

ФИЗИКА В НГУ

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ
И ОЛИМПИАДНЫЕ ВАРИАНТЫ
ЗАДАЧ
ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

2007–2012 гг.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра общей физики

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ
ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
2007–2012 гг.**

Учебное пособие

Новосибирск
2013

ББК В313 я 73-4

УДК 537 (075.8)

Э 360

Экзаменационные и олимпиадные варианты задач по электродинамике 2007–2012 гг.: Учебное пособие/ В. И. Яковлев, А. Г. Погосов, С. Л. Синицкий и др. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. 178 с.

В учебном пособии содержатся задачи, предлагавшиеся студентам физического факультета НГУ на письменных курсовых контрольных и экзаменационных работах в 2007–2012 гг.

Предназначено для студентов-физиков и информатиков НГУ, а также преподавателей, ведущих семинарские занятия. Задачник соответствует годовому курсу электродинамики.

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

- © Новосибирский государственный университет, 2013
- © В. И. Яковлев, А. Г. Погосов, С. Л. Синицкий, А. В. Богомягков, Л. С. Брагинский, В. А. Володин, А. В. Зайцев, М. И. Захаров, П. В. Калинин, М. С. Котельникова, Д. А. Максимов, А. В. Ненашев, П. Л. Новиков, В. Б. Рева, В. Д. Степанов, Б. И. Хазин, В. С. Черкасский, О. А. Шушаков 2013

Оглавление

Предисловие	6
Условия задач	7
2007/2008 учебный год	7
Контрольная работа 1	7
Экзаменационная работа 1	8
Контрольная работа 2	11
Экзаменационная работа 2	12
2008/2009 учебный год	14
Контрольная работа 1	14
Экзаменационная работа 1	16
Контрольная работа 2	18
Экзаменационная работа 2	19
2009/2010 учебный год	21
Контрольная работа 1	21
Экзаменационная работа 1	22
Контрольная работа 2	24
Экзаменационная работа 2	25
2010/2011 учебный год	27
Контрольная работа 1	27
Экзаменационная работа 1	29
Контрольная работа 2	30

Экзаменационная работа 2	32
2011/2012 учебный год	34
Контрольная работа 1	34
Экзаменационная работа 1	35
Контрольная работа 2	37
Экзаменационная работа 2	39
Решения	42
2007/2008 учебный год	42
Контрольная работа 1	42
Экзаменационная работа 1	48
Контрольная работа 2	59
Экзаменационная работа 2	65
2008/2009 учебный год	71
Контрольная работа 1	71
Экзаменационная работа 1	76
Контрольная работа 2	87
Экзаменационная работа 2	91
2009/2010 учебный год	96
Контрольная работа 1	96
Экзаменационная работа 1	100
Контрольная работа 2	104
Экзаменационная работа 2	110
2010/2011 учебный год	114
Контрольная работа 1	114
Экзаменационная работа 1	126
Контрольная работа 2	130
Экзаменационная работа 2	138
2011/2012 учебный год	142
Контрольная работа 1	142
Экзаменационная работа 1	150
Контрольная работа 2	160
Экзаменационная работа 2	170

Предисловие

Потребность в данном издании возникла в связи с введением на физическом факультете НГУ письменного экзамена, ставшего позднее и теоретическим туром студенческой олимпиады. Задачи для вариантов отбирались всеми преподавателями, ведущими курс. Необходимые 6–7 задач выбирались из большого числа предлагаемых на конкурсной основе и оценивались в баллах в зависимости от трудности: очень легкие – 1–2 балла, очень трудные – 6–7 баллов. Границы оценок устанавливались в баллах в зависимости от набора задач в варианте.

При решении разрешено пользоваться любой литературой, сколько угодно задачи, как правило, оригинальные, не встречающиеся в других задачниках, некоторые из них явно олимпиадного содержания.

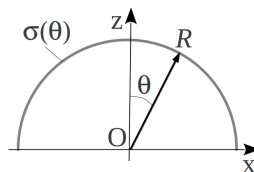
При оценивании решения предусмотрена оценка-автомат “отлично”. Дело в том, что при сдаче устного экзамена учитываются результаты письменного. Получивший на письменном экзамене оценку-автомат “отлично” освобождается от устного экзамена, и ему выставляется итоговая оценка “отлично” в том случае, если студент написал работу на ступень выше “пятерки”. При этом обязательным условием является получение оценки “отлично” за работу в семестре. Студенты, набравшие наибольшее количество баллов, становятся призерами олимпиады. Их работы отмечаются деканатом физического факультета.

Условия задач

2007/2008 учебный год

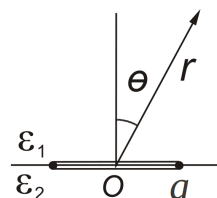
Контрольная работа 1

Задача 1 Полусфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma(\theta) = \sigma_0 \sin \theta$. Найти электрическое поле в точке O (2 б).



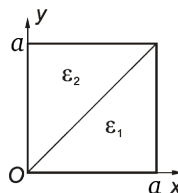
Задача 2

В плоской границе раздела двух полупространств с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 находится равномерно заряженное кольцо радиуса a с общим зарядом q . Найти два первых ненулевых члена разложения потенциала $\varphi(r, \theta)$ для расстояний $r \gg a$ (4 б).



Задача 3

Металлическая тонкостенная труба квадратного поперечного сечения заполнена однородными диэлектриками ϵ_1 и ϵ_2 , как показано на рисунке. В области диэлектрика ϵ_1 распределение потенциала известно: $\varphi_1(x, y) = \varphi_0 \frac{(a-x)y}{a^2}$, $\varphi_0 = \text{const}$. Найти распределение потенциала $\varphi_2(x, y)$ (2 б) и рас-



пределение свободных зарядов на границе раздела диэлектриков (3 б).

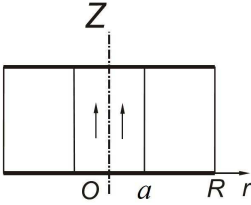
Задача 4

Диэлектрическая проницаемость среды в пространстве между обкладками плоского конденсатора задана функцией

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0(1 + \alpha x) & \text{при } 0 < x < d/2 \\ 1 & \text{при } d/2 \leq x \leq d, \end{cases}$$

где d – расстояние между обкладками. Найти напряженность поля $E(x)$ между обкладками, если приложенное напряжение равно U (3 б).

Задача 5



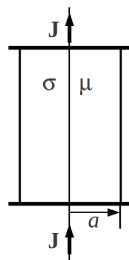
Пространство между двумя идеально проводящими электродами радиуса R заполнено однородной средой с проводимостью σ . В части этой среды в объеме цилиндра радиуса a (см. рисунок) действуют сторонние силы с напряженностью $\mathbf{E}_{\text{стр}} = E_0 \mathbf{e}_z$. Найти распределение плотности тока в среде $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ (3 б) и распределение поверхностных токов в электродах (2 б). Ответ обосновать точной математической формулировкой задачи.

Экзаменационная работа 1

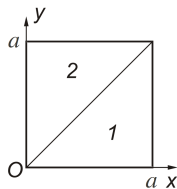
Задача 1 На расстоянии l от бесконечного прямого провода, по которому идет постоянный ток J , расположен непроводящий шарик радиуса a , $a \ll l$, с магнитной проницаемостью μ . Найти силу, действующую на шарик (3 б).

Задача 2

В разрыв бесконечного прямого провода с постоянным током J вставлен сплошной цилиндрический участок радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ (см. рисунок). Торцы цилиндра соединены в центре с концами провода и являются идеально проводящими. Найти распределение тока в цилиндре (2 б) и магнитное поле во всем пространстве (1 б).

**Задача 3**

Тонкостенная труба квадратного сечения с идеально проводящими стенками разделена плоской границей с поверхностным током $i_z = i(x)$, направленным вдоль оси z . В области 1 распределение магнитного поля задано векторным потенциалом $A_{1z} = A_0(x-a)y$.



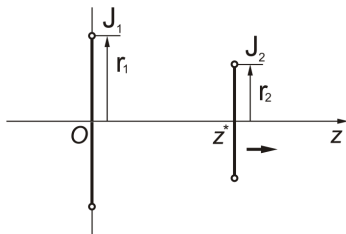
1. Найти распределение векторного потенциала $A_{z2}(x, y)$ в области 2 (2 б).

2. Определить распределение тока $i(x)$ на границе (2 б).

Указание: граница раздела не является идеальным проводником.

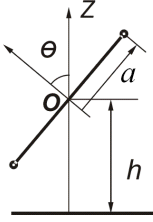
Задача 4

Два соосных сверхпроводящих витка занимают начальное положение в плоскости $z = 0$, имея токи $J_{10} \neq 0$ и $J_{20} = 0$ соответственно. Радиусы витков r_1 и $r_2 \ll r_1$, индуктивности L_1 и L_2 . Малый виток перемещают вдоль оси z , как показано на рисунке.



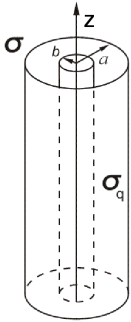
1. Считая коэффициент взаимной индукции известной функцией $L_{12}(z^*)$, найти значение токов $J_{10}(z^*)$ и $J_{20}(z^*)$ в зависимости от координаты z^* малого витка (3 б).

2. Вычислить функцию $L_{12}(z^*)$ (2 б).



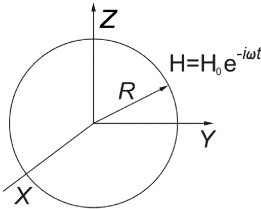
Задача 5

На какую величину ΔL изменится индуктивность тонкого кругового витка радиуса a , если на большом расстоянии h ($h \gg a$) от его центра O поместить сверхпроводящую плоскость так, что угол между ней и плоскостью кольца равен θ ? Указать явно, увеличится или уменьшится индуктивность (5 б).



Задача 6

В проводнике с проводимостью σ , заполняющем все пространство, имеется бесконечная цилиндрическая полость радиуса a . В полости соосно с этим цилиндром расположен тонкостенный непроводящий цилиндр радиуса b , на котором равномерно распределен поверхностный заряд с плотностью σ_q . Внутренний цилиндр колеблется (вдоль оси z) по закону $v_z = v_0 e^{-i\omega t}$. Найти установившееся электрическое и магнитное поле в случае сильного скин-эффекта (6 б).



Задача 7

Тонкостенная непроводящая сфера радиуса R с центром в точке O заряжена равномерно распределенным поверхностным зарядом с плотностью σ и находится в однородном периодическом во времени магнитном поле $H = H_0 e^{i\omega t}$ ($R \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$). Найти амплитуду магнитного поля внутри сферы и угловую скорость Ω вращения сферы, обладающей моментом инерции I_0 .

Указание: искать решение для потенциала в виде $\varphi = (Ar + \frac{B}{r^2}) \cos(\theta)$ (7 б).

Контрольная работа 2

Задача 1

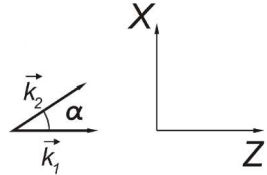
Эллиптически поляризованные волны с волновыми векторами \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , лежащими в плоскости (xy) , заданы полями

$$\mathbf{E}_1(z, t) = (E_{11}\mathbf{e}_x - iE_{12}\mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)},$$

$$\mathbf{E}_2(x, z, t) = (E_{21}\mathbf{e}_x + E_{22} e^{i\delta} \mathbf{e}_y - E_{23}\mathbf{e}_z) e^{ik(\cos \alpha z + \sin \alpha x)} e^{-i\omega t},$$

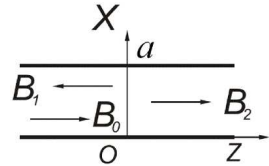
где $E_{ik} > 0$ – вещественные константы, δ – начальная фаза.

1. Вычислить интерференционный член I_{12} для этих волн (2 б).
2. Выяснить условия, при которых $I_{12} \equiv 0$, т. е. рассматриваемые волны не интерferируют (3 б).



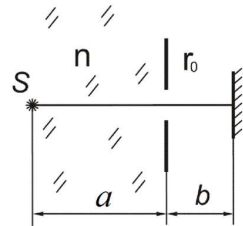
Задача 2

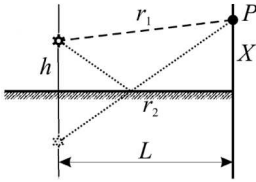
В плоскости $z = 0$ бесконечного прямоугольного волновода с сечением $a \times b$, ($a > b$) с идеально проводящими стенками натянута тонкая пленка с проводимостью σ_* , определяющей связь $\mathbf{i} = \sigma_* \mathbf{E}_\perp$ между поверхностной плотностью тока в пленке и поперечной составляющей электрического поля $E_\perp = (E_x, E_y)$. Вдоль волновода бежит волна типа H_{10} с полем $B_z = B_0 \cos(\frac{\pi}{a}x) e^{i(k_z z - \omega t)}$. Найти амплитуду B_1 в волне $B_z^{(1)} = B_1 \cos(\frac{\pi}{a}x) e^{i(-k_z z - \omega t)}$, отраженной от пленки (5 б).



Задача 3

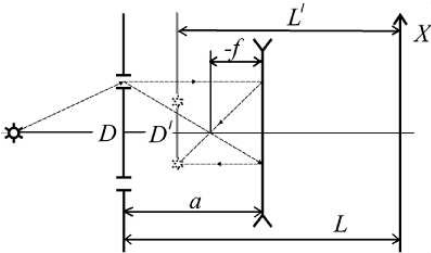
Монохроматический точечный источник S находится на расстоянии a от непрозрачного экрана с круглым отверстием, как показано на рисунке. Между экраном и источником помещена стеклянная пластина с показателем преломления n . При каком минимальном радиусе отверстия освещенность в точке P на расстоянии b от экрана будет максимальна? (3 б)





Задача 4

Построить интерференционную картину схемы Ллойда с источником излучения в виде длинной тонкой нити, параллельной экрану и зеркалу. Источник создает квази-монохроматическую цилиндрическую волну с заданной частотой ω и случайно меняющейся в моменты времени $t_k = kT_0$ амплитудой, характеризуемой средним \overline{A} и средне-квадратичным $\overline{A^2}$ значениями (4 б).



Задача 5

В схеме Юнга используется источник излучения с постоянной спектральной плотностью в интервале частот $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$. На расстоянии a от плоскости со щелями (между этой плоскостью и экраном) установлена двояковогнутая тонкая линза с радиусами кривизны $R_1 < 0$ и $R_2 > 0$ и показателем преломления n . Задавая необходимые размеры, найти положение максимумов и оценить размер области, где видна интерференционная картина (4 б).

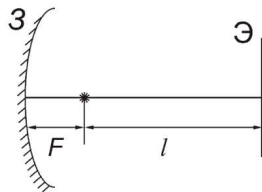
Экзаменационная работа 2

Задача 1

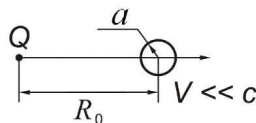
Параксиальный пучок света проходит через полусферическую линзу радиуса R с показателем преломления n . Найти положение фокуса относительно плоской поверхности линзы, если пучок падает на выпуклую поверхность линзы (2 б), и положение фокуса относительно выпуклой поверхности линзы, если пучок падает на плоскую поверхность линзы (2 б).

Задача 2

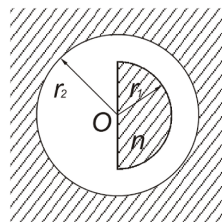
В фокусе F параболического идеально отражающего зеркала помещен точечный источник света с длиной волны $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$. Найти интерференционную картину (2 б) и ее размер (2 б) на экране \mathcal{E} , расположенном на расстоянии l от источника.

**Задача 3**

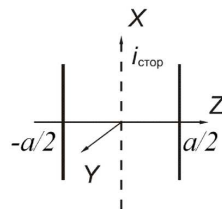
Шарик радиуса a с диэлектрической проницаемостью ϵ движется по прямой в направлении от неподвижного точечного заряда Q с постоянной скоростью $v \ll c$. Найти энергию, излученную шариком на пути от начального положения (расстояние до заряда $R_0 \gg a$) до бесконечности (4 б).

**Задача 4**

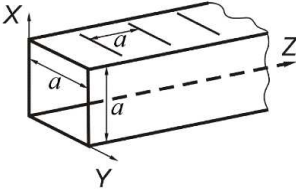
Плоская монохроматическая волна $E_0 e^{i(kr - \omega t)}$ падает по нормали на плоский непрозрачный экран с отверстием радиуса $r_2 = \sqrt{2\lambda z_p}$, где z_p – координата точки наблюдения на оси симметрии. Найти значение толщины стеклянного полудиска с показателем преломления n и радиуса $r_1 = \sqrt{\lambda z_p}$, чтобы амплитуда волны в точке P достигала максимально возможного уровня. Чему равно это максимальное значение? Отражением пренебречь (4 б).

**Задача 5**

Вынужденные колебания электромагнитного поля в плоской щели шириной a с идеально проводящими стенками возбуждаются сторонним поверхностным током $\mathbf{i}_{\text{стор}} = i_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_y$, распределенным в плоскости $z = 0$ (см. рисунок). Найти распределение полей $\mathbf{E}(z, t)$, $\mathbf{B}(z, t)$ внутри щели (4 б) и энергию поля



(1 б), приходящуюся на объем с ограниченной площадью S в плоскости (XY) .



Задача 6

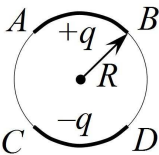
По волноводу с квадратным сечением $a \times a$, заполненному диэлектриком с проницаемостью ϵ , вдоль оси Z распространяется волна H_{10} с частотой $\omega = 2\sqrt{\epsilon}\omega_{min}$ (где ω_{min} – минимальная частота волны, способной распространяться по данному волноводу без затухания). В волноводe на верхней стенке (см. рисунок) прорезаны узкие щели (ширина много меньше длины волны), расположенные периодически на расстоянии a . Найти, при каких значениях ϵ угловая зависимость интенсивности излучения, выходящего из щелей волновода, будет иметь максимум в направлении X . Затуханием волны в волноводe из-за потерь пренебречь (5 б).

Задача 7

Плоская монохроматическая волна с амплитудой E_0 падает по нормали на тонкую проводящую фольгу с проводимостью σ^* ($\mathbf{i} = \sigma^* \mathbf{E}$). Фольга движется (как целое со скоростью \mathbf{v} ($v \sim c$)) так, что $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_0) = 0$. Найти амплитуду прошедшей и отраженной волн (5 б).

2008/2009 учебный год

Контрольная работа 1

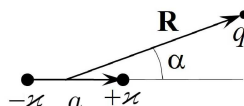


Задача 1

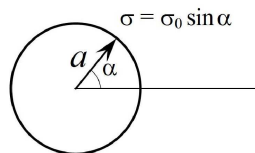
Участки AB и CD тонкого непроводящего кольца радиуса R равномерно (с постоянной линейной плотностью) заряжены зарядом $+q$ и $-q$ соответственно. Точки $ABCD$ образуют вершины квадрата. Найти электрическое поле в центре кольца (3 б).

Задача 2

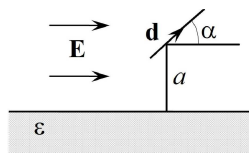
Две бесконечные параллельные нити, расположенные на расстоянии a друг от друга, равномерно заряжены с линейными плотностями $+\kappa$ и $-\kappa$. Найти силу, действующую на заряд q , удаленный на расстояние $R \gg a$ от нитей. Угол между векторами \mathbf{R} и \mathbf{a} равен α (4 б).

**Задача 3**

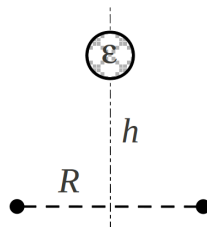
По тонкостенному бесконечно длинному непроводящему цилиндру радиуса a поверхностные заряды распределены по закону: $\sigma = \sigma_0 \sin \alpha$. Найти электрическое поле во всем пространстве (4 б).

**Задача 4**

На расстоянии a от полупространства, заполненного однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ , закреплен центр точечного диполя с дипольным моментом d . Диполь может свободно вращаться, изменяя направление вектора \mathbf{d} . Параллельно границе полупространства приложено однородное внешнее электрическое поле \mathbf{E} . Найти установившееся равновесное значение угла α между направлением \mathbf{E} и \mathbf{d} (5 б).

**Задача 5**

На оси симметрии тонкого кольца радиуса R , заряженного зарядом q , на расстоянии h от его центра расположен диэлектрический шарик радиуса a ($a \ll R$) с проницаемостью диэлектрика ϵ . Какая сила действует на шарик? (5 б)



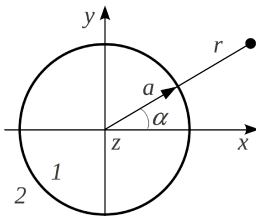
Задача 6

Сплошной бесконечно длинный цилиндр радиуса a с проводимостью σ_1 находится в однородном проводнике с проводимостью σ_2 . Внутри цилиндра действует стороннее однородное поле \mathbf{E} , направленное перпендикулярно оси цилиндра. Найти распределение тока во всем пространстве (5 б).

Экзаменационная работа 1

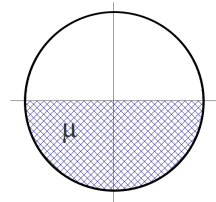
Задача 1

По тонкой квадратной рамке со стороной a , лежащей в плоскости xy , протекает ток I . Найти магнитное поле \mathbf{B}_0 в центре рамки (2 б).



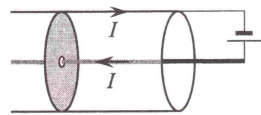
Задача 2

Ось полого бесконечно длинного цилиндра радиуса a совпадает с осью z . Внутри цилиндра (область 1) векторный потенциал магнитного поля равен $\mathbf{A}_1 = C_0 \frac{r}{a} \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_z$. Снаружи (область 2) $\mathbf{A}_2 = C_0 \frac{a}{r} \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_z$. Найти распределение магнитного поля $\mathbf{B}(r, \alpha)$ всюду. Каким распределением токов $i(\alpha)$ создано это поле? (3 б)



Задача 3

По бесконечно длинному соленоиду с плотностью намотки n течет ток I . Соленоид наполовину заполнен средой с магнитной проницаемостью μ . Найти магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ и распределение молекулярных токов i_m (3 б).



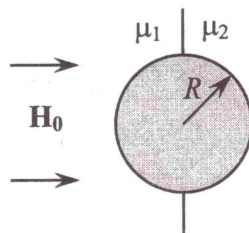
Задача 4

Коаксиальный кабель, жила и обмотка которого имеют бесконечную проводимость и радиусы r_1 и r_2 , замкнут накоротко подвижным проводящим диском. Найти силу, действующую на этот

диск, когда по кабелю течет ток I . Указать направление этой силы (3 б).

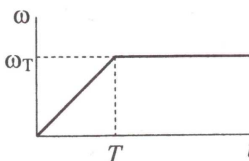
Задача 5

Сверхпроводящий шар радиуса R делится пополам плоской границей раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . В среде с μ_1 далеко от границы задано однородное магнитное поле \mathbf{H}_0 , направленное перпендикулярно границе раздела. Найти \mathbf{B} и \mathbf{H} во всем пространстве, а также линейную плотность тока на поверхности сверхпроводника (5 б).



Задача 6

Бесконечно длинный цилиндрический стержень радиуса a с магнитной проницаемостью μ заряжен с поверхностной плотностью σ . На стержень надето проводящее кольцо сопротивлением R и индуктивностью L . За время T стержень раскручивается вокруг своей оси до угловой скорости ω_T . Кольцо остается неподвижным. Найти энергию, выделившуюся в кольце (4 б).



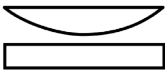
Задача 7

Непроводящий полый цилиндр массой m , радиуса a и длиной $l \gg a$ помещен в однородное магнитное поле \mathbf{B}_0 , параллельное оси цилиндра. Поверхность цилиндра равномерно заряжена с плотностью σ . Определить установившуюся угловую скорость первоначально неподвижного цилиндра после выключения магнитного поля (4 б).

Контрольная работа 2

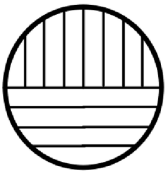
Задача 1

От каждой из двух плоских параллельных пластин, если использовать их порознь, отражается 10 % интенсивности света. Какая доля интенсивности света пройдет через эту пару пластин, если расстояние между ними много больше продольной длины когерентности? (3 б)



Задача 2

Собирающая линза положена на плоскую стеклянную пластину, причем вследствие попадания пыли между линзой и пластиной есть зазор. Диаметры 5 и 15-го темных колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете ($\lambda = 589$ мкм), равны соответственно 0,7 и 1,7 мм. Определить радиус кривизны поверхности линзы, обращенной к пластинке. Влиянием пылинок на прохождение света пренебречь (3 б).



Задача 3

Плоская монохроматическая волна естественного света с интенсивностью I_0 падает на непрозрачный экран с круглым отверстием, представляющим для точки P первую зону Френеля. Отверстие перекрывают двумя поляризаторами с перпендикулярными направлениями поляризации, закрывающими каждый половину круга. Найти интенсивность в точке P и сравнить со случаем, когда отверстие перекрыто одним поляризатором (3 б).

Задача 4

На расстоянии a от точечного источника O и соответственно b от точки наблюдения P расположен экран, перпендикулярный (OP). В экране вырезано кольцо с центром на отрезке $[OP]$ с внутренним радиусом r_1 и внешним r_2 . Считая r_1 заданным, найти минимальное значение r_2 , при котором интенсивность в точке P будет такой же, как в отсутствие экрана (3 б).

Задача 5

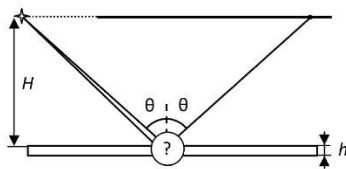
В H_{nm} -волне, распространяющейся по волноводу, структура продольной компоненты магнитного поля $\hat{B}_z = \hat{B}_z^{(m,n)}(x, y) e^{ikz}$ и собственные значения $\gamma_{m,n}$ (определяются из задачи

$$\Delta_{\perp} \hat{B}_z^{(m,n)}(x, y) + \gamma_{mn}^2 \hat{B}_z^{(m,n)}(x, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \hat{B}_z^{(m,n)}}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0)$$

известны. С помощью двух поперечных перегородок $z = 0, z = L$ из данного волновода получили резонатор. Найти спектр собственных частот этого резонатора для моды колебаний с электрическим полем, не имеющим z -составляющей (3 б) Какова здесь z -компонента магнитного поля B_z как функция x, y, z ? (1 б)

Задача 6

Пучки света, отраженные двумя поверхностями стеклянной пластинки толщиной h с показателем преломления n , создают интерференционные полосы на экране (см. рисунок). Источником света служит точечный квазимонохроматический источник с шириной спектра $\Delta\omega \ll \omega_0$ вблизи основной частоты ω_0 . Аппроксимируя истинный контур спектральной линии прямоугольником шириной $\Delta\omega$, найти значение угла $\theta = \theta_0$, характеризующего положение точки на экране, где видность полос обращается в нуль, если $h = \pi c / \Delta\omega$, $H/h \gg 1$, $1 < n < \sqrt{2}$ (5 б).



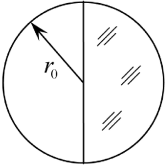
Экзаменационная работа 2

Задача 1

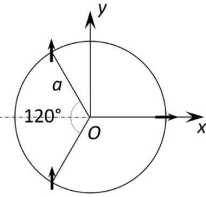
Могут ли перекрываться спектры 1-го и 2-го порядков дифракционной решетки при освещении ее видимым светом ($\lambda = 400 \div 700$ нм)? Обосновать ответ (2 б).

Задача 2

Найти коэффициенты отражения и прохождения для ТМ-волны, падающей под углом θ на плоскую пластину с поверхностной проводимостью σ^* ($i = \sigma^* E$) (3 б).

**Задача 3**

На плоский непрозрачный экран с круглым отверстием падает по нормали плоская монохроматическая волна $\mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$. Половина отверстия закрыта стеклянной пластиной толщиной $\Delta = \frac{\lambda}{4(n-1)}$. Радиус отверстия $r_0 = \sqrt{\lambda z_p}$ (точка наблюдения P находится на оси симметрии на расстоянии $z_p \gg r_0$ от отверстия). Найти электрическое поле в точке P (3 б).

**Задача 4**

Три точечных синфазных вибратора с одинаковыми по модулю дипольными моментами, осциллирующими по закону $d_0 e^{-i\omega t}$, расположены на окружности радиуса a в плоскости xy , как показано на рисунке. Принимая $a = \lambda$ ($\lambda = 2\pi c/\omega$), найти магнитное поле \mathbf{B} в начале координат (4 б).

Задача 5

Вдоль серединного перпендикуляра к отрезку длиной h , соединяющему два закрепленных одинаковых точечных заряда q , пролетает ультрарелятивистский электрон (заряд e , масса m , начальная энергия γmc^2). Найти потерянные электроном энергию $\Delta \epsilon$ (2 б) и импульс ΔP (2 б).

Задача 6

На цилиндр длиной l , радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ падает плоскополяризованная электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$. Векторы \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} перпендикулярны оси цилиндра, $l \gg R$. Длина волны $\lambda \gg R\sqrt{\epsilon}$, но сравнима с длиной цилиндра. Найти дифференциальное сечение рассеяния волны $d\sigma/d\Omega$

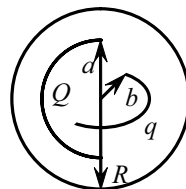
как функцию углов θ и α сферической системы координат, ось z которой направлена вдоль вектора \mathbf{E}_0 (5 б).

2009/2010 учебный год

Контрольная работа 1

Задача 1

Система двух тонких концентрических проводящих полуколец с зарядами Q и q и радиусами a и b помещена по центру заземленной проводящей сферы радиуса $R > a > b$. Найти потенциал в центре сферы в случае, когда плоскости колец перпендикулярны (2 б).



Задача 2

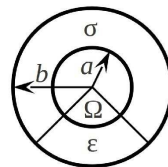
Проводящий шар радиуса a , находящийся в центре проводящей заземленной сферы радиуса $b > a$, имеет потенциал φ_0 . Найти заряд на шаре (2 б).

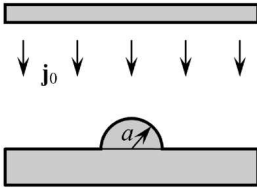
Задача 3

Два одинаковых металлических шарика радиуса a подключены к источнику постоянного напряжения U и удерживаются на расстоянии ℓ друг от друга ($\ell \gg a$). Какую механическую работу необходимо затратить, чтобы увеличить расстояние между шариками на Δ ? Какую работу совершает при этом источник напряжения? Каков знак этой работы? (4 б)

Задача 4

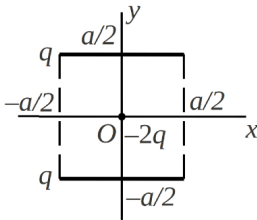
Найти время релаксации заряда, помещенного на внутренний электрод сферического конденсатора, часть которого в секторе с телесным углом Ω заполнена диэлектриком с проницаемостью ϵ , а оставшаяся часть — проводником с проводимостью σ (4 б).





Задача 5

Пространство между двумя плоскими электродами заполнено проводящей средой с проводимостью σ . Нижний электрод очень толстый, его удельное сопротивление близко к нулю. На этом электроде имеется небольшой полуцилиндрический выступ радиуса a . Из верхнего электрода в нижний идет ток, плотность которого у верхнего электрода практически постоянна и равна \mathbf{j}_0 . Найти величину тока J , идущего через выступ на единицу его длины (5 б).



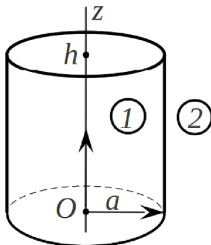
Задача 6

Два равномерно заряженных отрезка длиной a с зарядами q и точечный заряд $-2q$ расположены в плоскости (x, y) , как показано на рисунке. Найти первый ненулевой член мультипольного разложения потенциала как функцию $\varphi(x, y, z)$ на большом расстоянии ($r \gg a$) от начала координат (5 б).

Экзаменационная работа 1

Задача 1

У Земли пропало магнитное поле. ООН решило проложить один виток провода по экватору, чтобы воссоздать поле величиной $0,6 \text{ Э}$ на полюсе. Найти необходимую для этой задачи величину тока в амперах. Радиус Земли 6400 км (2 б).



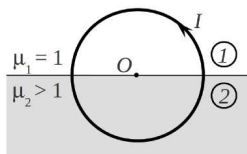
Задача 2

Дно и крышка проводящей тонкостенной цилиндрической банки посередине соединены прямым проводом, по которому идет постоянный ток I . Пользуясь цилиндрическими координатами r, α, z , получить:

- 1) распределение поверхностной плотности тока по всем элементам замкнутой поверхности (1 б);
- 2) граничные условия для B_r , B_α и B_z на этих элементах (2 б);
- 3) поля $\mathbf{B}_{1,2}$ внутри и вне банки (2 б).

Задача 3

Круговое кольцо с током наполовину погружено в полупространство, заполненное магнетиком с $\mu_2 > 1$, как показано на рисунке. Найти поля $\mathbf{B}_{1,2}$ в областях 1, 2, считая поле от данного кольца с током в вакууме известным ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$) (2 б). Выяснить, где протекают молекулярные токи и как определить их интенсивность (2 б).

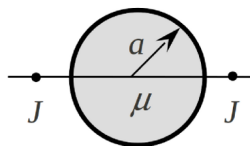


Задача 4

Плоский конденсатор, расстояние d между круглыми пластинами которого много меньше их радиуса a , заполнен средой с диэлектрической проницаемостью ϵ и проводимостью σ . Начальный заряд q_0 . Определить магнитное поле, создаваемое токами проводимости, и полное магнитное поле (3 б).

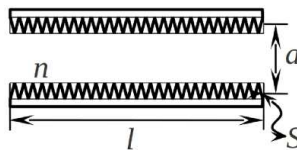
Задача 5

Две параллельные нити с токами, равными J , расположены симметрично относительно оси цилиндра из магнетика с $\mu < 1$, имеющего радиус a . Найти расстояние между нитями x ($x > 2a$), при котором силы, действующие на них, равны нулю (3 б).



Задача 6

Найти взаимную индуктивность двух тонких одинаковых параллельных соленоидов длиной l , плотностью намотки n , сечением S , расположенных на расстоянии a друг от друга ($a, l \ll \sqrt{S}$) (4 б).



Задача 7

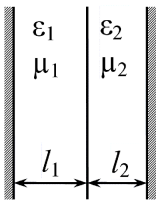
Найти тепловую мощность, выделяющуюся в полупространстве, заполненном проводником с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ , над которым на высоте h находится маленький виток с током $I = I_0 e^{-i\omega t}$ ($c^2 \ll \sigma \mu \omega h^2$) радиуса a ($a \ll h$), параллельный поверхности среды (5 б).

Контрольная работа 2**Задача 1**

По бесконечно длинному идеальному пустому волноводу, сечение которого — квадрат со стороной a , вдоль оси z бегут одновременно две ТЕ-волны одинаковой частоты $\omega = 2\pi c/a$. В момент времени $t = 0$ распределение продольной компоненты магнитного поля в плоскости $z = 0$ имеет вид

$$H_z(x, y)|_{z=0} = H_{z0} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2a}y\right)$$

Найти распределение $H_z(x, y, z)$ в тот же нулевой момент времени (5 б).

**Задача 2**

Найти собственные колебания и частоты в резонаторе, образованном двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, пространство между которыми заполнено двумя слоями вещества с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 соответственно. Рассмотреть случай $\varepsilon_1/\mu_1 = \varepsilon_2/\mu_2$ (5 б).

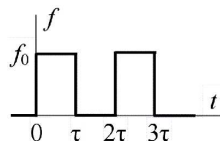
Задача 3

В волноводе с металлическими стенками квадратного сечения $a \times a$ область $z < 0$ заполнена диэлектриком с $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$, а область $z > 0$ — диэлектриком с $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$. По диэлектрику ε_1 к плоской границе идет волна H_{10} . В каком диапазоне частот $\omega_1 \div \omega_2$ должна

находиться частота волны, чтобы произошло полное отражение волны (3 б).

Задача 4

Для сигнала, заданного функцией $f(t)$ (см. рисунок), найти спектральную плотность f_ω (2 б).

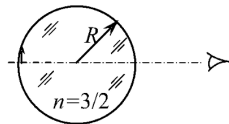


Задача 5

На идеально проводящее полупространство $z \geq 0$ из пустоты падает плоская монохроматическая ТМ-волна с амплитудой E_0 и частотой ω под углом φ к оси z (zx — плоскость падения). Найти распределение поверхностной плотности зарядов $\sigma(x, t)$ и тока $i_0(x, t)$ на поверхности проводника (3 б).

Задача 6

Внутри стеклянного шарика с показателем преломления $3/2$ вблизи поверхности находится мелкий предмет. Найти увеличение предмета, если его рассматривать с обратной стороны шарика (3 б).



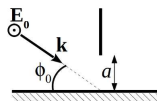
Экзаменационная работа 2

Задача 1

Плоская световая волна с длиной волны λ падает по нормали на экран с двумя узкими параллельными щелями шириной a и $2a$ и расстоянием d между ними. Найти распределение интенсивности на экране, отстоящем на расстояние l от экрана со щелями, и видность этой интерференционной картины (2 б).

Задача 2

Над идеально отражающим плоским зеркалом на высоте a расположен плоский абсолютно поглощающий экран. Слева под углом ϕ_0 к



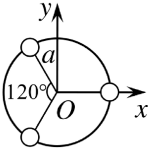
плоскости зеркала падает плоская линейно поляризованная ТЕ-волна с длиной волны $\lambda \ll a$. Найти распределение интенсивности дифрагированного света по углу ϕ на расстоянии $R_0 \gg \frac{a^2}{\lambda}$. Оценить ширину его максимума $\Delta\phi$ (3 б).

Задача 3

На плоский непрозрачный экран с круглым отверстием, содержащим три зоны Френеля для точки P , находящейся на оси симметрии, падает по нормали плоская монохроматическая волна с амплитудой E_0 . Во сколько раз можно максимально увеличить амплитуду волны в точке P , имея возможность одну зону закрыть стеклянной пластиной? Какова должна быть при этом минимальная толщина пластины и какая по номеру зона должна быть закрыта? (4 б)

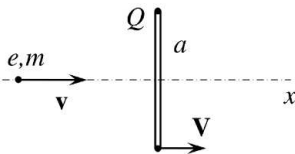
Задача 4

В плоскости $z = 0$ находится транспарант, амплитудный коэффициент пропускания которого имеет вид $t(x) = \frac{1+b\cos(\alpha x)}{1+b}$. На транспарант слева нормально падает плоская монохроматическая волна, амплитуда которой равна E_0 , а длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{a}$. Найти волны справа от транспаранта (4 б).



Задача 5

Три вращающихся диполя с дипольными моментами $\mathbf{d}_1 = d_0(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{i\omega t}$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_3 = d_0(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{i\phi_0}e^{i\omega t}$ ($\phi_0 = \text{const}$) расположены на окружности радиуса a в плоскости xy , как показано на рисунке. Принимая $a \gg \lambda$ ($\lambda = 2\pi\omega/c$), найти магнитное поле \mathbf{B} в начале координат (4 б).



Задача 6

Релятивистский электрон пролетает со скоростью v по оси симметрии массивного заряженного кольца, движущегося со скоростью V ($V < v$),

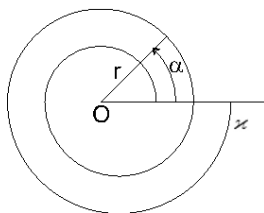
как показано на рисунке. Заряд кольца Q , его радиус a . Считая, что в системе кольца кинетическая энергия электрона $\mathcal{E} \gg \frac{e^2}{a}$, найти потерянные на излучение энергию $\Delta\mathcal{E}$ и импульс ΔP (4 б).

2010/2011 учебный год

Контрольная работа 1

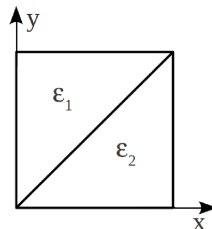
Задача 1

Плоская спираль, описываемая уравнением $r = a \exp(b\alpha)$, имеет N полных оборотов (см. рисунок, где для примера показана спираль при $N = 2$) и равномерно заряжена с линейной плотностью λ . Найти электрический потенциал в центре O спирали (2 б).



Задача 2

Длинная металлическая труба квадратного поперечного сечения со сторонами a заполнена однородными диэлектриками ϵ_1 и ϵ_2 , как показано на рисунке. Граница раздела диэлектриков содержит равномерно распределенный свободный заряд с поверхностной плотностью Σ_0 .



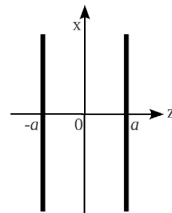
Определить распределение потенциала в областях 1 и 2.

Указание: потенциал в области 1 искать в виде $\phi_1 = C_1 x(y-a)$, $C_1 = \text{const}$; аналогично в области 2 (3 б).

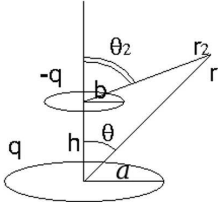
Задача 3

Заряд в пространстве распределен по закону:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right), & |z| \leq a \\ 0, & |z| > a \end{cases}$$
 Найти потенциал ϕ и напряженность электрического поля E во всем пространстве. Считать, что потенциал на оси x ра-

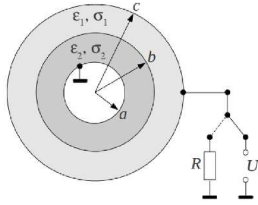


вен 0 ($\varphi(x,0,0)=0$) и что при $\rho_0 = 0$ внешнего электрического поля нет (4 б).



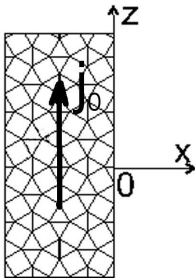
Задача 4

Два тонких кольца радиусами a и b , расположенные соосно в плоскостях $z = 0$ и $z = h$, равномерно заряжены зарядами q и $-q$. Найти два первых ненулевых члена разложения потенциала на больших расстояниях r (4 б).



Задача 5

Длинный цилиндрический конденсатор (радиусы обкладок a и c) имеет заполнение в виде двух concentric слоев с различными проводимостями (σ_1 и σ_2) и диэлектрическими проницаемостями (ϵ_1 и ϵ_2), причем $\sigma_1/\epsilon_1 = \sigma_2/\epsilon_2$. Радиус границы раздела слоев – b . Внутренняя обкладка конденсатора заземлена, к внешней приложено постоянное напряжение U . В некоторый момент времени $t = t_0$ внешнюю обкладку мгновенно отключают от источника напряжения и соединяют с землей через сопротивление R . Найти ток через сопротивление $I_R(t)$ (5 б).



Задача 6

Слой проводника, бесконечно протяженный по координатам y и z , имеет проводимость, меняющуюся по закону:

$$\sigma(z) = \frac{\sigma_0}{1 + p \sin(kz)},$$

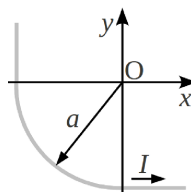
где σ_0 , $p < 1$, k – константы. По слою бежит ток с объемной плотностью $j_z = j_0 = \text{const}$. Определить:

- 1) распределение потенциала внутри слоя (2 б);
- 2) потенциал в окружающем пустом пространстве (2 б);
- 3) распределение зарядов $\Sigma(z)$ на поверхности слоя $x = 0$ (2 б).

Экзаменационная работа 1

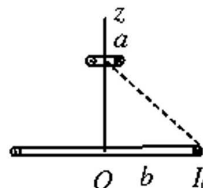
Задача 1

Ток I течет по двум перпендикулярным друг другу лучам, плавно (без изломов) соединенным дугой радиуса a . Найти магнитное поле в центре O дуги (2 б).



Задача 2

В неподвижном кольце радиуса b поддерживается постоянный ток I_0 . Идеально проводящее кольцо радиуса $a \ll b$ с индуктивностью L занимает положение, характеризуемое координатой z . В положении $z = 0$ ток в кольце равнялся нулю. Найти:



а) магнитное поле на оси z , т. е. $\mathbf{B}(z)$, создаваемое током I_0 в кольце радиуса b (1 б);

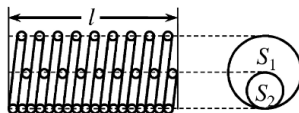
б) ток в малом кольце $I_a(z)$ в зависимости от его положения (2 б);

в) силу $\mathbf{F}(z)$, действующую на это кольцо (1 б);

г) работу, которую необходимо совершить, чтобы перенести кольцо из положения $z = 0$ до $z = \infty$ (1 б).

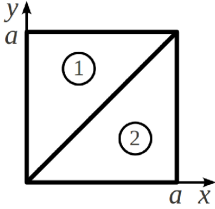
Задача 3

Катушка длиной l имеет $2N$ витков. Все витки охватывают цилиндры, нечетные – сечением S_1 , а четные – S_2 . Второй цилиндр касается первого изнутри ($l \gg \sqrt{S_1}$). Найти индуктивность такой катушки (3 б).



Задача 4

Найти индуктивность на единицу длины коаксиального кабеля (радиус жилы a , радиус оплетки b) при сильном скин-эффекте (3 б).



Задача 5

Внутри бесконечно длинной трубы квадратного поперечного сечения с идеально проводящими стенками имеется тонкая перегородка, показанная на рисунке, по которой пустили ток с поверхностной плотностью $\mathbf{i} = i_0 \mathbf{e}_z$, $i_0 = \text{const}$.

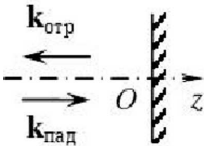
1. Воспользовавшись векторным потенциалом $\mathbf{A}_{1,2} = A_{1,2}(x, y) \mathbf{e}_z$, найти распределение магнитного поля $\mathbf{B}_{1,2}(x, y)$ внутри трубы (3 б).

2. Найти уравнение семейства силовых линий $y = y(x, p)$, p – свободный параметр, и представить их качественную картину (3 б).

Задача 6

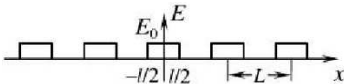
Проводящее кольцо площадью S с индуктивностью L и сопротивлением R движется с постоянной скоростью v вдоль оси z , на которой магнитное поле изменяется по закону $\mathbf{B}_z = B_0 \cos(kz) \mathbf{e}_z$ ($k \ll \sqrt{S}$). Найти среднюю силу торможения, действующую на кольцо (5 б).

Контрольная работа 2



Задача 1

Волна круговой поляризации с электрическим полем $\mathbf{E}_{\text{пад}}(z, t) = E_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) e^{i(\mathbf{k}z - \omega t)}$ падает на идеально проводящую границу $z = 0$. Выписать выражение для магнитного поля $B_{\text{отр}}(z, t)$ отраженной волны, считая $\epsilon = \mu = 1$ в полупространстве $z < 0$ (2 б).



Задача 2

Вычислить спектральную плотность функции $E(x)$, состоящей из пяти одинаковых прямоугольных импульсов, как показано на рисунке. Результат изобразить графически в виде энергетического спектра $|E(k)|^2$, отметив его характерные особенности

сти. Принять $L = 2l$, на оси абсцисс отложить переменную $kl/2$ (3 б).

Задача 3

Найти расстояние между точечным источником и его изображением в выпуклом сферическом зеркале с радиуса кривизны R , если источник находится на расстоянии a от зеркала ($a \ll R$) (2 б).

Задача 4

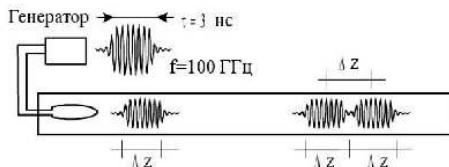
В модифицированном опыте Юнга на плоский экран с тремя одинаковыми тонкими параллельными щелями, расположенными на расстоянии d друг от друга, падает по нормали свет с длиной волны λ . Найти распределение интенсивности $I(x)$ на экране, параллельном экрану со щелями и отстоящем от него на расстоянии L (2 б).

Задача 5

Одна половина ($z < 0$) бесконечно длинного волновода прямоугольного поперечного сечения ($a > b$) пустая, а другая половина ($z > 0$) заполнена диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon > 1$. По пустой половине в направлении оси z бежит волна типа H_{10} с частотой ω и амплитудой электрического поля E_0 . Найти амплитуду волны (E_2), бегущей по области, занятой диэлектриком (4 б).

Задача 6

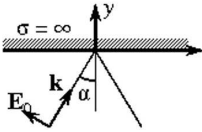
На антенну, расположенную в волноводе с поперечным сечением $1 \times 1 \text{ см}^2$, подается сигнал частотой $f = 100 \text{ ГГц}$ длительностью $\tau = 3 \text{ нс}$. СВЧ-антенна сконструирована таким образом, что возбуждает только колебания типа H_{10} и E_{12} . Оценить, на каком расстоянии от передающей антенны волновой пакет разделится надвое таким образом, что расстояние между центрами огибающих будет равно ширине пакетов. Расплыванием пакетов можно пренебречь (3 б).



Задача 7 (отдельная задача для геологов).

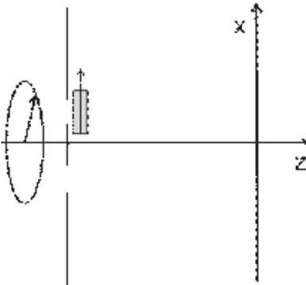
Найти интерференционную картину $I(x)$, создаваемую точечным монохроматическим источником (длина волны λ), помещенным в фокус зеркала, напыленного на внутреннюю поверхность половины полового эллипсоида вращения с полуосями a и b (2 б).

Экзаменационная работа 2



Задача 1

Монохроматическая плоская ТМ-волна с электрическим полем $\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ падает под углом α на границу идеально проводящего полупространства $y > 0$ (см. рисунок). Найти поверхностные плотности тока $i_x(x, t)$ и заряда $\Sigma(x, t)$, возникающие на границе $y = 0$ (3 б).



Задача 2

Две щели освещаются циркулярно поляризованным светом

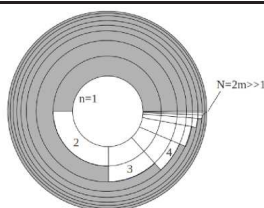
$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) E_0 / \sqrt{2} \exp(ikz - i\omega t)$, падающим перпендикулярно плоскости щелей (схема Юнга). Длины волн света равномерно распределены в узком диапазоне $\lambda \pm \Delta\lambda$, $\Delta\lambda \ll \lambda$. За

одной из щелей помещен поляроид, направление пропускания которого (x) совпадает с прямой, соединяющей щели (см. рисунок). Определить распределение интенсивности света $I(x)$ на экране, расположенном параллельно плоскости щелей на расстоянии l от нее. Расстояние между щелями d , их ширина существенно меньше длины волны света (2 б).

Задача 3

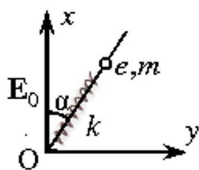
Во сколько раз изменится интенсивность света в дальнем фокусе зонной пластинки Френеля с четным числом зон $N \gg 1$ при

падении на нее плоской электромагнитной волны, если вместо закрытия четных зон закрыть 1/2 второй зоны, 3/4 третьей зоны, 7/8 четвертой и т. д.? Закрытие зон производится по углу (3 б).



Задача 4

Вдоль спицы, лежащей в плоскости xy под углом α к оси x , без трения может скользить заряд e массой m , прикрепленный к пружинке жесткостью k , второй конец которой закреплен в начале координат.



Вдоль оси z на систему падает плоская монохроматическая волна амплитудой E_0 , частотой $\omega \ll \sqrt{k/m}$, линейно поляризованная вдоль оси x . Найти амплитуду и поляризацию волны, рассеянной частицей вдоль оси z (5 б).

Задача 5

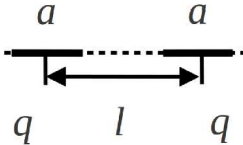
Найти отраженную волну и коэффициент отражения для плоской линейно поляризованной волны, падающей по нормали на идеальное зеркало,двигающееся навстречу этой волне со скоростью $v \sim c$ (3 б).

Задача 6

Ультрарелятивистский электрон с зарядом e и массой m_e влетает в ядро атома с зарядом Ze . Рассматривая ядро как однородно заряженный шар радиуса R , найти потери энергии электрона на излучение при прохождении через ядро вдоль его диаметра (3 б).

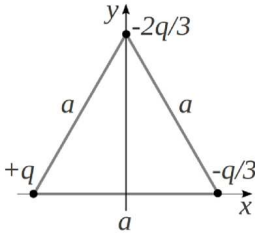
2011/2012 учебный год

Контрольная работа 1



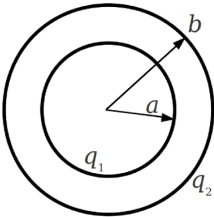
Задача 1

Два отрезка длиной a , заряженные равномерно по длине зарядом q каждый, лежат на одной прямой. Найти силу взаимодействия между отрезками, если расстояние между их центрами равно l ($l > a$) (4 б).



Задача 2

Заряды $+q$, $-\frac{2}{3}q$ и $-\frac{1}{3}q$ расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a , как показано на рисунке. Найти первый не исчезающий член разложения потенциала $\varphi(x, y, z)$ на расстояниях $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg a$ (3 б).



Задача 3

Две концентрические тонкостенные проводящие сферы с радиусами a и b заряжены зарядами q_1 и q_2 соответственно.

1. Найти потенциал внутренней сферы φ_1 (потенциал на бесконечности равен нулю).
2. Чему равен этот потенциал, если пространство между сферами – однородный диэлектрик с проницаемостью ϵ ? (3 б)

Задача 4

Проводящая незаряженная сфера радиуса R и массой M свободно плавает в диэлектрике с проницаемостью ϵ , погрузившись в нее на четверть своего объема. Какой заряд Q нужно нанести на сферу, чтобы она погрузилась на половину своего объема? Ускорение свободного падения равно g (5 б).

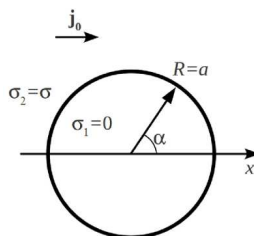
Задача 5

Заземление представляет собой идеально проводящий шар радиуса a , помещенный в бесконечную среду с проводимостью σ .

1. Найти сопротивление заземления.
2. Найти сопротивление заземления, если в среде образовалась сферическая полость радиуса b , заполненная идеальным проводником (внутри полости $\sigma_{in} = \infty$), расстояние между центрами заземляющего шара и полости равно l .
3. Найти сопротивление заземления, если полость не проводит ток (внутри полости $\sigma_{in} = 0$). Качественно нарисовать линии тока во всех случаях, $l > a + b$, $a \ll b$, $l - b$ (5 б).

Задача 6

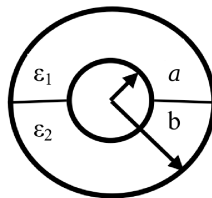
В бесконечной среде с проводимостью σ шел однородный ток с плотностью j_0 вдоль оси x . В среде возникла цилиндрическая полость радиуса a бесконечной длины (внутри полости $\sigma_{in} = 0$). Ось цилиндра перпендикулярна направлению тока j_0 . Найти результирующее распределение токов $j(r, \alpha)$ (4 б).



Экзаменационная работа 1

Задача 1

Найти емкость длинного ($l \gg b, a$) цилиндрического конденсатора (сечение показано на рисунке), верхняя и нижняя половины которого заполнены диэлектриком с проницаемостью ϵ_1 , ϵ_2 соответственно. Найти силу, действующую на внутреннюю обкладку, если разность потенциалов между обкладками равна U . Краевыми эффектами пренебречь (4 б).

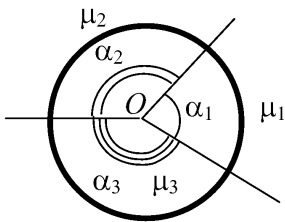


Задача 2

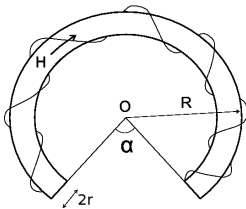
Тонкое круглое кольцо, равномерно заряженное с линейной плотностью η , вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω . Найти усредненную за период линейную плотность тока и магнитное поле в центре кольца (3 б).

Задача 3

Однородно заряженный с объемной плотностью заряда ρ бесконечный цилиндр радиуса a вращается вокруг своей оси с равномерно возрастающей угловой скоростью $\omega = kt$. Найти электрическое и магнитное поле во всем пространстве в зависимости от времени (4 б).

**Задача 4**

Тонкое проводящее кольцо, обладающее в вакууме индуктивностью L_0 , поместили в магнетик. Магнетик состоит из трех областей, границы между которыми образуют три двугранных угла $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$), исходящих из общей прямой, совпадающей с осью кольца. Магнитные проницаемости в каждой области равны μ_1, μ_2, μ_3 соответственно. Найти индуктивность L кольца с учетом среды (4 б).

**Задача 5**

Тонкий соленоид представляет собой часть тора. Угловой размер отсутствующего сектора равен α . По плотной равномерной обмотке соленоида протекает ток, создающий внутри магнитное поле с напряженностью \mathbf{H} , направленное по часовой стрелке. Определить величину и направление магнитного поля в центре тора (точке O). Радиус тора равен R , сечение тора – круг радиуса r ($r \ll R$). Соленоид заполнен магнетиком с магнитной проницаемостью μ , магнитная проницаемость окружающей среды равна 1 (5 б).

Задача 6

Один из лауреатов Нобелевской премии по физике 2010 года (за открытие графена) Андрей Гейм является также лауреатом Анти-Нобелевской премии за опыты по левитации лягушки. В его опытах лягушка висела в поле тяжести g над магнитной катушкой. Связано это с тем, что живые организмы являются слабыми диамагнетиками, так как в основном состоят из воды, а $\mu_{\text{воды}} - 1 \approx -10^{-5}$. Оценить, какое магнитное поле должно быть в центре катушки радиуса 5 см (длину катушки считать много большей радиуса), чтобы лягушка висела вблизи торца вертикально стоящей катушки. Оценку обосновать. Устойчиво ли положение лягушки?

Указание: лягушку рассмотреть как маленький шар с плотностью $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, для нахождения поля на оси катушки воспользоваться задачей 4.1 из сборника [1] (5 б).

Контрольная работа 2**Задача 1**

Эллиптически поляризованный свет падает на пластину идеального поляроида по нормали к ее поверхности. Вектор электрического поля задан в виде $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_{0x}\mathbf{e}_x + iE_{0y}\mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$. Ось пропускания поляроида составляет с осью x угол φ . Определить, какая доля интенсивности волны пройдет через поляроид (3 б).

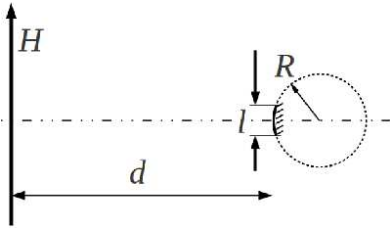
Задача 2

Сигнал $E(t)$ зависит от времени следующим образом: $E = 0$ при $t < 0$; $E = 1$ при $0 \leq t \leq \tau$; $E = -1$ при $2\tau \leq t \leq 3\tau$; $E = 0$ при $t > 3\tau$. Найти модуль спектральной мощности $|E(\omega)|$ (3 б).

Задача 3

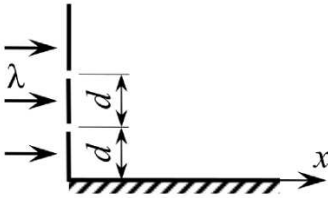
На вход пустого волновода с идеально проводящими стенками прямоугольного сечения $a \times b$ ($b < \frac{a}{2}$) подается сигнал длительностью τ и частотой $\omega^* = 2\omega_0$, где ω_0 – минимальная частота

H_{10} волны. Этот сигнал формирует в волноводе волновой пакет, состоящий из H_{10} волн. Оценить: а) начальную протяженность волнового пакета l_0 (2 б); б) за какой промежуток времени $T \gg \tau$ протяженность пакета удвоится? (3 б)



Задача 4

Поверхность елочного шара содержит зеркальные и матовые участки. В одном из зеркальных участков человек видит свое отражение. На каком минимальном расстоянии d от шара должен находиться человек, чтобы видеть себя в полный рост? Считать, что в этих условиях положение зеркального участка на сфере таково, что изображение, попадающее в поле зрения человека, точно укладывается по высоте в зеркальную область, без зазоров с ее границами (это не так на схематическом рисунке). Рост человека H , радиус шара R , размер зеркального участка l ($l \ll R$). (4 б)



Задача 5

На плоский экран с параллельными щелями, расстояние между которыми равно d , падает по нормали плоская волна длиной λ . Интерференционная картина наблюдается на экране, перпендикулярном экрану со щелями, расположенном на расстоянии d от ближней к нему щели. Найти расстояние между максимумами на этом экране Δx_m как функцию порядка максимума m на больших по сравнению с d расстояниях от щелей (4 б).

Задача 6

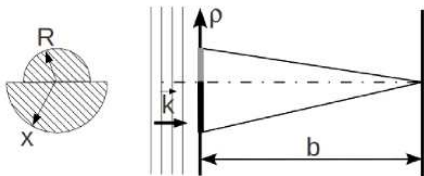
Найти видность и оценить размер интерференционной картины в схеме Юнга с точечным источником, обладающим частотным спектром в виде лоренцевского контура: $\frac{dI}{d\omega} = \frac{I_0 \gamma}{\pi((\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2)}$,

где $\gamma \ll \omega_0$. Расстояние от источника до экрана со щелями a , расстояние от экрана со щелями до экрана, на котором наблюдается интерференция, L , расстояние между щелями $2d$ (схема, как в задаче 3.1 [1]) (5 б).

Экзаменационная работа 2

Задача 1

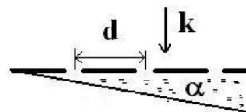
Плоская волна с амплитудой E_0 и волновым вектором k падает по нормали на экран, состоящий из двух непрозрачных полудисков (см. рисунок).



Радиус меньшего полудиска R . В приближении дифракции Френеля найти, при каком минимальном радиусе большего полудиска x амплитуда волны обратится в 0 на расстоянии b ($b \gg R \gg \lambda$) по нормали от центра полудисков (4 б).

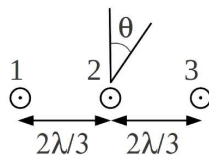
Задача 2

К решетке с периодом d приставили прозрачный клин с углом $\alpha \ll 1$ и показателем преломления n . Найти, при каком значении угла α для плоской волны (длина волны λ), падающей на решетку сверху по нормали, максимум первого порядка наблюдается в направлении падающего пучка (3 б).

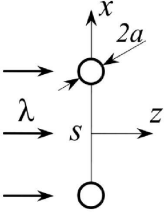


Задача 3

Антенна, показанная на рисунке, состоит из трех одинаковых диполей, расположенных на одной прямой. Дипольные моменты направлены перпендикулярно плоскости рисунка. Крайние диполи (1 и 3) запитаны синфазно, а колебания среднего (2) сдвинуты относительно них на фазу ϕ . Расстояние между соседними диполями $2\lambda/3$. Подобрать такую фазу ϕ , чтобы угловое

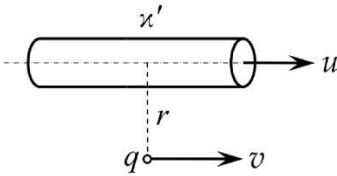


распределение интенсивности излучения $dI/d\Omega$ имело максимум по переменной ϕ в направлении $\theta = 30^\circ$ в плоскости рисунка. Найти, чему равна интенсивность излучения антенны в данном направлении, если для одного диполя она равна I_0 (3 б).



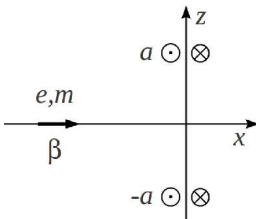
Задача 4

Два маленьких металлических шарика радиуса a закреплены на оси x на расстоянии s друг от друга ($s \gg a$). На шарики вдоль оси z падает плоская монохроматическая световая волна с длиной $\lambda \gg s$, линейно поляризованная по оси x . Измеряется интенсивность света, рассеянная шариками в направлении, противоположном оси z . Во сколько раз изменится ее величина, если шарики электрически соединить тонким проводником? (5 б)



Задача 5

Бесконечному цилиндру, равномерно заряженному с линейной плотностью χ' , придали скорость u , направленную вдоль его оси. В том же направлении на расстоянии r от оси цилиндра движется со скоростью v частица зарядом q . Найти силу \mathbf{F} , действующую на частицу в лабораторной системе отсчета. Скорости u и v считать релятивистскими (4 б).



Задача 6

Ультрарелятивистская частица (заряд e , масса m , скорость $\beta \approx 1$) пролетает вдоль оси x через магнитное поле, создаваемое двумя одинаковыми круговыми витками радиуса r_0 с током I_0 . Центры витков расположены в точках $x = 0, z = \pm a$ ($a \gg r_0$), нормали к виткам направлены вдоль оси z . Найти энергию $\Delta\mathcal{E}$, излученную зарядом при его движении от $x = -\infty$ до $+\infty$, считая $\Delta\mathcal{E} \ll \gamma mc^2$.

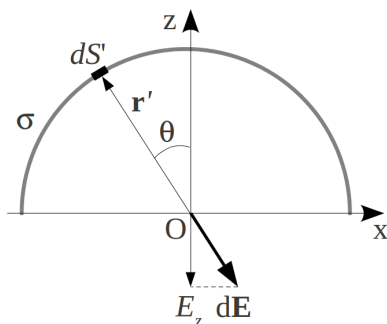
Указание: значение интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^n}$ для целых n определяется точно с помощью вычета или замены переменной либо приближенно с помощью оценки (6 б).

Решения

2007/2008 учебный год

Контрольная работа 1

Решение задачи 1



Электрическое поле в точке с радиус-вектором \mathbf{r} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\sigma(\theta)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS',$$

где \mathbf{r}' — радиус-вектор элемента площади dS' . Из симметрии задачи в точке O:

$$E_{xO} = E_{yO} = 0,$$

$$E_{zO} = - \int \frac{\sigma_0 \sin \theta \cos \theta}{R^2} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = -2\pi\sigma_0 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\sin \theta =$$

$$= -2\pi\sigma_0 \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = -\frac{2\pi\sigma_0}{3}.$$

Ответ: $E_x = E_y = 0; E_z = -\frac{2\pi\sigma_0}{3}$.

Решение задачи 2

Заряд системы q .

Дипольный момент равен 0. Тензор квадрупольного момента:

$$\begin{aligned} D_{i,j} &= \int \rho(\mathbf{r}') \cdot \left(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{i,j} \right) dV, \\ D_{z,z} &= \iiint \frac{q}{2\pi a} \delta(z) \delta(r' - a) \cdot (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2) dV = \\ &= \iiint \frac{q}{2\pi a} \delta(z) \delta(r' - a) \cdot (2z^2 - r'^2) r' dr' dz d\phi = -qa^2. \end{aligned}$$

Переменные V, x, y, z по своему смыслу являются штрихованными, как и r' , но в интеграле мы опустили знак штриха, чтобы не загромождать записи.

$D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z} = 0$. С другой стороны, из симметрии задачи $D_{x,x} = D_{y,y}$. Тогда $D_{x,x} = \frac{qa^2}{2}$.

Если бы не было диэлектриков, то потенциал на больших расстояниях был бы с точностью до первых двух ненулевых членов:

$$\varphi_0 = \frac{q}{r} + \frac{1}{2} D_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5}.$$

При наличии диэлектриков предположим, что потенциал в верхнем полупространстве будет $\varphi_u = \alpha \cdot \varphi_0$, а в нижнем $\varphi_d = \beta \cdot \varphi_0$. Поскольку на границе диэлектриков потенциалы должны быть равны, получаем $\alpha = \beta$.

В случае без диэлектриков интеграл по сфере радиуса $R \gg a$ вдвое превышает интеграл по полусфере и по теореме Гаусса равен

$$\oint_{\bigcirc} \mathbf{D}_0 d\mathbf{S} = \oint_{\bigcirc} (-\text{grad } \varphi_0) d\mathbf{S} = -2 \oint_{\bigcirc} \text{grad } \varphi_0 d\mathbf{S} = 4\pi q, \quad (1)$$

а при наличии диэлектриков для сферы радиуса R :

$$\oint_{\cup} \mathbf{D}_u d\mathbf{S} + \oint_{\cup} \mathbf{D}_d d\mathbf{S} = - \oint_{\cap} \varepsilon_1 \alpha \operatorname{grad} \varphi_0 d\mathbf{S} - \oint_{\cup} \varepsilon_2 \beta \operatorname{grad} \varphi_0 d\mathbf{S} = 4\pi q.$$

Используя выражение (1) и учитывая, что $\alpha = \beta$, находим:

$$\alpha = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

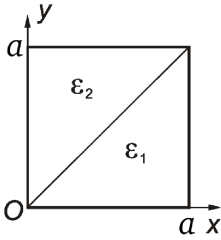
Найденные потенциалы φ_u и φ_d удовлетворяют граничным условиям и уравнению Лапласа, поэтому по теореме о единственности они и являются решением задачи.

Значит, потенциал системы на больших расстояниях, с точностью до первых двух ненулевых членов, равен

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_u + \varphi_d = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{q}{r} + \frac{1}{2} D_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} \right) = \\ &= \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{q}{r} - \frac{qa^2}{4r^3} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) \right). \end{aligned}$$

Ответ: $\varphi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{q}{r} - \frac{qa^2}{4r^3} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) \right).$

Решение задачи 3



Будем искать решение в области 2 в виде $\varphi_2(x, y) = C(a - y)x$. Решение в таком виде удовлетворяет условию $\varphi_2 = 0$ на стенках трубы в области 2 и уравнению $\Delta\varphi = 0$.

Поскольку на границе диэлектриков $\varphi_1 = \varphi_2$ (граница задается уравнением $y = x$), получаем:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{a^2} (a - x)x = \varphi_2 = C(a - x)x \Rightarrow C = \frac{\varphi_0}{a^2}.$$

Электрическое поле в области 1:

$$\mathbf{E}_1 = -\operatorname{grad}(\varphi_1) = \left(\frac{\varphi_0}{a^2} y; -\frac{\varphi_0}{a^2} (a - x); 0 \right),$$

а в области 2:

$$\mathbf{E}_2 = -\operatorname{grad}(\varphi_2) = \left(-\frac{\varphi_0}{a^2}(a-y); \frac{\varphi_0}{a^2}x; 0\right).$$

Вектор нормали к границе диэлектриков:

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right).$$

Поверхностную плотность свободных зарядов на границе диэлектриков найдем из граничного условия для векторов \mathbf{D} :

$$\sigma_{\text{своб}} = \frac{D_{2n} - D_{1n}}{4\pi} = \frac{\varepsilon_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2) - \varepsilon_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1)}{4\pi} \Big|_{y=x} = \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{8\pi a}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Ответ: $\varphi_2(x, y) = \frac{\varphi_0}{a^2}(a-y)x$; $\sigma_{\text{своб}} = \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{8\pi a}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

Решение задачи 4

Так как в конденсаторе нет свободных зарядов, то

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow D_x = \text{const}.$$

Падение напряжения между пластинами конденсатора равно

$$\begin{aligned} U &= -\int_0^d \mathbf{E} d\ell = -\int_{\frac{d}{2}}^d D_{1x} dx - \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{D_{2x}}{\varepsilon_0(1+\alpha x)} dx = \\ &= -\frac{D_{1x}d}{2} - \frac{D_{2x}}{\alpha\varepsilon_0} \ln\left(1 + \frac{\alpha d}{2}\right). \end{aligned}$$

Так как вектора \mathbf{D} постоянны в первой и второй областях, а на границе $D_{1x} = D_{2x}$, то из выражения $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ получаем электрическое поле для области $\frac{d}{2} \leq x \leq d$:

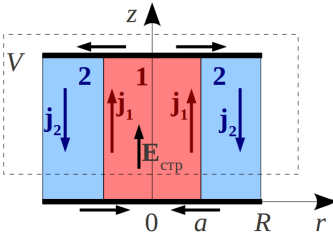
$$E_{1x}(x) = -\frac{U}{\frac{d}{2} + \frac{\ln(1+\frac{\alpha d}{2})}{\alpha\varepsilon_0}},$$

а для области $0 < x < \frac{d}{2}$:

$$E_{2x}(x) = -\frac{U}{\varepsilon_0(1 + \alpha x) \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{\ln\left(1 + \frac{\alpha d}{2}\right)}{\alpha \varepsilon_0} \right)}.$$

$$\text{Ответ: } E_x(x) = \begin{cases} -\frac{U}{\varepsilon_0(1 + \alpha x) \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{\ln\left(1 + \frac{\alpha d}{2}\right)}{\alpha \varepsilon_0} \right)}, & 0 < x < \frac{d}{2}; \\ -\frac{U}{\frac{d}{2} + \frac{\ln\left(1 + \frac{\alpha d}{2}\right)}{\alpha \varepsilon_0}}, & \frac{d}{2} \leq x \leq d. \end{cases}$$

Решение задачи 5



Назовем объем пространства, где действует заданное стороннее поле, областью 1, а оставшийся объем в конденсаторе – областью 2. Далее для правильного понимания физики рассматриваемого явления необходимо уточнить смысл стороннего поля.

Поскольку заданная сторонняя сила, действующая на носители тока, не зависит от распределения заряда в пространстве, то соответствующее ей стороннее поле $\mathbf{E}_{\text{стр}}$ не описывается уравнениями Максвелла, то есть по своему смыслу не является электростатическим. Фактическое электростатическое поле (\mathbf{E}_1 в области 1 и \mathbf{E}_2 в области 2) формируется зарядами, собранными на пластинах конденсатора (в общем случае - еще и объемным зарядом в среде с проводимостью σ , но мы покажем ниже, что в нашей задаче объем остается нейтральным). В силу указанной особенности поля $\mathbf{E}_{\text{стр}}$, добавление его к полю \mathbf{E}_1 в области 1 было бы неверным применением принципа суперпозиции. По той же причине $\mathbf{E}_{\text{стр}}$ не входит в граничное условие на тангенциальные компоненты поля на границе областей 1 и 2.

Хотя поле $\mathbf{E}_{\text{стр}}$ не является электростатическим, оно влияет на движение зарядов и поэтому входит наряду с \mathbf{E}_1 в выражение

для объемной плотности тока в области 1:

$$\mathbf{j}_1 = \sigma(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_{\text{стр}}).$$

В области 2:

$$\mathbf{j}_2 = \sigma\mathbf{E}_2.$$

Покажем, что объемная плотность заряда в нашей задаче равна нулю. Это следует из непрерывности стационарного тока в однородной среде с учетом того, что $\operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{стр}} = 0$. Например, в среде 1 имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_1 = \sigma (\operatorname{div} \mathbf{E}_1 + \operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{стр}}) = \sigma(4\pi\rho_1 + 0) = 0.$$

Тогда распределение потенциала внутри конденсатора задается уравнением Лапласа с фиксированными граничными условиями на электродах, решение которого (исключая область вблизи краев) есть $\varphi = C \cdot z$. Этому решению соответствует однородное поле $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \operatorname{const} \cdot \mathbf{e}_z$. Распределение объемного тока \mathbf{j} в областях 1, 2 схематически изображено на рисунке.

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, то полный ток через замкнутую поверхность, ограничивающую объем V (см. рисунок), будет равен нулю (исходно предполагаем, что \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 направлены по z):

$$-\sigma\pi a^2(E_1 + E_0) - \sigma\pi(R^2 - a^2)E_2 = 0.$$

Отсюда находим электрические поля в областях 1, 2:

$$E_1 = E_2 = -\frac{a^2}{R^2}E_0$$

(истинное направление \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 противоположно z).

Объемные токи в областях 1, 2:

$$\mathbf{j}_1 = \sigma \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right) E_0 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{j}_2 = -\sigma \frac{a^2}{R^2} E_0 \mathbf{e}_z.$$

Поверхностные токи в областях 1, 2 найдем на основе закона сохранения заряда. Сколько заряда в единицу времени утекло в объем радиуса r под действием объемного тока j , столько заряда должно втечь по поверхности пластины через контур радиуса r :

$$i_{1\text{пов}} = \frac{\pi r^2 j_1}{2\pi r} = \frac{r}{2} \sigma E_0 \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right), (r < a);$$

$$i_{2\text{пов}} = \frac{\pi a^2 j_1 - \pi(r^2 - a^2)j_2}{2\pi r} = \frac{a^2 \sigma E_0}{2r} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), (a \leq r \leq R).$$

Ответ:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \sigma \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) E_0 \mathbf{e}_z; & \mathbf{j}_2 &= -\sigma \frac{a^2}{R^2} E_0 \mathbf{e}_z; \\ i_{1\text{пов}} &= \frac{r \sigma E_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right), r < a; & i_{2\text{пов}} &= \frac{a^2 \sigma E_0}{2r} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), a \leq r \leq R. \end{aligned}$$

Поверхностные токи на верхней пластине направлены по r , на нижней – против r .

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

Так как размер шарика очень мал по сравнению с расстоянием от провода до шарика ($a \ll l$), то можно считать, что шарик находится в однородном магнитном поле, величину которого выразим как α -компоненту в цилиндрических переменных: $\mathbf{B} = \frac{2J}{cr} \Big|_{r=l} \mathbf{e}_\alpha$. Как известно из задачи 5.7 [1], шарик радиуса a с магнитной проницаемостью μ , находящийся в однородном магнитном поле \mathbf{B} , приобретает магнитный момент $\mathbf{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 \mathbf{B}$. Сила, действующая в поле \mathbf{B} на тело с магнитным моментом \mathbf{m} , определяется по формуле:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}), \quad (1)$$

где множитель $\frac{1}{2}$ учитывает, что дипольный момент зависит от положения диполя в пространстве (упругий диполь). Другая формула

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (2)$$

применима также и в случае твердого диполя, но работает только в декартовых координатах, неудобных в геометрии нашей задачи. В формуле же (1) оператор ∇ может выражаться в переменных криволинейной системы. В частности, в цилиндрических переменных он имеет только r -компоненту, равную

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r}. \quad (3)$$

Тогда, подставляя с учетом (3) значения магнитного момента и магнитного поля в формулу (1), находим для силы:

$$F_r = \frac{(\mu - 1)a^3}{2(\mu + 2)} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4J^2}{c^2 r^2} \right) \Big|_{r=l} = -\frac{4J^2 a^3}{c^2 l^3} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Ответ: $F_r = -\frac{4J^2 a^3}{c^2 l^3} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2}$ (притяжение при $\mu > 1$, отталкивание при $0 \leq \mu < 1$).

Примечание. Использование в формуле (2) цилиндрических переменных привело бы к неверному результату в виде силы, равной нулю, поскольку множители $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_\alpha$ и $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}$, входящие в скалярное произведение, оказались бы ортогональными.

Решение задачи 2

В задаче рассматривается стационарный случай, поэтому уравнение непрерывности принимает вид $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. С учетом того, что проводимость у цилиндра постоянная, для электрического потенциала получаем следующее уравнение:

$$\operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}) = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0.$$

Если считать, что нижняя пластина имеет потенциал 0, а верхняя U , то решение уравнения Лапласа для нашей задачи с заданными граничными условиями будет $\varphi(z) = C \frac{z}{h}$ (h – высота цилиндра). Значит, объемная плотность тока \mathbf{j} в цилиндре будет постоянна и направлена по оси Z ($\mathbf{j} = \frac{J}{\pi a^2} \mathbf{e}_z$).

Из теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} найдем магнитные поля в цилиндре и снаружи.

Магнитное поле внутри цилиндра:

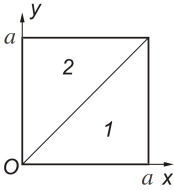
$$B_\alpha = \mu \left. \frac{\frac{4\pi}{c} \iint \mathbf{j} ds}{\oint \mathbf{H} d\ell} \right|_{\text{окр. } r \leq a} = \mu \frac{\frac{4\pi}{c} \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2}{H \cdot 2\pi r} = \frac{2\pi I r}{ca^2} \mu,$$

снаружи:

$$B_\alpha = \left. \frac{\frac{4\pi}{c} \iint \mathbf{j} ds}{\oint \mathbf{H} d\ell} \right|_{\text{окр. } r > a} = \frac{\frac{4\pi}{c} \frac{I}{\pi a^2} \pi a^2}{H \cdot 2\pi r} = \frac{2\pi I}{cr}.$$

Ответ: магнитное поле внутри цилиндра: $\mathbf{B} = \frac{2\pi I r}{ca^2} \mu \mathbf{e}_\alpha$, снаружи: $\mathbf{B} = \frac{2\pi I}{cr} \mathbf{e}_\alpha$.

Решение задачи 3



В области 2 нет объемных токов, поэтому

$$\Delta \mathbf{A} = 0. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) для области 2 естественно искать в виде: $\mathbf{A}_2 = A_{2z}(x, y) \mathbf{e}_z$. В этом случае на идеально проводящих стенках трубы векторный потенциал в области 2 можно положить равным 0 ($B_n = 0$ на стенках идеального проводника). Тогда решение уравнения (1) $A_{2z}(xy)$ для области 2, удовлетворяющее граничным условиям на стенках трубы ($A_{2z} = 0$), будем искать в виде:

$$A_{2z}(x, y) = C(y - a)x.$$

Магнитное поле в областях 1 и 2:

$$\mathbf{B}_1 = \text{rot } \mathbf{A}_1 = (A_0 (x - a); -A_0 y; 0),$$

$$\mathbf{B}_2 = \text{rot } \mathbf{A}_2 = (Cx; -C(y - a); 0).$$

Вектор нормали к границе областей: $\mathbf{n} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

Из непрерывности нормальной компоненты магнитного поля ($B_{2n} = B_{1n}$) на границе раздела областей, находим константу C :

$$(\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n})|_{y=x} = (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n})|_{y=x} \implies C = A_0.$$

Граничное условие для H_τ :

$$\begin{aligned} ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2] - [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1])|_{y=x} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}_{\text{пов}} \implies \\ \implies \mathbf{i}_{\text{пов}} &= \frac{c}{4\pi} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} A_0 \mathbf{e}_z - \frac{\sqrt{2}}{2} A_0 \mathbf{e}_z\right) = -\frac{\sqrt{2} c A_0}{4\pi} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Ответ: $A_{2z}(x, y) = A_0 (y - a) x$; $\mathbf{i}_{\text{пов}} = -\frac{\sqrt{2} c A_0}{4\pi} \mathbf{e}_z$.

Решение задачи 4

Магнитные потоки через каждое из сверхпроводящих колец сохраняются. Поток через первое кольцо равен

$$\Phi_1 = \frac{L_1 J_{10}}{c} + \frac{L_{12}(0) J_{20}}{c} = \frac{L_1 J_1(z^*)}{c} + \frac{L_{12}(z^*) J_2(z^*)}{c}, \quad (1)$$

а через второе

$$\Phi_2 = \frac{L_2 J_{20}}{c} + \frac{L_{12}(0) J_{10}}{c} = \frac{L_2 J_2(z^*)}{c} + \frac{L_{12}(z^*) J_1(z)}{c}. \quad (2)$$

Учитывая, что $J_{20} = 0$, из формул (1) и (2) находим токи в кольцах, когда второе кольцо занимает положение $z = z^*$:

$$J_1(z^*) = \frac{J_{10}(L_1 L_2 - L_{12}(0) L_{12}(z^*))}{L_1 L_2 - L_{12}^2(z^*)}; \quad J_2(z^*) = \frac{J_{10} L_1 (L_{12}(0) - L_{12}(z^*))}{L_1 L_2 - L_{12}^2(z^*)}.$$

С учетом $r_2 \ll r_1$ магнитное поле, индуцируемое током первого витка, можно считать однородным по сечению второго витка и равным его значению на оси витка. Последнее выражается формулой (см. задачу 4.1 [1]):

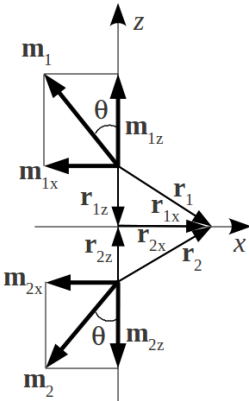
$$B_z(z^*) = \frac{2\pi J_1(z^*)}{c} \frac{r_1^2}{(r_1^2 + z^{*2})^{\frac{3}{2}}},$$

где $J_1(z^*)$ – ток в первом витке, когда второй виток занимает положение $z = z^*$ (сам первый виток при этом находится в плоскости $z = 0$). Тогда магнитный поток через второй виток от тока $J_1(z^*)$ равен

$$\Phi_{12} = \pi r_2^2 B_z(z^*) = \frac{L_{12}(z^*) J_1(z^*)}{c} \implies L_{12}(z^*) = \frac{2\pi^2 r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 + z^{*2})^{\frac{3}{2}}}.$$

Ответ: $J_1(z^*) = \frac{J_{10}(L_1 L_2 - L_{12}(0) L_{12}(z^*))}{L_1 L_2 - L_{12}^2(z^*)}; \quad J_2(z^*) = \frac{J_{10} L_1 (L_{12}(0) - L_{12}(z^*))}{L_1 L_2 - L_{12}^2(z^*)},$
 $L_{12}(z^*) = \frac{2\pi^2 r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 + z^{*2})^{\frac{3}{2}}}.$

Решение задачи 5



Круглый виток с током обладает магнитным моментом

$$\mathbf{m} = \frac{IS}{c} \mathbf{n} = \frac{\pi a^2 I}{c} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – вектор нормали к плоскости витка (выбор направления определяется правилом буравчика по отношению к току). По методу изображений исключим из задачи сверхпроводник и поместим на расстоянии

h снизу от плоскости $z = 0$ такой же виток с током. Направление нормали для этого витка выберем, как на рисунке. Векторы \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 будут иметь следующие координаты:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_1 &= (-m_0 \sin \theta; 0; m_0 \cos \theta) \\ \mathbf{m}_2 &= (-m_0 \sin \theta; 0; -m_0 \cos \theta),\end{aligned}$$

где $m_0 = \frac{\pi a^2 I}{c}$. Такой выбор направления нормали у второго витка обеспечивает выполнение граничного условия $B_n = 0$ на сверхпроводящей плоскости $z = 0$. В самом деле, для любой точки плоскости $z = 0$ получаем (учтем, что $(\mathbf{m}_1 \mathbf{r}_1) = m_{1x} r_{1x} + m_{1z} r_{1z} = m_{2x} r_{2x} - m_{2z} \cdot (-r_{2z}) = (\mathbf{m}_2 \mathbf{r}_2)$):

$$B_z = \frac{3r_{1z}(\mathbf{m}_1 \mathbf{r}_1)}{r_1^5} - \frac{m_{1z}}{r_1^3} + \frac{3r_{2z}(\mathbf{m}_2 \mathbf{r}_2)}{r_2^5} - \frac{m_{2z}}{r_2^3} = 0. \quad (1)$$

Наличие y -компоненты у \mathbf{r}_i никак не сказывается на значении $(\mathbf{m}_i \mathbf{r}_i)$ и, следовательно, на справедливости выражения (1) для B_z . Отметим также, что согласно методу изображений выражение (1) относится только к полю в области $z \geq 0$. При $z < 0$ $B = 0$, так как на самом деле поле первого витка через сверхпроводник не проникает.

Таким образом, влияние сверхпроводящей плоскости полностью эквивалентно влиянию витка с током, расположенного на расстоянии h снизу под плоскостью с магнитным моментом \mathbf{m}_2 . Этот виток создаст дополнительный поток магнитного поля через

ВИТОК \mathbf{m}_1 :

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) d\mathbf{S}_1 \Big|_{\mathbf{r}=(2h,0,0)} &= \int \left(\frac{3(\mathbf{r};\mathbf{n}_1)(\mathbf{r};\mathbf{m}_2)}{|\mathbf{r}|^5} - \frac{(\mathbf{m}_2;\mathbf{n}_1)}{|\mathbf{r}|^3} \right) dS = \\
 &= -\frac{m_0\pi a^2(3\cos^2\theta - \cos 2\theta)}{(2h^3)} = -\frac{m_0\pi a^2(3\cos^2\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta))}{(2h^3)} = \\
 &= -\frac{m_0\pi a^2(\cos^2\theta + (\cos^2\theta + \sin^2\theta))}{(2h^3)} = -\frac{m_0\pi a^2(1 + \cos^2\theta)}{(2h^3)},
 \end{aligned}$$

что фактически приведет к изменению индуктивности витка:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \frac{LI}{c} = \frac{(L_0 + \Delta L)I}{c} = \frac{L_0 I}{c} + \oint \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) d\mathbf{S}_1 \Big|_{\mathbf{r}=(2h,0,0)} \implies \\
 \implies \Delta L &= -\frac{\pi^2 a^4}{8h^3} (1 + \cos^2\theta).
 \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta L = -\frac{\pi^2 a^4}{8h^3} (1 + \cos^2\theta)$ – индуктивность уменьшится.

Решение задачи 6

Движение заряженного цилиндра со скоростью v_z эквивалентно наличию в задаче объемного тока с плотностью

$$j_z(\mathbf{r}, t) = \sigma_q v_0 e^{-i\omega t} \delta(r - b).$$

Магнитное поле в пространстве ($b < r < a$) найдем из теоремы о циркуляции:

$$B_\alpha(r, t) = \frac{2I}{cr} = \frac{4\pi b \sigma_q v_0 e^{-i\omega t}}{cr}. \quad (1)$$

Для области, занятой проводником ($a < r$), магнитное поле под действием наведенных токов, текущих по проводнику, будет

затухать в глубь проводника. Поведение поля в этой области будет описываться уравнением для скин-эффекта:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \Delta \mathbf{B}.$$

С учетом симметрии задачи магнитное поле будет иметь только компоненту, направленную по углу, и будет зависеть только от r :

$$\frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\alpha}{\partial r} = -\frac{2i}{\delta} B_\alpha, \quad (2)$$

где $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$ – глубина скин-слоя.

Поскольку в задаче рассматривается сильный скин-эффект ($\delta \ll r$), то вторым слагаемым в уравнении (2) можно пренебречь по сравнению с первым и третьим. Тогда общее решение уравнения (2) будет иметь вид

$$B_\alpha(r, t) = \left(C_1 e^{-\frac{1-i}{\delta}r} + C_2 e^{\frac{1-i}{\delta}r} \right) e^{-i\omega t}.$$

Так как нас интересует решение, которое затухает в глубь проводника, полагаем константу $C_2 = 0$. На границе проводника ($r = a$) тангенциальная компонента магнитного поля должна быть непрерывна. Из этого условия, используя уравнение (1), находим константу $C_1 = \frac{4\pi b\sigma_q v_0}{ca} e^{\frac{1-i}{\delta}a}$.

Магнитное поле в среде ($a < r$) равно

$$B_\alpha(r, t) = \frac{4\pi b\sigma_q v_0}{ca} e^{-\frac{1-i}{\delta}(r-a)} \cdot e^{-i\omega t}.$$

Из уравнения Максвелла находим электрическое поле в среде:

$$\begin{aligned} E_z(r, t) &= \frac{c}{4\pi\sigma} (\text{rot } \mathbf{B})_z = \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\alpha(r, t)) = \\ &= \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial B_\alpha(r, t)}{\partial r} + \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{B_\alpha(r, t)}{r}. \end{aligned}$$

В случае сильного скин-эффекта вторым слагаемым можно пренебречь. Электрическое поле в среде ($a < r$) будет

$$E_z(r, t) = -\frac{b\sigma_q v_0}{a\sigma} \left(\frac{1-i}{\delta} \right) e^{-\frac{1-i}{\delta}(r-a)} \cdot e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

Электрическое поле в пространстве ($b < r < a$) находим из уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies -\frac{\partial E_z}{\partial r} = i\omega \frac{4\pi b\sigma_q v_0 e^{-i\omega t}}{c^2 r} \implies \\ \implies E_z(r, t) &= \frac{4\pi b\sigma_q v_0}{c^2} \ln(r) e^{-i\omega t} + C. \end{aligned} \quad (4)$$

Константу найдем из условия равенства тангенциальных компонент электрического поля на границе проводника. Приравнявая выражения (3) и (4) при $r = a$, найдем константу C .

Электрическое поле в пространстве ($b < r < a$):

$$E_z(r, t) = \left(\frac{4\pi b\sigma_q v_0}{c^2} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{b\sigma_q v_0}{a\sigma} \left(\frac{1-i}{\delta} \right) \right) e^{-i\omega t}. \quad (5)$$

В пространстве ($r < b$) магнитное поле равно 0, а электрическое поле будет постоянным (так как там нет зарядов и токов). Из непрерывности тангенциальной компоненты на границе $r = b$ из (5) получим:

$$E_z = \left(\frac{4\pi b\sigma_q v_0}{c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b\sigma_q v_0}{a\sigma} \left(\frac{1-i}{\delta} \right) \right) e^{-i\omega t}.$$

Ответ:

в области $r < b$: $\mathbf{B} = 0$, $E_z = \left(\frac{4\pi b\sigma_q v_0}{c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b\sigma_q v_0}{a\sigma} \left(\frac{1-i}{\delta} \right) \right) e^{-i\omega t}$;

в области $b \leq r < a$: $B_\alpha(r, t) = \frac{2I}{cr} = \frac{4\pi b\sigma_q v_0 e^{-i\omega t}}{cr}$,

$$E_z(r, t) = \left(\frac{4\pi b\sigma_q v_0}{c^2} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{b\sigma_q v_0}{a\sigma} \left(\frac{1-i}{\delta} \right) \right) e^{-i\omega t};$$

$$\begin{aligned} \text{в области } a \leq r: B_\alpha(r, t) &= \frac{4\pi b \sigma_q v_0}{ca} e^{-\frac{1-i}{\delta}(r-a)} \cdot e^{-i\omega t}, \\ E_z(r, t) &= -\frac{b \sigma_q v_0}{a\sigma} \left(\frac{1-i}{\delta} \right) e^{-\frac{1-i}{\delta}(r-a)} \cdot e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Решение задачи 7

Вращение сферы с частотой Ω приведет к возникновению поверхностного тока на сфере. Плотность возникшего поверхностного тока равна

$$\mathbf{i} = \sigma \Omega(t) R \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\varphi.$$

Направим ось Z вдоль внешнего магнитного поля. Область внутри сферы назовем областью 1, а снаружи – областью 2 (см. рисунок). В областях 1, 2 нет объемных токов, значит, в этих областях можно ввести скалярный магнитный потенциал φ_1 , φ_2 и магнитное поле в этих областях представить в виде $\mathbf{B}_i = -\text{grad } \varphi_i$. Решение уравнения $\Delta \varphi = 0$ для области 2 будем искать в виде

$$\varphi_2 = -H(t)r \cos \theta + \frac{C_2(t)}{r^2} \cos \theta,$$

а для области 1

$$\varphi_1 = -C_1(t)r \cos \theta.$$

Магнитное поле в области 2 тогда равно

$$\mathbf{B}_2 = \left(\left(H(t) + \frac{2C_2(t)}{r^3} \right) \cos \theta; 0; \left(-H(t) + \frac{C_2(t)}{r^3} \right) \sin \theta \right).$$

Оно представляет собой однородное магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси Z , и поле магнитного диполя, находящегося в начале координат, с магнитным моментом, равным $C_2(t)$ и направленным по оси Z .

Магнитное поле в области 1:

$$\mathbf{B}_1 = (C_1(t) \cos \theta; 0; -C_1(t) \sin \theta).$$

Это однородное поле с амплитудой $C_1(t)$, направленное по оси Z.

Неизвестные $C_1(t)$ и $C_2(t)$ найдем из граничных условий для нормальных и тангенциальных компонент магнитного поля на поверхности сферы. Для нормальной компоненты:

$$B_{2n} = B_{1n} \Rightarrow H(t) + \frac{2C_2(t)}{R^3} = C_1(t).$$

Для тангенциальной компоненты:

$$\begin{aligned} [n \times \mathbf{B}_2] - [n \times \mathbf{B}_1] &= \frac{4\pi \mathbf{i}}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow [\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_2] - [\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_1] &= \frac{4\pi\sigma\Omega(t)R \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\varphi}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow -H(t) + \frac{C_2(t)}{R^3} + C_1(t) &= \frac{4\pi\sigma\Omega(t)R}{c}. \end{aligned}$$

Из этих выражений находим:

$$C_1(t) = H(t) + \frac{8\pi\sigma\Omega(t)R}{3c}.$$

Из закона Фарадея найдем, какое вихревое электрическое поле будет действовать на заряды на сфере:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} &\Rightarrow \oint \mathbf{E} d\ell = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\int \mathbf{B}_1(t) d\mathbf{S} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{\text{вхф}} \cdot 2\pi R \sin \theta &= -\frac{1}{c} \pi R^2 \sin^2 \theta \frac{dC_1(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Электрическое поле, действуя на заряды, создает момент сил,

который изменяет момент импульса сферы:

$$I_0 \frac{d\Omega}{dt} = \int [\mathbf{r} \times \sigma \mathbf{E}_{\text{вх}}] dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_0 \frac{d\Omega}{dt} = \int_0^\pi R \sin \theta \cdot \sigma \left(-\frac{R \sin \theta}{2c} \frac{dC_1(t)}{dt} \right) 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = -\frac{4\pi\sigma R^4}{3c} \frac{dC_1(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{-\frac{4\pi\sigma R^4}{3c}}{\left(I_0 + \frac{32\pi^2 \sigma^2 R^5}{9c^2} \right)} \frac{dH(t)}{dt} \Rightarrow \Omega(t) = -\frac{4\pi\sigma R^4}{3cI_0} \frac{1}{1+\lambda} H(t),$$

где $\lambda = \frac{32\pi^2 \sigma^2 R^5}{9c^2 I_0}$. Константа, возникающая при интегрировании, равна 0, так как при $H(t) = 0$ частота вращения сферы должна быть равна 0. Подставляя $\Omega(t)$ в выражение для $C_1(t)$, получаем магнитное поле внутри сферы:

$$\mathbf{B}_1(t) = \frac{1}{1+\lambda} H_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z.$$

Ответ: $\mathbf{B}_1(t) = \frac{1}{1+\lambda} H_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z$; $\Omega(t) = -\frac{4\pi\sigma R^4}{3cI_0} \frac{1}{1+\lambda} H_0 e^{-i\omega t}$;
 $\lambda = \frac{32\pi^2 \sigma^2 R^5}{9c^2 I_0}.$

Контрольная работа 2

Решение задачи 1

Суммарное поле от двух данных волн равно

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\Sigma = & (E_{11} e^{i(kz-\omega t)} + E_{21} e^{ik(z \cos \alpha + x \sin \alpha) - i\omega t}) \mathbf{e}_x + \\ & + \left(E_{12} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i(kz-\omega t)} + E_{22} e^{i\delta} e^{ik(z \cos \alpha + x \sin \alpha) - i\omega t} \right) \mathbf{e}_y + \\ & + (E_{23} e^{i\pi} e^{ik(z \cos \alpha + x \sin \alpha) - i\omega t}) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Интерференционные члены будут только от компонент по осям X, Y суммарного поля. От компоненты по оси Z интерференционного члена не будет.

Полный интерференционный член от компонент поля по осям X, Y:

$$I_{12\Sigma} = E_{11}E_{21} \cos(kz(\cos \alpha - 1) + kx \sin \alpha) + \\ + E_{12}E_{22} \cos(kz(\cos \alpha - 1) + kx \sin \alpha + \delta + \frac{\pi}{2}).$$

По условию задачи константы $E_{i,k}$ больше 0, значит, чтобы $I_{12\Sigma}$ был равен 0, надо, чтобы аргументы косинусов отличались на π

$$\delta + \frac{\pi}{2} = \pm\pi \Rightarrow \delta = \pm\frac{\pi}{2},$$

а амплитуды были связаны соотношением

$$\frac{E_{11}}{E_{12}} = \frac{E_{22}}{E_{21}}.$$

Таким образом, можно сказать, что по осям X, Y волны имеют эллиптическую поляризацию, их эллипсы поляризации подобны между собой и повернуты друг относительно друга на угол $\frac{\pi}{2}$, а векторы их электрических полей вращаются в противоположных направлениях.

Ответ: $I_{12\Sigma} = E_{11}E_{21} \cos(kz(\cos \alpha - 1) + kx \sin \alpha) + \\ + E_{12}E_{22} \cos(kz(\cos \alpha - 1) + kx \sin \alpha + \delta + \frac{\pi}{2}).$

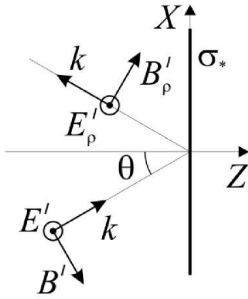
Интерференционный член равен 0, когда $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$, а $\frac{E_{11}}{E_{12}} = \frac{E_{22}}{E_{21}}$.

Решение задачи 2

Воспользуемся концепцией парциальных волн: любая волна, распространяющаяся по волноводу, может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся под углом к оси волновода. В частности, поле волны H_{10} вида $B_z = B_0 \cos(\frac{\pi}{a}x) e^{i(k_z z - \omega t)}$ есть суперпозиция полей двух плоских волн:

$$B_z = B' \sin \theta \left[e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)} + e^{i(k_z z - k_x x - \omega t)} \right]$$

$$k_x = \frac{\pi}{a}, \quad \sin \theta = \frac{k_x}{k} = \frac{\pi}{a} \frac{c}{\omega}, \quad k_x^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2.$$



Амплитуды волн связаны соотношением $B_0 = 2B'_\rho \sin \theta$. Таким образом, исходная задача сводится к задаче о падении плоской монохроматической ТЕ-волны с амплитудой B'_ρ под углом θ на проводящую пленку. Из решения этой задачи амплитуда отраженной плоской волны (ср. с ответом к задаче 1.28 [2] для проходящей волны в случае нормального падения) равна

$$B'_\rho = B'_\rho \frac{\xi}{\xi + \cos \theta}, \quad \text{где } \xi = \frac{2\pi\sigma_*}{c}.$$

Отраженная волна $B_z^{(1)} = B_1 \cos(\frac{\pi}{a}x) e^{i(-k_z z - \omega t)}$ в исходной задаче может быть теперь представлена как суперпозиция двух плоских волн:

$$B_z^{(1)} = B'_\rho \sin \theta \left[e^{i(-k_z z + k_x x - \omega t)} + e^{i(-k_z z - k_x x - \omega t)} \right].$$

Очевидно теперь, что искомая амплитуда отраженной волны в волноводе равна

$$B_1 = 2B'_\rho \sin \theta = B_0 \frac{\xi}{\xi + \cos \theta},$$

где $\xi = \frac{2\pi\sigma_*}{c}$, $\cos \theta = \frac{k_z}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{a} \frac{c}{\omega} \right)^2}$.

Решение задачи 3

Освещенность в точке P будет максимальна, когда радиус отверстия r_0 будет равен радиусу первой зоны Френеля для этой точки. Это означает, что разность фаз у волн, проходящих соответственно через край и ось отверстия, будет равна π :

$$\frac{\omega}{c} \left(n \cdot \sqrt{a^2 + r_0^2} + \sqrt{b^2 + r_0^2} \right) - \frac{\omega}{c} (na + b) = \pi.$$

Учитывая, что $r_0 \ll ab$, получаем:

$$\frac{\omega}{c} \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{n}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \implies r_0 = \sqrt{2\pi \frac{c}{\omega} \cdot \frac{ab}{a + nb}}.$$

Решение задачи 4

Интерференционная картина в схеме Ллойда возникает в результате сложения двух волн: волны $\hat{u}_1(t + \tau)$, пришедшей прямо от источника, и волны $\hat{u}_2(t)$, отраженной от зеркала. Геометрическая разность хода этих волн составляет:

$$\Delta r = \sqrt{L^2 + (X + h)^2} - \sqrt{L^2 + (X - h)^2} \approx \frac{2Xh}{L}.$$

Тогда временная задержка прихода волны \hat{u}_2 в точку P относительно волны \hat{u}_1 равна

$$\tau = \frac{\Delta r}{c} \approx \frac{2Xh}{Lc}.$$

Найдем автокорреляционную функцию стационарного случайного волнового поля в точке P :

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle \hat{u}_1(t + \tau) \cdot \hat{u}_2^*(t) \rangle = \frac{1}{NT_0} \int_0^{NT_0} A(t + \tau) \cdot A(t) \cdot e^{i(\omega\tau + \pi)} dt, \quad N \gg 1.$$

Дополнительное слагаемое π в показателе экспоненты появляется в результате сдвига фазы волны при отражении от зеркала. Вычисляя интеграл с учетом заданной в условии задачи зависимости $A(t)$, получаем:

$$\Gamma_{12}(\tau) = e^{i(\omega\tau + \pi)} \cdot \begin{cases} \overline{A}^2 & \text{при } |\tau| > T_0; \\ \overline{A}^2 + \left(1 - \frac{|\tau|}{T_0}\right) (\overline{A^2} - \overline{A}^2) & \text{при } |\tau| < T_0. \end{cases}$$

Методика вычисления такой автокорреляционной функции подробно рассмотрена, например, в учебном пособии [3].

Положения максимумов определяются быстро осциллирующим множителем:

$$\cos \frac{\omega_0 X D}{cL} = 1 \implies X_m = 2\pi m \frac{cL}{\omega_0 D}.$$

Размер области, где видна интерференционная картина (L_\perp), можно оценить, зануляя медленно осциллирующий множитель:

$$\text{sinc} \frac{\Delta\omega L_\perp D}{2cL} = 0 \implies L_\perp = 2\pi \frac{cL}{\Delta\omega D}.$$

Двояковогнутая ($R_1 < 0$, $R_2 > 0$) тонкая линза формирует мнимые изображения щелей-источников (см. рисунок, на котором приведено построение изображения для одной щели), что эквивалентно уменьшению расстояния между щелями (D') и расстояния от плоскости наблюдения до экрана со щелями (L') в классической схеме Юнга.

Простые геометрические вычисления дают:

$$D' = -D \frac{f}{a+f}, \quad L' = L - a \left(1 + \frac{f}{a+f} \right),$$

где $f = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ – фокусное расстояние линзы ($f < 0$).

Для схемы Юнга при наличии линзы получаем:

$$X'_m = 2\pi m \frac{cL'}{\omega_0 D'} = 2\pi m \frac{c}{\omega_0 D} \left[-(L-a) \cdot \frac{a+f}{f} + a \right],$$

$$L'_\perp = 2\pi \frac{cL'}{\Delta\omega D'} = 2\pi \frac{c}{\Delta\omega D} \left[-(L-a) \cdot \frac{a+f}{f} + a \right].$$

Экзаменационная работа 2**Решение задачи 1**

Воспользуемся матричным формализмом. В первом случае (луч падает на выпуклую поверхность) преобразование координат луча на пути от точки падения на линзу до фокуса описывается тремя матрицами: матрицей преломления на сферической поверхности, матрицей перехода внутри линзы и матрицей перехода по воздуху до фокуса. Запишем это преобразование, не забывая о порядке записи (справа налево):

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & R/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X'_0 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, получаем выражение для X :

$$X = \left[1 - \left(f_1 + \frac{R}{n} \right) \frac{(n-1)}{R} \right] \cdot X_0 + \left(f_1 + \frac{R}{n} \right) \cdot X'_0.$$

Поскольку у падающего луча $X'_0 = 0$, а в точке фокуса $X = 0$ для любого X_0 , получаем:

$$\left(f_1 + \frac{R}{n} \right) \frac{(n-1)}{R} = 1 \implies f_1 = \frac{R}{n(n-1)}.$$

Во втором случае (луч падает на плоскую поверхность) меняется только порядок записи матриц:

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & R/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X'_0 \end{pmatrix}.$$

Проведя вычисления, аналогичные первому случаю, получаем:

$$f_2 = \frac{R}{n-1}.$$

Решение задачи 2

Интерференционная картина на экране возникает в результате сложения двух волн: сферической волны, приходящей прямо от точечного источника, и плоской волны, формируемой параболическим зеркалом. Очевидно (в силу симметрии задачи), что эта интерференционная картина представляет собой набор concentric rings. Освещенность в произвольной точке P экрана, отстоящей от оси системы на расстояние r , определяется разностью фаз двух интерферирующих волн. Радиусы светлых колец (максимум освещенности в точке P) определяются из выражения:

$$[k \cdot (2F + l) - \pi] - k \cdot \sqrt{l^2 + r_m^2} = 2\pi \cdot m, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad m = 0, 1, \dots$$

Здесь учтено смещение фазы волны на π при отражении от идеального зеркала.

С учетом $\lambda \ll l, F$ получаем:

$$r_m \approx \sqrt{4F(F + l) - 2(2F + l) \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda}.$$

Немонохроматичность источника приводит к “размыванию” общей интерференционной картины: поскольку r_m зависит от λ , интерференционные картины от разных спектральных составляющих накладываются со смещением по радиусу. Максимальное число различимых колец m_{max} и соответственно размер интерференционной картины $r_{max}(m_{max})$ можно оценить из следующих соображений: картина исчезнет, когда радиус m -го светлого кольца для длины волны λ совпадет с радиуса m -го темного кольца для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$:

$$\left(m_{max} + \frac{1}{2}\right) \lambda = m_{max} (\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow m_{max} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}.$$

Решение задачи 3

В предположении $a \ll R_0$ можно считать, что поле точечного заряда на размере шарика меняется мало и шарик находится в однородном поле с напряженностью $E = \frac{Q}{r^2}$. В таком поле шарик поляризуется, приобретая дипольный момент $d = Ea^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$. Поскольку при движении шарика дипольный момент меняется, возникает дипольное излучение, интенсивность которого

$$I = \frac{2 \ddot{d}^2}{3 c^3} = \frac{A}{r^8}, \quad \text{где } A = \frac{24}{c^3} \left(Qa^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} v^2 \right)^2$$

(здесь учтено, что $\dot{r} = v$, а $\dot{v} = 0$ по условию задачи). С другой стороны, $I = \dot{W}$, где W — излучаемая энергия. Тогда $dW = I \cdot dt = I \cdot dr/v$. Полная энергия, излученная шариком, равна

$$\Delta W = \frac{A}{v} \int_{r=R_0}^{\infty} \frac{dr}{r^8} = \frac{24}{7} \left(\frac{v}{c} \right)^3 \frac{a^6}{R_0^7} \left(Q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2.$$

Решение задачи 4

Заметим, что для точки P радиусы r_1 и r_2 являются радиусами первой и второй зон Френеля соответственно. Это означает, что в отсутствие полудиска амплитуда волны в точке P будет равна нулю (первая и вторая зоны компенсируют друг друга). Частичное закрывание первой зоны может привести к увеличению амплитуды поля в точке P .

В случае непрозрачного полудиска эта амплитуда очевидно равна E_0 (открытая вторая зона создает амплитуду $2E_0$, а половина первой зоны — E_0 с противоположной фазой).

При использовании стеклянного полудиска максимальную амплитуду можно получить, если полностью компенсировать отрицательное влияние открытой половины первой зоны за счет дополнительного набег фазы на толщине полудиска Δ (таким образом, чтобы волны из открытой и “закрытой” половин первой

зоны приходили в точку P с противоположными фазами):

$$nk\Delta - k\Delta = (2m + 1)\pi, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Для толщины полудиска получаем:

$$\Delta = \frac{2m + 1}{2(n - 1)}\lambda.$$

Амплитуда волны в точке P при этом будет равна $2E_0$, а интенсивность $-4I_0$.

Решение задачи 5

В силу симметрии задачи и направления возбуждающего тока очевидно, что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t) = E(z, t) \cdot \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(z, t) = B(z, t) \cdot \mathbf{e}_x.$$

Будем искать поля слева и справа от плоскости XY в виде суперпозиций двух плоских волн, бегущих в противоположных направлениях (опустим пока общий временной множитель $e^{-i\omega t}$):

$$\mathbf{E} = (E_0 e^{-ikz} + E_1 e^{ikz}) \cdot \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B} = (E_0 e^{-ikz} - E_1 e^{ikz}) \cdot \mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{E} = (E_0 e^{ikz} + E_1 e^{-ikz}) \cdot \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B} = (-E_0 e^{ikz} + E_1 e^{-ikz}) \cdot \mathbf{e}_x.$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению амплитуд E_0 и E_1 . Граничные условия при $z = 0$ и $z = \pm a/2$ дают следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} E_1 - E_0 = \frac{2\pi}{c} i_0; \\ E_1 e^{-i\alpha} = -E_0 e^{i\alpha}, \quad \text{где } \alpha = \frac{ka}{2}, \end{cases}$$

решая которую, получаем:

$$E_0 = -\frac{\pi}{c} i_0 \frac{e^{-i\alpha}}{\cos \alpha}, \quad E_1 = \frac{\pi}{c} i_0 \frac{e^{i\alpha}}{\cos \alpha}.$$

Подставим полученные амплитуды в выражения для полей:

$$z < 0 : \mathbf{E} = \frac{2\pi i_0}{c \cdot \cos \alpha} i \sin(kz + \alpha) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B} = -\frac{2\pi i_0}{c \cdot \cos \alpha} \cos(kz + \alpha) \mathbf{e}_x,$$

$$z > 0 : \mathbf{E} = -\frac{2\pi i_0}{c \cdot \cos \alpha} i \sin(kz - \alpha) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B} = \frac{2\pi i_0}{c \cdot \cos \alpha} \cos(kz - \alpha) \mathbf{e}_x.$$

Учитывая свойства тригонометрических функций, получаем окончательно:

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{2\pi i_0}{c \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \left[k \left(\frac{a}{2} - |z| \right) \right] \cdot e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \cdot \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{B}(\pm z, t) = \pm \frac{2\pi i_0}{c \cdot \cos \alpha} \cdot \cos \left[k \left(\frac{a}{2} - |z| \right) \right] \cdot e^{-i\omega t} \cdot \mathbf{e}_x.$$

Энергию поля, в среднем приходящуюся на объем с ограниченной площадью S в плоскости (XY) , найдем, используя понятие плотности энергии электромагнитного поля: $w = \frac{1}{8\pi} (H^2 + E^2)$. В нашем случае:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2\pi i_0}{c \cdot \cos \alpha} \right)^2 S \cdot \int_{z=0}^{z=a/2} \left(\sin^2 \left[k \left(\frac{a}{2} - z \right) \right] + \cos^2 \left[k \left(\frac{a}{2} - z \right) \right] \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \pi S a \left(\frac{i_0}{c} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos ka}. \end{aligned}$$

Решение задачи 6

Угловая зависимость интенсивности излучения, выходящего из щелей волновода, будет иметь максимум в направлении X , когда колебания электромагнитного поля на щелях, создаваемые бегущей волной, будут происходить в одинаковой фазе: $k_z \cdot a = 2\pi \cdot m$.

Для волны H_{10} с учетом диэлектрического заполнения волновода

$$k_z = \sqrt{\varepsilon \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2}, \quad \omega_{min} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\pi}{a}.$$

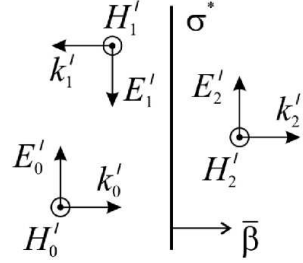
Так как по условию $\omega = 2\sqrt{\varepsilon}\omega_{min} = 2c\frac{\pi}{a}$, получаем:

$$2\pi \cdot m = \pi \cdot \sqrt{4\varepsilon - 1} \implies \varepsilon = m^2 + \frac{1}{4}.$$

Решение задачи 7

Будем обозначать штрихом поля в системе координат, движущейся вместе с фольгой, а индексами 0, 1 и 2 — падающую, отраженную и прошедшую волны соответственно.

Выберем направления полей на поверхности фольги, как показано на рисунке, и свяжем их, используя граничные условия:



$$\begin{cases} E'_0 - E'_1 = E'_2, \\ H'_0 + H'_1 - H'_2 = \frac{4\pi i}{c}. \end{cases}$$

Учитывая, что $i = \sigma^* E$ и $H' = E'$, из граничных условий найдем амплитуды отраженной и прошедшей волн в движущейся системе:

$$E'_1 = E'_0 \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad E'_2 = E'_0 \frac{1}{1 + \alpha}, \quad \text{где } \alpha = \frac{2\pi\sigma^*}{c}.$$

Используем теперь преобразования Лоренца для полей $\bar{E} = \gamma \left(E' - \bar{\beta} \times H' \right)$. Учитывая направление распространения волн относительно $\bar{\beta}$, получим окончательно:

$$E_1 = E_0 \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad E_2 = E_0 \frac{1}{1 + \alpha}.$$

2008/2009 учебный год

Контрольная работа 1

Решение задачи 1

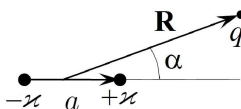
Искомое электрическое поле в центре кольца направлено вниз. Туда же направим ось z . Тогда в полярной системе координат, начало которой в центре кольца, получим:

$$E = E_z = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\varkappa (R d\alpha)}{R^2} \cos \alpha = \frac{2\varkappa}{R} 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \frac{\varkappa}{R}.$$

Здесь \varkappa – линейная плотность заряда нити, элемент длины которой равен $R d\alpha$, а угол α отсчитывается от оси z . Так как $\varkappa = \frac{q}{(2\pi R/4)} = \frac{2q}{\pi R}$, то

$$E_z = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{q}{R^2}.$$

Решение задачи 2



Поле равномерно заряженной нити $\mathbf{E}_1 = \frac{2\varkappa}{R} \frac{\mathbf{R}}{R}$, а потенциал

$$\varphi_1 = - \int \mathbf{E}_1 d\mathbf{R} = -2\varkappa \ln R + C_1.$$

От двух нитей $\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -2\varkappa \ln R_+ + 2\varkappa \ln R_- + C$, где $R_{\pm} = \left(R^2 + \frac{a^2}{4} \mp 2R \frac{a}{2} \cos \alpha \right)^{1/2}$. Положим $\varphi(R=0) = 0$, тогда константа $C = 0$.

При $R \gg a$:

$$\varphi(R, \alpha) = 2\varkappa \ln \frac{R_-}{R_+} \cong 2\varkappa \frac{a}{R} \cos \alpha = \frac{2(\mathbf{d}_1 \mathbf{R})}{R^2},$$

где $\mathbf{d}_1 = \varkappa \mathbf{a}$ – дипольный момент на единицу длины.

Поле

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{2\mathbf{d}_1}{R^2} + \frac{4(\mathbf{d}_1\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^4}.$$

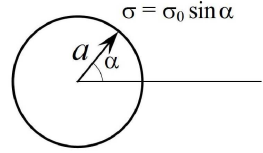
Сила, действующая на заряд q ,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Решение задачи 3

Потенциал электрического поля должен удовлетворять уравнению Лапласа и граничным условиям.

В цилиндрических координатах общее решение уравнения Лапласа имеет вид



$$\varphi(R, \theta) = \left(A_1 + \frac{A_2}{R} \right) \cos \theta,$$

где угол $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ отсчитывается от оси z , направленной вверх.

Вне цилиндра

$$\varphi_{out} = \frac{A_2}{R} \cos \theta,$$

так как на бесконечности потенциал должен стремиться к нулю.

Внутри

$$\varphi_{in} = A_1 R \cos \theta.$$

Граничные условия: $\varphi_{out}|_{R=a} = \varphi_{in}|_{R=a}$ и $\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial R}|_{R=a} - \frac{\partial \varphi_{out}}{\partial R}|_{R=a} = 4\pi\sigma$.

Из граничных условий получаем:

$$A_1 = 2\pi\sigma_0 \text{ и } A_2 = 2\pi\sigma_0 a^2.$$

Поле внутри цилиндра направлено вдоль оси z :

$$\mathbf{E}_{in} = -\nabla\varphi_{in} = -2\pi\sigma_0\mathbf{e}_z,$$

а снаружи

$$\mathbf{E}_{out} = -\nabla\varphi_{out} = -\frac{2\mathbf{d}_1}{R^2} + \frac{4(\mathbf{d}_1\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^4},$$

где $\mathbf{d}_1 = \pi a^2 \sigma_0 \mathbf{e}_z$.

Решение задачи 4

Изображением заряда q является заряд $q' = -q\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$.

Дипольный момент фиктивного диполя, который является изображением диполя реального, равен $d' = d\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$, а угол между направлениями векторов \mathbf{E} и \mathbf{d}' равен $\pi - \alpha$.

Найдем энергию взаимодействия диполя \mathbf{d} с внешним полем \mathbf{E} и со своим изображением \mathbf{d}' :

$$\begin{aligned} W &= -(\mathbf{d}\mathbf{E}) + \frac{(\mathbf{d}\mathbf{d}')}{r^3} - \frac{3(\mathbf{d}\mathbf{r})(\mathbf{d}'\mathbf{r})}{r^5} = \\ &= -dE \cos \alpha - \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right) \frac{d^2}{(2a)^3} - \frac{3\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right) \sin^2 \alpha}{(2a)^3} d^2 = \\ &= -d \left(E \cos \alpha + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{d}{(2a)^3} (2 - \cos^2 \alpha) \right). \end{aligned}$$

Для нахождения равновесного значения угла α найдем и приравняем к нулю производную $\partial W / \partial \alpha$. В результате получим уравнение

$$\sin \alpha \left(E - 2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{d}{(2a)^3} \cos \alpha \right) = 0,$$

из которого следует, что экстремумы функции $W(\alpha)$ имеют место при $\sin \alpha = 0$ и $\cos \alpha = \frac{E}{2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{d}{(2a)^3}}$.

Отсюда видно, что $\alpha = \pm \pi/2$ при $E = 0$, т. е. в отсутствие внешнего поля. Если $E < 2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{d}{(2a)^3} \cos \alpha$, то $\alpha = \pm \arccos \frac{E}{2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{d}{(2a)^3}}$.

Если же $E \geq 2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{d}{(2a)^3} \cos \alpha$, то $\alpha = 0$, т. е. диполь ориентируется по полю.

Решение задачи 5

Поле на оси кольца:

$$E = E_z = \frac{qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Так как радиус шарика мал $a \ll R$, то его дипольный момент в однородном поле равен

$$d = E(h) \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3.$$

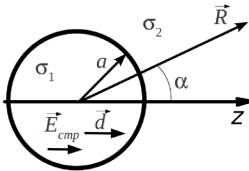
Энергия квазиупругого диполя:

$$W = -\frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}) = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E^2(h).$$

Сила, действующая на шарик:

$$F = -\frac{\partial W}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 \frac{q^2 h^2}{(R^2 + h^2)^3} = q^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 \frac{h(R^2 - 2h^2)}{(R^2 + h^2)^4}.$$

Отсюда видно, что величина и направление действия силы зависят от соотношения между R и $h\sqrt{2}$.

Решение задачи 6

Стороннее поле не описывается уравнениями Максвелла и по своему смыслу не является электростатическим (см. задачу 5 из КР1 2007/2008). Однако оно приводит в движение носители тока внутри цилиндра.

Плотность тока, обусловленного сторонними силами, составляет $\mathbf{j}_{\text{стр}} = \sigma_1 \mathbf{E}_{\text{стр}}$. При этом на границе раздела образуются поверхностные заряды, которые наводят внутри и снаружи цилиндра электростатические поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 соответственно. Будем искать

напряженность в виде однородного поля внутри цилиндра и поля линейного диполя снаружи (такое решение типично для систем с аксиальной геометрией – см. задачу 3 из KP1 2008/2009):

$$\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{4(\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^4} - \frac{2\mathbf{d}}{R^2}.$$

Полная плотность тока внутри цилиндра складывается из сторонней и электростатической составляющих

$$\mathbf{j}_{in} = \mathbf{j}_{стр} + \mathbf{j}_1 = \sigma_1 \mathbf{E}_{стр} + \sigma_1 \mathbf{E}_1 = \sigma_1 (\mathbf{E}_{стр} + \mathbf{E}_1),$$

а снаружи равна $\mathbf{j}_{out} = \sigma_2 \mathbf{E}_2$.

Для определения неизвестных E_1 и d имеем два граничных условия – непрерывность нормальных компонент тока и тангенциальных компонент напряженности электростатического поля (исходно \mathbf{d} направим по z , \mathbf{E}_1 против z):

$$\sigma_1 (E_{стр} - E_1) \cos \alpha = \sigma_2 \frac{2d}{a^2} \cos \alpha,$$

$$-E_1 \sin \alpha = -\frac{2d}{a^2} \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \mathbf{d} и \mathbf{R} . Отсюда $d = \frac{\sigma_1}{2(\sigma_2 + \sigma_1)} a^2 E_{стр}$, $E_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} E_{стр}$ (направления такие, как исходно предполагали).

Таким образом,

$$\mathbf{j}_{in} = \sigma_1 \frac{\sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \mathbf{E}_{стр} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \mathbf{E}_{стр},$$

$$\mathbf{j}_{out} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \cdot \frac{a^2}{R^2} E_{стр} (2\mathbf{e}_R \cos \alpha - \mathbf{e}_z).$$

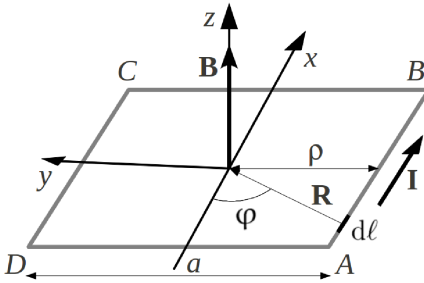
Полученное решение для полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 верно, поскольку оно удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям.

Примечание. В двух предельных случаях имеем

$\sigma_2 \ll \sigma_1$: $d = \frac{1}{2}a^2 E_{\text{стр}}$, $\mathbf{j}_{in} = \sigma_2 \mathbf{E}_{\text{стр}}$, $\mathbf{j}_{out} = \frac{a^2 \sigma_2 E_{\text{стр}}}{R^2} (2\mathbf{e}_R \cos \alpha - \mathbf{e}_z)$ – цилиндр максимально поляризован, поэтому ограничивающим фактором для всех токов является проводимость σ_2 ;

$\sigma_1 \ll \sigma_2$: $d = \frac{\sigma_1 a^2 E_{\text{стр}}}{2\sigma_2}$, $\mathbf{j}_{in} = \sigma_1 \mathbf{E}_{\text{стр}}$, $\mathbf{j}_{out} = \frac{a^2 \sigma_1 E_{\text{стр}}}{R^2} (2\mathbf{e}_R \cos \alpha - \mathbf{e}_z)$ – цилиндр слабо поляризован ($d \propto \sigma_1$), поэтому ограничивающим фактором для всех полей и токов является проводимость σ_1 .

Экзаменационная работа 1



Искомое магнитное поле является суперпозицией полей от токов, текущих по каждой стороне квадрата:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i.$$

Поле \mathbf{B}_1 от тока по одной стороне квадрата направлено по нормали к плоскости рамки:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{c} \int_{AB} \frac{I[d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}]}{R^3}.$$

Поле \mathbf{B}_i от тока по любой другой стороне получается из \mathbf{B}_1 поворотом системы координат относительно оси, проходящей через центр квадрата и ориентированной по нормали к плоскости рамки. Поскольку вектор \mathbf{B}_1 лежит как раз на этой оси, то данный

поворот его не меняет. Тогда имеем $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_j$, откуда

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{4}{c} \int_{AB} \frac{I[d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}]}{R^3} = -\frac{4}{c} \int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{Id(\rho \operatorname{ctg} \varphi)\rho}{\left(\frac{\rho}{\sin \varphi}\right)^3} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{4I}{c\rho} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin^3 \varphi d\varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{4I}{c\rho} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \cdot \mathbf{e}_z = \frac{4I}{c\rho} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) \mathbf{e}_z = \frac{8I}{ca} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_z = \frac{8\sqrt{2}I}{ca} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Примечание. Если из той же рамки составить ромб с расстоянием ρ от центра до сторон, то изложенные рассуждения приведут к более общему результату: $B = \frac{4\sqrt{2}I}{c\rho}$.

Решение задачи 2

В цилиндрических координатах вектор-потенциал в обеих областях имеет только z -компоненту:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ A_z & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_z}{r \partial \alpha} \mathbf{e}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{e}_\alpha,$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{C_0}{a} \left(\frac{\partial(r \sin \alpha)}{r \partial \alpha} \mathbf{e}_r - \frac{\partial(r \sin \alpha)}{\partial r} \mathbf{e}_\alpha \right) = \frac{C_0}{a} (\cos \alpha \cdot \mathbf{e}_r - \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha),$$

$$\mathbf{B}_2 = C_0 a \left(\frac{\partial \frac{\sin \alpha}{r}}{r \partial \alpha} \mathbf{e}_r - \frac{\partial \frac{\sin \alpha}{r}}{\partial r} \mathbf{e}_\alpha \right) = \frac{C_0 a}{r^2} (\cos \alpha \cdot \mathbf{e}_r + \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha).$$

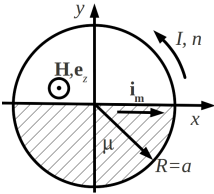
Плотность тока находим из уравнения Максвелла:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ 0 & H_r & rH_\alpha \end{vmatrix} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\partial(rH_\alpha)}{r \partial r} - \frac{\partial H_r}{r \partial \alpha} \right) \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{j}_1 = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{C_0}{ar} \sin \alpha + \frac{C_0}{ar} \sin \alpha \right) \cdot \mathbf{e}_z = \frac{C_0}{a} \frac{c}{2\pi r} \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{j}_2 = \frac{c}{4\pi} \frac{C_0 a}{r^3} (-\sin \alpha + \sin \alpha) \mathbf{e}_z = 0.$$

Решение задачи 3



Рассмотрим систему координат с осью z , совпадающей с осью соленоида и осью x , лежащей в плоскости границы раздела двух сред. Сделаем предположение: напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в заданном и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ в пустом соленоиде полностью совпадают.

Отсюда вытекает два следствия.

1. Всюду внутри соленоида напряженность поля \mathbf{H} направлена по z и однородна.
2. Вне соленоида напряженность поля \mathbf{H} равна нулю.

Для обоснования сделанного предположения достаточно показать, что соответствующее решение в среде с магнетиком удовлетворяет двум уравнениям Максвелла в каждой из двух половин соленоида, в области за пределами соленоида, и граничным условиям на каждой границе раздела. Проверяем, приняв во внимание, что решение в вакууме уравнениям Максвелла удовлетворяет:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_i = \mu_i \operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0 \quad \text{— верно.}$$

$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}$ (в интегральной форме это теорема Стокса, которая для любого контура принимает совершенно одинаковый вид и в вакууме, и в магнетике) — верно.

Граничные условия выполняются в силу геометрии поля, заданной условием 1 (у поля просто нет иной компоненты, кроме

тангенциальной):

$$\begin{aligned} H_{\tau i} &= H_{\tau j} = H_0 - \text{верно.} \\ B_{ni} &= B_{nj} = 0 - \text{верно.} \end{aligned}$$

Тогда с учетом $H_0 = \frac{4\pi I n}{c}$ искомое поле равно

$$B = B_z = \begin{cases} \frac{4\pi I n}{c}, & R < a, y > 0; \\ \frac{4\pi \mu I n}{c}, & R < a, y < 0; \\ 0, & R > a. \end{cases}$$

Поверхностную плотность молекулярных токов находим из граничного условия на тангенциальные компоненты **B**:

$$B_2 - B_1 = \frac{4\pi i_m}{c} \Rightarrow i_m = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{4\pi I n}{c} (\mu - 1) = I n (\mu - 1).$$

Молекулярные токи ориентированы в плоскости границы раздела перпендикулярно оси z (на рисунке представлен случай $\mu > 1$).

Решение задачи 4

Искомую силу удобно определять как силу давления поля на диск. При этом токи, текущие по диску, создают по обе его стороны одинаковое по величине поле, которое можно поэтому не рассматривать. Поле от жилы и обмотки, как следует из геометрии задачи, имеет только α -составляющую, зависящую от r (в цилиндрических координатах). Из теоремы Стокса в области $r_1 < r < r_2$ имеем:

$$2\pi r H_\alpha = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ \frac{4\pi I}{c}, & z > 0. \end{cases} \Rightarrow H_\alpha = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ \frac{2I}{cr}, & z > 0. \end{cases}$$

Давление магнитного поля на диск:

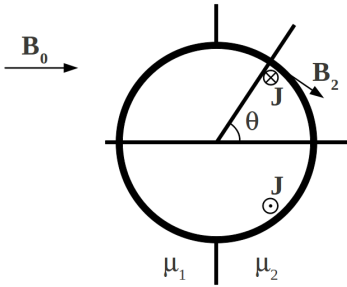
$$p(r) = \frac{H_\alpha^2(r)}{8\pi} = \frac{I^2}{2\pi c^2 r^2}.$$

Сила давления на диск:

$$F = \int_{r_1}^{r_2} p(r) 2\pi r dr = \frac{I^2}{c^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{I^2}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Примечание. Сила давления направлена в сторону области с бóльшим магнитным полем. Поле не “давит” на стенку, а “втягивает” ее. По этой причине наравне с “силой давления” используется термин “сила натяжения” магнитного поля.

Решение задачи 5



Магнитное поле B_s внутри сверхпроводящего шара отсутствует. Это означает, что в сверхпроводнике формируются токи, индуцирующие такое магнитное поле, которое полностью компенсирует поле внешнее. Из симметрии задачи ясно, что эти токи циркулируют по окружностям, лежащим в плоскостях, параллельных

границе раздела двух сред. Это наводит на мысль, что вклад шара в распределение $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (\mathbf{r} исходит из центра шара) при $r > R$ описывается полем магнитного диполя. Тогда полное поле имеет вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3 \frac{(\mathbf{m}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

где $B_0 = \mu_1 H_0$. Оно удовлетворяет уравнению Лапласа. Если можно найти такое m , при котором выполняются граничные условия на всех границах раздела, то предполагаемое решение является верным и единственным. Запишем условие на нормальные компоненты \mathbf{B} .

На сфере $r = R$:

$$B_0 \cos \theta - \frac{m}{R^3} \cos \theta + 3 \frac{(mR \cos \theta)R}{R^5} = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{m} = -\frac{R^3 \mathbf{B}_0}{2}.$$

На плоской границе получается тождество $B_0 - \frac{m}{r^3} = B_0 - \frac{m}{r^3}$, т. е. всюду там граничное условие также выполняется.

Тангенциальные компоненты напряженности магнитного поля на плоской границе раздела равны нулю и, следовательно, друг другу. Из условия $B_\tau - B_{\tau s} = \frac{4\pi}{c} J_{\text{полн}}$ на сфере находим полную линейную плотность тока на сферической границе раздела:

$$B_\tau - 0 = B_0 \sin \theta - \frac{m}{R^3} \sin \theta = \frac{3B_0}{2} \sin \theta = \frac{4\pi}{c} J_{\text{полн}},$$

откуда полная поверхностная плотность тока равна

$$J_{\text{полн}}(\theta) = \frac{3cB_0}{8\pi} \sin \theta.$$

$J_{\text{полн}}$ включает в себя поверхностную плотность сторонних токов в сверхпроводнике, а также молекулярных токов в магнетике. Последнюю находим по формуле

$$J_{\text{мол}}(\theta) = cM_{i\tau} = c \left(1 - \frac{1}{\mu_i} \right) B_{i\tau} = \left(1 - \frac{1}{\mu_i} \right) \frac{3cB_0}{8\pi} \sin \theta.$$

Поверхностную плотность сторонних токов в сверхпроводнике находим как разность $J_{\text{полн}} - J_{\text{мол}}$:

$$J(\theta) = \begin{cases} \frac{3cB_0}{8\pi\mu_1} \sin \theta = \frac{3cH_0}{8\pi} \sin \theta & \text{на границе со средой с } \mu_1; \\ \frac{3cB_0}{8\pi\mu_2} \sin \theta = \frac{3c\mu_1 H_0}{8\pi\mu_2} \sin \theta & \text{на границе со средой с } \mu_2. \end{cases}$$

Таким образом, при найденных m и $J(\theta)$ граничные условия на всех границах раздела выполняются. Следовательно, искомое

поле действительно описывается зависимостью

при $r > R$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + \frac{\mathbf{B}_0 R^3}{2r^3} - 3 \frac{R^3 (\mathbf{B}_0 \mathbf{r}) \mathbf{r}}{2r^5},$$

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 + \frac{R^3 \mathbf{H}_0}{2r^3} - 3 \frac{R^3 (\mathbf{H}_0 \mathbf{r}) \mathbf{r}}{2r^5},$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\mathbf{H}_0 + \frac{R^3 \mathbf{H}_0}{2r^3} - 3 \frac{R^3 (\mathbf{H}_0 \mathbf{r}) \mathbf{r}}{2r^5} \right);$$

при $r < R$ $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.

Примечание. Тот же ответ для поверхностной плотности сторонних токов в шаре дает формула $J = \frac{c}{4\pi} (H_{\tau i} - H_{\tau s})$, в которой $H_{\tau s} = 0$. Однако здесь данная формула некорректна, поскольку H_s в сверхпроводнике не имеет физического смысла.

Решение задачи 6

Вращающийся стержень эквивалентен бесконечному соленоиду с током J и плотностью намотки n такими, что $J \cdot n = a\omega\sigma$. Тогда магнитное поле сконцентрировано внутри стержня, где оно однородно, направлено параллельно оси стержня и равно по величине:

$$B = \frac{4\pi\sigma\omega a}{c} \mu, \quad r < a.$$

Изменяющийся во времени поток магнитного поля пронизывает кольцо и наводит в нем ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \cdot \dot{\Phi}.$$

В кольце возникает ток $I(t)$. С учетом ЭДС самоиндукции

$\mathcal{E}_s = -\frac{L\dot{I}}{c^2}$ запишем закон Кирхгофа для контура кольца:

$$\frac{L}{c^2} \cdot \dot{I} + R \cdot I = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi_1}{dt}.$$

В стандартной форме:

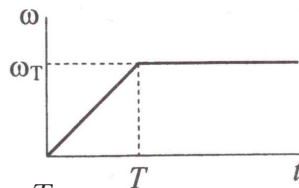
$$\dot{I} + \frac{c^2 R}{L} \cdot I = -\frac{c}{L} \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Общее решение уравнения (1): $I(t) = I^*(t) + \tilde{I}(t)$, где

$I^*(t) = A_1 e^{-t/\tau}$ – решение однородного уравнения
 $(\tau = \frac{L}{c^2 R}, A_1 = \text{const})$;

$\tilde{I}(t)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Решение зависит от конкретного вида $\Phi(t)$. Для линейной зависимости $\omega(t)$, показанной на рисунке, получим:



$$I(t) = \begin{cases} \frac{4\pi^2 \sigma \omega_T \mu a^3}{c^2 T R} (e^{-t/\tau} - 1), & t < T; \\ \frac{4\pi^2 \sigma \omega_T \mu a^3}{c^2 T R} (e^{-T/\tau} - 1) e^{-(t-T)/\tau}, & t \geq T. \end{cases}$$

(Учтены начальные условия $I(0) = 0$ и $I(T-0) = I(T+0)$). Тогда энергия, выделившаяся в кольце в виде джоулева тепла, равна

$$Q = \int_0^T R I^2(t) dt + \int_T^\infty R I^2(t) dt.$$

Вычисляем первый интеграл:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T R I^2(t) dt &= R \left(\frac{4\pi^2 \sigma \omega_T \mu a^3}{c^2 T R} \right)^2 \int_0^T (e^{-t/\tau} - 1)^2 dt = \\
 &= R \left(\frac{4\pi^2 \sigma \omega_T \mu a^3}{c^2 T R} \right)^2 \int_0^T (e^{-2t/\tau} - 2e^{-t/\tau} + 1) dt = \\
 &= R \left(\frac{4\pi^2 \sigma \omega_T \mu a^3}{c^2 T R} \right)^2 \left(-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} + 2\tau e^{-t/\tau} + t \right) \Big|_0^T = \\
 &= R \left(\frac{4\pi^2 \sigma \omega_T \mu a^3}{c^2 T R} \right)^2 \left(-\frac{\tau}{2} e^{-2T/\tau} + 2\tau e^{-T/\tau} + T + \frac{\tau}{2} - 2\tau \right) = \\
 &= R \left(\frac{4\pi^2 \sigma \omega_T \mu a^3}{c^2 T R} \right)^2 \left(T - \frac{\tau}{2} e^{-2T/\tau} + 2\tau e^{-T/\tau} - \frac{3\tau}{2} \right) = \\
 &= \left(\frac{4\pi^2 \sigma \omega_T \mu a^3}{c^2 T R} \right)^2 \left(RT - \frac{R\tau}{2} e^{-2T/\tau} + 2R\tau e^{-T/\tau} - \frac{3R\tau}{2} \right) = \\
 &= \left(\frac{4\pi^2 \sigma \omega_T \mu a^3}{c^2 T R} \right)^2 \left(RT - \frac{L}{2c^2} e^{-2T/\tau} + \frac{2L}{c^2} e^{-T/\tau} - \frac{3L}{2c^2} \right).
 \end{aligned}$$

При $t > T$ ЭДС $\mathcal{E} \sim \dot{\Phi} = 0$. Поэтому второй интеграл, согласно закону сохранения энергии, тождественно равен энергии кольца

в момент $t = T$:

$$\begin{aligned} \int_T^{\infty} RI^2(t)dt &\equiv \frac{LI^2(T)}{2c^2} = \frac{L}{2c^2} \left(\frac{4\pi^2\sigma\omega_T\mu a^3}{c^2TR} \right)^2 (e^{-T/\tau} - 1)^2 = \\ &= \left(\frac{4\pi^2\sigma\omega_T\mu a^3}{c^2TR} \right)^2 \left(\frac{L}{2c^2} e^{-2T/\tau} - \frac{L}{c^2} e^{-T/\tau} + \frac{L}{2c^2} \right). \end{aligned}$$

Суммируя, получаем окончательный ответ:

$$Q = \left(\frac{4\pi^2\sigma\omega_T\mu a^3}{c^2TR} \right)^2 \cdot \left(RT + \frac{L}{c^2} e^{-T/\tau} - \frac{L}{c^2} \right).$$

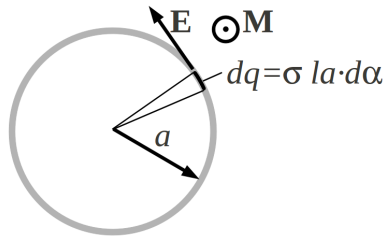
Решение задачи 7

Сначала поясним картину явления. Вследствие изменения магнитного потока, проходящего через сечение цилиндра, в пространстве формируется вихревое электрическое поле, действующее на распределенный по поверхности цилиндра заряд. Возникает момент силы, вызывающий вращение цилиндра.

ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi a^2}{c} \cdot \frac{dB}{dt}. \quad (1)$$

Вращающийся заряд цилиндра эквивалентен вихревому току с линейной плотностью



$$\mathbf{J} = \sigma a \omega \mathbf{e}_\alpha.$$

Вихревой ток наводит внутри цилиндра поле

$$\mathbf{B}_i = \frac{4\pi J}{c} \mathbf{e}_z.$$

Магнитное поле B , записанное в правой части уравнения (1), включает как внешнее B_{ext} , так и индуцируемое поле B_i , причем с противоположными знаками, поскольку поле самоиндукции стремится сдерживать изменение потока внешнего поля:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB_{ext}}{dt} - \frac{dB_i}{dt} = \frac{dB_{ext}}{dt} - \frac{4\pi a\sigma}{c} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (2)$$

Тангенциальная (вихревая) составляющая электрического поля на поверхности цилиндра:

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi a} = \frac{a}{2c} \cdot \frac{dB}{dt}.$$

Направление \mathbf{E} , показанное на рисунке, задает направление вращения и соответствует начальному \mathbf{B} , направленному на нас. В дальнейшем нас будет интересовать только абсолютное значение угловой скорости, поэтому во всех выражениях ниже подразумеваются модули величин. Момент силы на элемент поверхности $dS = la \cdot d\alpha$:

$$dM = aE\sigma dS = \frac{la^3\sigma}{2c} \cdot \frac{dB}{dt} d\alpha.$$

Момент силы на весь цилиндр:

$$M = aE\sigma S = \frac{la^3\sigma}{2c} \cdot \frac{dB}{dt} 2\pi = \frac{\pi la^3\sigma}{c} \cdot \frac{dB}{dt}.$$

Уравнение вращательного движения:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M = \frac{\pi a^3 l \sigma}{c} \cdot \frac{dB}{dt}, \quad (3)$$

где I – момент инерции цилиндра относительно оси вращения. Подставляя в (3) выражение (2) для $\frac{dB}{dt}$, получим:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi a^3 l \sigma}{c} \cdot \frac{dB_{ext}}{dt} - \frac{\pi a^3 l \sigma}{c} \cdot \frac{4\pi a\sigma}{c} \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

$$\left(I + \frac{4\pi^2 a^4 l \sigma^2}{c^2} \right) \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi a^3 l \sigma}{c} \cdot \frac{dB_{ext}}{dt}.$$

Интегрируя по времени затухания поля, получим:

$$\left(I + \frac{4\pi^2 a^4 l \sigma^2}{c^2}\right) \Delta\omega = \frac{\pi a^3 l \sigma}{c} \cdot \Delta B.$$

Момент инерции полого однородного цилиндра $I = ma^2$.

Конечная угловая скорость:

$$\omega = \frac{\pi a l \sigma B}{\left(m + \frac{4\pi^2 a^2 l \sigma^2}{c^2}\right) c}.$$

Контрольная работа 2

Решение задачи 1

Так как расстояние между пластинами много больше продольной длины когерентности, то электромагнитные волны после отражения не интерферируют и складывать нужно интенсивности. Для прошедшей волны можно записать следующий ряд:

$$I = I_0 (t^2 + t^2 r^2 + t^2 r^4 + t^2 r^6 + \dots) = I_0 \frac{t^2}{1-r^2} = I_0 \frac{(1-r^2)}{1-r^2} = I_0 \frac{1-r}{1+r},$$

или, подставляя численные значения:

$$I = 0.818 \cdot I_0.$$

Решение задачи 2

Условие минимума интенсивности в отраженном свете с учетом потери полуволны при отражении от пластины может быть записана как

$$2k\Delta = 2kd + \frac{kr_{\min}^2}{R} = 2\pi m,$$

где Δ – разность хода лучей, d – зазор между пластиной и линзой, R – радиус кривизны линзы, m – порядковый номер минимума, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Отсюда получаем, что

$$R = \frac{r_{15}^2 - r_5^2}{\lambda(m_{15} - m_5)} = \frac{D_{15}^2 - D_5^2}{40\lambda}.$$

Подставляя численные значения, находим $R = 0,1$ м.

Решение задачи 3

Плоскую монохроматическую волну естественного света с интенсивностью I_0 можно разложить на сумму взаимно ортогональных линейно-поляризованных волн с интенсивностью $\frac{I_0}{2}$ каждая. Пусть направления каждой из ортогональных поляризаций параллельны соответствующим осям поляризаторов. Тогда каждый поляризатор пропускает свою составляющую света и непрозрачен для другой. При освещении половинки зоны Френеля линейно-поляризованной волной с электрическим полем E (и интенсивностью $\frac{I_0}{2}$) поле в точке наблюдения составит то же значение E (а интенсивность — $\frac{I_0}{2}$). При освещении двух половинок в точке наблюдения складываются не поля, а интенсивности, поскольку волны с взаимно ортогональными поляризациями не интерferируют:

$$I = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} = I_0.$$

При освещении полной 1-й зоны Френеля, перекрытой одним поляроидом, волны от двух половинок уже интерferируют. Поэтому поле в точке наблюдения составит значение $2E$. Тогда интенсивность в точке P равна

$$I = \frac{I_0}{2} \cdot \left(\frac{2E}{E} \right)^2 = 2I_0.$$

Решение задачи 4

Запишем для данной задачи интеграл Кирхгофа:

$$E = \frac{k}{2\pi ib} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} E_0 \exp(ik\Delta\ell - i\omega t) r dr d\varphi,$$

где E_0 – амплитуда электрического поля на поверхности отверстия, $dS = r dr d\varphi$ – элемент площади отверстия, $\Delta\ell$ – оптическая разность хода в параксиальном приближении:

$$\Delta\ell = a + b + \frac{r^2}{2a} + \frac{r^2}{2b}.$$

Результат интегрирования:

$$E = E_0 e^{(ika+ikb-i\omega t)} \frac{a}{a+b} \left(e^{\frac{ikr_1^2}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} - e^{\frac{ikr_2^2}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} \right).$$

По условию задачи необходимо выбрать r_2 такое, чтобы интенсивность в точке наблюдения $I \sim EE^*$ была такой же, как и в отсутствие экрана $I \sim E_0^2 \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$. Воспользовавшись формулой

$$\left| e^{i\varphi} - e^{i\psi} \right|^2 = 2 - 2 \cos[\varphi - \psi],$$

получаем, что это возможно, если

$$2 - 2 \cos \left(\frac{ik(r_1^2 - r_2^2)}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) = 1,$$

откуда

$$\frac{ik(r_1^2 - r_2^2)}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = -\frac{\pi}{3}$$

и

$$r_2^2 = r_1^2 + \frac{\lambda}{3} \frac{ab}{a+b}.$$

Решение задачи 5

Распространение электромагнитных полей в волноводе описывается волновым уравнением вида

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

решение которого для z -составляющей ищется в виде

$$B_z = \hat{B}_z^{(n,n)}(x, y) e^{ikz - i\omega t}. \quad (2)$$

Подставляя данное решение в волновое уравнение (1), получаем задачу на собственные значения

$$\Delta_{\perp} \hat{B}_z^{(n,n)}(x, y) + \gamma_{mn}^2 \hat{B}_z^{(n,n)}(x, y) = 0 \quad (3)$$

и дисперсионное уравнение

$$\omega_{mn}^2 = c^2 (k^2 + \gamma_{mn}^2).$$

После установки двух поперечных перегородок появляются дополнительные требования для выполнения граничных условий при $z = 0$ и $z = L$ на нормальную составляющую магнитного поля $B_z|_{z=0} = 0$ и $B_z|_{z=L} = 0$. Такое решение можно получить с помощью линейной комбинации решений вида (2):

$$B_z = \hat{B}_z^{(n,n)}(x, y) \sin(kz) e^{-i\omega t}, \text{ где } k = p \frac{\pi}{L} \text{ и } p - \text{целые числа.}$$

Так как (3) записано для H -моды колебаний в волноводе, то требование $E_z = 0$ на зануление нормальной составляющей электрического поля на двух поперечных перегородках выполняется автоматически.

Спектр частот получается из дисперсионного уравнения:

$$\omega_{mnp}^2 = c^2 \left(\left(p \frac{\pi}{L} \right)^2 + \gamma_{mn}^2 \right).$$

Решение задачи 6

Видность $V \rightarrow 0$, когда разность хода интерферирующих лучей больше продольной длины когерентности:

$$\Delta \ell > \ell_{\parallel} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = \frac{2\pi c}{\Delta \omega}.$$

Разность хода в пластине для интерферирующих лучей $\Delta \ell = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta)}$.

Отсюда получаем условие: $\sin^2(\theta) < n^2 - 1$.

Экзаменационная работа 2**Решение задачи 1**

Главные максимумы порядка m видны под углами $\theta_m = m\frac{\lambda}{a}$, где m – порядок максимума, λ – длина волны, a – период одномерной решетки ($\theta_m \ll 1$). При освещении дифракционной решетки видимым светом со спектром $[\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda]$ самый большой угол для первого порядка будет равен $\theta_{1\max} = \frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{a}$, а минимальный для второго порядка $\theta_{2\min} = 2\frac{\lambda_0}{a}$. Так как по условию задачи $\Delta\lambda < 2 \cdot \lambda_0$, то $\theta_{1\max} < \theta_{2\min}$ и спектры не перекрываются.

Решение задачи 2

Запишем граничные условия на тангенциальную составляющую электрических и магнитных полей. Так как по обеим сторонам границы $\varepsilon = 1$, то углы падения, преломления и отражения равны. Тогда

$$E_1 \cos(\theta) - E_3 \cos(\theta) = E_2 \cos(\theta),$$

$$E_1 + E_3 - E_2 = \frac{4\pi}{c}i = \frac{4\pi}{c}\sigma^* E_2 \cos(\theta).$$

Решая данную систему уравнений, получаем коэффициенты отражения r и прохождения t по амплитуде:

$$r = \frac{E_3}{E_1} = \frac{2\pi\sigma \cos(\theta)/c}{1 + 2\pi\sigma \cos(\theta)/c}, \quad t = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{1 + 2\pi\sigma \cos(\theta)/c}.$$

Решение задачи 3

Воспользуемся результатом для вычисления интеграла Кирхгофа по отверстию радиуса r_0 для точки наблюдения z_p :

$$E = E_0 \exp(ikz_p) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{ikr_0^2}{2z_p}\right)\right).$$

Тогда для электрических полей, создаваемых разными половинками, можно записать

$$E_1 = \frac{1}{2}E_0 \exp(ikz_p) \exp(ik\Delta) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{ikr_0^2}{2z_p}\right)\right),$$

$$E_2 = \frac{1}{2}E_0 \exp(ikz_p) \exp(ikn\Delta) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{ikr_0^2}{2z_p}\right)\right).$$

Используя принцип суперпозиции и подставляя все заданные в условии значения, получаем:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \exp(ikz_p) \exp(ik\Delta) \cdot (1 + i).$$

Решение задачи 4

Так как точка наблюдения находится на расстоянии длины волны от излучающего диполя, то в формуле

$$\mathbf{B} = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{cr^2}$$

необходимо учитывать оба члена. Мгновенное значение дипольного момента берется в запаздывающий момент времени $t' = t - \frac{r}{c}$, где r – расстояние от точки наблюдения до излучающего диполя. В результате суммирования полей от всех трех диполей получаем:

$$\mathbf{B} = 2\pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{d_0}{a^3} [2\pi + i] \cdot \exp(-i\omega t).$$

Решение задачи 5

Воспользуемся тем, что мгновенные потери частицы на излучение совпадают в лабораторной и сопутствующей системах отсчета:

$$I = I' = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}'}{c^3} = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{e^2 E'_{\parallel}}{m} \right)^2.$$

Поперечное поле в системе отсутствует, а продольное не меняется при преобразованиях Лоренца. Поэтому можно записать следующее выражение для потери энергии электроном на излучение:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^4}{3m^2c^3} \frac{4q^2v^2t^2}{(\rho^2 + v^2t^2)^3} dt, \text{ где } \rho = h/2 - \text{прицельный параметр.}$$

Предполагая, что потери на излучение достаточно малы и не влияют на скорость движения частицы (ультрарелятивистский электрон), получаем:

$$\Delta E = \frac{8e^4q^2}{3m^2c^3} \frac{1}{v\rho^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^3} d\xi = \frac{\pi}{3} \frac{r_e^2}{(h/2)^2} \frac{q^2}{(h/2)} = \frac{8\pi}{3} \frac{r_e^2q^2}{h^3},$$

где $r_e = e^2/mc^2$ – классический радиус заряженной частицы. Потерянный импульс рассчитывается по формуле

$$\Delta \mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \Delta E.$$

Решение задачи 6

Разделим задачу на несколько этапов. Во-первых, для ее решения найдем поляризуемость бесконечного цилиндра в однородном электрическом поле. Во-вторых, запишем изменение дипольного момента единицы длины цилиндра. Зная его, посчитаем магнитное поле в волновой зоне и проинтегрируем по всей длине с учетом геометрического набега фаз. В заключение воспользуемся известными формулами, связывающими дифференциальное сечение рассеяния с интенсивностью электромагнитного излучения, переизлученного в заданный телесный угол. Координатные оси зададим следующим образом: ось цилиндра направим вдоль оси X , а электрическое поле падающей волны – вдоль оси Z .

Этап 1. Определим дипольный момент, возникающий во внешнем однородном электрическом поле \mathbf{E}_0 , перпендикулярном оси цилиндра. Воспользуемся следующими известными фактами: поле внутри цилиндра однородно \mathbf{E}_1 , поле снаружи цилиндра описывается суммой однородного поля \mathbf{E}_0 и поля от дипольной нити, расположенной по оси цилиндра. Дипольный момент нити \varkappa пропорционален внешнему электрическому полю $\varkappa = \alpha \cdot \mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{E}_{out} = \mathbf{E}_0 + \frac{2\varkappa}{r^2} - \frac{4(\varkappa \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^4}.$$

Для нахождения неизвестных констант запишем граничные условия в двух точках на границе цилиндра: в точке, где \mathbf{E}_1 параллельно границе цилиндра – непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля, и в точке, где \mathbf{E}_1 перпендикулярно границе цилиндра – непрерывность нормальной составляющей вектора индукции:

$$E_1 = E_0 + \frac{2\varkappa}{R^2},$$

$$E_0 - \frac{2\kappa}{R^2} = \varepsilon E_1.$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} R^2 E_0 \exp(-i\omega t).$$

Этап 2. Дипольный момент элемента длины dx :

$$\delta \mathbf{d} = \frac{1}{2} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} R^2 \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) dx = \frac{1}{2} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} R^2 E_0 \mathbf{e}_z \exp(-i\omega t) dx.$$

Магнитное поле от цилиндра длиной dx в волновой зоне:

$$\delta \mathbf{H} = \frac{\delta \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r},$$

где r – расстояние до точки наблюдения,

$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ – единичный вектор, направленный в точку наблюдения.

Магнитное поле с учетом набега фаз равняется

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\delta \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} \exp(ikx \mathbf{n} \mathbf{e}_x) dx = \\ &= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\omega^2 R^2}{2c^2 r} E_0 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}] \int_{-l/2}^{l/2} \exp(ikx \sin(\theta) \cos(\phi)) dx = \\ &= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\omega^2 R^2 l}{2c^2 r} E_0 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}] \operatorname{sinc} \left(\frac{kl \sin(\theta) \cos(\phi)}{2} \right). \end{aligned}$$

Этап 3. Дифференциальное сечение рассеяния определяется как

$$d\sigma = \frac{r^2 S d\Omega}{S_0} \text{ или } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 S}{S_0},$$

где S – модуль вектора Пойнтинга рассеянной волны, $r^2 S d\Omega$ – поток энергии в телесный угол $d\Omega$ и S_0 – модуль вектора Пойнтинга падающей волны. Подставляя все ранее полученные соотношения, получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^2 \frac{\omega^4 R^4 l^2}{4c^4} \sin^2 \theta \operatorname{sinc} \left(\frac{kl \sin \theta \cos \phi}{2} \right).$$

2009/2010 учебный год

Контрольная работа 1

Решение задачи 1

Полукольца в силу своего симметричного расположения создают в центре сферы потенциал $\varphi_1 = \frac{Q}{a} + \frac{q}{b}$. На заземленной сфере соберется заряд такой величины, что суммарный потенциал ее поверхности будет равен нулю. Пользуясь методом изображений, можно заменить сферу системой точечных зарядов $Q' = -Q \frac{R}{a}$ и $q' = -q \frac{R}{b}$, находящихся на расстояниях $a' = \frac{R^2}{a}$ и $b' = \frac{R^2}{b}$ от центра соответственно (см. задачу 2.27 в [1]). По принципу суперпозиции находим суммарный потенциал в центре сферы:

$$\varphi_c = \frac{Q}{a} + \frac{Q'}{a'} + \frac{q}{b} + \frac{q'}{b'} = \frac{Q}{a} + \frac{q}{b} - \frac{(Q+q)R}{R^2}.$$

Ответ: $\varphi_c = \frac{Q}{a} + \frac{q}{b} - \frac{(Q+q)R}{R^2}$.

Решение задачи 2

Поле внутри сферы создается зарядом шара $E_r = \frac{q}{r^2}$; потенциал соответственно имеет вид $\varphi = \frac{q}{r} + C$. Константу найдем из условия нулевого потенциала на сфере $\frac{q}{b} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{q}{b}$. Потенциал проводящего шара $\varphi_0 = \frac{q}{a} - \frac{q}{b}$; заряд $q = \varphi_0 \frac{ab}{b-a}$.

Ответ: $q = \varphi_0 \frac{ab}{b-a}$.

Решение задачи 3

При большом расстоянии между центрами взаимное действие шариков приведет к малому перераспределению заряда, и можно рассмотреть их как две равномерно разноименно заряженные сферы. Емкость такой системы $C_0 \approx \frac{a\ell}{2(\ell-a)}$ соответственно при увеличении расстояния между шариками емкость изменится: $C_1 \approx \frac{a(\ell+\Delta)}{2(\ell+\Delta-a)}$. Поскольку разность потенциалов поддерживается постоянной, изменение емкости приведет к изменению абсолютной величины заряда на каждом шарике:

$$\Delta q = U(C_1 - C_0) \approx \frac{Ua}{2} \left(\frac{a}{\ell + \Delta} - \frac{a}{\ell} \right) = -\frac{Ua^2\Delta}{2\ell(\ell + \Delta)} < 0.$$

Так как система в целом нейтральна, процесс изменения заряда можно свести к перемещению положительного заряда величиной $|\Delta q|$ с шарика, имеющего потенциал $+U$, на шарик с потенциалом 0. Это перемещение направлено противоположно полю сторонних сил, действующих внутри источника. Работа источника поэтому отрицательна и составляет

$$A_s = U\Delta q = U^2(C_1 - C_0) \approx -\frac{U^2a^2\Delta}{2\ell(\ell + \Delta)}.$$

Уравнение баланса энергии системы:

$$W_1 = W_0 + A_s + A,$$

где $W_0 = \frac{C_0 U^2}{2}$, $W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}$ — энергии системы в начальном и конечном состояниях соответственно; A — механическая работа на удалении шариков друг от друга. Тогда

$$A = \frac{C_1 U^2}{2} - \frac{C_0 U^2}{2} - U^2(C_1 - C_0) = \frac{U^2}{2}(C_0 - C_1) \approx \frac{U^2 a^2 \Delta}{4\ell(\ell + \Delta)}.$$

Ответ: $A_s \approx -\frac{U^2 a^2 \Delta}{2\ell(\ell + \Delta)}$; $A \approx -\frac{A_s}{2} \approx \frac{U^2 a^2 \Delta}{4\ell(\ell + \Delta)}$.

Решение задачи 4

Считаем, что заряд равномерно растекается по проводящей части конденсатора: $I = \dot{Q}_{\text{своб}} = - \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = (4\pi - \Omega)r^2 \sigma E_r$. В силу симметрии можно считать, что электрическое поле зависит только от сферического радиуса. Из непрерывности тангенциальной компоненты поля на границе следует, что поле в разных частях конденсатора одинаково для каждого значения радиуса, а электрическая индукция испытывает скачок. Находим поле, пользуясь теоремой Гаусса:

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = D_1 \Omega r^2 + D_2 (4\pi - \Omega) r^2 = 4\pi Q_{\text{своб}} = \varepsilon E \Omega r^2 + E (4\pi - \Omega) r^2,$$

откуда $E = \frac{4\pi Q_{\text{своб}}}{(\varepsilon \Omega + (4\pi - \Omega)) r^2}$. Получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, определяющее релаксацию заряда: $\dot{Q}_{\text{своб}} = -\frac{(4\pi - \Omega) \sigma Q_{\text{своб}}}{(\varepsilon \Omega + (4\pi - \Omega))}$. Время релаксации есть время, за которое количество заряда уменьшится в e раз: $\tau = \frac{\varepsilon \Omega + (4\pi - \Omega)}{(4\pi - \Omega) \sigma}$.

Ответ: $\tau = \frac{\varepsilon \Omega + (4\pi - \Omega)}{(4\pi - \Omega) \sigma}$.

Решение задачи 5

Задача аналогична 3.27 [1] с заменой симметрии выступа на цилиндрическую. Считаем проводимость выступа стремящейся к бесконечности и запишем внешнее электрическое поле в виде суммы поля, создаваемого внешним током и возмущения, вносимого выступом:

$\mathbf{E}_{\text{out}} = \frac{\mathbf{j}_0}{\sigma} + \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^4} - \frac{\mathbf{p}}{r^2}$, где $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{j}_0 a^2}{\sigma}$. Находим ток на единицу длины, интегрируя по контуру выступа (α – полярный угол):

$$I = \int_{\ell} \sigma \mathbf{E}_{\text{out}} d\ell = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2j_0 a \cos \alpha d\alpha = 4aj_0.$$

Ответ: $I = 4aj_0$.

Решение задачи 6

Легко убедиться, что главный $\varphi^{(0)} = \frac{Q}{r}$ и первый $\varphi^{(1)} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ члены разложения равны нулю. Для определения слагаемого второго порядка воспользуемся его представлением через тензор квадрупольных моментов:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} D_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5},$$

где $D_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\mathbf{r}) dV$ (см., например, [3]). В силу симметричного расположения зарядов относительно начала координат в тензоре будут ненулевыми только диагональные компоненты (от интегрирования по объему переходим к интегралу по длине нити с линейной плотностью заряда $\lambda = \frac{q}{a}$):

$$D_{xx} = 2 \frac{q}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \left(3x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) dx = -\frac{1}{6} q a^2,$$

$$D_{yy} = 2 \frac{q}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \left(3 \left(\frac{a}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) dx = \frac{5}{6} q a^2,$$

$$D_{zz} = 2 \frac{q}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \left(- \left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) dx = -\frac{4}{6} q a^2.$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{12} \frac{q a^2}{r^5} (-x^2 + 5y^2 - 4z^2).$$

Ответ: $\varphi^{(2)} = \frac{1}{12} \frac{q a^2}{r^5} (-x^2 + 5y^2 - 4z^2).$

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

По формуле Био-Савара

$$B_z = \frac{I \cdot \pi}{c \cdot R_3 \sqrt{2}},$$

где z – ось Земли. Отсюда находим ток:

$$I = \frac{B_z \cdot c \cdot R_3 \sqrt{2}}{\pi} = 5.2 \cdot 10^{18} \text{ ед. тока СГС} = 1.7 \cdot 10^9 \text{ А.}$$

Ответ: $I = \frac{B_z \cdot c \cdot R_3 \sqrt{2}}{\pi} = 1.7 \cdot 10^9 \text{ А.}$

Решение задачи 2

$$1) \ i_r|_{z=h} = \frac{I}{2\pi r}, \ i_r|_{z=0} = \frac{-I}{2\pi r}, \ i_z|_{r=a} = \frac{I}{2\pi a}.$$

$$2) \ z = h: \begin{cases} B_{2r} - B_{1r} = 0, \\ B_{2\alpha} - B_{1\alpha} = \frac{4\pi i_r|_{z=h}}{c}, \\ B_{2z} = B_{1z}; \end{cases}$$

$$z = 0: \begin{cases} B_{2r} - B_{1r} = 0, \\ B_{2\alpha} - B_{1\alpha} = \frac{4\pi i_r|_{z=0}}{c}, \\ B_{2z} = B_{1z}; \end{cases}$$

$$r = a: \begin{cases} B_{2z} - B_{1z} = 0, \\ B_{2\alpha} - B_{1\alpha} = \frac{4\pi i_z|_{r=a}}{c}, \\ B_{2r} = B_{1r}. \end{cases}$$

$$3) \ \mathbf{B}_1 = \frac{2I}{cr} \mathbf{e}_\alpha, \ \mathbf{B}_2 = 0.$$

Решение задачи 3

По теореме Стокса вдоль любого контура ℓ , охватывающего кольцо, $\oint \mathbf{H}_\ell d\ell = \frac{4\pi I}{c}$.

В вакууме $\mathbf{H} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. В магнетике поле \mathbf{H} остается таким же. Поэтому в области 1 $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$, в области 2 $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H} = \mu \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$.

В области 2 $\oint \mathbf{B}_2 d\ell = \frac{4\pi(I + I_{\text{мол}})}{c}$, откуда с учетом $\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H}$ находим молекулярные токи в области 2 вдоль провода $I_{\text{мол}} = (\mu - 1)I$.

На границе раздела поле тангенциально, поэтому $\Delta B_{12} = \frac{4\pi}{c} i_{\text{мол}}$ (не путать с граничным условием $H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_{\text{стор}}$, здесь сторонних поверхностных токов нет!). Подставляя найденные поля $B_1 = B_0$, $B_2 = \mu B_0$, находим поверхностную плотность тока $\mathbf{i}_{\text{мол}} = -(\mu - 1) \frac{c}{4\pi} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_0]$ (\mathbf{e}_z – единичный вектор вдоль нормали к поверхности раздела).

Ответ: $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. Молекулярные токи протекают по поверхности раздела $\mathbf{i}_{\text{мол}} = -(\mu - 1) \frac{c}{4\pi} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_0]$ и в области 2 вдоль провода $I_{\text{мол}} = (\mu - 1)I$.

Решение задачи 4

Плотность токов проводимости $j_{\text{пров}} = \sigma E = \frac{\sigma}{\varepsilon} D = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{4\pi q(t)}{\pi a^2}$.

С другой стороны, $j_{\text{пров}} = \frac{I}{\pi a^2} = \frac{-\frac{dq}{dt}}{\pi a^2}$.

Решая уравнение $-\frac{dq}{dt} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} q(t)$, получим $q(t) = q_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t}$.

Отсюда находим $j_{\text{пров}}(t) = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \frac{q(t)}{\pi a^2} = \frac{4\sigma}{\varepsilon a^2} q_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t}$.

По теореме Стокса $H_{\alpha \text{ пров}} \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \pi r^2 j_{\text{пров}}(t)$ (r – расстояние до оси) находим магнитное поле от токов проводимости:

$$H_{\alpha \text{ пров}} = \frac{2\pi r}{c} j_{\text{пров}}(t).$$

Плотность тока смещения $j_{\text{смещ}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi}{\pi a^2} \frac{dq}{dt}$.

Подставляя найденное $q(t)$, получим

$$j_{\text{смещ}} = \frac{1}{\pi a^2} \frac{-4\pi\sigma}{\varepsilon} q_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t} = -j_{\text{пров}}.$$

Следовательно, полное поле $H_{\text{полн}} = 0$.

Ответ: $H_{\alpha \text{ пров}} = \frac{8\pi\sigma r}{c\varepsilon a^2} q_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t}$, $H_{\text{полн}} = 0$.

Решение задачи 5

Задача решается методом изображений аналогично 5.16 [1] (см. также решение типовой задачи P48). Имеются два тока-изображения $J' = \frac{\mu-1}{\mu+1} J$ на расстоянии $l' = a^2/l$ (где обозначено $l = x/2$) от оси цилиндра, а также ток $-2J'$ по оси цилиндра.

Сила на единицу длины провода:

$$F = \frac{2J}{c^2} \left(\frac{J}{2l} + \frac{J'}{l-l'} + \frac{J'}{l+l'} - \frac{2J'}{l} \right) = 0.$$

После подстановки и упрощений получается уравнение

$$\frac{1}{2y} + \frac{\lambda}{y + 1/y} + \frac{\lambda}{y - 1/y} - \frac{2\lambda}{y} = 0,$$

где обозначено $y = l/a$, $\lambda = \frac{\mu-1}{\mu+1}$.

Его решение: $y = (1 - 4\lambda)^{1/4}$.

Ответ: $x = 2a \left(1 - 4\frac{\mu-1}{\mu+1} \right)^{1/4}$.

Решение задачи 6

Поле соленоида можно представить в виде разности полей двух полубесконечных соленоидов (4.24 [1]): $\mathbf{H} = q_m \left(\frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \right)$, $q_m = \frac{ISn}{c}$ – “магнитный заряд” соленоида, I – ток, $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \ell$.

Поток поля одного соленоида через другой:

$$\Phi_{12} = 2nSq_m \int_0^\ell \frac{zdz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2n^2 S^2 I}{c} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \ell^2}} \right) = L_{12} \frac{I}{c}.$$

Ответ: $L_{12} = 2n^2 S^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \ell^2}} \right).$

Решение задачи 7

Так как толщина скин-слоя $\delta \ll h$, в первом приближении можно считать, что магнитное поле не проникает в среду (как в сверхпроводнике), и воспользоваться для его нахождения методом изображений. На границе раздела суммарное поле диполя и его изображения равно $B_r(r, 0) = \frac{6mhr}{(r^2 + h^2)^{5/2}}$, где $m = \frac{I \cdot \pi a^2}{c}$ – момент диполя, r – расстояние до проекции диполя на плоскость раздела. При сильном скин-эффекте в нижнем полупространстве ($z \geq 0$) полагаем (6.76 [1]): $B_r(r, z) = \frac{6mhr}{(r^2 + h^2)^{5/2}} e^{i(kz - \omega t)}$.

Пренебрегая токами смещения, находим плотность тока в нижнем полупространстве $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}$. Подставив $\mu = 1$, $\cos \theta = \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}}$, $\sin \theta = \frac{r}{(r^2 + h^2)^{1/2}}$, получим:

$$j_\alpha = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_r}{\partial z} = \frac{c}{4\pi} \frac{ik6mhr}{(r^2 + h^2)^{5/2}} e^{i(kz - \omega t)} = \frac{c}{4\pi} \frac{ik6m \cdot \cos^4 \theta \sin \theta}{h^3} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Средняя по времени тепловая мощность, выделяемая в нижнем полупространстве $\langle W \rangle = \int_0^\infty dz \int_0^\infty 2\pi r dr \cdot \frac{\overline{(\text{Re}(j))^2}}{\sigma}$, где черта означает усреднение по времени:

$$\langle W \rangle = \int_0^\infty dz \int_0^{\pi/2} \frac{2\pi h \operatorname{tg} \theta h d\theta}{\sigma \cos^2 \theta} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{i-1}{\delta} e^{\frac{i-1}{\delta} z - i\omega t} \right) \right]^2 \left(\frac{6cm_0 \cos^4 \theta \sin \theta}{4\pi h^3} \right)^2,$$

где $m_0 = \frac{I_0 \cdot \pi a^2}{c}$. С учетом

$$\left[\operatorname{Re} \left(\frac{i-1}{\delta} e^{\frac{i-1}{\delta} z - i\omega t} \right) \right]^2 = \frac{e^{-\frac{z}{\delta}}}{\delta} \left[\sin \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) - \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right]^2 = \frac{e^{-\frac{z}{\delta}}}{\delta},$$

$$\langle W \rangle = \frac{9m_0^2\omega}{h^4} \int_0^\infty dz e^{-\frac{2z}{\delta}} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \sin^3 \theta d\theta = \frac{3m_0^2\omega\delta}{16h^4}.$$

Ответ: $\langle W \rangle = \frac{3m_0^2\omega\delta}{16h^4}$, где $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$, $m_0 = \frac{I_0 \cdot \pi a^2}{c}$ *.

Контрольная работа 2

Решение задачи 1

Общее решение для ТЕ-волны в идеальном волноводе имеет вид

$$H_z = A(x, y) e^{i(\omega t - kz)},$$

где $A(x, y) = \sum_{n,m} A_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$.

Заданную функцию распределения H_z на входе в волновод можно представить в виде $H_z(x, y) = \frac{H_{z0}}{2} \left(\cos \frac{\pi x}{a} - \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} \right)$,

*Точное решение задачи о вертикальном магнитном диполе на границе раздела земля-воздух (задача 7) было получено Зоммерфельдом и изложено в ряде статей и монографий (например, [4]). Электрическое поле в нижнем полупространстве ($z \geq 0$) $E_\alpha = -\frac{i\omega}{c} m \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{2\xi}{\xi + \sqrt{\xi^2 - k^2}} e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2} z - \xi h} J_0(\xi r) d\xi$, где J_0 – функция Бесселя, ξ – переменная интегрирования, остальные обозначения те же, что и в решении задачи 7.

В отсутствие проводимости ($k = 0$) получается вихревое электрическое поле от переменного магнитного диполя в однородном безграничном пространстве $E_\alpha = -\frac{i\omega}{c} m \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty e^{-\xi(z+h)} J_0(\xi r) d\xi = \frac{i\omega m r}{c[r^2 + (z+h)^2]^{3/2}}$, где использован известный интеграл Вебера $\int_0^\infty e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi = \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$.

При сильном скин-эффекте ($k \rightarrow \infty$)

$$E_\alpha \approx -\frac{i\omega}{c} m \frac{e^{ikz}}{-ik} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty 2\xi e^{-\xi h} J_0(\xi r) d\xi = -\frac{i\omega}{c} 2m \frac{e^{-ikz}}{ik} \frac{\partial^2}{\partial h \partial r} \int_0^\infty e^{-\xi h} J_0(\xi r) d\xi.$$

Используя опять интеграл Вебера и $k^2 = \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} i$ (т. е. пренебрегая токами смещения), получаем $E_\alpha = -\frac{\omega}{c} 2m \frac{e^{ikz}}{k} \frac{3hr}{(r^2 + h^2)^{5/2}} = \frac{ikc}{4\pi\sigma} \frac{6mhr \cdot e^{ikz}}{(r^2 + h^2)^{5/2}}$, что совпадает с полем в решении задачи 7.

поскольку $\sin^2\left(\frac{\pi y}{2a}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$. Сравнивая это выражение с общим решением, видим, что бегущая в волноводе волна представима в виде $H = H_{10} + H_{11}$. Тогда дисперсионное соотношение для H_{10} :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_{z10}^2, \quad k_{z10} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{a},$$

а для H_{11} :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_{z11}^2, \quad k_{z11} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{(2^2 - 2)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{a}.$$

Окончательно z -компонента магнитного поля имеет вид
 $H_z(x, y, z) = H_{z0} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\frac{\pi}{a}\sqrt{3}\cdot z} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} e^{-i\frac{\pi}{a}\sqrt{2}\cdot z} \right).$

Ответ:

$$H_z(x, y, z, t = 0) = H_{z0} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\frac{\pi}{a}\sqrt{3}\cdot z} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} e^{-i\frac{\pi}{a}\sqrt{2}\cdot z} \right).$$

Решение задачи 2

В силу независимости решения от координат вдоль границ резонатора будем искать решение в виде $\mathbf{E}(x)$, направив ось x перпендикулярно стенкам резонатора. Тогда из уравнения $\text{div} \mathbf{E} = 0$ получаем условие $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$, откуда следует, что $E_x = \text{const}$. Поскольку это постоянное значение нас не интересует, то будем искать только такое решение, вектор \mathbf{E} которого параллелен стенкам резонатора. Выберем ось y в направлении вектора \mathbf{E} , и тогда уравнение для вектора электрического поля примет вид

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} E_y = 0$$

со своими коэффициентами в каждой из областей. Введя обозначения $\chi_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$, $\chi_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$, можно записать решение в каждой из областей резонатора в виде $E_y^{(i)} = A \sin \chi_i x + B \cos \chi_i x$.

Учитывая граничные условия на стенках резонатора ($E_y = 0$), решение можно записать в виде

$$E_y^{(1)} = A \sin \chi_1 x,$$

$$E_y^{(2)} = B \sin[\chi_2(x - l_1 - l_2)].$$

Граничные условия на границе раздела сред:

$$E_\tau^{(1)} \Big|_\Gamma = E_\tau^{(2)} \Big|_\Gamma, \quad H_\tau^{(1)} \Big|_\Gamma = H_\tau^{(2)} \Big|_\Gamma.$$

Из первого граничного условия сразу получим:

$$A \sin \frac{\omega}{c} l_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = -B \sin \frac{\omega}{c} l_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}.$$

Для удовлетворения второму граничному условию обратимся к уравнениям Максвелла (закону Фарадея):

$$(\text{rot } \mathbf{E})_z = -\frac{i\omega}{c} B_z = \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

или $H_z = \frac{ic}{\mu\omega} \frac{\partial E_y}{\partial x}$. Тогда второе граничное условие можно переписать в виде $\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial x} \Big|_\Gamma = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial E_y^{(2)}}{\partial x} \Big|_\Gamma$, или

$A \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\mu_1} \cos \left(\frac{\omega}{c} l_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \right) = B \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\mu_2} \cos \left(\frac{\omega}{c} l_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \right)$. Разделив левые и правые части граничных условий попарно, получим дисперсионное уравнение

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{c} l_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \right) = -\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{c} l_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \right),$$

решение которого даст дискретный набор частот ω_n . Если $\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}$, то дисперсионное уравнение примет вид $\operatorname{tg}(\alpha) = -\operatorname{tg}(\beta)$. Это уравнение имеет решение $\frac{\omega_n}{c} (l_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} + l_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}) = n\pi$, откуда получаем для частот $\omega_n = \frac{n\pi}{(l_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} + l_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2})}$.

Ответ: $\omega_n = \frac{n\pi}{(l_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} + l_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2})}$, где $n = 1, 2, 3 \dots$

Решение задачи 3

Общее решение для H_{10} -волны имеет вид $H_{10} \cong \cos \frac{\pi x}{a}$. Тогда дисперсионные соотношения в левой ($z < 0$) и правой ($z > 0$) половинах волновода будут иметь вид

$$3\varepsilon_0 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - (k_z)^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 = 0, \quad \varepsilon_0 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - (k_z)^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 = 0,$$

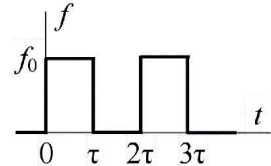
откуда минимальные частоты для прохождения волны в левой и правой половинах имеют вид $\omega_{\min}^{(2)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\pi}{a}$, $\omega_{\min}^{(1)} = \frac{c}{\sqrt{3\varepsilon}} \frac{\pi}{a}$. Поскольку $\omega_{\min}^{(1)} < \omega_{\min}^{(2)}$, то частота, с которой H_{10} -волна будет отражаться от границы раздела, должна удовлетворять неравенству

$$\frac{c}{\sqrt{3\varepsilon}} \frac{\pi}{a} < \omega < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\pi}{a}.$$

Ответ: $\frac{c}{\sqrt{3\varepsilon}} \frac{\pi}{a} < \omega < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\pi}{a}$.

Решение задачи 4

Сигнал представляет собой два прямоугольных импульса, показанных на рисунке. Можно использовать линейность преобразования и теорему о сдвиге:



$$\begin{aligned} f_{\omega} &= f_{\omega}^{(1)} + f_{\omega}^{(2)} = e^{i\omega \frac{\tau}{2}} f_{\omega}^0 + e^{i\omega \frac{5\tau}{2}} f_{\omega}^0 = e^{i\omega \frac{\tau}{2}} (1 + e^{2i\omega\tau}) f_{\omega}^0 = \\ &= 2e^{i\omega \frac{\tau}{2}} e^{i\omega\tau} \left(\frac{e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}}{2} \right) f_{\omega}^0 = 2e^{i\omega \frac{3\tau}{2}} \cos \omega\tau f_{\omega}^0, \end{aligned}$$

где f_{ω}^0 – Фурье-образ одного центрированного импульса;

$$\begin{aligned} f_{\omega}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{i\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega \frac{\tau}{2}}}{2i} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau/2} \tau = \\ &= \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right). \end{aligned}$$

$$f_{\omega} = \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \frac{3\tau}{2}} \cos(\omega\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

Тот же результат можно получить напрямую, записывая интеграл Фурье, сместив импульс в симметричное положение относительно начала координат ($\tilde{t} = t - 3\tau/2$):

$$\begin{aligned} f_{\omega} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-3\tau/2}^{-\tau/2} e^{i\omega(\tilde{t}+3/2\tau)} d\tilde{t} + \int_{\tau/2}^{3\tau/2} e^{i\omega(\tilde{t}+3\tau/2)} d\tilde{t} \right) = \\ &= \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \frac{3\tau}{2}} \cos(\omega\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

Ответ: $f_{\omega} = \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \frac{3\tau}{2}} \cos(\omega\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$

Решение задачи 5

В плоской падающей волне амплитуды электрического и магнитного полей равны, т. е. $E_0 = H_0$. В идеально проводящем пространстве электрическое и магнитное поля равны 0, поэтому граничные условия на границе раздела вакуум-металл будут иметь вид $B_{1n} = 0$, которое выполняется автоматически (ТМ-волна и, следовательно, магнитное поле касательно поверхности). Из-за поворота вектора электрического поля при отражении (иначе нельзя удовлетворить граничным условиям при нормальном падении) нормальная составляющая электрического поля на границе ($y = 0$) испытывает скачок. Вектор электрического поля в падающей плоской волне имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$, а скачок нормальной составляющей электрического поля равен

$$\Delta E_{1n} = 2E_0 \sin \phi \cdot e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} x \sin \phi)}.$$

Если скачок нормальной составляющей не равен нулю, то на поверхности будет поверхностная плотность заряда σ , которая находится из уравнения $\Delta E_{1n} = 4\pi\sigma$. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} 2E_0 \sin \phi \cos \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \phi}{c} \right) \right].$$

Скачок касательной составляющей магнитного поля приводит к появлению поверхностного тока i , который определяется из граничного условия

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = H_{1\tau}|_{y=0} = -\mathbf{e}_z E_0 e^{i(\omega t - k_x x)} = \mathbf{e}_y \times \mathbf{i}_0 \frac{4\pi}{c},$$

откуда $\mathbf{i}_0 = \frac{c}{4\pi} \mathbf{e}_x E_0 e^{i(t - \frac{x}{c} \sin \phi)}$.

Ответ: $\sigma = \frac{1}{4\pi} 2E_0 \sin \phi \cos \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \phi}{c} \right) \right]$, $\mathbf{i}_0 = \frac{c}{4\pi} \mathbf{e}_x E_0 e^{i(t - \frac{x}{c} \sin \phi)}$.

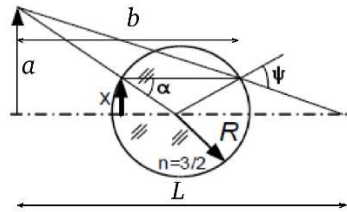
Решение задачи 6

Задачу можно решать как матричным методом, так и геометрическим построением (см. рисунок). Поскольку предмет находится внутри стекла, то луч, проведенный из конца предмета параллельно оси, дойдет до границы шара изнутри и преломится. При этом для углов α и ψ будет выполняться соотношение (закон Снелиуса) $n \sin \alpha = \sin \psi$, или, с учетом параксиального приближения, $n\alpha = \psi$. Продолжение этого луча влево даст одну из линий для построения мнимого изображения предмета. Луч, проведенный из центра шара через вершину рассматриваемого предмета, не преломляется (поскольку этот луч – нормаль к поверхности шара), и его пересечение с проведенным ранее лучом даст мнимое изображение длиной a . Используя соотношения для углов $\alpha = \frac{x}{R}$ и $\frac{a}{L} = \psi - \alpha$, получим:

$$\frac{a}{L - R - x/\psi - \alpha} = \alpha, \quad \frac{a}{L - R - xR/(n-1)x} = \frac{x}{R}, \quad \frac{a}{L} = \psi - \alpha = (n-1) \frac{x}{R},$$

$$L = \frac{aR}{(n-1)x}, \quad aR = x \left(\frac{aR}{(n-1)x} - R - \frac{R}{n-1} \right), \quad a = \left(\frac{a}{(n-1)x} - \frac{n}{n-1} \right),$$

$$\frac{a}{x} \frac{n-2}{n-1} = -\frac{n}{n-1}, \text{ в результате получим увеличение } \frac{a}{x} = \frac{n}{2-n} = 3.$$



Матричным методом получим тот же результат. Оптическую систему можно представить суммой двух трансляций и преломляющей поверхности (учитываем, что объект внутри шара):

$$M \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3/2-1}{R} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{2R} & 2R + \frac{b}{2} \\ -\frac{1}{2R} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}, \text{ откуда заключаем (из условия}$$

формирования изображения), что $b = -4R$, следовательно, увеличение $\frac{a}{x} = 1 + \frac{4R}{2R} = 3$.

Ответ: $\frac{a}{x} = 3$.

Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1

Интенсивность равна

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi = 3I_0 + 2\sqrt{2}I_0 \cos(k\Delta r),$$

где разность хода $\Delta r = \frac{xd}{l}$ с учетом $I_1 = I_0$, $I_2 = 2I_0$.

Отсюда $I = 3I_0 \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \frac{kxd}{l} \right)$.

Видность $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $I = 3I_0 \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \frac{kxd}{l} \right)$, $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Решение задачи 2

С учетом отражения от зеркала амплитуда волны слева от экрана $\mathbf{E}_{\text{слева}} = E_0 \mathbf{e}_y e^{i(k_0 z - \omega t)} (e^{-ik_0 x} - e^{ik_0 x})$.

Амплитуду волны справа от экрана записываем в виде интеграла Кирхгофа для цилиндрических волн в приближении Фраунгофера (поскольку по условию $R_0 \gg a^2/\lambda$, при этом считаем

угол отражения $\phi \approx \phi_0$ и, следовательно, $\cos \phi \approx \cos \phi_0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i R_0}} E_0 \mathbf{e}_y e^{i(kR_0 - \omega t)} \cos \phi_0 \int_{-a}^a dx (e^{-ik_{0x}x} - e^{ik_{0x}x}) e^{ik_x x} = \\ &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i R_0}} E_0 \mathbf{e}_y e^{i(kR_0 - \omega t)} \cos \phi_0 \cdot 2ia \times \\ &\times [\operatorname{sinc}(k_{0x} - k_x) a + \operatorname{sinc}(k_{0x} + k_x) a]. \end{aligned}$$

Так как $k_{0x} \approx -k_x$, $\operatorname{sinc}(k_{0x} + k_x) a \approx 0$. Делая замену $k_{0x} = k \cdot \sin \phi_0$, $k_x = k \cdot \sin \phi$, получим интенсивность

$$I = \langle |E|^2 \rangle = \frac{E_0^2 k a^2 \cos^2 \phi_0}{\pi R_0} \cdot \operatorname{sinc}^2[(\sin \phi_0 - \sin \phi) ka].$$

Выражая $\sin \phi \approx \sin \phi_0 + \Delta \phi \cos \phi_0$ и полагая $\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi a \Delta \phi}{\lambda} \cos \phi_0\right) = 0$, получим $\Delta \phi = \frac{\lambda}{2a \cos \phi_0}$.

$$\text{Ответ: } I = \frac{E_0^2 k a^2 \cos^2 \phi_0}{\pi R_0} \cdot \operatorname{sinc}^2[(\sin \phi_0 - \sin \phi) ka], \Delta \phi = \frac{\lambda}{2a \cos \phi_0}.$$

Решение задачи 3

Зоны Френеля одинаковой четности дают одинаковый синфазный вклад $2E_0$ в амплитуду поля в точке P . Вклады зон с различной четностью отличаются по знаку. Поэтому суммарный вклад от открытых трех зон равен вкладу одной (первой или третьей) зоны:

$$E_I = 2E_0.$$

Амплитуда поля в точке P достигнет максимума, если все три зоны будут давать одинаковый по знаку вклад. Для этого нужно увеличить оптическую длину хода лучей, идущих через вторую зону, на $(2m+1)\lambda/2$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Тогда амплитуда возрастет до

$$E_{II} = 3 \cdot 2E_0 = 6E_0 = 3E_I.$$

Минимальной толщине пластины отвечает условие $m = 0$. Тогда

$$n \cdot \Delta - \Delta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta = \frac{\lambda}{2(n-1)},$$

где n – показатель преломления стекла.

Ответ:

- 1) в 3 раза (с $2E_0$ до $6E_0$);
- 2) $\Delta_{\min} = \frac{\lambda}{2(n-1)}$;
- 3) надо закрыть вторую зону Френеля.

Решение задачи 4

Амплитуда поля справа от транспаранта

$E(x, z) = E_0 e^{ikz} \cdot t(x) = \frac{E_0}{1+b} \left(1 + \frac{b}{2} e^{i\alpha x} + \frac{b}{2} e^{-i\alpha x}\right) e^{ikz}$
представляет собой сумму трех расходящихся волн.

Ответ: три расходящиеся волны амплитудой

$$E(x, z) = \frac{E_0}{1+b} \left(1 + \frac{b}{2} e^{i\alpha x} + \frac{b}{2} e^{-i\alpha x}\right) e^{ikz}.$$

Решение задачи 5

В дальней волновой зоне

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(0) &= \frac{1}{c^2 a} ([\mathbf{d}_1 \times \mathbf{n}_1] + [\mathbf{d}_2 \times \mathbf{n}_2] + [\mathbf{d}_3 \times \mathbf{n}_3]) = \\ &= \frac{-d_0 \omega^2 e^{i\omega(t-\frac{a}{c})}}{c^2 a} \left\{ (i\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_x) \times \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) e^{i\Phi_0} \times \left(\frac{\mathbf{e}_x}{2} - \frac{i\sqrt{3}\mathbf{e}_y}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) e^{i\Phi_0} \times \left(\frac{\mathbf{e}_x}{2} + \frac{i\sqrt{3}\mathbf{e}_y}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Ответ: $\mathbf{B}(0) = \frac{id_0 \omega^2 (1 - e^{i\Phi_0}) \mathbf{e}_z}{c^2 a} e^{i\omega(t-\frac{a}{c})}.$

Решение задачи 6

Переходим в систему отсчета кольца. Скорость электрона в этой системе

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}.$$

В системе кольца потери энергии электрона на излучение в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt'} = \text{inv} = \frac{2e^4}{3m^2c^3} E_x'^2,$$

где $E_x' = \frac{Qx'}{(a^2 + x'^2)^{3/2}}$ — электрическое поле на оси.

Используя подстановку $dx' = v'dt'$, находим потери энергии электрона на излучение в системе кольца:

$$\Delta\mathcal{E}' = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \int_{-\infty}^{\infty} E_x'^2 dt' = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2c^3 v'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x'^2 dx'}{(a^2 + x'^2)^3} = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2c^3 v'} \cdot \frac{\pi}{8a^3}.$$

Потери импульса электрона на излучение в системе кольца:

$$\Delta\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{v}' \Delta\mathcal{E}'}{c^2} = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2c^5} \cdot \frac{\pi}{8a^3} \mathbf{e}_x \text{ (не зависит от скорости!)}. \quad \Delta\mathcal{E}' = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2c^3 v'} \cdot \frac{\pi}{8a^3}.$$

Возвращаемся в лабораторную систему отсчета. Используя преобразование 4-вектора энергии-импульса $(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p})$, получим:

$$\Delta p'_x = \frac{\Delta p_x - (V/c) \cdot \Delta\mathcal{E}/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Далее, используя соотношение $\Delta p_x = (v/c) \cdot \Delta\mathcal{E}/c$, получим потери импульса электрона на излучение в лабораторной системе:

$$\Delta p_x = \Delta p'_x \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{v - V} v = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2c^5} \cdot \frac{\pi}{8a^3} \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{v - V} v,$$

откуда потери энергии электрона на излучение в лабораторной системе равны

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\Delta p_x c^2}{v} = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2 c^3} \cdot \frac{\pi}{8a^3} \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{v - V}.$$

Ответ: $\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2 c^3} \cdot \frac{\pi}{8a^3} \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{v - V}, \Delta \mathbf{p} = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2 c^3} \cdot \frac{\pi}{8a^3} \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{v - V} \mathbf{v}.$

2010/2011 учебный год

Контрольная работа 1

Решение задачи 1

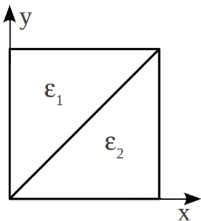
В полярной системе координат с центром в точке O дифференциал длины дуги вдоль спирали равен

$$dl = \sqrt{dr^2 + (r d\alpha)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2} d\alpha.$$

Замечая, что $dr/d\alpha = ab \exp(b\alpha) = br$, найдем потенциал в точке O по известной формуле:

$$\varphi(r=0) = \int_0^{L(N)} \frac{\varkappa}{r} dl = \int_0^{2\pi N} \varkappa \frac{\sqrt{b^2 r^2 + r^2}}{r} d\alpha = 2\pi \varkappa N \sqrt{1 + b^2}.$$

Решение задачи 2



Задача состоит в решении уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$ (так как отсутствует объемная плотность заряда) с граничными условиями на стенках металлической трубы и границе раздела двух сред 1 с ε_1 и 2 с ε_2 . При этом ввиду симметрии задачи относительно плоскости xy

догадываемся, что от координаты z потенциал не зависит, а зависимость от двух других координат x и y можно искать методом разделения переменных.

Для области 1 ищем потенциал в виде $\varphi_1 = (A_1x + B_1)(C_1y + D_1)$ с граничными условиями (тангенциальная компонента электрического поля на поверхности проводника равна 0):

$$E_{1,y}(x = 0) = - \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{x=0} = -B_1C_1 = 0,$$

$$E_{1,x}(y = a) = - \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{y=a} = -A_1(C_1a + D_1) = 0.$$

Тогда $B_1C_1 = 0$ и $D_1 = -C_1a$, без ограничения общности получаем $\varphi_1 = A_1C_1x(y - a)$.

Для области 2 ищем потенциал в виде $\varphi_2 = (A_2x + B_2) \times (C_2y + D_2)$ с граничными условиями (тангенциальная компонента электрического поля на поверхности проводника равна 0):

$$E_{2,x}(y = 0) = - \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{y=0} = -A_2D_2 = 0,$$

$$E_{2,y}(x = a) = - \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{x=a} = -(A_2a + B_2)C_2 = 0.$$

Тогда $A_2D_2 = 0$ и $B_2 = -A_2a$, без ограничения общности получаем $\varphi_2 = A_2C_2y(x - a)$.

Переобозначив константы, запишем потенциал и электрическое поле в областях 1 и 2:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1x(y - a), & \varphi_2 &= C_2y(x - a), \\ E_{1,x} &= -C_1(y - a), & E_{2,x} &= -C_2y, \\ E_{1,y} &= -C_1x, & E_{2,y} &= -C_2(x - a). \end{aligned}$$

Неизвестные константы найдем из граничных условий на границе раздела двух сред ($x = y$). Из непрерывности потенциала $\varphi_1|_{x=y} = \varphi_2|_{x=y}$ следует, что $C_1 = C_2$.

Нормальные к границе компоненты индукции электрических полей должны терпеть разрыв: $\varepsilon_2 E_{2,n} + \varepsilon_1 E_{1,n} = 4\pi\Sigma_0$. Вектор нормали к границе $x = y$ в соответствующих областях имеет координаты $\mathbf{n}_1 = \{-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0\}$. Тогда граничное условие приводит к уравнению

$$\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{n}_2 + \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{n}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_2 C_2 a - \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_1 C_2 a = 4\pi\Sigma_0,$$

откуда следует, что $C_2 = -\frac{4\pi\Sigma_0\sqrt{2}}{a(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$.

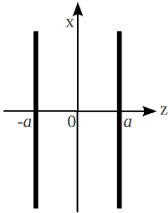
Потенциал снаружи трубы найдем, заметив, что на стенках, как и на бесконечности, потенциал равен 0, следовательно, и во всем пространстве снаружи он будет равен 0.

Окончательно внутри трубы потенциал и поля составляют

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -\frac{4\pi\Sigma_0\sqrt{2}}{a(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}x(y-a), & \varphi_2 &= -\frac{4\pi\Sigma_0\sqrt{2}}{a(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}y(x-a), \\ E_{1,x} &= \frac{4\pi\Sigma_0\sqrt{2}}{a(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}(y-a), & E_{2,x} &= \frac{4\pi\Sigma_0\sqrt{2}}{a(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}y, \\ E_{1,y} &= \frac{4\pi\Sigma_0\sqrt{2}}{a(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}x, & E_{2,y} &= \frac{4\pi\Sigma_0\sqrt{2}}{a(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}(x-a),\end{aligned}$$

а снаружи $\varphi = 0$ и $\mathbf{E} = 0$.

Решение задачи 3



Введем систему координат, как показано на рисунке. Для нахождения потенциала в области $|z| \leq a$ воспользуемся уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho = -4\pi\rho_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right), \quad (1)$$

которое будем решать методом разделения переменных, т. е. будем искать потенциал в виде

$$\varphi(x, y, z) = X \cdot Y \cdot Z,$$

где $X = X(x)$, $Y = Y(y)$, $Z = Z(z)$. Подставим в (1):

$$\Delta\varphi = X_{xx}YZ + XY_{yy}Z + XYZ_{zz} = -4\pi\rho_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right).$$

Поскольку правая часть уравнения зависит только от переменной z , функции X и Y есть константы, которые удобно положить равными единице. Общее решение получившегося уравнения есть

$$\varphi(z) = 4\pi\rho_0 \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right) + Az + B.$$

Выбирая $\varphi(z = 0) = 0$, находим, что $B = 0$. Из симметрии задачи относительно плоскости xy , которая возникает в частном случае $\rho_0 = 0$ в отсутствие внешнего поля, следует, что $A = 0$.

Электрическое поле находится по формуле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

Итак, в области $|z| \leq a$ имеем:

$$\varphi(x, y, z) = 4\pi\rho_0 \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right) = 16\rho_0 \frac{a^2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right),$$

$$E_x = 0, E_y = 0, E_z = -8\rho_0 a \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right).$$

В области $z > a$ мы должны решить уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

с граничными условиями:

- 1) $\varphi(z = a) = 4\pi\rho_0(2a/\pi)^2$ (непрерывность потенциала);
- 2) $E_z = 0$ (непрерывность нормальной компоненты поля в отсутствие поверхностной плотности заряда).

Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее этим граничным условиям, есть

$$\varphi(z) = 4\pi\rho_0(2a/\pi)^2 = 16\frac{\rho_0 a^2}{\pi}, \quad E_x = 0, E_y = 0, E_z = 0.$$

По аналогии с областью $z > a$ в области $z < -a$ получим:

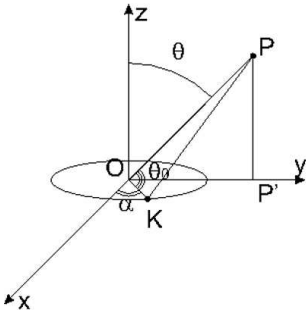
$$\varphi(z) = -16 \frac{\rho_0 a^2}{\pi}, \quad E_x = 0, E_y = 0, E_z = 0.$$

Окончательно:

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} 16 \frac{\rho_0 a^2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right), & |z| \leq a; \\ 16 \frac{\rho_0 a^2}{\pi}, & z > a; \\ -16 \frac{\rho_0 a^2}{\pi}, & z < -a. \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \begin{cases} E_x = 0, E_y = 0, E_z = -8\rho_0 a \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right), & |z| \leq a; \\ E_x = 0, E_y = 0, E_z = 0, & |z| > a. \end{cases}$$

Решение задачи 4



Способ 1.

Вначале найдем потенциал одного кольца в точке P . Введем систему координат так, чтобы плоскость xy совпадала с плоскостью кольца и ось y проходила через точку P' – проекцию точки P на плоскость xy (см. рисунок). Тогда можем записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} KP^2 &= OK^2 + OP^2 - 2 \cdot OK \cdot OP \cos \theta_0, \\ OP' &= OP \cdot \sin \theta, \\ KP'^2 &= OK^2 + OP'^2 - 2 \cdot OP' \cdot OK \sin \alpha = \\ &= OK^2 + OP^2 \sin^2 \theta - 2 \cdot OP \cdot OK \sin \theta \sin \alpha, \\ PP' &= OP \cdot \cos \theta, \\ KP'^2 &= KP^2 - PP'^2 = \\ &= OK^2 + OP^2(1 - \cos^2 \theta) - 2 \cdot OK \cdot OP \cos \theta_0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\cos \theta_0 = \sin \theta \sin \alpha$. Потенциал кольца тогда

вычисляется с помощью следующей формулы:

$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta_0}}.$$

Для расстояний $r \gg a$, используя $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$, получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{q}{2\pi r} \int_0^{2\pi} d\alpha \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta_0 + \frac{a^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \right) = \\ &= \frac{q}{r} + \frac{q}{r} \frac{a^2}{4r^2} (1 - 3 \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Итак, для первого кольца имеем

$$\varphi_1(r) = \frac{q}{r} + \frac{q}{4} \frac{a^2}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta),$$

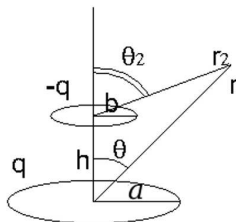
а для второго

$$\varphi_2(r) = -\frac{q}{r_2} - \frac{q}{4} \frac{b^2}{r_2^3} (1 - 3 \cos^2 \theta_2),$$

где $r_2^2 = h^2 + r^2 - 2hr \cos \theta$.

Раскладывая в ряд Тейлора до второго порядка, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2} &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{h}{r} \cos \theta + \frac{h^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right) \\ \frac{1}{r_2^3} &\approx \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3h}{r} \cos \theta + \frac{3}{2} \frac{h^2}{r^2} (5 \cos^2 \theta - 1) \right) \approx \frac{1}{r^3}. \end{aligned}$$



По теореме синусов $\sin \theta_2 = \frac{r}{r_2} \sin \theta$, следовательно

$$\sin \theta_2 \approx \sin \theta \left(1 + \frac{h}{r} \cos \theta + \frac{h^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right) \Rightarrow \cos^2 \theta_2 \approx \cos^2 \theta.$$

Тогда

$$\varphi_1(r) = \frac{q}{r} + \frac{q}{r} \frac{a^2}{4r^2} (1 - 3 \cos^2 \theta),$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{q}{r} \left(1 + \frac{h}{r} \cos \theta + \frac{h^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right) - \frac{q}{4} \frac{b^2}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta).$$

Складывая φ_1 и φ_2 , получаем ответ:

$$\varphi(r, \theta) \approx -q \frac{h}{r^2} \cos \theta + \frac{q}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \left(\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{h^2}{2} \right).$$

Способ 2 (через мультипольное разложение).

Потенциал системы на больших расстояниях можно записать в виде мультипольного разложения:

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{Q}{r} + \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} + \sum_{i,j} \frac{D_{ij} x_i x_j}{2r^5}, \quad (1)$$

где Q – заряд системы, \mathbf{d} – дипольный момент системы, D_{ij} – тензор квадрупольного момента системы. В нашем случае

$$Q = 0, \quad \mathbf{d} = -qh\mathbf{e}_z, \quad D_{ij} = D_{ij}^I + D_{ij}^{II}, \quad (2)$$

где индексы I, II относятся к первому и второму кольцу соответственно.

Для тензора квадрупольного момента первого кольца с центром в начале координат имеем (см. решение типовой задачи Р.13 из задачника [1]):

$$D_{xx}^I = D_{yy}^I = \frac{qa^2}{2}, \quad D_{zz}^I = -2D_{xx}^I = -qa^2, \quad D_{ij}^I = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Элементы D_{ij}^{II} второго кольца с центром не в начале координат равны *:

$$D_{xx}^{II} = D_{yy}^{II} = -\frac{q(b^2+2h^2)}{2}, \quad D_{zz}^{II} = q(b^2 + 2h^2), \quad D_{ij}^{II} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Тогда квадрупольный момент системы двух колец описывается тензором D_{ij} с элементами

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{q(a^2-b^2-2h^2)}{2}, \quad D_{zz} = q(a^2 - b^2 - 2h^2), \\ D_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,$$

а потенциал системы согласно (1), (2):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &\approx -\frac{qh \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{2r^5} (D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2 + D_{zz}z^2) = \\ &= -\frac{qh \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{2r^5} \left(\frac{q(a^2-b^2-2h^2)}{2}(x^2 + y^2) - q(a^2 - b^2 - 2h^2)z^2 \right) = \\ &= -\frac{qh \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{2r^5} \left(\frac{q(a^2-b^2-2h^2)}{2}r^2 \sin^2 \theta - q(a^2 - b^2 - 2h^2)r^2 \cos^2 \theta \right) = \\ &= -\frac{qh \cos \theta}{r^2} + \frac{q}{4r^3} (a^2 - b^2 - 2h^2) (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) = \\ &= -\frac{qh \cos \theta}{r^2} + \frac{q}{4r^3} (a^2 - b^2 - 2h^2) (1 - 3 \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Способ 3 (через разложение на полиномы Лежандра).

Система зарядов обладает аксиальной симметрией. Поэтому если мы получим решение для потенциала на оси симметрии в виде ряда $\sum_{\ell} \frac{C_{\ell}}{z^{\ell+1}}$, то решение вне оси будет иметь вид

*При смещении системы зарядов, симметричной относительно оси z , на вектор $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_z$ элементы тензора квадрупольного момента преобразуются по формулам

$$D_{zz}^* = D_{zz} + 4(\mathbf{h} \cdot \mathbf{d}) + 2h^2Q, \quad D_{xx}^* = D_{yy}^* = -\frac{1}{2}D_{zz}^*,$$

где \mathbf{d} – дипольный момент несмещенной системы, Q – заряд системы.

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\ell} \frac{C_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\theta),$$

где $P_{\ell}(\theta)$ – полиномы Лежандра ℓ -й степени.

Для потенциала на оси z , создаваемого заряженным кольцом радиуса R с центром в точке $(0, 0, h)$, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \frac{Q}{\sqrt{R^2 + (z-h)^2}} = \frac{Q}{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2/z^2 + (1-h/z)^2}} \approx \\ &\approx \frac{Q}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{z^2} - 2\frac{h}{z} + \frac{h^2}{z^2} \right) \right) = \frac{Q}{z} + \frac{Qh}{z^2} - \frac{Q(R^2+h^2)}{2z^3}. \end{aligned}$$

Полученному выражению соответствует разложение по полиномам Лежандра степени $\ell = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(r, \theta) &\approx \frac{C_0}{r^1} P_0(\theta) + \frac{C_1}{r^2} P_1(\theta) + \frac{C_2}{r^3} P_2(\theta) = \\ &= \frac{Q}{r} \cdot 1 + \frac{Qh}{r^2} \cdot \cos(\theta) + \frac{Q(R^2+h^2)}{2r^3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \\ &= \frac{Q}{r} + \frac{Qh}{r^2} \cos(\theta) + \frac{Q(R^2+h^2)}{4r^3} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

Для первого кольца $R = a$, $Q = q$, $h = 0$, для второго $R = b$, $Q = -q$, $h = h$. Суммарный потенциал равен

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \varphi_1(r, \theta) + \varphi_2(r, \theta) = \\ &= \frac{q}{r} + \frac{qa^2}{4r^3} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{q}{r} - \frac{qh}{r^2} \cos(\theta) - \frac{q(b^2+h^2)}{4r^3} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) = \\ &= -\frac{qh}{r^2} \cos(\theta) + \frac{q(a^2-b^2-h^2)}{4r^3} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

Решение задачи 5

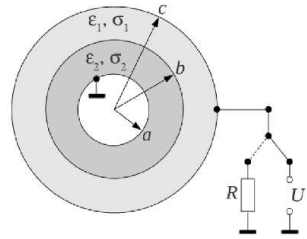
Плотность тока в среде с проводимостью σ :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1)$$

По теореме Гаусса и с учетом аксиальной симметрии системы электрическая индукция на расстоянии r от оси связана с полным свободным зарядом Q , заключенным внутри цилиндра радиуса $r > a$, длиной L , соотношением

$$2\pi r L D(r) = 4\pi Q.$$

Q в правой части (2) характеризует только свободные заряды, поэтому слева стоит $D(r)$, а не $E(r)$. При $a < r < b$ Q включает полный свободный заряд на внутренней обкладке, а при $b < r < c$ — еще и на границе раздела. Из (1)–(2) для $E(r)$ и $j(r)$ следует



$$E(r) = 2 \frac{Q}{\varepsilon L r}, \quad j(r) = 2 \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{Q}{L r}. \quad (3)$$

Полный ток через цилиндрическую поверхность радиуса r равен

$$I(r) = 2\pi r L j(r) = 4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon} Q. \quad (4)$$

Рассмотрим стационарный случай, предшествующий моменту времени $t = t_0$. В системе течет постоянный ток и накоплены заряды Q_1 на обкладке $r = a$, Q_2 — на границе $r = b$ и Q_3 — на обкладке $r = c$.

Интегрируя E из (3) по r , получим выражение для потенциала от цилиндрической оболочки с зарядом Q :

$$\varphi(r) = -2 \frac{Q}{\varepsilon L} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (5)$$

где $r_0 = \text{const}$ в пределах каждой однородной области.

В области $a < r < b$ потенциал $\varphi_1(r) = -\frac{2Q_1}{\varepsilon_1 L} \ln \frac{r}{a}$ удовлетворяет граничному условию $\varphi_1(a) = 0$.

В области $b < r < c$ потенциал $\varphi_2(r) = -\frac{2(Q_1+Q_2)}{\varepsilon_2 L} \ln \frac{r}{c} + U$ удовлетворяет граничному условию $\varphi_2(c) = U$.

Условие непрерывности потенциала $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ дает связь между зарядами:

$$-\frac{2Q_1}{\varepsilon_1 L} \ln \frac{b}{a} = -\frac{2(Q_1 + Q_2)}{\varepsilon_2 L} \ln \frac{b}{c} + U. \quad (6)$$

Заметим, что соотношения (1)–(6) остаются в силе и в нестационарном случае. В период времени, начиная с t_0 , заряды с границ утекают. Изменение заряда на границе раздела определяется разностью токов I_1 и I_2 , протекающих соответственно по областям 1 и 2:

$$-\dot{Q}_2 = I_2 - I_1 = 4\pi \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} (Q_1 + Q_2) - 4\pi \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} Q_1 \stackrel{|\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}|}{=} 4\pi \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} Q_2. \quad (7)$$

В стационарном режиме ($t \leq t_0$) $Q_2 = 0$. Но решение (7) при $t > t_0$ с начальным $Q_2(t = t_0) = 0$ также есть $Q_2(t) = 0$.

Аналогично запишем уравнение заряда на заземленной обкладке:

$$-\dot{Q}_1 = I_1 - I = 4\pi \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} Q_1 - I, \quad (8)$$

где I – ток, втекающий через заземление на внутренней сфере и текущий через сопротивление R . Записывая условие непрерывности потенциала на сфере $r = b$ и учитывая, что $Q_2 = 0$, имеем:

$$-\frac{2Q_1}{\varepsilon_1 L} \ln \frac{b}{a} = -\frac{2Q_1}{\varepsilon_2 L} \ln \frac{b}{c} + IR,$$

или

$$Q_1 = -\frac{IR}{\frac{2}{L} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right)}.$$

Подставляя полученное выражение для Q_1 в (8), получаем:

$$\dot{I} = -I \left(\frac{4\pi\sigma_1}{\varepsilon_1} + \frac{2}{RL} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right) \right).$$

Решение этого уравнения дает искомый ответ:

$$I = \frac{U}{R} \exp \left(-\frac{t - t_0}{\tau} \right),$$

где $\tau^{-1} = \frac{4\pi\sigma_1}{\varepsilon_1} + \frac{2}{RL} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right)$ и учтено, что $I(t_0) = U/R$.

Решение задачи 6

Внутри слоя электрическое поле вычисляется как

$$\begin{aligned} E_{1,z} &= \frac{j_0}{\sigma(z)} = \frac{j_0}{\sigma_0} (1 + p \sin(kz)), \\ E_{1,x} &= E_{1,y} = 0, \end{aligned}$$

следовательно, потенциал равен

$$\varphi_1(z) = -\frac{j_0}{\sigma_0} z + \frac{j_0 p}{\sigma_0 k} \cos(kz) + \text{const}.$$

Снаружи слоя, чтобы найти потенциал, необходимо решить уравнение Лапласа с граничными условиями:

$$\varphi_2(x=0, z) = \varphi_1(z) = -\frac{j_0}{\sigma_0} z + \frac{j_0 p}{\sigma_0 k} \cos(kz) + \text{const},$$

$$E_{2,x}(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0.$$

Решение уравнения Лапласа есть

$$\varphi = \left(A e^{kx} \frac{j_0 p}{\sigma_0 k} + B e^{-kx} \frac{j_0 p}{\sigma_0 k} \right) \cos(kz) + (Cx + D) \left(-\frac{j_0}{\sigma_0} z + F \right) + \text{const}.$$

Удовлетворяя граничным условиям, находим $C = 0$, $A = 0$, $D = 1$, $F = 0$ и $B = 1$. Тогда

$$\varphi_2(x, z) = \frac{j_0 p}{\sigma_0 k} e^{-kx} \cos(kz) - \frac{j_0 z}{\sigma_0} + \text{const}.$$

Для определения поверхностной плотности заряда найдем нормальную компоненту электрического поля:

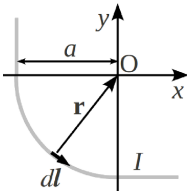
$$E_{1,x}(x=0) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x=0) = \frac{j_0 p}{\sigma_0 k} \cos(kz).$$

Тогда плотность заряда составляет

$$\Sigma(z) = \frac{E_{2,x}(x=0)}{4\pi} = \frac{j_0 p}{4\pi \sigma_0 k} \cos(kz).$$

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1



Согласно закону Био-Савара элемент длины проводника с током наводит поле $d\mathbf{B} = \frac{I d\mathbf{\ell} \times \mathbf{r}}{c \cdot r^3}$. Поскольку \mathbf{r} и $d\mathbf{\ell}$ лежат в плоскости XY, то магнитное поле имеет только составляющую B_z (ось z перпендикулярна плоскости рисунка).

Суммарное поле в силу принципа суперпозиции будет включать \mathbf{B}_1 от линейного тока, направленного по оси X, \mathbf{B}_2 от дуги и \mathbf{B}_3 от линейного тока вдоль оси Y:

$$\mathbf{B}_\Sigma = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

$B_1 = B_3 = \frac{I}{ca}$ — половина от магнитного поля бесконечного прямого проводника с током;

$$B_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{I \cdot a \cdot d\varphi}{ca^2} = \frac{I}{ca} \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $B_\Sigma = \frac{I}{ca} \left(2 + \frac{\pi}{2}\right).$

Решение задачи 2

Введем обозначения: угол θ (см. рисунок), $m_b = I_0 \pi b^2 / c$, $m_a = I_a(z) \pi a^2 / c$.

1. Поле на оси кольца имеет только z -компоненту:

$$B_0(z) = \frac{2\pi I_0 b^2}{c(b^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi I_0}{cb} \sin^3 \theta.$$

2. Поток Φ через идеально проводящее кольцо сохраняется и состоит из потока магнитного поля обоих колец

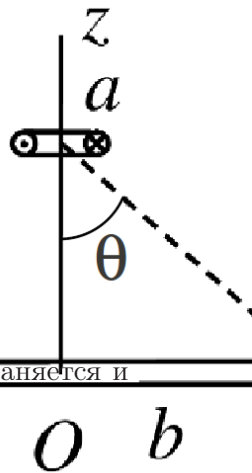
$$\Phi = L \cdot I_a(z)/c + B(z) \cdot S_a,$$

где $S_a = \pi a^2$.

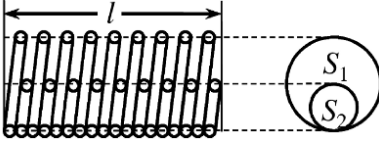
Поскольку в начальный момент времени $\Phi = B(0) \cdot S_a = \frac{2\pi I_0 \cdot S_a}{cb}$, то $I_a(z) = \frac{2\pi I_0 S_a}{Lb} (1 - \sin^3 \theta)$.

$$\begin{aligned} 3. \mathbf{F}(z) &= (\mathbf{m}_a \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{I_a(z) S_a}{c} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \mathbf{e}_z = -m_a \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{b} \cdot \mathbf{e}_z = \\ &= -\frac{6m_a m_b}{b^4} \sin^4 \theta \cos \theta \cdot \mathbf{e}_z = -\frac{6m_a m_b}{z^4} \cos^5 \theta \cdot \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. A &= - \int_0^\infty F(z) dz = \int_{\pi/2}^0 F(\theta) \frac{bd\theta}{\sin^2 \theta} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\pi I_0 S_a^2}{Lbc} (1 - \sin^3 \theta) \cdot \frac{I_0 S_b}{c} \cdot \frac{6 \sin^3 \theta \cos \theta}{b^4} \frac{bd\theta}{\sin^2 \theta} = \\ &= \frac{12\pi I_0^2 S_a^2 S_b}{Lb^4 c^2} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) \sin^3 \theta d\theta = \frac{9\pi I_0^2 S_a^2 S_b}{7Lb^4 c^2} = \frac{9\pi^4 I_0^2 a^4}{7Lc^2 b^2}. \end{aligned}$$



Решение задачи 3



$$\Phi = \frac{LI}{c};$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2;$$

$$\Phi_1 = N \cdot B_1(S_1 - S_2);$$

$$\Phi_2 = 2N \cdot B_2 S_2;$$

$$B_1 = 4\pi \frac{I}{c} \frac{N}{l};$$

$$B_2 = 4\pi \frac{I}{c} \frac{2N}{l};$$

$$L = \frac{4\pi N^2 (S_1 + 3S_2)}{l}.$$

Решение задачи 4

Магнитный поток через поперечное сечение кабеля выражается формулой

$$\Phi = \frac{LI}{c}.$$

Магнитный поток между жилами ($a < r < b$):

$$\Phi_1 = \int B dS = \int_a^b \frac{2I}{cr} l dr = \frac{2I}{c} l \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

Магнитный поток в центральной жиле $r \leq a$:

$$\Phi_2 = \int B dS = \int_0^a B(r) l dr = \int_0^a \frac{2I}{cr} e^{-r/\delta} l dr \approx \frac{2Il}{ca} \int_0^a e^{-r/\delta} dr \approx \frac{2Il\delta}{ca},$$

где $\delta \ll a$ – толщина скин-слоя. Тогда искомая индуктивность равна

$$L = 2l \cdot \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{\delta}{a} \right).$$

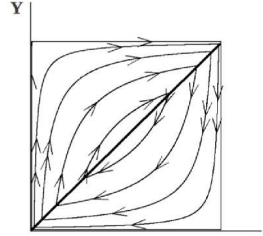
Решение задачи 5

Обозначим единичные векторы, нормальный и касательный к перегородке границы $\mathbf{n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$ и $\boldsymbol{\tau} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$ соответственно, так что $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_z$.

1. Ищем потенциалы в виде

$$\mathbf{A}_1 = C_1 x(y-a)\mathbf{e}_z \text{ и } \mathbf{A}_2 = C_2 y(x-a)\mathbf{e}_z.$$

Граничные условия $H_{1n} = H_{2n}$ на границе трубы выполняются автоматически. На перегородке $y = x$ граничное условие на тангенциальные компоненты запишется как



$$[\mathbf{n} \times \text{rot}(A_2 \mathbf{e}_z)] - [\mathbf{n} \times \text{rot}(A_1 \mathbf{e}_z)] = \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{\partial A_2}{\partial n} \right) = 4\pi \frac{i_0}{c} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{x}$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial n} \Big|_{x=y} = \frac{C_1((y-a)-x)}{\sqrt{2}} = -\frac{C_1 a}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{\partial A_2}{\partial n} \Big|_{y=x} = \frac{C_2(y-(x-a))}{\sqrt{2}} = \frac{C_2 a}{\sqrt{2}},$$

$$C_1 + C_2 = \frac{4\sqrt{2}\pi i_0}{ac}.$$

Из равенства нормальных компонент на перегородке:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot}(A_2 \mathbf{e}_z) = \mathbf{n} \cdot \text{rot}(A_1 \mathbf{e}_z) \Rightarrow \frac{\partial A_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_{y=x} = \frac{\partial A_2}{\partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_{y=x} \Rightarrow C_1 = C_2.$$

$$\mathbf{B}_1 = \text{rot}(A_1 \mathbf{e}_z) = 2\sqrt{2}\pi \frac{i_0}{ac} (x\mathbf{e}_x - (y-a)\mathbf{e}_y),$$

$$\mathbf{B}_2 = \text{rot}(A_2 \mathbf{e}_z) = 2\sqrt{2}\pi \frac{i_0}{ac} ((x-a)\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y).$$

2. Силовые линии можно найти, решив дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y}.$$

Тогда при $y > x$ $y = a - p/x$, а при $y \leq x$ $y = -p/(x - a)$.

Решение задачи 6

Найдем силу тока в кольце, воспользовавшись законами Фарадея и Ома:

$$E = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad E = I \cdot R.$$

Поток магнитного поля зависит от z :

$$\Phi(z) = L \cdot I/c + B(z) \cdot S = LI(t)/c + B_0 \cdot \cos(kvt) \cdot S.$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{c} \left(\frac{L}{c} \cdot I'(t)/c - kvB_0S \sin(kvt) \right) = I(t)R,$$

решение которого: $I = I_0 \cdot \cos(kvt + \varphi)$,

$$\text{где } I_0 = \frac{kvB_0S}{c\sqrt{R^2 + (Lkv)^2/c^4}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L}{c^2R}.$$

Выразим среднюю мощность и из нее среднюю силу:

$$P = \frac{RI_0^2}{2} = Fv \Rightarrow F = \frac{(kvB_0S)^2 R}{2vc(R^2 + (Lkv)^2/c^4)}.$$

Контрольная работа 2

Решение задачи 1

Из непрерывности E_τ на границе и нормального падения волны получаем, что $\mathbf{E}_{\text{отр}}(0, t) = -\mathbf{E}_{\text{пад}}(0, t)$. Полная волна записывается в виде $\mathbf{E}_{\text{отр}}(z, t) = -E_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) e^{i(-\mathbf{kz} - \omega t)}$.

Для плоской электромагнитной волны в вакууме выполняется соотношение $\mathbf{B} = [\mathbf{E} \times \mathbf{n}]$, где \mathbf{n} – единичный вектор, совпадающий с направлением распространения волны, для отраженной волны: $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\text{отр}}(z, t) &= [\mathbf{E}_{\text{отр}}(z, t) \times \mathbf{n}] = -E_0 e^{i(-\mathbf{kz}-\omega t)} [(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \times (-\mathbf{e}_z)] = \\ &= E_0(-\mathbf{e}_y + i\mathbf{e}_x) e^{i(-\mathbf{kz}-\omega t)} = E_0(i\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) e^{i(-\mathbf{kz}-\omega t)}.\end{aligned}$$

Окончательно $\mathbf{B}_{\text{отр}}(z, t) = E_0(i\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) e^{i(-\mathbf{kz}-\omega t)}$.

Решение задачи 2

Спектральная плотность функции $E(x)$ определяется как

$$E(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) e^{ikx} dx.$$

Рассчитаем Фурье-образ каждого прямоугольного импульса отдельно:

$$E_n(k) = \int_{-\frac{l}{2}+nL}^{\frac{l}{2}+nL} E_0 e^{ikx} dx.$$

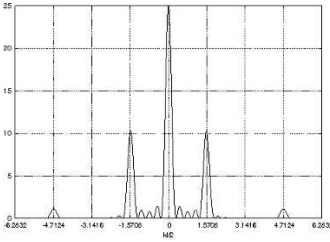
Введем переменную $t = x + nL$, тогда

$$\begin{aligned}E_n(k) &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} E_0 e^{ikt} e^{iknL} dt = E_0 e^{iknL} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{ikt} dt = E_0 e^{iknL} \left. \frac{e^{ikt}}{ik} \right|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \\ &= E_0 e^{iknL} \frac{e^{ikl/2} - e^{-ikl/2}}{ik} = \frac{2}{k} E_0 \sin \frac{kl}{2} e^{iknL}.\end{aligned}$$

Функция $E(x)$ состоит из 5 прямоугольных импульсов, поэтому n пробегает целые значения от -2 до 2 .

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 E(k) &= \sum_{-2}^2 E_n(k) = \frac{2}{k} E_0 \sin \frac{kl}{2} (e^{-2ikL} + e^{-ikL} + 1 + e^{ikL} + e^{2ikL}) = \\
 &= \frac{2}{k} E_0 \sin \frac{kl}{2} e^{-2ikL} (1 + e^{ikL} + e^{2ikL} + e^{3ikL} + e^{4ikL}) = \\
 &= \frac{2}{k} E_0 \sin \frac{kl}{2} e^{-2ikL} \frac{e^{5ikL} - 1}{e^{ikL} - 1} = \frac{2}{k} E_0 \sin \frac{kl}{2} e^{-2ikL} \frac{e^{i\frac{5kL}{2}} - e^{-i\frac{5kL}{2}}}{e^{i\frac{kL}{2}} - e^{-i\frac{kL}{2}}}. \\
 |E(k)| &= \frac{2}{k} E_0 \sin \frac{kl}{2} \frac{\sin \frac{5kL}{2}}{\sin \frac{kL}{2}}.
 \end{aligned}$$



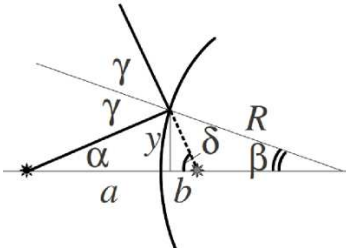
По условию задачи $L = 2l$,

$$|E(k)| = \frac{2}{k} E_0 \sin \frac{kl}{2} \frac{\sin 5kl}{\sin kl}.$$

Соответственно

$$|E(k)|^2 = \frac{4}{k^2} E_0^2 \sin^2 \frac{kl}{2} \frac{\sin^2 5kl}{\sin^2 kl}.$$

Решение задачи 3



Из геометрических соображений в параксиальном приближении

($y \ll R, a, b$) получаем, что $\alpha = \frac{y}{a}$, $\delta = \frac{y}{b}$, $\beta = \frac{y}{R}$ и, кроме того,

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \beta \\ 2\gamma = \alpha + \delta \end{cases}$$

Из двух последних уравнений находим, что $\delta = \alpha + 2\beta$, следовательно,

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{2}{R}.$$

Таким образом, $b = \frac{aR}{2a+R}$. Расстояние d между источником и изображением равно

$$d = a + b = a + \frac{aR}{2a + R} = 2a \frac{a + R}{2a + R}.$$

Решение задачи 4

По теореме Пифагора $l_1 = \sqrt{L^2 + (x + d)^2}$. С учетом $x, d \ll L$, получаем:

$$\begin{aligned} l_1 &= L \sqrt{1 + \left(\frac{x + d}{L}\right)^2} \approx \\ &\approx L \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + d}{L}\right)^2\right) = \end{aligned}$$

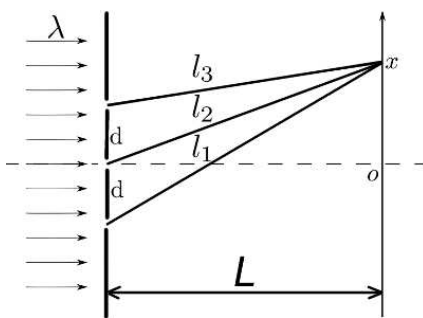
$$= L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + 2xd + d^2}{L^2}\right) \approx L \left(1 + \frac{xd}{L^2}\right) = L + \frac{xd}{L}.$$

Аналогично находим, что

$$l_2 = \sqrt{L^2 + x^2} \approx L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2}\right) \approx L,$$

$$l_3 = \sqrt{L^2 + (x - d)^2} \approx L \left(1 - \frac{xd}{L^2}\right) = L - \frac{xd}{L}.$$

Исходная волна падает на экран со щелями по нормали, поэтому излучаемые щелями волны имеют одинаковую начальную фазу.



Суммарное электрическое поле в точке x равно

$$\begin{aligned}
 E(x) &= E_1 + E_2 + E_3 = E_0 \left(e^{ikl_1} + e^{ikl_2} + e^{ikl_3} \right) = \\
 &= E_0 \left(e^{ik(L+\frac{xd}{L})} + e^{ikL} + e^{ik(L-\frac{xd}{L})} \right) = E_0 e^{ikL} \left(e^{ik\frac{xd}{L}} + 1 + e^{-ik\frac{xd}{L}} \right) = \\
 &= E_0 e^{ikL} \left(1 + 2 \cos k \frac{xd}{L} \right),
 \end{aligned}$$

откуда интенсивность в точке x равна

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} |E(x)|^2 = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \left(1 + 2 \cos k \frac{xd}{L} \right)^2 = \\
 &= \frac{c}{8\pi} E_0^2 \left(1 + 4 \cos k \frac{xd}{L} + 4 \cos^2 k \frac{xd}{L} \right) = \\
 &= \frac{c}{8\pi} E_0^2 \left(3 + 4 \cos k \frac{xd}{L} + 2 \cos 2k \frac{xd}{L} \right).
 \end{aligned}$$

Решение задачи 5

Для H -волн продольное магнитное поле равно

$$H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Соответственно для H_{10} при $a > b$

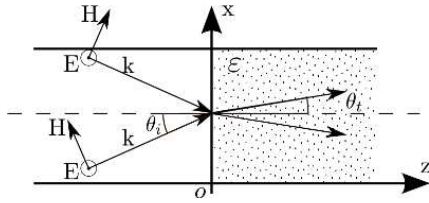
$$H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Данную волну можно представить в виде суммы двух плоских волн:

$$H_z(x, y, z, t) = \frac{H_0}{2} \left(e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + e^{i(-k_x x + k_z z - \omega t)} \right),$$

где $k_x = \frac{\pi}{a}$.

Таким образом, на границе диэлектрика мы имеем две плоские наклонно падающие волны, а амплитуду прошедшей волны можно определить по формулам Френеля.



При переходе через границу диэлектрика сохраняются k_x и k_y компоненты волнового вектора и ω – частота волны, поэтому мода волны не меняется, и по диэлектрику также распространяется H_{10} -волна.

Электрические поля падающей и прошедшей волн имеют только y -компоненту, отличную от нуля, поскольку только при такой ориентации \mathbf{E} выполняется условие $E_z \equiv 0$ (в этом можно убедиться и при помощи явных вычислений), что соответствует случаю ТЕ-падения в формулах Френеля:

$$E_2 = E_0 \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = E_0 \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin \theta_i \cos \theta_t + \sin \theta_t \cos \theta_i},$$

где θ_i – угол падения, θ_t – угол преломления, E_2 – амплитуда прошедшей (преломленной) волны.

Таким образом,

$$\begin{aligned} E_2 &= E_0 \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin \theta_i \cos \theta_t + \sin \theta_t \cos \theta_i} = E_0 \frac{2 \frac{k_{0z}}{k_0} \frac{k_{2x}}{k_2}}{\frac{k_{0x}}{k_0} \frac{k_{2z}}{k_2} + \frac{k_{2x}}{k_2} \frac{k_{0z}}{k_0}} = \\ &= E_0 \frac{2k_{0z}k_{2x}}{k_{0x}k_{2z} + k_{2x}k_{0z}} = E_0 \frac{2k_{0z}k_x}{k_xk_{2z} + k_xk_{0z}} = E_0 \frac{2k_{0z}}{k_{2z} + k_{0z}}, \end{aligned}$$

поскольку из граничных условий $k_{0x} = k_{2x} = k_x$.

Из свойств плоской волны $k = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c}$. Согласно условиям нашей задачи $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{\epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$.

Окончательно получаем:

$$E_2 = E_0 \frac{2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}{\sqrt{\varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}.$$

Решение задачи 6

Волновой пакет распространяется в волноводе с групповой скоростью, равной $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k_z}$, причем каждая мода (часть) имеет свою скорость.

Для волн в волноводе $\omega = c\sqrt{k_z^2 + \gamma_{mn}^2}$, следовательно,

$$v_g = c \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + \gamma_{mn}^2}} = \frac{k_z}{\omega} c^2 = c \frac{\sqrt{(\omega/c)^2 - \gamma_{mn}^2}}{\omega/c} = c \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\omega} \gamma_{mn}\right)^2},$$

где $\gamma_{mn}^2 = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$.

Обозначим групповые скорости волн типа H_{10} и E_{12} через v_{1g} и v_{2g} соответственно. Начальная длина пакета $\Delta z = v_{1g}\tau$. Расстояние между центрами пакетов к моменту времени t составит $(v_{1g} - v_{2g})t$. По условию задачи требуется, чтобы $(v_{1g} - v_{2g})t = \Delta z = v_{1g}\tau$. Следовательно,

$$t = \frac{v_{1g}\tau}{v_{1g} - v_{2g}}.$$

Тогда ближний пакет будет находиться на расстоянии

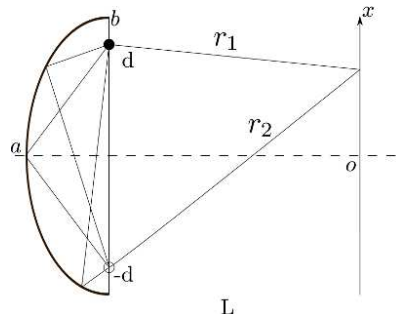
$$L = v_{2g}t = \frac{v_{1g}v_{2g}\tau}{v_{1g} - v_{2g}}.$$

После подстановки численных значений получаем:

$v_{1g} = 0,989$ с, $v_{2g} = 0,942$ с, $\Delta z = 89$ см, $t = 65,9$ нс и $L = 18,6$ м.

Решение задачи 7

Все лучи, выходящие из одного фокуса эллипса, собираются в другом, причем длина пути l одинакова для каждого из них. Рассмотрим луч, выходящий из источника вертикально вниз, увидим, что $l = (b + d) + (b - d) = 2b$. Положения фокусов можно найти, рассмотрев луч, проходящий через ось симметрии. Из уравнения $l = 2\sqrt{a^2 + d^2} = 2b$ получаем, что $d = \sqrt{b^2 - a^2}$. Волна при отражении от зеркала приобретает дополнительную фазу π . Таким образом, эллипс можно заменить на эффективный источник, расположенный во втором фокусе и отличающий по фазе от реального на $2kb + \pi$.



Далее в приближении $x \ll L$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{L^2 + (x - d)^2} = \\ &= \sqrt{L^2 + x^2 - 2xd + d^2} \approx \\ &\approx \sqrt{L^2 + d^2} \left(1 - \frac{xd}{L^2 + d^2} \right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$r_2 = \sqrt{L^2 + (x + d)^2} \approx \sqrt{L^2 + d^2} \left(1 + \frac{xd}{L^2 + d^2} \right).$$

Суммарное поле в точке x равно

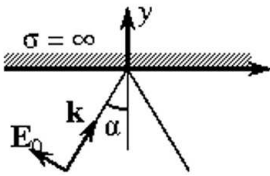
$$\begin{aligned}
 E(x) &= E_0 e^{ikr_1} + E_0 e^{ik(r_2+2b)+i\pi} = \\
 &= E_0 e^{ik\sqrt{L^2+d^2}} \left(e^{-ik\frac{xd}{\sqrt{L^2+d^2}}} - e^{ik\frac{xd}{\sqrt{L^2+d^2}}+2ikb} \right) = \\
 &= E_0 e^{ik\sqrt{L^2+d^2}} e^{ikb} \left(e^{-ik\left(\frac{xd}{\sqrt{L^2+d^2}}+b\right)} - e^{ik\left(\frac{xd}{\sqrt{L^2+d^2}}+b\right)} \right) = \\
 &= -2iE_0 e^{ik\sqrt{L^2+d^2}} e^{ikb} \sin k \left(\frac{xd}{\sqrt{L^2+d^2}} + b \right).
 \end{aligned}$$

Окончательно

$$I(x) = 4\frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}E_0^2 \sin^2 k \left(\frac{xd}{\sqrt{L^2+d^2}} + b \right) = \frac{cE_0^2}{2\pi} \sin^2 k \left(\frac{x\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{L^2+b^2-a^2}} + b \right).$$

Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1



Из граничных условий получим:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\Sigma \Rightarrow -2\hat{E}_0 \sin \alpha = 4\pi\hat{\Sigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma(x, t) = -\frac{E_0}{2\pi} \sin \alpha \cos(kx \sin \alpha - \omega t).$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_2 - [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_1 = 4\pi\frac{\mathbf{i}}{c} \Rightarrow -\left[\mathbf{e}_y \times 2\hat{E}_0\mathbf{e}_z\right] = 4\pi\frac{\mathbf{i}}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_x(x, t) = -\frac{cE_0}{2\pi} \cos(kx \sin \alpha - \omega t).$$

Решение задачи 2

Волна с круговой поляризацией раскладывается на две отличающиеся по фазе на $\pi/2$ линейно поляризованные волны – вдоль X и Y соответственно. Рассмотрим отдельно эти две поляризации и в каждом случае – интерференцию соответствующих волн.

Для излучения с поляризацией вдоль оси X (см. решение задачи 5 из КР2 2007/2008, стр. 12, 63):

$$I_x = 2 \frac{I_0}{2} \left(1 + \operatorname{sinc} \eta \cos \frac{kxd}{l} \right),$$

где $I_0 \approx \frac{E_0^2 a}{l}$, a – ширина одной щели, $\eta = \frac{\Delta k dx}{2l} = \frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda^2} \frac{dx}{l}$.

Для излучения с поляризацией вдоль оси Y : $I_y = I_0$.

Волны с рассмотренными различными поляризациями ортогональны и между собой не интерферируют. Поэтому их интенсивности просто складываются:

$$I(x) = I_x + I_y = I_0 \left(2 + \operatorname{sinc} \eta \cos \frac{kxd}{l} \right).$$

Решение задачи 3

Когда закрыты все четные зоны, напряженность электрического поля в дальнем фокусе запишется как

$$E_I = E_1 + E_3 + E_5 + \dots + E_N \approx \frac{1}{2} E_1 N,$$

где $E_1 \approx E_2 \approx \dots \approx E_N$ – вклад от соответствующей зоны Френеля.

Во втором случае напряженность в дальнем фокусе выражается суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} E_{II} &= E_1 - \frac{E_2}{2} + \frac{E_3}{4} - \frac{E_4}{8} + \dots - \frac{E_N}{2^{N-1}} = \sum_{i=1}^N E_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \\ &= E_1 \frac{(-1/2)^N - 1}{(-1/2) - 1} \approx \frac{2}{3} E_1. \end{aligned}$$

Тогда $I_I = \frac{N^2}{4} E_1^2$, $I_{II} = \frac{4}{9} E_1^2$ и интенсивность уменьшится в $\frac{I_I}{I_{II}} = \frac{9N^2}{16}$ раз.

Решение задачи 4

Запишем уравнение движения заряда:

$$m\ddot{x}' = eE_0 \cos \omega t \cos \alpha - k(x' - x'_0),$$

где x' – ось, направленная вдоль спицы, x'_0 – точка равновесия.

Если $\omega \ll \sqrt{k/m}$, то решение дифференциального уравнения:

$$x' = x'_0 - \frac{eE_0 \cos \omega t \cos \alpha}{m\omega^2}.$$

Если $\omega \ll \sqrt{k/m}$, то вторая производная дипольного момента:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2 E_0 \cos \omega t \cos \alpha}{m} \mathbf{e}_{x'}.$$

В волновой зоне напряженность магнитного поля излучения заряда ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$):

$$\mathbf{H} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]}{rc^2} = -\frac{e^2 E_0 \cos \omega t \cos \alpha}{m} \mathbf{e}_{y'}.$$

Тогда для электрического поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{e^2 E_0 \cos \omega t \cos \alpha}{m} \mathbf{e}_{x'}.$$

Таким образом, излучение, рассеянное частицей вдоль оси z , поляризовано вдоль спицы.

Решение задачи 5

Запишем поля и волновой вектор падающей ($\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x$, $\mathbf{H}_0 = E_0 \mathbf{e}_y$ и $\mathbf{k}_0 = k_0 \mathbf{e}_z$) и отраженной (\mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 и \mathbf{k}_1) волн в системе отсчета зеркала z' , которая движется со скоростью $\mathbf{v} = -v \mathbf{e}_z$.

Падающая волна:

$$\mathbf{E}'_0 = \gamma(\mathbf{E}_0 + [\beta \times \mathbf{H}_0]) = \gamma E_0(\mathbf{e}_x - \beta[\mathbf{e}_{z'} \times \mathbf{e}_y]) = E_0 \mathbf{e}_x \gamma(1 + \beta),$$

$$\mathbf{H}'_0 = \gamma(\mathbf{H}_0 - [\beta \times \mathbf{E}_0]) = \gamma E_0(\mathbf{e}_y + \beta[\mathbf{e}_{z'} \times \mathbf{e}_x]) = E_0 \mathbf{e}_y \gamma(1 + \beta),$$

$$\mathbf{k}'_0 = \mathbf{e}_z \gamma(k_0 + \beta \frac{\omega_0}{c}) = \mathbf{e}_z \gamma k_0(1 + \beta),$$

где $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Отраженная волна:

$$\mathbf{E}'_1 = -E_0 \mathbf{e}_x \gamma(1 + \beta), \quad \mathbf{H}'_1 = E_0 \mathbf{e}_y \gamma(1 + \beta) \quad \text{и} \quad \mathbf{k}'_1 = -\mathbf{e}_{z'} k_0 \gamma(1 + \beta).$$

В лабораторной системе:

$$\mathbf{E}_1 = -E_0 \mathbf{e}_x \gamma^2(1 + \beta)^2, \quad \mathbf{H}_1 = E_0 \mathbf{e}_y \gamma^2(1 + \beta)^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{k}_1 = -\mathbf{e}_z k_0 \gamma^2(1 + \beta)^2.$$

Коэффициент отражения:

$$R = \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 = \gamma^4(1 + \beta)^4, \quad \text{при } v \sim c \quad R = 16\gamma^4, \quad \omega_1 = k_1 c \approx 4\gamma^2 \omega_0.$$

Решение задачи 6

В системе отсчета (СО) электрона интенсивность излучения запишется как

$$I(\mathbf{r}) = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 |\mathbf{E}'(\mathbf{r})|^2}{m^2 c^3} = \frac{2}{3} r_e^2 c |\mathbf{E}'(\mathbf{r})|^2 = \frac{2}{3} r_e^2 c |\mathbf{E}'(\mathbf{r})|^2,$$

где $r_e^2 = \frac{e^2}{mc^2}$ – классический радиус электрона, $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – напряженности электрического поля в СО электрона и в лабораторной СО соответственно. $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}'(\mathbf{r})$, так как содержат только компоненту поля, параллельную движению частицы.

$$E(x) = \begin{cases} Ze/x^2, & x > R; \\ Zex/R^3, & x \leq R. \end{cases}$$

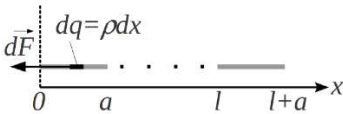
В лабораторной СО потеря энергии на излучение:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{r})dt = \int_{-\infty}^{\infty} I'(\mathbf{r})dt = \int_{-\infty}^{\infty} I'(\mathbf{r})\frac{dx}{c} = \frac{2}{3}r_e^2 2 \int_0^{\infty} |E(\mathbf{r})|^2 dx = \\ &= \frac{4Z^2 r_e^2 e^2}{3} \left(\int_0^R \frac{x^2}{R^6} dx + \int_R^{\infty} \frac{dx}{x^4} \right) = \frac{8Z^2 r_e^2 e^2}{9R^3}. \end{aligned}$$

2011/2012 учебный год

Контрольная работа 1

Решение задачи 1



Направим ось x слева направо с отсчетом от левого края заряженной системы. Выделим на левом отрезке элемент длины dx в окрестности некоторой точки x . Сила кулоновского взаимодействия на элемент dx со стороны правого отрезка запишется как

$$dF = \int_{x'=l}^{x'=l+a} \frac{\rho^2 dx \cdot dx'}{(x' - x)^2} = - \left. \frac{\rho^2 dx}{(x' - x)} \right|_{x'=l}^{x'=l+a}.$$

Сила на весь левый отрезок равна

$$F = \int dF = \int_{x=0}^{x=a} \left(\frac{\rho^2}{l-x} - \frac{\rho^2}{l+a-x} \right) dx = -\rho^2 \cdot \ln \frac{l-x}{l+a-x} \Big|_{x=0}^{x=a}.$$

Подставляя пределы интегрирования, получим:

$$F = \rho^2 \cdot \left(\ln \frac{l}{l+a} - \ln \frac{l-a}{l} \right) = \frac{q^2}{a^2} \cdot \ln \frac{l^2}{(l-a)(l+a)} = \frac{q^2}{a^2} \ln \frac{l^2}{l^2 - a^2}.$$

На больших расстояниях ($l \gg a$) получаем выражение для силы взаимодействия точечных зарядов:

$$F = -\frac{q^2}{a^2} \cdot \ln \frac{l^2 - a^2}{l^2} = -\frac{q^2}{a^2} \cdot \ln \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \approx \frac{q^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{l^2} = \frac{q^2}{l^2}.$$

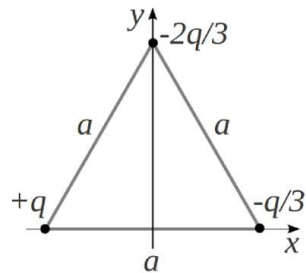
Любопытное следствие: две половинки равномерно заряженного отрезка ($l = a$) расталкиваются с бесконечной силой. Если же придать отрезку толщину (переходя к равномерно заряженному цилиндру), то сила расталкивания становится конечной.

Решение задачи 2

Полный заряд системы равен нулю, а дипольный момент отличен от нуля. Поэтому первый исчезающий член разложения потенциала на больших расстояниях имеет вид

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{R})}{R^3}.$$

В декартовых координатах:



$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \frac{d_x \cdot x + d_y \cdot y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{(-q \cdot \frac{a}{2} - \frac{q}{3} \cdot \frac{a}{2}) \cdot x - \frac{2q}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{2x + \sqrt{3}y}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} qa. \end{aligned}$$

Решение задачи 3

Решим задачу в варианте 2 (вариант 1 получается подстановкой $\varepsilon = 1$). Потенциал на внешней сфере из теоремы Гаусса равен

$$\varphi_2 = \varphi(b) = \frac{Q}{b} = \frac{q_1 + q_2}{b}.$$

Поле между двумя сферами равно

$$E_1(r) = \frac{q_1}{\varepsilon r}.$$

Разность потенциалов между сферой 2 и 1 составляет

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r=a}^{r=b} E_1(r) dr = \frac{q_1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Отсюда находим потенциал на внутренней сфере:

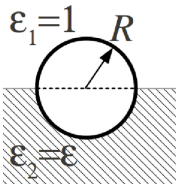
$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{q_1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q_1 + q_2}{b} + \frac{q_1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q_2}{b} + \frac{q_1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon - 1}{b} \right).$$

Полученная формула дает правильную асимптотику для основных предельных случаев:

а) $\varepsilon = 1$, $\varphi_1 = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{b}$ – по принципу суперпозиции потенциал в точке $r = a$ создается зарядами малой (первое слагаемое) и большой (второе слагаемое) сферы. При этом $\varphi_{II}(r) = \frac{q_2}{b} = \text{const}$ для всех $r \leq b$;

б) $\varepsilon = \infty$ (металлическая оболочка), $\varphi_1 = \frac{q_2 + q_1}{b}$ – полный заряд собран на внешней обкладке.

Решение задачи 4



С учетом того, что поле внутри сферы равно нулю, локальное давление электрического поля на стенку сферы направлено от ее центра и равно

$$\mathbf{p}(\mathbf{R}) = \frac{DE}{8\pi} \mathbf{e}_R = \frac{\varepsilon_i E^2}{8\pi} \mathbf{e}_R.$$

В вакууме:

$$\mathbf{p}(\mathbf{R}) = \frac{E^2}{8\pi} \mathbf{e}_R.$$

В диэлектрике:

$$\mathbf{p}(\mathbf{R}) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \mathbf{e}_R.$$

В обеих средах:

$$\mathbf{E} = \frac{2Q}{(1 + \varepsilon)R^2} \mathbf{e}_R.$$

Силы давления P_1 на верхнюю и P_2 на нижнюю полусферы направлены соответственно вверх и вниз и равны по модулю

$$P_1 = \frac{\pi R^2}{8\pi R^4} \left(\frac{2Q}{\varepsilon + 1} \right)^2 = \frac{1}{8R^2} \left(\frac{2Q}{\varepsilon + 1} \right)^2,$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon}{8R^2} \left(\frac{2Q}{\varepsilon + 1} \right)^2.$$

Результирующая сила, втягивающая сферу в диэлектрик, равна

$$P = P_2 - P_1 = \frac{(\varepsilon - 1)}{8R^2} \left(\frac{2Q}{\varepsilon + 1} \right)^2.$$

Эта сила уравновешивается силой Архимеда $F_A = \rho g V/2$ и силой тяжести Mg (причем из условия равновесия незаряженной сферы следует, что $\rho g V/4 = Mg$). Тогда

$$P = Mg, \quad \frac{(\varepsilon - 1)}{8R^2} \left(\frac{2Q}{\varepsilon + 1} \right)^2 = Mg,$$

откуда

$$Q = \sqrt{\frac{8Mg}{4(\varepsilon - 1)}}(\varepsilon + 1)R = \sqrt{\frac{2Mg}{\varepsilon - 1}}(\varepsilon + 1)R.$$

Решение задачи 5

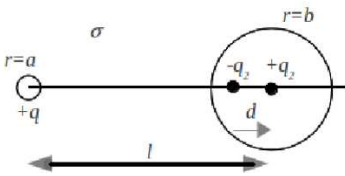
1. Пусть на заземляющем электроде содержится заряд $+q$. Тогда полный ток, утекающий из электрода в среду, равен

$$J = \iint_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = \sigma \iint_S (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = \sigma \cdot 4\pi q.$$

Потенциал на заземляющем электроде равен $\varphi_0 = \frac{q}{a}$. Второй электрод находится на бесконечности под нулевым потенциалом. Тогда сопротивление заземления вычисляется как

$$R = \frac{U}{J} = \frac{1}{4\pi\sigma a}.$$

2. Пусть на заземляющем электроде содержится заряд $+q$. Тогда полный ток J , утекающий из электрода в среду, равен $4\pi q\sigma$.



Потенциал на заземляющем электроде складывается из собственного потенциала $\varphi_0 = \frac{q}{a}$ и возмущения, вносимого металлическим включением. Чтобы определить возмущающую добавку к потенциалу, учтем,

что внутри проводящего включения, на некотором расстоянии δ от центра, наводится эффективный заряд-изображение $-q_2$. Поскольку полный заряд на проводящем включении равен нулю (иначе бы оно было источником тока), в центре проводящего шара наводится еще и заряд $+q_2$:

$$\delta = \frac{b^2}{l}, \quad q_2 = \frac{b}{l}q.$$

Наведенный дипольный момент направлен от заземляющего электрода к проводящему включению и равен

$$|\mathbf{d}| = \delta q_2 = \frac{b^3}{l^2}q.$$

Таким образом, возмущение к потенциалу заземляющего электрода определяется дипольной добавкой, создаваемой включением:

$$\delta\varphi(\mathbf{R}) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{R})}{R^3} = -\frac{d \cdot l}{l^3} = -\frac{b^3}{l^4}q.$$

Потенциал заземляющего электрода:

$$U = \varphi_0 + \delta\varphi = \left(\frac{1}{a} - \frac{b^3}{l^4}\right) \cdot q.$$

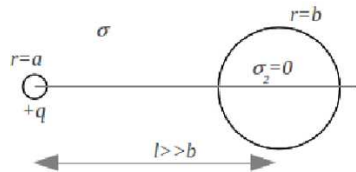
Сопротивление заземления:

$$R = \frac{U}{J} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{b^3}{l^4}\right).$$

Линии тока в окрестности включения “притягиваются” к полости. Линии тока, входящие и выходящие из включения, на границе ориентированы по нормали к поверхности.

3. Пусть на заземляющем электроде содержится заряд $+q$. Тогда полный ток J , утекающий из электрода в среду, равен $4\pi q\sigma$.

Потенциал на заземляющем электроде складывается из собственного потенциала $\varphi_0 = \frac{q}{a}$ и возмущения, вносимого сферической полостью. Возмущающую добавку к потенциалу найдем с учетом того, что в отсутствие полости ток на размерах b можно считать распределенным однородно. В этом приближении (см. решение типовой задачи Р37 из задачника [1]) добавка определяется выражением:



$$\delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{b^3 \cdot (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{2r^3} = -\frac{b^3}{2r^3} \cdot \frac{q \cdot r}{r^2} = \frac{b^3}{2l^3} \cdot \frac{q}{l} = \frac{b^3}{2l^4}q.$$

Потенциал заземляющего электрода:

$$U = \varphi_0 + \delta\varphi = \left(\frac{1}{a} + \frac{b^3}{2l^4}\right) \cdot q.$$

Сопротивление заземления:

$$R = \frac{U}{J} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{b^3}{2l^4} \right).$$

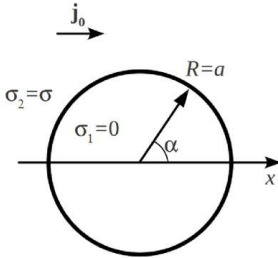
Линии тока обтекают полость, на границе вектор плотности тока имеет только тангенциальную компоненту.

Решение задачи 6

Ищем решение для потенциала в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{r}) &= A_1 \cdot E_0 r \cdot \cos \alpha, \quad r < a; \\ \varphi_2(\mathbf{r}) &= -E_0 \cdot r \cdot \cos \alpha + A_2 \cdot \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^2}, \quad r \geq a, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}_0$.



Решение (1) удовлетворяет уравнению Лапласа *. Это было бы не так, если бы мы выбрали второе слагаемое в $\varphi_2(\mathbf{r})$ пропорциональным $\frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}$, как при сферической геометрии.

Соответствующие выражения для напряженности поля:

* Оператор Лапласа в цилиндрических координатах (в случае $\frac{\partial}{\partial z} = 0$) равен

$$\Delta = \frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \alpha^2}.$$

Тогда для $\varphi = -E_0 r \cos \alpha + A \frac{E_0 \cdot \cos \alpha}{r}$

$$\Delta \varphi = \left(-\frac{E_0 \cos \alpha}{r} + A \frac{E_0 \cdot \cos \alpha}{r^3} \right) + \left(\frac{E_0 \cos \alpha}{r} - A \frac{E_0 \cdot \cos \alpha}{r^3} \right) = 0.$$

Выбор решения в виде $\varphi = -E_0 r \cos \alpha + B \frac{E_0 \cdot \cos \alpha}{r^2}$ привел бы к нарушению уравнения Лапласа:

$$\Delta \varphi = \left(-\frac{E_0 \cos \alpha}{r} + 4B \frac{E_0 \cdot \cos \alpha}{r^4} \right) + \left(\frac{E_0 \cos \alpha}{r} - B \frac{E_0 \cdot \cos \alpha}{r^4} \right) = 3B \frac{E_0 \cdot \cos \alpha}{r^4} \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
 E_1(\mathbf{r}) &= -A_1 \cdot \mathbf{E}_0, \\
 E_2(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_0 - A_2 \frac{\mathbf{E}_0}{r^2} + 2A_2 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^4} = \\
 &= \mathbf{E}_0 - A_2 \frac{\mathbf{E}_0}{r^2} + 2A_2 \frac{E_0 \cdot r \cdot \cos \alpha}{r^3} \mathbf{e}_r = \\
 &= \mathbf{E}_0 - A_2 \frac{\mathbf{E}_0}{r^2} + 2A_2 \frac{E_0 \cdot \cos \alpha}{r^2} \mathbf{e}_r.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Для определения неизвестных A_1 и A_2 имеем два граничных условия:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(\mathbf{r})|_{r=a} &= \varphi_2(\mathbf{r})|_{r=a}, \\
 j_{n1}(\mathbf{r})|_{r=a} &= j_{n2}(\mathbf{r})|_{r=a} \Rightarrow \sigma_1 E_{n1}(\mathbf{r})|_{r=a} = \sigma_0 E_{n2}(\mathbf{r})|_{r=a}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Подстановка (1)–(2) в (3) дает

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -E_0 + A_2 \cdot \frac{E_0}{a^3}, \\
 -A_1 \sigma_1 \cos \alpha &= E_0 \sigma_0 \cos \alpha - A_2 \frac{\sigma_0 E_0 \cdot \cos \alpha}{a^2} + 2A_2 \sigma_0 \frac{E_0 \cdot \cos \alpha}{a^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 0 &= 1 + \frac{A_2}{a^2}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Во втором граничном условии (4) мы проецировали все векторы на направление \mathbf{e}_r .

Из системы уравнений (4) находим:

$$A_2 = -a^2, \quad A_1 = -2.$$

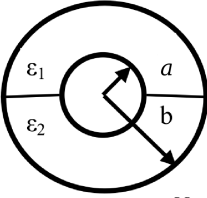
Подставляя полученные значения A_1 и A_2 в (2), находим поле и плотность тока:

$$\mathbf{E}_1 = 2\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{j}_1 = 0, \quad r < a;$$

$$\mathbf{E}_2 = \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \mathbf{E}_0 - 2 \frac{a^2 E_0 \cos \alpha}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{j}_2 = \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \mathbf{j}_0 - 2 \frac{a^2 j_0 \cos \alpha}{r^3} \mathbf{e}_r, \quad r \geq a.$$

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1



Пусть на внутреннем цилиндре собран заряд Q . Электрическое поле всюду между цилиндрами направлено по радиусу. Тогда модуль вектора электрической индукции между цилиндрами определим из теоремы Гаусса:

$$\begin{aligned} \oint_S D(R) dS &= \int_{S_1} D_1(R) dS + \int_{S_2} D_2(R) dS = \\ &= \pi R l \cdot (D_1(R) + D_2(R)) = 4\pi Q. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе двух диэлектриков тангенциальные компоненты векторов напряженности электрического поля $E_{1\tau}(R)$ и $E_{2\tau}(R)$ равны. Учитывая, что у поля имеется только тангенциальная компонента, получим:

$$\frac{D_1(R)}{\varepsilon_1} = \frac{D_2(R)}{\varepsilon_2} = E(R). \quad (2)$$

С учетом (2) перепишем уравнение (1):

$$\pi R l \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E(R) = 4\pi Q, \text{ откуда } E(R) = \frac{D_1(R)}{\varepsilon_1} = \frac{4Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l R}. \quad (3)$$

Разность потенциалов между обкладками выражается интегралом:

$$U = \int_a^b E(R) dR = \frac{4Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l} \int_a^b \frac{dR}{R} = \frac{4Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l} \ln \frac{b}{a}. \quad (4)$$

Емкость конденсатора:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l}{4 \ln \frac{b}{a}}.$$

С учетом того, что при $R < a$ $E = 0$, давление на внутреннюю стенку равно

$$p = \frac{\varepsilon E^2(a)}{8\pi}.$$

Если разность потенциалов между обкладками равна U , то из (3) и (4) следует, что

$$E(a) = \frac{U}{a \ln \frac{b}{a}}.$$

Тогда сила давления на внутреннюю обкладку направлена по радиусу и равна

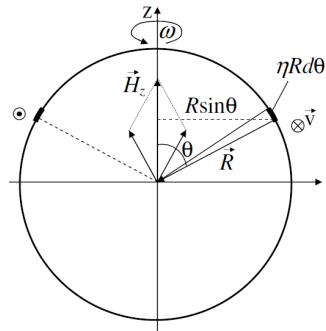
$$p = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left(\frac{U}{a \ln \frac{b}{a}} \right)^2.$$

Суммарную силу на внутреннюю обкладку находим как разность сил на каждую половинку:

$$F = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{8\pi} \left(\frac{U}{a \ln \frac{b}{a}} \right)^2 \cdot (2al) = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)l}{4\pi a} \left(\frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \right)^2.$$

Решение задачи 2

Выделим на кольце элемент, заключенный в интервале углов $[\theta; \theta + d\theta]$. Элементарный заряд $dQ = \eta R d\theta$ движется со скоростью $\mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$. (Знак “ $-$ ” возник из-за того, что мы направили \mathbf{R} к центру кольца). В соответствии с законом Ампера движущийся заряд наводит в центре кольца магнитное поле с напряженностью:



$$d\mathbf{H} = \frac{dQ}{cR^3} \mathbf{v} \times \mathbf{R} = \frac{\eta R d\theta}{cR^3} \mathbf{v} \times \mathbf{R} = \frac{\eta d\theta}{cR^2} \mathbf{v} \times \mathbf{R}.$$

Выделенный элемент вместе с элементом, заключенным в угловом интервале $[-\theta - d\theta; -\theta]$, наводят магнитное поле, ориентированное по z с напряженностью:

$$dH_z = 2 \frac{\eta d\theta}{c R^2} \omega R^2 \sin^2 \theta = 2 \frac{\eta \omega}{c} \sin^2 \theta d\theta.$$

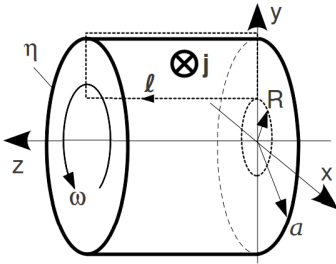
Интегрируя по углу от 0 до π , получим полное поле в центре:

$$H = \int dH_z = 2 \frac{\eta \omega}{c} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \pi \frac{\eta \omega}{c}.$$

Среднюю линейную плотность тока вычисляем как заряд, пересекающий неподвижную дугу единичной длины за период вращения кольца, отнесенный к этому периоду:

$$J = \frac{2\eta}{T} = \frac{2\eta\omega}{2\pi} = \frac{\eta\omega}{\pi}.$$

Решение задачи 3



Из симметрии задачи ясно, что магнитное поле направлено параллельно оси цилиндра. Вычислим циркуляцию магнитного поля по прямоугольному контуру, одна сторона которого проходит параллельно оси за пределами цилиндра, другая – внутри на расстоянии R от оси (контур лежит в плоскости, содержащей ось цилиндра):

$$\oint (\mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell}) = H(R)\ell.$$

По теореме Стокса циркуляция поля равна $\frac{4\pi J}{c}$, где J – полный ток через сечение контура. Плотность тока на расстоянии R от оси

равна $j(R) = \rho \cdot v(R) = \rho \cdot R\omega$. Интегрируя по площади контура, получим:

$$J = \iint j(R) dS = \rho\omega\ell \int_R^a R dR = \frac{\rho\omega\ell}{2} (a^2 - R^2).$$

Теорема Стокса в развернутой форме принимает вид

$$H(R)\ell = \frac{2\pi\rho\omega\ell}{c} (a^2 - R^2),$$

откуда поле как функция радиуса равно

$$\mathbf{H}(R) = \frac{2\pi\rho\omega}{c} (a^2 - R^2) \mathbf{e}_z, \quad R < a.$$

При $R \geq a$ $H = 0$. Из уравнения Максвелла, выражающего закон Фарадея, получим:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{H}}{cdt} = -\frac{2\pi k\rho}{c^2} (a^2 - R^2) \mathbf{e}_z. \quad (1)$$

Компонента E_α зависит только от координаты R . Находим ее из теоремы Стокса (в применении к полю \mathbf{E} это закон Фарадея):

$$2\pi R E_\alpha = \mathcal{E} = \frac{\partial \Phi}{c \partial t}. \quad (2)$$

За положительное направление отсчета угла α мы приняли от y к x , поэтому исчез знак “ $-$ ” перед $\frac{\partial \Phi}{c \partial t}$. Выражение для правой части (2) получим, интегрируя правую часть (1) по площади сечения контура — круга радиуса R с центром на оси соленоида:

$$\mathcal{E} = \int_0^R \frac{2\pi k\rho}{c^2} (a^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{(2\pi)^2 k\rho}{c^2} \left(a^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right).$$

Тогда

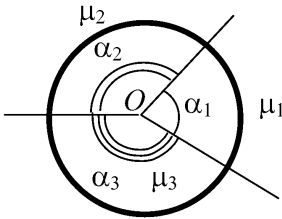
$$\begin{aligned} R < a : E_\alpha &= \frac{\pi k \rho R}{2c^2} (2a^2 - R^2); \\ R \geq a : E_\alpha &= \frac{\pi k \rho a^4}{2c^2 R}. \end{aligned}$$

R -компоненту вектора \mathbf{E} находим из теоремы Гаусса:

$$\begin{aligned} R < a : E_R &= \frac{4\pi \cdot \pi R^2 \rho}{2\pi R} = 2\pi \rho R; \\ R \geq a : E_R &= \frac{4\pi a^2 \rho}{2R} = \frac{2\pi \rho a^2}{R}. \end{aligned}$$

Примечание. Решение для электрического поля определено с точностью до произвольной векторной функции, соответствующей некоторому распределению зарядов на бесконечности. В декартовых координатах такой функцией является, например, $F(x, y) = C \cdot (y \cdot \mathbf{e}_x + x \cdot \mathbf{e}_y) + \mathbf{E}_0$, где \mathbf{E}_0 однородно.

Решение задачи 4



Рассмотрим сферическую систему координат с началом в центре кольца и осью z , совпадающей с осью кольца. Сделаем важное предположение относительно магнитного поля, возникающего в магнетике при пропускании по кольцу

постоянного тока: напряженности магнитного поля в магнетике $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и вакууме $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ ничем не отличаются (при одном и том же токе в кольце).

Отсюда в силу симметрии, имеющей место в вакууме, вытекает ряд следствий (ср. с решением задачи 3 из ЭР1 2008/09, стр. 16, 78):

1. Напряженность поля \mathbf{H} всюду имеет нулевую α -компоненту.
2. Радиальная и зенитная компоненты напряженности зависят только от R и θ ($H_R = H_R(R, \theta)$, $H_\theta = H_\theta(R, \theta)$).
3. В плоскости кольца поле направлено по z .

Для обоснования сделанного предположения достаточно показать, что соответствующее решение в магнетике удовлетворяет

двум уравнениям Максвелла в каждой области магнетика и граничным условиям на каждой из трех границ раздела. Проверяем, приняв во внимание, что решение в вакууме уравнениям Максвелла удовлетворяет:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_i = \mu_i \operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0 \quad - \text{ верно.}$$

$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}$ (в интегральной форме это теорема Стокса, которая для любого контура принимает совершенно одинаковый вид и в вакууме, и в магнетике) — верно.

Граничные условия выполняются в силу геометрии поля, заданной условием 1 (у поля просто нет иной компоненты, кроме тангенциальной):

$$H_{\tau i} = H_{\tau j} = H_0 \quad - \text{ верно.}$$

$$B_{ni} = B_{nj} = 0 \quad - \text{ верно.}$$

Индуктивность кольца в вакууме определяется соотношением

$$\iint H_0(R) dS = \frac{L_0 I}{c}. \quad (1)$$

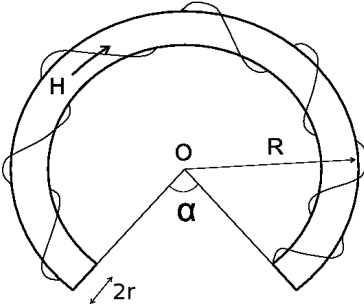
Интеграл в левой части (1) берется по площади кольца. В магнетике поток вектора индукции магнитного поля через сечение кольца равен

$$\begin{aligned} & \iint_{\alpha_1} \mu_1 H_0(R) dS + \iint_{\alpha_2} \mu_2 H_0(R) dS + \iint_{\alpha_3} \mu_3 H_0(R) dS = \\ & = \frac{\alpha_1 \mu_1}{2\pi} \iint_S H_0(R) dS + \frac{\alpha_2 \mu_2}{2\pi} \iint_S H_0(R) dS + \frac{\alpha_3 \mu_3}{2\pi} \iint_S H_0(R) dS = \quad (2) \\ & = \frac{\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_3 \mu_3}{2\pi} \iint H_0(R) dS = \frac{LI}{c}. \end{aligned}$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получим:

$$L = \frac{\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_3 \mu_3}{2\pi} L_0.$$

Решение задачи 5



Решение 1.

Магнитное поле вдали от торца тонкого соленоида создается “магнитным зарядом”:

$$Q_m = \frac{BS}{4\pi}.$$

В нашем случае имеется два таких заряда $\pm Q_m = \mu H r^2/4$, расположенных вблизи левого ($-Q_m$) и правого ($+Q_m$) торцов соответственно. Таким образом, поле в центре тора равно

$$\mathbf{B}_0 = -\frac{Q_m \mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{Q_m \mathbf{r}_2}{r_2^3}, \quad (1)$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 – векторы, направленные в точку O из левого и правого торцов соответственно. Результирующая двух векторов (1) направлена горизонтально (справа налево) и равна

$$B_0 = \frac{2Q_m}{R^2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\mu H r^2}{2R^2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Примечание. Понятие “магнитный заряд” встречалось в задачниках [1] (см. решение задачи Р.55), где с его помощью определялось магнитное поле вдали от конца прямого тонкого соленоида. Покажем, что оно справедливо также для непрямого соленоида, если соленоид тонкий, а магнитный поток постоянен вдоль его длины.

Действительно, выберем некоторую замкнутую поверхность и запишем уравнение Максвелла для потока магнитного поля:

$$\oiint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (3)$$

Устремляя размер области, ограниченной этой поверхностью, к нулю, получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Предположим теперь, что рассмотренная выше замкнутая область находится непосредственно на конце тонкого соленоида. Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$\oint\!\!\!\oint' \mathbf{B} d\mathbf{S} + BS = 0. \quad (5)$$

Здесь знаком $'$ мы обозначили область вне соленоида. Поток же через соленоид BS (S – площадь сечения соленоида) будем рассматривать отдельно.

Сделаем следующее допущение. Предполагая соленоид тонким, опустим $'$ в интеграле (5). Устремим теперь размер области интегрирования к нулю (предполагая его при этом большим сечения соленоида). Тогда вместо уравнения (4) получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = -BS\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (6)$$

Здесь вектор \mathbf{r}_0 определяет положение конца соленоида. Уравнения (6) и $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ описывают электростатику точечного заряда $Q_m = BS/4\pi$, а их решение есть закон Кулона:

$$\mathbf{B} = -\frac{BS}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (7)$$

Оценим ошибку нашего приближения. Опускание $'$ в интеграле (4) справедливо, если считать поле в соленоиде равным нулю (это поле уже учтено выделением особенности BS в уравнении (4)). Мы же предполагаем поле в соленоиде равным полю вне соленоида. Непрерывность поля необходима для перехода к дифференциальному уравнению (6). Это позволяет оценить относительную ошибку приближения как $\frac{S}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}$.

Решение 2.

Разобьем тор на бесконечно малые окружности толщиной dl . Магнитный момент витка, связанного с каждой такой окружностью, равен $dm = \mu I n \pi r^2 dl / c$ и направлен по касательной к тору. Здесь n и I – плотность намотки и ток в ней соответственно; их можно связать с магнитным полем в торе:

$$H = \frac{4\pi}{c} I n,$$

так что

$$d\mathbf{m} = \frac{\mu r^2 dl}{4} \mathbf{H}.$$

Магнитное поле в центре тора можно определить как векторную сумму полей от каждого витка:

$$\mathbf{B}_0 = - \sum \frac{d\mathbf{m}}{R^3} + \sum \frac{3(d\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5}.$$

Последняя сумма в этой формуле равна нулю, так как $d\mathbf{m} \cdot \mathbf{R} = 0$ (векторы $d\mathbf{m}$ и \mathbf{R} взаимно перпендикулярны), а первая равна

$$\mathbf{B}_0 = - \frac{\mu r^2 \mathbf{L}}{4R^3} H, \quad (8)$$

где L – вектор, соединяющий левый и правый торцы тора. Его длина равна $L = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$. Подставляя это в формулу (8), получим (2).

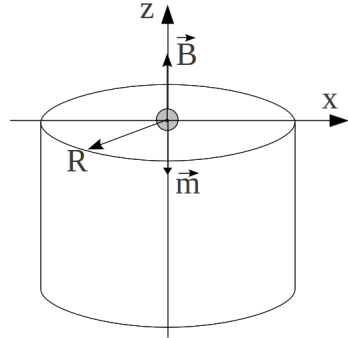
Решение задачи 6

Поле на оси прямого полубесконечного соленоида как функция координаты z , отсчитываемой от торца соленоида, имеет вид

$$B_z(z) = \frac{B_0}{2} \left(1 - \frac{z}{R}\right) \approx \frac{B_0}{2} \text{ вблизи торца.}$$

Если размер лягушки (водяного шарика) мал по сравнению с радиусом катушки R , то вблизи торца поле можно считать однородным с величиной $\frac{\mathbf{B}_0}{2}$, и тогда шарик приобретает магнитный момент, равный

$$\mathbf{m} = \frac{(\mu - 1)a^3}{\mu + 2} \cdot \frac{\mathbf{B}_0}{2} \approx \frac{(\mu - 1)a^3 \mathbf{B}_0}{3 \cdot 2}.$$



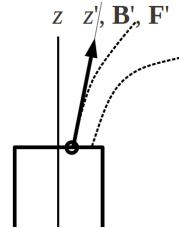
Сила на магнитный диполь (ср. с решением задачи 1 из ЭР1 2007/08, стр. 8, 48):

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = m_z \cdot \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} \mathbf{e}_z = -\frac{(\mu - 1)a^3 B_0^2}{12R} \mathbf{e}_z = -\frac{4\pi a^3 \rho}{3} \mathbf{g}.$$

Искомое магнитное поле внутри соленоида равно

$$B_0 = \sqrt{\frac{48\pi R \rho g}{3(1 - \mu)}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3.14 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 9.81 \cdot 10^2}{10^{-5}}} \approx 16 \cdot 10^4 \text{ Гс} = 16 \text{ Т}.$$

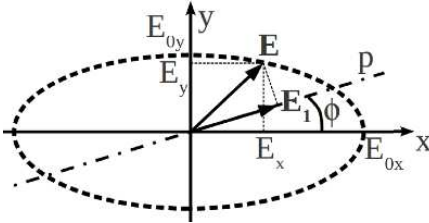
Приведем упрощенные соображения в пользу того, что положение лягушки неустойчиво. Сместим лягушку на бесконечно малое расстояние в горизонтальном направлении. В первом приближении у вектора магнитного поля в смещенной точке появится горизонтальная компонента, направленная в сторону смещения. Тогда все изложенные выше рассуждения, примененные по отношению к оси z' (см. рисунок), дают появление горизонтальной невозвращающей компоненты у силы, что и означает неустойчивость *.



*В приведенном рассуждении мы пренебрегли вкладом магнитного поля, формируемого внутри капли, в полную энергию системы. На самом деле учет этого фактора необходим, но представляет собой более сложную задачу. Отметим только, что теорема Ирншоу на случай диамагнетиков не распространяется, и возможна такая конфигурация магнитного поля, при которой равновесие подвешенной капли воды оказывается устойчивым.

Контрольная работа 2

Решение задачи 1



Интенсивность падающей волны равна

$$I_0 = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle = \frac{c}{8\pi} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2).$$

Мгновенное электрическое поле на выходе поляроида находим как проекцию входного поля на ось поляроида:

$$\mathbf{E}_1 = (E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi) \mathbf{e}_P.$$

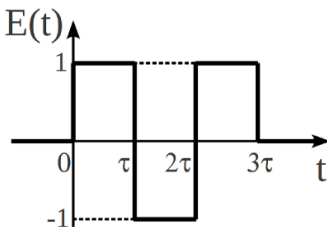
Интенсивность прошедшей волны получим, усреднив E_1^2 по времени:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{c}{4\pi} \langle E_1^2 \rangle = \frac{c}{4\pi} (\langle E_x^2 \rangle \cos^2 \varphi + \langle E_y^2 \rangle \sin^2 \varphi + 2\langle E_x E_y \rangle \sin \varphi \cos \varphi) = \\ &= \frac{c}{8\pi} (E_{0x}^2 \cos^2 \varphi + E_{0y}^2 \sin^2 \varphi + 0). \end{aligned}$$

Искомый коэффициент пропускания:

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{E_{0x}^2 \cos^2 \varphi + E_{0y}^2 \sin^2 \varphi}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}.$$

Решение задачи 2



Фурье-образ от одного прямоугольного единичного импульса шириной τ , симметричного относительно оси $t = 0$, равен

$$E_1(\omega) = \frac{\tau}{2} \left(\text{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \right).$$

Фурье-образ от прямоугольного импульса, сдвинутого по времени на t_0 относительно $E_1(t)$, отличается появлением фазового

множителя $e^{i\omega t_0}$. Наш сигнал представляет собой последовательность прямоугольных импульсов, сдвинутых один относительно предыдущего на фазу $\pi + \omega t_0 = \pi + \omega \tau$ (домножение на $e^{i\pi} = -1$ равносильно перемене знака). С учетом того, что первый импульс сдвинут по времени относительно симметричного на $\tau/2$, получаем искомую спектральную мощность:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{\tau}{2} e^{i\tau/2} \left(\operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \right) \sum_{N=1}^3 q^N = \frac{\tau}{2} e^{i\tau/2} \left(\operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \right) \frac{1-q^3}{1-q} = \\ &= \frac{\tau}{2} e^{i\tau/2} \left(\operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \right) \frac{1+e^{3i\omega\tau}}{1+e^{i\omega\tau}}, \end{aligned}$$

где $q = -e^{i\omega\tau}$ – знаменатель геометрической прогрессии. Для модуля $E(\omega)$ получим:

$$|E(\omega)| = \frac{\tau}{2} \left(\operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \right) \cdot \frac{\cos \frac{3\omega\tau}{2}}{\cos \frac{\omega\tau}{2}}.$$

Решение задачи 3

1. Исходим из общего выражения для групповой скорости в волноводе:

$$v_g = \frac{c^2 k_z^*}{\omega^*} = \frac{c \sqrt{\omega^{*2} - \omega_0^2}}{\omega^*} = \frac{c \sqrt{4\omega_0^2 - \omega_0^2}}{2\omega_0} = \frac{\sqrt{3}c}{2}, \quad (1)$$

$$l_0 = v_g \cdot \tau = \frac{\sqrt{3}c}{2} \tau.$$

2. Расплывание волнового пакета определяется двумя факторами: шириной волнового пакета (по \mathbf{k}) и дисперсионными (нелинейными) свойствами среды. В сумме эти факторы приводят к разбросу групповых скоростей внутри пакета. Чтобы установить связь между Δk_z и Δv_g , запишем уравнение (1) в форме

$$\omega v_g = c^2 k_z.$$

Продифференцируем это уравнение по k_z : $\frac{d\omega}{dk_z}v_g + \omega \frac{dv_g}{dk_z} = c^2$.

$$\text{Учтем, что } \frac{d\omega}{dk_z} = v_g : v_g^2 + \omega \frac{dv_g}{dk_z} = c^2 \rightarrow \frac{dv_g}{dk_z} = \frac{c^2 - v_g^2}{\omega}.$$

$$\text{В нашем случае } v_g = \frac{\sqrt{3}c}{2}, \quad \omega = 2\omega_0 = \frac{2\pi c}{a} : \frac{dv_g}{dk_z} = \frac{ac}{8\pi}.$$

Оценку ширины волнового пакета в k -пространстве получаем из соотношения неопределенностей: $\Delta k_z = \frac{\pi}{l_0}$. Тогда имеем:

$$\Delta v_g = \Delta k_z \frac{ac}{8\pi} = \frac{\pi}{l_0} \frac{ac}{8\pi} = \frac{ac}{8l_0}.$$

Удвоению ширины волного пакета (в r -пространстве) соответствует условие $\Delta v_g \cdot T = l_0$, откуда

$$T = \frac{l_0}{\Delta v_g} = \frac{8l_0^2}{ac} = \frac{8 \cdot 3c^2\tau^2}{4ac} = \frac{6c\tau^2}{a}.$$

Примечание. В процессе расплывания волнового пакета Δk_z остается неизменным, поскольку каждая плоская волна, входящая в пакет при $t = \tau$, никуда не исчезает, и, с другой стороны, никакая плоская волна, которой не было в пакете при $t = \tau$, не может возникнуть при $t > \tau$. Следовательно, Δv_g является неизменным в процессе расплывания пакета.

Решение задачи 4

Способ 1 (через матричный формализм).

Сначала запишем в матричном виде закон преобразования луча при преломлении на сферической границе раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Отражение удобно формально рассматривать как преломление на границе со средой с показателем преломления $n_2 = -n_1 = -1$. Тогда преобразование луча при отражении описывается матричным равенством:

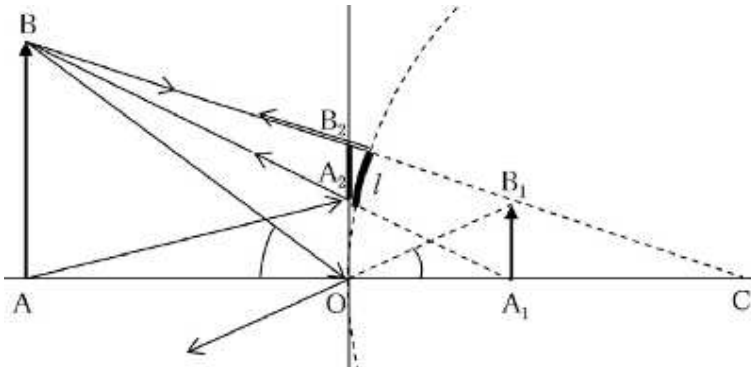
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Теперь применим стандартные формулы для коэффициента увеличения K и расстояния d_2 от зеркала (от главной плоскости) до изображения:

$$\frac{1}{K} = m_{21} \frac{d}{n_1} + m_{22} = \frac{2d}{R} + 1 = \frac{AB}{A_1B_1},$$

$$OA_1 = d_2 = -n_2 \frac{m_{11}d + m_{12}n_1}{m_{21}d + m_{22}n_1} = \frac{d}{2d/R + 1} > 0,$$

т. е. изображение находится за зеркалом (мнимое).



В оптимальном положении концы дуги l лежат на сторонах BA_1 и BB_1 треугольника A_1BB_1 . С учетом параксиального приближения можно составить пропорцию (дуга l “выпрямлена” в

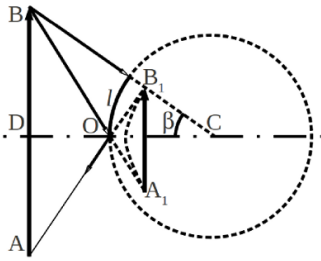
вертикально ориентированный отрезок A_2B_2 – см. рисунок):

$$\begin{aligned} \frac{d}{l} &= \frac{d+d_2}{A_1B_1} = \frac{(d+d_2)d}{Hd_2} = \frac{d}{H} \left(\frac{d}{d_2} + 1 \right) = \frac{d}{H} (2d/R + 1 + 1) = \\ &= \frac{2d}{H} (d/R + 1). \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$d = R \left(\frac{H}{2l} - 1 \right).$$

Способ 2 (через построение изображения).



Построим изображение B_1 точки B . Оно находится на пересечении двух лучей, исходящих из B : один к центру сферы (он падает по нормали к поверхности, следовательно, его продолжение проходит по радиусу), второй – к точке O (в ней нормаль ориентирована горизонтально, поэтому для

продолжения отраженного луча в области за зеркалом имеем $\widehat{B_1OC} = \widehat{BOD}$). В силу симметрии задачи изображение A_1 точки A располагается симметрично точке B_1 относительно оси OC , при этом точка O лежит на прямой A_1B . Если точка D расположена заметно ближе к сфере, чем точки A и B , то ее изображение будет располагаться ближе к сфере (с внутренней стороны), чем изображения точек A и B (в отражении человек будет выглядеть пузатым – пунктирная линия на рисунке).

В оптимальном положении концы дуги l лежат на сторонах BA_1 и BB_1 треугольника A_1BB_1 (см. рисунок). Тогда для угла β , опирающегося на дугу l , имеем:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{l}{R}, \\ BD &= CD \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

С учетом $BD = \frac{H}{2}$ и $CD = d + R$ получим:

$$d = \frac{H}{2} \operatorname{ctg} \frac{l}{R} - R. \quad (1)$$

Отсюда можно определить минимальный размер зеркального участка, при котором человек увидит себя в полный рост, подойдя вплотную к шару (строго говоря, в полный рост он себя не увидит из-за того, что вследствие искривления изображения живот будет заслонять ноги):

$$l_0 = R \operatorname{arctg} \frac{H}{2R}.$$

Для характерных размеров ($H = 170$ см, $R = 4$ см) $l_0 \approx 6$ см (β чуть меньше $\pi/2$).

$$\text{Если } l \ll R, \text{ то } \operatorname{tg} \frac{l}{R} \approx \frac{l}{R} \text{ и } d = R \left(\frac{H}{2l} - 1 \right).$$

Для характерных размеров ($H = 170$ см, $R = 4$ см, $l = 2$ см) $d \approx 166$ см.

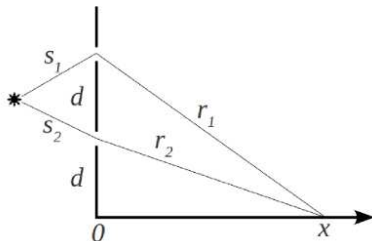
В случае плоского зеркала ($R \rightarrow \infty$) его минимальная высота l , независимо от расстояния d , составляет половину роста H (женщины это хорошо знают).

Заметим, что выражение (1) получено без использования каких-либо приближений. Окончательное выражение получено при условии $l \ll R$. Параксиальное приближение не использовалось ни в том, ни в другом случае.

Решение задачи 5

Определим разность хода лучей в точку с координатой x от двух щелей:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + (2d)^2} \approx x \left(1 + \frac{4d^2}{2x^2} \right) = \\ &= x + \frac{2d^2}{x}, \end{aligned}$$



$$r_2 = \sqrt{x^2 + d^2} \approx x \left(1 + \frac{d^2}{2x^2} \right) = x + \frac{d^2}{2x},$$

$$r_1 - r_2 \approx \frac{2d^2}{x} - \frac{d^2}{2x} = \frac{3d^2}{2x}.$$

Разность фаз волн, приходящих от разных щелей:

$$\Delta\varphi = k\Delta r = \frac{3kd^2}{2x}.$$

Интенсивность интерференционной картины:

$$I(x) = I_0(1 + \cos \Delta\varphi) = I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{3kd^2}{2x} \right) \right).$$

Условие интерференционного максимума:

$$\frac{3kd^2}{2x_m} = 2\pi m \rightarrow x_m = \frac{3d^2}{2m\lambda},$$

$$\text{откуда } \Delta x_m = x_m - x_{m+1} = \frac{3d^2}{2m\lambda} - \frac{3d^2}{2(m+1)\lambda} = \frac{3d^2}{2m(m+1)\lambda}.$$

При этом для выполнения условия $d \ll x_m$ порядок максимума должен лежать в интервале $0 < m \ll \frac{3d}{2\lambda}$.

Решение задачи 6

В соответствии с привычной постановкой задач на схему Юнга предположим, что для каждого из отверстий задана одинаковая спектральная плотность в виде лоренцевского контура. Тогда полная интенсивность получается из заданного распределения интегрированием его по ω в диапазоне от $-\infty$ до ∞ , поскольку элементарное интегрирование дает

$$\frac{I_0\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} = \frac{I_0\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \left[\frac{(\omega - \omega_0)}{\gamma} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = I_0.$$

Для узкого диапазона частот $d\omega$ можно считать источник монохроматическим и когерентным, поэтому суммарная интенсивность на втором экране в схеме Юнга (с учетом того, что разность хода от двух щелей $\delta l = \frac{2d \cdot x}{L}$, а разность фаз $\delta\varphi = \frac{2k \cdot d \cdot x}{L}$) равна

$$\begin{aligned} dI_{\Sigma} &= dI \left(2 + 2 \cos \frac{2\omega dx}{cL} \right) = 2 \left(1 + \cos \frac{2\omega dx}{cL} \right) \frac{dI}{d\omega} d\omega = \\ &= 2 \frac{I_0 \gamma (1 + \cos \frac{2\omega dx}{cL})}{\pi((\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2)} d\omega. \end{aligned}$$

Волны с разными частотами являются по отношению друг к другу некогерентными. Поэтому интенсивность в точке второго экрана с учетом полного спектра описывается интегралом по всем частотам:

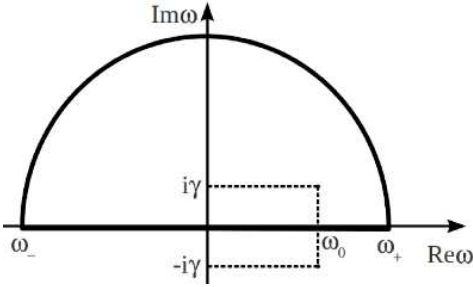
$$I(x) = 2 \frac{I_0 \gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \cos \left(\frac{2\omega dx}{cL} \right)}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega.$$

Разобьем интеграл на две части и с учетом записанного выше получим:

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \left(\frac{2\omega dx}{cL} \right)}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega \right].$$

Интеграл будем вычислять методом вычетов. Для этого заменим в числителе подынтегрального выражения $\cos(\beta\omega)$ на экспоненту $\exp(i\beta\omega)$, а в полученном интеграле возьмем действительную часть, т. е.

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \frac{\gamma}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left(\frac{2\omega dx}{cL} i \right)}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega \right].$$



Контур интегрирования (для интеграла в квадратных скобках) выберем в виде полуокружности с диаметром вдоль оси $\text{Re}(\omega)$ и дугой, на которой интеграл обратится в нуль при $|\omega| \rightarrow \infty$. Для нашей подынтегральной функции условие

на дуге выполняется в верхней полуплоскости. Сделав замену переменных $z = \omega - \omega_0$, представим интеграл в виде контурного интеграла в комплексной плоскости (введено обозначение $\varkappa = \frac{2dx}{cL}$)*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \varkappa \omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega = \text{Re} \left\{ e^{i\varkappa \omega_0} \int_C \frac{e^{i\varkappa z}}{z^2 + \gamma^2} dz \right\}.$$

Подынтегральная функция как функция комплексного аргумента z имеет полюсы в точках $z = \pm i\gamma$. Внутри выбранного контура лежит только один полюс $z = i\gamma$. По теореме о вычетах интеграл по контуру равен

$$\int_C \frac{e^{i\varkappa z}}{(z)^2 + \gamma^2} dz = 2\pi i \text{Res}(i\gamma).$$

Вычет подынтегральной функции вычисляется известным способом:

$$\text{Res} \left(\frac{f(z)}{\psi(z)} \right)_{i\gamma} = \frac{f(i\gamma)}{\psi'(i\gamma)} = \frac{e^{-\gamma \varkappa}}{2i\gamma}.$$

*Кстати, именно этот интеграл приводится в качестве 1-го примера использования вычетов при вычислении интегралов в книге [5], гл. V, п. 2 и называется он интегралом Лапласа.

Подставляя полученное значение интеграла в выражение для интенсивности, получим:

$$I(x) = 2I_0(1 + e^{-\varkappa\gamma} \cos \varkappa\omega_0).$$

Видность интерференционной картины:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

Поскольку очевидно, что максимуму интенсивности соответствует $\cos = 1$, а минимуму $\cos = -1$, то видность равна

$$V = e^{-\varkappa\gamma} = e^{-\frac{2d\gamma x}{cL}}$$

и падает в e раз при $\varkappa\gamma = \frac{2d\gamma x}{cL} = 1$, т. е. при $x = \frac{cL}{2\gamma d}$. Поэтому характерный размер интерференционной картины $\Delta x = \frac{cL}{\gamma d}$.

Подобный результат можно получить и с помощью оценки, поскольку временная длительность импульса τ связана с шириной спектра (в частотной области $\delta\omega$) соотношением неопределенностей $\delta\omega\tau \sim 2\pi$, $\tau \sim 2\pi/\delta\omega$. В нашем случае легко увидеть, что полуширина импульса $\delta\omega = 2\gamma$. Тогда пространственная длина импульса (продольная длина когерентности) $l_{\parallel} = \tau c$. Интерференционная картина видна до тех пор, пока разность хода не сравняется с пространственной длиной когерентности, а следовательно, область, в которой интерференционная картина будет видна, определяется соотношением

$$\Delta x = \frac{Lc\pi}{2d\gamma},$$

что в смысле оценки не отличается от полученной выше формулы.

Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1

Согласно принципу Бабины, искомое поле $E(b)$ в сумме с полем $E_{\text{дЭ}}(b)$ за дополнительным экраном дает поле $E_0(b)$ падающей волны. Отсюда

$$E(b) = E_0(b) - E_{\text{дЭ}}(b).$$

Дополнительным в нашем случае является экран с отверстием в виде двух полудисков. Поле $E_{\text{дЭ}}(b)$ выражается интегралом Кирхгофа:

$$\begin{aligned} E_{\text{дЭ}}(b) &= \frac{1}{\lambda i} \int_{\text{дЭ}} \frac{E_0 e^{ikr}}{r} \cos \psi dS \approx \frac{e^{ikb}}{b\lambda i} \int_{\text{дЭ}} E_0 e^{ik\rho^2/2b} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{\pi e^{ikb}}{b\lambda i} \left(\int_{\rho=0}^R E_0 e^{ik\rho^2/2b} \rho d\rho + \int_{\rho=0}^x E_0 e^{ik\rho^2/2b} \rho d\rho \right) = \\ &= \frac{E_0 e^{ikb} b\pi}{bik\lambda i} \left(e^{ik\rho^2/2b} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} + e^{ik\rho^2/2b} \Big|_{\rho=0}^{\rho=x} \right) = \\ &= -\frac{E_0 e^{ikb}}{2} \left(e^{\frac{ikR^2}{2b}} - 1 + e^{\frac{ikx^2}{2b}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Учтем, что $E_0(b) = E_0 e^{ikb}$. Тогда для $E(b)$ получим:

$$E(b) = E_0 e^{ikb} \left(1 - \frac{2}{2} + e^{\frac{ikR^2}{2b}} + e^{\frac{ikx^2}{2b}} \right) = E_0 e^{ikb} \left(e^{\frac{ikR^2}{2b}} + e^{\frac{ikx^2}{2b}} \right). \quad (1)$$

Сумма в скобках равна нулю, если фазы в экспонентах отличаются на $(2m+1)\pi$:

$$\frac{kx^2}{2b} - \frac{kR^2}{2b} = (2m+1)\pi, \text{ откуда}$$

$$x^2 = R^2 + \frac{2b(2m+1)\pi}{k} = R^2 + (2m+1)b\lambda.$$

Минимальному радиусу полудиска отвечает $m = 0$:

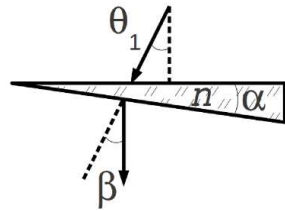
$$x = \sqrt{R^2 + b\lambda}.$$

Примечание. Если $x = R$, то в уравнении (1) справа фазы в экспонентах совпадают и в середине тени от диска возникает светлое пятно (пятно Пуассона). Для этого диаметр диска должен быть достаточно малым, чтобы выполнялось приближение дифракции Френеля.

Решение задачи 2

Если бы клина не было, то главный максимум 1-го порядка наблюдался бы под углом

$$\theta_1 = \pm\lambda/d. \quad (1)$$



Клин отклоняет падающий на него луч на угол $\beta = (n - 1)\alpha$ (см., например, задачу 3.16 из сборника [2]). Тогда условие на угол α принимает вид

$$\beta - \theta_1 = 0, \text{ откуда } \alpha = \frac{\lambda}{d(n - 1)}.$$

Примечание. Строго говоря, максимум 1-го порядка будет наблюдаться под двумя углами: второй угол возникает от симметричного максимума для решетки без клина (ему соответствует знак “+” в формуле (1)) и равен $\beta = 2\theta_1 = 2\lambda/d$.

Решение задачи 3

Обозначим за r расстояние от 2-го диполя до точки наблюдения, расположенной под углом θ . В волновой зоне ($r \gg \lambda$) напря-

женности электрического поля от каждого диполя равны:

$$E_1(r) = E_{01}(r) e^{i(k(r + \frac{2\lambda}{3} \sin \theta) - \omega t)} = E_0 e^{i(kr + \frac{4\pi}{3} \sin \theta - \omega t)},$$

$$E_3(r) = E_{03}(r) e^{i(k(r - \frac{2\lambda}{3} \sin \theta) - \omega t)} = E_0 e^{i(kr - \frac{4\pi}{3} \sin \theta - \omega t)},$$

$$E_2(r) = E_{02}(r) e^{i(kr + \phi - \omega t)},$$

где предэкспоненциальные множители $E_{0i}(r) = \frac{\text{const}}{r_i} \approx E_0$ можно считать одинаковыми для всех трех источников.

Излучение диполя с фиксированной ориентацией линейно поляризовано, поэтому в точке наблюдения $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{E}_2 \parallel \mathbf{E}_3$ и абсолютная величина поля равна сумме соответствующих комплексов:

$$\begin{aligned} E(r) &= E_1(r) + E_2(r) + E_3(r) = \\ &= E_0 e^{i(kr - \omega t)} \left(e^{i\phi} + e^{-i\frac{4\pi}{3} \sin \theta} + e^{i\frac{4\pi}{3} \sin \theta} \right) = \\ &= E_0 e^{i(kr - \omega t)} \left(e^{i\phi} + 2 \cos \left(\frac{4\pi}{3} \sin \theta \right) \right). \end{aligned}$$

При θ таких, что $\sin \theta > 3/8$, модуль напряженности поля достигает максимума по ϕ при $\phi = \pi$. В направлении $\theta = \pi/6$ имеем:

$$|E(r)| = |-1 + 2 \cos(2\pi/3)| \cdot E_0 = 2E_0.$$

Интенсивность излучения антенны в элемент телесного угла $d\Omega$:

$$dI \sim EE^* r^2 d\Omega \sim 4|E_0|^2 \sim 4I_0.$$

Решение задачи 4

Если шарики не соединены, то в них наводятся одинаковые дипольные моменты, рассчитываемые, как в однородном поле. Дипольный момент системы равен

$$d_1 = Ea^3 + Ea^3 = 2Ea^3.$$

Когда шарики соединены проводником, то на них собираются противоположные заряды. Разность потенциалов между шариками можно выразить, используя принцип суперпозиции:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{a} - \frac{q}{s} - \left(-\frac{q}{a}\right) - E \cdot s \approx 2\frac{q}{a} - E \cdot s.$$

С другой стороны, $\Delta\varphi = 0$, откуда $q = \frac{Eas}{2}$, а дипольный момент системы

$$d_2 = \frac{Eas^2}{2}.$$

Дипольные моменты параллельны x , поэтому в обоих случаях интенсивность дипольного излучения в направлении, противоположном z , пропорциональна d^2 с одним и тем же коэффициентом. Тогда

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{E^2 a^2 s^4}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2 E^2 a^6} = \frac{1}{16} \left(\frac{s}{a}\right)^4.$$

Решение задачи 5

Компоненты 4-вектора полного тока J^i в лабораторной и J'^i в собственной системах отсчета связаны преобразованием Лоренца:

$$\begin{pmatrix} c\kappa \\ J \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\kappa' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c\kappa' \\ \gamma\beta c\kappa' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \gamma\beta c\kappa' = \gamma u\kappa', \quad \kappa = \gamma\kappa'.$$

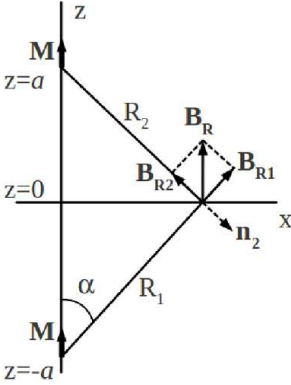
В лабораторной системе отсчета получаем прямой провод с током $\gamma v\kappa'$ и линейной плотностью заряда $\gamma\kappa'$. Соответствующие электрическое и магнитное поля в лабораторной системе:

$$E = 2\frac{\kappa}{r}, \quad H = \frac{2J}{cr}.$$

Сила, действующая на заряд q , равна $F = q \left(E - \frac{v}{c} H \right)$ и при положительных q и \varkappa направлена к цилиндру перпендикулярно его оси. Подставив сюда предыдущие выражения, получим:

$$F = 2 \frac{q \varkappa'}{r} \frac{1 - uv/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Решение задачи 6



Магнитное поле на оси x образовано двумя магнитными диполями с магнитным моментом $\mathbf{M} = \frac{\pi r_0^2 I}{c} \mathbf{e}_z$ каждый:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{\mathbf{M}_i}{R_i^3} + \frac{3(\mathbf{M}_i \mathbf{R}_i) \mathbf{R}_i}{R_i^5} \right) = \\ &= 2\mathbf{e}_z \cdot \left(-\frac{M}{R^3} + \frac{3M \cos^2 \alpha}{R^3} \right) = \\ &= 2\mathbf{e}_z \cdot \frac{M}{R^3} \left(\frac{3a^2}{R^2} - 1 \right) = \\ &= 2\mathbf{e}_z \cdot M \left(\frac{3a^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right). \end{aligned}$$

На рисунке показано слагаемое $\sum_{i=1}^2 \frac{3(\mathbf{M}_i \mathbf{R}_i) \mathbf{R}_i}{R_i^5}$, обозначенное \mathbf{B}_R . Максимальное значение магнитного поля достигается при $R = a$:

$$\mathbf{B}_{max} = 2\mathbf{e}_z \cdot M \left(\frac{3a^2}{a^5} - \frac{1}{a^3} \right) = \frac{4M}{a^3} \mathbf{e}_z.$$

Мощность излучения релятивистской частицы в лабораторной системе описывается формулой

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2cr_e^2}{3} \gamma^2 (\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}])^2 = \frac{2cr_e^2}{3} \gamma^2 \beta^2 B^2,$$

где $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$ – классический радиус заряженной частицы. Полные потери энергии на излучении равны

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2cr_e^2\gamma^2\beta^2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} B^2 dt.$$

С учетом $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \ll \gamma mc^2$ можно принять $dt \approx \frac{dx}{v}$ и перейти к интегрированию по координате:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2cr_e^2\gamma^2\beta^2}{3v} \int_{-\infty}^{\infty} B^2 dx.$$

Магнитное поле быстро убывает с расстоянием. Это позволяет воспользоваться оценкой

$$\int_{-\infty}^{\infty} B^2 dx \approx B_{max}^2 \cdot \Delta x = \frac{16M^2}{a^6} a = \frac{16M^2}{a^5},$$

где $\Delta x = a$ – характерный размер области действия поля. Тогда

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2cr_e^2\gamma^2\beta^2}{3v} \frac{16M^2}{a^5} = \frac{32r_e^2\gamma^2\beta M^2}{3a^5}.$$

Для сравнения приведем точное решение:

$$B^2 = 4M^2 \left(\frac{3a^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right)^2 = 4M^2 \left(\frac{1}{R^6} - \frac{6a^2}{R^8} + \frac{9a^4}{R^{10}} \right).$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \frac{2cr_e^2\gamma^2\beta^2}{3v} 4M^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{R^6} - \frac{6a^2}{R^8} + \frac{9a^4}{R^{10}} \right) dx = \\ &= \frac{8\beta(r_e\gamma M)^2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{R^6} - \frac{6a^2}{R^8} + \frac{9a^4}{R^{10}} \right) dx. \end{aligned}$$

Удобно перейти к интегрированию по углу:

$$dx = d(a \operatorname{tg} \alpha) = a \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Учтем, что $\frac{a}{R} = \cos \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \frac{8\beta(r_e \gamma M)^2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos^6 \alpha}{a^6} - \frac{6 \cos^8 \alpha}{a^6} + \frac{9 \cos^{10} \alpha}{a^6} \right) \frac{a d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{8\beta(r_e \gamma M)^2}{3a^5} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^4 \alpha - 6 \cos^6 \alpha + 9 \cos^8 \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла потребуется несколько раз воспользоваться формулой понижения степени $\cos^2 \phi = \frac{1+\cos 2\phi}{2}$. Опуская громоздкие выкладки, получим:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^4 \alpha - 6 \cos^6 \alpha + 9 \cos^8 \alpha) d\alpha = \frac{123\pi}{128},$$

$$\text{откуда } \Delta \mathcal{E} = \frac{41\pi\beta(r_e \gamma M)^2}{16a^5}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 1. Электродинамика частиц и полей. 37, 39, 48, 52, 98, 102, 103, 120, 147, 156
2. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2. Электродинамика частиц и волн. 61, 171
3. Яковлев В. И. Классическая электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 2. Электромагнитные волны. 62, 99
4. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950. 104
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 168

Учебное издание

Яковлев Валериан Иванович, **Погосов** Артур Григорьевич,
Синицкий Станислав Леонидович,
Богомягков Антон Викторович,
Брагинский Леонид Семенович,
Володин Владимир Алексеевич,
Зайцев Александр Васильевич, **Захаров** Михаил Иванович,
Калинин Петр Валерьевич,
Котельникова Мария Станиславовна,
Максимов Дмитрий Александрович,
Ненашев Алексей Владимирович, **Новиков** Павел Леонидович,
Рева Владимир Борисович, **Степанов** Василий Дмитриевич,
Хазин Борис Исаакович, **Черкасский** Валерий Семенович,
Шушаков Олег Алексеевич

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ
ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
2007–2012 гг.**

Учебное пособие

Редактор *Е. П. Войтенко*
Оригинал-макет *П. Л. Новикова*

Подписано в печать 19.03.2013 г.
Формат 60×84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 11. Усл. печ. л. 10,23. Тираж 200 экз.

Заказ №68
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск 90, ул. Пирогова, 2.