Министерство образования Республики Беларусь

Белорусский государственный университет

Физический факультет

Кафедра высшей математики и математической физики

СОГЛАСОВАНО
Заведующая кафедрой
____________ Абрашина–Жадаева Н. Г.
«__»____________ 2016 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан
____________ Анищик В. М.
«__»____________ 2016 г.

«Основы векторного и тензорного анализа»

электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине

Для специальностей:
1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность)
1-31 04 01-03 Физика (научно-педагогическая деятельность)
1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность)

Составитель:
Н.Г.Абрашина-Жадаева, И.А. Тимощенко

Рассмотрено и утверждено
на заседании Научно-методического совета БГУ
«30» июня 2016 г., протокол № 7

Минск 2016

УДК 514.742(075.8)+514.743(075.8)+517.51(075.8)

Решение о депонировании документа вынес Ученый Совет физического факультета (протокол № 11 от «27» июня 2016 г.)

Составители:

заведующая кафедрой высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, д. ф.-м. н. РФ, доцент
Абрашина-Жадаева Наталья Григорьевна;

старший преподаватель кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета
Тимощенко Игорь Андреевич;

Рецензенты:

кафедра прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета (заведующий кафедрой доктор экономических наук Г.О.Читая)

профессор кафедры теоретической физики и астрофизики Белорусского государственного университета, д. ф.-м. н., доцент
А.В.Новицкий

Основы векторного и тензорного анализа : электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Основы векторного и тензорного анализа» для специальностей: 1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность); 1-31 04 01-03 Физика (научно-педагогическая деятельность); 1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность) / БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики ; сост. Н.Г.Абрашина-Жадаева, И.А.Тимощенко. – Минск : БГУ, 2016. – стр. 139. : ил. – Библиогр.: с. 6–7.

Учебно-методический комплекс «Основы векторного и тензорного анализа» подготовлен в соответствии с базовой учебной программой УД-208 от 18.12.2013 г. в целях учебно-методического обеспечения студентов 1-го курса физического факультета. Задачей настоящего ЭУМК является систематизация изучения студентами курса «Основы векторного и тензорного анализа», а также помощь в организации практических занятий начинающим преподавателям.

Содержание

Часть I

Пояснительная записка

Векторное и тензорное исчисление является неотъемлемой частью инструментария для исследований в области геометрии, механики и физики в целом. На основе требований образовательных стандартов и базовой программы для этой дисциплины создан настоящий электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК). Он предназначен для студентов 1-го курса физического факультета Белорусского государственного университета (БГУ).

Задача ЭУМК — помочь студенту освоить необходимые навыки для успешного применения полученных знаний в научно-технических задачах. Электронный учебно-методический комплекс нацелен дать студентам физических специальностей современные знания и хорошую практическую подготовку, а также быть полезным в организации практических занятий начинающим преподавателям.

Для освоения курса предлагается использовать следующие книги.

Основная литература:

[1] Основы векторного и тензорного анализа : теория, задачи : учеб. пособие / Н. Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимощенко. – Минск : БГУ, 2011. – 255 с. — ил. — (Классическое университетское издание).

[2] Высшая математика : сборник задач : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по физико-математическим спец. : в 3 ч. Ч. 1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной / [авт.: В. К. Ахраменко и др.] ; под ред. Н. Г. Абрашиной-Жадаевой, В. Н. Русака / БГУ. – Минск : БГУ, 2013. – 359 с. : ил.

[3] Высшая математика. Сборник задач : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2. Линейная алгебра. Анализ функций многих переменных / В. К. Ахраменко [и др.] ; под ред. Н. Г. Абрашиной-Жадаевой, В. Н. Русака. -– Минск : БГУ, 2014. — 384 с.

[4] Будак Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 511 с.

[5] Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Ч. 2. – 464 с.

[6] Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии / П.К. Рашевский. – М.: Еди-ториал УРСС, 2003. – 2003 с.

[7] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 664 с.

[8] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 559 с.

[9] Краснов М.Л. Векторный анализ / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 144 с.

Дополнительная литература:

[10] Н.Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: Наука, 1965. – 426 с.

[11] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1981. – Ч. 2. – 416 с.

[12] Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство / Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин. – М.: Из.-во МГУ, 1990. – 384 с.

[13] Сборник задач по дифференциальной геометрии / И.В. Белько [и др.]; под общ. ред. А.С. Феденко. – М.: Наука, 1979. – 272 с.

[14] Дифференциальная геометрия, топология и тензорный анализ: сб. задач / Н.И. Ко-ванцов [и др.] – 2-е изд. – К.: Выща шк., 1989. – 398 с.

[15] Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, ме-ханике и физике / А.Дж. Мак-Коннел. – М.: Физматгиз, 1963. – 411 с.

[16] Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление / М.А. Акивис, В.В. Гольдберг. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

[17] Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков / Я.А. Схоутен. – М.: Наука, 1965. – 456 с.

Теоретический материал можно изучать по учебникам [4–7], которые в достаточном количестве содержаться в фундаментальной библиотеке БГУ. Поскольку каждый из предлагаемых учебников содержит часть изучаемого материала, в Части II данного ЭУМК приводится конспект лекций.

Практические занятия провоятся с использованием учебных пособий [1] и [3]. В пособиях содержится краткий теоретический материал, разобранные примеры и задачи для решения в аудитории и самостоятельно. Фундаментальная библиотека БГУ имеет достаточное количество данных пособий, а так же можно воспользоваться электронной версией данных книг, размещенных в Электронной библиотеке БГУ[1] Для дополнительной работы можно использовать [8, 9, 13, 14]. Учебное пособие [2] будет полезно для повторения материала дисциплин «Математический

[1]Используйте гиперссылки в списке литературы.

анализ» и «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» первого семестра, который необходим для усвоения данной дисциплины. План практических занятий а так же домашних работ приведен в Части III.

В помощь студенту создан сопровождающий онлайн-ресурс

«Основы векторного и тензорного анализа»[2]

для смешанного обучения с асинхронным обучением интерактивного адаптированного типа. Для того, чтобы записаться на этот ресурс необходимо узнать кодовое слово у преподавателя.

Учебная часть данного ресурса содержит в основном два типа элементов — книги и тесты. Всего ресурс содержит 8 книг, три тренировочных теста и 3 итоговых теста. Книги включают краткие сведения из теории, графический материал, а так же для оживления картинки используются современные достижения программного обеспечения – интерактивные объекты, созданные на основе Geogebra и Wolfram Language. Контроль и самоконтроль знаний происходит в тестовом режиме. В тестах используются семь типов вопросов: множественный выбор, числовой ответ, вычисляемый, выбор пропущенных слов, перетаскивание в текст, на соответствие, drag-and-drop matching. Для самоконтроля созданы тренировочные тесты, примеры которых приведены в Части IV. Данные тесты могут проходится произвольное число раз. Три итоговых теста проходятся один раз в строго ограниченный момен времени (день или несколько). Оценки итоговых тестов включаются итоговую рейтинговую оценку по результатам семестра.

В итоговую оценку так же входят результаты трех контрольных, примеры которых можно найти в Части IV.

Данное ЭУМК в Части IV также содержит вопросы и задания, предлагаемые на зачете и экзамене.

[2]Данный ресурс вошел в число призеров конкурса образовательных онлайн-ресурсов БГУ 2016 года

Часть II

Конспект лекций

1 Основы дифференциальной геометрии

1.1 Векторная функция скалярного аргумента

Рассмотрим трехмерное аффинное евклидово пространство $\mathfrak{E}^3$. Пусть $\{t\}$ – связное множество точек на прямой $\mathbb{R}$ (сегмент, полусегмент, интервал, открытая или замкнутая полупрямая, вся прямая).

Определение 1.1. Будем говорить, что на множестве $\{t\}$ задана векторная функция $\vec{r}(t)$, если каждому значению $t \in \{t\}$ ставится в соответствие по определенному правилу вектор $\vec{r}(t)$.

Для векторных функций в полной аналогии со скалярными функциями вводится понятия предела и непрерывности.

Определение 1.2. Вектор $\vec{r}_0$ называется пределом векторной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 (при $t \to t_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для всех $t \in \{t\}$, удовлетворяющих условию $0 < |t - t_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| < \varepsilon$.

Иными словами, значение векторной функции $\vec{r}(t)$ стремится к постоянному вектору $\vec{r}_0$ при $t \to t_0$ если разность векторов $\vec{r}(t) - \vec{r}_0$ стремится к нулю по модулю. Такое определение сводит понятие предела векторной функции к понятию о стремлении к нулю вещественной функции. Будем записывать предел следующим образом:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0.$$

Определение 1.3. Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется непрерывной в точке $t_0 \in \{t\}$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$. Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется непрерывной на множестве $\{t\}$ если она непрерывна в каждой его точке.

Теорема 1.1. Пусть векторные функции $\vec{r}(t)$, $\vec{R}(t)$ и скалярная функция $\lambda(t)$ имеют пределами при $t \to t_0$ векторы $\vec{r}_0$, $\vec{R}_0$ и число λ_0 соответственно. Тогда справедливы следующие выражения:

1. $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}(t) + \vec{R}(t)) = \vec{r}_0 + \vec{R}_0$
2. $\lim\limits_{t\to t_0} \lambda(t)\vec{r}(t) = \lambda_0\vec{r}_0$
3. $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) \cdot \vec{R}(t) = \vec{r}_0 \cdot \vec{R}_0$
4. $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) \times \vec{R}(t) = \vec{r}_0 \times \vec{R}_0$

Теорема 1.2. Пусть векторные функции $\vec{r}(t)$, $\vec{R}(t)$ и скалярная функция $\lambda(t)$ непрерывны на множестве $\{t\}$. Тогда функции $\vec{r}(t) + \vec{R}(t)$, $\lambda(t)\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t) \cdot \vec{R}(t)$, $\vec{r}(t) \times \vec{R}(t)$ также непрерывны на $\{t\}$.

Следствие. *Если векторная функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на множестве $\{t\}$, то функция $|\vec{r}(t)|$ также является непрерывной на этом множестве.*

Определение 1.4. Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется дифференцируемой в точке t_0, если существует предел

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0},$$

который называется ее производной в этой точке и обозначается как $\vec{r}\,'(t_0)$, либо $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t_0)}{\mathrm{d}t}$. Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется дифференцируемой на множестве $\{t\}$ если она дифференцируема в каждой его точке.

Теорема 1.3. Пусть векторные функции $\vec{r}(t)$, $\vec{R}(t)$ и скалярная функция $\lambda(t)$ дифференцируемы в точке t_0. Тогда в этой точке будут дифференцируемы следующие функции, причем:

1. $(\vec{r}(t) + \vec{R}(t))' = \vec{r}\,'(t) + \vec{R}'(t)$
2. $(\lambda(t)\vec{r}(t))' = \lambda'(t)\vec{r}(t) + \lambda(t)\vec{r}\,'(t)$
3. $(\vec{r}(t) \cdot \vec{R}(t))' = \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{R}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{R}'(t)$
4. $(\vec{r}(t) \times \vec{R}(t))' = \vec{r}\,'(t) \times \vec{R}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{R}'(t)$

Отметим, что задание векторной функции равносильно заданию трех скалярных функций. Действительно, рассмотрим некоторую прямоугольную систему координат $(Oxyz)$ с ортонормированным базисом $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Для каждого значения

$t \in \{t\}$ вектор $\vec{r}(t)$ может быть разложен по этому базису

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z,$$

где скалярные функции $x(t),\ y(t),\ z(t)$ являются компонентами вектора $\vec{r}(t)$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Нетрудно показать, что векторная функция непрерывна и дифференцируема, то ее компоненты $x(t),\ y(t),\ z(t)$ также непрерывны и дифференцируемы, причем

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Справедливо и обратное.

Пусть функция $\vec{r}(t)$ n-раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки t_0. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}\vec{r}\,''(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\vec{r}^{\,(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \vec{o}((t-t_0)^n).$$

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на частичные отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b,\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Выберем на частичном отрезке произвольную точку ξ_i. Составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{r}(\xi_i)\Delta t_i$.

Определение 1.5. Интеграл Римана $\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,\mathrm{d}\,t$ для векторной функции $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$ определяется как предел интегральной суммы при $\max(\Delta t_i) \to 0$, если он не зависит от способа разбиения и выбора точки ξ_i.

Свойства интеграла.

1° $\int\limits_a^b (\alpha\vec{r}(t) + \beta\vec{R}(t))\,\mathrm{d}\,t = \alpha\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,\mathrm{d}\,t + \beta\int\limits_a^b \vec{R}(t)\,\mathrm{d}\,t.$

2° $\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,\mathrm{d}\,t = \vec{i}\int\limits_a^b x(t)\,\mathrm{d}\,t + \vec{j}\int\limits_a^b y(t)\,\mathrm{d}\,t + \vec{k}\int\limits_a^b z(t)\,\mathrm{d}\,t.$

3° $\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_a^c \vec{r}(t)\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_c^b \vec{r}(t)\,\mathrm{d}\,t, \quad a < c < b.$

4° Если $\vec{R}$ - постоянный вектор, то $\int\limits_a^b (\vec{R}\cdot\vec{r}(t))\,\mathrm{d}\,t = \vec{R}\cdot\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,\mathrm{d}\,t$, $\int\limits_a^b (\vec{R}\times\vec{r}(t))\,\mathrm{d}\,t = \vec{R}\times\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,\mathrm{d}\,t.$

5° $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int\limits_a^\tau \vec{r}(t)\,\mathrm{d}\,t = \vec{r}(\tau).$

Рассмотрим две леммы о векторной функции скалярного аргумента, которые пригодятся нам в дальнейшем.

Лемма 1.1. Если векторная функция $\vec{r}(t) \in C^1$ сохраняет постоянный модуль, то при каждом значении t ее производная ей перпендикулярна.

Введем понятие скорости вращения векторной функции по отношению к ее аргументу. Рассмотрим определенное значение параметра t и некоторое приращение Δt. Пусть $\Delta\varphi$ – угол между векторами $\vec{r}(t+\Delta t)$ и $\vec{r}(t)$.

Определение 1.6. Скоростью вращения векторной функции называется предел

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right|.$$

Лемма 1.2. Скорость вращение единичной векторной функции $\vec{r}(t) \in C^1$ равна модулю ее производной.

1.2 Определение кривой

Пусть $\{t\} = [a, b]$ – отрезок на прямой $\mathbb{R}$.

Определение 1.7. Множество точек $\mathcal{L}$, координаты которых определяются соотношениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

где $x(t),\ y(t),\ z(t)$ суть непрерывные функции переменной t, называется простой кривой, если различным точкам отрезка $[a, b]$ соответствуют различные точки этого множества. Будем говорить, что «уравнения (1) являются параметризацией кривой» и «кривая задана параметрически с помощью уравнений (1)».

Определение 1.8. Точки, отвечающие граничным значениям параметра a и b называются граничными точками кривой.

Определение 1.9. Если граничные точки простой кривой совпадают, а остальные точки различны, то кривая называется простой замкнутой кривой.

Построим разбиение $\mathcal{D}$ отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ точками.

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b. \tag{2}$$

Определение 1.10. Будем говорить, что соотношения

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad t \in [a, b], \tag{3}$$

представляют собой параметрическое уравнение кривой $\mathcal{L}$, если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[t_{i-1}, t_i]$, что при изменении параметра t на каждом таком сегменте соотношения (3) определяют простую кривую. Сама кривая $\mathcal{L}$ есть объединение всех указанных простых кривых (с учетом их возможных самопересечений и самоналеганий) при условии монотонного изменения параметра t по отрезку $[a, b]$.

Пусть параметр t является монотонной функцией некоторого другого параметра $\tau:\ t = t(\tau)$, причем отрезок $[a, b]$ однозначно и непрерывно отображается на отрезок $[c, d]$. Тогда для кривой $\mathcal{L}$ можно ввести новый параметр τ и говорят, что кривая $\mathcal{L}$ наряду с представлением (3) имеет эквивалентное прдставление

$$x = x(t(\tau)) = \tilde{x}(\tau),\ y = y(t(\tau)) = \tilde{y}(\tau),\ z = z(t(\tau)) = \tilde{z}(\tau),\quad \tau \in [c, d].$$

Определение 1.11. Годографом векторной функции $\vec{r}(t)$ называется множество точек, описываемое концом вектора $\vec{r}(t)$ при изменении параметра t, если вектор откладывать от начала координат.

Пусть $\vec{r}(t)$ непрерывная однозначная векторная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда ее годограф определяет простую кривую. Действительно, рассмотрим некоторую прямоугольную декартову систему координат с ортами $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Тогда векторная функция может быть разложена в виде

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

Если вектор откладывается от начала координат, то в этом случае он является радиус-вектором, координаты которого совпадают с координатами точки конца вектора. Тогда векторное уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{4}$$

равносильно уравнениям (1).

Определение 1.12. Уравнения (4) определяют векторно-параметрическое задание кривой.

Пусть поверхности Ω_1 и Ω_2 заданы неявно уравнениями $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ соответственно. Тогда систему

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

можно рассматривать как уравнение линии пересечения поверхностей. Если разрешить систему (5) (если это возможно) относительно, например, y и z, то получим, что кривую можно задать при помощи двух функций

$$y = y(x),\quad z = z(x). \tag{6}$$

Если выбрать x в качестве параметра t, то получим параметрическое уравнение кривой

$$x = t,\ y = y(t),\ z = z(t).$$

1.3 Гладкие кривые. Натуральный параметр

Определение 1.13. Если кривая $\mathcal{L}$ задается непрерывно дифференцируемой векторной функцией $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$ и $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ для всех $t \in [a, b]$, то кривая называется *гладкой* на отрезке $[a, b]$

Определение 1.14. Если гладкая кривая $\mathcal{L}$ задается векторной функцией $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$, которая n-раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то кривая $\mathcal{L}$ называется *регулярной* кривой (кривой класса $\mathbb{C}^n$).

Смысл условия $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ в том, что на кривой отсутствуют точки излома или возврата. Рассмотрим, например, циклоиду $x = t - int,\ y = 1 - \cos t$ – траекторию точки обода колеса, равномерно катящегося без проскальзывания. У этой кривой точки $t_k = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, являются точками возврата (см. рис. 1). Как раз производная $\vec{r}\,'(t) = (1 - \cos t)\vec{i} + int\vec{j}$ в этих точках обращается в нуль.

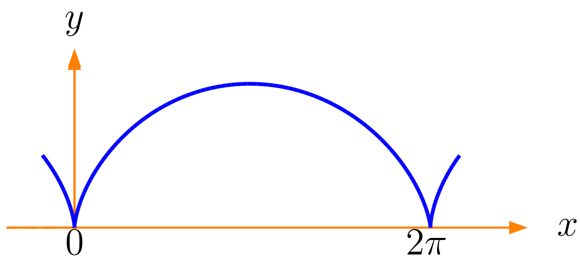


Рис. 1:

Определение 1.15. Кривая $\mathcal{L}\ :\ \ \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a, b]$ называется *кусочно-гладкой* если существует такое конечное разбиение отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[t_{i-1}, t_i]$, что на каждом их этих отрезков функция $\vec{r}(t)$ определяет гладкую кривую.

Пусть кривая $\mathcal{L}$ задается радиус-вектором $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$. Построим разбиение $\mathcal{D}$ отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ точками.

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Отметим на кривой точки M_i, отвечающие значениям t_i, и построим ломаную $M_0M_1 \ldots M_{n-1}M_n$, вписанную в кривую.

Определение 1.16. Кривая $\mathcal{L}$ называется спрямляемой, если множество длин всевозможных ломанных, вписанных в кривую указанным выше образом, ограничено. Точная верхняя грань этого множества называется длиной дуги l кривой $\mathcal{L}$.

Свойства длины дуги кривой:

1°. Если кривая $\mathcal{L}'$ является частью спрямляемой кривой $\mathcal{L}$, то кривая $\mathcal{L}'$ также спрямляема.

2°. Если кривая $\mathcal{L}$ разбита точкой N на две спрямляемые части $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$, то кривая $\mathcal{L}$ спрямляема и для длин дуг кривых $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ и $\mathcal{L}$ справедливо соотношение $s' + s'' = s$

3°. Обозначим через $s(t)$ длину дуги кривой $\mathcal{L}$ соответствующей значениям параметра из отрезка $[a, t]$. Функция $s(t)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и положительна при $t > a$.

Теорема 1.4. **(Достаточное условие спрямляемости).** Пусть кривая $\mathcal{L}$ задана векторной функцией $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z,\ t \in [a, b]$. Тогда если функции $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то кривая $\mathcal{L}$ спрямляема и ее длина может быть вычислена по формуле

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}\,t. \tag{7}$$

Теорема 1.5. Длина гладкой кривой не меняется при замене параметризации.

Если выполнены условия теоремы 1.4, то функция $s(t)$ имеет вид

$$s(t) = \int\limits_a^t |\vec{r}\,'(\tau)|\,\mathrm{d}\,\tau. \tag{8}$$

Пусть $\vec{r}'(t) \neq 0$. Тогда существует функция $t = t(s)$, обратная к функции $s = s(t)$ и дифференцируема столько раз, сколько и функция $\vec{r}(t)$.

Теперь мы можем определить натуральную параметризацию гладкой кривой $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Зафиксируем точку t_0 и будем задавать точку, отвечающую значению параметра $t > t_0$ новым параметром l, равным длине дуги кривой между точками t_0 и t:

$$l(t) = \int\limits_{t_0}^t |\vec{r}\,'(\xi)|\,\mathrm{d}\,\xi. \tag{9}$$

Точки, для которых $t < t_0$, будем задавать параметром l, определенным по той же фор- муле; очевидно, это будет длина дуги, взятая со знаком “минус”.

Определение 1.17. Параметр l называется *натуральным параметром* кривой; задание кри- вой уравнениями $\vec{r} = \vec{r}(l)$ называется ее *натуральной параметризацией*.

1.4 Сопровождающий трехгранник кривой (трехгранник Френе)

Рассмотрим некоторую кривую $\mathcal{L}$, заданную векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Пусть значению параметра t_0 соответствует точка M_0 кривой, а значению t из некоторой окрестности t_0 — точка M. Очевидно, что $M \to M_0$ при $t \to t_0$.

Определение 1.18. *Касательной* M_0T к кривой $\mathcal{L}$ в точке M_0 называется предельное положение прямой M_0M если оно существует когда $M \to M_0$.

Касательная – это такая прямая, которая имеет с кривой две совкадающие общие точки.

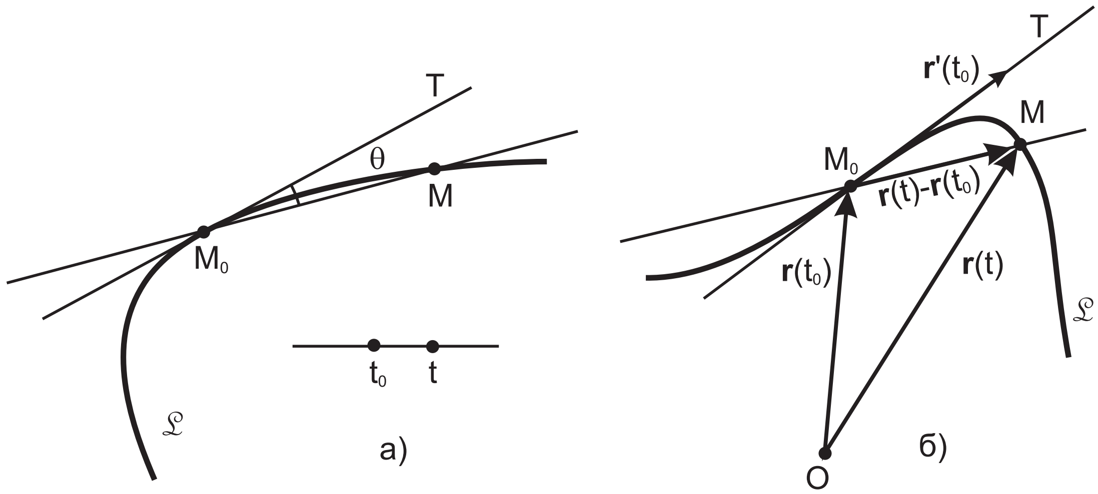


Рис. 2: К определению касательной к кривой.

Теперь логично задаться вопросом, когда существует касательная. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 1.6. Теорема. Гладкая кривая $\mathcal{L}$ в каждой своей точке имеет касательную прямую, направляющим вектором которой является вектор $\vec{r}\,'(t)$.

Как известно из аналитической геометрии уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{r}\,'(t)$ имеет вид

$$\vec{R} = \vec{r}\,'(t_0)\tau + \vec{r}(t_0), \tag{10}$$

где $\tau \in \mathbb{R}$ – параметр на прямой, или в симметрическом виде

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)}, \tag{11}$$

где $X,\ Y,\ Z$ координаты точек прямой.

Определение 1.19. Плоскость, проходящая через точку M кривой, перпендикулярно касательной в этой точке, называется *нормальной плоскостью* кривой в точке M.

Уравнение нормальной плоскости имеет вид:

$$(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0. \tag{12}$$

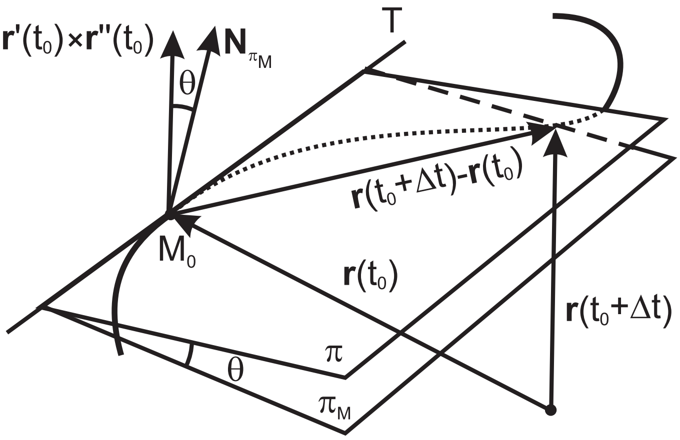


Рис. 3: Соприкасающаяся плоскость.

или
$$x'(t_0)(X - x(t_0)) + y'(t_0)(Y - y(t_0)) + z'(t_0)(Z - z(t_0)) = 0$$

Определение 1.20. Любая прямая, проходящая через точку M кривой $\mathcal{L}$ перпендикулярно касательной к кривой в этой точке называется нормалью кривой $\mathcal{L}$ в точке M.

Определение 1.21. Соприкасающейся плоскостью кривой $\mathcal{L}$ в точке M_0 называется предел, к которому стремится при $M \to M_0$ переменная плоскость π_M, проходящая через касательную M_0T к кривой $\mathcal{L}$ в точке M_0 и переменную точку M кривой $\mathcal{L}$.

Определение 1.22. Плоскость π называется пределом при $M \to M_0$ переменной плоскости π_M, проходящей через касательную M_0T к кривой $\mathcal{L}$ в точке M_0 и переменную точку M если угол между плоскостями π и π_M стремится к нулю.

Следует отметить, при стремлении плоскости π_M к плоскости π переменная нормаль плоскости π_M стремится к нормали плоскости π.

Теорема 1.7. Пусть регулярная кривая $\mathcal{L}$ задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^2$. Если в точке M_0 векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,''(t)$ неколлинеарны, то в этой точке существует соприкасающаяся плоскость к кривой $\mathcal{L}$, причем вектор $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$ – направляющий вектор нормали к этой плоскости.

Рассмотрим вектор
$$\vec{N}_{\pi_M} = \frac{2}{(\Delta t)^2}\vec{r}\,'(t_0) \times (\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)).$$

Так как векторы $r'(t_0)$ и $\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$ лежат в плоскости π_M, то векторное произведение этих векторов будет перпендикулярно этой плоскости. Значит вектор $\vec{N}_{\pi_M}$ является вектором нормали плоскости π_M.

Проведем некоторые преобразования. По формуле Тейлора имеем
$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{r}\,''(t_0)(\Delta t)^2 + \vec{o}((\Delta t)^2).$$

Поэтому
$$\vec{N}_{\pi_M} = \vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0) + \frac{2}{(\Delta t)^2}\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{o}((\Delta t)^2),$$
а значит
$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{N}_{\pi_M} = \vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0).$$

Если векторы $\vec{r}\,'(t_0)$ и $\vec{r}\,''(t_0)$ коллинеарны, предельное положение плоскости, вообще говоря, не определено. Это в частном случае выполняется для любой точки прямой. В этом случае соприкасающейся плоскостью можно считать любую плоскость, проходящую через прямую.

Определение 1.23. Точка кривой $\mathcal{L}$, в которой векторы $\vec{r}\,'(t_0)$ и $\vec{r}\,''(t_0)$ коллинеарны, называется точкой *распрямления* кривой. В этой точке любую плоскость, проходящую через касательную прямую, будем называть соприкасающейся.

Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью, в которой она лежит.

Раз вектор $\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0)$ является вектором нормали соприкасающейся плоскости, то сами эти векторы лежат в этой плоскости, а значит уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид
$$(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot (\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0)) = 0. \tag{13}$$
или
$$\begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ +x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Определение 1.24. Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости кривой $\mathcal{L}$ в точке M называется *главной нормалью*, а нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости – *бинормалью*.

Определение 1.25. Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль называется спрямляющей плоскостью.

Уравнение нормали кривой $\mathcal{L}$ в точке соответствующей значению параметра t_0 имеет вид
$$\frac{X - x(t_0)}{n_x(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{n_y(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{n_z(t_0)},$$
а уравнение спрямляющей плоскости будет следующим:
$$n_x(t_0)(X - x(t_0)) + n_y(t_0)(Y - y(t_0)) + n_z(t_0)(Z - z(t_0)) = 0.$$

Обозначим как $\vec{t}au$, $\vec{n}$, $\vec{\beta}$ единичные направляющие векторы касательной, главной нормали и бинормали соответственно. Зная параметрическое уравнение кривой, эти векторы можно найти по формулям

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}, \quad \vec{n} = \vec{\beta} \times \vec{\tau} = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'}{|\vec{r}' \times \vec{r}''||\vec{r}'|}. \tag{14}$$

Таким образом, с каждой точкой M кривой можно связать прямоугольную систему координат с начало в в точке M, оси которой составляют касательная, главная нормаль и бинормаль кривой, а координатными плоскостями являются соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости.

Определение 1.26. Совокупность построенных прямоугольных координатных осей и координатных плоскостей называется сопровождающим трехгранником кривой (трехгранником Френе).

Рассмотрим натуральную параметризацию кривой $\vec{r}(l)$. Будем обозначать производную векторной функции по натуральному параметру точкой сверху:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(l)}{\mathrm{d}l} = \dot{\vec{r}}(l). \tag{15}$$

Дифференцируя формулу (9) по t получаем, что $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = |\vec{r}\,'(t)|$. Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(l)}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(l)}{\mathrm{d}l}|\vec{r}\,'(t)|.$$

Значит, в случае натуральной параметризации кривой, единичный вектор касательной выглядит следующим образом:

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(l)}{\mathrm{d}l} = \dot{\vec{r}}(l). \tag{16}$$

Аналогично находим вторую производную векторной функции по натуральному параметру:

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'(t) =& \dot{\vec{r}}(s)s'(t), \\ \vec{r}\,''(t) =& \ddot{\vec{r}}(l)(l'(t))^2 + \dot{\vec{r}}(l)l''(t). \end{aligned}$$

Так как $|\dot{\vec{r}}(l)| = 1$, тогда согласно лемме 1 вектор $\ddot{\vec{r}}(l)$ перпендикулярен вектору $\dot{\vec{r}}(l)$. Таким образом, после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \dot{\vec{r}}(l) \\ \vec{n} &= \frac{\ddot{\vec{r}}(l)}{|\ddot{\vec{r}}(l)|} \\ \vec{\beta} &= \dot{\vec{r}}(l) \times \frac{\ddot{\vec{r}}(l)}{|\ddot{\vec{r}}(l)|} \end{aligned} \tag{17}$$

Вообще говоря единичные векторы касательной, бинормали и главной нормали можно выбрать с точностью до направления. Прежде мы негласно выбрали следующие направления: вектор касательной направлен в сторону вектора $\dot{\vec{r}}$, вектор главной нормали направим в сторону вектора $\ddot{\vec{r}}$, а вектор бинормали направим так, чтобы векторы $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{\beta}$ образовывали правую тройку. Тогда имеют место соотношения

$$\vec{\tau} \times \vec{n} = \vec{\beta}, \quad \vec{n} \times \vec{\beta} = \vec{\tau}, \quad \beta \times \vec{\tau} = \vec{n}. \tag{18}$$

Если направление отсчета длины дуги изменится на обратное, то

$$\vec{\tau} \to -\vec{\tau}, \quad \vec{n} \to \vec{n}, \quad \vec{\beta} \to -\vec{\beta}.$$

Определение 1.27. Скорость вращения единичного вектора касательной $\vec{\tau}$ кривой $\mathcal{L}$ в точке M кривой по отношению к пути l, проходимому по кривой, называется кривизной k кривой $\mathcal{L}$ в данной точке.

Теорема 1.8. Регулярная кривая $\vec{r} = \vec{r}(l) \in C^2$ имеет в каждой точке кривизну k, которую можно вычислить по формуле $k = |\ddot{\vec{r}}|$.

Согласно лемме 1.2 имеем

$$k(l) = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} \right| = |\dot{\vec{\tau}}(l)| = |\ddot{\vec{r}}(l)|. \tag{19}$$

Определение 1.28. Скорость вращения единичного вектора бинормали $\vec{\beta}$ кривой $\mathcal{L}$ в точке M кривой по отношению к пути l, проходимому по кривой, называется кручением $\varkappa$ кривой $\mathcal{L}$ в данной точке. Если вектора $\dot{\vec{\beta}}(l)$ и $\vec{n}(l)$ со-направлены, то кручение считается отрицательным.

Аналогично рассмотренному выше, по лемме 2 получаем, что $|\varkappa(l)| = |\dot{\vec{\beta}}(l)|$.

Теорема 1.9. Пусть кривая $\mathcal{L}$ задается трижды дифференцируемой векторной функцией, l – длина дуги кривой, а $k(l)$ и $\varkappa(l)$ кривизна и кручение кривой $\mathcal{L}$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\tau}} &= k\vec{n}, \\ \dot{\vec{\beta}} &= -\varkappa\vec{n}, \\ \dot{\vec{n}} &= \varkappa\vec{\beta} - k\vec{\tau}. \end{aligned} \tag{20}$$

Формулы (20) называются формулами Френе.

Из формул (17) и (19) получаем

$$\dot{\vec{\tau}} = k\vec{n}. \tag{21}$$

Найдем соотношение для производной единичного вектора бинормали

$$\dot{\vec{\beta}} = \dot{\vec{\tau}} \times \vec{n} + \vec{\tau} \times \dot{\vec{n}} = \vec{\tau} \times \dot{\vec{n}}.$$

Значит вектор $\dot{\vec{\beta}}$ перпендикулярен вектору $\vec{\tau}$, а согласно лемме 1 перпендикулярен и вектору $\vec{\beta}$, следовательно он направлен по вектору главной нормали. Учитывая определение кручения можем записать

$$\dot{\vec{\beta}} = -\varkappa\vec{n}. \tag{22}$$

Найдем производную единичного вектора главной нормали.

$$\dot{\vec{n}} = \dot{\vec{\beta}} \times \vec{\tau} + \vec{\beta} \times \dot{\vec{\tau}} = -\varkappa\vec{n} \times \vec{\tau} + \vec{\beta} \times k\vec{n} = \varkappa\vec{\beta} - k\vec{\tau}. \tag{23}$$

Теорема 1.10. Регулярная кривая $\vec{r} = \vec{r}(l) \in C^3$ в каждой точке с отличной от нуля кривизной k имеет кручение $\varkappa$, вычис- вычисляемое по формуле

$$\varkappa = \frac{\vec{\beta} \cdot \dddot{\vec{r}}}{k} = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \dddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|^2}. \tag{24}$$

Будем последовательно находить производные радиус-вектора и использовать формулы Френе. Так

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\tau}.$$

Далее

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{\tau}} = k\vec{n}.$$

А значит $k = |\ddot{\vec{r}}|$, что соответствует формуле (19).

$$\dddot{\vec{r}} = \dot{k}\vec{n} + k\dot{\vec{n}} = \dot{k}\vec{n} + k\varkappa\vec{\beta} - k^2\vec{\tau}.$$

Отсюда следует формула (24).

Чтобы получить формулы для вычисления кривизны и кручения в произвольной параметризации поступим аналогичным способом, используя все уже известные нам формулы.

$$\vec{r}\,' = \dot{\vec{r}}l' = \vec{\tau}l'.$$

$$\vec{r}\,'' = \vec{\tau}\,'l' + \vec{\tau}l'' = \dot{\vec{\tau}}(l')^2 + \vec{\tau}l'' = k(l')^2\vec{n} + l''\vec{\tau}.$$

Умножая это уравнение векторно на $\vec{\tau}$ получаем

$$\vec{\tau} \times \vec{r}\,'' = k(l')^2\vec{\beta}.$$

Отсюда

$$k(t) = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}. \tag{25}$$

Далее

$$\vec{r}\,''' = (l''' - k^2 l'^3)\vec{\tau} + (k'l'^2 + 3kl'l'')\vec{n} + \varkappa k l'^3\vec{\beta}.$$

Умножая полученное соотношение скалярно на $\vec{\beta}$ и используя формулу (25) находим

$$\varkappa(t) = \frac{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''}{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'')^2}. \tag{26}$$

1.5 Соприкасающаяся окружность

Рассмотрим кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, проходящие через общую точку M_0 и имеющие в ней общую касательную.

Определение 1.29. Две кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, заданные векторными функциями $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2 \in C^{q+1}$, имеют в точке M_0 порядок соприкосновения q если в этой точке

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_2',\ \vec{r}_1'' = \vec{r}_2'', \ldots, \vec{r}_1^{(q)} = \vec{r}_2^{(q)},\ \vec{r}_1^{(q+1)} \neq \vec{r}_2^{(q+1)}.$$

Определение 1.30. Соприкасающейся окружностью $\mathcal{C}$ кривой $\mathcal{L}$ называется окружность, для которой значения производных $\dot{\vec{r}}_c$ и $\ddot{\vec{r}}_c$ совпадают с значениями производных $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$ в точке касания.

Очевидно, что соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости. Введем в соприкасающейся плоскости декартов базис $(\vec{e}_{x'}\vec{e}_{y'})$. Рассмотрим два единичных ортогональных вектора

$$\begin{aligned} \vec{e}_R &= \vec{e}_{x'} \cos\varphi + \vec{e}_{y'}\, in\varphi, \\ \vec{e}_\varphi &= -\vec{e}_{x'}\, in\varphi + \vec{e}_{y'} \cos\varphi. \end{aligned} \tag{27}$$

Тогда радиус-вектор окружности можно записать в виде $\vec{r}_c = R\vec{e}_R(\varphi)$. Учитывая, что $s = R\varphi$, получаем

$$\ddot{\vec{r}}_c(s) = -\frac{1}{R}\vec{e}_R.$$

Таким образом, вектор $\ddot{\vec{r}}_c(s)$ направлен вдоль радиуса окружности и проходит через ее центр.

По определению соприкасающейся окружности $\ddot{\vec{r}}_c = \ddot{\vec{r}}$, а следовательно центр соприкасающейся окружности лежит на прямой, определяемой вектором $\ddot{\vec{r}}$ в положительную сторону главной нормали, а ее радиус равен

$$R = \frac{1}{|\ddot{\vec{r}}|}$$

Определение 1.31. Центр соприкасающейся окружности кривой называется центром кривизны кривой $\mathcal{L}$ в точке M, а ее радиус – радиусом кривизны.

Очевидно, что $R = \dfrac{1}{k}$.

1.6 Основные определения поверхности в 3-х мерном пространстве

Рассмотрим плоскую замкнутую односвязную ограниченную область $D\, ubset\mathcal{E}^2$ и координатную систему (u, v) на этой плоскости. Пусть $x,\ y,\ z$ прямоугольные декартовы координаты точек в трехмерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}^3$. Зададим на множестве D три функции

$$F: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{28}$$

Определение 1.32. Если задано отображение $F : D \mapsto \mathcal{E}^3$ такое, что функции вида (28) непрерывно дифференцируемы на области D и ранг матрицы

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2,$$

то отображение F называется гладким отображением, а образ области D $F(D) = \mathcal{S}$ называется гладкой поверхностью. Если отображение F является взаимно однозначным, то поверхность называется простой, а уравнения (28) называются параметризацией этой поверхности.

Определение 1.33. Образ границы области D при отображении F называется границей поверхности. Поверхность составленная из конечного числа гладких поверхностей называется кусочно-гладкой поверхностью.

Определение 1.34. Координаты (u, v) называются криволинейными координатами на поверхности.

Уравнение поверхности может быть переписано в векторно-параметрическом виде

$$\vec{r} = x(u,v)\vec{e}_x + y(u,v)\vec{e}_y + z(u,v)\vec{e}_z = \vec{r}(u,v), \ (u,v) \in D. \tag{29}$$

Поверхность может быть задана в неявном виде, если точки поверхности и только они удовлетворяют уравнению

$$F(x,y,z) = 0 \tag{30}$$

Рассмотрим точку M_0 на поверхности соответствующую значению параметров $(u = u_0, v = v_0)$.

Определение 1.35. Кривые

$$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v) \tag{31}$$
$$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0) \tag{32}$$

называются координатными линиями на поверхности.

Касательными векторами к координатным кривым в точке M_0 являются векторы

$$\vec{r}_u(M_0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$$
$$\vec{r}_v(M_0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Согласно определению гладкой поверхности, а именно тому, что $\operatorname{rang}[\dots] = 2$ следует, что $\vec{r}_u \nparallel \vec{r}_v$.

Определение 1.36. Поверхность $\mathcal{S}$, заданную векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ будем называть C^k-регулярной, если в области D функция $\vec{r}(u,v)$ имеет непрерывные производные порядка k $(k \geqslant 2)$ и во всех точках поверхности $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$.

Мы видим, что роль криволинейных координат u, v заключается только в том, чтобы отмечать точки поверхности. В общем случае криволинейные координаты геометрического смысла не имеют и могут выбираться различными способами на одной и той же поверхности. Действительно, введем наряду с параметрами u, v новые переменные U, V, связанные с u, v функциональной зависимостью

$$U = U(u,v), \qquad V = V(u,v)$$

Вид этих функций берем совершенно произвольно, требуя, однако, чтобы в рассматриваемой области изменения последние уравнения были однозначно разрешимы относительно u, v, т. е. чтобы их можно было эквивалентным образом переписать в виде

$$u = u(U,V), \qquad v = v(U,V)$$

В таком случае область изменения переменных u, v, с одной стороны, и область изменения переменных U, V, с другой стороны, находятся во взаимно однозначном соответствии. Следовательно, переменные U, V в их области изменения можно с таким же правом считать криволинейными координатами на данном куске поверхности, как и переменные u, v. Действительно, каждой паре значений U, V отвечает, согласно, пара значений u, v, а этим последним — точка поверхности с радиус-вектором:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \vec{r}(u(U,V), v(U,V)) = \tilde{\vec{r}}(U,V).$$

Преобразование

$$U = U(u), \qquad V = V(v)$$

не меняет координатную сеть.

1.7 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathcal{E}^2$.

Лемма 1.3. Пусть в D задана гладкая кривая $\mathcal{L}'$: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [a, b]$. Тогда образ этой кривой на поверхности $\mathcal{L}$: $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$ является гладкой кривой.

Рассмотрим гладкую поверхность $\mathcal{S}$ и некоторую точку M_0 на ней. Проведем через эту точку всевозможные кривые, принадлежащие поверхности. Касательные векторы этих кривых определяются выражением

$$\mathrm{d}\,\vec{r} = \vec{r}_u \,\mathrm{d}\,u + \vec{r}_v \,\mathrm{d}\,v$$

Все эти векторы лежат в плоскости векторов $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$.

Определение 1.37. Плоскость, проходящая через точку M_0, параллельная векторам $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ называется касательной плоскостью.

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 0. \tag{33}$$

Определение 1.38. Нормалью к поверхности в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости в точке M_0.

Единичный вектор нормали можно найти по формуле

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}, \quad \vec{n}^2 = 1. \tag{34}$$

Вернемся к касательным. Перепишем касательный вектор в виде

$$\mathrm{d}\,\vec{r} = \mathrm{d}\,u \left(\vec{r}_u + \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,u} \vec{r}_v \right)$$

Величина $\mathrm{d}\,u$ не влияет на направление касательной, вектора $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ зависят только от точки на поверхности, поэтому направление касательной вполне определяется отношением $\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,u}$ или точнее $\frac{v'(t)}{u'(t)}$.

Если поверхность задана неявно, то $F(x, y, z) = 0$. Найдем дифференциал этого выражения:

$$\mathrm{d}\,F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathrm{d}\,x + \frac{\partial F}{\partial y} \mathrm{d}\,y + \frac{\partial F}{\partial z} \mathrm{d}\,z = \vec{N} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = 0,$$

где

$$\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}. \tag{35}$$

Так как x, y, z принадлежат поверхности, то вектор $\mathrm{d}\,\vec{r}$ лежит в касательной плоскости. А значит, вектор (35) является вектором нормали поверхности.

Если поверхность задана явно, т.е. $z = f(x, y)$, то из выражения (35) несложно получить, что

$$\vec{N} = -\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}. \tag{36}$$

1.8 Первая квадратичная форма поверхности

Пусть $\mathcal{S}$ – гладкая поверхность и $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ – ее векторное уравнение.

Определение 1.39. Первой квадратичной формой поверхности называют выражение

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}\vec{r}^{\,2}.$$

Рассмотрим некоторую точку M поверхности, через которую проведем некоторую кривую. Дифференциал радиус-вектора вдоль кривой $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}_u \mathrm{d}u + \vec{r}_v \mathrm{d}v$. Тогда дифференциал дуги кривой можно найти из

$$\mathrm{I} = \vec{r_u}^{\,2} \mathrm{d}u^2 + 2(\vec{r_u} \cdot \vec{r_v}) \mathrm{d}u \mathrm{d}v + \vec{r_v}^{\,2} \mathrm{d}v^2. \tag{37}$$

Выражение (37) представляет собой в каждой точке поверхности квадратичную форму дифференциалов $\mathrm{d}u$ и $\mathrm{d}v$ и называется первой квадратичной формой. Первая квадратичная форма является положительно определенной, так как ее дискриминант

$$\vec{r_u}^{\,2} \vec{r_v}^{\,2} - (\vec{r_u} \cdot \vec{r_v}) = (\vec{r_u} \times \vec{r_v})^2 > 0, \quad \vec{r_u}^{\,2} > 0.$$

Для коэффициентов первой квадратичной формы существуют общепринятые обозначения

$$E = \vec{r_u}^{\,2}, \quad F = (\vec{r_u} \cdot \vec{r_v}), \quad G = \vec{r_v}^{\,2},$$

а сама форма записывается в виде

$$\mathrm{I} = E \mathrm{d}u^2 + 2F \mathrm{d}u \mathrm{d}v + G \mathrm{d}v^2, \quad EG - F^2 > 0.$$

Первая квадратичная форма служит прежде всего для измерения в бесконечно малом длин вдоль поверхности

Рассмотрим кривую на поверхности $\mathcal{L} : \ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)), \ t \in [a, b]$. Тогда элемент ее длины будет

$$\mathrm{d}l = |\vec{r}\,'(u(t), v(t))| \mathrm{d}t = \sqrt{\mathrm{d}\vec{r}^{\,2}} = \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} \mathrm{d}t.$$

Тогда окончательно

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} \mathrm{d}t. \tag{38}$$

Пусть гладкие кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ лежат на поверхности с векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ пересекаются в некоторой точке M_0. Пусть кривая $\mathcal{L}_1$ имеет прообраз $u = u_1(t), \ v = v_1(t)$, а кривая $\mathcal{L}_2$ соответственно $u = u_2(t), \ v = v_2(t)$. Векторы

$$\mathrm{d}\,\vec{r} = \vec{r}_u \,\mathrm{d}\,u + \vec{r}_v \,\mathrm{d}\,v \quad \text{и} \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$$

являются касательными к кривым $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно, если $\mathrm{d}\,u = u_1'(t_0)\,\mathrm{d}\,t$, $\mathrm{d}\,v = v_1'(t_0)\,\mathrm{d}\,t$ и $\delta u = u_2'(t_0)\,\mathrm{d}\,t$, $\delta v = v_2'(t_0)\,\mathrm{d}\,t$, где значение параметра t_0 соответствует точке M_0. Тогда угол между кривыми равен

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}\cdot\delta\vec{r}}{\sqrt{\mathrm{d}\,\vec{r}^{\,2}}\,qrt\delta\vec{r}^{\,2}} = \frac{E\,\mathrm{d}\,u\delta u + F(\,\mathrm{d}\,u\delta v + \delta u\,\mathrm{d}\,v) + G\,\mathrm{d}\,v\delta v}{\sqrt{E\,\mathrm{d}\,u^2 + 2F\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v + G\,\mathrm{d}\,v^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \tag{39}$$

Коэффициенты первой квадратичной формы вычисляются в точке пересечения кривых M_0.

1.9 Вторая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим C^2-регулярную поверхность $\mathcal{S}$, задаваемую уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \quad (u,v)\in D$$

Пусть $\mathcal{L}_{M_0M}$ – одна из кривых на поверхности, проходящих через точку M_0. Предположим, что в качестве параметра выбран натуральный, тогда уравнение этой кривой принимает вид $\vec{r} = \vec{r}(u(l), v(l))$. Пусть точке M_0 соответствует значение параметра l, а точке M – $l + \Delta l$. Запишем приращение радиус вектора вдоль этой кривой

$$\overline{M_0M} = \Delta\vec{r} = \dot{\vec{r}}\Delta l + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(\Delta l)^2 + \dots.$$

Пусть Δl является бесконечно малым. Если мы будем вести исследование с точностью до малых первого порядка, то смешение $\overline{M_0M}$ будет совпадать с дифференциалом $\mathrm{d}\,\vec{r}$ и будет направлено по касательной к кривой и лежать в касательной плоскости к поверхности. За это отвечает первая квадратичная форма. Перейдем к более глубокому исследованию поверхности. В этом случае элемент кривой не будет лежать в касательной плоскости, а будет отклоняться от нее. Это отклонение можно легко вычислить по формуле, зная единичный вектор нормали к поверхности в точке M_0:

$$h = \overline{M_0M}\cdot n = \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}(\Delta l)^2 + \dots.$$

Скалярное произведение $\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}$ можно представить в двух видах. Во первых:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \vec{r}_u\dot{u} + \vec{r}_v\dot{v};\\ \ddot{\vec{r}} &= \vec{r}_{uu}\dot{u}^2 + 2\vec{r}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \vec{r}_{vv}\dot{v}^2 + \vec{r}_u\ddot{u} + \vec{r}_v\ddot{v}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n} = \vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}\dot{u}^2 + 2\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}\dot{u}\dot{v} + \vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}\dot{v}^2$$

и

$$h = \frac{1}{2}(\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}\dot{u}^2 + 2\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}\dot{u}\dot{v} + \vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}\dot{v}^2)(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}(\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\,u^2 + 2\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v + \vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\,v^2).$$

С учетом того, что

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

введем обозначения

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{40}$$

Тогда

$$h = \frac{1}{2}(L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2) = \frac{1}{2}II.$$

Определение 1.40. Второй квадратичной формой поверхности $\mathcal{S}$ называется скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\mathrm{d}^2\vec{r}$

$$\mathrm{II} = \mathrm{d}^2\vec{r}\cdot\vec{n} = \vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}\mathrm{d}u^2 + 2\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}\mathrm{d}v^2 = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2. \tag{41}$$

Можно вторую квадратичную форму записать по другому. Для этого продифференцируем равенства $\vec{r}_u \cdot n = 0$, $\vec{r}_v \cdot n = 0$ по u и v:

$$\begin{aligned} \vec{n}_u \cdot \vec{r}_u + \vec{n} \cdot \vec{r}_{uu} &= 0, \qquad & \vec{n}_u \cdot \vec{r}_v + \vec{n} \cdot \vec{r}_{vu} &= 0 \\ \vec{n}_v \cdot \vec{r}_u + \vec{n} \cdot \vec{r}_{uv} &= 0, \qquad & \vec{n}_v \cdot \vec{r}_v + \vec{n} \cdot \vec{r}_{vv} &= 0 \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} L &= \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = -\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u, \\ M &= \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = -\vec{n}_v \cdot \vec{r}_u = -\vec{n}_u \cdot \vec{r}_v, \\ N &= \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = -\vec{n}_v \cdot \vec{r}_v. \end{aligned}$$

Далее, так как $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}_u\,\mathrm{d}u + \vec{r}_v\,\mathrm{d}v$ и $\mathrm{d}\vec{n} = \vec{n}_u\,\mathrm{d}u + \vec{n}_v\,\mathrm{d}v$, получаем

$$\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{n} = \vec{n}_u\cdot\vec{r}_u\,\mathrm{d}u^2 + (\vec{n}_v\cdot\vec{r}_u + \vec{n}_u\cdot\vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \vec{n}_v\cdot\vec{r}_v\,\mathrm{d}v^2 = -L\mathrm{d}u^2 - 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v - N\mathrm{d}v^2.$$

Таким образом,

$$II = \mathrm{d}^2\vec{r}\cdot n = -\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{n}.$$

Для коэффициентов второй квадратичной форму существуют общепринятые обозначения

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n}, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n}, \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n}. \tag{42}$$

Тогда вторую квадратичную форму можно записать в виде

$$\mathrm{II} = \mathrm{d}^2\vec{r}\cdot\vec{n} = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2,$$

Подставляя в (42) выражение для единичного вектора нормали, получаем формулы для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы поверхности

$$L = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{43}$$

Выберем на поверхности $\mathcal{S}$ некоторую точку $P_0 = P(u_0, v_0)$ и рассмотрим касательную плоскость π_0 в этой точке, единичный вектор нормали к которой обозначим как $\vec{n}_0$.

Отклонение некоторой точки P поверхности $\mathcal{S}$ от плоскости π_0 можно найти по формуле

$$h = (\vec{r}(P) - \vec{r}(P_0)) \cdot \vec{n}_0.$$

Абсолютнгая величина h равна расстоянию от точки P до поверхности π_0, если h положительна, то точка P и конец вектора $\vec{n}_0$ лежат по одну сторону от плоскости π_0, в противном случае — по разные.

Применим к h формулу Тейлора:

$$\vec{r}(P) - \vec{r}(P_0) = \vec{r}_u(P_0)(u - u_0) + \vec{r}_v(P_0)(v - v_0) +$$
$$+ \vec{r}_{uu}(P_0)\frac{(u - u_0)^2}{2} + \vec{r}_{uv}(u - u_0)(v - v_0) + \vec{r}_{vv}(P_0)\frac{(v - v_0)^2}{2} + \vec{o}(\rho^2)$$

где

$$\rho = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}.$$

Тогда, положив $\mathrm{d}\, u = u - u_0$, $\mathrm{d}\, v = (v - v_0)$ получаем

$$h = \frac{1}{2}\left(L_0 \,\mathrm{d}\, u^2 + 2M_0 \,\mathrm{d}\, u \,\mathrm{d}\, v + N_0 \,\mathrm{d}\, v^2\right) + +\vec{o}(\rho^2) = \frac{1}{2} II_0 + \vec{o}(\rho^2).$$

В зависимости от коэффициентов второй квадратичной формы можно класивицировать точки поверхности следующим образом

1. $L_0 N_0 - M_0^2 > 0$ — II_0 является знакоопределенной.

   Отклонение h сохраняет знак (совпадающий со знаком II_0) для всех достаточно малых значений ρ независимо от выбора направления на поверхности. В этом случае все точки поверхности в окрестности точки P_0 располагаются по одну сторону от касательной плоскости π_0. Такая точка называется *эллиптической*.

2. $L_0 N_0 - M_0^2 < 0$ — II_0 является знакопеременной.

   В точке P_0 можно указать два неколлинеарных направления на поверхности, обладающие следующими свойствами: 1) для значений дифференциалов, определяющих эти направления, II_0 обращается в нуль; 2) все остальные направления разбиваются на два класса: для одного класса II_0 положительна, для другого — отрицательна. Такая точка называется *гиперболической*.

3. $L_0N_0 - M_0^2 = 0$, но отличен от нуля хотябы один из коэффициентов $L_0,\ N_0$.

   Тогда существует направление, вдоль которого II_0 обращается в нуль, а для фсех других направлений форма II_0 имеет одит и тот же знак. Такая точка называется *параболической*.

4. $L_0 = N_0 = M_0 = 0$. Такая точка называется точкой *уплощения* поверхности.

1.10 Кривизна кривой на поверхности

Рассмотрим на поверхности $\mathcal{S}$ произвольную кривую $\mathcal{L}$, проходящую через точку $M_0(u, v)$ в направлении $(\mathrm{d}\,u : \mathrm{d}\,v)$. Пусть кривая задана натуральной параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(l) = \vec{r}(u(l), v(l))$. Вычислим в точке M_0 три вектора: единичный вектор касательной $(\vec{\tau} = \dot{\vec{r}})$, единичный вектор нормали к поверхности $(\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}})$ и вектор $\vec{b} = \vec{n} \times \vec{\tau}$.

Полученная тройка векторов является ортонормированным базисом, по которому мы разложим вектор $\ddot{\vec{r}}$:

$$\ddot{\vec{r}} = c_1\vec{\tau} + c_2\vec{n} + c_3\vec{b}.$$

Коэффициент

$$c_1 = \ddot{\vec{r}} \cdot \tau = \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = 0,$$

а коэффициенты c_2 и c_3 имеют специальные названия:

$$k_n = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} \text{ — нормальная кривизна кривой } \mathcal{L}$$
$$k_g = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{b} \text{ — геодезическая кривизна кривой } \mathcal{L}$$

Подставляя выражение для $v\ddot{e}cr$ и используя определение первой и второй квадратичных форм, получаем выражение для нормальной кривизны

$$k_n = \frac{L\,\mathrm{d}\,u^2 + 2M\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v + N\,\mathrm{d}\,v^2}{E\,\mathrm{d}\,u^2 + 2F\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v + G\,\mathrm{d}\,v^2} \tag{44}$$

Нормальным сечением поверхности $\mathcal{S}$ в точке M_0 называют линию пересечения поверхности с плоскостью, проходящей через через нормаль поверхности в этой точке. Кривизна нормального сечения в точке P называется нормальной кривизной поверхности в этой точке в направлении $(\mathrm{d}\,u : \mathrm{d}\,v)$, касательном к нормальному сечению.

Теорема 1.11. (Менье) Центр кривизны для точки M_0 кривой $\mathcal{L}$ является основанием перпендикуляра, опущенного на соприкасающуюся плоскость кривой $\mathcal{L}$ из центра кривизны нормального сечения, взятого в той же точке M_0 и имеющего общую касательную с $\mathcal{L}$.

Все уже доказано.

Направление на поверхности называется главным, если нормальная кривизна в этом направлении достигает экстремального значения. Значения кривизн в главных направлениях называются главными кривизнами поверхности в данной точке. Главные кривизны находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix} = 0. \tag{45}$$

Если уравнение (45) имеет два различных корня k_1 и k_2 то имеется два различных направления (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2), определяемых из систем

$$\begin{array}{l} (L-k_iE)\xi_i + (M-k_iF)\eta_i = 0 \\ (M-k_iF)\xi_i + (N-k_iG)\eta_i = 0 \end{array}, \quad i = 1, 2.$$

Если уравнение (45) имеет совпадающие корни $k_1 = k_2 = k$, то каждое направление является главным.

Если нормальное сечение образует угол φ с первым главным направлением, то для кривизны k_n этого сечения справедлива формула Эйлера

$$k_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2\, in^2\varphi.$$

Гауссовой кривизной поверхности называется величина

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{46}$$

Средней кривизной поверхности называется величина

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \tag{47}$$

2 Скалярные и векторные поля

2.1 Скалярные поля. Дифференцирование.

Рассмотрим трехмерное евклидово аффинное пространство $\mathfrak{E}^3$ и область G в нем.

Определение 2.1. Если каждой точке $M \in G$ ставится в соответствие по некоторому закону скаляр $u(M)$, то говорят, что в области G задано *скалярное поле*.

Если задана некоторая система координат, то скалярное поле является функцией трех переменных $u(x_1, x_2, x_3)$. Часто встречается запись $u(x^k)$, $k = 1, 2, 3$. Более того, каждую точу пространства можно определять ее радиус-вектором, а значит каждому радиус-вектору $\vec{r}$ соответствует определенное значение скалярной функции $u(\vec{r})$.

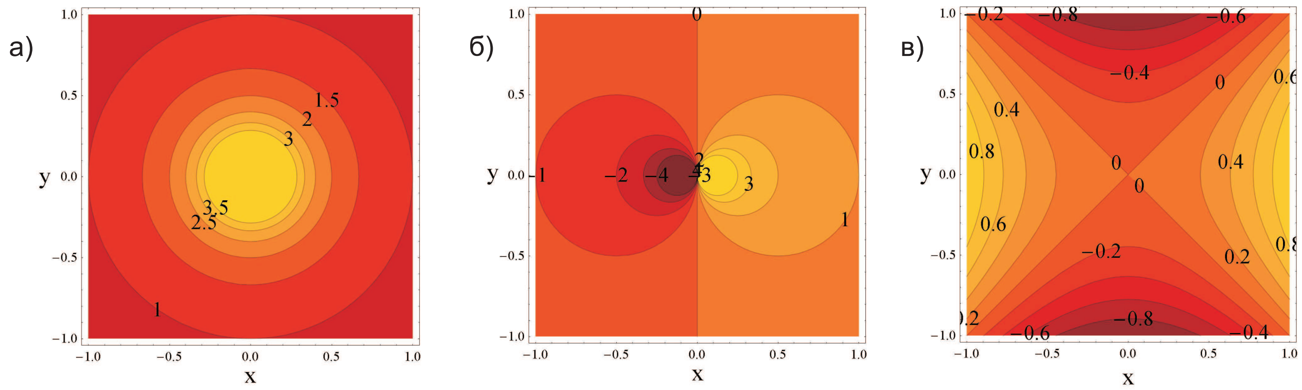


Рис. 4: Линии уровня скалярных полей: а) $u(\vec{r}) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, б) $u(\vec{r}) = \frac{x}{x^2+y^2}$, в) $u(\vec{r}) = x^2 - y^2$.

Очень часто приходится рассматривать скалярное поле, изменяющееся с течением времени: $u(\vec{r}, t)$. Такое поле называется переменным или *нестационарным*. Поле, независящее от времени, называется постоянным или *стационарным*.

Для наглядности представления имеет большое значение графическое представление скалярного поля. Пусть задана функция $u(\vec{r})$. Если задано нестационарное поле, то мы будем рассматривать его в определенные момент времени. Пусть в некоторой точке $M_0(\vec{r}_0)$ функция $u(\vec{r}_0 = u_0)$. Отметим все точки, в которых значение функции равно u_0. Эти точки, вообще говоря, заполняют некоторую поверхность или несколько раздельных поверхностей.

Определение 2.2. Поверхность, не которой скалярное поле $u(\vec{r})$ принимает постоянное значение, называется *поверхностью уровня* или *изоповерхностью*.

Уравнение поверхности уровня в декартовых координатах имеет вид:

$$u(x, y, z) = const. \tag{48}$$

На рис. 4 приведены линии уровня различных плоских скалярных полей, т.е. полей, независящих от координаты, например, z. На рис. 5 показаны эквипотенциальные поверхности (поверхности уровня) потенциала электростатического поля диполя.

Определение 2.3. Скалярное поле $u(M)$ называется дифференцируемым в точке M_0, если приращение поля в точке M_0 может быть представлено в виде

$$\Delta u = u(M) - u(M_0) = \vec{c} \cdot \Delta\vec{r} + o(|\Delta\vec{r}|), \quad \text{при } M \to M_0 \ (\Delta\vec{r} \to 0). \tag{49}$$

где вектор $\vec{c}$ не зависит от $\Delta\vec{r}$. Вектор $\vec{c}$ называется производной скалярного поля в точке M_0, или градиентом, и обозначается как $\vec{c} = \operatorname{grad} u$. Поле дифференцируемо в области G если оно дифференцируемо в каждой его точке.

Введем прямоугольную декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) с базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда вектор $\Delta\vec{r}$ можно представить в виде

$$\Delta\vec{r} = \Delta x_i \vec{e}_i = (x_i - x_{0i})\vec{e}_i, \ i = 1, 2, 3.$$

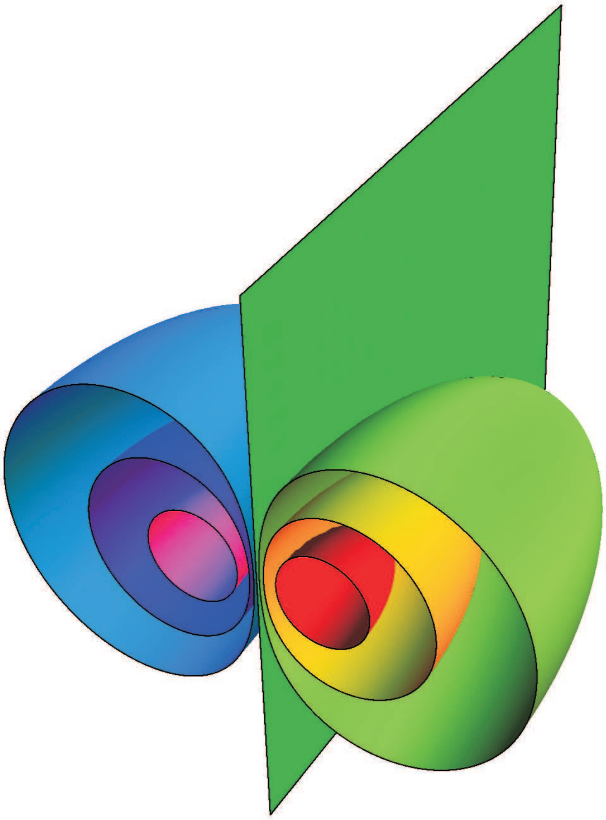


Рис. 5: Эквипотенциальные поверхности диполя.

Значит
$$\Delta u = c_i \cdot \Delta x_i + o(\sqrt{\Delta x_i \Delta x_i}).$$
Из теории функции многих переменных следует, что $c_i = \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x_i}$. Таким образом, в прямоугольной декартовой системе координат
$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x_i}\vec{e}_i = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{50}$$
Пусть $\vec{m}$ – единичный вектор.

Определение 2.4. Производной скалярного поля $u(M)$ по направлению $\vec{m}$ в точке M_0 называется предел
$$\frac{\partial u}{\partial m} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\varepsilon}, \quad \overrightarrow{M_0M} = \vec{m}\varepsilon. \tag{51}$$

Исходя из формул (49-51) получаем, что
$$\frac{\partial u}{\partial m} = \vec{m} \cdot \operatorname{grad} u. \tag{52}$$

Покажем, что производная скалярного поля u в точке M по направлению вектора $\vec{m}$, $\vec{m}^2 = 1$ совпадает с производной скалярного поля в точке M по длине кривой, проходящей через точку M и единичный вектор касательной которой совпадает с вектором $\vec{m}$. Действительно, пусть задана натуральная параметризация кривой $\vec{r}(l)$. Тогда $\vec{m} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(l)}{\mathrm{d}l}$. С одной стороны по определению
$$\frac{\partial u}{\partial m} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{m} = \frac{\partial u}{\partial x}m_x + \frac{\partial u}{\partial y}m_y + \frac{\partial u}{\partial z}m_z.$$
С другой стороны
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}.$$
Но так как, например,
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{i}}{\mathrm{d}l} = \vec{m} \cdot \vec{i} = m_x,$$
получаем искомое.

Свойства градиента скалярного поля.

1° Градиент скалярного поля направлен по нормали к поверхности уровня.

2° Модуль градиента скалярного поля равняется максимальному значению производной поля по направлению в данной точке и градиент направлен в сторону возрастания поля.

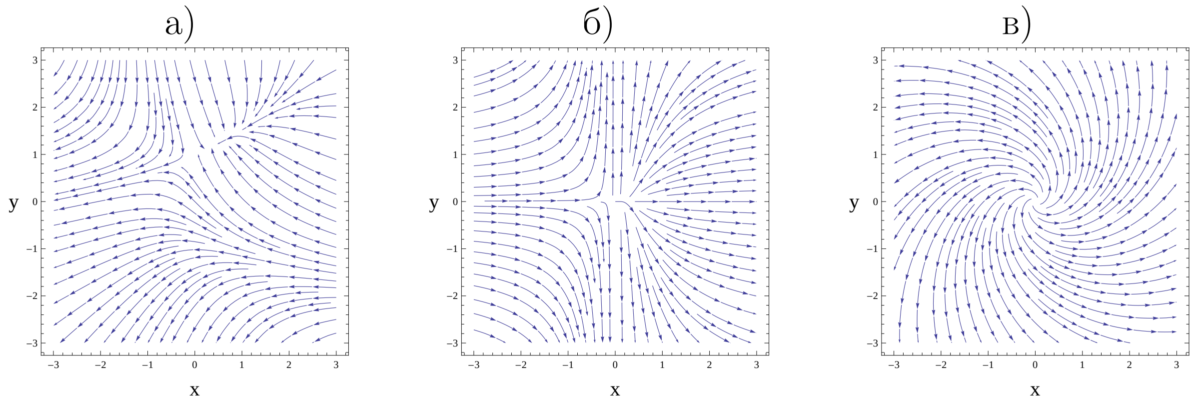


Рис. 6: Линии плоских векторных полей: а) $a_x = y - x^2 - 1,\ a_y = 1 + x - y^2$, б) $a_x = x^2,\ a_y = y$, в) $a_x = x - y,\ a_y = x + y$.

3° Если $\vec{n}$ – единичный вектор нормали поверхности уровня скалярного поля, то градиент поля можно записать в виде

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial n}\vec{n}. \tag{53}$$

2.2 Векторные поля

Определение 2.5. Если каждой точке $M \in G$ ставится в соответствие по некоторому закону вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области G задано *векторное поле*.

Для наглядного изображения векторного поля вводятся линии поля.

Определение 2.6. Кривая, в каждой точке M которой вектор касательной параллелен вектору $\vec{a}(M)$ называется *линией векторного поля* $\vec{a}(M)$.

Две различные линии поля не пересекаются. Допустим обратное. Тогда в точке пересечения линий у нас существует две различных касательных, сонаправленных с вектором $\vec{a}$, что невозможно.

Рассмотрим точку M. Единичный вектор касательной к линии поля будет $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}l}$. Но он сонаправлен с вектором $\vec{a}$. Значит

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}l} \times \vec{a} = 0, \quad \text{или} \quad \mathrm{d}\,\vec{r} \times \vec{a} = 0.$$

Если расписать это уравнение в составляющих, то уравнение линии векторного поля можно получить решая систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{a_x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{a_y} = \frac{\mathrm{d}\,z}{a_z} \tag{54}$$

Определение 2.7. Векторное поле называется дифференцируемым в точке M_0, если приращение поля в точке M_0 может быть представлено в виде

$$\Delta a = A\Delta\vec{r} + o(|\Delta\vec{r}|), \quad \text{при } M \to M_0 \ (\Delta\vec{r} \to 0). \tag{55}$$

где A – линейный оператор не зависящий от $\Delta\vec{r}$. Линейный оператор A называется производной векторного поля. Поле дифференцируемо в области G если оно дифференцируемо в каждой его точке.

Определение 2.8. Производной векторного поля $\vec{a}(M)$ по направлению $\vec{m}$ в точке M_0 называется предел

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial m} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\vec{a}(M) - \vec{a}(M_0)}{\varepsilon}, \quad \vec{M_0M} = \vec{m}\varepsilon. \tag{56}$$

Из приведенных определений следует, что

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial m} = A\vec{m}.$$

Перейдем к прямоугольной декартовой системе координат. Тогда

$$\Delta a_i = A_{ij}\Delta x_j + o(\sqrt{\Delta x_k\Delta x_k}),$$

Откуда

$$A_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Определение 2.9. Дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ называется скалярное поле, обозначаемое как $\operatorname{div}\vec{a}$, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{57}$$

Определение 2.10. Ротором векторного поля $\vec{a}$ называется векторное поле, обозначаемое как $\operatorname{rot}\vec{a}$, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{58}$$

2.3 Оператор Гамильтона

Введем следующий дифференциальный оператор, называемый оператором Гамильтона:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \tag{59}$$

Тогда с его помощью векторные дифференциальные операции можно записать следующим образом

$$\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u, \quad \operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \quad \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a},$$

$$\frac{\partial u}{\partial m} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) u, \qquad \frac{\partial \vec{a}}{\partial m} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a}.$$

Формальный метод вычислений.

При использовании оператора Гамильтона следует иметь в виду следующие правила:

1. Если оператор $\vec{\nabla}$ действует на какое либо произведение, то в первую очередь учитываются его дифференциальный характер, а затем векторные свойства.

2. Входящие в состав сложной формулы величины, на которые действует оператор $\vec{\nabla}$ будем обозначать стрелкой, например $\vec{\nabla} \cdot (\overset{\downarrow}{\vec{a}} \times \vec{b})$.

3. Те величины, на которые оператор $\vec{\nabla}$ не воздействует, в окончательном результате ставятся слева от него, на которые воздействует - справа.

Следующие основные свойства операций над векторами полезны при преобразованиях, содержащих $\vec{\nabla}$:

для $\forall\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in E^3,\ \forall\ \alpha,\ \beta \in R$ выполняется

1° $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2° $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b})$;

3° $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$;

4° $\alpha (\beta \vec{a}) = (\alpha \beta) \vec{a}$;

5° $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

6° $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$;

7° $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$;

8° $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;

9° $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

10° $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

Пусть $u(M)$, $v(M)$, $\vec{a}(M)$, $\vec{b}(M)$ - некоторые скалярные и векторные поля соответственно. Тогда имеют место следующие тождества:

а) $\operatorname{div}(u\vec{a})=\vec{a}\operatorname{grad}u+u\operatorname{div}\vec{a}$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}-\vec{b}\operatorname{div}\vec{a}+(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$;

г) $\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b}+\vec{b}\times\operatorname{rot}\vec{a}+(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}+(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$;

д) $\operatorname{grad}uv=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u$;

е) $\operatorname{rot}(u\vec{a})=u\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\times\operatorname{grad}u$.

Вычисления в прямоугольной декартовой системе координат.
Вычисления с оператором $\vec{\nabla}$ можно также проводить в прямоугольной декартовой системе координат. Тогда можно использовать следующие равенства

$$\nabla_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad \nabla_i x_j=\delta_{ij},$$

$$\operatorname{div}\vec{a}=\nabla_i a_i\qquad \operatorname{rot}\vec{a}=\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\nabla_j a_k,$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})u=a_i\nabla_i u,\qquad (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}=b_i\nabla_i a_k.$$

2.4 Дифференциальные операции второго порядка

Пусть в области G пространства $\mathcal{E}^3$ заданы дважды непрерывно дифференцируемые скалярное $u(M)$ и векторное $\vec{a}(M)$ поля. Тогда $\operatorname{grad}u$ представляет собой дифференцируемое векторное поле в G, $\operatorname{div}\vec{a}$ – дифференцируемое скалярное поле, $\operatorname{rot}\vec{a}$ – дифференцируемое векторное поле. Поэтому возможны следующие дифференциальные операции второго порядка:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u,\quad \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a},\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a},\quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}u,\quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}.$$

Рассмотрим их по порядку.

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}u)=(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})u=\Delta u$$

Оператор Δ называется оператором Лапласа и в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\Delta=(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{60}$$

Далее

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \Delta\vec{a} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a},$$

где $\Delta\vec{a} = \vec{i}\Delta a_x + \vec{j}\Delta a_y + \vec{k}\Delta a_z$. Отсюда получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}.$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}u) = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})u = 0$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{a} = 0.$$

2.5 Криволинейные системы координат

Рассмотрим в трехмерном аффинном евклидовом пространстве $\mathfrak{E}^3$ прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть каждой точке пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка действительных чисел $q^1,\ q^2,\ q^3$.

Определение 2.11. Числа $q^1,\ q^2,\ q^3$, связанные с прямоугольными декартовыми координатами $x,\ y,\ z$ формулами

$$q^1 = q^1(x,y,z), \quad q^2 = q^2(x,y,z), \quad q^3 = q^3(x,y,z), \tag{61}$$

где функции (61) однозначны и непрерывно-дифференцируемы всюду и якобиан преобразования $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(q^1,q^2,q^3)} \neq 0$ называются криволинейными координатами.

Отличие от нуля якобиана преобразования позволяет провести обратное преобразование от криволинейных координат $q^1,\ q^2,\ q^3$ к декартовым $x,\ y,\ z$:

$$x = x(q^1,q^2,q^3), \quad y = y(q^1,q^2,q^3), \quad z = z(q^1,q^2,q^3).$$

Определение 2.12. Условие $q^i = q^i(x,y,z) = const$ определяет семейство непересекающихся поверхностей, которые называются координатными поверхностями.

Определение 2.13. Линия пересечения двух координатных поверхностей, соответствующих различным координатам q^i и q^j, называется координатной линией, соответствующей третьей координате q^k $(i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k)$.

Три координатных поверхности, взятые из разных семейств, пересекаются в одной точке. Также в одной точке пересекаются и три координатные линии, соответствующие различным координатам.

Обозначим для краткости декартовы орты $\hat{\vec{e}}_i$: $\hat{\vec{e}}_1 = \vec{i},\ \hat{\vec{e}}_2 = \vec{j},\ \hat{\vec{e}}_3 = \vec{k}$. Тогда радиус-вектор точки можно записать как $\vec{r} = x^i\hat{\vec{e}}_i$.

В каждой точке M можно построить произвольный базис. Однако естественным образом строится *натуральный базис*, векторы которого направлены по касательным к координатным линиям. Эти векторы имеют вид

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\hat{\vec{e}}_k. \tag{62}$$

мы видим, что якобиан преобразования равен смешанному произведению векторов

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q^1,q^2,q^3)} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} \neq 0.$$

А значит касательные векторы некомпланарны и образуют базис.

Таким образом, в каждой точке мы можем построить натуральный базис, который вообще говоря будет изменятся от точки к точке.

Определение 2.14. Система координат является ортогональной если для любой точки пространства координатные линии попарно ортогональны.

Другими словами натуральный базис в каждой точке пространства является ортогональным.

Рассмотрим ортогональную систему координат. Натуральные базисные векторы

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\hat{\vec{e}}_k$$

будут попарно ортогональными, но вообще говоря не единичными. Нормируем их так:

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\alpha}. \tag{63}$$

где

$$H_k = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}\right| = qrt\left(\frac{\partial x}{\partial q^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^k}\right)^2 \tag{64}$$

Определение 2.15. Коэффициенты H_k, $k = 1,2,3$ называются коэффициентами Ламе.

Дифференциал радиус-вектора определяется следующим образом

$$\mathrm{d}\,\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}\,\mathrm{d}\,q^k = H_1\,\mathrm{d}\,q^1\vec{e}_1 + H_2\,\mathrm{d}\,q^2\vec{e}_2 + H_3\,\mathrm{d}\,q^3\vec{e}_3 \tag{65}$$

Элементы

$$\mathrm{d}\,l^k = H_k\,\mathrm{d}\,q^k \tag{66}$$

являются элементарными длинами дуг координатных линий. Тогда элементы площадей координатных поверхностей

$$\mathrm{d}\,S_1 = H_2H_3\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3, \quad \mathrm{d}\,S_2 = H_1H_3\,\mathrm{d}\,q^1\,\mathrm{d}\,q^3, \quad \mathrm{d}\,S_3 = H_1H_2\,\mathrm{d}\,q^1\,\mathrm{d}\,q^2. \tag{67}$$

Элемент объема

$$\mathrm{d}\,V = H_1 H_2 H_3 \,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z. \tag{68}$$

Цилиндрическая система координат

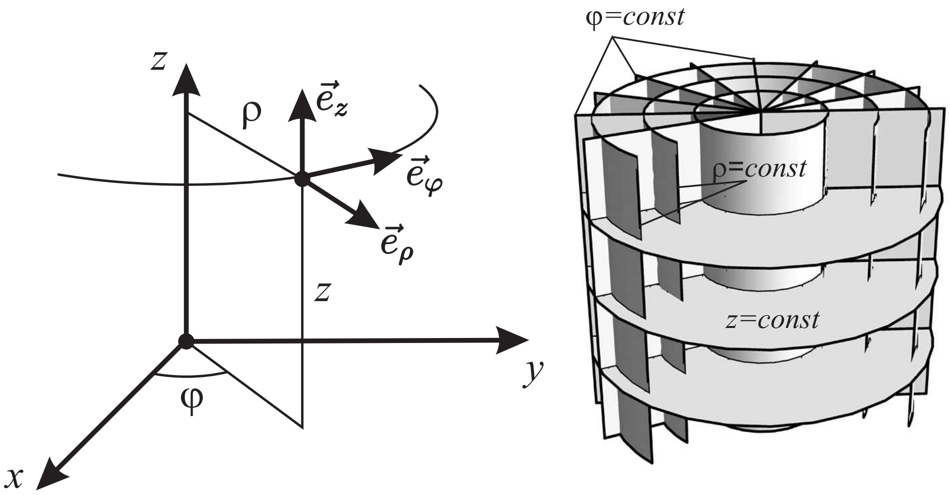


Рис. 7: Цилиндрическая система координат

В цилиндрической системе координат положение точки в пространстве определяются координатами

$$q^1 = \rho, \quad 0 \leqslant \rho < +\infty \tag{69}$$
$$q^2 = \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \tag{70}$$
$$q^3 = z, \quad -\infty < z < +\infty \tag{71}$$

Связь декартовых координат с цилиндрическими имеет вид

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{72}$$

Связь цилиндрических с декартовыми такова

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}, \quad z = z. \tag{73}$$

Коэффициенты Ламэ, базисные векторы, длины дуг и площади:

$$\begin{array}{llll}
H_1 = 1 & \vec{e}_\rho = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi & \mathrm{d}\,l^1 = \mathrm{d}\,\rho & \mathrm{d}\,S_1 = \rho\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,z \\
H_2 = \rho & \vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi & \mathrm{d}\,l^2 = \rho\,\mathrm{d}\,\varphi & \mathrm{d}\,S_2 = \mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,z \\
H_3 = 1 & \vec{e}_z = \vec{k} & \mathrm{d}\,l^3 = \mathrm{d}\,z & \mathrm{d}\,S_3 = \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\varphi
\end{array}$$

Элемент объема $\mathrm{d}\,V = \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,z$.

Координатными поверхностями являются:

$R = const$ – круговые цилиндры с осью Oz;
$\varphi = const$ – полуплоскости, примыкающие к оси Oz;
$z = const$ – плоскости, перпендикулярные оси Oz.

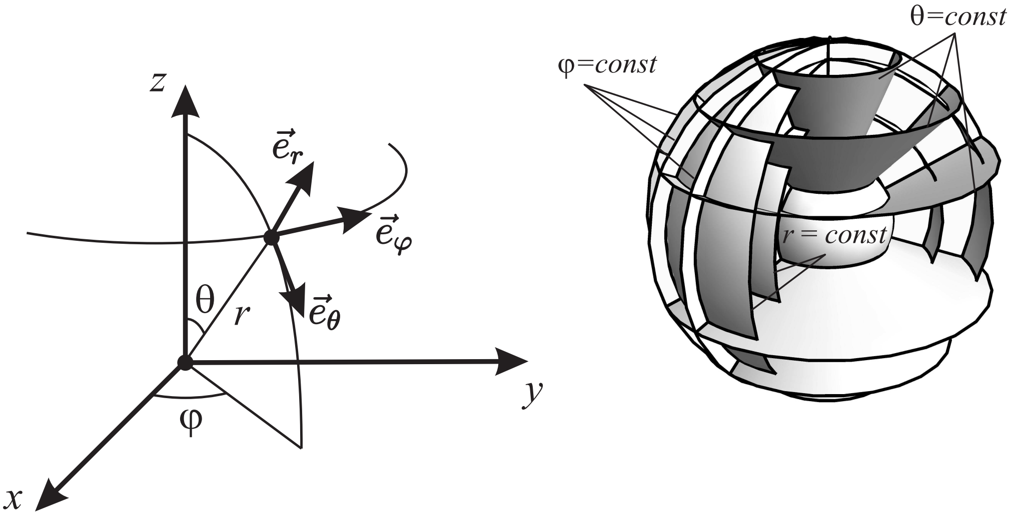


Рис. 8: Сферическая система координат

Сферическая система координат

В сферической системе координат положение точки в пространстве определяются координатами

$$q^1 = r, \quad 0 \leqslant r < +\infty \tag{74}$$
$$q^2 = \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{75}$$
$$q^3 = \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \tag{76}$$

Связь декартовых координат со сферическими имеет вид

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta. \tag{77}$$

Связь сферических координат с декартовыми:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}. \tag{78}$$

Коэффициенты Ламэ, базисные векторы, длины дуг и площади:

$H_1 = 1$	$\vec{e}_r = (\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j})\, in\theta + \vec{k}\cos\theta$	$\mathrm{d}\, l^1 = \mathrm{d}\, r$	$\mathrm{d}\, S_1 = r^2\, in\theta\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\varphi$
$H_2 = r$	$\vec{e}_\theta = (\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j})\cos\theta - \vec{k}\sin\theta$	$\mathrm{d}\, l^2 = r\,\mathrm{d}\,\theta$	$\mathrm{d}\, S_2 = r\sin\theta\,\mathrm{d}\, r\,\mathrm{d}\,\varphi$
$H_3 = r\sin\theta$	$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$	$\mathrm{d}\, l^3 = r\sin\theta\,\mathrm{d}\,\varphi$	$\mathrm{d}\, S_3 = r\,\mathrm{d}\, r\,\mathrm{d}\,\theta$

Элемент объема $\mathrm{d}\, V = r^2\, in\theta\,\mathrm{d}\, r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\varphi$.

Координатными поверхностями являются

$r = const$ – сферы с центром в точке O;
$\theta = const$ – круговые полуконусы с осью Oz;
$\varphi = const$ – полуплоскости, примыкающие к оси Oz.

3 Кратные и несобственные интегралы

3.1 Понятие квадрируемости плоской фигуры. Площадь плоской фигуры

Из курса школьной математики известно как вычислять площадь треугольника, и соответственно, площадь многоугольника. Рассмотрим вопрос о вычислении площади произвольной ограниченной области на евклидовой плоскости $\mathcal{E}^2$.

Рассмотрим односвязную область $D \subset \mathcal{E}^2$, ограниченную простой замкнутой кривой $\mathcal{L}$. Мы будем говорить, что многоугольник вписан в область D, если каждая точка этого многоугольника принадлежит области D или ее границе. Если все точки области и ее границы принадлежат некоторому многоугольнику, то будем говорить, что указанный многоугольник описан вокруг области D.

Понятно, что вписать и описать многоугольник можно бесконечным числом способов. Пусть $\{S_i\}$ множество площадей, вписанных в область D, а $\{S_e\}$ – описанных. Очевидно, что площадь любого вписанного многоугольника меньше площади описанного. Поэтому множество $\{S_i\}$ ограничено сверху. а множество $\{S_e\}$ – снизу. Обозначим $\underline{S} = \sup\{S_i\}$, $\overline{S} = \inf\{S_e\}$.

Определение 3.1. Числа $\underline{S}$ и $\overline{S}$ называются нижней и верхней площадью области D соответственно.

Отметим, что $\underline{S} \leqslant \overline{S}$.

Определение 3.2. Плоская область D называется квадрируемой, если $\underline{S} = \overline{S} = S$. Число S называется площадью области D.

Теорема 3.1. Для того чтобы плоская область D была квадрируемой? необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε можно было указать такой описанный вокруг области D многоугольник и такой вписанный в область D многоугольник, разность $S_e - S_i$ площадей которых была бы меньше ε.

Совокупность точек, принадлежащих описанному многоугольнику, но не принадлежащих вписанному, представляет собой многоугольную фигуру площади $S_e - S_i$, целиком содержащую границу области D. Поэтому условие теоремы означает, что область D квадрируема в том и только том случае, если ее граница может быть погружена в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади.

Определение 3.3. Будем говорить, что некоторое множество, в частности кривая, имеет площадь нуль, если его можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади.

Тогда Для того чтобы область D была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь нуль.

Всякая спрямляемая кривая имеет площадь нуль.

Теорема 3.2. (Достаточный признак квадрируемости плоской области) Если граница $\mathcal{L}$ плоской области D является спрямляемой кривой, то область D квадрируема.

Свойства площади:

1. Пусть D_1, и D_2 — две квадрируемые области без общих внутренних точек и D – их объединение; тогда D тоже квадрируема и $S(D) = S(D_1) + S(D_2)$.

2. Общая часть двух квадрируемых областей есть квадрируемая область.

3.2 Понятие двойного интеграла

Пусть на ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ определена функция $f(x, y)$. Пусть T есть разбиение области D на частичные области D_k, $k = \overline{1, n}$, без общих внутренних точек, причём $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k$. При этом, если $S(D_k)$ — площадь частичной области D_k, то $\sum\limits_{k=1}^{n} S(D_k) = S(D)$ — площадь области D. В каждой частичной области D_k, $k = \overline{1, n}$ выберем произвольную точку $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$. Сумма

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot S(D_k)$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ по области D. Значение интегральной суммы зависит от разбиения T и выбора точек $(\xi_k; \eta_k) \in D_k$. Наибольший из диаметров частичных областей D_k, $k = \overline{1, n}$, будем называть *диаметром разбиения* T и обозначать $\lambda(T)$.

Определение 3.4. Число I называется пределом интегральной суммы σ при $\lambda(T) \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall T,\ \lambda(T) < \delta$ справедливо неравенство $|I - \sigma| < \varepsilon$. При этом пишут $I = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0}$.

Определение 3.5. Если существует конечный предел интегральных сумм при $\lambda(T) \to 0$

$$I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k; \eta_k) \cdot S(D_k),$$

не зависящий ни от разбиения T, ни от выбора точек $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, то функцию f называют **интегрируемой** на области D, а число I — **двойным интегралом** от функции f по области D и обозначают

$$I = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy.$$

3.3 Условие существования двойного интеграла

Как и в случае определённого интеграла, если функция интегрируема на области D, то она ограничена на D. Действительно, в противном случае при любом заданном способе разбиения области D на части можно было бы за счет выбора точек (ξ_k, η_k) сделать интегральную сумму произвольно большой. Поэтому впредь будем считать функцию $f(x, y)$ ограниченной:

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M$$

Пусть $m_k = \inf\limits_{(x,y)\in D_k} f(x, y)$, а $M_k = \sup\limits_{(x,y)\in D_k} f(x, y)$. Составим нижнюю и верхнюю суммы Дарбу

$$q = \sum_{k=1}^{n} m_k S(D_k), \qquad Q = \sum_{k=1}^{n} M_k S(D_k).$$

Для сумм Дарбу, как и в линейном случае, могут быть установлены следующие свойства.

1. При фиксированном разбиении (и всевозможном выборе точек (ξ_k, η_k))верхняя и нижняя суммы Дарбу представляют собой соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани интегральных сумм.

2. При дальнейшем дроблении частей (D_k), с добавлением к старым линиям деления новых, нижняя сумма Дарбу не убывает, а верхняя — не возрастает.

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы отвечающей и другому способу разложения области (D).

Доказательство проводится аналогично линейному случаю; лишь в тех случаях, когда там говорилось о точках деления, здесь приходится говорить о линиях деления.

Теорема 3.3. Для того, чтобы ограниченная на квадрируемой области D функция $f(x, y)$ была интегрируемой по Риману, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(Q - q) = 0$. При выполнении этих условий $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} Q = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} q = I$.

Так какие же функции интегрируемы.

Теорема 3.4. Всякая непрерывная в замкнутой ограниченной области D функция интегрируема.

Теорема 3.5. Если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой ограниченной области D и непрерывна на D всюду, кроме некоторого множества площади нуль, то $f(x, y)$ интегрируема в D.

Двойной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам определённого интеграла:

1. $\iint\limits_D 1 \cdot dxdy = S(D)$, где $S(D)$ — площадь фигуры D.

2. *Свойство линейности.* Если $f\,(x,y)$ и $g\,(x,y)$ интегрируемы на D, а α и β — произвольные действительные числа, то и функция $\alpha f+\beta g$ — интегрируема на D, причём

$$\iint\limits_D(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))dxdy=\alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy+\beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

3. *Свойство аддитивности.* Пусть $\{D_k,\ \ k=\overline{1,n}\}$ — разбиение области D. Функция f является интегрируемой на D тогда и только тогда, когда она интегрируема на каждой из областей $D_k,\ k=\overline{1,n}$. Если пересечения областей не содержат внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{D_k} f(x,y)dxdy.$$

4. *Свойство монотонности.* Если $f\,(x,y)$ и $g\,(x,y)$ — интегрируемые на области D функции и $f\,(x,y)\leqslant g\,(x,y)\ \forall(x;y)\in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy\leqslant\iint\limits_D g(x,y)dxdy$. В частности, если $f\,(x,y)\geqslant 0$ $\forall(x;y)\in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy\geqslant 0$.

5. *Оценка модуля интеграла.* Если функция $f\,(x,y)$ интегрируема на области D, то и функция $|f\,(x,y)|$ также интегрируема на D и $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\leqslant\iint\limits_D|f(x,y)|\,dxdy$.

6. *Оценка двойного интеграла.* Если функция $f\,(x,y)$ интегрируема на области D и $M=\max\limits_D f(x,y),\ m=\min\limits_D f(x,y)$, то

$$m\cdot S(D)\leqslant\iint\limits_D f(x,y)dxdy\leqslant M\cdot S(D).$$

7. *Теорема о среднем.* Если при этом $f\,(x,y)$ непрерывна на замкнутой ограниченной области D, то существует точка $(\xi;\eta)\in D$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\cdot S(D).$$

3.4 Вычисление двойного интеграла

Основная идея излагаемых ниже теорем состоит в следующем. Будем рассматривать двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

как объем криволинейного цилиндра T, ограниченного снизу областью D, сверху поверхностью $z = f(x, y)$, и сбоку цилиндрической поверхностью, проходящей через границу области D. Тело T можно представлять себе как составленное из бесконечно тонких слоев, параллельных плоскости yz. Объем каждого такого слоя равен $F(x)dx$, т. е. произведению площади $F(x)$ соответствующего сечения тела T на толщину слоя dx. Объем всего тела T при этом равен

$$\int\limits_a^b F(x)dx$$

В свою очередь величина $F(x)$ (площадь криволинейной трапеции) представляется интегралом

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dx$$

где рассматривается как фиксированная величина, а $y_1()$ и $y_2(x)$ – концы того отрезка, который служит проекцией рассматриваемого сечения на плоскость . Таким образом, объем тела может быть представлен в виде

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dx$$

Ясно, что, если бы мы, снова взяв некоторый криволинейный цилиндр, стали бы рассматривать его сечения, параллельные не плоскости yz,

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dy$$

Перейдем теперь к точному изложению.

Теорема 3.6. Если для функции $f(x, y)$, определенной в прямоугольнике $P = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, существует двойной интеграл $\iint\limits_P f(x, y)dxdy$, а при каждом фиксированном значении x, $a \leqslant x \leqslant b$, существует однократный интеграл $F(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy$, то существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dx = \int\limits_a^b F(x)dx$ и выполняется равенство

$$\iint\limits_P f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy.$$

Если существует $F_1(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$, то

$$\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Определение 3.6. Если всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку области D параллельно оси Oy (оси Ox), пересекает её границу не более чем в двух точках, то область D называется **элементарной относительно оси Oy** (оси Ox).

Теорема 3.7. Пусть функция $f(x,y)$ является интегрируемой на элементарной относительно оси Oy области $D = \{(x;y) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, и для каждого $x \in [a,b]$ существует интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$. Тогда верна формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{79}$$

Если окажется, что нижняя или верхняя линия границы состоит из нескольких участков, задаваемых различными уравнениями, то область D разбивают прямыми, параллельными оси Oy, на части, в которых нижняя и верхняя линии границы определяются каждая одним уравнением.

Если область D является элементарной относительно оси Ox , т.е. $D = \{(x;y) : \alpha(y) \leqslant$
где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx. \tag{80}$$

Пределы внешнего интеграла всегда постоянны. Пределы внутреннего интеграла, вообще говоря, являются функциями от той переменной, которая рассматривается как постоянная. *Пределы внутреннего интеграла оба будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат.*

Найти интеграл $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, если область D ограничена кривыми: $y = x+1$, $y = (x-1)^2$, $y = 0$.

Хотя область D является элементарной относительно оси Oy, но верхняя её часть границы задаётся разными уравнениями. Поэтому прямой $x = 0$ разобьём её на две области D_1 и D_2. Используя формулу (79) для обеих областей, получаем

$$\iint\limits_{D} (x-y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (x-y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (x-y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x+1} (x-y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{(x-1)^2} (x-y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left(xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^{x+1} dx + \int\limits_{0}^{1} \left(xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^{(x-1)^2} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dx + \int\limits_{0}^{1} \left(-\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(-\frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{7}{20}.$$

Поскольку область D является элементарной также относительно оси Ox, то сразу получаем

$$\iint\limits_{D} (x-y)\,dxdy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-1}^{1-\sqrt{y}} (x-y)\,dx = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2 - yx\right)\Bigg|_{y-1}^{1-\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left(y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y\right) dx = \left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y^2\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{7}{20}.\blacktriangle$$

3.5 Замена переменных в двойном интеграле

Теорема 3.8. Пусть $x = x(q_1, q_2)$, $y = (q_1, q_2)$ – взаимно однозначное, непрерывное и непрерывно дифференцируемое отображение области Δ на область D, якобиан которого отличен от нуля. Тогда

$$S(D) = \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{\Delta} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(q_1,q_2)}\right| dq_1dq_2.$$

Теорема 3.9. Пусть $x = x(q_1, q_2)$, $y = (q_1, q_2)$ – взаимно однозначное, непрерывное и непрерывно дифференцируемое отображение области Δ на область D, якобиан которого отличен от нуля. Если функция $f(x, y)$ – интегрируема в области D, то справедлива формула замены переменнной

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(x(q_1,q_2), y(q_1,q_2)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(q_1,q_2)} \right| dq_1 dq_2.$$

3.6 Тройной интеграл

Пусть на ограниченной области $E \subset \mathbb{R}^3$ определена функция $f(x, y, z)$. Пусть T есть разбиение области E на частичные области E_k, $k = \overline{1, n}$ без общих внутренних точек, причём $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. При этом, если $V(E_k)$ — объём частичной области E_k, то $\sum\limits_{k=1}^{n} V(E_k) = V(E)$ — объём области E. В каждой частичной области E_k, $k = \overline{1, n}$ выберем произвольную точку $(\xi_k; \eta_k; \zeta_k) \in E_k$. Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k; \eta_k) \cdot V(E_k)$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y, z)$ по области E. Значение интегральной суммы зависит от разбиения T и выбора точек $(\xi_k; \eta_k; \zeta_k) \in E_k$. Наибольший из диаметров частичных областей E_k, $k = \overline{1, n}$ будем называть ***диаметром разбиения*** T и обозначать $\lambda(T)$.

Определение 3.7. Если существует конечный предел интегральных сумм при $\lambda(T) \to 0$

$$I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k; \eta_k; \zeta_k) \cdot S(D_k),$$

не зависящий ни от разбиения T, ни от выбора точек $(\xi_k; \eta_k; \zeta_k) \in E_k$, то функцию f называют **интегрируемой** на области E, а число I — **тройным интегралом** от функции f по области E и обозначают $I = \iiint\limits_E f(x, y, z)dxdydz$.

Как и в случае двойного интеграла, если функция интегрируема на области E, то она ограничена на E. В частности непрерывная на E функция является интегрируемой наE.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла: область интегрирования можно разбивать на части; интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой из функций; постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трёх обыкновенных определённых интегралов по каждой из трёх координат трёхмерного пространства.

Область E будем называть *элементарной относительно оси* Oz, если если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области E параллельно оси Oz, пересекает её границу не более чем в двух точках, т.е.

$$E = \left\{(x;y;z) : (x;y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\right\}.$$

Вычисляют тройной интеграл на основании следующей теоремы.

Теорема 3.10. Пусть функция $f(x,y,z)$ интегрируема на области E, элементарной относительно оси Oz. Если для каждой фиксированной точки $(x;y) \in D$ (проекция фигуры E на плоскость Oxy) существует $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, то существует $\iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ и он равен тройному интегралу

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{81}$$

В частности, если область D является элементарной относительно оси Oy т.е $D = \{(x;y) : \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ (рис. ??), то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{82}$$

Как правило пределы внутреннего одномерного интеграла в (82) являются переменными. Они зависят от тех двух переменных, которые в этом интеграле рассматриваются как постоянные. Оба эти предела будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования E есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz, а основания расположены в плоскостях, параллельных плоскости xOy.

Меняя ролями переменные x, y, z в формуле (81),можно получить и другие аналогичные формулы для вычисления тройного интеграла посредством последовательного вычисления обыкновенного и двойного интегралов.

Замена переменных

$$\begin{cases} x = x\,(u,v,w)\,, \\ y = y\,(u,v,w)\,, \\ z = z\,(u,v,w) \end{cases} \tag{83}$$

в тройном интеграле осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_\Delta f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right) \left|\frac{D\left(x,y,z\right)}{D\left(u,v,w\right)}\right| dudvdw, \tag{84}$$

где E — образ области Δ при отображении (83), а якобиан

$$\frac{D\left(x,y,z\right)}{D\left(u,v,w\right)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

3.7 Собственные интегралы зависящие от параметра и их свойства

Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $\Pi = \Big\{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\Big\}$ и при каждом фиксированном $y \in [c,d]$ существует интеграл

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx. \tag{85}$$

В интеграле (85) интегрирование ведется по переменной x. Переменную y, которая при интегрировании считается постоянной, называют *параметром*, а интеграл (85) – *интегралом, зависящим от параметра y*.

От параметра y может зависеть не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования. В таком случае интеграл имеет вид:

$$F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx. \tag{86}$$

Аналогично определяют интеграл, зависящий не от одного, а от нескольких параметров. Например,

$$F(y,z,t) = \int\limits_a^b f(x,y,z,t)dx.$$

В дальнейшем изложении мы будем рассматривать интегралы, зависящие от одного параметра. Полученные результаты легко переносятся на случай любого конечного числа параметров.

Свойства интегралов, зависящих от параметра

Укажем ряд теорем о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости по параметру интегралов (85) и (86).

Теорема 3.11. (О непрерывности интеграла.) Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике П, то функция $I(y)$, определяемая соотношением (85), непрерывна на отрезке $[c, d]$.

Теорема 3.12. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике П, а функции $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$, причем $a \leqslant a(y) \leqslant b$, $a \leqslant b(y) \leqslant b$. Тогда функция $F(y)$, определяемая соотношением (86), непрерывна на отрезке $[c, d]$.

Заметим, что утверждениям теорем 11 и 12 можно придать следующий вид при любом $y_0 \in [c, d]$:

а) $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)dx$

(т.е. можно переходить к пределу по параметру под знаком интеграла);

б) $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx = \int\limits_{\lim\limits_{y \to y_0} a(y)}^{\lim\limits_{y \to y_0} b(y)} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)dx.$

Теорема 3.13. (О дифференцировании интеграла по параметру) Если функция $f(x, y)$ и ее производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике П, то функция $I(y)$, определяемая соотношением (85), дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и ее производная $\dfrac{dI}{dy}$ может быть найдена по формуле

$$\frac{dI}{dy} = \frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx. \tag{87}$$

Иными словами, интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

Формулу (87) дифференцирования интеграла (85) по параметру y часто называют *формулой* или *правилом Лейбница*.

Теорема 3.14. Пусть $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике П, а функции $x=a(y)$ и $x=b(y)$ дифференцируемы на отрезке $[c,d]$ и удовлетворяют условию $a \leqslant a(y) \leqslant b$, $a \leqslant b(y) \leqslant b$. Тогда функция $F(y)$, определяемая соотношением (86), дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и ее производная $F'(y)$ может быть найдена по формуле:

$$F'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx + f(b(y),y)\cdot b'(y) - f(a(y),y)\cdot a'(y). \tag{88}$$

Замечание. *Теоремы 12 и 14 справедливы и в предположении, что функция* $f(x,y)$ *задана и обладает указанными свойствами лишь в области* $D = \{a(y) \leqslant x \leqslant b(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$.

Теорема 3.15. **(Об интегрировании интеграла по параметру** Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике П, то функция $I(y)$, определяется соотношением (85), интегрируема на отрезке $[c,d]$, причем:

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^b f(x,y)dx\Big]dy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_c^d f(x,y)dy\Big]dx. \tag{89}$$

Иными словами, интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком интеграла.

3.8 Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость

Пусть функция $f(x,y)$ определена в полуполосе $\Pi_\infty = \Big\{(x,y) : a \leqslant x < +\infty, c \leqslant y \leqslant d\Big\}$ и при любом *фиксированном* $y \in [c,d]$ сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$, т.е. для $\forall y \in [c,d]$ существует

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx.$$

При таких условиях на отрезке $[c,d]$ определена функция

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx, \tag{90}$$

называемая несобственным интегралом (с бесконечным пределом), зависящим от параметра y. Теория таких интегралов служит основой для вывода большого числа важнейших классических формул анализа.

Сходимость интеграла (90) на отрезке $[c,d]$ означает, что $\forall\varepsilon>0\ \ \forall y\in[c,d]\exists\triangle=\triangle(\varepsilon,y)\geqslant a:\ \forall A>\triangle\Rightarrow\left|\int\limits_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|<\varepsilon.$

Числа $\triangle(\varepsilon,y)$ при заданном ε будет, вообще говоря, различными для различных значений $y\in[c,d]$.

Если $\sup\limits_{c\leqslant y\leqslant d}\triangle(\varepsilon,y)=\triangle(\varepsilon)$ есть конечное число, то при $A>\triangle(\varepsilon)$ неравенство

$$\left|\int\limits_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|<\varepsilon \tag{91}$$

будет выполняться одновременно для всех $y\in[c,d]$. В таком случае говорят о равномерной сходимости интеграла.

Если же $\sup\limits_{c\leqslant y\leqslant d}\triangle(\varepsilon,y)=+\infty$, то нельзя указать $\triangle(\varepsilon)$, зависящее только от ε, чтобы неравенство (91) имело место сразу для всех $y\in[c,d]$.

Определение 3.8. Интеграл (90) называется равномерно сходящимся по параметру y на отрезке $[c,d]$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\triangle=\triangle(\varepsilon)\geqslant a$ (зависящее только от ε) $:\forall A>\triangle\ \ \forall y\in[c,d]\Rightarrow$

$$\left|\int\limits_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|<\varepsilon.$$

Сформулируем отрицание равномерной сходимости интеграла.

Определение 3.9. Интеграл (90), сходящийся на отрезке $[c,d]$, называется неравномерно сходящимся по параметру y, если $\exists\varepsilon_0>0:\forall\triangle>a\ \exists A>\triangle$ и $\exists y\in[c,d]:\Rightarrow\left|\int\limits_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|>\varepsilon_0.$

При исследовании несобственных интегралов, зависящих от параметра, на равномерную сходимость часто целесообразнее использовать (вместо определений 8 и 9) критерий Коши и достаточные признаки равномерной сходимости интегралов. Укажем некоторые из них. В формулировках теорем, приводимых ниже, под символом Π_∞ будем понимать полуполосу $a\leqslant x<+\infty, c\leqslant y\leqslant d$.

Теорема 3.16. (Критерий Коши) Для того чтобы несобственный интеграл (90) равномерно сходится по параметру y на отрезке $[c,d]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\triangle=\triangle(\varepsilon)\geqslant a:\forall A_2>A_1>\triangle\ \forall y\in[c,d]\ \Rightarrow\left|\int\limits_{A_1}^{A_2}f(x,y)\right|<\varepsilon.$$

В качестве иллюстрации использования этого критерия укажем следующее иногда весьма полезное его следствие.

Следствие. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в полуполосе Π_∞, а интеграл (90) сходится при любом $y \in (c, d)$, но расходится при $y = c$ или $y = d$, то он неравномерно сходится по параметру y на интервале (c, d).*

Например, неравномерная сходимость интеграла на промежутке $(0, 1]$ в примере **??** является простым следствием расходимости данного интеграла при $y = 0$.

Теорема 3.17. (Признак Вейерштрасса) Если для всех точек полуполосы Π_∞ выполняется неравенство $\left|f(x, y)\right| \leqslant g(x)$, причем интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится, то интеграл (90) равномерно сходится по параметру y на отрезке $[c, d]$.

Отметим, что в теореме 17 достаточно требовать выполнения неравенства $\left|f(x, y)\right| \leqslant g(x)$ в полуполосе $\{\overline{x} \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, где $\overline{x} > a$.

Заметим, что признак Вейерштрасса является достаточным признаком равномерной сходимости несобственных интегралов, гарантирующим и абсолютную сходимость. Поэтому он не применим к условно сходящимся интегралам. Сформулируем один признак, который наиболее часто встречается на практике, пригодный и для интегралов условно сходящихся.

Теорема 3.18. (Признак Абеля-Дирихле) Пусть функции $f(x)$ и $g(x, y)$ (при каждом значении $y \in [c, d]$) интегрируемы по x на любом отрезке $[a, A]$. Для равномерной сходимости интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x, y)dx$$

на отрезке $[c, d]$ достаточно, чтобы были выполнены следующие 2 условия:

1. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;
2. при каждом $y \in [c, d]$ функция $g(x, y)$ монотонна по x при $x \geqslant a$ и $\exists M \in \mathbb{R} : \forall (x, y) \in \Pi_\infty \Rightarrow \left|g(x, y)\right| < M$.

Например, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-xy}\,dx$ $(a \geqslant 0)$ сходится равномерно по параметру y на полуоси $y \geqslant 0$, если сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Действительно, функция e^{-xy} монотонно убывает по x и $\mathrm{e}^{-xy} < 1$.

3.9 Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметра

Как и раньше, символом Π_∞ будем обозначать полуполосу $\Pi_\infty = \Big\{(x, y) : a \leqslant x < +\infty, c \leqslant y \leqslant d\Big\}$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.19. (О непрерывности несобственного интеграла) Если функция $f(x, y)$ непрерывна в полуполосе Π_∞, а интеграл

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx \tag{92}$$

сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c, d]$, то на этом отрезке $I(y)$ является непрерывной функцией.

Заметим, что требование равномерной сходимости интеграла (92) не является необходимым условием непрерывности $I(y)$. Однако в случае положительной подынтегральной функции имеет место в некотором роде обратная теорема.

Теорема 3.20. (Дини) Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в полуполосе Π_∞ и интеграл (92) сходится на отрезке $[c, d]$. Тогда если функция $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$, то интеграл (92) сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c, d]$.

Заметим, что утверждению теоремы 19 можно придать следующий вид:

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx \quad (c < y_0 < d).$$

Однако равномерной сходимости на любом отрезке $[a, A]$ недостаточно, чтобы перенести заключение теоремы на случай стремления параметра y к $+\infty$.

В самом деле, по признаку Вейерштрасса интеграл $F(y) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{y}{x^3}\, \mathrm{e}^{-\frac{y}{x^2}}\, dx$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[1, A]$, причем

$$F(y) = \frac{1}{2} \int\limits_1^{\infty} d\Big(\mathrm{e}^{-\frac{y}{x^2}}\Big) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{y}{x^2}}\Big]\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-y}) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

В то же время

$$\int\limits_1^{+\infty} \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{x^3}\, \mathrm{e}^{-\frac{y}{x^2}}\, dx = \int\limits_1^{+\infty} 0dx = 0$$

Теорема 3.21. (О дифференцировании по параметру несобственного интеграла) Пусть функция $f(x,y)$ и ее производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в полуполосе Π_∞ и интеграл (92) сходится на отрезке $[c,d]$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно на этом отрезке. Тогда функция $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$, причем

$$\frac{dI}{dy} = \frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

Иными словами, дифференцирование по параметру можно производить под знаком интеграла.

Теорема 3.22. (Об интегрировании несобственного интеграла по параметру) Если функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе Π_∞, а интеграл (92) сходится равномерно на отрезке $[c,d]$, то

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\Big]dy = \int\limits_a^{+\infty}\Big[\int\limits_c^d f(x,y)dy\Big]dx$$

Иными словами, несобственный интеграл можно интегрировать по параметру под знаком несобственного интеграла.

В теореме 22 существенно, что интегрирование по параметру совершается на конечном отрезке $[c,d]$. Значительно более сложно решается вопрос о несобственном интегрировании по параметру интеграла (92). Для приложений особенно важен случай, когда подынтегральная функция сохраняет знак.

Теорема 3.23. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и сохраняет знак при $c \leqslant y < +\infty$ и $a \leqslant x < +\infty$, а интегралы

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx \quad \text{и} \quad F(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

как функции параметров непрерывны соответственно при $y \geqslant c$ и $x \geqslant a$. Тогда, если один из следующих двух несобственных интегралов

$$\int_c^{+\infty} I(y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} F(x)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

сходится, то сходится и другой, и они равны между собой, т.е.

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy.$$

3.10 Несобственные интегралы от неограниченных функций, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ задана в полуоткрытом прямоугольнике

$$P = \Big\{(x,y): \quad a \leqslant x < b, \quad c \leqslant y \leqslant d\Big\}$$

и при любом фиксированном $y \in [c.d]$ является неограниченной при $x \to b-0$ и пусть, кроме того, $\forall y \in [c,d]$ сходится интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx. \tag{93}$$

Определение 3.10. Несобственный интеграл (93) называется равномерно сходящимся по параметру y на отрезке $[c,d]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon): \quad \forall \lambda \quad (0 < \lambda < \delta) \quad \forall y \in [c,d] \Rightarrow \left| \int_{b-\lambda}^{b} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

В определении 10 существенно, что δ зависит лишь от ε и не зависит от y.

С помощью замены переменной несобственный интеграл (93) можно свести к несобственному интегралу с бесконечным пределом интегрирования. Поэтому на интеграл (93) могут быть распространены приведенные ранее теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, об условиях его непрерывности, об интегрировании и дифференцировании по параметру. Сформулируем, например, признак Вейерштрасса равномерной сходимости по параметру интеграла (93) (аналог теоремы 17).

Теорема 3.24. Если для всех точек полуоткрытого прямоугольника P выполняется неравенство $|f(x,y)| \leqslant g(x)$, причем интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то интеграл (93) сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c,d]$.

В заключение отметим, что если интеграл является несобственным по нескольким причинам, например, у интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ точка a особая и предел интегрирования бесконечен, то данный интеграл представляют в виде

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^m f(x,y)dx + \int\limits_m^{+\infty} f(x,y)dx \quad (a < m < +\infty).$$

Исходный интеграл считают равномерно сходящимся по параметру y на отрезке $[c,d]$, если равномерно сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

3.11 Интегралы Эйлера

Эйлеровыми интегралами первого и второго рода соответственно называют, следуя Лежандру, две следующие специальные функции:

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{94}$$

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx. \tag{95}$$

Первую из них называют бета-функцией, а вторую, особенно часто используемую, – гамма-функцией.

Иногда бывает полезно следующее представление бета-функции:

$$B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz, \tag{96}$$

которое получается из (94) заменой переменной $x = \dfrac{z}{1+z}$.

Докажем, что интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} x^{y-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

сходится при $y > 0$, расходится при $y \leqslant 0$ и равномерно сходится на множестве значений параметра, определяемом неравенствами $\varepsilon \leqslant y \leqslant r$, где ε и r – произвольные положительные числа.

Интеграл $I(y)$ имеет две особенности: бесконечный предел интегрирования и наличие особой точки $x = 0$ при $y < 1$. Чтобы разделить эти особенности, разобьем данный интеграл на два:

$$I_1(y) = \int\limits_0^1 x^{y-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx \qquad \text{и} \qquad I_2(y) = \int\limits_1^{+\infty} x^{y-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Так как при $x \to 0+0$ функция $x^{y-1}\,\mathrm{e}^{-x} \sim \dfrac{1}{x^{1-y}}$, то по признаку сравнения (теоремы 17) интеграл I_1 сходится при $y > 0$ и расходится при $y \leqslant 0$.

В свою очередь, для любого фиксированного y $x^{y-1}\,\mathrm{e}^{-x} < \dfrac{1}{x^2}$ при достаточно больших x, следовательно интеграл J_2 сходится при всех значениях y.

Объединяя результаты исследований интегралов I_1 и I_2 получаем, что интеграл $I(y)$ сходится при $y > 0$ и расходится при $y \leqslant 0$.

Равномерная сходимость интеграла $I(y)$ на отрезке $\varepsilon \leqslant y \leqslant r$, где ε и r – любые положительные числа, следует, по признаку Вейерштрасса (теоремы 17 и 24), из неравенств: $x^{y-1}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^{\varepsilon-1}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^{\varepsilon-1}$, если $0 < x \leqslant 1$ и $x^{y-1}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^{r-1}\,\mathrm{e}^{-x}$, если $x \geqslant 1$.

Таким образом гамма-функция определена при $p > 0$. Найдем область определения $B(p, q)$.

В интеграле (94) p и q являются параметрами. Если эти параметры удовлетворяют условиям $p < 1$, $q < 1$, то интеграл будет несобственным, причем особыми точками будут $x = 0$ и $x = 1$. Интеграл $\int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ сходится при $p > 0$ и любом q, так как $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$ при $x \to 0+0$. Аналогично интеграл $\int\limits_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ сходится при $q < 1$ и любом p, так как $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$ при $x \to 1-0$. Следовательно бета-функция $B(p, q)$ определена для всех положительных p и q.

Используя теоремы о непрерывности, дифференцируемости по параметру несобственных интегралов, зависящих от параметра, можно показать, что $\Gamma(p)$ и $B(p, q)$ непрерывны и имеют производные любого порядка в области определения.

Весьма полезны для приложений следующие свойства интегралов Эйлера:

1. формула понижения (приведения)

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),$$

2. формула дополнения

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad (0 < p < 1),$$

3. связь между бета- и гамма-функциями

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Очевидно, что последовательное применение формул понижения сводит вычисление $\Gamma(p)$ для произвольных положительных значений аргумента к вычислению этой функции при параметрах p, удовлетворяющих неравенствам $0 < p < 1$. В частности, если $p = n \in \mathbb{N}$, то

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Из формулы дополнения при $p = \dfrac{1}{2}$ получаем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Приведем примеры вычисления некоторых собственных и несобственных интегралов путем сведения их к интегралам Эйлера.

3.12 Криволинейный интеграл 1-го рода

Рассмотрим простую спрямляемую кривую $\mathcal{L}$, на которой определена функция $f(M)$ и составим интегральную сумму. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на частичные отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ точками.

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Тогда кривая разобьется на частичные дуги точками M_i, отвечающие значениям t_i. Выберем на каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ точку N_i, которой соответствует значение параметра $\tilde{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Пусть Δl_i – длина дуги $M_{i-1}M_i$. Запишем интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n} f(M_i)\Delta l_i.$$

Определение 3.11. Если существует предел интегральной суммы при $max(\Delta l_i) \to 0$ и он не зависит от способа разбиения кривой, ни от выбора точки на отрезке, то он называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(M)$ по кривой $\mathcal{L}$

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(M)\,\mathrm{d}\,l.$$

Рассмотрим гладкую кривую $\mathcal{L}$ с натуральной параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(l)$, $l \in [0, l_0]$. При этом функция $f(x, y, z) = f(x(l), y(l), z(l)) = \tilde{f}(l)$. Пусть l_i^* соответствует точке M_i. Тогда интегральная сумма примет вид $\sum\limits_{i=0}^{n} f(x(l_i^*), y(l_i^*), z(l_i^*))\Delta l_i$.

Эта интегральная сумма соответствует интегралу $\int\limits_0^{l_0} f(x(l), y(l), z(l))\,\mathrm{d}\,l$.

Тогда криволинейный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(M)\,\mathrm{d}\,l = \int\limits_0^{l_0} f(x(l), y(l), z(l))\,\mathrm{d}\,l \tag{97}$$

В случае произвольной параметризации кривой $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(M)\,\mathrm{d}\,l = \int\limits_a^b f(\vec{r}(t))|\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,\mathrm{d}\,t \tag{98}$$

Теорема 3.25. Пусть $\mathcal{L}$ – гладкая кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ и $f(x, y, z)$ – функция на этой кривой. Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(M)\,\mathrm{d}\,l = \int\limits_a^b f(\vec{r}(t))|\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,\mathrm{d}\,t,$$

причем стоящий слева криволинейный интеграл существует в том и только том случае, когда существует интеграл, стоящий справа.

Криволинейный интеграл первого рода от векторного поля вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \vec{a}(M)\,\mathrm{d}\,l = \vec{i}\int\limits_L a_x(M)\,\mathrm{d}\,l + \vec{j}\int\limits_L a_y(M)\,\mathrm{d}\,l + \vec{k}\int\limits_L a_z(M)\,\mathrm{d}\,l \tag{99}$$

Свойства

1° *Линейность.* Если для функций $f(M)$ и $g(M)$ существуют криволинейные интегралы по кривой $\mathcal{L}$ и α и β некоторые постоянные, то

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (\alpha f(M) + \beta g(M))\,\mathrm{d}\,l = \alpha\int\limits_{\mathcal{L}} f(M)\,\mathrm{d}\,l + \beta\int\limits_{\mathcal{L}} g(M))\,\mathrm{d}\,l.$$

2° *Аддитивность.* Если кривая $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}''$ есть объединение двух кривых и для функции $f(M)$ существует криволинейный интеграл по кривой $\mathcal{L}$, то

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(M)\,\mathrm{d}\,l = \int\limits_{\mathcal{L}'} f(M)\,\mathrm{d}\,l + \int\limits_{\mathcal{L}''} f(M)\,\mathrm{d}\,l.$$

3° *Оценка модуля.* Если для функции $f(M)$ существует криволинейный интеграл по кривой $\mathcal{L}$, то существует криволинейный интеграл по кривой $\mathcal{L}$ и для функции $|f(M)|$, причем

$$\left|\int\limits_{\mathcal{L}} f(M)\,\mathrm{d}\,l\right| \leqslant \int\limits_{\mathcal{L}} |f(M)|\,\mathrm{d}\,l.$$

4° *Формула среднего значения.* Если функция $f(M)$ непрерывна вдоль кривой $\mathcal{L}$, то найдется такая точка M^* на кривой, что

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(M)\,\mathrm{d}\,l = f(M^*)l,$$

где l – длина кривой.

5° Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации кривой.

Рассмотрим кривую $\mathcal{L}: \ \vec{r} = \vec{r}(t), \ t \in [a, b]$.

Определение 3.12. Уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}(b + a - t), \ a \leqslant t \leqslant b \tag{100}$$

определяет кривую $\mathcal{L}^-$, ориентированную противоположно кривой $\mathcal{L}$. Ее начало совпадает с концом $\mathcal{L}$, а конец – с началом $\mathcal{L}$. Векторы касательных к кривым $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^-$ в каждой точке имеют противоположные направления.

6° Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой $\mathcal{L}$, т.е.

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}\,l = \int\limits_{\mathcal{L}^-} f(x, y, z)\,\mathrm{d}\,l.$$

3.13 Криволинейный интеграл 2-го рода

Определение 3.13. Кривая называется ориентированной если задано непрерывное поле единичных векторов касательных.

Определение 3.14. Криволинейным интегралом второго рода вдоль ориентированной кривой $\mathcal{L}$ от векторного поля $\vec{a}(M)$ называется интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \vec{a}(M) \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{L}} (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\,\mathrm{d}\,l \tag{101}$$

где $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к кривой.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат поле $\vec{a}(M)$ имеет компоненты

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}. \tag{102}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{L}} P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z$$

Если задана произвольная параметризация кривой $\vec{r} = \vec{r}(t),\ l \in [a, b]$, то

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{L}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} &= \int\limits_a^b \vec{a}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}\,t = \\ &= \int\limits_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))\,\mathrm{d}\,t. \end{aligned} \tag{103}$$

Свойства

Криволинейный интеграл второго рода обладает указанными свойствами криволинейного интеграла первого рода. Только свойство 6° изменяется на

6° Криволинейный интеграл второго рода при изменении ориентации кривой на противоположную изменяет знак.

Физический смысл

Работа силового поля вдоль кривой представляет собой криволинейный интеграл второго рода.

3.14 Формула Грина

Определение 3.15. Область $D \subset \mathcal{E}^2$ называется односвязной, если область, ограниченная любым замкнутым контуром $\partial D^* \in D$, целиком принадлежит этой же области или, если любой замкнутый контур $\partial D^* \in D$ путем непрерывной деформации может быть стянут в точку этой области не выходя из нее.

Определение 3.16. Замкнутый контур ∂D называется ориентированным положительно, если обход контура берется в таком направлении, что область D остается слева.

Теорема 3.26. (Формула Грина.) Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ - непрерывны в замкнутой односвязной области D, ограниченной кусочно-гладким положительно ориентированным контуром ∂D. Тогда справедлива следующая формула

$$\oint\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y. \qquad (104)$$

Формула Грина справедлива и для многосвязных областей, только в этом случае надо рассматривать полную границу области.

Пусть $P = 0$, $Q = x$. Тогда $\iint\limits_{D} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = S_D = \oint\limits_{\partial D} x\,\mathrm{d}\,y$. Теперь положим $P = -y$, $Q = 0$. Тогда $\iint\limits_{D} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = S_D = -\oint\limits_{\partial D} y\,\mathrm{d}\,x$. Комбинируя эти выражения получаем

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x.$$

3.15 Площадь поверхности

Выведем формулу вычисления площади поверхности. Пусть поверхность $\mathcal{S}$ задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$. Разобьем область D на части прямыми линиями $u = u_i$, $v = v_i$ параллельными координатным осям u и v соответственно. Значит поверхность будет разбита координатным линиями $\vec{r}(u_i, v)$ и $\vec{r}(u, v_i)$. Выделим в области D произвольный четырехугольник D_{ik}. На поверхности $\mathcal{S}$ ему отвечает криволинейный четырехугольник $\mathcal{S}_{ik}$. При достаточно мелком разбиении последний мало отличается от параллелограмма Π_{ik} со сторонами, определяемые векторами $\vec{r}_u\Delta u_i$ и $\vec{r}_v\Delta v_k$. Тогда площадь этого параллелограмма определяется

$$S_{ik} = |\vec{r}_u\Delta u_i \times \vec{r}_v\Delta v_k| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\Delta u_i\Delta v_k.$$

Естественно определить площадь поверхности как

$$S = \lim_{\Delta u_i, \Delta v_k \to 0} \sum_{i,k} S_{ik} = \iint\limits_{D} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v. \qquad (105)$$

Так как $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$, то

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$, то площадь вычисляется пол формуле

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y. \qquad (106)$$

3.16 Поверхностные интегралы первого рода

Пусть на поверхности Ω, определяемой уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, задана функция $f(M)$. Разобьем область D на части прямыми линиями $u = u_i$, $v = v_i$ параллельными координатным осям u и v соответственно. Значит поверхность будет разбита координатным линиями $\vec{r}(u_i, v)$ и $\vec{r}(u, v_i)$. Выделим на поверхности Ω произвольный криволинейный четырехугольник Ω_{ik} с площадью S_{ik}. Выберем в этом четырехугольнике точку N_{ik}. Составим интегральную сумму

$$\sum_{ik} f(N_{ik}) S_{ik}.$$

Определение 3.17. Если существует предел интегральной суммы при $max(S_{ik}) \to 0$ и он не зависит от способа разбиения поверхности, ни от выбора точки на частях Ω_{ik}, то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(M)$ по поверхности Ω

$$\iint\limits_{\Omega} f(M)\,\mathrm{d}\,S.$$

Если поверхность задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{\Omega} f(M)\,\mathrm{d}\,S = \iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

Если поверхность является графиком непрерывной функции $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$, то поверхностный интеграл первого рода можно вычислить как

$$\iint\limits_{\Omega} f(M)\,\mathrm{d}\,S = \iint\limits_{D} f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

Поверхностный интеграл первого рода от векторного поля

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}(M)\,\mathrm{d}\,S = \vec{i}\iint\limits_{\Omega} a_x(M)\,\mathrm{d}\,S + \vec{j}\iint\limits_{\Omega} a_y(M)\,\mathrm{d}\,S + \vec{k}\iint\limits_{\Omega} a_z(M)\,\mathrm{d}\,S. \tag{107}$$

Свойства поверхностного интеграла первого рода

1° *Линейность.* Если для функций $f(M)$ и $g(M)$ существуют поверхностные интегралы по поверхности Ω и α и β некоторые постоянные, то

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha f(M) + \beta g(M))\,\mathrm{d}\,S = \alpha\iint\limits_{\Omega} f(M)\,\mathrm{d}\,S + \beta\iint\limits_{\Omega} g(M))\,\mathrm{d}\,S.$$

2° *Аддитивность.* Если поверхность $\Omega = \Omega' + \Omega''$ есть объединение двух поверхностей и для функции $f(M)$ существует поверхностный интеграл по поверхности Ω, то

$$\iint\limits_{\Omega} f(M)\,\mathrm{d}\,S = \iint\limits_{\Omega'} f(M)\,\mathrm{d}\,S + \iint\limits_{\Omega''} f(M)\,\mathrm{d}\,S.$$

3° *Оценка модуля.* Если для функции $f(M)$ существует поверхностный интеграл по поверхности Ω, то существует поверхностный интеграл по поверхности Ω и для функции $|f(M)|$, причем

$$\left|\iint\limits_{D} f(M)\,\mathrm{d}\,S\right| \leqslant \iint\limits_{D} |f(M)|\,\mathrm{d}\,S.$$

4° *Формула среднего значения.* Если функция $f(M)$ непрерывна на поверхности Ω, то найдется такая точка поверхности $M^* \in \Omega$, что

$$\iint\limits_{\Omega} f(M)\,\mathrm{d}\,S = f(M^*)S, \tag{108}$$

где S – площадь поверхности Ω.

5° Поверхностный интеграл первого рода не зависит от параметризации поверхности.

6° Поверхностный интеграл первого рода не зависит от ориентации поверхности.

Физический смысл

Пусть функция $\vec{r}(u,v)$ задает расположение массивной поверхности в пространстве с распределением поверхностной плотности $\rho(\vec{r}(u,v))$. Тогда масса поверхности может быть вычислена по формуле

$$\mu = \iint\limits_{\Omega} \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}\,S.$$

Координаты центра тяжести такой поверхности находятся как

$$\vec{R}_c = \frac{1}{\mu}\iint\limits_{\Omega} \vec{r}\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}\,S.$$

Момент инерции относительно оси Oz

$$I_z = \iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}\,S.$$

Момент инерции относительно плоскости yOz

$$I_{yz} = \iint\limits_{\Omega} x^2 \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}\,S.$$

Момент инерции относительно начала координат

$$I_0 = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}\,S.$$

Сила притяжения материальной точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ массы m материальной поверхностью

$$\vec{F} = \gamma m \iint\limits_{\Omega} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\,S,$$

где $\vec{R} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$

3.17 Поверхностный интеграл второго рода

Определение 3.18. Будем говорить, что гладкая поверхность является ориентируемой (двусторонней), если можно построить на этой поверхности непрерывное поле единичных нормальных векторов, в противном случае поверхность будет неориентируемой (односторонней). Поле единичных нормалей определяет ориентацию (или сторону) поверхности.

Гладкая поверхность, являющаяся границей области в пространстве $\mathcal{E}^3$ ориентируема. Нормальные векторы, направленные внутрь области называются внутренними нормалями, внешняя сторона поверхности определяется внешними нормалями.

Пусть в некоторой окрестности простой гладкой поверхности Ω задано непрерывное векторное поле

$$\vec{a}(x, y, z) = \vec{i}P(x, y, z) + \vec{j}Q(x, y, z) + \vec{k}R(x, y, z).$$

Ориентируем поверхность единичными нормалями

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}, \qquad \vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v. \tag{109}$$

Обозначим $\mathrm{d}\,\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}\,S$.

Определение 3.19. Поверхностным интегралом второго рода называют интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint\limits_{\Omega} (\vec{a} \cdot \vec{n})\,\mathrm{d}\,S. \tag{110}$$

Данный интеграл также называют *потоком* векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ через ориентированную поверхность Ω. В случае вычисления потока через замкнутую поверхность, нормаль обычно берут внешнюю.

Если α, β, γ – углы, которые образует с осями координат ПДСК нормаль, то единичный вектор нормали имеет вид $\vec{b} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$. Тогда поверхностный интеграл второго рода можно записать в виде

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint\limits_{\Omega} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\,\mathrm{d}\,S.$$

Если учесть, что

$$\cos\alpha\,\mathrm{d}\,S = \mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z, \quad \cos\beta\,\mathrm{d}\,S = \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z, \quad \cos\gamma\,\mathrm{d}\,S = \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

то

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y. \tag{111}$$

Рассмотрим способы вычисление поверхностных интегралов второго рода.

Параметрическое задание поверхности

Если поверхность задана векторной функцией $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, то поле единичных нормалей определяется выражением (109) и поверхностный интеграл равен

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint\limits_{D} (\vec{a}\cdot\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|})|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v = \iint\limits_{D} (\vec{a}\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v))\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v. \tag{112}$$

В координатной записи получим

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint\limits_{D} \left[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \right.$$
$$\left. + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]\,\mathrm{d}\,u$$

Если положить $P = Q = 0$, то

$$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_{D} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

Аналогично

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iint\limits_{D} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v,$$
$$\iint\limits_{\Omega} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z = \iint\limits_{D} Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

Проектирование на одну из координатных плоскостей

Пусть незамкнутая поверхность Ω взаимно однозначно проектируется на плоскость xOy в область D_{xy}. В этом случае поверхность можно задать уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$. Тогда вектор нормали в зависимости от ориентации поверхности будет равным

$$\vec{N}_{xy} = \pm \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \pm(-f'_x\vec{i} - f'_y\vec{j} + \vec{k}).$$

Значит

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint\limits_{D_{xy}} (\vec{a}\cdot\vec{N}_{xy})\Big|_{z=f(x,y)} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \tag{113}$$

В координатной записи

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \pm\iint\limits_{D_{xy}} \left[-P(x,y,f(x,y))f'_x - Q(x,y,f(x,y))f'_y + R(x,y,f(x,y))\right] \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Если $P = Q = 0$, то получаем

$$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \tag{114}$$

Если оказывается удобным проектировать на координатную плоскость yOz, то поверхность можно задать уравнением $x = g(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$, и имеют место следующие соотношения:

$$\vec{N}_{yz} = \pm \vec{r}_y \times \vec{r}_z = \pm(\vec{i} - g'_y\vec{j} - g'_z\vec{k}).$$

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint\limits_{D_{yz}} (\vec{a}\cdot\vec{N}_{yz})\Big|_{y=g(x,z)} \mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z, \tag{115}$$

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \pm\iint\limits_{D_{yz}} \left[P(g(y,z),y,z) - Q(g(y,z),y,z)g'_y - R(g(y,z),y,z)g'_z\right] \mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$$

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(g(y,z),y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z. \tag{116}$$

В случае проектирования на координатную плоскость xOy поверхность можно задать уравнением $y = h(x,z)$, $(x,z) \in D_{xz}$, и тогда имеем:

$$\vec{N}_{xz} = \pm \vec{r}_x \times \vec{r}_z = \pm(h'_x\vec{i} + \vec{j} - h'_z\vec{k}).$$

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint\limits_{D_{xz}} (\vec{a}\cdot\vec{N}_{xz})\Big|_{y=h(x,z)} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z, \tag{117}$$

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \pm\iint\limits_{D_{xz}} [-P(x,h(x,z),z)h'_x + Q(x,h(x,z),z) - R(x,h(x,z),z)h'_z]\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z,$$

$$\iint\limits_{\Omega} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z = \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q(x,h(x,z),z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z. \tag{118}$$

Проектирование на три координатные плоскости

Пусть незамкнутая поверхность Ω взаимно однозначно проектируется на три координатные плоскости и D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} проекции поверхности на плоскости xOy, xOz и yOz соответственно. Тогда поверхность можно задать любым из трех уравнений $z = f(x,y)$, $y = h(x,z)$, $x = g(y,z)$.

Суммируя формулы (114), (116) и (118) получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot\mathrm{d}\,\vec{S} = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(g(y,z),y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,h(x,z),z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z\pm$$

$$\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y. \tag{119}$$

Знак перед интегралами определяется в зависимости от направления нормали.

Введение цилиндрических координат на поверхности

Пусть поверхность Ω является частью кругового цилиндра $x^2+y^2=R$, ограниченного поверхностями $z = f_1(x,y)$ и $z = f_2(x,y)$ и полуплоскостями в цилиндрических координатах $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$. Исходя из записи цилиндрических координат

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = z$$

получаем следующую область изменения параметров φ и z:

$$\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2,\ f_1(R\cos\varphi, R\sin\varphi) \leqslant z \leqslant f_2(R\cos\varphi, R\sin\varphi).$$

Элемент площади и нормаль имеют вид:

$$\mathrm{d}\,S = R\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,z, \qquad \vec{n} = \frac{1}{R}(x\vec{i}+y\vec{j}) = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$$

Тогда поток векторного поля через внешнюю сторону такой поверхности вычисляется как

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot\mathrm{d}\,\vec{S} = R\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\,\varphi \int\limits_{f_1(R\cos\varphi,R\sin\varphi)}^{f_2(R\cos\varphi,R\sin\varphi)} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}\,z.$$

Введение сферических координат на поверхности

Пусть поверхность Ω является частью сферы $x^2+y^2+z^2=R$, ограниченного коническими поверхностями, уравнения которых в сферических координатах имеют вид $\theta = f_1(\varphi)$ и $\theta = f_2(\varphi)$, и полуплоскостями $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$. Исход из записи сферических координат

$$x = R\cos\varphi\sin\theta,\ y = R\sin\varphi\sin\theta,\ z = R\cos\theta$$

получаем следующую область изменения параметров φ и θ:

$$\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, \;\; f_1(\varphi) \leqslant \theta \leqslant f_2(\varphi).$$

Элемент площади и нормаль имеют вид:

$$\mathrm{d}\, S = R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,\theta, \qquad \vec{n} = \frac{1}{R}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{i}\cos\varphi\sin\theta + \vec{j}\sin\varphi\sin\theta + \vec{k}\cos\theta.$$

Тогда поток векторного поля через внешнюю сторону такой поверхности вычисляется как

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = R^2 \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{d}\,\varphi \int\limits_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} (\vec{a}\cdot\vec{n})\sin\theta \,\mathrm{d}\,\theta.$$

3.18 Формула Стокса

Рассмотрим простую поверхность Ω, заданную уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ с положительно ориентированной границей ∂D. Пусть контур ∂D задается параметризацией $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Определение 3.20. Образ положительно ориентированного контура ∂D при гладком отображении называется положительно ориентированным краем поверхности Ω и обозначается $\partial\Omega$.

Определение 3.21. Ориентация поверхности, задаваемая полем нормалей, совпадает с положительной ориентацией границы когда обход контура идет против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора нормали.

Если некоторый контур γ является границей поверхности, то говорят, что поверхность натянута на контур.

Определение 3.22. Криволинейный интеграл от векторного поля по замкнутому контуру γ называется циркуляцией векторного поля по контуру γ.

Теорема 3.27. Пусть $\gamma = \partial\Omega$ кусочно-гладкий контур, Ω некоторая кусочно-гладкая поверхность, натянутая на этот контур и $\vec{a}(\vec{r})$ непрерывно дифференцируемое векторное поле в окрестности поверхности Ω. Тогда циркуляция векторного поля по контуру γ равна потоку ротора этого поля через поверхность, натянутую на этот контур, т.е.

$$\int\limits_{\partial\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \iint\limits_{\Omega} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S}. \tag{120}$$

Ориентации контура и поверхности должны быть согласованы.

3.19 Формула Остроградского-Гаусса

Определение 3.23. Область $G \subset \mathcal{E}^3$ называется объемно односвязной, если любая ограниченная область G^*, граница которой ∂G^* лежит в области G, целиком лежит в G, т.е. $\forall G^* : \partial G^* \in G \Rightarrow G^* \subset G$.

Иначе данной определение можно сформулировать следующим образом: область является объемно односвязной, если любую замкнутую поверхность, лежащую в данной области, путем непрерывных деформаций можно стянуть в точку не выходя за пределы области.

Теорема 3.28. Пусть $G \subset \mathcal{E}^3$ – объемно односвязная ограниченная область, граница которой ∂G является кусочно-гладкой поверхностью, ориентированная внешними нормалями, и в области $\overline{G} = G \cup \partial G$ задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Тогда поток векторного поля $\vec{a}$ через границу области ∂G равен интегралу по области G от $\operatorname{div}\vec{a}$, т.е.

$$\iint\limits_{\partial G} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}\,G, \tag{121}$$

или

$$\iint\limits_{\partial G} P\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + Q\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + R\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z.$$

Формула (121) может быть обобщена на многосвязные области. Область G будем называть двусвязной, если $G = G_1 \backslash \overline{G}_2$, где G_1 и G_2 – односвязные области и $\overline{G}_2 \subset G_1$. Будем поверхность ∂G_1 называть внешней границей области G, а поверхность ∂G_2 – внутренней границей. Разделим область G кусочно-гладкой поверхностью на две односвязные области. Применяя формулу (121) к области G получаем

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}\,G = \iint\limits_{\partial G_1} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} - \iint\limits_{\partial G_2} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint\limits_{\partial G} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S},$$

где ∂G – объединение внешней и внутренней границ, ориентированных внешним образом по отношению к области G. Аналогично формула (121) обобщается на n-связную область с кусочно-гладкими границами.

Если взять в качестве векторного поля взять $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}$, то можно придти к формуле вычисления объема v области G через следующий поверхностный интеграл

$$v = \frac{1}{3}\iint\limits_{\partial G} \vec{r}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$$

4 Основы теории поля

4.1 Инвариантное определение дифференциальных операций

В предыдущих параграфах мы дали определение дифференциальных операций над скалярным и векторным полями в прямоугольной декартовой системе координат. В данном параграфе мы дадим инвариантное определение этих операций, т.е. такое определение, которое на зависит от выбора системы координат.

Рассмотрим в области $G^* \subset \mathcal{E}^3$ непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$. Пусть G – некоторая область с кусочно гладкой границей ∂G содержащая точку P и целиком лежащая в G^*. Ориентируем поверхность ∂G внешними нормалями. Применим теорему Остроградского-Гаусса для области G:

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial G} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \operatorname{div}\vec{a}(P^*)V(G), \quad P^*\in G,$$

где $V(G)$ – объем области G. Будем стягивать область G в точку P, так чтобы точка P всегда оставалась в области. Тогда, воспользовавшись непрерывностью дивергенции, получаем

$$(\operatorname{div}\vec{a})_P = \lim_{\substack{V(G)\to 0\\ P\in G}} \frac{\oint\!\!\!\oint_{\partial G} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S}}{V(G)}. \tag{122}$$

Таким образом, дивергенция векторного поля $\vec{a}$ в точке P есть предел, к которому стремится отношение потока этого векторного поля через произвольную замкнутую поверхность, окружающую точку P к объему области, ограниченной данной поверхностью, при стремлении последнего к нулю.

Рассмотрим в области $G^* \subset \mathcal{E}^3$ непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$. Возьмем в точке $P \in G^*$ произвольный единичный вектор $\vec{n}$. Проведем через точку P поверхность Ω с нормалью $\vec{n}$ в точке P и границей $\partial\Omega$ Согласуем ориентацию границы и самой поверхности. Применим к области поверхности Ω Стокса, а затем формулу среднего значения:

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \iint_\Omega \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\,S = \operatorname{rot}\vec{a}(P^*)\cdot\vec{n}(P^*)S(\Omega), \quad P^*\in\Omega,$$

где $S(\Omega)$ – площадь поверхности Ω. Будем стягивать поверхность Ω в точку P, так чтобы точка P всегда оставалась на поверхности и нормаль в точке P сохраняла свое направление. Тогда, воспользовавшись непрерывностью ротора, получаем

$$(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})_P = \lim_{\substack{S(\Omega)\to 0\\ P\in\Omega}} \frac{\oint_{\partial\Omega} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{r}}{S(\Omega)}. \tag{123}$$

Таким образом, компонента вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ в данной точке P вдоль направления $\vec{n}$ равна пределу отношения циркуляции вектора $\vec{a}$ по границе произвольной поверхности, содержащей точку P и имеющей в точке P нормаль $\vec{n}$ к площади этой поверхности, при стремлении последней к нулю. Находя проекции ротора на три ортогональных направления, мы можем полностью найти ротор векторного поля в данной точке. Однако это бывает не слишком удобно.

Рассмотрим область $G \subset G^*$ с кусочно гладкой границей ∂G. Докажем справедливость соотношения

$$\oiint\limits_{\partial G} (\vec{n} \times \vec{a})\,\mathrm{d}\,S = \iiint\limits_{G} \operatorname{rot}\vec{a}\,\mathrm{d}\,V,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Ω.

В левой части стоит поверхностный интеграл первого рода от векторного поля. Возьмем произвольный постоянный вектор $\vec{c}$ и рассмотрим интеграл

$$\vec{c} \cdot \oiint\limits_{\partial G} (\vec{n} \times \vec{a})\,\mathrm{d}\,S = \oiint\limits_{\partial G} \vec{c} \cdot (\vec{n} \times \vec{a})\,\mathrm{d}\,S = \oiint\limits_{\partial G} (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\,S = \oiint\limits_{\partial G} (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}.$$

Применим к полученному интегралу теорему Остроградского-Гаусса:

$$\vec{c} \cdot \oiint\limits_{\partial G} (\vec{n} \times \vec{a})\,\mathrm{d}\,S = \iiint\limits_{G} \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{c})\,\mathrm{d}\,V = \vec{c} \iiint\limits_{G} \cdot \operatorname{rot}\vec{a}\,\mathrm{d}\,V.$$

Так как вектор $\vec{c}$ произвольный, то его можно в итоге опустить, и мы получаем искомое. Тогда, применяя формулу среднего значения и стягивая область G в точку P, получаем

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{V(G)\to 0 \\ P\in G}} \frac{\oiint\limits_{\partial G} (\vec{n} \times \vec{a})\,\mathrm{d}\,S}{V(G)}, \tag{124}$$

Пусть $u(M)$ – непрерывно дифференцируемое скалярное поле в области G^* и область $G \subset G^*$ имеет кусочно гладкую границу ∂G. Аналогично тому, как мы доказывали для ротора, показывается, что

$$\oiint\limits_{\Omega} \vec{n}u\,\mathrm{d}\,S = \iiint\limits_{G} \operatorname{grad} u\,\mathrm{d}\,V,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Ω.

Применяя формулу среднего значения и стягивая область G в точку P, получаем

$$\operatorname{grad} u(M) = \lim_{\substack{V(G)\to 0 \\ P\in G}} \frac{\oiint\limits_{\partial G} u\vec{n}\,\mathrm{d}\,S}{V(G)}, \tag{125}$$

Данная формула дает инвариантное определение градиента скалярного поля.

4.2 Потенциальные векторные поля. Потенциал

Рассмотрим область $G \subset \mathcal{E}^3$ и непрерывное в ней векторное поле $\vec{a}(\vec{r}) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

Определение 4.1. Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным в области G, если циркуляция этого поля по любому замкнутому кусочно гладкому контуру, расположенному в области G равна нулю.

Определение 4.2. Трехмерная область $G \subset \mathcal{E}^3$ называется поверхностно односвязной, если для любого замкнутого кусочно гладкого контура $\gamma \in G$ можно указать такую ориентируемую кусочно гладкую поверхность $\Omega \in G$, границей которой является контур γ.

Имеет место следующая теорема

Теорема 4.1. Пусть в поверхностно односвязной области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(\vec{r}) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Тогда эквивалентны следующие три условия:

1. Векторное поле является потенциальным.
2. В области G существует скалярное поле $u(\vec{r})$, называемое потенциалом, такое что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$, или

   $$\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z.$$

   В этом случае для любых точек A и B из области G и для любой кусочно гладкой кривой $\mathcal{L}_{AB}G$, соединяющей это точки справедливо

   $$\int\limits_{\mathcal{L}_{AB}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = u(B) - u(A).$$

3. Векторное поле $\vec{a}$ является безвихревым, т.е. $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

Коснемся еще вычисления потенциала векторного поля. Вообще говоря, потенциал определяется с точностью до постоянной, которая обусловлена выбором точки M_0 в выражении (**??**). Обычно в выбирают точку M_0 таким образом, чтобы потенциал в ней равнялся нулю. Возможно упрощение вычисления потенциала путем выбора пути интегрирования. Например, если взять кривую $\mathcal{L}_{M_0M}$ в виде ломаной, звенья которой параллельны осям координат. Тогда потенциал вычисляется следующим образом

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,\mathrm{d}\,y + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,\mathrm{d}\,z. \tag{126}$$

4.3 Соленоидальные векторные поля

Определение 4.3. Векторное поле называется соленоидальным в области G, если поток этого поля через любую замкнутую кусочно гладкую несамопересекающуюся поверхность, расположенную в G, равен нулю.

Теорема 4.2. Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое поле $\vec{a}$ было соленоидальным необходимо а в объемно-односвязной области G и достаточно, чтобы во всех точках G выполнялось равенство

$$\operatorname{div}\vec{a} = 0.$$

Определение 4.4. Множество линий векторного поля $\vec{a}$, проходящих через некоторый простой замкнутый контур γ называется векторной трубкой данного поля.

Теорема 4.3. Поток соленоидального поля через любое поперечное сечение векторной трубки имеет одну и ту же величину.

Определение 4.5. Векторным потенциалом соленоидального поля $\vec{a}(M)$ называется векторное поле $\vec{A}(M)$, удовлетворяющее соотношению

$$\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{127}$$

Понятно, что поле $\vec{A}(M)$ определяет соленоидальное поле $\vec{a}(M)$, так как

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0.$$

Векторный потенциал определяется с точностью до градиента произвольного скалярного поля, т.е. векторный потенциал

$$\vec{B}(M) = \vec{A}(M) + \operatorname{grad} f(M)$$

определяет то же соленоидальное поле $\vec{a}(M)$, что и потенциал $\vec{A}(M)$, так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f(M) = \vec{0}$.

Чтобы найти векторный потенциал $\vec{A}(M) = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ поля $\vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, необходимо найти любое частное решение системы трех дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = P(x,y,z), \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = Q(x,y,z), \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = R(x,y,z). \tag{128}$$

Пользуясь произволом в выборе векторного потенциала положим $A_x(x,y,z) = 0$. Тогда система уравнений преобразуется к виду

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = P(x,y,z), \qquad -\frac{\partial A_z}{\partial x} = Q(x,y,z), \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} = R(x,y,z).$$

Из второго и третьего уравнения системы находим

$$A_y(x,y,z) = \int R(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x + C_1(y,z),$$

$$A_z(x,y,z) = -\int Q(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x + C_2(y,z),$$

где $C_1(y,z)$ и $C_2(y,z)$ – дифференцируемые функции. Положим для упрощения $C_1(y,z) \equiv 0$. Выберем функцию $C_2(y,z)$ так, чтобы удовлетворялось первое уравнение системы. Для этого подставим в него выражения для A_y и A_z:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int Q\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial C_2}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\int R\,\mathrm{d}\,x = P(x,y,z),$$

откуда

$$\frac{\partial C_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int Q\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial z}\int R\,\mathrm{d}\,x + P(x,y,z).$$

Заметим, что правая часть этого выражения не зависит от x в силу равенства $\operatorname{div}\vec{a} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int Q\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\int R\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial x}P(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$C_2(y,z) = \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial z}\int R\,\mathrm{d}\,x + P(x,y,z)\right]\mathrm{d}\,y + C_3(z).$$

Полагая $C_3(z) \equiv 0$, получаем формулы для нахождения векторного потенциала

$$A_x \equiv 0, \tag{129}$$

$$A_y = \int R(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x, \tag{130}$$

$$A_z = \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x + P(x,y,z)\right]\mathrm{d}\,y - \int Q(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x. \tag{131}$$

4.4 Операции теории поля в криволинейных координатах

Рассмотрим криволинейные координаты (q^1, q^2, q^3) и пусть в каждой точке задан ортонормированный базис $(\vec{e}_{q^1}, \vec{e}_{q^2}, \vec{e}_{q^3})$. Тогда вектор градиента может быть разложен по этому базису

$$\operatorname{grad} u = \alpha_1\vec{e}_{q^1} + \alpha_2\vec{e}_{q^2} + \alpha_3\vec{e}_{q^3}.$$

Согласно определению производной скалярного поля по направлению имеем

$$\alpha_i = \operatorname{grad} u \cdot \vec{e}_{q^i} = \frac{\partial u}{\partial e_{q^i}}.$$

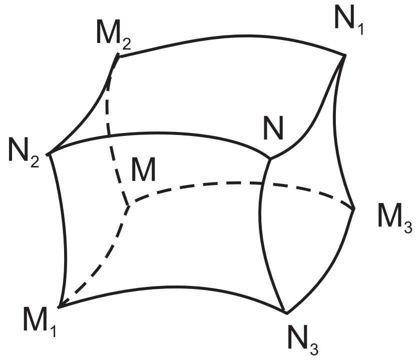


Рис. 9: К вычислению дивергенции и ротора в криволинейных координатах.

Так как вектор $\vec{e}_{q^i}$ является касательным к координатной кривой q^i, то получаем

$$\alpha_i = \frac{\partial u}{\partial l_i}.$$

Так как элемент дуги координатной кривой равен $\mathrm{d}\, l_i = H_i \,\mathrm{d}\, q^i$, то[3]

$$\alpha_i = \frac{\partial u}{\partial l_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial u}{\partial q^i}.$$

Таким образом, градиент в криволинейных координатах записывается следующим образом:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\vec{e}_{q^1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\vec{e}_{q^2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\vec{e}_{q^3} \tag{132}$$

Градиент в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z. \tag{133}$$

Градиент в сферических координатах:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{134}$$

Для вычисления $\operatorname{div} a$ в криволинейных координатах удобно применить формулу

$$(\operatorname{div}\vec{a})_P = \lim_{V(G)\to 0}\frac{\oiint\limits_{\partial G}\vec{a}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S}}{V(G)}$$

взяв за область G криволинейный элементарный параллелепипед, построенный на координатных линиях, одной из вершин которого является точка P, в которой ищется значение $\operatorname{div}\vec{a}$ (рис. 9).

[3] Здесь суммирование по индексу i не выполняется.

Точки M_i расположены в направлении возрастания значений координат q^i. Грань $MM_2N_1M_3$ этого параллелепипеда имеет площадь $\mathrm{d}\,S_1 = H_2H_3\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3$; нормальная к этой грани составляющая вектора $\vec{a}$ равна $-a_{q^1}$ (берется внешняя нормаль грани), поэтому поток через эту грань будет равен $-a_{q^1}H_2H_3\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3$. Противоположная грань $M_1N_2NN_3$ отличается от грани $MM_2N_1M_3$ только тем, что ей отвечает значение $q^1 + \mathrm{d}\,q^1$ координаты q^1, значения других координат на этих гранях одни и те же. Поэтому поток через грань $M_1N_2NN_3$ будет равным

$$(a_{q^1}H_2H_3)|_{q^1=q^1+\mathrm{d}\,q^1}\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3 = \left(a_{q^1}H_2H_3 + \frac{\partial(a_{q^1}H_2H_3)}{\partial q^1}\,\mathrm{d}\,q^1\right)\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3.$$

Таким образом, поток через две грани $M_1N_2NN_3$ и $MM_2N_1M_3$ будет равным

$$\frac{\partial(a_{q^1}H_2H_3)}{\partial q^1}\,\mathrm{d}\,q^1\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3.$$

Аналогично поток через грани $MM_1N_2M_3$ и $M_2N_3NN_1$ равен

$$\frac{\partial(a_{q^2}H_1H_3)}{\partial q^2}\,\mathrm{d}\,q^1\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3$$

и через грани $MM_1N_3M_2$ и $M_3N_2NN_1$ –

$$\frac{\partial(a_{q^3}H_1H_2)}{\partial q^3}\,\mathrm{d}\,q^1\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3.$$

Сложив эти три выражения получим полный поток $\oiint\limits_{\partial v_P} \vec{a}\cdot\,\mathrm{d}\,\vec{S}$. Разделив его на объем параллелепипеда $V(G) = H_1H_2H_3\,\mathrm{d}\,q^1\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3$ получим окончательно

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(a_{q^1}H_2H_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial(a_{q^2}H_1H_3)}{\partial q^2} + \frac{\partial(a_{q^3}H_1H_2)}{\partial q^3}\right). \tag{135}$$

Дивергенция в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{136}$$

Дивергенция в сферических координатах:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{137}$$

Для вычисления ротора в криволинейных координатах воспользуемся его инвариантным определением:

$$(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})_P = \lim_{S_P\to 0}\frac{\oint\limits_{\partial D_P}\vec{a}\cdot\,\mathrm{d}\,\vec{r}}{S_P}.$$

Для вычисления проекции $\operatorname{rot}\vec{a}$ на координатную линию q^1 нужно взять за ∂D_P контур $MM_2N_1M_3$; площадь криволинейного прямоугольника, ограниченного этим контуром, равна $S_P = H_2H_3\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3$. Вычислим циркуляцию по выбранному контуру. Прежде всего

$$\int\limits_{MM_2} \vec{a}\cdot\,\mathrm{d}\,\vec{r} = a_{q^2}\,\mathrm{d}\,l^2 = a_{q^2}H_2\,\mathrm{d}\,q^2.$$

Интеграл $\int\limits_{M_3N_1} \vec{a}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$ отличается от предыдущего только тем, что в нем координата q^3 имеет другое значение $q^3 + \mathrm{d}\,q^3$, значение же других координат те же. Поэтому

$$\int\limits_{M_3N_1} \vec{a}\cdot\,\mathrm{d}\,\vec{r} = \left(a_{q^2}H_2 + \frac{\partial(a_{q^2}H_2)}{\partial q^3}\,\mathrm{d}\,q^3\right)\,\mathrm{d}\,q^2.$$

Аналогично вычисляются интегралы

$$\int\limits_{MM_3} \vec{a}\cdot\,\mathrm{d}\,\vec{r} = a_{q^3}H_3\,\mathrm{d}\,q^3, \qquad \int\limits_{M_2N_1} \vec{a}\cdot\,\mathrm{d}\,\vec{r} = \left(a_{q^3}H_3 + \frac{\partial(a_{q^3}H_3)}{\partial q^2}\,\mathrm{d}\,q^2\right)\,\mathrm{d}\,q^3.$$

Таким образом, получаем

$$\oint\limits_{MM_2N_1M_3M} \vec{a}\cdot\,\mathrm{d}\,\vec{r} = \int\limits_{MM_2} + \int\limits_{M_2N_1} - \int\limits_{M_3N_1} - \int\limits_{MM_3} = \left(\frac{\partial(a_{q^3}H_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(a_{q^2}H_2)}{\partial q^3}\right)\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3.$$

Разделив полученное выражение на S_P и проведя аналогичные рассуждения для проекций ротора на другие координаты получаем выражение

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{a} =& \frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{\partial(a_{q^3}H_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(a_{q^2}H_2)}{\partial q^3}\right)\vec{e}_{q^1} + \\ &+ \frac{1}{H_3H_1}\left(\frac{\partial(a_{q^1}H_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(a_{q^3}H_3)}{\partial q^1}\right)\vec{e}_{q^2} + \\ &+ \frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial(a_{q^2}H_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(a_{q^1}H_1)}{\partial q^2}\right)\vec{e}_{q^3}.\end{aligned} \tag{138}$$

По иному ротор можно записать через определитель

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{H_2H_3}\vec{e}_{q^1} & \dfrac{1}{H_1H_3}\vec{e}_{q^2} & \dfrac{1}{H_1H_2}\vec{e}_{q^3} \\ \dfrac{\partial}{\partial q^1} & \dfrac{\partial}{\partial q^2} & \dfrac{\partial}{\partial q^3} \\ H_1a_{q^1} & H_2a_{q^2} & H_3a_{q^3} \end{vmatrix}.$$

Ротор в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(a_\rho)}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z. \tag{139}$$

Ротор в сферических координатах:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(a_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \\ + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(a_r)}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi. \tag{140}$$

Для вычисления оператора Лапласа в криволинейных координатах воспользуемся соотношением $\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$. Тогда, воспользовавшись формулами (132) и (135), сразу получаем

$$\Delta u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\right)\right\}. \tag{141}$$

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{142}$$

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}. \tag{143}$$

5 Алгебра тензоров над произвольным линейным пространством

5.1 Линейное пространство. Базис

Определение 5.1. Множество $\mathfrak{V}$ любой природы называется линейным пространством над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), а его элементы векторами, если:

1. Для любых двух элементов множества $\vec{u}$ и $\vec{v}$ определена операция *сложения*, которая ставит в соответствие третий элемент этого множества, называемый *суммой* элементов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ и обозначаемая $\vec{u} + \vec{v}$.

2. Для любого элемента множества $\vec{u}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{K}$ определена операция *умножения на число*, которая ставит в соответствие другой элемент этого множества, обозначаемый $\alpha\vec{u}$.

3. Для операций сложения и умножения на число выполняются следующие аксиомы:

   1°. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (коммутативность суммы)

   2°. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (ассоциативность суммы)

   3°. существует *нулевой* элемент $\vec{o}$ такой, что $\forall u \in \mathfrak{V}$, $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$

   4°. для любого $\vec{u}$ существует *противоположный* элемент $-\vec{u}$ такой, что $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$

   5°. $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$ (ассоциативность умножения на число)

   6°. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ (первая дистрибутивность)

   7°. $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$ (вторая дистрибутивность)

   8°. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $\forall\vec{u}$

Если поле коэффициентов $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то пространство называется *вещественным линейным пространством* , а при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – *комплексным линейным пространством* .

При введении понятия линейного пространства мы абстрагируемся не только от природы изучаемых объектов, но и от конкретного вида операций сложения векторов и умножения вектора на число (главное, чтобы эти операции удовлетворяли приведенным выше восьми аксиомам).

Примеры линейных пространств:

1. *Пространство свободных векторов.* Элементами пространства являются направленные отрезки. Операция сложения определяется правилом параллелограмма, а операция умножение на число растягивает отрезок и, если число отрицательно, меняет направление вектора.

2. *Арифметическое (координатное) пространство* $\mathbb{K}^n$. Элементами пространства являются всевозможные упорядоченные наборы действительных чисел по n в каждом: $\vec{u} = (u^1, \ldots, u^n)$. Линейные операции определяются соотношениями $\vec{u}+\vec{v} = (u^1+v^1, \ldots, u^n+v^n)$, $\lambda\vec{u} = (\lambda u^1, \ldots, \lambda u^n)$. Нулевой элемент $\vec{o} = (0, \ldots, 0)$.

Пусть $\mathfrak{V}$ – некоторое линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in \mathfrak{V}$, $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots$
$\ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Определение 5.2. Выражение вида

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n$$

называется *линейной комбинацией векторов* $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.

Линейная комбинация называется *нетривиальной* если в ней хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ отличен от нуля, в противном случае она называется *тривиальной*.

Определение 5.3. Система векторов $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ называется *линейно зависимой*, если существует хотя бы одна нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. Если только тривиальная линейная комбинация данных векторов равна нулевому вектору, то система векторов называется *линейно независимыми*.

Определение 5.4. Предположим, что в данном пространстве $\mathfrak{V}$ существует линейно независимая система, состоящая из n векторов, и нет никакой другой линейно независимой системы, состоящей из большего, чем n, числа векторов. Тогда говорят, что $\mathfrak{V}$ есть *n-мерное линейное пространство*, которое мы будем обозначать $\mathfrak{V}^n$, число n называется *числом измерений* или *размерностью* пространства

.

Определение 5.5. Всякая линейно независимая система, состоящая из n векторов пространства $\mathfrak{V}^n$, называется *базисом* этого пространства.

Будем обозначать базис как

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n.$$

Из курса линейной алгебры известно, что каждый вектор $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$ можно разложить по базису, т.е. представить в виде

$$\vec{u} = u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2 + \ldots + u^n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} u^i\vec{e}_i,$$

где $u^i,\ i = \overline{1, n}$ – *компоненты вектора* $\vec{u}$ в базисе $\vec{e}_i$ [4].

[4]Расположение индекса, нумерующего компоненты вектора вверху, а не внизу, как будет показано ниже указывает на трансформационные свойства объекта. Такое расположение индексов было предложено Риччи (Ricci) и в значительной мере упростило запись формул тензорного анализа.

Также для упрощения записей в тензорном анализе принято соглашение о суммировании, называемое еще *соглашением Эйнштейна* . Суть этого соглашения состоит в следующем:

1. Если в выражении встречается пара одинаковых индексов, один из которых стоит вверху, а другой внизу, то по этим индексам проводится суммирование от 1 до n (где n – размерность пространства). Знак суммы при этом опускается. Такая пара индексов может встречаться в выражении только один раз. Индексы, по которым производится суммирование, называются *немыми*. Немые индексы можно обозначать любой буквой, т.е. $u^i f_i = u^k f_k$.

2. Индексы, суммирование по которым не производятся, называются *свободными*. Свободные индексы в левой и правой частях выражения должны соответствовать друг другу, например, $u^i a_{ik} = b_k$, $u^i \neq u^k$. Изменение обозначения свободного индекса должно совершаться в обоих частях выражения. Наличие свободного индексов подразумевает, что мы имеем n уравнений. Например, уравнение $a_{ik}u^i = b_k$ является сокращенной формой записи системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&a_{11}u^1 + a_{21}u^2 + \ldots + a_{n1}u^n = b_1 \\
&a_{12}u^1 + a_{22}u^2 + \ldots + a_{n2}u^n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{1n}u^1 + a_{2n}u^2 + \ldots + a_{nn}u^n = b_n
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы можем написать разложение вектора по базису в виде

$$\vec{u} = u^i \vec{e}_i. \tag{144}$$

Весьма часто в записях используется символ Кронекера.

Определение 5.6. Символ Кронекера

$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}, \qquad \delta_j{}^i = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

С помощью символа Кронекера удобно представить один элемент из последовательности элементов линейного пространства через сумму всей последовательности, а именно

$$a_k = \delta^i{}_k a_i = \delta_k{}^i a_i, \quad u^m = \delta^m{}_k u^k = \delta_k{}^m u^k. \tag{145}$$

Определение 5.7. Два линейных пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором сумме векторов пространства $\mathfrak{U}$ отвечает соответствующая сумма векторов пространства $\mathfrak{V}$, а произведению числа на вектор пространства $\mathfrak{U}$ отвечает произведение этого же числа на соответствующий вектор пространства $\mathfrak{V}$. Взаимно однозначное соответствие, обладающее указанными свойствами, называется *изоморфизмом* .

Из курса линейной алгебры известно, что для того, чтобы два линейных пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ были изоморфны между собой, необходимо и достаточно, чтобы они имели одну и ту же размерность. Достаточность доказывается путем установления изоморфного соответствия некоторого линейного пространства $\mathfrak{V}^n$ и арифметического пространства $\mathbb{K}^n$. Это соответствие можно получить следующим образом. Пусть $\vec{e}_i$ базис пространства $\mathfrak{V}^n$. Тогда произвольный вектор $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$ однозначно записывается в виде $\vec{u} = u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2 + \ldots + u^n\vec{e}_n$. Ставя в соответствие вектору $\vec{x} \in \mathfrak{V}^n$ вектор $\vec{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^n) \in \mathbb{K}^n$, мы получаем искомое изоморфное соответствие. При этом базис $\vec{e}_i$ пространства $\mathfrak{V}^n$ переходит в систему векторов

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{e}}_1 &= (1, 0, \ldots, 0),\\
\hat{\vec{e}}_2 &= (0, 1, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\hat{\vec{e}}_n &= (0, 0, \ldots, 1),
\end{aligned}$$

которые образуют базис пространства $\mathbb{K}^n$.

5.2 Сопряженные линейные пространства

Как зная $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$ и базис $\vec{e}_i$ определить компоненты u^i. Для решения этой задачи рассмотрим другое n-мерное линейное пространство $\mathfrak{V}_n$ с элементами $\underset{\to}{f}$, $\underset{\to}{g}$, $\underset{\to}{h}, \ldots$. Предположим, что задано отображение, по которому каждой паре векторов $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$ и $\underset{\to}{f} \in \mathfrak{V}_n$ ставится в соответствие действительное число $\langle \vec{u}, \underset{\to}{f} \rangle$, обладающее следующими свойствами:

а) линейно по каждому из аргументов

$$\langle \underset{\to}{f}, \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \rangle = \lambda\langle \underset{\to}{f}, \vec{u} \rangle + \mu\langle \underset{\to}{f}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle \lambda\underset{\to}{f} + \mu\underset{\to}{g}, \vec{u} \rangle = \lambda\langle \underset{\to}{f}, \vec{u} \rangle + \mu\langle \underset{\to}{g}, \vec{u} \rangle$$

б) Если $\langle \underset{\to}{f}, \vec{u} \rangle = 0$ при $\forall \underset{\to}{f}$, то $\vec{u}$ – нулевой элемент $\mathfrak{V}^n$; если $\langle \underset{\to}{f}, \vec{u} \rangle = 0$ при $\forall \vec{u}$, то $\underset{\to}{f}$ – нулевой элемент $\mathfrak{V}_n$.

в) $\langle \underset{\to}{f}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \underset{\to}{f} \rangle$ для $\forall \underset{\to}{f}$, $\vec{u}$.

Определение 5.8. Число $\langle \underset{\to}{f}, \vec{u} \rangle$ называется *свертком*[5], а сама операция *свертыванием*.

[5] В русскоязычной математической литературе более употребителен термин женского рода “свертка”. Однако, применительно к тензорам этот термин впервые появился в немецкоязычной литературе как существительное мужского рода “der Bündel” – пучок, а не существительное женского рода “die Faltung” – свертка, означающее процесс сворачивания.

Примером реализации операции свертывание является линейная функция. Напомним, что

Определение 5.9. Функция $f : \mathfrak{V}^n \to \mathbb{K}$ называется *линейной*, если она удовлетворяет условиям

1. $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ для любых двух векторов $\vec{u}, \vec{v} \in \mathfrak{V}^n$,
2. $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$ для любого вектора $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{K}$.

Причем операции сложения функций и умножение на число выглядят следующим образом:

$$(f+g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u}), \quad (\lambda f)(\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}).$$

Из линейной алгебры известно, что множество всех линейных функций $\mathfrak{V}^*$, заданных в пространстве $\mathfrak{V}^n$ над полем $\mathbb{K}$, образует линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Поэтому в качестве свертка мы можем принять

$$\langle \underset{\to}{f}, \vec{u}\rangle = f(\vec{u}).$$

Нетрудно убедиться, что все свойства, которым должен удовлетворять сверток, выполнены.

Покажем, что размерность пространства линейных функций $\mathfrak{V}^*$, заданных в пространстве $\mathfrak{V}^n$, равно n. Пусть $\vec{e}_i$, $i = \overline{1,n}$ – некоторый базис в $\mathfrak{V}^n$. Тогда для любого $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$ справедливо $\vec{u} = u^i\vec{e}_i$. Учитывая линейность функции получаем, что $f(\vec{u}) = f(u^i\vec{e}_i) = u^i f(\vec{e}_i) = a_i u^i$. То есть линейная функция f однозначно определяется набором чисел $a_i = f(\vec{e}_i)$, $i = \overline{(}1,n)$ из поля $\mathbb{K}$, которые можно интерпретировать как вектор $(a_1,\ldots,a_n)$ арифметического пространства $\mathfrak{A}^n$. При сложении линейных функций и при умножении на число складываются и умножаются коэффициенты этих функций. Следовательно пространство $\mathfrak{V}^*$ изоморфно $\mathfrak{A}^n$ и поэтому n-мерно.

Определение 5.10. Пространства $\mathfrak{V}^n$ и $\mathfrak{V}_n$ называются *сопряженными (дуальными)*, если для их элементов определен сверток, удовлетворяющий аксиомам а)-в).

В пространстве $\mathfrak{V}_n$ выберем базис $\underset{\to}{e}^i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда

$$\underset{\to}{f} = f_i \underset{\to}{e}^i. \tag{146}$$

Выбор базиса в каждом из линейных пространств $\mathfrak{V}^n$ и $\mathfrak{V}_n$ независим и произволен. Однако можно выбрать некоторый специальный базис.

Определение 5.11. Базисы, удовлетворяющие условию

$$\langle \underset{\to}{e}^i, \vec{e}_k\rangle = \delta^i{}_k, \tag{147}$$

называются *взаимными*.

Условия (147) не ограничивают выбора базиса в одном из сопряжённых пространств; однако, если в одном из них базис выбран, то эти условия фиксируют базис в другом однозначно.

Рассмотрим сверток $\langle \underset{\rightarrow}{e}^i, \vec{u} \rangle$. Исходя из свойств свертывания, имеем

$$\langle \underset{\rightarrow}{e}^i, \vec{u} \rangle = \langle \underset{\rightarrow}{e}^i, u^k \vec{e}_k \rangle = u^k \langle \underset{\rightarrow}{e}^i, \vec{e}_k \rangle = u^k \delta^i_{\ k} = u^i.$$

Аналогично для свертка $\langle \underset{\rightarrow}{f}, \vec{e}_i \rangle$:

$$\langle \underset{\rightarrow}{f}, \vec{e}_i \rangle = \langle f_k \underset{\rightarrow}{e}^k, \vec{e}_i \rangle = f_k \langle \underset{\rightarrow}{e}^k, \vec{e}_i \rangle = f_k \delta^k_{\ i} = f_i.$$

Если известен взаимный базис, то компоненты вектора можно найти с его помощью

$$u^i = \langle \underset{\rightarrow}{e}^i, \vec{u} \rangle, \quad f_i = \langle \vec{f}, \vec{e}_i \rangle. \tag{148}$$

Рассмотрим теперь сверток $\langle \underset{\rightarrow}{f}, \vec{u} \rangle$ произвольных элементов сопряженных пространств.

$$\langle \underset{\rightarrow}{f}, \vec{u} \rangle = \langle f_i \underset{\rightarrow}{e}^i, u^k \vec{e}_k \rangle = f_i u^k \langle \underset{\rightarrow}{e}^i, \vec{e}_k \rangle = f_i u^k \delta^i_{\ k} = f_i u^i. \tag{149}$$

Последнее соотношение показывает, что при использовании взаимных базисов сверток представляет собой сумму произведений одноименных компонент.

Аксиомы а)-в) определяют сверток как абстрактную операцию. Ее конструктивное определение можно задать, если известны конструктивные модели для $\mathfrak{V}^n$ и $\mathfrak{V}_n$.

Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{V}^n$ над полем $\mathbb{K}$ и построим отображение этого пространство на числовое поле, т.е. каждому вектору $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$ поставим в соответствие число $f(\vec{u})$ из поля $\mathbb{K}$.

Определение 5.12. Функция $f : \mathfrak{V}^n \to \mathbb{K}$ называется *линейной*, если она удовлетворяет условиям

1. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ для любых двух векторов $\vec{u}, \vec{v} \in \mathfrak{V}^n$,
2. $f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$ для любого вектора $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{K}$.

Множество всех линейных функций $\mathfrak{V}^*$, заданных в пространстве $\mathfrak{V}^n$ над полем $\mathbb{K}$, образует линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ размерности n. Доказательство данного утверждения проводилось в курсе линейной алгебры.

Таким образом, в пространстве линейных функций мы можем выбрать базис $\underset{\rightarrow}{e}^i$ и разложить по нему произвольную линейную функцию:

$$\underset{\rightarrow}{f} = a_i \underset{\rightarrow}{e}^i.$$

Теорема 5.1. Пространство линейных функций $\mathfrak{V}^*$ сопряжено пространству векторов $\mathfrak{V}^n$ если за сверток принять

$$\langle \underset{\rightarrow}{f}, \vec{u} \rangle = f(\vec{u}). \tag{150}$$

5.3 Преобразование базисов

Мы рассматривали компоненты векторов относительно произвольного базиса. Как они преобразуются при переходе от одного базиса к другому?

Пусть в пространстве $\mathfrak{V}^n$ задан базис $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и некоторый другой базис $\vec{e}_{i'}$, $i' = 1', 2', \ldots, n' = n$. Новые базисные элементы мы обозначаем той же коренной буквой, но новыми индексами: $\vec{e}_1 \neq \vec{e}_{1'}$. Всякий вектор пространства $\mathfrak{V}^n$ мы можем разложить по базису $\vec{e}_i$ в соответствии с формулой (144). Это же справедливо и для векторов нового базиса $\vec{e}_{i'}$. Разложим, например, вектор $\vec{e}_{1'}$. Имеем

$$\vec{e}_{1'} = A^i{}_{1'}\vec{e}_i,$$

где n чисел $A^i{}_{1'}$ имеют смысл компонент элемента $\vec{e}_{1'}$ относительно старого базиса $\vec{e}_i$. Повторяя процедуру разложения для остальных векторов нового базиса, получаем

$$\vec{e}_{i'} = A^i{}_{i'}\vec{e}_i. \tag{151}$$

Элемент i-й строки i'-ого столбца матрицы[6] $(A^i{}_{i'})$ имеет смысл i-й компоненты вектора $\vec{e}_{i'}$ относительно базиса $\vec{e}_i$. Таким образом, второй индекс указывает номер базисного вектора, подвергаемого разложению, а первый – номер его компоненты.

Определение 5.13. Матрица $A = (A^i{}_{i'})$, определяемая соотношением (151), называется *матрицей перехода*.

Матрица перехода является невырожденной, т.е. $\det A \neq 0$, в противном случае система векторов $\vec{e}_{i'}$ будет линейно зависимой и не может являться базисом.

Базисы $\vec{e}_{i'}$ и $\vec{e}_i$ является равноправными. Поэтому можно разложить базисные элементы $\vec{e}_i$ по базису $\vec{e}_{i'}$. Имеем

$$\vec{e}_i = A^{i'}{}_i\vec{e}_{i'}. \tag{152}$$

Соотношения (151) и (152) определяют прямое и обратное преобразование базиса в $\mathfrak{V}^n$.

Матрицы $(A^i{}_{i'})$ и $(A^{i'}{}_i)$ являются взаимно обратными. Действительно, подставим выражение (152) в (151). Получаем

$$\vec{e}_{k'}\delta^{k'}{}_{i'} = \vec{e}_{i'} = A^i{}_{i'}\vec{e}_i = A^i{}_{i'}A^{k'}{}_i\vec{e}_{k'} \Rightarrow (A^i{}_{i'}A^{k'}{}_i - \delta^{k'}{}_{i'})\vec{e}_{k'} = 0.$$

Отсюда

$$A^i{}_{i'}A^{k'}{}_i = \delta^{k'}{}_{i'}. \tag{153}$$

Аналогично, подставляя выражение (151) в (152), получаем

$$A^{i'}{}_iA^k{}_{i'} = \delta_i{}^k. \tag{154}$$

[6]Здесь и впредь объектам с двумя индексами будет сопоставлять матрицы, строки которой нумеруются первым индексом где бы он не стоял, а столбцы – вторым.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$, компоненты которого в базисе $\vec{e}_i$ есть u^i, а в базисе $\vec{e}_{i'}$ – $u^{i'}$. Как связаны компоненты между собой. Поскольку вектор не зависит от выбора базиса в $\mathfrak{V}^n$, то можно записать[7]

$$\vec{u} = u^{i'}\vec{e}_{i'} = u^i\vec{e}_i = u^i A^{i'}{}_i\vec{e}_{i'} \Rightarrow (u^{i'} - A^{i'}{}_i u^i)\vec{e}_{i'} = 0.$$

Отсюда

$$u^{i'} = A^{i'}{}_i u^i. \tag{155}$$

Аналогично получаем, что

$$u^i = A^i{}_{i'} u^{i'}. \tag{156}$$

Таким образом, компоненты u^i произвольного вектора $\vec{u} \in \mathfrak{V}^n$ при преобразовании базиса (151) преобразуются по линейному однородному закону.

Рассмотрим теперь пространство $\mathfrak{V}_n$, сопряженное $\mathfrak{V}^n$. Так как $\mathfrak{V}_n$ с алгебраической точки зрения – такое же линейное пространство, что и $\mathfrak{V}^n$, то для него можно повторить все предыдущие рассуждения. Тогда если $\underset{\to}{e}^i$ и $\underset{\to}{e}^{i'}$ – старый и новый базисы в $\mathfrak{V}_n$, то имеют место соотношения

$$\underset{\to}{e}^{i'} = B_i{}^{i'}\underset{\to}{e}^i, \qquad \underset{\to}{e}^i = B_{i'}{}^i\underset{\to}{e}^{i'}, \tag{157}$$

$$f_{i'} = B_{i'}{}^i f_i, \qquad f_i = B_i{}^{i'} f_{i'}, \tag{158}$$

$$B_i{}^{i'}B_{i'}{}^k = \delta_i{}^k, \qquad B_i{}^{i'}B_{k'}{}^i = \delta^{i'}{}_{k'}. \tag{159}$$

В данных формулах мы придерживаемся той же системы в обозначениях, что и в предыдущих формулах этого параграфа. Второй индекс матрицы $(B_i{}^{i'})$ соответствует номеру базисного вектора, подвергающегося разложению, а первый – номеру его компоненты.

Если выбор базисов в сопряженных пространствах ничем не связан, то и матрицы A и B независимы друг от друга. Однако, обычно требуется, чтобы в базисы в сопряженных пространствах удовлетворяли условию взаимности:

$$\langle \underset{\to}{e}^i, \vec{e}_k\rangle = \delta^i{}_k, \quad \langle \underset{\to}{e}^{i'}, \vec{e}_{k'}\rangle = \delta^{i'}{}_{k'}.$$

Этим условием матрицы A и B однозначно связываются между собой. Имеем

$$\langle \underset{\to}{e}^{i'}, \vec{e}_{k'}\rangle = \langle B_i{}^{i'}\underset{\to}{e}^i, A^k{}_{k'}\vec{e}_k\rangle = B_i{}^{i'}A^k{}_{k'}\langle \underset{\to}{e}^i, \vec{e}_k\rangle = B_i{}^{i'}A^k{}_{k'}\delta^i{}_k = \delta^{i'}{}_{k'},$$

откуда

$$B_i{}^{i'}A^i{}_{k'} = \delta^{i'}{}_{k'}. \tag{160}$$

Иначе говоря матрица $(B_i{}^{i'})$ является обратной транспонированной по отношении к матрице $(A^i{}_{k'})$.

Таким образом, в формулах преобразования фигурирует либо сама матрица $(A^i{}_{i'})$, либо транспонированная, либо обратная, либо обратная транспонированная. Поэтому имеет смысл обозначить все эти матрицы одной коренной буквой A, а картина расположения индексов укажет на связь любой из матриц с исходной. Тогда

[7] здесь i и i' – разные текущие индексы

$(A^{i}{}_{i'})$ – прямая матрица перехода,

$(A^{i'}{}_{i})$ – обратная матрица перехода,

$(A_{i'}{}^{i})$ – транспонированная матрица перехода,

$(A_{i}{}^{i'})$ – обратная транспонированная матрица перехода.

Запишем еще раз преобразование базисов и компонент в новых обозначениях:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{i'} &= A^{i}{}_{i'}\vec{e}_{i}, \qquad & u^{i'} &= A^{i'}{}_{i}u^{i}, \\ \underset{\rightarrow}{e}^{i'} &= A_{i}{}^{i'}\underset{\rightarrow}{e}^{i}, \qquad & f_{i'} &= A_{i'}{}^{i}f_{i}. \end{aligned} \tag{161}$$

Сопоставление этих выражений показывает, что компоненты векторов сопряженного пространства $\mathfrak{V}_n$ преобразуются так же, как и базисные элементы исходного пространства $\mathfrak{V}^n$, и наоборот, компоненты векторов исходного пространства $\mathfrak{V}^n$ преобразуются как базисные векторы сопряженного пространства $\mathfrak{V}_n$.

Определение 5.14. Арифметические векторы u^i и f_i (элементы арифметического пространства) называются соответственно *контра-* и *ковариантными векторами*.

Согласно принятой символике положение индекса (вверху или внизу) отражает закон его преобразования. Поэтому часто называют нижние индексы ковариантными, а верхние – контравариантными.

Множество матриц перехода обладает следующими свойствами:

- результат двух последовательно выполненных преобразований базиса является также преобразованием базиса;
- для каждого из преобразований существует обратное, принадлежащее множеству;
- множество содержит тождественное преобразование.

Значит, множество матриц перехода образует группу.

5.4 Аффинное пространство. Преобразование координат

Определение 5.15. Аффинным n-мерным пространством $\mathfrak{R}^n$ над полем $\mathbb{K}$ называется множество, состоящее из элементов двух родов: *"точек"* и *"векторов"* пространства. При этом предполагаются выполненными четыре аксиомы

1. Множество всех векторов пространства $\mathfrak{R}^n$ есть линейное пространство $\mathfrak{V}^n$, которое будем называть *пространством трансляций* аффинного пространства.

2. Каждые две точки A и B, взятые в определенном порядке, определяют единственный вектор
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}.$$

3. Если даны произвольный вектор $\vec{u}$ и произвольная точка A, то существует единственная точка B такая, что
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}.$$

4. Если $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, то
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}.$$

Определение 5.16. *Система координат* в n-мерном аффинном пространстве состоит из некоторой точки O, *начала координат*, и из *базиса* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ пространства трансляций $\mathfrak{V}^n$.

Определение 5.17. *Координатами* некоторого *вектора* $\vec{x}$ в этой системе координат являются координаты этого вектора относительно базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и не зависят от выбора начала координат. *Координатами* произвольной *точки* M пространства называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$[8].

Пусть $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \{u^1, u^2, \ldots, u^n\}$, $A = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$, $B = (b^1, b^2, \ldots, b^n)$, тогда несложно показать, что
$$u^i = b^i - a^i.$$
То есть при любом закрепления вектора $\vec{u}$ его координаты равны разностями между соответствующими координатами концевой и начальной точек вектора.

Преобразование координат. Пусть в "старой" системе координат $O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ точка M имеет координаты x^i. Рассмотрим "новую" систему координат $O', \vec{e}_{1'}, \ldots, \vec{e}_{n'}$, начало O' которой имеет в "старой" системе координаты a^i, а базисы связаны соотношением $\vec{e}_i = A^{i'}{}_i \vec{e}_{i'}$.

[8] Такие координаты называются *прямолинейными*.

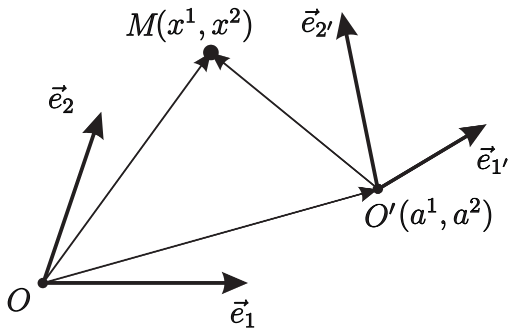


Рис. 10: Преобразование координат

Найдем координаты точки M в "новой" системе координат. Для этого нам необходимо найти координаты вектора $\overrightarrow{O'M}$:

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$$

или

$$x^{i'}\vec{e}_{i'} = x^i A^{i'}{}_i \vec{e}_{i'} - a^i A^{i'}{}_i \vec{e}_{i'}.$$

Так как данное выражение должно выполняться для любого базисного вектора, то получаем следующее преобразование координат

$$x^{i'} = A^{i'}{}_i x^i + a^{i'}, \quad a^{i'} = -A^{i'}{}_i a^i.$$

Обратное преобразование, очевидно, будет

$$x^i = A^i{}_{i'} x^{i'} + a^i.$$

При данном преобразовании меняется только координатная система, в то время как точка остается неизменной. При этом меняются только индексы, а коренная буква остается прежней.

Возможно, однако, *точечное преобразование* координат, при котором координатная система не меняется, а исходной точке ставится в соответствие другая точка:

$$y^k = P^k_{\ i} x^i + p^k.$$

При этом меняется уже коренная буква. Если $P^k_{\ i}$ и p^k являются постоянными величинами, то данное преобразование представляет *точечное аффинное преобразование*[9].

5.5 Тензорное произведение векторных пространств

Определение 5.18. Пусть $\mathfrak{V}$ и $\widetilde{\mathfrak{V}}$ – линейные пространства над полем $\mathbb{K}$, и $u \in \mathfrak{V}$, $\tilde{u} \in \widetilde{\mathfrak{V}}$. Упорядоченная пара $u \otimes \tilde{u}$ называется *произведением* u на $\tilde{u}$ или *диадой*.

Пусть $\underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{k}{u} \in \mathfrak{V}$ а $\underset{1}{\tilde{u}}, \underset{2}{\tilde{u}}, \ldots, \underset{k}{\tilde{u}} \in \widetilde{\mathfrak{V}}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{T}$ элементами ко-

[9]При аффинном преобразовании точка M переходит в точку Q, которая имеет те же координаты в "новой" системе, что и точка M в "старой".

торого являются суммы произведений

$$t = \underset{1}{u} \otimes \underset{1}{\tilde{u}} + \underset{2}{u} \otimes \underset{2}{\tilde{u}} + \ldots + \underset{k}{u} \otimes \underset{k}{\tilde{u}} \in \mathfrak{T}. \tag{162}$$

Определение 5.19. Положим, что элементы из $\mathfrak{T}$ для любых $u, v \in \mathfrak{V}$ и $\tilde{u}, \tilde{v} \in \widetilde{\mathfrak{V}}$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ удовлетворяют следующим условиям равенства:

1. сумма (162) не зависит от порядка записи слагаемых,
2. $(u+v) \otimes \tilde{u} = u \otimes \tilde{u} + v \otimes \tilde{u}$ и $u \otimes (\tilde{u} + \tilde{v}) = u \otimes \tilde{u} + u \otimes \tilde{v}$,
3. $(\alpha u) \otimes \tilde{u} = u \otimes (\alpha \tilde{u})$.

Таким образом два элемента $t, s \in \mathfrak{T}$ считаются равными тогда, и только тогда, когда один из другого может быть получен с помощью условий определения 1.18.

Введем на множестве $\mathfrak{T}$ линейные операции.

Определение 5.20. *Суммой* двух элементов $t = \underset{1}{u} \otimes \underset{1}{\tilde{u}} + \ldots + \underset{k}{u} \otimes \underset{k}{\tilde{u}}$ и $s = \underset{1}{v} \otimes \underset{1}{\tilde{v}} + \ldots + \underset{m}{v} \otimes \underset{m}{\tilde{v}}$ назовем элемент

$$t + s = \underset{1}{u} \otimes \underset{1}{\tilde{u}} + \ldots + \underset{k}{u} \otimes \underset{k}{\tilde{u}} + \underset{1}{v} \otimes \underset{1}{\tilde{v}} + \ldots + \underset{m}{v} \otimes \underset{m}{\tilde{v}}. \tag{163}$$

Произведением t на число α назовем элемент

$$\alpha t = (\alpha \underset{1}{u}) \otimes \underset{1}{\tilde{u}} + \ldots + (\alpha \underset{k}{u}) \otimes \underset{k}{\tilde{u}}. \tag{164}$$

Заметим, что сумма $t + s$ в силу условия 1. определения 1.18 не зависит от порядка слагаемых, а произведение αt по условию 3. того же определения может быть записано в виде

$$\alpha t = \underset{1}{u} \otimes (\alpha \underset{1}{\tilde{u}}) + \ldots + \underset{k}{u} \otimes (\alpha \underset{k}{\tilde{u}}).$$

Теорема 5.2. Множество $\mathfrak{T}$ с введенными на нем операциями (163) и (164) является линейным пространством.

Определение 5.21. Пространство $\mathfrak{T}$ называется *тензорным произведением пространств* $\mathfrak{V}$ и $\widetilde{\mathfrak{V}}$ и обозначается как

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{V} \otimes \widetilde{\mathfrak{V}}.$$

Замечание. *Из определения 1.18 следует, что вообще говоря,* $\mathfrak{V} \otimes \widetilde{\mathfrak{V}} \neq \widetilde{\mathfrak{V}} \otimes \mathfrak{V}$, *если* $\mathfrak{V} \neq \widetilde{\mathfrak{V}}$.

Определение 5.22. Элементы пространства $\mathfrak{T}$ называются *тензорами валентности 2* над пространствами $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V}$.

Пусть $\mathfrak{V}^*$ и $\widetilde{\mathfrak{V}}^*$ пространства сопряженные пространствам $\mathfrak{V}$ и $\widetilde{\mathfrak{V}}$ соответственно.

Определение 5.23. Правый сверток диады $u \otimes \tilde{u}$ с вектором $\tilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{V}}^*$ определяется равенством

$$\langle u \otimes \tilde{u}, \tilde{f} \rangle = u \langle \tilde{u}, \tilde{f} \rangle. \tag{165}$$

Левый сверток диады $u \otimes \tilde{u}$ с вектором $f \in \mathfrak{V}^*$ определяется равенством

$$\langle f, u \otimes \tilde{u} \rangle = \langle f, u \rangle \tilde{u}. \tag{166}$$

Так как сверток векторов является числом, то сверток $\langle u \otimes \tilde{u}, \tilde{f} \rangle$ представляет собой вектор, коллинеарный вектору u, а сверток $\langle f, u \otimes \tilde{u} \rangle$ есть вектор, коллинеарный $\tilde{u}$.

Определение 5.24. Правый и левый сверток с произвольным элементом $t = \underset{1}{u} \otimes \underset{1}{\tilde{u}} + \ldots + \underset{k}{u} \otimes \underset{k}{\tilde{u}}$ определяется как

$$\begin{aligned} \langle \underset{1}{u} \otimes \underset{1}{\tilde{u}} + \ldots + \underset{k}{u} \otimes \underset{k}{\tilde{u}}, \tilde{f} \rangle &= \underset{1}{u} \langle \underset{1}{\tilde{u}}, \tilde{f} \rangle + \ldots + \underset{k}{u} \langle \underset{k}{\tilde{u}}, \tilde{f} \rangle, \\ \langle f, \underset{1}{u} \otimes \underset{1}{\tilde{u}} + \ldots + \underset{k}{u} \otimes \underset{k}{\tilde{u}} \rangle &= \langle f, \underset{1}{u} \rangle \underset{1}{\tilde{u}} + \ldots + \langle f, \underset{k}{u} \rangle \underset{k}{\tilde{u}}. \end{aligned} \tag{167}$$

Пусть система векторов $e_1, \ldots, e_n$ образует базис в пространстве $\mathfrak{V}$, а система $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ – в пространстве $\widetilde{\mathfrak{V}}$.

Теорема 5.3. Диады, составленные из базисных векторов $e_i \otimes \tilde{e}_j$, $i, j = \overline{1, n}$ образуют базис в пространстве $\mathfrak{T}$.

Следствие. *Из теоремы следует, что размерность тензорного произведения пространств равна произведению размерности пространств, входящих в произведение.*

Определение 5.25. Координаты t^{ij} тензора t в базисе $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ называются *компонентами* тензора t.

Наряду с рассмотренным случаем тензорного произведения $\mathfrak{T}^2_0 = \mathfrak{V}^n \otimes \mathfrak{V}^n$ возможны и другие специальные случаи:

$$\mathfrak{T}^2_0 = \mathfrak{V}^n \otimes \mathfrak{V}^n, \ \mathfrak{T}^0_2 = \mathfrak{V}_n \otimes \mathfrak{V}_n, \ \mathfrak{T}^1{}_1 = \mathfrak{V}^n \otimes \mathfrak{V}_n, \ \mathfrak{T}_1{}^1 = \mathfrak{V}_n \otimes \mathfrak{V}^n. \tag{168}$$

Определение 5.26. Элементы пространств $\mathfrak{T}^2_0$, $\mathfrak{T}^0_2$, $\mathfrak{T}^1{}_1$ и $\mathfrak{T}_1{}^1$ называются соответственно *контравариантными, ковариантными* и *смешанными* тензорами валентности 2 над пространством $\mathfrak{V}^n$.

Рассмотрим в заключении, как меняются компоненты тензора при переходе от одного базиса к другому. Возьмем контравариантный тензор. Имеем

$$t = t^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = t^{ij} (A^{i'}{}_i \vec{e}_{i'}) \otimes (A^{j'}{}_j \vec{e}_{j'}) = t^{ij} A^{i'}{}_i A^{j'}{}_j \vec{e}_{i'} \otimes \vec{e}_{j'}.$$

С другой стороны
$$t = t^{i'j'} \vec{e}_{i'} \otimes \vec{e}_{j'}.$$
Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных элементах получаем закон преобразования компонент контравариантного тензора
$$t^{i'j'} = A^{i'}{}_{i} A^{j'}{}_{j} t^{ij}.$$
Аналогичным образом получаем преобразование компонент тензоров других типов:
$$t^{i'j'} = A^{i'}{}_{i} A^{j'}{}_{j} t^{ij}, \tag{169}$$
$$t_{i'j'} = A_{i'}{}^{i} A_{j'}{}^{j} t_{ij}, \tag{170}$$
$$t^{i'}{}_{j'} = A^{i'}{}_{i} A_{j'}{}^{j} t^{i}{}_{j}, \quad t_{j'}{}^{i'} = A_{j'}{}^{j} A^{i'}{}_{i} t_{j}{}^{i}. \tag{171}$$

5.6 Тензоры высшей валентности

Пусть $\overset{1}{\mathfrak{V}}$, $\overset{2}{\mathfrak{V}}$, $\overset{3}{\mathfrak{V}}$ – линейные пространства. Построим тензорное произведение
$$(\overset{1}{\mathfrak{V}} \otimes \overset{2}{\mathfrak{V}}) \otimes \overset{3}{\mathfrak{V}}.$$

Определение 5.27. Добавим к условиям равенства определения 1.18 еще одно:

4. (ассоциативность) $\forall \overset{(j)}{u} \in \overset{j}{\mathfrak{V}} : (\overset{(1)}{u} \otimes \overset{(2)}{u}) \otimes \overset{(3)}{u} = \overset{(1)}{u} \otimes (\overset{(2)}{u} \otimes \overset{(3)}{u})$

Данное условие позволяет утверждать, что
$$(\overset{1}{\mathfrak{V}} \otimes \overset{2}{\mathfrak{V}}) \otimes \overset{3}{\mathfrak{V}} = \overset{1}{\mathfrak{V}} \otimes (\overset{2}{\mathfrak{V}} \otimes \overset{3}{\mathfrak{V}}) = \overset{1}{\mathfrak{V}} \otimes \overset{2}{\mathfrak{V}} \otimes \overset{3}{\mathfrak{V}}$$
Таким образом, индуктивно мы может построить тензорное произведение произвольного числа векторных пространств.

Определение 5.28. Пусть $\overset{j}{\mathfrak{V}}$, $j = \overline{1,r}$, $r \geqslant 2$ – линейные пространства. Их *тензорным произведением*
$$\mathfrak{T} = \overset{1}{\mathfrak{V}} \otimes \ldots \otimes \overset{r}{\mathfrak{V}} \tag{172}$$
называются следующие множества:

1. при $r = 2$ $\mathfrak{T} = \overset{1}{\mathfrak{V}} \otimes \overset{2}{\mathfrak{V}}$ в смысле определение 21,
2. при $r > 2$ $\mathfrak{T} = (\overset{1}{\mathfrak{V}} \otimes \ldots \otimes \overset{r-1}{\mathfrak{V}}) \otimes \overset{r}{\mathfrak{V}}$

Определение 5.29. Упорядоченная совокупность элементов $\underset{1}{\overset{(1)}{u}} \otimes \ldots \otimes \underset{1}{\overset{(r)}{u}}$, $\underset{1}{\overset{(j)}{u}}, \ldots, \underset{k}{\overset{(j)}{u}} \in \overset{j}{\mathfrak{V}}$, $j = \overline{1,r}$ называется их произведением или *полиадой*.

Теорема 5.4. Тензорное произведение (172) является линейным пространством, элементы которого имеют вид

$$t = \overset{(1)}{\underset{1}{u}} \otimes \ldots \otimes \overset{(r)}{\underset{1}{u}} + \ldots + \overset{(1)}{\underset{k}{u}} \otimes \ldots \otimes \overset{(r)}{\underset{k}{u}}, \quad \overset{(j)}{\underset{1}{u}}, \ldots, \overset{(j)}{\underset{k}{u}} \in \overset{j}{\mathfrak{V}}, \; j = \overline{1, r}. \tag{173}$$

Теорема 5.5. Пусть $\overset{(j)}{e}_1, \ldots, \overset{(j)}{e}_n$ – базис в пространстве $\overset{j}{\mathfrak{V}}$, $j = \overline{1, r}$. Тогда произведения базисных векторов

$$\overset{(1)}{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \overset{(r)}{e}_{i_r}, \; r = \overline{1, n}$$

образуют базис в пространстве $\mathfrak{T}$.

Определение 5.30. Пусть $\mathfrak{V}^n$ – линейное пространство. При $p + q \geqslant 2$ положим[10]

$$\mathfrak{T}^p_q = \underbrace{(\mathfrak{V}^n \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}^n)}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{(\mathfrak{V}_n \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n)}_{q \text{ раз}}, \tag{174}$$

$$\mathfrak{T}^0_0 = \mathbb{K}, \quad \mathfrak{T}^1_0 = \mathfrak{V}^n, \quad \mathfrak{T}^0_1 = \mathfrak{V}_n. \tag{175}$$

Элементы из пространства $\mathfrak{T}^p_q$ называются *тензорами валентности $r = p + q$* над пространством $\mathfrak{V}^n$ – p раз *контравариантными*, q – раз *ковариантными*. При $p = 0$ тензор называется ковариантным, при $q = 0$ – контравариантным.

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – базис в $\mathfrak{V}^n$. Тогда аналогично рассуждениям предыдущего параграфа можно показать, что

$$t = t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes \underset{\rightarrow}{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \underset{\rightarrow}{e}^{j_q}. \tag{176}$$

Определение 5.31. Числа $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ называются *компонентами* тензора t в данном базисе.

Компоненты тензора преобразуются по закону

$$t^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = A^{i'_1}{}_{i_1} \ldots A^{i'_p}{}_{i_p} A_{j'_1}{}^{j_1} \ldots A_{j'_q}{}^{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \tag{177}$$

[10] Возможно произвольное расположение пространств $\mathfrak{V}^n$ и $\mathfrak{V}_n$ в выражении (174)

Таким образом, можно дать еще одно определение тензора.

Определение 5.32. Объект, который в *каждом* базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ пространства $\mathfrak{V}^n$ характеризуется *упорядоченным* набором n^{p+q} чисел вида $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, причем *при переходе от одного базиса исходного линейного пространства к другому эти числа преобразуются по линейному однородному закону*

$$t^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = A^{i'_1}{}_{i_1} \ldots A^{i'_p}{}_{i_p} A_{j'_1}{}^{j_1} \ldots A_{j'_q}{}^{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q},$$

называется тензором валентности $r = p+q$ над пространством $\mathfrak{V}^n$ – p раз контравариантными, q раз – ковариантными, числа $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ – называются компонентами тензора в заданном базисе.

5.7 Полилинейная функция

Определение 5.33. Числовая функция

$$\varphi(\underset{1}{\vec{x}}, \ldots, \underset{q}{\vec{x}}, \underset{\rightarrow}{\overset{1}{f}}, \ldots, \underset{\rightarrow}{\overset{p}{f}}) \tag{178}$$

от векторных аргументов $\underset{1}{\vec{x}}, \ldots, \underset{q}{\vec{x}} \in \mathfrak{V}^n$, $\underset{\rightarrow}{\overset{1}{f}}, \ldots, \underset{\rightarrow}{\overset{p}{f}} \in \mathfrak{V}_n$ называется *полилинейной функцией* типа (p, q) если она линейна по каждому из своих аргументов.

Рассмотрим базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ в пространстве $\mathfrak{V}^n$ и взаимный ему базис $\underset{\rightarrow}{e}^1, \ldots, \underset{\rightarrow}{e}^n$ в пространстве $\mathfrak{V}_n$. Тогда

$$\varphi(\underset{1}{\vec{x}}, \ldots, \underset{q}{\vec{x}}, \underset{\rightarrow}{\overset{1}{f}}, \ldots, \underset{\rightarrow}{\overset{p}{f}}) = \varphi(\underset{1}{x}^{j_1} \vec{e}_{j_1}, \ldots, \underset{q}{x}^{j_q} \vec{e}_{j_q}, \overset{1}{f}_{i_1} \underset{\rightarrow}{e}^{i_1}, \ldots, \overset{p}{f}_{i_p} \underset{\rightarrow}{e}^{i_p}) =$$

$$= \underset{1}{x}^{j_1} \ldots \underset{q}{x}^{j_q} \overset{1}{f}_{i_1} \ldots \overset{p}{f}_{i_p} \varphi(\vec{e}_{j_1}, \ldots, \vec{e}_{j_q}, \underset{\rightarrow}{e}^{i_1}, \ldots, \underset{\rightarrow}{e}^{i_p})$$

Обозначим

$$\varphi(\vec{e}_{j_1}, \ldots, \vec{e}_{j_q}, \underset{\rightarrow}{e}^{i_1}, \ldots, \underset{\rightarrow}{e}^{i_p}) = a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

Тогда

$$\varphi(\underset{1}{\vec{x}}, \ldots, \underset{q}{\vec{x}}, \underset{\rightarrow}{\overset{1}{f}}, \ldots, \underset{\rightarrow}{\overset{p}{f}}) = a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{1}{x}^{j_1} \ldots \underset{q}{x}^{j_q} \overset{1}{f}_{i_1} \ldots \overset{p}{f}_{i_p} \tag{179}$$

Определение 5.34. Однородный многочлен (179) называется *полилинейной формой* типа (p, q), а числа $a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ – *коэффициентами* полилинейной формы.

Из проведенных вычислений видно, что фиксирование базиса в $\mathfrak{V}^n$ каждой полилинейной функции ставит во взаимно однозначное соответствие ее полилинейную форму.

Несложно показать, что при переходе к другому базису коэффициенты полилинейной формы преобразуются по закону

$$a^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = A^{i'_1}{}_{i_1} \ldots A^{i'_p}{}_{i_p} A_{j'_1}{}^{j_1} \ldots A_{j'_q}{}^{j_q} a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

Таким образом, каждой полилинейной форме инвариантно и взаимно однозначно сопоставляется тензор

$$a = a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes \underset{\rightarrow}{e}^{j_1} \otimes \underset{\rightarrow}{e}^{j_q}.$$

5.8 Алгебраические операции для тензоров

Среди всевозможных операций, которые можно совершать над тензорами, особое место занимают такие операции, результатом которых снова являются тензорами. Такими операциями являются следующие.

Определение 5.35. ***Сложение.*** Операция сложения определена для тензоров одинаковой валентности и типа. Суммой двух тензоров $a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ и $b^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ называется тензор $c^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ того же типа и той же валентности, компоненты которого равны

$$c^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + b^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}. \tag{180}$$

Определение 5.36. ***Умножение*** (*тензорное*). Произведением произвольных тензоров $t \in \mathfrak{T}^p_q$ и $s \in \mathfrak{T}^u_v$ называется упорядоченная пара[11]

$$t \otimes s \in \mathfrak{T}^p_q \otimes \mathfrak{T}^u_v.$$

Пусть тензоры t и s имеют компоненты $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ и $s^{k_1 \dots k_u}_{l_1 \dots l_v}$. Тогда произведение тензоров t и s в каждом базисе определяется совокупностью $n^{p+q+u+v}$ чисел

$$c^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_u}_{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_v} = t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} s^{k_1 \dots k_u}_{l_1 \dots l_v}. \tag{181}$$

Контра и ковариантные валентности полученного тензора равны сумме соответствующих валентностей тензоров-сомножителей.

Определение 5.37. ***Свертывание и взаимное свертывание***. Свертывание тензора $t \in \mathfrak{T}^p_q$, $t \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ с компонентами $t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ по верхнему индексу i_l, $1 \leqslant l \leqslant p$ и нижнему индексу j_m, $1 \leqslant m \leqslant q$ называется тензор $s \in \mathfrak{T}^{p-1}_{q-1}$ компоненты которого получаются из компонент тензора t суммированием по обозначенным индексам, т.е.

$$s^{i_1\ldots i_{l-1}i_{l+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{m-1}j_{m+1}\ldots j_q} = t^{i_1\ldots i_{l-1}ki_{l+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{m-1}kj_{m+1}\ldots j_q} \tag{182}$$

Например,

$$a = \vec{u} \otimes \vec{v} \otimes \underset{\rightarrow}{f}; \qquad a^{ik}{}_k : \quad \langle \vec{v}, \underset{\rightarrow}{f} \rangle \vec{u}.$$

Операцию свертывания можно повторить, причем максимальное число таких операций равно $\min(p, q)$. Если $p = q$, то в этом случае мы придем к тензору нулевой валентности, т.е. скаляру.
Взаимным свертыванием или внутренним произведением называется комбинация внешнего произведения и свертывания тензоров, например

$$a^{ij}b_i, \quad b_{ijk}{}^l c_l{}^j.$$

Определение 5.38. ***Образование изомера***. Эта операция сводится к перестановке индексов. В результате получается тензор того же типа и валентности.

Операции а)-г) охватывают все первичные операции над тензорами, в результате которых получается тензор. Обычно эти операции резюмируют в виде *прямого тензорного признака*:

Теорема 5.6. ***Прямой тензорный признак.*** При любом невырожденном преобразовании базиса компоненты тензоров преобразуются по законам, сохраняющим результаты сложения, умножения, свертывания, а также равенство тензоров.

Прямым тензорным признаком можно воспользоваться для определения трансформационных свойств объекта, когда известно из каких объектов и с помощью каких операций он образован. Если этого не известно, то для определения трансформационных свойств объекта можно применить обратный тензорный признак.

Теорема 5.7. ***Обратный тензорный признак.*** Для того, чтобы совокупность n^{p+q} чисел $t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ составляла тензор из пространства $\mathfrak{T}^p_q$, необходимо и достаточно, чтобы в результате его внешнего или внутреннего произведения с <u>любым</u> тензором фиксированных валентности и типа получался соответствующий тензор.

[11] Вообще говоря $t \otimes s \neq s \otimes t$. При этом понятие произведения индуктивно может быть распространено на любое конечное число сомножителей.

5.9 Симметрирование и альтернирование

Определение 5.39. Тензор

$$t_{i\dots j}^{\cdot\cdot k\cdot\cdot}$$

называется *симметричным* по паре *однотипных* индексов i и j, если при их перестановке его компоненты не изменяются.

Определение 5.40. Тензор

$$t_{i\dots j}^{\cdot\cdot k\cdot\cdot}$$

называется *антисимметричным (кососимметричным)* по паре *однотипных* индексов i и j, если при их перестановке его компоненты меняют знак на противоположный.

Следует иметь в виду, что симметрия и антисимметрия определяется по местоположению индексов, а не по их названию.

Определение 5.41. Тензор называется *симметричным* по группе однотипных индексов, если при перестановке любой пары индексов из этой группы его компоненты не меняются.

Определение 5.42. Тензор называется *антисимметричным* по группе однотипных индексов, если при перестановке любой пары индексов из этой группы его компоненты меняют знак на противоположный.

Определение 5.43. Тензор, симметричный (антисимметричный) по всем индексам одного типа, называется *полностью симметричным (антисимметричным)*. его компоненты не меняются (изменяют знак).

Определения симметрии и антисимметрии были даны относительно некоторого базиса. Несложно показать, что они сохранятся и в другом базисе.

Операции симметрирования и альтернирования являются комбинацией операций сложения и образования изомера. В результате этих операция произвольному тензору ставится в соответствие симметричный или антисимметричный тензор. Рассмотрим эти операции для тензоров второй валентности. Пусть a^{ij} произвольный контравариантный тензор. Образуем тензоры

$$a^{(ij)} = \frac{1}{2}(a^{ij} + a^{ji}), \tag{183}$$

$$a^{[ij]} = \frac{1}{2}(a^{ij} - a^{ji}). \tag{184}$$

Определение 5.44. Операция (183) называется *симметрированием*, а операция (184) – *альтернированием*.

Из определения операций симметрирования и альтернирования видно, что

$$a^{ij} = a^{(ij)} + a^{[ij]}.$$

Следует отметить, что в общем случае тензоры $a^{(ij)} \neq a^{ij}$ и $a^{[ij]} \neq a^{ij}$. Здесь используется одна коренная буква, однако круглые (квадратные) скобки на индексах говорят о том, что тензор был получен из исходного посредством операций симметрирования и альтернирования.

В случае, если тензор имеет одну из валентностей больше 2 и рассматриваемые операции применяются к индексам, которые не стоят рядом, то индексы, не участвующие в операции, выделяют вертикальной чертой. Например,

$$a^{(i|lk|m)} = \frac{1}{2}(a^{ilkm} + a^{mlki}), \quad b_{i[j|k|l]m} = \frac{1}{2}(b_{ijklm} - b_{ilkjm}).$$

Операции симметрирования и альтернирования легко обобщить на большее число индексов данного типа, если помнить, что в результате этих операций необходимо получить полностью симметричный либо антисимметричный тензор. Например, для трех индексов имеем

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3!}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{jik} + a_{kji} + a_{ikj}), \tag{185}$$

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3!}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} - a_{jik} - a_{kji} - a_{ikj}). \tag{186}$$

В данном случае $a_{ijk} \neq a_{(ijk)} + a_{[ijk]}$.

Для m индексов данные операции можно записать так:

$$a_{(i_1 \ldots i_m)} = \frac{1}{m!} \sum a_{i_1 \ldots i_m}, \tag{187}$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов $i_1 \ldots i_m$, и

$$a_{[i_1 \ldots i_m]} = \frac{1}{m!} \left(\sum_1 a_{i_1 \ldots i_m} - \sum_2 a_{i_1 \ldots i_m} \right), \tag{188}$$

где первая сумма берется по четным перестановкам индексов $i_1 \ldots i_m$, а вторая по нечетным.

5.10 Метрический тензор

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные векторы пространства $\mathfrak{V}^n$.

Определение 5.45. *Скалярным произведением* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется операция, обладающая следующими свойствами:

1° инвариантности – $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{K}$,

2° билинейности – $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \mu(\vec{b} \cdot \vec{c})$ и $\vec{a} \cdot (\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \mu(\vec{a} \cdot \vec{c})$,

3° если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ для любого $\vec{a}$, то $\vec{b} = 0$, и если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ для любого $\vec{b}$, то $\vec{a} = 0$,

4° симметричности – $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Приведенные свойства буквально повторяют свойства операции свертывания, с той существенной разницей, что операция скалярного произведения определена для векторов *одного и того же пространства* $\mathfrak{V}^n$, а операция свертывания для векторов *сопряженных пространств* $\mathfrak{V}^n$ и $\mathfrak{V}_n$.

Естественно определить скалярное произведение с помощью операции свертывания. Это можно сделать, если построить линейное отображение $\mathfrak{V}^n \to \mathfrak{V}_n$, т.е. сопоставить вектору $\vec{x} \in \mathfrak{V}^n$ единственным образом вектор $\underset{\to}{x} \in \mathfrak{V}_n$.

Пусть $G: \ \mathfrak{V}^n \to \mathfrak{V}_n$ – линейное невырожденное отображение. Тогда между компонентами x^i вектора $\vec{x}$ и x_i вектора $\underset{\to}{x}$ в каждом взаимном базисе имеется связь
$$x_i = g_{ik}x^k, \tag{189}$$
причем $g = \det(g_{ik}) \neq 0$, поскольку отображение невырожденное. Определим теперь скалярное произведение как сверток одного из векторов ($\vec{a}$ или $\vec{b}$) с соответствующим вектором ($\underset{\to}{a}$ или $\underset{\to}{b}$) сопряженного пространства:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \underset{\to}{b} \rangle = \langle \underset{\to}{a}, \vec{b} \rangle. \tag{190}$$
Записывая (190) в некотором взаимном базисе и использую (189), получаем
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ik}a^i b^k. \tag{191}$$
Требование симметрии скалярного произведения приводит к условию
$$g_{ik} = g_{ki}, \tag{192}$$
т.е. симметрии g_{ik}.

Из требования инвариантности скалярного произведения для любых контравариантных векторов a^i и b^k из обратного тензорного признака вытекает, что объект $g_{(ik)}$ является ковариантным тензором, но, так как g_{ik} симметричен, то $g_{(ik)} = g_{ik}$, и следовательно g_{ik} – тензор.

Аналогичными рассуждениями можно построить скалярное произведение векторов сопряженного пространства $\mathfrak{V}_n$. Для этого зададим линейное отображение $G^{-1}: \ \mathfrak{V}_n \to \mathfrak{V}^n$. В некотором взаимном базисе это отображение будет иметь вид
$$x^i = g^{ik}x_k, \tag{193}$$
и скалярное произведение
$$\underset{\to}{a} \cdot \underset{\to}{b} = g^{ik}a_i b_k. \tag{194}$$
Аналогично доказывается, что $g^{ik} = g^{ki}$ – симметричный контравариантный тензор. Поскольку в результате последовательности отображений $\mathfrak{V}^n \to \mathfrak{V}_n \to \mathfrak{V}^n$ желательно, начиная с некоторого вектора x^i снова прийти к этому же вектору ($x^i \mapsto x_i \mapsto x^i$), то тензоры g_{ik} и g^{ik} должны быть взаимно обратными, т.е.
$$g_{ik}g^{kl} = \delta_i^{\,l}. \tag{195}$$

Определение 5.46. Тензоры g_{ik} и g^{ik} называются *фундаментальными метрическими тензорами* пространства. Пространство, в котором введен метрический тензор, называется *метрическим*.

Определение 5.47. *Нормой* вектора $\vec{x} \in \mathfrak{V}^n$ называется число

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}, \quad ||\vec{x}||^2 = g_{ik} x^i x^k. \tag{196}$$

Метрическому тензору мы можем поставить в соответствие квадратичную форму

$$g(\vec{x}, \vec{x}) = g_{ik} x^i x^k.$$

Как известно из линейной алгебры, любую квадратичную форму можно привести к нормальному виду, т.е. существует такой базис $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n$, что

$$||\vec{x}||^2 = g(\vec{x}, \vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^n)^2. \tag{197}$$

Определение 5.48. Если квадратичная форма (197) является *положительно определенной* ($k = n$), то метрическое пространство называется *евклидовым*. Мы будем обозначать евклидова пространства $\mathfrak{E}^n$.
Если квадратичная форма (197) является *знаконеопределенной* формой ($0 < k < n$), то метрическое пространство называется *псевдоевклидовым*.

Рассмотрим скалярное произведения базисных векторов:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = g_{rs} (\vec{e}_i)^r (\vec{e}_k)^s,$$

где $(\vec{e}_i)^r$ – r-я компонента вектора $\vec{e}_i$ в этом же базисе. Так как любая компонента вектора есть сверток с соответствующим вектором взаимного базиса, то

$$(\vec{e}_i)^r = \langle \vec{e}_i, \underset{\to}{e}^r \rangle = \delta_i^{\ r}.$$

Значит,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = g_{rs} \delta_i^{\ r} \delta_k^{\ s} = g_{ik}.$$

Аналогично можно показать, что $\underset{\to}{e}^i \cdot \underset{\to}{e}^k = g^{ik}$. Таким образом, если скалярное произведение векторов определено независимо от метрического тензора, то его компоненты можно найти из соотношений

$$g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k, \quad g^{ik} = \underset{\to}{e}^i \cdot \underset{\to}{e}^k. \tag{198}$$

Посредством отображения G и обратного ему отображения G^{-1} мы отождествляем пространства $\mathfrak{V}^n$ и $\mathfrak{V}_n$. Операция свертывания переходит в операцию скалярного произведения. Взаимный базис можно построить в самом пространстве

$\mathfrak{V}^n$.

Определение 5.49. Базисы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ в метрическом пространстве $\mathfrak{V}^n$ называются взаимными, если

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^k = \delta_i^k.$$

Покажем, что взаимный базис существует и может быть отождествлен со взаимным базисом $\underset{\rightarrow}{e}^1, \dots, \underset{\rightarrow}{e}^n$ пространства $\mathfrak{V}_n$. Разложим векторы $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ по базису $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Имеем

$$\vec{e}^k = h^{kl}\vec{e}_l.$$

Умножая обе части равенства на вектор $\vec{e}_i$ и учитывая взаимность базисов, получаем

$$\delta^k_{\ i} = \vec{e}^k \cdot \vec{e}_i = h^{kl}\vec{e}_l \cdot \vec{e}_i = h^{kl}g_{li}.$$

Отсюда $h^{il} = g^{il}$. Таким образом, векторы $\vec{e}^k$ существуют и могут быть найдены по формуле

$$\vec{e}^k = g^{ki}\vec{e}_i, \qquad \vec{e}_i = g_{ik}\vec{e}^k. \tag{199}$$

Несложно получить, что

$$\vec{e}^k \cdot \vec{e}^i = g^{ki},$$

а значит векторы $\vec{e}^k$ соответствуют векторам $\underset{\rightarrow}{e}^k$.

Установив соответствие между пространствами $\mathfrak{V}^n$ и $\mathfrak{V}_n$, мы получаем, что произвольный вектор пространства $\mathfrak{V}^n$ может иметь как контравариантные, так и ковариантные компоненты, которые связаны друг с другом формулами (189) и (193). Тем самым мы вводим еще одну операцию.

Определение 5.50. Операция

$$x^i = g^{ik}x_k$$

называется операцией поднятия индекса, а операция

$$x_i = g_{ik}x^k$$

называется операцией опускания индекса.

Аналогичным образом поднятие и опускание индекса можно провести для тензоров произвольной валентности. Например,

$$\Gamma_{ijk} = g_{il}\Gamma^l_{\ jk}, \quad a_i{}^j{}_k = g^{jl}a_{ilk}, \quad b_{ij} = g_{ik}g_{jl}b^{kl}$$

Рассмотрим теперь некоторый ортонормированный базис в $\mathfrak{E}^n$, то есть базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3$ для которого $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} = \delta_{ij}$. То есть метрический тензор является единичным. Таковым является и ему обратный. В этом случае различие между ковариантными и контравариантными координатами отсутствует. Условимся в этом случае писать все индексы внизу и модифицируем соответствующим образом соглашение Эйнштейна.

Рассмотрим в ортонормированном базисе некоторое преобразование векторов

$$y_i = p_{ij}x_j.$$

Наложим на преобразование следующее условие: длина вектора остается неизменной, т.е. $y_iy_i = x_ix_i$. Тогда имеем

$$x_ix_i = y_iy_i = p_{ik}p_{im}x_kx_m,$$

откуда

$$p_{ik}p_{im} = \delta_{km}. \tag{200}$$

На матричном языке данное выражение будет иметь вид

$$P^TP = E, \quad P^T = P^{-1}. \tag{201}$$

Определение 5.51. Тензор, осуществляющий преобразование, которое сохраняет длину вектора, называется ортогональным.

5.11 Тензоры в трехмерном евклидовом пространстве

В данном параграфе компоненты тензоров рассматриваются в ортонормированном базисе. Поэтому все индексы записываются внизу и соглашение о суммировании модифицируется соответствующим образом.

Простейшим тензоров второй валентности является диада $a = \vec{u} \otimes \vec{v}$. Умножение диады[12] справа на произвольный вектор $\vec{w}$ дает вектор, параллельный первому вектору диады:

$$a\vec{w} = \vec{u} \otimes \vec{v} \cdot \vec{w} = k\vec{u}, \qquad k = \vec{v} \cdot \vec{w},$$

или в индексной записи

$$a_{ij}w_j = u_iv_jw_j = ku_i.$$

Умножение диады на произвольный вектор слева дает вектор, параллельный второму вектору диады

$$a\vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v} = k\vec{v}, \qquad k = \vec{w} \cdot \vec{u}.$$

Таким образом диада (как оператор) проецирует вектор на определенное направление.

Рассмотрим сумму двух диад:

$$a = \underset{1}{\vec{u}} \otimes \underset{1}{\vec{v}} + \underset{2}{\vec{u}} \otimes \underset{2}{\vec{v}}.$$

[12]здесь имеется в виду внутреннее умножение или взаимное свертывание

Умножение такого тензора на любой вектор дает вектор

$$a\vec{w} = (\underset{1}{\vec{v}} \cdot w)\underset{1}{\vec{u}} + (\underset{2}{\vec{v}} \cdot w)\underset{2}{\vec{u}},$$

параллельный плоскости, натянутой на векторы $\underset{1}{\vec{u}}$ и $\underset{2}{\vec{u}}$. При этом считается, что векторы $\underset{1}{\vec{u}}$ и $\underset{2}{\vec{u}}$, а также $\underset{1}{\vec{v}}$ и $\underset{2}{\vec{v}}$ являются линейно независимыми. В этом случае тензор, составленный из двух диад называется *планальным*.

Самый общий тензор второй валентности в трехмерном пространстве можно представить в виде суммы трех диад

$$a = \underset{1}{\vec{u}} \otimes \underset{1}{\vec{v}} + \underset{2}{\vec{u}} \otimes \underset{2}{\vec{v}} + \underset{3}{\vec{u}} \otimes \underset{3}{\vec{v}}$$

если системы векторов $(\underset{i}{\vec{u}})$ и $(\underset{j}{\vec{u}})$ линейно независимы. Сумма четырех и более диад не дает более общего.

Определение 5.52. *Символом Леви-Чивиты* называется полностью антисимметричный объект

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{когда любые два индекса равны;} \\ +1, & \text{когда } ijk \text{ является четной перестановкой чисел } 1,\ 2,\ 3; \\ -1, & \text{когда } ijk \text{ является нечетной перестановкой чисел } 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Несложно доказать следующие свойства символа Леви-Чивиты:

1° $\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$

2° $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmr} = \begin{vmatrix} \delta_i{}^l & \delta_{im} & \delta_{ir} \\ \delta_j{}^l & \delta_{jm} & \delta_{jr} \\ \delta_k{}^l & \delta_{km} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$

3° $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{klm} = \delta_i{}^l\delta_j{}^m - \delta_i{}^m\delta_j{}^l$

4° $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{jkm} = 2\delta_i{}^m$

5° $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} = 6$

Из курса линейной алгебры известно, что векторное произведение может быть записано в виде

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Используя символ Леви-Чивиты мы можем получить

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_i\varepsilon_{ijk}a_jb_k. \tag{202}$$

Смешанное произведение тогда получается

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \tag{203}$$

Часть III
Практические занятия

Для проведения практических занятий используются в основном учебные пособия [1] и [3]. Для дополнительной работы можно использовать [2, 8, 9, 13, 14].

При подготовке к практическому занятию необходимо прочитать теоретическую часть соответствующего параграфа из [1] и [3], выучить все определения и формулировки теорем, изучить разобранные примеры.

6 План практических занятий

6.1 Векторная алгебра в тензорных обозначениях

Прочитать [1] §1.1 и §1.7.
Задачи: [1] 1.1-1.3, 1.6, 1.7, 1.9, 1.10, 1.14, 1.130, 1.132, 1.134, 1.135 а).
Домашнее задание: [1] 1.4, 1.5, 1.8, 1.131, 1.133, 1.135 б).

6.2 Векторная функция скалярного аргумента

Прочитать [1] §2.1.
Задачи: [1] 2.1, 2.5, 2.17-2.20, 2.24, 2.27, 2.28.
Домашнее задание: [1] 2.2, 2.6, 2.21, 2.22, 2.26.

6.3 Пространственные кривые

Прочитать [1] §2.2.
Задачи: [1] 2.42, 2.51, 2.55-2.58, 2.60, 2.67, 2.74, 2.50.
Домашнее задание: [1] 2.47, 2.48, 2.62, 2.68, 2.75, 2.77.

6.4 Сопровождающий трехгранник кривой. Кривизна и кручение

Прочитать [1] §2.3.
Задачи: [1] 2.108, 2.111, 2. 126, 2.139, 2.143, 2.145, 2.146.
Домашнее задание: [1] 2.114, 2.128, 2.144.

6.5 Гладкие поверхности

Прочитать [1] §2.4.
Задачи: [1] 2.156, 2.175, 2.181, 2.196, 2.201.
Домашнее задание: [1] 2.182, 2.186, 2.202.

6.6 Первая квадратичная форма поверхности

Прочитать [1] §2.5.
Задачи: [1] 2.209, 2.213, 2.221, 2.223
Домашнее задание: [1] 2.224, 2.234.

6.7 Вторая квадратичная форма поверхности

Прочитать [1] §2.6.
Задачи: [1] 2.249, 2.254, 2.262.
Домашнее задание: [1] 2.251, 2.258.

6.8 Скалярные и векторные поля

Прочитать [1] §3.1 и §3.2.
Задачи: [1] 3.4, 3.15, 3.25, 3.35, 3.45, 3.55, 3.69, 3.74, 3.75, 3.80.
Домашнее задание: [1] 3.18-3.24, 3.28, 3.42, 3.56, 3.63-3.68, 3.74, 3.79.

6.9 Оператор Гамильтона

Прочитать [1] §3.3 и §3.4.
Задачи: [1] Разобрать примеры 1-3 §3.3; 3.84, 3.85, 3.87, 3.89, 3.93, 3.134, 3.135
Домашнее задание: [1] 3.86, 3.88, 3.92, 3.136, 3.137.

6.10 Оператор Гамильтона

Прочитать [1] §3.3 и §3.4.
Задачи: [1] 3.94-3.121, 3.140, 3.150.
Домашнее задание: нерешенные в аудитории задачи из [1] 3.94-3.121.

6.11 Двойной интеграл

Прочитать [3] §11.1 и §11.2.
Задачи: [3] Примеры 11.1-11.6; 11.1, 11.3, 11.5, 11.7.
Домашнее задание: [3] 11.2, 11.4, 11.6, 11.8.

6.12 Замена переменных в двойном интеграле

Прочитать [3] §11.3.
Задачи: [3] Примеры 11.7-11.9; 11.9, 11.10, 11.12, 11.14.
Домашнее задание: [3] 11.11, 11.13, 11.15.

6.13 Тройной интеграл

Прочитать [3] §11.4.
Задачи: [3] Примеры 11.10-11.13; 11.16, 11.18, 11.20.
Домашнее задание: [3] 11.17, 11.19, 11.21.

6.14 Приложение кратных интегралов

Прочитать [3] §11.5.
Задачи: [3] Примеры 11.14-11.20; 11.22 11.25, 11.33.
Домашнее задание: [3] 11.24, 11.26, 11.28, 11.30, 11.35.

6.15 Интегралы зависящие от параметра

Прочитать [3] §-§10.1-10.4.
Задачи: [3] 10.1, 10.4, 10.6, 10.7, 10.11, 10.13.
Домашнее задание: [3] 10.2, 10.5, 10.8, 10.9, 10.12, 10.14.

6.16 Интегралы зависящие от параметра. Интегралы Эйлера

Прочитать [3] §10.5.
Задачи: [3] 10.17, 10.19 а), 10.21 а), 10.22, 10.24
Домашнее задание: [3] 10.18, 10.19 б), 10.21 б), 10.23, 10.25.

6.17 Криволинейные интегралы первого рода

Прочитать [1] §4.1 и §4.2.
Задачи: [1] 4.1, 4.12, 4.20, 4.29, 4.40, 4.44, 4.50, 4.69, 4.85.
Домашнее задание: [1] 4.2, 4.15, 4.21, 4.31, 4.43, 4.51, 4.73.

6.18 Криволинейные интегралы второго рода. Формула Грина.

Прочитать [1] §-§4.3, 4.4, 4.8.
Задачи: [1] 4.107, 4.115, 4.117, 2.128, 4.135, 4.144,4.289, 4.294, 4.300.
Домашнее задание: [1] 4.95, 4.114, 4.126, 4.132, 4.295, 4.301.

6.19 Поверхностные интегралы первого рода

Прочитать [1] §4.5 и §4.6.
Задачи: [1] 4.151, 4.170, 4.178, 4.159, 4.161, 4.165, 4.204.
Домашнее задание: [1] 4.152, 4.171, 4.160, 4.162, 4.163, 4.123.

6.20 Поверхностные интегралы второго рода

Прочитать [1] §4.7.
Задачи: [1] 4.225, 4.231, 4.240, 4.255, 4.274, 4.280.
Домашнее задание: [1] 4.226, 4.232, 4.241, 4.256, 4.271, 4.284.

6.21 Занятие 21. Формулы Стокса и Остроградского – Гаусса

Прочитать [1] §4.9 и §4.10.
Задачи: [1] 4.321, 4.325, 4.331, 4.344, 4.352, 4.359.
Домашнее задание: [1] 4.322, 4.326, 4.332, 4.345, 3.353, 4.358.

6.22 Инвариантное определение дифференциальных операций теории поля

Прочитать [1] §5.1.
Задачи: [1] 5.5, 5.6, 5.7, 5.10, 5.15, 5.17, 5.18.
Домашнее задание: [1] 5.8, 5.11, 5.16, 5.19.

6.23 Потенциальные и соленоидальные векторные поля

Прочитать [1] §5.2 и §5.3.
Задачи: [1] 5.30, 5.35, 5.42, 5.46, 5.55, 5.58, 5.59, 5.67.
Домашнее задание: [1] 5.31, 5.36, 5.43, 5.56, 5.60, 5.68.

6.24 Операции теории поля в ортогональных криволинейных системах координат

Прочитать [1] §5.5.
Задачи: [1] 5.99, 5.106, 5.111, 5.113, 5.119, 5.125, 5.131.
Домашнее задание: [1] 5.100, 5.108, 5.114, 5.120, 5.126.

6.25 Сопряженные линейные пространства. Преобразование базисов

Прочитать [1] §1.2 и §1.3.
Задачи: [1] 1.16, 1.21, 1.27, 1.31.
Домашнее задание: [1] 1.17, 1.22, 1.28, 1.32.

6.26 Определение тензора. Операции над тензорами

Прочитать [1] §1.4 и §1.5.
Задачи: [1] 1.33, 1.35, 1.37, 1.42, 1.44, 1.47, 1.48, 1.49, 1.52.
Домашнее задание: [1] 1.35, 1.39, 1.43, 1.46, 1.48, 1.53.

6.27 Операции над тензорами

Прочитать [1] §1.4 и §1.5.
Задачи: [1] 1.55-1.70, 1.71, 1.75, 1.85, 1.87, 1.102, 1.103 а) и б).
Домашнее задание: [1] 1.72, 1.76, 1.86, 1.88, 103 в) и г).

6.28 Метрические соотношения

Прочитать [1] §1.6.
Задачи: [1] примеры 2-3; 1.107, 1.109, 1.111, 1.114, 1.117.
Домашнее задание: [1] 1.108, 1.110, 1.112, 1.115, 1.118.

Часть IV
Контроль знаний

7 Контрольные работы

Учебным планом предусмотрено проведение трех контрольных работ.

7.1 Контрольная работа 1

Темы: «Основы дифференциальной геометрии» и «Скалярные и векторные поля».

Повторить: [1] §-§1.1, 1.7, 2.1-2.6, 3.1-3.4.

Типовой вариант контрольных заданий:

1. Дана кривая $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = \sqrt{2}t$.

а) Записать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $t_0 = 0$

б) Найти кручение в произвольной точке.

2. Дана поверхность $x = \operatorname{ch} u \cos v,\ y = \operatorname{ch} u \sin v,\ z = u$.

а) Найти длину кривой $3u - v = 0$ на поверхности от точки с координатой u_1 до u_2

б) Найти нормальную кривизну поверхности в точке $M_0(1, 0, 0)$ в направлении $du : dv = 1 : 1$.

3. Вычислить $\operatorname{div} \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{r})r$.

7.2 Контрольная работа 2

Тема: «Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы и интегралы, зависящие от параметра».

Повторить: [1] §-§4.1-4.10; [3] §-§10.1-10.5, 11.1-11.5.

Типовой вариант контрольных заданий:

1. Сведите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ к повторному, если область D ограничена кривыми $y = x,\ xy = 1,\ x = 0,\ x = 2$.

2. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам, если область D ограничена кривой $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, где S — часть цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ между плоскостями $z = 0;\ z = h$.

4. Вычислить различными способами $\oint\limits_{\mathcal{L}} y^2dx + x^2dy + z^2dz, \quad \mathcal{L}$: окружность

$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 16$. Обход совершается по часовой стрелке, если смотреть из точки $M(0, 0, 5)$.

5. Вычислить различными способами $\oiint\limits_S xdydz + 2ydxdz - zdxdy$, S: внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.

7.3 Контрольная работа 3

Тема: «Элементы тензорной алгебры».

Повторить: [1] §-§1.1-1.7.

Типовой вариант контрольных заданий:

1. Пусть пространству V^n сопряжено пространство линейных функций, причем $\langle \vec{x}, f \rangle = x^k f_k$. а) Найти базис $\{\underset{\to}{e}^1, \underset{\to}{e}^2\}$, взаимный базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, если $\vec{e}_1 = (4, \vec{3})$, $\vec{e}_2 = (1, 1)$. б) Найти координаты вектора $\vec{x} = (-1, 1)$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

2. Записать закон преобразования тензора a_i^{jk}.

3. Вычислить $\delta^{(i}{}_i \delta^j{}_j \delta^{k)}{}_k$, $i, j, k = \overline{1, n}$.

4. Дан ковариантный метрический тензор $(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. а) Определить, является ли пространство евклидовым или псевдоевклидовым. б) Найти контравариантный метрический тензор. в) Найти квадраты норм векторов $(x^i) = (1, 2, -1)$ и $(f_k) = (1, 0, 2)$. г) Найти бивектор $w_{ik} = x_{[i} f_{k]}$.

8 Компьютерное тестирование

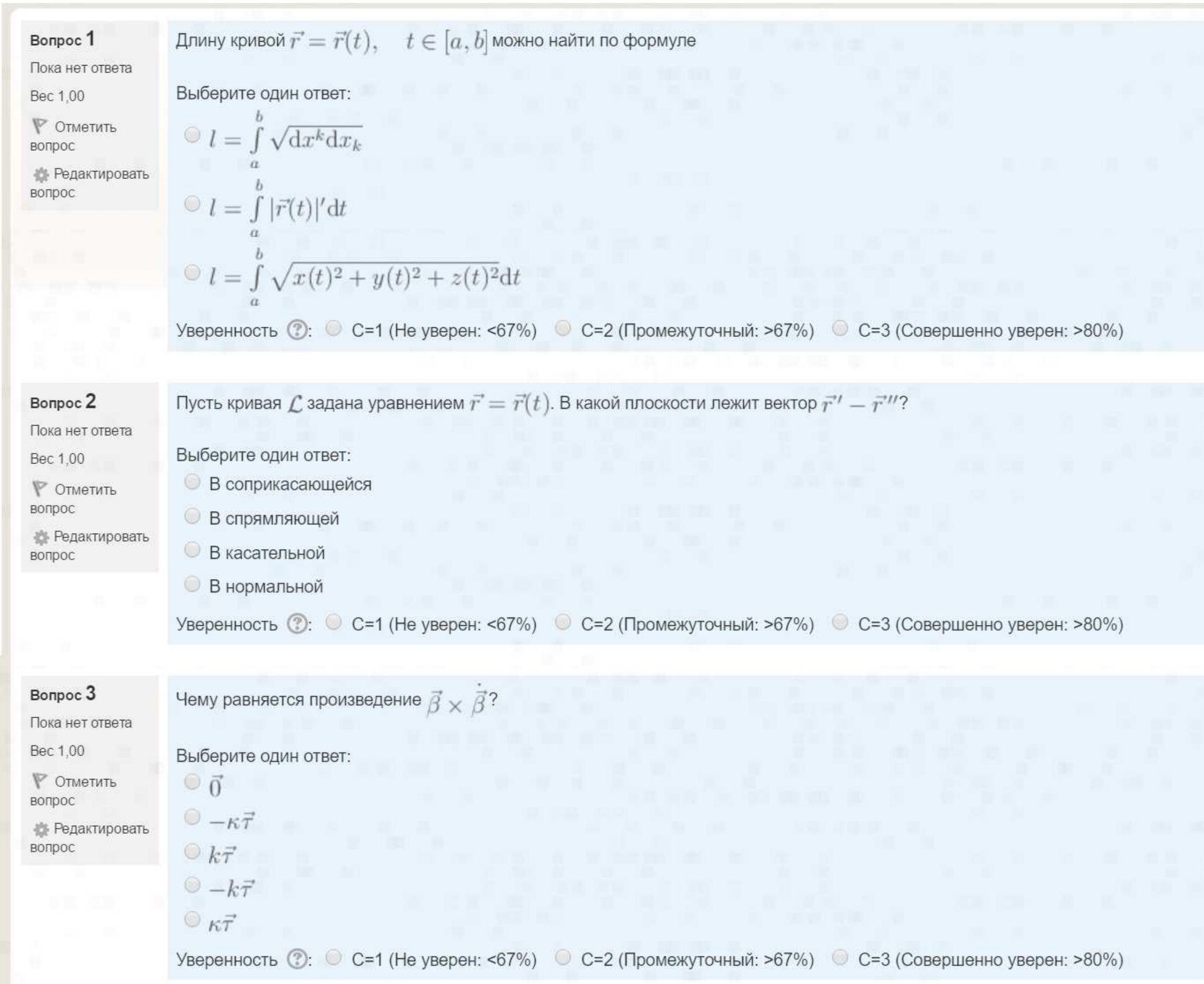
Компьютерное тестирование проводится на базе сопровождающего онлайн ресурса «Основы векторного и тензорного анализа». В течение семестре предустмотрено выполнение трех тестов по темам

1. Основы дифференциальной геометрии
2. Скалярные и векторные поля. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра. Основы теории поля.
3. Основы тензорной алгебры

Тренировочный тест может быть пройден неограниченное число раз, в то время как итоговый тест проходится один раз в строго оговоренный период времени (например день или несколько дней).

Далее приводятся примеры тренировочных тестов.

8.1 Тест 1.



Вопрос 1
Пока нет ответа
Вес 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Длину кривой $\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in [a, b]$ можно найти по формуле

Выберите один ответ:

- $l = \int\limits_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^k \mathrm{d}x_k}$
- $l = \int\limits_a^b |\vec{r}(t)|' \mathrm{d}t$
- $l = \int\limits_a^b \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \mathrm{d}t$

Уверенность: C=1 (Не уверен: <67%) C=2 (Промежуточный: >67%) C=3 (Совершенно уверен: >80%)

Вопрос 2
Пока нет ответа
Вес 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Пусть кривая $\mathcal{L}$ задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В какой плоскости лежит вектор $\vec{r}' - \vec{r}''$?

Выберите один ответ:

- В соприкасающейся
- В спрямляющей
- В касательной
- В нормальной

Уверенность: C=1 (Не уверен: <67%) C=2 (Промежуточный: >67%) C=3 (Совершенно уверен: >80%)

Вопрос 3
Пока нет ответа
Вес 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Чему равняется произведение $\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}$?

Выберите один ответ:

- $\vec{0}$
- $-\kappa\vec{\tau}$
- $k\vec{\tau}$
- $-k\vec{\tau}$
- $\kappa\vec{\tau}$

Уверенность: C=1 (Не уверен: <67%) C=2 (Промежуточный: >67%) C=3 (Совершенно уверен: >80%)

Вопрос 4
Пока нет ответа
Вес 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Направление нормали к плоскости, в которой лежит кривая $x = t^2 - t, \quad y = t^2 + t, \quad z = 2t$ задается вектором

Выберите один ответ:
- (1,1,-1)
- (1,1,1)
- (1,-1,1)
- (0,-1,0)
- (-1,1,1)

Уверенность (?): C=1 (Не уверен: <67%) C=2 (Промежуточный: >67%) C=3 (Совершенно уверен: >80%)

Вопрос 5
Пока нет ответа
Вес 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

На какой поверхности лежит кривая $x = \cos t \sin 2t, \quad y = \sin t \sin 2t, \quad z = \cos 2t$?

Выберите один ответ:
- на сфере
- на псевдосфере
- на двуполосном гиперболоиде
- на геликоиде
- на однополостном гиперболоиде

Уверенность (?): C=1 (Не уверен: <67%) C=2 (Промежуточный: >67%) C=3 (Совершенно уверен: >80%)

Вопрос 6
Пока нет ответа
Вес 5,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Найти среднюю кривизну поверхности $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v^2$ в точке $u = 1, \quad v = \frac{\pi}{3}$.
Ответ записать с точностью до сотых с учетом правил округления.

Ответ:

Уверенность (?): C=1 (Не уверен: <67%) C=2 (Промежуточный: >67%) C=3 (Совершенно уверен: >80%)

8.2 Тест 2.

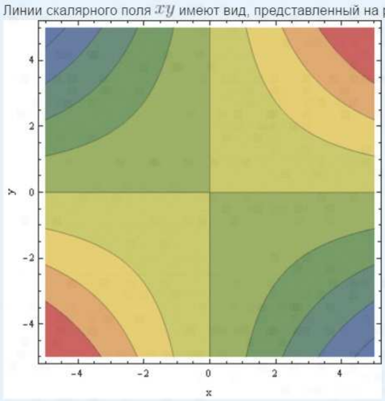
Вопрос 1
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Может ли у разных векторных полей быть один и тот же набор векторных линий?

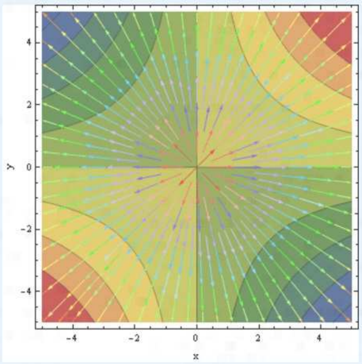
Выберите один ответ:
- Нет
- Да

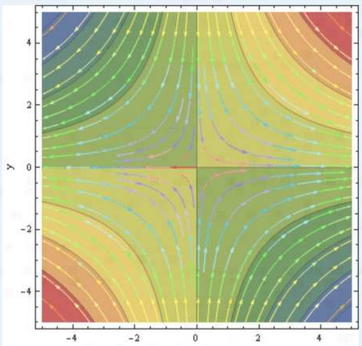
Вопрос 2
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

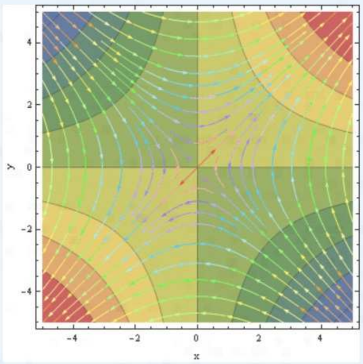
Линии скалярного поля xy имеют вид, представленный на рисунке. На каком рисунке изображены векторные линии поля $\text{grad}u$?



Выберите один ответ:







Вопрос 3
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Найти точки, в которой производная скалярного поля $u = x^3 + y^3 - 3xy$ равна нулю в любом направлении.

Выберите один или несколько ответов:

- (1,1)
- (-1,1)
- (1,-1)
- (0,0)
- (1/3,1/3)

Вопрос 4
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

В каких точках пространства роторы векторных полей $\vec{a} = xy\vec{e}_x + yz\vec{e}_y + zx\vec{e}_z$ и $\vec{a} = z\vec{e}_x + x\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ ортогональны?

Выберите один ответ:

- На плоскости $x + y - z = 0$
- На прямой $x = z, \quad z = y$
- На плоскости $z = y$
- На плоскости $z = x$
- На плоскости $x = y$
- На плоскости $x + y + z = 0$

Вопрос 5
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Вставьте пропущенные символы:

$\vec{\nabla} \times \vec{a} =$ ____ $\vec{a}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} =$ ____ $\vec{a}$

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) =$ ____ u

rot rot | grad | div grad | rot | grad div | div

Вопрос **6**
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Установите соответствие.

$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})u =$ переместите сюда один из вариантов ответа

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}u) =$ переместите сюда один из вариантов ответа

$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) =$ переместите сюда один из вариантов ответа

$\vec{\nabla}\times\vec{a} =$ переместите сюда один из вариантов ответа

- $\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}$
- $\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_j}$
- $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$
- $a_k\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}$
- $\vec{e}_i\dfrac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_k}$
- $\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$
- $\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kps}\dfrac{\partial^2 a_s}{\partial x_j \partial x_p}$

Вопрос **7**
Пока нет ответа
Балл: 3,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Установить соответствие.

$\int_{\mathcal{L}}\vec{a}(M)\cdot d\vec{r} = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y']dx$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\int_{\mathcal{L}}\vec{a}(M)\cdot d\vec{r} = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\iint_\Omega f(M)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\iint_\Omega \vec{a}(M)\cdot d\vec{S} = \iiint_G \mathrm{div}\vec{a}\,dxdydz$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\int_{\mathcal{L}} f(M)dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\int_{\mathcal{L}} f(M)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}dt$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\iint_\Omega f(M)dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\int_{\mathcal{L}}\vec{a}(M)\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{a}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'dt$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\iint_\Omega \vec{a}(M)\cdot d\vec{S} = \iint_D [P - Qx'_y - Rx'_z]dydz$ — переместите сюда один из вариантов ответа

$\iint_\Omega \vec{a}(M)\cdot d\vec{S} = \iint_D [-Py'_x + Q - Ry'_x]dxdz$ — переместите сюда один из вариантов ответа

- КРИ-1, кривая задана в полярных координатах
- КРИ-2, кривая задана функцией y=y(x)
- КРИ-2, параметризация кривой произвольна
- КРИ-1, параметризация кривой произвольна
- ПИ-2, вычисляется по формуле Остроградского--Гаусса
- КРИ-1, кривая задана натуральной параметризацией
- ПИ-1, поверхность задана функцией y=y(x,z)
- КРИ-2, вычисляется по формуле Стокса
- ПИ-1, поверхность задана функцией z=z(x,y)
- Вычисление двойного интеграла путем перехода в полярную систему координат
- ПИ-1, поверхность задана функцией x=x(y,z)
- ПИ-1, поверхность задана параметрически
- Вычисление двойного интеграла путем перехода в сферическую систему координат
- ПИ-2, поверхность задана функцией x=x(y,z)
- КРИ-2, вычисляется по формуле Грина
- ПИ-2, поверхность задана функцией y=y(x,z)
- Вычисление двойного интеграла путем перехода в цилиндрическую систему координат

Вопрос 8
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Пусть поверхность Ω перпендикулярна координатной плоскости xOy и $\bar{\Omega}$ -- часть поверхности Ω, лежащая выше плоскости xOy. Тогда

Выберите один ответ:
- $\iint_\Omega R(x,y,z)dx\,dy$ равен площади поверхности Ω
- $\iint_\Omega R(x,y,z)dx\,dy = 2\iint_{\bar{\Omega}} R(x,y,z)dx\,dy$
- $\iint_\Omega R(x,y,z)dx\,dy = 0$
- Нет правильных ответов

Вопрос 9
Пока нет ответа
Балл: 2,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Каких условий достаточно для применения формулы Остроградского--Гаусса?

Выберите один или несколько ответов:
- a. Поверхность ограничивает объемно односвязную область
- b. Дивергенция векторного поля существует в области G, ограниченной поверхностью интегрирования
- c. Поверхность незамкнутая
- d. Дивергенция векторного поля существует в окрестности поверхности интегрирования
- e. Ориентация поверхности внешняя
- f. Векторное поле непрерывно

8.3 Тест 3.

Вопрос 1
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Множество всех допустимых матриц перехода является

Выберите один ответ:
- тензорным пространством
- просто множеством
- группой
- линейным пространством

Вопрос 2
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Компоненты тензора $a^i{}_{jk}$ преобразуются по закону

Выберите один ответ:
- $a^i{}_{jk} = A^{i'}{}_i A_{j'}{}^j A_{k'}{}^k a^{i'}{}_{j'k'}$
- $a^{i'}{}_{j'k'} = A^{i'}{}_i A_{j'}{}^j A_{k'}{}^k a^i{}_{kj}$
- $a^{i'}{}_{j'k'} = A^{i'}{}_k A_{j'}{}^i A_{k'}{}^j a^k{}_{ji}$
- $a^{i'}{}_{j'k'} = A^{i'}{}_k A_{j'}{}^i A_{k'}{}^j a^k{}_{ij}$
- $a^{i'}{}_{j'k'} = A^{i'}{}_k A_{j'}{}^i A_{k'}{}^j a^i{}_{jk}$

Вопрос 3
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Пусть a и b - тензоры соответствующей валентности и типа. Какие из приведенных величин являются тензорами?

Выберите один или несколько ответов:
- $c^i{}_k{}^l = b^l{}_k a^i + b^i{}_k a^l$
- $c^i{}_k = b^i{}_r b^r{}_k$
- $c^{ik} = a^i + b^k$
- $c^i{}_{kl} = a^i + b^i{}_{kl}$

Вопрос 4
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Пусть $a^i{}_{jk} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 4 & 8 \\ -3 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right)$
Тогда величина $a^i{}_{ij}$ равна

Выберите один ответ:
- (10, 2)
- (4, 11)
- (1, 2)
- (-8, 7)
- (6, 9)

Вопрос 5
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Пусть тензор $a^i{}_j$ в некотором базисе имеет компоненты $(a^i{}_j) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Вычислить $\delta^{(i}{}_j a^{k)}{}_i$.

Выберите один ответ:

- $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Вопрос 6
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Сколько независимых компонент имеет тензор $a_{[prs]}$, $\quad (p, r, s = 1, 2, 3)$?

Выберите один ответ:

- 0
- 27
- 1
- 3
- 6

Вопрос 7
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базис пространства E^2, причем $|\vec{e}_1| = \sqrt{2}$ и $|\vec{e}_2| = 1$, а угол между ними составляет 120 градусов. Найти скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ если известно, что их контравариантные компоненты в данном базисе равны $(x^i) = (-1, \sqrt{2})$, а $(y^i) = (1, \sqrt{2})$.

Ответ:

Вопрос 8
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

В некотором базисе ковариантные компоненты метрического тензора равны $(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти квадрат нормы вектора $(x^i) = (3, 2, 1)$.

Ответ:

Вопрос 9
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Пусть ковариантные компоненты метрического тензора равны $(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\delta^i{}_j$ -- единичный тензор. Тогда ковариантные компоненты δ_{kj} равны

Выберите один ответ:

- $(\delta_{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $(\delta_{kj}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dots \end{pmatrix}$ (\delta_{kj})=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \end{pmatrix}
- $(\delta_{kj}) = \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$
- $(\delta_{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$

Вопрос 10
Пока нет ответа
Балл: 1,00
Отметить вопрос
Редактировать вопрос

Решением тензорного уравнения $\varepsilon_{ijk} x_j = a_{ik}$, если $(a_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, является

Выберите один ответ:

- решения не существует
- $(-1, 0, 2)$
- $(-2, 0, 1)$
- $(1, 0, 2)$

9 Зачет

На зачете предлагается ответить на 5 вопросов и решить три задачи.

9.1 Вопросы

1. Векторная функция скалярного аргумента
2. Годограф векторной функции
3. Предел векторной функции
4. Производная векторной функции
5. Формула Тейлора для векторной функции
6. Теорема о пределе суммы и произведений векторных функций
7. Теорема о дифференцировании суммы и произведений векторных функций
8. Скорость вращения векторной функции
9. Лемма о производной векторной функции с постоянным модулем
10. Лемма о скорости вращения векторной функции
11. Простая замкнутая кривая
12. Гладкая кривая
13. Кусочно-гладкая кривая
14. Регулярная кривая
15. Спрямляемая кривая. Длина кривой
16. Достаточное условие спрямляемости
17. Натуральная параметризация кривой
18. Касательная к кривой
19. Главная нормаль к кривой
20. Бинормаль к кривой
21. Соприкасающаяся плоскость к кривой
22. Нормальная плоскость к кривой

23. Спрямляющая плоскость к кривой
24. Сопровождающая окружность
25. Радиус и центр кривизны кривой
26. Кривизна кривой
27. Кручение кривой
28. Гладкие поверхности
29. Нормаль к поверхности
30. Касательная плоскость к поверхности
31. Первая квадратичная форма поверхности
32. Длина кривой на поверхности
33. Угол между кривыми на поверхности
34. Вычисление площади поверхности, заданной параметрически
35. Вычисление площади поверхности, заданной явно
36. Вторая квадратичная форма поверхности
37. Классификация точек на поверхности
38. Нормальная кривизна кривой
39. Нормальное сечение
40. Главные кривизны поверхности
41. Главные направления на поверхности
42. Асимптотические направления на поверхности
43. Средняя кривизна поверхности
44. Гауссова кривизна поверхности
45. Скалярное поле
46. Поверхности уровня скалярного поля
47. Дифференцируемость скалярного поля
48. Градиент скалярного поля

49. Производная скалярного поля по направлению
50. Векторное поле
51. Векторные линии
52. Дифференцируемость векторного поля
53. Производная векторного поля по направлению
54. Дивергенция векторного поля
55. Ротор векторного поля
56. Оператор Гамильтона
57. Оператор Лапласа
58. Ортогональные криволинейные системы координат
59. Координатные линии
60. Координатные поверхности
61. Система референции
62. Натуральный базис
63. Физический базис
64. Коэффициенты Ламэ
65. Связь декартовых координат с цилиндрическими
66. Связь декартовых координат со сферическими
67. Площадь плоской фигуры
68. Критерий квадрируемости
69. Множество площади нуль
70. Достаточный признак квадрируемости плоской области
71. Понятие двойного интеграла
72. Условия существования двойного интеграла
73. Область, элементарная относительно оси
74. Сведение двойного интеграла к повторным

75. Замена переменных в двойном интеграле
76. Понятие тройного интеграла
77. Сведение тройного интеграла к повторным
78. Замена переменных в тройном интеграле
79. Несобственный интеграл
80. Собственный интеграл, зависящий от параметра. Свойства
81. Несобственный интеграл, зависящий от параметра. Свойства
82. Бета-функция
83. Гамма-функция
84. Криволинейный интеграл первого рода
85. Приведение криволинейного интеграла первого рода к определенному
86. Криволинейный интеграл второго рода
87. Приведение криволинейного интеграла второго рода к определенному
88. Односвязная область
89. Поверхностные интегралы первого рода
90. Приведение поверхностного интеграла первого рода к двойному для поверхности, заданной параметрически.
91. Приведение поверхностного интеграла первого рода к двойному для поверхности, заданной явно.
92. Поверхностные интегралы второго рода
93. Приведение поверхностного интеграла второго рода к двойному для поверхности, заданной параметрически.
94. Приведение поверхностного интеграла второго рода к двойному для поверхности, заданной явно.
95. Объемно-односвязная область
96. Поверхностно-односвязная область
97. Инвариантное определение дивергенции векторного поля

98. Инвариантное определение ротора векторного поля
99. Инвариантное определение градиента скалярного поля
100. Потенциальные векторные поля
101. Соленоидальные векторные поля
102. Вычисление градиента в ортогональных криволинейных системах координат
103. Вычисление дивергенции в ортогональных криволинейных системах координат
104. Вычисление ротора в ортогональных криволинейных системах координат
105. Оператор Лапласа в ортогональных криволинейных системах координат
106. Формула Грина (теорема)
107. Формула Стокса (теорема)
108. Формула Остроградского–Гаусса (теорема)
109. Критерий потенциальности (теорема)
110. Критерий соленоидальности (теорема)
111. Сверток
112. Сопряженные линейные пространства
113. Взаимные базисы
114. Матрица перехода от “старого” базиса к “новому”
115. Закон преобразования контравариантного вектора
116. Закон преобразования ковариантного вектора
117. Тензорное произведение линейных пространств
118. Алгебраическое определение тензора
119. Полилинейная форма
120. Операция сложения тензоров
121. Операция умножения тензоров

122. Операция свертывания тензоров

123. Операция взаимного свертывания тензоров

124. Прямой тензорный признак

125. Обратный тензорный признак

126. Тензор, симметричный по группе индексов

127. Тензор, антисимметричный по группе индексов

128. Операция симметрирования тензора

129. Операция альтернирования тензора

130. Метрический тензор

131. Евклидово и псевдоевклидово пространство

132. Операция поднятия индекса

133. Операция опускания индекса

134. Символ Леви-Чивиты.

135. Индексная запись векторного произведения в ПДСК

136. Индексная запись смешанного произведения в ПДСК

9.2 Задачи

1. Составить параметрическое уравнение кривой:
   - $x^2 + y^2 = 2y$;
   - $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$;
   - $x^2 + y^2 = 1,\ x + y = z$;
   - $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + z^2 = 3$.

2. Записать уравнения элементов сопровождающего трехгранника кривой и найти кривизну и кручение кривой в точке M:
   - $x = t,\ y = t^3,\ z = t^2 + 4, \quad M(1, 1, 5)$;
   - $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t, \quad M(0, 1, \pi/2)$.

3. Найти направляющий вектор нормали к поверхности в точке M:

- $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u, \quad M(0,1,1);$
- $x = u+v,\ y = u-v,\ z = uv, \quad M(3,1,2).$

4. Найти коэффициенты первой квадратичной формы поверхности:

   - $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u+v;$
   - $x = \operatorname{sh} u\cos v,\ y = \operatorname{sh} u\sin v,\ z = \operatorname{ch} u.$

5. Найти градиент скалярного поля u:

   - $u = \ln(x^2+y^2+z^2);$
   - $u = (x-y)(y-z)(z-x).$

6. Найти производную скалярного поля u в точке M по направлению вектора $\vec{a}$:

   - $u = xy^2+xz^2-2, \quad M(1,1,-1), \quad \vec{a} = (1,-2,4);$
   - $u = \ln(xy+yz+xz), \quad M(0,1,1), \quad \vec{a} = (1,1,1).$

7. Пусть $c = const$. Доказать

   - $\operatorname{grad} cu = c\operatorname{grad} u;$
   - $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v;$
   - $\operatorname{grad}(uv) = u\operatorname{grad} v + v\operatorname{grad} u;$
   - $\operatorname{div} c\vec{a} = c\operatorname{div}\vec{a};$
   - $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b};$
   - $\operatorname{rot} c\vec{a} = c\operatorname{rot}\vec{a};$
   - $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}.$

8. Вычислить дивергенцию и ротор векторных полей:

   - $\vec{a} = (x-y)(y-z)\vec{i} + (y-z)(z-x)\vec{j} + (x-z)(x-y)\vec{k};$
   - $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}.$

9. Пусть $\vec{r}$ – радиус вектор, r – его модуль, $\vec{a}$ – постоянное векторное поле. Вычислить

   - $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r};$
   - $\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r});$
   - $\operatorname{div}\vec{r};$
   - $\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r^3};$

- $\operatorname{rot} \vec{r}$;
- $\operatorname{rot} \dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

10. Вычислить двойной интеграл по области, ограниченной заданными линиями:

    - $\iint\limits_D x^2y^2dxdy,\ x = y^2,\ x = 1.$
    - $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy,\ \ y = x,\ y = \ x + a,\ y = a,\ y = 3a.$

11. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

    - $\int_0^3 dx \int_{(x-1)^2}^{x+1} f(x, y)dy$
    - $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)dx.$

12. Выразить сумму повторных интегралов через один повторный интеграл, изменив порядок интегрирования:

    - $\int_0^1 dy \int_{y/2}^{2y} f(x, y)dx + \int_1^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x, y)dx.$
    - $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} dx \int_1^{2x} f(x, y)dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dx \int_1^{1/x} f(x, y)dy.$

13. Вычислить интеграл, изменив порядок интегрирования:

    - $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy.$
    - $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{1} \left(1 - x^2\right)^{\alpha} dx,\ \alpha > 0.$

14. В интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного:

    - $D = \left\{(x - 1)^2 + y^2 \leqslant 4\right\}.$
    - $D = \left\{a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2ay,\ a > 0\right\}.$
    - $D = \left\{x^2 + y^2 \leqslant 2,\ y \leqslant x^2,\ x \geqslant 0\right\}.$

15. Вычислить интеграл, перейдя к полярным координатам:

    - $\iint\limits_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 dxdy,\ D = \left\{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2x\right\}.$
    - $\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{y}dy.$

16. Вычислить интеграл с помощью подходящей замены:

- $\iint\limits_D y^2 dxdy,\ D = \left\{\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{3}{x},\ 0 < x \leqslant y \leqslant 2x\right\}.$
- $\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy,\ D = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$

17. Вычислить интеграл:

- $\int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} x^3 y^2 z dz.$
- $\iiint\limits_E y dxdydz$, где E — пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + y + z = 4.$
- $\iiint\limits_E (x + y + z) dxdydz,\ E = \left\{x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x + y + z \leqslant 2,\ z \geqslant 0\right\}.$
- $\iiint\limits_E (z + y - x) dxdydz,\ E = \left\{\sqrt{2}z \geqslant x^2 + y^2,\ z\sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$
- $\iiint\limits_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz,\ E = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z\right\}.$
- $\iiint\limits_E \frac{x}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^2} dxdydz,\ E = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0\right\}.$

18. Вычислить

- $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx,$
- $\int\limits_0^{a} \dfrac{x^5 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ (a > 0)$
- $\int\limits_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\, dx,\ (n \in \mathbb{N})$
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 9}$

19. Исследовать сходимость интегралов:

- $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1 + x^2}}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$
- $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln^2 x}$
- $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1)} dx$
- $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^3}}$

20. Вычислить

- $\int\limits_{\mathcal{L}}(x+y)\,\mathrm{d}\,l$, где $\mathcal{L}$ граница треугольника с вершинами $A(1,0),\ B(0,1),\ C(0,0)$.
- $\int\limits_{\mathcal{L}} x^2\,\mathrm{d}\,l, \quad \mathcal{L}:$ верхняя половина окружности $x^2+y^2=a^2$.
- $\int\limits_{\mathcal{L}} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}\,l, \quad \mathcal{L}:$ часть спирали Архимеда $r=2\varphi$, заключенная внутри круга $r \leqslant a$.
- $\int\limits_{\mathcal{L}}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\,l, \quad \mathcal{L}:\ x=a(t\cos t-\sin t),\ y=a(t\sin t+\cos t),\ z=ht^2,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

21. Вычислить

- $\int\limits_{\mathcal{L}} y\,\mathrm{d}\,x-(y+x^2)\,\mathrm{d}\,y,\ \mathcal{L}:\ y=2x-x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 2.$
- $\oint\limits_{\mathcal{L}} z\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y+y\,\mathrm{d}\,z,\ \mathcal{L}: x^2+y^2=4,\ z=0.$
- $\oint\limits_{\mathcal{L}} y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y+z\,\mathrm{d}\,z,\ \mathcal{L}: x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ z\geqslant 0.$
- $\oint\limits_{\mathcal{L}} y^2\,\mathrm{d}\,x+z^2\,\mathrm{d}\,y,\ \mathcal{L}: x^2+y^2=9,\ 3y+4z=5.$

22. Вычислить

- $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dS, \quad \Omega: x^2+y^2+z^2=a^2,\ z>0;$
- $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dS, \quad \Omega: x^2+y^2=z^2,\ 0<z<1;$
- $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dS, \quad \Omega: x^2+y^2=z,\ 0<z<1;$
- $\iint\limits_{\Omega}(x+y+z)dS, \quad \Omega: x+y+z=1,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

23. Вычислить

- $\iint\limits_{\Omega}\vec{r}\cdot d\vec{S}, \quad \Omega: x^2+y^2+z^2=a^2;$
- $\iint\limits_{\Omega} ydydz-xdzdx+cos(x+y+z)dxdy, \quad \Omega: x^2+y^2=1,\ 0<z<1;$
- $\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy, \quad \Omega: x+y+z=1,\ x>0,\ y>0,\ z>0;$
- $\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy, \quad \Omega: x^2+y^2=z,\ 0<z<1.$

24. Вычислить по формуле Стокса:

- $\oint\limits_{\mathcal{L}} z^2dx - y^2dy + x^2dz, \quad \mathcal{L}:\ z = 3(x^2+y^2)+1,\ z=4;$
- $\oint\limits_{\mathcal{L}} z^2dx + ydy - 2xydz, \quad \mathcal{L}:\ y = \sqrt{x^2+z^2},\ y=3.$

25. Вычислить по формуле Остроградского–Гаусса:

- $\oiint\limits_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, S: внешняя сторона поверхности тела $x+y+z \leqslant 2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$
- $\oiint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, S: внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2.$
- $\oiint\limits_S xdydz + xzdxdz + ydxdy$, S: внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \leqslant 4 - z,\ z \geqslant 0.$ $\oiint\limits_S xdydz + 2ydxdz - zdxdy$, S: внешняя сторона поверхности тела $x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}.$

26. Найти коэффициенты Ламэ и физический базис в цилиндрической и сферической системах координат.

27. Вычислить $\delta_i{}^j \delta_j{}^k \delta_k{}^l \delta_l{}^m \delta_m{}^i, \quad i,j,k,l,m = \overline{1,n}.$

28. Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базис пространства $\mathfrak{V}^2$. Найти компоненты тензора $T = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \otimes (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \otimes (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$.

29. Выписать закон преобразования и указать валентность величины $a^i{}_k b_i c^j$.

30. Выписать закон преобразования и указать валентность величины $a_{ik} b^{ki}$.

31. Пусть в некотором базисе $a^i = \{1, -1\}$ и $b_i = \{-1, 1\}$. Выпишите матрицу тензора $T^i_{\ k} = a^i b_k$ в этом же базисе.

32. Даны тензор $a_i^{\,j}$, контравариантный вектор x^k и ковариантный вектор y_k. Путем операций свертывания и взаимного свертывания образовать все возможные тензоры.

33. Пусть в некотором базисе $u^i = \{1, -3, 1\},\ v^i = \{3, 0, 1\}$. Просимметрируйте тензор $u^i v^k$.

34. Пусть в некотором базисе

$$a^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите $a^{(ik)}$ и $a^{[ik]}$.

35. Доказать, что

$$a^{(i}{}_{[j}b^{k)}{}_{l]} = \frac{1}{4}(a^i{}_j b^k{}_m - a^i{}_m b^k{}_j + a^k{}_j b^i{}_m - a^k{}_m b^i{}_j).$$

36. Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базис пространства $\mathfrak{E}^2$, причем норма базисных векторов равна единице, а угол между ними составляет 30 градусов. Найти a_i, если известно, что $a^i = \{1, 1\}$.

37. Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{E}^3$. Показать, что $\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k$.

38. Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базис пространства $\mathfrak{V}^2$. Найти компоненты тензора $\vec{e}_1 \otimes (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \otimes \vec{e}_2$.

39. Вычислить

$$\begin{vmatrix} \delta_i{}^k & \delta_i{}^i & \delta_i{}^j \\ \delta_j{}^k & \delta_j{}^i & \delta_j{}^j \\ \delta_k{}^k & \delta_k{}^i & \delta_k{}^j \end{vmatrix}.$$

40. Разложить на множители $a^i{}_j b^k{}_i - a^k{}_j - b^k{}_j + \delta^k{}_j$.

41. Пусть $g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ – метрический тензор пространства $\mathfrak{E}^2$. Найти v^k, если $v_i = \{1, 1\}$.

42. Пусть g_{ik} – метрический тензор пространства $\mathfrak{E}^n$. У тензора $a^{ij}{}_r{}^l$ поднять третий индекс и опустить второй и четвертый.

43. Пусть $g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – метрический тензор, а $x^i = \{1, 2\}$. Найти квадрат нормы вектора $\vec{x}$: $||\vec{x}||^2$.

44. Пусть $g_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – метрический тензор пространства Минковского, а $x^i = \{1, 1\},\ y^i = \{-1, 1\}$. Найти скалярное произведение $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

45. Пусть $a^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $v_k = \varepsilon_{ijk} a^{ij}$.

46. Вычислить в ортонормированном базисе $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mri}$.

47. Пусть $x^i = \{1, 2, 3\}$. Вычислить $\varepsilon_{ijk} x^i x^k$.

10 Экзамен

Экзаменационный билет как правило содержит две задачи и теоретический вопрос. Задачи берутся из учебных пособий [1] и [3]. Список теоретических вопросов с кратким планом ответа приведен ниже.

10.1 Экзаменационные вопросы

1. **Векторная функция скалярного аргумента.**

   Определение. Предел. Непрерывность. Доказательство одного из свойств непрерывных функций. Дифференцируемость. Доказательство одного из свойств дифференцируемости функций. Формула Тейлора. Интеграл Римана.Лемма о направлении производной векторной функции с постоянным модулем. Лемма о скорости вращения единичной векторной функции. Доказательства.

2. **Две леммы о векторной функции скалярного аргумента**

3. **Кривые в пространстве**

   Параметрическое и векторное задание. Кривая как линия пересечение двух поверхностей. Гладкие и регулярные кривые.

4. **Спрямляемые кривые. Длина Кривой**

   Спрямляемые кривые. Определение длины кривой и ее свойства. Достаточное условие спрямляемости (доказать). Натуральный параметр.

5. **Сопровождающий трехгранник кривой.**

   Касательная, нормальная плоскость. Соприкасающаяся плоскость. Доказательство теоремы о существовании соприкасающейся плоскости. Главная нормаль, бинормаль, спрямляющая плоскость. Единичные векторы касательной, бинормали и нормали кривой заданной произвольной и натуральной параметризацей. Уравнения элементов сопровождающего трехгранника кривой.

6. **Соприкасающаяся окружность. Кривизна и кручение кривой.**

   Соприкасающаяся окружность. Определение кривизны кривой. Центр кривизны, радиус кривизны. Определение кручения кривой. Эволюта плоской кривой.

7. **Формулы Френе.**

   Единичные векторы касательной, бинормали и главной нормали. Вывод формул Френе.

8. **Вычисление кривизны и кручения.**

   Получение формул для вычисления кривизны и кручения кривой, когда та задана натуральной и произвольной параметризациями.

9. **Гладкие поверхности. Касательная плоскость. Нормаль.**

   Определение гладких поверхностей. Параметризация, координатные линии на поверхности. Явное и неявное задание поверхности. Образ гладкой кривой. Касательная плоскость. Нормаль. Нахождение нормали при параметрическом, неявном и явном задании поверхности.

10. **Первая квадратичная форма поверхности и ее применение.**

    Первая квадратичная форма поверхности. Нахождение длины кривой на поверхности и угла между кривыми на поверхности. Площадь поверхности.

11. **Вторая квадратичная форма поверхности.**

    Вторая квадратичная форма поверхности. Классификация точек кривой на поверхности.

12. **Кривизны поверхности.**

    Нормальное сечение и нормальная кривизна. Главные кривизны, главные направления. Формула Эйлера. Средняя и гауссова кривизны.

13. **Криволинейные системы координат.**

    Общее определение криволинейных систем координат. Координатные линии и поверхности. Ортогональные системы координат. Система референции. Натуральный базис, физический базис. Коэффициенты Ламе. Цилиндрическая и сферическая системы координат.

14. **Дифференцирование скалярного поля.**

    Определение скалярного поля. Производная скалярного поля. Градиент. Производная по направлению. Поверхности уровня. Свойства градиента.

15. **Дифференцирование векторного поля.**

    Определение векторного поля. Производная векторного поля. Дивергенция и ротор. Линии поля.

16. **Оператор Гамильтона. Дифференцирование произведений.**

    Определение оператора Гамильтона. Формальный метод раскрытия выражений, содержащих оператор Гамильтона (со стрелочками). Вычисления в прямоугольной декартовой системе координат.

17. **Дифференциальные операции второго порядка над полями.**

    Определить возможные операции второго порядка. Оператор Лапласа. Раскрытие операций второго порядка.

18. **Квадрируемость плоской фигуры. Площадь**

    Определение квадрируемости, площади плоской фигуры. Критерий квадрируемости (доказать). Множество площади нуль. Достаточный признак квадрируемости.

19. **Двойной интеграл**

    Определение двойного интеграла. Критерий интегрируемости. Доказательство интегрируемости непрерывной и кусочно-непрерывной функций. Свойства.

20. **Вычисление двойного интеграла**

    Теорема о вычислении двойного интеграла по прямоугольнику с доказательством. Теорема о вычислении двойного интеграла по элементарной области с доказательством.

21. **Замена переменных в двойном интеграле**

    Теорема о вычислении площади (без доказательства). Формула замены переменной (с доказательством).

22. **Тройной интеграл**

    Определение тройного интеграла. Критерий интегрируемости. Свойства. Вычисление. Замена переменных.

23. **Собственные интегралы, зависящие от параметра**

    Определение. Теоремы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости.

24. **Несобственные интегралы, зависящие от параметра**

    Определение, сходимость, равномерная сходимость. Теоремы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости. Приложения

25. **Интегралы Эйлера**

    Определение бета- и гамма- функций. Их область определения, непрерывность и дифференцируемость. Свойства.

26. **Криволинейный интеграл первого рода.**

    Определение. Сведение к определенному интегралу. Свойства. Физический смысл.

27. **Криволинейный интеграл второго рода.**

    Ориентация кривой. Определение КРИ 2-го рода. Сведение к определенному интегралу. Свойства. Физический смысл.

28. **Формула Грина.**

    Определение плоской односвязной области. Положительная ориентация плоского контура. Формулировка и доказательство теоремы Грина.

29. **Поверхностный интеграл первого рода.**

    Определение. Сведение к двойному интегралу. Свойства. Физический смысл.

30. **Поверхностный интеграл второго рода.**

    Двухсторонние поверхности. Определение ПИ-2. Сведение к двойному интегралу Свойства. Физический смысл.

31. **Теорема Стокса.**

    Ориентация поверхности. Теорема Стокса, формулировка и доказательство.

32. **Теорема Остроградского-Гаусса.**

    Объемно-односвязные области. Теорема Остроградского-Гаусса, формулировка и доказательство.

33. **Инвариантное определение операций** $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \vec{a}$, $\operatorname{rot} \vec{a}$**.**
    Инвариантное определение ротора векторного поля. Инвариантное определение дивергенции векторного поля. Инвариантное определение градиента скалярного поля. Инвариантное определение оператора Гамильтона.

34. **Потенциальные векторные поля.**

    Определение. Поверхностно односвязные области. Критерий потенциальности, формулировка и доказательство. Вычисление потенциала.

35. **Соленоидальные векторные поля.**

    Определение. Критерий соленоидальности, формулировка и доказательство. Вычисление векторного потенциала.

36. **Градиент в криволинейных координатах.**

    Градиент в криволинейных координатах. Градиент в цилиндрических и сферических координатах.

37. **Дивергенция в криволинейных координатах**

    Получить дивергенцию в криволинейных координатах. Дивергенция в цилиндрических и сферических координатах.

38. **Ротор в криволинейных координатах.**

    Получить ротор в криволинейных координатах. Ротор в цилиндрических и сферических координатах.

39. **Оператор Лапласа в криволинейных координатах**

    Запись градиента в криволинейных координатах. Запись дивергенции в криволинейных координатах. Оператор Лапласа в криволинейных координатах. Оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах.

40. **Сопряженные линейные пространства.**

    Сопряженные линейные пространства. Взаимные базисы. Вычисление компонент векторов. Пространство линейных функций.

41. **Преобразование базисов.**

    Базисы. Переход от “старого” базиса к “новому” базису исходного пространства. Матрица перехода. Прямое и обратное преобразование. Преобразование базисов сопряженного пространства.

42. **Тензорное произведение линейных пространств.**

    Тензорное произведение двух линейных пространств. Базис тензорного произведения. Преобразование базиса. Тензоры второй валентности.

43. **Тензоры высшей валентности.**

    Тензорное произведение двух линейных пространств. Тензорное произведение произвольного числа линейных пространств. Базис тензорного произведения. Преобразование базиса. Тензоры высшей валентности. Полилинейная форма. Связь с тензорами.

44. **Алгебраическое определение тензора. Операции над тензорами.**

    Алгебраическое определение тензора. Операции сложения, умножения, свертывания и взаимного свертывания. Симметрирование и альтернирование. Прямой и обратный тензорные признаки.

45. **Метрические соотношения.**

    Скалярное произведение. Метрический тензор. Норма вектора. Евклидовы и псевдоевклидовы пространства. Операции поднятия и опускания индекса.

46. **Символ Леви-Чивиты.**

    Символ Леви-Чивиты. Свойства. Определители. Векторное произведение. Запись векторных операций в тензорных обозначениях.