## Занятие 2

# Однородные уравнения

*Однородным* называют дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.1}$$

Введением новой искомой функции $u = u(x)$ по формуле $u = \dfrac{y}{x}$ это уравнение легко сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, поскольку $y = u \cdot x$, то $y' = u' \cdot x + u$. Подставляя эти выражения в уравнение (2.1), получим уравнение $u' \cdot x = f(u) - u$, или $\dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$.

Если $F(u)$ — одна из первообразных функции $\dfrac{1}{f(u) - u}$, то общий интеграл уравнения (2.1) можно записать в виде

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

Полагая $C = \ln D$, где $D > 0$, можно придать этой формуле вид $F\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln D|x|$. Избавимся от модуля, заменив условие $D > 0$ условием $D \neq 0$, и преобразуем общий интеграл к виду

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln Dx. \tag{2.2}$$

Интегральные линии однородного уравнения обладают следующим замечательным свойством: преобразование подобия $(x; y) \mapsto (\lambda x; \lambda y)$, $(\lambda \neq 0)$, сохраняет картину интегральных линий неизменной, то есть интегральная линия при этом преобразовании переходит в интегральную линию. Это нетрудно доказать, используя формулу (2.2). Если $F\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln Dx$, то $F\left(\dfrac{\lambda y}{\lambda x}\right) = F\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln Dx = \ln D_1(\lambda x)$.

Напомним, что при разделении переменных могут быть потеряны решения вида $y = kx$, где $k$ — корень уравнения $f(u) = u$. Точнее, нужно говорить о непродолжаемых решениях вида $y = kx$ с областью определения $x < 0$ или $x > 0$, поскольку точка $(0; 0)$ является особой точкой уравнения (2.1).

На первом занятии мы выяснили, при каких условиях эти решения будут особыми. Переформулируем полученный критерий для однородного уравнения.

Решение $y = kx$, где $k$ — изолированный корень уравнения $f(u) = u$, является *особым* для уравнения (2.1) с непрерывной функцией $f(u)$, если и только если интеграл $\int\limits_k^u \frac{d\tau}{f(\tau) - \tau}$ *сходится* в точке $k$.

Если же функция $f(u)$ непрерывна на $(a; b)$ и всюду на этом интервале $f(u) \neq u$, то через каждую точку $(x_0; y_0)$ такую, что $a < \dfrac{y_0}{x_0} < b$, проходит одна и только одна интегральная линия, и ее уравнение имеет вид

$$\int\limits_{y_0/x_0}^{y/x} \frac{d\tau}{f(\tau) - \tau} = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|.$$

**Пример 1.** Найдем решения уравнения $y' = \dfrac{y(2y - x)}{x^2}$.

Это уравнение однородное, так как его можно преобразовать к виду

$$y' = 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right).$$

Замена $y = x \cdot u$, $y' = x \cdot u' + u$, приводит к уравнению $x \cdot u' + u = 2\,u^2 - u$, и далее к уравнению

$$\frac{du}{u(u-1)} = 2\,\frac{dx}{x}.$$

Его общий интеграл

$$\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln Dx^2 \quad \text{, или} \quad \frac{u-1}{u} = Cx^2.$$

Вернемся к исходной переменной $y$ и запишем общее решение:

$$y = \frac{x}{1 - Cx^2}. \tag{2.3}$$

При разделении переменных мы «потеряли» решения $u = 0$ и $u = 1$, что соответствует решениям $y = 0$ и $y = x$ исходного уравнения. Эти решения — не особые, в чем можно убедиться непосредственно, исследуя формулу (2.3), или исследуя сходимость интеграла $\int \frac{du}{u(u-1)}$ при $u \to 0$ и $u \to 1$.

Заметим, что прямая $x = 0$ также является интегральной линией исходного уравнения, и три прямые $y = 0$, $y = x$ и $x = 0$ делят плоскость $xOy$ на секторы, в каждом из которых достаточно нарисовать одну интегральную линию, а остальные получить из нее преобразованием подобия. Причем, достаточно рассмотреть лишь полуплоскость $x > 0$, так как картина при $x < 0$ получится преобразованием подобия с коэффициентом $\lambda < 0$ (или поворотом на $180^o$ вокруг начала координат).

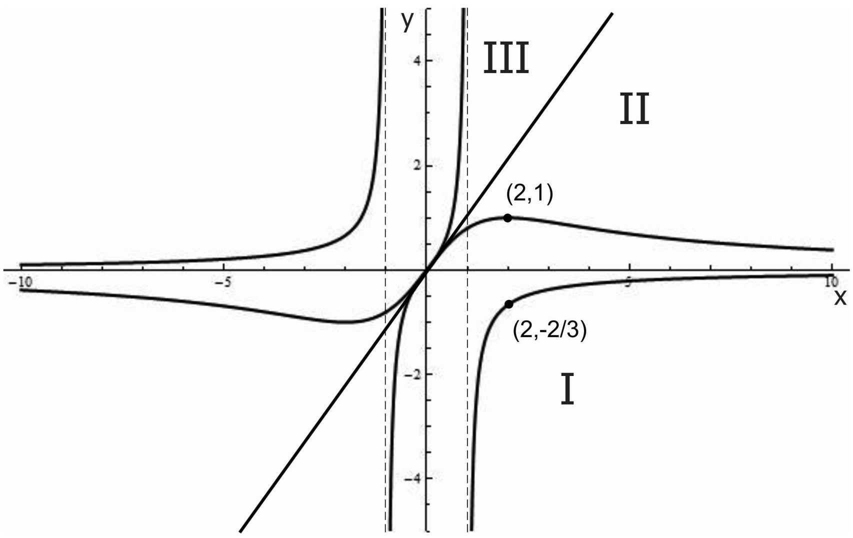


**Рис. 2.1.** Интегральные линии в примере 1.

Найдем интегральную линию, проходящую через точку $(2; 1)$. Подставим ее координаты в формулу (2.3): $1 = \dfrac{2}{1-4C}$, откуда $C = -1/4$ и соответствующее решение $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$. Несмотря на то, что формально эта функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$, мы должны исключить особую точку $(0;0)$ и говорить о непродолжаемом решении с областью определения $(0;+\infty)$, проходящем через точку $(2;1)$. Соответствующая интегральная кривая лежит в секторе II (рис. 2.1).

Найдем интегральную линию, проходящую через точку $(2;-2/3)$. Подставим ее координаты в формулу (2.3): $-\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{1-4C}$, откуда $C = 1$ и соответствующее решение $y = \dfrac{x}{1-x^2}$. Очевидно, эта функция не определена в точке $x = 1$, и данная формула задает при $x > 0$ два непродолжаемых решения: с областями определения $(0;1)$ и $(1;+\infty)$. Второе из них и является искомым, так как проходит через точку $(2;-2/3)$. Таким образом мы получили интегральную линию, лежащую в секторе I. А решение $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ с областью определения $(0;1)$ дает нам интегральную линию, лежащую в секторе III.

В этом примере, благодаря полученной формуле общего решения, мы можем указать область определения любого непродолжаемого решения. Так, если $C \leqslant 0$, то непродолжаемое решение определено на луче $(-\infty;0)$ или $(0;+\infty)$. Если же $C > 0$, то областью определения непродолжаемого решения служит один из следующих интервалов: $(-\infty;-\sqrt{C})$, $(-\sqrt{C};0)$, $(0;\sqrt{C})$ или $(\sqrt{C};+\infty)$. В общем случае теорема, с которой мы познакомимся позже, утверждает лишь существование непродолжаемого решения. $\square$

**Пример 2.** Решить задачу Коши $\begin{cases} xy' = y + \sqrt{x^2-y^2} \\ y(1) = 0,5 \end{cases}$.

Заметим, что правая часть уравнения определена только на множестве $|x| \geqslant |y|$, которое представляет собой объединение двух секторов: $x \geqslant |y|$ и $x \leqslant -|y|$, пересекающихся лишь в точке $(0;0)$. Поскольку условие Коши поставлено в точке $x = 1$, нас будут интересовать только интегральные линии, лежащие в первом секторе, то есть при $x \geqslant 0$.

Нетрудно убедиться в том, что это уравнение однородное. Однако мы не будем преобразовывать его к виду (2.1), а сразу сделаем замену $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$, и, учитывая условие $x \geqslant 0$, перейдем к уравнению

$$u' \cdot x = \sqrt{1 - u^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя полученное соотношение, найдем общий интеграл $\arcsin u = \ln Dx$, или $\arcsin \frac{y}{x} = \ln Dx$.

Решения $y = -x$ и $y = x$ исходного уравнения, соответствующие значениям $u = \pm 1$, при которых функция $\sqrt{1-u^2}$ обращается в ноль, являются особыми, так как интеграл $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ сходится в точках $u = \pm 1$.

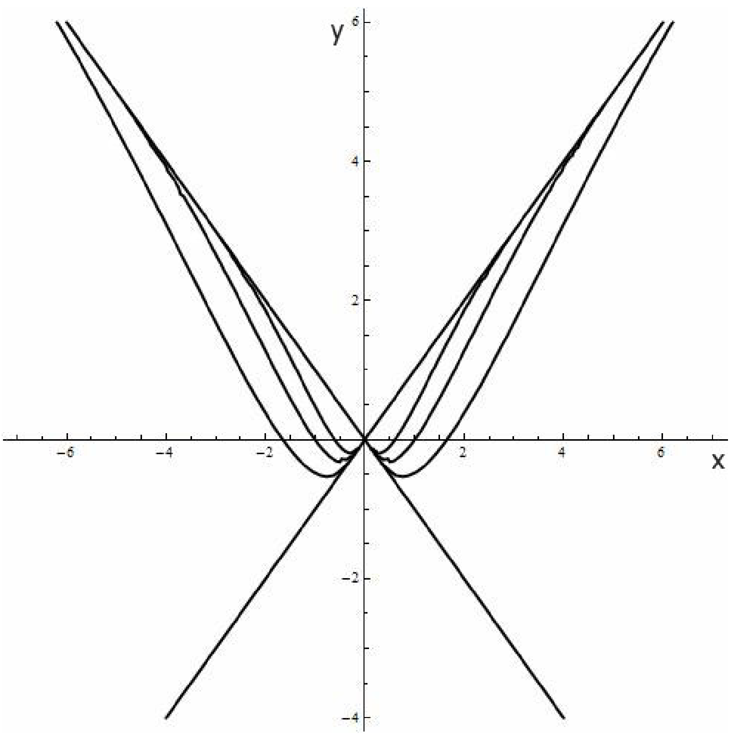


**Рис. 2.2.** Интегральные линии в примере 2.

Найдем решение, проходящее через точку $(1; 0,5)$. Из формулы общего решения получаем: $\arcsin 0,5 = \ln D$, то есть $\ln D = \pi/6$. Следовательно, искомое решение задается формулой

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln Dx = \ln D + \ln x = \frac{\pi}{6} + \ln x.$$

Поскольку по определению $|\arcsin t| \leqslant \pi/2$, то эта формула имеет смысл лишь при $|\ln x + \pi/6| \leqslant \pi/2$, то есть $-2\pi/3 \leqslant \ln x \leqslant \pi/3$, или $e^{-2\pi/3} \leqslant x \leqslant e^{\pi/3}$.

Разрешая равенство $\arcsin \dfrac{y}{x} = \ln x + \dfrac{\pi}{6}$ относительно переменной $y$, получаем ответ: решением поставленной задачи Коши является функция $y = x \cdot \sin(\ln x + \frac{\pi}{6})$.

При $x = e^{-2\pi/3}$ это решение касается прямой $y = -x$, а при $x = e^{\pi/3}$ — прямой $y = x$ (рис. 2.2). Поэтому для сохранения единственности мы должны считать областью определения непродолжаемого решения, проходящего через точку $(1; 0,5)$, интервал $(e^{-2\pi/3}; e^{\pi/3})$. $\square$

Пусть уравнение задано в симметричной форме

$$M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0.$$

Оно является однородным, если $M(x;y)$ и $N(x;y)$ — однородные функции одной и той же степени однородности $p$, то есть для любого $t \neq 0$

$$M(tx;ty) = t^p \cdot M(x;y),$$

$$N(tx;ty) = t^p \cdot N(x;y).$$

В этом случае можно не преобразовывать уравнение к виду (2.1), а сразу сделать замену переменных $y = u \cdot x$, выражая дифференциал $dy$ по формуле $dy = du \cdot x + u \cdot dx$.

**Пример 3.** Найти общее решение уравнения $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$.

Выполнив замену $y = u \cdot x$, получим уравнение

$$x^2(u^2 - 2u)\,dx + x^2(x\,du + u\,dx) = 0.$$

Оно распадается на два уравнения: $x^2 = 0$ или $(u^2 - u)\,dx + x\,du = 0$.

Первое из них дает нам одну интегральную линию $x = 0$, а второе представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

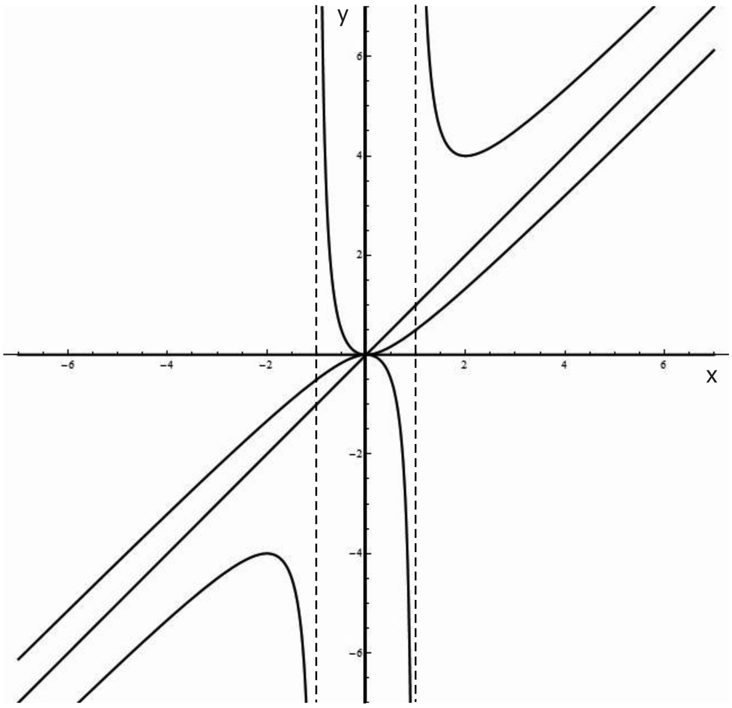


**Рис. 2.3.** Интегральные линии в примере 3.

Это уравнение имеет решения $u \equiv 0$ и $u \equiv 1$, соответствующие решениям $y = 0$ и $y = x$ исходного уравнения, а также общий интеграл

$$\ln\left|\frac{u}{1-u}\right| = \ln Dx,$$

из которого получается общее решение $y = \dfrac{Dx^2}{1+Dx}$.

Обратим внимание на поведение интегральных линий, входящих в точку $(0;0)$. Если в примере 1 все они, за исключением прямых $x = 0$ и $y = 0$, касались прямой $y = x$, то в примере 3 все входящие в точку $(0;0)$ интегральные кривые, за исключением прямых $x = 0$ и $y = x$, касаются прямой $y = 0$. Это хорошо видно на рис. 2.3. $\square$

Сформулируем без доказательства следующее утверждение:

Пусть прямая $y = kx$ является решением уравнения (2.1) (то есть

$f(k) = k$), и функция $f(u)$ дифференцируема в точке $u = k$, тогда при условии $f\,'(k) < 1$ ни одно из решений не касается этой прямой в начале координат, а при условии $f\,'(k) > 1$ этой прямой в начале координат касается бесконечно много решений.

Проверьте справедливость этого утверждения на примерах 1 и 3.

Дифференциальное уравнение называется *обобщенным однородным*, если замена $y = z^m$ приводит его к однородному уравнению. Чтобы подобрать число $m$, нужно сначала сделать указанную замену, а потом сформулировать условие однородности.

**Пример 4.** Найти общее решение уравнения $2y\,' + x = 4\sqrt{y}$.

Подставив $y = z^m$, мы придем к уравнению $2mz^{m-1}z\,' = 4z^{m/2} - x$.

Для того, чтобы это уравнение было однородным, оба слагаемых в правой части должны иметь одну и ту же степень, то есть $m/2 = 1$. Кроме того, такую же степень должен иметь коэффициент при $z\,'$, то есть $m - 1 = 1$.

Оба эти требования совместны, и при $m = 2$ уравнение станет однородным. Итак, замена $z = \sqrt{y}$, или $y = z^2$, приводит нас к уравнению $4z \cdot z\,' = 4z - x$. Оно имеет общий интеграл $\dfrac{x}{2z - x} - \ln\left|\dfrac{2z - x}{x}\right| = \ln|x| + C$ и частное решение $z = x/2$, которое не является особым.

Возвращаясь к переменной $y$, получаем ответ: общий интеграл $\dfrac{x}{2\sqrt{y} - x} = \ln|2\sqrt{y} - x| + C$ и частное решение $y = x^2/4$. $\square$

Замечание: если $m < 0$, то возможна потеря решения $y \equiv 0$. Перед тем, как делать замену $y = z^m$, проверьте, является ли функция $y \equiv 0$ решением.

Наконец, рассмотрим уравнение вида $y\,' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$.

Если коэффициенты $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ пропорциональны, то есть

$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, то замена $z = a_1x + b_1y$ или $z = a_1x + b_1y + c$ приведет нас к уравнению с разделяющимися переменными.

**Пример 5.** Решить уравнение $(x - y - 1) + (y - x + 2)y' = 0$.

Положим $z = y - x + 2$. Тогда $y' = z' + 1$, и уравнение превращается в $(1 - z) + z(z' + 1) = 0$, или $z \cdot z' + 1 = 0$.

Его общий интеграл $z^2 + 2x = C$, или $(y - x + 2)^2 + 2x = C$. $\square$

Если же коэффициенты $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ не пропорциональны, то это означает, что прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ имеют единственную точку пересечения $(x_0; y_0)$. Замена переменных $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$ приводит уравнение к однородному.

**Пример 6.** Решить уравнение $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0$.

Прямые $2x - 4y + 6 = 0$, $x + y - 3 = 0$ пересекаются в точке $(1; 2)$. Введем новые переменные $(\xi; \eta)$, положив $x = \xi + 1$, $y = \eta + 2$, и получим однородное уравнение

$$(2\xi - 4\eta)\,d\xi + (\xi + \eta)\,d\eta = 0.$$

Далее, положим $\eta = u \cdot \xi$, и уравнение распадется на $\xi = 0$ и

$$(u^2 - 3u + 2)\,d\xi + \xi(1 + u)\,du = 0.$$

Последнее уравнение, в свою очередь, тоже распадается на $u = 1$, $u = 2$ и

$$\frac{(1 + u)\,du}{(u^2 - 3u + 2)} + \frac{d\xi}{\xi} = 0$$

$$\ln \frac{|u - 2|^3}{(u - 1)^2} + \ln |\xi| = C$$

$$\frac{(u - 2)^3 \xi}{(u - 1)^2} = D$$

$$(\eta - 2\xi)^3 = D(\eta - \xi)^2.$$

Из $u = 1$ и $u = 2$ получаем частные решения $\eta = \xi$ и $\eta = 2\xi$, причем последнее можно получить из формулы общего решения при $D = 0$.

Осталось только вернуться к переменным $(x; y)$ и записать ответ: $(y - 2x)^3 = D(y - x - 1)^2$; $y = x + 1$. $\square$