ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Лектор — Наталья Борисовна Аюпова

Программа курса лекций
(5-й семестр, лекции 32 ч., семинары 34 ч., диф. зач.)

§ 1. **Ортогональные тензоры в геометрии и механике** (4 лекции)

Понятие ортогонального тензора, его преобразование при переходе к новой системе координат, основные операции (сложение. произведение, свертка). Символы Кронекера и Леви–Чивиты в ортонормированном базисе. Теория определителей и векторная алгебра в тензорном изложении. Приведение тензора к главным осям. Тензор момента инерции как пример ортогонального тензора.

§ 2. **Тензорная алгебра** (3 лекции)

Неортогональные базисы. Системы координат и координаты вектора (ковариантные и контравариантные). Градиент вектора как пример ковариантного вектора. Примеры математических объектов, изменяющихся по «тензорному» закону (линейные функционалы, квадратичные формы, линейные операторы), общее определение тензора. Операции над тензорами: сложение, произведение, свертка, симметрирование, альтернирование. Теорема сокращения. Инвариант. Скалярное произведение и фундаментальный тензор. Поднимание и опускание индексов. Символы Кронекера и Леви–Чивиты в произвольном базисе (векторная алгебра в неортогональном базисе). Пространство-время Минковского Тензоры в псевдоэвклидовом пространстве и 4-векторы в пространстве-времени Минковского. Тензор как полилинейная форма.

§ 3. **Тензорные поля** (5 лекций)

Криволинейные системы координат. Локальный базис. Коэффициенты Ламе. Координатная запись векторного поля в локальном базисе. Примеры полярная, сферическая, цилиндрическая и эллиптическая системы координат. Запись градиента, ротора, дивергенции и лапласиана в криволинейных координатах. Дивергенция как инвариант.

Метрический тензор в криволинейных координатах. Поднятие и опускание индексов в криволинейных координатах. Понятие геодезической. Символы Кристоффеля I и II рода. Понятие ковариантной производной. Запись уравнений механики сплошной среды в тензорном виде. Понятие тензора Римана–Кристоффеля.

§ 4. **Основы теории поверхностей в тензорном изложении** (2 лекции)

Поверхность в эвклидовом пространстве. Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление длины кривой и площади области на поверхности. Кривизна кривой и кручение пространственной кривой. Кривизна кривой на поверхности. Нормальное сечение поверхности. Формула Эйлера для кривизны нормального сечения. Главная кривизна. Гауссова и средняя кривизна поверхности. Гауссово отображение поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Гауссова и средняя кривизны как ее инвариант. Геодезическая как кратчайшая траектория движения точки по поверхности. Параллельный перенос. Ковариантное дифференцирование.

Программу курса
«Векторный и тензорный анализ»
составила к.ф.-м.н. Н. Б. Аюпова

Литература.

1. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1961.

2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Изд-во техн.-теор. лит-ры, 1953.

3. Аюпова Н.Б. Лекции по векторному и тензорному анализу. Новосибирск: НГУ, 2012. 94 с.
http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/Ayupova_Tensor_lections.pdf

4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1980.

5. Топоногов В.А. Тензорная алгебра и тензорный анализ. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1995.
http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/Toponogov.pdf

6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1979.

7. Сокольников И.С. Тензорный анализ: Теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред. М., КомКнига, 2007.

8. Кованцов Н.И., Зражевская Г.М., Кочаровский В.Г., Михайловский В.И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. Киев, Вища школа, 1989.

9. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Наука, 1987.

Задание 1.
(Сдать к 13 октября)

1. Тензор $\mathbf{P}$ и вектор $\mathbf{a}$ заданы равенствами

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (1, 2, 3)$$

Вычислить $\mathbf{a} \otimes \mathbf{P}$, $\mathbf{P} \otimes \mathbf{a}$.

2. Тензор задан в базисе $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Записать тензор P в базисе $\mathbf{e}'$, где $\mathbf{e}' = A\mathbf{e}$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

3. Записать тензор

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

в главных осях.

4. Тензор моментов инерции системы задан соотношениями

$$\begin{pmatrix} 2a^2(m+M) & 2a^2(m-M) & 0 \\ 2a^2(m-M) & 2a^2(m+M) & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix}$$

Найти инварианты тензора. Записать тензор в главных осях.

5. Пусть A — невырожденное преобразование. Доказать, что если

$$A(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = A\mathbf{x} \times A\mathbf{y},$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ произвольные вектора то A — ортогональное преобразование

Задание 2.
(Сдать к 24 ноября)

1. Какие из следующих отображений $T : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ являются тензорами? Если T — тензор, найти его координаты.
а) $T(u,v) = u^1v^1 - 2u^2v^1 + 3u^1v^2 - u^1v^3$;
б) $T(u,v) = u^1u^3 + 2u^2v^1 + 4v^1v^3$;
в) $T(u,v) = (u^1 + u^2)^2 + (v^1 + v^2 - v^3)^2$.

2. Тензоры a_{ij}, b^i_j, c_{ij} имеют такие координаты

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b^1_1 = 1, \quad b^1_2 = 3, \quad b^2_1 = -2, \quad b^2_2 = 2.$$

Вычислить $a_{ij}b^j_k + c_{ik}$

3. Тензор a^{ij}_{kl} задан равенствами

$$a^{11}_{11} = 1, \quad a^{11}_{21} = 2, \quad a^{11}_{12} = 3, \quad a^{11}_{22} = 4,$$

$$a^{21}_{11} = -4, \quad a^{21}_{21} = 3, \quad a^{21}_{12} = -2, \quad a^{21}_{22} = -1,$$

$$a^{12}_{11} = -4, \quad a^{12}_{21} = -3, \quad a^{12}_{12} = -2, \quad a^{12}_{22} = -1,$$

$$a^{22}_{11} = 5, \quad a^{22}_{21} = 6, \quad a^{22}_{12} = 7, \quad a^{22}_{22} = 8.$$

Найти $a^{[ij]}_{kl}$, $a^{ij}_{(kl)}$.

4. В некотором базисе метрический тензор и тензор T_{ij} имеют следующие матрицы координат.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислить $T_{i\cdot}^{\cdot k}$.

5. В аффинной правой системе координат $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ дан метрический тензор

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и заданы векторы $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_3}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$. Вычислить контравариантные компоненты вектора $\mathbf{w}$, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Задание 3.
(Сдать к 15 декабря.)

1. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в точке $(4, 0, \pi/4)$ тензор t_i^j имеет координаты $(t_i^j) = \mathbf{e^1} \otimes \mathbf{e_1} + \mathbf{e^1} \otimes \mathbf{e_2} + 5\mathbf{e^2} \otimes \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e^2} \otimes \mathbf{e_2} + 3\mathbf{e^2} \otimes \mathbf{e_3} + 4\mathbf{e^3} \otimes \mathbf{e_2} + 6\mathbf{e^3} \otimes \mathbf{e_1}$.

   Найти координаты $t_{i'}^{j'}$ в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ связанной с (x^1, x^2, x^3) соотношениями $x^{1'} = x^1$, $x^{2'} = \mathrm{e}^{x^2} \cos x^3$, $x^{3'} = \mathrm{e}^{x^2} \sin x^3$.

2. Вычислить компоненты метрического тензора для трехмерной криволинейной системы координат, связанной с декартовой соотношениями

$$x = -x^3 + \sqrt{(x^3)^2 + x^1}, \quad y = x^2, \quad z = x^3 + \sqrt{(x^3)^2 + x^1},$$

3. Для криволинейной системы координат, связанной с декартовой соотношениями

$$x = \sqrt{uv}, \quad y = \sqrt{\frac{v}{u}}$$

   вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{i,jk}$.

4. Тензор T имеет компоненты:

$$T^{1\cdot}_{\cdot 1} = 0, \qquad T^{1\cdot}_{\cdot 2} = x^1 - x^2$$
$$T^{2\cdot}_{\cdot 1} = 2x^1, \qquad T^{2\cdot}_{\cdot 2} = 1$$

   Вычислить $\nabla_1 T$, если $\Gamma^1_{11} = (x^1)^2$; $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = x^1 x^2$; $\Gamma^1_{22} = (x^2)^2$; $\Gamma^2_{11} = 0$; $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{x^1}{x^2}$; $\Gamma^2_{22} = 0$.

5. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и ковариантные компоненты $\mathbf{rot}\,\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = ((x^3)^2, x^2 + x^1, (x^2)^2)$, а координаты $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ связаны с декартовыми соотношениями

$$x = x^1, \quad y = x^2 + \sqrt{(x^2)^2 + x^3}, \quad z = -x^2 + \sqrt{(x^2)^2 + x^3}.$$