1. Магнитостатика

Урок 19

Векторный потенциал, магнитный диполь. Векторный магнитный потенциал $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$) удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\frac{\mathbf{j}}{r}dV = \frac{\mu}{c}J\frac{d\mathbf{l}}{r} = \mu\frac{\mathbf{v}dq}{cr} = \frac{\varepsilon\mu\mathbf{v}}{c}d\varphi.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV'}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}.$$

Векторный потенциал магнитного диполя

$$\mathbf{A}_{\text{точ}} = \frac{[\mathbf{m}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \quad \text{где} \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int[\mathbf{r}'\times\mathbf{j}']dV'.$$

Магнитный момент маленького витка с током $\mathbf{m} = \frac{JS}{c}\mathbf{n}$.
Сила и момент, действующие на магнитный диполь в слабо неоднородном поле

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{mB}) = (\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}, \mathbf{N} = [\mathbf{m}\times\mathbf{B}].$$

1.1. (Задача 4.15) Вычислить векторный потенциал: 1) однородного поля в координатах: а) декартовых, б) цилиндрических, в) сферических; 2) поля прямого тока; 3) поля кругового витка на больших расстояниях от витка.

Решение Векторный потенциал $\mathbf{A}$ магнитного поля $\mathbf{B}$ определяется соотношением

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \tag{1}$$

и дополнительным условием

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0\,. \tag{2}$$

В тех областях, где магнетик однороден, вектор $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{j}$ – заданное распределение токов. Решение уравнения (3) можно записать в виде интеграла по объему

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{\mu}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{R}')\,dV'}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}\,, \tag{4}$$

где $\mathbf{R}'$ – вектор положения элемента тока $\mathbf{j}(\mathbf{R}')\,dV'$ в выбранной системе координат.

1 а) Пусть $\mathbf{B}$ направлено по оси Z. Положим $A_z = 0$, поскольку циркуляция вектора $\mathbf{A}$ максимальна в плоскости (X,Y). Векторное уравнение (1) равносильно трем скалярным уравнениям, которые с учетом $A_z = 0$ запишутся в виде:

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z\,,$$
$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0\,, \tag{5}$$
$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = 0\,.$$

Решение этой системы не однозначно. Из двух последних уравнений следует, что A_y и A_x могут быть только функциями от x и y и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0\,. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) можно выбрать, например:

$$A_y = 0, \qquad A_x = A_1(y).$$

Подставляя их в уравнение (5), находим

$$A_x = B_z \cdot y.$$

Более симметричное решение уравнения (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} A_x &= b \cdot x + A_1(y)\,, \\ A_y &= -b \cdot y + A_2(x)\,, \end{aligned}$$

где b – произвольная постоянная. Подставляя это решение в уравнение (5), получаем

$$\frac{\partial A_2(x)}{\partial x} - \frac{\partial A_1(y)}{\partial y} = B_z = \mathrm{const}\ .$$

Откуда

$$A_1(y) = -\frac{1}{2}B_z \cdot y\,, \qquad A_2(x) = \frac{1}{2}B_z \cdot x\,.$$

Выбирая $b = 0$, окончательно находим:

$$A_x = -\frac{1}{2}B_z \cdot y\,, \qquad A_y = \frac{1}{2}B_z \cdot x\,, \quad A_z = 0\,.$$

1 б) В цилиндрической системе координат (z, r, α) уравнение (1) будет равносильно уравнениям

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \alpha} = B_z\,,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} = 0\,,$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0\,.$$

Полагая $A_z = 0$, как и в декартовой системе координат, уравнения принимают вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \alpha} = B_z\,,$$

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} = 0\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} = 0\,.$$

Выбирая $A_r = 0$, из уравнения (7) находим

$$A_\alpha = \frac{1}{2}B_z r.$$

1 в) В сферической системе координат (R,θ,α) проекциями вектора $\mathbf{B}$ будут:

$$B_R = B\cos\theta\,, \qquad B_\theta = -B\sin\theta\,, \qquad B_\alpha = 0\,.$$

Выбираем вектор $\mathbf{A}$ (как и в предыдущих случаях) лежащим в плоскостях, перпендикулярных $\mathbf{B}$. Тогда у $\mathbf{A}$ существует только отличная от нуля проекция A_α. Положим $A_R = A_\theta = 0$, тогда скалярные уравнения, соответствующие векторному уравнению (1), будут иметь вид:

$$\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\alpha) = B\cos\theta\,, \tag{8}$$

$$\frac{A_\alpha}{R} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial R} = B\sin\theta\,. \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (8), получаем

$$A_\alpha = \frac{1}{2}BR\sin\theta + f(R)\,,$$

где $f(R)$ – произвольная функция от R. Из симметрии задачи следует, что A_α не зависит от α. Подставляя A_α в уравнение (9), получаем $\partial f(R)/\partial R = 0$, значит, $f(R)$ можно выбрать равным нулю, $f(R) = 0$. Окончательно

$$A_R = A_\theta = 0\,, \qquad A_\alpha = \frac{1}{2} B R \sin\theta\,.$$

2) Будем решать задачу в цилиндрической системе координат. Пусть ток J течет вдоль оси Z. Тогда из уравнения (3) следует, что векторный потенциал можно выбрать направленным тоже по Z. Напряженность магнитного поля прямого тока имеет только α-ю компоненту: $H_\alpha = 2J/cr$. Запишем проекцию векторного уравнения (1) на α-е направление:

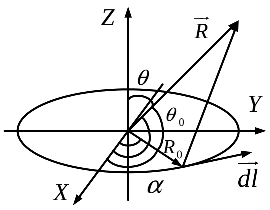
$$\frac{2J}{cr} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\,. \tag{10}$$

Здесь положено $\mu = 1$. Интегрируя уравнение (10), получаем

$$A_z = -\frac{2J}{c} \ln r + \mathrm{const}\,.$$

Константа произвольна. Можно приписать точкам произвольной цилиндрической поверхности, соосной с током, нулевой векторный потенциал.

3) Кольцо с током радиуса R_0 расположено в плоскости (X, Y). Найдем векторный потенциал в точке наблюдения, задаваемой радиус-вектором $\mathbf{R}$. Для линейного тока выражение (4) запишется так:



$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{J}{c} \oint \frac{d\boldsymbol{\ell}}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|}\,. \tag{11}$$

Направим ось X перпендикулярно плоскости, в которой лежат Z и $\mathbf{R}$ (см. рисунок). На больших расстояниях подынтегральное выражение (11) можно представить так:

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{(\mathbf{R}\,\mathbf{R}_0)}{R^2}\right) \qquad \text{при} \qquad \frac{R_0}{R} \ll 1\,.$$

Тогда

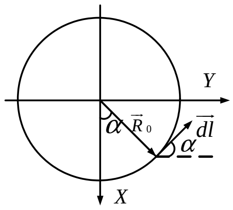
$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{J}{cR}\left[\oint d\boldsymbol{\ell} + \frac{1}{R^2}\oint (\mathbf{R}\,\mathbf{R}_0)\, d\boldsymbol{\ell}\,\right]. \tag{12}$$

Первый интеграл равен нулю. Подынтегральное выражение второго интеграла представим в виде

$$(\mathbf{R}\,\mathbf{R}_0) d\boldsymbol{\ell} = R R_0^2 \cos\theta_0 (-\mathbf{n}_x \sin\alpha + \mathbf{n}_y \cos\alpha)\, d\alpha =$$

$$= RR_0^2 \sin\theta \, \sin\alpha \, (-\mathbf{n}_x \sin\alpha + \mathbf{n}_y \cos\alpha) \, d\alpha \,, \tag{13}$$

где $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$ – единичные векторы в направлении осей X, Y. При преобразовании использованы равенства:



$$d\boldsymbol{\ell} = (-\mathbf{n}_x \sin\alpha + \mathbf{n}_y \cos\alpha) R_0 \, d\alpha \,,$$

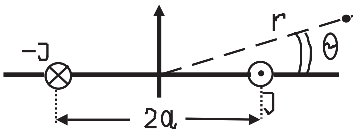
$$\cos\theta_0 = \sin\theta \sin\alpha \,.$$

Подставляя выражение (13) в уравнение (12) и интегрируя по кольцу, окончательно получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = -\frac{\pi R_0^2 J \sin\theta}{cR^2} \mathbf{n}_x = \frac{[\mathbf{m} \times \mathbf{R}]}{R^3} \,,$$

где $\mathbf{m} = \frac{\pi R_0^2 J}{c} \mathbf{n}_z$– магнитный момент кольца радиуса R_0 с током J.

1.2. Два бесконечных прямолинейных тока J текут в противоположных направлениях. Найти первый неисчезающий член разложения для расстояний $r \gg a$: а) векторного потенциала; б) магнитного поля. Токи параллельны оси Z.



Решение Нас интересует область $r \gg a$

$$r_1^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta$$

$$A_z = A_{z_1} + A_{z_2} = \frac{2J}{c} \ln r_1 - \frac{2J}{c} \ln r_2 = \frac{2J}{c} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{2J}{c} \ln \frac{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta}}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}}$$

Тогда, учитывая малость a/r, можно записать

$$A_z = \frac{J}{c} \ln \frac{r\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{2a}{r}\cos\theta}}{r\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{2a}{r}\cos\theta}} \approx \frac{I4a}{cr}\cos\theta = \left| 2\frac{[\mathbf{mr}]}{r^2} \right|,$$

где

$$\mathbf{m} = \frac{2J}{c} [\mathbf{a} \times \mathbf{e}_z] \,,$$

а вектор **a** направлен от центра системы координат вправо.

Тогда, вычисляя $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ в цилиндрической системе координат, получим

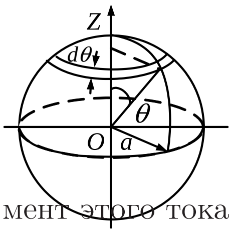
$$H_r = -\frac{4Ja}{cr^2}\sin\theta,$$
$$H_\theta = \frac{4Ja}{cr^2}\cos\theta,$$
$$H_z = 0.$$

или

$$\mathbf{H} = -\frac{2\mathbf{m}}{r^2} + \frac{4\,(\mathbf{mr})\,\mathbf{r}}{r^4}.$$

1.3. (Задача 4.22) Найти магнитный момент однородно заряженного шара (сферы), вращающегося вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью ω. Заряд шара – e, радиус – a.

Решение а) Найдем магнитный момент сферы. Возьмем на поверхности сферы узкий поясок, заключенный между углами θ и $\theta + d\theta$. Заряд, вращаясь вместе со сферой, создает ток, величина которого на выделенном пояске



$$dJ = \upsilon\sigma a\,d\theta = \frac{1}{4\pi}Q\omega\sin\theta\,d\theta\,,$$

где $\upsilon = \omega a\sin\theta$ – скорость вращения пояска, $\sigma = Q/4\pi a^2$ – поверхностная плотность заряда. Магнитный момент этого тока

$$d\mathbf{m} = \frac{dJ\,\mathbf{s}}{c} = \frac{\pi a^2 Q\boldsymbol{\omega}}{4\pi c}\sin^3\theta\,d\theta\,.$$

Интегрируя по θ, находим магнитный момент всей сферы:

$$\mathbf{m} = \int d\mathbf{m} = \frac{Qa^2\boldsymbol{\omega}}{4c}\int\limits_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta = \frac{Qa^2\boldsymbol{\omega}}{3c}\,.$$

б) Найдем магнитный момент равномерно заряженного вращающегося вокруг одного из своих диаметров шара. Используя результат предыдущей задачи, магнитный момент тонкого шарового слоя радиуса R толщины dR выразится так:

$$d\mathbf{m} = \frac{\boldsymbol{\omega}R^2}{3c}\,dQ\,,$$

где dQ – заряд шарового слоя. Так как

$$dQ = \frac{Q}{4\pi a^3/3}\cdot 4\pi R^2\,dR = \frac{3QR^2\,dR}{a^3}\,,$$

то магнитный момент шара будет равен

$$\mathbf{m} = \frac{Q\boldsymbol{\omega}}{ca^3}\int\limits_0^a R^4\,dR = \frac{Qa^2}{5c}\boldsymbol{\omega}\,.$$

1.4. (Задача 4.24) Найти магнитное поле полубесконечного соленоида на расстоянии r от его торца ($r \gg \sqrt{S}$) под углом θ к его оси. Ток в соленоиде – J, число витков на единицу длины – n, сечение – S.

Решение Поле от каждого витка соленоида

$$\mathbf{B}_m = \frac{3\mathbf{r}\,(\mathbf{mr})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}$$

$$\mathbf{m} = \frac{\pi a^2}{c}J\mathbf{n}_z$$

ρ–проекция $\mathbf{B_m}$ от ndz витков.

$$dB_\rho = B_{m,\rho}ndz$$

$$B_{m,\rho} = \frac{3m}{r^3}\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{r}$$

Подставляя в это выражение

$$\cos\theta = \frac{1}{R}(b\ \mathrm{ctg}\,\theta_0 - z)\,, \sin\theta = \frac{\rho}{R}\,, R = \sqrt{\rho^2 + (b\ \mathrm{ctg}\,\theta_0 - z)^2}$$

и интегрируя по z dB_ρ, получаем

$$B_\rho = 3mn\int\limits_0^\infty \frac{(b\ \mathrm{ctg}\,\theta_0 - z)\,dz}{\Big(\rho^2 + (b\ \mathrm{ctg}\,\theta_0 - z)^2\Big)^{5/2}} = -\frac{mn\rho}{(\rho^2 + b^2\ \mathrm{ctg}^2\,\theta_0)^{3/2}}\,.$$

Вычисляя подобным образом B_z, находим, что

$$B_z = mn\int\limits_0^\infty \frac{2(b\ \mathrm{ctg}\,\theta_0 - z)^2 - \rho^2}{\Big(\rho^2 + (b\ \mathrm{ctg}\,\theta_0 - z)^2\Big)^{5/2}}\,dz = -\frac{mnb\ \mathrm{ctg}\,\theta_0}{(\rho^2 + b^2\ \mathrm{ctg}^2\,\theta_0)^{3/2}}\,.$$

Таким образом,

$$\mathbf{B} = -mn\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,, \tag{14}$$

где $r = (\rho^2 + b^2\ \mathrm{ctg}^2\,\theta_0)^{1/2}$ — расстояние от начала соленоида до точки наблюдения. Поле (3) является полным аналогом поля точечного магнитного заряда.

$\mathbf{H} = \frac{q_m \mathbf{r}}{r^3}$, где $q_m = \frac{JnS}{c}$ – магнитный заряд соленоида.

1.5. (Задача 4.26) Найти потенциальную функцию двух малых токов, магнитные моменты которых $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$. Определить силу взаимодействия этих токов и приложенные к ним вращательные моменты. Рассмотреть частный случай $\mathbf{m}_1 \parallel \mathbf{m}_2$.

Решение $U = \frac{(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)}{r^3} - \frac{3(\mathbf{m}_1\mathbf{r})(\mathbf{m}_2\mathbf{r})}{r^5}$;

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \frac{3}{r^5}\left[\mathbf{m}_2\left(\mathbf{m}_1\mathbf{r}\right) + \mathbf{m}_1\left(\mathbf{m}_2\mathbf{r}\right) + \mathbf{r}\left(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2\right)\right] - \frac{15}{r^7}\left(\mathbf{m}_1\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{m}_2\mathbf{r}\right)\mathbf{r},$$

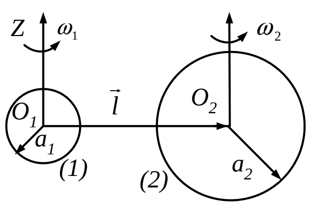
где r – радиус-вектор от первого тока ко второму.

$$\mathbf{N}_i = -\frac{[\mathbf{m}_i \times \mathbf{m}_{i+1}]}{r^3} + \frac{3\,[\mathbf{m}_i \times \mathbf{r}]\,(\mathbf{m}_{i+1}\cdot\mathbf{r})}{r^5}\ \text{для}\ i = 1,2\ (i+1 = 2,1)\,.$$

При параллельных диполях ($\mathbf{m}_1 = m_1\mathbf{n}$, $\mathbf{m}_2 = m_2\mathbf{n}$, $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0$, $\mathbf{n},\mathbf{r}_0$ – единичные векторы), $\mathbf{F}_2 = \frac{3m_1m_2\left[2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}_0(5(\mathbf{n}\mathbf{r}_0)^2 - 1)\right]}{r^4}$.

1.6. (Задача 4.28) Два равномерно заряженных шарика с зарядами q_1, q_2 и радиусами a_1, a_2 вращаются без поступательного движения с угловыми скоростями ω_1, ω_2 так, что векторы $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ перпендикулярны отрезку ℓ, соединяющему центры шаров ($\ell \gg a_1, a_2$). Оценить силу взаимодействия шариков.

Решение Выберем начало координат в центре шара (1). Ось Z совпадает с направлением $\boldsymbol{\omega}_1$, центр второго шара находится на расстоянии ℓ в плоскости (X, Y). Сила взаимодействия шаров складывается из сил кулоновского и магнитного взаимодействий. Она может быть представлена как сила, действующая на шар 2 со стороны шара 1. Поскольку расстояние между шарами велико по сравнению с их размерами, то силу магнитного взаимодействия можно рассматривать как силу взаимодействия двух магнитных моментов:



$$\mathbf{F}_m = (\mathbf{m}_2\,\nabla)\mathbf{H}_1\,, \qquad \mathbf{H}_1 = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R}\,\mathbf{m}_1)}{R^5} - \frac{\mathbf{m}_1}{R^3}\,,$$

где $\mathbf{m}_{1,2} = q_{1,2}a_{1,2}^2\boldsymbol{\omega}_{1,2}/5c$; $\mathbf{H}_1$– поле, создаваемое магнитным моментом $\mathbf{m}_1$ на большом расстоянии, $\mathbf{m}_2$– магнитный момент шара (2). Поскольку у $\mathbf{m}_2$ есть только составляющая по Z, то скалярное произведение вектора $\mathbf{m}_2$ и вектора ∇ запишется так:

$$(\mathbf{m}_2\,\nabla) = m_2\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

а сила магнитного взаимодействия

$$\mathbf{F}_m = m_2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R}\,\mathbf{m}_1)}{R^5} - \frac{\mathbf{m}_1}{R^3}\right).$$

Далее, вычисляя производные по z, находим

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R}\,\mathbf{m}_1)}{R^5}\right) = \frac{3\mathbf{m}_1 z}{R^5} + \frac{3m_1\mathbf{R}}{R^5} - \frac{15z^2 m_1\mathbf{R}}{R^7}\,.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{m}_1}{R^3}\right) = -\frac{3\mathbf{m}_1 z}{R^5}\,.$$

Подставляя в найденные выражения $z = 0$, $\mathbf{R} = \ell$, окончательно получаем

$$\mathbf{F}_m = \frac{3m_1 m_2\ell}{\ell^5}\,.$$

Таким образом, при $\ell \gg a_1$, a_2 полная сила взаимодействия

$$\mathbf{F} = \frac{3}{25}\frac{q_1q_2}{c^2}\omega_1\omega_2\frac{\ell}{\ell^5} + \frac{q_1q_2\ell}{\ell^3}\,.$$

Силу магнитного взаимодействия можно представить и так:

$$\mathbf{F}_m = \operatorname{grad}(\mathbf{m}_2\,\mathbf{H}_1)\Big|_{\mathbf{R}=\ell} = \operatorname{grad}\left(\frac{3(\mathbf{R}\,\mathbf{m}_2)(\mathbf{R}\,\mathbf{m}_1)}{R^5} - \frac{(\mathbf{m}_2\,\mathbf{m}_1)}{R^3}\right)\Bigg|_{\mathbf{R}=\ell} =$$

$$= -\operatorname{grad}\left(\frac{(\mathbf{m}_2\,\mathbf{m}_1)}{R^3}\right)\Bigg|_{\mathbf{R}=\ell} = \frac{3m_1 m_2\ell}{\ell^5}\,.$$