Семинар 9 [11.10.2022]

Инварианты Римана.

Задачи

Задача 1

Справа от поршня при $x > 0$ покоится политропный газ плотности ρ_0. В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться с ускорением $a > 0$. Найти скорость газа $v = v(x, t)$ до момента образования ударной волны.

Решения

Задача 1

В начальный момент времени газ покоился, то есть

$$v(x,0)=0,\quad \rho(x,0)=\rho_0,\quad x>0.$$

Тогда вдоль характеристик, пересекающих $t=0$ при $x>0$, инварианты Римана равны нулю, следовательно в этой области

$$J_\pm = v\pm\frac{2}{\gamma-1}\left(c(\rho)-c_0\right)=0,\quad\Rightarrow\quad v\equiv 0,\quad c(\rho)\equiv c_0,$$

и уравнения характеристик принимают вид

$$\frac{dx}{dt}=\pm c_0,\quad\Rightarrow\quad x\mp c_0t=I_\pm>0.$$

Таким образом, продляя решение вдоль характеристик $x-c_0t=I_+>0$, находим решение во всей области $x>c_0t$:

$$v=0,\quad \rho=\rho_0.$$

Характеристики $x+c_0t=I_->0$ достигают границы области $x<c_0t$, это значит, что инвариант $J_-\equiv 0$ переносится и на эту облатсть. Таким образом, во всей области $x<c_0t$ решение представимо в виде простой волны Римана, причем

$$J_-=v-\frac{2}{\gamma-1}\left(c(\rho)-c_0\right)=0,\quad\Rightarrow\quad c(\rho)=\frac{\gamma-1}{2}v+c_0, \tag{1}$$

откуда

$$J_+=2v.$$

Следовательно, получаем квазилинейное уравнение на v:

$$\partial_t J_+ + (v+c)\,\partial_x J_+=0,\quad\Rightarrow\quad \partial_t v+\left(\frac{\gamma+1}{2}v+c_0\right)\partial_x v=0.$$

Его общее решение есть

$$x-\left(\frac{\gamma+1}{2}v+c_0\right)t=f(v).$$

Пользуясь задачей Коши на поршне:

$$v|_{x=at^2/2}=at,$$

получаем окончательно

$$\frac{at^2}{2}-\left(\frac{\gamma+1}{2}at+c_0\right)t=f(at),\quad\Rightarrow\quad f(\alpha)=-\frac{\alpha}{a}\left(\frac{\gamma}{2}\alpha+c_0\right),\quad \alpha>0.$$

И в итоге

$$\frac{\gamma}{2a}v^2+\left(\frac{c_0}{a}-\frac{\gamma+1}{2}t\right)v+x-c_0t=0,$$

$$\Rightarrow$$

$$v=\frac{\gamma+1}{2\gamma}at-\frac{c_0}{\gamma}+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}at-\frac{c_0}{\gamma}\right)^2+\frac{2a}{\gamma}\left(c_0t-x\right)}.$$

Плотность $\rho = \rho\,(x, t)$ может быть найдена из уравнения (1).

Момент образования ударной волны t^* можно найти из условия $\partial_x v \to \infty$. Тогда, вычисляя производную

$$\partial_x v = -\frac{a}{\gamma}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}at - \frac{c_0}{\gamma}\right)^2 + \frac{2a}{\gamma}\,(c_0 t - x)}},$$

получаем условие

$$\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}at^* - \frac{c_0}{\gamma}\right)^2 + \frac{2a}{\gamma}\,(c_0 t^* - x^*) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$v^* = \frac{\gamma+1}{2\gamma}at^* - \frac{c_0}{\gamma}.$$

Поскольку $v > 0$ во всей рассматриваемой области, то опрокидывание начинается на ее границе:

$$v^* = 0, \quad t^* = \frac{2}{\gamma+1}\frac{c_0}{a}, \quad x^* = c_0 t^*,$$

то есть на фронте распространения возмущения.