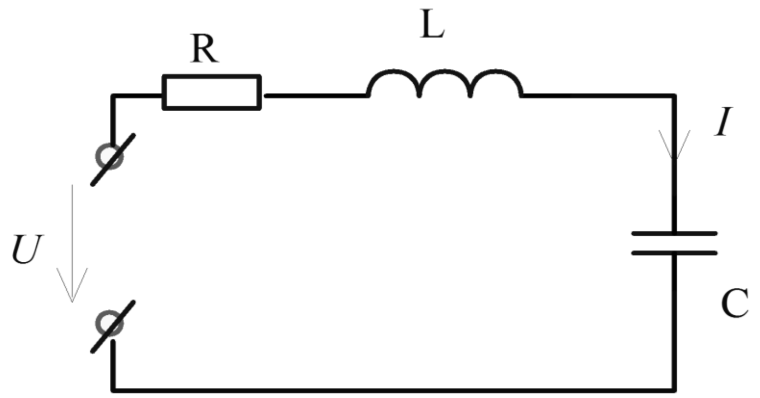
Аналоговая электроника.

Резонансные явления в цепях переменного синусоидального тока

Трехфазные цепи переменного синусоидального тока.

Последовательный контур

По второму правилу Кирхгофа в символической форме:



$$\dot{U} = \dot{I} \cdot Z = \dot{I}(r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C})$$

При $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ $Z = r$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

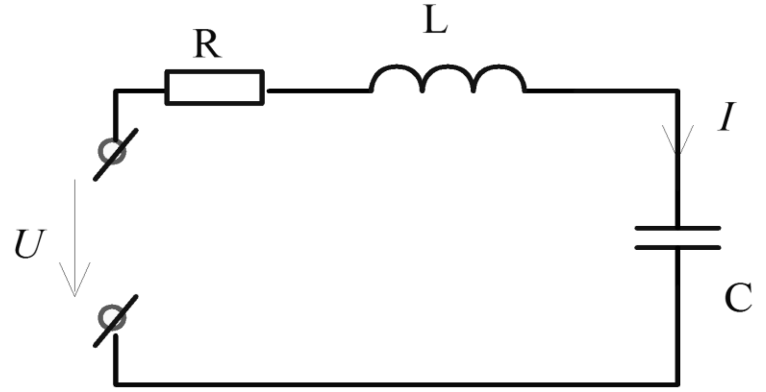
При отсутствии потерь $\frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{L \cdot I^2}{2}$ отсюда $\frac{U}{I} = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Эта величина называется характеристическим сопротивлением контура.

Пример.

Пусть U=10 В, R=1 Ом, X_L=X_C=100 Ом для резонансной частоты.

Рассчитать ток и напряжения на элементах контура при работе на резонансной частоте.



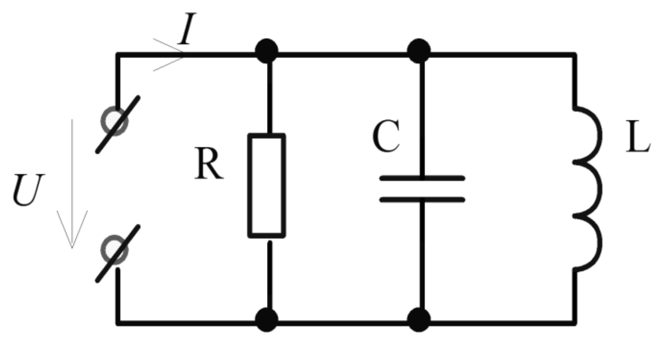
$$I = \frac{U}{R} = 10\ A$$

$$|U_L| = |U_C| = XI = 1000\ \text{В}$$

Процесс в последовательном контуре называют резонансом напряжений.

Параллельный контур

По первому правилу Кирхгофа:



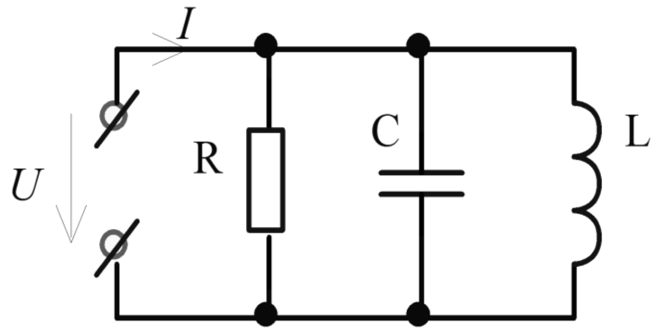
$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L = \dot{U} \cdot (G + j(B_C - B_L))$$

При $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ $\quad Y = G = {}^{1}/_{R}$ $\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Величина $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}$ называется характеристической проводимостью контура

Пример

Пусть в схеме *U=100 В, G=0.1 См,* B_L=B_C*=10 См на резонансной частоте*.
Определить ток в элементах контура при работе на резонансной частоте.



$$I = UG = 10\ A$$

$$|I_L| = |I_C| = UB = 1000\ A$$

Процесс в параллельном контуре называют резонансом токов.

Параметры колебательных контуров

- Собственная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- Характеристическое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

- И характеристическая проводимость

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C$$

Параметры колебательных контуров

- Добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot W}{P_d}$$

W - энергия запасенная в системе, P_d - рассеиваемая мощность

Для последовательного контура

$$Q = \frac{\rho}{r} = \frac{\omega_0 L}{r}$$

Для параллельного контура

$$Q = \frac{\gamma}{G} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

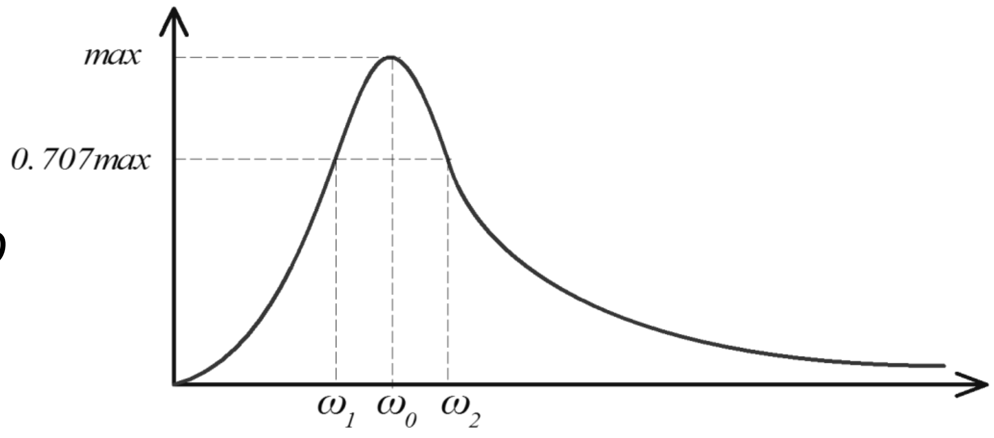
- Затухание

$$D = {}^{1}/_{Q}$$

Параметры колебательных контуров

- Последовательное и параллельное сопротивление потерь

$$R = \frac{\rho^2}{r}$$



- Полоса пропускания контура

$$\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| = \frac{\omega_0}{Q} = \omega_0 \cdot D$$

- Коэффициент затухания

$$\frac{U(t)}{U(t+T)} = e^{\beta t}$$

- Постоянная времени

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

это время за которое амплитуда колебания уменьшается в e раз.

Резонанс в сложной цепи

- Количество резонансов - $m + n - 1$

m - количество конденсаторов,

n - количество индуктивностей

Резонансы напряжений и токов будут чередоваться.

$$Im\{Z(\omega)\} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \qquad Im\{Y(\omega)\} = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Резонансы напряжений

$$P(\omega) = 0$$

Резонансы токов

$$Q(\omega) = 0$$

Пример.

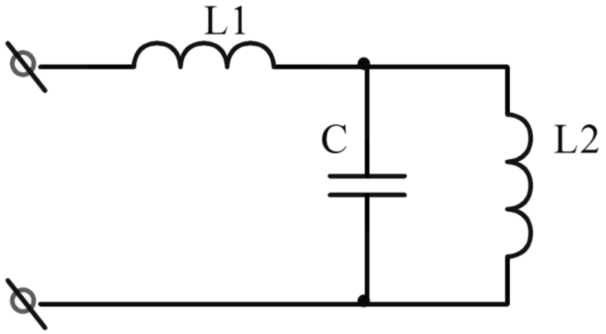
Найти резонансные частоты сложной цепи.

$$Im\{Z(\omega)\} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega \frac{L_1 - \omega^2 L_1 L_2 C + L_2}{1 - \omega^2 L_2 C}$$

Резонансы напряжений

$$P(\omega) = L_1 - \omega^2 L_1 L_2 C + L_2 = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$$



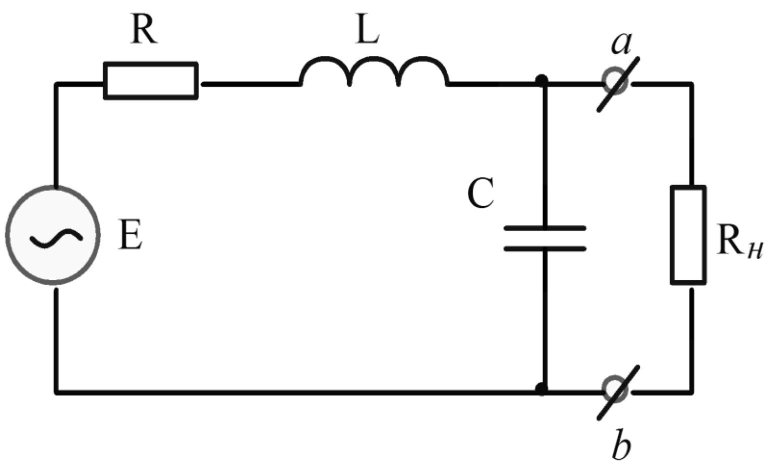
Резонансы токов

$$Q(\omega) = 1 - \omega^2 L_2 C = 0$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$$

Нагруженный резонансный контур

$$Z = R + j\omega L + \frac{R_{\text{н}}\dfrac{1}{j\omega C}}{R_{\text{н}} + \dfrac{1}{j\omega C}} = R + j\omega L + \frac{R_{\text{н}}}{j\omega C R_{\text{н}} + 1} =$$



$$= R + \frac{R_{\text{н}}}{\omega^2 C^2 R_{\text{н}}^2 + 1} + j(\omega L - \frac{\omega C {R_{\text{н}}}^2}{\omega^2 C^2 R_{\text{н}}^2 + 1})$$

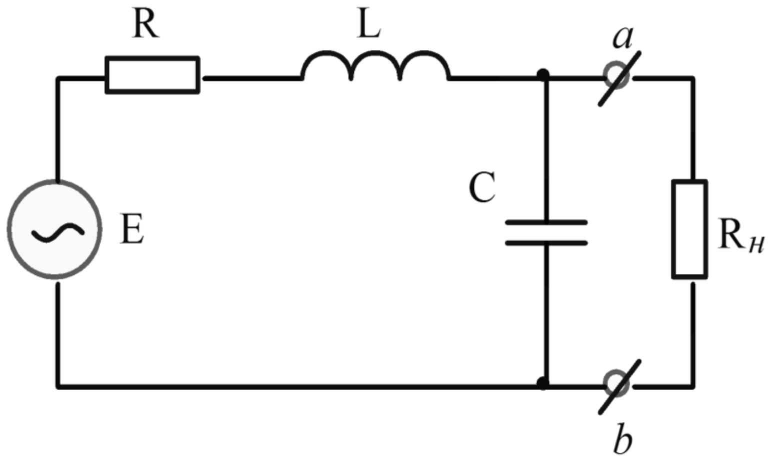
$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}\cdot(1 - \frac{L}{C{R_{\text{н}}}^2})} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{{R_{\text{н}}}^2}}$$

$$r_{\text{потерь}} = R + \frac{R_{\text{н}}}{\omega^2 C^2 R_{\text{н}}^2 + 1} \cong R + \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{н}}^2/\rho^2 + 1} \cong R + \frac{\rho^2}{R_{\text{н}}} \quad \text{если } \omega = \omega_0 \text{ и } R_{\text{н}}^2/\rho^2 \gg 1$$

Нагруженный резонансный контур

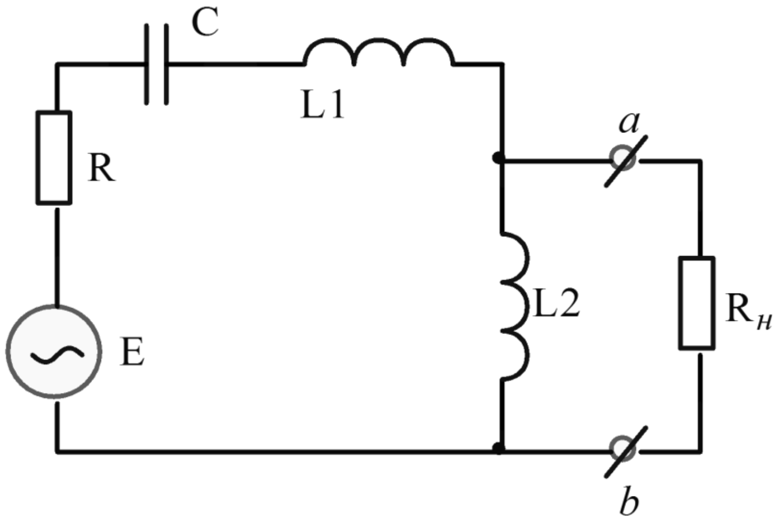
$$Z_{ab} = \frac{(R + j\omega L)\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{R}{j\omega C} + \frac{L}{C}}{R} = \rho(\frac{\rho}{R} - j) \cong \frac{\rho^2}{R}$$

$$|Z_{ab}| = R_{\text{н}}$$



Частичное включение

$$k = {}^{L}\!/_{L2} \qquad L1 = (1-k)L$$



$$X_C = X_{L1} + X_{L2}$$

$$Z_{ab} = \frac{j\omega_0 kL(R - \dfrac{j}{\omega_0 C} + j\omega_0(1-k)L)}{R} =$$

$$= \frac{jk\rho(R - jk\rho)}{R} = k^2\rho(Q - \frac{j}{k}) \cong k^2\frac{\rho^2}{R}$$

Частичное включение

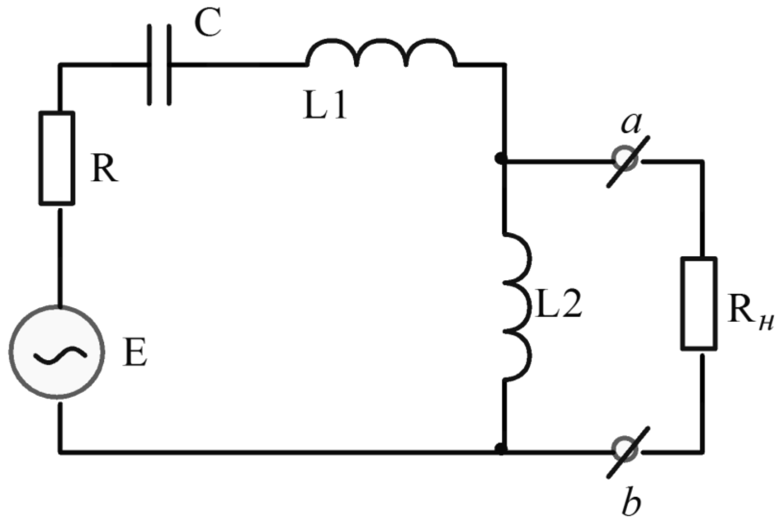
На резонансной частоте $X_C = X_{L1} + X_{L2}$

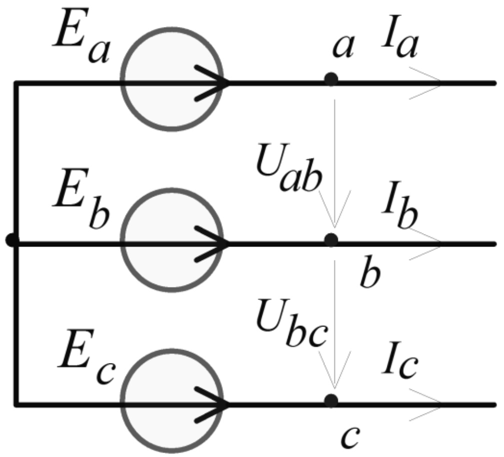
$$Z_{ab} = \frac{jX_{L2}(R - jX_C + jX_{L1})}{R - jX_C + j(X_{L1} + X_{L2})} = \frac{j\omega_0 kL(R - \frac{j}{\omega_0 C} + j\omega_0(1-k)L)}{R} = \frac{jk\rho(R - jk\rho)}{R}$$

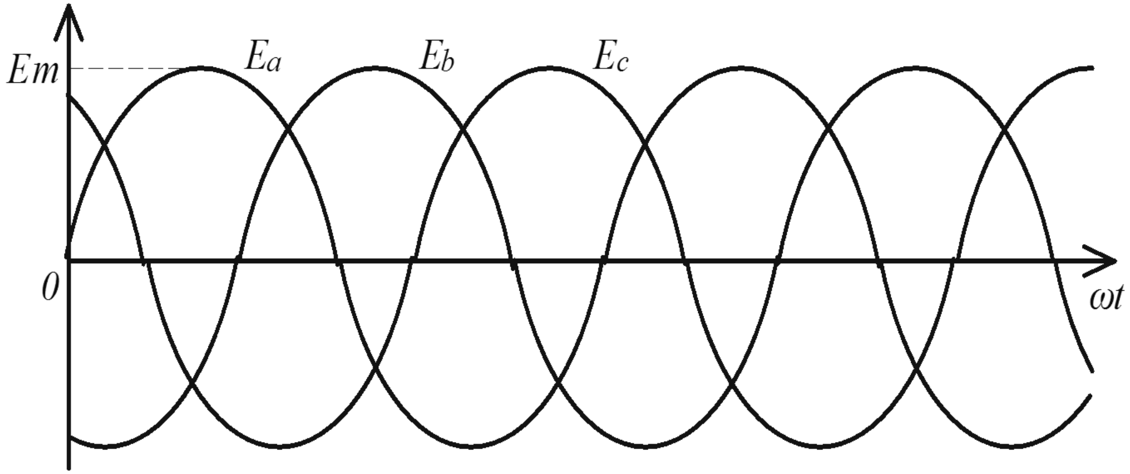
$$Z_{ab} = k^2\rho(Q - \frac{j}{k})$$

При $Q \gg \frac{1}{k}$

$$Z_{ab} \cong R_{ab} = k^2\rho Q = k^2\frac{\rho^2}{R}$$

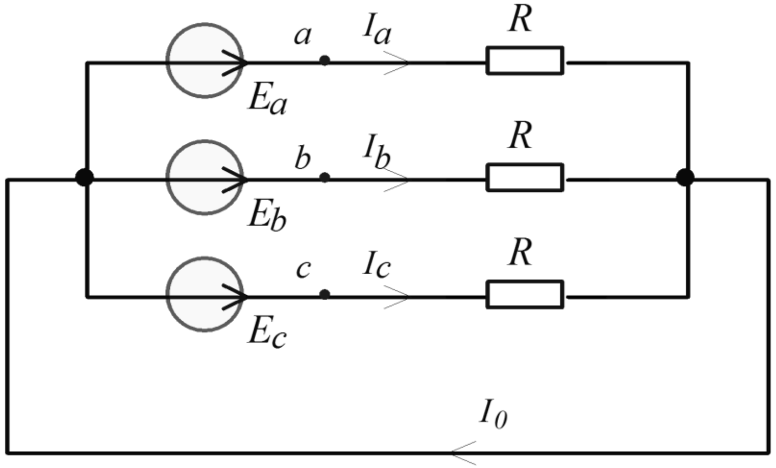


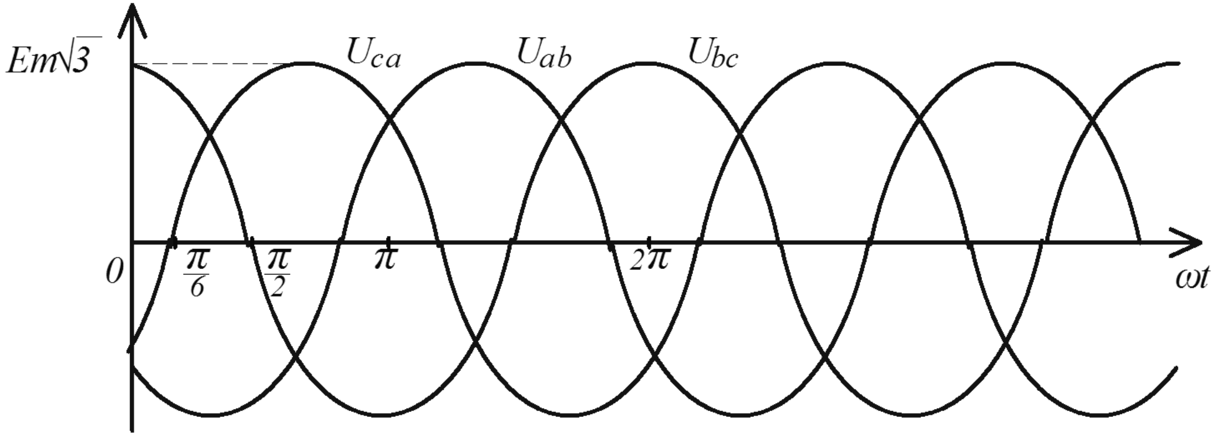




Трехфазный источник изображается с помощью трех однофазных источников.
ЭДС источников - называются **фазные ЭДС ,** токи в источниках – **фазные токи**.
Падения напряжений на нагрузках называются **фазными напряжениями.**
Провода, соединяющие источники и нагрузки, называются **линейными**,
напряжения между ними - **линейными напряжениями,**
токи в линейных проводах – **линейные токи.**
Провод, соединяющий среднюю точку источников со средней точкой нагрузок,
называется **нулевым проводом**.

Соединение звезда -звезда



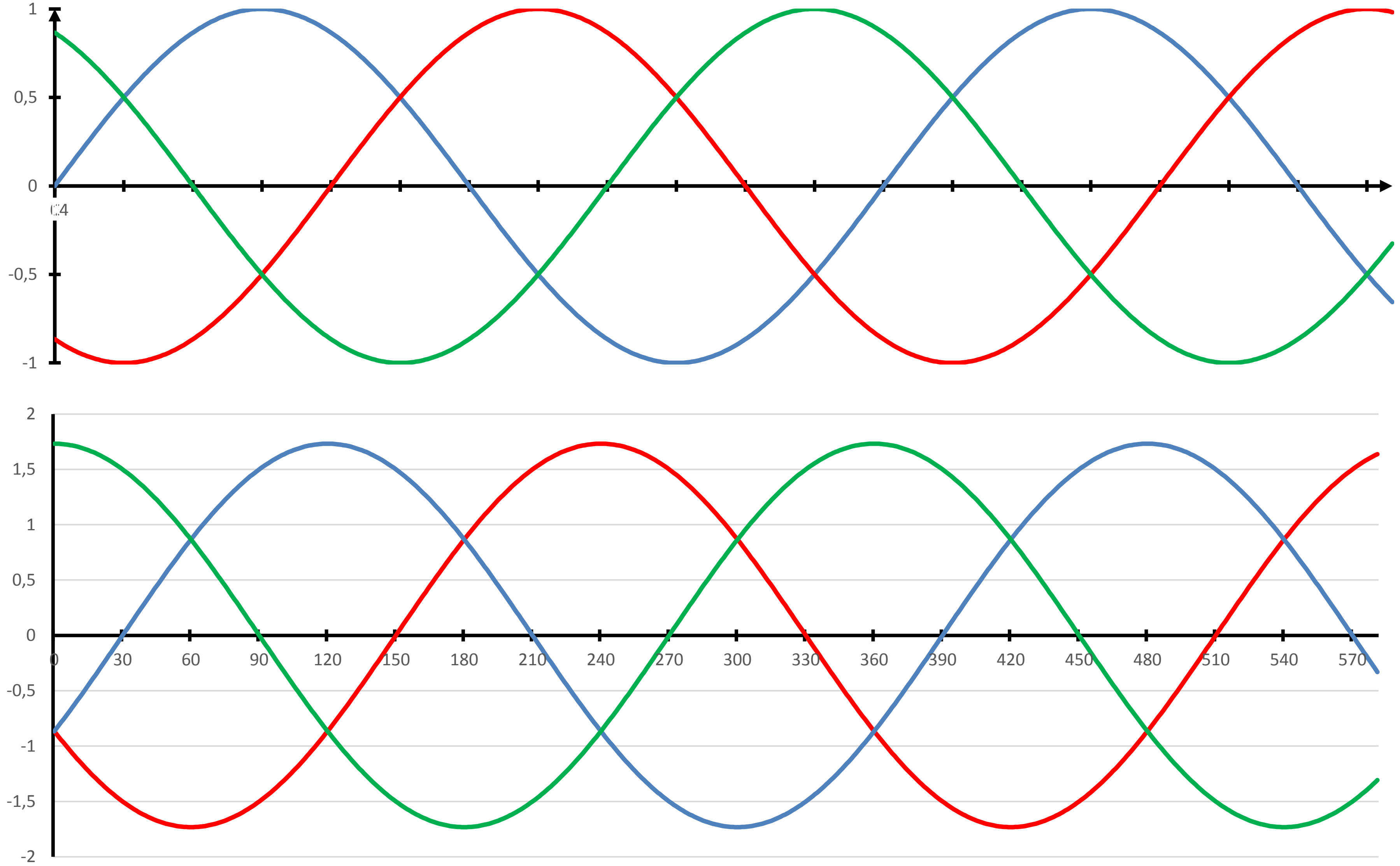


$$\dot{U}_{ab} = \dot{E}_b - \dot{E}_a = E_m \cdot \left(e^{j120^\circ} - 1\right) = E_m \cdot (cos120^\circ + jsin120^\circ - 1)$$

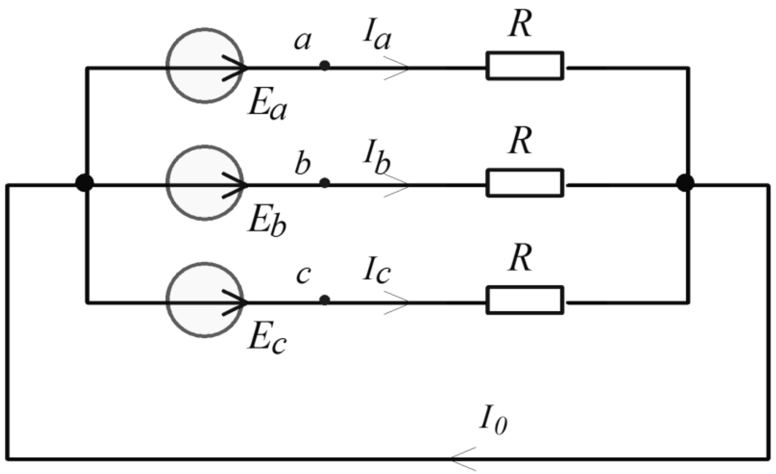
$$= E_m \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = E_m\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = E_m\sqrt{3} \cdot e^{j150^\circ}$$

$$\dot{U}_{bc} = E_m\sqrt{3} \cdot e^{j270^\circ}, \qquad \dot{U}_{ca} = E_m\sqrt{3} \cdot e^{j30^\circ}$$

Для соединения «звезда» фазные и линейные напряжения различаются в $\sqrt{3}$ раз.


1
0,5
0
-0,5
-1
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360
390
420
450
480
510
540
570

Соединение звезда -звезда



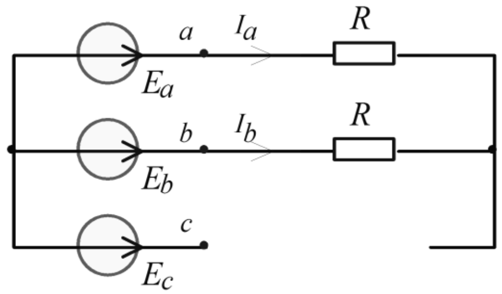
$$\dot{I}_a = \frac{E_m}{R}, \quad \dot{I}_b = \frac{E_m}{R} \cdot e^{j120°}, \quad \dot{I}_c = \frac{E_m}{R} \cdot e^{j240°}$$

Для соединения «звезда» фазные и линейные токи совпадают.
Ток в нулевом проводе:

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = \frac{E_m}{R} \cdot \left(1 + e^{j120°} + e^{j240°}\right) = 0$$

Пример. Несимметричный случай

Определить токи и напряжения в несимметричных случаях – обрыв или короткое замыкание нагрузки в фазе С.

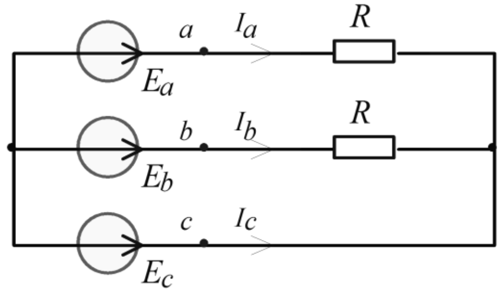


1. Обрыв – источник E_C не влияет на работу цепи:

$$\dot{E}_a - \dot{E}_b = 2\dot{I}R$$

$$\dot{I}_a = \dot{I}_b = \frac{E_m}{2R} \cdot \left(1 - e^{j120°}\right) = \frac{E_m\sqrt{3}}{2R} \cdot e^{-j30°}, \quad \dot{I}_c = 0$$

Напряжения нагрузок половина от линейного и 0 соответственно.



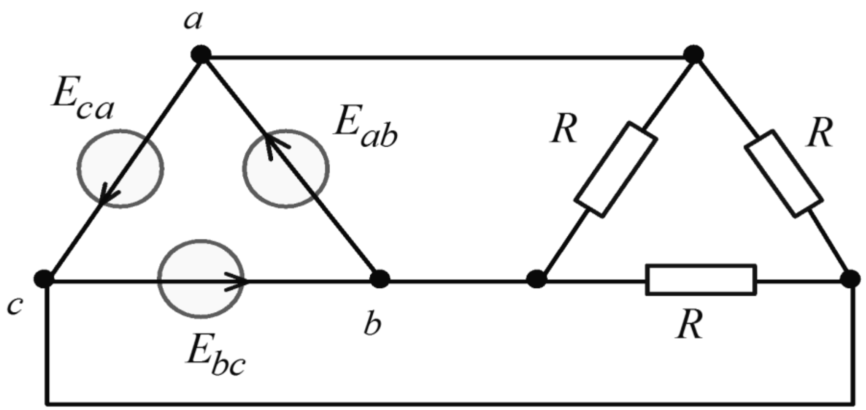
2. Короткое замыкание нагрузки в фазе С:

$$\dot{E}_a - \dot{E}_c = \dot{I}_a R$$
$$\dot{E}_b - \dot{E}_c = \dot{I}_b R$$

$$\dot{I}_a = \frac{E_m\sqrt{3}}{R} \cdot e^{j30°}, \qquad \dot{I}_b = \frac{E_m\sqrt{3}}{R} \cdot e^{j270°}, \qquad \dot{I}_c = \frac{3E_m}{R} \cdot e^{j60°}$$

Напряжение приложенное к нагрузкам будет линейным.

Соединение треугольник -треугольник



$$\dot{E}_0 = \dot{E}_{ab} + \dot{E}_{bc} + \dot{E}_{ca} = E_m \cdot \left(1 + e^{j120^\circ} + e^{j240^\circ}\right) = 0$$

Фазные токи:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{E_m}{R}, \quad \dot{I}_{bc} = \frac{E_m}{R} \cdot e^{j120^\circ}, \quad \dot{I}_{ca} = \frac{E_m}{R} \cdot e^{j240^\circ}$$

Линейные токи:

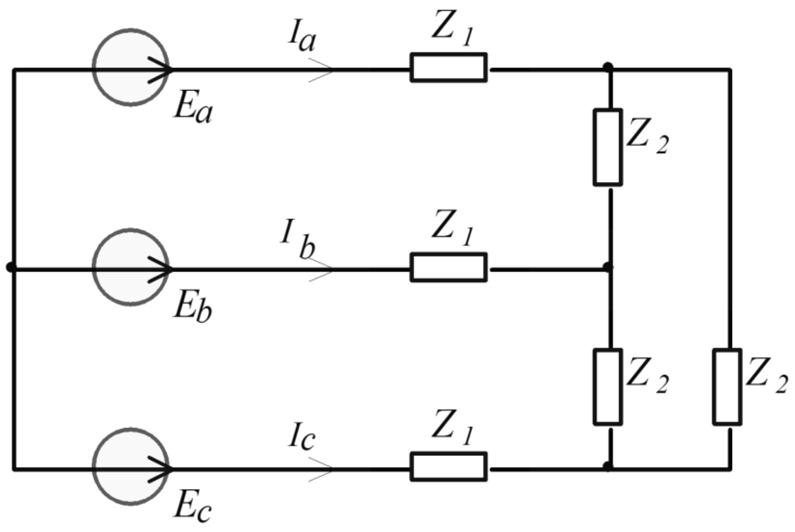
$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{ab} = \frac{E_m\sqrt{3}}{R} \cdot e^{j210^\circ}, \dot{I}_b = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{bc} = \frac{E_m\sqrt{3}}{R} \cdot e^{j330^\circ}, \dot{I}_c = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ca} = \frac{E_m\sqrt{3}}{R} \cdot e^{j90^\circ}$$

Пример.

Симметричный случай сложная нагрузка. Определить токи фаз.

Выполним преобразование треугольник-звезда для Z_2.

Определим ток фазы a.



$$\dot{I}_a = \frac{\dot{E}_a}{Z_1 + {Z_2}/{3}}$$

Токи фаз в и с отличаются сдвигом на 120 и 240 градусов соответственно.

Мощность в трехфазных цепях

$$\boldsymbol{p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)}$$

$$= U_m I_m (sin^2\theta + sin^2(\theta + 120°) + sin^2(\theta + 240°)$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} (3 + cos2\theta + cos2(\theta + 120°) + cos2(\theta + 240°)$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} \left(3 + \frac{e^{j2\theta}}{2} \left(1 + e^{j120°} + e^{j240°} \right) + \frac{e^{-j2\theta}}{2} \left(1 + e^{-j120°} + e^{-j240°} \right) \right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{3U_m I_m}{2}}$$

Мощность в трехфазных симметричных цепях

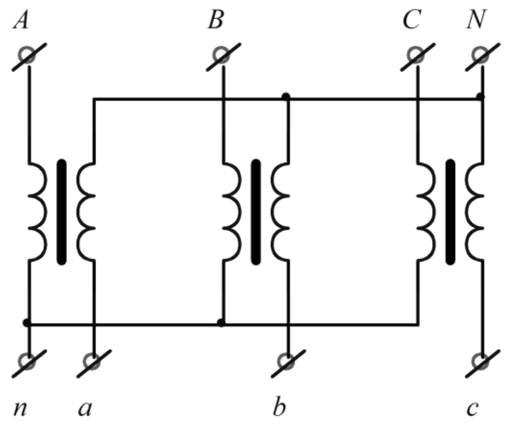
Для активной мощности: $P = 3 \cdot U_{\text{ф}} \cdot I_{\text{ф}} cos\varphi$

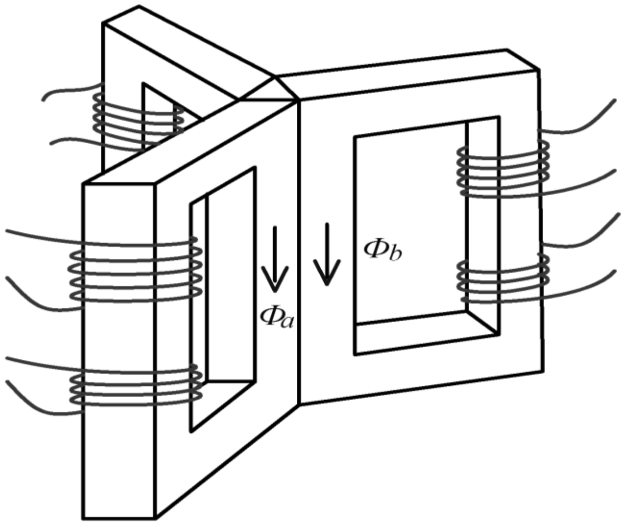
Через линейные напряжения и токи: $P = \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} cos\varphi$

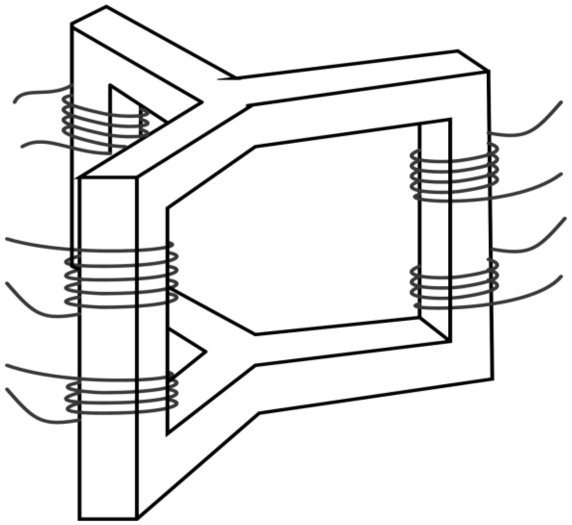
Для реактивной и полной мощностей:

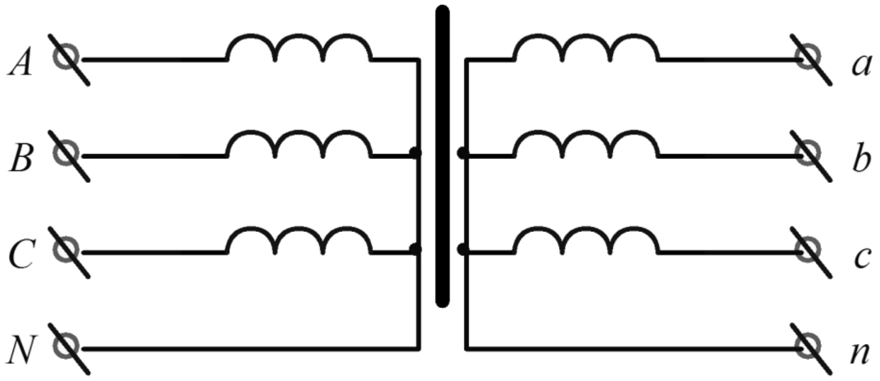
$$Q = \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} sin\varphi \qquad S = \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}}$$

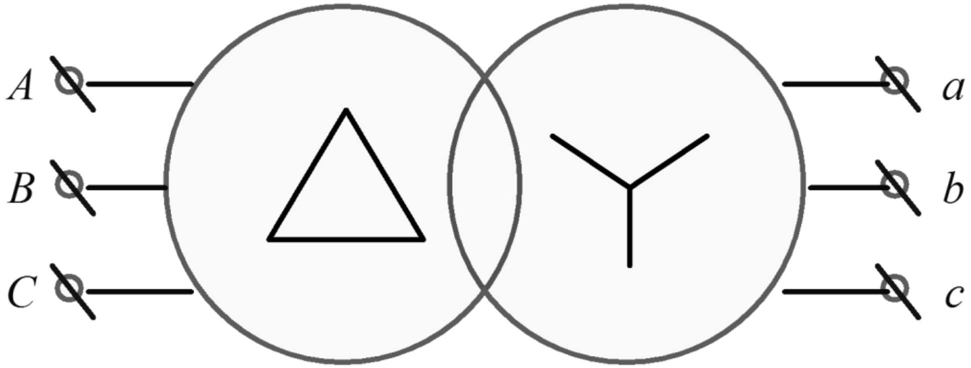
Трехфазный трансформатор



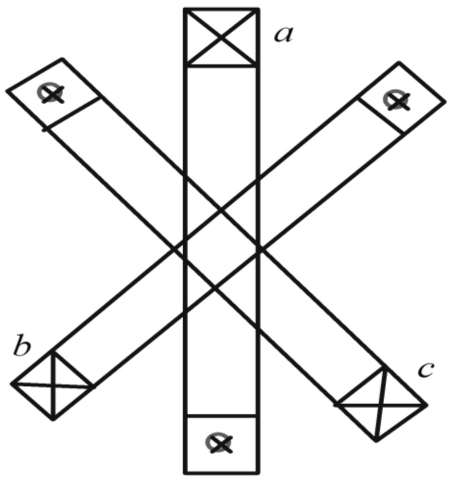


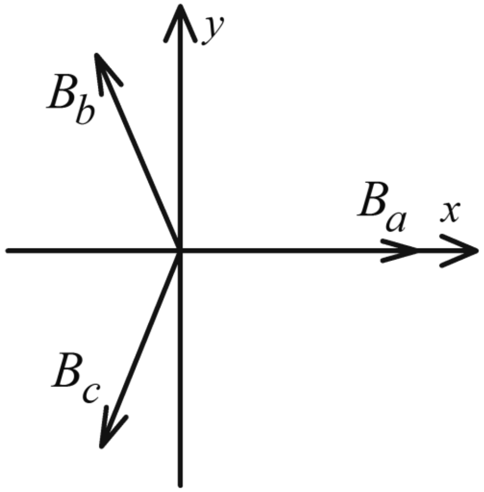






Вращающееся магнитное поле





Изменение величины индукции от времени:

$$B_a = B_m sin\omega t, B_b = B_m \sin(\omega t + 120°), B_c = B_m \sin(\omega t - 120°)$$

Определим величины проекций вектора индукции поля на координатные оси:

$$B_x = B_a - B_b sin30° - B_c sin30° = B_a - \frac{1}{2} \cdot (B_b + B_c)$$

$$B_y = B_c cos30° - B_b cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (B_c - B_b)$$

Вращающееся магнитное поле

Подставим в проекции зависимость от времени:

$$B_x = B_m \cdot (sin\omega t - \frac{1}{2}(\sin(\omega t + 120°) + \sin(\omega t - 120°)) = \frac{3}{2} B_m \cdot sin\omega t$$

$$B_y = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \cdot (\sin(\omega t + 120°) - \sin(\omega t - 120°)) = \frac{3}{2} B_m \cdot cos\omega t$$

Проекции определяют вектор неизменной величины вращающийся относительно центральной оси:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_m \qquad arctg\,\frac{B_y}{B_x} = \omega t$$