# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**5 семестр, осень 2024**

---

## Задание 1

*Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Классификация уравнений второго порядка. Общее решение. Задачи Коши и Гурса. Распространение волн в пространстве. Формулы Даламбера, Кирхгофа и Пуассона.*

1. (3 б) Найдите общее решение уравнения и решите задачу Коши:

$$xyu_x + (x-u)u_y = yu, \quad u|_{y=x} = x^2$$

2. (3 б) Найдите поверхность $z = z(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $xz_x + zz_y = y$ и проходящее через кривую $x = t, y = \sin t, z = \cos t$.

3. (3 б) Привести к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип, уравнение

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0$$

4. (3 б) Привести к каноническому виду уравнение и по возможности избавиться от младших производных:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$$

5. (3 б) Найдите наибольшую область, в которой задача Коши

$$yu_{xx} - (x+y)u_{xy} + xu_{yy} - \frac{x+y}{x-y}\,(u_x - u_y) = 0,$$
$$u(x,0) = x^2, \quad u_y(x,0) = x, \quad x > 0,$$

имеет единственное решение. Найдите это решение.

6. (3 б) Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны при $t \geqslant 0$, имеют непрерывные вторые производные при $t > 0$, и $\varphi(0) = \psi(0)$. Найдите функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $u_{xy} + u_y = 1$ в области $x > 0, y > 0$, а на ее границе принимающую значения

$$u|_{y-0} = \varphi(x), \quad u|_{x\to 0} = \psi(y).$$

7. (4 б) Найдите решение смешанной задачи.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t \geqslant 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ u(x,0) = 0, \quad (-\infty < x < +\infty), \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \\ u\,(v_0 t, t) = b \sin \omega t \quad (t \geqslant 0; \quad 0 \leqslant v_0 < a; \quad v_0, b, \omega = \text{ const }). \end{cases}$$

(прим.: здесь задача служит моделью плоских колебаний газа в длинной тонкой трубке, а граничное условие трактуется как движение вдоль трубки с постоянной скоростью $v_0$ источника колебаний, и требуется описать колебания газа впереди и позади источника)

8. (3 б) Решите задачу Коши для волнового уравнения в пространстве и продемонстрируйте на этом примере действие принципа Гюйгенса.

$$u|_{t-0} = \begin{cases} u_0, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant r_0, \\ 0, & \text{если } r_0 < r, \end{cases} \qquad u_t\Big|_{t=0} = 0.$$