Отношение порядка

Содержание

Определения

Определение:

Бинарное отношение R на множестве X называется **отношением частичного порядка** (англ. *partial order relation*), если оно обладает следующими свойствами:

- Рефлексивность (англ. *reflexivity*): $\forall a \in X : aRa$.
- Антисимметричность (англ. *antisymmetry*): $\forall a, b \in X :$ если aRb и bRa, то $a = b$.
- Транзитивность (англ. *transitivity*): $\forall a, b, c \in X :$ если aRb и bRc, то aRc.

Множество X, на котором введено отношение частичного порядка, называется **частично упорядоченным**.

Отношение частичного порядка также называют **нестрогим порядком** (англ. *non-strict order*).

Определение:

Бинарное отношение R на множестве X называется **строгим отношением частичного порядка** (англ. *strict order relation*), если оно обладает следующими свойствами:

- Антирефлексивность (англ. *irreflexivity*): $\forall a \in X : aRa$ — не выполняется.
- Антисимметричность (англ. *antisymmetry*): $\forall a, b \in X :$ если aRb и bRa, то $a = b$.
- Транзитивность: (англ. *transitivity*) $\forall a, b, c \in X :$ если aRb и bRc, то aRc.

Определение:

Бинарное отношение R на множестве X называется **отношением линейного порядка** (англ. *total order relation*), если оно является отношением частичного порядка и обладает следующим свойством: $\forall a \in X \forall b \in X$ либо aRb, либо bRa.

Множество X, на котором введено отношение линейного порядка, называется **линейно упорядоченным** (англ. *total order*).

Определение:

Бинарное отношение R на множестве X называется **отношением полного порядка** (англ. *well-order relation*), если оно является отношением линейного порядка и обладает следующим свойством: $\forall Y \subset X \exists a \in Y \forall b \in Y : aRb$.

Множество X, на котором введено отношение полного порядка, называется **полностью упорядоченным** (англ. *well-order*).

Отношение нестрогого порядка обозначают символом $\leqslant$. Запись вида $a \leqslant b$ читают как «a меньше либо равно b».

Отношение строгого порядка обозначают символом $<$. Запись вида $a < b$ читают как «a меньше b».

Примеры

- На множестве вещественных чисел отношения «больше» и «меньше» являются отношениями строгого порядка, а «больше или равно» и «меньше или равно» — нестрогого, причем линейного порядка, но не полного.
- Отношение «является делителем» на множестве натуральных чисел является отношением частичного порядка.
- Отношение «меньше или равно» является отношением полного порядка на множестве натуральных чисел.
- Отношение «лексикографически не меньше» на множестве всех возможных слов, составленных из букв русского алфавита, является отношением полного порядка.
- Отношение «состоит в подчинении» на множестве работников компании является отношением нестрогого порядка.
- Можно рассмотреть отношение «не младше» на множестве некоторой группы людей. Для соблюдения всех тонкостей скажем, что их даты рождения различны. Это отношение транзитивно (если *человек A* не младше *человека B*, а *человек B* не младше *человека C*, то *человек A* не младше *человека C*), антисимметрично (если *человек A* не младше *человека B* и *человек B* не младше *человека A*, то это один и тот же человек) и рефлексивно (каждый человек не младше самого себя). Из этого следует, что данное отношение является отношением частичного линейного порядка.

- Отношение «является делителем» на множестве целых чисел не является отношением частичного порядка. Это легко видеть на следующем примере: 2 делится на -2, а -2 делится на 2. Однако $2 \neq -2$.
- Отношение «больше или равно по модулю» на множестве комплексных чисел не является отношением порядка. Из равенства модулей не следует равенство самих чисел, тем самым нарушается антисимметричность. Это демонстрирует данный пример: модули комплексных чисел $3 + 4i$ и $4 + 3i$ равны, но сами числа разные.

См. также

- Бинарное отношение
- Композиция отношений
- Отношение эквивалентности

Источники информации

- Новиков Ф. А. — Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. — СПБ.: Питер, 2009 — 50 с.
- Wikipedia — Total order (https://en.wikipedia.org/wiki/Total_order)
- Википедия — Отношение порядка (https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D0%B0)

- Wikia — Отношение порядка (http://ru.math.wikia.com/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D0%B0)