Занятие 9

Однородные линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения Эйлера.

Рассмотрим однородное линейное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{9.1}$$

Как мы уже отмечали ранее, множество решений однородного линейного уравнения не пусто (однородное уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0$) и образует линейное многообразие (то есть линейная комбинация решений уравнения (9.1) также является решением этого уравнения).

Известно, что уравнение (9.1) имеет n линейно независимых решений

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad ... \quad , \quad y_n(x), \tag{9.2}$$

и любое решение уравнения (9.1) может быть представлено в виде линейной комбинации этих решений:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \, y_k(x). \tag{9.3}$$

Другими словами, решения однородного линейного уравнения n-ого порядка образуют линейное пространство, размерность которого равна порядку уравнения. Любая система функций (9.2), образующая базис этого пространства, называется *фундаментальной системой решений* (ФСР). Формула (9.3) дает общее решение уравнения (9.1).

Наша ближайшая цель — научиться находить ФСР уравнения (9.1).

Как мы помним, однородное линейное уравнение первого порядка $y' = k\,y$ имеет решение $y = e^{kx}$. Попробуем найти частное решение уравнения (9.1) вида $y = e^{\lambda x}$. Подставляя эту функцию в уравнение (9.1), и деля его на $e^{\lambda x} \neq 0$, мы увидим, что значение λ должно быть корнем алгебраического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{9.4}$$

Многочлен $L[\lambda] = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ называется *характеристическим многочленом*, а уравнение (9.4) — *характеристическим уравнением* для уравнения (9.1).

В комплексной плоскости уравнение (9.4) имеет n корней (с учетом их кратности). Зная эти корни, можно построить ФСР уравнения (9.1). Таким образом, задача решения дифференциального уравнения (9.1) сводится к алгебраической задаче решения уравнения (9.4). Напомним, как это делается.

Пусть уравнение (9.4) имеет k различных вещественных корней λ_1, λ_2, ... , λ_k. Это дает нам k частных решений уравнения (9.1): $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, ... , $e^{\lambda_k x}$. Эти решения линейно независимы, следовательно, если $k = n$, то ФСР построена.

Пусть уравнение (9.4) имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + i\,\beta$. Поскольку коэффициенты уравнения (9.4) вещественны, то комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ также является корнем этого уравнения. Эта пара корней дает нам два вещественных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Если вещественный корень λ_0 имеет кратность $m > 1$, то ему соответствует серия из m линейно независимых решений $e^{\lambda_0 x}$, $x \cdot e^{\lambda_0 x}$, ... , $x^{m-1}e^{\lambda_0 x}$.

Наконец, пара комплексно сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\,\beta$ кратности $m > 1$ дает серию из $2m$ линейно независимых решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ x\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \dots,\ \ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ x\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ \ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

ФСР, построенную по изложенным выше правилам, мы будем называть *классической*. Рассмотрим примеры:

Дифф. уравнение	Характер. уравнение и его корни	Общее решение
$y'' + y' - 2y = 0$	$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$; $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$	$C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$
$y'' - 2y' = 0$	$\lambda^2 - 2\lambda = 0$; $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0$	$C_1e^{2x} + C_2$
$y''' + 2y'' - 3y' = 0$	$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,$ $\lambda_3 = -3$	$C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-3x}$
$y'' - 4y' + 5y = 0$	$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$; $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$	$C_1e^{2x}\cos x +$ $+ C_2e^{2x}\sin x$
$y'' + 4y = 0$	$\lambda^2 + 4 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm 2i$	$C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$
$y^{IV} - y = 0$	$\lambda^4 - 1 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm 1,\ \lambda_{3,4} = \pm i$	$C_1e^{x} + C_2e^{-x} +$ $+ C_3\cos x + C_4\sin x$
$y^{VI} + 64y = 0$	$\lambda^6 + 64 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm 2i,$ $\lambda_{3,4} = \sqrt{3} \pm i,$ $\lambda_{3,4} = -\sqrt{3} \pm i$	$C_1\cos 2x + C_2\sin 2x +$ $+ C_3e^{\sqrt{3}x}\cos x +$ $+ C_4e^{\sqrt{3}x}\sin x +$ $+ C_5e^{-\sqrt{3}x}\cos x +$ $+ C_6e^{-\sqrt{3}x}\sin x$

Дифф. уравнение	Характер. уравнение и его корни	Общее решение
$y^{IV}+2y''+y=0$	$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$; $\lambda_{1,2}=\pm i$, $\lambda_{3,4}=\pm i$	$C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+C_3x\cos x+C_4x\sin x$
$y'''-3y''+3y'-y=0$	$(\lambda-1)^3=0$; $\lambda_{1,2,3}=1$	$C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$

В некоторых случаях удобно использовать ФСР, отличные от классической. К описанию одной из них мы сейчас и перейдем.

Допустим, что мы нашли все корни характеристического уравнения и каким-нибудь образом занумеровали их: λ_1, λ_2, ... , λ_n. Если корень кратный, то он выписан в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Таким образом, количество чисел в последовательности равно порядку уравнения.

Построим набор функций $\psi_k(x)$. Функцию $\psi_1(x)$ определим как решение задачи Коши $\psi_1'=\lambda_1\psi_1$, $\psi_1(0)=1$, то есть $\psi_1(x)=e^{\lambda_1 x}$.

Функцию $\psi_2(x)$ определим как решение задачи Коши $\psi_2'=\lambda_2\psi_2+\psi_1$, $\psi_2(0)=0$. Поскольку $\psi_2(x)$ является решением неоднородного уравнения, найдем ее методом вариации постоянных: $\psi_2(x)=C(x)\cdot e^{\lambda_2 x}$, где $C'(x)=e^{-\lambda_2 x}\psi_1(x)$ и $C(0)=0$. Таким образом, $C(x)=\int\limits_0^x e^{-\lambda_2\tau}\psi_1(\tau)d\tau$ и

$$\psi_2(x)=\int\limits_0^x e^{\lambda_2(x-\tau)}\psi_1(\tau)d\tau.$$

Заметим, что $\psi_2'(0)=1$.

Если функция $\psi_k(x)$ уже построена, то функцию $\psi_{k+1}(x)$ определим как решение задачи Коши $\psi'_{k+1} = \lambda_{k+1}\psi_{k+1} + \psi_k$, $\psi_{k+1}(0) = 0$. Функция $\psi_{k+1}(x)$ может быть задана интегралом

$$\psi_{k+1}(x) = \int\limits_0^x e^{\lambda_{k+1}(x-\tau)}\psi_k(\tau)d\tau.$$

Заметим, что $\psi_{k+1}(0) = 0$, $\psi'_{k+1}(0) = 0$, ... , $\psi_{k+1}^{(k)}(0) = 1$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k$, то есть корень имеет кратность k, то

$$\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ \psi_2(x) = xe^{\lambda_1 x},\ \psi_3(x) = \frac{x^2}{2}e^{\lambda_1 x},\ \dots\ ,\ \psi_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_1 x}.$$

Как видим, в случае кратного корня новые базисные решения отличаются от классических только числовыми множителями.

Приведем формулы для $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$.

$$\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad \psi_2(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$\psi_3(x) = \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}.$$

Из этих формул видно, что функция $\psi_3(x)$ зависит от параметров λ_1, λ_2, λ_3 симметрично, то есть совершенно не важно, в какой последовательности мы нумеровали корни.

ФСР уравнения порядка n, состоящую из функций $\psi_k(x)$, $k = 1, ..., n$, будем называть *специальной*.

Какие преимущества имеет специальная ФСР? Рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = \varepsilon$, $\lambda_2 = -\varepsilon$, $\lambda_{3,4} = 0$. Тогда классическая ФСР состоит из функций $e^{\varepsilon x}$, $e^{-\varepsilon x}$, 1 и x, а специальная — из функций

$$\psi_1(x) = e^{\varepsilon x}, \qquad \psi_2(x) = \frac{e^{\varepsilon x} - e^{-\varepsilon x}}{2\varepsilon} = \frac{\operatorname{sh}\varepsilon x}{\varepsilon},$$

$$\psi_3(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\varepsilon\tau}{\varepsilon} d\tau = \frac{\operatorname{ch}\varepsilon x - 1}{\varepsilon^2},$$

$$\psi_4(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{ch}\varepsilon\tau - 1}{\varepsilon^2} d\tau = \frac{\operatorname{sh}\varepsilon x - \varepsilon x}{\varepsilon^3}.$$

На первый взгляд кажется, что классическая ФСР существенно проще, и следовательно, имеет преимущество перед специальной ФСР. Однако, если $\varepsilon \to 0$, то классическая ФСР вырождается — перестает быть базисом в пространстве решений. А специальная ФСР легко справляется с этой проблемой и превращается в ФСР для уравнения с кратным корнем $\lambda = 0$ кратности 4:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_1(x) = 1, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\psi_2(x) = x, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\psi_3(x) = \frac{x^2}{2}, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\psi_4(x) = \frac{x^3}{3!}.$$

Этот пример иллюстрирует важное свойство, которым обладает специальная ФСР: если коэффициенты характеристического многочлена зависят от параметра, то специальная ФСР остается таковой при непрерывном изменении этого параметра. □

Рассмотрим однородное линейное уравнение Эйлера n-ого порядка

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \tag{9.5}$$

Как мы знаем, в области $x > 0$ замена $x = e^t$ приводит его к уравнению, в которое независимая переменная t не входит в явном виде. В данном случае это будет линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Оно, как известно, имеет частные решения вида $y = e^{\lambda t}$. Поэтому частные решения уравнения (9.5) сразу следует искать в виде $y = x^\lambda$ $(x > 0)$. Подставляя функцию $y = x^\lambda$ в уравнение (9.5), мы увидим, что параметр λ должен быть корнем алгебраического уравнения

$$\lambda(\lambda-1)...(\lambda-(n-1)) + ... + a_{n-2}\lambda(\lambda-1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{9.6}$$

Уравнение (9.6) называется *характеристическим.* После приведения подобных слагаемых оно примет вид

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + ... + b_{n-1}\lambda + b_n = 0. \tag{9.7}$$

Таким образом, замена $x = e^t$ приводит уравнение Эйлера (9.5) к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами, для которого (9.7) является характеристическим уравнением.

Зная корни уравнения (9.7), можно построить ФСР соответствующего дифференциального уравнения, и затем обратной заменой $t = \ln x$ получить из нее ФСР исходного уравнения Эйлера.

Пример 2. Решить уравнение $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$.

Ищем частные решения вида x^λ. Тогда λ должно удовлетворять уравнению $\lambda(\lambda - 1) - 4\lambda + 6 = 0$, или $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, следовательно, ФСР состоит из функций x^2 и x^3. Общее решение уравнения Эйлера $y = C_1x^2 + C_2x^3$. Заметим, что эта формула работает и при $x < 0$. $\square$

Пример 3. Решить уравнение $x^3y''' + xy' - y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+\lambda-1 = 0$ раскладывается на множители $(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = 0$ и сворачивается в $(\lambda-1)^3 = 0$.

ФСР соответствующего ему дифференциального уравнения состоит из функций $y_1 = e^t$, $y_2 = te^t$ и $y_3 = t^2e^t$. Выполнив обратную замену $t = \ln x$, получаем общее решение уравнения Эйлера $y = C_1x+C_2x\ln x+C_3x(\ln x)^2$, $(x > 0)$.

При $x < 0$ достаточно заменить под знаком логарифма x на $-x$. $\square$

Пример 4. Решить уравнение $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0$ преобразуется в $\lambda^2 + 1 = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Соответственно, ФСР имеет вид $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$.

Выполнив обратную замену $t = \ln x$, получаем общее решение уравнения Эйлера $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$, $(x > 0)$. $\square$