# Занятие 23

# Построение функции Грина.

Если оператор $L$ невырожденный, то краевая задача

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{23.1}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ &\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{23.2}$$

имеет единственное решение при любой функции $f(x)$. Это решение выражается формулой

$$y(x) = L^{-1}[f] = \int\limits_a^b G(x,s)f(s)ds. \tag{23.3}$$

Функция $G(x,s)$, которая является ядром обратного интегрального оператора, называется функцией Грина.

Функция Грина определена на квадрате $[a,b] \times [a,b]$, удовлетворяет уравнению

$$L[G(x,s)] = \delta(x-s) \tag{23.4}$$

и краевым условиям (23.2) (при этом, мы считаем $G(x,s)$ функцией от $x$, рассматривая $s$ как параметр).

Чтобы функция $G(x,s)$ удовлетворяла уравнению (23.4), необходимо, чтобы при $x \neq s$ она удовлетворяла уравнению $L[G(x,s)] = 0$, при $x = s$ была непрерывна, а её первая производная имела при $x = s$ скачок, равный $1/a_0(s)$. То есть

$$G(s+0,s) = G(s-0,s),$$
$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = 1/a_0(s).$$

Эти свойства функции Грина и лежат в основе алгоритма её построения. Рассмотрим пример.

**Пример 1.** $xy'' - y' = f(x)\,,\quad y'(1) = 0\,,\quad y(2) = 0.$

<u>1 шаг</u>. Найдём общее решение однородного уравнения $xy'' - y' = 0$. (Можно сделать понижение порядка или заметить, что это — уравнение Эйлера).

$$y = C_1x^2 + C_2.$$

<u>2 шаг</u>. Находим функцию, удовлетворяющую левому краевому условию $y'(1) = 0$.

$$y' = 2C_1x\Big|_{x=1} = 2C_1 = 0\,,\quad y(x) = 1.$$

Следовательно, общий вид функций, удовлетворяющих однородному уравнению и левому краевому условию будет

$$y_{\text{л}}(x,s) = A(s).$$

Проделаем то же самое для правого краевого условия.

$$y(2) = C_14 + C_2 = 0\,,\quad y(x) = x^2 - 4,$$

$$y_{\text{п}}(x,s) = B(s)(x^2-4).$$

<u>3 шаг</u>. Мы определяем функции $A(s)$ и $B(s)$, требуя, чтобы выполнялось

$$y_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} = y_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s},\ \text{ то есть } A(s) = B(s)(s^2-4) \text{ и}$$

$$y'_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} - y'_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} = \frac{1}{s}, \text{ то есть } B(s)2x\Big|_{x=s} - 0 = \frac{1}{s}.$$

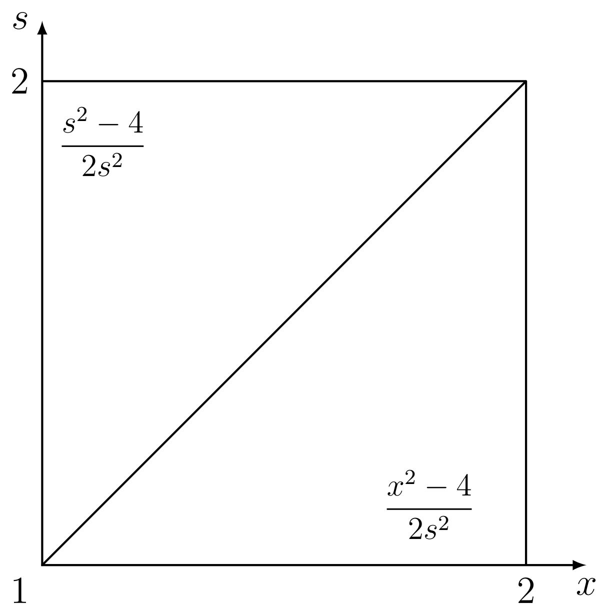
Таким образом, мы получили систему

$$\begin{aligned} &A(s) = B(s)(s^2-4),\\ &B(s)2s = 1/s, \end{aligned}$$

откуда $B(s) = 1/2s^2$, $A(s) = \dfrac{s^2-4}{2s^2}$.

<u>4 шаг</u>. Запишем функцию $G(x,s)$ с помощью диаграммы.

$G(x;s)$:




Если оператор $L$ имеет самосопряжённый вид

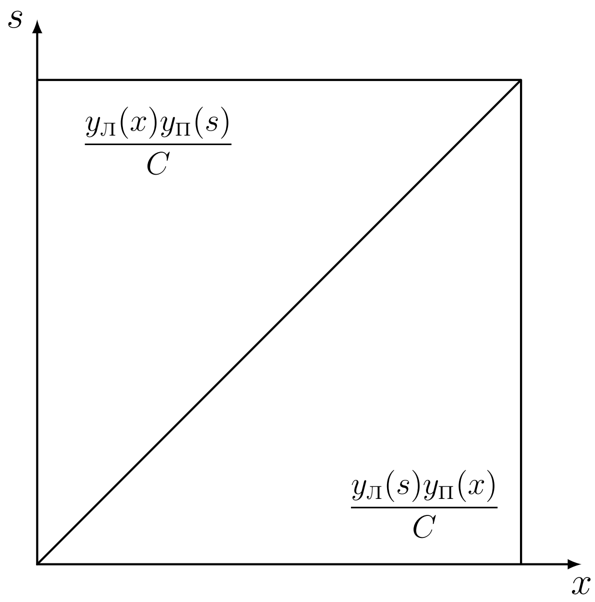
$$L[y] = \frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y,$$

то функцию Грина можно найти по следующим формулам.

Здесь $y_{\text{л}}(s)$ и $y_{\text{п}}(s)$ — функции, удовлетворяющие однородному уравнению и левому или правому краевому условию соответственно. Константа $C$ определяется из соотношения $C = W(x)p(x)$, где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{\text{л}}(x) & y_{\text{п}}(x) \\ y'_{\text{л}}(x) & y'_{\text{п}}(x) \end{vmatrix}.$$

$G(x; s)$:




Заметим, что в этом случае уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{p'(x)}{p(x)}W \text{ и } p(x)W' + p'(x)W = 0,$$

то есть $p(x)W(x) = const$. Рассмотрим пример.

**Пример 2.** $x^2y'' + 2xy' = f(x)\,, \quad y'(1) = 0\,, \quad y(2) = 0.$

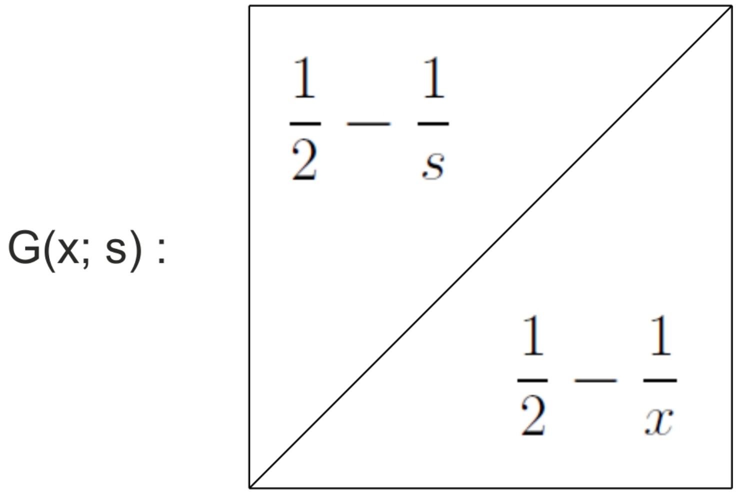
$$(x^2y')' = f(x).$$

Общее решение $y = C_1 + C_2/x$.

$$y_л(x) = 1\,, \quad y_п(x) = \frac{2}{x} - 1\,, \quad W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{x} - 1 \\ 0 & -\frac{2}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x^2}\,, \quad W(x)p(x) = -2.$$

Если оператор $L$ был самосопряжённый, то функция $G(x, s)$ в этом случае будет симметричной и, следовательно, интегральный оператор тоже будет самосопряжённым. Построим функцию Грина для совсем простой краевой задачи и посмотрим, как она работает.

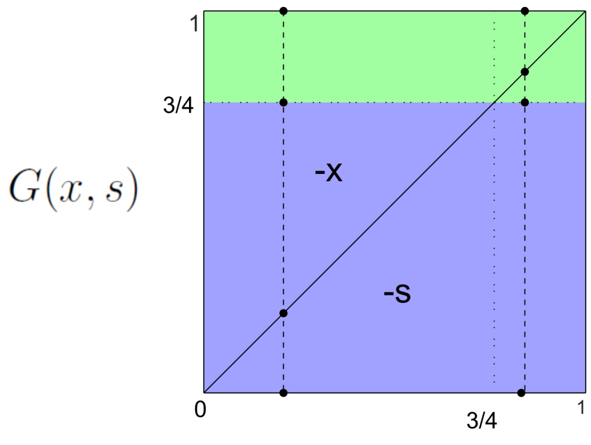
**Пример 3.** $y'' = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(1) = 0$




$$y_{\text{о.р.о.}} = C_1 + C_2 x\,, \quad y_{\text{л}} = x\,, \quad y_{\text{п}} = 1.$$

Оператор самосопряжённый, поэтому действуем далее также, как и в примере 2. Найдём

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\,, \quad p(x) = 1\,, \quad C = -1.$$




Итак, $y(x) = \int\limits_0^1 G(x,s) f(s) ds = -\int\limits_0^x s f(s) ds + \int\limits_x^1 x f(s) ds.$

Пусть функция $f(x)$ имеет следующий вид:

Фиксируем $0 \leqslant x \leqslant 3/4$, тогда

$$f(x) = \begin{cases} 4x, \ 0 \leqslant x \leqslant 3/4, \\ 3, \ 3/4 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

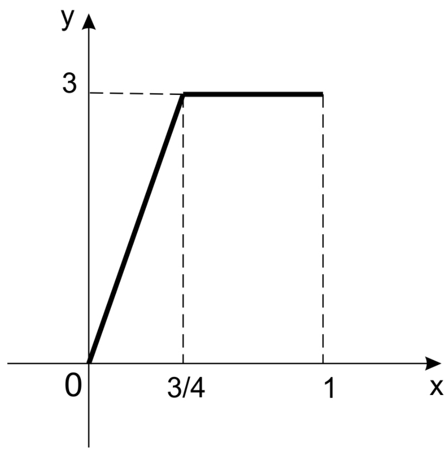



**Рис. 23.1.** Вид функции $f(x)$.

$$y(x) = -\int_0^x s \cdot 4s ds - \int_x^{3/4} x \cdot 4s ds - \int_{3/4}^1 3x ds = -\frac{4}{3}s^3\Big|_0^x - 2xs^2\Big|_x^{3/4} - 3xs\Big|_{3/4}^1 =$$

$$= -\frac{4}{3}x^3 - 2x\left(\frac{9}{16} - x^2\right) - 3x\frac{1}{4} = \frac{2}{3}x^3 - \frac{15}{8}x.$$

Если $3/4 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$y(x) = -\int_0^{3/4} s \cdot 4s ds - \int_{3/4}^x 3 \cdot s ds - \int_x^1 3x ds = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{32}.$$

Рассмотрим построение функции Грина для оператора более высокого порядка.

**Пример 4.** $y^{IV} = f(x)\,, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0\,, \quad y'''(1) = 0.$

Общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3.$$

Функция $y = C_4 x^3$ удовлетворяет левым краевым условиям. Следовательно, общий вид таких функций

$$y_{\text{л}}(x, s) = A(s) x^3.$$

Функция $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$ удовлетворяет правому краевому условию, следовательно

$$y_{\text{п}}(x,s) = B(s) + C(s)x + D(s)x^2.$$

Чтобы добиться того, что $L[G(x,s)] = \delta(x-s)$, следует обеспечить непрерывность функции $G(x,s)$ и её производных первого и второго порядка на диагонали $x = s$, то есть

$$\begin{aligned}
&y_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} = y_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} \qquad && B(s) + C(s)s + D(s)s^2 = A(s)s^3\\
&y'_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} = y'_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} \qquad && C(s) + 2D(s)s = 3A(s)s^2\\
&y''_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} = y''_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} \qquad && 2D(s) = 6A(s)s
\end{aligned}$$

Третья производная должна терпеть скачок.

$$y'''_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} - y'''_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} = \frac{1}{a_0(s)}\,, \qquad\qquad -6A(s) = 1.$$

Из этой системы определяем функции $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$:

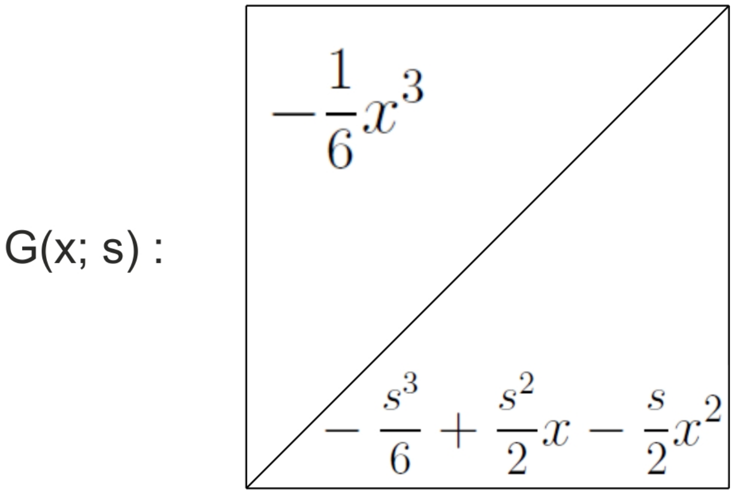
$$A(s) = -\frac{1}{6}\,,\quad D(s) = -\frac{s}{2}\,,\quad C(s) = \frac{s^2}{2}\,,\quad B(s) = -\frac{s^3}{6}.$$

Итак,

Обратимся к краевым задачам с неоднородными краевыми условиями

$$L[y] = f\,, \qquad \begin{aligned} &\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A,\\ &\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B. \end{aligned}$$

Ищем решение в виде суммы $y(x) = u(x) + v(x)$, где функция $u(x)$ является решением неоднородного уравнения с однородными граничными




условиями

$$L[u] = f\,, \qquad \begin{aligned} &\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \\ &\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{aligned}$$

Такую задачу мы умеем решать и

$$u(x) = \int\limits_a^b G(x,s) f(s) ds.$$

А функция $v(x)$ является решением однородного уравнения $L[v] = 0$ и удовлетворяет неоднородным краевым условиям. Можно показать, что если оператор $L$ невырожден, то мы всегда можем найти такую функцию. Рассмотрим пример

**Пример 5.** $xy'' - y' = f(x)\,, \quad y'(1) = 1\,, \quad y(2) = -1$

$$y(x) = u(x) + v(x).$$

Функцию Грина для этого оператора мы уже нашли в примере 1, поэтому

$$u(x) = \int\limits_1^2 G(x,s) f(s) ds.$$

Найдём функцию $v(x)$.

$$v(x) = C_1 x^2 + C_2,$$

$$\begin{cases} v'(1) = 2C_1 = 1, \\ v(2) = 4C_1 + C_2 = -1. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 1/2$, $C_2 = -3$ и $v(x) = x^2/2 - 3$. Итак,

$$y(x) = \int\limits_1^2 G(x,s) f(s) ds + x^2/2 - 3.$$

Напомним, что реализуемый здесь подход называется принципом суперпозиции.

Если оператор $L$ вырожден, то, как мы помним, существует ненулевая функция $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$. Оказывается, если рассмотреть множество функций, удовлетворяющих краевым условиям и ортогональных функции $e_0(x)$ ($y \in \mathcal{D}_L^0$), то на этом множестве оператор оказывается невырожденным и мы можем построить обратный. Обратный оператор будет опять интегральным оператором и его ядро называется обобщённой функцией Грина.

Итак, если

$$L[y] = f(x)\,, \qquad \begin{aligned} &\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ &\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{aligned}$$

оператор $L$ вырожден, $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$, $f(x)$ ортогональна $e_0(x)$, то функция

$$y_0(x) = \int\limits_a^b G_{\text{об}}(x,s) f(s) ds$$

даёт решение поставленной краевой задачи. Это решение ортогонально функции $e_0(x)$ и определяется однозначно. Мы знаем, что в этом случае краевая задача имеет бесконечно много решений

$$y(x) = y_0(x) + C \cdot e_0(x).$$

Мы приведём алгоритм нахождения обобщённой функции Грина только для самосопряжённого оператора

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y.$$

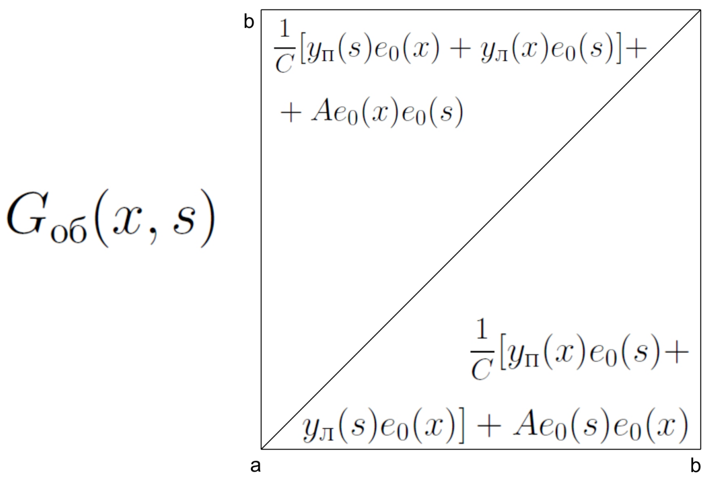
<u>1 шаг</u>. Найти функцию $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$.

<u>2 шаг</u>. Найти решения неоднородного уравнения $L[y] = e_0(x)$, удовлетворяющие правому ($y_{\text{п}}(x)$)и левому ($y_{\text{л}}(x)$) краевым условиям.

<u>3 шаг</u>. Вычислить константу $C = W(x) \cdot p(x)$, где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{\text{л}}(x) - y_{\text{п}}(x) & e_0(x) \\ y'_{\text{л}}(x) - y'_{\text{п}}(x) & e'_0(x) \end{vmatrix}.$$

<u>4 шаг</u>. Записать диаграмму для функции $G_{\text{об}}(x,s)$.




<u>5 шаг</u>. Найти константу $A$ из условия ортогональности

$$\int\limits_a^b G_{\text{об}}(x,s)e_0(s)ds = 0.$$

Построим обобщённую функцию Грина для краевой задачи, которую мы рассматривали на предыдущем занятии.

**Пример 6.** $y'' + y = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(\pi) = 0$

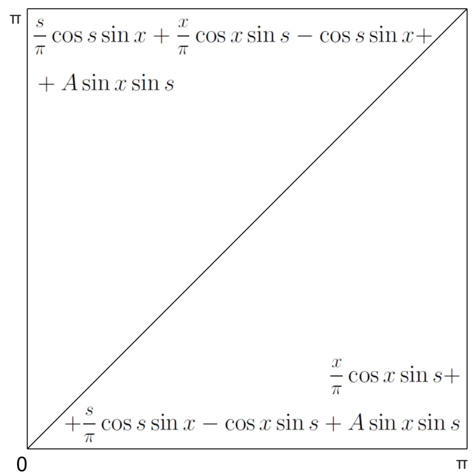
Функция $e_0(x) = \sin x \in \operatorname{Ker} L$. Ищем решение краевой задачи, ортогональное функции $e_0(x)$. Условие разрешимости: $\int\limits_0^\pi f(x)\sin x dx = 0$. Уравнение $y'' + y = \sin x$ имеет общее решение

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{x}{2}\cos x,$$

$$y_{\text{л}}(x) = -\frac{x}{2}\cos x\,, \quad y_{\text{п}}(x) = \frac{\pi}{2}\cos x - \frac{x}{2}\cos x.$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\frac{\pi}{2}\cos x & \sin x \\ \frac{\pi}{2}\sin x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad C = -\frac{\pi}{2}.$$

$G_{\text{об}}(x, s)$




Запишем функцию $G_{\text{об}}(x, s)$ в следующем виде, удобном для отыскания константы $A$.

$$G_{\text{об}}(x, s) = A \sin x \sin s +$$
$$+ \frac{s}{\pi}\cos s \sin x + \frac{x}{\pi}\cos x \sin s + \begin{cases} -\cos s \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ -\cos x \sin s, & s \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найдём константу $A$ из условия

$$\int\limits_a^b G_{\text{об}}(x,s)\sin s ds = 0.$$

Имеем

$$A\sin x\int\limits_0^\pi \sin^2 s ds + \sin x\int\limits_0^\pi \frac{s}{\pi}\cos s\sin s ds + \frac{x}{\pi}\cos x\int\limits_0^\pi \sin^2 s ds -$$

$$-\cos x\int\limits_0^x \sin^2 s ds - \sin x\int\limits_x^\pi \cos s\sin s ds = 0.$$

Вычислим интегралы:

$$\int\limits_0^\pi \sin^2 s ds = \frac{\pi}{2}, \quad \int\limits_0^\pi \frac{s}{\pi}\cos s\sin s ds = -\frac{1}{4}$$

$$\int\limits_0^x \sin^2 s ds = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}, \quad \int\limits_x^\pi \cos s\sin s\, ds = \frac{\cos 2x - 1}{4}.$$

Итак,

$$A\frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{4}\sin x + \frac{\pi}{2}\frac{x}{\pi}\cos x - \cos x\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) - \sin x\left(\frac{\cos 2x - 1}{4}\right) = 0$$

$$A\frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}(\sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x) + \frac{1}{4}\sin x = 0$$

$$A\frac{\pi}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin x = 0.$$

Откуда $A = -\dfrac{1}{2\pi}$. Обобщённая функция Грина найдена.

## Самостоятельная работа

Найти функцию Грина. Записать решение краевой задачи.

**1**. $y'' = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(1) = 0.$

**2**. $(xy')' = f(x)\,, \quad y(0)$ — ограничена$\,, \quad y(1) = 0.$

**3**. $y'' - y' = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(1) = 0.$

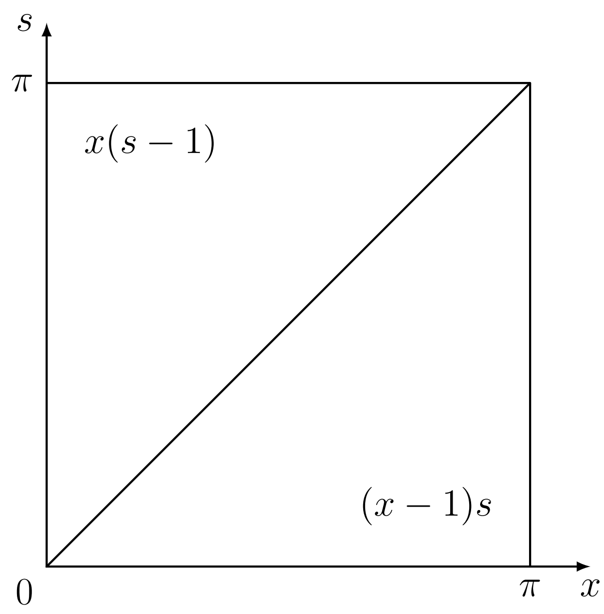
**4**. $y'' + y = f(x)\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y(2\pi) = 0.$

**5**. $y''' = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(1) = 0\,, \quad y''(1) = 0.$

## Ответы к самостоятельной работе

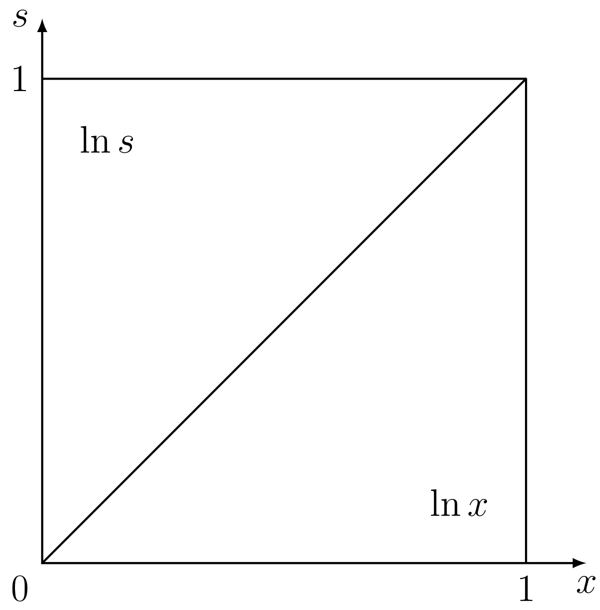
**1**. $y_{\text{л}} = x\,, \quad y_{\text{п}} = x - 1$

$G(x;s)$:



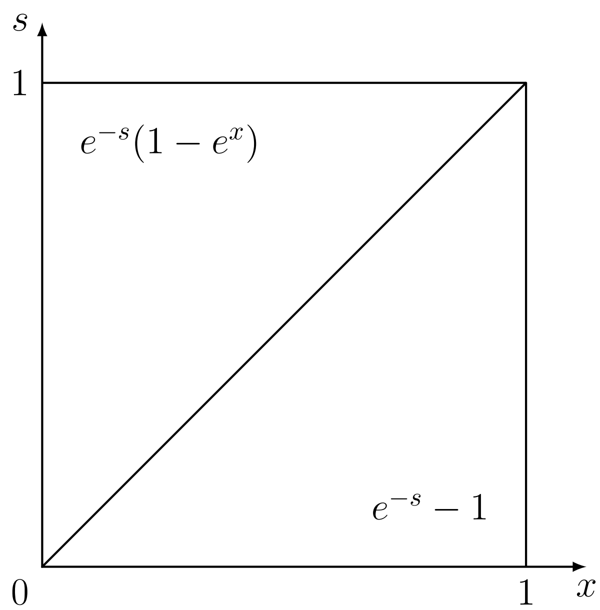
**2**. $y_{\text{л}} = 1\,,\quad y_{\text{п}} = \ln x$

$G(x;s)$:



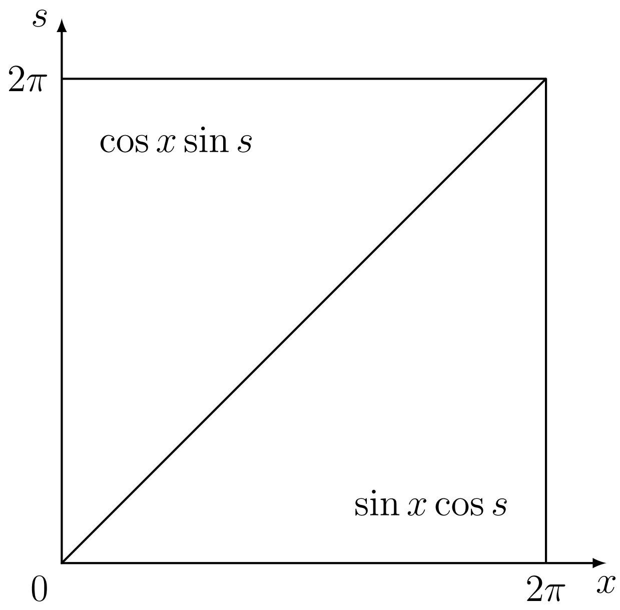

**3**. $y_{\text{л}} = e^{x} - 1\,,\quad y_{\text{п}} = 1$

$G(x;s)$:



**4**. $y_{\text{л}} = \cos x\,, \quad y_{\text{п}} = \sin x$

$G(x;s)$:




**5**. $y_{\text{л}} = A(s)x^2 + B(s)x\,, \quad y_{\text{п}} = C(s)$

$G(x;s)$: