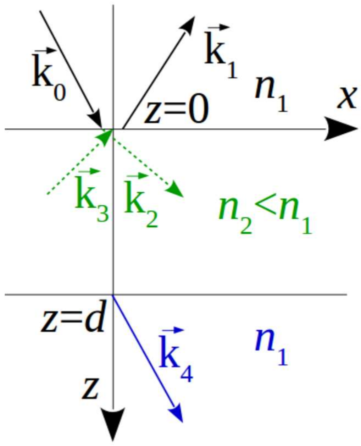
Вопрос.



В решении задачи 1.25 граничные условия $\Delta E_\tau = 0,\ \Delta H_\tau = 0$ на нижней и верхней границах имеют вид

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_2 + E_3 \\ k_{0z}E_0 - k_{0z}E_1 &= k_{2z}E_2 - k_{2z}E_3 \\ E_2\,\mathrm{e}^{i\delta} + E_3\,\mathrm{e}^{-i\delta} &= E_4 \\ k_{2z}E_2\,\mathrm{e}^{i\delta} - k_{2z}E_3\,\mathrm{e}^{-i\delta} &= k_{0z}E_4 \end{aligned} \tag{1}$$

где введено обозначение $\delta = k_{2z}d$.

Если волна падает под углом полного внутреннего отражения, то $k_{2z} = 0$ и получается система

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_2 + E_3 \\ k_{0z}E_0 - k_{0z}E_1 &= 0 \\ E_2 + E_3 &= E_4 \\ 0 &= k_{0z}E_4 \end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) несовместна. Действительно, из последних двух уравнений (2) следует, что

$$E_4 = 0,\ E_2 + E_3 = 0.$$

Тогда с учетом первого уравнения

$$E_0 + E_1 = 0.$$

Сложив это уравнение со вторым уравнением, деленным на k_{0z}, получим, что $E_0 = 0$. Это противоречит условию. При $E_0 \neq 0$ данная система не имеет решений.

Но понятно, что условие задачи легко осуществить экспериментально и какое-то решение для E_1, E_2, E_3, E_4 должно существовать. Это означает, что при переходе от системы (1) к (2) в случае $k_{2z} = 0$ была допущена ошибка. В чем она? (1 бонус) Как получить решение и какое оно? (+1 бонус)

Ответ.

Ошибка заключается в том, что нельзя занулять левую часть в последнем уравнении (2) при $k_{2z} \to 0$, так как одновременно с этим $E_2 - E_3 \to \infty$. Действительно, из второго уравнения (1) следует, что

$$E_2 - E_3 = \frac{k_{0z}}{k_{2z}}(E_0 - E_1).$$

Поэтому последнее уравнение (1) в пределе $k_{2z} \to 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} &k_{2z}E_2\,\mathrm{e}^{i\delta} - k_{2z}E_3\,\mathrm{e}^{-i\delta} = k_{2z}(E_2\,\mathrm{e}^{ik_{2z}d} - E_3\,\mathrm{e}^{-ik_{2z}d}) \to k_{2z}(E_2(1 + ik_{2z}d) - E_3(1 - ik_{2z}d)) = \\ &= k_{2z}(E_2 - E_3) + ik_{2z}^2 d(E_2 + E_3) = k_{0z}(E_0 - E_1) + ik_{2z}^2 d(E_2 + E_3) = k_{0z}(E_0 - E_1) = k_{0z}E_4, \end{aligned} \tag{3}$$

то есть $E_4 = E_0 - E_1$.

С другой стороны, из третьего уравнения (1) следует, что

$$\begin{aligned} &E_4 = E_2\,\mathrm{e}^{i\delta} + E_3\,\mathrm{e}^{-i\delta} \to E_2(1 + ik_{2z}d) + E_3(1 - ik_{2z}d) = E_2 + E_3 + ik_{2z}d(E_2 - E_3) = \\ &= E_0 + E_1 + ik_{0z}d(E_0 - E_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) получим

$$E_0 + E_1 + ik_{0z}d(E_0 - E_1) = E_0 - E_1 \to E_1 = \frac{ik_{0z}d}{ik_{0z}d - 2}E_0,\ \ E_4 = \frac{2}{2 - ik_{0z}d}E_0.$$

Разделение волн в слое на прямую E_2 и отраженную E_3 оказывается искусственным. Обе волны движутся в направлении x и образуют в сумме ограниченное по величине поле, линейное по z (выражение получается из (4) с заменой d на z):

$$E_{23} = E_2(z) + E_3(z) = E_0 + E_1 + ik_{0z}z(E_0 - E_1) = \frac{2ik_{0z}d - 2}{ik_{0z}d - 2}E_0 + i\frac{2k_{0z}z}{2 - ik_{0z}d}E_0 = 2 \cdot \frac{1 + ik_{0z}(z-d)}{2 - ik_{0z}d}E_0.$$

Итак, имеем:
$E_1 = \frac{ik_{0z}d}{ik_{0z}d-2}E_0$ – отраженная волна отсутствует при $d \to 0$, а полное отражение наступает при $d \to \infty$;
$E_4 = \frac{2}{2-ik_{0z}d}E_0$ – результат полностью согласуется с решением задачи 1.25 в пределе $k_{2z} \to 0$.
E_{23} в слое линейно по z, волна движется вдоль x.

Магнитное поле в слое определяется уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{23} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{23}}{c\partial t}$$

и имеет x- и z-компоненты. Компонента $H_{23z} \sim \frac{\partial E_{23}}{\partial x}$ линейна по z, а $H_{23x} \sim \frac{\partial E_{23}}{\partial z}$ от z не зависит. При этом сохраняется условие $\operatorname{div} \mathbf{B}_{23} \sim \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{23} = 0$. Также можно убедиться, что $\langle S_z \rangle \sim \operatorname{Re}\{E_{23}H_{23}^*\}$ от z не зависит.