{1}{x}) = \delta(x)\cdot 1 = \delta(x)$. Тем самым мы бы пришли к противоречию, поскольку $\delta(x) \neq 0$.

Задачи

25. Докажите равенства

$$x \cdot \frac{1}{x \pm i0} = 1.$$

26. Докажите, что для любого натурального m в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедливо равенство $x^m\mathcal{P}\frac{1}{x} = x^{m-1}$.

27. Докажите, что при любом выборе постоянных c_k функция $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(x - \pi k)$ является решением уравнения $(\sin x)F(x) = 0$.

28. Докажите, что для того, чтобы обобщённая функция $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ удовлетворяла соотношению $xF = 0$, необходимо и достаточно, чтобы F была пропорциональна δ-функции, т. е. чтобы нашлась постоянная C такая, что $F = C\delta$.

§ 5. Дифференцирование обобщённых функций. Плотность заряда электрического диполя. Теорема о связи классической и обобщённой производных

Вновь начнём с наводящих соображений: если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непрерывно дифференцируема, а функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ пробная, то на основании формулы интегрирования по частям получаем

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi').$$

Внеинтегральный член здесь равен нулю, поскольку функция φ тождественно зануляется вне некоторого конечного промежутка.

Указанные наводящие соображения придают смысл следующему определению. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ и α — некоторый мультииндекс. *Производной* порядка α обобщённой функции $F \in \mathcal{D}'(G)$ называется новая обобщённая функция $D^\alpha F$, которая действует на любую основную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ по правилу $(D^\alpha F, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F, D^\alpha \varphi)$.

Пример 1: *производная одномерной δ-функции сопоставляет пробной функции минус значение её производной в нуле.* В самом деле, $(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$.

Аналогично $(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$.

Функция Хевисайда, или *единичная ступенька*, определяется равенством

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Обратите внимание, что мы вообще никак не определяем эту функцию в нуле. Дело в том, что мы намерены трактовать функцию Хевисайда как регулярную обобщённую функцию, т. е. нас будет интересовать значение интеграла от произведения функции Хевисайда на основную функцию. Значение же интеграла не зависит от того, как именно мы определим подынтегральную функцию в одной точке (и даже — на множестве меры нуль).

Пример 2: производная функции Хевисайда равна δ-функции, т. е. $H' = \delta$. Действительно,

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Основная идея последнего примера может быть без особых проблем распространена на все кусочно-гладкие функции, с которыми вы знакомы по темам «Ряды Фурье» и «Преобразование Фурье». Отсылая читателя к этим темам за формальным определением, напомним, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется кусочно-гладкой, если найдётся конечное или счётное множество точек $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, не имеющее конечных предельных точек в $\mathbb{R}$ и такое, что на каждом из открытых интервалов (x_k, x_{k+1}) функция f непрерывно дифференцируема, а в каждой концевой точке x_k имеет не только конечные пределы как слева, так и справа, но и некоторые специальные пределы, похожие на производные слева и справа (что, впрочем, сейчас нам не потребуется).

Каждую кусочно-гладкую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ можно, конечно, трактовать как регулярную обобщённую функцию. Производную этой обобщённой функции будем для ясности называть *обобщённой производной* функции f и обозначать через $f'_{\text{об}}$. Помимо этого, свяжем с f и её *классическую производную* $f'_{\text{кл}}$, полагая во всех точках $x \neq x_k$

$$f'_{\text{кл}}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

и считая, что функция $f'_{\text{кл}}$ вообще никак не определена в точках $x = x_k$.

Наконец, в каждой точке $x = x_k$ определим *скачок* функции f как разность пределов функции справа и слева в этой точке, т. е. положим

$$[f]_{x_k} = f(x_k + 0) - f(x_k - 0) = \lim_{h\to+0} f(x_k + h) - \lim_{h\to+0} f(x_k - h).$$

Теорема (о связи классической и обобщённой производных кусочно-гладкой функции). *Для всякой кусочно-гладкой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$f'_{\text{об}}(x) = f'_{\text{кл}}(x) + \sum_k [f]_{x_k}\delta(x - x_k). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда

$$(f'_{\text{об}}, \varphi) = -(f, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\sum_k \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)\,dx. \qquad (6)$$

Суммирование по k в формуле (6) достаточно вести лишь для интервалов (x_k, x_{k+1}), пересекающихся с отрезком $[-R, R]$, вне которого функция φ обращается в тождественный нуль. Но таких интервалов (x_k, x_{k+1}) может быть лишь конечное число (иначе последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ имела бы конечную предельную точку, что невозможно). Поэтому вопроса сходимости в формуле (6) не возникает.

Вместе с тем ясно, что если мы расширим список $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, добавив к нему «дополнительную» точку x_p (не являющуюся ни точкой разрыва f, ни точкой её излома), то формула (5) не изменится (поскольку $[f]_{x_p} = 0$). Следовательно, мы можем заранее добавить две «далёкие» дополнительные точки x_p так, чтобы те замкнутые отрезки $[x_k, x_{k+1}]$, по которым ведётся интегрирование в (6), покрывали отрезок $[-R, R]$.

Применив к каждому из интервалов (x_k, x_{k+1}) формулу интегрирования по частям и перегруппировав внеинтегральные слагаемые, можем продолжить равенство (6) следующим образом:

$$-\sum_k \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\sum_k \left[f(x)\varphi(x)\Big|_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f'_{\text{кл}}(x)\varphi(x)\,dx \right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'_{\text{кл}}(x)\varphi(x)\,dx + \sum_k [f(x_k+0) - f(x_k-0)]\varphi(x_k) =$$

$$= \left(f'_{\text{кл}}(x) + \sum_k [f]_{x_k}\delta(x - x_k), \varphi(x) \right).$$

Таким образом, обобщённые функции $f'_{\text{об}}$ и $f'_{\text{кл}}(x) + \sum_k [f]_{x_k}\delta(x - x_k)$ одинаково действуют на любую пробную функцию, а значит совпадают.

Следующий пример устанавливает ещё один мостик между математическим формализмом, позволяющим строго доказывать разнообразные соотношения для обобщённых функций, и физическими объектами.

Пример (плотность заряда точечного электрического диполя). *Электрическим диполем* называется система, состоящая из двух одинаковых по величине, но разноимённых точечных зарядов $\pm\varepsilon$, расположенных на расстоянии l друг от друга. При этом вектор, направленный от

$-\varepsilon$ к $+\varepsilon$ и равный по величине $p = \varepsilon l$, называется *дипольным моментом* электрического диполя. *Элементарным*, или *точечным, электрическим диполем* называется предельная система с $l \to 0$ и $\varepsilon \to +\infty$ при конечном p.

Мы уже знаем, что плотность заряда, сосредоточенного в одной точке, задаётся сдвинутой δ-функцией. Поэтому если заряд $+\varepsilon$ сосредоточен в нуле, а заряд $-\varepsilon$ сосредоточен в точке l, то плотность электрического заряда такой системы, очевидно, задаётся формулой $\varepsilon\delta(x)-$ $-\varepsilon\delta(x-l)$. Чтобы найти плотность заряда точечного электрического диполя нужно перейти в последней формуле к пределу при $l \to 0$, считая, что $p = \varepsilon l$ остаётся постоянным:

$$\left(\lim_{\substack{l \to 0 \\ \varepsilon l = p}} (\varepsilon\delta(x) - \varepsilon\delta(x-l)), \varphi(x)\right) = \lim_{\substack{l \to 0 \\ \varepsilon l = p}} (\varepsilon\delta(x) - \varepsilon\delta(x-l), \varphi(x)) =$$

$$= \lim_{\substack{l \to 0 \\ \varepsilon l = p}} [\varepsilon\varphi(0) - \varepsilon\varphi(l)] = \lim_{l\to 0} \frac{p}{l}[\varphi(0) - \varphi(l)] = p[-\varphi'(0)] = (p\delta'(x), \varphi(x)).$$

Таким образом, мы можем сказать, что $p\delta'(x)$ является плотностью заряда точечного электрического диполя с дипольным моментом p, сосредоточенного в начале координат.

Задачи

29. Докажите равенство $\delta'(-x) = -\delta'(x)$.

30. Для любой обобщённой функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ докажите равенство

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Найдите следующие пределы в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

31.

$$\frac{\delta(x+h) - \delta(x-h)}{2h}.$$

32.

$$\frac{\delta(x+2h) + \delta(x-2h) - 2\delta(x)}{4h^2}.$$

33. Докажите, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ для любых натуральных k и m справедливы равенства

$$x^k\delta^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!}\delta^{(m-k)}, & \text{если } 0 \le k \le m, \\ 0, & \text{если } k > m. \end{cases}$$

В частности проверьте равенство $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

34. Докажите, что обобщённые функции $\delta, \delta', \delta'', \ldots, \delta^{(k)}$ линейно независимы над полем комплексных чисел.

35. Докажите, что если функция a бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}$, то для любой обобщённой функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения aF:

$$\frac{d^n(aF)}{dx^n} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \frac{d^{n-m}a}{dx^{n-m}} \cdot \frac{d^m F}{dx^m},$$

где C_n^m — число сочетаний из n по m. В частности, докажите справедливость формулы $(aF)' = a'F + aF'$.

Вычислите $f^{(k)}$, $k \geq 1$, для следующих функций:

36. $f(x) = H(x)$.

37. $f(x) = |x|$.

38. $f(x) = \mathrm{sign}\ \sin x$.

39. $f(x) = \mathrm{sign}\ \cos x$.

Докажите равенства

40.

$$|\sin x|'' + |\sin x| = 2\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - \pi j).$$

41.

$$|\cos x|'' + |\cos x| = 2\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta\big(x - \frac{\pi}{2} - \pi j\big).$$

Найдите все производные следующих функций:

42. $f(x) = xH(x)$.

43. $f(x) = H(x)\sin x$.

44. $f(x) = H(x)\cos x$.

45. $f(x) = x^2 H(1 - x^2)$.

Докажите равенства

46.

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

47.

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2},$$

где

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right) = \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\, dx.$$

48. Докажите, что для любого натурального m в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2\pi i k)^m e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x - k).$$

Докажите, что стоящие справа обобщённые функции являются решениями в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ следующих уравнений при произвольном выборе параметров c_1, c_2, c_3:

49.

$$xF' = 1, \qquad F(x) = c_1 + H(x) + \ln|x|.$$

50.

$$xF'(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x}, \qquad F(x) = c_1 + c_2 H(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

51.

$$x^2 F'(x) = 1, \qquad F(x) = c_1 + c_2 H(x) + c_3 \delta(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

52. Докажите, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta^{(k)}(x - k)$ сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при любых постоянных c_k.

§ 6. Вычисление фундаментального решения трёхмерного оператора Лапласа

Как известно, *оператор Лапласа* в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ сопоставляет каждой дважды непрерывно дифференцируемой функции $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ число

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Изучая тему «Замена переменных в дифференциальных выражениях» в рамках курса математического анализа вы убедились, что в сферических координатах в $\mathbb{R}^3$ оператор Лапласа принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \qquad (7)$$

Напомним также следующую *формулу Грина*, известную вам из курса математического анализа:

$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdydz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

где V — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, S — её граница, которая предполагается гладкой поверхностью, n — единичный вектор внешней нормали в точках границы области V, $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot n$ — производная функции u в направлении вектора n.

Положим

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}$$

и вычислим Δf в смысле теории обобщённых функций.

Прежде всего, заметим, что для $r \neq 0$ формула (7) даёт

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right) = 0.$$

Фиксируем некоторую пробную функцию $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и обозначим через R такое положительное число, что φ обращается в тождественный нуль вне шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Применяя определение производной обобщённой функции, можем написать

$$(\Delta f, \varphi) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \varphi\right) =$$

$$= \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) + \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = (f, \Delta\varphi) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f \Delta\varphi \, dxdydz. \quad (8)$$

Последний интеграл, конечно, понимается как несобственный: бесконечность является его особой точкой по определению, а начало координат — поскольку функция f неограничена в нуле. Другими словами, последний интеграл понимается как предел собственных интегралов от той же функции, взятых по шаровому слою $\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ при $\varepsilon \to 0$ и $r \to +\infty$. Учтём, что, с одной стороны, φ и все её производные зануляются вне шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, а с другой — что $\Delta f = 0$ в области $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, и применим формулу Грина к (8)

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f \Delta\varphi \, dxdydz = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f \Delta\varphi \, dxdydz =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\varepsilon \leq r \leq R} \begin{vmatrix} \Delta\varphi & \Delta f \\ \varphi & f \end{vmatrix} dxdydz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{r=\varepsilon} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial n} & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \varphi & f \end{vmatrix} dS + \iint\limits_{r=R} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial n} & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \varphi & f \end{vmatrix} dS. \tag{9}$$

Второй интеграл в (9) равен нулю, поскольку функция φ и все её производные тождественно равны нулю на сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$. В первом же интеграле n представляет собой единичную внешнюю нормаль к той области, к которой применялась формула Грина, т. е. к шаровому слою $\varepsilon^2 < x^2+y^2+z^2 < R^2$. Поэтому n представляет собой внутреннюю нормаль к сфере $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$, а значит дифференцирование в направлении n даёт тот же результат, что и взятое с противоположным знаком дифференцирование по r:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}.$$

В частности,

$$\frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_{r=\varepsilon} = -\frac{\partial f}{\partial r}\bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{r^2}\bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Следовательно, мы можем продолжить (9) так:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{r=\varepsilon} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial n} & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \varphi & f \end{vmatrix} dS = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \iint\limits_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{r=\varepsilon} \varphi\, dS. \tag{10}$$

Каждое из слагаемых, стоящих в правой части равенства (10), вычислим отдельно.

Подынтегральная функция в первом слагаемом допускает оценку

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| = |\nabla\varphi\cdot n| \le |\nabla\varphi|\cdot|n| = |\nabla\varphi| \le C = \text{const}.$$

Поэтому само первое слагаемое равно нулю:

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \iint\limits_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS\right| \le \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \iint\limits_{r=\varepsilon} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| dS \le \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{C}{\varepsilon} \iint\limits_{r=\varepsilon} dS = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{C}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 = 0.$$

Поскольку φ непрерывна, то из теоремы о среднем следует, что на сфере $r=\varepsilon$ существует точка $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ такая, что

$$\iint\limits_{r=\varepsilon} \varphi\, dS = \varphi(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \iint\limits_{r=\varepsilon} dS = \varphi(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)\cdot 4\pi\varepsilon^2.$$

Учитывая, что $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, отсюда заключаем, что второе слагаемое в правой части формулы (10) равно $-4\pi\varphi(0,0,0) = (-4\pi\delta, \varphi)$.

Суммируя изложенное, получаем, что для любой основной функции $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$(\Delta f, \varphi) = -4\pi(\delta, \varphi).$$

Следовательно,

$$\Delta\left(-\frac{f}{4\pi}\right) = \Delta\left(-\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \delta.$$

Функция $(x, y, z) \mapsto -1/(4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ называется *фундаментальным решением трёхмерного оператора Лапласа.* Важность последнего понятия будет выяснена ниже.

Задачи

Докажите следующие равенства в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$:

53.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln\sqrt{x^2+y^2} = 2\pi\delta(x, y).$$

Другими словами, докажите, что функция $(2\pi)^{-1}\ln r$ является фундаментальным решением двумерного оператора Лапласа.

54.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \delta(x, y),$$

где $F(x, y) = H(x)H(y)$ является произведением функций Хевисайда. Другими словами, докажите, что функция F является фундаментальным решением дифференциального оператора $\partial^2/\partial x\partial y$.

55.

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \delta(x, y),$$

где a — некоторая положительная постоянная, а

$$F(x, y) = \begin{cases} a/2, & \text{если } a^2x^2 - y^2 \geq 0 \text{ и } x \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Другими словами, докажите, что функция F является фундаментальным решением одномерного волнового оператора $a^{-2}\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2$.

56.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \delta(x-1, y) - \delta(x, y-1) + \delta(x+1, y) - \delta(x, y+1),$$

где $F(x, y) = 1$, если $|x| + |y| \leq 1$ и $F(x, y) = 0$ в противном случае.

57.

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \delta(t, x), \quad \text{где} \quad F(x, y) = \frac{H(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}.$$

Другими словами, докажите, что функция F является фундаментальным решением одномерного оператора теплопроводности $\partial/\partial t - \partial^2/\partial x^2$.

§ 7. Свёртка обобщённых функций

Наводящие соображения, относящеся к свёртке обобщённых функций, выглядят так. Пусть f и g — быстро убывающие функции в $\mathbb{R}^n$ и φ — пробная функция. Тогда, последовательно используя известный вам факт коммутативности свёртки быстро убывающих функций, определение свёртки быстро убывающих функций, законность перемены интегрирования в интеграле от быстро убывающих функций и линейную замену переменных $x - y = z$, можем написать так:

$$(f*g, \varphi) = (g*f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (g*f)(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,dy\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\varphi(x)\,dx\right]dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z)\varphi(y+z)\,dz\right]dy =$$

$$= (f(y), (g(z), \varphi(y+z))).$$

То есть мы видим, что для вычисления действия свёртки $f * g$ на пробную функцию, необходимо подействовать функцией f на результат действия функцией g на сдвинутую пробную функцию.

Как обычно, мы примем это установленое нами для «хороших» функций свойство в качестве определения, справедливого для всех обобщённых функций. А именно: пусть F и G — обобщённые функции в $\mathbb{R}^n$, причём для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ функция $y \mapsto (G(z), \varphi(y + z))$ также является пробной. В этом случае *свёрткой* функций F и G называют новую обобщённую функцию $F * G$, которая действует на любую основную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу $(F * G, \varphi) = (F(y), (G(z), \varphi(y + z)))$.

Отметим, что если функция $y \mapsto (G(z), \varphi(y + z))$ не является пробной, то свёртка $F * G$ не может быть определена для любой обобщённой функции F. Вместе с тем для некоторых «удачно подобранных» F может оказаться, что свёртка определена корректно даже в этом случае.

Свойства свёртки обобщённых функций.

1) *Для любой обобщённой функции F определена её свёртка с δ-функцией. При этом $F * \delta = F$.*

Доказательство вытекает непосредственно из определения: $(F * \delta, \varphi) = (F(y), (\delta(z), \varphi(y + z))) = (F(z), \varphi(z))$.

2) *Свёртка линейна по первому аргументу*, т. е. для любых чисел a_1, a_2 и обобщённых функций F_1, F_2 и G, таких, что определены свёртки $F_1 * G$ и $F_2 * G$, определена также свёртка $(a_1F_1 + a_2F_2) * G$, причём имеет место равенство $(a_1F_1 + a_2F_2) * G = a_1(F_1 * G) + a_2(F_2 * G)$.

Доказательство получается прямым вычислением:

$$((a_1F_1+a_2F_2)*G,\varphi) = ((a_1F_1+a_2F_2)(y),(G(z),\varphi(y+z))) =$$

$$= a_1(F_1(y),(G(z),\varphi(y+z))) + a_2(F_2(y),(G(z),\varphi(y+z))) =$$

$$= a_1((F_1*G),\varphi) + a_2((F_2*G),\varphi) = (a_1(F_1*G) + a_2(F_2*G),\varphi).$$

3) *Свёртка коммутативна*, т. е. для любых обобщённых функций F и G таких, что определены свёртки $F*G$ и $G*F$, имеет место равенство $F*G$ и $G*F$.

Доказательство требует введения новых понятий — таких, например, как носитель обобщённой функции. Для первого знакомства с теорией обобщённых функций представляется более разумным не углубляться в этом месте в детали, а принять свойство 3 без доказательства, что мы и делаем.

4) *Для того чтобы продифференцировать свёртку, достаточно продифференцировать любой из сомножителей.* Другими словами, если для обобщенных функций F и G определена свёртка $F*G$, то для любого мультииндекса α определены также свёртки $(D^\alpha F)*G$ и $F*(D^\alpha G)$ и имеет место равенство $D^\alpha(F*G) = (D^\alpha F)*G = F*(D^\alpha G)$.

Доказательство вновь вытекает из прямого вычисления:

$$(D^\alpha(F*G),\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F*G, D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F(y),(G(z),D^\alpha\varphi(y+z))) =$$
$$= (F(y),(D^\alpha G(z),\varphi(y+z))) = ((F*D^\alpha G),\varphi).$$

Следовательно, $D^\alpha(F*G) = F*(D^\alpha G)$ и мы доказали одно из равентств свойства 4. Другое равенство вытекает из уже доказанного с учётом коммутативности свёртки.

Замечание. Свёртка обобщённых функций, вообще говоря, не ассоциативна, т. е. равенство $(F_1*F_2)*F_3 = F_1*(F_2*F_3)$ выполняется не всегда. В качестве примера можно взять $F_1 = 1$ (функция, тождественно равная единице), $F_2 = \delta'$ (производная δ-функции) и $F_3 = H$ (функция Хевисайда).

Тогда, с одной стороны, $(F_1*F_2,\varphi)=(1,(\delta'(z),\varphi(y+z)))=-(1,\varphi'(y)) = = (1',\varphi) = (0,\varphi)$, а значит свёртка F_1*F_2 определена и равна нулю. Следовательно, $(F_1*F_2)*F_3 = 0*H = 0$.

С другой стороны, $(F_2*F_3,\varphi) = (\delta'*H,\varphi) = (H*\delta',\varphi) = = (H(y),(\delta'(z),\ \varphi(y+z))) = -(H(y),\varphi'(y)) = (H',\varphi) = (\delta,\varphi)$, значит свёртка F_2*F_3 также определена и равна δ-функции. При этом $F_1*(F_2*F_3) = 1*\delta = 1$.

Наконец, поскольку $0 \neq 1$, то $(F_1*F_2)*F_3 \neq F_1*(F_2*F_3)$.

Задачи

Вычислите следующие свёртки в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

58. $\delta(x-a) * F(x)$, где $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

59. $\delta(x-a) * \delta(x-b)$.

60. $\delta^{(m)} * F$, где $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

61. $\delta''(x) * |x|$.

62. Докажите, что свёртка инвариантна относительно сдвига, т. е. $F(x+h) * G(x) = (F * G)(x+h)$ для любых $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $h \in \mathbb{R}^n$.

63. Пусть f и g локально интегрируемы в $\mathbb{R}$, причём $f(x) = g(x) = 0$ для всех $x < 0$. Докажите, что свёртка $f * g$ определена и задаётся формулой

$$(f * g)(x) = H(x) \int\limits_0^x f(y) g(x-y)\, dy.$$

Вычислите следующие свёртки в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

64. $H * H$.

65. $H(x) * (xH(x))$.

66. $(x^2 H(x)) * (H(x) \sin x)$.

67. $(H(x) \sin x) * (H(x) \mathrm{sh}\ x)$.

68. $H(a - |x|) * H(a - |x|)$.

§ 8. Решение дифференциальных уравнений в пространстве обобщённых функций. Теорема о фундаментальном решении линейного обыкновенного дифференциального оператора

Линейным дифференциальным оператором порядка k с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в области $G \subset \mathbb{R}^n$ называется выражение

$$L \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{11}$$

где суммирование ведётся по всем мультииндексам порядка $\le k$, $a_\alpha : G \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция, причём хотя бы для одного мультииндекса α порядка k функция a_α не равняется нулю тождественно и D^α — производная порядка α.

Линейный дифференциальный оператор (11) действует на обобщённую функцию $F \in \mathcal{D}'(G)$ по правилу $LF = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) D^\alpha F$. Если обобщённые функции F_1 и F_2 удовлетворяют равенству $LF_1 = F_2$, то говорят, что F_1 является решением дифференциального уравнения $LF = F_2$ в пространстве обобщённых функций $\mathcal{D}'(G)$. Обобщённая функция E называется *фундаментальным решением* дифференциального оператора L, если $LE = \delta$.

Пример. Из предыдущего параграфа мы знаем, что регулярная обобщённая функция

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

является фундаментальным решеним трёхмерного оператора Лапласа

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Теорема. *Если E — фундаментальное решение линейного дифференциального оператора L с постоянными коэффициентами, то обобщённая функция $F_1 = E * F_2$ является решением дифференциального уравнения $LF = F_2$.*

Доказательство немедленно следует из свойств свёртки и определения фундаментального решения:

$$LF_1 = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha (E * F_2) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha (D^\alpha E) * F_2 =$$
$$= \left(\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha E \right) * F_2 = \delta * F_2 = F_2.$$

Предыдущая теорема показывает, что знание фундаментального решения E оператора L с постоянными коэффициентами (например, оператора Лапласа) позволяет сводить вопрос о нахождении частного решения неоднородного уравнения $LF = F_2$ к проблеме вычисления свёртки $E * F_2$. Но как искать само фундаментальное решение? Предыдущий параграф показывает нетривиальность этой задачи для оператора Лапласа. Общего алгоритма нахождения фундаментального решения нет, хотя для классических операторов, возникших из физических задач (т. е. оператора Лапласа, волнового оператора и оператора теплопроводности), фундаментальные решения известны уже более ста лет. Тем ценнее для нас следующая теорема, позволяющая находить фундаментальные решения обыкновенных дифференциальных операторов.

Теорема. *Пусть*

$$L = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(x) \frac{d^j}{dx^j} \quad —$$

обыкновенный линейный дифференциальный оператор в $\mathbb{R}$, *причём* $a_0(0) = 1$. *Пусть функция* $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^k(\mathbb{R})$ *является «классическим» решением однородного уравнения* $Lf = 0$, *удовлетворяющим условиям* $f_0(0) = f_0'(0) = \dots = f_0^{(k-2)}(0) = 0$ *и* $f_0^{(k-1)}(0) = 1$. *Тогда регулярная обобщённая функция* $E = H(x)f_0(x)$ *является фундаментальным решением оператора* L, *т. е. удовлетворяет уравнению* $LE = \delta$.

Доказательство. Пользуясь теоремой о связи классической и обобщённой производной, последовательно получаем $E'(x) = H(x)f_0'(x)$, $\dots$, $E^{(k-1)}(x) = H(x)f_0^{(k-1)}(x)$, $E^{(k)}(x) = \delta(x) + H(x)f_0^{(k)}(x)$. Поэтому $LE = H(x)Lf_0(x) + \delta(x) = \delta(x)$, что и доказывает теорему.

Как известно, общее решение F любого линейного уравнения $LF = F_1$ (не обязательно дифференциального) может быть записано в виде суммы $F = F_{\text{чн}} + F_{\text{оо}}$ частного решения $F_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения $LF = F_1$ и общего решения $F_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения $LF = 0$. Действительно, каковы бы ни были F и $F_{\text{чн}}$ — решения уравнения $LF = F_1$, функция $F_{\text{оо}} = F - F_{\text{чн}}$ удовлетворяет однородному уравнению $LF_{\text{оо}} = 0$ в силу линейности оператора L: $LF_{\text{оо}} = LF - LF_{\text{чн}} = F_1 - F_1 = 0$. И обратно, каковы бы ни были решение $F_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения $LF = F_1$ и решение $F_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения $LF = 0$, функция $F = F_{\text{чн}} + F_{\text{оо}}$ удовлетворяет неоднородному уравнению $LF = F_1$: $LF = LF_{\text{чн}} + LF_{\text{оо}} = F_1 + 0 = F_1$.

Выше мы видели, что знание фундаментального решения оператора в некоторых случаях облегчает нахождение частного решения неоднородного уравнения. По поводу же нахождения общего решения однородного уравнения ограничимся следующими краткими замечаниями.

1) Если функция является «классическим» решением однородного дифференциального уравнения с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, то она, очевидно, удовлетворяет этому уравнению и в смысле теории обобщённых функций. Поэтому для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения можно применять любые методы нахождения «классических» решений, известные вам из курса дифференциальных уравнений.

2) При решении уравнений в обобщённых функциях «неклассические» решения могут возникнуть, даже если все коэффициенты и правая часть бесконечно дифференцируемы. В самом деле, общим решением уравнения первого порядка $xF'(x) = 0$ служит регулярная обобщённая

функция $F(x) = c_1 + c_2 H(x)$, содержащая две произвольные постоянные c_1, c_2 и не являющаяся его «классическим» решением при $c_2 \neq 0$.

3) Обобщённые решения дифференциальных уравнений не менее важны, чем «классические». Стремление ограничиться только «классическими» решениями приблизительно так же неестественно, как и стремление найти решение обязательно среди элементарных функций. Тем не менее представляют интерес операторы (11) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, для которых при любой бесконечно дифференцируемой правой части g уравнение $LF = g$ имеет только «классические» решения, т. е. всякая обобщённая функция F, удовлетворяющая уравнению $LF = g$, является регулярной обобщённой функцией, порождённой некоторой бесконечно дифференцируемой функцией. Такие операторы называются *гипоэллиптическими*. Им посвящена обширная математическая литература. Укажем лишь два свойства, каждое из которых гарантирует гипоэллиптичность оператора (11) с постоянными коэффициентами:

(i) у оператора есть фундаментальное решение, являющееся регулярной обобщённой функцией, порождённой «обычной» функцией, которая бесконечно дифференцируема всюду в $\mathbb{R}^n$, кроме точки 0;

(ii) сумма $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha y^\alpha$ отлична от нуля для любого ненулевого вектора $y \in \mathbb{R}^n$.

Отметим, что каждое из свойств i и ii выполняется для оператора Лапласа, так что неоднородное уравнение $\Delta F = g$ не имеет «неклассических» решений ни при какой бесконечно дифференцируемой правой части g.

В заключение вкратце обсудим еще одну проблему, связанную с решением дифференциальных уравнений в обобщённых функциях. Как вы знаете, обычно требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее определённым граничным или начальным условиям. Однако обобщённые функции не имеют значения в точке. Как же следует понимать граничные или начальные условия?

Развитие математики предлагает такой выход из создавшейся ситуации: решение дифференциального уравнения надо искать не во всём пространстве обобщённых функций, а в некотором подпространстве, специально подобранном для данного уравнения. Чаще всего в этой роли выступают *пространства Соболева*, обозначаемые через $W_p^l(G)$ и определяемые следующим образом.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область с гладкой границей и $1 \leq p < \infty$ — вещественное число. Говорят, что обобщённая функция $F \in \mathcal{D}'(G)$ принадлежит пространству $L_p(G)$, если F является регулярной обобщённой функцией, порождённой «обычной» функцией f, модуль которой интегрируем по G в степени p, т. е. если для всех пробных функций φ справедливо равенство

$$(F, \varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \text{причём} \qquad \int_G |f(x)|^p\, dx < +\infty. \tag{12}$$

Говорят, что обобщённая функция $F \in \mathcal{D}'(G)$ принадлежит *пространству Соболева* $W_p^l(G)$, если она является регулярной обобщённой функцией (т. е. принадлежит пространству $L_{1,\mathrm{loc}}(G)$) и при этом для любого мультииндекса α, $|\alpha| = l$, обобщённая функция $D^\alpha F$ принадлежит $L_p(G)$.

Ключевую роль в понимании того, что же является граничными значениями функций из пространства $W_p^l(G)$ играют так называемые теоремы вложения, впервые доказанные С. Л. Соболевым и часто называемые его именем. Приведём формулировку простейшей из них.

Теорема (вложения). *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей и $F \in W_p^l(G)$, причём $lp > n$. Тогда в G существует непрерывная функция $\widetilde{f}$, которая действует на любую пробную функцию φ так же, как F:*

$$(F, \varphi) = \int_G \widetilde{f}(x)\varphi(x)\, dx.$$

Другими словами, если обобщённые производные достаточно высокого порядка l у обобщённой функции являются «обычными» функциями, суммируемыми в достаточно высокой степени p так, что произведение lp больше размерности пространства n, то эта обобщённая функция порождается некоторой «обычной» непрерывной функцией $\widetilde{f}$, т. е. «обычную» функцию f в формуле (12) можно подправить так, что она станет непрерывной функцией $\widetilde{f}$, а функционал F при этом не изменится.

Основная идея состоит в том, чтобы требовать соблюдения граничных или начальных условий именно от соответствующей непрерывной функции $\widetilde{f}$.

Пример. Линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

называется *оперетором импульса* и играет важную роль в квантовой механике. Теорема вложения показывает, что его целесообразно изучать в пространстве $W_2^1(\mathbb{R})$, т. е. пространстве таких обобщённых функций, которые лежат в $L_2(\mathbb{R})$ вместе со своей первой производной. Действительно, здесь $l = 1$, $p = 2$, $n = 1$ и $lp = 2 > 1 = n$.

Задачи

Найдите фундаментальные решения следующих обыкновенных дифференциальных операторов:

69.
$$L = \frac{d}{dx} - \lambda.$$

70.
$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2.$$

71.
$$L = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^k.$$

72.
$$L = \frac{d}{dx} + 2x.$$

73.
$$L = \frac{d}{dx} - \cos x.$$

74. Следуя данным ниже указаниям решите дифференциальное уравнение второго порядка
$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) f(x) = g(x),$$
где $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция.

Предлагаемый метод решения называется *методом функции Грина.* При этом *функцией Грина* называется непрерывное решение уравнения
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right) G(x, y) = \delta(x - y), \quad \text{где } y \geq 0.$$

а) Покажите, что функция $\frac{\partial}{\partial x} G(x, y)$ имеет в точке $x = y$ скачок и вычислите этот скачок. (Это свойство часто принимается за определение функции Грина.)

б) Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — два линейно независимых решения однородного уравнения
$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) f(x) = 0.$$
Покажите, что можно так выбрать постоянную $c \neq 0$, что функция
$$G(x, y) = \begin{cases} c f_1(x) f_2(y), & \text{если } 0 < x < y, \\ c f_1(y) f_2(x), & \text{если } 0 < y < x, \end{cases}$$

будет функцией Грина. (Тем самым вы докажете существование функции Грина.)

в) Покажите, что если $f(x)$ и $G(x,y)$ подчиняются одним и тем же граничным условиям, то

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} G(x,y)g(y)\,dy.$$

(Тем самым вы выразите решение уравнения в терминах функции Грина.)

г) Найдите $f(x)$ и $G(x,y)$, отвечающие краевому условию $f(0)=0$.

Более подробно вы познакомитесь с методом функции Грина в курсах «Дифференциальные уравнения» и «Методы математической физики».

§ 9. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста

Как обычно, начнём с наводящих соображений: посмотрим как преобразование Фурье «обычной» функции действует на пробную функцию.

Пусть f — быстро убывающая функция в $\mathbb{R}^n$, а φ — пробная (а значит, тоже быстро убывающая) функция. Напомним, что прямое $\mathcal{F}_+$ и обратное $\mathcal{F}_-$ преобразования Фурье быстро убывающих функций в $\mathbb{R}^n$ в своё время были определены формулами

$$\mathcal{F}_\pm[f(x)](y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{\mp i(x,y)}\,dx,$$

где (x,y) обозначает скалярное произведение векторов x и y в $\mathbb{R}^n$. Напомним также свойства преобразования Фурье быстро убывающих функций.

1) Равенство Парсеваля:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\pm[f](y)\overline{\mathcal{F}_\pm[\varphi](y)}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx,$$

где черта означает комплексное сопряжение.

2) $\overline{\mathcal{F}_\pm[\varphi]} = \mathcal{F}_\mp[\overline{\varphi}]$.

3) Преобразование Фурье отображает пространство быстро убывающих функций на себя, в частности для любой пробной функции φ найдётся быстро убывающая функция ψ такая, что $\overline{\varphi} = \mathcal{F}_\pm[\psi]$. (Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $\psi = \mathcal{F}_\mp[\overline{\varphi}]$.) Но тогда $\overline{\psi} = \overline{\mathcal{F}_\mp[\overline{\varphi}]} = \mathcal{F}_\pm[\overline{\overline{\varphi}}] = \mathcal{F}_\pm[\varphi]$.

Учитывая сказанное, можем написать

$$(\mathcal{F}_\pm[f],\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}_\pm[f](y)\varphi(y)\,dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}_\pm[f](y)\overline{\overline{\varphi}}(y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}_\pm[f](y)\overline{\mathcal{F}_\pm[\psi]}(y)\,dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{\psi}(x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathcal{F}_\pm[\varphi](x)\,dx=(f,\mathcal{F}_\pm[\varphi]).$$

То есть результат действия преобразования Фурье от быстро убывающей функции на пробную совпадает с результатом действия этой быстро убывающей функции на преобразование Фурье от пробной.

Как обычно, примем это свойство, установленное нами для «обычных» функций, в качестве определения, пригодного для всех обобщённых функций: *преобразованием Фурье* (прямым или обратным) обобщённой функции $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется новая обобщённая функция $\mathcal{F}_\pm[F]$, которая действует на произвольную пробную функцию $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу $(\mathcal{F}_\pm[F],\varphi)=(F,\mathcal{F}_\pm[\varphi])$.

Пример. Вычислим преобразование Фурье δ-функции: $(\mathcal{F}_\pm[\delta],\varphi)=$

$$=(\delta,\mathcal{F}_\pm[\varphi])=\mathcal{F}_\pm[\varphi](0)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{\mp(x,0)}\,dx=((2\pi)^{-n/2},\varphi).$$

Таким образом, обобщённые функции $\mathcal{F}_\pm[\delta]$ действуют на любую пробную функцию так же, как постоянная $(2\pi)^{-n/2}$. Значит $\mathcal{F}_\pm[\delta]=(2\pi)^{-n/2}$.

Приведённое выше определение $(\mathcal{F}_\pm[F],\varphi)=(F,\mathcal{F}_\pm[\varphi])$ имеет один существенный недостаток: мы не проверили, что функция $\mathcal{F}_\pm[\varphi]$ является пробной. Однако если это не так, то данное определение будет «работать» не для всех обобщённых функций F, а только для тех, для которых имеет смысл величина $(F,\mathcal{F}_\pm[\varphi])$.

Поэтому очень важно выяснить, каковы те пробные функции, преобразование Фурье которых также является пробной функцией. Ответ на этот вопрос шокирует: такая функция всего одна — тождественный нуль! Не ставя перед собой задачи доказать этот факт строго, укажем, однако, идею доказательства для случая $n=1$.

Пусть обе функции φ и $\mathcal{F}_+[\varphi]$ являются пробными, т. е. обе бесконечно дифференцируемы и зануляются вне некоторого конечного интервала, например вне $|x|<a$. Тогда теорема Котельникова–Шеннона позволяет утверждать, что равенство

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{\pi k}{a}\right)\operatorname{sinc}\left(a\left(x-\frac{\pi k}{a}\right)\right)\tag{13}$$

имеет место для всех $x \in \mathbb{R}$. Принимая во внимание, что $\varphi(x) = 0$, если $|x| > a$, видим, что, во-первых, суммирование по k можно вести в (13) лишь в конечных пределах, и во-вторых, возникающая конечная сумма тождественно равна нулю для $|x| > a$:

$$\sum_{k=-N}^{N} \varphi\left(\frac{\pi k}{a}\right) \frac{\sin(ax - \pi k)}{ax - \pi k} \equiv 0. \tag{14}$$

Отсюда уже можно непосредственно вывести, что все коэффициенты $\varphi(\pi k/a)$ в (14) равны нулю (тем не менее мы опускаем это рассуждение, как не относящееся непосредственно к теории обобщённых функций). Однако тогда все коэффициенты $\varphi(\pi k/a)$ в (13) равны нулю и φ равна нулю тождественно.

Неужели нам придётся смириться с тем, что далеко не всякая обобщённая функция имеет преобразование Фурье? Оказывается, в такой жертве нет необходимости: надо лишь сменить точку зрения, точнее — сменить класс основных функций. А именно, работая с преобразованием Фурье, в качестве основных функций принимают быстро убывающие функции, знакомые вам по теме «Преобразование Фурье», т. е. бесконечно дифференцируемые функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, убывающие на бесконечности быстрее любого многочлена. В пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих функций вводят следующее понятие сходимости: последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *сходится* в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, если для любых мультииндексов α и β последовательность функций $x^\alpha D^\beta \varphi_1$, $x^\alpha D^\beta \varphi_2, \dots, x^\alpha D^\beta \varphi_k, \dots$ сходится к функции $x^\alpha D^\beta \varphi$ при $k \to \infty$ равномерно в $\mathbb{R}^n$. Наконец, *обобщённой функцией медленного роста* называют линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ основных функций, принимающий значения во множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пространство обобщённых функций медленного роста обозначают через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку из темы «Преобразование Фурье» известно, что «классическое» преобразование Фурье переводит любую быстро убывающую функцию в быстро убывающую, то правило $(\mathcal{F}_\pm[F], \varphi) = (F, \mathcal{F}_\pm[\varphi])$ действительно определяет новую обобщённую функцию $\mathcal{F}_\pm[F] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ для любой обобщённой функции медленного роста $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Другими словами, теперь мы знаем наверняка, что преобразование Фурье можно применять к любой обобщённой функции медленного роста.

Отметим ещё, что идея менять класс основных функций в зависимости от решаемой задачи — стандартный приём теории обобщённых функций. Выше мы уже обсудили, что именно вынудило нас перейти от основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ к основным функциям $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Однако если бы мы с самого начала стали развивать теорию обобщённых функций медленного роста, то все обобщённые функции у нас были бы всегда определены во всём пространстве $\mathbb{R}^n$ и мы не могли бы, например, решать дифференциальное уравнение в «данной области», а не во всём пространстве. Другой пример плодотворности смены класса основных функций доставляют гиперфункции, играющие важную роль в квантовой теории поля и представляющие собой непрерывные линейные функционалы на пространстве комплексно-аналитических функций.

Строго говоря, сейчас мы должны были бы начать изложение теории обобщённых функций медленного роста с самого начала и последовательно определить для них операции дифференцирования, умножения, свёртки и т. д. Однако это было бы дословным повторением уже сказанного в предыдущих параграфах. Поэтому мы сосредоточим внимание лишь на преобразовании Фурье.

Свойства преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста:

1) *преобразование Фурье линейно*, т. е. для любых $a, b \in \mathbb{C}$ и любых $F, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства $\mathcal{F}_\pm[aF + bG] = a\mathcal{F}_\pm[F] + b\mathcal{F}_\pm[G]$;

2) *для любого мультииндекса α и любой $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства*

$$\mathcal{F}_\pm[x^\alpha F(x)] = (\pm i)^{|\alpha|} D^\alpha(\mathcal{F}_\pm[F]);$$

3) *для любого мультииндекса α и любой $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства*

$$\mathcal{F}_\pm[D^\alpha F(x)](y) = (\pm iy)^\alpha(\mathcal{F}_\pm[F])(y);$$

4) *как прямое, так и обратное преобразование Фурье являются непрерывными отображениями пространства обобщённых функций медленного роста в себя;*

5) *для любой $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства $\mathcal{F}_+[\mathcal{F}_-[F]] = F$ и $\mathcal{F}_-[\mathcal{F}_+[F]] = F$, называемые формулами обращения.*

Если обобщённые функции медленного роста F и G таковы, что имеют смысл участвующие в соответствующих формулах операции свёртки и умножения для F, G, $\mathcal{F}_\pm[F]$ и $\mathcal{F}_\pm[G]$, то справедливы ещё и такие соотношения:

6) $\mathcal{F}_\pm[F * G] = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}_\pm[F] \cdot \mathcal{F}_\pm[G]$;

7) $\mathcal{F}_\pm[F \cdot G] = (2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}_\pm[F] * \mathcal{F}_\pm[G]$.

Другими словами, все свойства преобразования Фурье, которые мы ранее доказали для быстро убывающих функций, справедливы также и для обобщённых функций медленного роста. Более того, все перечисленные свойства могут быть доказаны по одной схеме, суть которой состоит в том, чтобы, подействовав на пробную функцию одной частью формулы, перенести все выполняемые операции с обобщённой функции на пробную, воспользоваться известными свойствами преобразования Фурье быстро убывающих функций и опять перенести все операции теперь уже с пробной функции на обобщённую. Для примера приведём доказательство лишь одного из перечисленных выше свойств.

Доказательство свойства 2. Пусть φ — быстро убывающая функция. Тогда, применяя свойство 3 к φ, справедливость которого в этом случае была установлена нами ранее, получаем

$$(\mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha}F(x)], \varphi) = (x^{\alpha}F(x), \mathcal{F}_{\pm}[\varphi]) = (F, x^{\alpha}\mathcal{F}_{\pm}[\varphi]) =$$
$$= (F, (\mp i)^{|\alpha|}\mathcal{F}_{\pm}[D^{\alpha}\varphi]) = (\mp i)^{|\alpha|}(\mathcal{F}_{\pm}[F], D^{\alpha}\varphi]) =$$
$$= (\mp i)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}(D^{\alpha}(\mathcal{F}_{\pm}[F]), \varphi]) = ((\pm i)^{|\alpha|}D^{\alpha}(\mathcal{F}_{\pm}[F]), \varphi]).$$

Значит, обобщённые функции $\mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha}F(x)]$ и $(\pm i)^{|\alpha|}D^{\alpha}(\mathcal{F}_{\pm}[F])$ одинаково действуют на любую пробную функцию. Следовательно, они совпадают. Свойство 2 доказано.

Заканчивая изучение теории обобщённых функций, вспомним, что одним из побудительных мотивов для нас было стремление найти наиболее общий класс функций, к которым можно применять свойства преобразования Фурье, ранее выведенные нами только для быстро убывающих функций. Теперь мы знаем ответ — этот класс состоит из обобщённых функций медленного роста. Мы заменили рутинное обоснование, скажем, законности дифференцирования интеграла по параметру принципиально новой точкой зрения и выиграли: теперь мы понимаем, что надо лишь интерпретировать изучаемую функцию как обобщённую, тогда пробразование Фурье от неё наверняка есть и нам остаётся лишь интерпретировать его как «обычную» функцию; если же в ответе мы получили сингулярную обобщённую функцию, то ничего не поделаешь: каков вопрос, таков ответ.

Задачи

Докажите следующие равенства в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

75. $\mathcal{F}_{\pm}[\delta(x)] = (2\pi)^{-n/2}$.

76. $\mathcal{F}_{\pm}[1] = (2\pi)^{n/2}\delta(x)$.

77. $\mathcal{F}_{\pm}[\delta(x - x_0)](y) = (2\pi)^{-n/2}e^{\mp i(x_0,y)}$.

78. $\mathcal{F}_{\pm}[e^{i(x_0,x)}](y) = (2\pi)^{n/2}\delta(y - x_0)$.

79. $\mathcal{F}_{\pm}[D^{\alpha}\delta(x)](y) = (2\pi)^{-n/2}(\pm iy)^{\alpha}$.

80. $\mathcal{F}_{\pm}[x^{\alpha}](y) = (2\pi)^{n/2}(\pm i)^{|\alpha|}D^{\alpha}\delta(y)$.

81. $\mathcal{F}_{\pm}[F(-x)](y) = \mathcal{F}_{\mp}[F(x)](y) = \mathcal{F}_{\pm}[F(x)](-y)$.

Найдите прямое и обратное преобразования Фурье следующих функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

82. $\delta^{(k)}(x)$.

83. x^k.

84. $H(x)e^{-ax}$, где $a > 0$.

85. $H(x)$.

86. $H(-x)$.

87. $\operatorname{sign} x$.

88. $|x|$.

89. $\sin x$.

90. $\sin |x|$.

Ответы и указания

7. *Указ.:* Обратите внимание, что для обоснования законности предельного перехода в возникающем условно сходящемся интеграле теоремы о мажорированной сходимости недостаточно. Найдите подходящую теорему у Г. М. Фихтенгольца. **10.** *Указ.:* Используйте формулы Сохоцкого. **11.** *Указ.:* Используйте формулы Сохоцкого. **12.** δ-Функция и функция Хевисайда соответственно. **28.** *Указ.:* Фиксируйте пробную функцию φ_0 такую, что $\varphi_0(0) = 1$, и представьте произвольную пробную функцию φ в виде $\varphi(x) = c\varphi_0(x)+\varphi_1(x)$, где c — некоторая постоянная, а φ_1 — некоторая пробная функция такая, что $\varphi_1(0) = 0$. **31.** $\delta'(x)$. **32.** $\delta''(x)$. **36.** $\delta^{(k-1)}(x)$. **37.** $\mathrm{sign}\,(x)$ при $k = 1$ и $2\delta^{(k-2)}(x)$ при $k \geq 2$. **38.** $2\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j\delta^{k-1}(x-\pi j)$. **39.** $2\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^{j+1}\delta^{k-1}(x-\pi/2-\pi j)$. **42.** $f'(x) = H(x)$ и $f^{(k)}(x) = \delta^{(k-2)}(x)$ при $k \geq 2$. **43.** $f'(x) = H(x)\cos x$ и $f^{(k)}(x)= \sum_{j=1}^{[k/2]}(-1)^{j-1}\delta^{(k-2j)}(x)+H(x)(\sin x)^{(j)}$ при $k \geq 2$, где $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$. **44.** $f'(x) = \delta(x) - H(x)\sin x$ и $f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{[(k+1)/2]}(-1)^{j-1}\delta^{(k-2j+1)}(x) + H(x)(\cos x)^{(j)}$ при $k \geq 2$. **45.** $f'(x) = 2xH(1-x^2)+\delta(x-1)-\delta(x+1)$, $f''(x) = 2H(1-x^2)-2\delta(x+1)-2\delta(x-1)+\delta'(x+1)-\delta''(x-1)$, $f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{3}\frac{2}{(3-j)!}[(-1)^{j-1}\delta^{(k-j)}(x+1)-\delta^{(k-j)}(x-1)]$ при $k\geq 3$. **58.** $F(x-a)$. **59.** $\delta(x-a-b)$. **60.** $F^{(m)}$. **61.** $2\delta(x)$. **64.** $xH(x)$. **65.** $x^3H(x)/3$. **66.** $H(x)(x^2-4\sin^2 x/2)$. **67.** $H(x)(\mathrm{sh}\ x-\sin x)/2$. **68.** $(2a-|x|)H(2a-|x|)$. **69.** $H(x)e^{\lambda x}$. **70.** $H(x)(\sin\lambda x)/\lambda$. **71.** $H(x)e^{\lambda x}x^{k-1}/(k-1)!$. **72.** $H(x)e^{-x^2/2}$. **73.** $H(x)\sin x$. **74.** (а) Скачок равен 1. (г) $f(x) = \cos x\int_0^x g(y)\sin y\,dy + \sin x\int_x^{+\infty} g(y)\cos y\,dy$, $G(x,y) = \sin x\cos y$, если $0 < x < y$ и $G(x,y) = \sin y\cos x$, если $0 < y < x$. **82.** $\pm(iy)^k/\sqrt{2\pi}$. **83.** $(\mp i)^k\sqrt{2\pi}\delta^{(k)}(y)$. **84.** $1/[\sqrt{2\pi}(a\pm iy)]$. **85.** $\mathcal{F}_+[H(x)](y) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}(y-i0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(y)-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y}$ и $\mathcal{F}_-[H(x)](y) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}(y+i0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(y)+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y}$. *Указ.:* Воспользуйтесь непрерывностью преобразования Фурье, результатами предыдущей задачи и формулами Сохоцкого. **86.** $\mathcal{F}_+[H(-x)](y) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}(y+i0)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(y) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y}$ и $\mathcal{F}_-[H(-x)](y) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}(y-i0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(y) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y}$. **87.** $\mathcal{F}_\pm[\mathrm{sign}\,x](y) = \mp\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\frac{1}{y}$. *Указ.:* Воспользуйтесь равенством $\mathrm{sign}\,(x) = 2H(x) - 1$ или $\mathrm{sign}\,(x) = H(x) - H(-x)$. **88.** $\mathcal{F}_\pm[|x|](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dy}\mathcal{P}\frac{1}{y} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$. *Указ.:* Воспользуйтесь равенством $|x| = x\mathrm{sign}\,x$ и результатами предыдущей задачи. **89.** $\mathcal{F}_\pm[\sin x](y)= \pm i\frac{\pi}{2}[\delta(y\pm 1)-\delta(y\mp 1)]$. **90.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3}}\left(\mathcal{P}\frac{1}{y\pm 1}-\mathcal{P}\frac{1}{y\mp 1}\right)$. *Указ.:* Воспользуйтесь равенством $\sin|x| = (\sin x)(\mathrm{sign}\,x)$.

Предметный указатель

Оглавление