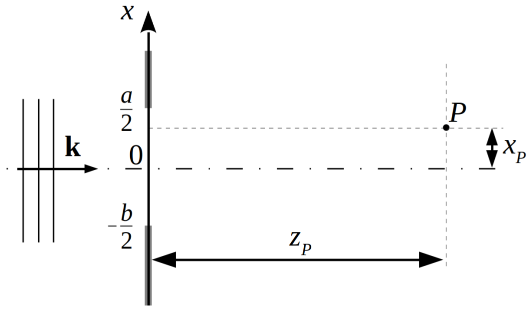
Задача.

Исследовать поле за экраном с длинной щелью в зоне дифракции Френеля.

Решение.



Выберем систему координат так, чтобы щель лежала в плоскости $z = 0$ и имела размеры $-\frac{b}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, $-\infty < y < \infty$. Экран находится в плоскости $z_p \geqslant (a+b)\left(\frac{a+b}{\lambda}\right)^{1/3}$.

Поле в точке $P(x_p, z_p)$ экрана выражается интегралом Кирхгофа, сводящимся заменой переменных $\xi = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x - x_p)$ к интегралам Френеля:

$$\widehat{E}(z_p, x_p) \sim \int\limits_{x=-b/2}^{x=a/2} \exp\left(ik\frac{(x-x_p)^2}{2z_p}\right) dx = C\left(\int\limits_{\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}\left(-\frac{b}{2}-x_p\right)}^{\xi=0} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi + \int\limits_{\xi=0}^{\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}\left(\frac{a}{2}-x_p\right)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi\right) =$$

$$= C\left(\int\limits_{\xi=0}^{\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}\left(x_p+\frac{b}{2}\right)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi - \int\limits_{\xi=0}^{\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}\left(x_p-\frac{a}{2}\right)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi\right) = C\left(\widehat{J}(u_1) - \widehat{J}(u_2)\right).$$

где $u_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p + b/2)$, $u_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p - a/2)$.

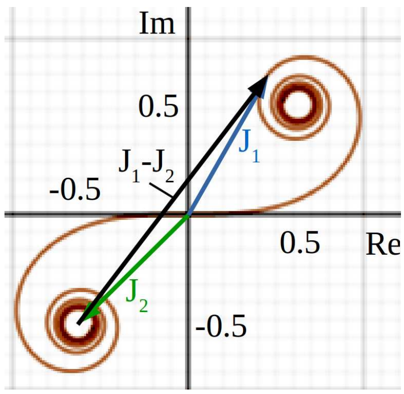
Искомое поле в точке P пропорционально длине отрезка между концами векторов $\widehat{J}(u_1)$ и $\widehat{J}(u_2)$. Разберем несколько случаев.

1. Бесконечно широкая щель ($b = \infty$, $a = \infty$):

$$\widehat{E}(z_p, x_p) = 2C\widehat{J}(\infty) = (1+i)C = E_0,$$

откуда $C = \frac{E_0}{1+i}$.

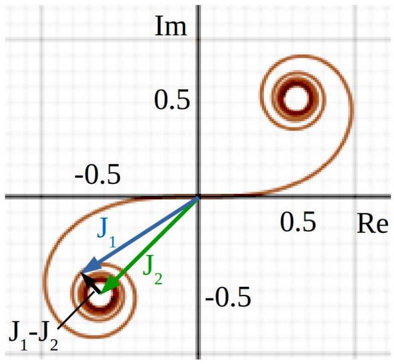
2. Полубесконечный экран ($b = 0$, $a = \infty$):



$$\widehat{E}(z_p, x_p) = C\left(\widehat{J}\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}x_p\right) - \widehat{J}(-\infty)\right) =$$

$$= C\left(\widehat{J}\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}x_p\right) - \left(-\frac{1+i}{2}\right)\right).$$

При $x_p > 0$ конец вектора $\widehat{J}(u_1)$ лежит на правой спирали кривой Корню (см. рисунок). Увеличению x_p соответствует движение по виткам внутрь спирали. При этом амплитуда поля (длина вектора, показанного черным цветом) проходит через затухающие и учащающиеся осцилляции и стремится к значению E_0.



При $x_p < 0$ конец вектора $\widehat{J}(u_1)$ лежит на левой спирали кривой Корню (см. рисунок). Увеличению $|x_p|$ соответствует движение по виткам внутрь спирали. При этом амплитуда поля (длина вектора, показанного черным цветом) монотонно затухает и стремится к нулю.

3. Щель шириной a ($b = a$):

Значения и знаки $u_1 = u_+ = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p + a/2)$, $u_2 = u_- = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p - a/2)$ зависят от взаимного расположения x_p и краев щели.

При $x_p = 0$

$$\widehat{E}(z_p, 0) = 2C\widehat{J}\left(\sqrt{\frac{a^2}{2\lambda z_p}}\right),$$

где параметр $\sqrt{\frac{a^2}{2\lambda z_p}}$ в зоне дифракции Френеля ($z_p \geqslant a\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/3}$) может принимать значения в интервале $\left[0, \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/3}}\right]$. При больших значениях $\frac{a}{\lambda}$ поле может принимать значения от 0 (что соответствует $z_p \to \infty$) до E_0 (соответствует $z_p = a\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/3}$ при условии $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/3} \gg 1$).