Вариант 1.

1. (a) Приведите формулу решения по методу Фурье (без вывода) начально-краевой задачи для волнового уравнения на $[0,l]$, т.е. чему равны $u(x,t)$ и коэффициенты A_k и B_k

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0\le x\le l, \quad t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\phi(x), & 0\le x\le l,\\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l,\\ u(0,t)=u(l,t)=0. & t\geqslant 0\end{cases}$$

(b) Пусть ϕ_{ext}, ψ_{ext} — $2l$-периодические нечётные продолжения функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$ на всю ось $\mathbb{R}$ соответственно. Решение задачи Коши для волнового уравнения на $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, & -\infty<x<\infty, \quad t\geqslant 0,\\ v(x,0)=\phi_{\text{ext}}(x),\\ v_t(x,0)=\psi_{\text{ext}}(x).\end{cases}$$

по формуле Даламбера определяется как $v(x,t)=\frac{1}{2}\left[\phi_{\text{ext}}(x+at)+\phi_{\text{ext}}(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_{\text{ext}}(y)dy$

Докажите, что $v(x,t)\big|_{0\le x\le l}=u(x,t)$, т.е. что на отрезке $0\le x\le l$ решение задачи Коши методом Даламбера совпадает с решением начально-краевой задачи методом Фурье.

2. Решите задачу для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+3u-\frac{t\left(3x^2+2\right)}{\pi}+x\cos t, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, \quad t\geqslant 0\\ u\big|_{t=0}=\cos 2x, \quad u_t\big|_{t=0}=\frac{x^2}{\pi}, \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ u_x\big|_{x=0}=0, \quad u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=t, \quad t\geqslant 0\end{cases}$$

3. (a) Найдите стационарное распределение температуры в секторе бесконечного цилиндра единичного радиуса с углом раствора $\pi/2$

$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta)=0, \quad 0<r<1, \quad 0<\theta<\pi/2\\ u(1,\theta)=g(\theta), \quad u(0,\theta) \text{ ограничено}, \quad 0<\theta<\pi/2,\\ u(r,0)=0, \quad u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad 0<r<1.\end{cases}$$

Решение должно иметь коэффициенты в терминах интегралов от $g(\theta)$.

(b) Используя $u(r,\theta)$, найдите нестационарное распределение температуры $v(r,\theta,t)$ в этой же области

$$\begin{cases} v_t=\Delta v, \quad 0<r<1, \quad 0<\theta<\pi/2, \quad t\geqslant 0,\\ v(1,\theta,t)=g(\theta), \quad v(0,\theta,t) \text{ ограничено}, \quad 0<\theta<\pi/2, \quad t\geqslant 0,\\ v(r,0,t)=0, \quad v\left(r,\frac{\pi}{2},t\right)=0, \quad 0<r<1, \quad t\geqslant 0,\\ v(r,\theta,0)=f(r,\theta), \quad 0<r<1, \quad 0<\theta<\pi/2.\end{cases}$$

Решение должно иметь коэффициенты в терминах интегралов от $f(r,\theta)$ и $u(r,\theta)$.

4. Найдите функцию $u(r,\varphi,\theta)$, удовлетворяющую на сфере единичного радиуса условию $u_r\big|_{r=1}=\sin(\pi/4-\varphi)\sin\theta$ и гармоническую вне этой сферы. Разрешима ли эта задача?

5. Найдите решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения в шаре

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=(r+3)e^{-2t}, \quad r\le 2, \quad t\geqslant 0,\\ u\big|_{t=0}=2-r,\\ u_t\big|_{t=0}=0,\\ u\big|_{r=2}=0.\end{cases}$$

Вариант 2.

1. (a) Приведите формулу решения по методу Фурье (без вывода) начально-краевой задачи для волнового уравнения на $[0,l]$, т.е. чему равны $u(x,t)$ и коэффициенты A_k и B_k

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 \le x \le l, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \le x \le l, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. & t \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) Пусть ϕ_{ext}, ψ_{ext} — $2l$-периодические нечётные продолжения функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$ на всю ось $\mathbb{R}$ соответственно. Решение задачи Коши для волнового уравнения на $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t \geqslant 0, \\ v(x,0) = \phi_{\text{ext}}(x), \\ v_t(x,0) = \psi_{\text{ext}}(x). \end{cases}$$

по формуле Даламбера определяется как $v(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi_{\text{ext}}(x+at) + \phi_{\text{ext}}(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_{\text{ext}}(y)dy$

Докажите, что $v(x,t)\big|_{0 \le x \le l} = u(x,t)$, т.е. что на отрезке $0 \le x \le l$ решение задачи Коши методом Даламбера совпадает с решением начально-краевой задачи методом Фурье.

2. Решите задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 9u = 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2, & 0 \le x \le \pi, \quad t \geqslant 0, \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi, \quad u\big|_{t=0} = x^2 + 2 \end{cases}$$

3. (a) Найдите стационарное распределение температуры в секторе бесконечного цилиндра единичного радиуса с углом раствора π

$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \pi \\ u(1,\theta) = g(\theta), \quad u(0,\theta) \text{ ограничено}, \quad 0 < \theta < \pi, \\ u(r,0) = 0, \quad u(r,\pi) = 0, \quad 0 < r < 1. \end{cases}$$

Решение должно иметь коэффициенты в терминах интегралов от $g(\theta)$.

(b) Используя $u(r,\theta)$, найдите нестационарное распределение температуры $v(r,\theta,t)$ в этой же области

$$\begin{cases} v_t = \Delta v, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \pi, \quad t \geqslant 0, \\ v(1,\theta,t) = g(\theta), \quad v(0,\theta,t) \text{ ограничено}, \quad 0 < \theta < \pi, \quad t \geqslant 0, \\ v(r,0,t) = 0, \quad v(r,\pi,t) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad t \geqslant 0, \\ v(r,\theta,0) = f(r,\theta), \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Решение должно иметь коэффициенты в терминах интегралов от $f(r,\theta)$ и $u(r,\theta)$.

4. Найти функцию $u(r,\varphi,\theta)$, удовлетворяющую на сфере единичного радиуса условию $u_r\big|_{r=1} = \sin(\varphi + \pi/6)\sin\theta$ и гармоническую внутри неё. Разрешима ли эта задача?

5. Найдите решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения в шаре

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = (r-3)e^{-3t}, \quad r \le 3, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ u_t\big|_{t=0} = (r-3)^2, \\ u_r\big|_{r=3} = 0. \end{cases}$$