

*III*

*Кручение*

**Крутящим** называют момент, вектор которого направлен вдоль оси стержня.

**Кручением** называется такой вид нагружения стержня, при котором из всех шести внутренних силовых факторов в его поперечных сечениях (рис. I.6.) не равен нулю *только* крутящий момент  $M_{кр}$ :

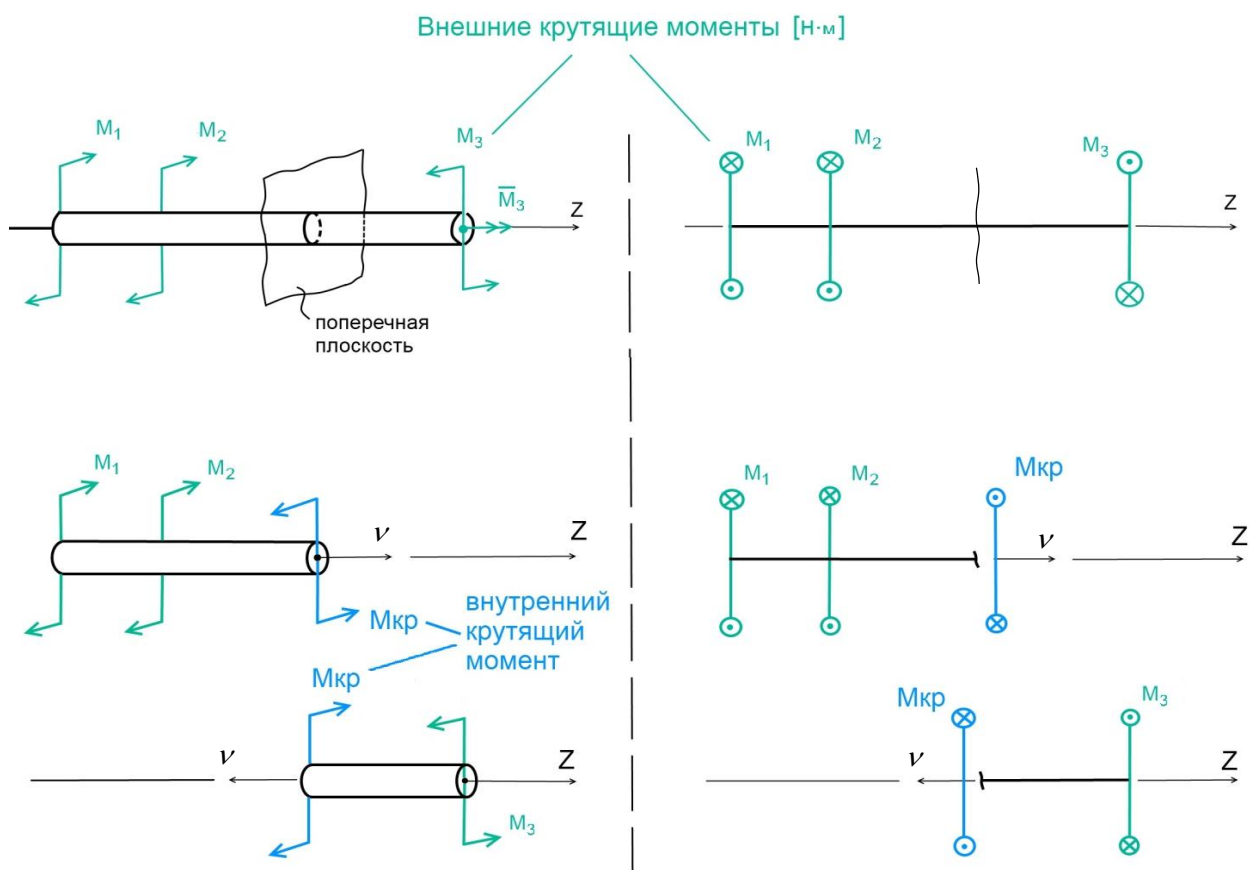


Рис. III.1.

Положительное направление  $M_{кр}$  — вращение против часовой стрелки относительно нормали  $V$  к поперечному сечению.

Длину оси стержня кручение не изменяет.

*Примечание:* Внешний крутящий момент также называют «скручивающим моментом», а внутренний крутящий момент — просто «крутящим моментом».

Касательное напряжение  $\tau$  в различных точках поперечного сечения скручиваемого стержня различается по величине и по направлению. Разрушение стержня начинается там, где оно максимально.

Коэффициент пропорциональности между максимальным напряжением  $\tau_{max}$  в поперечном сечении и действующим в этом сечении внутренним крутящим моментом  $M_{кр}$  называется **моментом сопротивления при кручении** поперечного сечения и обозначается  $W_K$  [м<sup>3</sup>]:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K} \quad \text{«метр на метр»} \quad (III.1)$$

Момент сопротивления при кручении определяется только формой и размерами сечения.

## Аналогии

Иногда разные по своей сути физические явления, математически описываются идентичными уравнениями.

Тогда удобно одно явление, менее понятное и менее удобное для изучения, исследовать на примере другого — более наглядного, именуемого **аналогом**.

Сам процесс такого исследования именуется **аналогией**.

### 1) Гидродинамическая аналогия:

Аналогом распределения касательных напряжений в поперечных сечениях простой формы является распределения скоростей частиц воды, закрученной в ёмкости такой же формы:

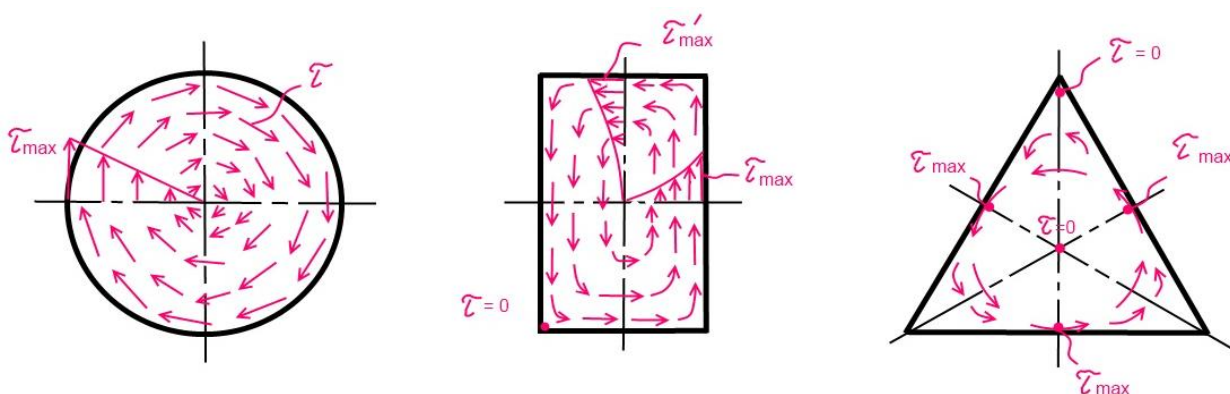


Рис. III.2.

## 2) Мембранная аналогия:

Применима к исследованию поперечных сечений любой формы.

В жёсткой плите вырезается отверстие, форма которого повторяет форму поперечного сечения стержня. Отверстие затягивается тонкой плёнкой, под плиту подается избыточное давление, плёнка выпучивается.

Аналогом касательного напряжения в точке поперечного сечения является тангенс угла  $\alpha$ , который составляет касательная к выпученной поверхности плёнки в этой же точке:

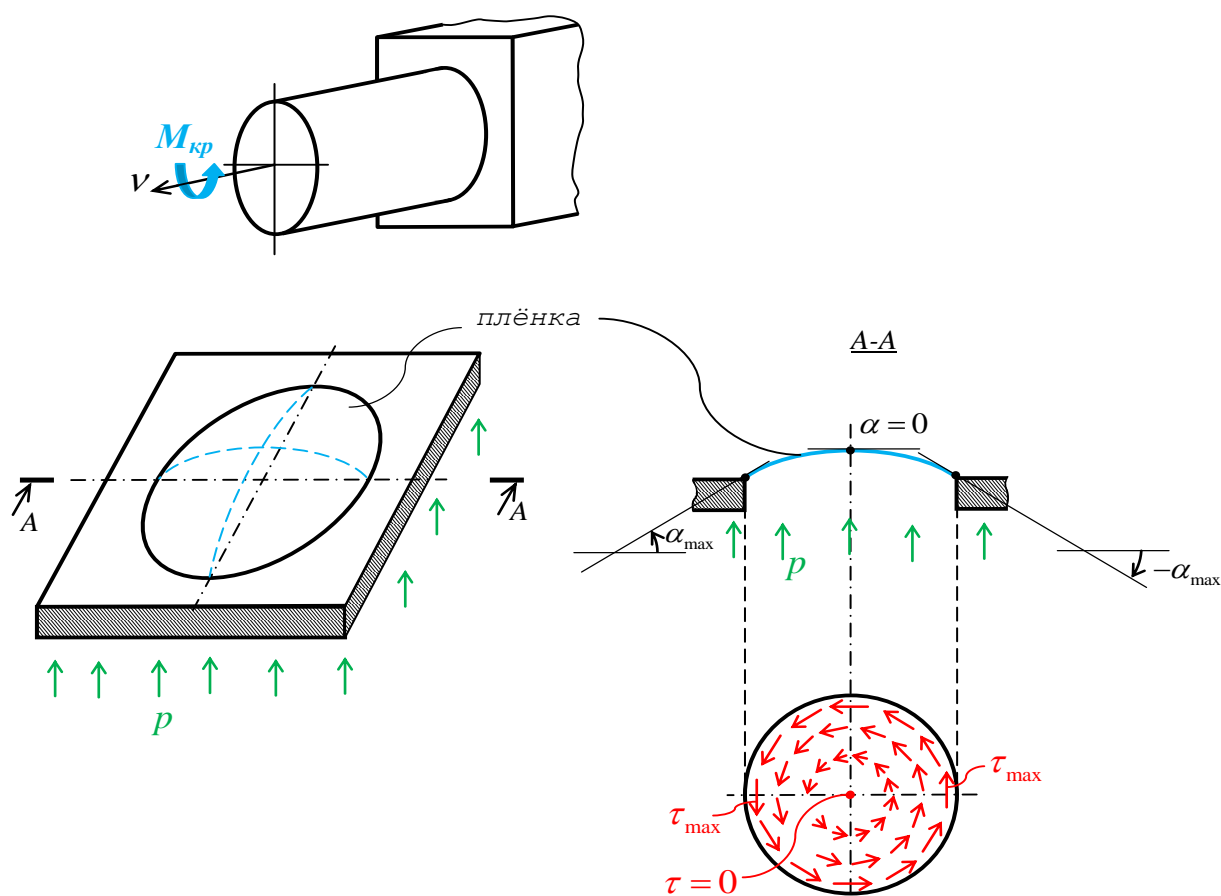
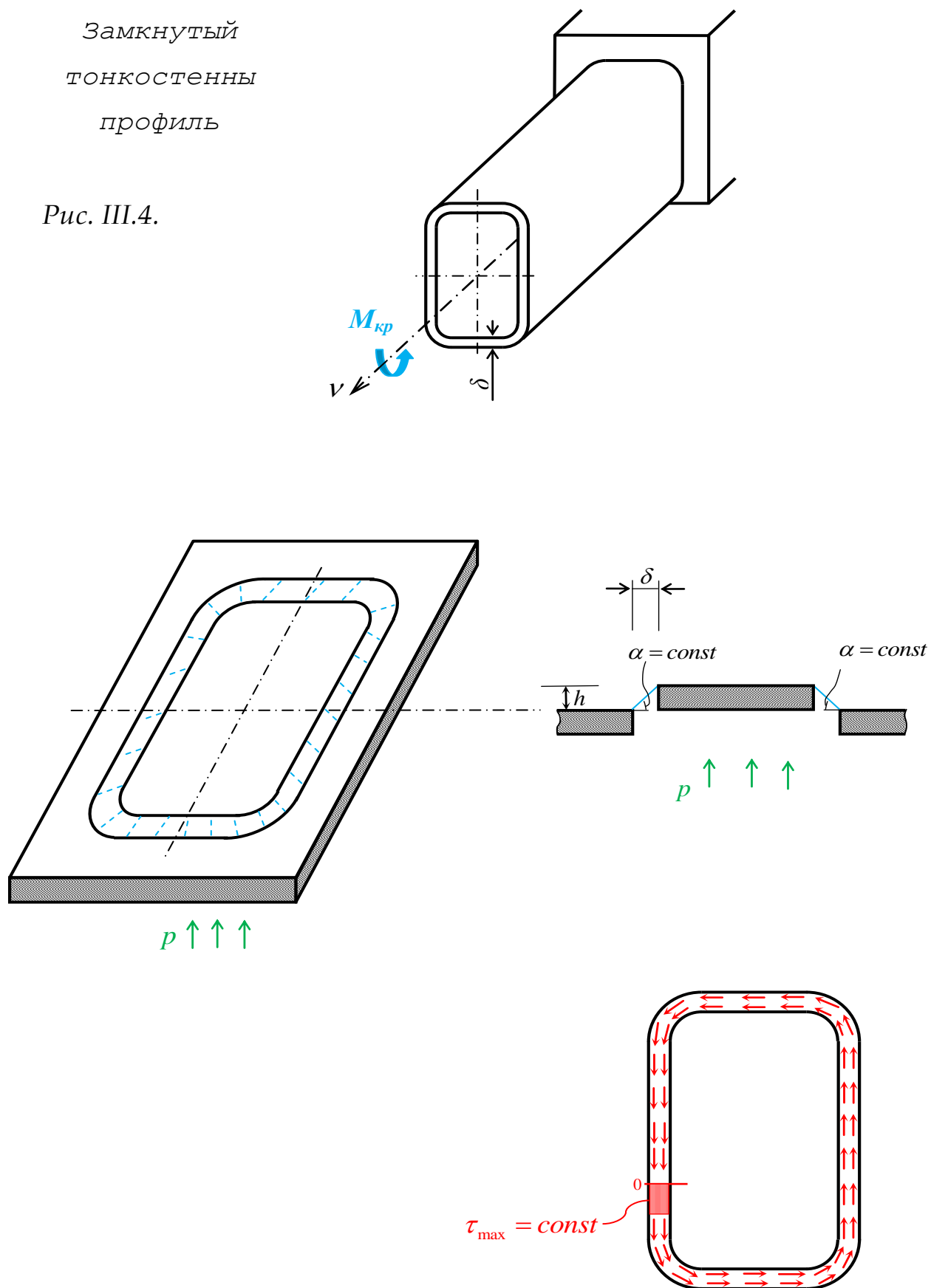


Рис. III.3.

Углы выпучивания, как правило, небольшие (замеряются специальными устройствами), поэтому  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ .

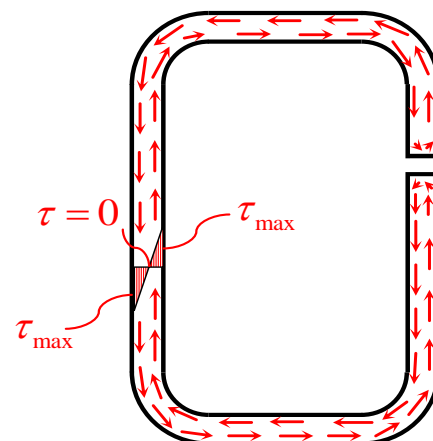
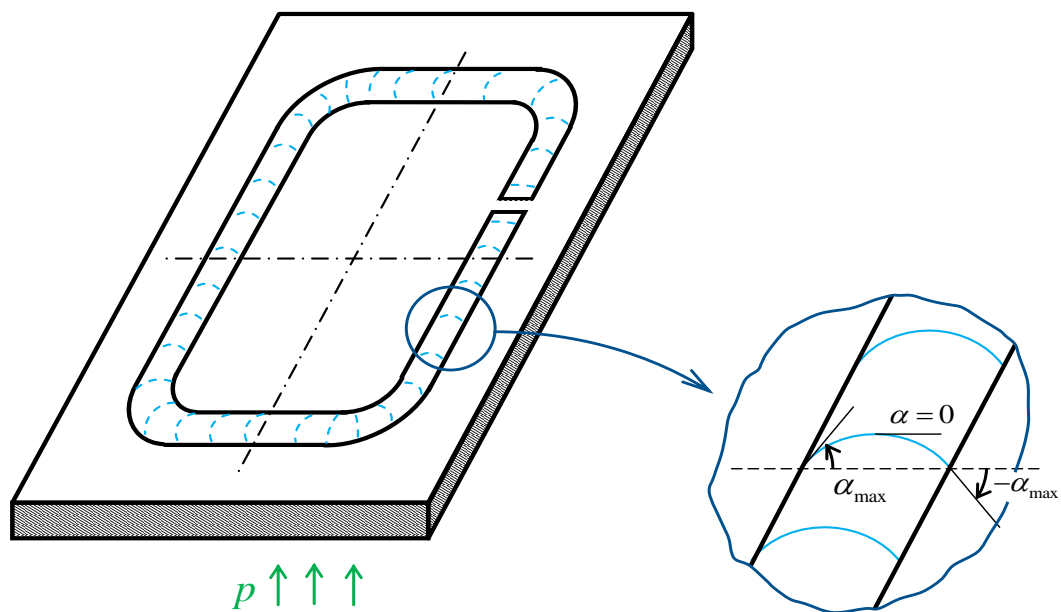
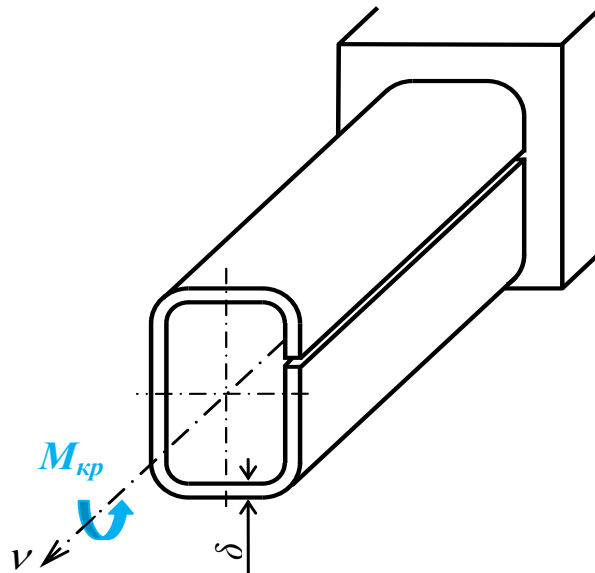
Замкнутый  
тонкостенный  
профиль

Рис. III.4.



Незамкнутый  
тонкостенный  
профиль

Рис. III.5.



Незамкнутый  
составной  
тонкостенный  
профиль

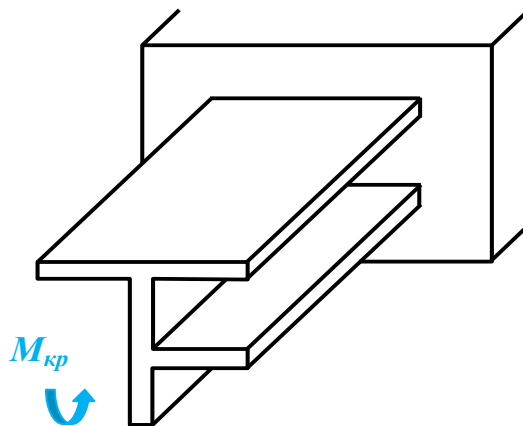
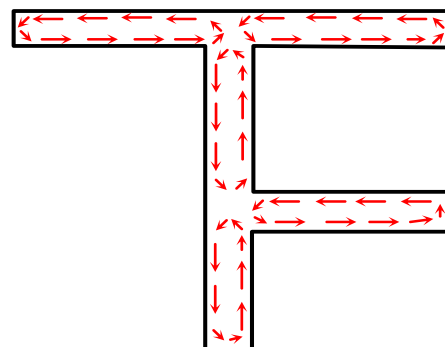
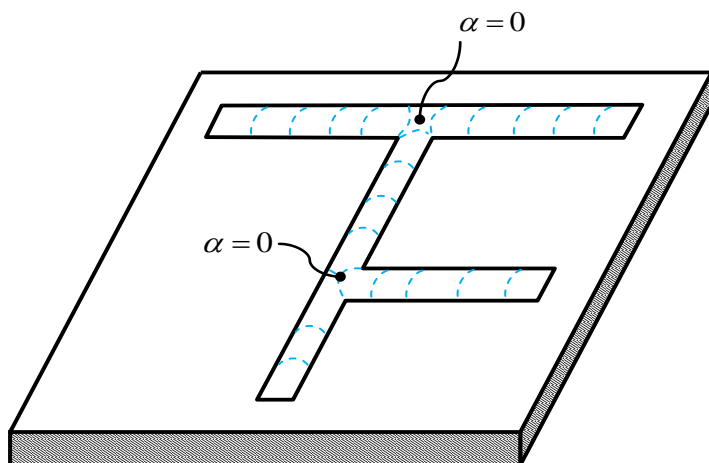


Рис. III.6.





## Чистый сдвиг

При кручении в поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения.

В окрестности произвольной точки “K” поперечного сечения выделим элементарный объём (бесконечно малый параллелепипед), одна из граней которого принадлежит сечению:

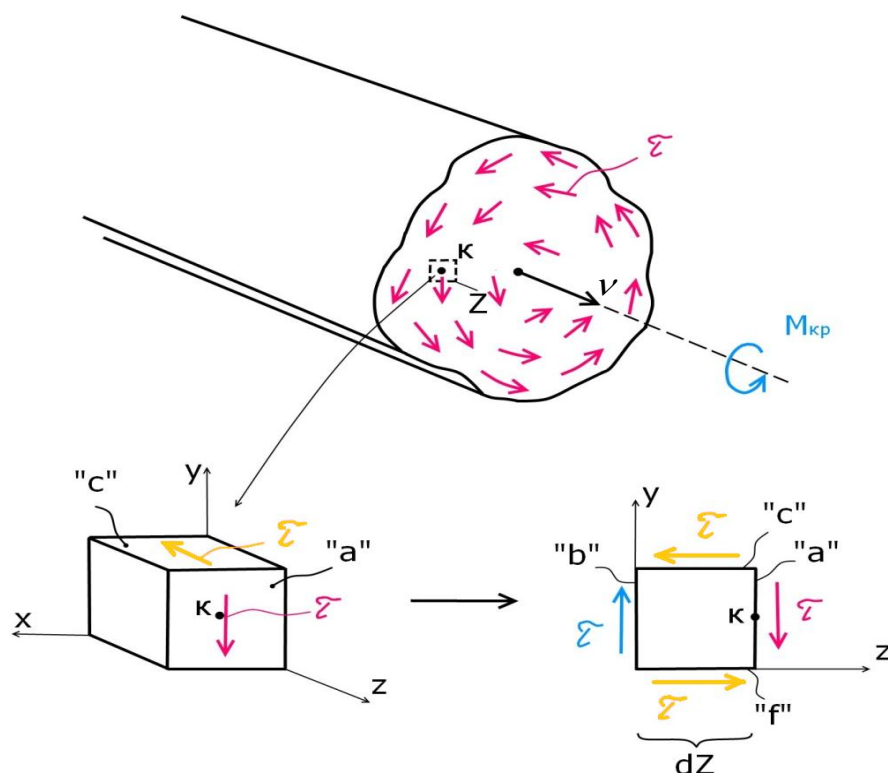


Рис. III.7.

**Уравнения равновесия элементарного объёма:**

$\tau$  — так как грань есть часть поперечного сечения

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \tau = \tau$$

$\tau, \tau$  - пара сил

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \tau$$

Грань “b” — часть соседнего поперечного сечения. Следовательно, на ней тоже действуют только касательные напряжения  $\tau$ .

**Закон парности касательных напряжений** (общий для всех напряжённых состояний): на смежных взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по модулю и противоположны по направлению.

### Следствия из закона парности:

- 1) В крайних точках поперечного сечения скручиваемого стержня касательные напряжения  $\tau$  направлены вдоль линии края.

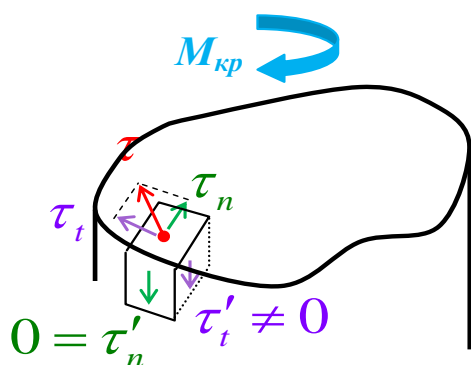


Рис. III.8

Доказываем от обратного (рис. III.8.).

Пусть в крайней точке сечения касательное напряжение не параллельно контуру края. Тогда оно раскладывается на две составляющие: параллельную контуру  $\tau_t$  и перпендикулярную ему  $\tau_n$ .

Парное  $\tau_n$  напряжение  $\tau'_n$  заведомо равно нулю, ибо наружная поверхность

стержня свободна от такой нагрузки, значит и составляющая  $\tau_n$  так же нулевая.

- 2) В угловых точках поперечного сечения скручиваемого стержня касательные напряжения  $\tau$  равны нулю.

Доказываем аналогично (рис. III.9.): раскладываем произвольный вектор касательного напряжения на две составляющие, перпендикулярные сторонам угла и убеждаемся в том, что обе они нулевые.

Часть поперечного сечения в районе угла

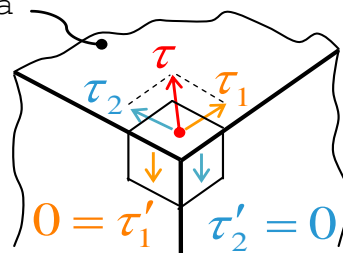


Рис. III.9.

Следствия 1) и 2) наглядно иллюстрируются гидродинамической аналогией (рис. III.2.).

3) В продольных сечениях скручиваемого стержня так же возникают касательные напряжения, парные напряжениям в поперечных сечениях.

Это видно уже из рис. III.8.:  $\tau_t$  - напряжение в поперечном сечении,  $\tau'_t$  - парное ему напряжение в сечении продольном. По этой причине, например, скручиваемые прямоугольные брусья из дерева лопаются вдоль середины бóльшей стороны – там, где действуют наибольшие касательные напряжения (рис. III.10.).

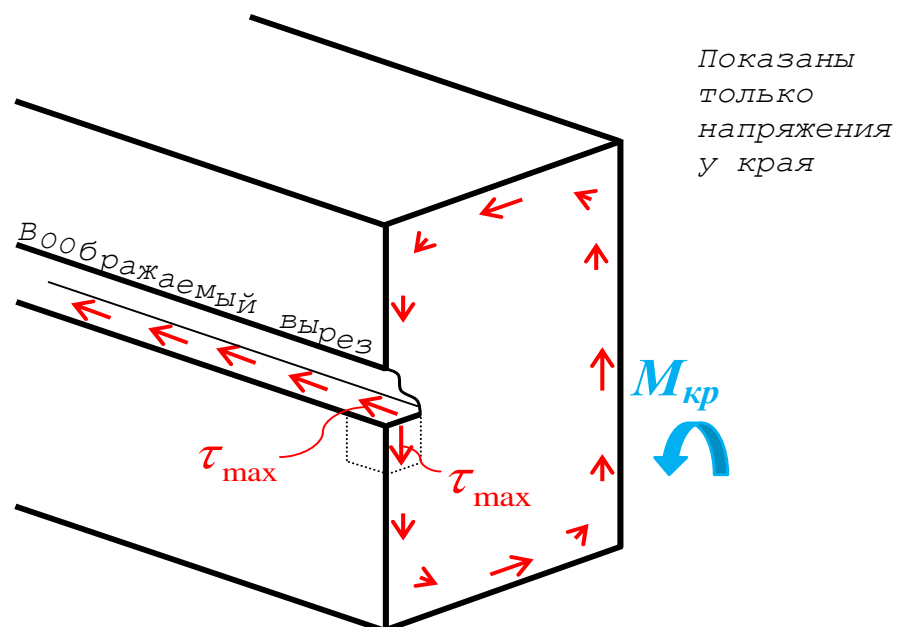


Рис. III.10.

Напряжённое состояние в точке тела называется **чистым сдвигом**, если в её окрестности можно выделить элементарный объём, на четырёх гранях которого действуют только касательные напряжения:

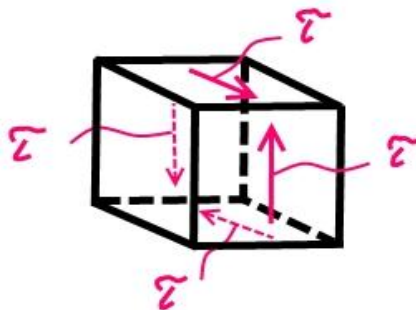


Рис. III.11.

Касательные напряжения не меняют длины рёбер элементарного объёма. Следовательно, объёмная деформация в точке при напряжённом состоянии (н.с.) «чистый сдвиг»:

$$e = 0$$

Напряжённое состояние «чистый сдвиг» реализуется не только в точках тела, работающего на кручение, но и в точках тела, работающего на срез:

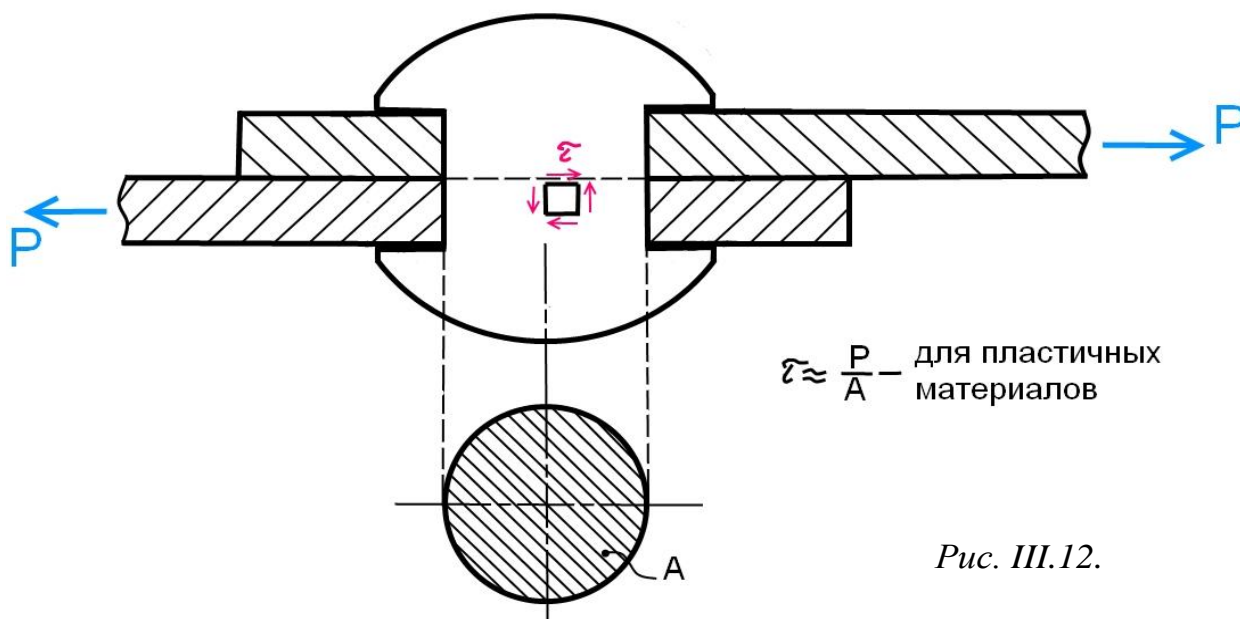
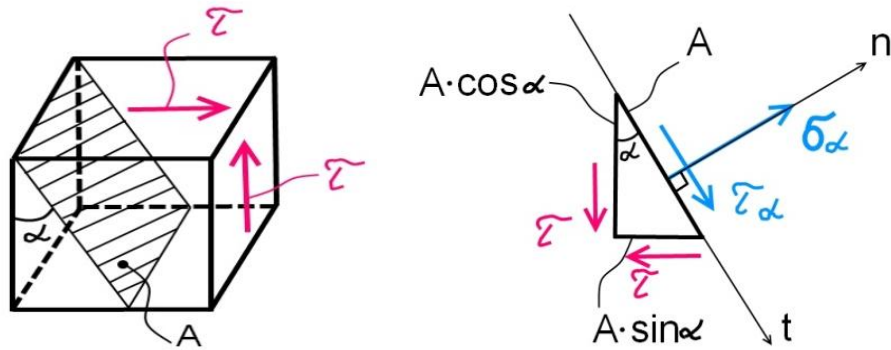


Рис. III.12.

Напряжения в наклонных площадках при чистом сдвиге:



Условия равновесия части элементарного объёма под наклонной площадкой:

$$\sum F_n = 0 = \sigma_\alpha \cdot A - (\tau \cdot A \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha - (\tau \cdot A \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha$$

$$\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

$$\sum F_t = 0 = \tau_\alpha \cdot A + (\tau \cdot A \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha - (\tau \cdot A \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha$$

$$\tau_\alpha = \tau \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

В каких площадках нет касательных напряжений, действуют только нормальные?

$$\tau_\alpha = 0 \Rightarrow \cos(2 \cdot \alpha) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \alpha = \pm 90^\circ \Rightarrow \alpha = \pm 45^\circ$$

при этом:  $\sigma_\alpha = \sigma_{45^\circ} = \tau \cdot \sin(\pm 2 \cdot 45^\circ) = \pm \tau$ .

Таким образом:

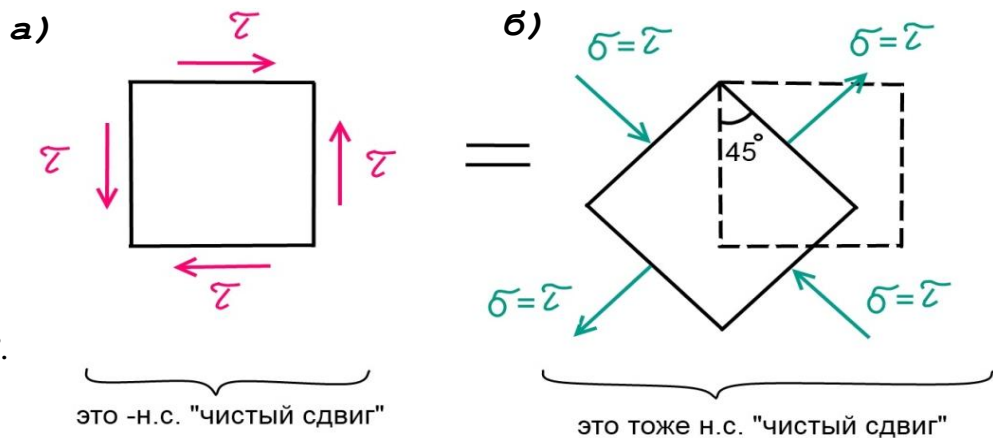


Рис. III.13.

## Закон Гука для сдвига

Касательные напряжения  $\tau$  искажают форму элементарного объёма, вызывая в нём угловые деформации  $\gamma$ :

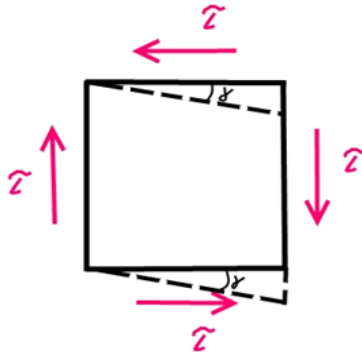


Рис. III.14.

Зависимость между  $\tau$  и  $\gamma$  для упругого изотропного материала выражает **закон Гука для сдвига**:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (III.2)$$

где

$G$  — **модуль упругости второго рода** (модуль сдвига) — характеристика материала, определяемая экспериментально, [Па].

Так же, как при растяжении/сжатии, при сдвиге пластичный материал работает упруго, потом «течёт», потом упрочняется, потом разрушается. Хрупкий материал сохраняет упругость вплоть до разрушения.

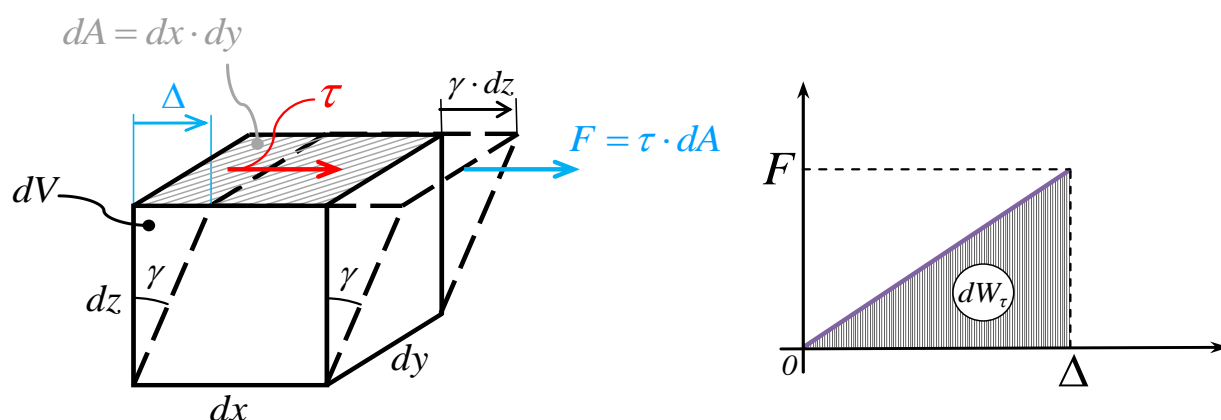


## Удельная потенциальная энергия

### при чистом сдвиге

Вспоминаем: потенциальная энергия  $U$ , накопленная в деформированном упругом теле, численно равна работе  $W$  внутренних сил на перемещениях точек тела при нагружении.

Рассмотрим рис. III.13а:



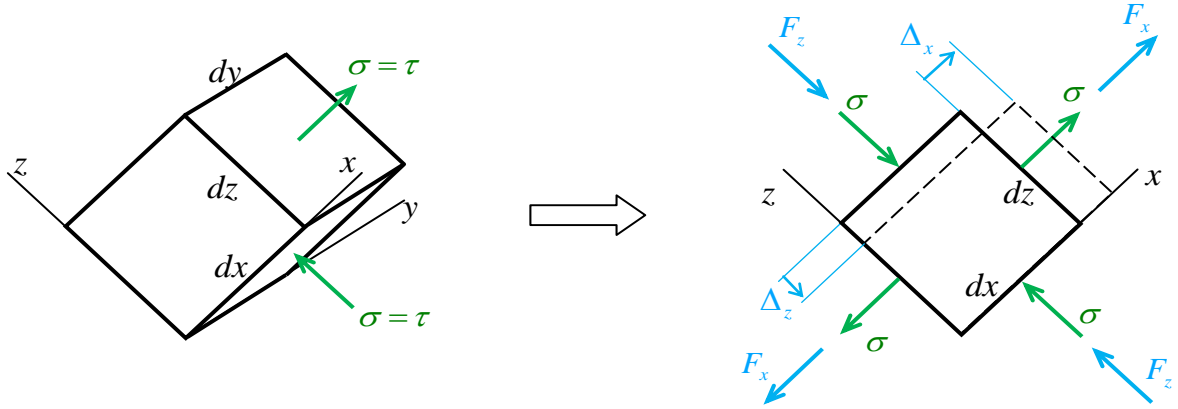
Потенциальная энергия элементарного объёма  $dU$  равна работе сил, действующих на его гранях (коэффициент  $\frac{1}{2}$  отражает пропорциональное возрастание сил и перемещений от нуля до конечных значений при нагружении, см. график):

$$\begin{aligned} dU = dW_{\tau} &= \frac{1}{2} \overbrace{(\tau \cdot dx \cdot dy)}^{\text{сила } F} \cdot \overbrace{(\gamma \cdot dz)}^{\text{перемещение } \Delta} = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \cdot dV \end{aligned}$$

Удельная потенциальная энергия – энергия единицы объёма, своеобразная «плотность энергии» в теле:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \quad (III.3)$$

Формулу удельной потенциальной энергии при чистом сдвиге можно так же вывести, рассматривая работу нормальных сил на гранях элементарного объёма. Рассмотрим рис. III.13б:



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma}{E} + \nu \cdot \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \nu) \quad (\nu - \text{коэффициент Пуассона});$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\sigma}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma}{E} = -\frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \nu);$$

$$\Delta_x = \varepsilon_x \cdot dx = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \nu) \cdot dx;$$

$$\Delta_z = |\varepsilon_z| \cdot dz = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \nu) \cdot dz;$$

$$F_x = \sigma \cdot dz \cdot dy;$$

$$F_z = \sigma \cdot dx \cdot dy;$$

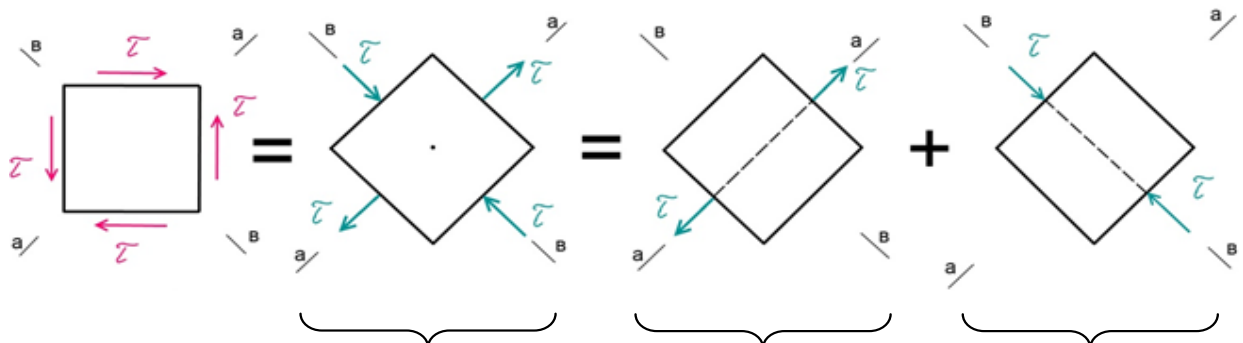
$$\begin{aligned} dU &= dW_\sigma = \frac{1}{2} \cdot F_x \cdot \Delta_x + \frac{1}{2} \cdot F_z \cdot \Delta_z = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma \cdot dz \cdot dy) \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \nu) \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot (\sigma \cdot dx \cdot dy) \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \nu) \cdot dz = \\ &= \frac{\sigma^2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\sigma^2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot dV = \frac{\tau^2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot dV; \end{aligned}$$

$$\boxed{U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{\tau^2 \cdot (1 + \nu)}{E}} \quad (III.4)$$



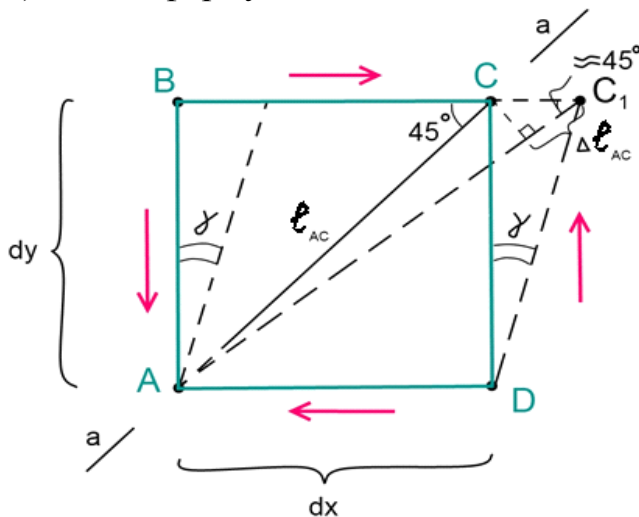
## Связь характеристик упругости материала E, G и ν

а) Линейная деформация в диагональном направлении при чистом сдвиге:



$$\varepsilon_{aa} = \tilde{\varepsilon}_{aa} + \hat{\varepsilon}_{aa} = \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \nu) \quad \tilde{\varepsilon}_{aa} = \frac{\sigma_{aa}}{E} = \frac{\tau}{E} \quad \hat{\varepsilon}_{aa} = -\nu \cdot \frac{\sigma_{bb}}{E} = \nu \cdot \frac{\tau}{E}$$

б) Вывод формулы:



$$dx = dy$$

$$CC_1 = dy \cdot \gamma$$

Длина диагонали:

$$l_{AC} = dy \cdot \sqrt{2}$$

Удлинение диагонали:

$$\Delta l_{AC} \approx CC_1 \cdot \cos 45^\circ = dy \cdot \gamma \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Линейная деформация в диагональном направлении:

$$\begin{cases} \varepsilon_{aa} = \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \nu) & - \text{с одной стороны (см. п. "а")} \\ \varepsilon_{aa} = \frac{\Delta l_{AC}}{l_{AC}} = \frac{\gamma}{2} & - \text{с другой стороны (из определения линейной деформации)} \end{cases}$$

$$\frac{\tau}{E} \cdot (1 + \nu) = \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{G \cdot \cancel{\chi}}{E} \cdot (1 + \nu) = \frac{\cancel{\chi}}{2}$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

(III.5)

(III.5) можно вывести иначе, приравняв формулы удельной потенциальной энергии при чистом сдвиге (III.3) и (III.4) , ведь они выражают одну и ту же величину:

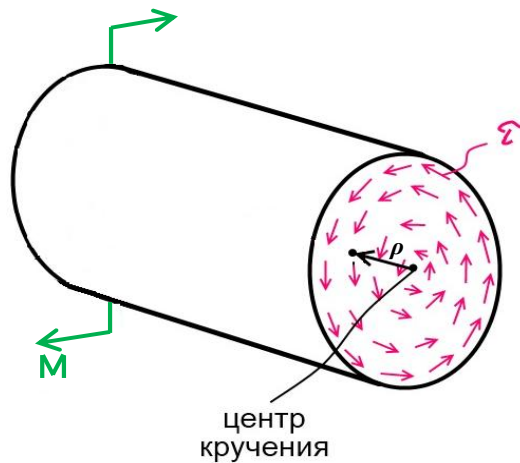
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} = \frac{\tau^2 \cdot (1 + \nu)}{E}$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

## Кручение бруса круглого поперечного сечения

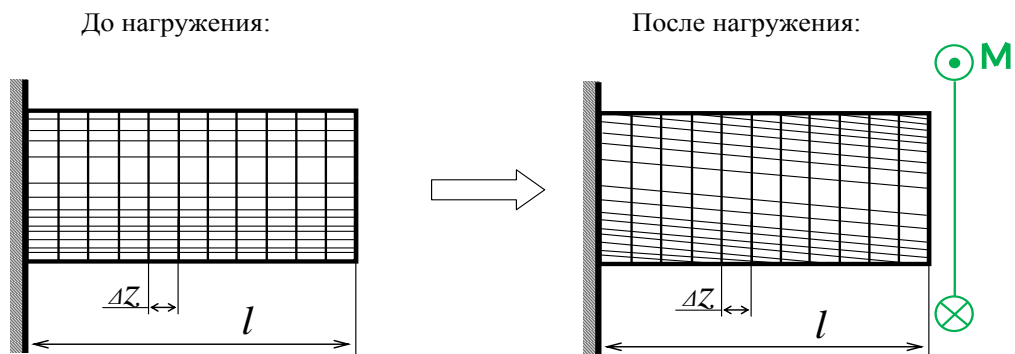
При расчёте круглого бруса на кручение применимы гипотезы:

- 1) **Гипотеза плоских сечений**: поперечные сечения бруса при кручении остаются плоскими;
- 2) **Гипотеза прямых радиусов**: радиус  $\rho$ , проведенный из центра кручения к конкретной точке поперечного сечения, при скручивании остаётся прямым и длины своей не меняет:



то есть, поперечное сечение поворачивается, как жёсткое целое.

Экспериментальные данные также показывают, что при закручивании расстояния между поперечными сечениями не меняются:



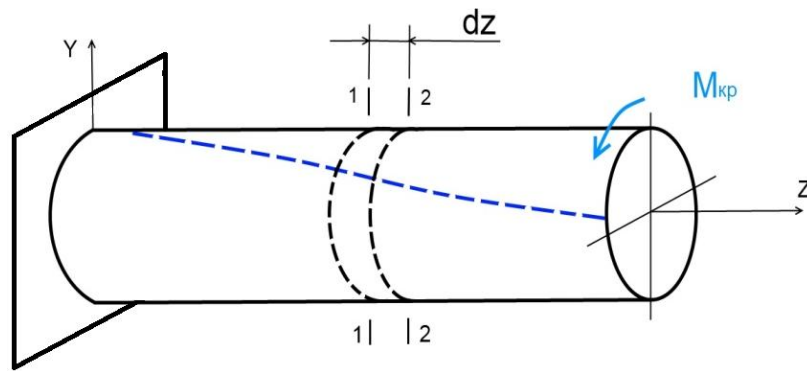


Рис.III.15.

Два бесконечно близких поперечных сечения 1-1 и 2-2, оставаясь плоскими, поворачиваются друг относительно друга на угол  $d\varphi$ :

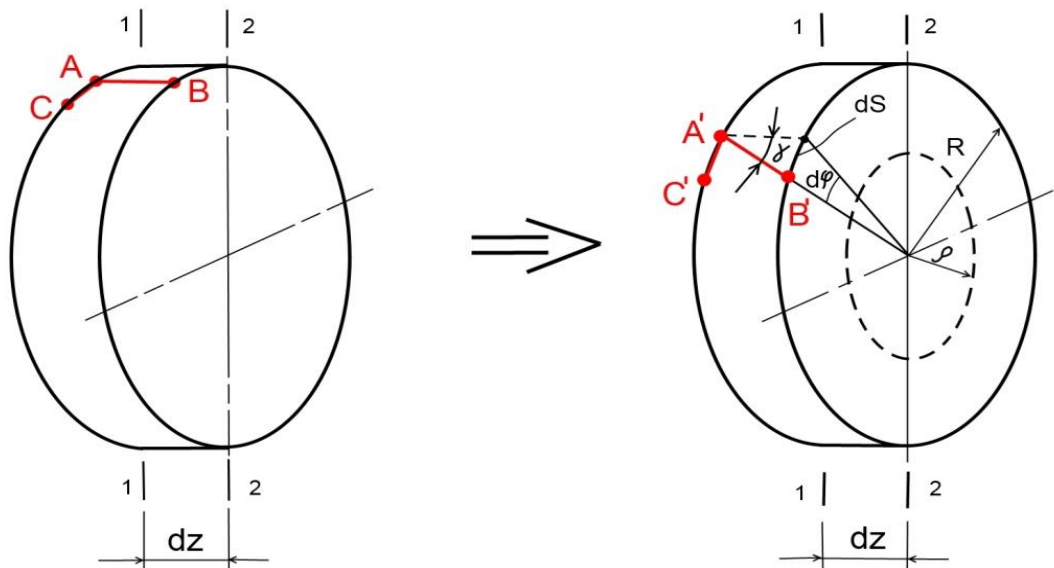


Рис.III.16.

Угловая деформация  $\gamma$  в наружном радиальном слое радиусом R:

$$\begin{cases} dS = R \cdot d\varphi \\ dS = \gamma \cdot dz \end{cases} \Rightarrow R \cdot d\varphi = \gamma \cdot dz \Rightarrow \gamma = R \cdot \frac{d\varphi}{dz}$$

Угловая деформация в произвольном слое радиуса  $\rho$ :

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz} \quad (III.6)$$

Согласно закону Гука, касательные напряжения:

$$\tau = \gamma \cdot G = \rho \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \quad (III.7)$$

то есть, касательные напряжения в круглом поперечном сечении распределены линейно относительно радиуса и не меняются по окружной координате (рис. III.17.). Это же подтверждает гидродинамическая аналогия (рис. III.2.) и мембранная аналогия (рис. III.3.)

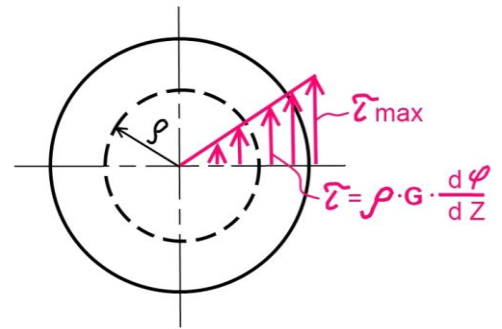
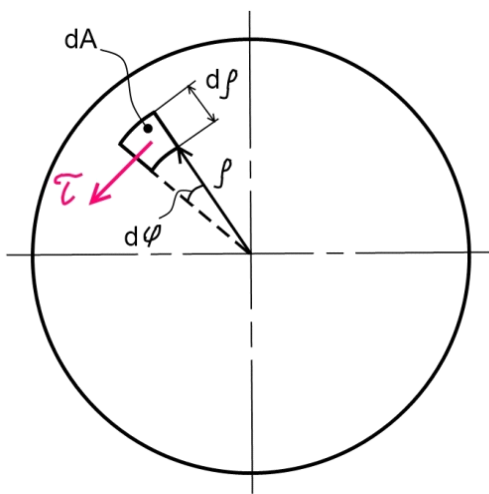


Рис. III.17.

Внутренний крутящий момент  $M_{кр}$  в поперечном сечении стержня есть суммарный результат действия касательных напряжений  $\tau$  в нём:



$$dM_{кр} = \overset{\text{сила}}{dF} \cdot \overset{\text{плечо}}{\rho} = \tau \cdot dA \cdot \rho$$

$$M_{кр} = \int dM_{кр} = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA =$$

$$= \int_A \rho \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho \cdot dA =$$

$$= G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot I_p$$

$$d\varphi = \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p}$$

(III.8)

где

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA \text{ — } \textbf{полярный момент инерции} \text{ поперечного сечения, [ м}^4 \text{ ]}; \quad (III.9)$$

$$G \cdot I_p \text{ — } \textbf{жёсткость стержня при кручении}.$$

$I_p$  вычисляется по формуле, идентичной формуле момента инерции тонкой пластинки единичной плотности (  $1 \text{ кг/м}^2$  ). Поэтому новое наименование коэффициенту придумывать не стали. Назвали «момент инерции», хотя к физическому явлению *инерции*  $I_p$  отношения не имеет.

Расчётные формулы:

Угол поворота произвольного поперечного сечения A:

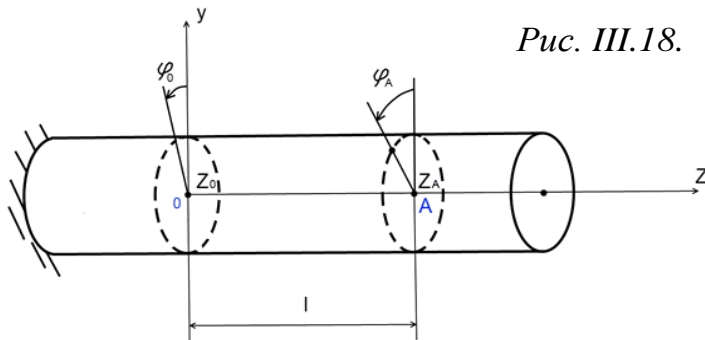


Рис. III.18.

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \varphi_0 + \Delta\varphi_{0A} = \\ &= \varphi_0 + \int_0^l \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p}\end{aligned}$$

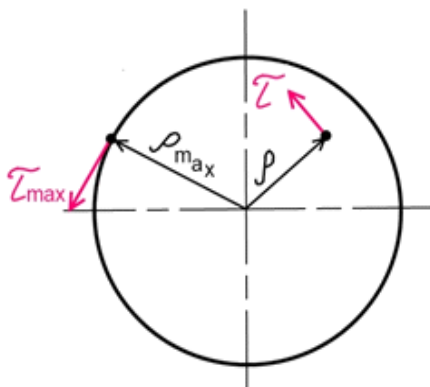
(III.10)

где

$\varphi_0$  — угол поворота поперечного сечения в начале отсчёта;

$\Delta\varphi_{0A} = \int_{z_0}^{z_A} d\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p}$  — угол взаимного поворота поперечных сечений.

Напряжения в произвольном поперечном сечении:



$$\tau = \rho \cdot G \cdot \underbrace{\frac{d\varphi}{dz}}_{(II.8)} = \frac{M_{кр} \cdot \rho}{I_p} \quad (II.8)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \rho_{\max}}{I_p} \quad (III.11)$$

в соответствии с формулой (III.1):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \quad (III.12)$$

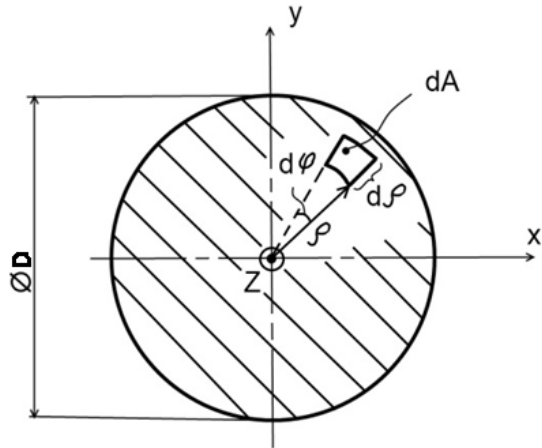
где

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \quad \text{— **полярный момент сопротивления**} \quad (III.13)$$

(момент сопротивления при кручении для круглых и кольцевых поперечных сечений), [м³].

# Геометрические характеристики круглых и кольцевых поперечных сечений при кручении

Круглое поперечное сечение:



Момент инерции элементарной площадки:

$$dI_z = dI_p = \rho^2 \cdot dA = \rho^2 \cdot (\rho \cdot d\phi \cdot d\rho) = \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\phi$$

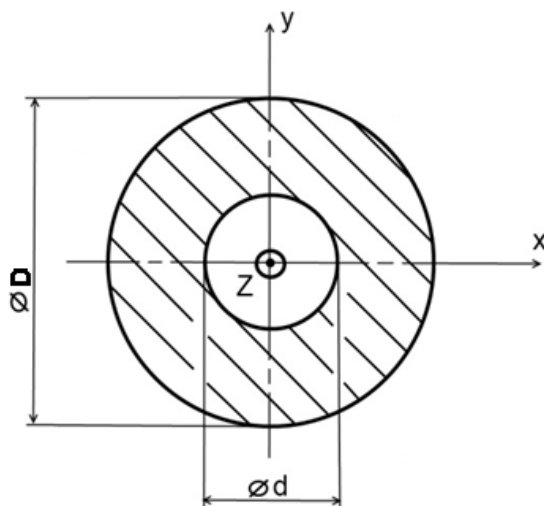
Момент инерции всего сечения — сумма моментов инерции элементарных площадок:

$$I_p = \int dI_p = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\phi = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{D/2} \rho^3 \cdot d\rho = 2 \cdot \pi \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{D/2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \quad (III.14)$$

Полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \quad (III.15)$$

Круглое поперечное сечение с отверстием:



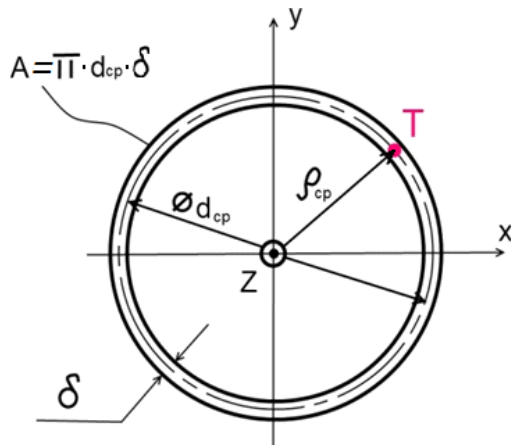
Воспользуемся свойством аддитивности моментов инерции (из момента инерции круга, вычтем момент инерции отверстия):

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \quad (III.16)$$

Полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \quad (III.17)$$

Кольцевое поперечное сечение:



Вспоминаем теоретическую механику: момент инерции тонкого кольца ( $\frac{\delta}{\rho_{cp}} \leq \frac{1}{10}$ ) равен моменту инерции точки **T**, в которой как бы сосредоточена вся масса (в нашем случае - площадь A) кольца:

$$I_p = \rho_{cp}^2 \cdot A = \frac{d_{cp}^2}{4} \cdot \pi \cdot d_{cp} \cdot \delta = \frac{\pi \cdot d_{cp}^3 \cdot \delta}{4} \quad (III.18)$$

Полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} \approx \frac{I_p}{\rho_{cp}} = \frac{\frac{\pi \cdot d_{cp}^3 \cdot \delta}{4}}{\frac{d_{cp}}{2}} = \frac{\pi \cdot d_{cp}^2 \cdot \delta}{2}, \quad [M^3] \quad (III.19)$$



## Работа внешних моментов

Внешние моменты совершают работу на угловых перемещениях (то есть, поворотах) поперечных сечений, к которым они приложены:

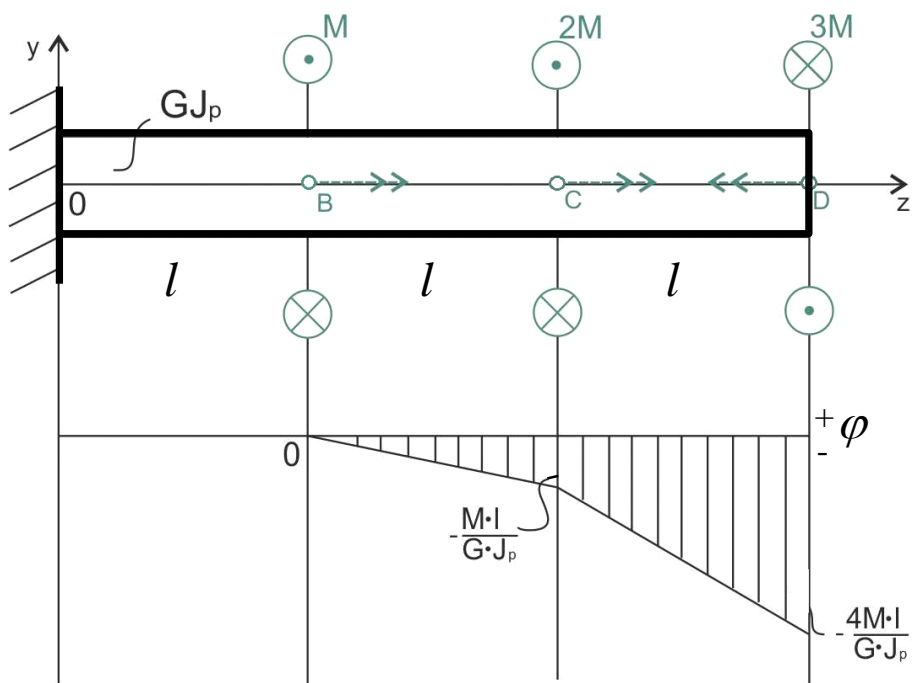


Рис. III.19.

$$A_{M_B} = 0$$

$$A_{M_c} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot M \cdot \left( -\frac{M \cdot l}{G \cdot I_p} \right) = -\frac{M^2 \cdot l}{G \cdot I_p}$$

$$A_{M_D} = \frac{1}{2} \cdot (-3 \cdot M) \cdot \left( -\frac{4 \cdot M \cdot l}{G \cdot I_p} \right) = \frac{6 \cdot M^2 \cdot l}{G \cdot I_p}$$

$$A = A_{M_B} + A_{M_c} + A_{M_D} = 0 - \frac{M^2 \cdot l}{G \cdot I_p} + \frac{6 \cdot M^2 \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{5 \cdot M^2 \cdot l}{G \cdot I_p}$$

Коэффициент  $\frac{1}{2}$  имеет здесь ту же природу, что и в работе внешних сил при растяжении (сжатии).

## Потенциальная энергия деформации при кручении

Исходим из тех же предположений, что и при растяжении-сжатии: в деформированном упругом теле накопилась потенциальная энергия, равная работе внутренних моментов при нагружении на поворотах поперечных сечений стержня:

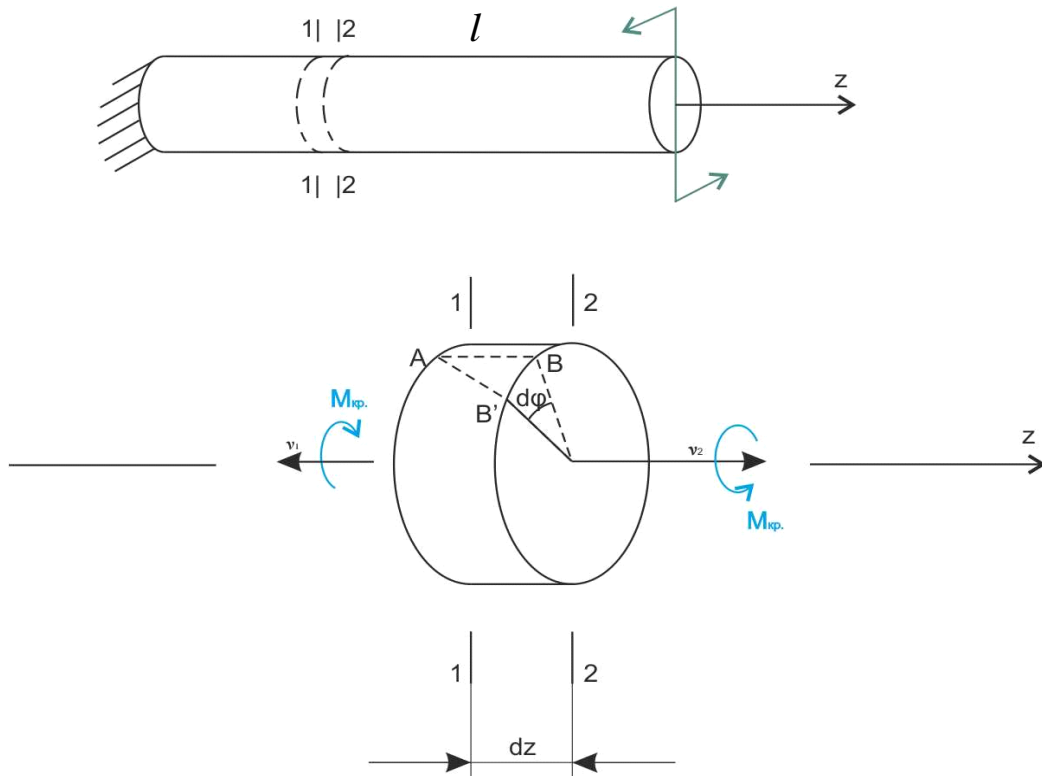


Рис. III.20.

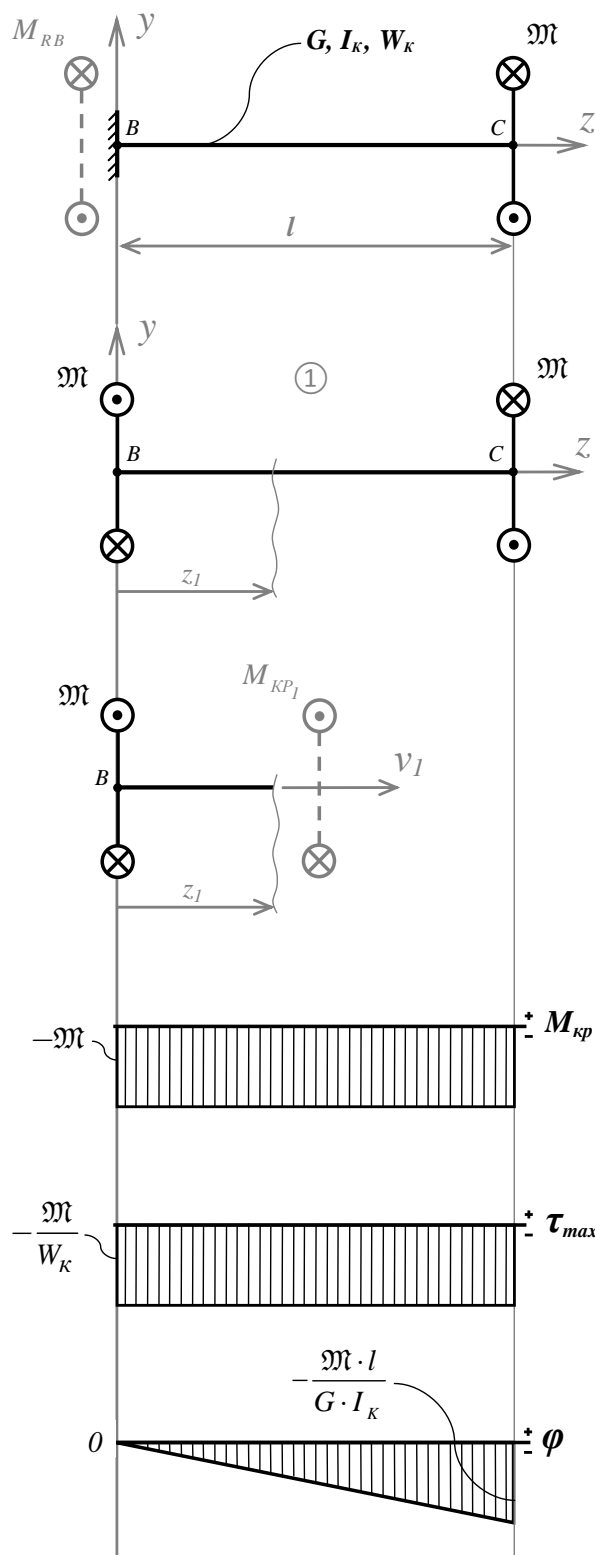
Рассмотрим два бесконечно близких поперечных сечения стержня 1-1 и 2-2 на расстоянии  $dz$  друг от друга (рис. III.20.). При скручивании стержня, сечения повернутся друг относительно друга на угол  $d\varphi$ . Работа внутреннего момента  $M_{кр}$  на этом повороте:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M_{кр} \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot M_{кр} \cdot \overbrace{\left( \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p} \right)}^{d\varphi \text{ по (III.7)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{кр}^2 \cdot dz}{G \cdot I_p}$$

А для всего стержня:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр}^2}{2 \cdot G \cdot I_p} \cdot dz \quad (III.20)$$

Пример III.1 :



Дано:  $l, \mathfrak{M}, G, I_K, W_K$

Найти:  $M_{KP}, \tau_{max}, \varphi, A, U$

$$\sum M_z = 0 = -M_{RB} - \mathfrak{M}$$

$$M_{RB} = -\mathfrak{M}$$

$$\sum M_{V_I} = 0 = -\mathfrak{M} - M_{KP_I}$$

$$M_{KP_I} = -\mathfrak{M}$$

$$\tau_{max_I} = \frac{M_{KP_I}}{W_{K_I}} = -\frac{\mathfrak{M}}{W_K}$$

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \varphi_0^{кон} + \int_0^{z_I} \frac{M_{KP_I} \cdot dz_I}{G_I \cdot I_{K_I}} = \\ &= -\int_0^{z_I} \frac{\mathfrak{M} \cdot dz_I}{G \cdot I_K} = -\frac{\mathfrak{M} \cdot z_I}{G \cdot I_K} \end{aligned}$$

$$z_I = 0: \varphi_I^{нач} = 0$$

$$z_I = l: \varphi_I^{кон} = -\frac{\mathfrak{M} \cdot l}{G \cdot I_K}$$

Работа внешних моментов:

$$A = \sum_j \frac{1}{2} \cdot M_j \cdot \varphi_j =$$

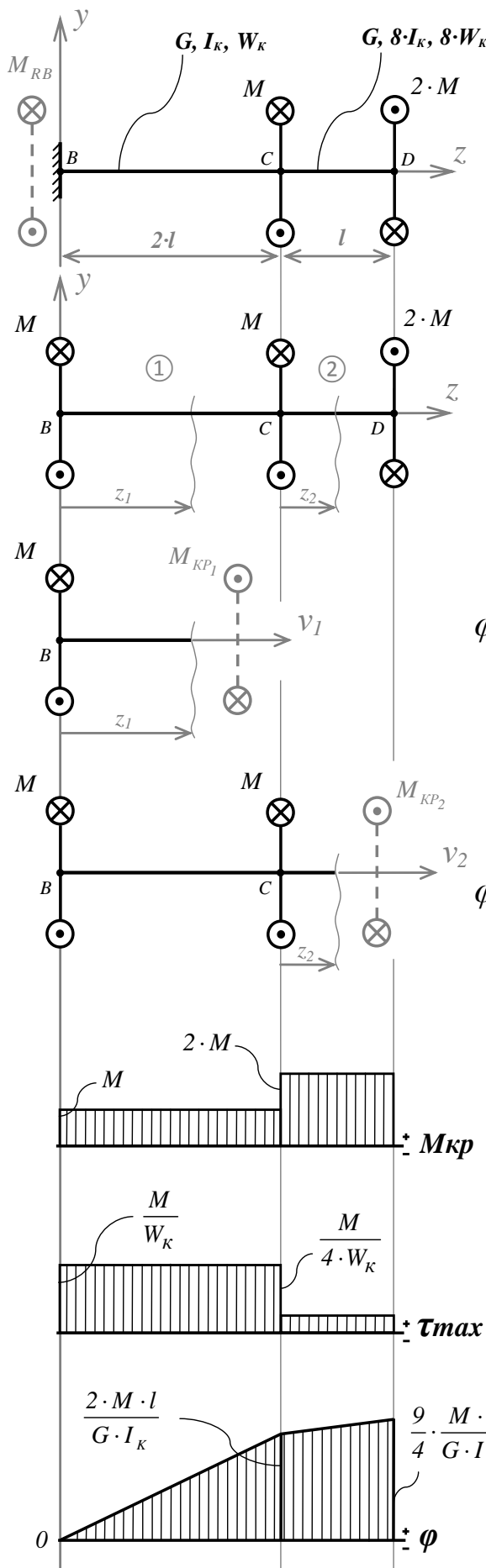
$$= \frac{1}{2} \cdot M_B \cdot \varphi_B + \frac{1}{2} \cdot M_C \cdot \varphi_C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{M} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-\mathfrak{M}) \cdot \left( -\frac{\mathfrak{M} \cdot l}{G \cdot I_K} \right) = \frac{\mathfrak{M}^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_K}$$

Потенциальная энергия деформации:  $U = \sum_i \frac{M_{KP_i}^2 \cdot l_i}{2 \cdot G_i \cdot I_{K_i}} = \frac{M_{KP_I}^2 \cdot l_I}{2 \cdot G_I \cdot I_{K_I}} = \frac{\mathfrak{M}^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_K}$

Видим:  $A = U$  - так и должно быть в упругих ненагретых системах.

Пример III.2 :



Дано:  $l, M, G, I_{\kappa}, W_{\kappa}$

Найти:  $M_{кр}, \tau_{max}, \varphi, A, U$

$$\sum M_z = 0 = -M_{RB} - M + 2 \cdot M \Rightarrow M_{RB} = M$$

$$\sum M_{V_1} = 0 = M - M_{кр1} \Rightarrow M_{кр1} = M$$

$$\sum M_{V_2} = 0 = -M - M + M_{кр2} \Rightarrow M_{кр2} = 2 \cdot M$$

$$\tau_{max1} = \frac{M_{кр1}}{W_{\kappa1}} = \frac{M}{W_{\kappa}}$$

$$\tau_{max2} = \frac{M_{кр2}}{W_{\kappa2}} = \frac{2 \cdot M}{8 \cdot W_{\kappa}} = \frac{M}{4 \cdot W_{\kappa}}$$

$$\varphi_1 = \varphi_0^{коп} + \int_0^{z_1} \frac{M_{кр1} \cdot dz_1}{G_1 \cdot I_{\kappa1}} = \int_0^{z_1} \frac{M \cdot dz_1}{G \cdot I_{\kappa}} = \frac{M \cdot z_1}{G \cdot I_{\kappa}}$$

$$z_1 = 0: \quad \varphi_1^{нач} = 0$$

$$z_1 = 2 \cdot l: \quad \varphi_1^{коп} = \frac{2 \cdot M \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1^{коп} + \int_0^{z_2} \frac{M_{кр2} \cdot dz_2}{G_2 \cdot I_{\kappa2}} = \frac{2 \cdot M \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}} + \int_0^{z_2} \frac{2 \cdot M \cdot dz_2}{8 \cdot G \cdot I_{\kappa}} = \frac{2 \cdot M \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}} + \frac{M \cdot z_2}{4 \cdot G \cdot I_{\kappa}}$$

$$z_2 = 0: \quad \varphi_2^{нач} = \frac{2 \cdot M \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}}$$

$$z_2 = l: \quad \varphi_2^{коп} = \frac{9}{4} \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (-M) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-M) \cdot \frac{2 \cdot M \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot M \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{M^2 \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}}$$

$$U = \frac{M^2 \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_{\kappa}} + \frac{(2 \cdot M)^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot 8 \cdot I_{\kappa}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{M^2 \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}}$$

$$A = U$$

## Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения

Стержень любого сплошного некруглого поперечного сечения при закручивании подвержен **депланациям**: сечения *депланируют* (букв. «выходят из плоскости»), то есть их точки перемещаются вдоль оси стержня в различных направлениях:

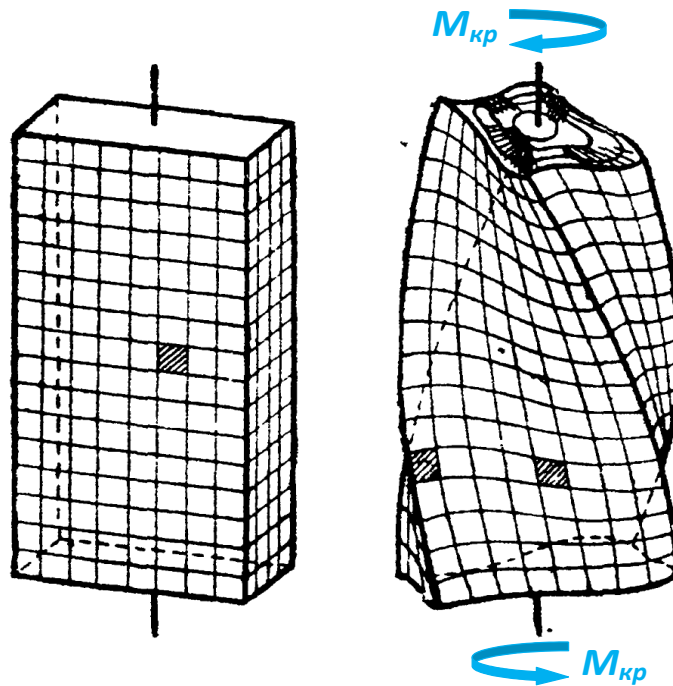


Рис. III.21.

Длина оси стержня при этом всё равно не меняется, ибо осевые перемещения его точек попарно скомпенсированы.

**Стеснённым** называется кручение стержня, депланации которого принудительно сдерживаются (например, двумя заделками по краям, которые позволяют стержню вращаться, но не позволяют искривляться двум торцевым сечениям). При этом в точках стержня возникают различные осевые нормальные напряжения  $\sigma$  (также скомпенсированные,  $N=0$  по-прежнему), и дополнительный внутренний крутящий момент из-за чего крутильная жёсткость стержня существенно увеличивается. При стеснённом кручении в стержне возникают не только касательные напряжения, но и напряжения нормальные вдоль его оси.

**Свободным** (или чистым) называется кручение стержня, при котором деформации ничем не стесняются, точки вдоль оси перемещаются свободно. Именно такое кручение будет рассмотрено далее.

Распределение напряжений  $\tau$  по поперечному сечению показывает гидродинамическая аналогия и методы теории упругости:

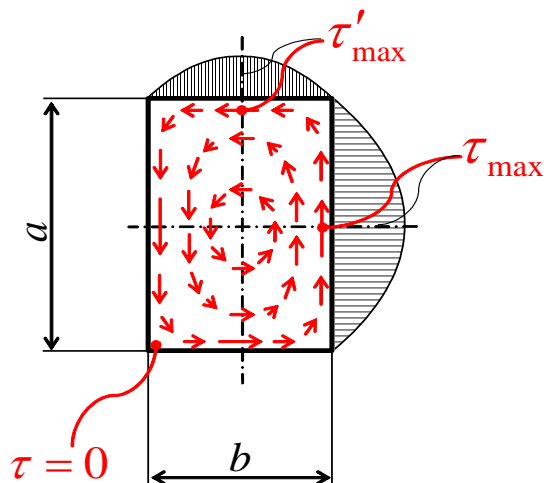


Рис. III.21.

Максимальные касательные напряжения возникают по серединам сторон прямоугольника.

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_K} ; \quad \tau'_{\max} = \eta \cdot \tau_{\max}$$

$$W_K = \alpha \cdot a \cdot b^2 \quad (III.21)$$

$$I_K = \beta \cdot a \cdot b^3 \quad (III.22)$$

Здесь  $b$  – всегда меньшая из сторон прямоугольника.

Таблица III.1

$\frac{a}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	$\frac{1}{3}$
$\eta$	1	0,859	0,82	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	$\frac{1}{3}$

## Кручение стержня тонкостенного замкнутого поперечного сечения

Гипотезы:

- 1) Касательные напряжения  $\tau$  направлены вдоль средней линии стенки;
- 2) По толщине стенки напряжения не меняются.

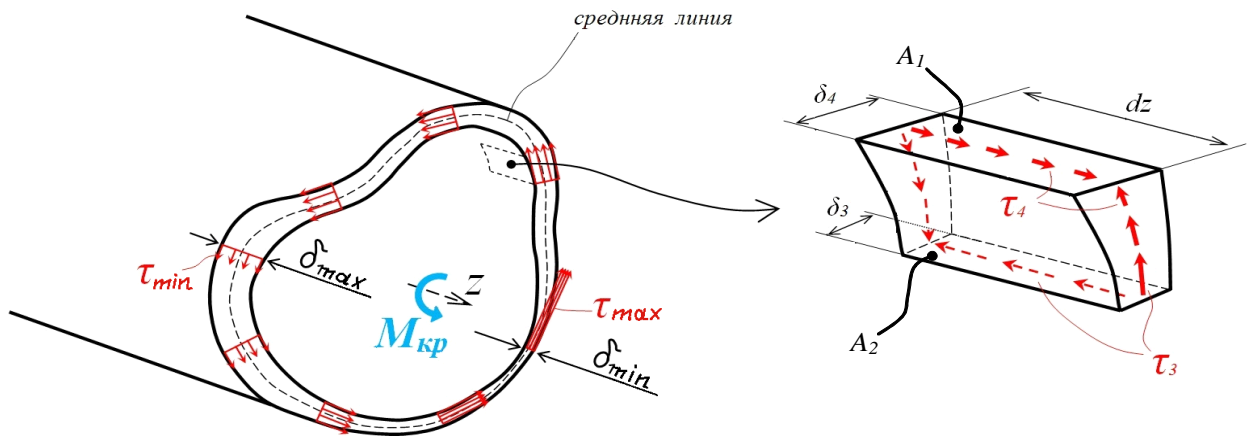


Рис. III.22.

Вспомогательная теорема:

*Произведение среднего напряжения на соответствующую толщину стенки в любом месте профиля есть величина постоянная:*

$$\tau \cdot \delta = const \quad (III.23)$$

Доказательство:

Из закрученного бруса выделим элемент двумя продольными и двумя поперечными сечениями (рис. III.22.). Полагаем, что по длине бруса толщина его стенки не меняется. Одно из условий равновесия элемента:

$$\Sigma F_z = 0 = \tau_3 \cdot A_3 - \tau_4 \cdot A_4$$

$$0 = \tau_3 \cdot \delta_3 \cdot \cancel{dz} - \tau_4 \cdot \delta_4 \cdot \cancel{dz}$$

$$\tau_3 \cdot \delta_3 = \tau_4 \cdot \delta_4 \quad \blacktriangledown$$

Из вспомогательной теоремы следует, что наибольшее напряжение  $\tau_{\max}$  в сечении тонкостенного замкнутого профиля будет в участке с наименьшей толщиной (рис. III.22.).

## Момент сопротивления при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_K}$$

$$W_K = ?$$

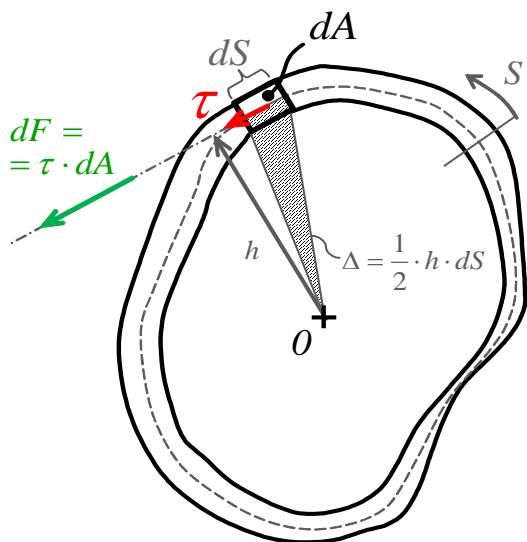


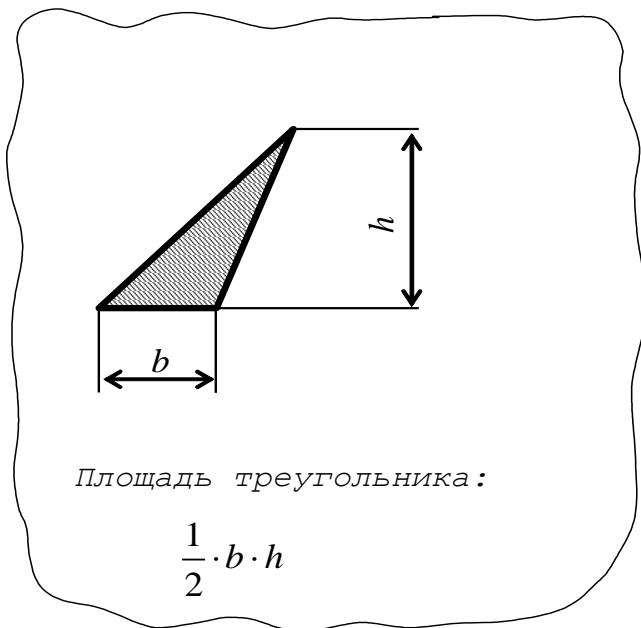
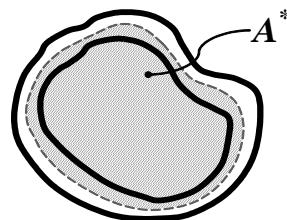
Рис. III.23.

O – центр кручения

$$dM_{\text{кр}} = \overset{\text{сила}}{dF} \cdot \overset{\text{плечо}}{h} = \tau \cdot dA \cdot h = \tau \cdot dS \cdot \delta \cdot h$$

$$M_{\text{кр}} = \int dM_{\text{кр}} = \oint_S \tau \cdot \delta \cdot h \cdot ds = \tau \cdot \delta \cdot \oint_S \underbrace{h \cdot dS}_{2 \cdot \Delta} = \tau \cdot \delta \cdot 2 \cdot A^*$$

где  $A^*$  – площадь, ограниченная средней линией контура:



Таким образом:

$$M_{\text{кр}} = \tau \cdot \delta \cdot 2 \cdot A^*$$

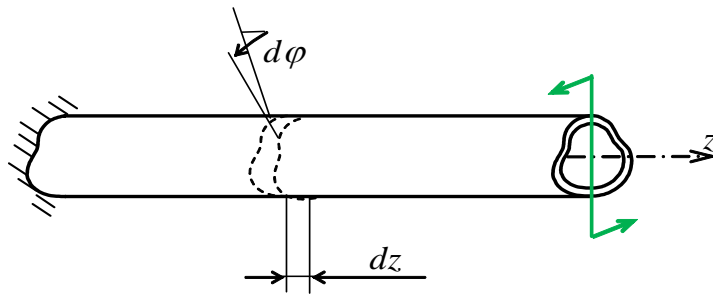
$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{2 \cdot A^* \cdot \delta_{\min}} \quad (\text{III.24})$$

⇓

$$W_K = 2 \cdot A^* \cdot \delta_{\min} \quad (\text{III.25})$$



## Геометрическая жёсткость при кручении:

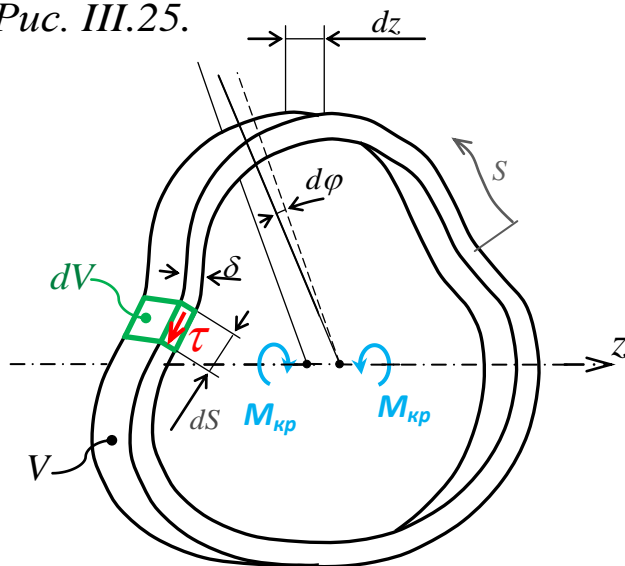


$$d\varphi = \frac{M_{kp} \cdot dz}{G \cdot I_K}$$

Рис. III.24.

$I_K = ?$  – **геометрическая жесткость при кручении**, аналог  $I_p$  для круглого поперечного сечения.

Рис. III.25.



Вычислим потенциальную энергию деформации  $\Delta U$ , накопленную в материале стержня между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями (рис. III.24., III.25.):

С одной стороны:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \cdot M_{kp} \cdot d\varphi$$

с другой:

$$\Delta U = \int_V U_0 \cdot dV = \oint_S \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G}}_{U_0} \cdot \underbrace{dS \cdot \delta \cdot dz}_{dV} = \frac{dz}{2 \cdot G} \cdot \oint_S \tau^2 \cdot \delta \cdot dS = \frac{M_{kp}^2 \cdot dz}{2 \cdot 4 \cdot G \cdot (A^*)^2} \cdot \oint_S \frac{dS}{\delta}$$

⇓

$$d\varphi = \frac{M_{kp} \cdot dz}{G \cdot \underbrace{\oint_S \frac{dS}{\delta}}_{I_K}}$$

$$I_K = \frac{4 \cdot A^{*2}}{\oint_S \frac{dS}{\delta}}$$

(III.26)

## Кручение стержня тонкостенного разомкнутого поперечного сечения

Разомкнутые тонкостенные профили так же, как и сплошные некруглые склоны к депланациям (рис. III.26.). Ограничимся рассмотрением свободного кручения.

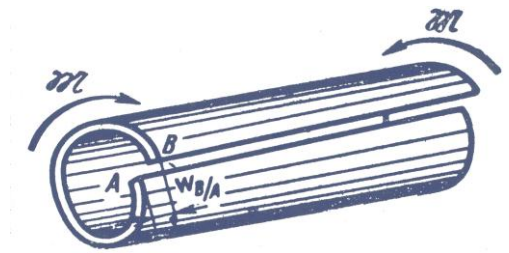


Рис. III.26.

Мембранная аналогия (рис. III.5.) показывает: угол наклона наддутой плёнки (аналог касательного напряжения при кручении) зависит от толщины стенки профиля и не зависит от того, каким образом профиль изогнут и изогнут ли он вообще.

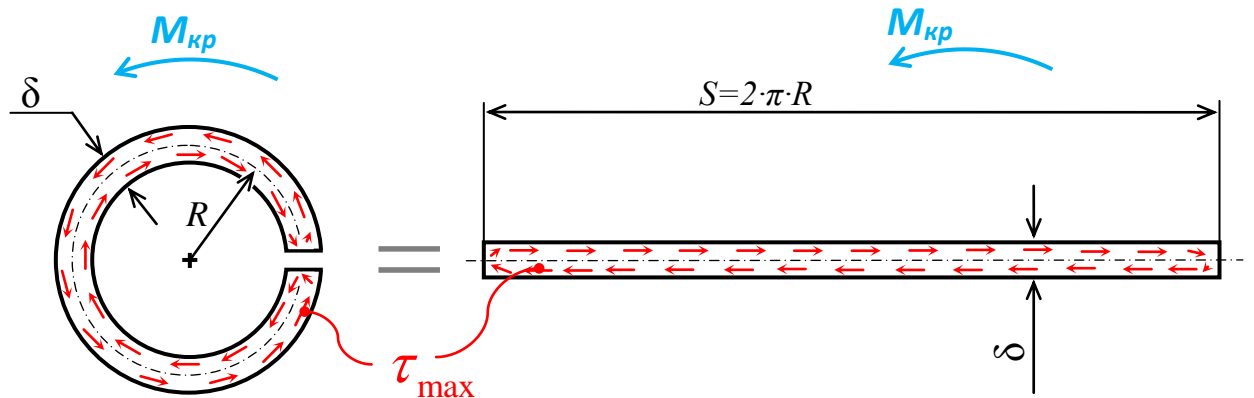


Рис. III.27.

Таким образом, если незамкнутый тонкостенный профиль может быть развернут в прямоугольник, то и его геометрические характеристики при кручении считаются также, как для прямоугольного профиля с соотношением сторон  $\frac{a}{b} = \infty$  (см. табл. III.1).

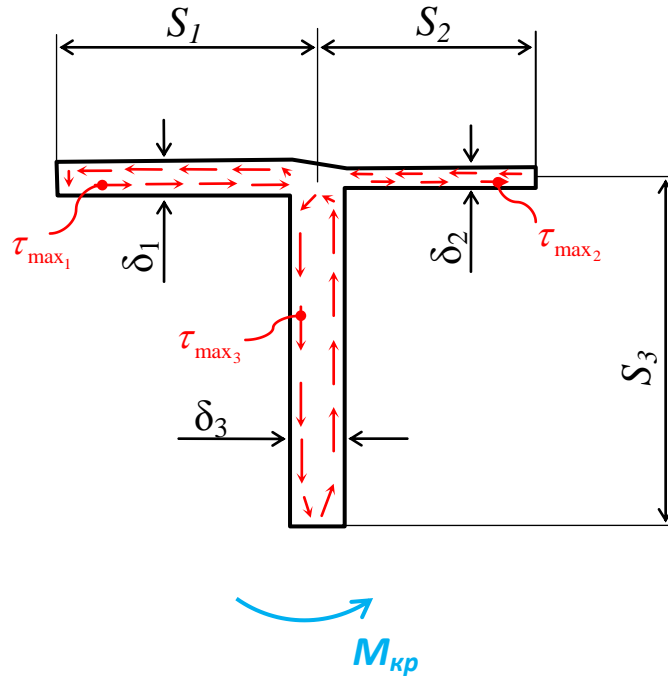
$$I_K = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \delta^3$$

(III.27)

$$W_K = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \delta^2$$

(III.28)

Части составного тонкостенного профиля ведут себя при кручении, как самостоятельные прямоугольные профили, объединённые единственным условием: поворачиваются они, как жёсткое целое. Так, для профиля, изображённого на *рис. III.28.*:  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$



*Рис. III.28.*

Соответственно, внутренний крутящий момент всего сечения рассматривают, как сумму внутренних крутящих моментов в каждой части:

$$\begin{aligned}
 M_{кр} &= M_{кр1} + M_{кр2} + M_{кр3} \\
 \left( \varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_K} \right) &\Downarrow \\
 \cancel{\varphi} \cdot \cancel{G} \cdot I_K &= \frac{\cancel{\varphi}_1 \cdot \cancel{G} \cdot I_{K1}}{\cancel{\lambda}} + \frac{\cancel{\varphi}_2 \cdot \cancel{G} \cdot I_{K2}}{\cancel{\lambda}} + \frac{\cancel{\varphi}_3 \cdot \cancel{G} \cdot I_{K3}}{\cancel{\lambda}} \\
 &\Downarrow \\
 I_K &= I_{K1} + I_{K2} + I_{K3}
 \end{aligned}$$

Здесь  $l$  – длина стержня рассматриваемого сечения.

В общем случае для тонкостенного разомкнутого профиля, состоящего из  $i$  частей:

$$\boxed{I_K = \sum_i I_{Ki} = \sum_i \left( \frac{1}{3} \cdot S_i \cdot \delta_i^3 \right)} \quad (III.29)$$

Доля внутреннего крутящего момента в  $i$ -й части открытого профиля:

$$M_{\text{кр}i} = \frac{\varphi_i \cdot G \cdot I_{Ki}}{l} = \frac{\varphi \cdot G \cdot I_{Ki}}{l} = \frac{\frac{M_{\text{кр}} \cdot \lambda}{G \cdot I_K} \cdot G \cdot I_{Ki}}{\lambda} = M_{\text{кр}} \cdot \frac{I_{Ki}}{I_K}$$

Максимальное касательное напряжение в  $i$ -й части открытого профиля:

$$\tau_{\text{max}i} = \frac{M_{\text{кр}i}}{W_{Ki}} = \frac{M_{\text{кр}} \cdot \frac{I_{Ki}}{I_K}}{W_{Ki}} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_K} \cdot \frac{I_{Ki}}{W_{Ki}} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_K} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \delta_i^3 \cdot S_i}{\frac{1}{3} \cdot \delta_i^2 \cdot S_i} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_K} \cdot \delta_i$$

Видно, что наибольшее напряжение  $\tau_{\text{max}}$  в сечении тонкостенного разомкнутого профиля будет в участке с *наибольшей* толщиной.

$$\boxed{W_K = \frac{I_K}{\delta_{\text{max}}}} \quad (III.30)$$

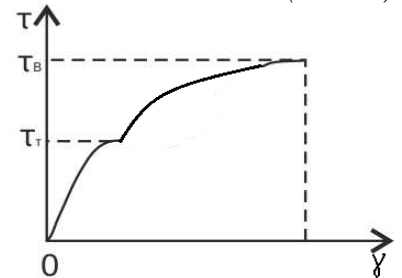
### Расчёт на прочность при кручении.

Принципиально ничем не отличается от расчёта на прочность при растяжении-сжатии:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{пред}} \quad (III.31)$$

$\tau_{\text{пред}} = \tau_T$  — для пластичных материалов;

$\tau_{\text{пред}} = \tau_B$  — для хрупких материалов.



Расчётный коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{\tau_{\text{пред}}}{\tau_{\max}} \quad (III.32)$$

Нормативный коэффициент запаса прочности:

$$[n] = n_{\min} \quad \text{— установлен законодательно} \quad (III.33)$$

Условие гарантированного неразрушения конструкции:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (III.34)$$

где

$$[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{[n]} \quad \text{— допустимое напряжение.}$$



В процессе создания, конструкция проходит через два расчёта:

- I) Проектировочный;
- II) Проверочный.