Гл. 4. Числовые и функциональные ряды.
§ 4.1. Определение числового ряда и основные свойства числовых рядов.

Определение 4.1 (числового ряда)

Пусть x_n — числовая последовательность. Формальную запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ называют **числовым рядом**. Сумму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ называют **n-й частичной суммой ряда**, а элементы последовательности x_n, из которой формируется ряд, — **общим членом ряда**. Если последовательность частичных сумм S_n имеет конечный предел, то говорят, что **ряд сходится**, а сам предел называют **суммой ряда** и обозначают тем же символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Замечание 4.2

Определение ряда — это, по существу, еще один предельный переход. Заметим, что ряд, с одной стороны, похож на последовательность, ибо сумма ряда определяется как предел соответствующей последовательности. С другой стороны, ряд похож на несобственный интеграл. Поэтому результаты, касающиеся рядов, будут похожи на результаты либо для последовательностей, либо для несобственных интегралов. Утверждений, специфических для рядов, будет немного.

Теорема 4.3 (критерий Коши сходимости числового ряда)

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 \ (m > n) \ \left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \varepsilon.$$

Теорема 4.4 (необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.

Замечание 4.5 (о сравнении с несобственным интегралом)

Ответим на такой вопрос: если несобственный интеграл на промежутке $[a, +\infty)$ сходится, то должна ли подынтегральная функция стремиться к нулю? Оказывается, что необязательно. Это ясно с геометрической точки зрения и нетрудно подтвердить аналитически. Дело в том, что интеграл, например, от положительной функции, ассоциируется с площадью ее подграфика, которая, в свою очередь, может быть сделана конечной не только за счет малой высоты, т. е. значений функции, но и за счет узости тех промежутков, на которых она поднимается вверх. Нетрудно понять, что, взяв весьма малый по длине промежуток из области интегрирования, мы можем поднять значения функции на нем довольно высоко, при этом согласовав длину и высоту так, чтобы площадь соответствующего кусочка подграфика была малой, настолько, что сумма всех таких площадей оказалась бы конечной.

Утверждение теоремы 4.4 показывает, что для рядов такое невозможно, и ясно, по какой причине — для рядов ширина полоски, над которой берется соответствующее значение x_n последовательности, всегда равна единице, и сходимость может быть только в случае, когда формирующая ряд последовательность стремится к нулю.

Определение 4.6 (абсолютной и условной сходимостей)

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ **сходится абсолютно**, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$, оставленный из модулей его членов. Если ряд сходится, но не абсолютно, его называют **условно сходящимся**.

Замечание 4.7

Это определение подчеркивает, что причиной сходимости ряда может оказаться быстрое стремление к нулю его общего члена, а может сработать эффект сложения членов с разными знаками, при котором вклад в сумму ряда положительных членов компенсируется вкладом отрицательных.

Теорема 4.8 (о сходимости абсолютно сходящегося ряда)

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

§ 4.2. Сходимость знакопостоянных рядов.

Теорема 4.9 (мажорантный признак и теорема сравнения)

Пусть $x_n \geq 0$ *и* $y_n \geq 0$.

1) (мажорантный признак). Если начиная с некоторого номера имеет место неравенство $0 \leq x_n \leq y_n$, *то сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *влечет сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

2) (теорема сравнения). Если $x_n \sim y_n$ *при* $n \to \infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Для рядов есть несколько специфических признаков сходимости, не имеющих аналогов для несобственных интегралов. Они основаны на получении сходимости какого-то ряда путем сравнения его с одним из более просто устроенных рядов.

Докажем еще один полезный признак, затем, используя его, установим сходимость некоторых эталонных рядов, и с ними впоследствии другие ряды будем сравнивать.

Теорема 4.10 (интегральный признак сходимости)

Пусть функция $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *неотрицательна, невозрастающая и интегрируема на каждом промежутке* $[1, b] \subset [1, +\infty)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$. *сходится в том и только в том случае, если интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.*

Теорема 4.11 (о сходимости эталонных рядов)

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $|q| < 1$.

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\alpha > 1$.

3) Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\alpha > 1$.

Замечание 4.12

Зачем может понадобиться ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$? Если в ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ окажется $\alpha = 1$, т. е. получается гармонический ряд, то он расходится. Возникает вопрос: сколько надо добавить в знаменателе, чтобы ряд стал сходящимся? Можно сколько-то повысить степень, но на самом деле можно добавить множитель в виде логарифма в степени, большей единицы. Кроме того, этот ряд используется в доказательстве некоторых признаков сходимости, на которых мы, впрочем, останавливаться не будем.

Замечание 4.13 (о гармоническом ряде)

Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится и это надо хорошо помнить. Название ряда связано с тем, что для последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ каждый член является средним гармоническим своих соседей. Наконец, у этого ряда есть хорошая физическая иллюстрация его расходимости. Представьте себе, что выкладывается карниз из кирпичей. Можно положить первый кирпич на подставку так, чтобы за пределами подставки была половина кирпича. Следующий кирпич можно положить на первый так, чтобы вся конструкция не упала, выдвинув его на треть. Следующий кирпич можно выдвинуть на четвертую часть, следующий — на пятую, и т. д. Тем самым выступающие части кирпичей образуют гармонический ряд.

Получается, что расстояние, на которое можно продлить карниз за пределы стены, равно частичной сумме гармонического ряда, а ввиду расходимости такого ряда оказывается, что выдвинуть карниз можно на любую длину и он при этом не упадет.

Следующие результаты специфичны для рядов, т. е. нет их аналогов для последовательностей и несобственных интегралов.

Теорема 4.14 (признак Коши сходимости ряда)

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *с* $x_n \geq 0$. *Предположим, что существует предел* $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. *Тогда*

1) если $r < 1$, *то ряд сходится;*

2) если $r > 1$, *то ряд расходится;*

3) если $r = 1$, *то ряд может сходиться, а может расходиться.*

Замечание 4.15

Выполнение условия $r = 1$ в теореме 4.14 говорит о том, что в этом случае этот признак недостаточно чувствителен для определения сходимости или расходимости исследуемого ряда. Это происходит по той причине, что признак Коши основан на сравнении с довольно быстро сходящимся рядом, а именно с геометрической прогрессией, и оказывается слишком грубым для не столь быстро сходящихся рядов. В следующем признаке за основу берется, как и в признаке Коши, сравнение с геометрической прогрессией, но признак выражается не в терминах корня степени n, а в терминах отношения двух соседних членов ряда.

Теорема 4.16 (признак Даламбера сходимости ряда)

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *с* $x_n > 0$. *Предположим, что существует предел* $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

1) если $\alpha < 1$, *то ряд сходится,*
2) если $\alpha > 1$, *то ряд расходится,*
3) если $\alpha = 1$, *то ряд может сходиться, а может расходиться.*

Пример 4.17

Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$, где x — некоторое число.

Поскольку в общем члене ряда есть возведение в степень n, изучим абсолютную сходимость ряда и применим признак Коши. Найдем $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0$ стало быть, согласно признаку Коши ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$ и даже абсолютно.

Пример 4.18

Изучим сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, Докажем абсолютную сходимость этого ряда, воспользовавшись признаком Даламбера. Найдем $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1}$ следовательно, ряд сходится и даже абсолютно при любом $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 4.19 (еще раз о ряде Тейлора)

У нас уже появлялись суммы $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Действительно, в гл. 2 мы видели, что $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x)$. С другой стороны, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. сходится. Означает ли последнее обстоятельство, что $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$? Конечно, безусловно верный ответ «да, нет, не знаю», но он не очень содержателен. Ответ «да» — это ответ уверенного физика, который не задумывается над лишним, ответ «нет» — это ответ физика, запуганного математиками, который уже начинает задумываться, но еще не знает правильного ответа. Здесь ответ: да, но следует он не из совпадения выражений в полиноме Тейлора с общим членом ряда и сходимости ряда, а из сходимости к нулю остаточного члена $r_n(x)$!

Все зависит от остаточного члена: если он стремится к нулю, то, разумеется, последовательность полиномов Тейлора как последовательность частичных сумм соответствующего ряда сойдется к сумме ряда. Однако такое бывает не всегда — есть функции, у которых сумма ряда Тейлора не совпадает с самой функцией. К примеру, таковой будет функция $f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ у которой все производные в нуле равны нулю, так что ряд Тейлора нулевой, однако функция отлична от тождественного нуля. Эта функция вся остается в остатке. Докажем, что в нашем примере $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$. Действительно, запишем остаточный член в форме Лагранжа: $r_n(x) = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$, где ξ — некоторая точка между 0 и x. Тогда $|r_n(x)| = \frac{e^{|x|} x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$, так что для любого фиксированного x остаток стремится к нулю.

§ 4.3. Сходимость знакопеременных рядов.

Знакопеременные ряды, т. е. ряды, члены которых меняют знак, удобно представлять в виде $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, где x_n — знакопеременная последовательность, а y_n — знакопостоянна.

Теорема 4.20 (признаки Абеля и Дирихле для рядов)

Пусть выполнена одна из пар условий:

(A1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится,*

(A2) последовательность y_n *монотонна и ограничена;*

или

(D1) последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ *ограничена,*

(D2) последовательность y_n *монотонна и стремится к нулю.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *сходится.*

Если выполнены условия (A1), (A2), то об утверждении теоремы говорят как о признаке Абеля, если (D1), (D2), то — Дирихле.

Теорема 4.21 (признак Лейбница)

Пусть последовательность y_n *монотонна и стремится к нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n y_n$ *сходится.*

Пример 4.22

Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

§ 4.4. Равномерная сходимость функциональных последовательностей.

Определение 4.23 (поточечной сходимости функциональной последовательности)

Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, заданных на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Фиксировав $x \in X$, получаем числовую последовательность $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Если для любого $x \in X$ эта числовая последовательность сходится, то возникает новая функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$, и говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ поточечно на множестве X.

Замечание 4.24

Обратим внимание на то, что при поточечной сходимости скорость сходимости может зависеть от выбора точки x. Запишем факт сходимости, используя определение предела последовательности: $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ в каждой точке $x \in X$ означает, что
$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Определение 4.25 (равномерной сходимости функциональной последовательности)

Говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится к функции f равномерно на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Равномерную сходимость последовательности f_n к f обозначают через $f_n \rightrightarrows f$.

Замечание 4.26

Разница между поточечной и равномерной сходимостями в том, что изменилось местоположение квантора $\forall x \in X$. При поточечной сходимости требуемый номер n_0 зависит, вообще говоря, от ε и от x, а при равномерной его можно выбрать так, чтобы он подходил в равной мере для всех точек данного множества. Нетрудно понять, что из равномерной сходимости последовательности функций следует её поточечная сходимость, разумеется, к тому же пределу.

Пример 4.27

Исследование поточечной и равномерной сходимости последовательности $f_n(x) = x^n$ на отрезке $[0, 1]$.

Пример 4.28

Исследование поточечной и равномерной сходимости на $\mathbb{R}$ последовательности $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ и последовательности производных $f_n'(x)$.

Пример 4.29

Исследование поточечной и равномерной сходимости на $\mathbb{R}$ последовательности $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ и последовательности производных $f_n'(x)$.

Теорема 4.30 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности)

Последовательность функций $f_n(x)$ является равномерно сходящейся на множестве $X \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in X \ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Без доказательства.

Упражнение 4.31

Доказать теорему 4.30.

Теорема 4.32 (о равномерном пределе последовательности непрерывных функций)

Пусть последовательность $f_n(x)$ непрерывных на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$ функций сходится равномерно к функции $f(x)$. Тогда f непрерывна на X.

Без доказательства.

Определение 4.33 (равномерной нормы)

Для функции f, определённой на некотором множестве X, величину $\|f\| = \|f\|_{C(X)} := \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ называют **равномерной нормой** функции f.

Упражнение 4.34

Доказать, что $f_n \rightrightarrows f$ на X тогда и только тогда, когда $\|f_n - f\| \to 0$.

Замечание 4.35

Через $C(X)$ обозначается пространство всех непрерывных функций на множестве X. Использование обозначения $\|f\|_{C(X)}$ для равномерной нормы также не случайно. Равномерная норма естестественна для пространства $C(X)$ в том смысле, что для последовательности непрерывных функций сходимость $\|f_n - f\| \to 0$, равносильная равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$, не выводит результат за пределы пространства непрерывных функций, как было доказано в теореме 4.32. С другой стороны, равномерная норма, рассматриваемая на пространстве $C(X)$, удовлетворяет всем аксиомам нормы.

§ 4.5. Равномерная сходимость функциональных рядов.

Определение 4.36 (поточечной и равномерной сходимостей функционального ряда)

Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, заданных на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Если для любого $x \in X$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, то говорят, что этот ряд сходится поточечно на множестве X. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на множестве X, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in X\ \left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

Замечание 4.37

Равномерная сходимость последовательности частичных сумм равносильна также выполнению

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \ \sup\limits_{x \in X} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ или

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \ \left\| \sum\limits_{k=1}^{k} f_n - f \right\| < \varepsilon.$

Теорема 4.38 (о непрерывности суммы ряда)

Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ *— последовательность функций на* $X \subset \mathbb{R}$ *такая, что*
1) каждая из функций f_n *непрерывна на* X;
2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно к* $f(x)$ *на* X.
Тогда функция $f(x)$ *непрерывна на* X.

Без доказательства.

Теорема 4.39 (о дифференцируемости функционального ряда)

Пусть
1) функции $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы;*
2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится поточечно на* (a, b)*;*
3) ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ *сходится равномерно на любом замкнутом промежутке, содержащемся в* (a, b).
Тогда сумма ряда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *дифференцируема и имеет место равенство*
$\frac{d}{dx} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x).$

Без доказательства.

Теорема 4.40 (об интегрировании функционального ряда)

Пусть
1) $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$;
2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$.
Тогда сумма ряда интегрируема по Риману и
$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

Без доказательства.

Для обоснования равномерной сходимости функциональных рядов чаще всего применяется мажорантный признак Вейерштрасса, основанный на критерии Коши.

Теорема 4.41 (критерий Коши сходимости функционального ряда)

Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ *— последовательность функций на* $X \subset \mathbb{R}$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* X *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n \geq n_0\ \forall x \in X\ \left\| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right\| < \varepsilon.$$

Без доказательства.

Теорема 4.42 (мажорантный признак Вейерштрасса)

Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ *— последовательность функций на* $X \subset \mathbb{R}$*. Предположим, что*

1) существует такая числовая последовательность c_n*, что* $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x)| \le c_n$*;*

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* X*.*

Без доказательства.

Пример 4.43

Исследование равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

§ 4.6. Степенные ряды.

Определение 4.44 (степенного ряда)

Функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, где $a_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ — фиксированная точка и $x \in \mathbb{R}$ — произвольная точка, называют степенным рядом.

Замечание 4.45

Наряду со степенными рядами вещественного аргумента рассматривают ряды с комплексным аргументом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, где $c_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка и $z \in \mathbb{C}$ — произвольная точка. Большинство формулируемых ниже утверждения для вещественных степенных рядов имеют дословную переформулировку для комплексных степенных рядов.

Замечание 4.46

Сдвигом начала координат общий случай сводится к случаю ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, Тем самым всегда можно считать, что рассматривается степенной ряд с нулем в качестве начальной точки.

Теорема 4.47 (о сходимости степенного ряда)

Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *определим число* $r = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$, *называемое* ***радиусом сходимости*** *(если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, *то полагают* $r = +\infty$, *а если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, *то полагают* $r = 0$*).*

1) Если $r = 0$, *то ряд сходится только при* $x = 0$. *Если* $r > 0$, *то ряд сходится для любого* x *такого, что* $|x| < r$.

2) Если $r < \infty$, *то для любого* x *такого, что* $|x| > r$, *ряд расходится.*

3) При $r > 0$ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится равномерно в любом замкнутом интервале* $|x| \le \rho$, *где* $0 \le \rho \le r$.

Без доказательства.

Замечание 4.48

Формулу $r = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ для радиуса сходимости степенного ряда называют формулой Коши — Адамара. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ множество $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$ называется интервалом сходимости. Для комплексного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ также формулой Коши — Адамара $r = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ определяется радиус сходимости, а круг $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ называется кругом сходимости.

Пример 4.49

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Теорема 4.50 (об интегрировании степенного ряда)

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *— степенной ряд с радиусом сходимости* $r > 0$ *и* $y \in \mathbb{R}$ *— точка из интервала сходимости ряда, т. е.* $|y| < r$.

Тогда $\int\limits_0^y \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^y x^n \, dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{y^{n+1}}{n+1}$. *Иначе говоря, степенной ряд можно интегрировать почленно.*

Без доказательства.

Определение 4.51 (пространств $C^k((a,b))$)

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Для $k \in \mathbb{N}$ через $C^k((a,b))$ обозначается множество всех функций $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, обладающих непрерывными производными до порядка k, а сами такие функции называются C^k-**гладкими**. Через $C^\infty((a,b))$ обозначается мнножество всех бесконечно дифференцируемых функций $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, а сами такие функции называются C^∞-**гладкими**.

Замечание 4.52

Отметим, что для множества $C((a,b))$ всех непрерывных функций $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ используют также обозначение $C^0((a,b))$. Напомним, что любая дифференцируемая функция является непрерывной. Верны следующие соотношения

$$C^\infty((a,b)) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k((a,b)),\ C^\infty((a,b)) \subset C^k((a,b)),$$
$$C^{k+1}((a,b)) \subset C^k((a,b)),\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Определение 4.53 (ряда Тейлора)

Пусть $f \in C^\infty((a,b))$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in (a,b)$. Тогда степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется рядом Тейлора для функции f.

В случае $x_0 = 0$ ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ называют также рядом Маклорена.

Теорема 4.54 (о дифференцировании степенного ряда)

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *— степенной ряд с радиусом сходимости* $r > 0$.

Тогда сумма $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-r, r)$, *является бесконечно дифференцируемой функцией на* $(-r, r)$, *т. е.* $f \in C^{\infty}((-r, r))$.

При этом

1) $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n (x^n)^{(k)} = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$,

$x \in (-r, r)$, *т. е. степенной ряд можно в интервале сходимости дифференцировать любое число раз и производная суммы степенного ряда получается почленным дифференцированием слагаемых;*

2) степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *является рядом Тейлора для* f, *т. е.*

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Без доказательства.

Пример 4.55 (ряды Тейлора основных элементарных функций)

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $|x| < 1$.
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n x^n$, $|x| < 1$, где $C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Без доказательства.