

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра высшей математики

С. Г. Бугаева, А. С. Романов

**СЕМИНАРЫ
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Учебное пособие

Новосибирск – 2020

Глава 1

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Комплексные числа.

1. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y) , при этом действительные числа x и y называются соответственно *действительной и мнимой частью* комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$.

Понятие равенства и арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом:

1. Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

2. *Суммой* двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

3. *Произведением* двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествляют с действительными числами, полагая $(x, 0) = x$.

Комплексное число $(0, 1)$ называют *мнимой единицей* и обозначают символом i , при этом

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Всякое комплексное число можно записать в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Такая форма записи называется *алгебраической формой* комплексного числа. Комплексные числа вида iy называют *чисто мнимыми*. Только число 0, т.е. комплексное число $(0, 0)$, является одновременно действительным и чисто мнимым.

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$ и обозначается \bar{z} :

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Легко проверить, что

$$\bar{\bar{z}} = z; \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Действительное число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$, т.е. $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. При этом $|z| = |\bar{z}|$ и $z\bar{z} = |z|^2$. Для любого комплексного числа

$$0 \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad 0 \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad 0 \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$$

причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ имеет противоположное, обозначаемое символом $-z$, такое, что $z + (-z) = 0$. Очевидно, что $-z = -x - iy$. Операция *вычитания* определяется равенством $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Всякое комплексное число $z \neq 0$ имеет обратное z^{-1} такое, что $zz^{-1} = 1$. Используя последнее равенство, получаем

$$z^{-1} = \frac{|z|^2 z^{-1}}{|z|^2} = \frac{\bar{z} z z^{-1}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Операция *деления* на комплексное число $z \neq 0$ определяется равенством

$$\frac{z_1}{z} = z_1 z^{-1} = z_1 \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Множество комплексных чисел является числовым полем, которое принято обозначать символом \mathbb{C} .

Пример 1. Представим выражение $\frac{a + ib}{c + id}$ в алгебраической форме.

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Пример 2. Докажем равенство $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

Применим свойство $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) =$$

$$\begin{aligned}
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = \\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} = \\
&= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.
\end{aligned}$$

Это равенство, называемое равенством параллелограмма, может быть доказано исходя из геометрической интерпретации комплексных чисел. Об этом следующий пункт 2.

2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Пусть на плоскости R^2 задана декартова система координат. По определению комплексное число является упорядоченной парой действительных чисел. Поэтому естественное сопоставление комплексному числу $z = x + iy$ точки плоскости с координатами (x, y) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости R^2 . Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* и обозначается символом C . Поскольку действительные числа отображаются в точки оси абсцисс, а чисто мнимые в точки оси ординат, то на комплексной плоскости C ось абсцисс принято называть *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*.

Комплексное число $z = x + iy$ также удобно изображать вектором с началом в точке $(0, 0)$ и концом в точке (x, y) , при этом для обозначения вектора принято использовать тот же символ, которым обозначено соответствующее комплексное число. Таким образом символ z будет далее одновременно использоваться для обозначения комплексного числа, точки комплексной плоскости и соответствующего вектора. Из определения операции сложения следует, что сумма двух комплексных чисел $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ изображается вектором, построенным по стандартному правилу сложения векторов $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ на плоскости. Легко видеть, что длина вектора z на комплексной плоскости C равна $|z|$ — модулю комплексного числа z , а расстояние между точками z_1 и z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т.е. $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, при этом для произвольных комплексных чисел z_1 и z_2 выполняются стандартные *неравенства треугольника*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{и} \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|.$$

Вернемся к примеру из предыдущего пункта. Видим, что построив параллелограмм со сторонами, лежащими на векторах z_1 и z_2 , мы получим в качестве его диагоналей векторы $z_1 + z_2$ и $z_1 - z_2$. Тогда равенство $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ описывает хорошо известный факт из школьной геометрии: *в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон*.

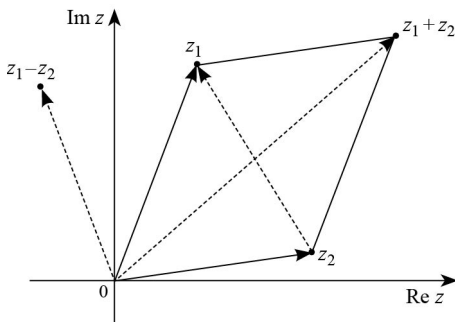


Рис. 1.

Поскольку расстояние между точками комплексной плоскости совпадает с расстоянием между соответствующими точками плоскости R^2 , то на комплексной плоскости C определения, зависящие только от метрики, такие как определения внутренней и предельной точек, ограниченных, открытых, замкнутых, компактных множеств и т.д., совпадают с соответствующими определениями для плоскости R^2 .

Пример 3. Множество точек $z \in C$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < r$, является *кругом* с центром в точке z_0 радиуса r и далее будет обозначаться символом $B(z_0, r)$.

Пример 4. Множество точек $z \in C$, удовлетворяющих уравнению $|z + 1| + |z - i| = 3$, является эллипсом с фокусами в точках $z = -1$ и $z = i$, так как удовлетворяет *характеристическому свойству эллипса*: эллипс — это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек (фокусов) постоянна.

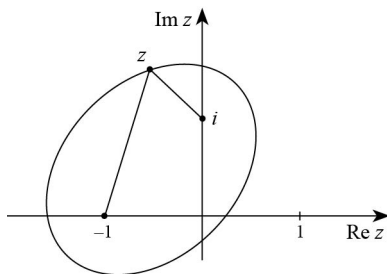


Рис. 2.

Множество E называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого. В случае открытого множества это определение равносильно тому, что любые две точки этого множества можно соединить ломаной, целиком лежащей в данном множестве.

Компонентой множества E называют любое его максимальное связное подмножество.

Областью будем называть всякое открытое связное множество. Число компонент границы данной области называется *порядком связности* этой области. Далее мы будем рассматривать только области с конечным порядком связности, иными словами *конечносвязные* области.

Хотя комплексная плоскость C , как множество точек, совпадает с плоскостью R^2 , их следует различать, поскольку на комплексной плоскости определена операция умножения, ставящая в соответствие двум векторам z_1 и z_2 из C вектор $z_1 \cdot z_2$, вновь принадлежащий комплексной плоскости, а на действительной плоскости R^2 такой операции нет.

3. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Положение комплексного числа $z = x + iy$ на комплексной плоскости C можно однозначно определить полярными координатами r и φ точки $(x, y) \in R^2$. При этом $r = |z|$, а угол φ между положительным направлением действительной оси и вектором z называют *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = \text{Arg } z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется.

Всякое комплексное число $z \neq 0$ может быть записано в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

называемом *тригонометрической формой* комплексного числа.

При этом для комплексного числа $z = x + iy$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1)$$

В силу периодичности функций $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, система уравнений (1) имеет бесконечно много решений и, следовательно, аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определяется неоднозначно. Пусть $\arg z = \varphi_0$ такое решение системы (1), что $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, тогда

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n,$$

где n – произвольное целое число.

Пусть

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

тогда, согласно определению арифметических операций на множестве комплексных чисел, получаем

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 ([\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] + i [\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2]) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Таким образом, при произведении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2).$$

Если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то

$$z^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)^n.$$

Отсюда при $r = 1$ получаем формулу Муавра¹

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Приравнивая в формуле Муавра соответственно действительные и мнимые части выражений, получаемых слева и справа, легко найти формулы для синусов и косинусов кратных дуг.

¹Муавр Абрахам де (1667-1754) – английский математик, член Лондонского королевского общества, Парижской и Берлинской академий наук, основные исследования связаны со степенными рядами.

Если мы стандартным образом определим значение $w = \sqrt[n]{z}$ условием: $w^n = z$, то получим n различных решений

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

при этом точки w_k имеют одинаковый модуль и расположены в вершинах правильного n -угольника.

4. Последовательности комплексных чисел.

Поскольку расстояние на комплексной плоскости совпадает с расстоянием на действительной плоскости R^2 , то определение предела последовательности комплексных чисел и его основные свойства являются следствием соответствующих утверждений для последовательности точек плоскости R^2 .

Определение. Комплексное число a называется пределом последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$

При этом используется стандартные обозначения $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, либо $z_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Иными словами число $a \in C$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0.$$

Последовательность, имеющая предел $a \in C$, называется *сходящейся*.

Всякой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$. Из оценок

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

следует, что для существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a = \alpha + i\beta$ необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

Теперь несложно показать, что для последовательностей комплексных чисел выполняются следующие свойства: пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = b$, тогда

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = a + b$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = ab$,
3. если $b \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}$.

В комплексной плоскости остаются верными критерий Коши ¹ и принцип Больцано-Вейерштрасса ².

Критерий Коши. Для того, чтобы последовательность $\{z_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ и $m > n_0$ выполнялось неравенство $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Принцип Больцано — Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Для доказательства этих утверждений достаточно заметить, что они верны для действительных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

С другой стороны, всякой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ можно сопоставить две последовательности действительных чисел $\{r_n\}$ и $\{\varphi_n\}$, где $z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0$, то, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0).$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, то из неравенства $||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0|$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z_0|$, при этом нельзя в общем случае утверждать,

¹Коши Огюст Луи (1789-1857)—французский математик, член Парижской академии наук, иностранный почетный член Петербургской академии наук, основные исследования посвящены математическому анализу и математической физике, является одним из создателей теории функций комплексного переменного.

²Больцано Бернارد (1781-1848)—чешский математик, философ, теолог, изучал логические основы математического анализа

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815-1897)—немецкий математик, иностранный почетный член Петербургской академии наук, основные исследования посвящены математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии.

что последовательность $\{\varphi_n = \text{Arg } z_n\}$ сходится, поскольку аргумент комплексного числа определяется неоднозначно.

5. Показательная форма записи комплексных чисел.

По аналогии с действительным случаем определим функцию $e^z \equiv \exp z$ равенством

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Можно и доказать существование предела при любом $z \in \mathbb{C}$.

При этом

$$|e^z| = e^{\text{Re } z} = e^x, \quad \text{Arg } e^z = \text{Im } z = y$$

и

$$e^z = e^{x+iy} = |e^z|(\cos(\text{Arg } e^z) + i \sin(\text{Arg } e^z)) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Введенная таким образом функция на действительной оси (т.е. при $y = 0$) совпадает с обычной экспонентой действительного переменного, а при $x = 0$ получаем формулу Эйлера¹

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

и, в частности, полезное равенство $e^{2\pi ik} = 1$ для любого целого числа k .

Из тригонометрической формы легко получить *показательную форму* записи комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} = |z|e^{i \text{Arg } z}.$$

Для функции e^z выполняются стандартные свойства показательной функции действительного переменного, к примеру,

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2},$$

¹Эйлер Леонард (1707-1783) – математик, механик и физик, член Петербургской, Берлинской, Парижской академий, член Лондонского королевского общества. С 1727 по 1741 и с 1766 до конца жизни работал в Петербургской академии наук. Круг интересов Эйлера включал в себя все отделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию музыки, теорию машин, баллистику, морскую науку, страховое дело, ... Эйлер первым начал систематическое изучение функций комплексного переменного и применение мнимых величин к вычислению интегралов.

однако в комплексной области экспонента оказывается периодической функцией с чисто мнимым периодом равным $2\pi i$

$$e^{z+2\pi ik} = e^z \cdot e^{2\pi ik} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

Пример 5. Представим в показательной форме числа 1 , -1 , i , $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.

Для решения задачи полезно нарисовать данные числа на комплексной плоскости.

$$\begin{aligned} 1 &= e^{i \cdot 0}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -i = e^{-i\pi/2}, \\ 1+i &= \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \quad 1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}, \\ -1+i &= \sqrt{2}e^{i3\pi/4}, \quad -1-i = \sqrt{2}e^{-i3\pi/4}. \end{aligned}$$

Пример 6. Используя предыдущий пример, вычислим:

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} &= \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^5}{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^3} = \\ &= \frac{(\sqrt{2})^5 e^{i5\pi/4}}{(\sqrt{2})^3 e^{-i3\pi/4}} = (\sqrt{2})^2 e^{i8\pi/4} = 2e^{2\pi i} = 2. \end{aligned}$$

Отметим, что если производить операции из этого примера в алгебраической форме, то решение будет более громоздким. Вообще, операции со степенями, умножение и деление лучше производить над комплексными числами, представленными в показательной форме.

Пример 7. Найдём модули и главные значения аргументов комплексных чисел e^{2-3i} , e^{-3+4i} .

Условимся, что главное значение аргумента лежит в промежутке $(-\pi; \pi]$, тогда

$$\begin{aligned} |e^{2-3i}| &= e^2, \quad \arg(e^{2-3i}) = -3, \\ |e^{-3+4i}| &= e^{-3}, \quad \arg(e^{-3+4i}) = 4 - 2\pi. \end{aligned}$$

Если же главное значение аргумента брать из промежутка $[0; 2\pi)$, то

$$\arg(e^{2-3i}) = 2\pi - 3, \quad \arg(e^{-3+4i}) = 4.$$

Пример 8. Докажем неравенство $\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq |\arg z|$, $\arg z \in (-\pi; \pi]$.

Это неравенство легко устанавливается, если прибегнуть к геометрическим рассмотрениям. Представим число z в показательной форме, тогда неравенство примет вид: $|e^{i\varphi} - 1| \leq |\varphi|$. Точки $z = 1$ и $z = e^{i\varphi}$ лежат на окружности с центром в точке $z = 0$ и радиусом $R = 1$. Левая часть неравенства равна длине хорды, соединяющей эти точки, а правая равна длине дуги окружности (в радианах), заключенной между этими точками. Хорда короче дуги, следовательно, неравенство верное.

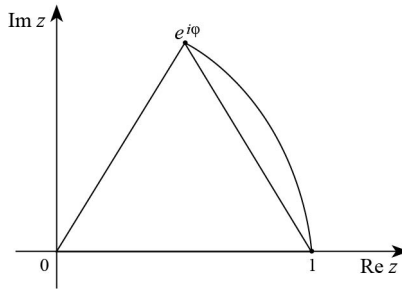


Рис. 3.

Пример 9. Найдём суммы рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(x + n\alpha), \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(x + n\alpha),$$

считая, что x , α , r — действительные числа, $|r| < 1$.

Оба ряда являются сходящимися. Умножим второй на мнимую единицу и сложим с первым, получим новый ряд, состоящий из комплексных чисел:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(x+n\alpha) + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(x+n\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{i(x+n\alpha)} = e^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\alpha})^n =$$

(применяем формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ со знаменателем } q = re^{i\alpha}, |q| < 1)$$

$$= e^{ix} \frac{1}{1 - r e^{i\alpha}} = \frac{\cos x + i \sin x}{1 - r \cos \alpha - i r \sin \alpha} =$$

(умножаем числитель и знаменатель на число, сопряженное к знаменателю)

$$= \frac{(\cos x + i \sin x)(1 - r \cos \alpha + i r \sin \alpha)}{(1 - r \cos \alpha)^2 + (r \sin \alpha)^2} =$$

(выделяем действительную и мнимую части)

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos x(1 - r \cos \alpha) - r \sin x \sin \alpha}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + i \frac{\sin x(1 - r \cos \alpha) + r \cos x \sin \alpha}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} = \\ &= \frac{\cos x - r \cos(x - \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + i \frac{\sin x - r \sin(x - \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}. \end{aligned}$$

Сравнив действительные и мнимые части исходной суммы двух рядов с действительными и мнимыми частями полученного выражения, заключаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(x + n\alpha) &= \frac{\cos x - r \cos(x - \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(x + n\alpha) &= \frac{\sin x - r \sin(x - \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}. \end{aligned}$$

Определяя стандартным образом логарифм комплексного числа $w = \operatorname{Ln} z$ условием: $e^w = z$, мы получим бесконечно много решений

$$w_k = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть $a, b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$, положим по определению

$$a^b = e^{b \operatorname{Ln} a} = e^{b(\ln |a| + i(\arg a + 2\pi k))}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В общем случае при возведении комплексного числа в произвольную комплексную степень мы будем получать бесконечную серию ответов. Если $b \in \mathbb{N}$, то $e^{ib \cdot 2\pi k} = 1$, и выражение a^b понимается в обычном смысле как произведение b множителей. Если $b = \frac{p}{q}$, где $p, q > 0$ — целые взаимно простые числа, то значения различны лишь при $k = 0, \dots, q-1$.

Пример 10. Найдем все значения степеней i^i , $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.

Применим формулу $a^b = e^{b \operatorname{Ln} a}$, тогда

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp\left\{i\left(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + i2\pi k\right)\right\} = \exp\left\{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right\}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

видим, что значений бесконечно много, все они различные и действительные положительные.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} &= \exp\left\{(1+i) \operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \exp\left\{(1+i)\left(\ln 1 - i\frac{\pi}{4} + i \cdot 2\pi k\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\pi\left(\frac{1}{4} - 2k\right)(1-i)\right\} = \exp\left\{\pi\left(\frac{1}{4} - 2k\right)\right\} \exp\left\{i\pi\left(2k - \frac{1}{4}\right)\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Здесь модуль у всех чисел равен $r = \exp\left\{\pi\left(\frac{1}{4} - 2k\right)\right\}$, $r \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow -\infty$ и $r \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, а аргументы принимают значения $\varphi = \pi\left(2k - \frac{1}{4}\right)$, при этом $\varphi \rightarrow \pm\infty$ при $k \rightarrow \pm\infty$, это говорит о том, что значения выражения лежат на (логарифмической) спирали.

Из формулы Эйлера следует, что

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Учитывая эти соотношения, тригонометрические функции комплексного переменного определим равенствами

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гиперболические функции определяются так же, как и для действительного переменного:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Легко заметить, что на комплексной плоскости тригонометрические и гиперболические функции образуют один и тот же класс функций, поскольку выражаются одни через другие:

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z, \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin z.$$

Введенные нами функции комплексного аргумента $\sin z$ и $\cos z$ при z , лежащей на действительной оси, совпадают с обычными тригонометрическими функциями $\sin x$ и $\cos x$ действительного аргумента. Функции $\sin z$ и $\cos z$ комплексного аргумента имеют период равный 2π , но не являются ограниченными. Например, при чисто мнимом $z = iy$ $\sin z = i \operatorname{sh} y$ и $\cos z = \operatorname{ch} y$, принимают сколь угодно большие по модулю значения.

Определим стандартным образом $w = \operatorname{Arcsin} z$ (арксинус комплексного числа z) условием: $\sin w = z$. Воспользуемся определением синуса, получим:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z.$$

Отсюда

$$e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0.$$

Получили квадратное относительно e^{iw} уравнение. Решаем его и получаем:

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

Вместо знака « \pm » можно писать знак «+» (или «-»), подразумевая, что корень квадратный из комплексного числа принимает оба своих значения. Выразим переменную w из равенства, получим:

$$w = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Видим, что арксинус имеет бесконечно много значений.

Аналогично можно выразить через логарифм и другие обратные тригонометрические и гиперболические функции:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z}, \quad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i},$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

6. Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка.

Еще одну геометрическую интерпретацию множества комплексных чисел, предложенную Риманом¹, можно получить, если точкам комплексной плоскости C сопоставить их сферические образы. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство с координатами (ξ, η, θ) и совместим комплексную плоскость C с плоскостью $O\xi\eta$ так, чтобы действительная ось совпала с осью $O\xi$, мнимая ось с осью $O\eta$, и положительные направления на соответствующих осях совпадали. Обозначим через S сферу с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ радиуса $\frac{1}{2}$, имеющую уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 + (\theta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \text{ или } \xi^2 + \eta^2 = \theta(1 - \theta), \quad (2)$$

а точку $(0, 0, 1)$ назовем *полюсом* сферы S и обозначим символом P . Соединим отрезком точку $z \in C$ с полюсом P , при этом отрезок пересечет сферу S в единственной точке $M(\xi, \eta, \theta)$. Точка M называется *стереографической проекцией* точки $z \in C$ на сферу S .

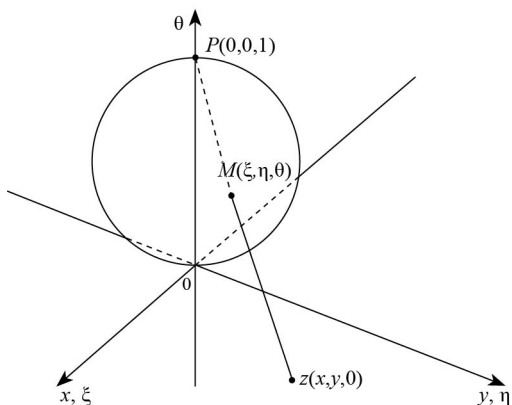


Рис. 4. Сфера Римана.

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное

¹Риман Георг Фридрих Бернхард (1826-1866) – немецкий математик. Основные работы посвящены математическому анализу, теории функций комплексного переменного и геометрии. Основоположник геометрического направления в теории аналитических функций.

соответствие между точками комплексной плоскости C и точками сферы S с выколотым полюсом P .

В силу коллинеарности точек $P(0, 0, 1)$, $M(\xi, \eta, \theta)$ и $z(x, y, 0)$ имеем

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1 - \theta}{1},$$

$$x = \frac{\xi}{1 - \theta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \theta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \theta}. \quad (3)$$

Поскольку

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \theta)^2},$$

то из уравнения сферы (2) получаем

$$|z|^2 = \frac{\theta}{1 - \theta}. \quad (4)$$

Выражая из равенства (4) значение θ и подставляя его в равенства (3), находим

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \theta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (5)$$

Формулы (5) называют формулами стереографической проекции.

Стереографическая проекция обладает замечательным *круговым свойством*: всякая окружность или прямая на комплексной плоскости C отображается стереографической проекцией в окружность на сфере S , и обратно, прообразом всякой окружности на сфере S является либо окружность либо прямая на плоскости C .

При неограниченном удалении точки z от нуля в произвольном направлении (вдоль произвольной прямой) образ этой точки на сфере всегда будет стремиться к полюсу P . Добавим к комплексной плоскости C *идеальный объект*, называемый *бесконечно удаленной точкой* и обозначаемый символом ∞ . Далее комплексную плоскость с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой будем называть *расширенной комплексной плоскостью* и обозначать символом \overline{C} , т.е. $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$.

Если мы доопределим стереографическую проекцию, полагая полюс P образом бесконечно удаленной точки, то получим взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью \overline{C} и сферой S .

Стандартной окрестностью полюса P на сфере является "шапочка" т.е. часть сферы S , расположенная выше некоторой плоскости $\theta = a$, $0 < a < 1$. Стандартной окрестностью бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости является прообраз стандартной окрестности полюса P при стереографической проекции, т.е. множество $U = \{|z| > r > 0\}$ – внешность круга с центром в нуле. При таком определении стереографическая проекция будет непрерывна и в бесконечно удаленной точке. Сферу S , на которой изображены комплексные числа, называют *сферой Римана*.

Естественным образом определяется сходимость последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ к бесконечно удаленной точке: $z_n \rightarrow \infty$, если для любой окрестности бесконечно удаленной точки U найдется такой номер n_0 , что при $n > n_0$ точки z_n принадлежат окрестности U . Это определение эквивалентно тому, что $|z_n| \rightarrow +\infty$.

Помимо кругового свойства стереографическая проекция обладает еще одним замечательным свойством – *консерватизмом углов*. Это означает, что угол между любыми гладкими кривыми на комплексной плоскости равен углу между образами этих кривых, лежащими на сфере S .

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Найдите действительные и мнимые части, модули и аргументы комплексных чисел:

$$a) z_1 = \frac{1-i}{1+i}; \quad b) z_2 = (1+i\sqrt{3})^6; \quad c) z_3 = \frac{(1+i)^8}{(1+i\sqrt{3})^3}.$$

1.2. Вычислите

$$a) \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^6; \quad b) \frac{(1-i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^{16}}; \quad c) \left(\frac{a+ib}{b-ia} \right)^{11}.$$

1.3. Решите уравнение $\bar{z} = z^{n-1}$ (n – целое число).

1.4. Докажите тождество

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).$$

1.5. Докажите неравенства, исходя из геометрических рассуждений,

$$a) |z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| \cdot |\arg z|, \quad \arg z \in (-\pi; \pi];$$

$$b) |z_1 + z_2| \geq \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|) \left| \frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|} \right|.$$

1.6. Пусть $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника.

1.7. Даны три вершины параллелограмма z_1, z_2, z_3 . Найдите четвертую вершину z_4 , противоположную вершине z_2 .

1.8. При каком условии три попарно различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой?

1.9. Какие множества точек комплексной плоскости описываются следующими условиями:

$$a) |z - 2| + |z + i| = 5; \quad b) |z - 2| - |z + 2| > 3; \quad c) \operatorname{Re} z^2 = M;$$

$$d) \operatorname{Im} z^2 = M, \quad M \in (-\infty; \infty); \quad e) \left| \frac{z - 2}{z - 1} \right| = 2.$$

1.10. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек линии

$$\left| z + \frac{1}{z} \right| = a \quad (a > 0).$$

1.11. Найдите все значения выражений

$$a) \sqrt[5]{1}; \quad b) \sqrt[4]{-1}; \quad c) \sqrt[7]{-4 + 3i}; \quad d) \operatorname{Ln}(-1); \quad e) \operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3});$$

$$f) 1^{\sqrt{2}}; \quad g) 2^i; \quad h) i^i; \quad i) \operatorname{Arccos} 2; \quad j) \operatorname{Arctg}(1 + 2i).$$

1.12. Найдите все корни уравнений:

$$a) \sin z + \cos z = \frac{1}{2}; \quad b) \sin z + \cos z = 2; \quad c) \sin z + \cos z = i.$$

1.13. Найдите множества точек комплексной плоскости, на которых функция $\cos z$ принимает: а) действительные значения, б) чисто мнимые значения.

1.14. Найдите все значения z , для которых

$$a) |\operatorname{tg} z| = 1; \quad b) |\operatorname{th} z| = 1.$$

1.15. Найдите суммы:

$$a) 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx;$$

$$b) \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx;$$

$$c) \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x;$$

$$d) \sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x.$$

1.16. Пусть сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$, при этом $\operatorname{Re} z_n \geq 0$. Докажите, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$.

1.17. Докажите, что при любых комплексных значениях величин

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \quad w_1, w_2, \dots, w_n$$

выполняется неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \cdot w_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^n |w_k|^2.$$

1.18. Найдите образы точек а) $z = 1$, б) $z = i$, в) $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ при стереографической проекции.

1.19. При каком условии стереографическими проекциями точек z_1 и z_2 являются диаметрально противоположные точки сферы Римана?

1.20. При каком преобразовании сферы Римана образ точки z переходит в образ точки $\frac{1}{\bar{z}}$?

1.21. Что соответствует на сфере Римана семейству параллельных прямых на комплексной плоскости?

1.22. Найдите длину хорды $k(z_1, z_2)$, соединяющей стереографические проекции точек z_1 и z_2 . Рассмотрите случай, когда одна из точек является бесконечно удаленной точкой.

1.23. Докажите, что поле комплексных чисел изоморфно множеству матриц вида

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

со стандартными операциями сложения и умножения матриц.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1.1. а) $-i$; **б)** 64; **в)** -2 . **1.2. а)** -1 ; **б)** 16; **в)** $-i$. **1.3.** $z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $z = 0$, если $n \in N$, $n \geq 3$; z — любое вещественное число, если $n = 2$; $z = 1$, если $n = 1$; $z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k =$

$0, 1, \dots, -n + 1$, если $n \leq 0$. **1.7.** $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$. **1.8.** Необходимо и достаточно, чтобы отношение $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ являлось действительным числом.

1.9. а) Эллипс с фокусами в точках $z=2$, $z=-i$ и большой полуосью $\frac{5}{2}$; **б)** внутренность левой ветви гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 2$ и действительной полуосью $\frac{3}{2}$; **в)** семейство гипербол $x^2 - y^2 = M$; **г)** семейство гипербол $xy = \frac{M}{2}$; **е)** окружность с центром в точке $\frac{2}{3}$ и радиусом $R = \frac{2}{3}$.

1.10. $|z|_{\max} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4} + a)$, $|z|_{\min} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4} - a)$.

1.11. а) $\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; **б)** $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$;

в) $\sqrt[5]{5}(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$, $\varphi_k = \frac{\pi - \arctg \frac{3}{4} + 2\pi k}{7}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

г) $(2k+1)\pi i$; **е)** $\ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2\pi k h)$; **ф)** $\cos(2\sqrt{2}\pi k) + i \sin(2\sqrt{2}\pi k)$;

г) $e^{2\pi k}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$; **д)** $e^{(2k - \frac{1}{2})\pi}$; **е)** $2\pi k \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$;

ж) $\frac{1}{2} \left(\arctg \frac{1}{2} + (2k+1)\pi \right) + \frac{i}{4} \ln 5$. **1.12. а)** $z = \frac{\pi}{4} \pm \arctg \sqrt{7} + 2\pi k$;

б) $z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \ln(\sqrt{2} \pm 1)$; **в)** $z = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k - i \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$; $z =$

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \ln \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. **1.13. а)** $\operatorname{Im} \cos z = 0$, если $\operatorname{Re} z = \pi k$ или

$\operatorname{Im} z = 0$; **б)** $\operatorname{Re} \cos z = 0$, если $\operatorname{Re} z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. **1.14. а)** $\operatorname{Re} z =$

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; **б)** $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. **1.15. а)** $\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$; **б)** $\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$;

в) $\frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$; **г)** $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$. **1.16. а)** $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, **б)** $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, **в)** $(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2})$,

все точки лежат на экваторе сферы. **1.19.** $z_1 \cdot \bar{z}_2 = -1$. **1.20.** При повороте сферы на угол π вокруг диаметра, параллельного действительной оси комплексной плоскости. **1.21.** Окружности, пересекающиеся в единственной точке - полюсе сферы. **1.22.** $k(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}$,

$k(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ПАРАГРАФУ 1

Найдите все значения выражений и все решения уравнения. Запишите ответ в алгебраической или показательной форме. Изобразите (схематически) полученные числа на комплексной плоскости.

	Корни	Степени	Уравнения
1	$\sqrt[3]{-1+i}$	$(3-4i)^{1+i}$	$\sin z + \cos z = 2i$
2	$\sqrt[4]{4i-3}$	$(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{1-i}$	$\cos z + \sin z = -2i$
3	$\sqrt[5]{12i-5}$	$(-2+2i)^{\sqrt{2}}$	$\sin z - \cos z = 2i$
4	$\sqrt{1+i\sqrt{3}}$	$(-3+4i)^{1+i}$	$\sin z - \cos z = -2i$
5	$\sqrt[8]{-2+2i}$	$(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{1-i}$	$\cos z - \sqrt{3} \sin z = 5i$
6	$\sqrt{5+12i}$	$(1-i)^{-i}$	$\sin z - \cos z = -i$
7	$\sqrt[3]{-1-i}$	2^{i-2}	$\sin z + \sqrt{3} \cos z = 4$
8	$\sqrt[4]{2-5i}$	$(3+4i)^i$	$\sin z - \sqrt{3} \cos z = 4i$
9	$\sqrt[6]{3-3i}$	$(1+i)^{-i}$	$\sqrt{3} \sin z - \cos z = 4$
10	$\sqrt[7]{-8i}$	$(-2)^{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$	$\sin z + \sqrt{3} \cos z = 2i$
11	$\sqrt[8]{3+4i}$	$(2-2i)^{1+i}$	$\sqrt{3} \cos z + \sin z = i$
12	$\sqrt[3]{-12-5i}$	$(-5-5i)^i$	$\cos z - \sin z = -i$
13	$\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$	$(\sqrt{3}+i)^{2-i}$	$\sqrt{3} \cos z - \sin z = -3$
14	$\sqrt[5]{-4+3i}$	$(-1+\sqrt{3}i)^{2i}$	$\sin(2z) - i \cos z = 0$
15	$\sqrt[6]{-64i}$	$(2+i)^{-i}$	$\cos^2 z + i \sin z = 0$

§ 2. Функции комплексного переменного. Аналитические и гармонические функции.

1. Непрерывность функции комплексного переменного.

Пусть $D \subset C$ – область и точка $z_0 \in D$.

Определение. Число $\lambda \in C$ называется пределом функции $f : D \rightarrow C$ в точке z_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $0 < |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

При этом используется стандартная запись

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda.$$

Всякая функция $f : D \rightarrow C$ может быть записана в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y), v(x, y)$ – действительнoзначные функции и $z = x + iy$. При этом функция u называется действительной частью функции f и обозначается $u = \operatorname{Re} f$, функция v называется мнимой частью функции f и обозначается $v = \operatorname{Im} f$.

Для существования предела функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda = a + ib$$

необходимо и достаточно одновременное существование пределов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = a, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = b.$$

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Иными словами, функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $|z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Из свойств предела функции следует, что непрерывность $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, как функции комплексного переменного z , эквивалентна одновременной непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , как функций двух действительных переменных.

Если функции $f : D \rightarrow C$ сопоставить отображение $F : D \subset R^2 \rightarrow R^2$, полагая $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, то очевидно, что существование предела и непрерывность функции комплексного переменного $f(z)$ эквивалентны соответственно существованию предела и непрерывности отображения $F(x, y)$. Поэтому для непрерывных функций комплексного переменного верны все свойства непрерывных отображений из R^2 в R^2 , известные из действительного анализа.

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ равномерно сходится к функции $f(z)$ на множестве $E \subset C$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ и всех $z \in E$ выполняется неравенство

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

В комплексной плоскости имеет место критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Напомним его формулировку.

Теорема (Критерий Коши). Для равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ на множестве $E \subset C$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$, $m \in N$ и всех $z \in E$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Достаточное условие равномерной сходимости дает

Теорема (Признак Вейерштрасса). Если $|f_k(z)| \leq a_k$ для всех $z \in E$ и числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ равномерно сходится на множестве E .

Теорема (Вейерштрасса о равномерной сходимости). Если функции $f_k(z)$ непрерывны, то сумма равномерно сходящегося ряда $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ является непрерывной функцией.

2. Дифференцируемость функции комплексного переменного.

Определение. Функция комплексного переменного $f : D \rightarrow C$ называется дифференцируемой в точке $z_0 \in C$, если существует такое число $\lambda \in C$, что

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \lambda(\Delta z) + o(\Delta z) \quad \text{при } \Delta z \rightarrow 0. \quad (1)$$

Если функция $f : D \rightarrow C$ дифференцируема в точке z_0 , то соответствующее число λ называется производной функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается стандартным образом $f'(z_0)$.

В равенстве (1) символ $o(\Delta z)$ понимается в стандартном смысле

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0,$$

следовательно $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$ при $\Delta z \rightarrow 0$.

Равенство (1) эквивалентно существованию конечного предела

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (2)$$

Практически дословное повторение доказательств из одномерного действительного анализа позволяет получить стандартные правила нахождения производной:

1. $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$;
2. $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$;
3. $(f/g)'(z) = (f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z))(g(z))^{-2}$;
4. $(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot (g'(z))$.

В отличие от непрерывности дифференцируемость функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в смысле комплексного переменного не сводится к дифференцируемости ее действительной и мнимой частей как функций двух действительных переменных.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(z) = ax + iby$, у которой действительная часть $\operatorname{Re} f(z) = ax$ и мнимая часть $\operatorname{Im} f(z) = by$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Если выбрать приращение аргумента вдоль прямой параллельной действительной оси, то $\Delta z = \Delta x$ и

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a,$$

если же выбрать приращение аргумента вдоль прямой параллельной мнимой оси, то $\Delta z = i\Delta y$ и

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{ib\Delta y}{i\Delta y} = b.$$

Таким образом для дифференцируемости функции $f(z) = ax + iby$ в смысле комплексного переменного гладкости ее действительной и мнимой частей оказывается *недостаточно*, и данная функция будет дифференцируемой только при $a = b$, т.е. в случае, когда $f(z) = az$!

Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в смысле комплексного переменного дает следующая теорема.

Теорема. Для дифференцируемости в смысле комплексного переменного функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны быть дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух действительных переменных;

2. частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) должны быть связаны условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Замечание. Для вычисления производной мы можем использовать различные формулы:

$$\begin{aligned} f'(z_0) = A + iB &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \dots \end{aligned}$$

Пример 2. Докажем, используя условия Коши-Римана, что функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

Имеем $u(x, y) = x$ и $v(x, y) = -y$, тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$, то есть нигде не выполняется первое условие Коши-Римана.

Следующий пример показывает, что для дифференцируемости функции в комплексном смысле необходимы оба условия из теоремы — выполнение только условий Коши-Римана не достаточно.

Пример 3. Докажем, что для функции $f(z) = \sqrt{|xy|}$ в точке $z = 0$ выполняются условия Коши-Римана, но производная не существует.

Имеем $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ и $v(x, y) = 0$, откуда сразу же следует, что $\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0$. Частные производные от функции u найдем по определению:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Видим, что условия Коши-Римана в точке $z = 0$ выполняются.

Убедимся, что производной в этой точке не существует, вычислив соответствующий предел при стремлении приращения Δz к нулю по разным направлениям.

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y} = \\ & = \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta x} = \frac{1-i}{2} & \text{по направлению } \Delta y = \Delta x, \Delta x > 0 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{0}{\Delta x} = 0 & \text{по действительной оси } \Delta y = 0, \Delta x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Значения предела различны, следовательно, производная не существует.

Если в соотношении

$$w = f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = g(z, \bar{z})$$

рассматривать z и \bar{z} как независимые переменные, то производные по этим переменным будут равны

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Эти производные принято называть *формальными производными по Коши*.

Несложно доказать, что условия Коши-Римана эквивалентны условию $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ (смотрите упражнение 2.4 в конце параграфа). Это условие часто называют *условием Коши-Римана в комплексной форме*. Его удобно использовать, если исследуемая на дифференцируемость функция записана в переменных z и \bar{z} . Так, в примере 2 этого параграфа достаточно взять производную $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$, чтобы убедиться в том, что функция нигде не дифференцируема.

Определение. Функция $f : D \rightarrow C$ называется *аналитической в области* $D \subset C$, если она дифференцируема в каждой точке области D .

Определение. Функция f называется *аналитической в точке* $z_0 \in C$, если существует окрестность точки z_0 , в которой функция f является аналитической.

Таким образом, говоря об аналитичности функции в точке, мы заранее предполагаем, что функция определена не только в данной точке, но определена и является аналитической в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Функция f называется *аналитической на множестве* $E \subset C$, если она является аналитической в каждой точке множества E .

К примеру, если функция является аналитической в замкнутом шаре $\overline{B(a, r)}$, то она является аналитической и в некотором открытом множестве, содержащем данный замкнутый шар, и следовательно является аналитической и в некотором открытом шаре $B(a, r + \varepsilon) \supset \overline{B(a, r)}$.

Замечание. В математике принято называть аналитическими функции, представимые сходящимися степенными рядами. Данное нами здесь определение аналитических функций комплексного переменного вполне согласуется с общим подходом, т.к. далее будет показано, что всякая аналитическая в области функция комплексного переменного в некоторой окрестности произвольной точки области представима степенным рядом.

3. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного.

Пусть функция $f = u + iv$ является аналитической в окрестности U точки $z_0 \in C$ и $f'(z_0) \neq 0$.

Несложно показать, что отображение, осуществляемое дифференци-

алом функции f в точке z_0 , сводится к растяжению с коэффициентом $|f'(z_0)|$ и повороту на угол $\varphi = \arg f'(z_0)$. В этом заключается *геометрический смысл* производной аналитической в окрестности точки функции, у которой производная не обращается в нуль в этой точке.

Очевидно, что при отображении аналитической функцией f в точке z_0 ($f'(z_0) \neq 0$) коэффициент растяжения не зависит от направления и равен $|f'(z_0)|$. Это свойство обычно называют *постоянством растяжения по всем направлениям*.

Также и угол между произвольными гладкими кривыми в точке z_0 ($f'(z_0) \neq 0$) равен углу между образами данных кривых в точке $w_0 = f(z_0)$. Это свойство обычно называют *консерватизмом углов*.

Определение. Отображение f области $D \subset C$ на область $D' \subset C$ называют *конформным*, если отображение $f : D \rightarrow D'$ является взаимно однозначным и в каждой точке $z \in D$ обладает свойствами постоянства растяжения по всем направлениям и консерватизма углов.

Если функция f является аналитической в области $D \subset C$ и $f'(z) \neq 0$ всюду в области D , то в каждой точке $z \in D$ функция f обладает свойствами постоянства растяжения по всем направлениям и консерватизма углов. Однако отличие производной от нуля в общем случае не гарантирует взаимную однозначность отображения во всей области.

Пример 4. Рассмотрим кольцо $D = \{z \in C \mid 1 < |z| < 2\}$ и $f(z) = z^2$. Функция $w = f(z) = z^2$ отображает кольцо D на кольцо $D' = \{w \in C \mid 1 < |w| < 4\}$, при этом $f'(z) = 2z$ и, следовательно, $f'(z) \neq 0$ всюду в кольце D . Однако отображение не будет взаимно однозначным во всем кольце D , поскольку с каждой точкой $z \in D$ точка $-z$ также принадлежит кольцу D и при этом $f(-z) = (-z)^2 = z^2 = f(z)$.

Это отображение не будет взаимно однозначным во всем кольце D , но будет *локально* взаимно однозначным, т.е. будет взаимно однозначным в некоторой окрестности каждой точки кольца D . Это гарантирует следующая

Теорема (об обратной функции). Пусть функция f является аналитической в точке $z_0 \in C$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда существуют такие окрестности U_0 точки z_0 и V_0 точки $w_0 = f(z_0)$, что отображение $f : U_0 \rightarrow V_0$ является конформным. При этом существует обратная функция $f^{-1} : V_0 \rightarrow U_0$, которая является аналитической в окрестности V_0 .

4. Гармонические функции.

Определение. Дважды непрерывно дифференцируемая в области $D \subset C$ функция $u = u(x, y)$ называется гармонической в этой области, если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

всюду в области D .

Оператор в левой части равенства называют оператором Лапласа и кратко обозначают: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Определение. Гармонические в области D функции называются *сопряженными*, если они связаны условиями Коши-Римана.

Теорема. Для аналитичности функции $f = u + iv$ в области D необходимо и достаточно, чтобы ее действительная часть u и мнимая часть v были сопряженными гармоническими функциями.

Теорема. Пусть функция u является гармонической в односвязной области $D \subset C$. Тогда сопряженная к ней гармоническая в той же области функция находится однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

Пример 5. Пусть дана функция $u(x, y) = x^2 - y^2 + y$, восстановим функцию $v(x, y)$ такую, что $f = u + iv$ аналитична. Поскольку u гармоническая на всей комплексной плоскости, в качестве односвязной области D можно брать всю плоскость C . Найдем производные функции u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1.$$

В силу условий Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 1.$$

Из первого условия получаем

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int 2x dy = 2xy + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция переменной x , пока неизвестная. Эту функцию определим из второго условия. Для этого продифференцируем v по x :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + \varphi(x)) = 2y + \varphi'(x)$$

и приравняем (в силу второго условия) к $-\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 1$:

$$2y + \varphi'(x) = 2y - 1,$$

откуда получим: $\varphi'(x) = -1$, $\varphi(x) = -x + C$, где C — произвольная (действительная) постоянная. Итого:

$$v(x, y) = 2xy - x + C.$$

Искомая функция имеет вид

$$f(z) = x^2 - y^2 + y + i(2xy - x) + iC = (x + iy)^2 - i(x + iy) + iC = z^2 - iz + iC.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Для отображения $w = \frac{1}{z}$ найдите образы линий

a) $x = C$; b) $\operatorname{Arg} z = \alpha$; c) $|z - 1| = 1$.

2.2. Для отображения $w = z + \frac{1}{z}$ найдите образ окружности $|z| = R$.

2.3. Для отображения $w = e^z$ найдите образы линий

a) $x = C$; b) $y = C$; c) $y = x$.

2.4. Докажите, что условия Коши-Римана эквивалентны условию:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0.$$

2.5. Дана комплекснозначная функция $f(x, y) = (1 + ib)x + (a + ic)y$. Найдите постоянные a, b, c , при которых эта функция будет аналитической на всей комплексной плоскости. Запишите получившуюся аналитическую функцию как функцию от переменной z .

2.6. Найдите области, в которых функция $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ будет аналитической. Является ли функция аналитической в точке $z = 0$?

2.7 Пусть $f(z) = u + iv = R e^{i\theta}$. Докажите, что если одна из функций u, v, R, θ тождественно равна постоянной, то и функция $f(z)$ является постоянной.

2.8. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$ и $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$. Запишите условия Коши-Римана в полярных координатах.

2.9. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при отображении $w = z^2 + 2z$?

2.10. Пусть $D \subset C$ — область, функция $f(z)$ является аналитической в области D , $\gamma \subset D$ — произвольная кусочно-гладкая кривая и $\gamma^* = f(\gamma)$. Покажите, что для длины образа кривой γ справедлива формула

$$l(\gamma^*) = \int_{\gamma} |f'(z)| |dz|.$$

2.11. Найдите длину спирали, на которую с помощью функции e^z отображается отрезок

$$I = \{y = x, 0 \leq x \leq 2\pi\}.$$

2.12. Пусть $D \subset C$ — область, функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на область $D^* \subset C$. Покажите, что для площади образа справедлива формула

$$S(D^*) = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy.$$

2.13. Найдите площадь области, на которую с помощью функции e^z отображается прямоугольник

$$P = \{1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}.$$

2.14. Пусть функция u является гармонической. Для каких функций f функция $f(u)$ будет тоже гармонической?

2.15. Пусть функция $f(z)$ является аналитической. Будут ли гармоническими функции $|f(z)|$, $\ln |f(z)|$?

2.16. Найдите аналитические функции $f(z) = u + iv$ по заданной действительной или мнимой части:

a) $u = x^2 - y^2 + x$;

b) $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$;

c) $v = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$;

d) $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

2.17. Найдите аналитические функции $f(z) = Re^{i\theta}$ по заданным модулю или аргументу функции:

- а) $R = (x^2 + y^2)e^x$;
 б) $R = e^{\rho^2 \cos 2\varphi}$;
 в) $\theta = xy$;
 г) $\theta = \varphi + \rho \sin \varphi$.

2.18. Докажите, что функция комплексного переменного, осуществляющая конформное отображение некоторой области $D \subset C$, является аналитической в этой области.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

- 2.1. а)** окружности $u^2 + v^2 - \frac{u}{C} = 0$, при $C = 0$ — ось $u = 0$; **б)** лучи $\arg z = -\alpha$; **в)** прямая $u = \frac{1}{2}$. **2.2.** окружность $|z| = R \neq 1$ отображается на эллипс $\frac{u^2}{(R + R^{-1})^2} + \frac{v^2}{(R - R^{-1})^2} = 1$, а окружность $|z| = 1$ на отрезок $u = 0, -2 \leq v \leq 2$. **2.3. а)** окружности $\rho = e^C$, **б)** лучи $\theta = C$, **в)** спираль $\rho = e^\theta$. **2.5.** $c = 1, a = -b, f(z) = (1 - ai)z$. **2.6.** Функция аналитическая при $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4}, (f(z) = z^2)$ и при $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4}, (f(z) = -z^2)$. **2.7.** Указание: получите условия Коши — Римана для функций R и θ : $\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \theta}{\partial x}$. **2.8.** $r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$. **2.9.** Сжимается при $|z + 1| < 1/2$, растягивается при $|z + 1| > 1/2$. **2.11.** $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$. **2.13.** $2e^2(e^2 - 1)$. **2.14.** $f(u) = au + b$. **2.15.** Нет. Да. **2.16. а)** $f = z^2 + z + Ci$; **б)** $f = z^2 + (5 - i)z - \frac{i}{z} + Ci$; **в)** $f = \frac{1}{2z} + iz^2 + 3i + C$; **г)** $f = 2i \ln z - (2 - i)z + C$; всюду C — произвольная действительная постоянная. **2.17. а)** $f = e^{i\alpha} z^2 e^z$, **б)** $f = e^{i\alpha} e^{z^2}$, α — произвольная действительная постоянная; **в)** $f = Ae^{z^2/2}$, **г)** $f = Aze^z$, A — произвольная положительная постоянная. Указание: смотрите указание к задаче 2.7.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ПАРАГРАФУ 2

1. Условия Коши-Римана.

Укажите множество точек, в которых функция $f(z)$ дифференцируема в комплексном смысле.

- | | | |
|-----------------------------------|--|--|
| 1. $f(z) = z \operatorname{Re} z$ | 2. $f(z) = z \operatorname{Im} z$ | 3. $f(z) = z ^2 z$ |
| 4. $f(z) = \ln z ^2$ | 5. $f(z) = z ^2$ | 6. $f(z) = \bar{z} e^z$ |
| 7. $f(z) = \bar{z} \cos z$ | 8. $f(z) = \bar{z} ^2$ | 9. $f(z) = \sin \bar{z}$ |
| 10. $f(z) = z e^{\bar{z}}$ | 11. $f(z) = \ln \bar{z} ^2$ | 12. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$ |
| 13. $f(z) = \ln \bar{z}$ | 14. $f(z) = z \operatorname{Im} \bar{z}$ | 15. $f(z) = z^2 \operatorname{Re} z$ |

2. Гармонические функции.

Восстановите аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части. Запишите ее как функцию переменной z .

- | | |
|--|---|
| 1. $u = x^3 - 3xy^2 + 2y$ | 2. $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ |
| 3. $u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$ | 4. $v = y + \frac{y}{x^2 + y^2}$ |
| 5. $u = x \sin x \operatorname{ch} y - y \cos x \operatorname{sh} y$ | 6. $v = e^x (x \cos y - y \sin y)$ |
| 7. $u = \ln(x^2 + y^2) - xy$ | 8. $v = 2x - 3x^2 y + y^3$ |
| 9. $u = \frac{x}{x^2 + y^2} - x^2 + y^2$ | 10. $v = y \cos x \operatorname{ch} y - x \sin x \operatorname{sh} y$ |
| 11. $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ | 12. $v = e^{-y} (x \cos x - y \sin x)$ |
| 13. $u = 3x^2 - 3y^2 + 3xy - 3$ | 14. $v = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)}$ |
| 15. $u = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y$ | |

§ 3. Элементарные аналитические функции.

1. Дробно-линейные функции.

Дробно-линейной называется функция вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

где $a, b, c, d \in C$, $ad - bc \neq 0$.

Ограничение на коэффициенты связано с тем, что при $ad - bc = 0$ функция будет постоянной. При $c = 0$ обязательно $d \neq 0$ и функция (1) имеет вид

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

т.е. является *линейной*.

Далее мы будем предполагать, что $c \neq 0$. Изменения для случая $c = 0$ вполне очевидны, и, естественно, что свойства верные для дробно-линейных функций общего вида будут верны и для линейных функций.

Значения функции (1) при $c \neq 0$ однозначно определены всюду за исключением двух особых точек $z = -d/c$ и $z = \infty$ (при $c = 0$ функция определена для всех $z \in C$). Доопределим функцию в особых точках, полагая $w(-d/c) = \infty$, $w(\infty) = a/c$ (в случае $c = 0$ достаточно положить $w(\infty) = \infty$, при этом из всех функций вида (1) только линейные функции будут отображать бесконечно удаленную точку в бесконечно удаленную точку). Доопределенная таким образом дробно-линейная функция будет взаимно однозначно и непрерывно отображать всю расширенную комплексную плоскость \bar{C} на себя.

Из равенства (2) следует, что функция обратная к дробно-линейной также будет дробно-линейной. Несложно проверить, что композиция двух дробно-линейных функций вновь будет дробно-линейной функцией. Дробно-линейные функции образуют ассоциативную группу отображений расширенной комплексной плоскости на себя, и единицей в этой группе будет являться тождественное отображение.

Проверьте свойство *ассоциативности* и покажите, что композиция двух дробно-линейных функций в общем случае не обладает свойством *коммутативности*!

Деля в (1) числитель и знаменатель на c , легко увидеть, что дробно-линейная функция однозначно определяется тремя комплексными коэффициентами. Можно предположить, что для нахождения дробно-

линейной функции достаточно знать ее значения в трех различных точках.

Теорема. Для произвольных трех различных точек $z_1, z_2, z_3 \in C$ и произвольных трех различных точек $w_1, w_2, w_3 \in C$ существует единственное дробно-линейное отображение $w = L(z)$ такое, что $L(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.

Отображение в явном виде находится из равенства

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (2)$$

Замечание. Выражение

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

называют *ангармоническим отношением* четырех точек. Равенство (2) означает инвариантность ангармонического отношения при дробно-линейном отображении.

Замечание. Каждая из точек z_k и w_k входит в равенство (2) дважды - в числителе и знаменателе. Несложно проверить, что равенство сохраняется и в том случае, когда какая-либо из точек z_k и соответственно из точек w_k является бесконечно удаленной: нужно только множители, в которых появляется бесконечно удаленная точка заменить на единицу. Например, когда $z_3 = w_1 = \infty$, равенство (2) принимает вид

$$\frac{1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{1}{1}.$$

Таким образом, теорема остается верной и для точек расширенной комплексной плоскости.

Производная дробно-линейной функции (1)

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

однозначно определена и отлична от нуля во всех точках $z \in C \setminus \{-d/c\}$. Следовательно дробно-линейная функция конформно отображает $C \setminus \{-d/c\}$ на $C \setminus \{a/c\}$. Можно показать, что и в особых точках $z = -d/c$ и $z = \infty$ углы сохраняются.

Дробно-линейные (и линейные!) функции обладают *круговым свойством*: всякая окружность или прямая на комплексной плоскости дробно-линейной функцией отображается в окружность либо в прямую.

Определение. Точки z и z^* называются *симметричными* относительно окружности $\Gamma \subset C$, если они лежат на одном луче с вершиной в центре окружности и произведение их расстояний до центра окружности равно квадрату радиуса окружности Γ .

Если центр окружности находится в точке z_0 и ее радиус равен R , то $\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0)$,
 $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$ и

$$z^* - z_0 = R^2 / (\overline{z - z_0}).$$

Нетрудно заметить, что бесконечно удаленная точка $z^* = \infty$ будет симметрична относительно окружности Γ точке z_0 – центру окружности.

Заметим, что отображение, сопоставляющее точке ее симметричный образ, только сопряжением отличается от формулы дробно-линейного отображения. Поэтому симметрия относительно окружности обладает многими свойствами дробно-линейных отображений. В частности, круговым свойством и консерватизмом углов.

Вообще, в комплексном анализе часто оказывается удобным считать прямую “окружностью бесконечного радиуса”, поскольку при стереографической проекции и окружности и прямые, лежащие на комплексной плоскости, отображаются в окружности на сфере Римана. Далее, чтобы отметить тот факт, что данное множество точек комплексной плоскости является либо окружностью, либо прямой, мы будем писать “*окружность*”.

Теорема. При дробно-линейном отображении L точки z и z^* , симметричные относительно “окружности” Γ , отображаются в точки w и w^* , симметричные относительно “окружности” $L(\Gamma)$.

Пример 1 (отображение верхней полуплоскости на единичный круг). Найдем общий вид дробно-линейного отображения верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $\{|z| < 1\}$.

Пусть точка a , $\operatorname{Im} a > 0$, отображается в центр круга $w = 0$. Тогда точка \bar{a} , симметричная точке a относительно действительной оси, отображается в бесконечно удаленную точку $w = \infty$, симметричную точке $w = 0$ относительно единичной окружности $\{|z| = 1\}$. По точкам, которые отображаются в нуль и бесконечность дробно-линейная функция находится однозначно с точностью до постоянного множителя:

$$w = \lambda \frac{z - a}{z - \bar{a}}.$$

Действительная ось отображается в единичную окружность, и, в частности,

$$|w(0)| = |\lambda| \frac{|a|}{|\bar{a}|} = |\lambda| = 1.$$

Следовательно $\lambda = e^{i\theta}$, а искомое отображение имеет вид

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}},$$

где a – произвольная точка верхней полуплоскости, и θ – произвольное действительное число.

2. Степенная функция.

Степенная функция

$$w = z^n, \quad (3)$$

где $n > 1$ – натуральное число, является аналитической во всей комплексной плоскости C .

Ее производная $w' = nz^{n-1} \neq 0$ при $z \neq 0$, и, следовательно, отображение (3) является конформным в окрестности каждой точки области $C \setminus \{0\}$. Используя показательную форму записи комплексных чисел $z = re^{i\varphi}$, получаем

$$w = r^n e^{in\varphi}.$$

Из последнего равенства видно, в точке $z = 0$ отображение не будет конформным, т.к. в нуле все углы увеличиваются в n раз.

Являясь взаимно-однозначным в окрестности каждой точки $z \neq 0$, отображение (3) не будет взаимно-однозначным во всей области $C \setminus \{0\}$, поскольку различные точки $z_1 = re^{i\varphi}$ и $z_2 = re^{i(\varphi+2\pi/n)}$ отображаются в одну точку

$$w(z_2) = r^n e^{in\varphi} e^{i2\pi} = r^n e^{in\varphi} = w(z_1).$$

Найдем области однозначности степенной функции (3). Пусть $z_1^n = z_2^n$, тогда $|z_1|^n = |z_2|^n$ и, следовательно, $|z_1| = |z_2|$. Из условия $\arg(z_1^n) = \arg(z_2^n)$ следует, что $|\arg(z_1) - \arg(z_2)| = \frac{2\pi k}{n}$ при некотором $0 \leq k \leq n-1$. Таким образом область, в которой степенная функция (3) является взаимно-однозначной, не должна содержать точек, у которых модули равны, а разность аргументов кратна $\frac{2\pi}{n}$.

Примерами таких областей являются секторы

$$D_k = \{z \in C \mid 0 < |z|, \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Несложно заметить, что функция $w = z^n$ отображает каждый из секторов D_k на одну и ту же область E_0 – на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль неотрицательной части действительной оси.

Таким образом всякой точке $w \in E_0$ соответствуют ровно n образов – по одному в каждой области D_k . Следовательно, если мы стандартным образом определим значение $t = \sqrt[n]{w}$ условием: $t^n = w$, то мы получим n решений

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i \frac{\arg w + 2\pi k}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

При стандартном определении понятия функции, вообще говоря, обратное соответствие

$$\sqrt[n]{w} : E_0 \rightarrow C$$

функцией не является, поскольку одной точке $w \in E_0$ ставится в соответствие множество различных точек $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$.

В данном случае мы должны говорить либо о “многозначной функции”, либо о наборе однозначных функций $\{f_k : E_0 \rightarrow D_k\}$, каждая из которых осуществляет конформное отображение области E_0 на область D_k . Функции f_k называют *ветвями* многозначной функции $z = \sqrt[n]{w}$. Далее говоря о значениях многозначной функции, мы всякий раз должны знать – с какой конкретно однозначной ветвью функции мы имеем дело в данном случае.

В нашем определении ветвей функции $z = \sqrt[n]{w}$ имеется существенный недостаток – ни одна из ветвей не определена на положительной действительной полуоси. При этом ни одну из ветвей нельзя продолжить на положительную действительную полуось так, чтобы получаемая функция была аналитической во все комплексной плоскости C . К примеру, доопределяя ветвь f_0 по непрерывности изнутри области в точке $w = 1$, с одной стороны, при стремлении w к точке $w_0 = 1$ “сверху” получаем

$$\lim_{w \rightarrow 1+i0} f_0(w) = 1,$$

с другой стороны, при стремлении w к точке $w_0 = 1$ “снизу” получаем

$$\lim_{w \rightarrow 1-i0} f_0(w) = e^{i \frac{2\pi}{n}}.$$

Таким образом функцию f_0 нельзя доопределить на положительной полуоси даже с сохранением непрерывности, не говоря уже об аналитичности.

Однако области однозначности степенной функции, а следовательно и ветви функции $z = \sqrt[n]{w}$ можно выбирать множеством различных способов. К примеру, функция $w = z^n$ будет взаимно-однозначной в каждом из секторов

$$D_k^* = \{z \in C \mid 0 < |z|, \frac{-\pi + 2\pi k}{n} < \arg z < \frac{\pi + 2\pi(k+1)}{n}\},$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Степенная функция (3) отображает каждый из секторов D_k^* на одну и ту же область E_0^* – на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Ветви $\{f_k^* : E_0^* \rightarrow D_k^*\}$ будут определены на положительной действительной полуоси, но не будут определены на отрицательной действительной полуоси.

Можно выделить ветви, которые будут определены на действительной оси, но не определены на мнимой полуоси, и т.д. Отметим, что при всей неоднозначности выделения однозначных ветвей, если две различные ветви g и h определены в точке w_0 , и $g(w_0) = h(w_0)$, то существует окрестность точки w_0 , в которой $g(w) = h(w)$, хотя в других точках значения этих ветвей могут быть различными. К примеру, $f_0(w) = f_0^*(w)$ в верхней полуплоскости, но $f_0(w) \neq f_0^*(w)$ в нижней полуплоскости.

3. Показательная функция.

По аналогии с действительным случаем *показательная функция* e^z уже была определена как предел соответствующей последовательности

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

При этом была получена формула

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Показательная функция является аналитической во всей комплексной плоскости, и ее производная

$$(e^z)' = e^z \neq 0.$$

Поскольку производная всюду отлична от нуля, то в окрестности каждой точки отображение, осуществляемое показательной функцией,

будет конформным. Однако это отображение не будет взаимно однозначным во всей комплексной плоскости, т.к. к примеру, для точек z и $z_1 = z + i2\pi k$ получаем

$$e^{z_1} = e^{z+i2\pi k} = e^z e^{i2\pi k} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

Найдем области однозначности показательной функции. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ и $e^{z_1} = e^{z_2}$. Из равенства модулей получаем

$$e^{x_1} = |e^{z_1}| = |e^{z_2}| = e^{x_2},$$

следовательно $x_2 = x_1$. Но тогда

$$e^{iy_2} = e^{iy_1}, \quad e^{iy_2} \cdot e^{-iy_1} = e^{i(y_2-y_1)} = 1 = e^{i2\pi k},$$

т.е. $y_2 - y_1 = 2\pi k$.

Таким образом, область однозначности показательной функции не должна содержать различных точек, у которых действительные части равны, а мнимые отличаются на слагаемое, кратное 2π . Примером таких областей могут служить полосы, параллельные действительной оси,

$$D_k = \{z \in C \mid 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}, \quad k \in Z.$$

Поскольку показательная функция отображает прямую $\operatorname{Im} z = \alpha$, параллельную действительной оси, в луч, выходящий из нуля под углом α к положительному направлению действительной оси, то образом всякой полосы D_k будет одна и та же область E_0 – вся комплексная плоскость с разрезом вдоль неотрицательной части действительной оси.

Таким образом всякой точке $w \in E_0$ соответствует бесконечно много прообразов – по одному в каждой области D_k . Следовательно, если мы стандартным образом определим обратное соответствие $t = \operatorname{Ln} w$ условием: $e^t = w$, то мы получим бесконечно много решений, которые находятся из равенств:

$$|w| = e^{\operatorname{Re} t}, \quad \operatorname{Arg} w = \operatorname{Im} t, \quad t = \ln |w| + i \cdot \operatorname{Arg} w.$$

Обозначая через $\ln w$ ветвь логарифма, принимающую значения в области D_0 , т.е. $\ln w = \ln |w| + i \cdot \arg w$, для остальных ветвей логарифма получим: $f_k(w) = \ln w + i2\pi k$ или $\operatorname{Ln} w = \ln |w| + i(\arg w + 2\pi k)$, $k \in Z$.

4. Тригонометрические и гиперболические функции.

Аналитические на всей комплексной плоскости C функции

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

совпадают на действительной оси со стандартными тригонометрическими функциями действительного аргумента.

Непосредственно из определения следует, что для синуса и косинуса комплексного переменного сохраняются многие стандартные свойства тригонометрических функций. Так, обе функции будут 2π -периодическими, косинус является четной функцией, а синус - нечетной. Сохраняются стандартные формулы дифференцирования

$$(\sin z)' = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \cos z, \quad (\cos z)' = i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z.$$

Сохраняются также основное тригонометрическое тождество, формулы приведения

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin(z + \pi/2) = \cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z,$$

формулы для синуса и косинуса суммы и разности аргументов и т.д.

Гиперболические функции на комплексной плоскости определяются формулами

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

и для них выполняется *основное гиперболическое тождество*

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Функции, обратные к гиперболическим, будут многозначными.

5. Функция Жуковского.

Дробно-рациональная функция, задаваемая формулой

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

называется *функцией Жуковского*.

Из формулы видно, что функция является аналитической на всей комплексной плоскости C за исключением точки $z=0$. Поскольку производная функции $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0$ во всех точках, кроме точек $z = 0, \pm 1$, то функция осуществляет конформное отображение некоторой окрестности точки $z \neq 0, \pm 1$. Однако функция Жуковского не является взаимно-однозначной на всей комплексной плоскости.

Найдем области однозначности функции.

Из равенства $w(z_1) - w(z_2) = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right)$ следует, что $w(z_1) = w(z_2)$ если и только если $z_1 = z_2$ или $z_1 z_2 = 1$, т.е. чтобы функция осуществляла взаимно-однозначное отображение некоторой области, нужно, чтобы в этой области не было точек z и $\frac{1}{z}$ одновременно.

Таковыми областями являются, например, $D_1 = \{z \in C, |z| > 1\}$ - внешность и $D_2 = \{z \in C, |z| < 1\}$ - внутренность единичного круга, верхняя и нижняя полуплоскости.

Пусть точка z лежит на окружности радиуса r , т.е. $z = re^{i\varphi}$. Тогда

$$w(z) = \frac{1}{2}(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi.$$

При $r \neq 1$ это уравнение эллипса с центром в точке $z = 0$, полуосями $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$, и фокусами $z = \pm 1$. При $r = 1$ это отрезок, лежащий на действительной оси $\{\operatorname{Re} z \in [-1; 1], \operatorname{Im} z = 0\}$. Если точка z пробегает окружность в положительном (против часовой стрелки) направлении, то ее образ - точка $w(z)$ пробегает эллипс также в положительном направлении, если $r > 1$, и в отрицательном направлении, если $r < 1$. При этом две окружности с взаимно-обратными радиусами r и $1/r$ переходят в один и тот же эллипс. При $r \rightarrow 1$ эллипс все больше становится "похож" на отрезок $\{\operatorname{Re} z \in [-1; 1], \operatorname{Im} z = 0\}$, а при $r \rightarrow \infty$ и при $r \rightarrow 0$ — на окружность.

Таким образом, функция Жуковского взаимно-однозначно и конформно отображает внешность и внутренность единичного круга на плоскость с разрезом по отрезку действительной оси. Обратная функция $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, как следует из формулы, двужначна.

Пример 2. Найдем образ единичного круга $\{|z| < 1\}$ с выброшенными отрезками действительной и мнимой оси: $[-1; -\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}; 1]$, $[-i; -\frac{i}{2}]$, $[\frac{i}{2}; i]$ при действии функции Жуковского.

Поскольку функция Жуковского отображает единичный круг на плоскость с разрезом по отрезку $[-1; 1]$, то достаточно проследить, куда она отображает указанные отрезки осей, и затем «выбросить» их из образа круга. Из формулы, задающей функцию Жуковского, видно, что функция является нечетной и как функция от вещественного аргумента она вещественнозначна. Исследование этой функции (вещественного аргумента) дает, что точки $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ являются экстремумами, а на промежутках $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ функция монотонна. Поэтому, вычислив значения в точках $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$, можно понять, что отрезки $[-1; -\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}; 1]$ переходят в отрезки $[-\frac{5}{4}; -1]$, $[1; \frac{5}{4}]$ действительной оси.

Рассмотрим теперь функцию Жуковского от чисто мнимого аргумента $z = iy$. $f(iy) = \frac{i}{2}(y - \frac{1}{y}) = ig(y)$, где $g(y) = \frac{1}{2}(y - \frac{1}{y})$. Видим, что функция f принимает чисто мнимые значения. То есть образом отрезков мнимой оси будут промежутки, лежащие на мнимой оси. Проведя несложное исследование вещественной функции $g(y)$, можно найти образы отрезков $[-i; -\frac{i}{2}]$, $[\frac{i}{2}; i]$. Это будут отрезки мнимой оси $[0; \frac{3i}{4}]$, $[-\frac{3i}{4}; 0]$, соответственно. Итак, образом единичного круга с разрезами будет вся комплексная плоскость без «крестика», образованного выброшенными отрезками: $C \setminus \{[-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}] \cup [-\frac{3i}{4}; \frac{3i}{4}]\}$.

6. Однозначные ветви многозначных функций. Примеры.

Рассмотрим многозначную в области D функцию $f(z)$ и обозначим через $[f]_z$ множество всех значений функции $f(z)$ в точке $z \in D$.

Будем говорить, что функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви в области D , если существует однозначная аналитическая в области D функция $h(z)$ такая, что значение $h(z) \in [f]_z$ при любом $z \in D$.

Будем говорить, что функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви в окрестности точки $z_0 \in D$, если она допускает выделение однозначной аналитической ветви в некоторой проколотой окрестности \dot{U} точки z_0 .

Замечание. В последнем определении значение однозначной аналитической ветви $h(z)$, вообще говоря, в самой точке z_0 может не быть.

быть не определено.

Замечание. Из того, что функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви в окрестности каждой точки $z \in D$, в общем случае, **не следует**, что функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви во всей области D .

Пусть многозначная функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви $h(z)$ в проколотой окрестности \dot{U} точки z_0 . Рассмотрим произвольный замкнутый контур $\gamma \subset \dot{U}$. Поскольку ветвь $h(z)$ является однозначно определенной непрерывной функцией, то при обходе контура γ ее значения будут меняться непрерывным образом и при полном однократном обходе контура значения функции $h(z)$ в начальной и конечной точках обхода должны совпадать.

Проверка этого свойства позволяет дать ответ на вопрос о возможности выделения однозначных ветвей многозначной функции в окрестности фиксированной точки.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt{z^2}$. Мы уже знаем, что в точке $t \neq 0, \infty$ функция \sqrt{t} принимает два различных значения: $\sqrt{t}e^{i\frac{\arg t}{2}}$ и $-\sqrt{t}e^{i\frac{\arg t}{2}}$. Если $z \neq 0, \infty$ и $t = z^2$, то либо $\arg t = 2 \arg z$ либо $\arg t = 2 \arg z - 2\pi$. Поэтому функция $f(z) = \sqrt{z^2}$ принимает в точке z два различных значения: $w_1 = |z|e^{i \arg z} = z$ и $w_2 = -|z|e^{i \arg z} = -z$.

Однозначные аналитические функции $h_1(z) = z$ и $h_2(z) = -z$ являются ветвями многозначной функции $f(z) = \sqrt{z^2}$ в окрестности произвольной точки $z_0 \in \bar{C}$.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$. Мы уже знаем, что функция \sqrt{t} допускает выделение двух однозначных аналитических ветвей $f_1(t)$ и $f_2(t)$ в окрестности произвольной точки $t \neq 0, \infty$. Поэтому функция $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ допускает выделение двух однозначных аналитических ветвей $f_1(z^2 - 1)$ и $f_2(z^2 - 1)$ в окрестности произвольной точки $z \neq \pm 1, \infty$.

Если функция $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ допускает выделение однозначной аналитической ветви $h(z)$ в окрестности \dot{U} точки $z_0 = 1$, то при обходе произвольного замкнутого контура $\gamma \subset \dot{U}$ значение функции $h(z)$ должно меняться непрерывным образом, и приращение функции $h(z)$ при полном обходе контура γ должно быть равным нулю.

В качестве контура $\gamma \subset \dot{U}$ выберем произвольную окружность $|z - 1| = r$, где $r < 1$. Рассмотрим две функции $g_1(z) = z + 1$ и $g_2(z) = z - 1$. При обходе точкой z контура γ , точка $t_1 = g_1(z)$ совершает обход окруж-

ности $|t - 2| = r$, не содержащей внутри себя нулевой точки, т.е. приращение аргумента функции $g_1(z)$ при полном обходе контура γ равно нулю. При обходе точкой z контура γ против часовой стрелки, точка $t_2 = g_2(z)$ совершает полный обход окружности $|t| = r$, поэтому приращение аргумента функции $g_2(z)$ при полном обходе контура γ равно 2π . Таким образом приращение аргумента функции $t = z^2 - 1 = g_1(z) \cdot g_2(z)$ при полном обходе контура γ равно 2π .

В произвольной точке $z \in \gamma$ функция $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ принимает два различных значения

$$w_k(z) = \sqrt{|z^2 - 1|} e^{i \frac{\arg(z^2 - 1) + 2\pi k}{2}},$$

где $k = 0, 1$.

В фиксированной точке $a \in \gamma$ значение функции $h(z)$ должно совпадать с одним из значений $w_k(a)$. Изменяясь непрерывным образом при обходе контура γ значение функции $h(z)$ в конечной точке обхода b , совпадающей с точкой a , должно быть равно

$$h(b) = \sqrt{|a^2 - 1|} e^{i \frac{\arg(a^2 - 1) + 2\pi k + 2\pi}{2}} = -h(a),$$

т.е. приращение функции $h(z)$ при полном обходе контура γ отлично от нуля.

Это означает, что в окрестности точки $z_0 = 1$ **нельзя выделить однозначную аналитическую ветвь** многозначной функции $f(z)$. Аналогичным образом показывается, что и в окрестности точки $z_0 = -1$ нельзя выделить однозначную аналитическую ветвь многозначной функции $f(z)$.

Посмотрим как выглядит ситуация в окрестности бесконечно удаленной точки.

В качестве окрестности \dot{U} точки $z = \infty$ рассмотрим внешность круга, т.е. множество $\dot{U} = C \setminus \overline{B(0, R)}$, где $R > 1$. Пусть a — произвольная точка окрестности \dot{U} , $\gamma \subset \dot{U}$ — произвольный простой замкнутый контур, проходящий через точку a . Если контур γ не содержит внутри себя точку $z = 0$, то приращения аргумента функций $g_1(z) = z + 1$ и $g_2(z) = z - 1$ при полном обходе контура γ равны нулю. Если контур γ содержит внутри себя точку $z = 0$, то при полном обходе контура γ , при котором ограниченная область, содержащая точку $z = 0$, остается слева, приращения аргумента функций $g_1(z)$ и $g_2(z)$ равны 2π . Следовательно, приращение аргумента функции $t = z^2 - 1 = g_1(z) \cdot g_2(z)$ при полном обходе контура γ либо равно нулю либо равно 4π .

Положим, что значение функции $h(z)$ в точке a совпадает с одним из значений $w_k(a)$, а в произвольной точке $z \in \gamma$ мы единственным образом можем выбрать значение $h(z) \in [f]_z$ так, чтобы функция $h(z)$ изменялась непрерывным образом при обходе контура γ , начинающемся в точке a . Тогда для значения функции $h(z)$ в конечной точке обхода b , совпадающей с точкой a , получим

$$h(b) = \sqrt{|a^2 - 1|} e^{i \frac{\arg(a^2 - 1) + 2\pi k + 2\pi m}{2}} = h(a) e^{i\pi m} = h(a),$$

где m , в зависимости от выбора контура γ , либо равно нулю либо равно 2.

Поскольку приращение функции $h(z)$ при полном обходе замкнутого контура получается равным нулю, то в силу произвольности выбора начальной точки a и контура γ , это означает, что в окрестности \dot{U} можно задать такую однозначную непрерывную функцию $h(z)$, что $h(z) \in [f]_z$ при любом $z \in \dot{U}$. Несложно заметить, что значение функции $h(z)$ в произвольной точке $z \in \dot{U}$ однозначно определяется выбором одного из двух возможных значений в начальной точке $a \in \dot{U}$, следовательно в окрестности \dot{U} можно выделить две **непрерывные** однозначные ветви $h_1(z)$ и $h_2(z)$ функции $f(z)$. Осталось проверить, что функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$ являются аналитическими. Однако, мы уже знаем, что в окрестности произвольной точки $z \in \dot{U}$ функция $f(z)$ допускает выделение двух однозначных **аналитических** ветвей $f_1(z)$ и $f_2(z)$, которые, в силу непрерывности, в окрестности точки $z \in \dot{U}$ будут совпадать соответственно с функциями $h_1(z)$ и $h_2(z)$, т.е. функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$ являются однозначными аналитическими ветвями функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Таким образом функция $f(z)$ допускает выделение однозначных аналитических ветвей в окрестности произвольной точки $z \in \overline{C}$, за исключением точек $z = \pm 1$.

Пример 5. Рассмотрим вопрос о возможности выделения однозначных ветвей функций

$$a) f_1(z) = \ln \frac{1-z}{1+z}, \quad b) f_2(z) = \ln \frac{1-z}{(1+z)(2+z)}$$

в окрестности бесконечно удаленной точки.

а) В качестве окрестности \dot{U} точки $z = \infty$ рассмотрим внешность круга, т.е. множество $\dot{U} = C \setminus \overline{B(0, R)}$, где $R > 4$. Дробно-линейная

функция $t = \frac{1-z}{1+z}$ взаимно однозначно отображает окрестность \dot{U} на круг K с выколотой точкой $t_0 = -1$. Оценим расстояние от произвольной точки $t \in K$ до точки t_0

$$|t - t_0| = \left| \frac{1-z}{1+z} + 1 \right| = \left| \frac{2}{1+z} \right| < \frac{2}{R-1} < \frac{2}{3} < 1.$$

Таким образом круг K целиком лежит в левой полуплоскости, и функция $\ln t$ допускает в круге K выделение бесконечного числа однозначных аналитических ветвей

$$h_k(t) = \ln |t| + i(\arg t + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Следовательно функции

$$h_k\left(\frac{1-z}{1+z}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

будут однозначными аналитическими ветвями функции $f_1(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

б) В качестве контура γ выберем произвольную окружность $|z| = R$, где $R > 2$. При полном обходе точкой z контура γ против часовой стрелки приращения аргумента всех трех функций $g_1(z) = 1 - z$, $g_2(z) = 1 + z$, $g_3(z) = 2 + z$ будут равны 2π . Следовательно приращение аргумента функции $t = \frac{1-z}{(1+z)(2+z)}$ будет равно -2π .

В произвольной точке $z \in \gamma$ функция $f_2(z)$ принимает бесконечно много различных значений

$$w_k(z) = \ln \left| \frac{1-z}{(1+z)(2+z)} \right| + i(\arg \frac{1-z}{(1+z)(2+z)} + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если в окрестности бесконечно удаленной точки существует однозначная аналитическая ветвь $h(z)$ многозначной функции $f_2(z)$, то при обходе произвольного замкнутого контура значение функции $h(z)$ должно меняться непрерывным образом, и при полном обходе контура приращение функции $h(z)$ должно быть равным нулю. В фиксированной точке $a \in \gamma$ значение функции $h(z)$ должно совпадать с одним из значений $w_k(a)$. Изменяясь непрерывным образом при обходе контура γ значение функции $h(z)$ в конечной точке обхода b , совпадающей с точкой a , должно быть равно

$$w_k(b) = \ln \left| \frac{1-a}{(1+a)(2+a)} \right| + i(\arg \frac{1-a}{(1+a)(2+a)} + 2\pi k - 2\pi) = w_k(a) - 2\pi i.$$

т.е. приращение функции $h(z)$ при полном обходе контура γ отлично от нуля.

Это означает, что в окрестности точки $z_0 = \infty$ нельзя выделить однозначную аналитическую ветвь многозначной функции $f_2(z)$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Найдите линейное преобразование с неподвижной точкой $1 + 2i$, переводящее точку i в точку $-i$.

3.2. Найдите образ квадранта $K = \{z \in C \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = \frac{z-i}{z+i}$.

3.3. Найдите образ полукруга $B^+ = \{z \in C \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = \frac{2z-i}{2+iz}$.

3.4. Найдите образ полосы $P = \{z \in C \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ при отображении:
а) $w = \frac{z-1}{z}$; б) $w = \frac{z-1}{z-2}$.

3.5. Найдите общий вид дробно-линейного отображения полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ с выкинутым кругом $|z - \frac{d}{2}| \leq \frac{d}{2}$ на вертикальную полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$.

3.6. Найдите дробно-линейное отображение, переводящее точки $-1, i, 1+i$, соответственно, в точки $0, 2i, 1-i$.

3.7. Найдите дробно-линейное отображение, переводящее точки $-1, \infty, i$, соответственно, в точки $\infty, i, 1$.

3.8. Найдите точку, симметричную точке $z = 2+i$ относительно окружности $|z - i| = 3$.

3.9. Найдите симметричный образ относительно единичной окружности $|z| = 1$ следующих линий: а) $y = 2$; б) $|z - 1| = 1$.

3.10. Найдите общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

3.11. Найдите такое дробно-линейное отображение круга $|z| < 2$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, что $w(0) = 1$ и $\arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$.

3.12. Найдите такое дробно-линейное отображение круга $|z - 4i| < 2$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$, что центр круга отображается в точку $w = -4$, а точка окружности $z_0 = 2i$ отображается в начало координат.

3.13. Найдите образ множества

$$E = \{z \in C \mid |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{8}, z \notin [0, 1]\}$$

при отображении $w = z^8$.

3.14. Найдите образ верхнего полуokrуга

$$B^+ = \{z \in C \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$$

при отображении ветвью функции $w = z^{\frac{3}{2}}$, для которой $w\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{1-i}{4}$.

3.15. Найдите какое-либо конформное отображение области

$$D = \{z \in C \mid \operatorname{Im} z > 0, z \notin (0, ih], h > 0\}$$

на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

3.16. Найдите какое-либо конформное отображение верхнего полуokrуга

$$B^+ = \{z \in C \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$$

на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$.

3.17. Найдите какое-либо конформное отображение "луночки образованной окружностью C_1 , проходящей через точки i , $-i$, $1 - \sqrt{2}$, и окружностью C_2 , проходящей через точки i , $-i$, $\sqrt{2} - 1$, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

3.18. Найдите какое-либо конформное отображение плоскости с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

3.19. Докажите, что многозначные функции $f(z) = \operatorname{Ln}^2 z$ и $g(z) = z^z$ допускают выделение однозначных ветвей во всей комплексной плоскости с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$.

3.20. Проверьте возможность выделения однозначных ветвей многозначной функции $f(z) = \sqrt[3]{1 - z^2}$ в области D , представляющей собой всю комплексную плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

3.21. Допускает ли многозначная функция $f(z) = \sqrt[n]{1 - z^n}$ выделение однозначных ветвей в окрестности точки $z = 0$?

3.22. Допускает ли многозначная функция $f(z) = \sqrt{z^2(z^2 - 1)}$ выделение однозначных ветвей в окрестности точки $z = 1$?

3.23. Допускает ли многозначная функция $f(z) = \operatorname{Ln} \frac{2z-i}{z+1}$ выделение однозначных ветвей в окрестности точки $z = \infty$?

3.24. Пусть $D \subset C$ — односвязная область, не содержащая точку $z = 0$, но содержащая точку $z = 1$. Выясните, сколько различных аналитических ветвей $\varphi(z)$ в области D , удовлетворяющих указанным условиям, допускают следующие многозначные функции:

a) $w = (z-1) \operatorname{Ln} z$, $\varphi(1) = 0$; b) $w = z^z$, $\varphi(1) = 1$; c) $w = z^{iz}$, $\varphi(1) = 1$.

3.25. Пусть $\varphi(z)$ – однозначная аналитическая ветвь многозначной функции $w = \operatorname{Ln}(z+i)$ в области D , удовлетворяющая условию $\varphi(1-i) = 0$. Найдите значение $\varphi(-1-i)$ в случаях, когда область D :

- а) Вся комплексная плоскость C с разрезом по лучу $(-i\infty, -i]$;
 б) Вся комплексная плоскость C с разрезом по лучу $[-i, +i\infty)$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

3.1. $w = (2+i)z + 1 - 3i$. **3.2.** Нижний полукруг $|w| < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$.

3.3. Область, содержащая точку $w = 0$ и ограниченная дугами окружностей $|w| = 1$, $\left|w + \frac{5i}{4}\right| = \frac{3}{4}$. **3.4. а)** Область, ограниченная прямой

$\operatorname{Re} w = 1$ и касающейся ее окружностью $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$; **б)** область,

ограниченная касающимися друг друга окружностями $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ и

$\left|w - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$. **3.5.** $w = -\frac{d}{z} + 1 + hi$ или $w = \frac{d}{z} + hi$. **3.6.** $w = -\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}$.

3.7. $w = \frac{iz+2+i}{z+1}$. **3.8.** $w = \frac{9}{2} + i$. **3.9. а)** $\left|z - \frac{i}{4}\right| = \frac{1}{4}$; **б)** прямая $x = \frac{1}{2}$.

3.10. $w = i \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d – действительные числа и $ad - bc < 0$.

3.11. $w = -\frac{z-2i}{z+2i}$. **3.12.** $w = -4 \frac{zi+2}{z-2-4i}$. **3.13.** $w \neq [-\infty; 1]$. **3.14.** Об-

ласть $|z| < 1$, $-\pi < \arg < \pi/2$. **3.15.** $\sqrt{z^2 + h^2}$, у корня берется ветвь $\sqrt{1} = 1$. **3.16.** $w = \frac{i}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$. **3.17.** Например, $w = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z-i}{z+i}$.

3.18. $w = \sqrt{\frac{z+1}{1-z}}$, $\sqrt{1} = 1$. **3.20.** Однозначную ветвь выделить можно.

3.21. Да. **3.22.** Нет. **3.23.** Да. **3.24. а)** Бесконечно много; **б)** бесконечно много; **с)** одну. **3.25. а)** πi ; **б)** $-\pi i$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ПАРАГРАФУ 3

1. Выделение ветвей многозначных функций.

Выясните, допускает ли указанная функция $f(z)$ выделение однозначных аналитических ветвей в окрестностях точек $z = 0, 1 \infty$.

$$1. f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

$$2. f(z) = \sqrt{z^2 + 2z - 3}.$$

$$3. f(z) = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

$$4. f(z) = \operatorname{Ln}(z^2 + z - 2).$$

$$5. f(z) = \operatorname{Ln} \frac{z-3}{1-z}.$$

$$6. f(z) = \sqrt[3]{(z-1)^2 z}.$$

$$7. f(z) = \sqrt{\frac{(1-z)^2}{z+1}}.$$

$$8. f(z) = (z^2 - 1)\sqrt{z}.$$

$$9. f(z) = \operatorname{Ln}(z(2-z)).$$

$$10. f(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{2-z}}.$$

$$11. f(z) = \sqrt[3]{\frac{z-1}{z^2}}.$$

$$12. f(z) = \operatorname{Ln} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}.$$

$$13. f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 3z + 2}}.$$

$$14. f(z) = \operatorname{Ln} \sqrt{z^2 - 3z + 2}.$$

$$15. f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2-z+1}}.$$

2. Дробно-линейное отображение.

Найдите дробно-линейное отображение, переводящее точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 , соответственно. Найдите образ области D при этом отображении.

	z_1, z_2, z_3	w_1, w_2, w_3	D
1	$-1, i, 1 + i$	$0, 2i, 1 - i$	$\{\operatorname{Im} z > 1\}$
2	$0, 1 + i, 2i$	$4, 2 + 2i, 0$	$\{ z - i < 1\}$
3	$-1, i, 1 + i$	$i, \infty, 1$	$\{\operatorname{Im} z < 1\}$
4	$0, 1 + i, 2i$	$0, 2 + 2i, 4$	$\{ z - i < 1\}$
5	$-1, \infty, i$	$i, 1, 1 + i$	$\{ z < 1\}$
6	$i, \infty, -i$	$2, 1 + i, 0$	$\{\operatorname{Re} z > 0\}$
7	$-1, \infty, i$	$\infty, i, 1,$	$\{ z < 1\}$
8	$0, 1 + i, 2i$	$0, \infty, 2i$	$\{ z - i > 1\}$
9	$-1, \infty, i$	$0, \infty, 1,$	$\{\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 1\}$
10	$i, \infty, -i$	$0, 1, \infty$	$\{\operatorname{Re} z < 0\}$
11	$i, \infty, -i$	$-2, 2i, 2$	$\{ z > 1\}$
12	$1, \infty, -2i$	$-i, 1, 1 + i$	$\{\operatorname{Re} z < 1\}$
13	$2i, \infty, 0$	$\infty, 1, -1/2$	$\{\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z\}$
14	$0, \infty, -1 + i$	$2, -1, -1 + i.$	$[-2; 1]$
15	$\infty, -1, 3i$	$2i, -i, -1 + i$	$\{ z - 1 < 2\}$
16	$i, 1, 0$	$2 + 2i, 2, 0$	$\{\operatorname{Im} z > 1\}$

§ 4. Интегрирование функций комплексного переменного

1. Понятие интеграла.

Пусть $\gamma \subset C$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, $z = z(t)$ – ее кусочно-гладкая параметризация, т.е. кусочно-гладкое отображение $z(t) : [a, b] \subset R \rightarrow \gamma \subset C$, $z'(t) \neq 0$.

Определение. Интеграл от непрерывной функции $f : \gamma \rightarrow C$ вдоль кривой γ определяется равенством

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad (1)$$

в котором правая часть понимается как линейная комбинация интегралов от действительной и мнимой частей.

Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда равенство (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (vx' + uy') dt = \\ &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, нахождение интеграла от функции комплексного переменного может быть сведено к вычислению соответствующих криволинейных интегралов или интегралов от дифференциальных форм первой степени. Из действительного анализа известно, что непрерывность функций u и v является достаточным условием существования криволинейных интегралов в равенстве (2). Поэтому для непрерывной функции $f = u + iv$ интеграл по кусочно-гладкой кривой всегда существует. Значение интеграла не зависит от выбора параметризации кривой γ .

Пример 1. Вычислим интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz,$$

где n – целое число, окружность ориентирована против хода часовой стрелки, начало и конец интегрирования совпадают.

Воспользуемся параметризацией окружности:

$$z = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad dz = iRe^{i\varphi}d\varphi.$$

поскольку начало и конец интегрирования не заданы, будем считать, что параметр изменяется в пределах: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Преобразуем интеграл к виду

$$I_n = \frac{1}{2\pi} R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)} d\varphi.$$

При $n = -1$ получаем

$$I_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = 1.$$

При $n \neq -1$ получаем

$$I_n = \frac{1}{2\pi i(n+1)} R^{n+1} e^{i\varphi(n+1)} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{1}{2\pi i(n+1)} R^{n+1} (e^{i2\pi(n+1)} - 1) = 0.$$

Из решения видно, что результаты интегрирования не зависят от того, какая точка взята в качестве начальной.

Несмотря на свою простоту, данный пример играет существенную роль в вычислениях и доказательствах, поэтому полезно помнить, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0} = 1$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz = 0, \quad n \neq -1.$$

Укажем основные **свойства интеграла** от функций комплексного переменного.

1. Линейность. Для любых непрерывных на кусочно-гладкой кривой γ функций f и g и произвольных комплексных постоянных α и β

выполняется равенство

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz.$$

2. Аддитивность. Пусть γ , γ_1 , γ_2 — ориентированные кусочно-гладкие кривые, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Тогда для всякой непрерывной на кривой γ функции f

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

3. Зависимость от ориентации. Обозначим через γ^- кривую, совпадающую, как множество точек, с кривой γ , но имеющую противоположную ориентацию. Тогда для всякой непрерывной на кривой γ функции f

$$\int_{\gamma^-} f dz = - \int_{\gamma} f dz.$$

4. Оценка интеграла. Для всякой непрерывной на кривой γ функции f выполняются неравенства

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq M \cdot l,$$

где $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ — элемент длины кривой γ , l — длина кривой γ , а M — максимум модуля функции f на кривой γ .

5. Почленное интегрирование функционального ряда. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ из непрерывных на кусочно-гладкой кривой γ функций равномерно на γ на сходится к функции $f(z)$, тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz.$$

2. Интегральная теорема Коши.

Интегральная теорема Коши для односвязной области. Пусть $D \subset C$ — односвязная область, а функция f является аналитической

в D . Тогда для любого простого кусочно-гладкого замкнутого контура $\gamma \subset D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Непосредственным **следствием** этой теоремы является тот факт, что значения интегралов от аналитической в односвязной области функции по различным путям, лежащим в этой области, совпадают при условии, если пути имеют одно и то же начало (например, точку z_1) и один и тот же конец (точку z_2). В таких случаях говорят, что *интеграл не зависит от пути интегрирования*. Это помогает упростить вычисление многих интегралов. Нужно только изменить путь интегрирования, подобрав тот, по которому интеграл берется проще.

Пример 2. Вычислим интеграл $I = \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$ по полуокружности $\gamma = \left\{ z : \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z \geq 0 \right\}$ с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = 1$.

Подынтегральная функция является аналитической в любой области, не содержащей точек $z = \pm i$, в частности, в односвязной области — круге $\left\{ z : \left| z - \frac{1}{2} \right| < \left| \frac{1}{2} + i \right| \right\}$. По следствию из теоремы Коши делаем вывод, что интеграл от этой функции внутри этого круга не зависит от пути интегрирования, т.е. можно интегрировать, например, по отрезку $[0; 1]$.

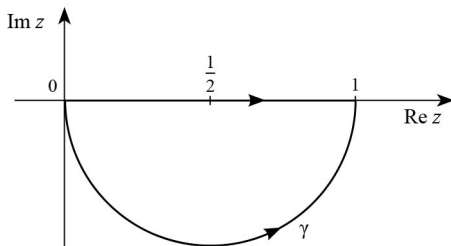


Рис. 5.

Тогда получаем

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Вычислим интегралы Френеля

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx.$$

Пусть $R > 0$. Рассмотрим замкнутый контур $\Gamma_R = [0; R] \cup C_R \cup l$, проходящий в положительном направлении. Здесь $C_R = \{z : |z| = R, 0 \leq \arg z \leq \pi/4\}$ — дуга окружности радиуса R , $l = \{z : \arg z = \pi/4, 0 \leq |z| \leq R\}$ — отрезок луча $\arg z = \pi/4$.

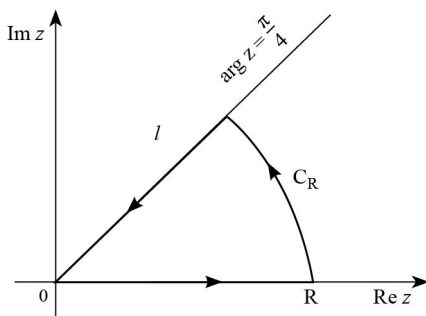


Рис. 6.

Так как функция e^{iz^2} аналитическая всюду, то

$$\int_{\Gamma_R} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_l e^{iz^2} dz = 0.$$

Оценим интеграл $\int_{C_R} e^{iz^2} dz$. При $z \in C_R$ имеем $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, так что

$$|e^{iz^2}| = e^{-R^2 \sin 2\varphi} \leq e^{-(4R^2/\pi)\varphi}$$

в силу неравенства $\sin 2\varphi \geq 4\varphi/\pi$, выполненного для $(0 \leq \varphi \leq \pi/4)$.

Следовательно,

$$\left| \int_{C_R} e^{iz^2} dz \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-(4R^2/\pi)\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty.$$

Далее, если $z \in l$, то $z = r e^{i\pi/4}$, так что $e^{iz^2} = e^{-r^2}$. Поэтому

$$\int_l e^{iz^2} dz = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2} dr.$$

Из курса математического анализа известно, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{интеграл Пуассона}).$$

Переходя в равенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

В силу четности подынтегральной функции

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ix^2} dx = 2 \int_0^\infty e^{ix^2} dx = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4}.$$

Отделяя в равенстве действительные и мнимые части, находим искомые интегралы:

$$\int_{-\infty}^\infty \cos x^2 dx = \int_{-\infty}^\infty \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Замечание. Оценку интеграла по контуру C_R можно было бы провести с помощью следующей леммы.

Лемма Жордана. Пусть $\alpha > 0$ и выполнены следующие условия

- 1) функция $f(z)$ непрерывна в секторе $S = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| > R_0 > 0\}$;
- 2) $M(R) = \max_{z \in C_R} |f(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$,

где C_R – верхняя полуокружность, т.е. $C_R = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$.

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$

Действительно, если сделать в интеграле $\int_{C_R} e^{iz^2} dz$ взаимно-однозначную замену $z^2 = t$, то интеграл превратится в интеграл по дуге окружности $\{t = R^2 e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ от функции $\frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}$, и для оценки этого интеграла можно применить лемму Жордана.

Замечание. Для многосвязных областей теорема Коши вообще говоря неверна!

Пример 4. Функция $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ аналитична к кольцу $\frac{1}{2} < |z - z_0| < 2$, при этом интеграл, взятый по замкнутому контуру $\Gamma = \{|z - z_0| = 1\}$, равен $2\pi i$ (пример 1 этого параграфа), хотя этот контур и лежит целиком в области аналитичности функции $\frac{1}{z - z_0}$.

Однако, если интегрирование ведется по границе области, то теорема Коши верна и для многосвязных областей. Следует только отметить одно важное дополнительное требование к границе области: поскольку интеграл зависит от ориентации кривой, то ориентации различных компонент границы должны быть согласованы между собой.

Пусть $D \subset C$ – ограниченная n -связная область с кусочно-гладкой границей Γ , состоящей из связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$. При этом компоненты $\Gamma_k, k = 1, \dots, n-1$, расположены внутри замкнутого контура Γ_0 и каждая во внешности остальных компонент границы. Будем говорить, что граница Γ ориентирована в *положительном направлении*, если при обходе границы точки области D , примыкающие к границе, всегда остаются слева. Противоположное направление обхода задает *отрицательную* ориентацию границы. Границу области, на которой задана либо положительная, либо отрицательная ориентация, будем называть *ориентированной* границей.

Замечание. Пусть Γ – ориентированная граница области $D \subset C$. Если компонента границы Γ_k содержит такую дугу γ , что точки об-

ласти D расположены с обеих сторон от γ , то задание ориентации на границе означает, что точки множества, составляющие дугу γ , проходятся дважды в противоположных направлениях. Обычно такую дугу γ называют разрезом в области D .

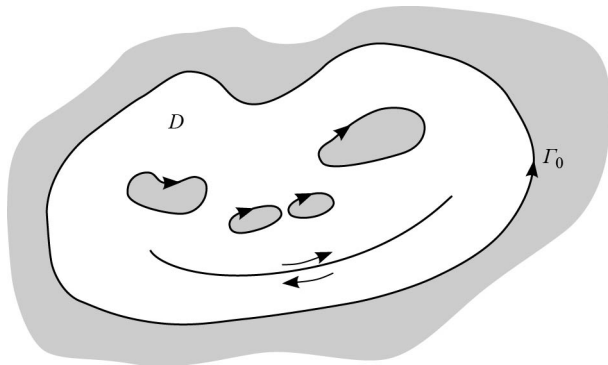


Рис. 7.

Интегральная теорема Коши для ограниченной конечно-связной области. Пусть $D \subset C$ — ограниченная конечносвязная область с кусочно-гладкой ориентированной границей Γ , функция f является аналитической в области D и непрерывной в $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Замечание. Теорема верна и для односвязной области.

Замечание. В отличие от односвязности условие ограниченности области в интегральной теореме Коши является существенным. К примеру, интеграл от аналитической функции $f(z) \equiv 1$ по границе верхней полуплоскости (т.е. по действительной прямой) отличен от нуля. Однако при выполнении дополнительных требований на поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки аналог интегральной теоремы Коши может быть получен подходящим предельным переходом и для неограниченных областей.

Пример 5. Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, непрерывна в этой полуплоскости, включая границу, и $z f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Докажем, что интеграл по границе области равен нулю:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

Рассмотрим ограниченную область $D_R = \{\operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$ — верхний полукруг радиуса R . По предположению $f(z)$ аналитична в D_R и непрерывна в $D_R \cup \partial D_R$, следовательно по интегральной теореме Коши $\int_{\partial D_R} f(z) dz = 0$. Обозначим участки границы $I_R = \{\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \in [-R; R]\}$ — отрезок действительной оси, $C_R = \{|z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуокружность.

При $R \rightarrow +\infty$ интеграл $\int_{I_R} f(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Докажем, что при $R \rightarrow +\infty$ интеграл $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$. Для этого оценим его:

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| = \int_0^\pi |f(R e^{i\varphi})| R d\varphi.$$

В силу того, что $z f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, по определению предела можем утверждать, что для произвольного как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется число $R_0 > 0$ такое, что для всех чисел z , $|z| > R_0$, верно неравенство $|z f(z)| < \varepsilon$. Пусть $R > R_0$, тогда для всех точек z , принадлежащих окружности C_R , верно:

$$|z f(z)| = |R e^{i\varphi} f(R e^{i\varphi})| = R |f(R e^{i\varphi})| < \varepsilon.$$

Тогда верна оценка:

$$\int_0^\pi |f(R e^{i\varphi})| R d\varphi < \int_0^\pi \varepsilon d\varphi = \varepsilon \pi.$$

В силу произвольности ε можно заключить, что $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$.

Вернемся к рассмотрению интеграла по границе области D_R :

$$0 = \int_{\partial D_R} f(z) dz = \int_{I_R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty.$$

Поскольку в левой части предельного перехода стоит интеграл, равный нулю, то и в правой части интеграл также должен быть нулевым, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

3. Интегральная формула Коши.

Пусть $D \subset C$ — ограниченная конечносвязная область с ориентированной в положительном направлении кусочно-гладкой границей Γ , функция f является аналитической в области D и непрерывной в $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)^{n+1}} = \begin{cases} f^{(n)}(z), & z \in D; \\ 0, & z \in C \setminus \overline{D} \end{cases}$$

Замечание. При $n = 0$ интеграл в левой части формулы по границе области, в которой функция f является аналитической, называют *интегралом Коши*.

Формулы для производных функции можно получить формальным дифференцированием по z формулы для $n = 0$.

Пример 6. Вычислим интеграл $I = \int_{|t|=2} \frac{e^t dt}{(t+1)(t-1)^2}$.

Сравнивая интеграл с интегральной формулой Коши видим, что в числителе подынтегральной функции находится функция e^t , аналитическая во всей комплексной плоскости, а следовательно и в круге $|t| \leq 2$. Однако в знаменателе присутствуют два множителя вида $(t-z)^{n+1}$ и на «звание точки z » претендуют две точки $z = -1$ и $z = 1$, лежащие внутри круга. Чтобы применить интегральную формулу Коши, представим подынтегральную функцию в виде суммы дробей:

$$\frac{e^t}{(t+1)(t-1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^t}{t+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{e^t}{t-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^t}{(t-1)^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{|t|=2} \frac{e^t dt}{(t+1)(t-1)^2} &= 2\pi i \left(\frac{1}{4} e^t \Big|_{t=-1} - \frac{1}{4} e^t \Big|_{t=1} + \frac{1}{2} (e^t)' \Big|_{t=1} \right) = \\ &= \pi i \left(\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^1 \right) = \pi i \operatorname{ch} 1. \end{aligned}$$

4. Первообразная. Теорема Мореры.

Определение. Аналитическая в области D функция $F(z)$ называется первообразной функции $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$.

Теорема (о существовании первообразной). Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D . Тогда в этой области функция $f(z)$ имеет первообразную. Все множество первообразных можно получить из формулы

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt + C,$$

где C – произвольная постоянная, $z_0 \in D$ – какая-нибудь точка области.

Отметим, что интеграл в формуле записан в пределах от z_0 до z , это означает, что интеграл берется по любому пути, соединяющему точки z_0 до z и лежащему в области D и, в силу интегральной теоремы Коши, значение интеграла не зависит от пути, соединяющего эти точки.

Из теоремы следует, что, полагая в формуле $z = z_0$, получим $C = F(z_0)$. Таким образом, для функций комплексного переменного верна привычная формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^z f(t) dt = F(z) - F(z_0),$$

где $F(z)$ – произвольная первообразная функции $f(z)$.

Следующее утверждение является обратным к интегральной теореме Коши.

Теорема Мореры. Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset C$ и вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

то функция $f(z)$ является аналитической в области D .

5. Принцип максимума модуля аналитической функции.

Теорема (Принцип максимума модуля аналитической функции). Пусть $D \subset C$ — область, отличная от постоянной функция f является аналитической в области D и $M = \sup_{z \in D} |f(z)|$. Тогда $|f(z)| < M$ для

произвольной точки $z \in D$. Иными словами, модуль отличной от постоянной аналитической функции не может достигать своего максимума ни в одной внутренней точке области.

Следствие 1. Пусть $D \subset C$ — область, отличная от постоянной функция f является аналитической в области D и $m = \inf_{z \in D} |f(z)|$. Если $f(z) \neq 0$ в области D , то $|f(z)| > m$ для произвольной точки $z \in D$.

Следствие 2. Пусть $D \subset C$ — ограниченная область. Если отличная от постоянной функция f является аналитической в области D , непрерывной в $\bar{D} = D \cup \Gamma$ и $f(z) \neq 0$ в области D , то модуль функции достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области.

Пример 7. Пусть функция $f(z)$ отлична от постоянной и является аналитической во всей комплексной плоскости C . Докажем, что внутри всякой простой замкнутой линии уровня модуля функции $f(z)$ (т.е. линии $|f(z)| = \text{const}$) найдется хотя бы один нуль этой функции.

Доказательство будем вести от противного. Зафиксируем константу a такую, что $|f(z)| = a$. Пусть D — область, ограниченная линией уровня Γ . Поскольку функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, то она будет аналитической в области D и непрерывной на ее границе Γ .

Предположим противное: что внутри области D нет ни одного нуля функции. Тогда по следствию 2 для любого $z \in D$ верна оценка:

$$\min_{z \in \Gamma} |f(z)| < |f(z)| < \max_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

С учетом того, что Γ является линией уровня модуля, т.е. на ней $|f(z)| = a$, получаем заведомо противоречивое неравенство:

$$a < |f(z)| < a.$$

Утверждение доказано.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Пусть γ – простой замкнутый контур, ограничивающий область площади S . Доказать, что

$$a) \int_{\gamma} x dz = iS; \quad b) \int_{\gamma} y dz = -S; \quad c) \int_{\gamma} \bar{z} dz = 2iS.$$

4.2. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz$, где γ – простой замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $[-1, 1]$.

4.3. Пусть путь γ начинается в точке $a = 0$, заканчивается в точке $b = 1$ и не проходит через точки $\pm i$. Покажите, что

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где k – целое число.

4.4. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в круге $B(z_0, r)$ и $|f(z)| \leq M < \infty$. Докажите, что для любых точек $a, b \in B(z_0, r)$ и произвольного контура $\gamma \subset B(z_0, r)$, начинающегося в точке a и заканчивающегося в точке b , выполняется оценка

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M |b - a|.$$

4.5. Пусть путь γ начинается в точке $a = 1$, заканчивается в точке $b = re^{i\varphi}$ и совершает k полных обходов вокруг начала координат. Покажите, что

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \ln r + i\varphi + 2\pi ik.$$

4.6. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{i x^p} dx, \quad p > 1.$$

4.7. Интегрируя функцию $f(z) = e^{-z^2}$ по границе прямоугольника

$$P = \{z \in C \mid |\operatorname{Re} z| \leq R, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq b\},$$

вычислите интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx.$$

4.8. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+i)^2}.$$

4.9. Функция $f(z)$ является аналитической в полосе $|\operatorname{Im} z| < a$ и удовлетворяет в этой полосе условию $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Докажите,

что если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ сходится, то при любом α из интервала

$(-a; a)$ интеграл $\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(z) dz$ также сходится и не зависит от α .

Указание. Примените теорему Коши к одному из прямоугольников $-R_1 < \operatorname{Re} z < R_2$, $0 < |\operatorname{Im} z| < |\alpha|$, а затем перейдите к пределу при $R_1 \rightarrow +\infty$, $R_2 \rightarrow +\infty$.

4.10. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной в \overline{C} области, содержащей точку $z = \infty$. Докажите, что функция $f(z)$ имеет в этой области первообразную в том и только том случае, когда $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$.

4.11. Вычислите интеграл

$$\int_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2+9},$$

если: а) $r = 1$; б) $r = 3$; в) $r = 5$.

4.12. Вычислите интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z e^z dz}{(z-a)^3},$$

если точка a лежит внутри простого замкнутого контура γ .

4.13. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области \bar{D} , ограниченной простым замкнутым контуром γ , содержащим внутри себя начало координат. Докажите, что при любом выборе ветви функции $\operatorname{Ln} z$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f'(z) \operatorname{Ln} z dz = f(z_0) - f(0),$$

где $z_0 \in \gamma$ — начальная точка интегрирования.

4.14. Пусть функция $f(z)$ является аналитической при $|z| \geq 1$, и пусть

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$, $A \in \mathbb{C}$. Найдите значение интеграла

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-z},$$

где γ — единичная окружность, ориентированная в положительном направлении, и $z \notin \gamma$.

4.15. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z-a| < R$ и непрерывной в замкнутом круге $|z-a| \leq R$. Докажите формулу

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + R e^{i\varphi}) d\varphi = f(a),$$

носящую название *теоремы о среднем*.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

- 4.2. πi . 4.6. $e^{\frac{i\pi}{2p}} \Gamma(1 + \frac{1}{p})$. 4.7. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$. 4.8. 0. 4.11. а) 0; б) $\pi/3$; в) 0.
4.12. $e^a \left(1 + \frac{a}{2}\right)$. 4.14. $A - f(z)$, если $|z| > 1$; A , если $|z| < 1$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ПАРАГРАФУ 4

1. Параметризация в интегралах.

Во всех последующих задачах в случае замкнутого контура, если не сказано иное, следует считать, что контур проходится против часовой стрелки.

1. Вычислите интеграл $\int_C |z| dz$ по радиусу-вектору точки $z = 2 - i$.
2. Вычислите интеграл $\int_C \frac{z}{\bar{z}} dz$ по границе полукольца $\{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$, считая, что начало интегрирования находится в точке $z = 1$.
3. Вычислите интеграл $\int_C |z| dz$, где $C = \{|z| = R\}$. Начало пути в точке $z = R$.
4. Вычислите интеграл $\int_C (z-a)^n dz$, где $C = \{|z-a| = R, 0 \leq \arg(z-a) \leq \pi\}$. Начало пути в точке $z = a + R$.
5. Вычислите интеграл $\int_C |z| dz$, где $\{ |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0 \}$. Начало пути в точке $z = -i$.
6. Вычислите интеграл $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $C = \{ |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0 \}, \sqrt{1} = 1 \}$. Начало пути в точке $z = 1$.
7. Вычислите интеграл $\int_C |z| \bar{z} dz$ по границе полукруга $\{ |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0 \}$. Начало пути в точке $z = -i$.
8. Вычислите интеграл $\int_C \sqrt{z} dz$ по нижней полуокружности $C = \{ |z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0 \}, \sqrt{1} = -1$. Начало пути в точке $z = -1$.

9. Вычислите интеграл $\int_C \operatorname{Ln} z \, dz$ по единичной окружности $C = \{|z| = 1\}$, считая началом интегрирования точку $z = 1$. Ветвь логарифма выбирается условием: $\operatorname{Ln} 1 = 0$.
10. Вычислите интеграл $\int_C \operatorname{Ln} z \, dz$ по единичной окружности $C = \{|z| = 1\}$, считая началом интегрирования точку $z = i$. Ветвь логарифма выбирается условием: $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$.
11. Вычислите интеграл $\int_C \operatorname{Ln} z \, dz$ по единичной окружности $C = \{|z| = 1\}$, считая началом интегрирования точку $z = 1$. Ветвь логарифма выбирается условием: $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.
12. Вычислите интеграл $\int_C \sqrt{z} \, dz$ по единичной окружности $C = \{|z| = 1\}$, $\sqrt{1} = 1$. Начало пути в точке $z = 1$.
13. Вычислите интеграл $\int_C z \, dz$ по окружности $C = \{|z - a| = R\}$. Начало пути в точке $z = R$.
14. Вычислите интеграл $\int_C (z - a)^n \, dz$ по нижней полуокружности $C = \{|z - a| = R\}$. Начало пути в точке $z = a + R$.
15. Вычислите интеграл $\int_C \sqrt{z} \, dz$ по правой полуокружности $C = \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $\sqrt{1} = -1$. Начало пути в точке $z = -i$.

2. Интегральная формула Коши.

Во всех последующих задачах следует считать, что замкнутый контур C проходится против часовой стрелки.

1. Вычислите интеграл $\int_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$ в предположении, что точки $z = 0, z = 1$ лежат в области, ограниченной контуром C , а точка $z = -1$ не лежит.

2. Вычислите интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos z \, dz}{z^2 + a^2}$, в предположении, что контур C содержит внутри себя круг $|z| \leq a$.

3. Вычислите интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sin z \, dz}{z(1 - z)^3}$, в предположении, что нули знаменателя лежат в области, ограниченной контуром C .

4. Вычислите интеграл $\int_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$ в предположении, что точки $z = 0, z = -1$ лежат в области, ограниченной контуром C , а точка $z = 1$ не лежит.

5. Вычислите интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z \, dz}{z^2 - a^2}$, в предположении, что контур C содержит внутри себя круг $|z| \leq a$.

6. Вычислите интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z \, dz}{z(1 + z)^2}$, в предположении, что точка $z = -1$ лежит в области, ограниченной контуром C , а точка $z = 0$ не лежит.

7. Вычислите интеграл $\int_C \frac{\operatorname{sh} z \, dz}{z(z^2 - 1)}$ в предположении, что точки $z = -1, z = 1$ лежат в области, ограниченной контуром C , а точка $z = 0$ не лежит.

8. Вычислите интеграл $\int_C \frac{dz}{z^2(z + 1)}$ в предположении, что нули знаменателя лежат в области, ограниченной контуром C .

9. Вычислите интеграл $\int_C \frac{e^z \, dz}{z(z^2 + 1)}$ в предположении, что точки $z = i, z = -i$ лежат в области, ограниченной контуром C , а точка $z = 0$ не лежит.

10. Вычислите интеграл $\int_C \frac{z^2 \sin z \, dz}{(z-a)^2}$ в предположении, что нуль знаменателя лежит в области, ограниченной контуром C .
11. Вычислите интеграл $\int_C \frac{\operatorname{ch} z \, dz}{z^2(z+1)}$ в предположении, что точка $z=0$ лежит в области, ограниченной контуром C , а точка $z=-1$ не лежит.
12. Вычислите интеграл $\int_C \frac{z \, dz}{z^4-1}$, в предположении, что контур C содержит внутри себя круг $|z-1| \leq 3/2$.
13. Вычислите интеграл $\int_C \frac{z \, dz}{z^4+1}$, в предположении, что контур C содержит внутри себя круг $|z+1| \leq 3/2$.
14. Вычислите интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z e^z \, dz}{(z-1)^4}$ в предположении, что нуль знаменателя лежит в области, ограниченной контуром C .
15. Вычислите интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z \cos z \, dz}{(z+1)^4}$ в предположении, что нуль знаменателя лежит в области, ограниченной контуром C .

§ 5. Ряды аналитических функций

1. Теоремы Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса. Пусть функции $f_n(z)$ являются аналитическими в области $D \subset C$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на всяком компактном подмножестве $K \subset D$ к функции $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ – аналитическая в области D , ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, т.е.

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

и ряд из производных сходится равномерно на всяком компактном подмножестве $K \subset D$.

Замечание. Такой простой теоремы о дифференцируемости суммы ряда в действительном анализе нет. На действительной прямой равномерно сходящийся ряд из гладких функций, вообще говоря, нельзя почленно дифференцировать, для этого требуется более жесткое условие – должен равномерно сходиться ряд из производных. С аналитическими функциями ситуация существенно иная, и это различие объясняется тем, что, используя интегральную теорему Коши, мы можем свести дифференцирование к интегрированию.

Покажем, как с помощью первой теоремы Вейерштрасса можно показать аналитичность функции, заданной посредством ряда.

Пример 1. Докажем, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z-n)}$ является аналитической функцией в области $D = \{\operatorname{Re} z > 0, z \neq 1, 2, 3, \dots\}$.

Согласно теореме достаточно доказать, что ряд сходится равномерно на каждом компакте $K \subset D$. Рассмотрим произвольный компакт, лежащий в области. В силу ограниченности компакта существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $z \in K$ $\operatorname{Re} z \leq n_0$. Из этого следует, что для всех таких z и любого $n \geq n_0 + 1$ выполнена оценка $|z - n| \geq n - n_0$, из которой получим оценку общего члена ряда:

$$\left| \frac{1}{n(z-n)} \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n - n_0} \leq \frac{1}{(n - n_0)^2}.$$

Напомним, что расстояние между множествами A и B комплексной

плоскости определяется как $\inf_{a \in A, b \in B} |a - b|$.

В силу замкнутости компакта расстояние от него до границы области D больше нуля. Обозначим это расстояние как d . Таким образом, $|z - n| \geq d$ для всех точек компакта, откуда получим оценку

$$\left| \frac{1}{n(z - n)} \right| \leq \frac{1}{n \cdot d}.$$

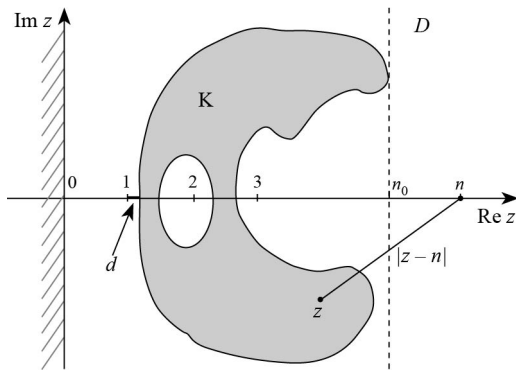


Рис. 8.

Разобьем исходный ряд на две суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z - n)} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n(z - n)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n(z - n)}.$$

В первой сумме конечное количество слагаемых, ограниченных числами $\frac{1}{n \cdot d}$. Общий член ряда во второй сумме мажорируется членом числового сходящегося ряда, следовательно второй ряд сходится равномерно и абсолютно на всем компакте. А значит и исходный ряд сходится равномерно (и абсолютно) на всем компакте. В силу произвольности компакта согласно теореме Вейерштрасса сумма ряда является аналитической функцией.

Также представляет интерес следствие принципа максимума — вторая теорема Вейерштрасса.

Вторая теорема Вейерштрасса. Пусть $D \subset C$ — ограниченная область, функции $f_n(z)$ являются аналитическими в области D и непре-

рывными в $\bar{D} = D \cup \partial D$. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на границе области, то он равномерно сходится во всей \bar{D} .

2. Степенные ряды.

Степенным рядом называют функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, где коэффициенты c_n являются комплексными числами.

Заменой $t = z - z_0$ степенной ряд сводится к виду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, поэтому далее мы будем предполагать, что $z_0 = 0$, т.е. рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (1)$$

Очевидно, что всякий степенной ряд (1) сходится при $z = 0$.

Первая теорема Абеля. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$:

а) сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в круге $|z| < |z_0|$ и сходится равномерно во всяком круге $|z| \leq r < |z_0|$;

б) расходится в точке z^* , то он расходится при любом $|z| > |z^*|$.

Из теоремы Абеля следует, что для всякого степенного ряда существует такое $R \in [0, +\infty]$, называемое *радиусом сходимости*, что ряд сходится в круге $|z| < R$ называемом *кругом сходимости* и расходится при $|z| > R$ (при $R = 0$ ряд сходится только в точке $z = 0$, при $R = +\infty$ ряд сходится во всей комплексной плоскости).

Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формулам Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

или Даламбера (при $c_n \neq 0$)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

Пусть R — радиус сходимости степенного ряда (1). Согласно первой теореме Абеля ряд равномерно сходится во всяком замкнутом круге $\overline{B(0, r)}$ при $r < R$, следовательно ряд равномерно сходится на всяком компактном множестве K , лежащем в круге сходимости $B(0, R)$. Таким

образом степенной ряд можно почленно интегрировать вдоль любой кусочно-гладкой кривой, лежащей внутри круга сходимости. Поскольку каждое слагаемое $c_n z^n$ является аналитической функцией, то согласно первой теореме Вейерштрасса *сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости*. Внутри круга сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать, при этом радиус сходимости ряда из производных совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

Пусть радиус сходимости степенного ряда (1) конечен и отличен от нуля, т.е. $0 < R < +\infty$. В общем случае мы можем лишь утверждать, что ряд сходится в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$, при этом в точках граничной окружности круга сходимости ряд может как сходиться так и расходиться. Для исследования сходимости ряда в граничных точках бывает полезен

Признак Дирихле: Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $a_n > 0$, $b_n \in C$ таков, что числовая последовательность a_n монотонно стремится к нулю, а частичные суммы $S_N = \sum_{n=1}^N b_n$ ограничены в совокупности (т.е. существует число M , не зависящее от размера суммы N , такое что для любого N выполнена оценка $|S_N| \leq M$). Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, вообще говоря, не абсолютно.

Пример 2. Нетрудно убедиться, что все три ряда

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

имеют радиус сходимости равный единице. Однако, если рассматривать эти ряды на границе круга сходимости, т.е. при $z = e^{i\varphi}$, то они ведут себя совершенно по-разному.

Первый ряд расходится всюду на границе, поскольку не выполнен необходимый признак сходимости — общий член ряда $z^n = e^{i\varphi n}$ не стремится к нулю.

Общий член *третьего ряда* во всех точках единичной окружности мажорируется членом сходящегося числового ряда: $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$, поэтому ряд сходится во всех точках границы.

Второй ряд сходится во всех точках единичной окружности кроме единственной точки $z = 1$.

Покажем это, пользуясь признаком Дирихле.

На единичной окружности общий член ряда имеет вид $\frac{z^n}{n} = \frac{e^{i\varphi n}}{n}$.

Положим $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = e^{i\varphi n}$. Очевидно, что a_n монотонно стремится к нулю. Оценим суммы $\sum_{n=1}^N b_n$, пользуясь формулой для суммы геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{i\varphi}$:

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{i\varphi n} \right| \leq |e^{i\varphi}| \cdot \left| \frac{e^{i\varphi N} - 1}{e^{i\varphi} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{i\varphi} - 1|}.$$

Видим, что для тех точек единичной окружности, для которых $\operatorname{Arg} z \neq 2\pi k$, частичные суммы ограничены числом $\frac{2}{|e^{i\varphi} - 1|}$, не зависящим от N , поэтому по признаку Дирихле ряд сходится. Для точки $z = 1$ ряд расходится, поскольку обращается в гармонический.

Если известно, что степенной ряд сходится в граничной точке z_0 , то сумма ряда является непрерывной функцией вдоль радиуса в точке z_0 . Об этом следующая теорема.

Вторая теорема Абеля. Пусть $R \in (0, \infty)$ – радиус сходимости степенного ряда (1), который сходится в точке $z_0 = Re^{i\varphi_0}$. Тогда сумма степенного ряда $S(z)$ является непрерывной функцией вдоль радиуса в точке z_0 , т.е.

$$\lim_{r \rightarrow R-0} S(re^{i\varphi_0}) = S(z_0).$$

Пример 3. Найдем, пользуясь второй теоремой Абеля, суммы следующих двух рядов:

$$\Sigma_1(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \quad \Sigma_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} \quad \text{при } 0 < \varphi < 2\pi.$$

Рассмотрим сумму

$$\Sigma(\varphi) = \Sigma_1(\varphi) + i \cdot \Sigma_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\varphi})^n}{n}.$$

Видим, что Σ является суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ при $z = e^{i\varphi}$. Из предыдущего примера известно, что ряд сходится во всех точках границы $|z| = 1$,

кроме точки $z = 1$. Поэтому возможен предельный переход вдоль радиуса во всех точках $z_0 = e^{i\varphi}$, $0 < |\varphi| < \pi$.

Просуммируем сначала при $|z| < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z t^{n-1} dt = \int_0^z \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt = \int_0^z \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-z).$$

Здесь почленное интегрирование ряда возможно в силу его равномерной сходимости.

Совершив предельный переход вдоль радиуса, получим

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi n}}{n} = -\ln(1 - e^{i\varphi}).$$

Отделим действительную и мнимую части, получим, соответственно,

$$\Sigma_1 = -\ln|1 - e^{i\varphi}|, \quad \Sigma_2 = -\arg(1 - e^{i\varphi}).$$

Здесь правые части являются действительными числами. Придадим им «действительный» вид, применяя геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Так, рассмотрев треугольник с вершинами в точках $z = 0$, $z = 1$ и $z = e^{i\varphi}$, получаем по теореме косинусов:

$$|1 - e^{i\varphi}|^2 = 1^2 + |e^{i\varphi}|^2 - 2 \cdot 1 \cdot |e^{i\varphi}| \cdot \cos \varphi = 2(1 - \cos \varphi) = 4 \sin^2(\varphi/2).$$

Таким образом, $\Sigma_1 = -\ln(2 \sin(\varphi/2))$.

Если трактовать числа $z = 0$, $z = 1$ и $z = e^{i\varphi}$ как векторы и учесть условие $0 < |\varphi| < \pi$, то получим, что $\Sigma_2 = -\arg(1 - e^{i\varphi}) = \frac{\pi - \varphi}{2}$.

3. Ряд Тейлора

Мы уже знаем, что сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости.

Оказывается, верно и обратное утверждение: всякая аналитическая функция локально представима степенным рядом.

Теорема Тейлора. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $D \subset C$, тогда в окрестности произвольной точки $z_0 \in D$ она представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, при этом радиус сходимости степенного ряда не меньше чем расстояние от точки z_0 до границы области D .

Замечание 1. Вообще говоря, радиус сходимости ряда Тейлора равен расстоянию от центра разложения z_0 до ближайшей «особой» точки, т.е. до точки, в которой функция перестает быть аналитической.

Замечание 2. Согласно интегральной формуле Коши из предыдущего параграфа

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \int_{C(z_0)} \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}},$$

где $C(z_0)$ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z_0 , проходимая в положительном направлении.

Для разложения заданной функции в ряд Тейлора полезно иметь ввиду несколько стандартных разложений в точке $z_0 = 0$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad R = \infty;$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty;$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty;$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty;$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty;$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, \quad R = 1;$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n z^n,$$

где $C_{\alpha}^n = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}$, $n = 1, 2, \dots$, $1^{\alpha} = 1$, $R = 1$;

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad R = 1.$$

Последнее разложение — сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = z$ — это частный случай предыдущего разложения при $\alpha = -1$.

Приведем несколько примеров разложения функций в ряд Тейлора.

Пример 4. Разложим функцию $f(z) = \left(5 - 3z + \frac{z^2}{2}\right)e^{6z-z^2-8}$ в окрестности точки $z = 3$ в ряд Тейлора.

Ряд Тейлора в окрестности точки $z = 3$ имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-3)^n$.

Поэтому удобно сделать замену переменной $z-3 = t$ и разложить функцию $f(t+3)$ в степенной ряд по степеням t . Воспользовавшись стандартной формулой для разложения экспоненты, получим:

$$\begin{aligned} f(z) = f(t+3) &= \frac{t^2+1}{2} e^{1-t^2} = \frac{e}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2(n+1)}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \right) = \\ &= \frac{e}{2} + \frac{e}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) t^{2n} = \frac{e}{2} + \frac{e}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n!} (z-3)^{2n}. \end{aligned}$$

Ряд сходится во всей комплексной плоскости, поскольку функция f является аналитической во всей комплексной плоскости.

Пример 5. Разложим функцию $f(z) = z \sin(z-2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$.

Поскольку центр разложения — точка $z = 1$, сделаем замену $t = z-1$ и разложим функцию $f(z) = f(t+1) = (t+1) \sin(t-1)$ в ряд по степеням t , применив тригонометрическую формулу для синуса разности и стандартные разложения для синуса и косинуса:

$$\begin{aligned} f(z) = f(t+1) &= (t+1) \sin(t-1) = (t+1)(\sin t \cos 1 - \cos t \sin 1) = \\ &= \cos 1 (t+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sin 1 (t+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos 1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) - \\
&\quad - \sin 1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \right) =
\end{aligned}$$

Заменяем в первой сумме индекс $n+1 \rightarrow n$ и раскроем скобки. Получим четыре степенных ряда:

$$\begin{aligned}
&= \cos 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n}}{(2n-1)!} + \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} - \\
&\quad - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n)!} - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} =
\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые, выделив четные и нечетные степени:

$$\begin{aligned}
&= \sin 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1} \cos 1}{(2n-1)!} - \frac{(-1)^n \sin 1}{(2n)!} \right] t^{2n} + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \cos 1}{(2n+1)!} - \frac{(-1)^n \sin 1}{(2n)!} \right] t^{2n+1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \left[\sin 1 + 2n \cos 1 \right] t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\cos 1 - (2n+1) \sin 1 \right] t^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Радиус сходимости этого ряда $R = +\infty$.

Пример 6. Разложим функцию $f(z) = e^z \cos z$ в окрестности точки $z = 0$ в ряд Тейлора.

Для нахождения искомого разложения можно перемножить ряды для экспоненты и косинуса. Однако, рациональнее использовать тождество

$$e^z \cos z = e^z \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{z(1+i)} + e^{z(1-i)} \right).$$

Так как $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, $1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$, то, применяя формулу для экспоненты, получаем

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} e^{i\pi n/4} + 2^{n/2} e^{-i\pi n/4}}{2n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos(\pi n/4) z^n.$$

Радиус сходимости ряда $R = +\infty$.

Следующий пример иллюстрирует, как разложение в степенной ряд помогает найти максимум модуля аналитической функции в некоторой области.

Пример 7. Найдем $\max_{|z| \leq 1} |\sin z|$.

Сначала оценим модуль функции:

$$|\sin z| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} |z|.$$

Получили полезную оценку: $|\sin z| \leq \operatorname{sh} |z|$, которая верна для всех комплексных чисел z . В силу полученной оценки и монотонности синуса гиперболического от действительного аргумента имеем при $|z| \leq 1$:

$$|\sin z| \leq \operatorname{sh} |z| \leq \operatorname{sh} 1.$$

Откуда следует, что $\max_{|z| \leq 1} |\sin z| \leq \operatorname{sh} 1$. Поскольку максимум модуля аналитической функции достигается на границе области, в данном случае — на единичной окружности, то $\max_{|z| \leq 1} |\sin z| = \operatorname{sh} 1$, так как на единичной окружности имеются две точки $z_0 = \pm i$, в которых $|\sin z_0| = \operatorname{sh} 1$.

Следствием теоремы Тейлора является

Теорема единственности. Пусть $D \subset C$ — область, множество $E \subset D$ и имеет предельную точку $z_0 \in D$, функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в области D и $f(z) = g(z)$ для всех $z \in E$. Тогда $f(z) = g(z)$ всюду в области D .

Пример 8. Выясним, существует ли аналитическая в точке $z = 0$ функция, удовлетворяющая при $n \in N$ условию:

$$\text{а) } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Условию а) удовлетворяет функция $f(z) = z^2$.

Допустим, что существует аналитическая функция, удовлетворяющая условию б). Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{z}{z+1}$. Она совпадает с f

на множестве $E = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ и $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. По теореме единственности $f(z) = g(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Однако $g\left(-\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+1}$.

Получили противоречие, которое возникло в силу предположения о существовании аналитической функции с указанным свойством.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^{-2n}$ равномерно сходится при $|z| \geq 1$.

5.2. Докажите, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n!}$ является аналитической функцией во всей комплексной плоскости C .

5.3. Докажите, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \sin nz$ является аналитической функцией при $|\operatorname{Im} z| < 1$.

5.4. Докажите, что сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$ является аналитической функцией при $z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$.

5.5. Найдите радиусы сходимости следующих степенных рядов:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n; \quad d) \sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n] z^n; \quad e) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n.$$

5.6. Просуммируйте при $|z| < 1$ следующие ряды:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

5.7. Исследуйте поведение степенного ряда на границе круга сходимости:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n, \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}.$$

5.8. Пользуясь 2-й теоремой Абеля найдите сумму ряда:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} \quad (0 < \varphi < \pi); \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n\varphi}{n} \quad (-\pi < \varphi < \pi);$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\varphi}{n} \quad \pi < \varphi < 2\pi.$$

5.9. Опираясь на разложение $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, докажите формулы и установите радиус сходимости получившихся рядов:

$$a) \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n; \quad b) \frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}.$$

5.10. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ и найдите радиус сходимости ряда:

$$a) f(z) = \operatorname{ch}^2 z; \quad b) f(z) = \frac{2z - 5}{z^2 - 5z + 6};$$

$$c) f(z) = \ln(z^2 - 3z + 2); \quad d) f(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt.$$

5.11. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ и найдите радиус сходимости ряда:

$$a) f(z) = \cos(2 + 2z - z^2); \quad b) f(z) = \sqrt[3]{z}.$$

В пункте b) нужно рассмотреть ветвь, выделяемую условием: $\sqrt[3]{1} = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

5.12. Найдите в виде ряда аналитические в окрестности точки $z = 0$ решения уравнений, удовлетворяющих условиям:

$$a) (1 - z^2) w'' - 4z w' - 2w = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 1;$$

$$b) (1 + z^2) w' = 1, \quad w(0) = 0;$$

$$c) zw'' + w' + zw = 0, \quad w(0) = 1, \quad w'(0) = 0.$$

5.13. Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = 0$ и

$$f(0) = 0. \text{ Докажите, что если } f(z) = z + f(z^2), \text{ то } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}.$$

5.14. Существует ли аналитическая в точке $z = 0$ функция, удовлетворяющая при $n \in N$ условию:

$$a) f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}; \quad b) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}; \quad c) f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}.$$

5.15. Докажите, что функциональное уравнение $f(z) = f(2z)$ имеет в классе аналитических в окрестности $z = 0$ функций только решения, являющиеся тождественно постоянными.

5.16. Пусть разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в круге $|z| < R$

$$\text{имеет вид } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

$$a) \text{ Докажите, что } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \quad (0 < r < R);$$

б) Пусть $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что коэффициенты c_n удо-

влетворяют неравенствам Коши $|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ ($0 < r < R$);

с) Докажите, что если хотя бы одно из неравенств Коши обращается в равенство, т.е. $|c_k| = M(r)/r^k$, то функция $f(z)$ имеет вид $f(z) = c_k z^k$.

5.17. Пусть функции $f(z)$ и $f(z)/z$ являются аналитическими в полосе $|\operatorname{Re} z| < \pi/4$, и функция $f(z)$ удовлетворяет там неравенству $|f(z)| < 1$. Докажите, что в этой полосе $|f(z)| \leq |\operatorname{tg} z|$.

5.18. Пусть функции $f(z)$ и $f(z)/z$ являются аналитическими в круге $|z| \leq 1$, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$, то во всем круге $|f(z)| \leq |z|$.

При этом, если хотя бы в одной внутренней точке круга $|f(z)| = |z|$, то $f(z) = e^{i\theta} z$, где θ — действительное число.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

5.5. а) 0; б) 2; в) e , д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{e}$. 5.6. а) $\frac{z}{(1-z)^2}$; б) $-\ln(1-z)$;

с) $\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$; 5.7. а) Сходится (неабсолютно) во всех точках, кроме $z = -1$. б) Сходится (неабсолютно) во всех точках, кроме $z = \sqrt[3]{-1} = -1$, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. 5.8. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\ln(2 \cos \frac{\varphi}{2})$; в) $\frac{\varphi}{2}$. 5.10. а) $f(z) = 1 +$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} z^{2n}}{2(2n)!}$, $R = \infty$; б) $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} + 3^{-n-1}) z^n$, $R = 2$; в) $f(z) =$

$\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{-n}}{n} z^n$, $R = 1$; д) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $R = \infty$.

5.11. а) $f(z) = \cos 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{4n}}{(2n)!} + \sin 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{4n+2}}{(2n+1)!}$,

$R = \infty$; б) $f(z) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1/3}^n (z-1)^n \right)$, $R = 1$. 5.12. а) $\frac{z}{1-z^2}$;

б) $\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$; в) Функция Бесселя $J_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$.

5.14. а) Нет; б) $\frac{z}{z+2}$; в) нет.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ПАРАГРАФУ 5

1. Ряды Тейлора.

Внимание! Во всех последующих задачах нужно ещё найти радиус сходимости ряда, не прибегая к формулам Коши-Адамара или Даламбера.

1. Разложите функцию $f(z) = \operatorname{sh}^2 z$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$.
2. Разложите функцию $f(z) = \ln(2+z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$.
3. Разложите функцию $f(z) = \cos^2 z$ в степенной ряд вида $\sum c_n z^n$.
4. Разложите функцию $f(z) = \ln z$ в степенной ряд вида $\sum c_n (z-1)^n$.
5. Разложите функцию $f(z) = \sqrt{1+2z}$, $\sqrt{1} = 1$ в ряд по степеням z .
6. Разложите функцию $f(z) = \sqrt[3]{1-z}$, $\sqrt[3]{1} = 1$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$.
7. Разложите функцию $f(z) = \frac{z}{z-2}$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$.
8. Разложите функцию $f(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$ в степенной ряд вида $\sum c_n z^n$.
9. Разложите функцию $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ в степенной ряд вида $\sum c_n z^n$.
10. Разложите функцию $f(z) = \frac{z}{5+z}$ в ряд по степеням z .
11. Разложите функцию $f(z) = \ln \frac{2+z}{z-1}$ в ряд по степеням z .
12. Разложите функцию $f(z) = \ln(z^2-1)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$.
13. Разложите функцию $f(z) = e^{2z} + z^2 - 1$ в ряд по степеням z .
14. Разложите функцию $f(z) = \frac{z^3}{(1-z)^2}$ в ряд вида $\sum c_n (z-1)^n$.
15. Разложите функцию $f(z) = \sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{1} = 1$ в ряд по степеням $(z-1)$.

§ 6. Ряд Лорана. Изолированные особые точки.

1. Ряд Лорана.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = S_1(z) + S_2(z). \quad (1)$$

Пусть радиус сходимости ряда

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

равен R . Тогда функция $S_1(z)$ будет аналитической в круге $B(z_0, R)$.

Делая во втором ряде замену переменнoй $t = \frac{1}{z-z_0}$, получим обычный степенной ряд по переменнoй t

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}t^n.$$

Пусть радиус сходимости этого ряда равен ρ , тогда его сумма (как функция переменнoй t) будет аналитической функцией в круге $|t| < \rho$, и следовательно функция $S_2(z)$ будет аналитической при $|z-z_0| > r$, где $r = 1/\rho$.

Если $r < R$, то функция

$$f(z) = S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

будет аналитической в кольце $r < |z-z_0| < R$.

Верно и обратное утверждение – всякая аналитическая в кольце функция представима рядом вида (1).

Теорема Лорана Аналитическая в кольце $K = \{r < |z-z_0| < R\}$ функция $f(z)$ в каждой точке $z \in K$ представима в виде ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а C_ρ – окружность $|t - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$.

Получаемый в теореме ряд называют *рядом Лорана*. При этом ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ и } \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c_n (z - z_0)^n}$$

называют соответственно *правильной* и *главной частью* ряда Лорана.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является аналитической при $R < |z| < \infty$. Тогда функция $f\left(\frac{1}{t}\right)$ является аналитической в кольце $0 < |z| < \frac{1}{R}$ и допускает разложение в ряд Лорана в окрестности точки $t = 0$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} t^{-n}.$$

Делая замену переменных $t = \frac{1}{z}$ и полагая $c_n = b_{-n}$, получаем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

При этом в окрестности бесконечно удаленной точки *правильной частью* ряда Лорана называется ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ называется *главной частью* ряда Лорана.

Замечание. В фиксированном кольце $r < |z - z_0| < R$ аналитическая функция $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана единственным образом.

Замечание. Ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, когда $c_n = 0$ при $n = -1, -2, \dots$

Пример 1. Разложим функцию $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана по степеням $z-2$ в кольце, содержащем точку а) $z = 3/2$, б) $z = 1/2$,

в) $z = -3/2$.

Особыми точками функции являются точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$, причем вторая — ближайшая к центру разложения, т.е. к $z_0 = 2$; расстояние между $z_0 = 2$ и $z_2 = 3$ равно единице, в круге $|z - 2| < 1$ функция является аналитической и поэтому раскладывается в ряд Тейлора. Заметим, что этот круг содержит точку $z = 3/2$. Расстояние от $z_0 = 2$ до другой особой точки $z_1 = -1$ равно трем, в кольце $1 < |z - 2| < 3$ данная функция является аналитической и раскладывается в ряд Лорана. Указанное кольцо содержит точку $z = 1/2$. Аналитической функция является и в области $|z - 2| > 3$ и раскладывается в ней также в ряд Лорана по степеням $z - 2$. Это кольцо содержит точку $z = -3/2$.

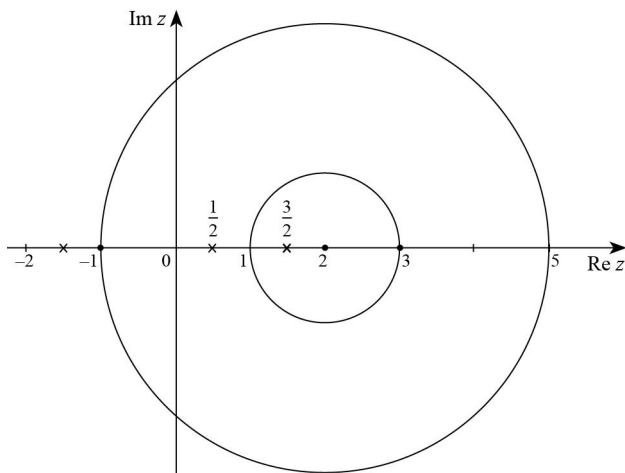


Рис. 9.

Чтобы разложить функцию в ряд Лорана, представим ее в виде суммы элементарных дробей и сделаем замену переменной $z - 2 = t$:

$$f(z) = \frac{-1/4}{z+1} + \frac{5/4}{z-3} = \frac{-1/4}{t+3} + \frac{5/4}{t-1}.$$

а) Разложим функцию $f(z) = f(t+2)$ в ряд Тейлора в круге $\{|t| < 1\}$ по степеням t . Для этого разложим в ряды Тейлора каждую элементарную дробь, следя за тем, чтобы ряды сходились при $|t| < 1$.

$$\frac{1}{t+3} = \frac{1/3}{1 - (-t/3)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{t}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n, \quad |t| < 3.$$

$$\frac{1}{t-1} = -\frac{1}{1-t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad |t| < 1.$$

В общей области сходимости — круге $|t| < 1$ — записываем сумму рядов — разложение исходной дроби:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n - \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 5 \right) t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 5 \right) (z-2)^n. \end{aligned}$$

б) Чтобы получить разложение в кольце $1 < |t| < 3$ дробь $\frac{1}{t+3}$ раскладываем в круге $|t| < 3$ (см. предыдущий случай):

$$\frac{1}{t+3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n,$$

а дробь $\frac{1}{t-1}$ — в области $|t| > 1$:

$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1-1/t} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{-(n+1)}.$$

В общей области сходимости — кольце $1 < |t| < 3$ — «собираем» разложение функции:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(t+2) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} t^n + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} t^{-(n+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} (z-2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{4(z-2)^n}. \end{aligned}$$

в) Чтобы получить разложение в области $|t| > 3$ дробь $\frac{1}{t-1}$ раскладываем в области $|t| > 1$ (см. предыдущий случай):

$$\frac{1}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{-(n+1)},$$

и дробь $\frac{1}{t+3}$ — в области $|t| > 3$:

$$\frac{1}{t+3} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 - (-3/t)} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{t}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{t^{n+1}}.$$

В общей области сходимости $|t| > 3$ получаем разложение:

$$f = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{t^{n+1}} + \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} t^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{5}{4} \right) \frac{1}{(z-2)^n}.$$

Пример 2. Записать разложения функции $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в ряд Лорана в окрестностях конечных особых точек. Конечными особыми точками функции являются точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$. Представим функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)} = \frac{-5/16}{z+1} + \frac{-1/4}{(z+1)^2} + \frac{5/16}{z-3}.$$

Запишем разложение функции в окрестности $z_1 = -1$. Это будет разложение по степеням $z+1$. Заметим, что в приведенной выше сумме первые две дроби представляют собой слагаемые требуемого вида и являются аналитическими функциями во всей плоскости с выколотой точкой $z_1 = -1$. От третьего слагаемого получаем правильную часть ряда Лорана:

$$\frac{1}{z-3} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{4^{n+1}}, \quad |z+1| < 4.$$

Окончательный ответ:

$$\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)} = \frac{-5/16}{z+1} + \frac{-1/4}{(z+1)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5(z+1)^n}{4^{n+3}}, \quad 0 < |z+1| < 4.$$

В главной части присутствуют два члена, при этом $c_{-1} = -5/16$, $c_{-2} = -1/4$.

Запишем разложение функции в окрестности $z_2 = 3$. Это будет разложение по степеням $z - 3$. Видим, что главная часть будет содержать одно слагаемое $\frac{5/16}{z-3}$, правильная часть получается от разложения дробей $\frac{1}{z+1}$ и $\frac{1}{(z+1)^2}$ по степеням $z - 3$. Найдем эти разложения:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-3)+4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(z-3)^n}{4^{n+1}}, \quad |z-3| < 4;$$

$$\frac{1}{(z+1)^2} = -\left(\frac{1}{z+1}\right)' =$$

(согласно предыдущему равенству)

$$= -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(z-3)^n}{4^{n+1}}\right)' =$$

(в круге сходимости дифференцируем ряд почленно)

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n(z-3)^n}{4^{n+1}}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n(z-3)^{n-1}}{4^{n+1}}$$

или разлагаем по стандартной формуле:

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)(z-3)^n}{4^{n+2}}, \quad |z-3| < 4.$$

Записываем ответ:

$$\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)} = \frac{5/16}{z-3} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+6)(z-3)^n}{4^{n+3}}, \quad 0 < |z-3| < 4.$$

Пример 3. Разложим функцию $z^3 e^{1/z}$ в окрестностях точек $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$.

Оба разложения — это разложения по степеням z и получаются из основного разложения, а именно

$$z^3 e^{1/z} = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \right),$$

или

$$z^3 e^{1/z} = z^3 + z^2 + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \dots + \frac{1}{n!z^{n-3}} + \dots, \quad |z| > 0.$$

Различие разложений заключается в записи правильной и главной частей. Так, в случае точки $z_1 = 0$ правильная часть содержит конечное число слагаемых — четыре, и ответ записывается в виде

$$z^3 e^{1/z} = z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(3-n)!}, \quad |z| > 0.$$

В случае $z_2 = \infty$. конечное число слагаемых — три — образует главную часть и ответ записывается в виде

$$z^3 e^{1/z} = z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(3-n)!}, \quad |z| > 0.$$

Отметим еще взаимосвязь рядов Лорана с **рядами Фурье**. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$, тогда в этом кольце она представима рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(t)dt}{t^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Положим $h(t) = f(e^{it})$, тогда для точек $z = e^{it}$ единичной окружности получаем

$$h(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где $a_0 = 2c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Следовательно

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Таким образом, на единичной окружности ряд Лорана для функции $f(z)$ является рядом Фурье для функции $h(t) = f(e^{it})$.

Пример 4. Разложим в ряд Фурье 2π -периодическую функцию

$$f(\varphi) = \frac{a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad |a| < 1,$$

не используя интегрирование.

Сделаем замену $z = e^{i\varphi}$. Тогда

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \cos \varphi = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

Преобразуем функцию, учитывая, что $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$:

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \frac{a(z - \bar{z})}{2i(1 - a(z + \bar{z}) + a^2)} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{(1 - a\bar{z}) + (az - 1)}{(1 - az)(1 - a\bar{z})} = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - az} - \frac{1}{1 - a\bar{z}} \right). \end{aligned}$$

В силу условия задачи имеем: $|a| = |a\bar{z}| < 1$, поэтому мы можем представить каждую дробь в виде ряда

$$f(\varphi) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a^n (\bar{z})^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot \frac{e^{i\varphi n} - e^{-i\varphi n}}{2i} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin(n\varphi).$$

2. Изолированные особые точки аналитической функции.

Определение 1. Точка $z_0 \in \bar{C}$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность точки z_0 , в которой функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением самой точки z_0 (в точке z_0 функция может быть не определена).

В зависимости от поведения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 различают следующие три типа изолированных особых точек.

Определение 2. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется

- 1) *устранимой особой точкой*, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ существует и конечен;
- 2) *полюсом*, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;
- 3) *существенно особой точкой*, если функция $f(z)$ не имеет предела в точке z_0 .

Пример 5. Найдем все особые точки функций

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z(z^4 + 1)}; \quad f_2(z) = \frac{\sin z}{\sin(1/z)}; \quad f_3(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{z}}$$

и определим их тип.

Особыми точками дробей, кроме бесконечно удаленной точки, являются особые точки числителя и знаменателя и нули знаменателя.

Так как числитель и знаменатель функции $f_1(z)$ — функции аналитические, то ее особыми точками являются точка $z = \infty$ и нули знаменателя, т.е. корни уравнения $z(z^4 + 1) = 0$. Это точка $z = 0$ и четыре точки

$$z_k = \exp\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}i\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Очевидно, что все указанные особые точки являются изолированными.

Точка $z = 0$ является *устранимой особой точкой*, так как $\lim_{z \rightarrow 0} f_1(z) =$

1. Точки z_k являются *полюсами*, так как $\lim_{z \rightarrow z_k} f_1(z) = \infty$. Чтобы пока-

зять, что точка $z = \infty$ является существенно особой, рассмотрим два направления, по которым переменная z стремится к бесконечности. Пусть одно из них $z = x$, $x \rightarrow +\infty$. Тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$. Другое направление $z = iy$, $y \rightarrow +\infty$. В этом случае

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f_1(iy) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sin(iy)}{iy((iy)^4 + 1)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} y}{y(y^4 + 1)} = +\infty.$$

Таким образом, единого предела функции при $z \rightarrow \infty$ не существует, следовательно, точка $z = \infty$ является существенно особой.

Особыми точками функции $f_2(z)$ являются бесконечно удаленная точка и нули знаменателя, т.е. точки, для которых $\frac{1}{z_k} = \pi k$ или $z_k = \frac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, а также $z = 0$ — особая точка знаменателя. Точки z_k являются полюсами, так как $\lim_{z \rightarrow z_k} f_2(z) = \infty$. Точка $z = 0$ неизолированная особая точка функции, так как в любой ее окрестности $|z| < r$ (r — любое число, $r > 0$), кроме этой точки, расположено бесконечное множество особых точек вида $z_k = \frac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Точку $z = 0$ в таком случае называют предельной точкой полюсов z_k , так как $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$. Бесконечно удаленная точка является существенно особой. В этом можно убедиться, рассмотрев две последовательности $t_k = \pi k$, $w_k = \pi/2 + 2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$ и найдя пределы

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_2(t_k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f_2(w_k) = \infty.$$

Исследуем особые точки функции $f_3(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{z}}$. Это точки $z = 0$ и $z = \infty$. На беглый взгляд может показаться, что первая из них является устранимой особой точкой, а вторая — существенно особой, однако это не так. Обе точки являются неизолированными, так как в их окрестностях невозможно выделить непрерывную однозначную ветвь исследуемой функции, следовательно, функция не является аналитической ни в какой окрестности этих точек.

Строение ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0 существенным образом зависит от типа особой точки. Без ограничения общности можно считать, что изолированная особая

точка z_0 является конечной, т.к. к этой же ситуации заменой переменной $t = \frac{1}{z}$ сводится случай $z_0 = \infty$.

Теорема 1. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была устранимой особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержал главной части.

Замечание. Продолжив по непрерывности функцию $f(z)$ в точку z_0 , т.е. положив $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$, мы получим функцию аналитическую во всем круге $|z - z_0| < r$ и не имеющую особенностей в точке z_0 . Это и объясняет происхождение термина — *устраняемая особая точка*.

Теорема 2. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки z_0 содержала лишь конечное число слагаемых.

Определение 3. В случае, когда разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $c_{-m} \neq 0$, точка z_0 называется *полюсом порядка m* . При $m = 1$ точку z_0 принято называть *простым полюсом*.

Теорема 3. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки z_0 содержала бесконечное количество слагаемых.

Заметим, что в примере 2 предыдущего пункта точка $z = 3$ является простым полюсом, а точка $z = -1$ — полюсом второго порядка; в примере 3 точка $z = \infty$ является полюсом третьего порядка, а точка $z = 0$ — существенно особой. Это видно из разложения функции в ряд Лорана в окрестностях соответствующих точек.

Порядок полюса во многих случаях играет весьма существенную роль, поэтому полезно знать различные приемы, позволяющие установить порядок полюса, не используя явный вид разложения функции в ряд Лорана.

Из Определения 3 непосредственно следует, что точка z_0 является

полюсом порядка m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (3)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая в точке z_0 функция и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Возвращаясь к примерам предыдущего пункта, отметим, что $z = 3$ является простым полюсом, так как функцию можно представить в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - 3)}$, где $\varphi(z) = (z + 2)(z + 1)^{-2}$ — аналитическая в точке $z = 3$, а точка $z = -1$ является полюсом второго порядка, так как $f(z) = \frac{(z + 2)(z - 3)^{-1}}{(z + 1)^2}$.

Определение 4. Точка z_0 называется *нулем порядка (или кратности) m* аналитической в точке z_0 функции $g(z)$, если $g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(m-1)}(z_0) = 0$, $g^{(m)}(z_0) \neq 0$. Это эквивалентно тому, что функция $g(z)$ в окрестности точки z_0 представима в виде

$$g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m h(z), \quad (4)$$

где $h(z)$ — аналитическая функция и $h(z_0) \neq 0$.

Из равенств (3) и (4) следует, что точка z_0 является нулем порядка m функции $g(z)$ тогда и только тогда, когда точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z) = \frac{1}{g(z)}$. Найти производные функции $\frac{1}{f(z)}$, как правило, значительно проще, чем получить разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана.

Приведем еще одно полезное утверждение, доказательство которого несложно провести самостоятельно.

Лемма. Пусть функция $f(z)$ является дробью. При этом в точке $z = z_0$ ее числитель $\varphi(z)$ имеет нуль порядка m , а знаменатель $\psi(z)$ — нуль порядка n . Если $m \geq n$, то $z = z_0$ — устранимая особая точка; если $m < n$, то $z = z_0$ — полюс порядка $n - m$.

Замечание. Для применения леммы удобно считать, что *порядок нуля функции равен нулю в том случае, если функция в точке не обращается!*

Пример 6. Исследуем характер особых точек функции $f(z) = \frac{z}{\sin^3 z}$.

Функция является дробью, поэтому особыми точками будут нули знаменателя — точки $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $z = \infty$.

Рассмотрим особую точку $z = 0$. Числитель $\varphi(z) = z$ имеет в этой точке нуль первого порядка (или *простой* нуль), порядок нуля знаменателя $\psi(z) = \sin^3 z$ установим по виду разложения в ряд Тейлора:

$$\sin^3 z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right)^3 = z^3 + c_5 z^5 + \dots$$

или взяв несколько производных:

$$\psi'(z) = 3 \sin^2 z \cos z \Big|_{z=0} = 0, \quad \psi''(z) = (6 \sin z \cos^2 z - 3 \sin^3 z) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\psi'''(z) = (6 \cos^3 z - 12 \sin^2 z \cos z - 9 \sin^2 z \cos z) \Big|_{z=0} = 6 \neq 0.$$

Так или иначе получаем, что для знаменателя точка $z = 0$ является нулем третьего порядка. Из леммы следует, что для дроби $\frac{z}{\sin^3 z}$ эта точка — полюс второго порядка.

Рассмотрим точки $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. В этих точках числитель функции не обращается в нуль, поэтому параметр m из леммы равен нулю; знаменатель, как показывают предыдущие вычисления, имеет нуль третьего порядка. Поэтому в точках $z_k = \pi k$, $k \neq 0$ функция имеет полюс третьего порядка. Бесконечно удаленная точка изолированной не является как предельная для полюсов.

3. Целые и мероморфные функции.

Определение 1. *Целой* называется функция, аналитическая во всей комплексной плоскости C , т.е. не имеющая конечных особых точек.

Пусть функция $f(z)$ является целой. Тогда точка $z = \infty$ является единственной изолированной особой точкой этой функции. Возможны три случая.

Если бесконечно удаленная точка является устранимой, то целая функция $f(z) \equiv \text{const}$.

Если бесконечно удаленная точка является полюсом порядка m , то функция $f(z)$ является многочленом степени m .

Целые функции, для которых бесконечно удаленная точка является существенно особой, называются *целыми трансцендентными функциями* (таковы, к примеру, функции $e^z, \sin z, \cos z, \dots$).

Определение 2. Функция, аналитическая на комплексной плоскости C всюду, кроме полюсов, называется *мероморфной*.

Стандартным примером мероморфных функций являются функции-дроби $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{th} z$, а также рациональные функции $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$. В зависимости от соотношения степеней многочленов, стоящих в числителе и знаменателе рациональной функции, бесконечно удаленная точка для функции $R(z)$ будет либо устранимой точкой либо полюсом. Верно и обратное утверждение.

Теорема. Если для мероморфной функции $f(z)$ бесконечно удаленная точка является устранимой точкой или полюсом, то функция $f(z)$ является рациональной.

Замечание. Из доказательства теоремы следует возможность разложения произвольной рациональной функции на целую часть и простейшие дроби.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Найдите множества точек z , в которых сходятся следующие ряды

$$a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 5^{-|n|} z^n; \quad b) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{1 + 2^n}.$$

6.2. Разложите данную функцию в ряд Лорана в указанном кольце

$$a) f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}, \quad 1 < |z| < 2;$$

$$b) f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}, \quad 1 < |z-1| < 2;$$

$$c) f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}, \quad |z| > 2.$$

6.3. Разложите данную функцию в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце, которому принадлежит точка z_0 . Укажите границы кольца.

$$a) f(z) = \frac{6z - z^2}{z^2 + 3z - 18}, \quad a = -1, \quad z_0 = 3, 5;$$

$$b) f(z) = \frac{z^2 + 6iz + 3}{z^2 + 2iz + 3}, \quad a = 0, \quad z_0 = ie;$$

$$c) f(z) = \frac{z+i}{z^2}, \quad a = i, \quad z_0 = -i.$$

6.4. Выясните, допускает ли разложение в ряд Лорана функция

$$a) f(z) = \sin \frac{1}{z} \text{ в окрестности точки } z = 0;$$

- b) $f(z) = \frac{z^2}{\cos z - 2}$ в окрестности точки $z = \infty$;
 c) $f(z) = \ln(z - 1)$ в окрестности точек $z = 1, z = \infty$.

6.5. Разложите данную функцию в ряд Лорана в окрестности указанных точек, определите область, в которой разложение имеет место, по виду главной части ряда определите тип этих особых точек:

- a) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точек $z = 0, z = 1, z = \infty$;
 b) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точек $z = 0, z = \infty$;
 c) $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$ в окрестности точки $z = 1$;
 d) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ в окрестности точек $z = 0, z = \infty$;
 e) $f(z) = \sin \frac{z}{1-z}$ в окрестности точки $z = 1$.
 f) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ в окрестности точек $z = i, z = \infty$.

6.6. Найдите главную часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности указанной точки:

- a) $f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$ в окрестности точки $z = 2k\pi i$;
 b) $f(z) = \frac{z-1}{\sin^2 z}$ в окрестности $z = 0$;
 c) $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{z^2+b^2}$ в окрестности точки $z = \infty$.

6.7. Используя взаимосвязь рядов Лорана с рядами Фурье, разложите следующие функции в ряд Фурье:

- a) $h(\varphi) = \frac{1 - a \cos \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad -1 < a < 1$;
 b) $h(\varphi) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad 0 < a < 1$;
 c) $h(\varphi) = \ln(1 - 2a \cos \varphi + a^2), \quad 0 < a < 1$;
 d) $h(\varphi) = \ln \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|$.

6.8. Пусть функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, являющаяся аналитической в кольце $r \leq |z| \leq R$, взаимно-однозначно отображает это кольцо на некоторое множество D . Докажите, что площадь S этого множества может быть найдена по формуле

$$S = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|^2 (R^{2n} - r^{2n}).$$

6.9. Найдите все особые точки функции $f(z)$ и выясните их тип особенностей:

$$a) f(z) = \frac{z^5}{(1-z)^2}; \quad b) f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}; \quad c) f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z};$$

$$d) f(z) = \frac{1}{z^3(2-\cos z)}; \quad e) f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}; \quad f) f(z) = \sin \frac{1}{1-z};$$

$$g) f(z) = \sin(e^z); \quad h) f(z) = e^{-z} \cos \frac{1}{z}; \quad i) f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\operatorname{sh} \sqrt{z}}.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

6.1. а) $\frac{1}{5} < |z| < 5$; **б)** $1 < |z| < 2$. **6.2. а)** $\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{-3n-4}{9} \cdot z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9 \cdot 2^{n+1}} \cdot z^n$;

б) $\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9} \cdot (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{9 \cdot 2^{n+2}} \cdot (z-1)^n$; **с)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n 4^{n-1}}{5} \cdot z^{-2n}$.

6.3. а) $\frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} (z+1)^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8}{5^{n+1}} (z+1)^n$, $4 < |z+1| < 5$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{n+1} + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{3i}\right)^n$, $1 < |z| < 3$; **с)** $\sum_{n=-1}^{-\infty} (n+2) i^{n+1} (z-i)^n$,

$1 < |z-i| < \infty$. **6.4. а)** Да; **б)** нет; **с)** нет. **6.5. а)** $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $0 < |z| < 1$,

$z = 0$ – простой полюс; $-\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$, $0 < |z-1| < 1$,

$z = 1$ – простой полюс; $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}$, $|z| > 1$, $z = \infty$ – устранимая особая

точка; **б)** $z+1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)! z^n}$, $0 < |z| < \infty$, $z = 0$ – существен-

но особая точка, $z = \infty$ – простой полюс; **с)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1)!} - \right. \right.$

$\left. \frac{1}{(2n+1)!} \right] (z-1)^{-(2n-1)} + \frac{2(-1)^n}{(2n+1)!} (z-1)^{-2n} \Big] + 2 + (z-1)$, $0 < |z-1| < \infty$,

$z = 1$ – существенно особая точка; **д)** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$, $c_n =$

$c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, обе точки – существенно особые;

е) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(1 + \frac{\pi n}{2}\right)}{n!} (z-1)^{-n}$, $0 < |z-1| < \infty$, $z = 1$ – существенно осо-

бая точка; **ф)** $-\frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z-i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)i^n (z-i)^n}{4 \cdot 2^n}$, $0 < |z-i| < 2$,

$z = i$ – полюс второго порядка; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{z^{2n+2}}$, $|z| > 1$, $z = \infty$ – устрани-

мая особая точка. **6.6. а)** $\frac{2}{z-2\pi ki}$; **б)** $-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$; **в)** z^2 . **6.7. а)** $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos n\varphi$;
б) $1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos n\varphi$; **в)** $-2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos n\varphi$; **д)** $-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}$.

6.9. а) $z = 1$ – полюс второго порядка, $z = \infty$ – полюс третьего порядка; **б)** $z = \pm 1$ – полюсы простые, $z = \infty$ – существенно особая точка; **в)** $z = 0$ – устранимая особая точка, $z_k = 2\pi ki, k \neq 0$, – полюсы простые, $z = \infty$ изолированной особой точкой не является, предельная для полюсов z_k ; **д)** $z = 0$ – полюс третьего порядка, $z_k = \text{Arccos } 2$ – полюсы простые, $z = \infty$ изолированной не является, предельная для полюсов z_k ; **е)** $z = 1$ – существенно особая точка, $z = \infty$ – устранимая особая точка; **ф)** $z = 1$ – существенно особая точка, $z = \infty$ – устранимая особая точка; **г)** $z = \infty$ – существенно особая точка; **х)** $z = 0$, $z = \infty$ – существенно особые точки; **и)** $z = 0$ – устранимая особая точка, $z_k = -(\pi k)^2, k = 1, 2, \dots$, – простые полюсы, $z = \infty$ – не является изолированной, предельная для полюсов z_k .

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ПАРАГРАФУ 6

1. Ряды Лорана.

В следующих задачах требуется разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0 и указать максимальное кольцо, в котором полученный ряд сходится.

	z_0	$f(z)$		z_0	$f(z)$
1	$z_0 = 0$	$f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$	2	$z_0 = 0$	$f(z) = \frac{z+i}{z^2}$
3	$z_0 = 0$	$f(z) = \frac{2}{z^2 - 2z}$	4	$z_0 = \infty$	$f(z) = z^3 e^{1/z}$
5	$z_0 = 0$	$f(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$	6	$z_0 = \infty$	$f(z) = z^3 \cos \frac{\pi}{z}$
7	$z_0 = 0$	$f(z) = \frac{z^2 - 5}{z(1-z)}$	8	$z_0 = \infty$	$f(z) = \ln \frac{z}{z+1}$
9	$z_0 = \infty$	$f(z) = \frac{\sin(2/z)}{z^2}$	10	$z_0 = \infty$	$f(z) = \frac{\sin z - 3}{z}$
11	$z_0 = 0$	$f(z) = \frac{1 - \cos 2z}{z^3}$	12	$z_0 = i$	$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$
13	$z_0 = 0$	$f(z) = \exp\left(\frac{z-1}{2z}\right)$	14	$z_0 = 1$	$f(z) = z - \frac{2}{z} + \frac{3}{(z-1)^2}$
15	$z_0 = 2$	$f(z) = \exp\left(\frac{2}{2-z}\right)$	16	$z_0 = i$	$f(z) = i - z + \frac{1}{z} + \frac{i}{z-i}$

§ 7. Элементы теории вычетов.

Пусть $z_0 \in C$ – изолированная особая точка функции $f(z)$, т.е. существует такое $r > 0$, что функция $f(z)$ является аналитической в кольце $K = \{0 < |z - z_0| < r\}$.

Рассмотрим два замкнутых контура $\gamma_1, \gamma_2 \subset K$, содержащих точку z_0 внутри себя. Тогда существует такое $\rho > 0$, что окружность $C_\rho = \{|z - z_0| = \rho\}$ будет находиться одновременно внутри контуров γ_1 и γ_2 . Поскольку функция $f(z)$ является аналитической в кольце K , то по интегральной теореме Коши

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{C_\rho^-} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{C_\rho^-} f(z)dz = 0.$$

Откуда получаем

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Таким образом значение интеграла не зависит от выбора замкнутого контура, содержащего изолированную особую точку z_0 внутри себя.

Определение 1. *Вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in C$ называется величина

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(z)dz,$$

где интеграл берется по произвольной ориентированной в положительном направлении достаточно малой окружности с центром в точке z_0 .

Из формул для нахождения коэффициентов ряда Лорана следует, что

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(z)dz = c_{-1},$$

т.е. вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in C$ равен коэффициенту при минус первой степени $(z - z_0)^{-1}$ в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 .

Из этого непосредственно следует, что вычет в устранимой особой точке $z_0 \in C$ равен нулю.

Довольно просто находится вычет и в полюсе произвольного порядка. Пусть точка $z_0 \in C$ является полюсом порядка m функции $f(z)$, тогда

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-z_0)^m]. \quad (1)$$

Если точка $z_0 \in C$ является простым полюсом и $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, а $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Для нахождения вычета в существенно особой точке $z_0 \in C$ обычно приходится непосредственно находить коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции в окрестности точки z_0 .

Из определения вычета видно, что это понятие должно быть тесно связано с вычислением интегралов.

Основная теорема теории вычетов. Пусть $D \subset C$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении. Функция $f(z)$ является непрерывной в $\bar{D} = D \cup \Gamma$ и аналитической в области D , за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , лежащих в области D . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Это утверждение имеет довольно много различных приложений поскольку позволяет свести вычисление интеграла к существенно более простой процедуре нахождения вычетов. *В дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать, что все интегралы берутся по замкнутым контурам, проходящим в положительном направлении, то есть точки области, ограниченной этими контурами, находятся слева от контуров.*

Пример 1. Вычислим интеграл $I = \int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(1-e^{2z})}$ (счита-

ем, что окружность $|z| = 3$ проходится против часовой стрелки!). Найдем изолированные особые точки подынтегральной функции $f(z) =$

$\frac{1}{(z-1)^2(1-e^{2z})}$. Это точка $z = \infty$ и нули знаменателя $z = 1, z_k = \pi ki, k \in \mathbb{Z}$. При этом $z = 1$ является полюсом второго порядка, а точки z_k - простыми полюсами. В области, ограниченной контуром, т. е. в круге $|z| < 3$, лежат две особые точки: $z = 1$ и $z = 0$. Поэтому, согласно основной теореме о вычетах, интеграл равен:

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=0} f(z) \right).$$

Найдем вычеты в каждой из точек. По формуле нахождения вычета в полюсе порядка m , имеем:

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-e^{2z}} \right)' = \frac{2e^{2z}}{(1-e^{2z})^2} \Big|_{z=1} = \frac{2e^2}{(1-e^2)^2}.$$

По формуле вычисления вычета в простом полюсе:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{(z-1)^{-2}}{(1-e^{2z})'} \Big|_{z=0} = \frac{(z-1)^{-2}}{(-2e^{2z})} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2}.$$

Итого:
$$I = 2\pi i \left(\frac{2e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{1}{2} \right) = \pi i \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 2} - 1 \right).$$

Пример 2. а) $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sin \frac{1}{z} dz$, б) $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sin^2 \frac{1}{z} dz$.

В обоих интегралах подынтегральные функции имеют две изолированные особые точки. Это $z = 0$ - существенно особая и $z = \infty$ - устранимая особая. В круге $|z| < r$ лежит точка $z = 0$. Как уже упоминалось, вычет в существенно особой точке находится с помощью разложения в ряд Лорана в окрестности $z = 0$. Поскольку

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{z} \right)^5 - \dots,$$

то $c_{-1} = 1$ и, следовательно, $I = 1$. Что касается второго интеграла, то можно заметить, что подынтегральная функция - четная, следовательно разложение в ряд Лорана в окрестности нуля содержит только четные степени z , поэтому коэффициент $c_{-1} = 0$, а вместе с ним и соответствующий интеграл равен нулю.

Пусть бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, т.е. существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является аналитической при $|z| > R$.

Определение 2. Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ называется величина

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^-} f(z) dz,$$

где интеграл берется по ориентированной в отрицательном направлении окружности $|z| = \rho$, $\rho > R$.

Если известно разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, то

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

При этом следует отметить, что даже в случае, когда бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой, вычет в ней может быть отличен от нуля. В качестве простейшего примера можно рассмотреть функцию $f(z) = \frac{1}{z}$, для которой $z = \infty$ является устранимой особой точкой, но $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Из разложения в ряд Лорана несложно вывести формулу для нахождения вычета в устранимой особой точке $z_0 = \infty$. Пусть $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c_0$. Тогда

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = - \lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - c_0)z.$$

Теорема о сумме вычетов. Пусть функция $f(z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости C , за исключением конечного числа изолированных особых точек, тогда сумма вычетов во всех особых точках (включая вычет в бесконечно удаленной точке) равна нулю.

В случае, когда конечных изолированных особых точек достаточно много, вместо вычисления суммы вычетов во всех конечных особых точках часто бывает проще найти вычет в одной единственной бесконечно удаленной точке.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} f(z) dz = \int_{|z|=2} \frac{2z^7 - z^6 + 3z^4 + z - 5}{z^8 - 1} dz.$$

Функция $f(z)$ имеет восемь простых полюсов $z_k = e^{\frac{i\pi k}{4}}$, $k = 0, 1, \dots, 7$, лежащих в круге $|z| < 2$, по основной теореме теории вычетов и по

теореме о сумме вычетов имеем

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^7 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Найдем разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z^7 - z^6 + 3z^4 + z - 5}{z^8} \cdot \frac{1}{(1 - z^{-8})} = \\ &= \left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^7} - \frac{5}{z^8} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{8k}} = \frac{2}{z} + \sum_{m=2}^{\infty} c_m \frac{1}{z^m}. \end{aligned}$$

Видим, что $c_{-1} = 2$, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -2$, следовательно $I = 4\pi i$.

Следующие примеры иллюстрируют тот факт, что сформулированные теоремы следует применять с осторожностью, внимательно проверяя их условия.

Пример 4. $I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}}, \quad r \neq 1, \quad \sqrt{1} = 1.$

Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + z + 1}}$ кроме бесконечно

удаленной точки $z = \infty$ имеет особые точки $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$. Эти две точки не являются изолированными особыми, это — точки ветвления корня. Поскольку $|z_{1,2}| = 1$, то следует рассмотреть два случая.

При $r < 1$ интегрирование ведется по контуру, охватывающему область, в которой подынтегральная функция допускает выделение однозначных аналитических ветвей. Поэтому ветвь, выделяемая условием $\sqrt{1} = 1$, является аналитической, и по интегральной теореме Коши интеграл равен нулю.

При $r > 1$ в область $|z| < r$, ограниченную контуром, попадают точки $z_{1,2}$, которые, однако, изолированными *не являются*, и основную теорему применять *нельзя*. Рассмотрим область $|z| > r$. В ней функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви, следовательно, согласно определению вычета в бесконечно удаленной точке, $I = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$. Для $f(z)$ точка $z = \infty$ является устра-

нимой особой точкой, так как $c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 + z + 1}} = 0$. Применяем формулу для нахождения вычета в бесконечно удаленной точке:

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{z^2 + z + 1}} = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z\sqrt{1 + z^{-1} + z^{-2}}} = -\sqrt{1} = -1.$$

Следовательно, $I = 1$.

Видим, что для вычисления интеграла в этом случае нам не потребовались теоремы этого параграфа, а только определение вычета.

Пример 5.
$$I = \int_{|z|=1} \frac{z - (1/\ln 2)}{e^{1/z} - 2} dz.$$

Особые точки подынтегральной функции $f(z) = \frac{z - (1/\ln 2)}{e^{1/z} - 2}$ — это точки $z = 0$, $z = \infty$ и нули знаменателя. Найдем их, решив уравнение $e^{\frac{1}{z}} - 2 = 0$.

$$\frac{1}{z} = \operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2\pi ki, \quad z_k = \frac{1}{\ln 2 + 2\pi ki}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Видно, что их *бесконечно много и все они*, кроме $z_0 = \frac{1}{\ln 2}$ и $z = \infty$, лежат в круге $|z| < 1$. Поэтому для нахождения интеграла нельзя применять ни одну из сформулированных теорем.

Попробуем преобразовать интеграл с помощью взаимно-однозначной замены переменной: $z = \frac{1}{t}$. Эта замена переводит контур интегрирования $C_+ = \{|z| = 1\}$, проходимый в положительном направлении в такой же контур $C_- = \{|t| = 1\}$, только проходимый в противоположном направлении. Учитывая, что $dz = d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}dt$, запишем:

$$I = \int_{C_-} \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{\ln 2}}{e^t - 2} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \frac{1}{\ln 2} \int_{C_+} \frac{\ln 2 - t}{t^3(e^t - 2)} dt = \frac{2\pi i}{\ln 2} \left(\operatorname{Res}_{t=0} f(t) + \operatorname{Res}_{t=\ln 2} f(z) \right).$$

Здесь $f(t) = \frac{\ln 2 - t}{t^3(e^t - 2)}$. Найдем вычеты. Точка $t = 0$ является полюсом третьего порядка, поэтому вычет находится по формуле

$$\operatorname{Res}_{t=0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \left(\frac{\ln 2 - t}{e^t - 2} \right)'' = 1 - \frac{3}{2} \ln 2.$$

Точка $t = \ln 2$ является устранимой особой (проверьте!), поэтому вычет в ней равен нулю. Окончательно:

$$I = \frac{2\pi i}{\ln 2} \left(1 - \frac{3}{2} \ln 2 \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2} \right).$$

Здесь потребовалась замена переменной, чтобы свести интеграл к виду, для которого основная теорема о вычетах применима.

Сейчас рассмотрим пример, в котором непосредственное применение основной теоремы о вычетах невозможно по причине того, что контур интегрирования *не является ограниченным*.

Пример 6.
$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{\cos(\pi z)},$$

здесь Γ — граница полуполосы $D = \{z \in C, |\operatorname{Im} z| < 1, \operatorname{Re} z < 0\}$. Интегрирование ведется в положительном направлении, т.е. область остается слева.

Особые точки подынтегральной функции — это бесконечно удаленная точка и нули знаменателя: $\cos(\pi z) = 0$, $\pi z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $z = \frac{1}{2} + k$, $k \in Z$. Эти точки являются простыми полюсами и все точки, выделяемые условием $k < 0$, лежат в области D . Занумеруем их так: $z_k = \frac{1}{2} - k$, $k = 1, 2, 3, \dots$

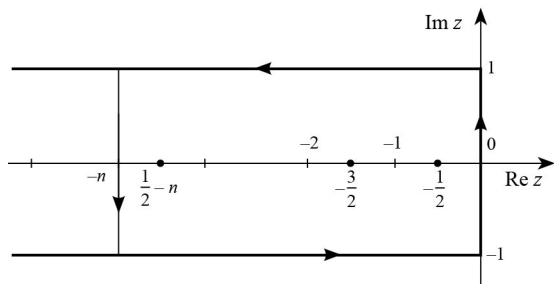


Рис. 10.

Рассмотрим вспомогательный интеграл $I_n = \int_{\Gamma_n} \frac{e^z dz}{\cos(\pi z)}$, где Γ_n — граница области $D_n = \{z \in C, |\operatorname{Im} z| < 1, -n < \operatorname{Re} z < 0\}$ (см. рис. 10). Область D_n является ограниченной, в нее попадают конечное число точек z_k , и согласно основной теореме

$$I_n = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} \frac{e^z}{\cos(\pi z)} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{e^z}{(-\pi \sin(\pi z))} \Big|_{z_k} = -2i \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{1}{2}-k}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \pi k)} =$$

$$= -2ie^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{e^{-k}}{(-1)^k} = -2ie^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n (-e^{-1})^k = -2ie^{\frac{1}{2}} S_n$$

Поскольку знаменатель геометрической прогрессии $q = -e^{-1}$ по модулю меньше единицы, то при $n \rightarrow +\infty$ последовательность частичных сумм S_n сходится к сумме ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-e^{-1})^k = \frac{-e^{-1}}{1 - (-e^{-1})}.$$

Интеграл при этом стремится к значению

$$I_n \rightarrow -2\pi e^{1/2} \frac{-e^{-1}}{1 - (-e^{-1})} = \frac{2i}{e^{1/2} - e^{-1/2}} = \frac{i}{\operatorname{ch}(1/2)}.$$

Убедимся теперь, что $I_n \rightarrow I$. Пусть $\Gamma_n = C_n \cup \gamma_n$, где $\gamma_n = \{z = -n + iy, |y| < 1\}$ — «левый» отрезок контура интегрирования Γ_n , а C_n — остальная часть этого контура. Очевидно, что при $n \rightarrow +\infty$ $C_n \rightarrow \Gamma$. Докажем, что

$$\int_{\gamma_n} \frac{e^z dz}{\cos(\pi z)} \rightarrow 0.$$

Для этого оценим подынтегральную функцию, считая, что $z \in \gamma_n$.

$$\left| \frac{e^z}{\cos(\pi z)} \right| = \frac{|e^{-n+iy}|}{|\cos(-\pi n + \pi iy)|} = \frac{e^{-n} |e^{iy}|}{|(-1)^n \cos \pi iy|} = \frac{e^{-n}}{|\operatorname{ch}(\pi y)|} \leq e^{-n}.$$

и интеграл
$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{e^z dz}{\cos(\pi z)} \right| \leq \int_{\gamma_n} \left| \frac{e^z}{\cos(\pi z)} \right| \cdot |dz| \leq \int_{-1}^1 e^{-n} dy = 2e^{-n} \rightarrow 0.$$

Таким образом, $I = \frac{i}{\operatorname{ch}(1/2)}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Пусть функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, где функция $\varphi(t)$ является аналитической в точке $t = 0$. Докажите, что

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0).$$

7.2. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют в точке $z = \infty$ полюсы порядков n и m соответственно. Докажите, что функция $F(z) = f(g(z))$ имеет в точке $z = \infty$ полюс и найдите его порядок.

7.3. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках:

$$a) f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}; \quad b) f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}; \quad c) f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)};$$

$$d) f(z) = \operatorname{ctg} z; \quad e) f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}; \quad f) f(z) = \frac{1}{\sin \frac{z}{z+1}};$$

$$g) f(z) = z^n \sin \frac{1}{z}, n \in N; \quad h) f(z) = \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}.$$

7.4. Найдите вычеты для каждой из однозначных ветвей соответствующей многозначной функции:

$$a) \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+3}{4\pi i - \operatorname{Ln}(1+z)}; \quad b) \operatorname{Res}_{z=1} \frac{z}{2 + \sqrt{5-z}}.$$

7.5. Вычислите интегралы, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении:

$$a) \int_{|z|^2=2 \operatorname{Re} z} \frac{dz}{1+z^4}; \quad b) \int_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{1+2z^4}; \quad c) \int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)};$$

$$d) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} z^n e^{\frac{2}{z}} dz, \quad n \in N; \quad e) \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^8+1}; \quad f) \int_{|z|=5} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{z-2} dz.$$

7.6. Вычислите интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{(z+i) dz}{(z-i) \operatorname{sh} \frac{1}{2z}}$$

по ориентированной против хода часовой стрелки окружности $\Gamma = \{|z+1-i|=2\}$.

7.7. Вычислите интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^4 + 1) \sqrt{z^2 + 1}}$$

по параболе $\Gamma = \{z \in C \mid \operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2\}$, проходимой в сторону возрастания $\operatorname{Im} z$. Рассмотрите все ветви многозначной функции.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

- 7.2.** Полюс порядка $n + m$. **7.3. а)** $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname{Res}_{z=\pm 1} f(z) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$; **б)** $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 2 \sin 2$; **в)** $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{9}$, $\operatorname{Res}_{z=-3i} f(z) = -\frac{1}{54}(\sin 3 + i \cos 3)$, $\operatorname{Res}_{z=3i} f(z) = -\frac{1}{54}(\sin 3 - i \cos 3)$, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{27}(\sin 3 - 3)$; **д)** $\operatorname{Res}_{z=\pi k} f(z) = 1$, k — целое число; **е)** $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{143}{24}$; **ф)** $\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{(-1)^k}{(1-\pi k)^2}$, $z_k = \frac{\pi k}{1-\pi k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{\cos 1}{\sin^2 1}$; **г)** $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$, если $n < 0$ или $n > 0$ — нечетное; $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}$, если $n = 0$ или $n > 0$ — четное; $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=0} f(z)$; **ж)** $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$, $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \sin 1$. **7.4. а)** $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -3$ для ветви $\operatorname{Ln} 1 = 4\pi i$, $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$ для остальных ветвей; **б)** $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 4$ для ветви $\sqrt{1} = -1$, $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$ для ветви $\sqrt{1} = 1$; **7.5. а)** $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$; **б)** πi ; **в)** $-\frac{2\pi i}{9}$; **д)** $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ при $n \geq -1$; 0 при $n < -1$; **е)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(7+8k)!}$; **ф)** $2\pi i$. **7.6.** $-\frac{49\pi i}{6}$. **7.7.** $\pm \frac{1}{4} \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ для ветвей $\sqrt{1} = \pm 1$, соответственно.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ПАРАГРАФУ 7

1. Вычеты.

Во всех последующих задачах требуется найти вычеты в указанных точках.

1. $\operatorname{Res}_{z=-\pi} \frac{\sin z}{z^2(z+\pi)^2}$
2. $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+1}{z^2(z-1)^2}$
3. $\operatorname{Res}_{z=1} \frac{z+1}{z^2(z-1)^2}$
4. $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+1}{z^2 e^{z^2}}$
5. $\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^{z+1}}{(z+1)^2}$
6. $\operatorname{Res}_{z=2i} \frac{z+2i}{z^3+8i}$
7. $\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z+2}{z^2-2z-3}$
8. $\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$
9. $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2}$
10. $\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{e^z-1}{z^2}$
11. $\operatorname{Res}_{z=0} z^2 \cos \frac{1}{z}$
12. $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1-\cos z}{z^2}$
13. $\operatorname{Res}_{z=\pi/2} \frac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$
14. $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$
15. $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2(z+\pi)^2}$

2. Интегралы.

Во всех последующих задачах требуется найти интегралы, обход контура в которых происходит против часовой стрелки.

1. $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^3+z+1}$
2. $\int_{|z|=3} \frac{z \cos(\pi/z) dz}{z+2i}$
3. $\int_{|z|=2} z^2 \sin \frac{1}{1-z}$
4. $\int_{|z|=4} \frac{e^{1/(z-1)} dz}{z-2}$
5. $\int_{|z+i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2+12)}$
6. $\int_{|z|=2} \frac{e^{iz} dz}{(z-i)^2}$
7. $\int_{|z-1|=1} \frac{ze^{-z} dz}{z^2-1}$
8. $\int_{|z|=3} \frac{z^2 dz}{(z-2)(z^2+1)}$
9. $\int_{|z|=3/2} \frac{z \operatorname{tg} z dz}{(z^2-1)^2}$
10. $\int_{|z|=6} \frac{z^2 dz}{e^{iz}+i}$
11. $\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{-z^3} dz}{(z-1)^2}$
12. $\int_{|z|=2} e^{1/(z-1)} \frac{z^2 dz}{z-1}$
13. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$
14. $\int_{|z-\pi|=1} \frac{2-\cos z}{\sin z} dz$
15. $\int_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{z(e^{2z}-1)}$

§ 8. Применение теории вычетов для нахождения определенных интегралов от функций действительного переменного.

1. Вычисление рационально-тригонометрических интегралов.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi, \quad (1)$$

где $R(\xi, \eta)$ – рациональная функция, не имеющая полюсов на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Сделаем замену переменной $z = e^{i\varphi}$, тогда

$$d\varphi = -i \frac{dz}{z}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Следовательно интеграл (1) равен

$$\begin{aligned} & \int_{|z|=1} \frac{1}{i} R \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{z} = \\ & = \int_{|z|=1} R_1(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ |z_k|<1}} \operatorname{Res}_{z=z_k} R_1(z). \end{aligned}$$

Пример 1. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad 0 < |a| < 1, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Сделав замену переменной $z = e^{i\varphi}$, получаем

$$I = \int_{|z|=1} \frac{i dz}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}.$$

Уравнение $az^2 - (a^2 + 1)z + a = 0$ имеет два корня $z_1 = a$ и $z_2 = \frac{1}{a}$, из которых в круге $|z| < 1$ лежит лишь точка $z_1 = a$, являющаяся простым полюсом. Вычет в простом полюсе находится по формуле:

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{i}{(az^2 - (a^2 + 1)z + a)'} \Big|_{z=a} = \frac{i}{a^2 - 1}.$$

Таким образом,

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

2. Вычисление рациональных интегралов.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx, \quad (2)$$

где $R(x)$ – рациональная функция.

Пусть $R(z)$ – соответствующая рациональная функция комплексного переменного. Если $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ многочлены степени n и m соответственно, тогда для сходимости интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы функция $R(z)$ не имела полюсов на действительной оси и для степеней многочленов выполнялось неравенство $m - n \geq 2$. Это означает, что $R(z) = O(z^{-2})$ при $z \rightarrow \infty$.

В этом случае интеграл можно вычислить, пользуясь формулой:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res}_{z=z_k} R(z). \quad (3)$$

Пример 2. Вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 2x + 17)^2} dx.$$

Проверим условия применимости формулы (3). Так как в числителе многочлен степени $n = 2$, а в знаменателе $m = 4$, то условие $m - n \geq 2$ выполняется. Корни $z_1 = 1 + 4i$ и $z_2 = 1 - 4i$ знаменателя не являются действительными, поэтому подынтегральная функция не имеет полюсов на действительной оси. Особыми точками функции являются корни знаменателя, и они – полюсы второго порядка. Для применения формулы (3) найдем вычет в точке $z_1 \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$:

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{z^2 + 3}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} = \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{(z^2 + 3)(z-z_1)^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{z^2 + 3}{(z-z_2)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{-2z z_2 - 6}{(z - z_2)^3} = \frac{-2z_1 z_2 - 6}{(z_1 - z_2)^3} = \frac{-2 \cdot 17 - 6}{(8i)^3} = \frac{5}{64i}.$$

Применяем формулу (3) и записываем ответ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 2x + 17)^2} dx = 2\pi i \frac{5}{64i} = \frac{5\pi}{32}.$$

В случае, когда особых точек оказывается довольно много, чтобы не искать сумму большого количества вычетов, можно вычисление интеграла свести к интегрированию по границе сектора, содержащего всего одну особую точку.

Пример 3. Вычислим интеграл

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}}, \quad n \geq 1.$$

Функция $R(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}$ имеет $2n$ особых точек. Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру Γ_R , состоящему из отрезка действительной оси $L = [0, R]$, дуги окружности $C_R = \{z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}\}$ и отрезка $l = \{z = re^{i\pi/n}, 0 \leq r \leq R\}$.

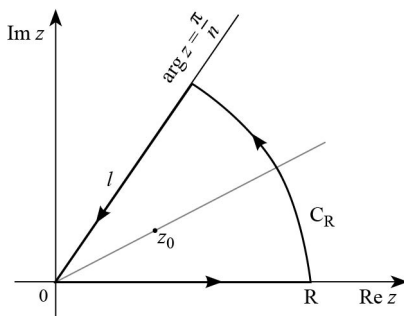


Рис. 11.

Внутри контура Γ_R функция $R(x)$ имеет один единственный простой полюс $z_0 = e^{i\pi/(2n)}$. Вычет в точке z_0 равен

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} R(z) = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}} = \frac{z_0}{2nz_0^{2n}} = -\frac{z_0}{2n}.$$

По теореме о вычетах

$$\int_{\Gamma_R} R(z) dz = \int_L R(z) dz + \int_{C_R} R(z) dz + \int_l R(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} R(z). \quad (4)$$

Поскольку $|R(z)| \sim \frac{1}{|z|^{2n}}$ при $z \rightarrow \infty$, то $\int_{C_R} R(z) dz \rightarrow 0$, $(R \rightarrow +\infty)$.

Интеграл по отрезку l сводится к интегралу по отрезку L

$$\int_l R(z) dz = \int_R^0 R(re^{i\pi/n}) e^{i\pi/n} dr = -e^{i\pi/n} \int_0^R \frac{dr}{1+r^{2n}}.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ в равенстве (4), получаем

$$I_n - e^{i\pi/n} I_n = -\frac{\pi i}{n} e^{i\pi/(2n)},$$

откуда

$$I_n = \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}.$$

3. Преобразование Фурье рациональной функции.

Интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx \quad (5)$$

является преобразованием Фурье рациональной функции $R(x)$.

Для нахождения таких интегралов при $\alpha > 0$ работает формула

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res} (e^{i\alpha z} R(z)). \quad (6)$$

Здесь z_1, \dots, z_n — конечные особые точки (полюсы) рациональной функции $R(z)$, вычеты берутся в тех из них, которые лежат в верхней полуплоскости.

Замечание. Условие $\alpha > 0$ является существенным, ибо оно требуется в лемме Жордана, с помощью которой выводится формула (6) для

нахождения интеграла. При $\alpha < 0$ следует сделать замену переменной интегрирования $x \mapsto -x$. После замены в новом интеграле появится параметр $-\alpha > 0$.

Пример 4. Вычислим так называемые интегралы Лапласа

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx \, dx}{a^2 + x^2}, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin bx \, dx}{a^2 + x^2}, \quad a, b > 0.$$

В силу четности подынтегральной функции

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx \, dx}{a^2 + x^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx} \, dx}{a^2 + x^2}.$$

Особые точки рациональной функции $R(z) = (a^2 + z^2)^{-1}$ — это нули знаменателя, то есть, $z = \pm ia$. Они являются простыми полюсами. Найдем вычет в той из них, которая лежит в верхней полуплоскости:

$$\operatorname{Res}_{ia} \frac{e^{ibz}}{a^2 + z^2} = \frac{e^{ibz}}{(a^2 + z^2)'} \Big|_{z=ia} = \frac{e^{ibz}}{2z} \Big|_{z=ia} = \frac{e^{ib(ia)}}{2ia} = \frac{e^{-ba}}{2ia}.$$

По формуле (6) получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx} \, dx}{a^2 + x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} \frac{e^{ibz}}{a^2 + z^2} = \frac{2\pi i e^{-ba}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ba}.$$

В итоге первый интеграл Лапласа равен

$$I_1 = \frac{\pi}{2a} e^{-ba}.$$

Второй интеграл вычисляется по той же схеме:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin bx \, dx}{a^2 + x^2} = \operatorname{Im} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ibx} \, dx}{a^2 + x^2} = \operatorname{Im} \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} \frac{z e^{ibz}}{a^2 + z^2} = \\ &= \operatorname{Im} \pi i \frac{z e^{ibz}}{(a^2 + z^2)'} \Big|_{z=ia} = \operatorname{Im} \pi i \frac{ia e^{ib(ia)}}{2ia} = \operatorname{Im} \pi i \frac{e^{-ba}}{2} = \frac{\pi}{2} e^{-ba}. \end{aligned}$$

4. Интегралы со степенным весом.

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} R(x) dx, \quad (7)$$

где α – нецелое действительное число, а $R(x)$ – рациональная функция.

Без ограничения общности можно считать, что $R(0) \neq 0$ и $R(0) \neq \infty$, поскольку иначе $R(x) = x^m R_1(x)$, $R_1(0) \neq 0$, $R_1(0) \neq \infty$ и $x^{\alpha-1} R(x) = x^{\beta-1} R_1(x)$. Поскольку $R(z)$ – рациональная функция, то при $z \rightarrow \infty$ выполняется оценка $R(z) \sim Cz^{-k}$, где k – целое число.

Для сходимости интеграла необходимо:

- 1) чтобы функция $R(x)$ не имела полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;
- 2) $\alpha > 0$, поскольку $x^{\alpha-1} R(x) \sim x^{\alpha-1} R(0)$, при $x \rightarrow +0$;
- 3) $\alpha < k$, поскольку $x^{\alpha-1} R(x) \sim Cx^{\alpha-k-1}$, при $x \rightarrow +\infty$.

Продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость, при этом следует учесть, что функция $z^{\alpha-1}$ является многозначной. Пусть D – плоскость с разрезом $[0, +\infty)$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, т.е. $h(x+i0) = x^{\alpha-1}$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x-i0) = x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)} = x^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha}$. Обозначим z_1, \dots, z_n – полюсы рациональной функции $R(z)$.

Теперь можно предъявить формулу для вычисления интеграла:

$$I - e^{i2\pi\alpha} I = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res}(h(z) R(z)),$$

или

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{z=z_k} \operatorname{Res}(h(z) R(z)). \quad (8)$$

Замечание. Из выбора области D следует, что при нахождении вычетов аргументы у точек z_k следует брать из интервала $(0; 2\pi)$.

Пример. Вычислим интеграл

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$$

В этом примере $\alpha - 1 = 1/2$. Особые точки рациональной функции $R(z) = (a^2 + z^2)^{-1}$ – это простые полюсы $z = \pm ia$. Запишем их в

показательной форме: $ia = a e^{i\pi/2}$, $-ia = a e^{i3\pi/2}$. Здесь учтено, что аргументы точек принимают значения из интервала $(0; 2\pi)$.

Найдем в них вычеты:

$$\operatorname{Res}_{ia} \frac{\sqrt{z}}{a^2 + z^2} = \frac{\sqrt{z}}{(a^2 + z^2)'} \Big|_{z=ia} = \frac{\sqrt{z}}{2z} \Big|_{z=ia} = \frac{\sqrt{ia}}{2ia} = \frac{\sqrt{a} e^{i\pi/4}}{2ia},$$

$$\operatorname{Res}_{-ia} \frac{\sqrt{z}}{a^2 + z^2} = \frac{\sqrt{z}}{2z} \Big|_{z=-ia} = -\frac{\sqrt{-ia}}{2ia} = -\frac{\sqrt{a} e^{i3\pi/4}}{2ia}.$$

Применим формулу (8):

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(3/2)}} \left(\operatorname{Res}_{ia} \frac{\sqrt{z}}{a^2 + z^2} + \operatorname{Res}_{-ia} \frac{\sqrt{z}}{a^2 + z^2} \right) = \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{\pi i}} \left(\frac{\sqrt{a} e^{i\pi/4}}{2ia} - \frac{\sqrt{a} e^{i3\pi/4}}{2ia} \right) = \end{aligned}$$

Учитывая, что $e^{\pi i} = -1$, получаем:

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{a}} (e^{i\pi/4} - e^{i3\pi/4}) = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}.$$

Замечание. Достаточно часто встречающиеся интегралы вида

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha R(x) dx$$

при помощи замены переменной $y = \frac{x}{1-x}$ сводятся к интегралам со степенным весом вида (7). Для них также можно получить формулу, похожую на формулу (8). Предлагаем читателю вывести ее самостоятельно в качестве упражнения (см. упражнение 8.5 этого параграфа).

5. Интегралы с логарифмическим весом.

Рассмотрим интеграл вида

$$I_m = \int_0^\infty x^{\alpha-1} (\ln x)^m R(x) dx, \quad (9)$$

где α – действительное число, $m \in N$, а $R(x)$ – рациональная функция.

Как и в предыдущем параграфе будем считать, что $R(0) \neq 0$ и $R(0) \neq \infty$, и $R(z) \sim Cz^{-k}$ при $z \rightarrow \infty$.

Условия сходимости интеграла (9) оказываются такими же как и для интегралов со степенным весом в предыдущем пункте:

- 1) функция $R(x)$ должна не иметь полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;
- 2) $0 < \alpha < k$.

Так же как и в предыдущем пункте продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость. По прежнему D – плоскость с разрезом $[0, +\infty)$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, т.е. $h(x+i0) = x^{\alpha-1}$, и однозначную ветвь функции $\ln z$, принимающую действительные значения на верхнем берегу разреза, т.е. $\ln(x+i0) = \ln x$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x-i0) = x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}$, $\ln(x-i0) = \ln x + 2\pi i$. z_1, \dots, z_n – полюсы рациональной функции $R(z)$.

Формула для нахождения интеграла имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^m R(x) dx - e^{i2\pi\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (\ln x + 2\pi i)^m R(x) dx = \\ = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res}(h(z) (\ln z)^m R(z)). \end{aligned} \quad (10)$$

Замечание. Из выбора области D следует, что при нахождении вычетов аргументы у точек z_k следует брать из промежутка $(0; 2\pi)$.

Возможны два различных случая.

1. Число α является нецелым. В этом случае множитель $e^{i2\pi\alpha}$ перед вторым интегралом в формуле (10) отличен от единицы.

Если ввести обозначение

$$I_0 = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} R(x) dx$$

и выделить в формуле (10) действительную и мнимую части, то мы получим линейную систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_m I_m + \dots + a_1 I_1 + a_0 I_0 = A \\ b_m I_m + \dots + b_1 I_1 + b_0 I_0 = B, \end{cases}$$

из которой можно найти значение интеграла I_m , зная значения интегралов I_0, I_1, \dots, I_{m-1} . Значение интеграла I_0 находится по формуле (8). Для нахождения значения интеграла I_1 применяем формулу (10), взяв параметр $m = 1$:

$$\begin{aligned} (1 - e^{i2\pi\alpha})I_1 - 2\pi i e^{i2\pi\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} R(x) dx = \\ = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res}(h(z) \ln z R(z)). \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы найти I_2 , применяем формулу (10), взяв параметр $m = 2$, и так далее...

2. Число α является целым. В этом случае мы имеем интеграл вида

$$I_m = \int_0^{\infty} (\ln x)^m R(x) dx,$$

формула (10) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (\ln x)^m R(x) dx - \int_0^{\infty} (\ln x + 2\pi i)^m R(x) dx = \\ = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res}(\ln z)^m R(z) \end{aligned} \quad (12)$$

и не позволяет найти интеграл I_m потому, что после раскрытия скобок во втором интеграле интегралы I_m друг друга взаимно уничтожают.

Для нахождения интеграла I_m нужно применить формулу (12), взяв в качестве подынтегральной функцию $(\ln z)^{m+1} R(z)$.

Пример 6. Вычислим интеграл

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x dx}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$$

В этом случае $\alpha = 3/2$ не является целым, рациональная функция имеет простые полюсы $z = \pm ia$. Применим формулу (10):

$$\begin{aligned}
& (1 - e^{2\pi i(3/2)}) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x dx}{a^2 + x^2} - 2\pi i e^{2\pi i(3/2)} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{a^2 + x^2} = \\
& = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{ia} \frac{\sqrt{z} \ln z}{a^2 + z^2} + \operatorname{Res}_{-ia} \frac{\sqrt{z} \ln z}{a^2 + z^2} \right).
\end{aligned}$$

Обозначим $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{a^2 + x^2} = I_0$. Тогда левая часть выражения равна $2I_1 + 2\pi i I_0$.

Вычислим правую часть:

$$\begin{aligned}
& 2\pi i \left(\frac{\sqrt{ia} \ln(ia)}{2ia} - \frac{\sqrt{-ia} \ln(-ia)}{2ia} \right) = \\
& = \frac{\pi}{a} \left(\sqrt{a} e^{i\pi/4} \left(\ln a + i \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{a} e^{i(3\pi/4)} \left(\ln a + i \frac{3\pi}{2} \right) \right) = \\
& = \frac{\pi}{\sqrt{a}} \left(\ln a \left(e^{i\pi/4} - e^{i(3\pi/4)} \right) + i \frac{\pi}{2} e^{i\pi/4} - i \frac{3\pi}{2} e^{i(3\pi/4)} \right) = \\
& = \frac{\pi}{\sqrt{a}} \left(\ln a \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. + i \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) - i \frac{3\pi}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right) = \\
& = \frac{\pi}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{2} \ln a + \sqrt{2}\pi i + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = \pi \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \ln a + \frac{\pi}{\sqrt{2a}} \right) + \sqrt{\frac{2}{a}} \pi^2 i.
\end{aligned}$$

Приравнявая левую и правую части исходного выражения, получим в результате равенства действительных частей значение интеграла

$$I_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2a}} \left(\ln a + \frac{\pi}{2} \right).$$

Отметим, что попутно, сравнив мнимые части, мы можем вычислить интеграл со степенным весом I_0 , который фигурировал в примере из предыдущего пункта.

Пример 7. Вычислим интеграл

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$$

В этом случае $\alpha = 1$ является целым, поэтому применим формулу (12) для интеграла

$$J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 \, dx}{a^2 + x^2}.$$

По формуле имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 \, dx}{a^2 + x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2 \, dx}{a^2 + x^2} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{ia} \frac{(\ln z)^2}{a^2 + z^2} + \operatorname{Res}_{-ia} \frac{(\ln z)^2}{a^2 + z^2} \right).$$

Раскрываем скобки и приводим подобные в левой части и находим вычеты в правой части:

$$- \int_0^{+\infty} \frac{4\pi i \ln x \, dx}{a^2 + x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{(2\pi i)^2 \, dx}{a^2 + x^2} = 2\pi i \left(\frac{\ln^2(ia)}{2ia} + \frac{\ln^2(-ia)}{2ia} \right).$$

Заметим, что в левой части появился искомый интеграл и "табличный" интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2},$$

который мы обозначим J_0 .

$$-4\pi i J_1 + 4\pi^2 J_0 = \frac{\pi}{a} \left(\left(\ln a + i\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\ln a + i\frac{3\pi}{2} \right)^2 \right).$$

Поделим обе части на π и преобразуем правую часть выражения, чтобы выделить действительную и мнимую части:

$$-4i J_1 + 4\pi J_0 = \frac{1}{a} \left(-2\pi i \ln a \ln^2 a - i3\pi \ln a + \frac{9\pi^2}{4} \right).$$

Окончательно:

$$-4iJ_1 + 4\pi J_0 = \frac{1}{a} \left(-2\pi i \ln a + 2\pi^2 \right).$$

Приравниваем действительные части, получаем искомый интеграл:

$$J_1 = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

Приравниваем мнимые части, получаем "побочный продукт":

$$J_0 = \frac{\pi}{2a}.$$

6. Интегралы в смысле главного значения.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_N - точки функции $f(x)$, в окрестности которых функция неограничена. Интегралом в *смысле главного значения* называется предел

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \\ = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\int_{-R}^{x_1 - \varepsilon} f(x) dx + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k + \varepsilon}^{x_{k+1} - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_N + \varepsilon}^{R - \varepsilon} f(x) dx \right) \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть функция $R(x)$ в интегралах (2), (5) из пунктов 2, 3 имеет на действительной оси особые точки x_1, x_2, \dots, x_N , и все они - простые полюсы. Тогда соответствующие интегралы существуют в смысле главного значения и их можно найти по формулам:

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \text{Im } z_k > 0}} \text{Res } R(z) + \pi i \sum_{\substack{x=x_k \\ \text{Im } x_k = 0}} \text{Res } R(z). \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
v.p. \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = \\
= 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res} (e^{i\alpha z} R(z)) + \pi i \sum_{\substack{x=x_k \\ \operatorname{Im} x_k = 0}} \operatorname{Res} (e^{i\alpha z} R(z)). \quad (14)
\end{aligned}$$

Пример 8. Вычислим интеграл

$$I = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x - b)}, \quad a > 0, \quad b \in R.$$

Все особые точки рациональной функции $\frac{1}{(z^2 + a^2)(z - b)}$ являются простыми полюсами, при этом одна из них лежит на действительной оси. Согласно формуле (13) из теоремы 1

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{1}{(z^2 + a^2)(z - b)} + \pi i \operatorname{Res}_{z=b} \frac{1}{(z^2 + a^2)(z - b)} = \\
&= 2\pi i \frac{1}{2z(z - b)} \Big|_{z=ia} + \pi i \frac{1}{(z^2 + a^2)} \Big|_{z=b} = 2\pi i \frac{1}{2ia(ia - b)} + \pi i \frac{1}{(b^2 + a^2)} = \\
&= \frac{\pi(-b - ia)}{a(a^2 + b^2)} + \frac{\pi i}{a^2 + b^2} = -\frac{\pi b}{a(a^2 + b^2)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что несмотря на промежуточные «комплексные» вычисления, ответ получился действительным, что и следовало ожидать, ибо «на входе» был интеграл от действительнозначной функции по действительной переменной.

Пример 9. Вычислим интеграл

$$I = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{x^3 + 1}, \quad a > 0.$$

Отметим, что $I = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^3 + 1}$. Особые точки рациональной функции $z_k = (\sqrt[3]{-1})_k = -1, \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ являются простыми полюсами. Обозначим $z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ полюс, лежащий в верхней полуплоскости. Согласно формуле (14) из теоремы 1:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^3 + 1} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{e^{iaz}}{z^3 + 1} + \pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^{az}}{z^3 + 1} = \\
 &= 2\pi i \frac{e^{iaz}}{3z^2} \Big|_{z=z_1} + \pi i \frac{e^{iaz}}{3z^2} \Big|_{z=-1} = 2\pi i \frac{e^{ia(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})}}{3(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \pi i \frac{e^{-ia}}{3} = \\
 &= 2\pi i \frac{e^{ia/2} e^{-a\sqrt{3}/2}}{3(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})} + \frac{\pi i}{3} (\cos a - i \sin a) = \\
 &= \frac{2\pi i}{3} e^{-a\sqrt{3}/2} \left(\cos \frac{a}{2} + i \sin \frac{a}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\pi i}{3} \cos a + \frac{\pi}{3} \sin a = \\
 &= \frac{2\pi}{3} e^{-a\sqrt{3}/2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2} \right) + \frac{\pi}{3} \sin a + \\
 &+ i \left[\frac{2\pi}{3} e^{-a\sqrt{3}/2} \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{a}{2} \right) + \frac{\pi}{3} \cos a \right].
 \end{aligned}$$

Отделяя действительную часть, получаем ответ:

$$I = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{x^3 + 1} = \frac{\pi}{3} \left(e^{-a\sqrt{3}/2} \left(\sqrt{3} \cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2} \right) + \sin a \right).$$

Замечательно, что между делом мы вычислили и интеграл

$$J = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax) dx}{x^3 + 1} = \frac{\pi}{3} \left(e^{-a\sqrt{3}/2} \left(\sqrt{3} \sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} \right) + \cos a \right).$$

Теорема 2. Пусть функция $R(x)$ в интегралах (7), (9) из пунктов 4, 5 имеет на положительной части действительной оси особые точки x_1, x_2, \dots, x_N , и все они - простые полюсы. Тогда соответствующие интегралы существуют в смысле главного значения и их можно найти по формулам:

$$v.p. \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} R(x) dx = \frac{1}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left(2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res}(h(z) R(z)) + \right. \\ \left. + \pi i \sum_{x=x_k^+} \operatorname{Res}(h(z) R(z)) + \pi i \sum_{x=x_k^-} \operatorname{Res}(h(z) R(z)) \right), \quad (15)$$

$$v.p. \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^m R(x) dx - e^{i2\pi\alpha} \cdot v.p. \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (\ln x + 2\pi i)^m R(x) dx = \\ = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res}(h(z) (\ln z)^m R(z)) + \\ + \pi i \sum_{x=x_k^+} \operatorname{Res}(h(z) (\ln z)^m R(z)) + \pi i \sum_{x=x_k^-} \operatorname{Res}(h(z) (\ln z)^m R(z)). \quad (16)$$

В формулах (16) x_k^+, x_k^- обозначают предельные значения x_k на верхнем и нижнем «берегах» разреза $[0; +\infty)$, т.е. $x_k^+ = \lim_{\substack{z \rightarrow x_k, \\ \operatorname{Im} z > 0}} = |x_k|$,

$x_k^- = \lim_{\substack{z \rightarrow x_k, \\ \operatorname{Im} z < 0}} = |x_k| e^{2\pi i}$. Функция $h(z)$ обозначает главную ветвь степенной функции $x^{\alpha-1}$, выделяемую условием $h(1) = 1$.

Напоминаем, что при нахождении вычетов аргументы точек z_k следует брать из промежутка $(0; 2\pi)$.

Пример 10. Вычислим интеграл

$$I = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px} dx}{a - e^x}, \quad 0 < p < 1, \quad a > 0.$$

С помощью замены переменной интегрирования $e^x = t$ сведем искомый интеграл к интегралу со степенным весом и применим формулу из

теоремы 2, учитывая, что единственная особая точка $t = a$ рациональной функции лежит на действительной оси, и это — простой полюс:

$$\begin{aligned}
 I &= v.p. \int_0^{\infty} \frac{t^p dt}{(a-t)t} = v.p. \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1} dt}{a-t} = \\
 &= \frac{1}{1-e^{2\pi ip}} \left(\pi i \operatorname{Res}_{z=a^+} \frac{z^{p-1}}{a-z} + \pi i \operatorname{Res}_{z=a^-} \frac{z^{p-1}}{a-z} \right) = \\
 &= \frac{\pi i}{1-e^{2\pi ip}} \left(\frac{a^{p-1}}{-1} + \frac{(ae^{2\pi i})^{p-1}}{-1} \right) = \\
 &= -\pi i a^{p-1} \cdot \frac{1+e^{2\pi ip}}{1-e^{2\pi ip}} = -\pi i a^{p-1} \cdot \frac{e^{\pi ip}(e^{-\pi ip}+e^{\pi ip})}{e^{\pi ip}(e^{-\pi ip}-e^{\pi ip})} = \\
 &= -\pi i a^{p-1} \cdot \frac{2 \cos(\pi p)}{-2i \sin(\pi p)} = \pi a^{p-1} \operatorname{ctg}(\pi p).
 \end{aligned}$$

Пример 11. Вычислим интеграл

$$I = v.p. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} \ln x dx}{x-a}, \quad 0 < p < 1, \quad a > 0.$$

Согласно формуле

$$\begin{aligned}
 v.p. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} \ln x dx}{x-a} - e^{2\pi ip} v.p. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} (\ln x + 2\pi i) dx}{x-a} = \\
 = \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=a^+} \frac{z^{p-1} \ln z}{z-a} + \operatorname{Res}_{z=a^-} \frac{z^{p-1} \ln z}{z-a} \right).
 \end{aligned}$$

Введем обозначение $J = v.p. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{x-a}$. Принимая его во внимание и подсчитывая вычеты в точках $z = a^{\pm}$, получим равенство:

$$(1 - e^{2\pi ip})I - 2\pi i e^{2\pi ip}J = \pi i \left(a^{p-1} \ln a + (ae^{2\pi i})^{p-1} (\ln a + 2\pi i) \right).$$

Согласно предыдущему примеру $J = -\pi a^{p-1} \operatorname{ctg}(\pi p)$. Учтывая это, выразим из равенства интеграл I :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{1 - e^{2\pi ip}} \left(2\pi i e^{2\pi ip} (-\pi a^{p-1} \operatorname{ctg}(\pi p)) + \right. \\
&\quad \left. + \pi i a^{p-1} \ln a (1 + e^{2\pi ip}) + 2(\pi i)^2 a^{p-1} e^{2\pi ip} \right) = \\
&= \pi a^{p-1} \left(-\frac{2\pi i e^{2\pi ip}}{1 - e^{2\pi ip}} \operatorname{ctg}(\pi p) + \frac{i(1 + e^{2\pi ip})}{1 - e^{2\pi ip}} \ln a + \frac{2\pi e^{2\pi ip}}{1 - e^{2\pi ip}} \right) = \\
&= \pi a^{p-1} \left(\frac{\pi e^{\pi ip}}{\sin(\pi p)} \operatorname{ctg}(\pi p) - \operatorname{ctg}(\pi p) \ln a - \frac{\pi i e^{\pi ip}}{\sin(\pi p)} \right) =
\end{aligned}$$

Далее складываем первое и третье слагаемое в скобках и вспоминаем формулу Эйлера:

$$\begin{aligned}
&= \pi a^{p-1} \left(\frac{\pi e^{\pi ip}}{\sin(\pi p)} \left(\operatorname{ctg}(\pi p) - i \right) - \operatorname{ctg}(\pi p) \ln a \right) = \\
&= \pi a^{p-1} \left(\frac{\pi}{\sin(\pi p)} (\cos(\pi p) + i \sin(\pi p)) (\operatorname{ctg}(\pi p) - i) - \operatorname{ctg}(\pi p) \ln a \right) = \\
&= \pi a^{p-1} \left(\pi (\operatorname{ctg}^2(\pi p) + 1) - \operatorname{ctg}(\pi p) \ln a \right) = \pi a^{p-1} \left(\frac{\pi}{\sin^2(\pi p)} - \operatorname{ctg}(\pi p) \ln a \right).
\end{aligned}$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Вычислите следующие рационально-тригонометрические интегралы, в которых параметры a, b вещественные числа, а n – натуральное:

$$\begin{aligned}
a) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi}, \quad a > 1; & \quad b) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2}, \quad a > b > 0; \\
c) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\varphi d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad 0 < |a| < 1; & \quad d) \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{1 - a \sin^2 \varphi}, \quad 0 < a < 1; \\
e) \int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(n\varphi - \sin \varphi) d\varphi; & \quad f) \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) \cos nx dx, \quad |a| < 1.
\end{aligned}$$

В задаче f) рассмотрите также случай $n = 0$.

8.2. Вычислите рациональные интегралы, в которых параметр a – положительный, а n – натуральное число:

$$\begin{aligned}
 & a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + a^4}; \quad b) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}; \quad c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx; \\
 & d) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^n}, \quad n \geq 2; \quad e) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}; \quad f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n dx}{1 + x^{2n}}, \quad n \geq 2.
 \end{aligned}$$

8.3. Вычислите интегралы, считая число a положительным:

$$\begin{aligned}
 & a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 2ix - 2}; \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix} dx}{x^4 + 8x^2 + 16}; \quad c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}; \\
 & d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}; \quad e) \int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2 + a^2)^2}; \quad f) \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{az} dz}{(z^2 - 1)^2}.
 \end{aligned}$$

8.4. Вычислите интегралы со степенным весом, в которых параметры α, p — вещественные числа:

$$\begin{aligned}
 & a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(1+x)}, \quad 0 < p < 1; \quad b) \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1+x^2}, \quad -1 < p < 1; \\
 & c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+4)}; \quad d) \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2}, \quad -1 < p < 3; \\
 & e) \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+\sqrt{x})^3}, \quad 0 < \alpha < \frac{3}{2}; \quad f) \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}, \quad -1 < p < 1, \quad 0 < \alpha < \pi.
 \end{aligned}$$

8.5. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов при $0 \leq x \leq 1$ и удовлетворяющая условиям

$$R(x) = O(x^{-n}) \quad (x \rightarrow 0); \quad R(x) = O((1-x)^m) \quad (x \rightarrow 1),$$

где n и m — целые числа, $n < m$.

Докажите, что при $n < \alpha < m + 2$ верна формула

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\alpha-1} R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \left(\sum_{z=z_k} \operatorname{Res} h(z) R(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} h(z) R(z) \right),$$

где $h(z)$ — ветвь функции $\left(\frac{z}{1-z} \right)^{\alpha-1}$, принимающая положительные значения при $z = x + i0$, $0 < x < 1$, а сумма вычетов берется по всем полюсам z_k функции $R(z)$.

8.6. Вычислите следующие интегралы:

$$a) \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(1+x)^3} dx; \quad b) \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt[3]{x(1-x)^2}}; \quad c) \int_1^2 \frac{\sqrt{(x-1)(2-x)}}{x+2} dx.$$

8.7. Вычислите интегралы, предполагая, что параметр $a > 0$.

$$\begin{aligned} a) & \int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{(x+1)\sqrt{x^3}}; & b) & \int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x}}; & c) & \int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{(x+1)^2\sqrt[5]{x}}; \\ d) & \int_0^\infty \frac{x \ln x \, dx}{(x^2+1)^2}; & e) & \int_0^\infty \frac{\ln^2 x \, dx}{x^2+a^2}; & f) & \int_0^\infty \frac{x e^{x/2} \, dx}{e^{2x}+1}. \end{aligned}$$

8.8. Вычислите интегралы, понимаемые в смысле главного значения:

$$\begin{aligned} a) & \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 \, dx}{x^4-1}; & b) & \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{1-x^4} \, dx; & c) & \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \, dx; \\ d) & \int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} \, dx; & e) & \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx; & f) & \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \, dx}{x^2-x-2}; \\ g) & \int_0^6 \frac{1}{x-2} \sqrt{\frac{x}{6-x}} \, dx; & h) & \int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{x^2-1}; & i) & \int_{-\infty}^\infty \frac{x \, dx}{\operatorname{sh} x}. \end{aligned}$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

8.1. a) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; b) $\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$; c) $\frac{2\pi(-1)^k a^{2k+1}}{1-a^2}$, если $n = 2k+1$ — нечетное, 0, если $n = 2k$ — четное; d) $\frac{\pi}{a}(1-\sqrt{1-a})$; e) $\frac{2\pi}{n!}$; f) 0, если $n = 0$, $-\frac{2\pi a^n}{n}$, если $n \geq 1$. **8.2.** a) $\frac{\pi}{a\sqrt{2}}$; b) $\frac{\pi}{4a}$; c) $\frac{4\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}$; e) $\frac{\pi}{2}$, если $n = 1$, $\frac{\pi(2n-3)!!}{2(2n-2)!!}$, если $n > 1$; f) $\frac{\pi}{2n \cos(\pi/(2n))}$. **8.3.** a) $-\frac{2\pi \sin 1}{e}$; b) $\frac{3\pi}{16e^2}$; c) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3 \sin 1)$; d) $\frac{\pi}{6}(4e^{-2} - e^{-1})$; e) $\frac{\pi e^{-a}}{2a}$; f) $\frac{\pi(a+1)e^{-a}}{2}$. **8.4.** a) $\frac{\pi}{\sin \pi p}$; b) $\frac{\pi}{2 \cos(\pi p/2)}$; c) $\frac{\pi}{2^{4/3}\sqrt{3}}$;

- d)** $\frac{\pi(1-p)}{4\cos(\pi p/2)}$, если $p \neq 1$, $\frac{1}{2}$, если $p = 1$; **e)** $\frac{\pi(2\alpha-1)(2\alpha-2)}{\sin 2\pi\alpha}$, если $p \neq 1$, 1 , если $\alpha = \frac{1}{2}$, 1 ; **f)** $\frac{\pi \sin \alpha \pi}{\sin \pi p \sin \alpha}$. **8.6.** **a)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{32}$; **b)** $\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$; **c)** $\frac{7-4\sqrt{3}}{2}\pi$. **8.7.** **a)** $-\sqrt{2}\pi^2$; **b)** $\frac{\pi}{a\sqrt{2a}}(\ln a - \frac{\pi}{2})$; **c)** $\frac{\pi}{5\sin(\pi/5)}$; **d)** 0 ; **e)** $\frac{\pi}{8a}(\pi^2 + 4\ln^2 a)$; **f)** $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$. **8.8** **a)** $\frac{\pi}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{2}(e^{-a} - \sin a)$; **c)** $\frac{\pi}{2}$, если $a > 0$, 0 , если $a = 0$, $-\frac{\pi}{2}$, если $a < 0$; **d)** $\pi(b-a)$; **e)** $\frac{\pi}{2}$; **f)** $\frac{\pi}{3}$; **g)** π ; **h)** $\frac{\pi^2}{4}$; **i)** $\frac{\pi^2}{2}$.

§ 9. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Теорема (Принцип аргумента). Пусть $D \subset C$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении. Функция $f(z)$ является аналитической в $\bar{D} = D \cup \Gamma$ за исключением конечного числа полюсов b_1, b_2, \dots, b_m , лежащих в D , и $f(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$. Тогда

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma}(\operatorname{Arg} f(z)), \quad (1)$$

где $\Delta_{\Gamma}(\operatorname{Arg} f(z))$ – приращение аргумента функции $f(z)$ при однократном обходе контура Γ в положительном направлении, N – количество нулей функции $f(z)$ в области D с учетом их кратности, а P – количество полюсов функции $f(z)$ в области D с учетом их порядка.

Теорема Руше. Пусть $D \subset C$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ . Функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в \bar{D} и $|f(z)| > |g(z)|$ при всех $z \in \Gamma$. Тогда функции $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей с учетом их кратности.

Пример 1 (Основная теорема алгебры). Всякий многочлен степени n имеет на комплексной плоскости C ровно n корней с учетом их кратности.

Пусть $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, где $a_n \neq 0$. Положим $f(z) = a_n z^n$ и $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. Поскольку $\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z)/g(z)) = \infty$, то существует такое число R_0 , что при всех $|z| = R > R_0$ выполняется неравенство $|f(z)| > |g(z)|$. Согласно теореме Руше это означает, что во всяком круге $B(0, R)$ при $R > R_0$ функции $f(z)$ и $P_n(z) = f(z) + g(z)$ имеют одинаковое количество нулей с учетом их кратности. В силу произвольности R это верно и для всей комплексной плоскости. Очевидно, что точка $z = 0$ является нулем порядка n для функции $f(z) = a_n z^n$. Следовательно, на всей комплексной плоскости многочлен $P_n(z)$ имеет n корней (с учетом кратности).

Пример 2. Найдем число корней многочлена $P(z) = z^4 - 5z^2 + 2z - 1$ в круге $|z| < 1$.

Положим $f(z) = -5z^2$, $g(z) = z^4 + 2z - 1$. На границе круга, при $|z| = 1$, выполнены оценки: $|g(z)| = |z^4 + 2z - 1| \leq |z|^4 + |2z| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4 < 5 = |-5z^2| = |f(z)|$. Условия теоремы Руше выполнены, следовательно, в круге $|z| < 1$ у функции $P(z) = f(z) + g(z)$

столько же нулей, сколько у функции $f(z) = -5z^2$, т.е. два (с учетом кратности).

Пример 3. Найдем количество нулей функции $F(z) = \sin z + 4z^n - 3$, $n \in \mathbb{N}$, в круге радиуса 2.

Возьмем $f(z) = 4z^n - 3$ и $g(z) = \sin z$. Оценим функции на границе круга $|z| = 2$, используя для $\sin z$ оценку из примера 6 § 5: $|g(z)| = |\sin z| \leq \operatorname{sh} |z| = \operatorname{sh} 2 < \frac{e^2}{2} < \frac{9}{2} < 4 \cdot 2 - 3 \leq 4 \cdot 2^n - 3 = |4z^n - 3| = ||4z^n| - 3| \leq |4z^n - 3| = |f(z)|$. По теореме Руше функция $F(z)$ имеет в круге $|z| < 2$ столько же нулей, сколько и $f(z) = 4z^n - 3$, то есть n нулей (с учетом кратности).

В теории устойчивости часто возникает необходимость определить количество корней многочлена в правой или левой полуплоскости. В этом случае помогает принцип аргумента.

Пример 4. Найдем количество корней многочлена $P(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$ в правой полуплоскости.

Поскольку в принципе аргумента требуется, чтобы область была ограниченной, рассмотрим область $D_R = \{z : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$.

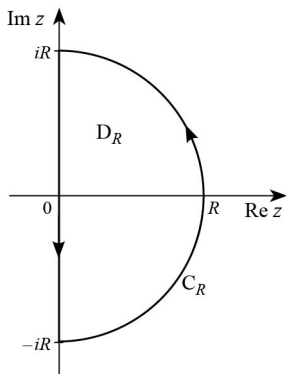


Рис. 12.

Граница области $\Gamma_R = \partial D_R$ состоит из отрезка $I_R = [-Ri; Ri]$ мнимой оси и дуги окружности $C_R = \{|z| = R, |\arg| < \pi/2\}$. При достаточно большом R все корни, лежащие в правой полуплоскости, попадут внутрь области D_R , а полюсов многочлен не имеет. Поэтому формула (1) дает равенство: $\Delta_{\Gamma_R} \operatorname{Arg}(P(z)) = 2\pi N$. Приращение аргумента по

кривой Γ_R складывается из приращений по участкам C_R и I_R :

$$\Delta_{\Gamma_R} \operatorname{Arg}(P(z)) = \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}(P(z)) + \Delta_{I_R} \operatorname{Arg}(P(z)). \quad (2)$$

Найдем приращение по участку C_R :

$$\begin{aligned} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}(P(z)) &= \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z^6 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \frac{4}{z^5} + \frac{1}{z^6}\right) = \\ &= \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z^6 + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \frac{4}{z^5} + \frac{1}{z^6}\right) = \\ &= 6\pi + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \frac{4}{z^5} + \frac{1}{z^6}\right). \end{aligned}$$

Сумма $1 + \frac{1}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \frac{4}{z^5} + \frac{1}{z^6} \rightarrow 1$ при $R \rightarrow +\infty$. Поэтому

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \frac{4}{z^5} + \frac{1}{z^6}\right) \rightarrow 0.$$

Очевидно, что при $R \rightarrow +\infty$ приращение аргумента по отрезку I_R стремится к приращению $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(P(z))$, где γ обозначает мнимую ось, пробегаемую сверху вниз. Переходя к пределу в равенстве (2), получим $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(P(z)) + 6\pi = 2\pi N$.

Осталось найти $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(P(z))$.

Если $z \in \gamma$, то $z = iy$. Тогда

$$P(iy) = -y^6 + iy^5 + 6y^4 - 5iy^3 - 8y^2 + 4iy + 1.$$

Выделим вещественную и мнимую части.

$$P(iy) = u + iv, \quad u = -y^6 + 6y^4 - 8y^2 + 1, \quad v = y^5 - 5y^3 + 4y.$$

Нули функции v находятся легко. Это $y = 0, \pm 1, \pm 2$. Найдем значения функции $u(y)$ в этих точках. Составим таблицу

y	2	1	0	-1	-2
$u(y)$	1	-2	1	-2	1
$v(y)$	0	0	0	0	0

Видно, что u и v не обращаются в нуль одновременно, то есть многочлен не имеет корней на мнимой оси. Когда $y \rightarrow +\infty$, имеем $u < 0$, $v > 0$,

$v/u \rightarrow -0$, то есть радиус-вектор точки (u, v) асимптотически приближается к отрицательной части действительной оси. При движении из точки $y = +\infty$ до точки $y = 2$ кривая, описываемая точкой (u, v) не пересекает действительную ось $v = 0$. Первое пересечение произойдет при $y = 2$, $u(2) = 1 > 0$. Второе пересечение произойдет при $y = 1$, $u(1) = -2 < 0$. Тогда $\Delta_{y \in (+\infty, 1]} \text{Arg}(P(iy)) = -2\pi$, поскольку радиус-вектор точки (u, v) сделает один полный оборот вокруг нуля в направлении по часовой стрелке при изменении y от $+\infty$ до 1. Радиус-вектор точки (u, v) сделает еще один полный оборот вокруг нуля при изменении y от 1 до -1 , то есть $\Delta_{y \in (1, -1]} \text{Arg}(P(iy)) = -2\pi$. При изменении y от -1 до -2 радиус-вектор точки (u, v) сделает еще половину оборота вокруг нуля и затем, при $y \rightarrow -\infty$, имеем $u < 0$, $v < 0$, $v/u \rightarrow +0$, то есть при $y \rightarrow -\infty$ радиус-вектор точки асимптотически приближается к отрицательной части действительной оси. Имеем $\Delta_{y \in (-1, -\infty]} \text{Arg}(P(iy)) = -2\pi$. В совокупности имеем $\Delta_\gamma \text{Arg}(P(z)) = -6\pi$. Исходя из равенства (2), получаем, что число корней многочлена $P(z)$ в правой полуплоскости равно $N = (-6\pi + 6\pi)/2\pi = 0$.

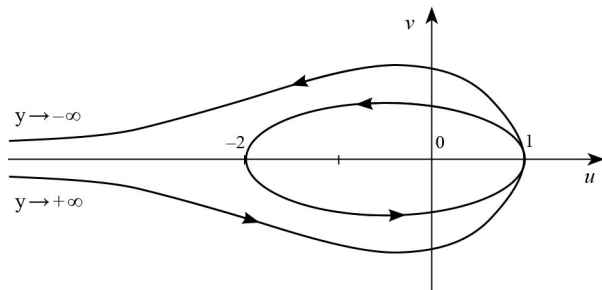


Рис. 13.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Найдите число нулей следующих многочленов в единичном круге $|z| < 1$.

а) $P(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$, б) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$.

9.2. Сколько корней уравнения $z^4 - 5z + 1 = 0$ находится:

а) в круге $|z| < 1$; б) в кольце $1 < |z| < 2$?

9.3. Найдите число корней уравнений

а) $z^8 + 2z^5 - 7z^3 + z^2 + 1 = 0$ в кольце $1 < |z| < 2$,

b) $z^4 - 6z^2 + 5 = 0$ в кольце $1 < |z - 1| < 5$.

9.4. Найдите число корней уравнений при $n \in N \cup \{0\}$

a) $e^z - 4z^n + 1 = 0$, в круге $|z| < 1$,

b) $\cos z - 3z^n + 1 = 0$, в круге $|z| < 2$.

9.5. Найдите количество корней уравнения $z = \varphi(z)$ в круге $|z| < 1$, если при $|z| \leq 1$ функция $\varphi(z)$ аналитична и $|\varphi(z)| < 1$.

9.6. Докажите, что уравнение $z = \lambda - e^{-z}$, $\lambda > 1$, имеет в правой полуплоскости единственный (притом действительный!) корень.

9.7. Выясните, сколько корней в правой полуплоскости и в первом квадранте имеют уравнения:

a) $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$; b) $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$.

9.8. Выясните, сколько корней в левой полуплоскости и в каждом квадранте этой полуплоскости имеет уравнение:

$$z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

9.1. a) 1; b) 4. **9.2.** a) 1; b) 3. **9.3.** a) 5; b) 3. **9.4.** a) n корней; b) n корней. **9.5.** Один корень. **9.7.** a) Нет корней; b) 2 и 1. **9.8.** По два в каждом квадранте.

Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

§ 10. Основные свойства преобразования Лапласа.

Определение 1. Локально интегрируемая функция $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ называется *оригиналом*, если существует вещественное число a такое, что интеграл $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-at} dt$ сходится. Точная нижняя граница всех таких чисел a называется *показателем роста* оригинала f и обозначается $a(f)$.

Изображением оригинала $f(t)$ называют функцию $F(p)$, определённую в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > a(f)$ равенством $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$.

Связь между изображением и соответствующим оригиналом будем обозначать так: $f(t) \doteq F(p)$.

Преобразованием Лапласа называется преобразование, сопоставляющее оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$. Преобразование Лапласа обычно обозначается символом \mathcal{L} , и равенство $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$ означает, что $F(p)$ есть изображение оригинала $f(t)$.

Пример 1. Рассмотрим функцию Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что функция Хевисайда локально интегрируема, поэтому является оригиналом. Пусть $p = \sigma + is$, тогда выполнено $|e^{-pt}| = e^{-\sigma t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, если $\sigma > 0$. Используя этот факт, найдём изображение:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p},$$

причём последнее равенство верно, если $e^{-pt} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, интеграл сходится при $\sigma = \operatorname{Re} p > 0$ и $H(t) \doteq \frac{1}{p}$.

Замечание 1. Для формулировки некоторых свойств преобразования Лапласа удобно считать, что оригинал равен нулю при $t < 0$. В этом

и следующем параграфах будем это предполагать по умолчанию. Например, если написано $1, t, \sin t$, то будем подразумевать $H(t), tH(t), H(t) \sin t$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть f — оригинал, $a(f)$ — его показатель роста. Тогда

1) интеграл $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ абсолютно сходится для любого $p \in \mathbb{C}$

такого, что $\operatorname{Re} p > a(f)$;

2) изображение $F(p)$ аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a(f)$;

3) изображение $F(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$.

Замечание 2. Если $F(p)$ — аналитическая функция, для которой точка $p = \infty$ является устранимой особой точкой, то $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ по любому направлению, а не только при $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$.

Пример 2. Рассмотрим оригинал $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Его изображение $F(p) = \frac{1}{p - \alpha}$. Приведенная теорема утверждает что $F(p)$ является аналитической функцией в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$. На самом же деле $F(p) = \frac{1}{p - \alpha}$ аналитична в гораздо более широкой области — на всей комплексной плоскости, кроме точки $p_0 = \alpha$, в которой она имеет полюс первого порядка.

Теорема 2 (линейность преобразования Лапласа). Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда $\alpha f(t) + \beta g(t)$ — оригинал и $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$.

Заметим, что если интегралы сходятся в разных полуплоскостях $\operatorname{Re} p > a(f)$ и $\operatorname{Re} p > a(g)$, то их сумма заведомо сходится в их общей части.

Теорема 3 (подобия). Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, $\lambda > 0$. Тогда $f(\lambda t)$ — оригинал и $f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$.

Теорема 4 (смещения). Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда $e^{-\alpha t} f(t)$ — оригинал и $e^{-\alpha t} f(t) \doteq F(p + \alpha)$.

Теорему иллюстрирует пример 2.

Теорема 5 (о запаздывании оригинала). Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, $a > 0$. Тогда $f(t - a)H(t - a)$ — оригинал и $f(t - a)H(t - a) \doteq e^{-pa}F(p)$.

Пример 3. Найдем изображение единичного импульса ($a > 0$)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (0; a), \\ 0, & \text{если } t \notin (0; a). \end{cases}$$

Заметим, что $f(t) = H(t) - H(t - a)$. Тогда по теореме линейности и теореме запаздывания $f(t) \doteq \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-pa} = \frac{1 - e^{-pa}}{p}$.

Пример 4. Найдем изображение системы периодических импульсов ($0 < a < T$)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (nT; nT + a), \\ 0, & \text{если } t \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} (nT; nT + a). \end{cases}$$

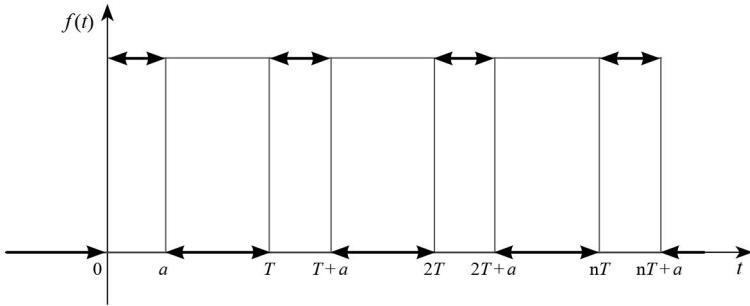


Рис. 14.

Поступаем аналогично предыдущему примеру.

Поскольку $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (H(t - nT) - H(t - (nT + a)))$, то в силу линейности и теоремы запаздывания

$$\begin{aligned} f(t) &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p} e^{-pnT} - \frac{1}{p} e^{-p(nT+a)} \right) = \frac{1 - e^{-pa}}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-pT})^n = \\ &= \frac{1 - e^{-pa}}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}} = \frac{1 - e^{-pa}}{p(1 - e^{-pT})}. \end{aligned}$$

Бесконечная геометрическая прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится к значению $\frac{1}{1-q}$, если знаменатель q по модулю меньше единицы. В нашем случае $q = e^{-pT}$, $|q| = e^{-\operatorname{Re} pT} < 1$, и это верно для тех p , у которых $\operatorname{Re} p > 0$.

Еще один способ найти оригинал из примера 4 - это применить формулу для периодического оригинала. Об этом - следующий пример.

Пример 5. Пусть $f(t)$ — оригинал и $f(t+T) = f(t)$ для некоторого $T > 0$ и любых $t > 0$. Докажите, что изображением $f(t)$ является

$$\text{функция } F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(s) e^{-ps} ds.$$

Действуем по определению.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) e^{-pt} dt =$$

В каждом из интегралов сделаем соответствующую замену $t = s + nT$, приводящую к интегралу с одними и теми же пределами:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(s + nT) e^{-p(s+nT)} ds = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} \int_0^T f(s) e^{-ps} ds = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-pT})^n \cdot \int_0^T f(s) e^{-ps} ds = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(s) e^{-ps} ds. \end{aligned}$$

Из условия на сходимость бесконечной геометрической прогрессии следует, что формула верна при $\operatorname{Re} p > 0$.

Теорема 6 (о дифференцировании оригинала). Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и дифференцируема при $t > 0$, $f'(t)$ — оригинал. Тогда $f(t)$ — оригинал и

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad (1)$$

где $F(p) \doteq f(t)$.

Следствие 1. Пусть $f(t) \in C^n[0, +\infty)$, $f^{(n)}(t)$ — оригинал. Тогда $f^{(k)}(t)$, $k = 0, \dots, n-1$, — оригиналы и

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

где $F(p) \doteq f(t)$.

Теорема 7 (о предельных соотношениях). 1) Если $f'(t)$ является оригиналом, то

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} pF(p) = f(0), \quad (2)$$

где $F(p) \doteq f(t)$, $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$.

2) Если, кроме того, существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0, \operatorname{Re} p > 0} pF(p) = f(\infty), \quad (3)$$

Теорема 8 (об интегрировании оригинала). Пусть $f(t)$ — оригинал, непрерывный при $t \geq 0$, $f(t) \doteq F(p)$. Тогда $\int_0^t f(s) ds \doteq \frac{F(p)}{p}$.

Теорема 9 (о дифференцировании изображения). Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteq F(p)$. Тогда $tf(t)$ — оригинал и $tf(t) \doteq -F'(p)$.

Следствие 2. Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \doteq F(p)$. Тогда

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t).$$

Пример 6. Согласно следствию: $t^n = t^n \cdot 1 \doteq (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Теорема 10 (об интегрировании изображения). Пусть $\frac{f(t)}{t}$ — оригинал. Тогда $f(t)$ — оригинал и

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{+\infty} F(q) dq, \text{ где } F(p) \doteq f(t), \text{ а интегрирование понимается}$$

как интегрирование по любому контуру γ , соединяющему точку p с бесконечно удаленной точкой комплексной плоскости и удовлетворяющему условиям $\gamma \subset \{p \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} p > a(f)\}$ и $\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty$ при $q \in \gamma$ и $q \rightarrow \infty$.

Свёрткой оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ называется функция, обозначаемая $(f * g)(t)$ и определяемая равенством

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds, \quad t \geq 0$$

Определение 2. Легко убедиться, что свертка коммутативна, т. е. $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.

Теорема 11 (Бореля об умножении изображений). Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$. Тогда $(f * g)(t)$ — оригинал и

$$(f * g)(t) \doteq F(p)G(p).$$

Часто бывает полезна еще одна разновидность теоремы умножения, так называемая формула Дюамеля.

Теорема 12 (формула Дюамеля). Пусть $f(t)$ — оригинал, непрерывный при $t \geq 0$, $g(t)$ — функция, непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$, $g'(t)$ — оригинал. Тогда $g(t)$ — оригинал и

$$\frac{d}{dt}(f * g)(t) \doteq pF(p)G(p),$$

где $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$.

Теорема 13 (формула обращения преобразования Лапласа). Пусть $f(t)$ — оригинал, $a(f)$ — показатель его роста. $F(p) \doteq f(t)$. Если $f(t)$ непрерывна в точке $t_0 > 0$ и имеет в этой точке конечные односторонние производные, то

$$f(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt_0} dp, \quad (4)$$

где интегрирование ведётся вдоль прямой $\operatorname{Re} p = a > a(f)$, проходимой снизу вверх, и понимается в смысле главного значения.

Следующие две теоремы дают некие достаточные условия того, что $F(p)$ является изображением и позволяют найти соответствующий ему оригинал.

Теорема 14 (первая теорема разложения). Пусть $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки и $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, т. е. её ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}. \quad (5)$$

Тогда 1) $F(p)$ является изображением;

2) функция $f(t)H(t)$, где

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k+1} t^k}{k!}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

является её оригиналом. При этом $f(t)$ является целой функцией.

Пример 7. Рассмотрим разложение

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+k+1}}.$$

Так как $F(p)$ аналитична в окрестности бесконечности и $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, то по теореме можно найти оригинал:

$$f(t) = H(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}.$$

Ряд напоминает разложение цилиндрической функции Бесселя $J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$; чтобы свести его к этой функции, положим $t = (\tau/2)^2$; тогда

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t) \left(\frac{\tau}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k} = \\ &= H(t) \left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$H(t) t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p},$$

в частности, при $n = 0$

$$H(t) J_0(2\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p} e^{-1/p}.$$

Теорема 15 (вторая теорема разложения). Пусть функция $F(p)$:

- 1) мероморфна и аналитична в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > a_0$;
- 2) существует система окружностей $C_n: |p| = R_n, R_1 < R_2 < \dots, R_n \rightarrow \infty$, на которой $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$;

- 3) для любого $a > a_0$ абсолютно сходится интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$.

Тогда $F(p)$ является изображением и оригиналом для нее является функция $H(t)f(t)$, где

$$f(t) = \sum_{p_n} \operatorname{Res}_{p_n} [e^{pt} F(p)], \quad t \geq 0,$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_n функции $F(p)$, в порядке неубывания их модулей.

Пример 8. Найдем оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{p^2 \operatorname{sh} p}$.

Сначала проверим выполнение условий теоремы.

Особыми точками функции $F(p)$ являются полюсы $p_k = i\pi k, k \in \mathbb{Z}$; поэтому функция мероморфна и аналитична в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

Чтобы проверить, что существует система окружностей $C_n: |p| = R_n$, на которой $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$, изучим поведение функции $|\operatorname{sh} p|$ на окружности $|p| = R$. Пусть $p = x + iy$; тогда $\operatorname{sh} p = \operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$. Из этого следует, что

$$|\operatorname{sh} p|^2 = \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y =$$

$$= \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y - \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y.$$

Исследуя функцию $f(x; y) = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y$ на условный экстремум на множестве $x^2 + y^2 = R^2$, получим, что функция достигает минимального значения в точках $(0; \pm R)$ и оно равно $\sin^2 R$. Взяв, например, $R = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получим, что $|\operatorname{sh} p| \geq |\sin(\pi/2 + \pi n)| = 1$, если p принадлежит окружности радиусом $R = \pi/2 + \pi n$. Используя эту оценку, получим, что на системе окружностей $C_n: |p| = R_n = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|F(p)| = \left| \frac{1}{p^2 \operatorname{sh} p} \right| \leq \frac{1}{|p|^2 |\operatorname{sh} p|} \leq \frac{1}{(R_n)^2} \rightarrow 0$, при $n \rightarrow +\infty$.

И, наконец, тот факт, что интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{dp}{p^2 \operatorname{sh} p}$ абсолютно сходится для $\operatorname{Re} p > 0$, можно установить с помощью цепочки неравенств, принимая, что $p = a + iy$:

$$\begin{aligned} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left| \frac{dp}{p^2 \operatorname{sh} p} \right| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{i dy}{(a + iy)^2 \operatorname{sh}(a + iy)} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|a + iy|^2 |\operatorname{sh}(a + iy)|} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(a^2 + y^2) \sqrt{\operatorname{sh}^2 a + \sin^2 y}} \leq \frac{1}{\operatorname{sh} a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{a^2 + y^2} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $F(p)$ является изображением и её оригинал можно найти по формуле из теоремы. Для этого найдем сначала вычеты в полюсах.

Вычеты в простых полюсах $p_k = i\pi k$, $k \neq 0$ находим по формуле вычета в простом полюсе:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p_k} \frac{e^{pt}}{p^2 \operatorname{sh} p} &= \frac{e^{pt}/(p^2)}{(\operatorname{sh} p)'} \Big|_{p=p_k} = \frac{e^{p_k t}/(p_k)^2}{\operatorname{ch} p_k} = \frac{e^{i\pi k t}}{(i\pi k)^2 \operatorname{ch}(i\pi k)} = \\ &= \frac{e^{i\pi k t}}{-(\pi k)^2 \cos \pi k} = \frac{e^{i\pi k t}}{(\pi k)^2 (-1)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Вычет в полюсе второго порядка $p = 0$ найдем как коэффициент при степени p^{-1} в лорановском разложении функции $\frac{e^{pt}}{p^2 \operatorname{sh} p}$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{pt}}{p^2 \operatorname{sh} p} &= \frac{1 + pt + \frac{p^2 t^2}{2!} + \dots}{p^2 \left(p + \frac{p^3}{3!} + \frac{p^5}{5!} + \dots \right)} = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1 + pt + \frac{p^2 t^2}{2!} + \dots}{1 + \frac{p^2}{3!} + \frac{p^4}{5!} + \dots} = \\ &= \frac{1}{p^3} \left(1 + pt + \frac{p^2 t^2}{2!} + \dots \right) \left(1 - \frac{p^2}{3!} + \dots \right) = \frac{1}{p^3} \left(1 + pt + \left(\frac{t^2}{2!} - \frac{1}{3!} \right) p^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

Видим, что коэффициент при степени p^{-1} , он же вычет, равен $\frac{t^2}{2!} - \frac{1}{3!}$. Подставляем найденные вычеты в формулу из теоремы:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Res}_{p_k} \frac{e^{pt}}{p^2 \operatorname{sh} p} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{k+1} e^{i\pi k t}}{(\pi k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} e^{i\pi k t}}{(\pi k)^2} =$$

Изменим индекс суммирования в первой сумме с k на $-k$, получим:

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(e^{i\pi kt} + e^{-i\pi kt})}{(\pi k)^2} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos \pi kt}{(\pi k)^2}.$$

Итак, оригиналом для $F(p) = \frac{1}{p^2 \operatorname{sh} p}$ является функция $H(t)f(t)$,

$$f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos \pi kt}{(\pi k)^2}.$$

Интересно отметить, что ряд $2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos \pi kt}{(\pi k)^2}$ является рядом Фурье для периодической с периодом $T = 2$ функции $g(t)$, совпадающей с функцией $-\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6}\right)$ на промежутке $(-1; 1)$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Убедитесь, что приведенные ниже функции являются оригиналами, и найдите их изображения. Укажите области аналитичности изображений.

Ответы для первых шести задач можно найти в таблице соответствия оригиналов и изображений, которая приведена в конце параграфа.

10.1. $f(t) = t^n, \quad n \in N \cup \{0\}.$

10.2. $f(t) = e^{\omega t}, \omega \in C.$

10.3. $f(t) = \cos \omega t, \omega \in C.$

10.4. $f(t) = \sin \omega t, \omega \in C.$

10.5. $f(t) = \operatorname{ch} \omega t, \omega \in C.$

10.6. $f(t) = \operatorname{sh} \omega t, \omega \in C.$

10.7. $f(t) = \operatorname{sh} 2t \sin 3t.$

10.8. $f(t) = t \operatorname{ch} 2t.$

10.9. $f(t) = t e^{2t} \sin 3t.$

10.10. $f(t) = \frac{2}{t}(1 - \cos t).$

10.11. $f(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sh} s \, ds}{s}.$

10.12. $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t}.$

10.13.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 1, \\ t - 1, & \text{если } t \geq 1. \end{cases}$$

10.14.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sin t, & 0 < t < \pi, \\ t - \pi, & t > \pi. \end{cases}$$

Используя теорему запаздывания или формулу нахождения периодического оригинала, найдите изображения следующих оригиналов.

10.15.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ |\sin t|, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$$

10.16.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ -t, & \text{если } 0 < t < 1, \\ 2n - t, & \text{если } 2n - 1 < t < 2n + 1, n \in N. \end{cases}$$

Используя первую теорему разложения, восстановите оригиналы по изображениям.

$$10.17. F(p) = \frac{1}{p} \exp\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

$$10.18. F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}.$$

$$10.19. F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \frac{1}{\sqrt{p}}, \sqrt{1} = 1.$$

Используя вторую теорему разложения, восстановите оригиналы по изображениям.

$$10.20. F(p) = \frac{1}{p \operatorname{sh} p}.$$

$$10.21. F(p) = \frac{1}{p \operatorname{ch} p}.$$

$$10.22. F(p) = \frac{1}{p^2 \operatorname{ch} p}.$$

$$10.23. F(p) = \frac{\operatorname{sh}(x\sqrt{p})}{p \operatorname{sh} \sqrt{p}}, x \in (0; 1).$$

Используя различные приемы, восстановите оригиналы по изображениям.

$$10.24. F(p) = \frac{p}{p^2 + 4p + 5}.$$

$$10.25. F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

$$10.26. F(p) = \frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}.$$

$$10.27. F(p) = \frac{e^{-3p} + e^{-p}}{p+2}.$$

$$10.28. F(p) = \operatorname{arccctg}(p+1).$$

$$10.29. F(p) = \ln \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}, \sqrt{1} = 1.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

$$10.7. \frac{12p}{(p^2+5)^2+144}. \quad 10.8. \frac{p^2+4}{(p^2-4)^2}. \quad 10.9. \frac{6(p-2)}{((p-2)^2+9)^2}.$$

$$10.10. \ln\left(1 + \frac{1}{p^2}\right), \ln 1 = 0. \quad 10.11. \frac{1}{2p} \ln \frac{p+1}{p-1}, \ln 1 = 0.$$

$$10.12. \ln\left(1 + \frac{1}{(p+1)^2}\right), \ln 1 = 0. \quad 10.13. \frac{e^{-p}}{p^2}.$$

$$10.14. \frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1} + \frac{e^{-\pi p}}{p^2}. \quad 10.15. \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}} = \frac{\operatorname{cth}(\pi p/2)}{p^2+1}.$$

$$10.16. \frac{1}{p \operatorname{sh} p} - \frac{1}{p^2}. \quad 10.17. H(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{k!(2k)!}. \quad 10.18. H(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{((2k)!)^2}.$$

$$10.19. H(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!(2k+1)!}. \quad 10.20. H(t) \left(t + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sin(\pi k t)}{\pi k} \right).$$

$$10.21. H(t) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos(\pi(k+1/2)t)}{\pi(k+1/2)} \right).$$

$$10.22. H(t) \left(t + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sin(\pi(k+1/2)t)}{\pi^2(k+1/2)^2} \right).$$

$$10.23. H(t) \left(x + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{-(\pi k)^2 t} \sin(\pi k x)}{\pi k} \right).$$

$$10.24. H(t)e^{-2t}(\cos t - 2 \sin t). \quad 10.25. H(t) \left(\frac{e^{2t}}{6} - \frac{e^{-t}}{15} - \frac{\sin(2t)}{5} - \frac{\cos(2t)}{10} \right).$$

$$10.26. H(t) \frac{e^{-t}(-1-6t)}{4}. \quad 10.27. H(t-3)e^{-2(t-3)} + H(t-1)e^{-2(t-1)}.$$

$$10.28. H(t) \frac{\sin t}{t} e^{-t}. \quad 10.29. H(t) \frac{1 - \cos t}{t}.$$

Изображения некоторых оригиналов

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
$e^{\omega t}, \omega \in C$	$\frac{1}{p - \omega}$
$t^n, n \in N \cup \{0\}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\nu, \nu > -1$	$\frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}}, 1^\nu = 1$
$\cos \omega t, \omega \in C$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t, \omega \in C$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\operatorname{ch} \omega t, \omega \in C$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$\operatorname{sh} \omega t, \omega \in C$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n e^{\omega t}, \omega \in C, n \in N$	$\frac{n!}{(p - \omega)^{n+1}}$
$J_0(t)$ - функция Бесселя 1-ого рода	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}, \sqrt{1} = 1$

§ 11. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных и интегральных уравнений.

1. Линейные дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n -ого порядка с постоянными коэффициентами

$$Lx = x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t). \quad (7)$$

Поставим задачу Коши: найти решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \quad (8)$$

где x_0, x_1, \dots, x_{n-1} — заданные постоянные.

Предполагая, что функция $H(t)f(t)$ — оригинал, будем искать решение задачи (7)–(8) также являющееся оригиналом. Пусть $X(p) \doteq x(t)$, $F(p) \doteq f(t)$. Применим к обеим частям уравнения преобразование Лапласа. По теореме о дифференцировании оригинала и свойству линейности, учитывая условия Коши (8), получим:

$$\begin{aligned} p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - \dots - p x_{n-2} - x_{n-1} \\ + a_1 (p^{n-1} X(p) - p^{n-2} x_0 - \dots - p x_{n-3} - x_{n-2}) + \dots + \\ + a_{n-1} (pX(p) - x_0) + a_n X(p) = F(p) \end{aligned}$$

или $A(p)X(p) - B(p) = F(p)$, где

$$A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

— характеристический многочлен уравнения (7),

$$\begin{aligned} B(p) = x_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) \\ + x_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_{n-2}(p + a_1) + x_{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{B(p) + F(p)}{A(p)}. \quad (9)$$

Теперь нужно восстановить оригинал $x(t)$ по его изображению $X(p)$. Это можно сделать различными способами. В частности, если $f(t)$ —

квазимногочлен (линейная комбинация функций вида $t^r e^{\lambda t}$), то $X(p)$ — рациональная функция, и для нахождения оригинала можно применить вторую теорему разложения или, представив эту функцию в виде суммы элементарных дробей, воспользоваться формулами соответствия оригиналов и их изображений.

Замечание 3. Если начальные условия задаются не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то заменой $\tau = t - t_0$ краевая задача сводится к решению уравнения $Ly(\tau) = f(\tau + t_0)$ с начальными условиями при $\tau = 0$.

Замечание 4. Поскольку мы функции $x(t)$ и $f(t)$ считаем оригиналами, то при $t < 0$ их нужно предполагать равными нулю. Таким образом, мы получаем, вообще говоря, решение $x(t)$, определенное только при $t \geq 0$. Начальные значения являют собой предельные значения при $t \rightarrow +0$. Однако, при решении конкретных задач очень часто получившееся решение оказывается справедливым при любых значениях t (если, конечно, правая часть $f(t)$ определена при $t < 0$).

Пример 3. Найдём решение задачи Коши $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Полагая $X(p) \doteq x(t)$, составляем операторное уравнение

$$p^2 X(p) - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{2}{p-3}.$$

Откуда $X(p) = \frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}$. Чтобы восстановить оригинал, можно либо разложить $X(p)$ на элементарные (простые) дроби:

$$X(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-3} \doteq e^t - 2e^{2t} + e^{3t},$$

либо воспользоваться второй теоремой разложения.

Пример 4. Найдём решение задачи Коши: $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = t^3 e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$.

Составим операторное уравнение:

$$p^2 X(p) - p - 2 + 4pX(p) - 4 + 4X(p) = \frac{3!}{(p+2)^4}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{p+6}{(p+2)^2} = \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{p+2}{(p+2)^2} + \frac{4}{(p+2)^2} \\ &= \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{1}{p+2} + \frac{4}{(p+2)^2} = \\ &= \frac{3!}{5!} t^5 e^{-2t} + e^{-2t} + \frac{4}{1!} t e^{-2t} = e^{-2t} \left(\frac{t^5}{20} + 4t + 1 \right) \end{aligned}$$

(по формулам соответствия).

Пример 5. Найдем решение уравнения $\ddot{\ddot{x}} + 2\ddot{x} + x = \sin t$ при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(0) = 0$.

Операторное уравнение имеет вид:

$$p^4 X(p) + 2p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Откуда $X(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^3}$ Для нахождения оригинала воспользуемся второй теоремой разложения:

$$x(t) = \operatorname{Res}_i \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^3} + \operatorname{Res}_{-i} \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^3} =$$

($\pm i$ — полюсы третьего порядка)

$$\begin{aligned} &= \lim_i \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^3} \right] + \lim_{-i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^3} \right] \\ &= \frac{e^{it}}{2} \left[-\frac{t^2}{8i} - \frac{3t}{8} + \frac{3}{8i} \right] + \frac{e^{-it}}{2} \left[\frac{t^2}{8i} - \frac{3t}{8} - \frac{3}{8i} \right] \\ &= \frac{-t^2 + 3}{8} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} - \frac{3t}{8} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ &= \frac{-t^2 + 3}{8} \sin t - \frac{3t}{8} \cos t. \end{aligned}$$

Пример 6. Найдем решение уравнения $\ddot{x} + x = e^t$ при начальных условиях $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 0$.

Сделаем сначала замену переменной $t = s + 1$. Тогда $x(t) = x(s + 1) = y(s)$. Новая задача Коши будет иметь вид: $\ddot{y} + y = e^{s+1}$, $y(0) = 1$,

$\dot{y}(0) = 0$. Ей соответствует операторное уравнение:

$$q^2 Y(q) - q + Y(q) = \frac{e}{q-1}.$$

Его решение таково:

$$Y(q) = \frac{e}{(q^2+1)(q+1)} + \frac{q}{q^2+1}.$$

Восстанавливаем оригиналы:

$$y(s) = \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos s - \frac{e}{2} \sin s + \frac{e}{2} e^s.$$

Возвращаемся к старой переменной $t = s + 1$:

$$x(t) = \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos(t-1) - \frac{e}{2} \sin(t-1) + \frac{e^t}{2}.$$

До сих пор мы рассматривали примеры дифференциальных уравнений, у которых правая часть была непрерывной функцией и задавалась единым аналитическим выражением. Часто возникают такие уравнения, у которых правая часть на различных интервалах задается различными аналитическими выражениями и имеет точки разрыва. Если при этом правая часть является оригиналом, то операционный метод решения применим. Следует заметить, что при этом функция $x(t)$ будет удовлетворять уравнению (7) во всех точках, где правая часть непрерывна.

Пример 7. Найдём при $t > 0$ решение уравнения $\ddot{x} + x = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < 1, \\ 1, & \text{если } 1 < t < 3, \\ 0, & \text{если } t > 3, \end{cases}$$

при нулевых начальных данных $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Правая часть — «ступенька». $f(t) = H(t-1) - H(t-3)$, её изображение: $F(p) = \frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-3p}$. Операторное уравнение имеет вид:

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{1 - e^{-2p}}{p} e^{-p}$$

Откуда

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{e^{-p} - e^{-3p}}{p(p^2 + 1)} = \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) (e^{-p} - e^{-3p}) \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) e^{-p} - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) e^{-3p}. \end{aligned}$$

Применяя формулы соответствия и теорему запаздывания, получим

$$x(t) = (1 - \cos(t - 1))H(t - 1) - (1 - \cos(t - 3))H(t - 3)$$

Можно записать $x(t)$ в виде

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < 1, \\ 1 - \cos(t - 1), & \text{если } 1 < t < 3, \\ \cos(t - 3) - \cos(t - 1), & \text{если } t > 3. \end{cases}$$

Легко проверить, что в точках разрыва правой части $t = 1$ и $t = 3$ решение $x(t)$ и его производную $\dot{x}(t)$ можно доопределить до непрерывных функций. Вторая производная $\ddot{x}(t)$ в этих точках терпит разрыв.

Операционный метод позволяет свести решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к решению систем алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций.

Пример 8. Найдем решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x - y = e^t, \\ \dot{y} + 3x - 2y = 2e^t \end{cases}$$

при начальных условиях: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Положим $X(p) \doteq x(t)$, $Y(p) \doteq y(t)$. По теореме о дифференцировании оригинала получаем

$$\dot{x}(t) \doteq pX(p) - 1, \quad \dot{y}(t) \doteq pY(p) - 1.$$

Система операторных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} pX - 1 + X - Y = \frac{1}{p - 1}, \\ pY - 1 + 3X - 2Y = \frac{2}{p - 1}. \end{cases}$$

После преобразования:

$$\begin{cases} (p-1)X - Y = \frac{1}{p-1} + 1, \\ 3X + (p-2)Y = \frac{2}{p-1+1}. \end{cases}$$

Решая эту систему (например, методом Крамера), находим $X(p) = \frac{1}{p-1}$, $Y(p) = \frac{1}{p-1}$. Что соответствует оригиналам $x(t) = e^t$, $y(t) = e^t$.

Пример 9. Найдем решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x} - x + y + z = 0, \\ \ddot{y} + x - y + z = 0, \\ \ddot{z} + x + y - z = 0 \end{cases}$$

при начальных условиях: $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

Система операторных уравнений запишется в виде:

$$\begin{cases} (p^2 - 1)X + Y + Z = p, \\ X + (p^2 - 1)Y + Z = 0, \\ X + Y + (p^2 - 1)Z = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера. Найдем сначала определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 - 1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2 - 1 & 1 \\ 1 & 1 & p^2 - 1 \end{vmatrix} =$$

(прибавим к первому столбцу второй и третий столбцы)

$$= \begin{vmatrix} p^2 + 1 & 1 & 1 \\ p^2 + 1 & p^2 - 1 & 1 \\ p^2 + 1 & 1 & p^2 - 1 \end{vmatrix} =$$

(вычтем первую строку из второй и третьей)

$$= \begin{vmatrix} p^2 + 1 & 1 & 1 \\ 0 & p^2 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 - 2 \end{vmatrix} = (p^2 + 1)(p^2 - 2)^2,$$

Найдем еще три определителя:

$$\Delta_X = (\text{заменяем в } \Delta \text{ первый столбец на столбец правых частей}) =$$

$$= \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 0 & p^2 - 1 & 1 \\ 0 & 1 & p^2 - 1 \end{vmatrix} = p[(p^2 - 1)^2 - 1] = p^3(p^2 - 2),$$

$$\Delta_Y = (\text{заменяем в } \Delta \text{ второй столбец на столбец правых частей}) =$$

$$= \begin{vmatrix} p^2 - 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & p^2 - 1 \end{vmatrix} = -p[(p^2 - 1) - 1] = -p(p^2 - 2),$$

$$\Delta_Z = (\text{заменяем в } \Delta \text{ третий столбец на столбец правых частей}) =$$

$$= \begin{vmatrix} p^2 - 1 & 1 & p \\ 1 & p^2 - 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = p[1 - (p^2 - 1)] = -p(p^2 - 2).$$

Находим изображения

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = -\frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)},$$

$$Z(p) = \frac{\Delta_Z}{\Delta} = -\frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{p^2 - 2} - \frac{1}{p^2 + 1} \right\},$$

то

$$\frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)} \doteq \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \sqrt{2}t - \sin t \right\}. \quad (10)$$

По теореме о дифференцировании оригинала, примененной к изображениям $Y(p)$ и $Z(p)$, получим

$$y(t) = z(t) = \frac{1}{3} \left\{ \cos t - \operatorname{ch} \sqrt{2}t \right\}.$$

Применяя эту теорему трижды к $X(p)$, получаем

$$x(t) = \frac{2}{3} \operatorname{ch} \sqrt{2}t + \frac{1}{3} \cos t.$$

2. Линейные дифференциальные уравнения и системы с переменными коэффициентами.

Преобразование Лапласа может оказаться полезным и при решении некоторых линейных дифференциальных уравнений и систем с переменными коэффициентами. Пусть $x(t) \doteq X(p)$; по теоремам о дифференцировании оригинала и изображения имеем

$$\begin{aligned} x(t) &\doteq X(p); \quad tx(t) \doteq -X'(p), \quad t^2x(t) \doteq X''(p), \dots, \\ x'(t) &\doteq pX(p) - x(0), \quad tx'(t) \doteq -(pX(p))', \quad t^2x'(t) \doteq (pX(p))'', \dots, \\ x''(t) &\doteq p^2X(p) - x(0)p - x'(0), \quad tx''(t) \doteq -(p^2X(p))' + x(0), \\ t^2x'' &\doteq -(p^2X(p))'', \dots \end{aligned}$$

и т.д. Переход к изображениям позволяет иногда упростить дифференциальные уравнения, содержащие члены подобного вида.

Пример 10. Дифференциальное уравнение

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0$$

называется уравнением Бесселя с индексом ν . Рассмотрим его частный случай с $\nu = 0$:

$$tx'' + x' + tx = 0.$$

По приведенным выше формулам найдем операторное уравнение:

$$(p^2 + 1)X' + pX = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, оно легко решается и дает $X(p) = C/\sqrt{1+p^2}$, где C — произвольная постоянная. Так как $\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p) = C$, то согласно предельному соотношению из предыдущего параграфа должно быть $C = x(0)$. Положим для определенности $x(0) = 1$. Чтобы найти оригинал, разложим изображение в ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$, применив формулу:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_\alpha^k z^k, \quad \sqrt{1} = 1, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

$$\begin{aligned}
X(p) &= \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} = \frac{1}{p}(1 + p^{-2})^{-1/2} = \frac{1}{p} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1/2}^k (p^{-2})^k \right) = \\
&= \frac{1}{p} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} p^{-2k} \right) = \\
&= \frac{1}{p} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{k! 2^k} p^{-2k} \right) = \\
&= \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2 (2k)^2} p^{-2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2 (2k)^2} p^{-(2k+1)}.
\end{aligned}$$

В силу первой теоремы разложения оригиналом для получившейся суммы будет сумма

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2} \right)^{2k}.$$

Эта сумма задает одно из решений уравнения — функцию Бесселя 1-ого рода нулевого порядка $J_0(t)$. Второе решение, линейно независимое с полученным, оригиналом не является и не может быть найдено с помощью преобразования Лапласа.

3. Интегральные уравнения.

Преобразование Лапласа помогает также находить решение некоторых интегральных уравнений, у которых интеграл имеет вид свертки.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром, зависящим от разности аргументов, т. е. уравнение вида

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t-s)x(s) ds, \quad (11)$$

где $f(t)$ и $k(t)$ — заданные функции, а $x(t)$ — искомая. Видим, что интеграл являет собой свертку двух оригиналов. Пусть $X(p) \doteq x(t)$, $F(p) \doteq f(t)$, $K(p) \doteq k(t)$. Переходя в уравнении к изображениям и используя теорему Бореля, получим $X(p) = F(p) + K(p)X(p)$, откуда $X(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}$. Оригинал для $X(p)$ и есть искомое решение уравнения (11).

По этой же схеме решается и уравнение Вольтерра первого рода с разностным ядром

$$\int_0^t k(t-s)x(s)ds = f(t). \quad (12)$$

Пример 11. Решим интегральное уравнение $x(t) = \sin t + \int_0^t (t-s)x(s)ds$.

Операторное уравнение $X(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} \cdot X(p)$, откуда

$$X(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2-1} \right) \doteq \frac{1}{2}(\sin t + \operatorname{sh} t) = x(t).$$

Пример 12. Решим интегральное уравнение $\sin t = \int_0^t x(t-s)x(s)ds$.

В этом примере интеграл также является сверткой. Возьмём от обеих частей преобразование Лапласа: $\frac{1}{p^2+1} = X(p) \cdot X(p)$, откуда $X(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$. Для корня берем ветвь $\sqrt{1} = 1$. Это изображение нам уже встречалось в Примере, и его оригинал — это функция Бесселя 1-ого рода нулевого порядка $J_0(t)$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Используя преобразование Лапласа, решите задачи Коши.

11.1. $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5 = 2 \sin t + 4 \cos t$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -2$.

11.2. $\ddot{x} + \omega^2 x = \begin{cases} \sin t, & \text{если } t \in (0; \pi), \\ 0, & \text{если } t \notin (0; \pi). \end{cases}$ $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\omega \geq 0$.

Рассмотрите различные значения параметра ω .

11.3. $\ddot{x} + 4x = 2 \cos 2t - 8t \sin 2t$, $x(\pi/4) = \dot{x}(\pi/4) = 0$.

11.4. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} + x - 3y = 4 \cos 2t, \\ 3\dot{x} - \dot{y} - x - y = -8 \sin 2t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$.

11.5. $\begin{cases} \ddot{x} - 8x + \sqrt{6}\dot{y} = 0, \\ \ddot{y} - \sqrt{6}\dot{x} + 2y = 0, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = \dot{y}(0) = \dot{x}(0) = 0$.

11.6. $t\ddot{x} + 2\dot{x} - ty = 2 - t^2$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 1$.

11.7. $t\ddot{x} + 2\dot{x} + ty = 2t$, $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = 0$.

Используя преобразование Лапласа, решите интегральные уравнения.

11.8. $x(t) = \int_0^t \sin(t-s)x(s) ds + \cos t + 3t + 2.$

11.9. $x(t) = 4 \int_0^t (s-t)x(s) ds - 3 \cos 2t + 1.$

11.10. $t^\alpha = \int_0^t \cos(t-s)x(s) ds, \quad \alpha > 0.$

11.11 $t^\alpha = \int_0^t x(t-s)x(s) ds, \quad \alpha > -1.$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

11.1. $x(t) = \cos t - e^t \sin 2t.$

11.2. $x(t) = \frac{1}{\omega^2 - 1} (\sin t - \sin \omega t) H(t - \pi), \quad \omega \neq 0, \omega \neq 1.$

$x(t) = \frac{1}{2} (\sin t - \sin \omega t) H(t - \pi), \quad \omega = 1; \quad x(t) = (t - \sin t) H(t - \pi), \quad \omega = 0.$

11.3. $x(t) = \left(\frac{\pi^2}{16} + t^2 \right) \cos 2t.$

11.4. $x(t) = \cos 2t - e^t + 2te^t, \quad y(t) = 2e^t(t+1) - e^t - \cos 2t.$

11.5. $x(t) = 0,5 (3 \operatorname{ch} 2t - \cos 2t), \quad y(t) = \sqrt{6} (\operatorname{ch} 2t - \cos 2t).$

11.6. $x(t) = 2 \frac{\operatorname{sh} t}{t} + t. \quad 11.7. \quad x(t) = \frac{\sin t}{t} + 2.$

11.8. $x(t) = 1 + 5t + t^2 + 0,5 t^3. \quad 11.9. \quad x(t) = 3t \sin 2t - 2 \cos 2t + t^2 + 0,5 t^3.$

11.10. $x(t) = \alpha t^{\alpha-1} + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad 11.11. \quad x(t) = \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} t^{\frac{\alpha-1}{2}}.$

Глава 3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ.

§ 12. Асимптотические разложения и их свойства.

Рассмотрим множество D , лежащее на действительной прямой или на комплексной плоскости и имеющее предельную точку ω . Пусть U – некоторая окрестность точки ω .

Определение. Последовательность функций $\varphi_n : U \cap D \rightarrow C$ называется *асимптотической последовательностью* при $z \rightarrow \omega$, если для любого $n \in N$

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$$

при $z \rightarrow \omega$.

Пример 1. 1. Последовательность $\varphi_n(z) = (z - \omega)^n, z, \omega \in C$, является асимптотической при $z \rightarrow \omega$.

2. Последовательность $\varphi_n(z) = z^{-n}, |z| > 1, z \in C$, является асимптотической при $z \rightarrow \infty$.

3. Последовательность $\varphi_n(x) = x^{-n}e^x, x > 0$, является асимптотической при $x \rightarrow +\infty$.

Далее мы будем предполагать, что для любой окрестности U предельной точки ω функции $\varphi_n(z), n \in N$, не обращаются тождественно в нуль на множестве $U \cap D$.

Определение. Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ – асимптотическая последовательность функций при $z \rightarrow \omega$. Формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$, где a_k – постоянные, называется *асимптотическим разложением* функции $f(z)$, если для любого $n \in N$

$$f(z) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \rightarrow \omega. \quad (1)$$

или

$$f(z) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(z) = O(\varphi_{n+1}(z)), \quad z \rightarrow \omega. \quad (2)$$

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$ называют также *асимптотическим рядом*

функции $f(z)$ и употребляют запись

$$f(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \quad z \rightarrow \omega.$$

Самое первое ненулевое слагаемое в представлении (1) или (2) называют *главным членом асимптотики*.

Пример 2. Сходящиеся ряды Тейлора являются асимптотическими рядами для своих сумм: к примеру, $e^x \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ при $x \rightarrow 0$.

Определение. Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ – асимптотическая последовательность функций при $z \rightarrow \omega$. Функция f называется *асимптотическим нулем* относительно последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, если $f(z) = o(\varphi_n(z))$ для любого $n \in N$.

Пример 3. Функция e^{-1/x^2} является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{x^n\}$, $n \in N$, $x \rightarrow 0$, $x \in R$.

Определение. Функции f и g называют *асимптотически совпадающими* при $z \rightarrow \omega$ относительно асимптотической последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, если $f - g$ – разность этих функций является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{\varphi_n(z)\}$.

Для асимптотически совпадающих функций мы будем использовать обозначение $f \asymp g$.

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_k(z)\}$ – асимптотическая последовательность при $z \rightarrow \omega$. Если функции f и g допускают асимптотические разложения по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, то эти разложения совпадают тогда и только тогда, когда функции f и g асимптотически совпадают относительно последовательности $\{\varphi_n(z)\}$.

Следствие. Если функция f допускает асимптотическое разложение по последовательности $\{\varphi_n\}$, то асимптотический ряд, соответствующий данной функции, равенствами (1), (2) определяется однозначно. С другой стороны, двум поточечно различным, но асимптотически совпадающим функциям может соответствовать один асимптотический ряд.

Замечание. В общем случае разложение функции по наперед заданной асимптотической последовательности может и не существовать.

Пример 4. Найдем асимптотическое разложение функции $f(x) = e^{-x} \sin e^x$ по последовательности $\{x^{-n}\}$, $n \in N \cup \{0\}$, $x \rightarrow +\infty$, $x \in R$. Согласно определению $f(x) = a_0 \varphi_0 + o(\varphi_0)$ при $x \rightarrow +\infty$, поэтому $a_0 =$

$$\frac{f(x) - o(\varphi_0)}{\varphi_0}, \text{ откуда } a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \sin e^x}{1} = 0. \text{ Зная } a_0,$$

найдем a_1 : по определению $f(x) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + o(\varphi_1)$ при $x \rightarrow +\infty$, поэтому $a_1 = \frac{f(x) - a_0\varphi_0 - o(\varphi_1)}{\varphi_1}$, откуда $a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - a_0\varphi_0}{\varphi_1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \sin e^x}{x^{-1}} = 0$. Действуя аналогично, находим все последующие коэффициенты через найденные предыдущие по формуле:

$$a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k}{\varphi_n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \sin e^x}{x^{-n}} = 0.$$

Таким образом, получим, что все коэффициенты в разложении равны нулю. То есть функция $f(x) = e^{-x} \sin e^x$ является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{x^{-n}\}, n \in N \cup \{0\}$, при $x \rightarrow +\infty$.
 $\{x^{-n}\}, n \in N \cup \{0\}, x \rightarrow +\infty, x \in R$.

Сформулируем некоторые полезные утверждения.

Теорема 2. Если функции f и g допускают асимптотические разложения $f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$, $g \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$, то их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также допускает асимптотическое разложение, причем

$$(\alpha f + \beta g) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \varphi_n.$$

Теорема 3. Пусть даны непрерывные положительные на промежутке $[a, \omega)$ функции $\varphi_n(x), n \in N$, которые образуют асимптотическую последовательность при $x \rightarrow \omega$, и непрерывная на $[a, \omega)$ функция f , которая имеет асимптотическое разложение $f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$. Пусть интегралы

$$\Phi_n(x) = \int_x^{\omega} \varphi_n(t) dt \text{ и } F(x) = \int_x^{\omega} f(t) dt$$

сходятся при $x \in [a, \omega)$. Тогда функции $\Phi_n(x)$ образуют асимптотическую последовательность при $x \rightarrow \omega$, а для функции F справедливо асимптотическое разложение $F(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$.

Замечание. В отличие от интегрирования, почленное дифференцирование асимптотических разложений гладких функций в общем случае приводит к неверным результатам. К примеру, функция $f(x) = e^{-x} \sin(e^x)$ непрерывно дифференцируема и является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{x^{-n}\}$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. функция имеет тривиальное асимптотическое разложение. Производные от функций x^{-n} вновь образуют асимптотическую при $x \rightarrow +\infty$ последовательность $\{-nx^{-n-1}\}$, но производная исходной функции $f'(x) = -e^{-x} \sin(e^x) + \cos(e^x)$ не только не является асимптотическим нулем, но вообще не имеет асимптотического разложения по последовательности $\{-nx^{-n-1}\}$ при $x \rightarrow +\infty$.

Степенными называют разложения по асимптотическим последовательностям вида $\{(z-a)^n\}$ при $z \rightarrow a$ или $\{(z-a)^{-n}\}$ при $z \rightarrow \infty$. Простой заменой переменной эти последовательности приводятся к случаю асимптотической последовательности $\{z^n\}$ при $z \rightarrow 0$. Для асимптотической последовательности с $\varphi_n(z) = z^n$ произведение членов последовательности $\varphi_n(z) \cdot \varphi_m(z) = z^{n+m}$ вновь является членом этой последовательности, а производная $\varphi'_n(z) = nz^{n-1}$ и первообразная $\Phi_n(z) = z^{n+1}/n+1$ отличаются от соответствующих членов исходной последовательности лишь постоянными множителями. Поэтому степенные асимптотические разложения обладают некоторыми дополнительными свойствами, которые не выполняются в общем случае.

Теорема 4. Пусть $z = 0$ – предельная точка множества E и функции $f : E \rightarrow C$, $g : E \rightarrow C$ имеют асимптотические разложения

$$f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Тогда при $z \rightarrow 0$

$$1) (\alpha f + \beta g)(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n;$$

$$2) (f \cdot g)(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{где } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0;$$

$$3) \text{ если } b_0 \neq 0, \text{ то } (f/g)(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \text{ где коэффициенты } d_n \text{ нахо-}$$

дятся из соотношений $a_0 = b_0 d_0, \dots, a_n = \sum_{k=0}^n b_k d_{n-k}, \dots$

Теорема 5. Пусть 0 – предельная точка множеств E и S . Функции

$f : E \rightarrow S$ и $g : S \rightarrow C$ имеют асимптотические разложения

$$f(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

при $z \rightarrow 0$,

$$g(w) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$$

при $w \rightarrow 0$.

Тогда при $z \rightarrow 0$

$$g(f(z)) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где коэффициенты c_n находятся формальной подстановкой ряда для функции $f(z)$ в ряд для функции $g(w)$ и суммированием получаемых в результате коэффициентов при одинаковых степенях z .

Следующие результаты касаются интегрирования и дифференцирования степенных асимптотических разложений функций действительного переменного.

Теорема 6. Пусть $f : (0, a) \rightarrow R$ и $f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, при $x \rightarrow 0$.

Тогда

1) если функция f непрерывна на интервале $(0, a)$, то

$$\int_0^x f(t) dt \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1};$$

2) если функция $f \in C^1(0, a)$ и ее производная допускает асимптотическое разложение

$$f'(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^n,$$

то это разложение можно получить формальным дифференцированием разложения функции f , причем $a'_n = (n+1)a_{n+1}$.

Асимптотические разложения *аналитических функций комплексного переменного* также обладают свойствами, не выполненными в общем случае.

Теорема 7. Пусть однолиственная функция $f(z)$ аналитична в секторе $S = \{z \in C \mid |z| > R > 0, \alpha < \arg z < \beta, 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi\}$ и разлагается в асимптотический ряд $f(z) \simeq \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{-n}$, при $z \rightarrow \infty, z \in S$.

Тогда при $z \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(z) = \int_z^{\infty} f(t) dt \simeq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)z^{n-1}},$$

где интеграл берется по произвольному пути, лежащему в секторе S .

В отличие от общего случая, степенной асимптотический ряд аналитической функции можно почленно дифференцировать. Доказательство этого факта основано на возможности представления аналитической функции интегралом Коши.

Теорема 8. Пусть однолиственная функция $f(z)$ аналитична в секторе $S = \{z \in C \mid |z| > R > 0, \alpha < \arg z < \beta, 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi\}$ и разлагается в асимптотический ряд $f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$, при $z \rightarrow \infty, z \in S$.

Тогда в любом замкнутом секторе \tilde{S} , лежащем внутри S , справедливо асимптотическое разложение

$$f'(z) \simeq - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc_n}{z^{n+1}}, \text{ при } z \rightarrow \infty, z \in \tilde{S}.$$

Несколько неожиданным оказывается тот факт, что всякий формальный степенной ряд оказывается асимптотическим рядом некоторой аналитической функции.

Теорема 9. Для всякого формального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ и для любого сектора $S = \{z \in C \mid |z| > R > 0, |\arg z| < \alpha < \pi\}$ существует функция $f(z)$, аналитическая в секторе S и такая, что $f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ при $z \rightarrow \infty, z \in S$.

Вообще говоря, асимптотические ряды могут оказаться расходящимися, однако степенные асимптотические разложения аналитических в окрестности бесконечно удаленной точки функций сходятся.

Теорема 10. Если однолистная аналитическая в области $|z| > a$ функция $f(z)$ допускает асимптотическое разложение

$$f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

при $z \rightarrow \infty$, то асимптотический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$, сходится к $f(z)$ при $|z| > a$.

Асимптотические разложения некоторых интегралов, зависящих от параметра, могут быть получены последовательным *интегрированием по частям*. Члены асимптотического ряда находятся один за другим повторным применением этой операции, а асимптотический характер полученного ряда затем устанавливается исследованием остаточного члена, который имеет интегральный вид.

Пример 5. Исследуем асимптотику неполной гамма-Функции при $x \rightarrow +0$:

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt \quad (a > 0, x > 0).$$

Раскладывая показательную функцию в ряд и интегрируя его почленно, получаем ряд

$$\gamma(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+a}}{(n+a)n!},$$

который сходится к функции $\gamma(a, x)$ при всех $x > 0$.

Поскольку ряд является асимптотическим при $x \rightarrow +0$, то его частичные суммы дают хорошую аппроксимацию функции $\gamma(a, x)$ при малых положительных значениях аргумента x . Для нахождения значений функции $\gamma(a, x)$ при больших x этот ряд хотя и сходится всюду, но приспособлен плохо, поскольку не является асимптотическим при $x \rightarrow +\infty$. Его частичные суммы, соответствующие фиксированному n , стремятся к бесконечности при $x \rightarrow +\infty$, а значения функции остаются ограниченными. Следовательно для нахождения значений функции при больших x нужно другое разложение.

Нам удобней найти асимптотический при $x \rightarrow +\infty$ ряд для функции

$$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt,$$

отличающейся от функции $\gamma(a, x)$ постоянным слагаемым.

Проинтегрируем один раз по частям

$$\begin{aligned}\Gamma(a, x) &= \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = e^{-x} x^{a-1} + (a-1) \int_x^\infty t^{a-2} e^{-t} dt = \\ &= e^{-x} x^{a-1} + (a-1) \Gamma(a-1, x).\end{aligned}$$

Повторяя этот прием, находим, что при натуральных значениях a функция $\Gamma(a, x)$ является произведением e^{-x} на многочлен степени $a-1$. Для произвольного положительного a после n -кратного интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}\Gamma(a, x) &= e^{-x} x^{a-1} + (a-1) e^{-x} x^{a-2} + \dots + (a-1) \dots (a-n+1) e^{-x} x^{a-n} + \\ &\quad (a-1) \dots (a-n) \int_x^\infty t^{a-n-1} e^{-t} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k+1)} e^{-x} x^{a-k} + \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \Gamma(a-n, x).\end{aligned}$$

Оценим остаточный член при $n > a - 1$

$$\begin{aligned}\left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \int_x^\infty t^{a-n-1} e^{-t} dt \right| &< \left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \right| x^{a-n-1} \int_x^\infty e^{-t} dt = \\ &= \left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \right| e^{-x} x^{a-n-1}.\end{aligned}$$

Поскольку при $x \rightarrow +\infty$ погрешность является бесконечно малой величиной по сравнению с последним слагаемым частичной суммы, то получаемое разложение является асимптотическим, и

$$\Gamma(a, x) \simeq e^{-x} x^a \sum_{k=1}^\infty \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k+1)} x^{a-k}.$$

Частным случаем этой формулы является асимптотическое при $x \rightarrow +\infty$ разложение функции ошибок

$$\text{Erf}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma(1/2, x^2).$$

Используя свойства гамма-функции можно найти различные формы записи для коэффициентов асимптотического ряда

$$\begin{aligned}\operatorname{Erf}(x) &\simeq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(3/2 - k)x^{2k-1}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}{x^{2k-1}} = \frac{e^{-x^2}}{2x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k} x^{-2k}.\end{aligned}$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.

12.1. Какому условию должна удовлетворять числовая последовательность $\{a_n\}$, чтобы для любой асимптотической при $z \rightarrow \omega$ последовательности $\{\varphi_n(z)\}$ последовательность $\{\psi_n(z) = a_n\varphi_n(z)\}$ была асимптотической при $z \rightarrow \omega$.

12.2. Для всякой ли функции $f: (-1, 1) \rightarrow R$ можно подобрать асимптотическую при $x \rightarrow 0$ последовательность, по которой функция f будет допускать асимптотическое разложение?

12.3. Привести примеры функций $f(z)$ и асимптотических $z \rightarrow \omega$ последовательностей $\{\varphi_n(z)\}$ таких, что

$$f(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$$

и при этом в некоторой проколотой окрестности точки ω

- a) ряд сходится к функции $f(z)$;
- b) ряд сходится к функции $g(z) \neq f(z)$;
- c) ряд расходится.

12.4. Показать, что последовательности функций

- a) $\varphi_n(z) = z^{-n}$,
- b) $\psi_n(z) = (z-1)z^{-2n}$,
- c) $\omega_n(z) = (z^2 - z + 1)z^{-3n}$

являются асимптотическими при $z \rightarrow \infty$, $n \in N \cup \{0\}$, а функция $f(z) = (1+z)^{-1}$ допускает асимптотическое разложение по каждой из этих последовательностей.

12.5. Пусть $U = (1, +\infty)$, функция f непрерывна в U и имеет асимптотическое разложение

$$f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Показать, что для любого $x \in U$ интеграл

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt$$

сходится и имеет асимптотическое разложение:

$$F(x) \simeq \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} \dots + \frac{a_{n+1}}{nx^n} + \dots$$

12.6. Найти степенные асимптотические разложения функций:

a) $f(z) = (z^2 - 2z - 3)^{-1}$ при $z \rightarrow \infty$;

b) $g(x) = x^3 e^{-x}$ при $x \rightarrow +\infty$, $x \in R$;

c) $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ при $x \rightarrow 0$.

12.7. Пусть $x \in R$. Для функции $f(x) = e^x \sin e^{-x}$ при $x \rightarrow +\infty$ найти:

a) асимптотическое разложение по последовательности $\{e^{-nx}\}$;

b) асимптотическое разложение по последовательности $\{x^{-n}\}$.

12.8. Найти при $x \rightarrow +\infty$ асимптотические разложения интегралов:

$$\text{a) } \int_x^{+\infty} t^{-1} e^{x-t} dt, \quad \text{b) } \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

12.1. $a_n \neq 0$. 12.2. Да. 12.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{-n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (z-1) z^{-2n}$;

с) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z^2 - z + 1) z^{-3n}$. 12.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^{n-1} + (-1)^n) z^{-n}$;

б) $g(x) \simeq 0$; с) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)! 2n}$. 12.7. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-2nx}}{(2n+1)!}$; б) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot x^{-n}$.

12.8. а) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{-n-1}$; б) $\frac{e^{-x^2}}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{n!} \left(\frac{1}{2x} \right)^{2n}$.

§ 13. Интегралы Лапласа.

Интегралами Лапласа называют интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx,$$

где $f(x)$ и $S(x)$ – вещественные функции, а λ – положительный параметр.

Нас будет интересовать асимптотика этих интегралов при $\lambda \rightarrow +\infty$. Как правило, мы будем предполагать, что функции $f(x)$ и $S(x)$ являются гладкими.

В случае, когда функция S не имеет стационарных точек на промежутке интегрирования $[a; b]$, асимптотика интеграла находится с помощью интегрирования по частям.

Оценки для интегралов специального вида дает следующая

Лемма Ватсона. Пусть $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < d \leq \infty$ и $f \in C([0, d], R)$.

1. Если в окрестности точки $x = 0$ функция f имеет класс гладкости C^n и $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + O(x^{n+1})$ при $x \rightarrow 0$, то

$$W(\lambda) = \int_0^d x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^n a_k \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}} + O\left(\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}\right).$$

2. Если f – бесконечно дифференцируема при $x = 0$, то $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, и тогда

$$W(\lambda) \simeq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}}.$$

При этом асимптотическое разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Пример 1. Используя лемму Ватсона, легко найти асимптотическое разложение преобразования Лапласа функции $\cos t$ при вещественном $\lambda \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} L\{\cos t\}(\lambda) &= \int_0^{\infty} \cos t e^{-t\lambda} dt \simeq \\ &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} \Gamma(1+k) \lambda^{-(1+k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^{-(1+2n)}. \end{aligned}$$

Разложение найденного в явном виде преобразования Лапласа дает тот же самый ряд

$$L\{\cos t\}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 + \lambda^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^{-(1+2n)}.$$

Формулируемая ниже теорема позволяет находить в наиболее часто встречающихся на практике ситуациях *главный член асимптотики* интеграла Лапласа.

Теорема 1. Пусть в интеграле $F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx$, функции f и g непрерывны, а промежуток интегрирования содержит только в одну точку x_0 , в которой функция S достигает своего максимума. Предположим также, что в окрестности точки x_0 функция S принадлежит классу гладкости C^k , а функция $f(x) = f(x_0) + O(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, где $f(x_0) \neq 0$.

Тогда:

1) если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, $k = 2$, $S'(x_0) \neq 0$, т.е. $S'(a) < 0$ или $S'(b) > 0$, то

$$F(\lambda) = \frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\lambda} \cdot \frac{f(x_0)}{|S'(x_0)|} \cdot [1 + O(\lambda^{-1})] \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty;$$

2) если $a < x_0 < b$, $k = 3$, $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$, т.е. $S''(x_0) < 0$, то

$$F(\lambda) = \frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\lambda^{1/2}} \left(f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}} \right) [1 + O(\lambda^{-1/2})] \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty;$$

3) если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, $k = 3$, $S'(x_0) = 0$ и $S''(x_0) \neq 0$ (т.е. $S''(x_0) < 0$), то

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\lambda^{1/2}} \left(f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}} \right) [1 + O(\lambda^{-1/2})] \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Пример 2. Гамма-функцию можно записать в виде интеграла Лапласа

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{\lambda \ln t} dt,$$

но при $t \rightarrow +\infty$ функция $S(t) = \ln t$ монотонно возрастает, а функция $f(t) = e^{-t}$ монотонно стремится к нулю, поэтому непосредственно воспользоваться теоремой 7.3 не удастся. Однако, делая при $\lambda > 0$ замену переменной $t = \lambda x$, мы получаем интеграл

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x - \ln x)} dx,$$

в котором функция $f(x) \equiv 1$, а функция $S(x) = \ln x - x$ имеет строгий максимум в точке $x = 1$, причем $S'(1) = 0$, $S''(1) = -1$.

Следовательно по теореме 1:

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda [1 + O(\lambda^{-1/2})] \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Откуда, в частности, получается классическая формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n [1 + O(n^{-1/2})] \text{ при } n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.

13.1. Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок, функции $f(x), S(x) \in C^\infty$, $S(x) > 0$. Докажите, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ выполняются следующие асимптотические равенства:

1) если $S'(x) < 0$ при $x \in [a, b]$ и $f(a) \neq 0$, то

$$\int_a^b f(x) [S(x)]^\lambda dx = -\frac{f(a)}{\lambda S'(a)} [S(a)]^{\lambda+1} (1 + O(\lambda^{-1}));$$

2) если функция $S(x)$ достигает максимума только в точке $x_0 \in (a, b)$, при этом $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$ и $f(x_0) \neq 0$, то

$$\int_a^b f(x)[S(x)]^\lambda dx = f(x_0) \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} [S(x_0)]^{\lambda+1/2} (1 + O(\lambda^{-1/2})).$$

Используя лемму Ватсона, найдите асимптотические разложения интегралов

13.2.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty,$$

13.3.

$$\int_0^{\pi/4} e^{-\lambda t} (1 + \cos t)^{1/2} dt \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty,$$

13.4.

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} e^{-\lambda \sqrt{x}} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty,$$

13.5.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} e^{-\lambda x^2} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

В следующих интегралах найдите главный член асимптотики.

13.6.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

13.7.

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

13.8.

$$\int_0^{+\infty} t^{-\alpha t} t^x dt \quad \text{при } \alpha > 0, x \rightarrow +\infty.$$

13.9.

$$\int_0^{+\infty} (1+t)^n e^{-nt} dt \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

13.10.

$$\int_0^1 e^{\lambda(x-x^2)} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

13.11.

$$\int_0^1 x^\lambda \cos^n \pi x dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

13.12.

$$\int_0^1 e^x x^\lambda (1+x^2)^{-\lambda} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

13.13.

$$\int_{-1}^1 e^{-\lambda \operatorname{ch} x} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

13.14.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^\alpha x} dx \quad \text{при } \alpha \in R, t \rightarrow +\infty.$$

13.15. Найдите главный член асимптотики интеграла

$$\int_0^{\pi/2} e^{\lambda \cos x} \cos nx dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Как изменится асимптотика, если верхний предел интеграла будет равен 2π ?

13.16. Найдите главный член асимптотики интеграла

$$F(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Применив полученный результат к интегралу $F(2n)$, докажите формулу Валлиса:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2.$$

13.17. Найти главный член асимптотики полинома Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^n d\theta \quad \text{при } x > 1, \quad n \rightarrow +\infty.$$

13.18. Функция Макдональда нулевого порядка может быть задана в виде интеграла

$$K_0(x) = e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t(t+2)}} dt.$$

Найдите главный член ее асимптотики при $x \rightarrow +\infty$.

13.19. Найдите главный член асимптотики интеграла

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^3+tx} dt$$

при $x \rightarrow \pm\infty$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

$$\mathbf{13.2.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda^{-2k-2}. \quad \mathbf{13.3.} \quad \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-2k} \lambda^{-2k-1}.$$

$$\mathbf{13.4.} \quad 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k)!}{(2k)!} \lambda^{-4k-1}. \quad \mathbf{13.5.} \quad \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k+1/4)!}{(2k+1)!} \lambda^{-k-1/4}.$$

$$\mathbf{13.6.} \quad \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right). \quad \mathbf{13.7.} \quad \sqrt{\frac{\pi}{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

$$\mathbf{13.8.} \quad \sqrt{\frac{2\pi}{e^\alpha}} x^{\frac{1}{2\alpha}} e^{\frac{\alpha}{2} x^{1/\alpha}}. \quad \mathbf{13.9.} \quad \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

$$\mathbf{13.10.} \quad e^{\lambda/4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right). \quad \mathbf{13.11.} \quad \frac{(-1)^n}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

$$\mathbf{13.12.} \quad \frac{e}{2\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right). \quad \mathbf{13.13.} \quad e^{-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right).$$

$$\mathbf{13.14.} \quad \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{t^{(1-\alpha)k}}, \quad \text{если } \alpha < 1; \quad \frac{1}{t} \int_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-s} ds}{1+s}, \quad \text{если } \alpha = 1;$$

$$(\alpha - 1) t^{-\alpha} \ln t, \quad \text{если } \alpha > 1. \quad \mathbf{13.15.} \quad e^{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right).$$

$$\mathbf{13.16.} \quad \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right). \quad \mathbf{13.17.} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1/2}}{(x^2 - 1)^{1/4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

$$\mathbf{13.18.} \quad e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right). \quad \mathbf{13.19.} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3x}} e^{2(x/3)^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) \right), \quad \text{если } x \rightarrow +\infty; \quad \frac{1}{|x|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right), \quad \text{если } x \rightarrow -\infty.$$

§ 14. Интегралы Фурье.

Интегралами Фурье называют интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx, \quad (1)$$

где $S(x)$ – вещественнозначная функция, а λ – положительный параметр. Функцию $S(x)$ обычно называют *фазовой функцией*.

Нас будет интересовать асимптотика этих интегралов при $\lambda \rightarrow +\infty$.

В случае, когда функции f и S являются гладкими, и фазовая функция не имеет стационарных точек, асимптотика интеграла (1) находится с помощью интегрирования по частям. Введем обозначение для встречающегося в последующих формулировках дифференциального оператора

$$L = -\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx}.$$

Теорема 1. Пусть $I = [a, b]$ – конечный отрезок, $f(x) \in C^n(I)$, $S(x) \in C^{n+1}(I)$ и $S'(x) \neq 0$ при $x \in I$. Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx = \sum_{k=0}^{n-1} (i\lambda)^{-k-1} \left[e^{i\lambda S(x)} \left(L^k \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \right) \right] \Big|_a^b + o(\lambda^{-n}), \quad (2)$$

где $[g(x)]|_a^b = g(b) - g(a)$.

Заключение теоремы верно и для случая, когда $b = +\infty$ или $a = -\infty$, если указанные в формуле значения $g(b)$, $g(a)$ понимаются как пределы и конечны.

Следствие 1. Пусть функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы и $S'(x) \neq 0$ при $x \in I$. Тогда для интеграла (1) при $\lambda \rightarrow +\infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) (i\lambda)^{-n-1}, \quad (3)$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_n = \left[e^{i\lambda S(x)} (L^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right)) \right] \Big|_{x=a},$$

$$b_n = \left[e^{i\lambda S(x)} (L^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right)) \right] \Big|_{x=b}.$$

Из теоремы 1 вытекает также асимптотическая оценка для коэффициентов ряда Фурье.

Следствие 2. Пусть функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 2\pi]$ и

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Тогда при $m \rightarrow +\infty$

$$c_m = \int_0^{2\pi} e^{imx} f(x) dx = o(m^{-n}).$$

Действительно, так как $e^{i2\pi m} = e^{i0} = 1$ при целом m , $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi)$, то в формуле (2) сокращаются все слагаемые, кроме остаточного члена.

Аналогом леммы Ватсона для оценки канонических интегралов является

Лемма Эрдейи. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на промежутке $[0, d]$, $f^{(k)}(d) = 0$ для любого $k \geq 0$, $f(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ при $x \rightarrow 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$. Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\Phi(\lambda) = \int_0^d x^{\beta-1} f(x) e^{i\lambda x^\alpha} dx \simeq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}} e^{i\frac{\pi}{2} \frac{\beta+k}{\alpha}}$$

Лемма верна и для случая, когда $d = +\infty$, если $f^{(k)}(d) = 0$ понимать в предельном смысле.

В условии теоремы 1 содержится важное ограничение: $S'(x) \neq 0$ при $x \in I$, т.е. фазовая функция не имеет стационарных точек на отрезке интегрирования. При наличии у фазовой функции стационарных точек асимптотика интеграла $F(\lambda)$ имеет иной характер, чем в теореме 1.

Теорема 2. Пусть функции $f(x), S(x)$ бесконечно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, функция $S(x)$ имеет единственную стационарную точку $x_0 \in (a, b)$ и $S''(x_0) \neq 0$. Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx =$$

$$f(x_0) e^{i\lambda S(x_0)} e^{i\alpha\pi/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}} + O(\lambda^{-1}),$$

где $\alpha = \text{sign}(S''(x_0))$.

Пример 1. Найдем асимптотику функции Бесселя 1-ого рода с целым индексом n

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

В данном примере $f(\varphi) = e^{-n\varphi}$, а фазовая функция $S(\varphi) = \sin \varphi$ имеет две стационарные точки $\varphi_1 = \pi/2, \varphi_2 = 3\pi/2$. При этом асимптотика функции Бесселя определяется суммой вкладов обеих стационарных точек.

Поскольку

$$S(\varphi_1) = 1, S''(\varphi_1) = -1, S(\varphi_2) = -1, S''(\varphi_2) = 1,$$

то получаем

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(\lambda^{-1}).$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.

14.1. Интегрируя по частям, найдите асимптотическое разложение интеграла Френеля

$$\Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{it^2} dt \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

14.2. Интегрируя по частям, найдите асимптотическое разложение интеграла при $x \rightarrow +\infty$.

$$\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} e^{it} dt, \alpha > 0.$$

14.3. Интегрируя по частям или используя лемму Эрдейи, получите асимптотическое разложение интегралов при $\alpha > 0$, $\lambda \rightarrow +\infty$

а) $\int_0^{+\infty} (1+x)^{-\alpha} e^{i\lambda x} dx;$

б) $\int_0^{+\infty} (1+x)^{-\alpha} \sin \lambda x dx;$

в) $\int_0^{+\infty} (1+x)^{-\alpha} \cos \lambda x dx.$

Используя лемму Эрдейи, получите асимптотическое разложение интегралов при $\lambda \rightarrow +\infty$

14.4. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x^2}}{1+x^2} dx.$

14.5. $\int_0^{\pi} e^{i\lambda t^2} \cos t dt.$

Найдите главный член асимптотики интегралов при $\lambda \rightarrow +\infty$

14.6. $\int_0^{\pi} e^{i\lambda \cos t} \cos^2 t dt.$

14.7. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{x^2-1}} dx.$

14.8. $\int_{-1}^1 \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Применяя различные приемы, найдите главный член асимптотики интегралов при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$14.9. \int_0^d e^{i\lambda x^p} dx, \quad p > 1, \quad d > 0.$$

$$14.10. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{\sqrt{x}} \ln^2 x \, dx.$$

$$14.11. \int_0^{\pi/2} x \sin(\lambda \cos x) \, dx.$$

14.12. Взяв за основу интегральное представление функции Бесселя $J_n(x)$ (см. пример из этого параграфа),

а) докажите, что для функции $J_n(nx)$, при $n \rightarrow +\infty, n \in N$, справедливо следующее асимптотическое представление при фиксированном $x > 1$:

$$J_n(nx) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sqrt{x^2-1}}} \cos\left(n \arccos \frac{1}{x} - n\sqrt{x^2-1} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right);$$

б) также докажите, что при $n \rightarrow +\infty, n \in N$,

$$J_n(n) = \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi} n^{-1/3} + O(n^{-2/3}).$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

14.1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!(-1)^k i^{k+1}}{2^{2k+1} k!} \cdot \frac{e^{ix^2}}{x^{2k+1}} \cdot$ **14.2.** $i x^{-\alpha} e^{ix} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha + k - 1) i^{k+1} x^{-\alpha-k} e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} i^{k+1} x^{-\alpha-k} e^{ix}$. **14.3. а)** $i\lambda^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1) i^{k+1} \lambda^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} i^{k+1} \lambda^{-k-1}$;

б) $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+2m)}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{-2m-1}$ — мнимая часть от разложения из а);

с) $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+2m+1)}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{-2m-2}$ — реальная часть от разложения из а).

14.4 $\sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k (2k)!}{2^{2k+1} k!} \lambda^{-k-1/2}$. **14.5** $\sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{2^{2k+1} k!} \lambda^{-k-1/2}$.

14.6 $\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. **14.7** $\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} e^{i(\lambda+\pi/4)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

14.8 $\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. **14.9** $e^{i\pi/(2p)} \Gamma(1+p^{-1}) \lambda^{-1/p} + O(\lambda^{-2/p})$.

14.10 $\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \ln^2 \lambda + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. **14.11** $\operatorname{Im} \frac{1}{i\lambda} \left(e^{i\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - \cos \lambda\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$.

§ 15. Метод перевала

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz,$$

где γ – кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости \mathbb{C} , а функции $f(z)$ и $S(z)$ являются аналитическими в некоторой области D , содержащей кривую γ . Нас интересует асимптотика функции $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Идея метода основана на том, что согласно интегральной теореме Коши в односвязной области интеграл аналитической функции не зависит от выбора контура, соединяющего две фиксированные точки. Это позволяет перейти от исходного интеграла к интегралу по новому контуру, на котором получить необходимые асимптотические оценки оказывается проще.

Предположим, что существует такой контур γ^* , что

1. $F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = \int_{\gamma^*} f(z) e^{\lambda S(z)} dz$;
2. Существует единственная точка $z_0 \in \gamma^*$, в которой функция $\operatorname{Re} S(z)$ имеет строгий максимум, причем точка z_0 – внутренняя точка контура, и $f(z_0) \neq 0$;
3. $\operatorname{Im} S(z) \equiv \operatorname{const}$ при $z \in \gamma^*$ в окрестности точки z_0 .

Если контур γ^* существует, то он обязательно проходит через точку z_0 , в которой $S'(z_0) = 0$. График функции $u = U(x, y) = \operatorname{Re} S(z)$ в окрестности точки z_0 является седловой поверхностью. Геометрически это напоминает перевал между двумя вершинами. Поэтому точку z_0 , в которой $S'(z_0) = 0$, называют *точкой перевала*, а соответствующий контур γ^* , проходящий через эту точку, *перевальным контуром*.

Точка z_0 называется *простой точкой перевала* функции $S(z)$, если $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$. В этом случае в малой окрестности U точки z_0 линия уровня $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$ состоит из двух гладких кривых, которые ортогональны в точке z_0 и разбивают окрестность U на четыре сектора. Знаки функции $h(z) = \operatorname{Re}(S(z) - S(z_0))$ в соседних секторах различны. Точно так же устроены линии уровня функции $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$, причем в точке z_0 эти линии уровня касаются биссектрис секторов, образованных линиями уровня $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$. Перевальный контур γ^* , проходящий через точку z_0 , нужно провести

через секторы, в которых $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$, таким образом, чтобы в окрестности точки z_0 этот контур совпал с линией уровня $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{const} = \operatorname{Im} S(z_0)$.

В предположении, что перевальный контур существует, верна следующая

Теорема. Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ являются аналитическими, z_0 — простая точка перевала ($S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$), являющаяся внутренней точкой перевального контура, $f(z_0) \neq 0$. Тогда

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} e^{i\theta} (1 + O(\lambda^{-1/2})), \quad (1)$$

где угол $\theta = \arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}}$ является углом между направлением касательного вектора (в направлении обхода) к перевальному контуру γ^* в точке z_0 и положительным направлением действительной оси.

Замечание. Основные сложности при использовании метода перевала обычно бывают связаны с доказательством возможности деформации исходного контура в перевальный (с сохранением значения интеграла) и нахождением направления входа перевального контура в точку перевала.

Пример 1. Найдём главный член асимптотики функции Бесселя

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{\lambda}{2}(z - \frac{1}{z})} \frac{dz}{z^{n+1}}$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$.

В данном интеграле

$$S(z) = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad f(z) = z^{-(n+1)}.$$

В точках перевала $z_{1,2} = \pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ вычислим необходимые для использования формулы (1) значения:
 $S(\pm i) = \pm i, \quad f(e^{\pm i\frac{\pi}{2}}) = \mp i e^{\mp i\frac{n\pi}{2}},$
 $|S''(\pm i)| = 1.$

Поскольку

$$u(x, y) = \operatorname{Re} S(z) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right),$$

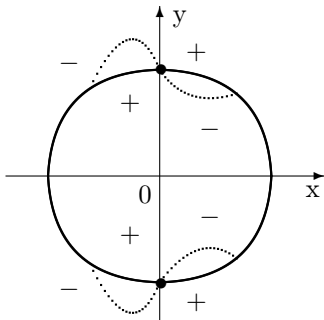


Рис. 15.

то линиями уровня функции $u(x, y)$, проходящими через точки перевала $z_{1,2} = \pm i$, являются мнимая ось $x = 0$ и единичная окружность $|z| = 1$. Из геометрических соображений направление входа перевального контура в точки перевала находится легко $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$, $e^{i\theta_1} = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Используя формулу (1) и складывая асимптотики в двух точках перевала, получаем

$$\begin{aligned} J_n(\lambda) &\sim \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left(e^{i\lambda} (-i) e^{-i\frac{n\pi}{2}} (-1) e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\lambda} i e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos \left(\lambda - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Пример 2. Найдем главный член асимптотики функции Эйри-Фока

$$Ai(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(x^3/3 + \lambda x) dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow \pm\infty.$$

I. Пусть $\lambda \rightarrow +\infty$. Делая замену переменной $x = \sqrt{\lambda}t$, получаем интеграл

$$\begin{aligned} Ai(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{x^3}{3} + \lambda x \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \left(\frac{x^3}{3} + \lambda x \right)} dx = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^{3/2} \left(\frac{t^3}{3} + t \right)} dt. \end{aligned}$$

В данном случае $f(z) \equiv 1$, а функция $S(z) = i \left(\frac{z^3}{3} + z \right)$ имеет две точки перевала $z_{1,2} = \pm i$.

Рассмотрим проходящую через точку перевала $z_1 = i$ прямую $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = i\}$ и оценим интегралы по вертикальным отрезкам $I_{\pm R} = [\pm R, \pm R + i]$, соединяющим действительную ось и прямую L .

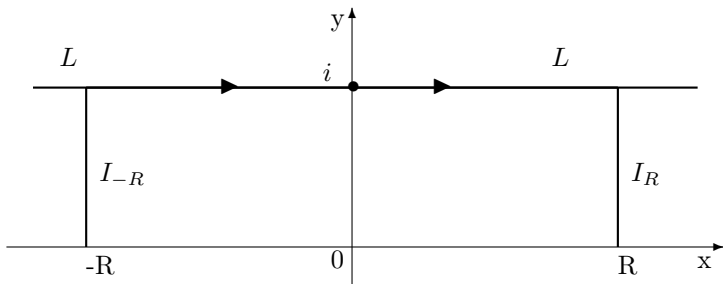


Рис. 16.

Если $z \in I_{\pm R}$, то $z = \pm R + iy$ и $\operatorname{Re} S(z) = -R^2 y + \frac{y^3}{3} - y \leq -R^2 y$, поскольку $0 \leq y \leq 1$.

Поэтому

$$\left| \int_{I_{\pm R}} e^{\lambda^{3/2} S(z)} dz \right| \leq \int_0^1 e^{-\lambda^{3/2} R^2 y} dy = \frac{1 - e^{-\lambda^{3/2} R^2}}{\lambda^{3/2} R^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Учитывая полученную оценку и интегральную теорему Коши, получаем

$$Ai(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_L e^{i\lambda^{3/2} \left(\frac{z^3}{3} + z\right)} dz.$$

Остается вычислить значения величин, входящих в формулу (1):

$$S(i) = -\frac{2}{3}, \quad S''(i) = -2.$$

На прямой L функция $\operatorname{Im} S(z) \neq \text{const}$, т.е. L не является перевальным контуром. Однако функция $u = \operatorname{Re} S(z) = -x^2 - \frac{2}{3}$ имеет на прямой L единственный максимум в точке $z_1 = i$, следовательно прямая L в окрестности точки перевала $z_1 = i$ проходит через те секторы, через которые проходит перевальный контур. Учитывая направление обхода контура, выбираем из двух значений $\theta = \arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \arg \sqrt{\frac{1}{2}}$ значение $\theta = 0$.

В результате получаем

$$Ai(\lambda) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}\lambda^{3/2}}. \quad (3)$$

Замечание. Согласно формуле (3) при $\lambda \rightarrow +\infty$ функция $Ai(\lambda) \rightarrow 0$. В точке перевала $z_2 = -i$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ значение подынтегральной функции $e^{\lambda^{3/2}S(z_2)} = e^{\frac{2}{3}\lambda^{3/2}}$ экспоненциально растет, при этом мы не можем перейти от интегрирования по действительной оси к интегралу по прямой $L_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z = -i\}$, поскольку интегралы по вертикальным отрезкам $[R, R-i]$ и $[-R, -R-i]$, соединяющим действительную ось и прямую L_1 , в отличие от оценки (2) к нулю не стремятся. Поэтому для нахождения асимптотики интересующего нас интеграла и была выбрана точка перевала $z_1 = i$.

II. При $\lambda \rightarrow -\infty$ замена переменной $x = \sqrt{|\lambda|}t$, приводит к интегралу

$$Ai(\lambda) = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|\lambda|^{3/2} \left(\frac{t^3}{3} - t \right)} dt.$$

Функция $S(z) = i \left(\frac{z^3}{3} - z \right)$ имеет две точки перевала $z_{1,2} = \pm 1$, лежащие на контуре интегрирования, при этом $\text{Re } S(\pm 1) = 0$. Уравнение $\text{Re } S(z) = 0$ имеет вид $y \left(x^2 - \frac{y^2}{3} - 1 \right) = 0$. Поэтому линиями уровня функции $u = \text{Re } S(z)$, проходящими через точки перевала, являются ветви гиперболы $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ и действительная ось.

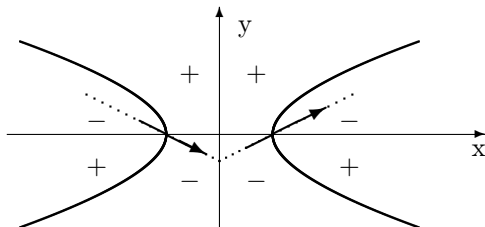


Рис. 17.

Направление входа перевального контура в точку перевала легко находится из геометрических соображений: в точке $z_1 = -1$ угол $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$, в точке $z_2 = 1$ угол $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$. Поскольку $S(\pm 1) = \mp i\frac{2}{3}$, $|S''(\pm 1)| = 2$, то

складывая асимптотики в двух точках перевала, получаем

$$Ai(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{|\lambda|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|\lambda|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4)$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.

15.1. Найдите главный член асимптотики интеграла при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(it-t^2/2)} dt.$$

15.2. Найдите главный член асимптотики функции Ханкеля 1-го рода порядка ν

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} e^{i(x \sin z - \nu z)} dz$$

при $x \rightarrow +\infty$. Контур γ состоит из лучей $\{\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\{\operatorname{Re} z = \pi, \operatorname{Im} z < 0\}$ и отрезка действительной оси $\{\operatorname{Re} z \in [0; \pi], \operatorname{Im} z = 0\}$, движение по контуру происходит в сторону уменьшения $\operatorname{Im} z$.

15.3. Найдите главный член асимптотики интеграла при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} dx}{(1+x^2)^{\lambda}}.$$

15.4. Найдите главный член асимптотики интеграла

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(itx - t^{2n}/2n)} dt, n \in N \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

15.1. $e^{-\lambda/2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$. **15.2.** $\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{i(x - \pi\nu/2 - \pi/4)} + O\left(\frac{1}{x}\right)$.

15.3. $\frac{e^{-\lambda(\sqrt{2}-1)}}{(2\sqrt{2}-2)^{\lambda}} \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$. **15.4.**

Содержание

Глава 1. Теория функций комплексного переменного	2
§ 1. Комплексные числа	2
§ 2. Функции комплексного переменного. Аналитические и гармонические функции	23
§ 3. Элементарные аналитические функции	35
§ 4. Интегрирование функций комплексного переменного	54
§ 5. Ряды аналитических функций	73
§ 6. Ряд Лорана. Изолированные особые точки	87
§ 7. Элементы теории вычетов	106
§ 8. Применение теории вычетов для нахождения определенных интегралов от функций действительного переменного	117
§ 9. Принцип аргумента. Теорема Руше	137
Глава 2. Преобразование Лапласа	142
§ 10. Основные свойства преобразования Лапласа	142
§ 11. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных и интегральных уравнений	155
Глава 3. Элементарные асимптотические методы	166
§ 12. Асимптотические разложения и их свойства	166
§ 13. Интегралы Лапласа	176
§ 14. Интегралы Фурье	183
§ 15. Метод перевала	189