

Решение дифференциальных уравнений параболического типа

1. Явная разностная схема

1.1. Характеристика явной разностной схемы

1.2. Метод решения явной разностной схемы

1.3. Алгоритм решения явной разностной схемы

2. Неявная разностная схема

2.1. Характеристика неявной разностной схемы

2.2. Вывод основных соотношений метода прогонки

2.3. Определение прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по координате

2.4. Определение решения на правой границе

2.5. Метод прогонки – метод решения неявной разностной схемы

2.6. Алгоритм метода прогонки

3. Разностная схема Кранка-Николсона

3.1. Вывод разностной схемы Кранка-Николсона

3.2. Устойчивость разностной схемы Кранка-Николсона

3.3. Метод решения разностной схемы Кранка-Николсона

4. Разностная схема Саульева

4.1. Вывод разностной схемы Саульева

4.2. Определение порядка аппроксимации разностной схемы Саульева

4.3. Метод решения разностной схемы Саульева

4.4. Алгоритм решения разностной схемы Саульева

5. Сравнительная характеристика изученных разностных схем

6. Задания для самоконтроля

1. Явная разностная схема

1.1. Характеристика явной разностной схемы

Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение параболического типа с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, t, x); \quad u(t=0, x) = \xi(x); \quad \begin{cases} u(t, x=a) = \varphi_1(t); \\ u(t, x=b) = \varphi_2(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Запишем для уравнения (4.1) явную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + f(u_j^n, t^n, x_j). \quad (4.2)$$

Запишем аппроксимацию начального и граничных условий:

$$u_j^0 = \xi(x_j); \quad u_1^{n+1} = \varphi_1(t^{n+1}); \quad u_N^{n+1} = \varphi_2(t^{n+1}). \quad (4.3)$$

Аппроксимация граничных условий (4.3) записана на $(n+1)$ -ом шаге по времени для удобства последующего изложения метода и алгоритма решения явной разностной схемы (4.2).

В разделе "Порядок аппроксимации разностной схемы" было доказано, что разностная схема (4.2) имеет порядок аппроксимации:

$$O(\Delta t, h^2).$$

В разделе "Доказательство условной устойчивости явной разностной схемы" было получено условие устойчивости данной разностной схемы, накладывающее ограничение на выбор интервала деления при создании разностной сетки (или, иначе говоря, ограничение на выбор расчётного шага по одной из независимых переменных):

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2\sigma}.$$

Отметим, что это, безусловно, является недостатком явной разностной схемы (4.2). В то же время она имеет достаточно простой метод решения.

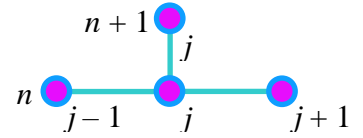
1. Явная разностная схема

1.2. Метод решения явной разностной схемы

Выразим из разностной схемы (4.2) величину u_j^{n+1} :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + f(u_j^n, t^n, x_j) \Delta t. \quad (4.4)$$

Значения u_j^0 для любого j могут быть определены с помощью аппроксимации начального условия (4.3). Если задать $n = 0$, то, пользуясь выражением (4.4), можно определить значения u_j^1 , $j = 2, \dots, N-1$. Значения u_1^1, u_N^1 определяются с помощью аппроксимации граничных условий (4.3). Далее, задаём $n = 1$ и из выражения (4.4) определяем u_j^2 , $j = 2, \dots, N-1$, а значения u_1^2, u_N^2 – опять же с помощью аппроксимации граничных условий (4.3) и т. д. Таким образом, соотношение (4.4) позволяет рассчитать все значения искомой функции u в узлах разностной сетки, кроме значений, задаваемых с помощью начального и граничных условий. Описанную методику решения явной разностной схемы наглядно характеризует её разностный шаблон (см. рисунок), на котором n -й шаг по времени следует считать известным, а $(n+1)$ -й шаг по времени – искомым.



Соотношения типа (4.4), позволяющие рассчитывать значения искомой функции u в узлах разностной сетки через известные значения функции u в других (как правило, соседних) узлах разностной сетки, называют **рекуррентными соотношениями**.

Обратим внимание, что если вместо граничных условий 1-го рода (4.1) будут заданы граничные условия 2-го или 3-го рода, то расчёт значений u_1^{n+1}, u_N^{n+1} несколько усложняется.

Рассмотрим граничные условия 2-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = a) = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x = b) = \varphi_2(t).$$

Запишем их аппроксимацию:

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = \varphi_1(t^{n+1}), \quad \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = \varphi_2(t^{n+1}).$$

Выразим значения u_1^{n+1}, u_N^{n+1} :

$$u_1^{n+1} = u_2^{n+1} - h\varphi_1(t^{n+1}), \quad u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1} + h\varphi_2(t^{n+1}). \quad (4.4a)$$

Рассмотрим граничные условия 3-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = a) = \varphi_1(t) u(t, x = a) + \psi_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x = b) = \varphi_2(t) u(t, x = b) + \psi_2(t).$$

Запишем их аппроксимацию:

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = \varphi_1(t^{n+1}) u_1^{n+1} + \psi_1(t^{n+1}), \quad \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = \varphi_2(t^{n+1}) u_N^{n+1} + \psi_2(t^{n+1}).$$

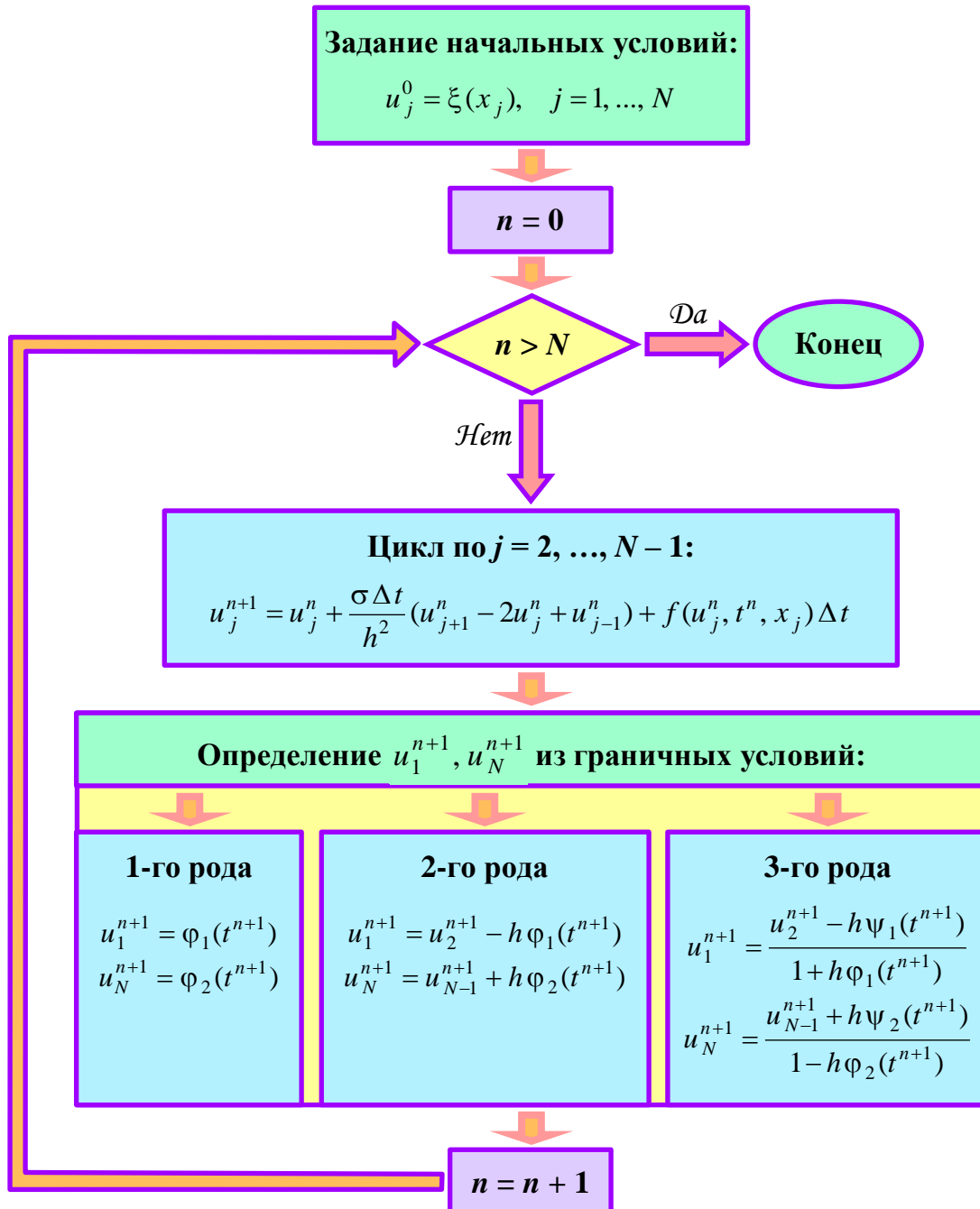
Выразим значения u_1^{n+1}, u_N^{n+1} :

$$u_1^{n+1} = \frac{u_2^{n+1} - h\psi_1(t^{n+1})}{1 + h\varphi_1(t^{n+1})}, \quad u_N^{n+1} = \frac{u_{N-1}^{n+1} + h\psi_2(t^{n+1})}{1 - h\varphi_2(t^{n+1})}. \quad (4.46)$$

1. Явная разностная схема

1.3. Алгоритм решения явной разностной схемы

Мы описали метод решения явной разностной схемы (4.2) для одномерного дифференциального уравнения параболического типа (4.1). Ниже приводится алгоритм решения, представленный для наглядности в виде блок-схемы.



2. Неявная разностная схема

2.1. Характеристика неявной разностной схемы

Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение параболического типа с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k u + f(t, x), \quad k \geq 0; \quad u(t=0, x) = \xi(x); \quad \begin{cases} u(t, x=a) = \varphi_1(t); \\ u(t, x=b) = \varphi_2(t). \end{cases} \quad (4.5)$$

Запишем для уравнения (4.5) неявную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j). \quad (4.6)$$

Запишем аппроксимацию начального и граничных условий:

$$u_j^0 = \xi(x_j); \quad u_1^{n+1} = \varphi_1(t^{n+1}); \quad u_N^{n+1} = \varphi_2(t^{n+1}). \quad (4.7)$$

Аппроксимация граничных условий (4.7) записана на $(n+1)$ -ом шаге по времени для удобства последующего изложения метода и алгоритма решения неявной разностной схемы (4.6).

В разделе "Порядок аппроксимации разностной схемы" было отмечено, что разностная схема (4.6) имеет такой же порядок аппроксимации, как и соответствующая ей явная разностная схема (4.2), а именно:

$$O(\Delta t, h^2).$$

В разделе "Доказательство абсолютной устойчивости неявной разностной схемы" было доказано, что неявная разностная схема (4.6) абсолютно устойчива, т.е. вне зависимости от выбора интервала деления на разностной сетке (или, иначе говоря, выбора расчётного шага по независимым переменным) погрешность решения неявной разностной схемы в процессе вычислений возрастать не будет. Отметим, что это, безусловно, является достоинством неявной разностной схемы (4.6) по сравнению с явной разностной схемой (4.2), которая устойчива только при выполнении условия (3.12). В то же время явная разностная схема имеет достаточно простой метод решения, а метод решения неявной разностной схемы (4.6), называемый **методом прогонки**, более сложен. Прежде чем перейти к изложению метода прогонки, необходимо вывести ряд соотношений, используемых этим методом.

2. Неявная разностная схема

2.2. Вывод основных соотношений метода прогонки

Преобразуем неявную разностную схему (4.6), группируя в левой части члены, содержащие значение функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени, а в правой части – все остальные члены:

$$-\frac{\sigma \Delta t}{h^2} u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + 2\frac{\sigma \Delta t}{h^2} + k \Delta t\right) u_j^{n+1} - \frac{\sigma \Delta t}{h^2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \Delta t f(t^n, x_j). \quad (4.8)$$

Введём следующие обозначения:

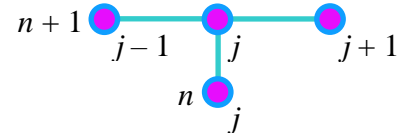
$$a_j = -\frac{\sigma \Delta t}{h^2}; \quad b_j = 1 + 2\frac{\sigma \Delta t}{h^2} + k \Delta t; \quad c_j = -\frac{\sigma \Delta t}{h^2}; \quad \xi_j^n = u_j^n + \Delta t f(t^n, x_j). \quad (4.9)$$

С учётом обозначений (4.9) равенство (4.8) будет иметь вид:

$$a_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j-1}^{n+1} = \xi_j^n. \quad (4.10)$$

Данное преобразование часто называют *преобразованием неявной разностной схемы к виду, удобному для использования метода прогонки*.

Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий неявную разностную схему (4.6), свидетельствует о том, что данная разностная схема содержит три неизвестные величины – значения функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени. Это обстоятельство затрудняет вывод рекуррентного соотношения, позволяющего последовательно рассчитать значения искомой функции u в каждом из узлов разностной сетки (подобно тому, как это было сделано в случае явной разностной схемы).



Следовательно, для реализации неявной разностной схемы (4.6) требуется ввести некоторое дополнительное условие, связывающее значения функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени. Представим это дополнительное условие в виде линейной зависимости

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j, \quad (4.11)$$

справедливой для любого значения $j = 1, \dots, N - 1$.

Соотношение (4.11) называют **рекуррентным прогоночным соотношением**, а коэффициенты α_j, β_j – **прогоночными коэффициентами**.

Рассмотрим методику определения прогоночных коэффициентов. Для этого перепишем соотношение (4.11) в виде:

$$u_{j-1}^{n+1} = \alpha_{j-1} u_j^{n+1} + \beta_{j-1}.$$

Подставим данное выражение в (4.10) и выразим из полученного равенства u_j^{n+1} :

$$\begin{aligned} a_j u_{j+1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j \alpha_{j-1} u_j^{n+1} + c_j \beta_{j-1} &= \xi_j^n \\ \Rightarrow u_j^{n+1} &= -\frac{a_j}{b_j + c_j \alpha_{j-1}} u_{j+1}^{n+1} + \frac{\xi_j^n - c_j \beta_{j-1}}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Сравнивая выражения (4.11) и (4.12), получаем:

$$\alpha_j = -\frac{a_j}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}, \quad \beta_j = \frac{\xi_j^n - c_j \beta_{j-1}}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}. \quad (4.13)$$

Выражения (4.13) позволяют рассчитать значения прогоночных коэффициентов на j -ом шаге по координате x , если известны их значения на $(j - 1)$ -ом шаге по координате x (а также коэффициенты в выражении (4.10), определение которых не должно вызывать затруднений). Следовательно, для того, чтобы определить значения прогоночных коэффициентов на любом шаге по координате x , необходимо знать их значения на 1-м шаге, т.е. α_1, β_1 .

2. Неявная разностная схема

2.3. Определение прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по координате

Для определения прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по координате x , т.е. α_1, β_1 , используют рекуррентное прогоночное соотношение (4.11), записанное для $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1, \quad (4.14)$$

и левое граничное условие (4.7):

$$u_1^{n+1} = \varphi_1(t^{n+1}).$$

Сравнивая эти два соотношения, получаем:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \varphi_1(t^{n+1}).$$

Обратим внимание, что вместо граничных условий 1-го рода (4.5) могут быть заданы граничные условия 2-го или 3-го рода; методика определения α_1, β_1 при этом не изменится, хотя сами формулы для расчёта α_1, β_1 будут другими.

Пусть задано левое граничное условие 2-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = a) = \varphi_1(t).$$

Запишем его аппроксимацию и выразим значение u_1^{n+1} :

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = \varphi_1(t^{n+1}) \quad \Rightarrow \quad u_1^{n+1} = u_2^{n+1} - h\varphi_1(t^{n+1}).$$

Сравнивая данное выражение с соотношением (4.14), получаем:

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -h\varphi_1(t^{n+1}).$$

Пусть задано левое граничное условие 3-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = a) = \varphi_1(t) u(t, x = a) + \psi_1(t).$$

Запишем его аппроксимацию и выразим значение u_1^{n+1} :

$$\begin{aligned} \frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} &= \varphi_1(t^{n+1}) u_1^{n+1} + \psi_1(t^{n+1}) \\ \Rightarrow \quad u_1^{n+1} &= \frac{u_2^{n+1} - h\psi_1(t^{n+1})}{1 + h\varphi_1(t^{n+1})} = \frac{u_2^{n+1}}{1 + h\varphi_1(t^{n+1})} - \frac{h\psi_1(t^{n+1})}{1 + h\varphi_1(t^{n+1})}. \end{aligned}$$

Сравнивая данное выражение с соотношением (4.14), получаем:

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + h\varphi_1(t^{n+1})}, \quad \beta_1 = -\frac{h\psi_1(t^{n+1})}{1 + h\varphi_1(t^{n+1})}.$$

2. Неявная разностная схема

2.4. Определение решения на правой границе

Итак, используя левое граничное условие и соотношения (4.13), можно определить значения прогоночных коэффициентов на любом шаге по координате x . Однако рекуррентное прогоночное соотношение (4.11) позволит рассчитать значение функции u в точке u_j^{n+1} , только если будет известно значение функции u в точке u_{j+1}^{n+1} , т.е. в соседней справа точке на разностной сетке. Следовательно, необходимо знать значение функции u на $(n+1)$ -ом шаге по времени в крайней справа точке, которое можно определить из правого граничного условия (4.7):

$$u_N^{n+1} = \varphi_2(t^{n+1}).$$

Однако вместо граничных условий 1-го рода (4.5) могут быть заданы граничные условия 2-го или 3-го рода. Для расчёта решения на правой границе в этом случае используют рекуррентное прогоночное соотношение (4.11), записанное для $j = N-1$:

$$u_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1}. \quad (4.15)$$

Пусть задано правое граничное условие 2-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=b) = \varphi_2(t).$$

Запишем его аппроксимацию:

$$\frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = \varphi_2(t^{n+1}).$$

Подставляя соотношение (4.15) в данное равенство и выражая u_N^{n+1} , получаем:

$$u_N^{n+1} = \frac{h\varphi_2(t^{n+1}) + \beta_{N-1}}{1 - \alpha_{N-1}}.$$

Пусть задано правое граничное условие 3-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=b) = \varphi_2(t) u(t, x=b) + \psi_2(t).$$

Запишем его аппроксимацию:

$$\frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = \varphi_2(t^{n+1}) u_N^{n+1} + \psi_2(t^{n+1}).$$

Подставляя соотношение (4.15) в данное равенство и выражая u_N^{n+1} , получаем:

$$u_N^{n+1} = \frac{h\psi_2(t^{n+1}) + \beta_{N-1}}{1 - \alpha_{N-1} - h\varphi_2(t^{n+1})}.$$

2. Неявная разностная схема

2.5. Метод прогонки – метод решения неявной разностной схемы

Суммируя вышеизложенное, проследим последовательность действий, которую подразумевает **метод прогонки** при расчёте значений функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени:

- 1) с помощью левого граничного условия определяются значения прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по координате x , т.е. α_1, β_1 ;
- 2) по формулам (4.13) определяются значения прогоночных коэффициентов для $j = 2, \dots, N - 1$;
- 3) с помощью правого граничного условия определяется значение u_N^{n+1} ;
- 4) с помощью рекуррентного прогоночного соотношения (4.11) определяются значения искомой функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени для $j = N - 1, \dots, 1$.

Обратим внимание, что определение прогоночных коэффициентов осуществляется за счёт цикла по j , в котором значения j увеличиваются (что соответствует перемещению слева направо на разностной сетке), в то время как при определении значений функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени организуется цикл по j , в котором значения j уменьшаются (что соответствует перемещению справа налево на разностной сетке). Именно благодаря этим двум циклам (в первом из которых j совершает пробег слева направо, а во втором – справа налево), данный метод решения неявной разностной схемы и получил название **метода прогонки**.

Неявная разностная схема (4.6) является абсолютно устойчивой. Однако это ещё не гарантирует сходимость её метода решения (т.е., метода прогонки) к решению исходной дифференциальной задачи.

Теорема. Достаточным условием сходимости метода прогонки к решению исходной дифференциальной задачи является выполнение следующего неравенства:

$$|a_j| + |c_j| < |b_j|, \quad (4.16)$$

где a_j, b_j, c_j – коэффициенты из уравнения (4.10).

Легко видеть, что для разностной схемы (4.6) достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

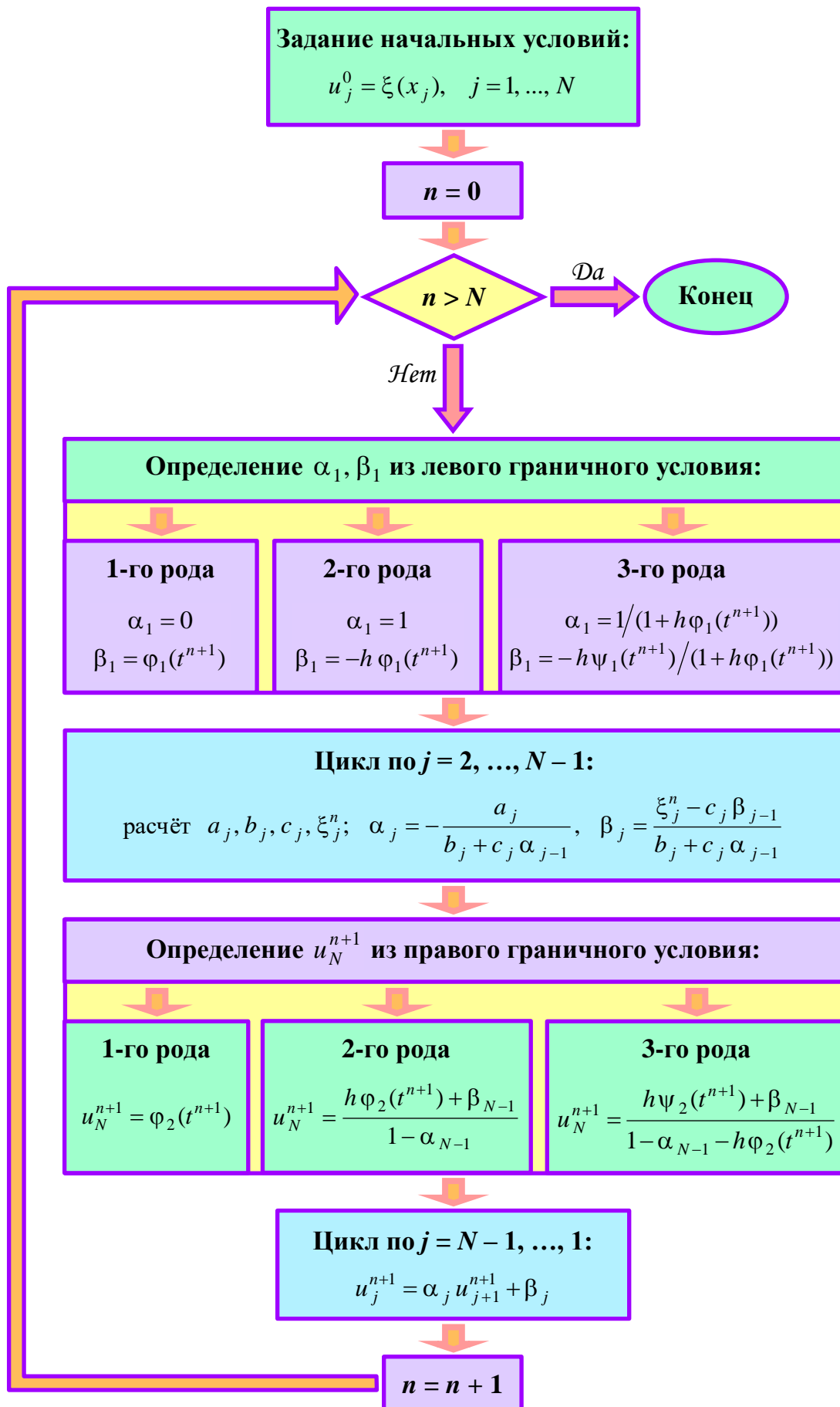
$$|a_j| + |c_j| = 2 \frac{\sigma \Delta t}{h^2} < 1 + 2 \frac{\sigma \Delta t}{h^2} + k \Delta t = |b_j|.$$

Отметим, что при $k < 0$ (данный случай соответствует математической модели химического реактора, в котором протекают автокаталитические реакции) выполнение достаточного условия сходимости прогонки (4.16) не является очевидным. Однако при этом спектральный метод не будет гарантировать устойчивость неявной разностной схемы (4.6). Очевидно, данный случай требует особого метода решения.

2. Неявная разностная схема

2.6. Алгоритм метода прогонки

Мы описали метод прогонки – метод решения неявной разностной схемы (4.6) для одномерного дифференциального уравнения параболического типа. Ниже приводится алгоритм метода прогонки, представленный для наглядности в виде блок-схемы.



3. Разностная схема Кранка-Николсона

3.1. Вывод разностной схемы Кранка-Николсона

Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение параболического типа с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k u + f(t, x), \quad k \geq 0; \quad u(t=0, x) = \xi(x); \quad \begin{cases} u(t, x=a) = \varphi_1(t); \\ u(t, x=b) = \varphi_2(t). \end{cases} \quad (4.17)$$

Запишем для уравнения (4.17) разностную схему, представляя вторую производную функции u по координате x в виде двух слагаемых

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и аппроксимируя первое слагаемое на n -ом шаге по времени, а второе – на $(n+1)$ -ом шаге по времени:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j). \quad (4.18)$$

Данная разностная схема называется **разностной схемой Кранка–Николсона** в честь авторов, создавших её.

Разложение второй производной функции u по координате x на две равноценные составляющие, одна из которых аппроксимируется на n -ом шаге по времени, а другая – на $(n+1)$ -ом шаге по времени, указывает на то, что аппроксимацию этой производной в целом следует рассматривать на шаге по времени $(n+1/2)$. В то же время конечная разность, аппроксимирующая производную функции u по времени, по отношению к точке $(n+1/2)$ является центральной конечной разностью, имеющей, как известно, второй порядок аппроксимации. Следовательно, разностная схема Кранка–Николсона аппроксимирует уравнение (4.17) со вторым порядком и по времени, и по координате:

$$O(\Delta t^2) + O(h^2) \quad \text{или} \quad O(\Delta t^2, h^2).$$

Таким образом, порядок аппроксимации разностной схемы Кранка–Николсона выше, чем порядок аппроксимации явной и неявной разностных схем; то есть, результаты, получаемые при использовании разностной схемы Кранка–Николсона будут более точными.

3. Разностная схема Кранка-Николсона

3.2. Устойчивость разностной схемы Кранка-Николсона

Исследуем устойчивость разностной схемы Кранка-Николсона (4.18) с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член $f(t^n, x_j)$, наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоник (3.7):

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} = \frac{\sigma}{2} \frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^n e^{i\alpha j} + \lambda^n e^{i\alpha(j-1)}}{h^2} + \\ + \frac{\sigma}{2} \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} + \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h^2} - k \lambda^{n+1} e^{i\alpha j}.$$

Далее, упрощаем полученное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{\sigma}{2} \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} + \frac{\sigma \lambda}{2} \frac{e^{i\alpha} - 2\lambda + \lambda e^{-i\alpha}}{h^2} - k \lambda.$$

Используя зависимости (3.9), (3.10), получаем формулу

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{2h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\sigma \lambda}{2h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - k \lambda,$$

из которой выражаем λ :

$$\lambda = \frac{1 - \frac{2\sigma \Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{2\sigma \Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \Delta t}.$$

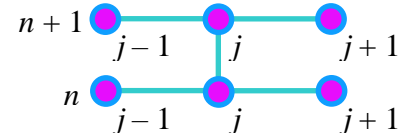
Видно, что в полученном выражении числитель по абсолютному значению меньше знаменателя (при $\sigma > 0$ и $k \geq 0$). Следовательно, необходимое условие устойчивости разностных схем (3.8) в данном случае выполняется при любых значениях Δt и h ; то есть, разностная схема Кранка-Николсона (4.18) является абсолютно устойчивой.

Отметим, что при $k < 0$ спектральный метод не будет гарантировать устойчивость разностной схемы (4.18), поскольку $\sin^2(\alpha/2)$ может принимать любые значения от 0 до 1 и при $\sin^2(\alpha/2) = 0$ числитель будет больше знаменателя при любом положительном Δt . Очевидно, данный случай требует особого метода решения.

3. Разностная схема Кранка-Николсона

3.3. Метод решения разностной схемы Кранка–Николсона

Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий разностную схему Кранка–Николсона (4.18), свидетельствует о том, что она содержит три неизвестные величины – значения функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени. Следовательно, для решения данной разностной схемы необходимо использовать метод прогонки. Методики определения прогоночных коэффициентов и решения на правой границе, а также общий вид алгоритма решения в данном случае будут такими же, как и для неявной разностной схемы (4.6). Однако достаточное условие сходимости прогонки (4.16) требует проверки.



Приведём выражение (4.18) к виду (4.10), удобному для использования метода прогонки:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\sigma \Delta t}{2h^2} u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} + k \Delta t\right) u_j^{n+1} - \frac{\sigma \Delta t}{2h^2} u_{j-1}^{n+1} = \\
 = u_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{2h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + f(t^n, x_j) \Delta t.
 \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты, соответствующие уравнению (4.10), имеют вид:

$$\begin{aligned}
 a_j = c_j = -\frac{\sigma \Delta t}{2h^2}, \quad b_j = 1 + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} + k \Delta t, \\
 \xi_j^n = u_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{2h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + f(t^n, x_j) \Delta t.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что для разностной схемы (4.18) достаточное условие сходимости прогонки выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = \frac{\sigma \Delta t}{h^2} < 1 + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} + k \Delta t = |b_j|.$$

4. Разностная схема Саульева

4.1. Вывод разностной схемы Саульева

Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение параболического типа с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k u + f(t, x), \quad k \geq 0; \quad u(t=0, x) = \xi(x); \quad \begin{cases} u(t, x=a) = \varphi_1(t); \\ u(t, x=b) = \varphi_2(t). \end{cases} \quad (4.19)$$

Представим разностный оператор для аппроксимации второй производной функции u по координате x (2.12) в следующем виде:

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_j} \rightarrow \lambda_{xx} u = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = \frac{\frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h}}{h}. \quad (4.20)$$

Аппроксимируя первую дробь числителя в выражении (4.20) на n -ом шаге по времени, а вторую дробь и свободный член в уравнении (4.19) – на $(n+1)$ -ом шаге по времени, получим соотношение

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h}}{h} - k u^{n+1} + f(t^{n+1}, x_j)$$

или, упрощая,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - (u_j^n + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u^{n+1} + f(t^{n+1}, x_j). \quad (4.21)$$

Соотношение (4.21) не аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (4.19). Поэтому рассмотрим следующий шаг по времени на разностной сетке:

$$u_j^{n+1} \rightarrow u_j^{n+2}.$$

Аппроксимируя на этот раз первую дробь числителя в выражении (4.20) на $(n+2)$ -ом шаге по времени, а вторую дробь и свободный член в уравнении (4.19) – на $(n+1)$ -ом шаге по времени, получим соотношение

$$\frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\Delta t} = \sigma \frac{\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+2}}{h} - \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h}}{h} - k u^{n+1} + f(t^{n+1}, x_j)$$

или, упрощая,

$$\frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - (u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u^{n+1} + f(t^{n+1}, x_j). \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) также не аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (4.19). Однако в совокупности выражения (4.21) и (4.22) составляют разностную схему, называемую в честь её автора, **разностной схемой Саульева**. Сами выражения (4.21) и (4.22) называют **первой и второй степенями** разностной схемы Саульева, соответственно.

4. Разностная схема Саульева

4.2. Определение порядка аппроксимации разностной схемы Саульева

Рассмотрим сумму соотношений (4.21) и (4.22), делённую пополам:

$$\frac{u_j^{n+2} - u_j^n}{2\Delta t} = \sigma \frac{\frac{u_{j+1}^{n+2} + u_{j+1}^n}{2} - \left(\frac{u_j^{n+2} + u_j^n}{2} + u_{j-1}^{n+1} \right) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u^{n+1} + f(t^{n+1}, x_j). \quad (4.23)$$

Разложим значения u_j^{n+2}, u_j^n в ряд Тейлора относительно точки (t^{n+1}, x_j) :

$$u_j^{n+2} = u_j^{n+1} + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^{n+1} \Delta t + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^{n+1} (\Delta t)^2 + \dots,$$
$$u_j^n = u_j^{n+1} - \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^{n+1} \Delta t + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^{n+1} (\Delta t)^2 + \dots$$

Исходя из этих соотношений, среднее арифметическое значений u_j^{n+2}, u_j^n , используемое в (4.23), можно аппроксимировать значением u_j^{n+1} со вторым порядком аппроксимации по времени:

$$\frac{u_j^n + u_j^{n+2}}{2} = u_j^{n+1} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^{n+1} (\Delta t)^2 = u_j^{n+1} + O(\Delta t^2).$$

Подставляя данную формулу в (4.23), получаем:

$$\frac{u_j^{n+2} - u_j^n}{2\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{O(\Delta t^2)}{h^2} - k u^{n+1} + f(t^{n+1}, x_j). \quad (4.24)$$

Разностный оператор, стоящий в левой части выражения (4.24), по отношению к точке (t^{n+1}, x_j) , т.е. к точке, для которой записана правая часть этого же выражения, является центральной конечной разностью, имеющей, как известно, второй порядок аппроксимации. Следовательно, разностная схема Саульева аппроксимирует уравнение (4.19) со вторым порядком и по времени, и по координате:

$$O(\Delta t^2) + O(h^2) \quad \text{или} \quad O(\Delta t^2, h^2).$$

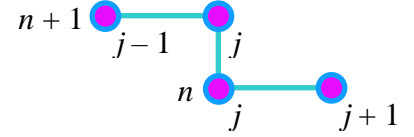
Однако второе слагаемое в правой части выражения (4.24) вносит дополнительный вклад в ошибку аппроксимации. Поэтому реально точность результатов, получаемых при использовании разностной схемы Саульева, будет зависеть от выбора величин шагов по времени и координате x , а точнее от порядка отношения $\Delta t/h$. При $\Delta t \sim h^2$ погрешность, вносимая вторым слагаемым в правой части выражения (4.24), будет сопоставима с погрешностью, вносимой аппроксимацией производных. Если же $\Delta t \sim h$, то точных результатов мы не получим.

Завершая анализ погрешности, создаваемой разностной схемой Саульева, и переходя к рассмотрению метода её решения, следует отметить, что данная разностная схема является абсолютно устойчивой (примем этот факт без доказательства), однако её аппроксимация сама накладывает ограничение на выбор интервала деления на разностной сетке.

4. Разностная схема Саульева

4.3. Метод решения разностной схемы Саульева

Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий первую ступень разностной схемы Саульева, свидетельствует о том, что выражение (4.21) содержит две неизвестные величины – значения

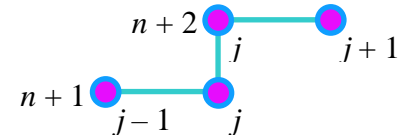


функции u на $(n+1)$ -ом шаге по времени u_j^{n+1}, u_{j-1}^{n+1} . То есть, для определения величины u_j^{n+1} необходимо знать значение функции u в соседней слева точке на разностной сетке. Определяя u_1^{n+1} из левого граничного условия (4.19) и выражая u_j^{n+1} из соотношения (4.21):

$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} u_{j+1}^n - \frac{\sigma \Delta t}{h^2} u_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} u_{j-1}^{n+1} + \Delta t f(t^{n+1}, x_j)}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} + k \Delta t}, \quad (4.25)$$

можно последовательно рассчитать значения функции u на $(n+1)$ -ом шаге по времени $u_j^{n+1}, j=2, \dots, N-1$. Если вместо граничных условий 1-го рода (4.19) будут заданы граничные условия 2-го или 3-го рода, то для определения величины u_1^{n+1} необходимо решить систему двух уравнений: разностной аппроксимации левого граничного условия на $(n+1)$ -ом шаге по времени и рекуррентного соотношения (4.25) при $j=2$. Значение u_N^{n+1} определяется из правого граничного условия.

Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий вторую ступень разностной схемы Саульева, свидетельствует о том, что выражение (4.22) содержит две неизвестные величины – значения



функции u на $(n+2)$ -ом шаге по времени u_j^{n+2}, u_{j+1}^{n+2} . То есть, для определения величины u_j^{n+2} необходимо знать значение функции u в соседней справа точке на разностной сетке. Определяя u_N^{n+2} из правого граничного условия (4.19) и выражая u_j^{n+2} из соотношения (4.22):

$$u_j^{n+2} = \frac{u_j^{n+1} + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} u_{j+1}^{n+2} - \frac{\sigma \Delta t}{h^2} u_j^{n+1} + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} u_{j-1}^{n+1} - k \Delta t u^{n+1} + \Delta t f(t^{n+1}, x_j)}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{h^2}}, \quad (4.26)$$

можно последовательно рассчитать значения функции u на $(n+2)$ -ом шаге по времени $u_j^{n+2}, j=N-1, \dots, 2$. В случае, если заданы граничные условия 2-го или 3-го рода, для определения величины u_N^{n+2} необходимо решить систему двух уравнений: разностной аппроксимации правого граничного условия на $(n+2)$ -ом шаге по времени и рекуррентного соотношения (4.26) при $j=N-1$. Значение u_1^{n+2} определяется из левого граничного условия.

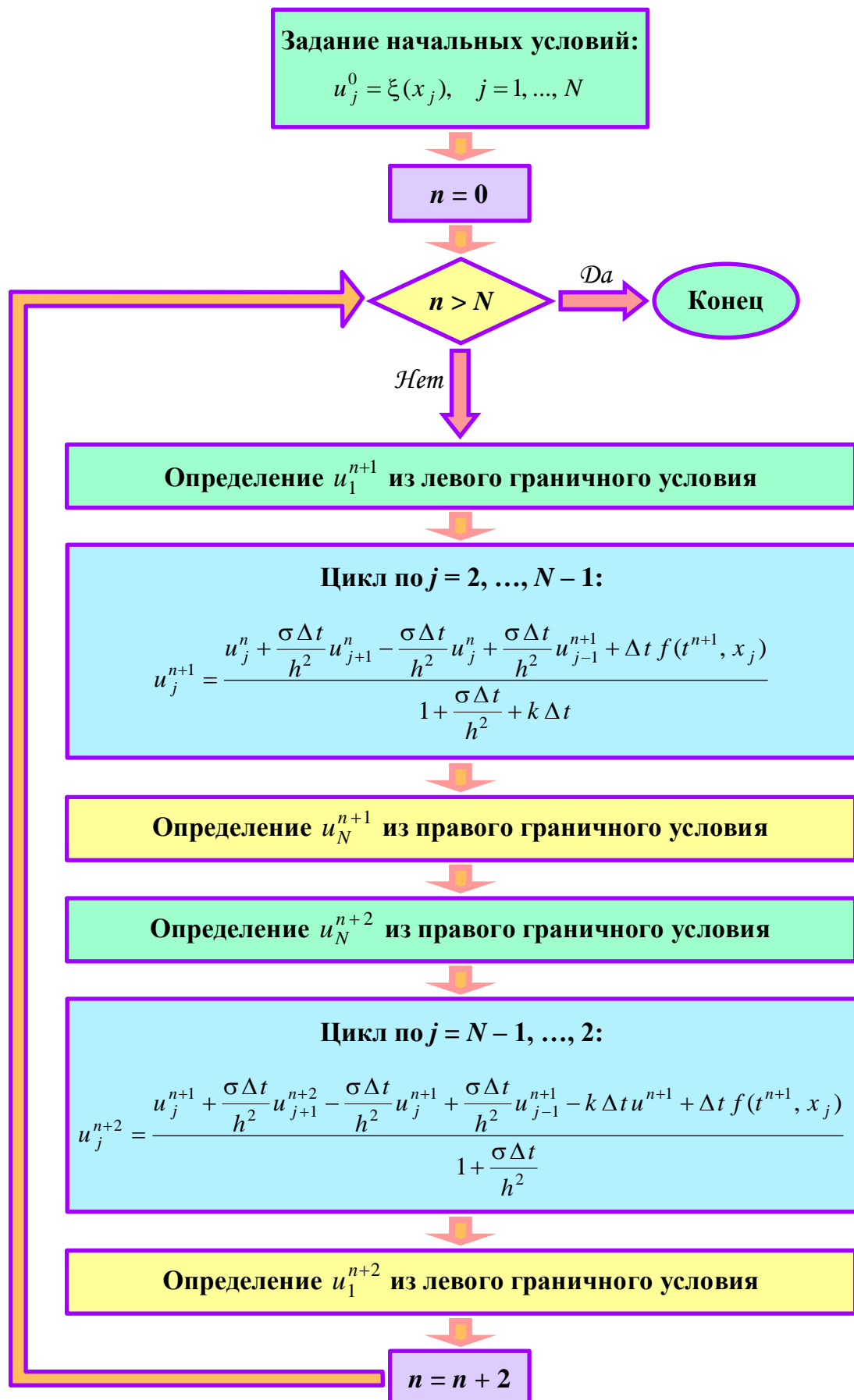
Таким образом, метод решения разностной схемы Саульева существенно проще метода решения неявной разностной схемы и разностной схемы Кранка–Николсона (т.е. метода прогонки). Однако следует обратить внимание, что поскольку выражения (4.21) и (4.22) по отдельности не аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение (4.19), оценка

погрешности значений функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени не представляется возможной. Близость к истинным значениям может быть гарантирована только для значений функции u на $(n + 2)$ -ом шаге по времени, поэтому заданный временной интервал должен быть изначально разделён на чётное число частей (шагов).

4. Разностная схема Саульева

4.4. Алгоритм решения разностной схемы Саульева

Мы описали метод решения разностной схемы Саульева для одномерного дифференциального уравнения параболического типа (4.19). Ниже приводится алгоритм решения, представленный для наглядности в виде блок-схемы.



5. Сравнительная характеристика изученных разностных схем

В заключение приведём сравнительную характеристику разностных схем, аппроксимирующих одномерное дифференциальное уравнение параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k u + f(t, x), \quad k \geq 0.$$

1. Явная разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - k u_j^n + f(t^n, x_j).$$

- Имеет порядок аппроксимации $O(\Delta t, h^2)$.
- Условно устойчива $\Delta t \leq \frac{2h^2}{4\sigma + kh^2}$.
- Решается с помощью рекуррентного соотношения (4.4).

2. Неявная разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j).$$

- Имеет порядок аппроксимации $O(\Delta t, h^2)$.
- Абсолютно устойчива.
- Решается методом прогонки.

3. Разностная схема Кранка-Николсона

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j).$$

- Имеет порядок аппроксимации $O(\Delta t^2, h^2)$.
- Абсолютно устойчива.
- Решается методом прогонки.

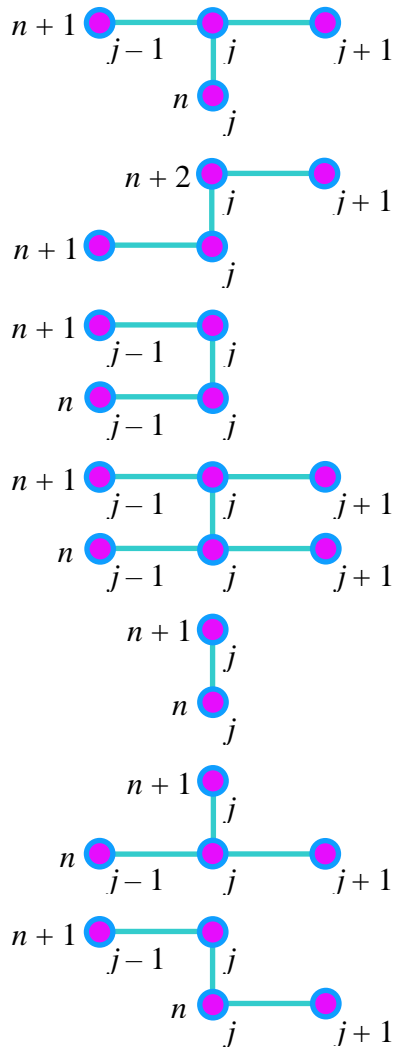
4. Разностная схема Саульева

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \sigma \frac{u_{j+1}^n - (u_j^n + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u^{n+1} + f(t^{n+1}, x_j); \\ \frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\Delta t} &= \sigma \frac{u_{j+1}^{n+2} - (u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u^{n+1} + f(t^{n+1}, x_j). \end{aligned}$$

- Имеет порядок аппроксимации $O(\Delta t^2, h^2)$ при $\Delta t \sim h^2$.
- Абсолютно устойчива.
- Решается с помощью рекуррентных соотношений (4.25) и (4.26).

Задания для самоконтроля

1. Определите, каким разностным схемам, аппроксимирующим одномерные дифференциальные уравнения параболического типа, соответствуют представленные ниже разностные шаблоны.



Перечень вариантов ответов:

- Явная разностная схема
- Неявная разностная схема
- Разностная схема Кранка-Николсона
- Первая ступень разностной схемы Саульева
- Вторая ступень разностной схемы Саульева
- Такой разностной схемы не существует

2. Одномерное дифференциальное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,7u + 2tx$$

аппроксимируется явной разностной схемой

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,3 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 1,7u_j^n + 2\Delta t n h(j-1).$$

Выберите из приведённых ниже уравнений то, которое является рекуррентным соотношением для данной разностной схемы.

◊ А. $u_j^{n+1} = u_j^n + 0,3\Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 1,7\Delta t u_j^n + 2\Delta t n h(j-1)$

◊ Б. $u_j^{n+1} = u_j^n + 0,3\Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$

◊ В. $u_j^{n+1} = u_j^n + 0,3\Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 1,7\Delta t u_j^n + 2\Delta t^2 n h(j-1)$

◊ Г. $u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$

3. Одномерное дифференциальное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,7u + 2tx$$

аппроксимируется неявной разностной схемой

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 1,7u_j^{n+1} + 2\Delta t n h(j-1).$$

Выберите из приведённых ниже уравнений то, которое является рекуррентным соотношением для данной разностной схемы.

$$\diamond \text{ А. } u_j^{n+1} = \frac{u_j^n + 0,3(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})\Delta t/h^2 + 2\Delta t^2 n h(j-1)}{1 + 1,7\Delta t + 0,6\Delta t/h^2}$$

$$\diamond \text{ Б. } u_j^{n+1} = u_j^n + 0,3\Delta t \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 1,7\Delta t u_j^{n+1} + 2\Delta t^2 n h(j-1)$$

$$\diamond \text{ В. } u_j^{n+1} = u_j^n + 0,3\Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 1,7\Delta t u_j^n + 2\Delta t^2 n h(j-1)$$

$$\diamond \text{ Г. } u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$$

4. Одномерное дифференциальное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,7u + 2tx$$

аппроксимируется неявной разностной схемой

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 1,7u_j^{n+1} + 2\Delta t n h(j-1).$$

Выберите правильное решение задачи приведения данной разностной схемы к виду, удобному для использования метода прогонки, и определения сходимости прогонки.

$$\diamond \text{ А. } -\frac{0,3\Delta t}{h^2}u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} + 1,7\Delta t\right)u_j^{n+1} - \frac{0,3\Delta t}{h^2}u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + 2\Delta t^2 n h(j-1);$$

$$a_j = c_j = -\frac{0,3\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} + 1,7\Delta t, \quad \xi_j^n = u_j^n + 2\Delta t^2 n h(j-1);$$

$$|a_j| + |c_j| = \frac{0,6\Delta t}{h^2} < 1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} + 1,7\Delta t = b_j \Rightarrow \text{прогонка сходится.}$$

$$\diamond \text{ Б. } -\frac{0,3\Delta t}{h^2}u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} + 1,7\Delta t\right)u_j^{n+1} - \frac{0,3\Delta t}{h^2}u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + 2\Delta t^2 n h(j-1);$$

$$a_j = c_j = \frac{0,3\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} + 1,7\Delta t, \quad \xi_j^n = u_j^n + 2\Delta t^2 n h(j-1);$$

$$|a_j| + |c_j| = \frac{0,6\Delta t}{h^2} < 1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} + 1,7\Delta t = b_j \Rightarrow \text{прогонка сходится.}$$

$$\diamond \text{ В. } -\frac{0,3\Delta t}{h^2}u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2}\right)u_j^{n+1} - \frac{0,3\Delta t}{h^2}u_{j-1}^{n+1} = u_j^n - 1,7\Delta t u_j^{n+1} + 2\Delta t^2 n h(j-1);$$

$$a_j = c_j = -\frac{0,3\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2}, \quad \xi_j^n = u_j^n - 1,7\Delta t u_j^{n+1} + 2\Delta t^2 n h(j-1);$$

$$|a_j| + |c_j| = \frac{0,6\Delta t}{h^2} < 1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} = b_j \Rightarrow \text{прогонка сходится.}$$

$$\diamond \text{ Г. } -\frac{0,3\Delta t}{h^2}u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} - 1,7\Delta t\right)u_j^{n+1} - \frac{0,3\Delta t}{h^2}u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + 2\Delta t^2 n h(j-1);$$

$$a_j = c_j = -\frac{0,3\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} - 1,7\Delta t, \quad \xi_j^n = u_j^n + 2\Delta t^2 n h(j-1);$$

$$|a_j| + |c_j| = \frac{0,6\Delta t}{h^2} < 1 + \frac{0,6\Delta t}{h^2} - 1,7\Delta t = b_j \Rightarrow \text{прогонка сходится при } \Delta t < 1/1,7.$$

5. Выберите правильное решение задачи определения прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по координате x (т.е. α_1, β_1), если задано левое граничное условие 3-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0) = 3tu(t, x=0) - 1,5e^t.$$

◇ А. $u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1,$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = 3\Delta t n u_1^{n+1} + 1,5e^{\Delta t n},$$

$$u_1^{n+1} = \frac{u_2^{n+1} - 1,5he^{\Delta t n}}{1 + 3\Delta t n h} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{1 + 3\Delta t n h}, \quad \beta_1 = -\frac{1,5he^{\Delta t n}}{1 + 3\Delta t n h}.$$

◇ Б. $u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1,$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = 3\Delta t n u_1^{n+1} - 1,5e^{\Delta t n},$$

$$u_1^{n+1} = \frac{u_2^{n+1} + 1,5he^{\Delta t n}}{1 + 3\Delta t n h} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{u_2^{n+1}}{1 + 3\Delta t n h}, \quad \beta_1 = \frac{1,5he^{\Delta t n}}{1 + 3\Delta t n h}.$$

◇ В. $u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1,$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = 3\Delta t n u_1^{n+1} - 1,5e^{\Delta t n},$$

$$u_1^{n+1} = \frac{u_2^{n+1} + 1,5he^{\Delta t n}}{1 + 3\Delta t n h} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{1 + 3\Delta t n h}, \quad \beta_1 = \frac{1,5he^{\Delta t n}}{1 + 3\Delta t n h}.$$

◇ Г. $u_2^{n+1} = \alpha_1 u_1^{n+1} + \beta_1,$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = 3\Delta t n u_1^{n+1} - 1,5e^{\Delta t n},$$

$$u_2^{n+1} = (1 + 3\Delta t n h)u_1^{n+1} - 1,5he^{\Delta t n} \Rightarrow \alpha_1 = 1 + 3\Delta t n h, \quad \beta_1 = -1,5he^{\Delta t n}.$$

6. Выберите правильное решение задачи определения решения на правой границе (т.е. u_j^{n+1}), если задано правое граничное условие 3-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = u(t, x=b).$$

◇ А. $u_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1},$

$$\frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = u_N^{n+1},$$

$$\frac{u_N^{n+1} - \alpha_{N-1} u_N^{n+1} - \beta_{N-1}}{h} = u_N^{n+1} \quad \Rightarrow \quad u_N^{n+1} = \frac{\beta_{N-1}}{1 - \alpha_{N-1} - h}.$$

◇ Б. $u_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1},$

$$\frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = u_N^{n+1},$$

$$\frac{u_N^{n+1} - \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1}}{h} = u_N^{n+1} \quad \Rightarrow \quad u_N^{n+1} = \frac{-\beta_{N-1}}{1 - \alpha_{N-1} - h}.$$

◇ В. $u_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1},$

$$\frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = u_{N-1}^{n+1},$$

$$\frac{u_N^{n+1} - \alpha_{N-1} u_N^{n+1} - \beta_{N-1}}{h} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1} \quad \Rightarrow \quad u_N^{n+1} = \frac{\beta_{N-1}(1+h)}{1 - \alpha_{N-1}(1+h) - h}.$$

◇ Г. $\frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = u_N^{n+1} \quad \Rightarrow \quad u_N^{n+1} = \frac{u_{N-1}^{n+1}}{1-h}.$

7. Выберите из представленных ниже разностных соотношений то, которое является разностной схемой Кранка-Николсона, аппроксимирующей дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u + t.$$

◊ А.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u_j^{n+1} + \Delta t n$
◊ Б.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 0,5 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^{n+1} + \Delta t n$
◊ В.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,25 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 0,25 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^{n+1} + \Delta t n$
◊ Г.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,25 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 0,25 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^n + \Delta t n$
◊ Д.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,75 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 0,25 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^{n+1} + \Delta t n$
◊ Е.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,25 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 0,25 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^{n+1} + \Delta t n$

8. Выберите из представленных ниже разностных соотношений те, которые составляют разностную схему Саульева, аппроксимирующую дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u + t.$$

\diamond А.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^n - (u_j^n + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u^{n+1} + \Delta t n,$ $\frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^{n+2} - (u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u^{n+2} + \Delta t (n+1).$
\diamond Б.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,25 \frac{u_{j+1}^n - (u_j^n + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u^{n+1} + \Delta t (n+1),$ $\frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\Delta t} = 0,25 \frac{u_{j+1}^{n+2} - (u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u^{n+1} + \Delta t (n+1).$
\diamond В.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^n - (u_j^n + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u^{n+1} + \Delta t (n+1).$
\diamond Г.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^n - (u_j^n + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u^{n+1} + \Delta t (n+1),$ $\frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^{n+1} - (u_j^{n+1} + u_j^{n+2}) + u_{j-1}^{n+2}}{h^2} - 2u^{n+1} + \Delta t (n+1).$
\diamond Д.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^n - (u_j^n + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u^{n+1} + \Delta t (n+1),$ $\frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^{n+2} - (u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u^{n+1} + \Delta t (n+1).$
\diamond Е.	$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^n - (u_j^n + u_j^{n+1}) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u^{n+1} + \Delta t (n+1),$ $\frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\Delta t} = 0,5 \frac{u_{j+1}^{n+2} - 2u_j^{n+2} + u_{j-1}^{n+2}}{h^2} - 2u^{n+2} + \Delta t (n+1).$

9. Определите общее количество циклов по переменной j , требуемых для расчёта

$$u_j^n \rightarrow u_j^{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow u_j^{n+6},$$

при использовании следующих разностных схем:

- | | |
|--|-----|
| I. Явной разностной схемы | < > |
| II. Неявной разностной схемы | < > |
| III. Разностной схемы Кранка-Николсона | < > |
| IV. Разностной схемы Саульева | < > |

10. Определите количество обратных циклов по переменной j (т.е., $j = N - 1, N - 2, N - 3, \dots$), требуемых для расчёта

$$u_j^n \rightarrow u_j^{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow u_j^{n+6},$$

при использовании следующих разностных схем:

- | | |
|--|-----|
| I. Явной разностной схемы | < > |
| II. Неявной разностной схемы | < > |
| III. Разностной схемы Кранка-Николсона | < > |
| IV. Разностной схемы Саульева | < > |

11. Отметьте следующие свойства разностных схем, аппроксимирующих одномерные дифференциальные уравнения параболического типа:

- в колонке I отметьте разностные схемы, имеющие второй порядок аппроксимации и по координате, и по времени;
- в колонке II отметьте абсолютно устойчивые разностные схемы;
- в колонке III отметьте разностные схемы, решаемые без использования метода прогонки;
- в колонке IV отметьте разностные схемы, имеющие ограничения в выборе расчётного шага.

	I	II	III	IV
Явная разностная схема	<>	<>	<>	<>
Неявная разностная схема	<>	<>	<>	<>
Разностная схема Кранка-Николсона	<>	<>	<>	<>
Разностная схема Саульева	<>	<>	<>	<>