

# Суперпозиции

## Определение:

**Суперпозиция функций** (или **сложная функция**, или **композиция функций**, англ. *function composition*) — это функция, полученная из некоторого множества функций путем подстановки одной функции в другую или отождествления переменных.

Множество всех возможных не эквивалентных друг другу суперпозиций данного множества функций образует замыкание данного множества функций.

## Содержание

- 1 Способы получения суперпозиций
  - 1.1 Подстановка одной функции в другую
  - 1.2 Отождествление переменных
- 2 Ранги суперпозиций
- 3 См. также
- 4 Источники информации

## Способы получения суперпозиций

Рассмотрим две булевы функции: функцию  $f$  от  $n$  аргументов  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и функцию  $g$  от  $m$  аргументов  $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

Тогда мы можем получить новую функцию из имеющихся двумя способами:

1. Подстановкой одной функции в качестве некоторого аргумента для другой;
2. Отождествлением аргументов функций.

## Подстановка одной функции в другую

### Определение:

**Подстановкой** (англ. *substitution*) функции  $g$  в функцию  $f$  называется замена  $i$ -того аргумента функции  $f$  значением функции  $g$ :

$$h(x_1, \dots, x_{n+m-1}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, \dots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \dots, x_{n+m-1})$$

Допускается также не только подстановка одной функции в другую, но и подстановка функции в саму себя.

При подстановке функции  $g$  вместо  $i$ -того аргумента функции  $f$ , результирующая функция  $h$  будет принимать аргументы, которые можно разделить на следующие блоки:

1.  $x_1, \dots, x_{i-1}$  — аргументы функции  $f$  до подставленного значения функции  $g$

2.  $x_i, \dots, x_{i+m-1}$  — используются как аргументы для вычисления значения функции  $g(y_1, \dots, y_m)$

3.  $x_{i+m}, \dots, x_{n+m-1}$  — аргументы функции  $f$  после подставленного значения функции  $g$

### Пример:

Исходные функции:

$$1. f(a, b) = a \vee b$$

$$2. g(a) = \neg a$$

$h(a, b) = f(a, g(b)) = a \vee \neg b$  — подстановка функции  $g$  вместо второго аргумента функции  $f$ .

В данном примере при помощи подстановки мы получили функцию  $h(a, b) = a \leftarrow b$ .

## Отождествление переменных

### Определение:

**Отождествлением переменных** (англ. *identification of variables*) называется подстановка  $i$ -того аргумента функции  $f$  вместо  $j$ -того аргумента:

$$h(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Таким образом, при отождествлении  $c$  переменных мы получаем функцию  $h$  с количеством аргументов  $n - c + 1$ .

### Пример:

$f(a, b) = a \vee b$  — исходная функция

$h(a) = a \vee a$  — функция с отождествленными первым и вторым аргументами

Очевидно, в данном примере мы получили функцию  $P_1$  — проектор единственного аргумента.

## Ранги суперпозиций

### Определение:

**Ранг суперпозиции** (англ. *rank of function composition*) — это минимальное число подстановок и отождествлений, за которое суперпозиция может быть получена из исходного множества функций.

Суперпозиция  $K$  ранга  $n$  обозначается как  $K^n$

## См. также

- Булевы функции

- Представление функции формулой, полные системы функций

## Источники информации

- Осипова В.А., Основы дискретной математики: Учебное пособие, М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2006, стр 62-63
- Композиция функций в математике ([http://ru.wikipedia.org/wiki/Композиция\\_функций](http://ru.wikipedia.org/wiki/Композиция_функций))
- Е.Л. Рабкин, Ю.Б. Фарфоровская, Дискретная математика, Глава 7: Суперпозиция функций. Замыкание набора функций. Замкнутые классы функций. Полные наборы. Базисы (<http://mini-soft.ru/nstu/diskr/index.php>)

Источник — «<http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Суперпозиции&oldid=84620>»

---

- Эта страница последний раз была отредактирована 4 сентября 2022 в 19:12.