Семинар 18 [22.11.2022]

Ортогональные полиномы.

Задачи

Задача 1

Доказать ортогональность и выразить нормированные сферические функции Y_{lm} через P_l^m.

Задача 2

Вывести рекуррентное соотношение

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

и формулу дифференцирования

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x),$$

для полиномов Эрмита

$$H_n = e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

Задача 3

Найти производящую функцию

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x)$$

для полиномов Эрмита.

Задача 4

Получить формулу Родрига для полиномов Лагерра

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right],$$

решая соответствующее уравнение

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

методом преобразования Лапласа.

Задача 5

Найти производящую функцию для Полиномов Лагерра

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n L_n(x).$$

Решения

Задача 1

Сферические функции есть

$$Y_{lm} = C_{lm} P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}.$$

Они должны удовлетворять условию ортогональности

$$\int Y^*_{lm} Y_{l'm'} d\Omega = \delta_{mm'}\delta_{ll'},$$

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла. Подставляя Y_{lm} в явном виде получаем

$$\int Y^*_{lm} Y_{l'm'} d\Omega = C^*_{lm} C_{l'm'} \int\limits_{-1}^{1} P_l^{|m|}(x)\, P_{l'}^{|m'|}(x)\, dx \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-i\left(m-m'\right)\varphi} d\varphi.$$

Интеграл по φ вычисляется тривиально

$$\int\limits_{0}^{2\pi} e^{-i\left(m-m'\right)\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{mm'}.$$

Таким образом, нужно доказать ортогональность полиномов Лежандра:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} P_l^{|m|}(x)\, P_{l'}^{|m|}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi\left|C_{lm}\right|^2}\delta_{ll'}.$$

Пусть $l' \geq l$. Пользуясь формулой Родрига, имеем

$$I = \frac{1}{2^{l+l'} l! l'!} \int\limits_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{|m|} \left[\frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}}\left(x^2-1\right)^l\right]\left[\frac{d^{|m|+l'}}{dx^{|m|+l'}}\left(x^2-1\right)^{l'}\right] dx.$$

Интегрируя $|m|+l'$ раз по частям, получаем

$$I = \frac{(-1)^{|m|+l'}}{2^{l+l'} l! l'!} \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^{l'} \frac{d^{|m|+l'}}{dx^{|m|+l'}}\left[\left(1-x^2\right)^{|m|} \frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}}\left(x^2-1\right)^l\right] dx.$$

Ясно, что выражение в квадратных скобках есть полином степени $|m|+l$. Тогда производная в интеграле не равна нулю, только если $|m|+l \geq |m|+l'$, значит только при $l = l'$. Таким образом:

$$I = \frac{(-1)^{|m|+l}}{2^{2l} l! l!}\delta_{ll'} \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^{l} \frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}}\left[\left(1-x^2\right)^{|m|} \frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}}\left(x^2-1\right)^l\right] dx.$$

Причем

$$\frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}}\left[\left(1-x^2\right)^{|m|} \frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}}\left(x^2-1\right)^l\right] = (-1)^{|m|} \frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}}\left[x^{2|m|}\frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}} x^{2l}\right] =$$

$$= (-1)^{|m|} \frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}}\left[x^{2|m|}\frac{(2l)!}{(l-|m|)!}x^{l-|m|}\right] = \frac{(-1)^{|m|}(2l)!\,(l+|m|)!}{(l-|m|)!}.$$

Тогда

$$I = \frac{(2l)!\,(l+|m|)!}{2^{2l}l!l!\,(l-|m|)!}\delta_{ll'}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^l dx.$$

Оставшийся интеграл заменой $t = x^2$ выражается через бета функцию

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^l dx = \int\limits_{0}^{1} t^{-1/2}\,(1-t)^l\,dt = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, l+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}l!}{\left(l+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\frac{(2l)!}{4^l l!}} = \frac{4^l l!l!}{\left(l+\frac{1}{2}\right)(2l)!}.$$

В итоге

$$I = \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \quad \Rightarrow \quad |C_{lm}| = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}.$$

Задача 2

Вычисляем первую производную полиномов Эрмита:

$$\frac{dH_{n-1}}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n-1}e^{-x^2}\right] = 2xe^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n-1}e^{-x^2} - e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}e^{-x^2} = 2xH_{n-1} - H_n.$$

Аналогично вычисляем вторую производную:

$$\frac{d^2H_{n-1}}{dx^2} = 2H_{n-1} + 2x\frac{dH_{n-1}}{dx} - \frac{dH_n}{dx} = 2\left(1+2x^2\right)H_{n-1} - 4xH_n + H_{n+1}.$$

Далее, пользуясь уравнением

$$\frac{d^2H_{n-1}}{dx^2} - 2x\frac{dH_{n-1}}{dx} + 2(n-1)H_{n-1} = 0,$$

получаем искомое рекуррентное соотношение. Формула дифференцирования получается подстановкой рекуррентного соотношения в правую часть равенства

$$\frac{dH_n}{dx} = 2xH_n - H_{n+1}.$$

Задача 3

Дифференцирование по x дает

$$\partial_x F = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\frac{d}{dx}H_n(x) = 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}H_{n-1}(x) = 2zF,$$

по z:

$$\partial_z F = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}H_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}H_{n+1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\left(2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\right) =$$
$$= 2x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}H_n(x) - 2z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}H_n(x) = 2(x-z)F.$$

Таким образом имеем:

$$F = e^{2zx+f_1(z)}, \quad F = e^{2zx-z^2+f_2(x)}, \quad \Rightarrow \quad F = ce^{2zx-z^2}.$$

Так как $H_0(x) = 1$, то $F(x,0) = H_0(x) = 1$, значит $c = 1$.

Задача 4

Действуя преобразованием Лапласа

$$z(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-px} y(x)\, dx, \quad p > 0,$$

на уравнение Лагерра, получаем

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-px} \left(x \frac{d^2y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + ny \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right) x e^{-px} dx + \int_0^{+\infty} \left(\frac{dy}{dx} + ny \right) e^{-px} dx =$$

$$= -\frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right) e^{-px} dx + \int_0^{+\infty} \left(\frac{dy}{dx} + ny \right) e^{-px} dx.$$

Интегрирование по частям дает

$$0 = -\frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right) e^{-px} dx + \int_0^{+\infty} \left(\frac{dy}{dx} + ny \right) e^{-px} dx =$$

$$= -\frac{d}{dp} \left[p \int_0^{+\infty} \left(\frac{dy}{dx} - y \right) e^{-px} dx \right] + \left[-y(0) + p \int_0^{+\infty} y e^{-px} dx \right] + n \int_0^{+\infty} y e^{-px} dx =$$

$$= -\frac{d}{dp} \left[p^2 \int_0^{+\infty} y e^{-px} dx \right] + \frac{d}{dp} \left[p \int_0^{+\infty} y e^{-px} dx \right] + p \int_0^{+\infty} y e^{-px} dx + n \int_0^{+\infty} y e^{-px} dx.$$

Таким образом, получаем

$$-\frac{d}{dp} \left[\left(p^2 - p \right) z \right] + (p+n) z = 0.$$

Интегрирование дает

$$\int \frac{d\left[\left(p^2 - p \right) z \right]}{(p^2 - p) z} = \int \frac{p+n}{p(p-1)} dp = \int \frac{n+1}{p-1} dp - \int \frac{n}{p} dp,$$

$$\Rightarrow \quad z = C \frac{(p-1)^n}{p^{n+1}}.$$

В итоге

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{+i\infty+0} e^{px} z(p)\, dp = \frac{C}{2\pi i} \int_\gamma e^{px} \frac{(p-1)^n}{p^{n+1}} dp = C \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dp^n} \left[e^{px} (p-1)^n \right] \Big|_{p=0} =$$

$$= C e^x \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dp^n} \left[(p-1)^n e^{(p-1)x} \right] \Big|_{p=0} = C e^x \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dp^n} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{(p-1)x} \right] \Big|_{p=0} = C e^x \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n e^{-x} \right].$$

Из условия $L_0(x) = 1$ получаем $C = 1$, и в итоге

$$L_n(x) = e^x \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n e^{-x} \right].$$

Задача 5

Подставляя интеграл, полученный в предыдущей задаче, имеем

$$F(x,z)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n L_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \int\limits_{\gamma} e^{px}\frac{(p-1)^n}{p^{n+1}}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z(p-1)}{p}\right)^n\frac{e^{px}}{p}dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{px}dp}{(1-z)p+z}.$$

Особенность в знаменателе возникает при

$$p=p_0=-\frac{z}{1-z},$$

причем $p_0<0$, если $0<z<1$. Тогда

$$F(x,z)=\frac{1}{1-z}\exp\left[-\frac{zx}{1-z}\right],\quad 0<z<1,$$

иначе $F(x,z)\equiv 0$.