Занятие 26

Функции Бесселя.
Разложение в ряды Фурье-Бесселя.

Рассмотрим уравнение

$$xy''(x) + y'(x) + xy = 0 \tag{26.1}$$

Это уравнение можно также записать в виде $x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y = 0$, из которого видно, что точка $x = 0$ является регулярной особой точкой. Определяющее уравнение $\lambda(\lambda - 1) + \lambda = 0$ имеет кратный корень $\lambda = 0$.

Такой случай мы не рассматривали на прошлом занятии и у нас нет общих утверждений о виде решений. Попробуем все же искать решение в виде степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

Подставляя его в уравнение, получим $c_1 = 0$, $c_0 + 4c_2 = 0$ и далее $k^2 c_k + c_{k-2} = 0$ для $k \geqslant 2$. Из этих соотношений следует, что $c_{2m-1} = 0$ для всех $m \geqslant 1$, а $c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}(m!)^2}$

Если положить $c_0 = 1$, то мы получим решение уравнения (26.1) в виде степенного ряда. Эта функция так часто встречается в различных приложениях, что имеет смысл дать ей название и специальное обозначение. Итак, функция

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{26.2}$$

называется функцией Бесселя нулевого порядка. Ряд (26.2), определяющий эту функцию, сходится при всех x. Нет никакой необходимости запоминать разложение (26.2), достаточно твердо усвоить, что уравнение Бесселя (26.1) имеет одно решение в виде степенного ряда, и это решение называется функцией Бесселя нулевого порядка.

Из проведенной выше выкладки следует, что второго решения в виде ряда мы найти не сможем. Поэтому для построения ФСР снова воспользуемся формулой Лиувилля. Из уравнения $\frac{dW}{dx} = -\frac{W}{x}$ получаем $W = \frac{B}{x}$. Тогда второе частное решение можно определить из формулы

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{B}{xJ_0^2(x)} \tag{26.3}$$

Заметим, что $J_0(0) = 1$, поэтому $\frac{1}{J_0^2(x)} = 1 + a_1 x + \ldots$ и правая часть уравнения (26.3) имеет вид $\frac{B}{x} + Ba_1 + \ldots$ (обозначенные точками слагаемые представляют собой некоторый степенной ряд). Интегрируя (26.3), получим

$$y_2(x) = J_0(x)(B \ln|x| + \ldots).$$

Таким образом, второе решение уравнения (26.1) имеет логарифмическую особенность. При специальном выборе константы функцию $y_2(x)$ называют функцией Неймана нулевого порядка. Она равна (при $x > 0$)

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x)(\ln\frac{x}{2} + C) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j} \Big) \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}. \tag{26.4}$$

Здесь C — константа Эйлера, $C = 0,577215\ldots$.

Понятно, что запоминать формулу (26.4) нет никакой необходимости, достаточно знать, что общее решение уравнения (26.1) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x).$$

Несмотря на устрашающие выражения в виде степенных рядов, функции

$J_0(x)$ и $N_0(x)$ в определенном смысле не сложнее привычных нам синуса и косинуса (рис. 26.1, 26.2).

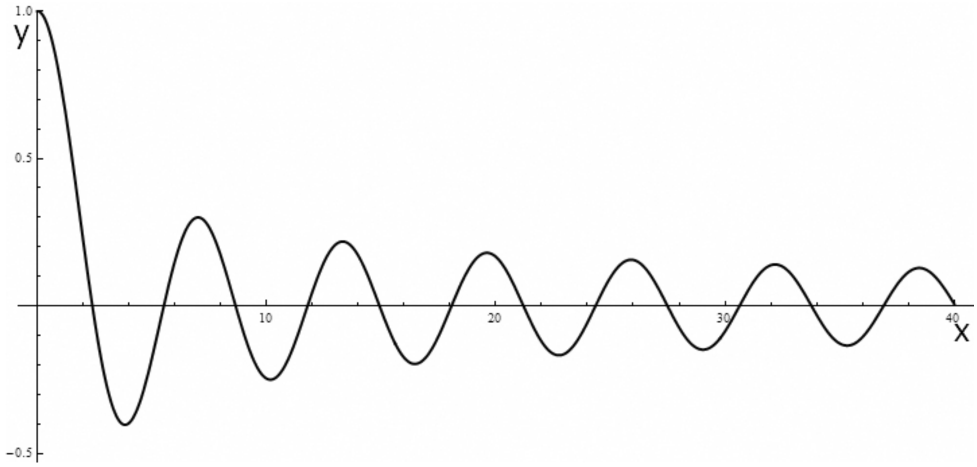

Рис. 26.1. Функция Бесселя $J_0(x)$.

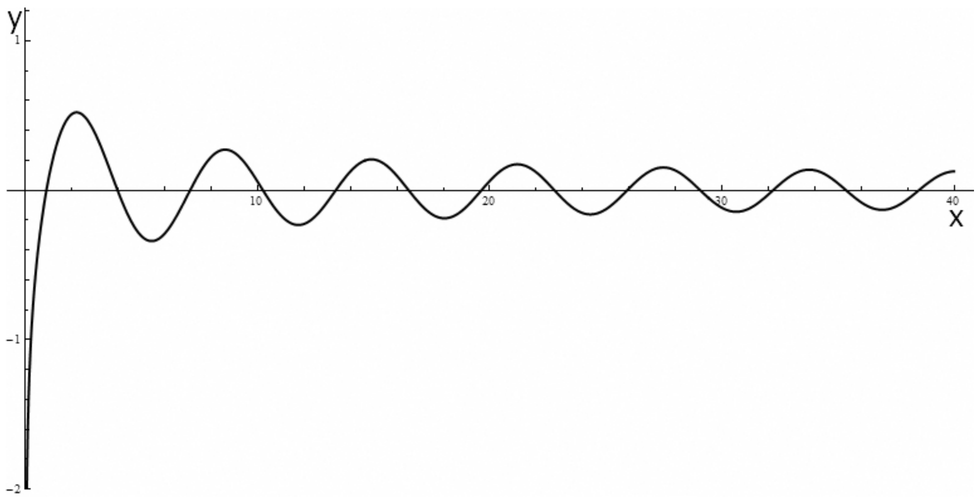

Рис. 26.2. Функция Неймана $N_0(x)$.

Здесь мы столкнулись с чрезвычайно принципиальным вопросом — как в математической физике возникают новые функции, которые принято называть специальными. Ответ очень прост — они возникают как решения дифференциальных уравнений. Если мы можем выразить решение уравнения через те функции, которые мы уже знаем — прекрасно, а если не можем, то вводим для новых функций обозначения и названия. Главное — сохранить чувство меры. Теперь, когда мы стоим на этих ясных позициях, сформулируем некоторые утверждения.

Уравнение

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{26.5}$$

называется уравнением Бесселя порядка n ($n \in \mathbb{N}$). Одно решение этого уравнения представляется в виде степенного ряда и называется функцией Бесселя порядка n:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

а второе решение имеет логарифмическую особенность и называется функцией Неймана порядка n (обозначается $N_n(x)$). Общее решение уравнения (26.5) имеет вид

$$y(x) = C_1J_n(x) + C_2N_n(x)$$

Как это часто бывает, возникшие в одном контексте специальные функции начинают появляться в совершенно неожиданных на первый взгляд формулах. Так, можно показать, что

$$\exp(\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(z) \tag{26.6}$$

Это разложение в ряд Лорана. Параметр z здесь считают комплексным числом, но при действительном z коэффициенты этого разложения являются нашими знакомыми — функциями Бесселя порядка n.

Из (26.6) легко получить, что

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{26.7}$$

Для этого заменим в (26.6) t на $-1/t$. Тогда

$$\exp(\frac{z}{2}(-\frac{1}{t}+t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1/t)^n J_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(z)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t^n, придем к требуемому соотношению.

Покажем, что

$$\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z) \tag{26.8}$$

Для этого в тождестве (26.6) положим $t = z\tau$ и продифференцируем это выражение по z:

$$\exp(\frac{1}{2}(z^2\tau - \frac{1}{\tau})) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^n z^n J_n(z)$$

$$z\tau\exp(\frac{1}{2}(z^2\tau - \frac{1}{\tau})) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^n \frac{d}{dz}(z^n J_n(z))$$

С другой стороны, домножая на $z\tau$, получим

$$z\tau\exp(\frac{1}{2}(z^2\tau - \frac{1}{\tau})) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^{n+1} z^{n+1} J_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^n z^n J_{n-1}(z)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ^n, приходим к (26.8).

Также можно показать, что

$$\frac{d}{dz}(z^{-n} J_n(z)) = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

В дальнейшем мы часто будем использовать это соотношение при $n = 0$:

$$J_0'(z) = -J_1(z)$$

Рассмотрим теперь уравнение Бесселя с параметром:

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (a^2x^2 - n^2)y = 0, \quad a \neq 0 \tag{26.9}$$

Легко видеть, что замена $t = ax$ приводит его к уравнению

$$t^2\ddot{y}(t) + t\dot{y}(t) + (t^2 - n^2)y = 0$$

Следовательно, решением уравнения (26.9) является функция

$$y(x) = C_1J_n(ax) + C_2N_n(ax).$$

Рассмотрим случай чисто мнимого значения параметра: $a = ib$. Тогда уравнение (26.9) примет вид

$$x^2y''(x) + xy'(x) - (b^2x^2 + n^2)y = 0, \quad b \in \mathbb{R} \tag{26.10}$$

Его решение можно записать через знакомые функции

$$y(x) = C_1J_n(ibx) + C_2N_n(ibx),$$

но лучше ввести новые вещественные функции от вещественных аргументов. Положим $I_n(x) = i^{-n}J_n(ix)$, тогда

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

Эта функция называется модифицированной функцией Бесселя порядка n. (рис. 26.3)

Аналогичным образом можно ввести и модифицированную функцию Неймана. Однако мы не будем этого делать, так как в дальнейшем

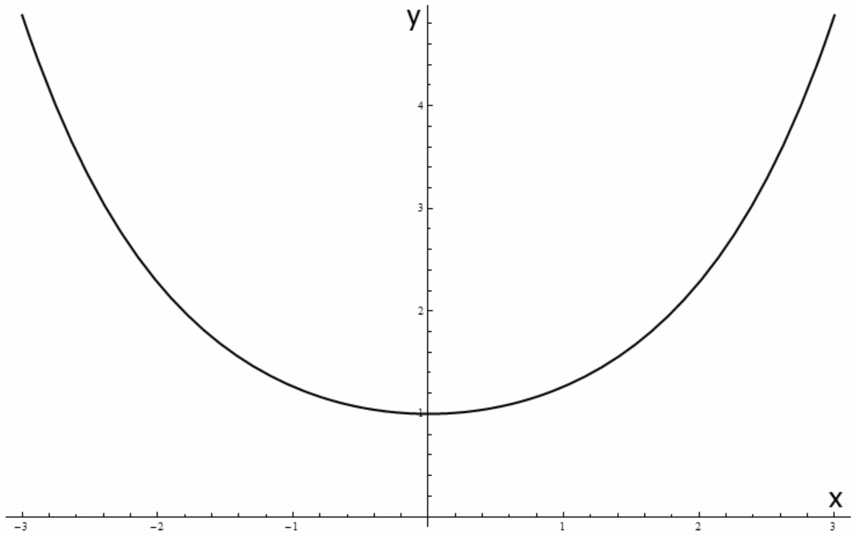

Рис. 26.3. Модифицированная функция Бесселя $I_0(x)$.

нас будут интересовать только ограниченные в нуле решения уравнения (26.10).

Итак, решением уравнения (26.10), ограниченным в нуле, является функция $y(x) = I_n(bx)$.

Интересно провести аналогию с хорошо знакомыми вам функциями — тригонометрическими и гиперболическими:

$$y'' + a^2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$$

$$y'' - a^2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \operatorname{sh} ax + C_2 \operatorname{ch} ax$$

$$\sin(ix) = i \operatorname{sh} x; \qquad \cos(ix) = \operatorname{ch} x$$

Уравнение

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (a^2x^2 - \nu^2)y = 0, \quad a \neq 0 \qquad (26.11)$$

называется уравнением Бесселя порядка ν. Точка $x = 0$ является регулярной особой точкой. Определяющее уравнение $\lambda(\lambda-1)+\lambda-\nu^2=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm\nu$. Далее будем считать $a=1$.

Если разность корней 2ν не является целым числом, то это уравнение имеет ФСР, состоящую из двух функций Бесселя $J_\nu(ax)$ и $J_{-\nu}(ax)$.

Если $\nu=n\in\mathbb{N}$, то уравнение имеет ФСР, состоящую из функции Бесселя $J_n(ax)$ и функции Неймана $N_n(ax)$.

Осталось только разобраться со случаем, когда $\nu=\dfrac{2n+1}{2}$ (в этом случае говорят, что ν является полуцелым числом).

Рассмотрим простейший случай $\nu=\dfrac{1}{2}$. Уравнение (26.11) имеет вид

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\frac{1}{4})y=0$$

Сделаем замену $y(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$. Она приведет нас к уравнению, не содержащему первой производной от u (на занятии 21 мы обсуждали этот прием). Тогда

$$y'=\frac{u'}{\sqrt{x}}-\frac{u}{2x\sqrt{x}}$$

$$xy'=u'\sqrt{x}-\frac{u}{2\sqrt{x}}$$

Дифференцируя последнее равенство и умножая его на x, получим

$$x^2y''+xy'=u''x\sqrt{x}+\frac{u}{4\sqrt{x}}.$$

Таким образом, уравнение приводится к виду $u''+u=0$. Его общее решение $u(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$. Возвращаемся к функции $y(x)$ и получаем общее решение

$$y(x)=C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Если бы мы искали решение в виде обобщенных степенных рядов, то получили бы решение соответствующее $\lambda = \dfrac{1}{2}$:

$$y_1(x) = x^{1/2} - \frac{1}{3!}x^{5/2} + ... + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+\frac{1}{2}} + ... = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

и, несмотря на отсутствие гарантий, решение, соответствующее $\lambda = -\dfrac{1}{2}$:

$$y_2(x) = x^{-1/2} - \frac{1}{2!}x^{3/2} + ... + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k-\frac{1}{2}} + ... = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Вообще говоря, решения представлены через известные функции, и нет необходимости вводить новые обозначения, тем не менее вводят функции Бесселя

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Заметим, что функция $J_{1/2}(x)$ ограничена в нуле, а функция $J_{-1/2}(x)$ — неограничена (рис. 26.4, 26.5).

Для других полуцелых значений $\nu = n + \dfrac{1}{2}$ также можно показать, что уравнение Бесселя (26.11) имеет два линейно независимых решения в виде обобщенных степенных рядов и его общее решение

$$y(x) = C_1 J_{n+1/2}(ax) + C_2 J_{-(n+1/2)}(ax).$$

Первая функция не имеет особенностей в нуле и представляется рядом

$$J_{n+1/2}(x) = x^{n+1/2}\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$$

вторая — неограничена в нуле и представляется рядом

$$J_{-(n+1/2)}(x) = x^{-(n+1/2)}\sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k$$

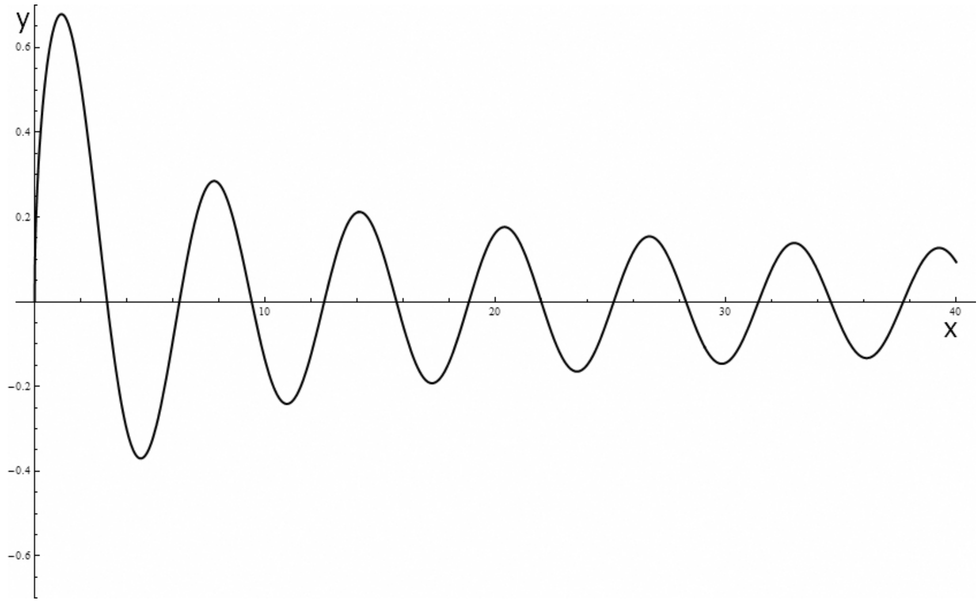

Рис. 26.4. Функция Бесселя $J_{1/2}(x)$.

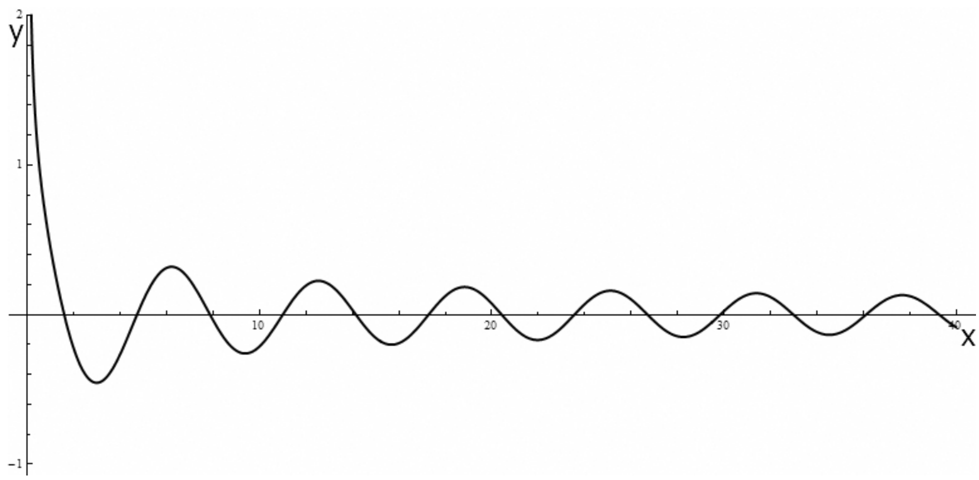

Рис. 26.5. Функция Бесселя $J_{-1/2}(x)$.

Рассмотрим на отрезке $[0; l]$ задачу Штурма–Лиувилля для оператора $L[y] = y'' + \frac{1}{x}y'$ с граничными условиями $y(0)$ — ограничено, $y(l) = 0$.

Другими словами, требуется найти решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{x}y' = \lambda y, \tag{26.12}$$

удовлетворяющее указанным краевым условиям.

Пусть $\lambda = 0$, тогда

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln x.$$

Ограниченным в нуле является решение $y(x) = C_1$, но из условия $y(l) = 0$ следует, что $C_1 = 0$, то есть $y \equiv 0$. Это означает, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $L[y]$, то есть оператор не вырожден.

Далее, рассмотрим случай $\lambda > 0$, тогда $\lambda = a^2$, $a \in \mathbb{R}$. Уравнение (26.12) принимает вид

$$y'' + \frac{1}{x} y' - a^2 y = 0.$$

Умножив обе части на x^2, его легко привести к виду (26.10) при $n = 0$. Как мы помним, решением, ограниченным в нуле, является модифицированная функция Бесселя $I_0(ax)$, но, как видно из рис. (26.3), она нигде не обращается в ноль. Следовательно, решение $y(x) = CI_0(ax)$ можно подчинить краевому условию $y(l) = 0$ только при $C = 0$. Таким образом, $\lambda > 0$ также не являются собственными числами оператора $L[y]$.

Рассмотрим случай $\lambda < 0$, тогда $\lambda = -a^2$, $a \in \mathbb{R}$. Уравнение (26.12) принимает вид

$$y'' + \frac{1}{x} y' + a^2 y = 0.$$

Умножив обе части на x^2, мы увидим, что это уравнение Бесселя порядка 0, и оно имеет ограниченное в нуле решение $y(x) = CJ_0(ax)$.

Для выполнения второго краевого условия необходимо, чтобы

$$J_0(al) = 0.$$

Функция Бесселя $J_0(x)$ имеет счетное число нулей. Договоримся обозначать их μ_k, то есть $J_0(\mu_k) = 0$, $k = 1,\ 2\ ,...$ Тогда $J_0(al) = 0$ при $a_k = \frac{\mu_k}{l}$.

Таким образом, $\lambda_k = -(\frac{\mu_k}{l})^2$ являются собственными числами поставленной задачи Штурма-Лиувилля, а $e_k = J_0(\frac{\mu_k}{l}x)$ — собственными функциями.

Выясним, с каким весом ортогональны эти функции. Приведем оператор к самосопряженному виду:

$$xy'' + y' = \lambda xy \quad \text{или} \quad (xy')' = \lambda xy$$

Таким образом, вес $\rho(x) = x$, и

$$\int\limits_0^l xJ_0(\frac{\mu_k}{l}x)J_0(\frac{\mu_n}{l}x)\,dx = 0, \quad k \neq n.$$

Сформулируем теорему Стеклова для нашей задачи.

Если функция $f(x) \in C^2(0;l)$ ограничена в нуле и $f(l) = 0$, то она допускает на отрезке $[0;l]$ разложение в равномерно сходящийся ряд Фурье–Бесселя

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k J_0(\frac{\mu_k}{l}x), \quad \text{где} \quad c_k = \frac{\int\limits_0^l xf(x)J_0(\frac{\mu_k}{l}x)\,dx}{\int\limits_0^l xJ_0^2(\frac{\mu_k}{l}x)\,dx}.$$

Самостоятельная работа

Напишите формулу общего решения следующих дифференциальных уравнений:

1. $x^2y'' + xy' - 25x^2y - \frac{9}{4}y = 0.$

2. $x^2y'' + xy' - 5y + 16x^2y = 0.$

3. $x^2y'' + xy' + (2x^2 - 1)y = 0.$

4. Решите задачу Штурма–Лиувилля $\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{x}y' = \lambda y \\ y(0) \text{— ограничено} \\ y'(l) = 0 \end{cases}$

и сформулируйте теорему Стеклова

Указание: обозначьте через μ_k^1 нули функции Бесселя $J_1(x)$ и воспользуйтесь тем, что $J_0'(x) = -J_1(x)$ (рис. 26.6, рис. 26.7).

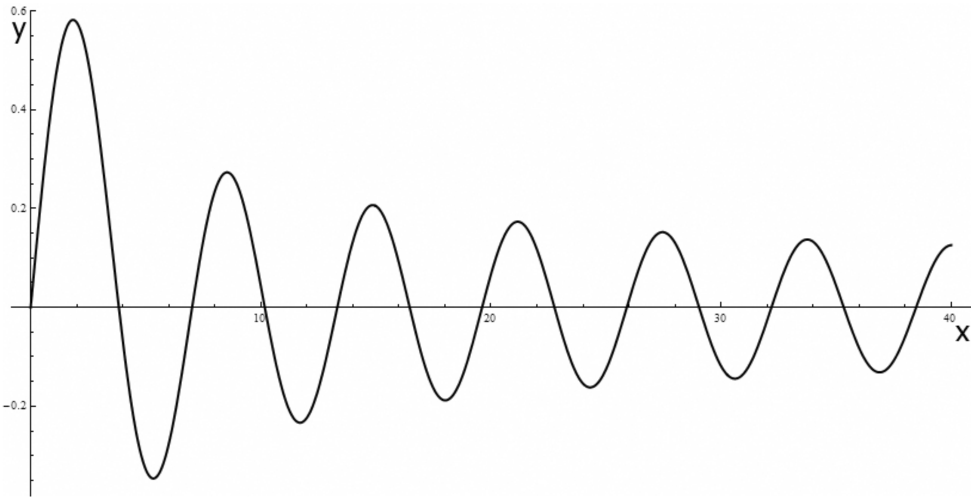

Рис. 26.6. Функция Бесселя $J_1(x)$.

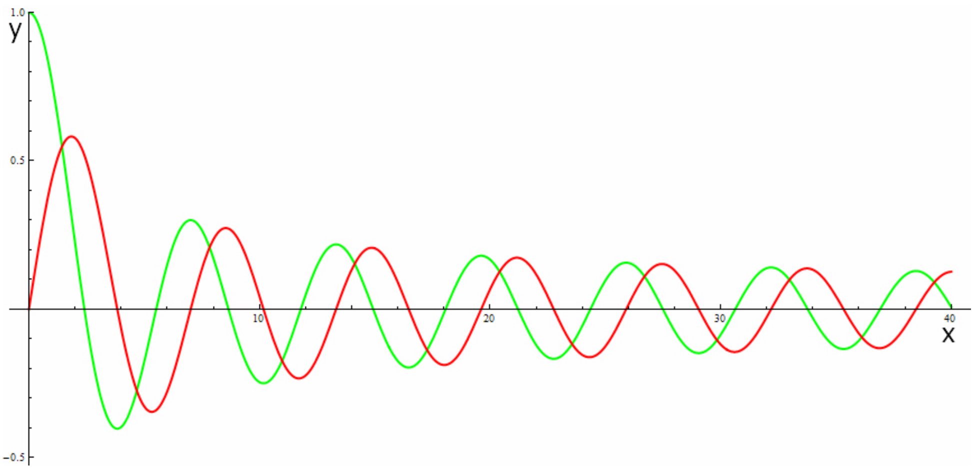

Рис. 26.7. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

Ответы к самостоятельной работе

1. $y(x) = C_1 I_{3/2}(5x) + C_2 I_{-3/2}(5x)$.

2. $y(x) = C_1 J_{\sqrt{5}}(4x) + C_2 J_{-\sqrt{5}}(4x)$.

3. $y(x) = C_1 J_1(\sqrt{2}x) + C_2 N_1(\sqrt{2}x)$.

4. $\lambda_0 = 0$, $e_0 = 1$;

$\lambda_k = -(\frac{\mu_k^1}{l})^2$, $e_k = J_0(\frac{\mu_k^1}{l}x)$.