Энергия магнитного и электрического поля

Запишем два уравнения Максвелла (в системе СГС):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\tfrac{\partial \mathbf{B}}{c\partial t} \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \tfrac{\partial \mathbf{D}}{c\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

Умножим скалярно первое уравнение на $\mathbf{H}$, второе – на $\mathbf{E}$ *

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\mathbf{H}\tfrac{\partial \mathbf{B}}{c\partial t} = -\tfrac{\partial \mathbf{HB}}{2c\partial t} \\ \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} &= \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{Ej} + \mathbf{E}\tfrac{\partial \mathbf{D}}{c\partial t} = \tfrac{4\pi}{c}\tfrac{\partial w_{\text{кин}}}{\partial t} + \tfrac{\partial \mathbf{ED}}{2c\partial t} \end{aligned} \tag{2}$$

Домножим оба уравнения на $\frac{c}{4\pi}$

$$\begin{aligned} \tfrac{c}{4\pi}\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\tfrac{\partial \mathbf{HB}}{8\pi\partial t} \\ \tfrac{c}{4\pi}\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} &= \tfrac{\partial w_{\text{кин}}}{\partial t} + \tfrac{\partial \mathbf{ED}}{8\pi\partial t} \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь вычтем из второго уравнения первое:

$$\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = \frac{\partial w_{\text{кин}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{ED}+\mathbf{HB}}{8\pi}\right) \tag{4}$$

Перепишем левую часть с учетом тождества $\operatorname{div}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}$:

$$-\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(w_{\text{кин}} + \frac{\mathbf{ED}+\mathbf{HB}}{8\pi}\right) \tag{5}$$

Теперь проинтегрируем обе части по бесконечному объему:

$$-\frac{c}{4\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dV = -\frac{c}{4\pi}\oiint[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]d\mathbf{S} = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(W_{\text{кин}} + \int\frac{\mathbf{ED}+\mathbf{HB}}{8\pi}dV\right) \tag{6}$$

Поверхностный интеграл занулен как имеющий порядок не выше $\sim \frac{1}{r^3}$, поскольку на сфере бесконечного радиуса

$$E \sim \frac{1}{r^2} \text{ (поле точечного заряда)},\ \ H \sim \frac{1}{r^3} \text{ (поле магнитного диполя)},\ \ S \sim r^2.$$

Справа под знаком производной стоит интеграл движения, по размерности совпадающий с энергией. Это и есть полная энергия замкнутой системы. Поэтому $\int \frac{\mathbf{ED}+\mathbf{HB}}{8\pi}dV$ является потенциальной энергией системы. Тогда $\frac{\mathbf{ED}+\mathbf{HB}}{8\pi}$ – плотность энергии электрического и магнитного поля.

*Учтем, что $\mathbf{Ej} = n\sum\mathbf{E}q_i\mathbf{v_i} = n\sum\mathbf{F_i}\mathbf{v_i} = n\sum m_i\boldsymbol{a}_i\mathbf{v_i} = n\sum m_i\mathbf{v_i}\frac{\partial\mathbf{v_i}}{\partial t} = n\sum\frac{\partial}{\partial t}\frac{m_iv_i^2}{2} = \frac{\partial w_{\text{кин}}}{\partial t}$.