Занятие 22

Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Условия разрешимости.

При изучении дифференциальных уравнений мы много внимания уделяли решению задачи Коши, то есть поиску решения, имеющего в некоторой точке x_0 заданные значения производных до определенного порядка.

Однако в математической физике наряду с задачей Коши часто возникают задачи, в которых требуется найти решение дифференциального уравнения, подчиняющееся определенным ограничениям на концах некоторого интервала или на границе какой-то области. Такие задачи называются краевыми.

Пример 1. Найдем решение уравнения

$$y'' + y = 1, \tag{22.1}$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1. \tag{22.2}$$

Подставляя значения $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$, получаем систему для определения коэффициентов C_i:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 + 1 = 0, \\ y(\frac{\pi}{2}) = C_1 + C_2 \cdot 0 + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_2 = -1$, $C_1 = -1$.

Ответ: $y(x) = 1 - \sin x - \cos x$.

Пример 2. Найдем решение уравнения (22.1), удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Подставляя в (22.2) значения $x = 0$ и $x = \pi$, получаем систему для определения коэффициентов C_i:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 + 1 = 0, \\ y(\pi) = C_1 \cdot 0 - C_2 + 1 = 0, \end{cases}$$

которая, очевидно, не совместна. Таким образом, поставленная краевая задача не имеет решения.

Пример 3. Найдем решение уравнения

$$y'' + y = 2x - \pi,$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x - \pi,$$

условия для определения коэффициентов C_i:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 - \pi = 0, \\ y(\pi) = C_1 \cdot 0 - C_2 + \pi = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $C_2 = \pi$, а значение C_1 может быть любым.

Таким образом, поставленная краевая задача имеет множество решений, которое описывается формулой

$$y(x) = 2x - \pi + \pi \cos x + C \sin x.$$

Анализируя рассмотренные примеры, мы видим, что в одном случае задача имеет единственное решение, в другом не имеет решений, а в третьем — решений бесконечно много. Заметим, что речь идет об одном и том же уравнении $y'' + y = f(x)$. Меняется лишь правая часть $f(x)$ и краевые условия.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} y'' + y = f(x), \\ y(0) = 0\,, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{22.3}$$

Будем искать частное решение, удовлетворяющее краевым условиям, методом вариации постоянных: $y(x) = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$.

Из системы $\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$ получаем

$$C_1'(x) = \cos x \cdot f(x)\,, \quad C_2'(x) = -\sin x \cdot f(x),$$

Так как $y(0) = 0$ и $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, то $C_1(\frac{\pi}{2}) = 0$ и $C_2(0) = 0$. Отсюда

$$C_1(x) = -\int\limits_x^{\pi/2} \cos s \cdot f(s)ds\,, \quad C_2(x) = -\int\limits_0^x \sin s \cdot f(s)ds.$$

Итак, решение краевой задачи (22.3) описывается формулой

$$y(x) = -\cos x \int\limits_0^x \sin s \cdot f(s)ds - \sin x \int\limits_x^{\pi/2} \cos s \cdot f(s)ds =$$

$$= -\int\limits_0^x \cos x \sin s \cdot f(s)ds - \int\limits_x^{\pi/2} \sin x \cos s \cdot f(s)ds.$$

Запишем это решение в компактной форме, используя интегральный оператор с ядром $G(x,s)$:

$$y(x) = \int\limits_0^{\pi/2} G(x,s)f(s)ds, \tag{22.4}$$

Функция $G(x,s)$ определена в квадрате $[0;\frac{\pi}{2}]\times[0;\frac{\pi}{2}]$ следующим образом:

$$G(x,s) = \begin{cases} -\cos x \sin s\,, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant x, \\ -\sin x \cos s\,, & \text{если } x \leqslant s \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Для ее представления удобно использовать следующую диаграмму (рис. 22.1):

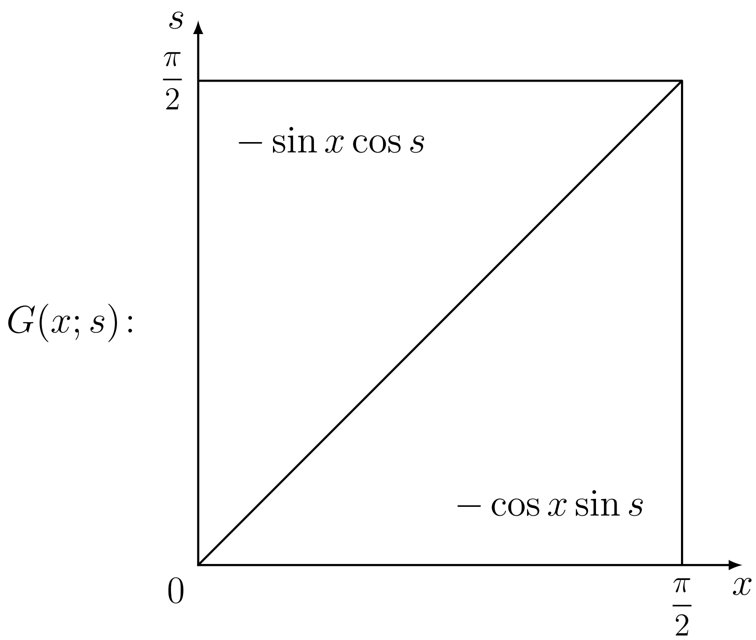

Рис. 22.1. Диаграмма функции $G(x,s)$.

Таким образом, краевая задача (22.3) при любой правой части $f(x)$ имеет единственное решение. Это решение представляется в виде интеграла (22.4). Функция $G(x,s)$, являющаяся ядром интегрального оператора (22.4), называется функцией Грина краевой задачи.

Для того, чтобы разобраться с неприятными ситуациями, возникшими в примерах 2 и 3, вспомним теоремы Фредгольма, изучаемые в курсе функционального анализа.

Рассмотрим оператор $L[y]$, определённый на некотором множестве функций $y \in \mathcal{D}_L$. Пусть на этом множестве задано скалярное произведение. Оператор называется самосопряжённым, если $\forall\ u, v \in \mathcal{D}_L$

$$(L[u], v) = (u, L[v]).$$

Нас интересуют условия разрешимости функционального уравнения

$$L[y] = f\,, \quad y \in \mathcal{D}_L\,, \quad f \in E_L. \tag{22.5}$$

Напомним, что ядром оператора $L[y]$, заданного на множестве функций $y \in \mathcal{D}_L$, называется подмножество функций из $\mathcal{D}_L$, для которых $L[y] = 0$.

Альтернатива Фредгольма гласит, что возможна только одна из двух ситуаций:

1) Оператор L является невырожденным, то есть однородное уравнение $L[y] = 0$ имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$ ($\operatorname{Ker} L = \{0\}$). Тогда уравнение (22.5) имеет единственное решение $y \in \mathcal{D}_L$ для любой функции $f \in E_L$.

2) Оператор L является вырожденным, то есть однородное уравнение $L[y] = 0$ имеет нетривиальное решение $e_0(x) \not\equiv 0$ ($\operatorname{Ker} L \neq \{0\}$). Тогда уравнение (22.5) либо не имеет решений $y \in \mathcal{D}_L$, либо имеет решение, но не единственное, в зависимости от функции $f \in E_L$.

В первом случае оператор L имеет обратный и $y(x) = L^{-1}[f]$ для любой функции $f(x) \in E_L$. Как нетрудно убедиться, в примере 1 оператор является невырожденным, и формула (22.4) задает действие обратного оператора на функции $f(x)$.

Обратимся к примерам 2 и 3. Оператор $L[y] = y'' + y$ вырожден на множестве функций, удовлетворяющих условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, поскольку $e_0(x) = \sin x \in \operatorname{Ker} L$. Таким образом, становится понятно, почему у нас возникли проблемы в разрешимостью краевых задач.

Если оператор L вырожден, то уравнение (22.5) (в случае *самосопряжённого оператора*) имеет решение, если и только если функция $f(x)$ ортогональна ядру оператора L в традиционном для функционального анализа скалярном произведении

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

Можно показать, что линейный дифференциальный оператор

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y \tag{22.6}$$

(где функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема на (a, b), $p(x) \neq 0$ на $[a, b]$, $q(x)$ — непрерывна на (a, b)) является самосопряжённым на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0\,, & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0\,, & \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0. \end{cases} \tag{22.7}$$

(Краевые условия такого вида мы будем называть стандартными.)

Убедимся, что оператор $L[y] = y'' + y$ является самосопряжённым на множестве функций, удовлетворяющих условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

$$(L[u], v) = \int_0^\pi (u + u'')v\,dx = \int_0^\pi uv\,dx + \int_0^\pi u''v\,dx.$$

$$(u, L[v]) = \int_0^\pi u(v + v'')\,dx = \int_0^\pi uv\,dx + \int_0^\pi uv''\,dx.$$

Таким образом, нам надо показать, что

$$\int\limits_0^\pi u''v\,dx = \int\limits_0^\pi uv''\,dx$$

Интегрируем по частям, учитывая, что функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют краевым условиям, поэтому внеинтегральные члены обращаются в ноль:

$$\int\limits_0^\pi u''v\,dx = \int\limits_0^\pi (u')'v\,dx = u'(x)v(x)\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi u'v'\,dx =$$

$$= -\int\limits_0^\pi u'v'\,dx = -v'(x)u(x)\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi uv''dx = \int\limits_0^\pi uv''dx. \ \square$$

Особенностью дифференциального оператора (22.6) со стандартными краевыми условиями (22.7) является то, что его ядро не более чем одномерно, то есть если оператор вырожден, то базис ядра состоит из единственной ненулевой функции $e_0(x)$.

Если оператор L вырожден, но уравнение $L[y] = f$ всё же имеет решение, то понятно, что оно будет не единственным:

$$y = y_1(x) + Ce_0(x),$$

где $y_1(x)$ — какое-нибудь решение уравнения $L[y_1] = f$. (Например, его можно выбрать ортогональным функции e_0).

Чтобы полностью разобраться с примерами 2 и 3, нам осталось проверить ортогональность функций $f(x) \equiv 1$ и $f(x) = 2x - \pi$ ядру оператора, то есть функции $e_0(x) = \sin x$.

$$\int_0^\pi 1 \cdot \sin x\, dx \neq 0 \qquad \Rightarrow \text{Краевая задача не имеет решений.}$$

$$\int_0^\pi (2x-\pi) \cdot \sin x\, dx = 0 \qquad \Rightarrow \text{Краевая задача имеет решение.}$$

Пример 4. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} (x^2y')' = f(x), \\ y(1) = 0\,, \quad y(2) + \alpha y'(2) = 0. \end{cases} \tag{22.8}$$

а) При каких значениях параметра α задача (22.8) разрешима для любой функции $f(x)$?

б) При каких значениях параметра α и условиях на $f(x)$ задача (22.8) имеет бесконечно много решений?

в) При каких значениях параметра α и условиях на $f(x)$ задача (22.8) не имеет решения?

Найдём значения α, при которых оператор вырожден. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2.$$

Чтобы эта функция удовлетворяла краевым условиям, необходимо определить коэффициенты C_1 и C_2 из системы

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 = 0, \\ y(2) + \alpha y'(2) = \dfrac{C_1}{2} + C_2 + \alpha\left(-\dfrac{C_1}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Система

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha}{4}\right) C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение, если

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2-\alpha}{4} & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \frac{2-\alpha}{4} = 1 \quad \Rightarrow \alpha = -2.$$

При этом значении параметра можно положить $C_1 = -C_2$ и получить нетривиальное решение однородного уравнения, удовлетворяющее краевым условиям:

$$e_0(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Итак:

а) Если $\alpha \neq -2$, то краевая задача (22.8) имеет единственное решение для любой функции $f(x)$.

б) Если $\alpha = -2$ и $\int\limits_0^2 f(x)(1-1/x)dx = 0$, то краевая задача имеет бесконечно много решений.

в) Если $\alpha = -2$ и $\int\limits_0^2 f(x)(1-1/x)dx \neq 0$, то краевая задача не имеет решений.

Рассмотрим краевую задачу для оператора более общего вида

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \tag{22.9}$$

Всегда можно найти такую функцию $\rho(x)$, $\rho(x) \neq 0$ на (a, b), что после умножения на $\rho(x)$ оператор становится самосопряженным:

$$\rho(x)\left[a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y\right] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y.$$

Тогда уравнение (22.9) превратится в

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \rho(x)f(x),$$

а условие разрешимости краевой задачи примет вид

$$\int_a^b \rho(x)f(x)e_0(x)dx = 0, \tag{22.10}$$

где $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$.

В этом случае говорят, что правая часть ортогональна ядру в скалярном произведении с весом $\rho(x)$

$$(u, v) = \int_a^b \rho(x)u(x)v(x)dx.$$

Продемонстрируем сказанное на примере.

Пример 5. Найдем условия разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = f(x) \\ y(1) - y'(1) = 0, \quad y(2) - 2y'(2) = 0. \end{cases}$$

Убедимся, что оператор $L[y] = x^2y'' - xy' + y$ действительно вырожден. ФСР однородного уравнения состоит из функций $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = x\ln x$. Функция $e_0(x) = x$ удовлетворяет однородному уравнению и краевым условиям. Приведём оператор к самосопряжённому виду.

$$\rho(x)x^2y'' - \rho(x)xy' + \rho(x)y = (\rho(x)x^2y')' - (\rho(x)x^2)'y' - \rho(x)xy' + \rho(x)y.$$

Функцию $\rho(x)$ найдём из условия

$$(\rho(x)x^2)' + \rho(x)x = 0.$$

Обозначим $\rho(x)x^2 = u(x)$, тогда

$$u' + \frac{u(x)}{x} = 0 \qquad \text{и} \qquad u = \frac{C}{x}.$$

Отсюда $\rho(x) = 1/x^3$ (можно положить $C = 1$). Уравнение перепишется в виде

$$\frac{y''}{x} - \frac{y'}{x^2} + \frac{1}{x^3}y = \frac{f(x)}{x^3},$$

$$\left(\frac{y'}{x}\right)' + \frac{1}{x^3}y = \frac{f(x)}{x^3}.$$

Условие разрешимости

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3} f(x) x dx = \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = 0.$$

Для любителей «готовых» формул приведём уравнение для функции $\rho(x)$, которая даёт вес в скалярном произведении (22.10).

$$(a_0(x)\rho(x))' - a_1(x)\rho(x) = 0.$$

Если положить $a_0(x)\rho(x) = u(x)$, то

$$u'(x) - \frac{a_1(x)}{a_0(x)} u(x) = 0.$$

Следует сначала найти функцию $u(x)$, а затем $\rho(x)$.

Рассмотрим несколько примеров с нестандартными краевыми условиями.

Пример 6. Найдем условие разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + y' = f(x), \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$. Функция $e_0(x) = e^{-x}$ удовлетворяет краевым условиям. Найдём вес $\rho(x)$:

$$(\rho(x))' - \rho(x) = 0\,, \quad \rho(x) = e^x.$$

Условие разрешимости:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^x f(x) e^{-x} dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

Пример 7. Найдем условия, при которых уравнение

$$y'' + y' = f(x)$$

имеет решение, ограниченное при всех x.

Функция $e_0(x) = 1$ является ограниченной функцией и удовлетворяет однородному уравнению. Функцию $\rho(x) = e^x$ мы уже нашли. Условие разрешимости:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^x dx = 0.$$

В общей теории краевых задач для уравнения $L[y] = f$ обычно требуется, чтобы функция $p(x)$, фигурирующая в записи самосопряжённого оператора

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y,$$

не обращалась в ноль на отрезке $[a, b]$. Однако зачастую в важных прикладных задачах функция $p(x)$ обращается в ноль на одном из концов отрезка или на обоих концах сразу.

В этом случае в качестве краевого условия обязательно выступает естественное в физических задачах требование ограниченности решения.

Например, рассматривая для уравнения

$$xy'' + y' = f(x)$$

краевую задачу на отрезке $[0; 1]$, в точке $x = 0$ следует поставить условие

$$y(0) \text{ — ограниченно,}$$

а на другом конце можно выбрать стандартное условие, например,

$$y'(1) = 0.$$

Общее решение однородного уравнения $y(x) = C_1 + C_2 \ln x$. Функция $e_0(x) = 1$ принадлежит ядру оператора. Так как оператор самосопряжён

$$xy'' + y' = (xy')' = f(x),$$

то условия разрешимости имеют вид $\displaystyle\int\limits_0^1 1 \cdot f(x)dx = 0.$