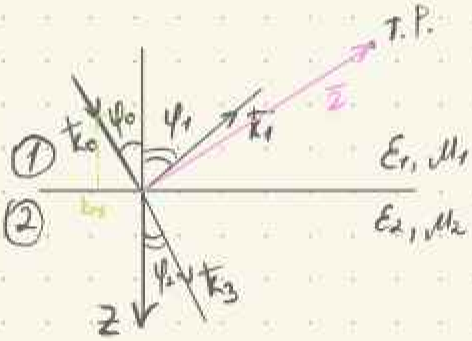
Отражение и преломление элмг волны на границе раздела 2х сред. Показатель преломления



$$\bar E_{пад} = \hat{E}_0 \cdot e^{i(\bar k_0 \cdot \bar r) - i\omega_0 t}, \quad \bar H_{пад} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}[\bar n \times \bar E_0] e^{i(\bar k_0 \cdot \bar r) - i\omega_0 t}$$

опр: плоскость падения обр-на нормалью к границе раздела и волновым в-ром падающей волны

для отраженной и преломл. волны:

$$\bar E_{отр} = \bar E_1 \cdot e^{i(\bar k_1 \cdot \bar r) - i\omega_1 t} \qquad \bar E_{пр} = \bar E_2 e^{i(\bar k_2 \bar r) - i\omega_2 t}$$

$$\bar H_{отр} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}[\bar n \times \bar E_1] e^{i(\bar k_1 \bar r) - i\omega_1 t} \qquad \bar H_{пр} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}[\bar n \times \bar E_2] e^{i(\bar k_2 \cdot \bar r) - i\omega_2 t}$$

при этом поля должны удовлетв-ть:
1) ур-ям Максвелла
2) гран. услов.: $\{E_\tau\} = 0$, $\{H_\tau\} = 0$; $B_{1n} = B_{2n}$, $D_{1n} = D_{2n}$
3) усл. излучения: одна волна падает из ∞, остальные удаляются от границы (при отсутствии диссипативных процессов)

$$\bar k_0 = k_0(\sin\varphi_0 \cos\alpha_0, \sin\varphi_0 \sin\alpha_0, \cos\varphi_0)$$
$$\bar k_1 = k_1(\sin\varphi_1 \cos\alpha_1, \sin\varphi_1 \sin\alpha_1, \cos\varphi_1)$$
$$\bar k_2 = k_2(\sin\varphi_2 \cos\alpha_2, \sin\varphi_2 \sin\alpha_2, \cos\varphi_2)$$

$r = x\bar e_x + z\bar e_z + y\bar e_y$: при $z = 0$:

$$E_{0\tau} e^{i(\bar k_0 \bar r) - i\omega_0 t} + E_{1\tau} e^{i(\bar k_1, \bar r) - i\omega_1 t} = E_{2\tau} e^{i(\bar k_2, \bar r) - i\omega_2 t}$$

$$\hat{A} e^{i(\bar k_0, \bar r) - i\omega_0 t} + \hat{B} e^{i(\bar k_1, \bar r) - i\omega_1 t} = \hat{C} e^{i(\bar k_2, \bar r) - i\omega_2 t} \quad (*)$$

- если зафикс. точку на границе раздела, то ур-е выполняется для $\forall t$:

$$\underbrace{\bar A e^{-i\omega_0 t}}_{\text{берем Фурье}} + \bar B e^{-i\omega_1 t} = \bar C e^{-i\omega_2 t} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar A e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \sqrt{2\pi}\, \delta(\omega - \omega_0) \bar A$$

аналогично с другими:
$$\sqrt{2\pi}\,\delta(\omega - \omega_1)\bar B$$
$$\sqrt{2\pi}\,\delta(\omega - \omega_2)\bar C \Rightarrow$$
$$\sqrt{2\pi}\,\delta(\omega - \omega_0) A$$

$\Rightarrow$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$

- если зафикс. t для $\forall x, y$:

$$A e^{ik_{0x}x + ik_{0z}\overset{=0}{z} + ik_{0y}y} + B e^{ik_{1x}x + \ldots} = C e^{ik_{2x}x + \ldots}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{ik_{0x}x} e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi}\, \bar A\, \delta(k - k_{0x})$$

$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x}$
$k_{0y} = k_{1y} = k_{2y}$

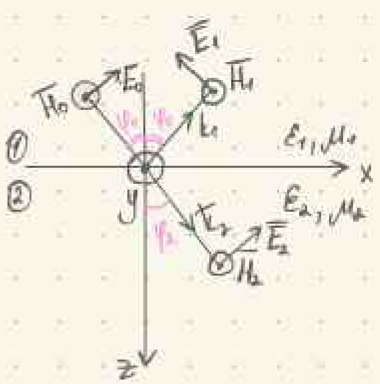
- закон Снеллиуса

$$k_{0x} = k_{1x}: \; k_0 \sin\varphi_0 = k_1 \sin\varphi_1 \Rightarrow \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\varphi_0 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\varphi_1$$
$$\sin\varphi_0 = \sin\varphi_1 \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_1$$

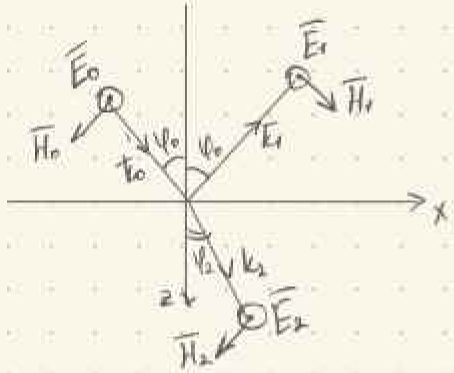
$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{v}{c}$$

$$k_{0x} = k_{2x}: \; k_0 \sin\varphi_0 = k_2 \sin\varphi_2 \Rightarrow n_1 \sin\varphi_0 = n_2 \sin\varphi_2$$

Формулы Френеля. Угол Брюстера. Просветвоение оптики. Диэлектрические зеркала



TM-волна



TE-волна

$$\begin{cases} H_0 e^{-i\omega t} + H_1 e^{-i\omega t} = H_2 e^{-i\omega t} \\ (E_0\cos\psi_0 - E_1\cos\psi_1)e^{-i\omega t} = E_2\cos\psi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_0 + E_1 = E_2 \\ -H_0\cos\psi_0 + H_1\cos\psi_0 = -H_2\cos\psi_2 \end{cases}$$

используем: $H_i = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_i}{\mu_i}}\,[\overline{n}\times\overline{E}_i]$

$$\begin{cases} n_1(E_0+E_1) = n_2E_2 \\ (E_0 - E_1)\cos\psi_0 = E_2\cos\psi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_0 + E_1 = E_2 \\ -n_1E_0\cos\psi_0 + n_1E_1\cos\psi_0 = -n_2E_2\cos\psi_2 \end{cases}$$

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{n_2\cos\psi_0 - n_1\cos\psi_2}{n_2\cos\psi_0 + n_1\cos\psi_2}$$

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{n_1\cos\psi_0 - n_2\cos\psi_2}{n_2\cos\psi_2 + n_1\cos\psi_1}$$

$$\frac{E_2}{E_0} = \frac{2n_1\cos\psi_0}{n_2\cos\psi_0 + n_1\cos\psi_2}$$

$$\frac{E_2}{E_0} = \frac{2n_1\cos\psi_0}{n_1\cos\psi_0 + n_2\cos\psi_2}$$

Угол Брюстера: (угол, при котором нет отраж. волны в TM-поляриз.)

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{n_2}{n_1}\cos\psi_0 - \cos\psi_2}{\frac{n_2}{n_1}\cos\psi_0 + \cos\psi_2} = \begin{bmatrix} n_1\sin\psi_0 = n_2\sin\psi_2 \\ n_2/n_1 = \sin\psi_2/\sin\psi_0 \end{bmatrix} = \frac{\sin\psi_0\cos\psi_0 - \cos\psi_2\sin\psi_2}{\sin\psi_0\cos\psi_0 + \cos\psi_2\sin\psi_2} =$$

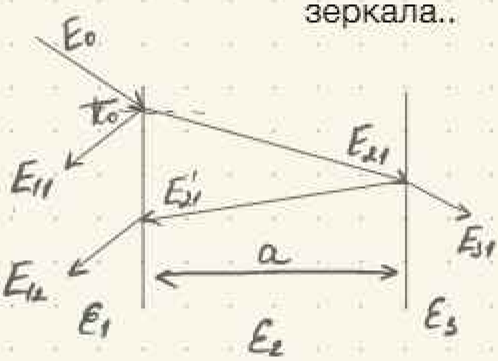
$$= \frac{\sin 2\psi_0 - \sin 2\psi_2}{\sin 2\psi_0 + \sin 2\psi_2} = \frac{\cos\left(\frac{2\psi_0 + 2\psi_2}{2}\right)\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\cos(\psi_0 - \psi_2)\sin(\psi_0 + \psi_2)} = \frac{tg\,(\psi_0 - \psi_2)}{tg\,(\psi_0 + \psi_2)}$$

анализ: $\psi_0 + \psi_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow n_1\sin\psi_0 = n_2\sin\left(\psi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = n_2\cos\psi_0 \Rightarrow tg\,\psi_Б = \frac{n_2}{n_1}$

Угол ПВО: $n_1\sin\psi_{ПВО} = n_2\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\psi_{ПВО} = \frac{n_2}{n_1}$

$\overline{k}_2 = (k_{x_2}, 0, k_{z_2}) \Rightarrow$

Просветтвление оптики. Дижлетрические зеркала..



метод многокр-ных отражений:

$$E_{11} = E_0 r_{12}, \quad E_{21} = E_0 t_{12}, \quad E_{21}' = E_{21} r_{23}$$

$$E_{12} = E_0 t_{12} r_{23} t_{21} e^{2ik_2 a}$$

$$t_{12} = \frac{2n_1}{n_1+n_2}, \quad t_{21} = \frac{2n_2}{n_1+n_2}, \quad r_{12} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}, \quad r_{23} = \frac{n_2-n_3}{n_2+n_3}$$

последующие волны записываются аналогично => суммарную отраж. волну можно записать в виде Σ беск. убыв. прогрессии

$E_1 = E_{11} + E_{12}\frac{1}{1-q}$, где $q = r_{21} r_{23} e^{2ika}$

$$E_1 = E_0 r_{12} + \frac{\underbrace{E_0 t_{12} t_{21} r_{23} e^{2ik_2 a}}_{E_{12}}}{1 - r_{21} r_{23} e^{2ika}}$$

⊕ $t_{21} t_{12} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2} = 1 - \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2 = 1 - \rho_{12}^2$

в итоге получим: $E_1 = E_0 \frac{r_{12} + r_{23} e^{2ik_2 a}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2ik_2 a}}$ $(r_{12}, r_{23} \in \mathbb{R})$

когда $E_1 = 0$ => когда $e^{2ik_2 a}$ – вещественное число

$e^{2ik_2 a} = 1 \Rightarrow a_m = m\frac{\lambda_2}{2}$

$e^{2ik_2 a} = -1 \Rightarrow a_m = \frac{\lambda_2}{4}(1+2m)$

$E_1 = E_0 \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} = 0$, если $n_1 = n_3$

$E_1 = 0$, если $r_{12} = r_{23} \Rightarrow n_2^2 = n_1 n_3 \Rightarrow n_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}$

ослабление при $a = \frac{\lambda}{4}$ происходит из-за того, что отр. волны E_{11} и E_{12} нах-ся в противофазе

если учесть, что $r_{12}, r_{23} \ll 1$ => нет необходимости рассм-ть весь набор преломл. и отраженных волн

диэлектрические зеркала: $\frac{\lambda}{4}$ { покрытие $n > n_0$, стекло $n_0 \approx 1{,}33$ => отражат-я способ-ть увеличивается

⊕ многослойное покрытие увеличивает коэфф-т отражения

Фурье разложение ЭЛМГ поля. Уравнения Максвелла в Фурье представлении

для времени: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$; $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$

для координат: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$, $\int e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = 2\pi\delta(t-\tau)$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\delta(t-\tau) \to \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}}$ – фурье-образ δ-функции

- спектр сдвинутого сигнала: $F(\omega) = e^{i\omega T} f(\omega)$
  $F(t) = f(t-T)$
- спектр модулированного сигнала $F(\omega) = f(\omega-\omega_0)$
  $F(t) = f(t) e^{-i\omega_0 t}$
- спектр сигнала, повторенного N раз с T: $F(t) = f(\omega)\, e^{i\omega T\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin(\omega T N/2)}{\sin(\omega T/2)}$
- спектр свертки двух сигналов: $F(t) \to \sqrt{2\pi}\, f(\omega) g(\omega)$

$$f(\bar{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint \hat{f}(\bar{k},\omega) e^{i(\bar{k},\bar{r})-i\omega t} d^3k\, d\omega$$

$$\hat{f}(\bar{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint f(\bar{r},t) e^{-i(\bar{k},\bar{r})+i\omega t} d^3r\, dt$$

$$\frac{\partial f(\bar{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint \hat{f}(\bar{k},\omega)(-i\omega) e^{i(\bar{k},\bar{r})-i\omega t} d^3k\, d\omega$$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial t} \to -i\omega \hat{f}(\bar{k},\omega)$

$\frac{\partial f(\bar{r},t)}{\partial x} \to i k_x \hat{f}(\bar{k},\omega)$

$$\operatorname{div}\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = ik_x \bar{E}_x(\bar{k},\omega) + ik_y \bar{E}_y(\bar{k},\omega) + ik_z \bar{E}_z(\bar{k},\omega) = (i\bar{k}, E(\bar{k},\omega))$$

$$\operatorname{rot}\bar{E} = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint \left[i\bar{k} \times \hat{\bar{E}}(\bar{k},\omega)\right] e^{i(\bar{k},\bar{r})-i\omega t} d^3k\, d\omega$$

$\operatorname{rot}\bar{H} = \frac{4\pi}{c}\bar{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \to \left[i\bar{k} \times \bar{H}(k,\omega)\right] = \frac{4\pi}{c}\bar{j}(\bar{k},\omega) - \frac{i\omega}{c}\hat{\bar{D}}(k,\omega)$

$\operatorname{div}\bar{B} = 0 \to (i\bar{k}, \bar{B}(k,\omega)) = 0$

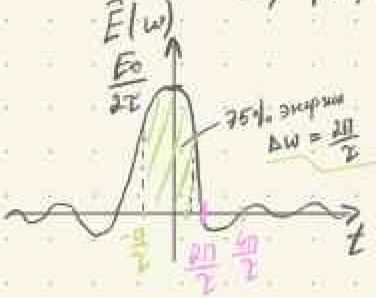
$\operatorname{div}\bar{D} = 4\pi\rho \to (i\bar{k}, \bar{D}(\bar{k},\omega)) = 4\pi\rho(\bar{k},\omega)$

$\operatorname{div}\bar{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \to i(\bar{k}, \bar{j}(\bar{k},\omega)) - i\omega\rho(k,\omega) = 0$

Соотношение неопределенностей

опр: соотн. неопр. связывает между собой длительность сигнала и ширину его спектра: $\Delta\omega\Delta\tau = \pi$

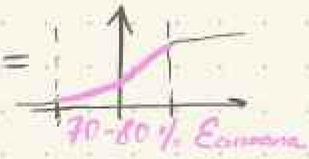
1 $E_1 = \begin{cases} E_0, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \Rightarrow \hat{E}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E_0 e^{i\omega t}dt = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$



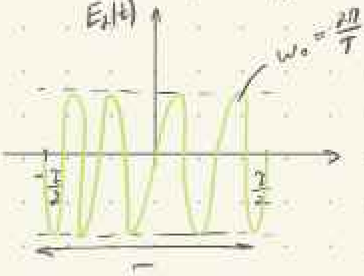
ширину спектра 2/3 энергию сигнала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(\omega)|^2d\omega \Leftrightarrow$$

=



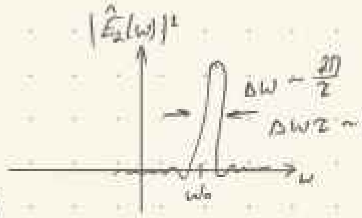
2 спектр цуга синусоидальной волны (кратный период)



$$\hat{E}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E_0 \underbrace{\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}}_{\sin\omega_0 t} e^{i\omega t}dt = \frac{1}{2i}\left[E_1(\omega+\omega_0) - E_1(\omega-\omega_0)\right]$$

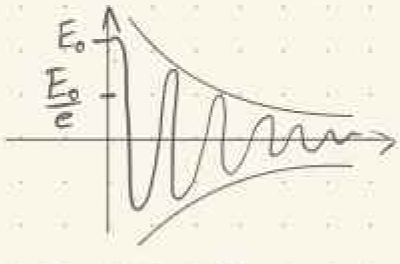
$$= \frac{E_0\tau}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2i}\left[\mathrm{sinc}\left((\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}\right) - \mathrm{sinc}\left((\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

если $N >> 1 \Rightarrow \mathrm{sinc}(\omega+\omega_0) << 1 \Rightarrow |\hat{E}_2(\omega)|^2 \approx \frac{E_0^2\tau^2}{8\pi}\mathrm{sinc}^2\left[\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right]$



степень монохроматичности сигнала: $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\pi}{\tau\omega_0} = \frac{\pi T}{NT2\pi} \sim \frac{1}{2N}$

3 спектр поля радиационно затухающего осциллятора:

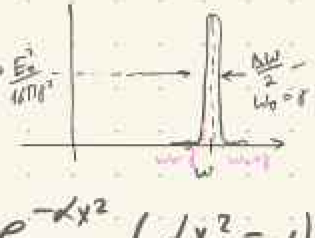


$$\hat{E}_3(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\gamma t}\,\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\,e^{i\omega t}dt =$$

$$= \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}}\left[\overset{\hat{f}(\omega+\omega_0)}{\frac{1}{\gamma - i(\omega+\omega_0)}} + \overset{\hat{f}(\omega-\omega_0)}{\frac{1}{\gamma - i(\omega-\omega_0)}}\right]$$

$E_3 = E_0 e^{-\gamma t}\cos\omega_0 t$ $\quad |\hat{f}(\omega-\omega_0)|^2 = \frac{E_0^2}{8\pi}\frac{1}{\gamma^2 + (\omega-\omega_0)^2} \Rightarrow \frac{E_0^2}{16\pi\gamma^2}$

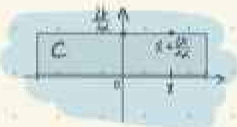
$\Delta\omega \sim 10^{16}$



$\Delta\omega_{кр} \sim 2\gamma$

лоренцовский профиль спектр. линий

4 спектр поля гауссовой формы: $\bar{E}(x) = \bar{E}_0 e^{-\alpha x^2}$ $(\alpha x_1^2 = 1)$



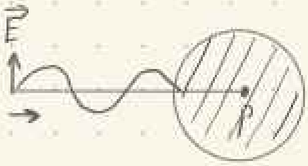
$$E(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0 e^{-\alpha x^2 - ikx}dx = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(x + \frac{ik}{2\alpha}\right)^2 - \frac{k^2}{4\alpha}}dx$$

$$\oint_C e^{-\alpha z^2}dz = 0 = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\alpha\left(x+\frac{ik}{2\alpha}\right)^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx \Rightarrow E(k) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\overset{\sqrt{\pi/\alpha}}{e^{-\alpha x^2}dx}\Big)e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} = E_0\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}\,e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$

5 спектр поля модулированного гаус. сигн.: $E(x) = E_0 e^{-\alpha x^2 + ik_0 x}$

$$E(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0 e^{-\alpha x^2 + ik_0 x - ikx}dx = \frac{E_0}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\alpha}}$$

Частотная дисперсия. Фазовая и групповая скорость волны



$$\bar{D}(\bar r,t) = E(\bar r,t) + 4\pi \bar P(\bar r,t)$$

$$\bar P(\bar r,t) = \int_0^\infty E(\bar r, t-\tau)\, \underbrace{f(\tau)}\, d\tau \to \sqrt{2\pi}\,\hat{\bar E}(\bar k,\omega)\, f(\omega)$$

— память атома о предыдущем воздействии

$$\bar D = \bar E + 4\pi \bar P \to \hat{\bar E}(\bar k,\omega) + 4\pi\sqrt{2\pi}\, f(\omega)\,\hat{\bar E}(\bar k,\omega) = \bar E(\bar k,\omega)\underbrace{\left(1+4\pi\sqrt{2\pi}\, f(\omega)\right)}_{\varepsilon(\omega)}$$

(принцип причинности)

$$D(\bar r,t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iiiint \varepsilon(\bar r,\bar r',t,t')\,\bar E(\bar r',t')\, d^3r'\,dt$$

1 если среда стационарна по t, то зависимость ε будет от $t-t'$

2 если среда однородна по пр-ву, то ε зависит от $r-r'$ $\Rightarrow$ $D(k,\omega) = \hat\varepsilon(\bar k,\omega)\,\bar E(k,\omega)$

3 если переносом вещества в пр-ве можно пренебречь $\Rightarrow$ тогда $\hat\varepsilon(\bar k,\omega) \to \varepsilon(\omega)$

$$\hat B(\bar k,\omega) = \mu(\omega)\hat H(\bar k,\omega)$$

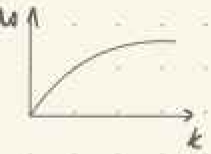
$$\hat D(\bar k,\omega) = \varepsilon(\omega)\,E(\bar k,\omega)$$

$$[\underset{a}{i\bar k} \times [\underset{b}{i\bar k} \times \underset{c}{\bar E(\bar k,\omega)}]] = \frac{i\omega}{c}\mu(\omega)\underbrace{\overset{-\frac{i\omega\varepsilon(\omega)\bar E(k,\omega)}{c}}{[i\bar k \times \bar H(\bar k,\omega)]}} = \frac{i\omega\mu(\omega)}{c}\left(\frac{-i\omega\hat\varepsilon(\omega)}{c}\bar E(\bar k,\omega)\right)$$

$$i\bar k\overset{=0\,(\mathrm{div}D=0)}{[i\bar k,\bar E(k,\omega)]} + k^2\bar E(k,\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\hat E(\bar k,\omega)$$

! из ур-ний Максвелла $\Rightarrow$ $k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = 0$ — дисперсионное ур-ние

$k = \frac{\omega}{c}n(\omega)$, где $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$ — показатель преломления среды на ω



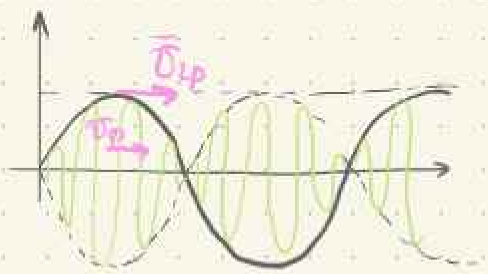
$$\bar E(\bar r,t) = E_0 e^{i(\bar k,\bar r)-i\omega t} = \bar E_0 e^{i(kz'-\omega t)} = \bar E_0 e^{ik(z'-\frac{\omega}{k}t)} = \varphi(\bar r,t)$$

поверхность постоянной фазы волны: $kz' - \omega t = \varphi(z',t) = const$

$k\frac{dz'}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dz'}{dt} = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость волны $\Rightarrow$ $v_{ф} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}n(\omega)} = \frac{c}{n(\omega)}$ — частотная дисперсия среды

расс-м суперпоз-ю 2х волн в одном направлении с близкими частотами: $k+\Delta k = \frac{\omega+\Delta\omega}{2}n(\omega+\Delta\omega)$

$$\bar E(\bar z,t) = E_0(\cos(kz-\omega t) + \cos(k+\Delta k)z - (\omega+\Delta\omega)t) = 2E_0\left(\cos\left[\frac{k+\Delta k}{2}z - \frac{\omega-\Delta\omega}{2}t\right]\cdot\cos\left(\frac{\Delta k z}{2} - \frac{\Delta\omega t}{2}\right)\right)$$



Соотношения Рэлея: дифф-ем дисп. ур-е по k:

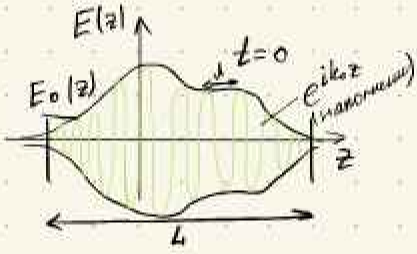
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega\frac{dn(\omega)}{d\omega}} = \frac{v_ф}{1 + \frac{\omega}{n(\omega)}\frac{dn(\omega)}{d\omega}}$$

нормальная дисперсия: $\frac{dn}{d\omega} > 0$ и $v_g < v_ф$

аномальная дисперсия: $\frac{dn}{d\omega} < 0$ и $v_g > v_ф$

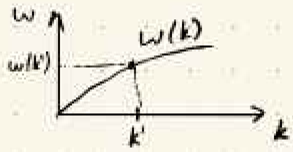
} могут иметь место для одной и той же среды в разных частотных интервалах

Дисперсионное асплывание волнового пакета



$\vec{E}_z(z,t=0)=E_0(z)e^{ik_0z}$

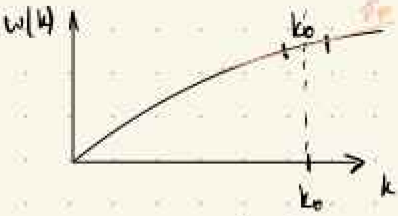
известно $k=\frac{\omega}{c}n(\omega)\to\omega=\omega(k)$



$$E(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E_0(z)e^{ik_0z}e^{-ikz}dz=E_0(k-k_0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(k)e^{ikz}e^{-i\omega(k)t}dk=E(z,t)$$ — удовл. нач. усл. и ур-ям Максвелла

• если пакет квазимонохр-ий $(L\ll\lambda)$: $\Delta k\Delta z\sim\pi\Rightarrow\Delta k\sim\frac{\pi}{\Delta z}=\frac{\pi}{L}=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{L}=\frac{k\lambda}{2L}\ll k_0$

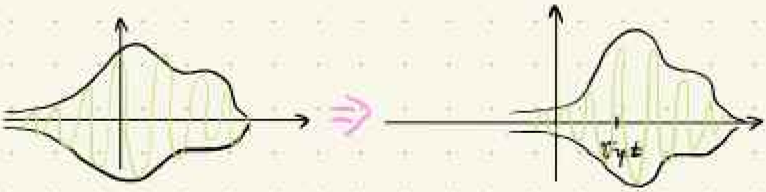


$$\omega(k)\big|_{k_0}\approx\omega(k_0)+\frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0}\cdot(k-k_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}\Big|_{k_0}(k-k_0)^2+\dots$$

т.к. $\Delta k\ll k_0\Rightarrow\omega(k)\big|_{k_0}=\omega(k_0)+v_{гр}(k-k_0)$

$$E(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(k)e^{ikz-i\omega_0t-iv_{гр}t(k-k_0)}dk=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iv_{гр}tk_0-i\omega_0t}\int_{-\infty}^{+\infty}E(k)e^{ik(z-v_{гр}t)}dk=$$

$$=e^{ik_0v_{гр}t-i\omega_0t}E(z-v_{гр}t,0)=E_0(z-v_{гр}t)e^{ik_0z-i\underset{\omega(k_0)}{\omega_0}t}$$



• пакет движется с $v_{гр}$
• наполнение бежит с $v_ф=\frac{\omega(k_0)}{k_0}$
• если дисп. соотнош. лин-но по k ⇒ волновой пакет не меняет своей формы

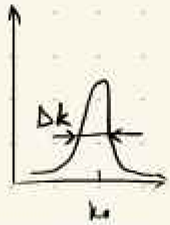
• учтем в разложении $\omega(k)$ след. слагаемое: $\omega=\omega_0+v_{гр}(k-k_0)+\frac{\omega_0''}{2}(k-k_0)^2$

$$E(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(k)e^{ikz-i\omega_0t-iv_{гр}t(k-k_0)-i\omega_0''/2\cdot(k-k_0)^2t}$$

— $t\ll\tau$, при котором $\frac{\omega_0''}{2}\overset{\sim\Delta k^2}{(k-k_0)^2}\tau\ll\pi\Rightarrow\tau\le\frac{2\pi}{\omega_0''\Delta k^2}\sim\frac{L^2}{\omega_0''}\Rightarrow$ длина пакета почти не меняется

— $t\gg\tau$: $\omega_0''=\frac{d^2\omega}{dk^2}=\frac{d}{dk}\frac{d\omega}{dk}=\frac{d}{dk}v_{гр}\approx\frac{\Delta v_{гр}}{\Delta k}\Rightarrow$

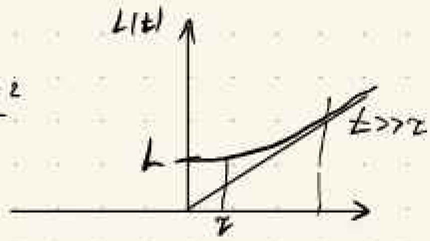
$\Rightarrow\Delta v_{гр}\sim\omega_0''\Delta k\Rightarrow\Delta L(t)=\Delta v_{гр}\cdot t$



для произв. пакета можно использовать формулу для $L(t)$, получ. для гаусс. пакета (точная):

$L(t)\approx\sqrt{L^2+\Delta v_{гр}^2t^2}$

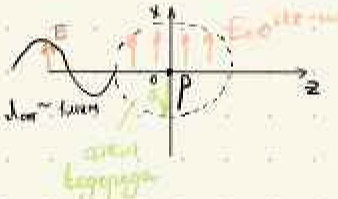
$L(t)\approx\sqrt{L^2+(\omega_0''\Delta k t)^2}$, при $t\gg\tau$ $(\omega_0''\Delta kt)^2\ll L^2$



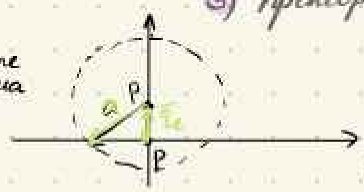
Классическая теория дисперсии света в среде

модель разреженного нейтрального газа: с плотностью n_a

1) пренебрегаем взаим. г. газа между собой
2) действующее на атом эл. поле $= E_{ср}$
3) пренебрегаем действием маг. поля



– однородное поле на размере атома



$$\bar{F}_{\bar{e}-\bar{p}} = |e| \cdot E_{равн.зар.шара} = |e| \frac{4}{3}\pi \rho_e (-\bar{r}_e) \Rightarrow$$

$$\bar{F}_{p-e} = -\left(e \frac{4}{3}\pi \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3}(-\bar{r}_e)\right) = -\frac{e^2 \bar{r}_e}{a^3}$$

$$m\ddot{\bar{r}}_e = e\bar{E}_0 e^{ikz-i\omega t} - \frac{e^2 \bar{r}_e}{a^3} + e\cancel{\left[\frac{\dot{\bar{r}}_e}{c} \times \bar{H}_0\right]} e^{ikz-i\omega t} \Rightarrow \ddot{\bar{r}}_e + \underbrace{\omega_0^2}_{= \frac{e^2}{ma^3}} \bar{r}_e + \underbrace{2\gamma \dot{\bar{r}}_e}_{потери\ на\ изл.} = \frac{e\bar{E}_0 e^{-i\omega t}}{m}$$

• пусть $\bar{r}_e(t) = \bar{r}_0 e^{-i\omega t}$ $\Rightarrow \bar{r}_0(-\omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\omega) = \frac{e\bar{E}_0}{m} \Rightarrow$ $r_e(t) = \frac{e E_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega)}$

$$\bar{d} = e r_e(t) \Rightarrow \bar{D} = \bar{E} + 4\pi\bar{P} = E_0 e^{-i\omega t} + 4\pi n_e \bar{d}(t) = E_0 e^{-i\omega t} + \frac{4\pi n_e \cdot e^2}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)m}\bar{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$= \bar{E}\underbrace{\left(1 + \frac{4\pi n_e e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}\right)}_{\varepsilon(\omega)}$$

обобщение выражения для $\varepsilon(\omega)$ для многоэлектронного атома:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2 N_e}{m_e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{\omega_{0n}^2 - \omega^2 - 2i\gamma_n\omega}$$

, f_n – сила осциллятора ω_{0n} и γ_n

$\sum f_n = 1$ (вероятность перехода с n-го уровня на нижний)

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$$

$\left(\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m},\right.$ ω_0 – собств. частота колебаний $\left.\right)$

энергетическая диаграмма состояния эл-на в атоме H

$\hbar\omega_{0n} = E_n - E_0$ ($\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ эрг/с)

– основное сост. $\bar{e}$

дисперсия вблизи лин. погл. $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_0$

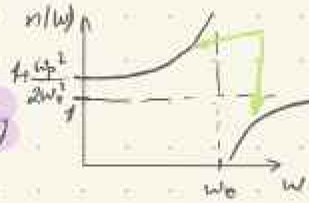
$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_0(\Delta\omega + i\gamma)} = 1 - \frac{\omega_p^2\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma} - i\right)}{2\omega_0\left(\frac{\Delta\omega^2}{\gamma^2} + 1\right)}$$

$$n(\omega) \simeq \sqrt{\varepsilon(\omega)} \simeq \left[при\ \frac{\omega_p^2}{\omega_0\gamma} \ll 1\right] \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{4\omega_0\gamma} \cdot \frac{\Delta\omega/\gamma}{\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2 + 1} + \frac{i\,\omega_p^2}{4\omega_0\gamma}\frac{1}{\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2 + 1}$$

дисперсия вдали $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg 2\gamma\omega$

$$\varepsilon(\omega) = n^2(\omega) \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

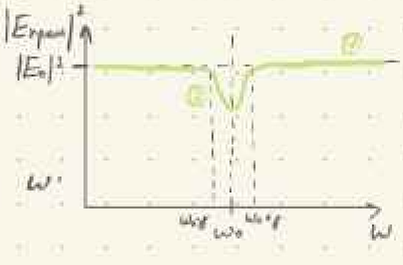


опыт

$$\bar{E}(z,t) = E_0 e^{ikz - i\omega t} \Rightarrow k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} = \frac{\omega n(\omega)}{c} = \frac{\omega}{c}\left[Re\,n(\omega) + i\,Im\,n(\omega)\right]$$

$$\bar{E}(z,t) = \bar{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}Re[n(\omega)] \cdot z - i\omega t} \cdot e^{-\frac{\omega}{c}Im[n(\omega)]z}$$

какой спектр получим на выходе?



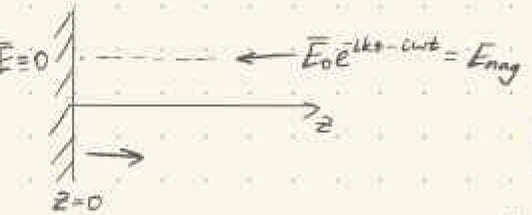
спектр прошедших волн с разными ω

① вдали от линии поглощения величина поля почти не изменяется (не поглощается атомами газа)

② линия поглощения данного газа

! в реальном эксперименте видно много линий поглощения

Стоячие элмг волны. Резонаторы. Собств колебания и частоты в прямоугольном осцилляторе



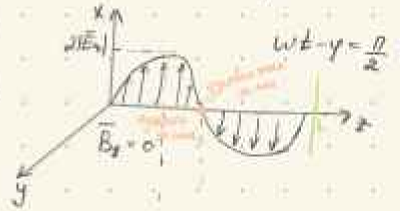
$$\bar E_\Sigma = \bar E_{пад} + \bar E_{отр} = \bar E_0 e^{ikz-i\omega t} - \bar E_0^{\,ikz-i\omega t} = -2i\bar E_0 \sin(kz) e^{-i\omega t}$$

$$\bar B_\Sigma = [-\bar e_z \times \bar E_{пад}] + [\bar e_z \times \bar E_{отр}] = -[\bar e_z \times \bar E_0]\, 2\cos kz\, e^{-i\omega t}$$

пример 1: падающая волна – плоскополяр.: $\bar E_0 = \hat E_{0x}\bar e_x = |\hat E_{0x}| e^{i\psi}\bar e_x$

$Re\,\bar E_\Sigma(z,t) = -2\bar e_x|\hat E_{0x}|\sin kz\cdot\sin(\omega t-\psi)$

$Re\,\bar B_\Sigma(z,t) = -2\bar e_y|\hat E_{0x}|\cos kz\cdot\cos(\omega t-\psi)$



узловые точки эл. поля: $z_n = \frac{\pi m}{k}$, $m = -\infty \setminus -1,0,1 \setminus +\infty$

пучности эл. поля: $z_n = \frac{m\pi + \frac{\pi}{2}}{k}$, $m = 0,1,2,\ldots$

– если на $z=L$ помещаем еще одно зеркало → получаем плоский резонатор ⇒ $k_m = \frac{\pi m}{k}$

– если L задано ⇒ $k_m = \frac{m\pi}{L}$, $\omega_m = \frac{m\pi c}{L}$

опр: любая полость, ограниченная идеально проводящими стенками, является резонатором для ЭМ-колебаний.

источники возбуждений:
1) штырь с переменным напряжением.
2) петля с переменным током
3) пучок заряженных частиц с переменным током

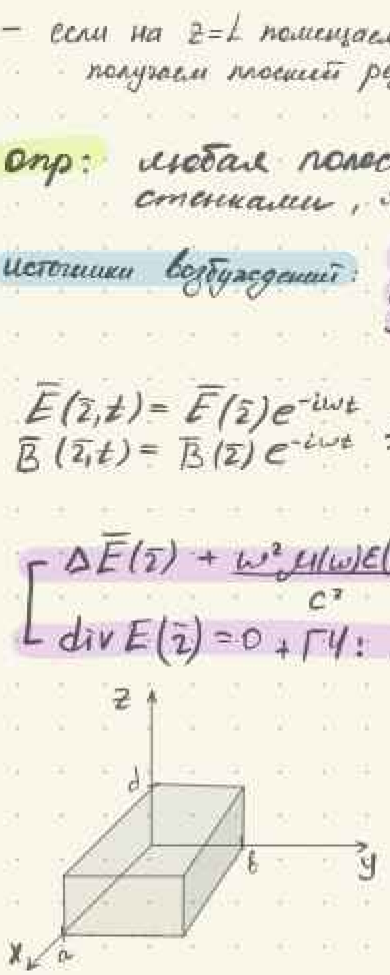
{можно возбудить колебания, если $\omega_{ист}$ совпадает с собств. частотой резонатора}

$$\bar E(\bar r,t) = \bar E(\bar r)e^{-i\omega t},\quad \bar B(\bar r,t) = \bar B(\bar r)e^{-i\omega t} \Rightarrow rot\,\bar E(\bar r) = \frac{i\omega\mu(\omega)}{c}H(\bar r),\quad rot\,\bar D(\bar r) = \frac{-i\omega\varepsilon(\omega)}{c}\bar E(\bar r)$$

$$+\quad div\,\bar E(\bar r) = 0,\quad div\,\bar B(\bar r) = 0 \quad + ГУ: \{E_\tau\}|_\Gamma = 0,\ \{B_n\}|_\Gamma = 0$$

$$\begin{cases} \Delta\bar E(\bar r) + \frac{\omega^2\mu(\omega)\varepsilon(\omega)}{c^2}\bar E(\bar r) = 0 \\ div\,E(\bar r) = 0 + ГУ:\ E_\tau|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

из решения задачи Штурма-Лиувилля следует
- нетрив. реш-я ∃ только для опр-х ω (собств. чисел), их беск-ный ряд
- с.ф. соот. с.ч. ω образуют базис
- $\min\omega \sim c/l_{хар.\,р\text{-}р\ резонатора}$



$$\Delta\bar E(\bar r) + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\bar E(\bar r) = 0 \Rightarrow E_x(x,y,z) = E_1(x)E_2(y)E_3(z)$$ – м-д разделения переменных

фиксируем y, z, меняем x: ⇒ $\frac{1}{E_1(x)}\frac{d^2}{dx^2}E_1(x) = const = \alpha_0$

случай: $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_0 = 0$ не подходят из-за невыполнения гран. усл-й

$\alpha_0 < 0$: $E_1(x) = A_1\sin(\sqrt{|\alpha_0|}\,x + \psi)$

Пусть $\alpha_0 = -k_x^2$, тогда из (*): $-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\varepsilon\omega^2\mu}{c} = 0 \Rightarrow E_x(x,y,z) = A\sin(k_x x + \alpha_x)\sin(k_y y + \alpha_y)\sin(k_z z + \alpha_z)$

$E_y(\ ) = B\sin(k_x x + \beta_x)\ldots$

$E_z(\ ) = D\sin(k_x x + \gamma_x)\ldots$

подст-ем в Г.У.: $k_x = \frac{n_x\pi}{a}$, $k_y = \frac{n_y\pi}{b}$, $k_z = \frac{n_z\pi}{d}$

$$\frac{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2_{n_x n_y n_z}}{c^2} = \left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{b}\right)^2$$ – собств-я мода колебаний (*)

$div\,\bar E = 0$: ⇒ $E_x = A\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega_{n_x,n_y,n_z}t}$

$E_y = B\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega_{n_x n_y n_z}t}$

$E_z = \left(\frac{Ak_x + Bk_y}{k_z}\right)\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)e^{-i\omega_{n_x n_y n_z}t}$

м.п. моды: $\bar B(\bar r,t) = \frac{c}{i\omega_{n_x,n_y,n_z}}\, rot\,\bar E(\bar r,t)$

опр: основная мода – с мин-ной частотой: варьируем n_i в (*) ⇒ $n_x = 1 = n_y$, $n_z = 0$ ⇒ $\omega_{min} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$

опр: волноводом наз-ся бесконечный цилиндр произвольного сечения с проводящими стенками (одинаковая форма сечения вдоль оси цилиндра)

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \bar{E}(x,y)\, e^{ik_z z - i\omega t}$$
$$\bar{B}(\bar{r},t) = \bar{B}(x,y)\, e^{ik_z z - i\omega t}$$

$\Rightarrow$ подставим в ур-я Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\bar{E}(\bar{r}) = \frac{i\omega\mu(\omega)}{c} H(\bar{r}), \quad \mathrm{rot}\,H(\bar{r}) = -\frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{c}\bar{E}(\bar{r})$$
$$\mathrm{div}\,\bar{D}(\bar{r}) = 0, \quad \mathrm{div}\,\bar{B}(\bar{r}) = 0$$

$$\nabla_\perp E_z(x,y) - ik_z \bar{E}_\perp(x,y) = \frac{i\omega\mu(\omega)}{c}\left[\bar{e}_z \times H_\perp(x,y)\right]$$
$$\nabla_\perp H_z(x,y) - ik_z \bar{H}_\perp(x,y) = \frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{c}\left[\bar{e}_z \times \bar{E}_\perp(x,y)\right]$$

$$(H_\perp \to E_z) \Rightarrow \varkappa^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon\mu}{c^2} - k_z^2$$

$$\Rightarrow \bar{E}_\perp(x,y) = \frac{ik_z}{\varkappa^2}\nabla_\perp E_z - \frac{i\omega\mu}{c\varkappa^2}\left[\bar{e}_z \times \nabla_\perp H_z\right]$$
$$\bar{H}_\perp(x,y) = \frac{ik_z}{\varkappa^2}\nabla_\perp H_z + \frac{i\omega\varepsilon}{c\varkappa^2}\left[\bar{e}_z \times \nabla_\perp E_z\right]$$

$\oplus$ $\Delta_\perp E_z(x,y) + \varkappa^2 E_z(x,y) = 0$

$\Delta_\perp B_z(x,y) + \varkappa^2 B_z(x,y) = 0$

$\oplus$ $E_\tau|_\Gamma = 0 \Rightarrow E_z|_\Gamma = 0$ и $\frac{\partial B_z}{\partial n} = 0$

$B_n|_\Gamma = 0 \Rightarrow E_z|_\Gamma = 0$ и $\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$

для E-волн: $\Delta_\perp E_z(x,y) + \varkappa^2 E_z(x,y) = 0$
$+$ ГУ: $E_z|_\Gamma = 0$ (условие Дирихле)

для H-волн: $\Delta_\perp B_z(x,y) + \varkappa^2 B_z(x,y) = 0$
$+$ ГУ: $\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$ (условие Неймана)

эти ур-ния + ГУ задают задачу Ш-Л на собств. зн. и собств. функции

① H-волна: метод разд-я переменных $\Rightarrow B_z(x,y) = B_1(x) B_2(y)$

$$\frac{1}{B_1(x)}\underbrace{\frac{d^2 B_1(x)}{dx^2}}_{=-k_x^2} + \frac{1}{B_2(y)}\underbrace{\frac{d^2 B_2(y)}{dy^2}}_{=-k_y^2} + \varkappa^2 = 0 \Rightarrow B_z(x,y) = B_0 \sin(k_x x + \alpha_x)\sin(k_y y + \alpha_y)$$

ГУ: $\alpha_x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha_y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k_x = \frac{\pi n_x}{a}$, $k_y = \frac{\pi n_y}{b}$

$$\bar{B}_\perp = \frac{ik_z}{\varkappa^2_{n_x n_y}}\left(\bar{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\right) B_z(\bar{r},t)$$
$$\bar{E}_\perp = -\frac{i\omega_{n_x n_y}}{c\varkappa^2_{n_x n_y}}\left[\bar{e}_z \times \left(\bar{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\right) B_z\right]$$

$$B_z(x,y) = B_0 \cos(k_x x)\cos(k_y y)$$

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2} - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \Rightarrow \omega_{n_x, n_y} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{k_z^2 + \left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2}$$

пусть $n_x = 1$, $n_y = 0$: $\omega_{10} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \Rightarrow \omega_{cr} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\pi}{a}$ — критическая частота

при $\omega_{ист} < \omega_{cr}$ волна будет затухать в волноводе

② E-волна:

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_z(x,y) + \varkappa^2 E_z(x,y) = 0 \quad \oplus \ \mathrm{div}\,\bar{E} = 0 \\ E_z|_\Gamma = 0\end{cases}$$

$$E_z = E_0 \sin(\underbrace{k_x}_{\frac{\pi n_x}{a}} x + \underbrace{\alpha_x}_{0})\sin(\underbrace{k_y}_{\frac{\pi n_y}{b}} y + \underbrace{\alpha_y}_{0})$$

$$\bar{B}_\perp = \frac{i\omega_{n_x n_y}\varepsilon\mu}{c\varkappa^2_{n_x n_y}}\left[\bar{e}_z \times \left(\bar{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\right)E_z\right]$$
$$E_\perp = \frac{ik_z}{\varkappa^2_{n_x n_y}}\left(\bar{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + e_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{E}_z(\bar{r},t)$$

ω_{cr} при E_{11} (при $n_x = 0$, $n_y = 0$ E волн нет)

Волновод как среда с дисперсией. TEM волна

односвязный волновод — 3^x связный волновод

! для многосвязных волноводов (2 и более) существует TEM-волна

$\Rightarrow \bar{E}_z$ и $\bar{B}_z = 0$

$$\nabla_\perp E_z - \frac{\partial}{\partial z}\bar{E}_\perp = \frac{i\omega}{c}[\bar{e}_z \times \bar{B}_\perp] \qquad \nabla_\perp B_z - \frac{\partial}{\partial z}B_\perp = \frac{-i\omega\varepsilon\mu}{c}[\bar{e}_z \times \bar{E}_\perp]$$

$$\bar{E}_\perp(\bar{r},t) = E_\perp(x,y)e^{ik_z z - i\omega t} \quad \text{и} \quad B_\perp(\bar{r},t) = B_\perp(x,y)e^{ik_z z - i\omega t}$$

$$ik_z\bar{E}_\perp e^{(\,)} = \frac{i\omega}{c}[\bar{e}_z \times \bar{B}_\perp e^{(\,)}] \Rightarrow \bar{E}_\perp = \frac{\omega}{ck_z}[\bar{e}_z \times \bar{B}_\perp] \Rightarrow E_\perp \perp B_\perp$$

$$ik_z\bar{B}_\perp = \frac{i\omega}{c}\varepsilon\mu[\bar{e}_z \times \bar{E}_\perp] \Rightarrow \bar{B}_\perp = \frac{\omega\varepsilon\mu}{ck_z}[\bar{e}_z \times \bar{E}_\perp]$$

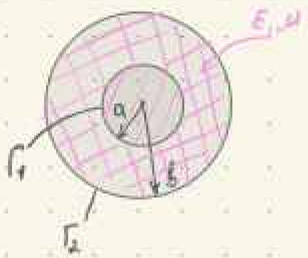
$\Rightarrow E_\perp, \bar{B}_\perp, \bar{e}_z$ – правая тройка

$$E_\perp = -\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2k_z^2}[\underset{a}{\bar{e}_z} \times [\underset{b}{\bar{e}_z} \times \underset{c}{E_\perp}]] = -\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2k_z^2}[\underbrace{\bar{e}_z(\bar{e}_z,\bar{E}_\perp)}_{0} - \underbrace{\bar{E}_\perp(\bar{e}_z,\bar{e}_z)}_{E_\perp}] \Rightarrow \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2} = k_z^2$$

если ε, μ не зависят от $\omega \Rightarrow \omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}k_z$ – лин. дисперсионное ур-ние $\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = const$

(пакеты не меняют форму)

коаксиальный кабель:



$$(rot E)_z = \frac{i\omega}{c}\bar{B}_z = 0 \; + \; div\bar{E} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \oplus \quad E_z|_{\Gamma_1} = 0, \quad E_z|_{\Gamma_2} = 0$$

решение ищем в виде: $E_\perp = -\nabla_\perp\psi \Rightarrow$

$$E_x = -\frac{\partial\psi}{\partial x};\; E_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

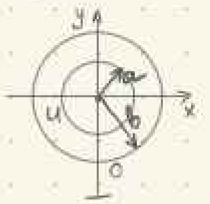
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \text{ур-е } rot\bar{E} = 0 \text{ удовл-ся}$$

$$div E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial E_z}{\partial z}} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi = 0 \Rightarrow \Delta_\perp\psi(x,y) = 0$$

$\Rightarrow$ $\Delta\psi = 0,\ \psi|_\Gamma = 0 \Rightarrow \psi = const$ (односвязный вв-д)

$\Delta\psi = 0,\ \psi|_{\Gamma_1} = A,\ \psi|_{\Gamma_2} = B$ (двусвязный в-д)

круговой волновод:



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2\psi}{r^2\partial\theta^2} = 0 \quad (\text{пусть } \psi \neq \psi(\theta))$$

$$r\frac{\partial\psi}{\partial r} = const = D \Rightarrow \psi = D\ln r + F$$

$$\psi|_b = 0,\ \psi|_a = U \Rightarrow \begin{matrix} D\ln b + F = 0 \\ D\ln a + F = U \end{matrix} \Rightarrow D = \frac{U}{\ln a/b},\ F = \frac{-U}{\ln a/b}\ln b$$

$$\psi(r) = \frac{U}{\ln a/b}\ln\frac{r}{b} = \frac{U\ln\frac{b}{r}}{\ln b/a} \Rightarrow \bar{E}_\perp = \bar{e}_r\frac{U}{\ln b/a}\cdot\frac{1}{r}e^{ik_z z - i\omega t}$$

$$\bar{B}_\perp = \frac{U}{\ln b/a}\frac{1}{r}e^{ik_z z - i\omega t}\frac{\omega\varepsilon\mu}{ck_z}[\bar{e}_z \times \bar{e}_r]^{=\bar{e}_\theta}$$

Приближение геометрической оптики. Уравнение эйконала. Уравнение луча

для полей $\bar{E}(\bar{r},t) \sim e^{-i\omega t}$, $\bar{B}(\bar{r},t) \sim e^{-i\omega t}$ решение для волн в однор-й среде + модифик :

$e^{ik_1\Delta r_1 + ik_2\Delta r_2 + \dots} = e^{ik_0(n_1\Delta r_1 + n_2\Delta r_2 + \dots)} = e^{ik_0\int n\cdot \bar{r}\, ds}$

$\psi(\bar{r})$ – эйконал $k_0 = \frac{\omega}{c}$

масштабируем $\bar{E}_0(\bar{r})$ и $\bar{B}_0(\bar{r}) \sim L$ и подставим реш. в ур-е Максвелла:

$k_0\psi(\bar{r}) = (k_0 n, \bar{r}) \Rightarrow \psi(\bar{r}) = (\frac{k_0}{k_0} n, \bar{r}) \Rightarrow$

$[\nabla\times E_0(\bar{r}) e^{ik_0\psi(\bar{r}) - i\omega t}] = e^{ik_0\psi(\bar{r})-i\omega t}[\nabla\times\bar{E}_0(\bar{r})] + [\nabla e^{ik_0\psi(\bar{r})}\times E_0(\bar{r})]e^{-i\omega t} = e^{ik_0\psi(\bar{r})-i\omega t}[[\nabla\times E_0(\bar{r})] +$
$+ ik_0[\nabla\psi(\bar{r})\times E_0(\bar{r})]] = \frac{i\omega}{c}\bar{B}_0(\bar{r})e^{ik_0\psi(\bar{r})-i\omega t}$ $\Rightarrow [\nabla\psi(\bar{r})\times\bar{E}_0(\bar{r})] = \bar{B}_0(\bar{r})$ (1)

$[\nabla\psi(\bar{r})\times \bar{H}_0(\bar{r})] = -\varepsilon(\bar{r},\omega)\bar{E}_0(\bar{r})$

$[\nabla\psi(\bar{r})\times B_0(\bar{r})] = -\varepsilon(\bar{r},\omega)\mu(\bar{r},\omega)\bar{E}_0(\bar{r})$

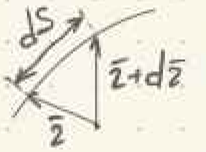
! $\bar{E}_0$, $\bar{B}_0$, $\Delta\psi$ образуют правую тройку

$1\to 2$: $[\nabla\psi\times[\nabla\psi\times\bar{E}_0(\bar{r})]] = -\varepsilon(\bar{r},\omega)\mu(\bar{r},\omega)E_0(\bar{r})$

$\nabla\psi\underbrace{(\nabla\psi,\bar{E}_0(\bar{r}))}_{0} - \bar{E}_0(\bar{r})|\nabla\psi|^2 = -\varepsilon(\bar{r},\omega)\mu(\bar{r},\omega)E_0(\bar{r})$

$\Rightarrow |\psi(\bar{r})| = n(\bar{r})$ – ур-е Эйкон

$n(\bar{r}) = \varepsilon(\bar{r},\omega)\mu(\bar{r},\omega)$



$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}_{\nabla\psi}$; $\nabla\psi = n(\bar{r})\frac{d\bar{r}}{ds}$ – траектория луча

$\frac{d}{ds}(\nabla\psi) = (\bar{e}_{\nabla\psi},\nabla)\nabla\psi = (\frac{\nabla\psi}{n},\nabla)\nabla\psi$ (*) – производная $\nabla\psi$ вдоль луча

$\nabla(\nabla\psi,\nabla\psi) - (\nabla\psi,\nabla)\nabla\psi = [\nabla\psi\times\underbrace{rot\,\nabla\psi}_{0}] = 0$

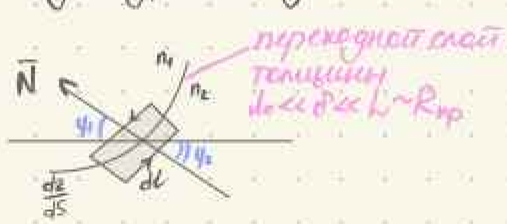
расм-м $[\bar{a}(\bar{r})\times[\nabla\times b(\bar{r})]] = \nabla(a(\bar{r}), b(\bar{r})) - b(\bar{r})(a(\bar{r}),\nabla) \Rightarrow [\bar{a} = \bar{b}] \Rightarrow$

$\Rightarrow [a(\bar{r})\times rot\,\bar{a}] = \nabla\frac{\bar{a}^2}{2} - (\bar{a},\nabla)\bar{a} \Rightarrow [a = \nabla\psi] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\nabla\psi\times rot\,\nabla\psi] = \nabla\frac{(\nabla\psi)^2}{2} - (\nabla\psi,\nabla)\nabla\psi = \frac{1}{n(\bar{r})}\nabla\frac{|\nabla\psi|^2}{2} = \frac{1}{n(\bar{r})}\nabla\frac{n^2(\bar{r})}{2} = \nabla n(\bar{r})$

$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(n(\bar{r})\frac{d\bar{r}}{ds}\right) = \nabla n(\bar{r})$ – уравнение луча

ГУ для ур-ния луча:



$\oint(\nabla\psi, dl) = 0$ (пот. поля) $\Rightarrow \oint(\nabla\psi\, d\bar{l}) = \oint n(\bar{r})(\frac{d\bar{r}}{ds}, dl) = 0$

$\Rightarrow n_2 dl\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)_\tau - n_1 dl\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)_\tau = 0 \Rightarrow n_2\sin\psi_2 = n_1\sin\psi_1$

опр: геом. оптика – теория на основе малого параметра: $\frac{d}{L} << 1$

Принцип Ферма. Получение из него уравнения луча.

принцип Ферма: оптическая длина пути реального луча, выходящего из т. P_1 в т. P_2, меньше или равна оптической длине $\forall$ др. кривой, содержащей эти точки

$$\int_{P_1}^{P_2} n(\bar{r})\,dS \to min$$

$$\underbrace{\int_1^2 n(\bar{r})\,dS}_{\text{оптический путь}} = \int_1^2 \underbrace{n(\bar{r})\overbrace{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt}^{dS}}_{\substack{\text{функция Лагранжа} \\ L(\bar{r},\dot{\bar{r}})}} \to min \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(n(\bar{r})\cdot\dfrac{2\dot{x}}{2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\dfrac{\partial n}{\partial x} \\ \dfrac{d}{dt}\left(n(\bar{r})\,\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = \sqrt{\quad}\,\dfrac{\partial n}{\partial y} \\ \dfrac{d}{dt}\left(n(\bar{r})\,\dfrac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = \sqrt{\quad}\,\dfrac{\partial n}{\partial z} \end{cases} \qquad (*)$$

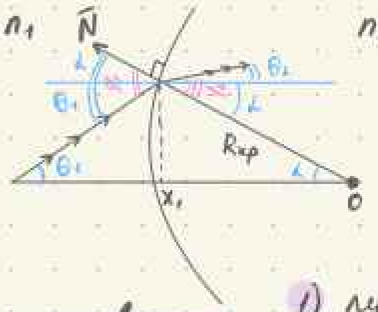
Домножим $\forall$ из $(*)$ на свой орт и сложим:

$$\frac{d}{dt}\left(n(\bar{r})\underbrace{\frac{e_x\dot{x}+e_y\dot{y}+e_z\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}}_{\text{единичный в-р } U=\frac{d\bar{r}}{dS} \text{ вдоль луча}}\right) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\nabla n \Rightarrow \frac{d}{dS}\left(n(\bar{r})\,\frac{d\bar{r}}{dS}\right) = \nabla n$$

$\frac{d}{\bar{r}dt}$

ур-ние луча

Преломление луча на сферической порехности в параксиальном приближении
Формула тонкой линзы:



- есть плоскость, проходящая через луг и т. O (плоскость оптической оси)
- если $R_{кр} \gg \lambda$: $n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2$

$n_1(\theta_1 + \alpha) = n_2(\theta_2 + \alpha)$, $\alpha = \arcsin \frac{x_1}{R_{кр}} \simeq \frac{x_1}{R_{кр}}$

- луг в средах с $n = const$ двумя переменными $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dz} \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ n\frac{dx}{dz} \end{pmatrix}$

правила!
1) луг удаляется от оси $\rightarrow$: $\frac{dx}{dz} > 0$, $\theta > 0$
2) луг приближается к оси $\rightarrow$: $\frac{dx}{dz} < 0$, $\theta < 0$
3) $\rightarrow (\Rightarrow R_{кр} > 0$, если $\rightarrow) \; R_{кр} < 0$

- Ур-ние при переходе лугом границы: $x_2 = x_1$: $n_1\left(x_1' + \frac{x_1}{R_{кр}}\right) = n_2\left(x_2' + \frac{x_2}{R_{кр}}\right)$

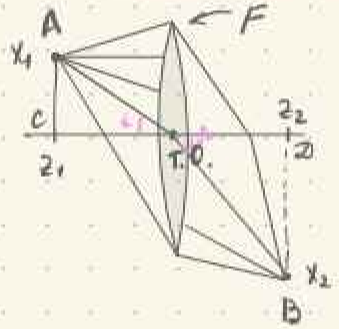
$$x_2' = \frac{n_1}{n_2}x_1' - \underbrace{\boxed{\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{x_1}{R_{кр}}}}_{\text{фокус}} = \frac{n_1}{n_2}x_1' - \frac{x_1}{F_{12}}, \text{ где } \frac{1}{F_{12}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R_{кр}}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_{12}} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}}_{M_{21}\text{, чтобы } A_{ij} x_j} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = M_{21}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

[в терминах $\begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2}{F_{12}} & 1 \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$
удобство: $\det M = 1$]

$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$ – преобр-е координат в однородной среде

- поместим в т. A (x_1, z_1) источник, а в т. B (x_2, z_2) – изображение (точки A и B наз-ся сопряженными):



$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ -1/F & \frac{z_1}{F} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z_2}{F} & -z_1 + z_2\left(1 + \frac{z_1}{F_0}\right) \\ -1/F & 1 + \frac{z_1}{F_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

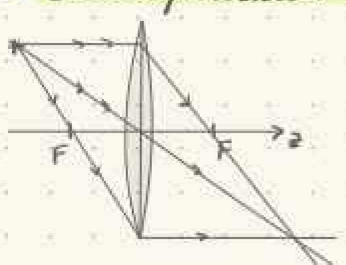
$$x_2 = x_1\left(1 - \frac{z_2}{F}\right) + x_1'\underbrace{\left(-z_1 + z_2\left(1 + \frac{z_1}{F}\right)\right)}_{\text{условие получения изобр-я; } = 0 \text{ : } x_2 \neq x_2(x_1')}$$

$$-z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{F} = 0 \quad \Big| : z_1 z_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{F} = \frac{1}{z_2} \text{ – ф-ла тонкой линзы}$$

- Найдем коэфф-т увеличения изображения

$$K = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1\left(1 - \frac{z_2}{F}\right)}{x_1} = 1 - z_2\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}\right) = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow \triangle ACO \sim \triangle ORB \text{ и } \alpha = \beta$$

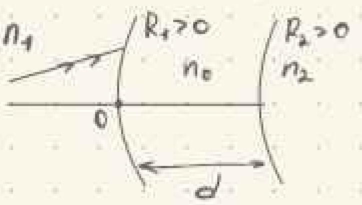
- геометрический способ построения изображения в тонкой линзе



1. Луг, проходящий через центр линзы, выходит из нее под тем же исходным углом.
2. Луг, идущий $\parallel z$, после линзы проходит через фокус

Матричный формализм. Главные плоскости и построение изображения в толстой ьинзе. Теорема Лагранжа—Геймгольца

• матричный формализм для толстой линзы



$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\-1/F_{02}&n_0/n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1/F_{10}&n_1/n_0\end{pmatrix}}_{M_{21}}\begin{pmatrix}x_1\\x_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_2'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1/F_{02}&n_0/n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\frac{d}{F_{10}}&\frac{dn_1}{n_2}\\-1/F_{10}&n_1/n_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{d}{F_{10}}&\frac{dn_1}{n_0}\\-\frac{1}{F}&-\frac{dn_1}{F_{02}n_0}+\frac{n_1}{n_2}\end{pmatrix}$$

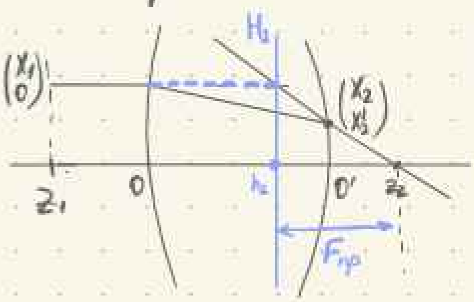
положим: $n_1=n_2=1\Rightarrow$ $n_0=n$

$$M_{21}=\begin{pmatrix}1-\frac{d}{F_{10}}&\frac{d}{n}\\-1/F&1-\frac{d}{F_{02}n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{F}=-\frac{1}{F_{02}}+\frac{d}{F_{10}F_{02}}-\frac{n_0}{n_2F_{10}}\Rightarrow\begin{bmatrix}n_2=n_1=1\\n_0=n\end{bmatrix}\Rightarrow-\left(\frac{1-n}{R_2}-\frac{d(1-n)(n-1)}{R_2\cdot nR_1}+\frac{n(n-1)}{nR_1}\right)=$$

$$=-\left(\underbrace{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}_{1/F\text{ тонкой линзы}}+\frac{(n-1)^2d}{nR_1R_2}\right)$$

• геометрический способ построения

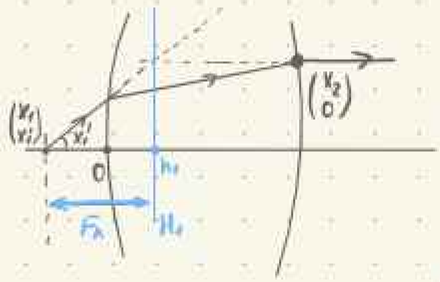


$$\begin{pmatrix}x_2\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_2=m_{11}x_1\\x_2'=m_{21}x_1\end{matrix}\right\}\Rightarrow z_2=\frac{x_2}{-x_2'}=\frac{m_{11}x}{-m_{21}x_1}$$

$$F_{пр}=\frac{x_1}{-x_2'}=-\frac{x_1}{m_{21}x_1}=-\frac{1}{m_{21}}=F\text{ (толстой линзы)}$$

h_2 – координата главной плоскости H_2 отн-но O', найдем ее координату

$$h_2=z_2-F_п=-\frac{m_{11}}{m_{21}}+\frac{1}{m_{21}}=\frac{1-m_{11}}{m_{21}}$$



$$\begin{pmatrix}x_1\\x_1'\end{pmatrix}=M_{21}^{-1}\begin{pmatrix}x_2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow M_{21}^{-1}=\frac{1}{\det M}\begin{pmatrix}m_{22}&-m_{12}\\-m_{21}&m_{11}\end{pmatrix}$$

$x_1=m_{22}x_2$

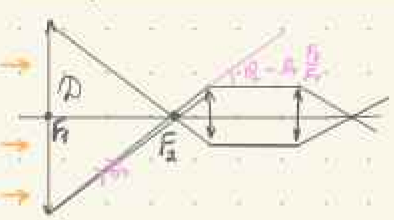
$x_1'=-m_{21}x_2$

z_1 (отн-но O) $=-\frac{x_1}{x_1'}=\frac{m_{22}}{m_{21}}$

$$F_л=\frac{x_2}{x_1'}=\frac{x_2}{-m_{21}x_2}=-\frac{1}{m_{21}}=F=F_п$$

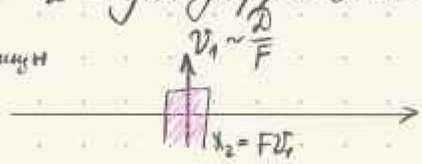
h_1 (отн-но O) $=z_1+F_л=\frac{m_{22}-1}{m_{21}}$

• теорема Лагранжа – Гельмгольца



$$\Delta k_x\Delta x\sim\pi\Rightarrow\theta_x\sim\frac{\Delta k_x}{k}\sim\frac{\pi}{Dk}\sim\frac{\lambda}{D}$$ – угол дифракции на линзе

после линзы $\Rightarrow$



$S_2\sim\frac{2D}{F}\cdot 2F\vartheta_1$

$S_1=D\cdot 2\vartheta_1$

площадь фазового портрета при движении пучка света в линзах, зеркалах сохраняется

док-во: $S_1=\int dx_1d\vartheta_1$, $S_2=\int dx_2d\vartheta_2\Rightarrow dx_2d\vartheta_2=\mathcal{J}dx_1d\vartheta_1$, где $\mathcal{J}$ - матрица Якоби: $\begin{array}{cc}m_{11}&m_{12}\\\hline\end{array}$ $\begin{vmatrix}\frac{\partial x_2}{\partial x_1}&\frac{\partial x_2}{\partial\vartheta_1}\\\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_1}&\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_1}\end{vmatrix}$

$$\text{но }\begin{pmatrix}x_2\\\vartheta_2\end{pmatrix}=\underbrace{(\ )\overset{=M_{11}}{(\ )}(\ )\ldots(\ )}_{\text{матрицы линз св-во преобразова}}\begin{pmatrix}x_1\\\vartheta_1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_2\\\vartheta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vartheta_1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dx_2d\vartheta_2=dx_1d\vartheta_2\Rightarrow\text{теорема доказана}$$

Интерференция элмг волн. Понятие о когерентности

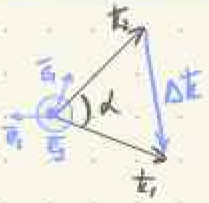
• в линейных средах ε и μ не зависят от $\bar E$ и $\bar B$ из принципа суперпозиции $\Rightarrow$
$\bar E_\Sigma(\bar r,t) = \bar E_1(\bar r,t) + E(\bar r,t)$ и $B_\Sigma(\bar r,t) = \bar B_1(\bar r,t) + \bar B_2(\bar r,t)$

пусть есть 2 монохроматические волны (не обязательно плоские): $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\bar E_1(\bar r,t) = \hat{\bar E}_1(\bar r)\, e^{-i\omega t},\quad \bar E_2(\bar r,t) = \bar E_2(\bar r)e^{-i\omega t} \Rightarrow \bar E_\Sigma(\bar r, t) = (E_1(\bar r)+E_2(\bar r))e^{-i\omega t}$$

$$I = \langle(\mathrm{Re}\bar E, \mathrm{Re}\bar E)\rangle = \langle|E_\Sigma|^2\rangle = \underbrace{\frac{|E_1(\bar r)|^2}{2}}_{I_1} + \underbrace{\frac{|E_2(\bar r)|^2}{2}}_{I_2} + \underbrace{\frac{2\mathrm{Re}(E_1(\bar r), E_2(\bar r))}{2}}_{I_{12}\text{ — интерф. слагаемое}}$$

плоская монохр-я волна:



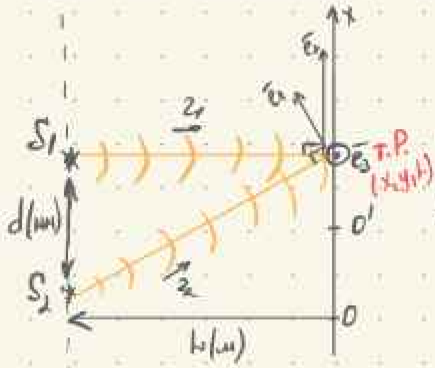
$$E_1(\bar r) = (E_1^\parallel \bar e_1 + E_1^\perp \bar e_3)e^{ik_1 z},\quad \bar E_2(\bar r) = (E_2^\parallel \bar e_2 + E_2^\perp \bar e_3)e^{ik_2 z + i\delta\varphi}$$

$$I_\Sigma = \frac{|E_1^\parallel|^2 + |E_1^\perp|^2}{2} + \frac{|E_2^\parallel|^2 + |E_2^\perp|^2}{2} + \mathrm{Re}(\bar E_1^*(z)\bar E_2(\bar r)) = I_1 + I_2 + \mathrm{Re}(E_1^\parallel E_2^\parallel(\bar e_1, \bar e_2)e^{i(k_2-k_1)z+i\delta\varphi} +$$

$$+ E_1^\perp E_2^\perp e^{i(k_2-k_1)z + i\delta\varphi}) = \frac{|E_1^\parallel|^2}{2} + \frac{|E_2^\parallel|^2}{2} + E_1^\parallel E_2^\parallel(\bar e_1, \bar e_2)\cos(\Delta k z + \delta\varphi) + \frac{|E_1^\perp|^2}{2} + \frac{|E_2^\perp|^2}{2} + E_1^\perp E_2^\perp\cos(\Delta k z + \delta\varphi)$$

$$I = I_1^\parallel + I_2^\parallel + 2\sqrt{I_1^\parallel I_2^\parallel}\cos(\widehat{\bar e_1, \bar e_2})\cos(\Delta k z + \delta\varphi) + I_1^\perp + I_2^\perp + 2\sqrt{I_1^\perp I_2^\perp}\cos(\Delta k z + \delta\varphi)$$

интерференция от двух точечных источников:



$$k_1 = k_2 = \frac{\omega n}{c} = k$$

$$\bar E_1(\bar r_1, t) = \overbrace{\left(\bar e_1 E_1^\parallel \frac{L}{r_1} + \bar e_3 E_1^\perp \frac{L}{r_1}\right)}^{E_1(\bar r)} e^{ikr_1 - i\omega t} + o(\lambda \ll r_1)$$

$$\bar E_2(\bar r_2, t) = \underbrace{\left(e_2 E_2^\parallel \frac{L}{r_2} + e_3 E_2^\perp \frac{L}{r_2}\right)}_{E_2(\bar r)} e^{ikr_2 - i\omega t}$$

$$I_\Sigma = I_\Sigma^\perp + I_\Sigma^\parallel:\quad I_\Sigma^\perp = I_1^\perp + I_2^\perp + 2\sqrt{I_1^\perp I_2^\perp}\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi_3 - \varphi_4);$$

$$I_1^\perp = \frac{|E_1^\perp|^2 L^2}{2r_1^2};\quad I_2^\perp = \frac{|E_2^\perp|^2 L^2}{2r^2};\quad \varphi_3 = \mathrm{Arg}\, E_1^\perp,\ \varphi_4 = \mathrm{Arg}\, E_2^\perp$$

$k(r_1 - r_2) + \underbrace{\varphi_3 - \varphi_4}_{const}$, ⊕ паракс. приближ: $\overset{r_1, r_2 \sim L}{d, x \ll L}$

$$r_1 - r_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{(r_1 + r_2)} = \frac{L^2 + x^2 - ((x-d)^2 + L^2)}{r_1 + r_2} = \frac{2xd - d^2}{2L} = \frac{xd}{L} + const$$ (положив Н.К. в точке O)

$$r_1 - r_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{(r_1 + r_2)} = \frac{L^2 + (x + \frac{d}{2})^2 - (L^2 + (x - \frac{d}{2})^2)}{r_1 + r_2} = \frac{xd}{L}$$ (если НК в точке O')

• найдем период Δx между полосами

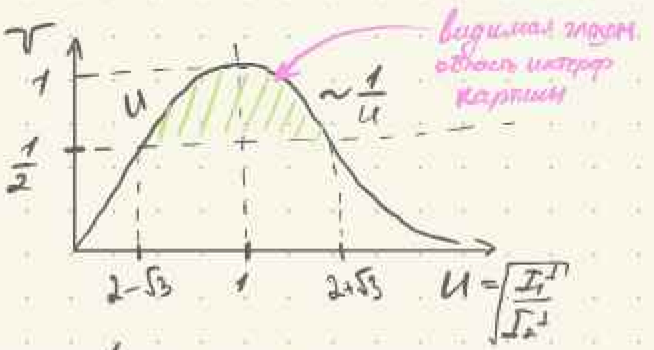
$$\frac{kx_m d}{L} + \varphi_3 - \varphi_4 = 2\pi m$$
$$\frac{kx_{m+1} d}{L} + \varphi_3 - \varphi_4 = 2\pi(m+1)$$

$\Rightarrow \Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda L}{d}$

чтобы увидеть полосы глазом нужно $\frac{L}{d} \sim 10^3 - 10^4$

$I_1^1 = I_1^1 + I_2^1 + 2\sqrt{I_1^1 I_2^1}\cos((\Delta k, x) + \psi_3 - \psi_4))$

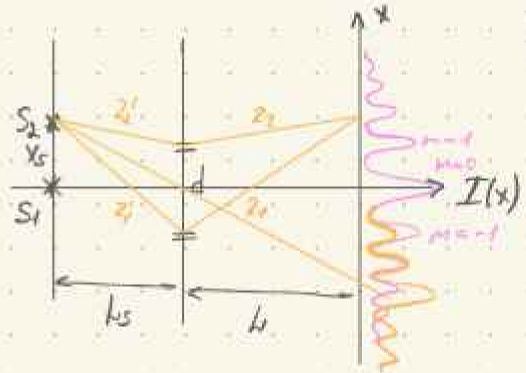
$V = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \frac{4\sqrt{I_1^1 I_2^1}}{2(I_1^1+I_2^1)} = \frac{2\overset{=u}{\sqrt{\frac{I_1^1}{I_2^1}}}}{\left(\frac{I_1^1}{I_2^1}+1\right)} = \frac{2u}{u^2+1}$



найдем максимум видности: $\left(\frac{2u}{u^2+1}\right)' = 0 \Rightarrow u = 1$

видность с физ. точки зрения: отношение амплитуды волны к среднему значению интенсивности

схема Юнга с 2мя некогерентными источниками



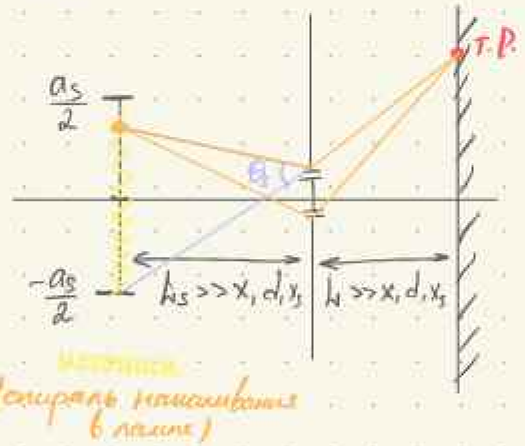
для смещенного по x источника S_2 $I(x)$ такая же, но в качестве $\Delta z(x) = z_1+z_1'-z_2-z_2' \approx \frac{xd}{L}+\frac{x_s d}{L_s}$

$x_m(S_1) = m\lambda\frac{L}{d}$, $x_m'(S_2) = m\lambda\frac{L}{d} - \frac{x_s d L}{L_s d}$

интерференционная картина исчезает при:

- $\frac{x_s L}{L_s} = \frac{\lambda L}{d}\left(\frac{1}{2} + n\right)$
- если $n=0$: $x_{s\,min} = \frac{\lambda L_s}{2d} \Rightarrow d = \frac{\lambda L_s}{2x_s} = \frac{\lambda L_s}{2x_s}$

протяженный источник



$\Delta\varphi$ $\forall$ двух соседних точек источника — случайная функция

dI_1 от кусочка dx_s $= dI_2$ от dx_s $= dI_0 = \frac{I_0}{a_s}\cdot dx_s$
(от первой щели) (от второй щели)

$dI(x) = 2dI_0\left(1+\cos\left(\overset{=k_0}{\frac{\omega_0}{c}}\Delta z(x)\right)\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Delta z(x)}{l_1}\right)\right)$, где

$\Delta z(x) = \frac{xd}{L}+\frac{x_s d}{L_s}$

l_1 — предельная длина когерент-ти $= \frac{2\pi c}{\Delta\omega} \approx \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$

I_0 — интенсивность от всего источника в т.Р. от одной щели

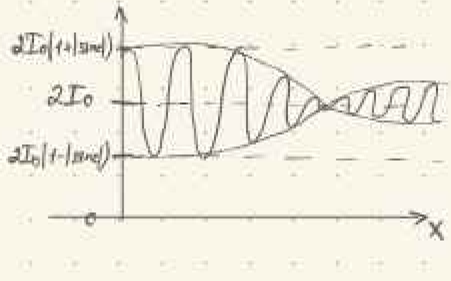
! чтобы увидеть интерф. картину $\Delta z(x)$ должно быть $\ll l_1$

Если $\Delta z(\forall x) \ll l_1 \Rightarrow \int dI(x) = \int_{-a_s/2}^{a_s/2} 2\frac{I_0}{a_s}dx_s\left(1+\cos(k_0\Delta z(x))\right) = 2\frac{I_0}{a_s}\left(a_s + \frac{\sin\left(k_0 d\left(\frac{x}{L}+\frac{a_s}{2L_s}\right)\right) - \sin\left(k_0 d\left(\frac{x}{L}-\frac{a_s}{2L_s}\right)\right)}{k_0 d/L_s}\right) =$

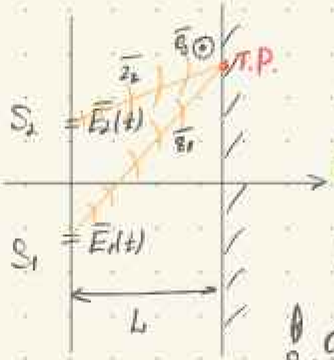
$= 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{k_0 d x}{L}\right)\cdot \sin\left(k_0 d\frac{a_s}{2L_s}\right)\Big/\frac{k_0 d a_s}{2L_s}\right) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{k_0 dx}{L}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{k_0 d a_s}{2L_s}\right)\right)$

$d_{max} = l_\perp$ — макс расст-е между щелями для протяженного источника, когда инт. картина исчезает :

$l_\perp = \frac{\lambda}{2\theta_s}$ где θ_s — угол, под которым источник виден из щелей



Корреляционная функция



$\vec E_1(z_1,t) = \vec E_1(t - \frac{z_1}{c})\frac{L}{z_1} = E_1(t-\frac{z_1}{c})\cdot \vec e_3 \cdot \frac{L}{z_1}$; $\vec E_2(z_2,t) = \vec E_2(t-\frac{z_2}{c}) = E_2(t-\frac{z_2}{c})\vec e_3\cdot\frac{L}{z_2}$

• для реальных полей E_1, E_2

$$I = \langle (E_1(t-\frac{z_1}{c})\frac{L}{z_1}\vec e_3 + E_2(t-\frac{z_2}{c})\vec e_3\frac{L}{z_2})^2\rangle = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{z_1^2}\langle E_1^2(t-\frac{z_1}{c})\rangle}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{z_2^2}\langle E_2^2(t-\frac{z_2}{c})\rangle}_{I_2} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\frac{2L^2}{z_1 z_2}\langle E_1(t-\frac{z_1}{c})E_2(t-\frac{z_2}{c})\rangle}_{I_{12}}$$

! для стац. проц. $\langle\ \rangle$ не зависит от t

Сдвигаем начало отсчета времени: $t' = t - \frac{z_1}{c} \Rightarrow t - \frac{z_2}{c} = \underbrace{t-\frac{z_1}{c}}_{t'} + \frac{z_1-z_2}{c} = t' + \frac{\Delta z}{c} = t'+\Delta t$

Корреляционная функция 2х полей: $\Gamma^{(0)}_{1,2}(\Delta t) = \langle E_1(t)E_2(t+\Delta t)\rangle$

не зависит от t

$$I = \frac{L^2}{z^2}\left[\Gamma_{1,1}^{(0)}(0)+\Gamma_{2,2}^{(0)}(0)+2\Gamma_{1,2}^{(0)}(\Delta t)\right]$$

• для комплексных полей: $E_1(t) = U_1(t)e^{-i\omega t}$, $E_2(t) = U_2(t)e^{-i\omega t}$, где $U(t)$ - медленно меняющаяся функция $T>>t$

$$\langle Re E_1(t)\, Re E_2(t+\Delta t)\rangle = \left\langle \frac{U_1(t)e^{-i\omega t}+U_1^* e^{i\omega t}}{2}, \frac{U_2(t+\Delta t)e^{-i\omega(t+\Delta t)}+U_2^*(t+\Delta t)e^{i\omega(t+\Delta t)}}{2}\right\rangle$$

$$I = \frac{L^2}{z^2}\left[\frac{\langle|U_1(t)|^2\rangle}{2}+\frac{\langle|U_2(t)|^2\rangle}{2} + Re\langle U_1(t)U_2^*(t+\Delta t)e^{i\omega\Delta t}\rangle\right] =$$

$$= \frac{L^2}{2z^2}\left[\Gamma_{1,1}^{(0)}(0)+\Gamma_{2,2}^{(0)}(0)+2Re(\Gamma_{1,2}^{(0)}(\Delta t))\right]\cdot\frac{\sqrt{\Gamma_{1,1}^{(0)}(0)\,\Gamma_{2,2}^{(0)}(0)}}{\sqrt{\Gamma_{1,1}^{(0)}(0)\,\Gamma_{2,2}^{(0)}(0)}} =$$

$$= \frac{L^2}{2z^2}\left[\Gamma_{1,1}^{(0)}(0)+\Gamma_{2,2}^{(0)}(0)+2\sqrt{\Gamma_{1,1}^{(0)}(0)\Gamma_{2,2}^{(0)}(0)}\cdot Re(\gamma_{1,2}^{(0)}(\Delta t)\right), \text{ где}$$

$$\gamma^{(0)}_{1,2}(\Delta t) = \frac{\langle E_1(t)E_2^*(t+\Delta t)\rangle}{\sqrt{\langle|E_1(t)|^2\rangle\langle|E_2(t)|^2\rangle}} = \frac{\Gamma_{1,2}^{(0)}(\Delta t)}{\sqrt{\Gamma_{1,1}^{(0)}(0)\,\Gamma_{2,2}^{(0)}(0)}} = \frac{\langle U_1(t)U_2^*(t+\Delta t)\rangle e^{i\omega\Delta t}}{\langle|U_1(t)|^2\rangle\langle|U_2(t)|^2\rangle} = \gamma_{1,2}(\Delta t)\cdot e^{i\omega\Delta t}$$

комплекс. ст. когерентности 2х сигналов

комплекс. ст. когерентности амплитуд полей

$$I = \frac{L^2}{2z^2}\left[\Gamma_{1,1}(0)+\Gamma_{2,2}(0)+2\sqrt{\Gamma_{1,1}(0)\Gamma_{2,2}(0)}\,|\gamma_{1,2}(\Delta t)|\cos(\omega\Delta t + \arg\gamma_{1,2}(\Delta t))\right]$$

$$I = I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\left|sinc\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right)\right|\cos(\omega\Delta t \underbrace{}_{+\arg(sinc)})$$ — в схеме Юнга для квазимонохр. точечного источника

вывод: для точечного квазимонохр. источника в схеме Юнга $\gamma_{1,2}(\Delta t) = sinc\left(\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}\right)$

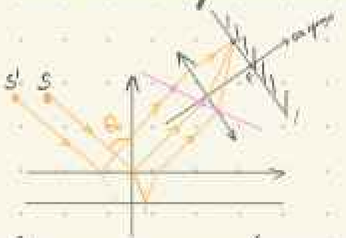
На самом деле в схеме Юнга интерферирует один сигнал, т.е. $\gamma_{1,2}(\Delta t) = \gamma_{1,1}(\Delta t)$

Интерференция в тонких пленках. Локализация интерференционной картины. Полосы равного наклона и равной толщины.

локализованная инт. карт. — видна только в одном полож. экрана

нелокализованная инт. картина — видна во многих положениях экрана

• **линии равного наклона** (лучи падают под одним углом на поверхность)

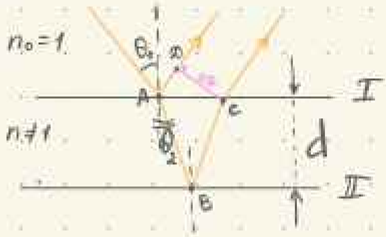


• рассм-м Δz на —, т.к. линза не влияет на Δz

• определим разность хода Δz: $\Delta z = n(|AB|+|BC|) - |AD| + \frac{\lambda}{2} \circleddash$

! картина локализована на ∞

$\cos\theta_2 = \frac{d}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \frac{d}{\cos\theta_2}$, $|AB| = |BC|$



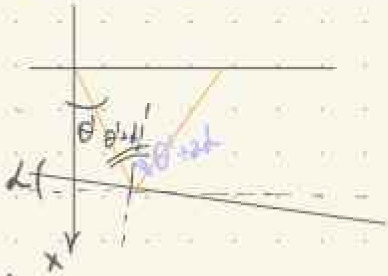
$\sin\theta_0 = \frac{|AD|}{|AC|}$, $|AD| = |AC|\cdot\sin\theta_0 = 2|BK|\sin\theta_0 = 2d\,tg\theta_2\sin\theta_0 = \frac{2d\sin\theta_2\sin\theta_0}{\cos\theta_2}$

$$= \frac{2dn}{\cos\theta_2}\left(1 - \sin\theta_2\underbrace{\frac{\sin\theta_0}{n}}_{\sin\theta_2}\right) + \frac{\lambda}{2} = \frac{2dn\cos^2\theta_2}{\cos\theta_2} + \frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2(1-\sin^2\theta_2)} + \frac{\lambda}{2} =$$
$$= 2d\sqrt{n^2-\sin^2\theta_0} + \frac{\lambda}{2}$$

$I = 2I_0\left(\cos\left(k\cdot 2d\sqrt{n^2-\sin^2\theta_0}\right)+1\right)$ ⇒ вид распределения: вложенные кольца (если линза || пов-ти)

! далее при наклоне линзы: эллипсы, параболы, гиперболы (конические сечения)

• **линии равной толщины** (если у пленки границы не параллельные и не плоские)

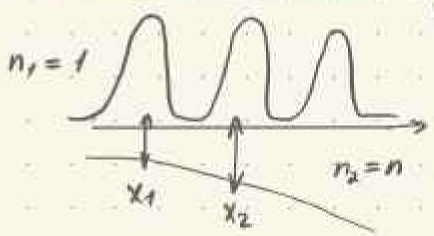


! интер. картина локализована на поверхности

$$\Delta z = n(|AB|+|BC|) - |DC| =$$
$$= n\left(\frac{h(x)}{\cos\theta'} + \frac{h(x)}{\cos(\theta'+2\alpha)}\right) - \left(h(x)\,tg\theta' + h(x)\,tg(\theta'+2\alpha)\right)\sin\theta_0 =$$
$$= \frac{n\cdot h(x)\left[\cos\theta'\cos(\theta'+2\alpha) + 1 - \sin(\theta'+2\alpha)\sin\theta'\right]}{\cos(\theta'+2\alpha)} =$$
$$= n\cdot h(x)\left[\frac{1+\cos(2\theta'+2\alpha)}{\cos(\theta'+2\alpha)}\right]$$ → раскладываем по малости $\alpha \ll 1$: $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\Delta z = n\cdot h(x)\left[\pm 2\cos\theta' + \frac{1+\cos(2\theta'+2\alpha)}{\cos(\theta'+2\alpha)}\right] = \ldots = n\cdot h(x)\left(2\cos\theta' + \frac{2\alpha^2}{\underbrace{\cos(\theta'+2\alpha)}_{\cos\theta'}}\right)$$

пренебрегаем вторым слагаемым: $\Delta z = n\cdot h(x)\cdot 2\cos\theta' \xrightarrow[\theta'=0]{} nh(x)$ → можно использовать для иссл-я толщины пленки

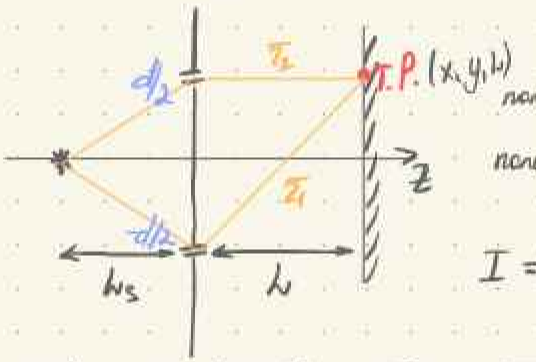


$\theta_0 \approx 0 \Rightarrow \cos\theta' \approx 1$

$2nh(x_1) - 2nh(x_2) = ?$

пример: $\left.\begin{aligned}\Delta z_1 &= 2nh(x_1) + \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 \\ \Delta z_2 &= 2nh(x_2) + \frac{\lambda_0}{2} = (m+1)\lambda_0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta h = \frac{\lambda_0}{2n}$

Продольная и поперечная длина волны на примере схемы Юнга



поле от 1 щели на экране: $\bar{E}_1 = \frac{L}{z_1}\left(\bar{e}_1 \hat{E}_1^{\parallel} + \bar{e}_3 \hat{E}_1^{\perp}\right) e^{ikz_1 - i\omega t}$

поле от 2 щели на экране: $\bar{E}_2 = \frac{L}{z_2}\left(\bar{e}_2 \hat{E}_2^{\parallel} + \bar{e}_3 \hat{E}_2^{\perp}\right) e^{ikz_2 - i\omega t}$,

$$I = \langle (\mathrm{Re}\,\bar{E}_\Sigma, \mathrm{Re}\,\bar{E}_\Sigma^*) \rangle = \overbrace{\frac{|E_1|^2}{2}}^{I_1} + \overbrace{\frac{|E_2|^2}{2}}^{I_2} + \overbrace{\mathrm{Re}(E_1, E_2^*)}^{I_{12}}$$

$$I_\Sigma^{\perp} = \underbrace{\frac{L^2}{2z_1^2} |E_1^{\perp}|^2}_{I_1^2} + I_2^2 + \frac{2\sqrt{I_1^{\perp} I_2^{\perp}}}{L^2 \cdot z_1 z_2} \cdot \cos(k\Delta z + \varphi_\perp), \quad \varphi_\perp = \arg|E_1| - \arg|E_2|$$

$$\Delta z = \frac{(z_1 - z_2)\cdot(z_1 + z_2)}{(z_1 + z_2)} = \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 + z_2} \approx \frac{xd}{L}$$

$$z_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2 + y^2 \qquad z_1^2 - z_2^2 \approx 2xd$$

$$z_2^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2 + y^2 \qquad z_1 + z_2 \approx 2L$$

количественный анализ:

$$\frac{z_2 - z_1}{c} < \frac{1}{d\omega} \Rightarrow I_0 = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \frac{I_0}{\Delta\omega}\, d\omega \Rightarrow dI = \frac{2I_0(1 + \cos(k\Delta z))}{\Delta\omega}\, d\omega$$

$$I_\Sigma = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} 2\frac{I_0}{\Delta\omega}\left(1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{xd}{L}\right)\right) d\omega = 2I_0 + 2I_0 \underbrace{\mathrm{sinc}\left(\overset{\Delta z}{\frac{xd}{cL}} \frac{\Delta\omega}{2}\right)}_{V} \cos\left(\overset{\Delta z}{\frac{xd}{cL}} \omega_0\right)$$

продольная длина когерентности

$$V = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\Delta z}{c}\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L_\parallel = \frac{\pi c}{\Delta\omega} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

— макс. р-р щели, при котором видна интерф. картина

поперечная длина когерентности:

$$\frac{\omega d h}{2cL} = \pi \Rightarrow h = \frac{\lambda L}{d} \Rightarrow d = \frac{\lambda L}{h} = \frac{\lambda}{\theta}$$

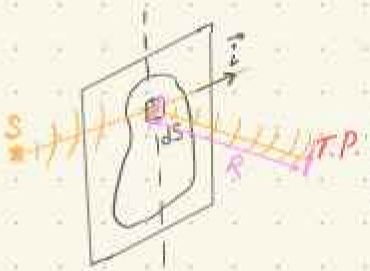
— макс. р-р источников, под которым видна интерф. картина

Дифракция элмг волн. Принцип Гюйгенса–Френеля. Идеализированные ГУ. Интеграл Кирхгофа

опр. дифракция – явление отклонения от прямолинейной траектории луча из-за препятствий, исключая явления отражения и преломления

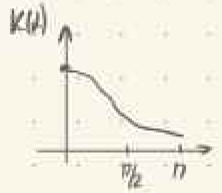
принцип Гюйгенса – Френеля: каждая точка, в которую приходит волна, является источником вторичных волн

Интеграл Кирхгофа – мат. выр-ние принципа Гюйгенса – Френеля



Амплитуда вторичной волны опред-ся параметрами:

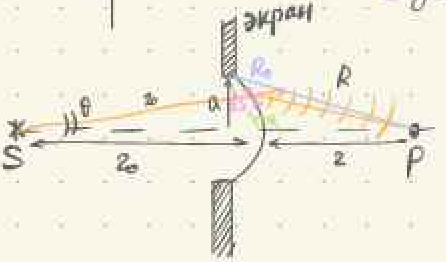
- $\alpha = \bar{i}, \bar{S}$
- $K(\alpha)$ – коэф-т зависимости амплитуды вторичн. волны от α
- электр. поле волны $dE_p \sim dS$
- чтобы сохранить инвариантную площадь при разных формах поверхности, нужно заменить $dS \to dS_n$ – проекция S на напр. ⊥ лучу
- $dE_p = K(\alpha)\cdot dS_n \cdot E_S e^{ikr}\cdot \frac{1}{R}$



dS_n – проекция на перпенд. напр. луча

приближения при построении теории:

1. поле в отверстии опр-ся только источником S, но не гран. усл. и краевой волной
2. экран абсолютно поглощающий и важна только форма отверстия
3. условие излучения на беск-ти: все волны уходят от отверстия



$$dS_n = dS,\quad dS = r_0^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

амплитуда поля на поверх-ти щели

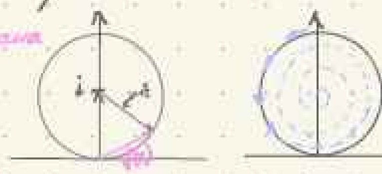
$$E(S) = E_0 \cdot \frac{L}{r} e^{ikr} \Rightarrow [r = r_0,\ L = r_0] = E_0 e^{ikr_0}$$

$$E_p = \int K(\alpha) E_0 e^{ikr_0} \frac{1}{R} r_0^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \left[\begin{array}{l} R^2 = (r_0+z)^2 + r_0^2 - 2(r_0+z) r_0 \cos\theta \\ \sin\theta\, d\theta = (R\,dR)/((r_0+z) r_0) \end{array}\right] \ominus$$

опр: $K(\alpha)$ – коэфф-т, обусловленный догов-тью, что каждая точка является источником втор волн, распростр-ся только в одном направл-нии

$$\ominus\ \frac{2\pi E_0 e^{ikr_0}}{\frac{(r_0+z)}{r_0}} \int_z^{R_0} K(\alpha) e^{ikR} dR = \left[\begin{array}{l} \text{пусть } \alpha \ll 1 \Rightarrow \\ K(\alpha) \approx K(0) \end{array}\right] = \frac{2\pi K(0)}{k} \underbrace{\frac{E_0 e^{ik(r_0+z)}}{(r_0+z)/r_0}}_{\text{поле от источника в т.P без экрана}} \left(\frac{e^{ik(R_0-z)} - 1}{i}\right)$$

рассм-м функцию $f(x) = \dfrac{e^{ix} - 1}{i} = e^{ix - i\pi/2} + i \longrightarrow$



если полн. открыли отверстие: $E_{P_0} = E_P = \frac{2\pi}{k} \cdot E_p\, i K(0) \Rightarrow K(0) = \frac{k}{2\pi i} = -\frac{i}{\lambda}$

$$E_P = \frac{k}{2\pi i} \int h(\theta) E_0 e^{ikr_0} \frac{e^{ikR}}{R} dS_n,$$ где $h(\theta)$ – функция, описывающая поле в отверстии

$$E_P = \frac{k}{2\pi i} \int E(S) \frac{e^{ikR}}{R} \cos\theta\, dS$$

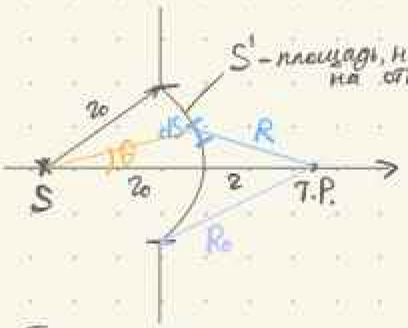
Зоны Френеля. Параметр Френеля. Зонная пластинка.

$P_F = \frac{D^2}{\lambda \cdot z_p} \simeq \frac{D^2}{\rho_1^2}$ – хар-ный размер отверстия $\Rightarrow$ $D \sim \rho_1$ – приближение Френеля
– р-р 1-й зоны Френеля

$$E_P = \frac{k}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \int_z^{R_0} E_0 e^{ikz_0 - 2\omega t} \cdot \frac{e^{ikR - i\omega t}}{R} \frac{z_0^2 R dR \cdot d\varphi}{(z_0+z) z_0} = K(\lambda) E_{P_0} \cdot 2\pi \left[\frac{e^{ik(R_0-z)} - 1}{ik} \right] = \left[k(\lambda) = \frac{k}{2\pi i} \right] =$$

$K(\lambda)$; тут занято $\frac{k\rho^2}{2z}$

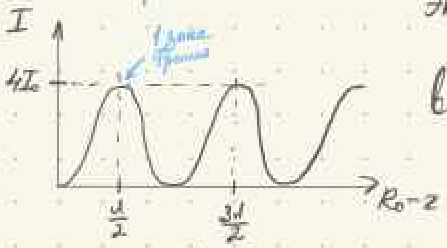
$$\Rightarrow E_P = E_{P_0}\left(1 - e^{ik(R_0 - z)}\right), \quad E_{P_0} = \frac{E_0 e^{ik(z_0+z)}}{(z_0+z)/z_0}$$ – поле в т. P. без экрана



интенсивность в точке P:

$$I_P = \frac{|E_P|^2}{2} = \frac{|E_{P_0}|^2}{2}\left(1 - e^{ik(R_0-z)}\right)\left(1 - e^{-ik(R_0-z)}\right) = \underbrace{\frac{|E_{P_0}|^2}{2}}_{I_0}\left(2 - 2\cos(k(R_0 - z))\right)$$

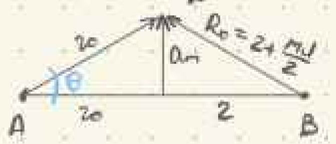
$$= 4 I_0 \sin^2\left(\frac{k(R_0 - z)}{2}\right)$$



экстремумы интенсив.: $\frac{k(R_0 - z)}{2} = \frac{\pi m}{2}$, $m = 1..$ $\Rightarrow R_0 = \frac{m\lambda}{2} + z$

выразим a_m – радиус зоны Фр.: $\left(z + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 = z_0^2 + (z_0+z)^2 - 2z_0(z_0+z)\cos\theta$

$$z^2 + m\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} = z_0^2 + z_0^2 + 2z_0 z + z^2 - 2z_0(z_0+z)\cos\theta$$



$$z^2 + m\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} = z_0^2 + z_0^2 + 2z_0 z + z^2 - 2z_0(z_0+z)\left(1 - \frac{a_m^2}{2z_0}\right) \Rightarrow a_m = \sqrt{\frac{m\lambda z_0 z}{z_0 + z}}$$

(слагаемое $\frac{m^2\lambda^2}{4} \to 0$)

для плоской волны: $a_m = \sqrt{m\lambda z}$

! р-во площадей зон Френеля: $S_{m+1} = \pi(a_{m+1}^2 - a_m^2) = \pi z\lambda$

- зонная пластинка

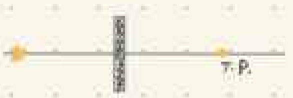
пусть открыты четные зоны Френеля $\Rightarrow I = 4I_0 l^2$, l – кол-во откр. зон
следоват-но, пластинка работает как линза;

$$a_m^2 = \frac{\lambda m a b}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{a_m^2}{\lambda m}$$

- чтобы не терять интенсивность от закрытых зон ставят диэлектр.
  $d(n-1)k = \varphi$ $\Rightarrow$ набег фазы на π $\Rightarrow$ эл. поле сменит знак
- у зонной пластинки есть несколько фокусов:
  если т.P' взять на расст. T.P/3 $\Rightarrow$ для этой точки будет 3 зоны

$I_{P'} = (2E_0 + 2E_0 + 2E_0) = 4I_0(3)^2$, но немного меньше из-за коэфф-та $K(\lambda)$

- принцип Бабине



$$E_P = \frac{k}{2\pi i} \int_a^{4\pi} E_0 e^{ikz_0} \frac{e^{ikR}}{R} \cos\theta \, dS = \int_0^{\infty} - \int_0^{a} = E_{P_0} - E_{P_0}\left(1 - e^{ik(R_0 - z)}\right) = E_g$$

$\int_0^\infty = E_{P_0}$; будет смотреть E через доп. отвер.

$\bar{E}_g + \bar{E}_{отв} = \bar{E}_{P_0}$ – принцип Бабине

$I_P = E_g \cdot E_g^* = I_{P_0}$ $\Rightarrow$ получили светлое пятно за темным диском – пятно Пуассона

$$E_p = \frac{k}{2\pi i}\int E(S)\frac{e^{ikR}}{R}\cos\theta\, dS,\quad k=\frac{2\pi}{\lambda} \gg 1$$

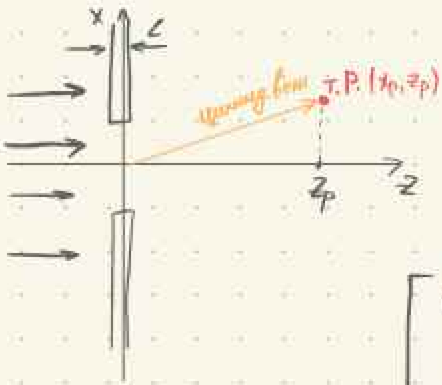
приближение:

$$R=\sqrt{z_p^2+(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} \approx \left(1+\frac{(x-x_p)^2}{2z_p^2}+\frac{(y-y_p)^2}{2z_p^2}\right)z_p$$

$z_p \gg x, y \sim D$ – характ. р-р отверстия

$$E_p=\frac{k}{2\pi i}\frac{1}{z_p}\int E(S)\, e^{ikz_p}\cdot e^{ik\left(\frac{(x-x_p)^2}{2z_p}+\frac{(y-y_p)^2}{2z_p}\right)}\cos\theta\, dS$$ – интеграл в приближ. Френеля

$$\frac{x^2-2xx_p+x_p^2}{2z_p}=\frac{x^2}{2z_p}-\frac{xx_p}{z_p}+\frac{x_p^2}{2z_p} \Rightarrow$$ вводят $p_F=\frac{D^2}{2z_p}$ – пар-р Френеля



$$R=z_p+\frac{(x-x_p)^2}{2z_p}+\frac{y^2}{2z_p} \Rightarrow$$

$$E_p=\sqrt{\frac{k}{2\pi i}}\int_0^l E_0\frac{1}{\sqrt{z_p}}e^{ik\left(z_p+\frac{(x-x_p)^2}{z_p}\right)}\cos\theta\, dx$$

замена: $\frac{k(x-x_p)^2}{2z_p}=\frac{\pi v^2}{2}$; $v=(x-x_p)\frac{1}{\sqrt{z_p\cdot\pi/2}}$,

$\xi_p=\frac{x}{\sqrt{z_p\pi/2}}$, $\xi_l=\frac{l}{\sqrt{z_p\pi/2}} \Rightarrow$ $x=\xi_p\sqrt{z_p\pi/2}$, $l=\xi_l\sqrt{z_p\pi/2}$ $\Rightarrow$ тогда

$$=z_p\frac{\pi}{2}\int_{-\xi_p}^{\xi_l-\xi_p}\left(e^{i\pi/2 v^2}dv\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{i}}\frac{1}{\sqrt{z_p}}E_0 e^{ikz_p}=\frac{E_0 e^{ikz_p}}{\sqrt{2i}}\left(\underbrace{\int_0^{\xi_p}e^{i\pi/2 v^2}dv}_{\mathcal{I}(\xi)}+\int_0^{\xi_l-\xi_p}e^{i\pi/2 v^2}dv\right)$$

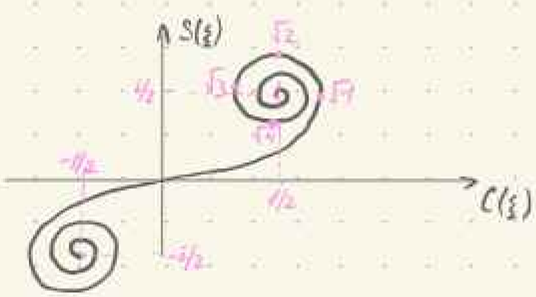
$$\mathcal{I}(\xi)=\int_0^{\xi}\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv+i\int_0^{\xi}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv$$

$$x>5:\quad \left.\begin{matrix}C(x)\\ S(x)\end{matrix}\right\}=0{,}5\pm\frac{0{,}318}{x}\cdot\left\{\begin{matrix}\sin\pi/2\, x^2\\ \cos\pi/2\, x^2\end{matrix}\right.$$

возьмем $x_p=l/2 \Rightarrow$

$$E_p=\frac{E_0e^{ikz_p}}{\sqrt{2i}}\cdot 2\int_0^{\xi_l/2}e^{i\pi/2 v^2}dv=\frac{E_0e^{ikz_p}}{\sqrt{2i}}\cdot 2\int_0^{\infty}e^{i\pi/2 v^2}dv=$$

$$=\left[\begin{matrix}\xi_l-\xi_p\mapsto\infty\\ x_p<l/2\end{matrix}\right]=\frac{E_0e^{ikz_p}}{\sqrt{2i}}\left(\frac{1+i}{2}+\underbrace{\int_0^{\xi_p}\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv}_{C(\xi)}+i\underbrace{\int_0^{\xi_p}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv}_{S(\xi)}\right)$$

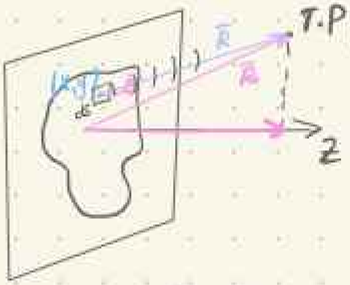


$$\int_0^x e^{i\pi/2 x^2}dx=\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N-1}\Delta x\, e^{i\pi/2(\Delta x m)^2}$$

$$(\Delta x)^2(-(m+1)^2+m^2)=\Delta x^2(2m+1)$$

Приближение Фрагофера. Дифракция Фраунгофера на прямоугольной щели

дифракция Фраунгофера: $p_Y \ll 1 = \frac{D^2}{\lambda z_p}$ (дальняя зона)



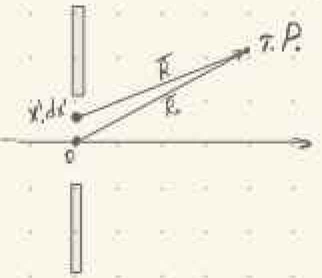
т.Р (x_p, y_p, z_p) $R = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + z_p^2} = \sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{R_0^2} - 2x_p x - 2y_p y + x'^2 + y'^2} \approx$

$$\approx R_0\left(1 - \frac{x_p x}{R_0^2} - \frac{y_p y}{R_0^2} + O\left(\frac{x'^2 + y'^2}{R_0^2}\right)\right) = R_0 - \frac{x_p x}{R_0} - \frac{y_p y}{R_0} + O\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

$k_x = k\frac{x_p}{R_0}$, $k_y = k\frac{y_p}{R_0}$, $x^2 + y^2 = d^2$ (р-р щели)

$$E_p(x,y,z) = \frac{k}{2\pi i}\iint E(x,y,0)\frac{e^{ikR}}{R}\,dS\cos\theta \approx \frac{k}{iR_0}e^{ikR_0}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\iint dx\,dy\,E(x,y,0)\,e^{-ik_x x - ik_y y}}_{=\hat{E}(k_x,k_y)}\cos\theta$$

• если щель в одном из напр-ний имеет бесконечный р-р:

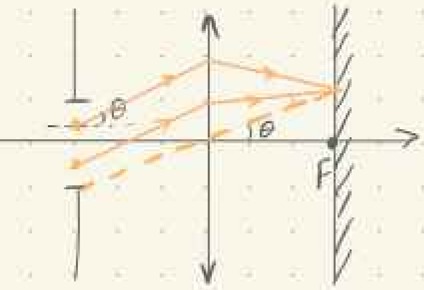


цилиндр. волны $E \sim \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}}$

$$E_p(x,z) \sim \sqrt{\frac{k}{2\pi i}}\int E(x)\frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}}\,dx\cos\theta = \left[p_Y = \frac{d^2}{\lambda R_0} \ll 1\right] \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{k}{iR_0}}\,e^{ikR_0}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int E(x)\,e^{-ik_x x}\,dx}_{\text{Фурье образ поля в щели}}\cos\theta$$

• для наблюдения дифр. Фраунгофера используют линзы:

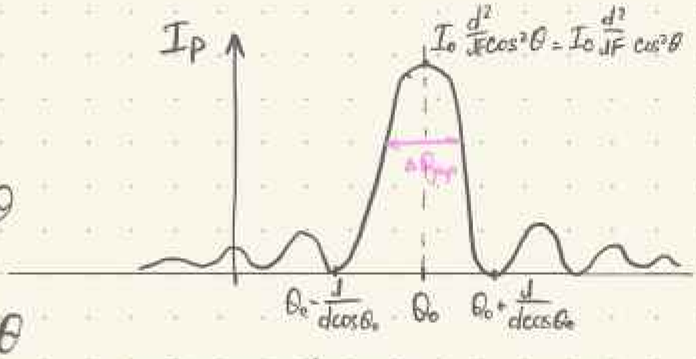


$$E_p(\theta) = \sqrt{\frac{k}{iF}}\,e^{ikF}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int E(x)\,e^{ik\sin\theta x}\,dx\cos\theta$$

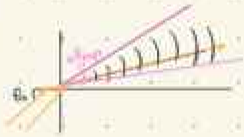
• распределение интенсивности

$$E_p = \frac{\sqrt{k}}{2\pi iF}e^{ikF}E_0 d\,\mathrm{sinc}\left(\frac{kd}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)\right)\cos\theta$$

$$I_p = \frac{|E_p|^2}{2} = I_0\frac{d^2}{\lambda F}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{kd}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)\right)\cos^2\theta, \quad I_0 = \frac{|E_0|^2}{2}$$



$$\Delta\theta_{диф} \approx \frac{\lambda}{d\cos\theta_0}$$

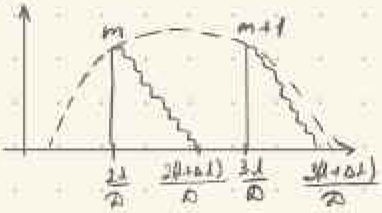


Дифракционная решетка как спектральный прибор(фазовые решетки)

1) угловая дисперсия $\frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{D} = \frac{\theta_m}{\lambda}$ (не зависит от параметров решетки)

(диапазон углов, в котором различимы порядки разных длин волн)

2) область свободной дисперсии



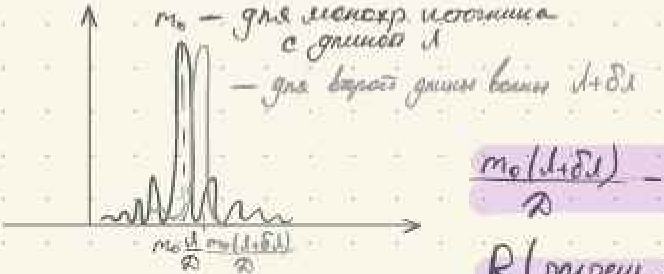
$m_0 = \left[\frac{\theta_0}{\lambda/D}\right]$ – целая часть

какова $\Delta\lambda_{max}$, когда еще нет перекрытия разных порядков интерференции?

$\frac{m(\lambda+\Delta\lambda_{max})}{D} = \frac{(m+1)\lambda}{D} \Rightarrow \Delta\lambda_{max} = \frac{\lambda}{m}$ – порядок интерференции, в котором рассм-ся дифракция

3) разрешающая способность

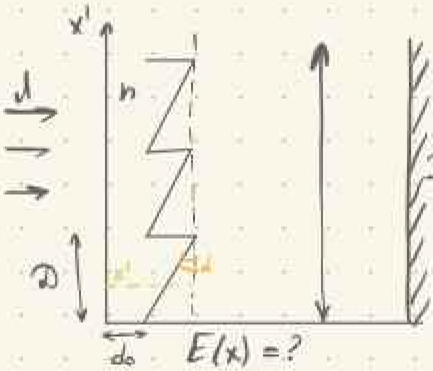
критерий Релея: линии различимы, если максимум одной линии лежит не ближе первого минимума соседней линии



$\frac{m_0(\lambda+\delta\lambda)}{D} - \frac{m_0\lambda}{D} \geq \delta\theta_{min} = \frac{\lambda}{DN} \Rightarrow \frac{m_0\delta\lambda}{D} \geq \frac{\lambda}{DN} \Rightarrow \delta\lambda \geq \frac{\lambda}{Nm_0}$

R (разреш. спос. решетки): $\frac{\lambda}{\delta\lambda_{min}} = \frac{\lambda}{\lambda/Nm_0} = Nm_0 \sim 10^5 \sim 10^6$

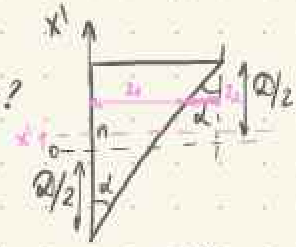
Фазовые дифракционные решетки и их преимущества



$E(x) = ?$

$I_p(\theta) = ?$

оптическая длина пути $\Delta = nd_0 + \underbrace{n\left(\frac{D}{2}+x'\right)\alpha}_{z_1} + \underbrace{\left(\frac{D}{2}-x'\right)\alpha}_{z_2} \ominus$



(локальная СК)

$tg\,\alpha \approx \alpha = z_1' / \left(\frac{D}{2}+x'\right) \Rightarrow z_1 = n\alpha\left(\frac{D}{2}+x'\right)$

$tg\,\alpha \approx \alpha = z_2' / \left(\frac{D}{2}-x'\right) \Rightarrow z_2 = n\left(\frac{D}{2}-x'\right)$

$\ominus\ nd_0 + (n+1)\alpha\frac{D}{2} + (n-1)\alpha x'$

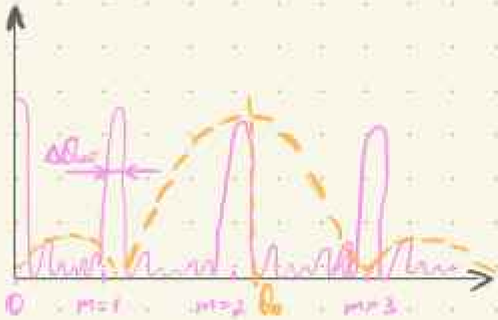
$$E_p(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\lambda i F}}\, E_0 e^{ikF} \sum_{m=1}^{N} \int_{-D/2}^{D/2} e^{ik(n-1)\alpha x' + ik\left[(n+1)\alpha\frac{D}{2} + nd_0\right]} \cdot e^{-ik\sin\theta \underbrace{\left(D/2 + x' + (m-1)D\right)}_{\text{глобальная координата}}} \cos\theta\, dx' =$$

$$E_p(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\lambda i F}}\, e^{ikF} E_0 \sum_{m=1}^{N} e^{-ik\sin\theta(m-1)D}\left[\int e^{ik((n-1)\alpha - \sin\theta)x'}\right] \cos\theta\, e^{ik\psi_0 - ik\sin\theta D/2} =$$

$$I_p(\theta) = \frac{I_0 D^2}{\lambda F}\, \mathrm{sinc}^2\left(((n-1)\alpha - \sin\theta)\frac{kD}{2}\right) \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{kD}{2}\sin\theta\, N\right)}{\sin^2\left(\frac{kD}{2}\sin\theta\right)} \cdot \cos^2\theta$$

$\frac{\sin^2 Nx}{\sin^2 x}$ – интерф. мн-ль

имеет максимум $\sin\theta_0 = \theta_0 = \alpha(n-1)$
обращается в 0 sinc
в т. $\theta_0 + \Delta\theta$, $\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D}$



главные макс-мы:

$\frac{kD}{2}\sin\theta_m = m\pi \Rightarrow \sin\theta_m \approx \theta_m = \frac{m\lambda}{D}$

$\Delta\theta_{инт} \approx \frac{\lambda}{DN}$

преимущества:

Основные типы интерферометров. Интерферометр Фабри—Перо

1. интерферометр Фабри-Перо

$$S_N = b_1\frac{1-q^N}{1-q}$$

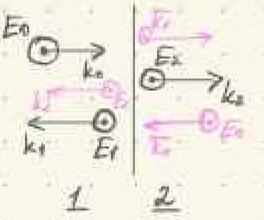
$$q = r_{21}r_{23}e^{i\delta}$$

т.к. $|q|<1 \Rightarrow q^N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

$$E_{отр} = E_0\left(r_{12} + t_{12}t_{21}r_{23}e^{i\delta}\left(1 + r_{21}r_{23}e^{i\delta} + (r_{21}r_{23})^2e^{2i\delta} + \ldots\right)\right)$$

$$E_{отр} = E_0\left(r_{12} + \frac{t_{12}t_{21}r_{23}e^{i\delta}}{1 - r_{21}r_{23}e^{i\delta}}\right) \quad (*)$$

① соотн. между t и r (TE-волна)



$$\{E_\tau\}|_\Gamma = 0$$

$1 \to 2$: $E_0 + E_1 = E_2 \,|: E_0 \Rightarrow 1 + r_{12} = t_{12}$

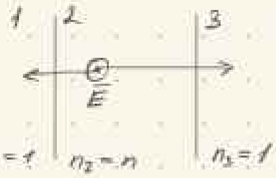
$2 \to 1$: $E_0 + E_1 = E_2 \,|: E_0 \Rightarrow 1 + r_{21} = t_{21}$

$$r_{12} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}, \quad r_{21} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \Rightarrow r_{21} = -r_{12} \Rightarrow t_{21}\cdot t_{12} = 1 - r_{12}^2$$

$$E_{отр} = E_0\left(r_{12} + \frac{(1 - r_{12}^2)r_{23}e^{i\delta}}{1 + r_{12}r_{23}e^{i\delta}}\right)$$

$$I_{отр} = \frac{|E_0|^2}{2}\left(r_{12} + \frac{(1-r_{12}^2)r_{23}e^{i\delta}}{1 + r_{12}r_{23}e^{i\delta}}\right)\left(r_{12} + \frac{(1-r_{12}^2)r_{23}e^{-i\delta}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-i\delta}}\right) = \ldots = \frac{|E_0|^2}{2}\left[\frac{r_{12}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\delta + r_{23}^2}{1 + 2r_{12}r_{23}\cos\delta + r_{12}^2r_{23}^2}\right] \ominus$$

② связь между r_{12} и r_{23}:



$2 \to 1$: $E_0 + E_1 = E_2 \,|: E_0$
$1 + r_{21} = t_{21}$ $\Rightarrow t_{21} = t_{23}$, т.к. $n_1 = n_3$

$2 \to 3$: $E_0 + E_1 = E_2 \,|: E$
$1 + r_{23} = t_{23}$ $\Rightarrow r_{21} = r_{23} = -r_{12}$

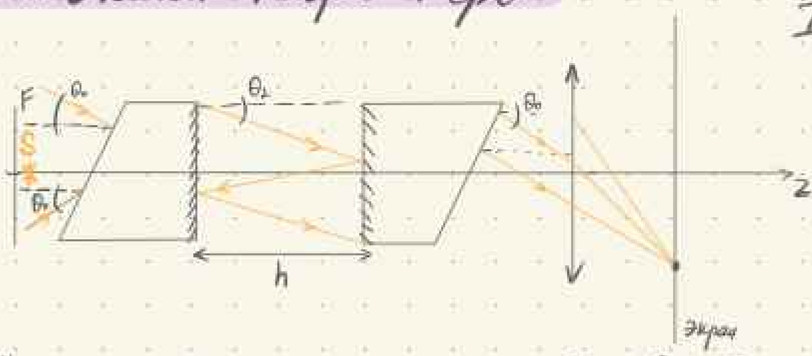
$$\ominus \frac{|E_0|^2}{2}\left[\frac{2r_{12}^2 - 2r_{12}^2\cos\delta}{1 - 2r_{12}^2\cos\delta + r_{12}^4}\right]$$

$$I_{пр} = I_0 - I_{отр} = I_0\left(\frac{(1-r_{12}^2)^2}{(1-r_{12}^2)^2 + 4r_{12}^2\sin^2(\delta/2)}\right)$$

через функцию Эйри: $I_{пр} = \dfrac{I_0}{1 + \dfrac{4R\sin^2(\delta/2)}{(1-R)^2}}$ $\quad I_{отр} = \dfrac{I_0}{1 + \dfrac{(1-R)^2}{4R\sin^2(\delta/2)}}$

$\left(\delta = 2kdn\cos\theta_2 = 2kd\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}\right)$

2. Эталон Фабри-Перо



$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\delta/2)}, \text{ где } \delta = 2kh\sqrt{1 - \sin^2\theta_2},$$

а) $kh\cos\theta_{m_0} = \pi m_0 \Rightarrow m_0 = \dfrac{kh}{\pi} = \dfrac{2\pi h}{\lambda\pi} = \dfrac{2h}{\lambda}$

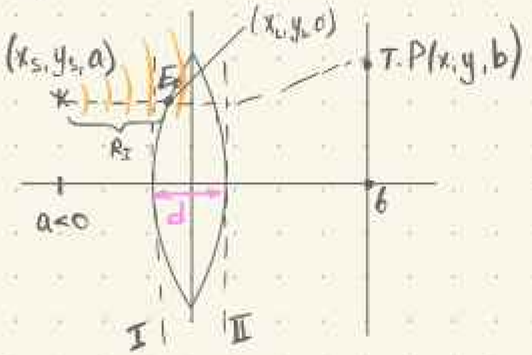
(макс. порядок интерф. картины)

б) $\cos\theta_m = \pi m/kh = m/m_0$

в) характ. угловое расст. между max: $\theta_{m-1} = \theta_m + \Delta\theta_m \Rightarrow \Delta\theta_m = 1/\sqrt{m_0^2 - m^2}$

г) ищем угловую ширину на полувысоте: $\dfrac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(m\pi\cos(\theta_m + \delta\theta_m)\right) = 1 \Rightarrow \delta\theta_m = \dfrac{(1-R)}{2\sqrt{R}}\cdot\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{m_0^2 - m^2}}$

применим принцип Г-Ф к построению изображения точечного ист. в линзе



$$E_I(x_1, y_1, 0) = E_0 e^{ikR_I}$$

$$E_{II} = E_I e^{ik\left(nd - \frac{z^2}{2F_n}\right)} = E_0 e^{ik\left(-a - \frac{(x_s - x_L)^2 + (y_s - y_L)^2}{2a} + nd - \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F_n}\right)}$$

$$R_I = \sqrt{a^2 + (x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2} = \frac{|a| + (x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}{2|a|}$$

$$R_{II} = \sqrt{b^2 + (x - x_L)^2 + (y - y_L)^2} \approx b + \frac{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2}{2b}$$

$$E_P(x, y, b) = \frac{k}{2\pi i} \int E_{II}(x_L, y_L) \frac{e^{ikR_{II}}}{\underset{= b}{R_{II}}} \overset{dx_L dy_L}{dS} \cos\theta \Rightarrow \text{подставить } E_{II}$$

пусть линза прямоуг. с р-ми D_x и D_y:

$$\int_{-D_x/2}^{D_x/2} dx_L \exp\left(ik\left[-\frac{1}{2a}(x_s^2 + x_L^2 - 2x_s x_L) - \frac{x_L^2}{2F_n} + \frac{x^2 + x_L^2 - 2x x_L}{2b}\right]\right)$$

$$[\ \ ] = x_L^2\left(-\frac{1}{2a} - \frac{1}{2F_n} + \frac{1}{2b}\right) + x_L\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2a}x_s^2 + \frac{x^2}{2b}$$

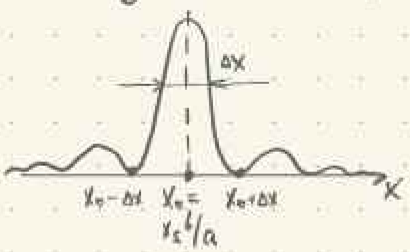
$\Rightarrow$ если a, b - сопряж-е, тогда $\frac{1}{a} + \frac{1}{F_n} = \frac{1}{b}$

$$\int_{-D_x/2}^{D_x/2} e^{ik\left(\frac{x^2}{2b} - \frac{x_s^2}{2a}\right)} e^{ik\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x}{b}\right)x_L} dx_L = e^{ik\left(\frac{x^2}{2b} - \frac{x_s^2}{2a}\right)} \frac{\sin\left(k\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x}{b}\right)\frac{D_x}{2}\right)}{k\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x}{b}\right)\frac{D_x}{2}} \cdot \frac{2D_x}{2}$$

$$E_P(x, y, b) = \frac{k}{2\pi i b} e^{ik\left(|a| + \frac{x_s^2}{2|a|} + \frac{y_s^2}{2|a|} + nd + b + \frac{x^2 + y^2}{2b}\right)} D_x D_y \operatorname{sinc}\left(\frac{kD_x}{2}\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x}{b}\right)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kD_y}{2}\left(\frac{y_s}{a} - \frac{y}{b}\right)\right)$$

$$I_P = \frac{|E_P|^2}{2} = \frac{D_x^2 D_y^2}{\lambda^2 b^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kD_x}{2}\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x}{b}\right)\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kD_y}{2}\left(\frac{y_s}{a} - \frac{y}{b}\right)\right)$$

анализ: макс-м I_P в т.: 1) $x_0 = x_s \frac{b\,(>0)}{a\,(<0)}$



$$\frac{kD_x}{2}\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x_0 + \Delta x}{b}\right) = \pm\pi \Rightarrow \Delta x = \mp\frac{2\pi b}{kD_x} = \frac{\lambda b}{D_x} = (\theta_{диф})_x b$$

2) $y_0 = y_s b/a$

$$\Delta y = \frac{\lambda}{D_y} b = (\theta_{диф})_y b$$

$$kR = k\underset{z \gg D}{\sqrt{z^2 + D^2}} = k\left(z + \underbrace{\frac{D^2}{2z}}_{\text{[illegible]}} + \underbrace{O\left(\frac{D^4}{z^3}\right)}_{\text{[illegible]}}\right)$$

необходимо $\frac{D}{z} \ll \frac{1}{\sqrt{p\varphi}}$, но это не так потому что достаточно взять линзу $D \sim 20$ зон Френеля, чтобы она достаточно хорошо сделала изображение: $D \sim \sqrt{20\lambda z}$

опыт Аббе-Портера:

(картинка опыта)

в плоскости $z = F$ выполнены условия дифракции Фраунгофера $\left(\frac{D^2}{\lambda z} \ll 1\right)$

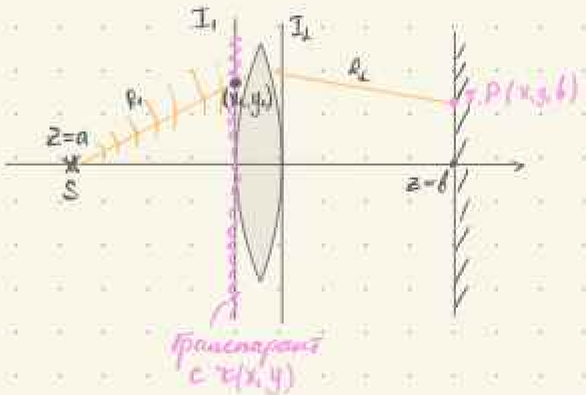
$$\Rightarrow E(x, y, F) = \frac{k}{2\pi i F} e^{ikF} \iint E_s(x_s, y_s, a) e^{-ik\frac{x}{F} - ik\frac{y}{F}} dx_s dy_s$$

$$I(x, y, F)_{фраунг} = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\underbrace{\frac{kd}{2}\sin\theta}_{k\sin\theta = k_x}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{kD}{2}\sin\theta N\right)}{\sin^2\left(\frac{kD}{2}\sin\theta\right)} \cos^2\theta$$

$$E(x, y, F) = E_0 e \operatorname{sinc}\left(k_x \frac{d}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{k_x}{2} DN\right)}{\sin\left(\frac{k_x}{2} D\right)}$$

$$\tau(x_s, y_s) = \tau_x(x_s)\tau_y(y_s) \Rightarrow E(x, y, F) \sim \hat{\tau}_x(k_x)\hat{\tau}_y(k_y)$$

Линза как Фурье анализатор. Голография Френеля.



$$R_1=\sqrt{a^2+x_L^2+y_L^2}\simeq|a|+\frac{x_L^2+y_L^2}{2|a|};\quad R_2=\sqrt{b^2+(x-x_L)^2+(y-y_L)^2}=b+\frac{(x-x_L)^2+(y-y_L)^2}{2b}$$

$$E_I=\tau(x_L,y_L)E_0e^{ikR_1}=\tau(x,y)E_0e^{ik\left(|a|+\frac{x_L^2+y_L^2}{2|a|}\right)}$$

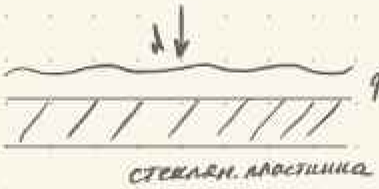
$$E_{II}=E_I\,e^{ik\left(nd-\frac{x_L^2+y_L^2}{2F}\right)}$$

(если $D_{линзы}\gg\sqrt{\lambda a\lambda b}$)

$$E_P(x,y,b)=\frac{k}{2\pi i}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_Ldy_L\,\tau(x_L,y_L)E_0e^{ik\left(|a|+\frac{x_L^2+y_L^2}{2|a|}\right)}e^{ik\left(nd-\frac{x_L^2+y_L^2}{2F}\right)}e^{ik\left(b+\frac{(x-x_L)^2+(y-y_L)^2}{2b}\right)}\underbrace{\cos\theta}_{\approx 1}$$

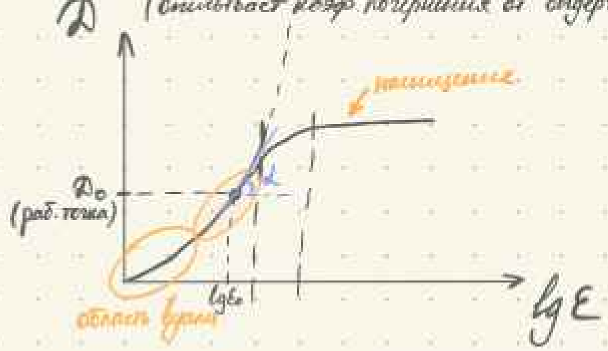
$$E_P=\frac{k}{ib}E_0e^{ik\left(|a|+b+\frac{x^2+y^2}{2b}\right)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\iint\tau(x_L,y_L)\,e^{-ik\frac{x}{b}x_L}e^{-ik\frac{y}{b}y_L}dx_Ldy_L}_{\text{фурье образ } \tau(x,y)},\ \text{если}\ \frac{1}{a}+\frac{1}{F}=\frac{1}{b}$$

опр: голография – результат интерференции опорной и предметной волны



$AgBr + h\nu \rightarrow \underbrace{Ag^+}_{\text{почернение}} + Br^-$

кривая Хертера-Дриффельда:
(описывает коэф. почернения от выдержки)



D – коэфф. или f-я почернения фотоэмульсии

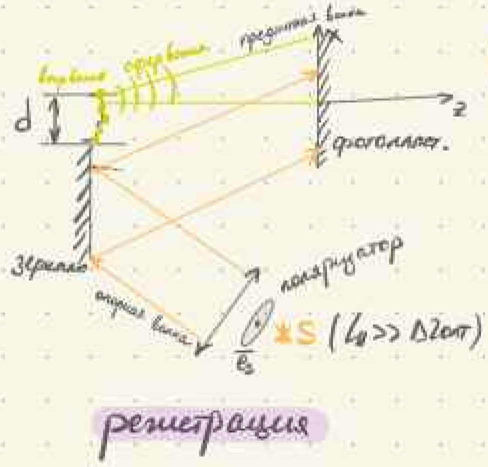
$E = I\cdot\Delta t$ – величина экспозиции
└ время экспозиции

$D = \lg|\tau|^2$, где τ – коэфф-т пропускания ⇒ $|\tau|=1 \Rightarrow D=0$ – почернения нет и пластина прозрачная
$|\tau|\to 0 \Rightarrow D\to\infty$ – все черное

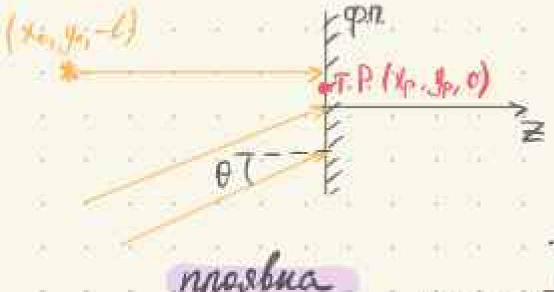
$\operatorname{tg}\alpha=\Gamma$ – величина контрастности

работаем на лин. участке: $D=-\lg|\tau|^2=D_0+\Gamma\cdot\lg\frac{E}{E_0} \Rightarrow \frac{1}{|\tau|^2}=10^{D_0}\cdot\frac{E}{E_0}=10^{D_0}\left(\frac{I}{I_0}\right)^{\Gamma}$

$$|\tau|=\frac{10^{-\frac{D_0}{2}}}{\left(I/I_0\right)^{\Gamma/2}}=\frac{\tau_0}{\left(I/I_0\right)^{\Gamma/2}},\ \text{где}\ \tau_0=10^{-D_0/2}$$

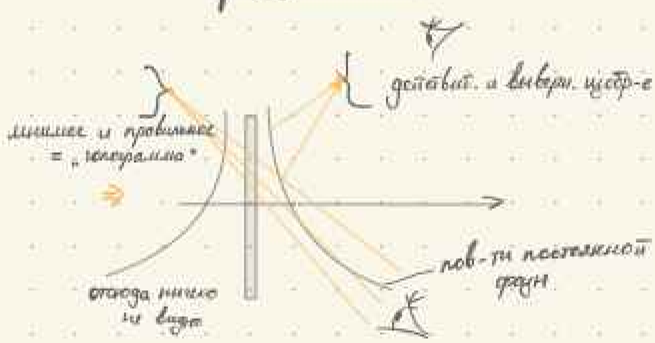


регистрация



проявка

результат



Преобразования Лрренца. 4х векторы и 4х тензоры. Геометрия пространства времени. Метрический тензор.

преобразования Лоренца:

прямое

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

и

обратное

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

опр: 4-х в-р – такие 4^x величины (x^0, x^1, x^2, x^3), которые преобразовываются при переходе из ИСО$_1$ → ИСО$_2$ так, как компоненты 4^x вектора события:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^i_{\cdot k}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^{i'} = \Lambda^i_{\cdot k} x^k$$

номер строки

номер столбца

правила понижения и повышения индексов $x^i = g^{ik} x_k$ – повышение

$x_i = g_{ik} x^k$ – понижение

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_0 = x^0 \\ x_1 = -x^1 \\ x_2 = -x^2 \\ x_3 = -x^3 \end{matrix}$$

опр: 4^x тензор 2-го ранга A^{ik} составляет совокупность 16 упорядоченных эл-тов, которые преобр-ся как произв. координаты $x^i x^k$

$$a'^i b'^k = \Lambda^i_{\cdot n} a^n \Lambda^m_{\cdot k} b^m = \Lambda^i_{\cdot n} \Lambda^m_{\cdot k} a^n b^m$$

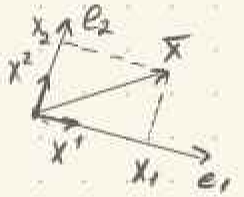
$$F'^{ik} = \Lambda^i_{\cdot n} \Lambda^k_{\cdot m} F^{nm};$$

$$F^{ik} = \bar{\Lambda}^i_{\cdot n} \bar{\Lambda}^k_{\cdot m} F'^{nm}$$

в пространстве $(ct, \bar{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ можно выделить 4^x базис. в-ра

$\Rightarrow \forall\, 4^x$ вектор: $x = e_0 x^0 + e_1 x^1 + e_2 x^2 + e_3 x^3$; $(e_i, e_k) = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ – метрический тензор

пусть $OP = e_i x^i_P$, $OQ = e_i x^i_Q$ $\Rightarrow (PQ, PQ) = \left(e_i(x^i_P - x^i_Q), e_k(x^k_P - x^k_Q)\right) = g_{ik}(x^i_P - x^i_Q)$



$$\bar{x} = \sum_i e_i x^i$$

$$(\bar{x}, \bar{x}) = \left(\sum_i \bar{e}_i x^i, \sum_j \bar{e}_j x^j\right) = (\bar{e}_i \bar{e}_j) x^i x^j = g_{ij} x^i x^j$$

опр: инвариант $S^2 = c^2(t_P - t_Q)^2 - (x_P - x_Q)^2 - (y_P - y_Q)^2 - (z_P - z_Q)^2$

Преобразования ковариантных и контрвариантных 4х тензоров. Эффект Доплера

$$(x,x) = (e_i x^i, e_k x^k) = g_{ik} x^i x^k = x_i x^k$$

контрвариантный

ковариантный

$x'^i = \Lambda^i_{\cdot k} x^k$

$x'_i = \Lambda^k_{i \cdot} x_k$

⊕ правила понижения и повышения индексов

$x^i = g^{ik} x_k$ – повышение

$x_i = g_{ik} x^k$ – понижение

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_0 &= x^0 \\ x_1 &= -x^1 \\ x_2 &= -x^2 \\ x_3 &= -x^3 \end{aligned}$$

Эффект Доплера:

$$E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}) - i\omega t} = E_0 e^{i\varphi} \Rightarrow \frac{c\omega t}{c} - (\vec{k}\cdot\vec{r}) = inv \Rightarrow k_i x^i = k_i x^i = inv$$

$$k_i x^i = inv \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\omega}{c}, -k_x, -k_y, -k_z\right)}_{k_i}(ct, x, y, z) = inv \Rightarrow k^i = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\omega'}{c} = \gamma \frac{\omega}{c}(1 - \beta\cos\theta)$$

$\omega' = \omega_{кр}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ – (прод. эффект Доплера) $\Rightarrow$

- если k и k' навстречу к друг другу $\Rightarrow \omega' = \omega_{кр}\sqrt{1+\beta} > \omega_{кр}$, т.е. частота $\omega\uparrow$, длина волн $\lambda\downarrow$ – синий сдвиг
- если k и k' расходятся, то $\omega\downarrow$, а $\lambda\uparrow$ – красный сдвиг

$\omega' = \omega_0\sqrt{1-\beta^2} < \omega_0$ – поперечный эффект Доплера

4х вектор плотности тока и 4х вектор потенциала. Калибровка потенциалов

4х вектор плотности тока j^i: ур-ние непр-ти (закон сохранения заряда)

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t\cdot c}+\operatorname{div}\bar{j}=0 \Rightarrow \frac{\partial \rho c}{\partial x^0}+\frac{\partial j_x}{\partial x^1}+\frac{\partial j_y}{\partial x^2}+\frac{\partial j_z}{\partial x^3}=0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\begin{pmatrix}\rho c\\ j_x\\ j_y\\ j_z\end{pmatrix}}_{\partial_i j^i=0}=0$$

4х-скаляр

$$j^i=(\rho c,\bar{j})=(\rho c, j^1, j^2, j^3)$$

$$\operatorname{div}\bar{B}=0 \Rightarrow \bar{B}=\operatorname{rot}\bar{A} \Rightarrow \bar{A}^{\text{новый}}=\bar{A}-\nabla f(\bar{r},t)$$

произвольная скалярная функция

$$\operatorname{rot}\bar{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\bar{A})=\operatorname{rot}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \bar{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$$

скалярный потенциал

чтобы эл. поле оставалось неизменным:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}-\nabla\varphi=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{A}^{\text{нов}}+\nabla f(\bar{r},t)\right)-\nabla\underbrace{(\varphi^{\text{нов}}+\delta)}_{\varphi}$$

$$\varphi=\varphi^{н}+\delta=\varphi^{н}-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\bar{A}^{н}=\bar{A}-\nabla f\\ \varphi^{н}=\varphi+1/c\,\partial f/\partial t\end{matrix}\right\}$$ калибровочная инвар-ть

Виды калибровок:

1) $\varphi^{н}=0 \Rightarrow f=-c\int_{-\infty}^{t}\varphi(\bar{r},t')dt'$

ур-ние Пуассона

2) кулоновская калибровка: $\operatorname{div}\bar{A}^{н}=0 \Rightarrow \operatorname{div}(\bar{A},\nabla f)=0 \Rightarrow \Delta f=\operatorname{div}\bar{A}$

3) лоренцовская калибровка: $\operatorname{div}\bar{A}^{н}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi^{н}}{\partial t}=0$

$$\operatorname{div}(A\cdot\nabla f)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)=0 \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\Delta f}_{\text{ур-ние Гельмгольца}}=\operatorname{div}\bar{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

лоренц. калибровка позволяет ввести **4х вектор потенциала**

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\varphi^{н}+\frac{\partial}{\partial x^1}A^{н}_x+\frac{\partial}{\partial x^2}A^{н}_y+\frac{\partial}{\partial x^3}A^{н}_z=0 \Rightarrow \partial_i A^{н\,i}=0,\quad A^{i\,н}=(\varphi^{н},\bar{A}^{н})$$

Уравнения для потенциалов. Ко— и контраариантная запись. Использование разных калибровок.

$$\partial_i \partial^i \varphi = 4\pi\rho$$

$$\partial_i \partial^i A^k = \frac{4\pi}{c} j^k$$

$$\bar{A}^* = \bar{A} - \nabla f(\bar{r}, t)$$
$$\varphi^* = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$\Rightarrow$

1. $\varphi^* = 0 \Rightarrow f = -c\int \varphi\, dt$
2. $\mathrm{div}\,\bar{A}^* = 0 \Rightarrow \Delta f = \mathrm{div}\,\bar{A}$
3. $\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \mathrm{div}\,\bar{A}^* = 0$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \mathrm{div}(\bar{A} - \nabla f) = 0$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \Delta f = \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\bar{A}$$

Тензор лмг поля. Коваринтная форма уравнений Максвелла

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad A_i = (\varphi, -\bar{A})$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

пр. часть: $\frac{4\pi}{c} j^i$

лев. часть: произв. F'_{ik} (из эл-тов $\nabla_k F^{lm}$)

1) $\mathrm{div}\,\bar{E} = \frac{4\pi}{c} j^0$; $-\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\bar{B} = \frac{4\pi}{c}\bar{j} \Rightarrow \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$

2) $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$; $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0 \Rightarrow \underbrace{\nabla_i F_{kl} + \nabla_l F_{ik} + \nabla_k F_{li} = 0}_{4\ \text{уравнения}}$

T_{ikl} – антисимм. тензор 3-го ранга $= \nabla_k F_{il} + \nabla_l F_{ki} + \nabla_i F_{lk}$, имеет 4 независим. $\neq 0$ компоненты ($T_{012}, T_{013}, T_{023}, T_{123}$)

пр: $T_{123} = \nabla_1 F_{23} + \nabla_3 F_{12} + \nabla_2 F_{31} = \frac{\partial}{\partial x}(-B_x) + \frac{\partial}{\partial z}(-B_z) + \frac{\partial}{\partial y}(-B_y) = \mathrm{div}\,\bar{B}$

Преобразования Лоренца для элмг полей. Инварианты Пуакаре.

$$F_{ik}F^{ik} = F_{00}F^{00} + F_{10}F^{10} + F_{20}F^{20} + F_{30}F^{30} + F_{01}F^{01} + \dots = inv = 2(B^2 - E^2)$$

$$\tilde{F}_{ik}\tilde{F}^{ik} = 2(E^2 - B^2) = inv$$

$$\tilde{F}_{ik}\hat{F}^{ik} = -(\bar{E}, \bar{B}) - (\bar{E}, \bar{B}) - 2(\bar{E}, \bar{B}) = -4(\bar{E}, \bar{B}) = inv$$

$$F'^{ik} = \Lambda^{i}_{\cdot m}\Lambda^{k}_{\cdot n}F^{mn}$$

$$F'^{k3} = |a^{k'}b^{3'}| = \Pi^{k}_{\cdot m}a^m b^3 = \Lambda^{k}_{\cdot m}F^{m3} \Rightarrow \begin{pmatrix} -E_3' \\ B_2' \\ -B_1' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_3 \\ B_2 \\ -B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_3' = \gamma(E_3 + \beta B_2) \\ B_2' = \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ B_1' = B_1 \end{cases}$$

$$F'^{k2} = \Lambda^{k}_{\cdot m}F^{m2} \Rightarrow \begin{pmatrix} -E_2' \\ -B_3' \\ 0 \\ B_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_2 \\ -B_3 \\ 0 \\ B_1' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_2' = \gamma(E_2 - \beta B_2) \\ B_3' = \gamma(B_3 - \gamma E_2) \\ B_1' = B_2 \end{cases}$$

из $\tilde{F}^{23\prime} = \tilde{F}^{23} \Rightarrow E_1' = E_1$

$B_\perp' = \gamma(B_\perp + [\beta \times \bar{E}])$	$\bar{B}_\perp = \gamma(\bar{B}_\perp' + [\beta \times \bar{E}'])$	$\bar{E}_\parallel = \bar{E}_\parallel'$
$E_\perp' = \gamma(\bar{E}_\perp - [\beta \times \bar{E}])$	$\bar{E}_\perp = \gamma(\bar{E}_\perp' - [\beta \times B'])$	$\bar{B}_\parallel = \bar{B}_\parallel'$

Запаздывающие потенциалы. Разложенте потенциалов в ближней и волновых зонах.

построить решение ур-й (для безграничного пр-ва ⊕ токи и заряды занимают огр-ную обл-ть простр-ва)

$$\begin{cases}\Delta\bar A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\bar j(\bar r,t)\\ \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\bar r,t)\end{cases}$$

в предельном случае стац. полей ур-я сводятся к:

$$\Rightarrow \Delta \bar A = -\frac{4\pi}{c}\bar j \xleftarrow{\text{решение}} A(r) = \frac{1}{c}\int \frac{j(\bar r')\,dV'}{|\bar r-\bar r'|}$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \xleftarrow{\text{решение}} \varphi(r)=\int\frac{\rho(\bar r')\,dV'}{|\bar r - \bar r'|}$$

для общего случая $\bar j(\bar r,t)$ и $\rho(\bar r,t)$ решения имеют аналогичную структуру:

$$\left.\begin{aligned}\bar A(\bar r,t) &= \frac{1}{c}\int\frac{1}{|\bar r-\bar r'|}\,\bar j\left(r', t-\frac{|\bar r-\bar r'|}{c}\right)dV'\\ \varphi(\bar r,t) &= \int\frac{1}{|\bar r-\bar r'|}\,\rho\left(r', t-\frac{|\bar r-\bar r'|}{c}\right)dV'\end{aligned}\right\}\text{ запаздывающие потенциалы}$$

(токи и заряды эл. объема dV' в точке наблюдения $c\ \bar r$ сказываются с запаздыванием по времени $= \frac{|r-\bar r'|}{c}$)

разложение: $|\bar r-\bar r'| = \sqrt{(\bar r+\bar r')(\bar r-\bar r')} = \bar r - (\bar n\cdot\bar r')$

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\bar n\bar r')}{r^2}$$

$$\bar j\left(r', t-\frac{|\bar r-\bar r'|}{c}\right) = \bar j\left(\bar r, t-\frac{r}{c}+\frac{(\bar n\cdot\bar r')}{c}\right) \Rightarrow !$$

$\frac{a}{cT} \ll 1$, т.е. $\frac{a}{u} \ll 1$

T – хар-е время изменения потока $\bar j$

$$\bar j\left(r', t-\frac{|r-r'|}{c}\right) = \bar j\left(\bar r, t'+\frac{\bar n\cdot\bar r'}{c}\right) = \bar j(\bar r', t') + \frac{\partial\bar j(\bar r',t')}{\partial t'}\frac{(\bar n\cdot\bar r')}{c} \Rightarrow$$ подставим в $\bar A$:

$$\bar A(r,t) = \frac{1}{cr}\left\{\int_V \bar j(\bar r',t')dV' + \frac{1}{r}\int j(r',t')(\bar n\cdot\bar r')dV' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\int\bar j(\bar r',t')(\bar n\cdot\bar r')dV'\right\}$$

$\bar j_i$ от дв-ся заряда e_i $\Rightarrow \bar j(r',t') = e_i\bar v_i\,\delta(r'-r_i(t'))$, $v_i(t') = \frac{dr_i(t')}{dt'}$

• $\int\bar j(\bar r',t')dV' = e_i v_i(t') \Rightarrow \int_V j(r',t')dV' = \sum_1^N e_i v_i(t') = \frac{d}{dt}\sum_1^N e_i\bar r_i(t') = \underbrace{\dot{\bar d}(t')}_{\text{дип. мом}}$

$$\frac{1}{c}\int_V j(r',t')(\bar n\cdot\bar r')dV' = \frac{1}{c}\sum_1^N e_i v_i(t')(\bar n\cdot\bar r'(t')) \Rightarrow$$ выразим ч/з магн. и квадр. момент:

$$v_i(t')(\bar n\cdot\bar r_i(t')) = \frac{d}{dt'}\left[\bar r_i(t')(\bar n\cdot\bar r_i(t'))\right] - r_i(t')(n\cdot v_i(t'))$$

$$v_i(\bar n\cdot\bar r_i) = \frac{1}{2}v_i(\bar n\cdot\bar r_i) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt'}\left(\bar r_i(\bar n\cdot\bar r_i)\right) - \frac{1}{2}\bar r_i(\bar n\cdot\bar v_i)$$ [~ объедин-ся в вектор. произв.

итог: $v_i(t')(\bar n\cdot\bar r_i(t')) = \frac{1}{2}\left[[r_i(t')\times v_i(t')]\times\bar n\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt'}\left[\bar r_i(t')(\bar n\cdot\bar r_i(t'))\right]$

$$\frac{1}{c}\int\bar j(\bar r',t')(\bar n\cdot\bar r')dV' = \underbrace{\left[\frac{1}{2c}\sum_1^N e_i[r_i(t')\times v_i(t')]\times\bar n\right]}_{[\bar m\times\bar n]} + \underbrace{\frac{1}{2c}\frac{d}{dt}\sum_1^N e_i\bar r_i(t')(\bar n\cdot\bar r_i(t'))}_{1/2c\ \dot Q(t')}$$

$Q_\alpha = Q_{\alpha\beta}n_\beta$, $Q_{\alpha\beta} = \sum e x_\alpha x_\beta$ – тензор квадр. моментов ум.

$$\bar A(\bar r,t) = \underbrace{\frac{\dot{\bar d}(t')}{cr}}_{\text{дип. мом}} + \underbrace{\left(\frac{[\bar m(t')\times\bar n]}{r^2} + \frac{[\dot{\bar m}(t')\times\bar n]}{cr}\right)}_{\text{магн-дип. мом.}} + \underbrace{\frac{1}{2c}\left(\frac{\dot Q(t')}{r^2} + \frac{\ddot Q(t')}{cr}\right)}_{\text{квадрун. мом.}}$$

$$\varphi(\bar r,t) = \int\frac{\rho\left(\bar r', t-\frac{r}{c}+\frac{(\bar n\cdot\bar r')}{c}\right)}{r-(\bar n,\bar r')}dV' \approx \int\frac{\rho(r',t-\frac{r}{c})dV}{r} + \int\rho\left(r',t-\frac{r}{c}\right)dV'\left(-\frac{1}{r^2}\cdot(-\bar n\bar r')\right) + \int\frac{\partial\rho(r',t-\frac{r}{c})}{\partial t}\cdot\frac{(\bar n\bar r')}{cr}dV' \approx \underbrace{\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{r}}_{\text{кулон. потенц.}} + \underbrace{\frac{(\bar r\cdot\bar d(t-\frac{r}{c}))}{r^3}}_{\text{дип. потенц.}} + \underbrace{\frac{(\bar n\cdot\dot{\bar d}(t-\frac{r}{c}))}{cr}}_{\text{излучение}}$$

Дипольное излучение. Интенсивность, поляризация, угловое распределение

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}) = 3Q_{\alpha\beta} - \sum e r^2\delta_{\alpha\beta} \Rightarrow \bar{\mathcal{D}}(t') = 3\bar{Q}(t') - \sum_1^N e_i r_i^2(t')\,\bar{n}$$

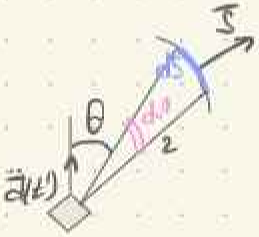
$$A(\bar r,t) = \frac{\dot{\bar d}(t')}{cr} + \left(\frac{[\bar m(t')\times\bar n]}{r^2} + \frac{[\dot{\bar m}(t')\times\bar n]}{cr}\right) + \frac{1}{6c}\left(\frac{\dot{\bar{\mathcal{D}}}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{\bar{\mathcal{D}}}(t')}{cr}\right)$$

дипольное приближения: ① хар-й р-р сист $a \ll \lambda$ ② $\bar r \gg a$ ③ $v \ll c$ ④ $\Delta t_{зап} \ll T$

! если $r \ll \lambda$ – область квазистационарности
если $r \leq \lambda$ – ближняя зона, где $\Delta t_{зап}$ заметно, но еще сохр. черты квазистац-ти
если $r \gg \lambda$ – дальняя зона (волновая) – поле предст-ет плоскую ЭМГ волну, $\bar B \perp \bar E \Rightarrow \bar E = [\bar B \times \bar n]$

$$\bar A(\bar r,t) = \frac{\dot{\bar d}(t-\frac{r}{c})}{cr} \Rightarrow \left[\operatorname{rot}\dot{\bar d}(t-\tfrac{r}{c}) = \operatorname{grad}(t-\tfrac{r}{c})\times\ddot{\bar d}(t-\tfrac{r}{c}) = -\frac{1}{c}[\bar n\times\ddot{\bar d}(t-\tfrac{r}{c})]\right] \Rightarrow$$

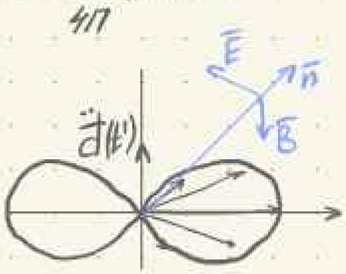
$$\bar B(\bar r,t) = \underbrace{\frac{[\ddot{\bar d}(t')\times\bar n]}{c^2 r}}_{\text{излучение}} + \underbrace{\frac{[\dot{\bar d}(t')\times\bar n]}{cr^2}}_{\text{2-ым можно пренебречь}}, \quad \bar E(\bar r,t) = [\bar B(\bar r,t)\times\bar n]$$



$dS = r^2 d\Omega \Rightarrow dI = S\,dS = \frac{c}{4\pi}B^2 r^2 d\Omega$ – поток энергии, переносимый ч/з эл-т пов-ти dS в ед. времени

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\bar d}(t')\times\bar n]^2 = \frac{(\ddot{\bar d}(t'))^2\sin^2\theta}{4\pi c^3}$$
, θ – угол между осью колебаний и в-м $\bar n$

$$\bar S = \frac{c}{4\pi}B^2\bar n$$



полная интенсивность $I = \int dI = \frac{\ddot{\bar d}^2(t')}{4\pi c}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi = \frac{2(\ddot{\bar d}(t'))^2}{3c^3}$

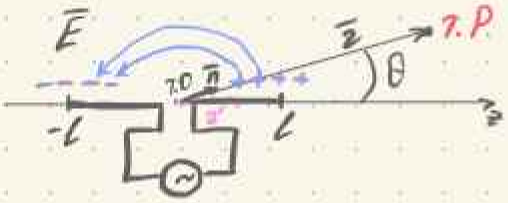
если система ≡ 1 точеч. заряд: $I = \frac{2}{3}\frac{e^2\bar w^2(t')}{c^3}$, $\bar w$ – ускорение

! все формулы выше для мгновенных значений в момент t, соотв-щу моменту t'

$\left\langle\frac{dI}{d\Omega}\right\rangle = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}|[\bar d\times\bar n]|^2 \Rightarrow$ если $\bar d = \bar d_0 e^{-i\omega t}$ с пост. напр $\Rightarrow \left\langle\frac{dI}{d\Omega}\right\rangle = \frac{d_0^2\omega^4}{8\pi c^3}\sin^2\theta$

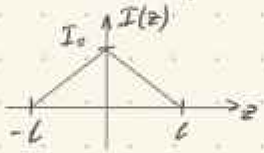
Антенны излучатели в радиодиапазоне. Вибратор Герца. Полуволновой вибратор. Диаграмма направленности и поляризация излучения.

опр: вибраторная антенна – лин. антенна с центральным возбуждением



вибратор Герца:

1) $\lambda >> l << z$ (усл. дип. прибл.)
2) толщина провода $d << l$ – лин. размер вибратора
3) нашли распр-е тока в штыре:



$$I(z,t) = I_0\left(1-\frac{|z|}{l}\right)e^{-i\omega t}$$

$$\bar{A}(z,t) = \frac{1}{c}\int\frac{\bar{j}(z',t')dV'}{|\bar{z}-\bar{z}'|} \approx [z' << z] \approx \frac{1}{cz}\int\bar{j}(z',t')\underbrace{dV'}_{dz'dy'dx'=dz'dS_\perp} = \left[I = \int\bar{j}\,d\bar{S}_\perp\right] = \frac{1}{cz}\int\bar{I}(z',t')dz'$$

$$\left.\begin{array}{l} t' = t - \frac{|\bar{z}-\bar{z}'|}{c} \\ |\bar{z}-\bar{z}'| \approx z - (\bar{n}\bar{z}') + O\left(\frac{z'^2}{z}\right) \end{array}\right| \Rightarrow \bar{A} = \frac{1}{cz}\int_{-l}^{l}\bar{I}_0\left(1-\frac{|z|}{l}\right)e^{-i\omega t'} = \frac{I_0}{cz}\bar{e}_z\int_{l}^{l}\left(1-\frac{|z|}{l}\right)e^{-i\omega\left(t-\frac{\left(z-(\bar{n},\bar{z})\right)-O\left(\frac{z'^2}{z}\right)}{c}\right)}dz' \ominus$$

$\forall$ интегрируем по конечным пределам $\oplus$ провод бесконечно тонкий

рассм-м степень exp: $\underbrace{t-\frac{z}{c}}_{(1)\ \text{всегда учитываем}} - \underbrace{\frac{(\bar{n}\cdot\bar{z}')}{c}}_{(1)\ \text{это когда } l \sim \frac{\lambda}{2}} + \underbrace{O\left(\frac{z'^2}{cz}\right)}_{(1)}$ — в курсе не учитываем

проанализируем слагаемые:

(1): $\frac{\omega z'}{c} \sim \frac{\omega}{c}l \sim \frac{kcl}{c} \sim \frac{2\pi}{\lambda}l << 1$

(2): $\frac{\omega}{c}\frac{z'^2}{z} \sim \frac{kl^2}{cz} \sim \frac{2\pi l^2}{\lambda cz} \sim \frac{2\pi l^2}{\lambda cz}$ – всегда выбрасываем

$$\ominus\ \frac{I_0 l\bar{e}_z}{cz}e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} = \bar{A} = \frac{A_0}{z}e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}$$

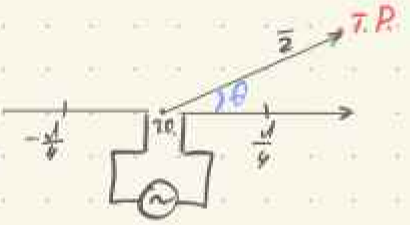
$$B_\sim = \left[\bar{\nabla}\times\frac{\bar{A}_0}{z}e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}\right] = \frac{i\omega I_0 l}{c^2 z}[\bar{n}\times\bar{e}_z]e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}$$

$$E_\sim = [\bar{B}_\sim\times\bar{n}] = [Re(\bar{B}_\sim)\times\bar{n}]$$

$$\bar{B} = -\frac{[n\times\dot{\bar{A}}]}{c}$$

полуволновой вибратор

$$I(z,t) = I_0\cos(kz)e^{-i\omega t}$$



$$l_\Sigma = \frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

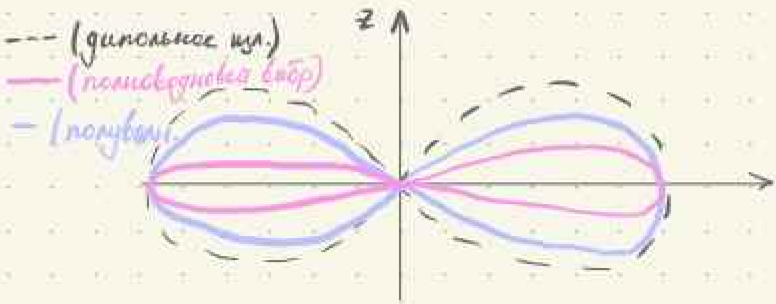
$$\bar{A} = \frac{I_0}{cz}\bar{e}_z\int_{-l}^{l}\cos(kz')e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}+\frac{(\bar{n}\bar{z}')}{c}\right)}dz' = \underbrace{\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}}_{\text{поправка из-за конечного р-ра}}\frac{I_0}{cz}\bar{e}_z\,e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}$$

$$\bar{B}_\sim = -\frac{[\bar{n}\times\dot{\bar{A}}]}{c} = \frac{I_0}{c^2 z}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)i\omega\sin\theta}{k\sin^2\theta}e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}$$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \underset{\theta\to 0}{\approx} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi\theta^2}{4}\right) \approx \frac{\pi\theta^2}{4}$

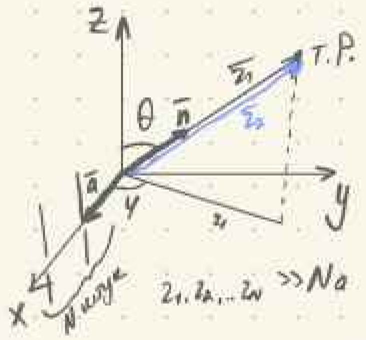
2) при $\theta\to 0$ или $\theta\to\pi$ будет выполнятся окрестность

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cz^2}{8\pi}|B_\sim|^2 = \frac{I_0^2}{2\pi c}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$



Принцип создания узко направленных антенн и изменяемой диаграммой направленности. Фазированные антенные решетки. Антенны оптического типа на пр параболоида вращения

пусть антенна состоит из N-отдельных излучателей, расположенных на расст-и a



$$\bar{B}_\sim(\bar r_1,t) = \bar f(\theta)\cdot \frac{e^{ikr_1-i\omega t}}{r_1}$$

разность фаз между излучателями

$$\sum \bar B_{\sim i} = \bar f(\theta)\frac{e^{ikr_1-i\omega t}}{r_1} + \bar f(\theta)\frac{e^{ikr_2-i\omega t+i\chi_2}}{r_2 = r_1} + \dots$$

$$\sum \bar B_{\sim i} = B_{\sim 1}\left(1+e^{ik(r_2-r_1)+i(\chi_2-\chi_1)} + e^{ik(r_3-r_1)+i(\chi_3-\chi_1)}+\dots\right)$$

$$\bar r_2 = \bar r_1 - \bar a \Rightarrow r_2 = \sqrt{(\bar r_1-\bar a, \bar r_1 - \bar a)} = r_1^2 - 2(\bar r_1,\bar a)+a^2 \approx r_1\left(1-\frac{(\bar r_1,\bar a)}{r_1^2} + O\left(\frac{a^2}{r_1^2}\right)\right)$$

! можем пренебрегать слагаемыми, когда: $\frac{ka^2}{r_1} \ll \pi \to \frac{a^2}{\lambda r_1} \ll 1 \Rightarrow a \ll \sqrt{\lambda r_1}$ - радиус 1-й зоны Френеля

для N-го излучателя это условие будет $Na \ll \sqrt{\lambda r_1} = \rho_1 \sim 10^4$ см ~ 100 м

$$\sum \bar B_{\sim i} = \bar B_{\sim 1}\left(1+e^{-ik(\bar n,\bar a)+i\Delta\chi} + e^{-ik(\bar n,\bar a)2+i2\Delta\chi}+\dots\right) = \bar B_{\sim 1}\left(\frac{1-e^{iN(\Delta\chi - k(\bar n,\bar a))}}{1-e^{i(\Delta\chi-k(\bar n,\bar a))}}\right)$$

$N-1$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \underbrace{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_1}_{\text{от первого излучателя}} \frac{\sin^2\left(N\cdot\frac{\Delta\chi - ka\sin\theta\cos\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\chi-ka\sin\theta\cos\varphi}{2}\right)} \quad (*)$$

I в начале рассм-м $\frac{dP}{d\Omega}$ в плоскости $(x,y) \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$ и пусть $\Delta\chi = 0 \Rightarrow$

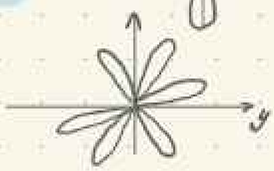
$$\frac{dP}{d\Omega} = \underbrace{const}_{\text{не зависит от } \varphi}\cdot\underbrace{\frac{\sin^2(N\frac{ka}{2}\cos\varphi)}{\sin^2(\frac{ka}{2}\cos\varphi)}}_{\text{интерфер. множитель}}$$

$\Rightarrow$ глав. макс-м: $\sin^2\left(\frac{ka}{2}\cos\varphi_m\right)=0$

$\frac{2\pi}{2\lambda}a\cos\varphi_m = \pm m\pi \Rightarrow \cos\varphi_m = \pm m\frac{\lambda}{a} \Rightarrow$

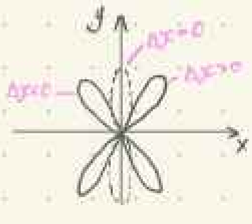
- если $\frac{\lambda}{a}>1 \Rightarrow m=0 \Rightarrow \cos\varphi_0=0 \Rightarrow \varphi_0=\pm\frac{\pi}{2}$

- если $\frac{\lambda}{a}\le 1 \Rightarrow$ то лепестков будет больше.
  $m=0,\ m=\pm1,\ m=\pm2,\ m_{max}\frac{\lambda}{a}<1$



II если $\Delta\chi\ne0$ и $\frac{\lambda}{a}>1$, то $\Delta\chi - \frac{2\pi a}{\lambda}\cos\varphi_m = \underset{0}{m}\pi$ $\left(\frac{\lambda}{a}>1\right)$

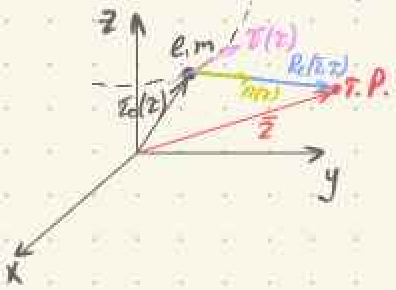
$\cos\varphi_m = \frac{\lambda\Delta\chi}{2\pi a} < 1 \Rightarrow$



– принцип работы фазовой антенной решетки (ФАР)

$$\bar A(\bar r, t') = \frac{1}{c}\int \frac{1}{|\bar r - \bar r'|}\int \bar j(\bar r', \tau)\,\delta\left(\tau - t + \frac{|\bar r - \bar r'|}{c}\right) d\tau\, \underbrace{dV'}_{= dx'dy'dz'} \quad (*)$$

в случае одного заряда, движущегося как $\bar r = \bar r_0(\tau)$: $\bar j(\bar r', \tau) = e\bar v(\tau)\,\delta(r' - r_0(\tau)) \Rightarrow (*)$



$$\bar A(\bar r, t) = \frac{1}{c}\int \frac{e\bar v(\tau)}{R_e(\bar r,\tau)}\,\delta\left(\tau - t + \frac{R_e(\bar r,\tau)}{c}\right)d\tau,$$

где $R_e(\bar r, t) = R(\bar r, \bar r_0(t)) = |\bar r - \bar r_0(\tau)|$

воспользуемся св-м: $\delta[f(\tau)] = \frac{\delta(\tau-\tau_0)}{|f'(\tau_0)|}$, т.е. $\delta[f(t)] \ne 0$ только в $\tau = \tau_0$

в нашем случае: $f(\tau) = \tau - t + \frac{R_e(\bar r,\tau)}{c}$ ⇒ нуль функции $t' + \frac{R_e(\bar r, t')}{c} = t$ — аналог времени излучения

$f'(\tau) = 1 + \frac{\partial R_e(\bar r,\tau)}{\partial\tau}$, где $\frac{\partial R_e(\bar r,\tau)}{\partial \tau} = -\bar n(\tau)\cdot v(\tau)$

$$f'(\tau) = 1 - \frac{\bar n(\tau)\, v(\tau)}{c}$$

итог: $$\bar A(\bar r, t) = \frac{e\bar v(t')}{c R_e(\bar r, t')\left(1 - \frac{\bar n(\bar r, t')\,\bar v(t')}{c}\right)}$$

более краткие записи: $$\bar A(\bar r, t) = \left.\frac{e\bar v}{c R_e\left(1 - \frac{\bar n\cdot\bar v}{c}\right)}\right|_{t'}$$

$$\varphi(\bar r, t) = \left.\frac{e}{R_e\left(1 - \frac{\bar n\cdot\bar v}{c}\right)}\right|_{t'}$$

(+) $$dt = dt'\left(1 - \frac{\bar n(\bar r, t')\, v(t')}{c}\right)$$

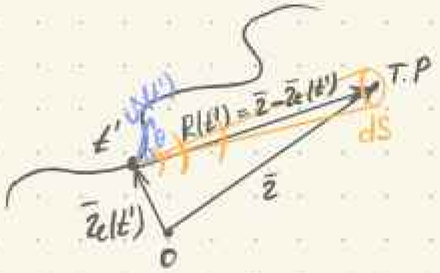
- $$\bar E(\bar r, t) = \left.\frac{e}{R_e^2}\,\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\bar n\cdot\bar v}{c}\right)^3}\left(\bar n - \frac{\bar v}{c}\right)\right|_{t'} + \left.\frac{e}{R_e}\,\frac{\left[\bar n\times\left[\left(\bar n - \frac{\bar v}{c}\right)\times\dot{\bar v}\right]\right]}{c^2\left(1 - \frac{\bar n\cdot\bar v}{c}\right)^3}\right|_{t'}$$

- $$E_p(t) = \frac{e\bar R_e(t)}{R_e^3(t)}\cdot\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$ — с постоянной скоростью

Угловое распределение мощности излучения реоятивисткой частицы

$$\bar{E}_{изл} = \frac{e\left[\bar{n}\times\left[[\bar{n}-\bar{\beta}]\times\dot{\bar{\beta}}\right]\right]}{cR\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)^3}\Bigg|_{t'}$$

$$\bar{B}_{изл} = [\bar{n}\times\bar{E}_{изл}]$$



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\Big([\bar{E}_{изл}\times \underbrace{\bar{B}_{изл}}_{[\bar{n}\times\bar{E}_{изл}]}],\bar{n}\Big)R^2\Big|_{t'} = \frac{c}{4\pi}\left(\bar{n}\bar{E}^2_{изл},\bar{n}\right)R^2\Big|_{t'} = \frac{c}{4\pi}\frac{e^2}{c^2R^2}\frac{\left[\bar{n}\times[\bar{n}-\bar{\beta})\times\dot{\bar{\beta}}]\right]^2R^2}{\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)^6}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c}\frac{[\ \ ]^2}{\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)^6}$$

$$[\ \ ]^2 = \left[(\bar{n}-\bar{\beta})(\bar{n},\dot{\bar{\beta}}) - \dot{\bar{\beta}}\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)\right]^2 = (\bar{n},\dot{\bar{\beta}})^2\left(1+\beta^2-2(\bar{n},\bar{\beta})\right) + \dot{\bar{\beta}}^2\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)^2 - 2(\bar{n},\dot{\bar{\beta}})\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)\left[(\bar{n},\dot{\bar{\beta}})-(\bar{\beta},\dot{\bar{\beta}})\right]$$

$$= (\bar{n},\dot{\bar{\beta}})^2\underbrace{\left(1+\beta^2-2(\bar{n},\bar{\beta})-2+2(\bar{n},\bar{\beta})\right)}_{\beta^2-1} + \dot{\bar{\beta}}^2\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)^2 + 2(\bar{n},\dot{\bar{\beta}})(\bar{\beta},\dot{\bar{\beta}})\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)$$

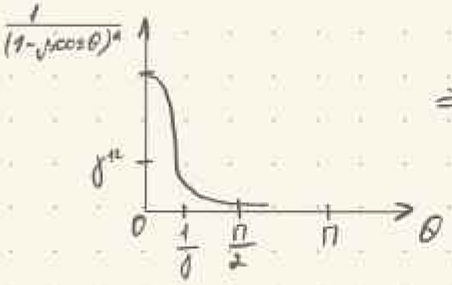
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\left[\frac{\dot{\beta}^2}{\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)^4} + \frac{2(\bar{n},\dot{\bar{\beta}})(\bar{\beta},\dot{\bar{\beta}})}{\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)^5} - \frac{(1-\beta^2)(\bar{n},\dot{\bar{\beta}})^2}{\left(1-(\bar{\beta},\bar{n})\right)^6}\right]\Bigg|_{t'}$$

1) пусть $\bar{\beta}\parallel\dot{\bar{\beta}}$: $\left[\bar{n}\times[(\bar{n}-\bar{\beta})\times\dot{\bar{\beta}}]\right] = \left|[n\times\dot{\bar{\beta}}]\right|^2 = \dot{\beta}^2\sin^2\theta$

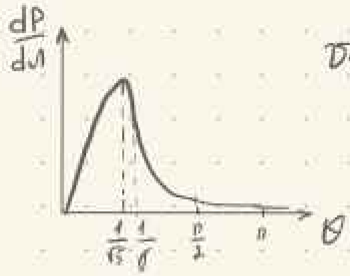
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\cdot\frac{\dot{\beta}^2\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}\Bigg|_{t'}$$

$\Rightarrow$ если $\beta\to1$ (ультрарел-я частица) $\Rightarrow$

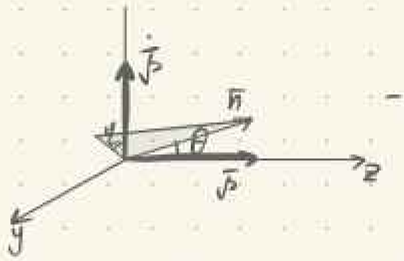
$$1-\beta\cos\theta = 1-\beta+\beta(1-\cos\theta) = \frac{1}{(1+\beta)\gamma^2} + \beta 2\sin^2\frac{\theta}{2}\Big|_{\beta\to1} = \frac{1}{2\gamma^2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$



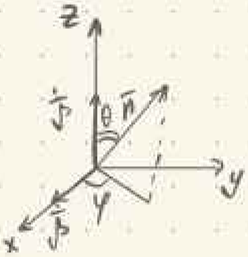
$\Rightarrow$



2) пусть $\bar{\beta}\perp\dot{\bar{\beta}}$

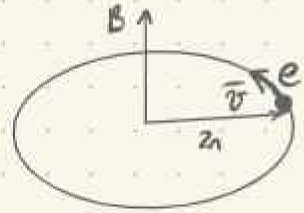


— полярная ось



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{4\pi c(1-\beta\cos\theta)^4}\left[1-\frac{1}{\gamma}\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\underbrace{(1-\beta\cos\theta)^2}_{\left(\frac{1}{2\gamma^2}+\frac{\theta^2}{2}\right)^2,\ \theta\ll1}}\right];\qquad (\bar{n},\dot{\bar{\beta}}) = \dot{\beta}\sin\theta\cos\varphi$$

Синхротронное излучение. Оценки его спектра и углового распределения.

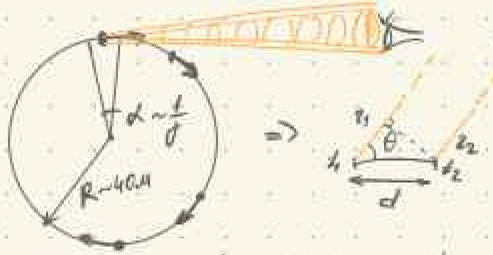


$\bar{v} \perp \bar{B}$

$$\bar{e}_r \gamma m \frac{v^2}{r_н} = \frac{e}{c}[\bar{v}\times\bar{B}] = \bar{e}_r \frac{e}{c} vB$$

$$\frac{\gamma m v}{r_н} = \frac{eB}{c} \Rightarrow r_н = \frac{\gamma m c v}{eB} = \frac{v}{\omega_н}, \quad \omega_н = \frac{eB}{\gamma m c}$$

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^4\gamma^2}{m^2c^3}\left([\bar{\beta}\times\bar{B}]\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{e^4\gamma^2\beta^2B^2}{m^2c^2} \sim B^2\gamma^2$$

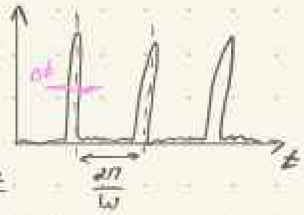


т.Р.

что мы видим?:

t_1 (начало излучения) $\approx \frac{r_1}{c}$

t_2 (конец излучения) $\approx \frac{d}{v} + \frac{r_2}{c}$



$\Delta t \Delta\omega \sim \pi$

$\Delta\omega \sim \frac{\pi}{\Delta t}$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{d}{v} + \frac{r_2 - r_1}{c} = \frac{d}{v} - \frac{d\cos\theta}{c} = \frac{d}{v}(1-\beta\cos\theta) = \boxed{\frac{d}{v}}(1-(\bar{\beta},\bar{n}))$$ — время, в течение которого принимается волна

$\Delta t'$ - время, в течение которого изл-ся волна

$$T \to 2\pi \Rightarrow \Delta t' \to \alpha \sim \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \Delta t' = \frac{T}{2\pi\gamma} = \frac{1}{\gamma\omega_н}$$

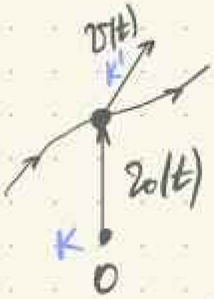
$$\Delta t = \underbrace{(1-\beta\cos\theta)}_{\sim 1/\gamma^2}\frac{1}{\gamma\omega_н} \sim \frac{1}{\gamma^3\omega_н} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\pi}{\Delta t} \sim \pi\gamma^3\omega_н$$

$$\gamma(\text{ВЭП-4}) = \frac{\mathcal{E}_e = 5\,ГэВ}{500\,кэВ} \approx 10^4$$

оценим характ. длину волны излучения СИ:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_{max}} \sim \frac{2\pi c}{\gamma^3\omega_н} = \left[\begin{array}{l} R\omega_н = v \approx c \\ \omega_н = \frac{3\cdot 10^{10}\,см/с}{40\cdot 10^2\,см} = 10^7\,\frac{рад}{с}\end{array}\right] = \frac{6\cdot 3\cdot 10^{10}\,см/с}{10^{12}\cdot 10^7\,рад/с} = 2\cdot 10^{-8}\,см = 2\,\text{Å}$$

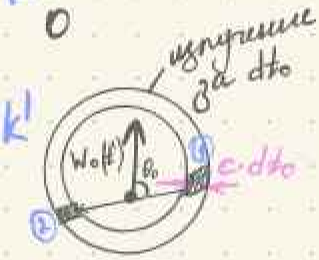
Излучение релятивисткой частицы. Потери энергии и импульса частицы на излучение при движении в произвольных полях



В K': Раз $\bar v_0 = 0 \Rightarrow$ дипольное приближение $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right) \Rightarrow$

$d\mathcal{E}_0$ — энергия излучения частицы в сферич. слое толщиной $c\,dt_0$

$$P = \frac{2}{3}\frac{\ddot{\vec d}^2(t')}{c^3} = \frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0}, \quad \vec d = e\ddot{\vec r}_0 = e\vec W_0, \quad d\mathcal{E}_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2 W_0^2(t')\,dt_0}{c^3}$$



плотность импульса излучения в ед. V (через тензор энергии-импульса):

$$\bar S_1 = \bar n_1 \frac{c}{4\pi}\bar B_\nu^2 = \bar n_1 \frac{c}{4\pi}\frac{[\ddot{\vec d}_0(t')\times \bar n]^2}{c^4 r^2} = \bar n_1 \frac{c}{4\pi}\frac{e^2(\bar W_0^2(t')\sin^2\theta_0)}{c^4 r^2} \quad (\text{для } 1)$$

$$\bar S_2 = \bar n_2 \frac{c}{4\pi}\frac{e^2 W_0^2(t')\sin^2(\pi-\theta_0)}{c^4 r^2} \Rightarrow \bar S_1 = -\bar S_2 \Rightarrow \bar P = \iint\limits_{\text{сфер. слой}} \bar g\, dV = 0 \Rightarrow d\bar p_0 \text{ — сферич. слоя} = 0$$

W_0 — ускорение

4^x импульс сфер. слоя: $dp_0^i = \left(\frac{d\mathcal{E}_0}{c}, d\bar p_0\right)$ — в системе K' $\Rightarrow$ пересчитаем в лаб. СО

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\gamma\, d\mathcal{E}_0}{\gamma\, dt_0} = \frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\gamma\bar\beta\, d\mathcal{E}_0}{c\gamma\, dt_0} = \frac{\bar\beta}{c}\frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0}$$

потери энергии частицы на излучение: $\frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0} = \frac{2}{3}\frac{W_0^2 e^2}{c^3} \Rightarrow \bar W_0 = \frac{e\bar E_0 + \frac{e}{c}[\bar v_0 \times \bar B_0]}{m} =$

$$= \frac{e(\bar E_0^\parallel + \bar E_0^\perp)}{m} + \frac{ec}{m}[\bar v_0 \times (\bar B_0^\parallel + \bar B_0^\perp)]$$

$$\bar W_0 = \frac{e}{m}\left(\bar E^\parallel + \gamma(\bar E^\perp + [\bar\beta \times \bar B^\perp]\right) \Rightarrow$$

замена преобр-я полей

$$W_0^2 = \frac{e^2}{m^2}\left(E^{\parallel 2} + \underbrace{\gamma^2(\bar E^\perp + [\bar\beta\times\bar B])^2 + \gamma^2 E^{\parallel 2}}_{\gamma^2(\bar E + [\bar\beta\times\bar B])^2} - \gamma^2 E^{\parallel 2}\right) = \frac{e^2}{m^2}\gamma^2\left[(\bar E + [\bar\beta\times\bar B])^2 - (\bar\beta, \bar E)^2\right]$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\gamma^2\left[(\bar E + [\bar\beta\times\bar B])^2 - (\bar\beta, \bar E)^2\right]$$

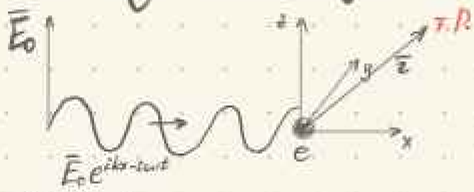
$$\frac{dp}{dt} = \frac{\bar\beta}{c}\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

$d\mathcal{E}, dp$ — энергия и импульс сфер. слоя излучения частицы

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\gamma^6\left(W^2 - [\bar\beta \times \bar W]^2\right)$$ — через ускорение

Рассеяние элмг волны свободным зарядом. Рассеяние элмг волны связанным зарядом. Рассеяние волны системой зарядов.

• свободный заряд



$\left(\begin{matrix}\bar{E}_0 \parallel Oz \\ \bar{k} \parallel Ox\end{matrix}\right)$

$\bar{B}_0 = [\bar{e}_x \times \bar{E}_0]$

пусть $|\bar{v}_e| \ll c \Rightarrow m\ddot{\bar{r}}_e = e\bar{E}_0 e^{ikx-i\omega t} + \underbrace{e\left[\frac{\bar{v}}{c}\times\bar{B}_0\right]e^{ikx-i\omega t}}_{\text{пренебрегаем}}$

$F_{торм} \ll F_{Лоренц}$

$\ddot{\bar{d}}(t-\frac{r}{c}) = e\ddot{\bar{r}}_e(t-\frac{r}{c})$; $\bar{B}_\sim(r,t) = \frac{[\ddot{\bar{d}}(t-\frac{r}{c})\times\bar{n}]}{c^2 r}$

$d\sigma \langle S_{волн}\rangle = dP = \frac{dI}{d\Omega}d\Omega \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\langle I\rangle}{d\Omega}\frac{1}{\langle S_{волн}\rangle} = \frac{d\langle P\rangle}{d\Omega}\frac{1}{\langle S_{волн}\rangle}$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\langle P\rangle}{d\Omega}\frac{1}{\langle S\rangle} = \frac{e^4}{m^2c^4}\sin^2\theta = r_e^2\sin^2\theta \Rightarrow \sigma_T = \iint\frac{d\sigma}{d\Omega}\sin\theta_0\, d\theta d\varphi = \frac{8\pi}{3}r_e^2$ (сечение Томсона)

• связанный заряд

! в веществах рассеивают ЭЛМГ волны практически одни электроны

рассм-м внешний электрон в атоме как дипольный осциллятор с $\omega_0 \gg \omega$

$r(t) = \hat{r}_0 e^{-i\omega t}$, $\hat{r}_0 = \frac{e}{m\omega_0^2}\bar{E}_0 \Rightarrow \ddot{\bar{d}}(t) = \frac{e^2\omega^2}{m\omega_0^2}\bar{E}(t)$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 r_e^2\sin^2\theta = \sigma_T\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$ ($\ll 1$)

• система зарядов

• цвет неба:

$\frac{d\sigma}{d\omega} \sim \omega^4 \Rightarrow$ белый свет от Солнца, являющийся суперпозицией волн $\to$ синий, т.к

$\omega_{син} > \omega_{кр} \Rightarrow \omega_{син}$ рассеивается в 16 раз сильнее

наоборот, в свете, прошедшем г/з более толстый слой воздуха преобладают низкие частоты