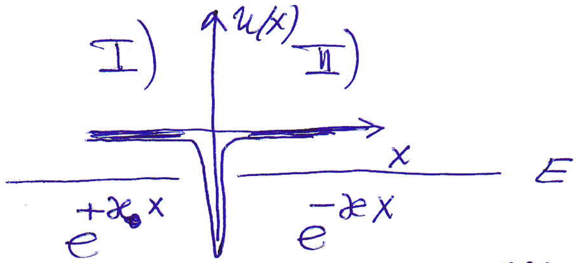
Лекция 4

Связанное состояние в δ-яме

$U(x) = -G\,\delta(x)$



где $\varkappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{\left[E - U(x)\right]}_{=\,E + G\delta(x)}\psi = 0$$

интегрируем $\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx \ldots$ при $\varepsilon \to 0$

$$\Delta\psi'(0) + \frac{2m}{\hbar^2} G\,\psi(0) = 0$$

— условие на скачок производной ψ

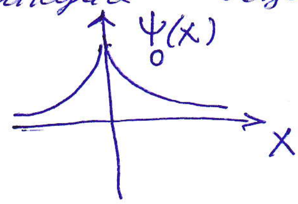
$$\Delta\psi'(0) = \psi'(+\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0$$

Условие сшивки $\longrightarrow$ непрерывность $\psi(x)$ в точке $x=0$, уже обеспечена нашим выбором функции в областях I) и II).

$$\underbrace{-2\varkappa}_{\Delta\psi'} + \frac{2mG}{\hbar^2}\cdot\underbrace{(1)}_{\psi(x=0)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varkappa = \frac{mG}{\hbar^2} \equiv \varkappa_0$$

Нормированная волновая функция связанного состояния.

$$\psi_0(x) = \sqrt{\varkappa_0}\, e^{-\varkappa_0 |x|}$$

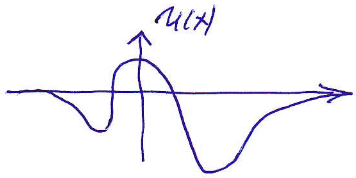


$$\int dx\, |\psi_0|^2 = 1$$

Сравните это с нашим решением в яме 

при $a \to 0$, используя $G = U_0 \cdot a$.

Непрерывный спектр



$u(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$

При $E>0$ решение У.Ш. при $x\to\pm\infty$ ведёт себя как

$$Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \quad \text{и} \quad A'e^{ikx}+B'e^{-ikx}$$

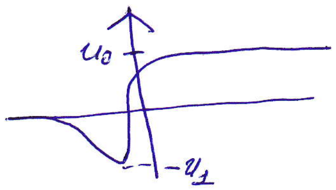
при $x\to-\infty$ при $x\to+\infty$

где $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Спектр 2^x кратно вырожден и $\forall$ значения E – подходят $\Rightarrow$ спектр непрерывен, в отличие от случая $E<0$ – где возможные значен. E_n отделены друг от друга и спектр дискретен и невырожденный.

Физическая интерпретация состояний при $E\geq 0$, одномерная задача рассеяния.

Рассмотрим, чуть более общий случай, когда

$u(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$ и $u(x) \underset{x\to+\infty}{\to} u_0$



При $-u_1<E<u_0$ – возможны состоян. дискретного спектра

$0<E<u_0$

$\psi_E(x) \to Be^{-\varkappa x}$ $\quad \varkappa=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(u_0-E)}$

$\psi_E \to e^{ikx}+Ae^{-ikx}$ $\quad k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$

непрерывный, невырожден. спектр.

падающая волна

отраженная волна

③

Ранее мы получили выражение для потока вероятности

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \quad ; \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$$

$\rho = |\psi|^2$ – плотность вероятности

В стацион. состоянии $\psi_E(\vec{r},t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\psi(\vec{r}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho = \psi_E^* \cdot \psi_E = \psi^*(\vec{r})\cdot\psi(\vec{r})$ – не зависит от времени

$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ и $\vec{\nabla}\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{j}(\vec{r}) = const.$

Если ψ_E - вещественна (с точностью до возможного общего фазового множителя)

$\Rightarrow \vec{j} = 0.$

Считаем $j_x\ (x \to -\infty)$ $\quad \psi_E \to e^{ikx} + Ae^{-ikx}$; $\psi_E^* = e^{-ikx} + A^* e^{ikx}$

$\psi_E' = ik\left(e^{ikx} - Ae^{-ikx}\right)$, $\psi_E^{*\prime} = -ik\left(e^{-ikx} - A^* e^{ikx}\right)$

$$j_x = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_E^*\psi_E' - \psi_E\psi_E^{*\prime}\right) \to \frac{\hbar k}{m}\left(1 - |A|^2\right) = 0$$

← поскольку $j_x = 0$, в этом случае

Происходит полное отражение падающего потока, поскольку $|A|^2 = 1$

ψ_E – может быть выбрана/переписана в явно вещеcтвен. виде

$$\psi_E \begin{cases} \tilde{B}e^{-\varkappa x} & x \to +\infty \\ \tilde{A}\cos(kx + \varphi_0) & x \to -\infty \end{cases}$$

с $\tilde{B}$ и $\tilde{A}$ - веществ. коэфф.

В классике — отражение частицы от барьера.

В КМ — 1) $|\Psi|^2 \neq 0$ в классически недоступной области, при $E < U(x)$,

2) задержка волнового пакета / обсудим качественно.

$|A^2_{(E)}| = 1$, но $A(E)$ — зависит от ~~э~~ энергии E

$$A(E) = e^{i\varphi(E)}.$$

Рассмотрим область энергии

$E \geq U_0$ $\qquad \psi_E \to e^{ikx} + Ae^{-ikx} \qquad x \to -\infty$

$\qquad\qquad Be^{ik_1x} \qquad x \to +\infty$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)}$$

~~слева~~ при $x \to -\infty$ падающая + отражённая волна

$x \to +\infty$ прошедшая волна

Считаем поток при $x \to +\infty$ $\quad j_x = \frac{\hbar k_1}{m}|B|^2$

и приравниваем его к потоку при $x \to -\infty$ (ранее мы показали что $j_x = const$ для стацион. состояний).

$$\Rightarrow \quad k(1 - |A|^2) = k_1|B|^2$$

Введем коэфф. прохождения и отражения как отношение потоков:

$T \equiv \frac{k_1|B|^2}{k}$ (коэф. прохожд.) — отношение потоков ~~падающей и~~ прошедшей и падающ. волн

$R \equiv \frac{k|A|^2}{k} = |A|^2$ (коэфф. отражен.) — отношение потоков отражен. и падающ. волн.

Отметим, что вследствии сохранение вероятности (отсюда следует $j_x^{(x)} = const$ для стацион. сост.)

$$T + R = 1$$

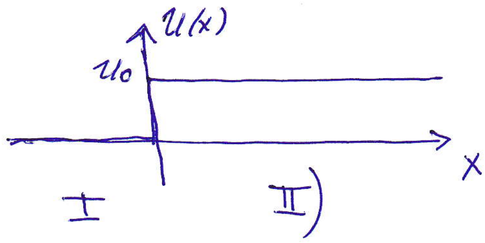
В классике — частица движется по траектории слева направо (отражения от $U(x)$ при $E > U_0$ не происходит).

В КМ — $R \neq 0$ в общем случае — наличие потенциала приводит к отражению и

$$T \leq 1.$$

Также можно обсуждать и задержку волнового пакета по сравн. с классической траекторией.

Пример



$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}$$

a) $E > U_0$

I) $e^{ikx} + Ae^{-ikx}$ II) Be^{ik_1x}

Условия сшивки — непрерывность ψ и ψ' при $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} 1 + A &= B \\ ik(1 - A) &= ik_1 B \end{aligned}\right\} \qquad B = \frac{2k}{k + k_1} \qquad A = \frac{k - k_1}{k + k_1}$$

Отметим также, что при $E \to \infty$ $\frac{k_1}{k} \to 1$ и $T \to 1$, $R \to 0$

$$T = \frac{k_1}{k}|B|^2 = \frac{4kk_1}{(k + k_1)^2} \qquad R = |A|^2 = \frac{(k - k_1)^2}{(k + k_1)^2}$$

отметим, что $T + R = 1$, как и должно быть.

Случай б) $0 \le E \le U_0$ будет обсуждаться на семинаре

Отметим также постановку задачи рассеяния, когда частица "налетает" не слева, а справа.

$$\psi_E(x) \begin{cases} \xrightarrow{x \to +\infty} & e^{-ik_1x} + Ae^{ik_1x} \\ \xrightarrow{x \to -\infty} & Be^{-ikx} \end{cases}$$

Ae^{ik_1x} — отражённая волна

e^{-ik_1x} — ~~налетающая~~ падающая волна

Be^{-ikx} — прошедшая волна

Коэфф. прохожд./отражения определим также, как отношения соотв. потоков.

$$T = \frac{k}{k_1}|B|^2 \qquad R = \frac{k_1}{k_1}|A|^2 = |A|^2$$

На семинаре показать, что выражения для T и R совпадают со случаем, когда "частица налетает слева".

Общее утверждение о равенстве коэффициентов при падении частицы справа/слева — см. ЛЛ III.
доказательство в ↑.

Ещё одно общее утверждение
Амплитуды прохождения/отражения $B(E)$ и $A(E)$ — как функции комплексного переменного имеют полюса при $E < 0$ — которые соответствуют энергиям связанных состояний дискретного спектра.

Обсудить это на семинаре при $U(x) = -G\delta(x)$