Занятие 16

Автономные системы высокого порядка и их траектории. Неавтономные системы.

Рассмотрим автономную систему уравнений общего вида

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y}), \text{ где } \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^n \tag{16.1}$$

Каждой такой системе можно сопоставить систему в симметричном виде

$$\frac{dy_1}{f_1(\vec{y})} = \frac{dy_2}{f_2(\vec{y})} = ... = \frac{dy_n}{f_n(\vec{y})} \tag{16.2}$$

Каждое решение системы (16.1) мы можем трактовать как движение точки $\vec{y}$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Нас интересуют траектории этой системы, то есть кривые, по которым движутся точки. Система (16.2) определяет эти траектории, но не позволяет установить закон движения по ним.

Функция $F(\vec{y})$, отличная от тождественно постоянной, называется *первым интегралом* системы (16.1), если при подстановке в $F(\vec{y})$ решений системы $\vec{y}(t)$ она обращается в тождественно постоянную функцию. Другими словами, если подставить в $F(\vec{y})$ решение $\vec{y}(t)$ и вычислить производную по t (так называемую производную вдоль решения или производную в силу системы), то производная будет равна нулю:

$$\frac{d}{dt}F(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i} f_i(\vec{y}) \equiv 0$$

Если найдено k первых интегралов системы (16.1), возникает вопрос об их функциональной независимости.

Пример 1. Проверим, что функции $F_1 = x^2 + y^2 + z^2$, $F_2 = x + y + z$ и $F_3 = xy + yz + zx$ являются первыми интегралами системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = x - y \end{cases} \tag{16.3}$$

Действительно,

$$\frac{dF_1}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 2x(y-z) + 2y(z-x) + 2z(x-y) = 0$$

$$\frac{dF_2}{dt} = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = (y-z) + (z-x) + (x-y) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{dF_3}{dt} &= (y+z)\dot{x} + (z+x)\dot{y} + (x+y)\dot{z} = \\ &= (y+z)(y-z) + (z+x)(z-x) + (x+y)(x-y) = 0\end{aligned}$$

В данном случае нетрудно заметить, что $F_2^2 = F_1 + 2F_3$. В общем же случае имеет место следующее утверждение:

k первых интегралов F_1, F_2, ..., F_k функционально независимы, если и только если ранг матрицы Якоби $\dfrac{\partial(F_1, F_2, ..., F_k)}{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)}$ равен k.

В рассмотренном выше примере

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы тождественно равен нулю, следовательно F_1, F_2, F_3 функционально зависимы, что мы и видели выше. □

Теорема. Если функции $f_i(\vec{y})$ и их частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subset R^n$, то система (16.2) имеет $(n-1)$ функционально независимых первых интегралов. Система уравнений $\begin{cases} F_1(\vec{y}) = C_1 \\ \vdots \\ F_{n-1}(\vec{y}) = C_{n-1} \end{cases}$ определяет в пространстве $\mathbb{R}^n$ некоторую кривую γ, которая и является траекторией автономной системы (16.1).

Так, в примере 1 первые интегралы F_1 и F_2 функционально независимы, следовательно, траекториями системы (16.3) в трехмерном пространстве являются окружности, возникающие при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$ и плоскости $x + y + z = C_2$.

С другой стороны, система (16.3) — линейная, с постоянными коэффициентами, и мы можем найти ее общее решение методами, изученными ранее:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t & \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t + \sin\sqrt{3}t \\ 1 & -2\cos\sqrt{3}t & -2\sin\sqrt{3}t \\ 1 & \cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t & -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t + \sin\sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Как видно, формула общего решения достаточно громоздка, и требуются некоторые усилия, чтобы ее получить. Найти траектории было технически намного проще, да и характер движения точки в пространстве они иллюстрируют гораздо лучше, чем эта формула.

Наша ближайшая цель — овладеть техникой построения первых интегралов симметрических систем вида (16.2).

Пример 2. Найти первые интегралы системы $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$.

Система имеет два функционально независимых первых интеграла. Первое равенство системы дает нам уравнение $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x}$ и первый интеграл $x^2 - 2y = C_1$.

Используя его, исключим y из уравнения $\frac{dx}{z} = \frac{dz}{y}$. Получим $\frac{dx}{z} = \frac{2dz}{x^2 - C_1}$ или $(x^2 - C_1)dx = 2zdz$. Отсюда $\frac{x^3}{3} - C_1 x - z^2 = C_2$. Подставляя сюда $C_1 = x^2 - 2y$, получим $-\frac{2}{3}x^3 + 2xy - z^2 = C_2$.

Система уравнений $\begin{cases} x^2 - 2y = C_1 \\ 2x^3 - 6xy + 3z^2 = C_2 \end{cases}$ определяет в пространстве $(x; y; z)$ семейство кривых, являющихся траекториями исходной симметрической системы (функциональная независимость найденных первых интегралов очевидна).□

Описанный прием можно назвать «методом исключения».

В многих случаях удается найти первые интегралы путем подбора интегрируемых комбинаций. При этом «работает» основное свойство пропорций:

если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_k}{b_k} = \theta$, то для любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ верно

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k} = \theta$$

При этом, поскольку речь идет о пропорциях, обращение в нуль знаменателя означает, что числитель также равен нулю.

Вернемся к примеру 1 и покажем, как можно найти уже знакомые нам первые интегралы системы (16.3) методом интегрируемых комбинаций.

Перейдем от (16.3) к симметрической системе $\dfrac{dx}{y-z} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{x-y}$. Полагая все коэффициенты $\lambda_i = 1$, получим

$$\theta = \frac{dx + dy + dz}{(y-z) + (z-x) + (x-y)} = \frac{d(x+y+z)}{0},$$

откуда $x + y + z = C_1$.

Полагая $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_3 = z$, получим

$$\theta = \frac{xdx + ydy + zdz}{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)} = \frac{0,5d(x^2+y^2+z^2)}{0},$$

откуда $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Пример 3. Найти первые интегралы системы $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{u} = \dfrac{dz}{x} = \dfrac{du}{y}$.

В данной системе легко выделить уравнения $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dz}{x}$ и $\dfrac{dy}{u} = \dfrac{du}{y}$, которые дают первые интегралы $x^2 - z^2 = C_1$ и $y^2 - u^2 = C_2$.

Также, используя основное свойство пропорции, легко получить уравнение $\dfrac{d(x+z)}{x+z} = \dfrac{d(y+u)}{y+u}$, откуда $\dfrac{x+z}{y+u} = C_3$.

Если взять комбинацию с коэффициентами y, x, $-u$, $-z$, то получим

$$\frac{ydx + xdy - udz - zdu}{yz + xu - xu - zy} = \frac{d(xy) - d(zu)}{0} \quad \Rightarrow \quad xy - zu = C_4.$$

Мы «перевыполнили план» и нашли четыре первых интеграла, хотя для описания траектории в четырехмерном пространстве достаточно трех функционально независимых первых интегралов. Например,

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = C_1 \\ y^2 - u^2 = C_2 \\ xy - zu = C_3 \end{cases}, \qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2x & 0 & -2z & 0 \\ 0 & 2y & 0 & -2u \\ y & x & -u & -z \end{pmatrix} = 3. \ \square$$

Пример 4. Найти первые интегралы системы $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{xy+z}$.

Уравнение $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$ сразу же дает первый интеграл $\dfrac{x}{y} = C_1$.

Далее можно пойти стандартным путем и исключить x из уравнения $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{xy+z}$, пользуясь найденным первым интегралом: $x = C_1 y$.

Тогда $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{C_1 y^2 + z}$ или $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{z}{y} + C_1 y$.

Остается только решить это линейное уравнение: $z = C_2 y + C_1 y^2$ и исключить константу C_1: $z = C_2 y + xy$. Следовательно, $\dfrac{z - xy}{y} = C_2$.

Этот же первый интеграл можно получить гораздо быстрее, подобрав интегрируемую комбинацию:

$$\frac{ydx + xdy - dz}{2xy - (xy + z)} = \frac{d(xy - z)}{xy - z} = \frac{dy}{y}.$$

Но этот путь требует некоторого навыка и сообразительности. □

Знание первых интегралов помогает не только описать траектории, но и решить автономную систему.

Пример 5. Найти решение системы $\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ \dot{y} = xy - 2z^2 \\ \dot{z} = xz \end{cases}$

Заметим, что в первое уравнение входит только переменная x, и оно легко решается: $x = \dfrac{1}{t + C_1}$. Третье уравнение является линейным относительно z, а второе — линейным относительно y. Поэтому, подставляя $x(t)$ в третье уравнение, можно найти $z(t)$, а затем, подставляя $x(t)$ и $z(t)$ во второе уравнение, найти $y(t)$. Однако можно поступить немного по-другому.

Запишем симметрическую систему

$$\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}.$$

Из нее можно выделить уравнение $\dfrac{dx}{-x^2} = \dfrac{dz}{xz}$, которое легко интегрируется: $xz = C_2$. Отсюда находим $z = \dfrac{C_2}{x} = C_2(t + C_1)$.

Составим интегрируемую комбинацию с коэффициентами y, x, $2z$:

$$\frac{ydx + xdy + 2zdz}{-yx^2 + x^2y - 2xz^2 + 2xz^2} = \frac{d(xy + z^2)}{0} \quad \Rightarrow \quad xy + z^2 = C_3$$

Отсюда $y = \dfrac{C_3 - z^2}{x} = (C_3 - C_2^2(t + C_1)^2)(t + C_1)$.

Таким образом, мы смогли с помощью первых интегралов быстро восстановить закон движения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. □

Этот же прием можно использовать при решении неавтономных систем.

Пример 6. Найти решение системы $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x-y}{z-t} \\ \dot{y} = \dfrac{x-y}{z-t} \\ \dot{z} = x - y + t \end{cases}$

Вычитая второе уравнение из первого, получим $\dfrac{d(x-y)}{dt} = 0$. Следовательно, $x - y = C_1$. Тогда последнее уравнение превратится в $\dot{z} = C_1 + t$, и $z = C_1 t + \dfrac{t^2}{2} + C_2$.

Теперь, преобразовав первое уравнение к виду $\dot{x} = \dfrac{C_1}{C_1 t + \dfrac{t^2}{2} + C_2 - t}$, можно определить $x(t)$. Мы не будем выписывать первообразную, пусть $x(t) = \varphi(t; C_1; C_2; C_3)$. Тогда из соотношения $x - y = C_1$ легко найти $y(t)$, и задача решена. □

Пример 7. Найти решение системы $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2}{y-t} \\ \dot{y} = x + 1 \end{cases}$

Сведем систему к уравнению, исключив x:

$$\ddot{y} = \dot{x} = \frac{x^2}{y-t} = \frac{(\dot{y}-1)^2}{y-t}$$

Сделаем замену $u(t) = y - t$, тогда $\dot{y} - 1 = \dot{u}$, $\ddot{y} = \ddot{u}$, и уравнение преобразуется в $\ddot{u} = \dfrac{\dot{u}^2}{u}$. Переписав последнее уравнение в виде $\dfrac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \dfrac{\dot{u}}{u}$ или $\dfrac{d(\ln \dot{u})}{dt} = \dfrac{d(\ln u)}{dt}$, проинтегрируем его: $\dot{u} = C_1 u$.

Интегрируя еще раз, получим $u = C_2 e^{C_1 t}$, откуда $y = C_2 e^{C_1 t} + t$ и $x = \dot{y} - 1 = C_1 C_2 e^{C_1 t}$. □

Самостоятельная работа

1. Найдите первые интегралы автономной системы

$$\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}.$$

Опишите параметрически траекторию, проходящую через точку $(1; 1; 0)$.

Найдите первые интегралы автономных систем

2. $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x} = \dfrac{du}{v} = \dfrac{dv}{-u}$

3. $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{-yz} = \dfrac{dz}{xy}$

4. Решите задачу Коши для неавтономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y/t, & x(1) = 1 \\ \dot{y} = x/t, & y(1) = 0 \end{cases}$$

5. Решите задачу Коши $\begin{cases} \dot{x} = xz + y^2, & x(1) = 2 \\ \dot{y} = e^{t^2} y, & y(1) = 0 \\ \dot{z} = -z^2 + y, & z(1) = 1 \end{cases}$

Ответы и указания к самостоятельной работе

1. $\begin{cases} y^2 + z^2 = C_1 \\ x(y - z) = C_2 \end{cases}$, $\begin{cases} x(t) = (\cos t - \sin t)^{-1} \\ y(t) = \cos t \\ z(t) = \sin t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1 \\ u^2 + v^2 = C_2 \\ xu + yv = C_3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} xy = C_1 \\ z^2 + xy \ln y^2 = C_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = (t + t^{-1})/2 \\ y = (t - t^{-1})/2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \operatorname{ch}(\ln t) \\ y = \operatorname{sh}(\ln t) \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 2t \\ y \equiv 1 \\ z = 1/t \end{cases}$ Указание: определяйте значения констант по мере их возникновения.