# 1. Магнитостатика

*Закон Ампера* ($\mu = 1$):

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2 \left[d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12}]\right]}{c^2 r_{12}^3} = \frac{[\mathbf{j}_2 \times [\mathbf{j}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]\, dV_1 dV_2}{c^2 r_{12}^3} = \\ = \frac{[\mathbf{v}_2 \times [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]\, dq_1 dq_2}{c^2 r_{12}^3}.$$

*Сила Ампера*:

$$d\mathbf{F} = \frac{J\,[d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}]}{c} = \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]\, dV}{c} = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\, dq}{c}.$$

*Закон Био–Савара* ($\mu = 1, \mathbf{B} = \mathbf{H}$):

$$d\mathbf{H} = \frac{J\,[d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}]}{cr^3} = \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{r}]\, dV}{cr^3} = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{cr^3} dq$$

$\mathbf{B}$[Тл] $= 10^4 \mathbf{B}$[Гс], $\mathbf{H}$[А/м] $= 4\pi \cdot 10^-3 \mathbf{H}$[Э].
В вакууме ($\mu = 1$) для постоянных токов уравнения Максвела имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\ \mathbf{B} = \mathbf{H}.$$

В интегральной форме:

$$\oiint B_n dS = 0,\ \oint B_l dl = \frac{4\pi}{c} \iint j_n dS.$$

Граничные условия:

$$B_{1n}| = B_{2n}|,\ \mathbf{H}_{1\tau}| - \mathbf{H}_{2\tau}| = \frac{4\pi}{c} \left[\mathbf{I}_{\text{пов}} \times \mathbf{n}_{21}\right].$$

Скалярный магнитный потенциал $\varphi_m$ для областей, где $\mathbf{j} \equiv 0$ удовлетворяет уравнениям:

$$\Delta\varphi_m = 0,\quad \varphi_{1m}| = \varphi_{2m}|\,,\ \mu_1 \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right| = \mu_2 \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|.$$

Векторный магнитный потенциал $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$) удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu \mathbf{j}, \;\; \mathrm{div}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$
$$d\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\frac{\mathbf{j}}{r}dV = \frac{\mu}{c}J\frac{d\mathbf{l}}{r} = \mu\frac{\mathbf{v}dq}{cr} = \frac{\varepsilon\mu\mathbf{v}}{c}d\varphi.$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV'}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}.$$

Векторный потенциал магнитного диполя

$$\mathbf{A}_{\text{точ}} = \frac{[\mathbf{m}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \quad \text{где} \;\; \mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int[\mathbf{r}'\times\mathbf{j}']dV'.$$

Магнитный момент маленького витка с током $\mathbf{m} = \frac{JS}{c}\mathbf{n}$.
Сила и момент, действующие на магнитный диполь в слабо неоднородном поле

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m}\mathbf{B}) = (\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}, \mathbf{N} = [\mathbf{m}\times\mathbf{B}].$$

# Урок 18

### Закон Био-Савара. Теорема Стокса. Суперпозиция

1.1. (Задача 4.1) Найти поле на оси и в центре кругового витка радиуса $a$ с током $J$. Используя полученный результат, найти:

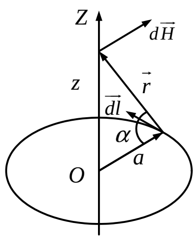
а) поле на оси круглого соленоида в точке, из которой его края видны под углами $\alpha_1$, $\alpha_2$;

б) поле на конце полубесконечного соленоида;

в) поле внутри бесконечного соленоида.

Число витков на единицу длины соленоидов $n$.

**Решение**




По закону Био-Савара напряженность магнитного поля $d\mathbf{H}$, создаваемая элементом тока $J\,d\ell$,

$$d\mathbf{H} = \frac{J}{cr^3}[\,d\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{r}\,], \tag{1}$$

где $r$ – расстояние от элемента тока до точки наблюдения. По принципу суперпозиции полное поле в данной точке можно получить интегрированием (1) по всему кольцу. Замечаем, что на оси витка

$$\mathbf{H} = \oint d\mathbf{H} = \mathbf{e}_z \oint dH_z,$$

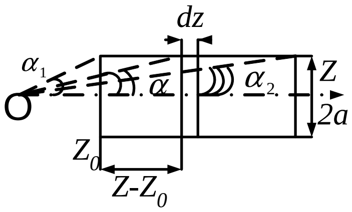
где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор в направлении оси $Z$. Интегрируя по кольцу $z$-ю проекцию напряженности магнитного поля $dH_z$, находим

$$H_z = \oint dH_z = \frac{J\cos\alpha}{cr^2}\oint d\ell = \frac{2\pi a J\cos\alpha}{cr^2} = \frac{2\pi J}{c}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (2)$$

Используя уравнение (2), получаем, что поле в центре витка

$$H_z\Big|_{z=0} = \frac{2\pi J}{ca}\,.$$

а) Найдем поле на оси круглого соленоида в точке, из которой его края видны под углами $\alpha_1$ и $\alpha_2$. Используя уравнение (2), запишем поле, создаваемое в точке $z=0$ током соленоида, текущим по $n\,dz$ виткам, расположенным на расстоянии $z$ от начала координат




$$dH_z = \frac{2\pi J}{c}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,n\,dz\,.$$

Интегрируя но всей длине соленоида, получаем полное поле, создаваемое соленоидом в точке $z=0$:

$$H_z = \frac{2\pi Jna}{c}\int\limits_{z_0}^{z_0+\ell}\frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,,$$

где $\ell$ – длина соленоида. Перейдем от интегрирования по $z$ к интегрированию по углу $\alpha$, используя формулы:

$$z = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,, \qquad dz = -\frac{a\,d\alpha}{\sin^2\alpha}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\,.$$

Тогда

$$H_z = -\frac{2\pi nJ}{c}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{2\pi nJ}{c}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\,. \qquad (3)$$

б) Если положить $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 0$, то из уравнения (3) получим напряженность магнитного поля на конце полубесконечного соленоида

$$H_z = \frac{2\pi Jn}{c}\,.$$

в) При $\alpha_1 = \pi$ , $\alpha_2 = 0$ формула (3) дает поле внутри бесконечного соленоида

$$H_z = \frac{4\pi Jn}{c}\,.$$

1.2. Найти величину магнитного поля на оси равномерно заряженного диска радиуса $a$ (полный заряд диска равен $Q$), вращающегося вокруг оси с угловой скоростью $\omega$ на расстоянии $h$ от диска.

**Решение** Магнитное поле ($z$-компонента) от тонкого кольца с радиусом $r$ шириной $dr$ в соответствии с формулой (2) из предыдущей задачи

$$dH_z = \frac{2\pi r^2}{c}\frac{dJ}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}}.$$

Ток $dJ$, текущий в кольце с радиусом $r$ шириной $dr$, равен

$$dJ = \frac{Q}{\pi a^2}\omega r dr.$$

Тогда магнитное поле всего диска на оси

$$H_z\left(h\right) = \frac{2\pi\omega Q}{c\pi a^2}\int\limits_0^a \frac{r^3 dr}{\left(h^2+r^2\right)^{3/2}} = \frac{2\omega Q}{ca^2}\left\{\sqrt{h^2+r^2} + \frac{h^2}{\sqrt{h^2+r^2}}\right\}\Bigg|_0^a =$$
$$= \frac{2\omega Q}{ca^2}\left\{\frac{2h^2+a^2}{\sqrt{h^2+a^2}} - 2h\right\}.$$

1.3. (Задача 4.4) Определить магнитное поле, создаваемое двумя параллельными плоскостями, по которым текут токи с одинаковыми поверхностными плотностями $i = \mathrm{const}$. Рассмотреть случаи: а) токи текут в противоположных направлениях; б) токи направлены одинаково.

**Решение**

$$\oint \mathbf{H} d\boldsymbol{\ell} = \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Это следствие уравнения Максвелла и теоремы Стокса

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Удобно выбрать в качестве контура интегрирования прямоугольник со стороной $\ell$, параллельной плоскостям и перпендикулярной току. Рассмотрим вклад в поле от одной плоскости (стороны прямоугольника расположены по обе стороны от рассматриваемой плоскости). Из симметрии ясно, что магнитное поле может быть направлено только параллельно плоскостям и перпендикулярно току. Тогда

$$2\ell H = \frac{4\pi}{c} i\ell$$

$$H_1 = \frac{2\pi i}{c}$$

Для учета обеих плоскостей применяем принцип сурпозиции.

а) $H = \frac{4\pi i}{c}$ между плоскостями и $H = 0$ вне них; б) $H = 0$ между плоскостями и $H = \frac{4\pi i}{c}$ вне них. В обоих случаях $\mathbf{H}$ направлено вдоль плоскостей и перпендикулярно току.

1.4. (Задача 4.5) Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса $b$ находится коаксиальный с ней сплошной провод радиуса $a$. По этим проводникам текут постоянные одинаковые токи $J$ в противоположных направлениях. Определить магнитное поле во всем пространстве. Сравнить его с полем прямого тока.

**Решение** $H_r = H_z = 0$ всюду; $H_\alpha = \frac{2Jr}{ca^2}$ при $r<a$, $H_\alpha = \frac{2J}{cr}$ при $a<r<b$ и $H_\alpha = 0$ при $r > b$.

1.5. (Задача 4.8) Определить магнитное поле в цилиндрической полости, вырезанной в бесконечно длинном цилиндрическом проводнике. Радиусы полости и проводника – соответственно $a$ и $b$, расстояние между их параллельными осями – $d$ ($b > a + d$). Ток $J$ равномерно распределен по всему сечению.

**Решение** Магнитное поле в точке $\mathbf{r}$ внутри сплошного цилиндра с постоянной плотностью тока равно (по теореме Стокса)

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{r}.$$

Используем принцип суперпозиции, считая, что отверстие – это пространство, через которое идут два тока $\mathbf{j}$ и $-\mathbf{j}$. Тогда в этой цилиндрической полости

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c} \left(\mathbf{j} \times \mathbf{r} - \mathbf{j} \times \mathbf{r}'\right) = \frac{2\pi}{c} \mathbf{j} \times \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right).$$

Учитывая, что $\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, получим

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{d}.$$

1.6. (Задача 4.14) Магнитное поле создается током $J$, идущим в двух коаксиальных витках радиуса $R = 10$ см. Отрезок $O_1O_2 = R$, соединяющий центры витков, перпендикулярен их плоскостям. Найти положение границ и оценить объем области, в которой это поле однородно с точностью до $\Delta H/H{=}0.01$.

**Решение** $H_z\left(r,z\right) = \frac{32\pi}{5\sqrt{5}}\left(1 - 1,670\frac{r^2}{R^2} - 1,152\frac{z^4}{R^4}\right)\frac{J}{cR}$, где расстояния $r, z$ отсчитываются от середины отрезка $O_1O_2$ поперек и вдоль него соответственно. Область, внутри которой однородность поля с заданной величиной $\delta$ заведомо обеспечивается, есть цилиндр радиуса $r = R\sqrt{\delta/1,67}$ и длины $\ell = 2R\sqrt[4]{\frac{\delta}{1,152}}$. $r{=}0{,}77$ см и $\ell{=}6{,}1$ см; $V{=}\pi r^2\ell{=}11{,}5$ см$^3$.