Занятие 6

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Речь пойдет об уравнениях самого общего вида

$$F(x; y; y\,') = 0. \tag{6.1}$$

Первая мысль, которая приходит в голову при встрече с таким уравнением, — разрешить его относительно $y\,'$. Однако надо иметь в виду, что даже если это удастся сделать, можно получить не одно, а несколько уравнений вида $y\,' = f(x; y)$.

Пример 1. Уравнение

$$x^2(y\,')^2 + xyy\,' - 2y^2 = 0 \tag{6.2}$$

является квадратным относительно $y\,'$. Его левую часть можно разложить на множители:

$$(xy\,' - y)(xy\,' + 2y) = 0,$$

поэтому исходное уравнение эквивалентно паре уравнений: $xy\,' = y$ или $xy\,' = -2y$. Каждое из них является уравнением с разделяющимися переменными. Их решения суть $y = Cx$ и $y = Dx^{-2}$.

Заметим, что через каждую точку $(x_0; y_0)$, где $x_0 \neq 0$, проходит две интегральных линии: $y = \dfrac{y_0}{x_0}x$ и $y = \dfrac{x_0^2}{x^2}\,y_0$ — по одной линии из каждого семейства. Тем не менее, мы можем говорить о единственности решения, поскольку уравнение (6.2) в этой точке также определяет два значения производной y'. $\square$

Основным методом решения уравнений, не разрешенных относительно производной, является метод *введения параметра*. Но прежде чем переходить к его обсуждению, выполним два простых упражнения.

Вспомним, что зависимость y от x можно задать не только явным образом, но и параметрически: если $x(p)$ и $y(p)$ — дифференцируемые на интервале $(a; b)$ функции, и $\dot{x}(p) \neq 0$ (точка означает дифференцирование по параметру p), то система $\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}$ определяет y как однозначную дифференцируемую функцию от x. В этом случае производная y по x может быть найдена по формуле $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Попробуем решить обратную задачу, а именно: восстановить функцию $y = y(p)$, зная, что $y' = \sin p$ и $x = \cos p$, $p \in (0; \pi)$.

По определению дифференциала $dy = y'dx$. Подставляя сюда $y' = \sin p$ и $dx = -\sin p\, dp$, получаем $dy = -\sin^2 p\, dp$.

Интегрируя это соотношение, находим $y = -\dfrac{p}{2} + \dfrac{\sin 2p}{4} + C$.

Таким образом, система $\begin{cases} x = \cos p \\ y = -\dfrac{p}{2} + \dfrac{\sin 2p}{4} + C \end{cases}$ определяет функцию $y = y(x)$.

Действуя по той же схеме, можно восстановить функцию $x = x(p)$, зная, что $y' = p^2 + p$ и $y = \ln p$, $p > 0$.

По определению дифференциала $dy = y'dx$. Подставляя сюда $y' = p^2 + p$ и $dy = \dfrac{dp}{p}$, получаем

$$\frac{dp}{p} = (p^2 + p)\, dx, \text{ или } dx = \frac{dp}{(p+1)p^2}$$

(при $p > 0$ деление на $(p^2 + p)$ не приводит к потере решений).

Интегрируя это соотношение, находим $x = \ln \dfrac{p+1}{p} - \dfrac{1}{p} + C$.

По сути, мы восстановили функцию $y = y(x)$ по ее производной, но в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \ln \dfrac{p+1}{p} - \dfrac{1}{p} + C \\ y = \ln p. \end{cases}$

В обоих случаях алгоритм решения достаточно прост: если известна производная $y' = \varphi(p)$ и одна из переменных $x(p)$ или $y(p)$, то другую можно восстановить, подставляя известные функции в формулу дифференциала $dy = y'dx$ и интегрируя полученное соотношение.

Теперь вернемся к уравнению (6.1). Общая схема его решения такова:

1) Введем параметр, положив $y' = p$. Тогда уравнение (6.1) превратится в соотношение $F(x; y; p) = 0$, связывающее переменные x, y и p.

2) Дифференцируя равенство $F(x; y; p) = 0$, получим связь между дифференциалами этих переменных $F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_p dp = 0$.

3) Дополнив последнее равенство соотношением $dy = p\,dx$, получим систему из двух линейных уравнений относительно dx, dy и dp.

4) Выразим из этой системы dx (или dy) через dp и проинтегрируем полученное соотношение. Таким образом, мы найдем x (или y) как функцию параметра p.

5) Подставив $x(p)$ (или $y(p)$) в уравнение $F(x; y; p) = 0$, выразим через параметр p и вторую функцию из пары $(x; y)$. Таким образом, решение уравнения будет представлено в параметрическом виде.

На практике можно выделить простые случаи, когда уравнение (6.1) не содержит одной из переменных x или y.

Пример 2. Решить уравнение $y = (y')^2 + 2(y')^3$.

Вводя параметр стандартным образом $y' = p$, перепишем уравнение в виде $y = p^2 + 2p^3$. Дифференцируя это соотношение и дополняя его равенством $dy = p\,dx$, получаем систему

$$\begin{cases} dy = (2p + 6p^2)\,dp \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Поскольку зависимость y от параметра p уже задана, осталось определить зависимость x от p.

Из системы исключаем dy и получаем дифференциальное уравнение

$$p\,dx = (2p + 6p^2)\,dp.$$

Оно расщепляется на два более простых уравнения:

$$dx = (2 + 6p)\,dp \quad \text{или} \quad p = 0.$$

Интегрируя первое уравнение, получаем $x(p) = 2p + 3p^2 + C$.

Уравнение $p = 0$ не является дифференциальным, но подставляя значение $p = 0$ в формулу $y = p^2 + 2p^3$, мы получаем решение исходного уравнения $y \equiv 0$.

Обратите внимание: было бы ошибкой подставить значение $p = 0$ в соотношение $dy = p\,dx$ и получить целое семейство решений $y \equiv C$!

Итак, общее решение уравнения имеет вид $\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C \\ y = p^2 + 2p^3. \end{cases}$
И есть еще решение $y \equiv 0$, не входящее в общее решение. $\square$

Пример 3. Решить уравнение $x = (y')^3 + y'$.

Вводя параметр стандартным образом $y' = p$, перепишем уравнение в виде $x = p^3 + p$. Дифференцируя это соотношение и дополняя его равенством $dy = p\,dx$, получаем систему

$$\begin{cases} dx = (3p^2+1)\,dp \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Поскольку зависимость x от параметра p уже задана, осталось определить зависимость y от p. Из системы исключаем dx и получаем дифференциальное уравнение

$$dy = p(3p^2+1)\,dp.$$

Интегрируя его, получаем $y(p) = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C$.

Общее решение имеет вид $\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C. \end{cases}$ $\square$

Предыдущих примерах уравнение не содержало одну из переменных. Теперь перейдем к рассмотрению общего случая.

Пример 4. Решить уравнение $2xy' - y = y'\ln(yy')$.

Введем параметр $y' = p$, и перепишем уравнение в виде

$$2xp - y = p\ln(yp). \tag{6.3}$$

Дифференцируем (6.3) и получаем систему

$$\begin{cases} 2p\,dx + 2x\,dp - dy = \ln(yp)\,dp + \dfrac{y\,dp + p\,dy}{y} \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Заметим, что равенство (6.3) легко разрешить относительно x. Благодаря этому, из системы можно исключить x и dx:

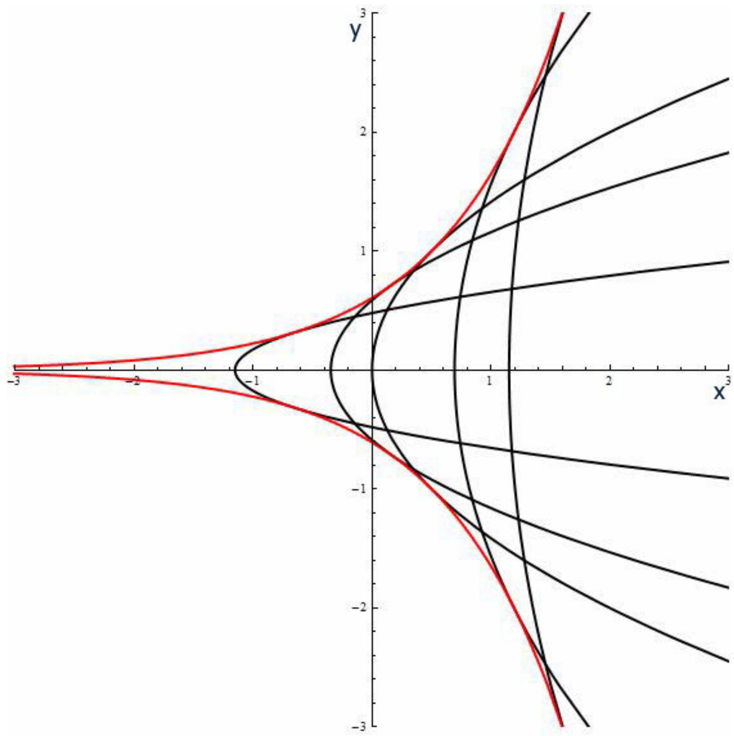

Рис. 6.1. Интегральные линии в примере 4.

$$2\,dy + \frac{p\ln(yp) + y}{p}\,dp - dy = \ln(yp)\,dp + dp + \frac{p}{y}\,dy.$$

$$dy(1 - \frac{p}{y}) = dp(1 - \frac{y}{p}).$$

Отсюда $y = p$ или $y\,dp + p\,dy = 0$, то есть $yp = C$. Осталось подставить полученные выражения $y(p)$ в (6.3) и выразить оттуда зависимость $x(p)$.

Однако в данном примере можно сразу выписать решение в явном виде $x = x(y)$, если равенства $y = p$ и $yp = C$ разрешить относительно p и подставить эти выражения в (6.3).

Итак, мы получили общее решение: $x = \dfrac{1}{2}\ln C + \dfrac{1}{2C}y^2$, $C > 0$, и еще одно решение, не входящее в общее семейство: $x = \dfrac{1}{2} + \ln|y|$.

Несмотря на довольно причудливое вхождение константы в формулу общего решения, можно заметить, что оно описывает семейство парабол, осью симметрии которых является прямая $y = 0$ (рис. 6.1). Чем правее находится вершина параболы, тем более пологими являются ее ветви.

На рисунке видно также, что есть область, внутри которой через каждую точку проходит две интегральные линии, а вне этой области интегральных линий нет. Интересно, что границей этой области является интегральная линия $x = \frac{1}{2} + \ln|y|$, которая в каждой своей точке касается одной из парабол семейства решений. Другими словами, каждая ветвь линии $x = \frac{1}{2} + \ln|y|$ является особым решением. $\square$

Мы не будем обсуждать вопрос о том, как с помощью аналитического инструментария выяснить, является ли некоторое решение, полученное при расщеплении уравнения, особым. А займемся другим, не менее интересным вопросом — как ввести параметр наиболее рациональным, удобным для дальнейших вычислений образом.

Пример 5. Введение параметра в уравнении $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$ стандартным способом нельзя назвать удачным.

Но если мы положим $y'+1 = p^2$, а $y'-y = p^3$, то уравнение обратится в тождество, а y и y' легко будет выразить через параметр:

$$\begin{cases} y = p^2 - p^3 - 1 \\ y' = p^2 - 1. \end{cases}$$

Останется только найти $x(p)$ по уже знакомой нам схеме.

$$\begin{cases} dy = (2p - 3p^2)\,dp \\ dy = (p^2 - 1)\,dx. \end{cases}$$

Отсюда $(p^2 - 1)\,dx = (2p - 3p^2)\,dp$.

Значения $p^2 = 1$ приводят к решениям $y \equiv 1$ и $y \equiv -1$.

Если же $p^2 \neq 1$, то $dx = \frac{2p - 3p^2}{p^2 - 1}\,dp$, откуда

$$x = -3p + 2,5\ln|p + 1| - 0,5\ln|p - 1| + C.$$

Таким образом, мы получили общее решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = -3p + 2,5\ln|p+1| - 0,5\ln|p-1| + C \\ y = p^2 - p^3 - 1. \end{cases} \qquad \square$$

В вариационном исчислении часто возникают уравнения вида

$$F(x; y; \sqrt{1+(y')^2}\,) = 0,$$

поскольку дифференциал дуги кривой имеет вид $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$. В таких уравнениях параметр эффективно вводится следующим образом:

$$y' = \operatorname{tg} p, \quad p \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{\cos p}.$$

Пример 6. Решить уравнение $y' = y \cdot \sqrt{1+(y')^2}$.

Положим $y' = \operatorname{tg} p$, тогда уравнение примет вид $\operatorname{tg} p = y \cdot \dfrac{1}{\cos p}$, или $y = \sin p$. Находим $x = x(p)$:

$$\begin{cases} y = \sin p \\ y' = \operatorname{tg} p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dy = \cos p\,dp \\ dy = \operatorname{tg} p\,dx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cos p\,dp = \operatorname{tg} p\,dx.$$

Отсюда $p = 0$, что приводит к решению $y \equiv 0$, или $dx = \dfrac{\cos^2 p}{\sin p}\,dp$. Последнее уравнение дает семейство решений

$$\begin{cases} x = \cos p + \ln|\operatorname{tg}\frac{p}{2}| + C \\ y = \sin p. \end{cases} \qquad \square$$

Приведем еще примеры эффективного введения параметра.

Дифф. уравнение	Параметризация	Цель
$(y')^2 + y^2 = 1$	$\begin{cases} y = \sin p \\ y' = \cos p \end{cases}$	найти $x = x(p)$
$x^2 - (y')^2 = 1$	$\begin{cases} x = \operatorname{ch} p \\ y' = \operatorname{sh} p \end{cases}$	найти $y = y(p)$

И в заключение рассмотрим одно изящное уравнение, называемое уравнением Клеро:

$$y = y'x + f(y').$$

Введем параметр стандартным образом: $y' = p$. Тогда $y = px + f(p)$ и

$$\begin{cases} dy = x\,dp + p\,dx + f'(p)\,dp \\ dy = p\,dx. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (f'(p) + x)\,dp = 0$$

Отсюда $p = C$ или $x = -f'(p)$. Из первого уравнения получаем общее решение $y = Cx + f(C)$, описывающее семейство прямых. Второе уравнение задает линию

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p). \end{cases}$$

Можно показать, что если $f''(p)$ существует, непрерывна и не обращается в ноль, то эта кривая будет огибающей семейства прямых $y = Cx + f(C)$, и следовательно, особым решением. $\square$