

1. Электростатика

Урок 4

Мультиполи

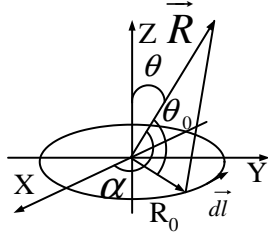
При $r \gg a$, где a – характерный размер системы зарядов, потенциал произвольной системы зарядов

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\Sigma D_{\mu\nu} \frac{x_\mu x_\nu}{r^5} + \dots, \quad (1)$$

где $q = \sum q_k$, $\mathbf{p} = \sum q_k \mathbf{r}'_k$, $D_{\mu\nu} = \sum q_k (3x'_\mu x'_\nu - r'^2_k \delta_{\mu\nu})$, x'^k – координаты заряда q_k , а $r'^2_k = \sum (x'^k)^2$.

1.1. (Задача 1.39) Найти потенциал $\varphi(\mathbf{R})$ поля двух concentric rings радиусом a и b с зарядами q и $-q$ для: а) $R \gg a, b$ и б) $R \ll a, b$.

Решение Сначала вычислим потенциал от одного кольца на больших расстояниях.



Заряженное кольцо радиуса R_0 расположим в плоскости (x, y) . Центр кольца 0 совпадает с началом координат. Ось X направим перпендикулярно плоскости, в которой лежат Z и \mathbf{R} . \mathbf{R} – радиус-вектор точки наблюдения. Поскольку система осесимметрична, результат не должен зависеть от выбора направления оси X . Потенциал, создаваемый зарядом элемента кольца $d\ell = R_0 d\alpha$, в точке (R, θ) равен

$$d\varphi = \frac{q}{2\pi R_0} \frac{R_0 d\alpha}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0 \cos \theta_0}}.$$

Потенциал, создаваемый зарядом всего кольца:

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0 \cos \theta_0}}. \quad (2)$$

Связь углов θ , θ_0 и α определяется из соотношения

$$\cos \theta_0 = \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}_0}{RR_0} = \frac{R_y R_{0y}}{RR_0} = \sin \theta \sin \alpha.$$

Чтобы найти потенциал на расстояниях, больших по сравнению с радиусом кольца, разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора по малому параметру R_0/R

до второго порядка включительно. Поскольку дипольный момент кольца равен нулю, что видно из симметрии расположения зарядов, то оставим в сумме три первых члена:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0 \cos \theta_0}} &= \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - \frac{2R_0}{R} \cos \theta_0}} \simeq \\ &\simeq \frac{1}{R} \left(1 + \frac{R_0}{R} \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 (3 \cos^2 \theta_0 - 1) + \dots \right). \end{aligned}$$

Вычисляя теперь интеграл (1), получаем

$$\varphi = \frac{q}{R} + \frac{q}{4R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta).$$

При вычислении использована связь $\cos \theta_0 = \sin \theta \sin \alpha$. Значит, потенциал от двух концентрических колец радиусов a и b с зарядами q и $-q$ имеет вид

$$\varphi(R, \theta) = \frac{q}{4R^3} (a^2 - b^2) (1 - 3 \cos^2 \theta) \quad \text{при} \quad a, b \ll R.$$

Теперь найдем потенциал кольца радиуса R_0 при $R_0 \gg R$:

$$\begin{aligned} \varphi(R, \theta) &= \frac{q}{R_0} + \frac{q}{2\pi R_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (3 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha - 1) d\alpha = \\ &= \frac{q}{R_0} + \frac{q}{4R_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Тогда потенциал двух колец при $a, b \gg R$ будет иметь вид

$$\varphi(R, \theta) = q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \frac{qR^2}{4} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1).$$

1.2. (Задача 1.42) Найти потенциал электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов:

а) заряды $q, -2q, q$ расположены на оси Z на расстоянии a друг от друга (линейный квадруполь);

б) заряды $\pm q$ расположены в вершинах квадрата, стороны которого параллельны осям X и Y , так что соседние заряды имеют разные знаки, а в начале координат расположен заряд $+q$ (плоский квадруполь).

Решение а)

$$D_{zz} = \sum q_i (3z_i^2 - r_i^2) = 2q2a^2 = 4qa^2 = D$$

$$D_{xx} = D_{yy} = - \sum q_i r_i^2 = -2qa^2$$

$$\varphi = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}$$

$$n_x = \sin \theta \cos \alpha$$

$$n_y = \sin \theta \sin \alpha$$

$$n_z = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{D_{xx}n_x^2 + D_{yy}n_y^2 + D_{zz}n_z^2}{2R_0^3} = \frac{D}{2} \cdot \frac{1}{2R_0^2} (-n_x^2 - n_y^2 + 2n_z^2) = \\ &= \frac{D}{4R_0^3} (-1 + 3n_z^2) = \frac{4qa^2}{4R_0^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

б)

$$D_{xx} = \sum q_i (3x_i^2 - r_i^2) = 0$$

$$D_{yy} = 0$$

$$D_{zz} = 0$$

$$D_{xy} = \frac{3q^{(1)}a^2}{4} + \frac{3q^{(2)}a^2}{4} + \frac{3qa^2}{4} + \frac{3qa^2}{4} = 3qa^2$$

$$D_{yx} = D_{xy} = 3qa^2$$

$$\Phi^{(2)} = \frac{3qa^2}{2R_0^3} \{n_x n_y + n_y n_x\} = \frac{3qa^2}{2R_0^3} \sin^2 \theta \sin 2\alpha$$

а) $\varphi(r, \theta) \simeq \frac{qa^2}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$; б) $\varphi(r, \theta, \alpha) \simeq \frac{3qa^2}{2r^3} \sin^2 \theta \sin 2\alpha$.

1.3. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. задача к § 41) Определить квадрупольный момент однородно заряженного с плотностью ρ эллипсоида относительно его центра. Эллипс имеет полуоси a, b, c .

Решение Заменяя в формуле для элементов тензора квадрупольного момента суммирование интегрированием по объему эллипсоида, имеем

$$D_{xx} = \rho \int (3x^2 - r^2) dx dy dz = \rho \int (2x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz.$$

Остальные диагональные компоненты записываются аналогично. Что касается недиагональных элементов, то можно показать, что они все равны нулю (самостоятельное упражнение). Для вычисления приведенного выше интеграла по объему эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

сделаем замену переменных

$$x = x'a, \quad y = y'b, \quad z = z'c.$$

Тогда интегрирование по новым переменным сведется к интегрированию по шару единичного радиуса

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Очевидно, также, что все интегралы могут быть выражены через 3 интеграла

$$\begin{aligned} I_x &= \int x^2 dV = abca^2 \int x'^2 dV' = a^3 bc \int (r \sin \theta \cos \varphi)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ I_y &= \int y^2 dV = abcb^2 \int y'^2 dV' = ab^3 c \int (r \sin \theta \sin \varphi)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ I_z &= \int z^2 dV = abcc^2 \int z'^2 dV' = abc^3 \int (r \cos \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_x &= a^3 bc \int dr r^4 \int d\theta \sin^3 \theta \int d\varphi \cos^2 \varphi = a^3 bc \frac{1}{5} \frac{4\pi}{3}, \\ I_y &= ab^3 c \frac{1}{5} \frac{4\pi}{3}, \\ I_z &= abc^3 \frac{1}{5} \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Откуда получаем

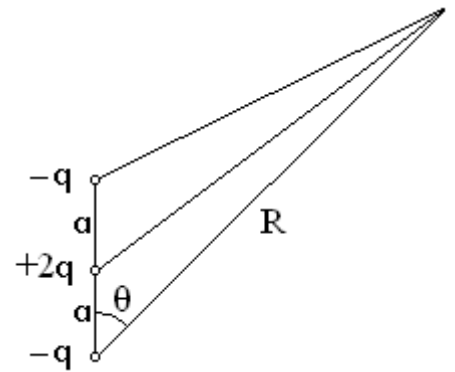
$$\begin{aligned} D_{xx} &= \frac{\rho}{5} abc \frac{4\pi}{3} (2a^2 - b^2 - c^2), \\ D_{yy} &= \frac{\rho}{5} abc \frac{4\pi}{3} (2b^2 - a^2 - c^2), \\ D_{zz} &= \frac{\rho}{5} abc \frac{4\pi}{3} (2c^2 - a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Как и следует из теории $D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$.

Решение задачи 1.42 (второй способ)

Запишем с использованием теоремы косинусов потенциал в точке наблюдения на расстоянии R под углом θ :

$$\varphi = \frac{-q}{R} + \frac{2q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + 4a^2 - 4aR \cos \theta}}$$



Воспользуемся разложением в ряд $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \dots$ при $x \ll 1$, сохраняя слагаемые, содержащие степени не выше второй малого параметра a/R .

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{-q}{R} \left[1 - 2 \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{R} + \frac{a^2}{R^2} \right)^{-1/2} - \left(1 - \frac{4a \cos \theta}{R} + \frac{4a^2}{R^2} \right)^{-1/2} \right] \approx \\ &= \frac{-q}{R} \left[1 - 2 - \frac{2a \cos \theta}{R} + \frac{a^2}{R^2} - \frac{3a^2 \cos^2 \theta}{R^2} + 1 + \frac{2a \cos \theta}{R} - \frac{2a^2}{R^2} + \frac{6a^2 \cos^2 \theta}{R^2} \right] = \\ &= \frac{q}{R} \frac{a^2 (1 - 3 \cos^2 \theta)}{R^2} \end{aligned}$$

Компоненты электрического поля:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{3qa^2}{R^4} (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = -\frac{3qa^2}{R^4} \sin 2\theta$$

Уравнение силовых линий

$$\begin{aligned} \frac{dR}{E_R} &= \frac{R d\theta}{E_\theta} \quad \text{или} \\ \frac{dR}{1 - 3 \cos^2 \theta} &= \frac{R d\theta}{-\sin 2\theta} \end{aligned}$$

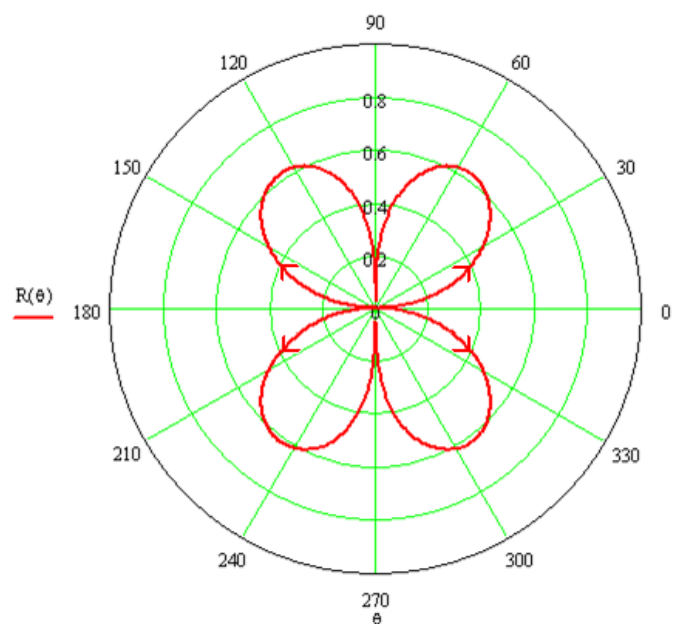
Откуда

$$\begin{aligned} d \ln R &= \frac{(2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta d\theta}{2 \cos \theta} \end{aligned}$$

Интегрируя

$$d \ln R = \frac{1}{2} d \ln (\cos \theta) + d \ln (\sin \theta)$$

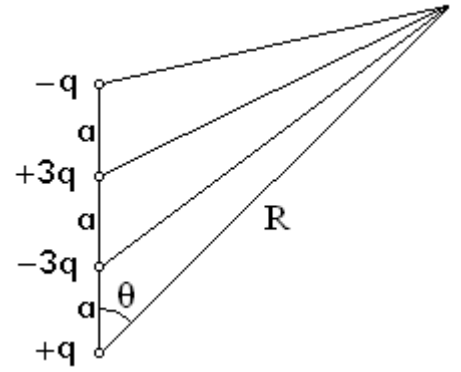
$$\text{, получим: } R = \left| \text{const} \cdot \sin \theta \cdot \cos^{\frac{1}{2}} \theta \right|$$



Решение задачи 1.44

Запишем с использованием теоремы косинусов потенциал в точке наблюдения на расстоянии R под углом θ :

$$\varphi = \frac{q}{R} - \frac{3q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta}} + \frac{3q}{\sqrt{R^2 + 4a^2 - 4aR \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + 9a^2 - 6aR \cos \theta}}$$



Воспользуемся разложением в ряд $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \dots$ при $x \ll 1$, сохраняя слагаемые, содержащие степени не выше третьей малого параметра a/R .

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{R} \left[1 - 3 \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{R} + \frac{a^2}{R^2} \right)^{-1/2} + 3 \left(1 - \frac{4a \cos \theta}{R} + \frac{4a^2}{R^2} \right)^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{6a \cos \theta}{R} + \frac{9a^2}{R^2} \right)^{-1/2} \right] \approx \\ &= \frac{q}{R} \left[1 - 3 - \frac{3a \cos \theta}{R} + \frac{3a^2}{2R^2} - \frac{9a^2 \cos^2 \theta}{2R^2} + \frac{9a^3 \cos \theta}{2R^3} - \frac{15a^3 \cos^3 \theta}{2R^3} \right. \\ &\quad \left. + 3 + \frac{6a \cos \theta}{R} - \frac{6a^2}{R^2} + \frac{18a^2 \cos^2 \theta}{R^2} - \frac{36a^3 \cos \theta}{R^3} + \frac{60a^3 \cos^3 \theta}{R^3} \right. \\ &\quad \left. - 1 - \frac{3a \cos \theta}{R} + \frac{9a^2}{2R^2} - \frac{27a^2 \cos^2 \theta}{2R^2} + \frac{81a^3 \cos \theta}{2R^3} - \frac{135a^3 \cos^3 \theta}{2R^3} \right] = \\ &= \frac{q}{R} \frac{a^3 (9 \cos \theta - 15 \cos^3 \theta)}{R^3}. \end{aligned}$$