Вариант 1

1. Задана аффинная система координат $\mathbf{e_1} = 3\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{i}-2\,\mathbf{j}-2\,\mathbf{k}$ и ковекторы $\mathbf{u} = \mathbf{e^1} + 2\,\mathbf{e^2} + \mathbf{e^3}$, $\mathbf{v} = 3\,\mathbf{e^1} + \mathbf{e^2} + \mathbf{e^3}$. Вычислить $w_1$, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathbf{rot\,a})_1$, где
$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (v + \sin w, 5\,u^2 - 4\,w, \cos u + 3\,v)$, а координаты $u$, $v$, $w$ связаны с декартовыми соотношениями $x = \mathrm{e}^{2\,u} - 2\,v + w$, $y = u + 3\,v$, $z = -u + v + \mathrm{e}^{3\,w}$.

3. В криволинейной системе координат $(x^1, x^2, x^3)$ в некоторой точке тензор $T$ имеет вид
$T = (T_i^j) = 11\,\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g^1} + 13\,\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g^2} + 15\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^1} + 17\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^2} + 19\,\mathbf{g_3}\otimes\mathbf{g^2} + 21\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^3} + 23\,\mathbf{g_3}\otimes\mathbf{g^3}$,
где $\mathbf{g_i}$ и $\mathbf{g^i}$ — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты $T_i^j$ тензора $T$. Найти координату $T_{1'}^{1'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^1/\partial x^{3'} \\ \partial x^2/\partial x^{1'} & \partial x^2/\partial x^{2'} & \partial x^2/\partial x^{3'} \\ \partial x^3/\partial x^{1'} & \partial x^3/\partial x^{2'} & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x^{1'}} & 3 & 0 \\ -2 & \mathrm{e}^{5\,x^{2'}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Для криволинейной системы координат $(x^1, x^2)$, связанной с декартовой соотношениями $x = -\cos 2\,x^1 + 4\,x^2$, $y = x^1 \operatorname{sh} x^2$, $x^1 > 0$, $x^2 > 0$, вычислить $(g_{ij})$ и $\Gamma_{1,22}$.

5. Найти компоненту $T_{12\cdot}^{\cdot\cdot 2}$ тензора $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \nabla_i S_{j\cdot}^{\cdot k}$, где
$S = (S_{j\cdot}^{\cdot k}) = 4\,\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g^1} + 3\,\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g^2} + 2\,x^2\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^1} + \operatorname{tg} x^1\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^2}$. Здесь $\mathbf{g_i}$ и $\mathbf{g^i}$ — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты $S_{j\cdot}^{\cdot k}$ тензора $S$. Символы Кристоффеля:
$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2};\ \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$

---

Вариант 2.

1. Задана аффинная система координат $\mathbf{e_1} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e_2} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{e_3} = -2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ и заданы ковекторы $\mathbf{u} = \mathbf{e^1} + 3\,\mathbf{e^2} + \mathbf{e^3}$, $\mathbf{v} = \mathbf{e^1} + 2\,\mathbf{e^2} - \mathbf{e^3}$. Вычислить $w_2$, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathbf{rot\,a})_2$, где
$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (\cos v^2 + 2\,w, u - 2\,w^2, \sin u + 2\,v)$, а координаты $u$, $v$, $w$ связаны с декартовыми соотношениями $x = 2\,u - 3\,v$, $y = u + \mathrm{e}^{3\,v} - w$, $z = 2\,u + v + \mathrm{e}^{2\,w}$.

3. В криволинейной системе координат $(x^1, x^2, x^3)$ в некоторой точке тензор $T$ имеет вид
$T = (T_i^j) = 12\,\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g^1} + 14\,\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g^2} + 16\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^1} + 18\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^2} + 20\,\mathbf{g_3}\otimes\mathbf{g^2} + 22\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^3} + 24\,\mathbf{g_3}\otimes\mathbf{g^3}$,
где $\mathbf{g_i}$ и $\mathbf{g^i}$ — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты $T_i^j$ тензора $T$. Найти координату $T_{2'}^{2'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^1/\partial x^{3'} \\ \partial x^2/\partial x^{1'} & \partial x^2/\partial x^{2'} & \partial x^2/\partial x^{3'} \\ \partial x^3/\partial x^{1'} & \partial x^3/\partial x^{2'} & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3\,x^{1'}} & 5 & 0 \\ -3 & \mathrm{e}^{x^{2'}} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Для криволинейной системы координат $(x^1, x^2)$, связанной с декартовой соотношениями $x = \sin 3\,x^1 - x^2$, $y = x^1 \operatorname{sh} 5\,x^2$, $x^1 > 0$, $x^2 > 0$, вычислить $(g_{ij})$ и $\Gamma_{2,11}$.

5. Найти компоненту $T_{21\cdot}^{\cdot\cdot 1}$ тензора $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \nabla_i S_{j\cdot}^{\cdot k}$, где
$S = (S_{j\cdot}^{\cdot k}) = \sin x^2\,\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g^1} + 8\,x^1\,\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g^2} + 7\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^1} + 6\,\mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g^2}$. Здесь $\mathbf{g_i}$ и $\mathbf{g^i}$ — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты $S_{j\cdot}^{\cdot k}$ тензора $S$. Символы Кристоффеля:
$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2};\ \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$