Теория игр в топологии

Содержание

Пространство Бэра

Пусть X множество.
Метрическое пространство $B(X) = (X^\omega, d)$ называется пространством Бэра, где

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ \frac{1}{n+1} & n = \min\{m : x_m \neq y_m\} \end{cases}$$

где $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in X^\omega$.
Положим

$$X^{<\omega} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n,$$

где $X^0 = \{\varnothing\}$.

Пусть $x = (x_k)_k \in X^m$, $y = (y_k)_k \in X^l$, $n \leq m < \omega$, $l < \omega$. Положим

$$x\big|_n = (x_0, x_1, ...x_{n-1}),$$
$$x^\frown y = (x_0, x_1, ...x_m, y_0, y_1, ...y_l)$$

Введем порядок на $X^{<\omega}$,

$$x \prec y$$

если и только если $l \leq m$ и $y = x\big|_l$.

Положим $U(X,x) = \{z \in B(X) : x \succ z\} = \{z \in X^\omega : x = z|_m\}$ для $x \in X^{<\omega}$.

Предложение 1.

Множества вида $U(X,x)$, $x \in X^{<\omega}$ образуют базу в $B(X)$.

Предложение 2.

$(B(X), d)$ является полным метрическим пространством.

Положим $l(x) = m + 1$ — длина x, для $x = (x_0, x_1, ...x_m) \in X^{<\omega}$.

Предложение 3.

Отображение

$$f : B(\{0,1\}) \to \mathbb{C} \subset [0,1] : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto 2 \cdot (x_0 x_1 \ldots)_3$$

гомеоморфно отображает $B(\{0,1\})$ *на канторово множество* $\mathbb{C}$.

Предложение 4.

Пусть $\mathbb{P}_+ = \mathbb{P} \cap (0, +\infty)$. *Отображение*

$$f : B(\mathbb{N}) \to \mathbb{P}_+ : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto [x_0; x_1, x_2, x_3, \cdots] =$$

$$= x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \ldots}}}$$

гомеоморфно отображает $B(\mathbb{N})$ *на положительные иррациональные числа* $\mathbb{P}_+$.

Ориентированный граф

Пусть X множество. Любое *отношение* $R \subset X \times X$ можно трактовать как *ориентированный граф*. Пара $(x, y) \in R$ можно воспринимать как *дугу* от *вершины* x к вершине y. Множество всех подмножеств множества X обозначим через 2^X.
Отношению R соответствует отображение $X \to 2^X$:
$R(x) = \{y \in X \ : \ (x, y) \in R\}$. Вершина x называется *терминальной* (концевой узел, лист) если $R(x) = \varnothing$.
Если в графе R есть терминальная вершина, то можно построить граф R^+ на множестве $X^+ = X \cup \{t\}$,

$$R^+(x) = \begin{cases} R(x), & x \in X \wedge R(x) \neq \varnothing, \\ \{t\}, & x \in X \wedge R(x) = \varnothing, \\ \{t\}, & x = t \end{cases}$$

Граф R вкладывается в граф R^+ и граф R^+ не имеет терминальных вершин. Далее мы будем рассматривать графы без терминальных вершин.

Экстенсивная форма последовательной бесконечной игры

Пусть X множество, $R \subset X \times X$ есть граф без терминальных вершин, $x_0 \in X$, $V \subset B(X)$. Определим булеву игру с нулевой суммой $G(X, x_0, R, V)$ с двумя игроками α и β.

0-ой ход. Игрок α выбирает $x_1 \in R(x_0)$. Игрок β выбирает $x_2 \in R(x_1)$.

n-ый ход. Игрок α выбирает $x_{2n+1} \in R(x_{2n})$. Игрок β выбирает $x_{2n+2} \in R(x_{2n+1})$.

После счетного числа ходов игрок α выиграл если $(x_n)_{n\in\omega} \in V$.

Игра $G(X, x_0, R, V)$ это экстенсивная форма последовательной игры.
Пусть Y множество и для каждого $x \in X$ определено сюрьективное отображение $f_x : Y \to R(x)$. Определим отображение $f : Y^{<\omega} \to X$ индукцией по длине $y \in Y^{<\omega}$.
$l(y) = 0,\ y = () = \varnothing$. Положим $f(y) = f(\varnothing) = x_0$.
$l(y) = n + 1,\ y = (y_0, y_1, ..., y_n)$. Положим $x_{n-1} = f(y_0, y_1, ..., y_{n-1})$ и $f(y) = f_{x_{n-1}}(y_n)$.
Отображение f построено. Определим отображение $\bar{f} : Y^\omega \to X^\omega$, положим

$$\bar{f}(y_0, y_1, ...) = (x_0, x_1, ...),$$

где $x_{n+1} = f(y_0, y_1, ..., y_n)$.

Положим $N(y) = \{y^\frown z : z \in Y\} \subset Y^{<\omega}$ для $y \in Y^{<\omega}$. Тогда $N(y) = f^{-1}(R(f(y)))$. Положим $U = \bar{f}^{-1}(V)$.
Игра $G(X, x_0, R, V)$ эквивалентна игре $G(Y^{<\omega}, \varnothing, N, U)$.
Опишем последнюю игру непосредственно.

Игра $G(Y, U)$ на бэровском пространстве

Пусть Y множество и $U \subset Y^\omega$. Определим булеву игру с нулевой суммой $G(Y, U)$ с двумя игроками α и β.
0-ой ход. Игрок α выбирает $y_0 \in Y$. Игрок β выбирает $y_1 \in Y$.
n-ый ход. Игрок α выбирает $y_{2n} \in Y$. Игрок β выбирает $y_{2n+1} \in Y$.
После счетного числа ходов игрок α выиграл если $(y_n)_{n\in\omega} \in U$.

Theorem 2.1.

Пусть U не более чем счетно. Тогда $G(Y, U)$ β-благоприятна.

Пусть $U = \{u_n : n \in \omega\}$, $u_n = (u_{n,0}, u_{n,1}, \dots)$.
Выигрышня стратегия для игрока заключается в следуюшем: на n-ом ходу игрок β выбирает y_{2n+1} таким образом, что $y_{2n+1} \neq u_{n,2n+1}$.

Игра $G(Y, U)$ со $|U| < 2^\omega$

Theorem 2.2.

Пусть $|U| < 2^\omega$. Тогда $G(Y, U)$ α-неблагопричтна.

Пусть s есть некоторая стратегия игрока α. Пусть $Q \subset Y^\omega$, которые смогут сыграть игроки когда α придерживается стратигии α. Тогда $|Q| = 2^\omega$. Пусть $y \in Q \setminus U$ и q есть такая стратегия β, что результат игры равен y. В этакой партии игрок β стратегией q оправерг стратегию s игрока α.