Семинар 8. *(26 сентября 2024 г.)*

Задача Гурса. Уравнение колебания струны

1. *Задача Гурса для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными*

   Гиперболическое уравнение имеет два семейства характеристик — прямые $x = x_0$, $y = y_0$. Задача Гурса́ — это краевая задача для гиперболического уравнения с данными на характеристиках:

$$\begin{cases} u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y); \\ u\big|_{x=x_0} = \varphi(y); \\ u\big|_{y=y_0} = \psi(x). \end{cases}$$

   Теорема 1. *Пусть* $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y) \in C$, $\varphi(y)$, $\psi(x) \in C^1$ *и выполняется условие согласования* $\varphi(y_0) = \psi(x_0)$. *Тогда задача Гурса имеет единственное решение* $u(x,y) \in C^2$.

2. *Примеры решения задач Гурса*

   № 41 из задачника Н. Л. Абашеевой. Решите задачу Гурса

$$\begin{cases} u_{xy} + xu_x = 0; \quad x, y > 0 \\ u\big|_{x=0} = \varphi(y); \\ u\big|_{y=0} = \psi(x), \end{cases}$$

   где функции $\varphi(y)$, $\psi(x)$ определены и непрерывны на полуосях $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ соответственно, имеют непрерывные вторые производные при положительных значениях своих аргументов и согласованы равенством $\varphi(0) = \psi(0)$.

   Решение. 1) Найдем общее решение уравнения. Обозначим $u_x = v$ и понизим порядок:

$$v_y + xv = 0$$

   Данное уравнение будем решать как ОДУ, поскольку оно не содержит v_x.

$$\frac{dv}{dy} = -xv \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -xdy \Rightarrow v = f(x)e^{-xy}.$$

Вернемся к искомой функции $v = u_x = f(x)e^{-xy}$ и проинтегрируем по x, тогда

$$u(x,y) = \int\limits_0^x f(s)e^{-sy}ds + g(y).$$

Здесь вместо константы интегрирования добавлена произвольная гладкая функция, зависящая от y. 2) Подставим краевые условия:

$$u|_{x=0} = g(y) = \varphi(y);$$

$$u|_{y=0} = \int\limits_0^x f(s)ds + g(0) = \psi(x).$$

Отсюда $g(y) = \varphi(y)$. Функцию $f(x)$ найдем, продифференцировав равенство $\int\limits_0^x f(s)ds + \varphi(0) = \psi(x)$ по переменной x:

$$f(x) = \psi'(x) \Rightarrow u(x,y) = \int\limits_0^x \psi'(s)e^{-sy}ds + \varphi(y).$$

№ 42 из задачника Н. Л. Абашеевой. Решите задачу Гурса

$$\begin{cases} u_{xy} + 3u_x - u_y - 3u = 0; \quad x, y > 0 \\ u|_{x=0} = y^2; \\ u|_{y=0} = \cos x - 1, \end{cases}$$

Решение. Перед тем, как решать, проверим условия согласования (гладкость краевых условий очевидна): $y^2\big|_{y=0} = 0 = (\cos x - 1)|_{x=0}$.
1) Найдем общее решение уравнения. Преобразуем уравнение, чтобы понизить порядок:

$$(u_y + 3u)_x - (u_y + 3u) = 0,$$

или

$$(u_x - u)_y + 3(u_x - u) = 0$$

Обозначим $u_x - u = v$ и понизим порядок:

$$v_y + 3v = 0$$

Данное уравнение будем решать как ОДУ, поскольку оно не содержит v_x.

$$\frac{dv}{dy} = -3v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -3dy \Rightarrow v = f(x)e^{-3y}.$$

Вернемся к искомой функции $v = u_x - u = f(x)e^{-3y}$. Решим данное уравнение как линейное неоднородное ОДУ:

$$\frac{du}{dx} - u = f(x)e^{-3y}.$$

Сначала найдем решение однородного уравнения $\frac{du}{dx} - u = 0$:

$$u_{\text{о.р.о}} = g(y)e^{x}.$$

Частное решение будем искать методом вариации произвольной постоянной:

$$u_{\text{ч.р.н}} = g(x,y)e^{x} \Rightarrow g'_x(x,y) = f(x)e^{-3y-x}$$

Отсюда $g(x,y) = e^{-3y}\int\limits_0^x f(s)e^{-s}ds$ и $u_{\text{ч.р.н.}} = g(x,y)e^{x} = e^{x-3y}\int\limits_0^x f(s)e^{-s}ds$. Обозначим $F(x) = e^{x}\int\limits_0^x f(s)e^{-s}ds$, тогда

$$u(x,y) = u_{\text{о.р.н.}} = u_{\text{о.р.о}} + u_{\text{ч.р.н}} = g(y)e^{x} + e^{-3y}F(x).$$

2) Подставим краевые условия и получим два уравнения на две неизвестные функции:

$$u\big|_{x=0} = g(y) + e^{-3y}F(0) = y^2;$$

$$u\big|_{y=0} = g(0)e^{x} + F(x) = \cos x - 1.$$

Выразим из первого уравнения $g(y) = y^2 - e^{-3y}F(0)$ и подставим во второе уравнение:

$$g(0)e^{x} + F(x) = -F(0)e^{x} + F(x) = \cos x - 1 \Rightarrow F(x) = \cos x - 1 + F(0)e^{x}.$$

В итоге

$$u(x,y) = g(y)e^x + e^{-3y}F(x) = y^2e^x - e^{x-3y}F(0) + e^{-3y}(\cos x - 1) + e^{x-3y}F(0) = \\ = y^2e^x + e^{-3y}(\cos x - 1).$$

Замечание. Уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

можно привести к виду $v_{xy} + (c - ab)v = 0$ с помощью замены $u(x,y) = v(x,y)e^{-bx-ay}$.

В № 42 $a = 3$, $b = -1$, $c = -3$. Тогда заменой $u(x,y) = v(x,y)e^{x-3y}$ можно было привести уравнение к виду $v_{xy} = 0$, а для такого уравнения мы уже знаем общее решение $v(x,y) = f(x) + g(y)$.

3. *Задача Коши для уравнение колебания струны*

Поставим задачу Коши для уравнения колебания струны:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}; \\ u|_{t=0} = \varphi(x); \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{1}$$

Характеристиками данного уравнения являются прямые $x \pm at = C$. Приведем уравнение к каноническому виду $u_{\tilde{t}\tilde{x}}$с помощью замены $\tilde{t} = x + at$, $\tilde{x} = x - at$. Общее решение такого уравнения имеет вид

$$u(\tilde{t}, \tilde{x}) = f(\tilde{t}) + g(\tilde{x}) = f(x + at) + g(x - at).$$

Домашнее задание:

1) Найдите решение задачи Коши (1) (получите формулу Даламбера),

2) № 43 из задачника Н. Л. Абашеевой,

3) Метод Дюамеля: покажите, что решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебания струны с нулевыми начальными данными:

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R};\ u|_{t=0} = 0;\ u_t|_{t=0} = 0$$

можно получить по формуле $u(t,x) = \int\limits_0^t v(t,x,s)ds$, где $v(t,x,s)$ — решение вспомогательной задачи Коши

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R};\ v|_{t=s} = 0;\ v_t|_{t=s} = f(s,x).$$