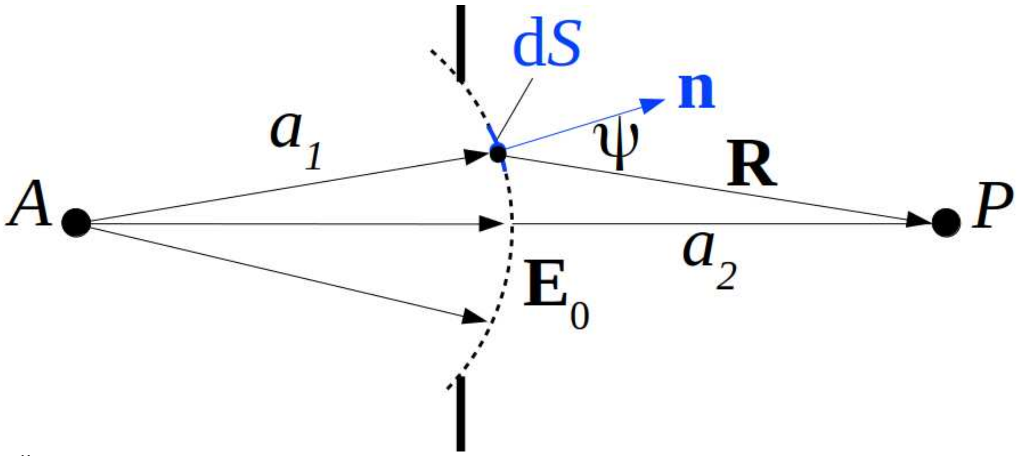
# Интеграл Кирхгофа

$$E_P = \frac{1}{i\lambda}\int\limits_S E_0 \frac{e^{ikR}}{R}\cos\psi dS$$




Условия применимости:

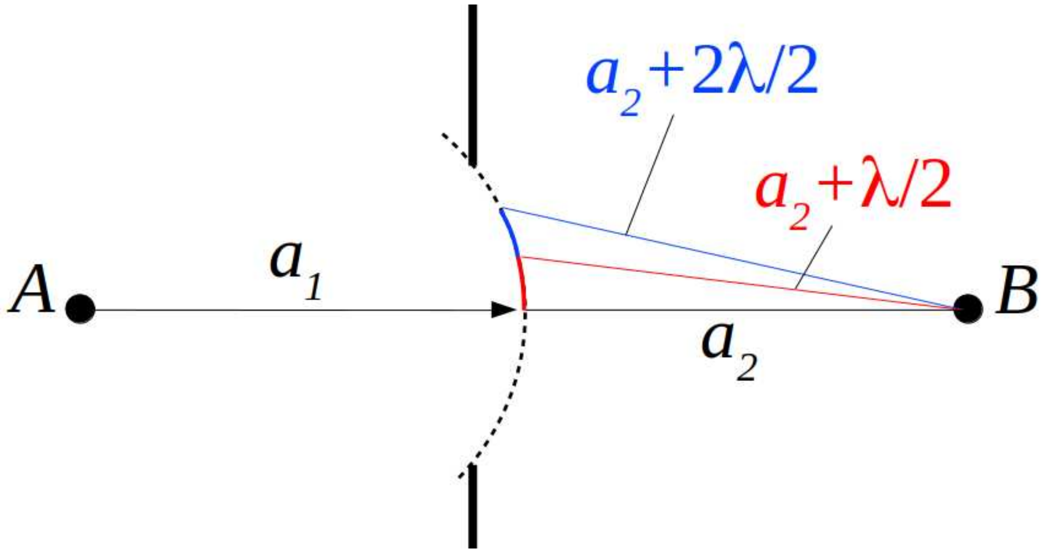
$\sqrt{S} \gg \lambda$,
$z_p \gg \sqrt{S}$.

Нестыковки с принципом Гюйгенса:

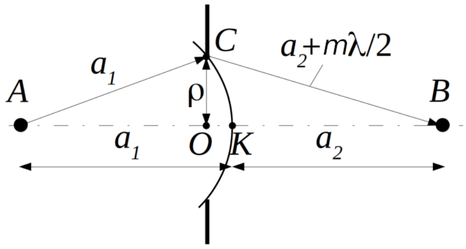
$\frac{1}{i\lambda}$ – сдвиг по фазе на $-\pi/2$ по сравнению с $E_0$.
Множитель $\cos\psi$ противоречит тому, что вторичные источники точечные и излучают изотропно.

В действительности интеграл Кирхгофа – решение краевой задачи: найти решение волнового уравнения в области $z \gg \sqrt{S}$ при условии на границе $z = 0$, таком что $E = E_0$ в области отверстия и $E = 0$ вне отверстия, при дополнительном условии $E = 0$ на бесконечности. Во избежание нарушения гран. условия $\Delta E_\tau = 0$, $E_0$ должно затухать при приближении к краям отверстия и обращаться в нуль на них. Чтобы при этом в основной части отверстия $E_0$ равнялось полю падающей волны, необходимо выполнение условия $\sqrt{S} \gg \lambda$ (см. раздел "Вывод интеграла Кирхгофа" в лекциях В.И. Яковлева ч. 2).

# Зоны Френеля




Полезно помнить, что зоны Френеля привязаны к точке наблюдения. Для одной точки наблюдения они одни, для другой – другие. Например, всегда можно указать такую (достаточно удаленную) точку наблюдения, для которой в отверстие укладывается меньше одной зоны Френеля.




<u>Задача 3.53.</u> Найти радиус $\rho$ $m$-й зоны Френеля. Чему он будет равен, если падающая волна плоская? Доказать, что площади зон Френеля равны. Найти вклад в амплитуду поля в точке B от $m$-й зоны Френеля.

<u>Решение</u>

Выразим квадрат искомого радиуса из треугольников AOC и BOC:

$$\rho^2 = AC^2 - OA^2 = BC^2 - OB^2$$

$$a_1^2 - (a_1 - OK)^2 = (a_2 + m\lambda/2)^2 - (a_2 + OK)^2$$

$$a_1^2 - a_1^2 + 2a_1OK - OK^2 = a_2^2 + 2a_2m\lambda/2 + m^2\lambda^2/4 - a_2^2 - 2a_2OK - OK^2$$

$$2a_1OK = 2a_2m\lambda/2 + m^2\lambda^2/4 - 2a_2OK$$

Поскольку по условию $a_2 \gg \lambda$, то в правой части вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым (также учитывая, что условие $m < a_2/\lambda$ всегда выполняется):

$$2(a_1 + a_2)OK \approx 2a_2m\lambda/2$$

$$OK \approx \frac{m\lambda a_2}{2(a_1 + a_2)}$$

Отсюда находим радиус $m$-ой зоны Френеля:

$$\rho^2 \approx 2a_1OK = \frac{m\lambda a_1a_2}{a_1 + a_2}, \quad \rho \approx \sqrt{\frac{m\lambda a_1a_2}{a_1 + a_2}}.$$

Площадь сферического сегмента, содержащего с 1-ой по $m$-ю зоны Френеля:

$$S_m = 2\pi a_1OK = \frac{\pi m\lambda a_1a_2}{a_1 + a_2}$$

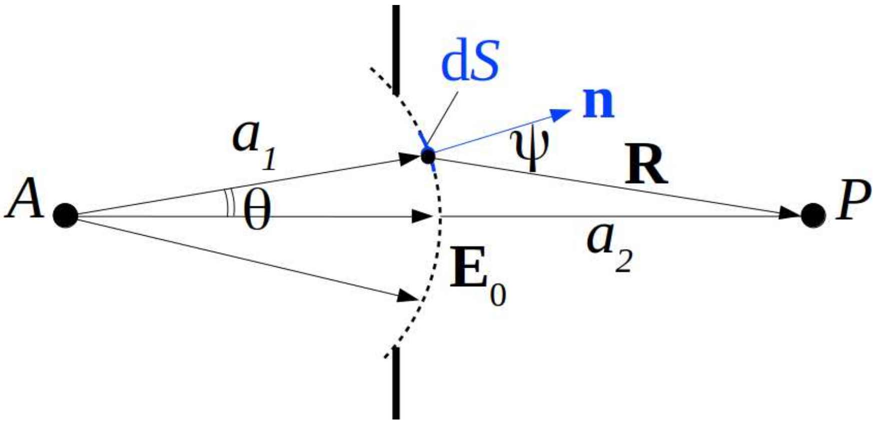
Поскольку эта площадь оказалась линейной по $m$, то площадь каждой зоны Френеля равна

$$S = \frac{\pi\lambda a_1a_2}{a_1 + a_2}$$

В случае падающей плоской волны ($a_1 \to \infty$):

$$\rho = \sqrt{m\lambda a_2}.$$

## Вклад m-й зоны Френеля в $E_P$




$E_P = \frac{1}{i\lambda} \int\limits_{S_m} E_0 \frac{e^{ikR}}{R} \cos\psi dS,$

$R^2 = a_1^2 + (a_1 + a_2)^2 - 2a_1(a_1 + a_2)\cos\theta,$

$2RdR = 2a_1(a_1 + a_2)\sin\theta d\theta,$

$dS = 2\pi a_1^2 \sin\theta d\theta = \frac{2\pi a_1 RdR}{a_1+a_2}.$

$E_P = \frac{1}{i\lambda} \int\limits_{S_m} E_0 \frac{e^{ikR}}{R} \cos\psi \frac{2\pi a_1 RdR}{a_1+a_2} =$

$= \frac{2\pi a_1 E_0}{i\lambda(a_1+a_2)} \langle\cos\psi\rangle \int\limits_{R_{m-1}}^{R_m} e^{ikR}\, dR = \frac{2\pi a_1 E_0}{i\lambda(a_1+a_2)} \langle\cos\psi\rangle \frac{e^{ikR_m} - e^{ikR_{m-1}}}{ik} = \frac{a_1 E_0}{(a_1+a_2)} \langle\cos\psi\rangle\, e^{ika_2} \left(e^{ik(m-1)\lambda/2} - e^{ikm\lambda/2}\right) =$

$= \frac{a_1 E_0\, e^{ika_2}}{(a_1+a_2)} \langle\cos\psi\rangle \left(e^{i\pi(m-1)} - e^{i\pi m}\right) = \frac{2a_1 E_0\, e^{ika_2}}{(a_1+a_2)} \langle\cos\psi\rangle_m (-1)^{m-1}.$

Следствия:

- при нечетном числе зон Френеля, укладывающихся в отверстие, поле $E_P$ в точке наблюдения вдвое превышает поле в волне падающей (интенсивность – в 4 раза);
- при четном числе зон Френеля, укладывающихся в отверстие, поле $E_P$ равно нулю.