*

ИЗЛУЧЕНИЕ. Излучение релятивистской частицы

Урок 21

Преобразование полей. Инварианты поля

Контравариантные координаты 4-вектор события $x^i = (x_0, x^1, x^2, x^3)$, $x^i = (ct, x, y, z)$. Декартова система A' движется вдоль оси x', совпадающей с осью x, со скоростью v. Тогда контравариантные координаты вектора события в этих системах связаны преобразованием Лоренца

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \beta = v/c$. Сокращенно это соотношение можно записать $x'^i = \Lambda^i_{.k} x^k$, где по повторяющимся индексам (один из которых вверху, другой расположен внизу) подразумевается суммирование. Иными словами, предыдущая запись означает, что

$$x'^i = \sum_{k=0}^{3} \Lambda^i_{.k} x^k. \tag{2}$$

Матрица обратного преобразования $\Lambda(\beta)^{-1} = \Lambda(-\beta)$.

Контравариантные компоненты некоторых 4-векторов:
потенциал $A^i = (\varphi, A^1, A^2, A^3) = (\varphi, \mathbf{A})$;
ток $j^i = (c\rho, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, \mathbf{j})$;
волновой вектор $k^i = (\frac{\omega}{c}, k^1, k^2, k^3) = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$;
энергия-импульс $p^i = (\frac{\mathcal{E}}{c}, p^1, p^2, p^3)$.

Величина

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

называется метрическим тензором. Контравариантные и ковариантные компоненты метрического вектора связаны соотношением

$$g^{ik} = g_{ik} = g^{-1}_{ik}.$$

Метрический тензор используется для поднятия и опускания индекса

$$A_i = g_{ik}A^k;\ \ A^i = g^{ik}A_k.$$

Скалярное произведение 2-х произвольных 4-векторов a и b есть

$$ab = g_{ik}a^ib^k = a_kb^k = a^ib_i = g^{ik}a_ib_k. \tag{4}$$

Скалярное произведение инвариантно относительно преобразования Лоренца. Интервал

$$(ds)^2 = g_{ik}dx^idx^k = dx_k \cdot dx^k. \tag{5}$$

$$\mathrm{d}s = c\mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2} = c\mathrm{d}t/\gamma = c\mathrm{d}\tau, \tag{6}$$

где τ — собственное время.

Эффект Доплера — преобразование частоты и угла:

$$\begin{aligned} k^i &= \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c}\cos\theta, \frac{\omega}{c}\sin\theta, 0\right), \\ k'^i &= \left(\frac{\omega'}{c}, \frac{\omega'}{c}\cos\theta', \frac{\omega'}{c}\sin\theta', 0\right), \\ k'^i &= \Lambda^i_{.k}k^k. \end{aligned} \tag{7}$$

Преобразование частоты

$$\omega' = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta) = \omega\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8}$$

Аберрация

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}. \tag{9}$$

Продольный эффект Доплера:
$\theta' = 0$ или $\theta' = \pi \Rightarrow \sin\theta' = \sin\theta = 0$.

$$\omega' = \omega\gamma\,(1-\beta) = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \tag{10}$$

Поперечный эффект Доплера:
$\theta' = \pi/2$, тогда

$$\omega' = \gamma\left(1-\beta^2\right)\omega = \frac{\omega}{\gamma} = \omega\sqrt{1-\beta^2}. \tag{11}$$

4-вектор скорости[1]

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\left(c, \mathbf{v}\right) = \gamma c(1, \beta). \tag{12}$$

4-вектор ускорения

$$a^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \gamma^2\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = \gamma^2(0, \mathbf{a}); \;\; u_i a^i = 0. \tag{13}$$

Свободная релятивистская частица.
Импульс $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, энергия $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc^2$, $\frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}$, $\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.

Заряженная релятивистская частица. Сила Лоренца

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{vH}], \;\; \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \;\; \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{14}$$

Уравнение движения заряженной релятивистской частицы в электромагнитном поле в ковариантном виде

$$m\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \frac{q}{c}F^{ik}u_k. \tag{15}$$

Контравариантные компоненты тензора электромагнитного поля имеют вид

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}. \tag{16}$$

F^{ik} — антисимметричный тензор, $F^{ik} = -F^{ki}$:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -H_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Преобразование Лоренца для F^{ik}:

$$F'^{ik} = \Lambda^i_{.m}\Lambda^k_{.n}F^{mn}. \tag{18}$$

Преобразование полей

$$\begin{array}{rclrcl} H_x & = & H_x{}', & E_x & = & E_x{}', \\ H_y & = & \gamma(H_y{}' - \beta E_z{}'), & E_y & = & \gamma(E_y{}' + \beta H_z{}'), \\ H_z & = & \gamma(H_z{}' + \beta E_y{}'), & E_z & = & \gamma(E_z{}' - \beta H_y{}'). \end{array} \tag{19}$$

[1] В некоторых учебниках, в частности в «Теории поля» Ландау Л.Д. при определении 4-вектора скорости используется безразмерное определение $u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \gamma\left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) = \gamma(1, \beta)$.

Иногда эти формулы удобнее записать не в $x-y-z$ координатах, а в терминах параллельных (вектору скорости) и перпендикулярных компонент. Тогда

$$\mathbf{E}_{\|} = \mathbf{E}'_{\|},\ \mathbf{E}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}'_{\perp} - [\beta \times \mathbf{H}'_{\perp}]\right),$$
$$\mathbf{H}_{\|} = \mathbf{H}'_{\|},\ \mathbf{H}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{H}'_{\perp} + [\beta \times \mathbf{E}'_{\perp}]\right).$$

Инварианты поля:

1. $F_{ik}F^{ik} = -2E^2 + 2H^2 = \mathrm{inv} \Rightarrow E^2 - H^2 = \mathrm{inv}\,.$
2. $F_{ik}\tilde{F}^{ik} = 4\mathbf{EH} = \mathrm{inv} \Rightarrow \mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = \mathrm{inv}\,.$

Система уравнений Максвелла в вакууме в ковариантной форме :

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{20}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{21}$$

Излученный 4-импульс:

$$\Delta p^i = -\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^5}\int \left(F_{kl}u^l\right)\left(F^{km}u_m\right)\mathrm{d}x^i, \tag{22}$$

в частности, излученная энергия

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\right\}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1 - v^2/c^2}\mathrm{d}t. \tag{23}$$

Торможение излучением нерелятивистской частицы

$$\mathbf{F} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}},$$

для ультрарелятивистской частицы

$$\mathbf{F} = -\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}\beta\gamma^2\left|\mathbf{E}_{\perp} + [\beta\times\mathbf{H}]\right|^2.$$

4.1. (Задача 5.1.) Оси координат двух инерциальных систем отсчета параллельны между собой, относительная скорость систем направлена вдоль оси X, и при $t = t' = 0$ начала координат O и O' совпадают. Используя известные формулы преобразования Лоренца координат и времени для этих систем, найти матрицу $\Lambda^i_{.k}$ такую, что $x'^i = \Lambda^i_{.k} x^k$ [2].

Решение В соответствии с правилами преобразования координат и времени при переходе из лабораторной системы координат в движущуюся

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t - \frac{\beta}{c} x, \\ x' &= \gamma x - c\gamma\beta t, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned}$$

где введены условные обозначения

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Эти преобразования можно записать в матричном виде

$$x'^i = \Lambda^i_{.k} x^k,$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

если матрица Λ имеет вид

$$\Lambda^i_{.k} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. (Задача 5.2.) Используя матрицу $\Lambda^i_{.k}$ преобразований Лоренца, найденную в предыдущей задаче, записать формулы преобразования для следующих 4-векторов: $P^i = (\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p})$ (4-вектор энергии-импульса), $k^i = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ (волновой 4-вектор), $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$ (4-вектор потенциала), $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$ (4-вектор плотности тока).

---

[2] Иногда используется другое определение 4-вектора: $x_i = (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (\mathbf{r}, ict)$. Мнимая единица $i = \sqrt{-1}$, фигурирующая в определении компоненты $x_4 = ict$, физического смысла не несет и позволяет, используя стандартное определение скалярного произведения, получить правильные знаки получающихся выражений. При этом необходимо иначе определить матрицу Λ_{ik}.

Решение Любой из перечисленных далее векторов

$$P^i = \left\{\frac{\varepsilon}{c}, \mathbf{p}\right\},$$
$$k^i = \left\{\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right\},$$
$$A^i = \{\varphi, \mathbf{A}\},$$
$$j^i = \{c\rho, \mathbf{j}\}$$

преобразуется по правилу

$$A'^i = \Lambda^i_{.k} A^k.$$

При необходимости выразить компоненты вектора в лабораторной системе координат через компоненты вектора в собственной системе отсчета можно использовать очевидное свойство матрицы Λ

$$\Lambda^{-1} = \Lambda(-\beta),$$

т.е.

$$A^0 = \gamma\left(A'^0 + \beta A'^1\right),$$
$$A^1 = \gamma\left(\beta A'^0 + A'^1\right),$$
$$A^2 = A'^2,$$
$$A^3 = A'^3,$$

где A^i — любой из данных векторов.

4.3. (Задача 5.4.) Точечный заряд q покоится в системе K' в точке $\mathbf{r}' = (x', y'z')$. Система K' движется относительно K со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль оси X. Найти: а) скалярный и векторный потенциалы в системе K; б) электрическое и магнитное поля, используя найденные значения потенциалов. Установить связь между значениями полей в системах K' и K.

Решение В системе K заряд покоится и, следовательно, мы имеем кулоновское статическое поле, для которого

$$\varphi' = \frac{q}{R'} = \frac{q}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}, \ \mathbf{A}' = 0.$$

Преобразование потенциалов имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\varphi = \gamma\varphi', \;\; A_x = \beta\gamma\varphi', \;\; A_y = A_z = 0.$$

При этом следует иметь в виду, что при переходе из одной системы координат в другую необходимо в функциональной зависимости подставить вместо независимых переменных $\{ct', \mathbf{r}'\}$ преобразованные величины $\{ct, \mathbf{r}\}$. Тогда получаем

$$\varphi = \gamma\frac{q}{R'} = \gamma\frac{q}{\sqrt{\gamma^2\left(x - vt\right)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{\sqrt{\left(x - vt\right)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2}}} = \frac{q}{R^*},$$

$$A_x = \beta\frac{q}{R^*},$$

где

$$\mathbf{R}^* = \left\{x - vt, \frac{y}{\gamma}, \frac{z}{\gamma}\right\},$$

$$R^* = \sqrt{\left(x - vt\right)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2}}.$$

Электрическое поле в лабораторной системе координат выражается формулой

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi.$$

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial R^*}\frac{\partial R^*}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial R^*}\frac{\partial R^*}{\partial x} = -\frac{\beta}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial R^*}\frac{\partial R^*}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial R^*}\frac{\partial R^*}{\partial x} = \\ &= -\frac{\partial\varphi}{\partial R^*}\left[\frac{\beta}{c}\frac{\partial R^*}{\partial t} + \frac{\partial R^*}{\partial x}\right] = \frac{q}{R^{*2}}\left\{\frac{\beta}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{2\left(x - vt\right)}{R^*}\left(-v\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{2\left(x - vt\right)}{R^*}\right)\right\} = \\ &= \frac{q}{R^{*2}}\frac{1}{R^*}\left\{\left(x - vt\right)\left(1 - \beta^2\right)\right\} = \frac{q\mathbf{R}^*_x}{\gamma^2 R^{*3}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial R^*}\frac{\partial R^*}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\gamma}q}{\gamma R^{*3}}, \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial R^*}\frac{\partial R^*}{\partial z} = \frac{\frac{z}{\gamma}q}{\gamma R^{*3}}, \\ \mathbf{H} &= \left[\beta\times\mathbf{E}\right].\end{aligned}$$

4.4. Используя закон преобразования 4-вектора $\{\omega/c, \mathbf{k}\}$ найти формулы для релятивистского эффекта Доплера.

Решение Пусть источник покоится в лабораторной системе отсчета и излучает с частотой ω, а его волновой вектор имеет отличную от нуля компоненту $k_x = -\omega/c$ в системе K, наблюдатель движется навстречу источнику со скоростью v вдоль оси x (поэтому у вектора k_x отрицательный знак. Тогда преобразование 4-вектора $\{\omega/c, \mathbf{k}\}$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\frac{\omega}{c} - \beta\gamma k_x = \gamma\frac{\omega}{c}(1+\beta).$$

Продольный эффект Доплера имеет нерелятивистский предел при $\beta = v/c$
$ll1$

$$\omega' \approx \omega(1+\beta).$$

Он наблюдается не только с электромагнитными волнами, но и, например, звуковыми. Гудок движущегося навстречу наблюдателю паровоза имеет более высокую частоту, а при удалении от наблюдателя — более низкую. Рассмотрим теперь поперечный эффект Доплера. При этом у источника $k_x = 0, k_y\omega/c$. Тогда

$$\omega' = \gamma\omega.$$

Из полученного результата видно, что это эффект сугубо релятивистский, поскольку при разложении γ по степеням β мы получим квадратичную поправку.

$$\omega' \approx \omega\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right).$$

4.5. С какой скоростью должен ехать автомобилист, чтобы спутать красный светофор с зеленым (анекдот о Вуде)? Считать, что длина красного света $\lambda_{\text{кр}} = 6,6 \cdot 10^{-7}$м, а зеленого $\lambda_{\text{зел}} = 5,1 \cdot 10^{-7}$м.

Решение В соответствие с предыдущей задачей

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1=\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Возводя в квадрат обе части уравнения и перенося члены с β в одну сторону, получим

$$\beta = \frac{(\omega'/\omega)^2 - 1}{(\omega'/\omega)^2 + 1} = \frac{0,675}{2,675} \approx 0,25.$$

Таким образом Вуд (по его же собственному утверждению) ехал со скоростью $v = 0,25\,c \approx 7,5 \cdot 10^4$км/с и, следовательно, должен был быть оштрафован не за переезд на красный свет, а за превышение скорости.