4. Формирование аксиально-симметричного магнитного поля с помощью круговых витков

В процессе работы студенты узнают, как выглядят при графическом отображении на экране дисплея поля простых систем (виток, кольца Гельмгольца, многовитковый соленоид и др.), осваивают методику расчета коэффициентов взаимоиндукции системы витков, знакомятся с ролью краевых эффектов в формировании поля реального соленоида.

4.1. Магнитные поля системы витков

Для формирования постоянного магнитного поля с заданной пространственной конфигурацией используются различные типы конструкции электромагнитов. Наиболее распространенный способ формирования полей в диапазоне 1-20 кЭ связан с применением железных полос, чьи поверхности с определенной точностью можно считать "магнитными эквипотенциалями" /1, §41,42/.

Однако, для создания слабых полей бывает удобна, а для сверхсильных полей (заметно превышающих индукцию насыщения железа) - и просто необходима безжелезная конструкция электромагнитов, где формирование поля нужной конфигурации осуществляется надлежащим расположением и выбором формы токонесущих проводников. Такие магнитные системы имеют широкое применение в экспериментальной физике, например, при создании ловушек для удержания плазмы в работах по управляемому термоядерному синтезу.

В данной задаче рассматривается аксиально-симметричная магнитная система, состоящая из нескольких пар тонких соосных круговых витков, имеющая плоскость симметрии верх-низ. Программа дает возможность, варьируя величины тока, расположение и размеры витков, формировать аксиально-симметричное магнитное поле требуемой конфигурации.

Краткая сводка простейших формул. Поле одиночного витка радиуса R на оси z[*] :

$$H_z = \frac{2\pi I}{c} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Поле бесконечного прямолинейного тока

$$H_z = \frac{2I}{cr}.$$

Поле бесконечного соленоида (n - плотность намотки)

$$H_z = \frac{2\pi}{c} \cdot nI.$$

Поле системы пар витков вблизи нуля можно разложить в ряд:

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cdot r^n,$$

[*] Здесь и далее везде используется Гауссова система единиц (СГС).

где $h_n = \dfrac{2\pi I}{c} \cdot \dfrac{\sin^2\theta_0}{b^{n+1}} \cdot P'_{n+1}(\cos\theta_0)$, $b = (z^2 + R^2)^{1/2}$, $\qquad \sin\theta_0 = R / b$.

(См. прил. 4.2.).

Поток, индуктивность и взаимная индуктивность:

$$\Phi = L \cdot I / c, \quad \Phi_2 = L_{12} \cdot I_1 / c, \qquad (L_{12} = L_{21}),$$

$$L = \sum_{k=1}^{N} L_k + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} L_{ik}, \qquad (i = k).$$

Соотношение между различными системами единиц при $\mu = 1$:
в СГС $\vec{B} = \vec{H}$ и $\mathbf{1}$Э = $\mathbf{1}$Гс, $\mathbf{1}$Гс (СГС) = 10^{-4}Т (СИ), $\mathbf{1}$Э = $10^3 / (4\pi)$ А/м, магнитный поток $\mathbf{1}$Мкс = 10^{-8}Вб, индуктивность $\mathbf{1}$см = 10^{-9}Гн.

4.2. Краткое описание программы VIT

В данной задаче рассматривается аксиально-симметричная магнитная система, состоящая из нескольких пар тонких соосных круговых витков. Программа дает возможность, варьируя величины тока, расположение и размеры пар витков, формировать аксиально-симметричное магнитное поле требуемой конфигурации.

Программа работает в цилиндрической системе координат: центры витков лежат на оси Z, их плоскости параллельны плоскости XY, плоскость Z = 0 является плоскостью зеркальной симметрии.

После загрузки программы на экране дисплея высвечивается главное меню, содержащее следующие директивы:

Моменты Однородность Поле Задания Выход О_задаче

МОМЕНТЫ. Таблица мультипольных моментов. На экране дисплея распечатываются пять четных мультипольных коэффициентов для каждой пары витков, а также суммарные значения мультипольных коэффициентов, что позволяет целенаправленно выбирать их параметры для создания заданной конфигурации поля. Система тонких витков (витки коаксиальны) определяется: Z - координатой положения витка, для каждого витка автоматически создается симметричный ему виток: Z = -Z, R = R, ток I = ток I. Ввод величины тока I в каждой из пар витков, радиуса R и положения Z токового кольца осуществляется в форме таблицы. Расположение витков отображается на экране дисплея. Если расположение витков не отвечает желаемому, есть возможность вновь вернуться на задание системы тонких витков с помощью клавиши <Esc>.

ОДНОРОДНОСТЬ. На дисплей выводится карта неоднородности δ для компоненты H_z:

$$\delta = \frac{H_z(r,z) - H_0}{H_0} \cdot 100\%$$

с цветовыми градациями, заданными с терминала. Поле рассчитывается в узлах сетки и в дальнейшем интерполируется.

ПОЛЕ. На дисплей выводится карта магнитного потока - линии $\Phi = 2\pi r A_\alpha = const$. При этом область, в которой поток изменяется в пределах задаваемой с терминала градации, закрашивается одним цветом. В этом случае каждое *цветовое поле соответствует трубке равного потока, а границы между ними совпадают с силовыми линиями*. Если при выводе выбрана неудачная градация потока поля (*линии слишком часты или редки*), то можно прервать вывод клавишей <Esc> и повторить вывод на дисплей без пересчета, *задав другую величину градации*.

В программе предусмотрено построение карты для всей области (меню "ОБЛАСТЬ"), четверти области ($R \geq 0,\ \ Z \geq 0$) (меню ЧЕТВЕРТЬ"). Кроме того, можно вывести на экране дисплея таблицу узловых значений H_z и H_r в пределах $0 \leq R \leq R_{\max}$, $0 \leq Z \leq Z_{\max}$ (меню "ЗНАЧЕНИЯ").

4.3. Примеры заданий

1) В системе из одной пары витков подберите их размеры, расположение и ток так, чтобы поле в центре было равно 10кГс (1Т) и было однородным с точностью 1% в области размером 10см. (Попытайтесь обратить в ноль квадратичную нелинейность поля - "кольца Гельмгольца"). Объясните результат с помощью формул. Исследуйте размеры области, где H_z однородно с точностью 0.1%, 10%. Как увеличить размеры этой области? (См. прил. 4.3, задача 4.14*).

2) В предыдущей задаче добавьте еще одну пару витков так, чтобы занулить нелинейности 2-го и 4-го порядка. Исследуйте размеры области однородности, сравнить ее со случаем в п.1.

3) Задайте систему из 10(20) витков так, чтобы размер области однородности был максимален.

УКАЗАНИЕ. Вы можете попытаться использовать:

а) соленоид;

б) сферу с равномерной по z намоткой;

в) сферу с плотной (виток к витку) намоткой.

В случаях б) и в) найдите, каким должно быть распределение тока по виткам? (См. прил. 4.3, зад. 4.23, 6.10)

4) Исследуйте однородность поля соленоида в зависимости от соотношения его высоты и радиуса, а также от плотности намотки. Объяснить отличие поля в центре H_0 от величины $\frac{4\pi}{c} \cdot In$. При каких условиях поле снаружи соленоида мало (т.е. $<< H_0$)? (См. прил. 4.3, зад. 4.1, 4.24.).

5) Выбрав очень малые радиусы витков соленоида, посмотрите поле вдали от одного из его концов. Рассмотрите поле системы двух коаксиальных соленоидов (один вставлен в другой) при совпадающих по направлению и противоположных токах.

6) Задав несколько витков, проследите ход трубок магнитного потока и вычислите взаимоиндукцию этих витков.

7) Пользуясь картой магнитного потока, вычислите потокосцепление и индуктивность соленоида, составленного из 8-10 витков. Какую роль в этих вычислениях играет толщина витков? Проследите провисание поля через пространство между витками соленоида.

8) Для двух пар витков найдите силу, действующую между ними.

УКАЗАНИЕ. Вы можете попытыться сделать это несколькими способами:

а) посмотреть, на сколько измениться индуктивность при малом смещении одной пары, а, значит, и на сколько изменится энергия; затем легко найти силу;

б) оценить поле, действующее на виток, а затем вычислить силу.

Приложение 4.1. Вычисление поля кругового витка

---

* Все задачи в приложении 4.3 взяты из /4/ с сохранением нумерации.

В программе вычисляется суперпозиция вкладов каждой пары витков в величину векторного потенциала $\vec{A}$ магнитного потока Φ:

$$\Phi = \int \vec{H} d\vec{S} = \int rot\vec{A} d\vec{S} = \oint \vec{A} d\vec{\ell} = 2\pi r A_\alpha$$

и напряженности магнитного поля $\vec{H}$.

Для вычисления векторного потенциала используется известное выражение /1, §31/:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

где I - ток в витке, а интеграл берется по замкнутому контуру кругового витка радиуса R.

$$\vec{r} = (r, 0, z),$$

$$\vec{r}' = (R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0),$$

$$d\vec{\ell} = (-R\sin\alpha, R\cos\alpha, 0)d\alpha,$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + R^2\sin^2\alpha + (r - R\cos\alpha)^2} = \sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr\cos\alpha}.$$

В силу аксиальной симметрии задачи можно без ограничения общности поместить точку наблюдения $\vec{r}$ в плоскость XZ. Компонента $A_x = 0$, поскольку соответствующая ей подынтегральная функция нечетна. Тогда оставшаяся компонента A_y совпадает по смыслу с A_α в цилиндрических координатах (учитываем аксиальную симметрию и возможность произвольной ориентации осей X и Y!):

$$A_\alpha = \frac{I}{c} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R \cdot \cos\alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cdot \cos\alpha}}.$$

Используя четность подынтегральной функции и вводя замену переменной $\alpha = \pi - 2\beta$, приводим интеграл к виду:

$$A_\alpha = \frac{4IR}{c} \int_0^{\pi} \frac{(2\sin^2\beta - 1)\, d\beta}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2 - 4Rr \cdot \sin^2\beta}}.$$

Вводя параметр k

$$k^2 = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + z^2}$$

и выполняя тождественное преобразование в числителе:

$$2\sin^2\beta - 1 = \frac{1}{k^2}\left[2 - k^2 - 2(1 - k^2\sin^2\beta)\right],$$

получаем в итоге:

$$A_\alpha = \frac{4IR}{c\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \cdot \left[\frac{2-k^2}{k^2} \cdot K(k) - \frac{2}{k^2} \cdot E(k)\right],$$

где $K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}}$, $\qquad E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}\, d\beta.$

Таким образом, координатная зависимость векторного потенциала задается зависящими от параметра k определенными интегралами $K(k)$ и $E(k)$, которые являются широко известными специальными функциями с хорошо изученными свойствами /7, стр.109 и далее/ и именуются полными эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода, соответственно. Для вычисления их значений можно использовать их степенные ряды, однако в программе применяются более эффективные равномерные аппроксимации функций полиномами.

Дифференцируя A_α (и выражая K' и E' через K и E /7, стр.119/), находим компоненты магнитного поля:

$$H_r = \frac{2I}{c} \cdot \frac{z}{r\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \cdot \left[-K(k) + \frac{R^2 + r^2 + z^2}{(R-r)^2 + z^2} \cdot E(k)\right],$$

$$H_z = \frac{2I}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \cdot \left[K(k) + \frac{R^2 - r^2 - z^2}{(R-r)^2 + z^2} \cdot E(k)\right].$$

Для вычисления вклада от пары витков используются полученные выражения для A_α, H_z и H_r с заменой в них z на $z - z_c$ и $z + z_c$, где z_c - координата центра витка.

Приложение 4.2. Мультипольное разложение полей кругового витка в окрестности центра системы

В области пространства, не содержащей токов, $rot\vec{H} = 0$, следовательно, появляется возможность описывать магнитное поле с помощью скалярного потенциала ψ $(\vec{H} = -\vec{\nabla}\psi)$, подчиняющегося уравнению Лапласа $\nabla\psi = 0$ (ибо $div\vec{H} = 0$). Тогда, по аналогии с электростатическим потенциалом, можно с помощью разделения переменных в сферических координатах записать общее решение для скалярного потенциала аксиально-симметричного магнитного поля в виде степенного ряда по координате r:

$$\psi = -\frac{2\pi I}{c}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n \cdot P_n(\cos\theta),$$

причем зависимость коэффициентов этого ряда от координаты задается полиномами Лежандра $P_n(\cos\theta)$ (См. прил. 2.3).

Нас интересуют выражения для коэффициентов a_n в случае поля кругового витка. На его оси поле вычисляется элементарно:

$$H_z = \frac{2\pi I}{c} \cdot \frac{R^2}{\left[R^2 + (z - z_c)^2\right]^{3/2}} \,.$$

Интегрируя H_z по z, получим скалярный потенциал на оси витка:

$$\psi = -\frac{2\pi I}{c} \cdot \frac{z - z_c}{\sqrt{R^2 + (z - z_c)^2}} \,.$$

Перейдем в этом выражении к сферическим координатам:

$$\psi = -\frac{2\pi I}{c} \cdot \frac{r - b \cdot \cos\theta_0'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos\theta_0}} \,.$$

Разлагая знаменатель по полиномам Лежандра /8, стр.496/, находим $\psi(r)$ на оси витка ($r < b; \quad \theta = 0, \pi$):

$$\psi = -\frac{2\pi I}{c} \cdot (r - b\cos\theta_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{b^{n+1}} \cdot P(\cos\theta_0) \,.$$

Общее решение (1) на оси в силу равенства $P_n(1) = 1$ имеет простой вид:

$$\psi = -\frac{2\pi I}{c} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n \,.$$

Приравнивая почленно ряды (3) и (2), находим неизвестные коэффициенты a_n:

$$a_0 = -\cos\theta_0 \cdot P_0(\cos\theta_0);$$

$$a_1 = \frac{1}{b}\left[P_0(\cos\theta_0) - \cos\theta_0 \cdot P_1(\cos\theta_0)\right];$$

$$a_2 = \frac{1}{b^2}\left[P_1(\cos\theta_0) - \cos\theta_0 \cdot P_2(\cos\theta_0)\right] \text{ и т.д.}$$

Опуская в рядах несущественную константу (член с $n = 0$), получаем в общем виде для $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{b^n}\left[P_{n-1}(\cos\theta_0) - \cos\theta_0 \cdot P_n(\cos\theta_0)\right].$$

Используя известные соотношения для $P_n(x)$ /8, стр.495, прил. 2.3/:

$$(1 - x^2) = \frac{dP_n(x)}{dx} = n\left[P_{n-1}(x) - x \cdot P_n(x)\right]$$

выражаем результат через производную от P_n:

$$a_n = \frac{1-\cos^2\theta_0}{n\cdot b^n}\cdot P_n'(\cos\theta_0)$$

и получаем окончательные выражения для скалярного потенциала и компонент магнитного поля кругового витка в сферических координатах с учетом разложения (1):

$$\psi = -\frac{2\pi I}{c}\cdot\sin^2\theta_0\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{r}{b}\right)^n\cdot P_n'(\cos\theta_0)\cdot P_n(\cos\theta);$$

$$H_r = \frac{2\pi I}{c}\cdot\sin^2\theta_0\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{b^n}\cdot P_n'(\cos\theta_0)\cdot P_n(\cos\theta);$$

$$H_\theta = -\frac{2\pi I}{c}\cdot\sin^2\theta_0\cdot\sin\theta\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{nb^n}\cdot P_n'(\cos\theta_0)\cdot P_n(\cos\theta).$$

На оси ($\theta = 0, \pi$) ($5'$) упрощается:

$$H_r = \sum_{n=0}^{\infty} h_n r^n,$$

где

$$h_n = \frac{2\pi I}{c}\cdot\frac{\sin^2\theta_0}{b^{n+1}}\cdot P_{n+1}'(\cos\theta_0)$$

являются коэффициентами степенного разложения вертикальной компоненты поля на оси системы. Именно они и вычисляются программой для каждой пары витков, причем в силу зеркальной симметрии

$$P_{n+1}'\left((\cos(\pi-\theta_0)\right) = P_{n+1}'(-\cos\theta_0) = (-1)^n\cdot P_{n+1}'(\cos\theta_0)$$

и все h_n с нечетными номерами обращаются в ноль для пары таких витков, а все четные h_n - удваиваются. Вычисление значений $P_n'(\cos\theta_0)$ и $P_n(\cos\theta)$ осуществляется по известным рекуррентным соотношениям (/8, стр.495/, прил. 2.3):

$$(n+1)P_{n+1}(x) = \left[(2n+1)\cdot x\cdot P_n(x) - n\cdot P_{n-1}(x)\right].$$

Формулы ($5'$) и ($5''$) позволяют выразить компоненты поля в цилиндрических координатах:

$$H_Z = H_r\cos\theta - H_\theta\sin\theta = \frac{2\pi I}{c}\cdot\sin^2\theta_0\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{b^{n+1}}\cdot P_{n+1}'(\cos\theta_0)\cdot P_n(\cos\theta),$$

$$H_R = H_r\sin\theta - H_\theta\cos\theta = -\frac{2\pi I}{c}\cdot\sin^2\theta_0\cdot\sin\theta\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{(n+1)b^{n+1}}\cdot P_{n+1}'(\cos\theta_0)\cdot P_n'(\cos\theta).$$

Выражение (7) весьма полезно при анализе карты однородности поля.

Приложение 4.3. Задачи

4.1. Найти поле на оси и в центре кругового витка радиуса R с током I. Используя результат, найти:

а) поле на оси круглого соленоида в точке из которой его края видны под углами α_1, α_2;

б) поле на конце полубесконечного соленоида;

в) поле внутри бесконечного соленоида. Число витков на единицу длины соленоида n.

Ответ: $H_z = \dfrac{2\pi IR^2}{c(R^2+z^2)^{3/2}}$.

а) $H_z = \dfrac{2\pi In}{c}\cdot(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$,

б) $H_z(0) = \dfrac{2\pi In}{c}$,

в) $H_z = \dfrac{2\pi In}{c}$.

4.14. Найти положение границ и оценить объем однородного с точностью до $\Delta H / H = 0.01$ магнитного поля, создаваемого током I, идущим в витках радиуса R=10см. Отрезок $O_1O_2 = R$, соединяющий центры витков, перпендикулярен их плоскостям (кольца Гельмгольца).

Ответ: $H_z(r,z) = \dfrac{32\pi}{5\sqrt{5}}\left(1 - 1.670\dfrac{r^2}{R^2} - 1.152\dfrac{z^2}{R^4}\right)\cdot\dfrac{I}{cR}$, где расстояния r и z отсчитываются от середины отрезка O_1O_2 поперек и вдоль него соответственно, область однородности поля с заданной величиной δ есть цилиндр радиуса $r = R\sqrt{\delta/1.67}$ и длины $L = 2R\sqrt[4]{\delta/1.152}$, $r = 0.775$см, $L = 6.1$ см, $V = \pi r^2 L = 11.5$ см^3.

4.23. Шар (сфера) радиуса R заряжен зарядом q равномерно по объему (поверхности) и вращается вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью ω. Найти магнитное поле внутри и вне шара (сферы); выразить его напряженность через магнитный момент шара (сферы) $\vec{m}$.

Ответ: Вне шара (сферы) $\vec{H} = -\dfrac{\vec{m}}{r^3} + \dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, где $\vec{m}$ -магнитный момент шара (сферы). Внутри сферы $\vec{H} = \dfrac{2q\vec{\omega}}{2cR} = \dfrac{2\vec{m}}{R^3}$; внутри шара $\vec{H} = \dfrac{5\vec{m}}{R^3} - \dfrac{6\vec{m}^*}{r^3} + \dfrac{3(\vec{m}^*\cdot\vec{m})\vec{r}}{r^5}$, где $\vec{m}^*$ - момент шара радиуса r, $\vec{m}$ - момент всего шара.

4.24. Найти поле полубесконечного соленоида на расстоянии r от его торца ($r >> \sqrt{S}$) под углом θ к его оси. Ток в соленоиде I, число витков на единицу длины n, сечение S.

Ответ: $\vec{H} = \dfrac{q_m\cdot\vec{r}}{r^3}$, где $q_m = In\cdot S/c$ - "магнитный заряд" соленоида. Это модель "монополя Дирака".

6.10. Найти индуктивность соленоида с числом витков n >> 1, намотанного тонким слоем на шарообразный сердечник радиуса R с магнитной проницаемостью μ так, что витки лежат вдоль линии $\theta = const$, а плотность намотки меняется по закону:

$$n(\theta) = (N/2R)\cdot\sin\theta, \text{ причем } \int_0^\pi n(\theta)\,d\theta = N.$$

Ответ: $L = \frac{8\pi^2}{3} \cdot \frac{\mu}{\mu + 2} \cdot N^2 R$, поле внутри однородное $H = \frac{4\pi NI}{c(\mu + 2) R}$, а магнитный момент дипольного поля снаружи $m = \frac{2\pi\mu}{\mu + 2} \cdot \frac{INR^2}{c}$.