Занятие 27

Разделение переменных в уравнениях Лапласа и Гельмгольца и краевые задачи.

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (27.1)$$

Функции, удовлетворяющие этому уравнению, называются гармоническими. Попробуем найти у этого уравнения решения очень простого вида

$$u(x;y) = f(x) \cdot g(y).$$

Тогда для функций $f(x)$ и $g(y)$ мы получим уравнения

$$f'' + \lambda f = 0 \text{ и } g'' - \lambda g = 0.$$

На плоскости xOy рассмотрим прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Допустим, что мы хотим найти такие решения уравнения (27.1), что

$$u(x,y)\Big|_{x=0} = 0 \text{ и } u(x,y)\Big|_{x=a} = 0.$$

Это приведёт нас к задаче Штурма-Лиувилля для функции $f(x)$:

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 \\ f(0) = 0, f(a) = 0 \end{cases}$$

Мы решали эту задачу на 24 занятии и получили, что она имеет решения только при

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \text{ и эти решения } f_n = C\sin\frac{\pi n}{a}x.$$

Тогда уравнение для функции $g(y)$ принимает вид

$$g''(y) - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 g(y) = 0.$$

Тогда

$$g(y) = C_1 \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y + C_2 \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(y-b).$$

Можно добиться того, чтобы функция $g(y)$ обращалась в ноль или при $y = 0$, или при $y = b$. В первом случае следует рассмотреть $g(y) = C_1 \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y$, а во втором $g(y) = C_2 \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(y-b)$.

Получить ненулевое решение, которое обращается в ноль на всех сторонах прямоугольника, невозможно, так как гармоническая в некоторой области функция, равная нулю на её границе, тождественно равна нулю, если требовать естественное условие непрерывности функции $u(x, y)$ вплоть до границы.

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa^2 u = 0.$$

Вопрос: при каких значениях параметра $\varkappa$ уравнение Гельмгольца имеет частные решения вида $u(x, y) = f(x)\cdot g(y)$, обращающиеся в ноль на границах прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant y \leqslant b$?

Разделение переменных приведёт нас к уравнениям на $f(x)$ и $g(y)$.

$$f'' + \alpha f = 0,$$
$$g'' + \beta g = 0.$$

При этом, $\varkappa^2 = \alpha + \beta$. Краевые условия позволяют говорить, что мы имеем на каждую функцию f и g задачи Штурма-Лиувилля

$$f''(x) + \alpha f(x) = 0\,, \quad f(0) = 0\,, \quad f(a) = 0,$$
$$g''(y) + \beta g(y) = 0\,, \quad g(0) = 0\,, \quad g(b) = 0.$$

Решения этих задач нам уже известно. Итак, при

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\,, \quad n, m \in \mathcal{N},$$

мы имеем частные решения

$$u_{nm}(x, y) = \sin\frac{\pi n x}{a} \cdot \sin\frac{\pi m y}{b},$$

которые равны нулю на границе прямоугольника.

Теперь рассмотрим уравнение Гельмгольца в полярной системе координат и будем искать, при каких $\varkappa$ это уравнение имеет частные решения, обращающиеся в ноль на границе круга $x^2 + y^2 = \rho_0^2$. Совершенно естественно, чтобы эти функции были однозначными и ограниченными. Итак, если $u(\rho, \varphi) = F(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$, то

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0,$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dF}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\lambda F + \varkappa^2 F = 0.$$

Требования однозначности приводят нас к тому, что функция $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией с периодом 2π. Покажем, что условия $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ и $\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ позволяют нам определить константу разделения λ. Таким образом, на функцию $\Phi(\varphi)$ мы имеем следующую задачу Штурма-Лиувилля с нестандартными краевыми условиями:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0\,, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi)\,, \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi).$$

Если $\lambda = 0$, то $\Phi = C_1 + C_2\varphi$, откуда $\Phi_0 = 1$.

Если $\lambda = -a^2,\ a \neq 0$, то $\Phi = C_1 \operatorname{sh} a\varphi + C_2 \operatorname{ch} a\varphi$. Периодических функций мы в этом случае не найдём.

Если $\lambda = a^2,\ a \neq 0$, то $\Phi = C_1 \sin a\varphi + C_2 \cos a\varphi$ и на константы C_1, C_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_2 = C_1 \sin 2\pi\beta + C_2 \cos 2\pi\beta, \\ \beta C_1 = \beta C_1 \cos 2\pi\beta - \beta C_2 \sin 2\pi\beta. \end{cases}$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} \sin 2\pi\beta & \cos 2\pi\beta - 1 \\ \cos 2\pi\beta - 1 & -\sin 2\pi\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $(\cos 2\pi\beta - 1)^2 + \sin^2 2\pi\beta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\pi\beta = 1$, $2\pi\beta = 2\pi n$. Таким образом, $a = n$ и

$$\Phi(\varphi) = C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi.$$

Рассмотренная задача Штурма-Лиувилля появляется всегда, когда мы имеем в исходном уравнении осевую симметрию. Поэтому мы запомним полученный результат и будем ссылаться на него.

Обратимся к уравнению на функцию $F(\rho)$ с уже найденным значением λ.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dF}{d\rho} + \frac{n^2}{\rho^2}F + \varkappa^2 F = 0, \text{ или}$$

$$F'' + \frac{1}{\rho}F' + \frac{n^2}{\rho^2}F + \varkappa^2 F = 0.$$

Это знакомое нам уравнение Бесселя. Его ограниченное решение — функция Бесселя порядка n. Таким образом,

$$F = CJ_n(\varkappa\rho).$$

Осталось определить параметр $\varkappa$ из условия $J_n(\varkappa\rho_0) = 0$. Договоримся обозначать нули функции $J_n(x)$ через μ_k^n, то есть

$$J_n(\mu_k^n) = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

тогда $\varkappa\rho_0 = \mu_k^n$.

Итак, однозначные и ограниченные частные решения уравнения $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$, обращающиеся в ноль на границе круга радиуса ρ_0, имеют вид

$$u_{nk}(\rho, \varphi) = (C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi) \cdot J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots\ ,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Займёмся теперь трёхмерными уравнениями Лапласа и Гельмгольца. Разделение переменных $u = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ в декартовой системе координат для уравнения (27.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

приведёт нас к трём обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X'' + \alpha X = 0\,, \quad Y'' + \beta Y = 0\,, \quad Z'' + \gamma Z = 0,$$

при условии, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Область, в которой мы рассматриваем решение, является прямоугольным параллелепипедом. Дополнительные краевые условия должны позволить нам сформулировать задачи Штурма-Лиувилля для любых двух функций из трёх. При этом определяется две константы разделения, а третья найдётся из условия $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Простейший вариант следующий: найти частные решения уравнения Лапласа, обращающиеся в ноль на гранях параллелепипеда.

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=a} = 0\,, \quad u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=b} = 0 \quad \text{и } u\Big|_{z=0} = 0$$

Анализируя поставленные условия, мы видим, что на функции $X(x)$ и $Y(y)$ можно сформулировать задачи Штурма-Лиувилля, а на функцию $Z(z)$ это сделать нельзя. Таким образом,

$$X'' + \alpha X = 0\,, \quad X(0) = X(a) = 0,$$

$$\alpha = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\,, \quad X_n = \sin\frac{\pi n x}{a},\ n = 1, 2, \ldots .$$

$$Y'' + \beta Y = 0\,, \quad Y(0) = Y(b) = 0,$$

$$\beta = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\,, \quad Y_m = \sin\frac{\pi m y}{b},\ m = 1, 2, \ldots .$$

Определяем γ:

$$\gamma = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2,\ n, m = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$Z'' - \left(\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right) Z = 0.$$

Решение, обращающееся в ноль при $z = 0$, есть

$$Z(z) = \operatorname{sh}\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} z.$$

Итак,

$$u_{nm}(x,y,z) = \sin\frac{\pi n x}{a}\cdot\sin\frac{\pi m y}{b}\cdot\operatorname{sh}\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} z,\ n,m = 1,2,\ldots.$$

Конечно, краевые условия могут быть и более сложного вида, тогда функции $u(x,y,z)$ будут весьма громоздкие, но главное, что нужно усвоить это то, что краевые условия на функцию $u(x,y,z)$ приводят к постановке задач Штурма-Лиувилля, которые в свою очередь позволяют определить константы разделения.

Рассмотрим уравнение Лапласа в цилиндре $0 \leqslant z \leqslant h$, $x^2+y^2 \leqslant \rho_0^2$. Разделение переменных в цилиндрической системе координат

$$u = F(z)\cdot\Phi(\varphi)\cdot G(\rho)$$

приведёт нас к

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dG}{d\rho}\frac{1}{G} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{F''}{F} = 0.$$

Функции $\Phi,\ F,\ G$ должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}
&\Phi'' + \alpha\Phi = 0,\\
&F'' + \beta F = 0,\\
&\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dG}{d\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}G - \beta G = 0
\end{aligned}$$

Как ранее было показано в случае полярной системы координат, требование периодичности решения по φ с периодом $T = 2\pi$ позволяет нам определить константу разделения $\alpha = n^2$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, и найти функции $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi_0(\varphi) \equiv 1; \quad \Phi_n(\varphi) = C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}$$

Мы сможем определить параметр β из того уравнения, для которого краевые условия позволят поставить задачу Штурма-Лиувилля.

Допустим, что мы ищем частные решения, обращающиеся в ноль на верхнем и нижнем основаниях цилиндра, то есть при $z = 0$ и при $z = h$. Тогда есть возможность сформулировать задачу Штурма-Лиувилля на функцию $F(z)$. Имеем

$$F'' + \beta F = 0\,, \quad F(0) = 0\,, \quad F(h) = 0,$$

$$\beta = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2\,, \quad F_m = \sin \frac{\pi m}{h} z,\ m = 1, 2, \ldots.$$

Уравнение на G приняло вид

$$G'' + \frac{1}{\rho} G' - \frac{n^2}{\rho^2} G - \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 G = 0.$$

Решением этого уравнения, ограниченными при $\rho = 0$, является модифицированная функция Бесселя порядка n

$$G(\rho) = I_n(\frac{\pi m}{h}\rho).$$

Итак, мы получили следующие частные решения:

$$u_{nm}(\rho; \varphi; z) = (C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi) \cdot \sin \frac{\pi m z}{h} \cdot I_n(\frac{\pi m}{h}\rho),$$
$$m = 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Напомним, что функция $I_n(\frac{\pi m}{h}\rho)$ не обращается в ноль ни при каком $\rho \neq 0$.

Будем теперь искать частные решения (по-прежнему ограниченные и однозначные), обращающиеся в ноль на боковой поверхности цилиндра, то есть при $\rho = \rho_0$. Теперь у нас нет возможности определить параметр β из уравнения на функцию F, так как для постановки задачи Штурма-Лиувилля нет надлежащих краевых условий.

Обратимся к уравнению на функцию G. Условия ограниченности решения при $\rho = 0$ и $u\Big|_{\rho=\rho_0} = 0$ позволяют нам поставить задачу Штурма-Лиувилля для функции $G(\rho)$:

$$G'' + \frac{1}{\rho}G - \frac{n^2}{\rho^2} - \beta G = 0\,, \quad G(0) \text{ — ограниченна}\,, \quad G(\rho_0) = 0.$$

Мы решали эту задачу на предыдущем занятии и пришли к

$$\beta = -\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2\,, \quad G_k(\rho) = J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right),\ k = 1, 2, \ldots.$$

Теперь, зная значения β, обратимся к уравнению на функцию F.

$$F'' - \left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2 F = 0.$$

Его общее решение

$$F = C_1 \operatorname{sh}\frac{\mu_k^n}{\rho_0}z + C_2 \operatorname{ch}\frac{\mu_k^n}{\rho_0}z.$$

Отсюда можно выбрать, например, такое $F(z)$, что $F\Big|_{z=0} = 0$.

Таким образом, частные решения уравнения Лапласа, обращающиеся в ноль на боковой поверхности цилиндра и на его нижнем основании, имеют вид

$$u_{nk}(\varphi, \rho, z) = (C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi) \cdot J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right) \cdot \operatorname{sh}\frac{\mu_k^n}{\rho_0}z.$$

Ограниченность и периодичность по φ при этом подразумеваются совершенно естественными и эти факты обычно не упоминаются. Заметим, что $u_{nk}\Big|_{z=h} \neq 0$ ни при каком h.

Нам осталось найти, при каких значениях $\varkappa$ уравнение Гельмгольца $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$ имеет частные решения, обращающиеся в ноль на поверхности цилиндра. Разделяем переменные в уравнении

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varkappa^2 u = 0,$$

то есть ищем решения в виде

$$u = F(z)\cdot G(\rho)\cdot\Phi(\varphi).$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dF}{d\rho}\right)\frac{1}{F} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{F''}{F} + \varkappa^2 = 0.$$

Мы уже знаем, что требование периодичности по φ приведёт нас к тому, что

$$\Phi(\varphi) = C_1\sin n\varphi + C_2\cos n\varphi.$$

С учётом этого, запишем уравнения на F и G.

$$\begin{aligned}
&F'' + \alpha F = 0,\\
&G'' + \frac{1}{\rho}G' - \frac{n^2}{\rho^2}G + \beta G = 0,
\end{aligned}$$

где $\varkappa^2 = \alpha + \beta$.

Поставленные краевые условия позволяют сформулировать задачу Штурма-Лиувилля и на функцию F

$$F'' + \alpha F = 0\,,\quad F(0) = 0\,,\quad F(h) = 0,$$

и на функцию G

$$G'' + \frac{1}{\rho}G' - \frac{n^2}{\rho^2}G + \beta G = 0\,, \quad G(0) - \text{ограниченна}\,, \quad G(\rho_0) = 0.$$

Откуда

$$\alpha = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2, \quad F_m(z) = \sin\frac{\pi m}{h}z,$$

$$\beta = \left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2, \quad G_{nk}(\rho) = J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right),$$

$$\text{и } \varkappa^2 = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2.$$

Можно сформулировать следующую многомерную задачу Штурма-Лиувилля. Найти однозначные и ограниченные собственные функции оператора Лапласа, обращающиеся в ноль на поверхности цилиндра $0 \leqslant z \leqslant h$, $x^2 + y^2 \leqslant \rho_0^2$. Мы нашли собственные функции

$$u_{nmk}(\varphi, \rho, z) = \left\{\begin{matrix} 1 \\ \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix}\right\} \cdot J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right) \cdot \sin\frac{\pi m z}{h},$$

$$n = 0, 1, \ldots,\ m = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots$$

и соответствующие им собственные значения $\varkappa_{nmk}$.

Заметим, что во всех задачах, связанных с цилиндром, возникает уравнение Бесселя целого порядка n. Поэтому часто функции Бесселя $J_n(\rho)$ и $I_n(\rho)$ называют цилиндрическими функциями Бесселя.

Самостоятельная работа

1. Найти гармонические в прямоугольнике $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$ функции такие, что

$$u\Big|_{x=0} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0.$$

2. Найти гармонические в цилиндре $\rho \in [0; \rho_0]$, $z \in [0; h]$ функции, не зависящие от угла φ, такие, что

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0.$$

3. Найти гармонические в параллелепипеде $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$, $z \in [0; c]$ функции такие, что

$$u\Big|_{x=0} = 0\,, \quad u\Big|_{y=0} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0\,, \quad u\Big|_{z=c} = 0.$$

Ответы к самостоятельной работе

1. $u_0 = x$; $u_n = \operatorname{sh}(\frac{\pi n}{b}x)\cos(\frac{\pi n}{b}y)$, $n \in \mathbb{N}$

2. $u_0 = 1$; $u_n = \cos(\frac{\pi n}{h}z) I_0(\frac{\pi n}{h}\rho)$, $n \in \mathbb{N}$

3. $u_{mn}(x, y, z) = \sin(\alpha_m y)\cdot\cos(\beta_n z)\cdot\operatorname{sh}\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2}\,x$, где $\alpha_m = \dfrac{\pi(2m+1)}{2b}$, $\beta_n = \dfrac{\pi(2n+1)}{2c}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.