Занятие 24

Задача Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова о разложении в ряд по собственным функциям краевой задачи.

Функция $e(x) \not\equiv 0$ называется собственной функцией оператора $L[y]$

$$L[y] = \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big) + q(x)y, \tag{24.1}$$

если она принадлежит области определения оператора $L[y]$ (то есть дважды непрерывно дифференцируема и подчинена краевым условиям $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$) и удовлетворяет уравнению

$$L[e(x)] = \lambda\, e(x). \tag{24.2}$$

Число λ при этом называется собственным числом. Задача поиска собственных чисел и собственных функций оператора $L[y]$ называется задачей Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(0) = 0\,, \quad y(l) = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda = 0$, то общее решение уравнения $y(x) = C_1 + C_2 x$. Подставляя его в краевые условия, получаем

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 l = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Задача имеет только нулевое решение $y(x) \equiv 0$, следовательно, число $\lambda = 0$ не является собственным.

Если $\lambda = a^2 > 0$, то общее решение $y(x) = C_1 \operatorname{sh} ax + C_2 \operatorname{ch} ax$. Из краевых условий

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \operatorname{sh} al + C_2 \operatorname{ch} al = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

таким образом, задача не имеет собственных чисел $\lambda = a^2 > 0$.

Если $\lambda = -a^2 < 0$, то общее решение $y(x) = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$. Из краевых условий

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 \sin al + C_2 \cos al = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \sin al = 0. \end{cases}$$

Если мы хотим получить ненулевое решение, то $C_1 \neq 0$, и следовательно

$$\sin al = 0.$$

Отсюда $al = \pi n$, или $a = \dfrac{\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Заметим, что значения параметра n и $(-n)$ дают одинаковые собственные числа и собственные функции, поэтому будем считать, что $n \in \mathbb{N}$.

Итак, мы нашли последовательность собственных чисел $\lambda_n = -\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}$ и соответствующих им собственных функций

$$e_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N} \quad \square.$$

Можно доказать, что если в (24.1) функция $p(x) > 0$ на $[a;b]$ и $q(x) \leqslant 0$ на $[a;b]$, то собственные числа оператора $L[y]$ неположительны. Это обстоятельство позволяет сэкономить время при поиске собственных чисел. Если же функция $q(x)$ меняет знак на $[a,b]$, то у оператора L могут быть положительные собственные числа, но лишь конечное число.

Пример 2. Решим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y'(0) = 0\,, \quad y'(l) = 0. \end{cases}$$

Число $\lambda = 0$ является собственным, и ему соответствует собственная функция $e_0(x) = 1$ (в отличие от примера 1, оператор рассматриваемой задачи оказывается вырожденным).

Далее рассматриваем только $\lambda = -a^2$, $a > 0$, поскольку $p(x) \equiv 1$ и $q(x) \equiv 0$. Общее решение уравнения $y(x) = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$.

Подставляя в краевые условия, получаем

$$\begin{cases} C_1 a = 0 \\ C_1 a \cos al - C_2 a \sin al = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin al = 0 \end{cases}$$

Так как $C_2 \neq 0$, то из второго уравнения $\sin al = 0$, то есть $a = \pi n/l$.

Объединяя случаи $\lambda = 0$ и $\lambda < 0$, получаем

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\,, \quad e_n(x) = \cos\frac{\pi n}{l}x\,, \quad n = 0, 1, \ldots. \quad \square$$

Пример 3. Решим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(0) = 0\,, \quad y(l) - y'(l) = 0. \end{cases}$$

При $\lambda = 0$ общее решение имеет вид $y(x) = C_1 + C_2 x$. Из краевых условий

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 l - C_2 = 0 \end{cases}$$

следует, что если $l = 1$, то оператор имеет собственное число $\lambda = 0$ и собственную функцию $e_0(x) = x$, если же $l \neq 1$, то $\lambda = 0$ не является собственным числом.

Далее рассмотрим $\lambda = -a^2$, $a > 0$, тогда общее решение уравнения $y(x) = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$. Из краевых условий получаем, что

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 \sin al - C_1 a \cos al = 0. \end{cases}$$

Так как $C_1 \neq 0$, то для определения параметра a получаем трансцендентное уравнение

$$\sin al = a \cos al.$$

Обозначив $\tau = al > 0$, перепишем это уравнение в виде $\operatorname{tg} \tau = \dfrac{\tau}{l}$.

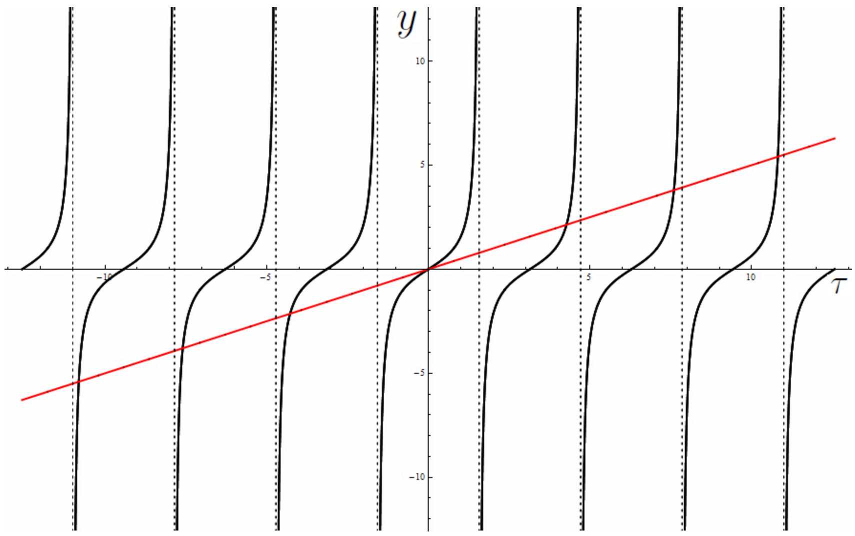

Рис. 24.1. Трансцендентное уравнение на τ имеет бесконечно много положительных корней (на рисунке $l = 1/2$).

Уравнение $\operatorname{tg} \tau = \dfrac{\tau}{l}$ имеет бесконечно много положительных корней, которые мы обозначим через τ_k.

Таким образом, краевая задача имеет собственные числа $\lambda_n = -\frac{\tau_n^2}{l^2}$ и собственные функции $e_n(x) = \sin\left(\frac{\tau_n}{l}x\right)$. $\square$

Пример 4. Решим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(l) - y'(l) = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda = 0$, то общее решение $y(x) = C_1 + C_2 x$. Из краевых условий получим систему уравнений на C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 l - C_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, только если ее определитель отличен от нуля. Итак, если $l = 2$, то оператор имеет собственное число $\lambda = 0$ и собственную функцию $e_0(x) = x - 1$. Иначе $\lambda = 0$ не является собственным числом.

Если $\lambda = -a^2$, $a > 0$, то общее решение уравнения

$$y(x) = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax.$$

Из краевых условий получим систему для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_2 + aC_1 = 0, \\ C_1 \sin al + C_2 \cos al - C_1 a \cos al + C_2 a \sin al = 0. \end{cases}$$

Система имеет нетривиальное решение, если определитель соответствующей матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ \sin al - a\cos al & \cos al + a\sin al \end{vmatrix} = (a^2-1)\sin al + 2a\cos al = 0.$$

Мы получили трансцендентное уравнение для определения параметра a. Вводя обозначение $\tau = al$, перепишем его в виде

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{2\tau l}{\tau^2 - l^2}.$$

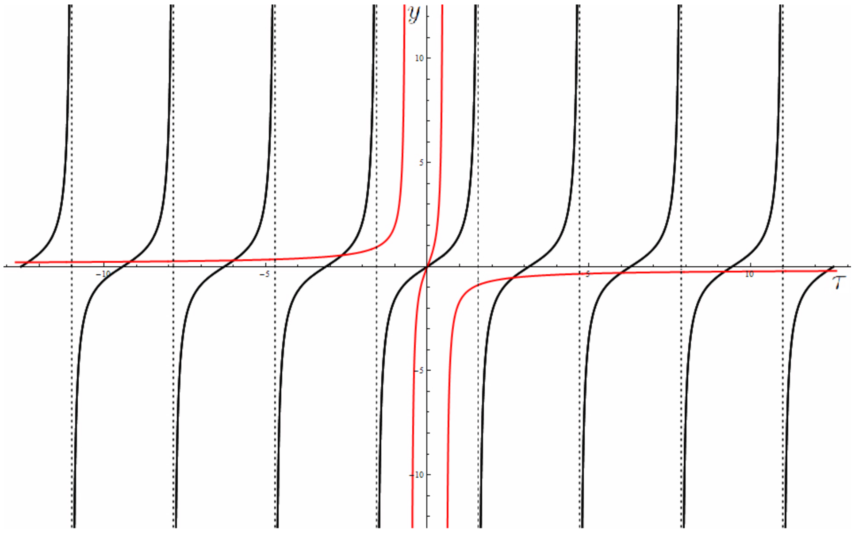

Рис. 24.2. Трансцендентное уравнение на τ имеет бесконечно много положительных корней (на рисунке $l = 1/2$).

Обозначим через τ_n положительные корни этого уравнения. Тогда оператор $L[y]$ имеет собственные числа

$$\lambda_n = -\frac{\tau_n^2}{l^2},\ n = 1, \ldots$$

и собственные функции

$$e_n(x) = \sin\frac{\tau_n}{l}x - \frac{\tau_n}{l}\cos\frac{\tau_n}{l}x.$$

(Мы положили $C_1 = 1$, $C_2 = -a$.) $\square$

Анализируя рассмотренные примеры, мы видим, что в каждом случае мы смогли найти бесконечно много собственных чисел и соответствующих им собственных функций. В процессе вычисления собственных чисел мы получали трансцендентные уравнения. Хотелось бы иметь гарантии, что они действительно имеют решения.

Эти гарантии даёт **теорема Штурма-Лиувилля**:

Оператор $L[y]$ (24.1) имеет бесконечно много собственных чисел и соответствующих им собственных функций. Эти собственные функции ортогональны в скалярном произведении

$$(u,v)=\int\limits_a^b u(x)v(x)dx.$$

Ортогональность собственных функций, полученных в примерах 1 и 2 очевидна, но доказать непосредственно ортогональность функций в примерах 3 и 4 достаточно трудно. И тут на помощь приходит функциональный анализ. Известно, что любые две собственные функции самосопряжённого оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

Но вычислять скалярный квадрат все же придется «вручную». Так, в примере 3

$$\int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\tau_n}{l}x\right)dx=\frac{l}{\tau_n}\int\limits_0^{\tau_n}\sin^2 t\,dt=\frac{l}{\tau_n}\int\limits_0^{\tau_n}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{l}{2\tau_n}(\tau_n-\frac{\sin 2\tau_n}{2})=$$
$$=\frac{l}{2\tau_n}(\tau_n-\frac{\operatorname{tg}\tau_n}{1+\operatorname{tg}^2\tau_n})=\frac{l}{2\tau_n}(\tau_n-\frac{\tau_n l}{\tau_n^2+l^2})=\frac{l}{2}(1-\frac{l}{\tau_n^2+l^2})$$

Вооружившись знанием теоремы Штурма-Лиувилля, рассмотрим ещё один пример.

Пример 5. Найдем собственные функции оператора $L[y]=(x^2y')'$, подчинённые краевым условиям $y(1)=0$, $y'(2)=0$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$(x^2y')' - \lambda y = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Ищем его частное решение в виде $y = x^k$, тогда k является корнем квадратного уравнения $k^2 + k - \lambda = 0$.

Его решения $k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}$. Рассмотрим три случая.

1) Если $1 + 4\lambda$=0, тогда $k_1 = k_2 = -1/2$ и общее решение уравнения

$$y(x) = C_1 x^{-1/2} + C_2 x^{-1/2} \ln x.$$

Краевые условия приводят к уравнениям на C_1, C_2:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 = 0, \\ y'(2) = -\frac{1}{2} C_1 2^{-3/2} + C_2 \left(-\frac{1}{2} 2^{-3/2} \ln 2 + 2^{-3/2}\right) = 0. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

2) Если $1+4\lambda > 0$, то корни k_1 и k_2 вещественны и различны, и общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2}$.

Краевые условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 k_1 2^{k_1} + C_2 k_2 2^{k_2} = 0. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела нетривиальное решение, ее определитель должен быть равен нулю, то есть должно выполняться условие

$$k_1 2^{k_1} = k_2 2^{k_2}.$$

Если $k_1 < 0 \leq k_2$, то равенство, очевидно, невозможно.

Если же $k_1 < k_2 < 0$, то есть $k_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2}$, $k_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2}$, то $0 < \sqrt{1+4\lambda} < 1$, поэтому оба корня лежат на интервале $(-1; 0)$.

Рассмотрим функцию $g(s) = s \cdot 2^s$. Покажем, что на рассматриваемом интервале она монотонна, поэтому равенство $g(k_1) = g(k_2)$ невозможно. Действительно, $g'(s) = 2^s(1 + s\ln 2)$. Если $s > -1$, то $s > -1/\ln 2$, и $g'(s) > 0$, следовательно, $g(s)$ строго возрастающая функция.

Итак, равенство $k_1 2^{k_1} = k_2 2^{k_2}$ невозможно, и система для определения C_1 и C_2 имеет только тривиальное решение $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

3) Если $1+4\lambda < 0$, то обозначив $1+4\lambda = -4a^2$, $a > 0$, запишем корни уравнения в виде $k_{1,2} = -1/2 \pm ia$. Общее решение

$$y = C_1 x^{-1/2} \sin(a \ln x) + C_2 x^{-1/2} \cos(a \ln x).$$

Краевые условия приведут к системе уравнений

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 \left(-\frac{1}{2} 2^{-3/2} \sin(a \ln 2) + 2^{-3/2} \cos(a \ln 2) a \right) = 0, \end{cases}$$

откуда получаем условие на a:

$$2a \cos(a \ln 2) = \sin(a \ln 2).$$

Обозначив $a \ln 2 = \tau$, приходим к уравнению

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{2\tau}{\ln 2},$$

которое нам уже знакомо. Если τ_n — положительные корни этого уравнения, то собственные числа λ_n имеют вид

$$\lambda_n = -\left(\frac{\tau_n}{\ln 2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

а собственные функции суть

$$e_n(x) = x^{-1/2} \sin\left(\frac{\tau_n}{\ln 2} \ln x\right). \quad \square$$

Рассмотрим теперь задачу о поиске собственных функций несамосопряжённого оператора

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y.$$

Пример 6. Найдем собственные функции оператора $L[y] = y'' + 2y'$, удовлетворяющие условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Решаем уравнение $y'' + 2y' = \lambda y$. Это линейное однородное уравнение, можно искать его частные решения в виде $y = e^{kx}$. Приходим к уравнению на k

$$k^2 + 2k - \lambda = 0,$$

откуда $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\lambda + 1}$. Далее рассматриваем три случая в зависимости от знака $\lambda + 1$.

Если $\lambda + 1 = 0$, то есть $\lambda = -1$, то $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. Краевые условия приводят к системе на C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 e^{-\pi} + C_2 \pi e^{-\pi} = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = C_2 = 0$, то есть $\lambda = -1$ не является собственным числом.

Если $\lambda + 1 = a^2 > 0$, $(a > 0)$, то корни k_1 и k_2 вещественны и различны. Тогда $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ и краевые условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{k_1 \pi} + C_2 e^{k_2 \pi} = 0, \end{cases}$$

которая при $k_1 \neq k_2$ имеет только тривиальное решение.

Если $\lambda + 1 = -a^2 < 0$, $(a > 0)$, то $y(x) = C_1 e^{-x} \sin ax + C_2 e^{-x} \cos ax$. Краевые условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\pi} \sin a\pi + C_2 e^{-\pi} \cos a\pi = 0, \end{cases}$$

откуда получаем условие

$$\sin a\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad a = n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Итак, мы нашли собственные числа $\lambda_n = -1 - n^2$ и собственные функции $e_n(x) = e^{-x} \sin nx, n \in \mathbb{N}$. Но остаётся открытым вопрос об ортогональности этих функций.

Если оператор $L[y]$ привести к самосопряжённому виду, то мы получим следующее уравнение на собственные функции:

$$(p(x)y')' + q(x)y = \lambda\rho(x)y.$$

Можно показать, что в этом случае собственные функции ортогональны с весом, то есть

$$\int\limits_a^b \rho(x)e_n(x)e_m(x)dx = 0, \ n \neq m.$$

Найдём функцию $\rho(x)$ — вес, с которым ортогональны функции в примере 6. Домножая уравнение на $\rho(x)$, получим

$$\rho(y'' + 2y') = \rho y'' + 2\rho y' = (\rho y')' - \rho' y' + 2\rho y' = \\ = (\rho y')' + (2\rho - \rho')y' = (\rho y')',$$

если $\rho' = 2\rho$, то есть $\rho(x) = e^{2x}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^\pi e^{-x} \sin nx \cdot e^{-x} \sin mx \cdot e^{2x} dx = \int\limits_0^\pi \sin nx \cdot \sin mx dx = 0, \ n \neq m. \ \square$$

Собственные функции оператора вида (24.1) имеют огромное прикладное значение благодаря тому, что они образуют полную систему функций, точнее имеет место следующая **теорема Стеклова**:

Если $e_n(x)$ — собственные функции некоторого оператора

$$L[y] = \frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

то любая функция $f(x)$, которая дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет тем же краевым условиям, допускает разложение в равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x), \text{ где}$$

$$c_n = \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)} = \Big(\int\limits_a^b f(x)e_n(x)dx\Big) \cdot \Big(\int\limits_a^b e_n^2(x)dx\Big)^{-1}. \tag{24.3}$$

Если оператор $L[y]$ не самосопряжённый, то теорема остаётся справедливой, но следует рассматривать скалярное произведение с весом $\rho(x)$.

Вернемся к примеру 6 и сформулируем теорему Стеклова о разложении в ряд по собственным функциям поставленной краевой задачи: если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$, то $f(x)$ может быть представлена равномерно сходящимся рядом

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x} \sin nx,$$

где

$$c_n = \Big(\int\limits_0^\pi f(x)\cdot e^{-x}\sin nx\cdot e^{2x}dx\Big)\cdot\Big(\int\limits_0^\pi (e^{-x}\sin nx)^2\cdot e^{2x}dx\Big)^{-1} = \\ = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)e^{x}\sin nx dx. \quad \square$$

Более общая теорема утверждает, что система собственных функций $\{e_n(x)\}$ полна в $L_2[a,b]$, то есть любая функция $f(x)\in L_2[a,b]$ допускает представление в виде ряда (24.3), но сходимость этого ряда понимается уже как сходимость по норме пространства $L_2[a,b]$.