

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

4-й семестр, задание № 4

Решение уравнений второго порядка с помощью рядов.

Функции Бесселя. Теорема Штурма.

1. Покажите, что расстояние между соседними нулями любого нетривиального решения уравнения $y'' + xy = 0$ стремится к 0 при $x \rightarrow +\infty$ (2 б). Что можно сказать про нули решения этого уравнения при $x \rightarrow -\infty$? (1 б)

2. Найдите ФСР уравнения в окрестности точки $z_0 = 0$ в виде степенных рядов (3 б) и укажите область, в которой эти ряды сходятся (1 б).

$$(z^2 + 1)\frac{d^2 w}{dz^2} + 5z\frac{dw}{dz} + 3w = 0, \quad (z \in \mathbb{C})$$

3. Можно ли гарантировать, что уравнение $x^2 y'' + 4xy' + (2 + 4x^2)y = 0$ имеет в окрестности точки $x_0 = 0$ два линейно независимых решения, представимых в виде обобщенных степенных рядов? (1 б) Найдите первые три ненулевых члена разложения в обобщенный степенной ряд функций из ФСР, если это возможно. (3 б)

Найдите замену $y(x) = \rho(x) \cdot u(x)$, которая приводит уравнение к виду, не содержащему первой производной (1 б). Решите уравнение с помощью этой замены (1 б) и разложите каждую функцию из ФСР в обобщенный степенной ряд. (2 б)

4. Найдите общее решение уравнения $xy'' + 3y' + 4xy = 0$, приведя его к уравнению Бесселя (3 б). Покажите, что условие $y(0) = 1$ позволяет однозначно определить решение этого уравнения и напишите первые три ненулевых члена разложения этого решения в степенной ряд (1 б).

5. Сформулируйте теорему о разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье — Бесселя на отрезке $0 \leq x \leq 1$. (1 б) Получите формулы для вычисления коэффициентов ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\lambda_k x),$$

где λ_k означают корни уравнения $J_0(x) = 0$. (2 б)

Получите аналогичные формулы в случае, когда в качестве λ_k берутся корни уравнения $J'_0(x) = 0$. (2 б)

Что можно сказать о равномерной сходимости ряда в каждом из этих случаев, если $f(x) \equiv 1$ при $0 \leq x \leq 1$? (1 б)