Задача

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2=6 \\ 3x_1+7x_2=1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ 3x_1+7x_2=1 \end{cases} \qquad \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ 4x_2=-8 \end{cases} \qquad \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_2=-2 \end{cases} \qquad \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-2 \end{cases} \qquad \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Алгоритм:

Данная система $Ax=b$ → Расширенная матрица $(A|b)$ → (Ступенчатый вид A | …) + делаем выводы

→ (Строго ступенчатый вид матрицы A | …) → Записываем „новую" систему →

→ ответ!

Метод исключения неизвестных (метод Гаусса)

Матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• 0	1	-2	3	$A1$	
-3	2	-7	0	$A2$	x
• 1	0	1	2	$A3$	
2	1	0	1	$A4$	x
0	2	-4	6	$A5 = A2 + 3A3$	x
0	1	-2	3	$A6 = A4 - 2A3$	x
0	0	0	0	$A7 = A5 - 2A1$	
0	0	0	-6	$A8 = A6 - A1$	

Ступенчатый вид:

1	0	1	2	$B1$	x
0	1	-2	3	$B2$	x
0	0	0	-6	$B3$	x
0	0	0	1	$B4 = B3 : (-6)$	
1	0	1	0	$B5 = B1 - 2B4$	
0	1	-2	0	$B6 = B2 - 3B4$	

0 0 0 0 →

Строго ступен. вид:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Т.е

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

№693

Система
$$\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ x_1+8x_2-7x_3=12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & 5 & -8 & 8 \\
4 & 3 & -9 & 9 \\
2 & 3 & -5 & 7 \\
1 & 8 & -7 & 12 \\
0 & -3 & 1 & -5 \\
0 & -2 & 3 & -1 \\
0 & -11 & 6 & -16 \\
0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 7 & 7 \\
0 & 0 & 28 & 28 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \\ A5=A2-2A3 \\ A6=A3-A1 \\ A7=A1-2A4 \\ A8=A6-A5 \\ A9=A6+2A8 \\ A10=A7+11A8 \\ A11=A10-4A9
\end{array}$$

красавица наша

Ступ. вид
$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 8 & -7 & 12 \\
0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 8 & 0 & 19 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
B1 \\ B2 \\ B3 \\ B4=B1+7B3 \\ B5=B2-2B3 \\ B6=B4-8B5
\end{array}$$

Подставляем в систему (хотя бы в одно уравнение)

Строго ступ. вид
$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)$$

Ответ:
$$\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \\ x_3=1 \end{cases}$$

Проверка:
$2\cdot 3+5\cdot 2-8\cdot 1=8$ ✓

Опр <u>Главный столбец</u> – столбец, в котором есть вед. элемент ступ. матрицы

Утв СЛУ определена $\Leftrightarrow$ все столбцы в ступ. виде матрицы главные

N 692 $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases}$

Решение:

красавица наша →

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 = A2 - 2\cdot A1 \\ A5 = A1 - 3A4 \\ A6 = A3 - 5A4 \\ A7 = A5 - A6 \end{array}$$

стоп!

$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 1$, т.е

$0 = 1$ ✗

⇒ система не имеет решений

Опр СЛУ наз-ся совместной, если она имеет хотя бы одно решение.

СЛУ наз-ся несовместная, если она не имеет решений

Утв Система совместна ⇔ в ступ виде матрицы каждой нулевой строке соответствует нулевой свободный член.

№634*.

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2+3x_3-2x_4=2, \\ 4x_1+3x_2+6x_3-4x_4=3, \\ 3x_1+2x_2+9x_3-6x_4=4 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{array}{rrrr|rl} 5 & 4 & 3 & -2 & 2 & A1 \\ 4 & 3 & 6 & -4 & 3 & A2 \\ 3 & 2 & 9 & -6 & 4 & A3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -1 & A4=A1-A2 \\ 0 & -1 & 18 & -12 & 7 & A5=A2-4A4 \\ 0 & -1 & 18 & -12 & 7 & A6=A3-3A4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A7=A5-A6 \\ 1 & 0 & 15 & -10 & 6 & A8=A4+A5 \\ 0 & 1 & -18 & 12 & -7 & A9=-A5 \end{array}$$

главные столбцы

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+15x_3-10x_4=6 \\ x_2-18x_3+12x_4=-7 \end{cases}$$

главные переменные или зависимые переменные

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=6-15x_3+10x_4 \\ x_2=-7+18x_3-12x_4 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$ – общее решение СЛУ

свободные переменные или независимые переменные

Опр СЛУ наз-ся <u>неопределённой</u>, если она имеет бесконечно много решений

Утв Число свободных переменных = числу неглавных столбцов

Проверка: Найдем <u>частное</u> решение:

$x_3=1, x_4=1 \Rightarrow x_1=6-15+10=1$

$x_2=-7+18-12=-1$

Подставляем в изначальную систему:

$5\cdot 1+4\cdot(-1)+3\cdot 1-2\cdot 1=2$ ✓

Задание с параметром.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -7 \\ \lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + \lambda x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ \lambda & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \lambda & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 2+\lambda & 1+2\lambda & 8+7\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & \lambda & 5 \\ 0 & 2+\lambda & 1+2\lambda & 8+\lambda 7 \end{array}\right)$$

ступенчатый вид

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & \lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 2(\lambda-1) \end{array}\right)$$

СТОП!

$1+2\lambda-\lambda(2+\lambda) = 1-\lambda^2$

$8+7\lambda-5(2+\lambda) = 2\lambda-2$

Делить на ноль нельзя!

$1-\lambda^2=0$

$\lambda = \pm 1$

- $\lambda = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow$ система несовместна при $\lambda = -1$

- $\lambda = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -\overset{2}{\cancel{7}} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$ система при $\lambda = 1$ совместная и неопределённая

Общее решение $\begin{cases} x_1 = -\overset{2}{\cancel{7}} + x_3, \\ x_2 = 5 - x_3, \end{cases} x_3 \in \mathbb{R}$

- $\lambda \neq \pm 1$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & \lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{1+\lambda} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{-\overset{11}{\cancel{13}}-7\lambda}{1+\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5+7\lambda}{1+\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{1+\lambda} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{1+\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5+7\lambda}{1+\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{1+\lambda} \end{array}\right)$$

$5 + \lambda \cdot \frac{2}{1+\lambda} = \frac{5+7\lambda}{1+\lambda}$

$-7 + 2 \cdot \left(\frac{-2}{1+\lambda}\right) = \frac{-\overset{11}{\cancel{13}}-7\lambda}{1+\lambda}$

$\frac{-\overset{11}{\cancel{13}}-7\lambda}{1+\lambda} + \frac{5+7\lambda}{1+\lambda} = -\frac{6}{1+\lambda}$

$\Rightarrow$ Ответ: $x_1 = -\frac{6}{1+\lambda}$, $x_2 = \frac{5+7\lambda}{1+\lambda}$, $x_3 = -\frac{2}{1+\lambda}$