Семинар 6 [27.09.2022]

Нелинейные уравнения.

Задачи

Задача 1

Пусть имеется нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, u, \partial_x u) = 0, \quad x = \{x_1, \dots x_n\}, \quad u = u(x), \quad \partial_x u = \left\{\partial_{x_1} u, \dots \partial_{x_n} u\right\}.$$

Построить систему уравнений на характеристики.

Задача 2

Решить уравнение Гамильтона-Якоби

$$\partial_t S + \frac{1}{2}(\partial_x S)^2 = 0,$$

с задачей Коши $S(x, 0) = x^2$.

Задача 3

Решить уравнение

$$\partial_t u \partial_x u - u = 0,$$

с задачей Коши $u(x, 0) = x^2$.

Решения

Задача 1

Введем обозначение $p = \partial_x u$, тогда

$$F(x, u, p) = 0. \tag{1}$$

Дифференцирование по x_i дает

$$\frac{dF}{dx_i} = \partial_{x_i} F + \partial_{x_i} u \partial_u F + \partial_{x_i} p_j \partial_{p_j} F = 0.$$

Используя

$$\partial_{x_i} p_j = \partial_{x_i} \partial_{x_j} u = \partial_{x_j} \partial_{x_i} u = \partial_{x_j} p_i,$$

и подставляя $\partial_{x_i} u = p_i$, имеем

$$\partial_{p_j} F \partial_{x_j} p_i = -\partial_{x_i} F - p_i \partial_u F. \tag{2}$$

Таким образом, мы получили уравнение на функцию $p_i = p_i(x)$. Соответсвующие уравнения на характеристики:

$$\dot{x}_j = \partial_{p_j} F, \quad \dot{p}_i = -\partial_{x_i} F - p_i \partial_u F.$$

Эту систему также следует дополнить уравнением на u:

$$\dot{u} = \dot{x}_i \partial_{x_i} u = p_i \partial_{p_i} F.$$

В итоге получаем автономную систему $2n + 1$ уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{x}_j = \partial_{p_j} F, \\ \dot{p}_i = -\partial_{x_i} F - p_i \partial_u F, \\ \dot{u} = p_i \partial_{p_i} F. \end{gathered}$$

Эта система имеет $2n$ интегралов движения. Общее решение неявно задается уравнением

$$f(I(x, u, p)) = 0, \quad I = \{I_1, \ldots I_{2n}\},$$

которое также следует дополнить n условиями

$$p_i = \partial_{x_i} u,$$

и с их помощью исключить из решения p.

Замечание: если F не зависит от u, то уравнение (1) называется уравнением Гамильтона-Якоби.

Задача 2

Обозначим

$$q = \partial_t S, \quad p = \partial_x S,$$

тогда уравнение приводится к виду

$$F(q, p) = q + \frac{p^2}{2} = 0. \tag{3}$$

Действуя по алгоритму, получаем уравнения:

$$
\begin{gathered}
\dot{t} = \partial_q F = 1, \quad \dot{x} = \partial_p F = p, \\
\dot{q} = -\partial_t F - q\partial_u F = 0, \quad \dot{p} = -\partial_x F - p\partial_u F = 0, \\
\dot{S} = q\partial_q F + p\partial_p F = q + p^2.
\end{gathered}
$$

Всего 5 уравнений, значит должно быть 4 независимых первых интеграла. Из второй пары уравнений очевидно имеем

$$
I_1 = q, \quad I_2 = p.
$$

Тогда первая пара дает

$$
\frac{dx}{dt} = p, \quad \Rightarrow \quad I_3 = x - pt.
$$

Последний интеграл может быть получен из уравнения на S и любого из уравнений первой пары:

$$
\frac{dS}{dt} = q + p^2, \quad \Rightarrow \quad I_4 = \left(q + p^2\right)t - S.
$$

Исключая q при помощи уравнения (3): $q = -p^2/2$, можем записать общее решение в виде

$$
f\left(p, x - pt, tp^2/2 - S\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad S = \frac{p^2}{2}t + g\left(p, x - pt\right),
$$

с дополнительным условием на p:

$$
p = \partial_x S = \partial_x g\left(p, x - pt\right).
$$

Из задачи Коши имеем

$$
S\left(x, 0\right) = g\left(p, x\right) = x^2,
$$

тогда

$$
S = \frac{p^2}{2}t + \left(x - pt\right)^2.
$$

В итоге, находим

$$
p = \partial_x S = 2\left(x - pt\right), \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2x}{1 + 2t}.
$$

и получаем решение в виде

$$
S = \frac{x^2}{1 + 2t}.
$$

Задача 3

Обозначим

$$
q = \partial_t u, \quad p = \partial_x u,
$$

тогда

$$
F\left(u, q, p\right) = qp - u.
$$

Действуя по алгоритму, получаем систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
\dot{t} = p, \quad \dot{x} = q, \\
\dot{q} = q, \quad \dot{p} = p, \\
\dot{u} = 2qp.
\end{gathered}
$$

Из первых четырех уравнений получаем

$$\begin{aligned} dq &= dx, \quad \Rightarrow \quad I_1 = x - q, \\ dp &= dt, \quad \Rightarrow \quad I_2 = t - p, \\ \frac{dq}{q} &= \frac{dp}{p}, \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение дает

$$du = 2I_3 q dq, \quad \Rightarrow \quad I_4 = qp - u.$$

Причем из самого уравнения получаем, что $I_4 = 0$, а значит решение от этого интеграла не зависит. Тогда общее решение принимает вид

$$G\left(x - q, t - p, \frac{p}{q}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} = g\,(x - q, t - p)\,. \tag{4}$$

В действительности, решение теперь представляет собой некоторое новое уравнение на u:

$$\partial_x u - g\,(x - q, t - p)\,\partial_t u = 0.$$

Чтобы определить конкретный вид уравнения, воспользуемся задачей Коши. Имеем

$$u|_{t=0} = x^2, \quad \Rightarrow \quad p|_{t=0} = \partial_x u|_{t=0} = 2x,$$

а из самого уравнения получаем

$$\partial_t u \partial_x u - u = 0, \quad \Rightarrow \quad q|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} = \frac{x}{2}.$$

Таким образом

$$4 = g\left(\frac{x}{2}, -2x\right), \quad \Rightarrow \quad g\,(\alpha, -4\alpha) = 4, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

В итоге получаем обычное линейное уравнение

$$\partial_x u - 4\partial_t u = 0.$$

Уравнения на характеристики:

$$\dot{t} = -4, \quad \dot{x} = 1,$$

откуда получаем интеграл

$$I = x + \frac{t}{4},$$

и решение

$$u = f\left(x + \frac{t}{4}\right).$$

Задача Коши дает $f\,(\alpha) = \alpha^2$, откуда окончательно получаем

$$u = \left(x + \frac{t}{4}\right)^2. \tag{6}$$

Замечание: из (5) у нас возникает дополнительное условие

$$-4\,(x - q) = t - p, \quad \Rightarrow \quad 4\partial_t u + \partial_x u = t + 4x. \tag{7}$$

То есть, формально, решение мы нашли только в области задаваемой уравнением (7). Можно, однако, проверить, что для решения (6) это условие выполняется для любых x и y, действительно:

$$4\partial_t u + \partial_x u = 2\left(x + \frac{t}{4}\right) + 2\left(x + \frac{t}{4}\right) = t + 4x.$$

Это значит, что уравнение (7) также имеет решение (6), удовлетворяющее задаче Коши.