Семинар 7 [3.10.2022]

Системы уравнений.

Задачи

Задача 0

Вывести канонический вид системы

$$A\partial_t\psi + B\partial_x\psi = f.$$

Матрицу считать A невырожденной, а также полагать, что $C = A^{-1}B$ приводима к диагональному виду.

Задача 1

Найти условие гиперболичности, характеристики и соотношения на характеристиках системы

$$\partial_t u + a\partial_x u + b\partial_x v = 0,$$
$$\partial_t v + c\partial_x u + d\partial_x v = 0.$$

Задача 2

Решить систему

$$\partial_x u + \partial_x v + 2\partial_y u - 3\partial_y v = 0,$$
$$\partial_x u + \partial_x v - 3\partial_y u + 2\partial_y v = 0.$$

Задача 3

Решить систему

$$(x-1)\,\partial_t u - (x+1)\,\partial_t v + \partial_y u = 0,$$
$$(x+1)\,\partial_t u - (x-1)\,\partial_t v - \partial_x v = 0.$$

Решения

Задача 0

Так как A невырождена, то
$$\partial_t \psi + C\partial_x \psi = g,$$
где $C = A^{-1}B$ и $g = A^{-1}f$. Пусть $\Lambda = T^{-1}CT$ диагональная. Произведем замену $\psi = T\phi$, тогда
$$\partial_t \phi + \Lambda \partial_x \phi = T^{-1}g - \left(T^{-1}\partial_t T + \Lambda T^{-1}\partial_x T\right)\phi.$$

Задача 1

В матричном виде
$$\partial_t \psi + A\partial_x \psi = 0,$$
где
$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Уравнения характеристик
$$|Edx - Adt| = 0, \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \lambda_\pm = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}.$$
Система гиперболиеская, если
$$(a-d)^2 + 4bc > 0.$$
Интегралы
$$I_\pm = vb + u(a - \lambda_\pm),$$
либо
$$I_\pm = uc + v(d - \lambda_\pm).$$

Задача 2

Имеем систему
$$A\partial_x \psi + B\partial_y \psi = 0,$$
где
$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
Матрица B невырожденная, тогда можем переписать систему в виде
$$\partial_y \psi + C\partial_x \psi = 0,$$
где
$$C = B^{-1}A = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Ищем собственные числа матрицы C:
$$|C - \lambda E| = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0.$$
Соответсвующая диагональная форма
$$\Lambda = T^{-1}CT = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В итоге, вводя

$$\phi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = T^{-1}\psi,$$

получаем уравнение в каноническом виде

$$\partial_y \phi + \Lambda \partial_x \phi = 0.$$

Таким образом имеем два линейных уравнения:

$$\partial_y f - 2\partial_x f = 0,$$
$$\partial_y g = 0.$$

Соответсвующие решения

$$f = q(x+2y), \quad g = p(x).$$

В итоге получаем общее решение:

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T\phi = \begin{pmatrix} f+g \\ f-g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(x+2y)+p(x) \\ q(x+2y)-p(x) \end{pmatrix}.$$

Эту же задачу можно решить общим способом. Уравнение на характеристики

$$\begin{vmatrix} B & A \\ E dy & E dx \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad \left| E\frac{dx}{dy} - C \right| = 0,$$

отсюда получаем

$$\frac{dx}{dy} = \lambda_{1,2}, \quad \Rightarrow \quad I_1 = x + 2y, \quad I_2 = x.$$

Уравнения на характеристиках:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} B & A \\ E dy & E dx \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc|c} B & A & 0 \\ E dy & E dx & d\psi \end{array}\right),$$

откуда вычеркиванием одного столбца в расширенной матрице получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ dy & 0 & 0 & du \\ 0 & dy & \lambda_{1,2}dy & dv \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & du \\ \lambda_{1,2}dy & dv \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} dy & 0 \\ 0 & dy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| =$$
$$= \begin{vmatrix} -3\lambda_{1,2}dy - dy & 2du - 3dv \\ 2\lambda_{1,2}dy - dy & -3du + 2dv \end{vmatrix} = 5\big((\lambda_{1,2}+1)du - dv\big)dy = 0.$$

Таким образом имеем

$$\lambda_1 = -2: \quad du + dv = 0, \quad \Rightarrow \quad J_1 = u + v,$$
$$\lambda_2 = 0: \quad du - dv = 0, \quad \Rightarrow \quad J_2 = u - v.$$

В итоге, решение представимо в виде

$$G_1(I_1, J_1) = 0, \quad G_2(I_2, J_2) = 0,$$

откуда находим

$$u + v = 2q(x+2y), \quad u - v = 2p(x),$$
$$\Rightarrow$$
$$u = q(x+2y) + p(x), \quad v = q(x+2y) - p(x).$$

Задача 3

Имеем систему
$$A\partial_t\psi + B\partial_x\psi = 0,$$
где
$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x-1 & -x-1 \\ x+1 & -x+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Можем переписать систему в виде
$$\partial_x\psi + C\partial_t\psi = 0,$$
где
$$C = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 & -x-1 \\ x+1 & -x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & -x-1 \\ -x-1 & x-1 \end{pmatrix}.$$
Ищем собственные числа матрицы C:
$$|C-\lambda E| = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2x.$$
Соответсвующая диагональная форма
$$\Lambda = T^{-1}CT = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
В итоге, вводя
$$\phi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = T^{-1}\psi,$$
получаем уравнение в каноническом виде
$$\partial_x\phi + \Lambda\partial_t\phi = 0.$$
Таким образом имеем два линейных уравнения:
$$\partial_x f - 2\partial_t f = 0,$$
$$\partial_x g + 2x\partial_t g = 0.$$
Соответсвующие решения
$$f = q(t+2x), \quad g = p\left(t-x^2\right).$$
В итоге получаем общее решение:
$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T\phi = \begin{pmatrix} f+g \\ f-g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t+2x)+p\left(t-x^2\right) \\ q(t+2x)-p\left(t-x^2\right) \end{pmatrix}.$$

Эту же задачу можно решить общим способом. Уравнение на характеристики
$$\begin{vmatrix} B & A \\ E\,dx & E\,dt \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad \left|E\frac{dt}{dx} - C\right| = 0,$$
отсюда получаем
$$\frac{dt}{dx} = \lambda_{1,2}, \quad \Rightarrow \quad I_1 = t+2x, \quad I_2 = t-x^2.$$

Уравнения на характеристиках:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} B & A \\ Edx & Edt \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc|c} B & A & 0 \\ Edx & Edt & d\psi \end{array}\right),$$

откуда вычеркиванием одного столбца в расширенной матрице получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x+1 & 0 \\ dx & 0 & \lambda_{1,2}dx & du \\ 0 & dx & 0 & dv \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_{1,2}dx & du \\ 0 & dv \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} dx & 0 \\ 0 & dx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ x+1 & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_{1,2}dx-(x-1)\,dx & du \\ -(x+1)\,dx & -dv \end{vmatrix} = \big((x+1)\,du + \big(x-1-\lambda_{1,2}\big)\,dv\big)\,dx = 0.$$

Таким образом имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2: \quad du + dv = 0, \quad \Rightarrow \quad J_1 = u + v, \\ \lambda_2 &= 2x: \quad du - dv = 0, \quad \Rightarrow \quad J_2 = u - v. \end{aligned}$$

В итоге, решение представимо в виде

$$G_1(I_1, J_1) = 0, \quad G_2(I_2, J_2) = 0,$$

откуда находим

$$u + v = 2q\,(t + 2x)\,, \quad u - v = 2p\left(t - x^2\right),$$
$$\Rightarrow$$
$$u = q\,(t + 2x) + p\left(t - x^2\right), \quad v = q\,(t + 2x) - p\left(t - x^2\right).$$