

Лабораторная работа 1.2

Исследование теплового шума и измерение постоянной Больцмана

Составители: А. С. Золкин, канд. физ.-мат. наук, доцент
(Новосибирский государственный университет),
А. В. Боженко, канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. (Институт
ядерной физики СО РАН, Новосибирский государственный
университет),
Ю. Г. Леоненко, канд. физ.-мат. наук (Институт теплофизики СО
РАН, Новосибирский государственный университет).
Рецензенты: А. А. Васильев, д-р физ.-мат. наук, профессор
(Институт гидродинамики СО РАН, Новосибирский
государственный университет)

Оглавление

1. Введение.....	2
2. Теоретическая часть.....	3
2.1. Флуктуации.....	4
2.2. Шумы.....	4
2.3. Методы описания шумов.....	8
3. Экспериментальная часть.....	9
3.1. Описание метода.....	9
3.2. Описание установки.....	10
3.3. Порядок выполнения работы.....	13
3.4. Контрольные вопросы.....	15
4. Приложения.....	
4.1. Приложение А. Вычисление среднеквадратичного напряжения тепловых флуктуаций в RC -цепи.....	17
4.2. Приложение В. Теорема Найквиста для электрических цепей.....	19
4.3. Приложение С. Зависимость электросопротивления вольфрама от температуры.....	21
4.4. Приложение Д. Альтернативный вывод теоремы Найквиста.....	21
5. Благодарности.....	26
6. Библиографический список.....	26

Лабораторная работа 1.2

Исследование теплового шума измерение постоянной Больцмана

Цель работы – познакомиться с основными понятиями, относящимися к шумам, экспериментально исследовать тепловой шум в проводниках (вольфраме) при различной температуре и определить постоянную Больцмана из формулы Найквиста.

Оборудование: измерительный блок с усилителем, источник постоянного тока, миллиамперметр, вольтметр, осциллограф, квадратичный вольтметр, генератор высокой частоты.

1. Введение

Все окружающие нас тела образованы огромным числом молекул, а их макросостояния могут быть описаны несколькими макроскопическими параметрами, которые характеризуют свойства системы в большом масштабе. В качестве примера можно привести такие параметры, как давление и температура. Однако какой бы природы ни был тот или иной макроскопический параметр, он описывает внутреннее состояние системы с точностью до флуктуаций.

Флуктуации являются причиной многих физических явлений (броуновское движение, тепловой шум в проводниках) и имеют принципиальное значение для установления границ применимости термодинамических понятий и закономерностей, а также пределов чувствительности приборов. В физике и электротехнике часто сталкиваются с флуктуирующими сигналами, которые возникают в электрических цепях, приборах, измерительных системах.

Электрическими флуктуациями, или «шумами» называются случайные изменения потенциалов, токов и зарядов в электрических цепях.

Шумы представляют собой важную проблему в науке и технике, поскольку они определяют нижние пределы как в отношении точности измерений, так и в отношении величины

электрических сигналов, которые могут быть обработаны тем или иным прибором. Для того чтобы определять эти пределы, необходимо знать интенсивность источника шума, уметь минимизировать отношение шума к сигналу при измерении и научиться измерять эти шумы.

2. Теоретическая часть

2.1. Флуктуации

Флуктуациями (от лат. fluctuation – колебания) называются случайные отклонения физической величины от ее среднего значения.

Мерой флуктуации физической величины M является средняя величина квадрата разности $\Delta M = (M - \overline{M})$, которая называется квадратичной флуктуацией:

$$\overline{\Delta M^2} = \overline{(M - \overline{M})^2} = \overline{M^2} - (\overline{M})^2.$$

Если имеется тело, состоящее из N одинаковых независимых частей, и физическая величина M , характеризующая состояние тела, то для тела как целого $\overline{M} \sim N$ и $\overline{\Delta M^2} \sim N$. Отсюда получим выражение для относительной флуктуации макроскопической величины:

$$\delta_M = \frac{\sqrt{\overline{\Delta M^2}}}{\overline{M}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (1)$$

Так, относительные флуктуации концентрации частиц (или плотности) газа, его давления и температуры тем меньше, чем большее число N молекул газа находится в сосуде:

$$\delta_\rho = \frac{\sqrt{\overline{\Delta \rho^2}}}{\overline{\rho}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \delta_P = \frac{\sqrt{\overline{\Delta P^2}}}{\overline{P}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \delta_T = \frac{\sqrt{\overline{\Delta T^2}}}{\overline{T}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

При $N \sim N_A$ – (число Авогадро), δ_ρ , δ_P и δ_T имеют величины порядка 10^{-12} . Таким образом, чем больше и сложнее тело (по числу частиц), тем меньше отклонение его термодинамических величин от средних.

Именно поэтому макроскопические параметры с очень высокой точностью характеризуют внутреннее состояние макроскопического тела. Однако при очень точных измерениях в

малых системах флуктуации обнаруживают себя и ограничивают точность измерений.

2.2. Шумы

Ток, протекающий через сопротивление, лампу или транзистор, испытывает небольшие колебания даже тогда, когда все источники ЭДС строго постоянны. В некоторых случаях это явление вызывается изменением проводимости между отдельными точками сопротивлений, в основном же оно связано со статистическим характером движения носителей тока. Колебания тока создают на зажимах сопротивлений, электродах ламп и транзисторов флуктуации напряжения – шумы. К таким шумам относятся тепловой, дробовой, генерационно-рекомбинационный и фликкер-шум [1, 9].

Тепловой шум

В любом проводнике всегда имеются свободные электроны, находящиеся в хаотическом тепловом движении. При этом может оказаться, что в определенный момент времени в одном направлении проходит больше электронов, чем в другом. Таким образом, даже в отсутствие внешней ЭДС мгновенные значения тока, текущего через проводник, отличны от нуля. Эти мгновенные изменения тока вызывают на концах проводника флуктуации напряжения. Оценим величину этих флуктуаций. Опираясь на закон сохранения энергии, запишем электрическую энергию, связанную с одним всплеском (импульсом) флуктуационного тока, в следующем виде:

$$\frac{\overline{\Delta U^2}}{R} \cdot \tau \sim kT, \quad (2)$$

где τ – длительность импульса флуктуации, k – константа Больцмана, T – абсолютная температура цепи, R – сопротивление цепи.

В радиотехнике известно, что любой сигнал можно представить суммой конечного или бесконечного числа гармонических колебаний с соответствующими амплитудами, частотами и фазами. Известно также, что чем менее продолжительным по времени является радиоимпульс, тем шире его частотный спектр, т.е. тем

большим числом гармонических колебаний с различными частотами он составлен. При этом было найдено, что между продолжительностью импульса Δt и шириной его спектра Δf существует соотношение:

$$\Delta f \Delta t \sim 1.$$

Тогда, используя данное соотношение и формулу (2), выразим средний квадрат флуктуационного напряжения $\overline{U^2}$ в виде

$$\overline{\Delta U^2} \sim kTR\Delta f. \quad (3)$$

Аналогичным способом можно получить выражение для среднего квадрата флуктуационного тока:

$$\overline{\Delta J^2} \sim \frac{kT\Delta f}{R}. \quad (4)$$

Таким образом, флуктуации тока в цепи тем меньше, чем больше сопротивление и ниже температура.

Более строгое рассмотрение вопроса тепловых шумов в электрических цепях было впервые выполнено в 1928 г. Найквистом, который показал, что средний квадрат величины шумового напряжения в любой цепи, поддерживаемой при определенной температуре T , в малом частотном интервале Δf равен

$$\overline{\Delta U^2} = 4kTR\Delta f, \quad (5)$$

где k – постоянная Больцмана, равная $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град; R – сопротивление цепи, Ом.

Для практических расчетов величину среднеквадратичного напряжения теплового шума при комнатной температуре удобно находить по формуле:

$$\sqrt{\overline{\Delta U^2}} = \frac{\sqrt{R\Delta f}}{8}, \quad (6)$$

где R выражается в кОм; Δf – в кГц, тогда U будет выражено в микровольтах (10^{-6} В). Так, при $R = 10$ кОм и $\Delta f = 10$ кГц получим шумовое напряжение $\simeq 10^{-6}$ В.

Аналогичные флуктуационные явления наблюдаются у полупроводниковых приборов. Например, тепловой шум возникает

в проводящем канале полевых транзисторов, в биполярных транзисторах, связанный с диффузией электронов и дырок через p - n -переход.

Таким образом, любое радиоэлектронное устройство, неотъемлемой частью конструкции которого является набор шумящих элементов (транзисторы, резисторы), производит на выходе тепловой шум в виде флуктуирующих напряжений и токов.

Дробовой шум

Данный тип шума имеет место всегда, когда шумовое явление нужно рассматривать как последовательность независимых случайных событий. В электронной лампе, например, акты вылета электронов с катода образуют собой последовательность независимых событий, происходящих в случайные моменты времени. Электронный ток в лампе подобен дождю, состоящему из отдельных капель или дробинok – электронов. Как отмечалось выше, из-за статистического характера вылета электронов с катода число электронов, достигших в единицу времени анода, не остается постоянным. Отклонение от среднего значения тока создает его флуктуации, называемые дробовым шумом. Ламповый диод, работающий в режиме насыщения, создает шумовой ток, равный

$$\overline{\Delta J^2} = 2eJ\Delta f, \quad (7)$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона; J – средний ток эмиссии [1]. Это соотношение известно под названием теоремы Шоттки.

Спектральная плотность дробового шума, как и теплового, однородна. Аналогичные шумы наблюдаются и в полупроводниковых приборах, так как пролет носителей через потенциальные барьеры (p - n -переходы в полупроводниках) осуществляется независимо, в случайные моменты времени.

Фликкер-шум

Наряду с шумами, имеющими широкий равномерный частотный спектр, в электронных лампах и полупроводниковых приборах наблюдается шум, спектр мощности которого обратно пропорционален частоте f . В электровакуумных и газоразрядных приборах шумы такого вида вызываются испарением атомов

вещества катода, т.е. постоянным его разрушением, диффузией новых атомов из глубины катода к его поверхности и происходящими в связи с этим структурными изменениями излучающей поверхности катода. Такого рода шумы называются фликкер-шумами, вследствие фликкер-эффекта (от англ. flicker – мерцание) катода.

Любой схемный элемент в электрической цепи под воздействием напряжения источника постоянного тока или сильного сигнала переменного тока может генерировать фликкер-шум. Если в цепи на низкой частоте наблюдается явно необъяснимый избыточный шум, то почти любой элемент, через который протекает ток, должен быть поставлен под сомнение.

Интенсивным источником шума является контактное сопротивление. Шум может возникать в спаянных, скрученных или сваренных соединениях, и такие соединения могут находиться внутри самих элементов цепи.

Источником шума типа эффекта мерцания в полупроводниковых приборах являются непрерывные вероятностные изменения внутренней структуры – локальной перестройки проводящих каналов внутри полупроводника при прохождении через него тока. В результате этого происходит хаотическая модуляция сопротивления, приводящая к флуктуации тока.

Экспериментально зависимость спектральной плотности шума вида $1/f$ (или близкая к ней) наблюдается от частот от 10^{-4} до 10^2 - 10^4 Гц.

Генерационно-рекомбинационный шум

Главным источником шума в биполярных транзисторах являются процессы генерации и рекомбинации пар «электрон – дырка» в базе. В результате статистического механизма генерации и рекомбинации носителей тока в полупроводнике – электронов и дырок концентрация последних флуктуирует в образце. Шум, вызванный этим явлением, получил название генерационно-рекомбинационный.

С другой стороны, этот шум может рассматриваться как дробовой, ввиду того что процессы генерации и рекомбинации

можно описать как последовательность независимых случайных событий.

2.3. Методы описания шумов

Одним из наиболее эффективных методов анализа флуктуирующих величин является метод Фурье [2], который основан на том, что флуктуирующая величина $X(t)$ может быть описана ее спектральной плотностью $S_x(f)$. При этом $S_x(f)$ определяется таким образом, что средний квадрат $\overline{dX(t)^2}$ в полосе df на частоте f равен $S_x(f)df$. Тогда флуктуационное напряжение $V(t)$ в небольшом интервале Δf частот можно представить генератором шума с ЭДС, имеющей величину $\sqrt{S_v(f)\Delta f}$, где $S_v(f)$ – спектральная плотность $V(t)$. Аналогично источник флуктуационного тока может быть заменен генератором шумового тока $\sqrt{S_i(f)\Delta f}$; где $S_i(f)$ – спектральная плотность $I(t)$. Например, источник теплового шума – проводник с сопротивлением R – в небольшом интервале Δf может быть представлен генератором шума с ЭДС, равной $\sqrt{4kTR\Delta f}$, либо генератором шумового тока $\sqrt{4kT\Delta f/R}$ (см. приложения А и В).

Выбор того или иного представления определяется условиями задачи. Заметим, что при нахождении суммарного шумового эффекта в схемах при последовательном включении реальных сопротивлений складываются не ЭДС отдельных генераторов, а их квадраты, при параллельном же включении складываются квадраты шумовых токов [2].

Следует отметить, что выражение для спектральной плотности теплового шума справедливо до частот инфракрасного диапазона $\sim 10^{12}$ Гц.

Если $hf \sim kT$, то при изучении флуктуаций становятся существенными квантовые поправки. В результате спектральное распределение принимает следующую форму [1, 2]:

$$S_v(f) = 4R \cdot hf / (\exp(hf/kT) - 1), \quad (8)$$

где $h \simeq 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж/с – постоянная Планка. При условии $kT \gg hf$ формула (8) переходит в $S_v(f) = 4kTR$. Условие $kT = hf_0$ или $f_0 = kT/h$ при $T = 300$ дает $f_0 \simeq 6 \cdot 10^{12}$ Гц.

3. Экспериментальная часть

3.1. Описание метода

В качестве источника теплового шума используется вольфрамовая нить лампы накаливания, что позволяет изменять ее температуру и соответственно сопротивление $R=R(T)$ в широких пределах. Для измерения шумового напряжения применяется усилитель с большим коэффициентом усиления, поскольку для всей полосы частот до инфракрасного диапазона $\Delta f \sim 10^{12}$ Гц и $R \sim 100$ Ом шумовое напряжение при комнатной температуре составляет ~ 10 мВ. Реально доступная полоса частот, в пределах которой можно измерить напряжение, значительно меньше вследствие ограниченного диапазона частот измерительного прибора или усилителя, если сигнал предварительно усиливается.

Поэтому выходное напряжение $U_{\text{ВЫХ}}$ будет зависеть от амплитудно-частотной характеристики усилителя $K(f) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$. В

данной работе амплитудно-частотная характеристика усилителя имеет вид резонансной кривой с резонансной частотой ~ 100 кГц.

Пусть усилитель, изображенный на рис. 1, вносит пренебрежимо малый «шумовой вклад» по сравнению с шумами подключенного к входу пассивного сопротивления R , тогда, принимая во внимание то, что в малом интервале частот df входное напряжение определяется выражением

$$dU_{\text{ВХ}}^2 = 4kTRdf,$$

средний квадрат напряжения на выходе усилителя будет равен

$$\overline{U_{\text{ВЫХ}}^2} = \int \overline{dU_{\text{ВЫХ}}^2} = 4kTR \int K^2(f) df.$$

Таким образом, если мы знаем амплитудно-частотную характеристику усилителя $K(f)$ и тангенс угла наклона прямой,

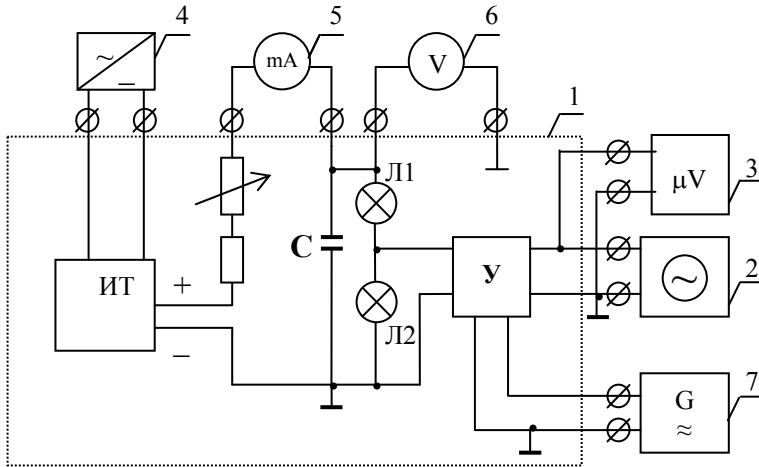


Рис. 1. Схема установки:

1 – блок усилителя; 2 – осциллограф; 3 – микровольтметр; 4 – источник питания 30 V; 5 – миллиамперметр; 6 – вольтметр; 7 – генератор высокой частоты

изображенной на графике зависимостью $U_{\text{ВЫХ}}^2$ от величины RT , постоянную Больцмана можно определить по формуле:

$$k = \frac{d(\overline{U_{\text{ВЫХ}}^2})}{d(RT)} \cdot \frac{1}{4 \int K^2(f) df}.$$

3.2. Описание установки

Структурная схема измерений приведена на рис. 1. В качестве источника теплового шума используются две лампы накаливания Л1 и Л2.

Две лампы выбраны из следующих соображений. Для измерений нам необходим источник «чистого теплового шума», в данном случае вольфрамовая нить обычной лампы накаливания.

Поскольку в схеме предусмотрена цепь питания ламп, которая представляет собой генератор тока с большим внутренним сопротивлением и соответственно большими тепловыми шумами, параллельно лампам подключается конденсатор большой емкости

~ 100 мкФ. Вспомним, что конденсатор по переменному току можно представить резистором с эквивалентным сопротивлением $R_c = 1/\omega C$, тогда на высоких частотах ≥ 10 кГц ($R_c \leq 0,1$ Ом) в точке подключения конденсатора схема оказывается закороченной на «землю» (корпус прибора). Одним словом, конденсатор выполняет функцию фильтра шумов цепи питания ламп накаливания на высоких частотах.

С другой стороны, исключение из схемы измерений лампы Л1 приведет к исчезновению исследуемого шума по той же самой причине, что и шумов цепи питания ламп накаливания. Поэтому схема с двумя лампами по переменному (шумовому) току на высоких частотах ≥ 10 кГц (с учетом полосы пропускания усилителя) эквивалентна параллельному их включению с сопротивлением, равным половине сопротивления одной лампы.

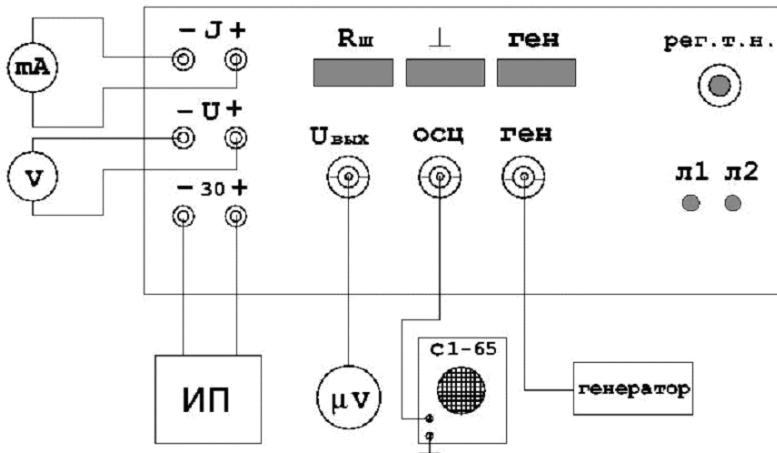


Рис. 2. Схема подключения приборов для измерений

Для измерения шумового напряжения используется усилитель, выходное напряжение которого измеряется среднеквадратичным вольтметром (3) и контролируется осциллографом (2).

Питание усилителя и ламп накаливания осуществляется источником постоянного тока (4), напряжением 30 В (не более, поскольку установка может выйти из строя). Конструктивно

усилитель, блок питания и источник шума собраны в одном блоке. На переднюю панель блока (рис. 2) выведены клеммы подключения: источника постоянного тока («±30 В»); миллиамперметра («±ток») – для измерения тока ламп накаливания; вольтметра («напряжение») – для измерения напряжения на лампах; разъемы для подключения генератора («ген»), осциллографа («осц») и микровольтметра («μV»).

На передней панели блока также расположен кнопочный переключатель режимов измерений: кнопка « $R_{ш}$ » – подключение источника шума (лампа накаливания) на входе усилителя; кнопка « \perp » – замыкание входа усилителя на «землю» (корпус прибора); кнопка «ген» – на вход усилителя подается сигнал от генератора. Ручка управления «рег. тока» служит для изменения тока накала ламп.

3.3. Порядок выполнения работы

Соберите схему измерений (рис. 1). Если схема уже собрана, тщательно проверить правильность подключения всех приборов. При сборке или проверке схемы особое внимание необходимо уделять правильности подключения источника питания, вольтметра и миллиамперметра, контролирующих напряжение и ток в лампах накаливания. Ошибки могут привести к выходу из строя всего измерительного блока. Показать схему для проверки преподавателю или дежурному лаборанту. Включить приборы и дать им прогреться в течение 30 минут.

Измерения проводятся в следующем порядке:

1. Измерить амплитудно-частотную характеристику усилителя

$$K(f) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}.$$

Амплитудно-частотной характеристикой усилителя называется зависимость коэффициента усиления от частоты входного сигнала. Измерения проводятся в два этапа. Вначале измеряется напряжение на входе усилителя (разъем «ген»), затем на его выходе (разъем «μV») в зависимости от частоты. Для этого на вход «ген» подайте

синусоидальный сигнал $\simeq 100$ мкВ от генератора высокой частоты – нужно нажать кнопку «ген» на передней панели блока.

В работе используется высокочастотный генератор сигналов Г4-158. Установка выходного напряжения генератора Г4-158 осуществляется с помощью кнопок «УСТАНОВКА ВЫХОДА» с индикацией величины «dB» по трехразрядному цифровому табло. Нажимая две кнопки «УВЕЛИЧЕНИЕ» или «УМЕНЬШЕНИЕ», можно повысить или соответственно понизить величину выходного напряжения в единицах децибел.

В физике и электротехнике часто применяется для сравнения двух уровней сигнала единица измерения – децибел, которая определяется по формуле:

$$D = 20 \cdot \lg \frac{U}{U_0},$$

где U_0 – уровень опорного сигнала, с которым сравнивается сигнал U . Величина D в децибелах может иметь положительный или отрицательный знак, в зависимости от того, увеличен или ослаблен измеряемый сигнал относительно опорного сигнала.

Заметим, что в данной работе сигнал ослабляется, но на табло индикации ослабления знак не предусмотрен. Поэтому следует понимать, например, что 40 (дБ) соответствует ослаблению напряжения в 100 раз.

По осциллографу проверить, что установленное выходное напряжение генератора не приводит к искажению синусоидальной формы сигнала на выходе усилителя в рабочем диапазоне частот, в противном случае необходимо увеличить ослабление. Установленное выходное напряжение можно измерить среднеквадратичным вольтметром, если он обладает достаточной чувствительностью.

Другой подход – измерить напряжение неослабленного сигнала U_0 на выходе генератора, выбрать необходимое ослабление D (дБ) и определить величину напряжения на входе усилителя по формуле:

$$U_{BX} = \frac{U_0}{10^{D/20}}.$$

Изменяя частоту генератора в диапазоне 10 кГц – 1 МГц, получить зависимость напряжения на выходе усилителя от частоты $U_{\text{ВЫХ}}(f)$. Диапазон сканируемых частот и оптимальную дискретность отсчетов необходимо уточнить в предварительных измерениях. Рекомендованное количество отсчетов – не менее 100, в области резонансной частоты дискретность отсчетов должна быть не более 1 кГц. Результаты представить в виде графика $K^2(f)$. Численным интегрированием определить величину $\alpha = \int K^2(f) df$.

2. Определить сопротивление лампы при комнатной температуре.

Измерить кривую зависимости напряжения на лампах от тока их накала с помощью вольтметра и миллиамперметра. Измерения выполняют при малых токах накала ламп ~ 1 мА. Для этого необходимо последовательно с миллиамперметром (см. рис. 1) подсоединить магазин сопротивлений (1 – 100 000 Ом). Таким образом, увеличивая полное сопротивление цепи питания ламп, можно уменьшить ток накала в более широком диапазоне, чем это достигается при помощи ручки «рег. тока» (см. рис. 2). Построить график зависимости сопротивления лампы от тока накала. Экстраполируя полученную кривую к нулевому току, определить сопротивление лампы при комнатной температуре.

3. Измерить напряжение на лампах и напряжение на выходе усилителя в зависимости от тока накала ламп.

Подать на вход усилителя шумовое напряжение ламп накаливания, нажав кнопку « R_{III} » на передней панели блока. Изменяя ручкой управления «рег. тока» ток накала ламп, с помощью вольтметра, миллиамперметра и среднеквадратичного вольтметра одновременно измерить напряжение на лампах и напряжение на выходе усилителя в зависимости от тока накала ламп.

Используя таблицу (см. приложение С), построить график зависимости величины RT от тока накала ламп.

4. Определить постоянную Больцмана и эквивалентное шумовое сопротивление усилителя.

Используя измеренные зависимости величины RT и шумового напряжения на выходе усилителя от тока накала ламп, построить график зависимости $\overline{U_{\text{ВЫХ}}^2}$ от величины RT . Выходное напряжение можно представить в виде $\overline{U_{\text{ВЫХ}}^2} = 4 k\alpha (R_{\text{ЭКВ}} \cdot 293 + RT)$ (рис. 3), где $R_{\text{ЭКВ}}$ – сопротивление, шум которого равен шуму усилителя при комнатной температуре, R – половина сопротивления одной лампы при комнатной температуре. Постоянная величина $R_{\text{ЭКВ}} \cdot 293$ определяется по пересечению графика с осью RT .

Контрольные вопросы

1. Каковы источники ошибок при измерении постоянной Больцмана? Предложите способы уменьшения основных погрешностей.

2. Если параллельно источнику теплового шума ($R = 100$ кОм) включена емкость $C = 10$ пФ, то какое шумовое напряжение покажет вольтметр на конденсаторе при комнатной температуре: а) с неограниченной полосой частот; б) с ограниченной полосой частот $\Delta f = 1$ кГц ?

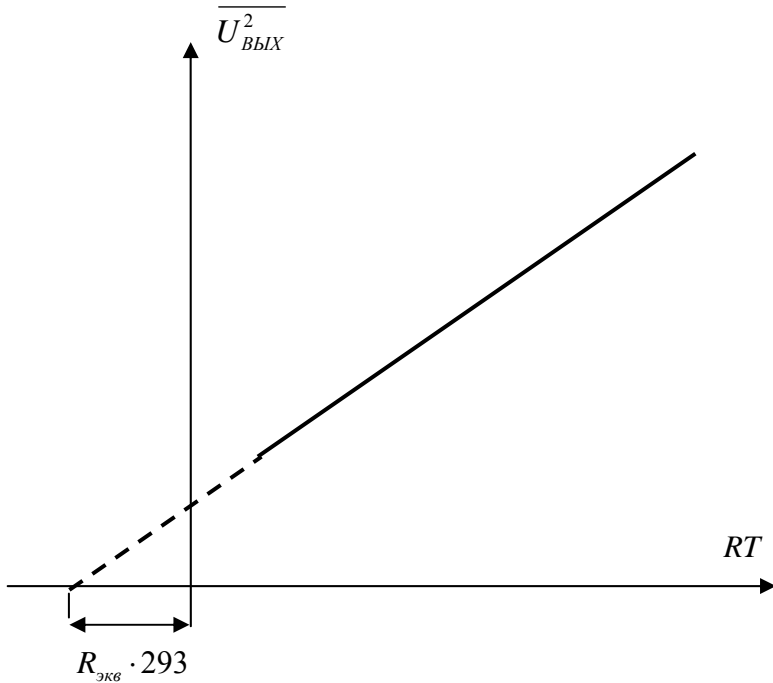


Рис. 3. График зависимости $\overline{U_{ВЫХ}^2}$ как функция от RT

3. Если последовательно источнику теплового шума ($R = 1$ кОм) включена индуктивность $L = 1$ мкГн, то какое шумовое напряжение покажет вольтметр на индуктивности при комнатной температуре: а) с неограниченной полосой частот; б) с ограниченной полосой частот $\Delta f = 1$ кГц ?

4. Почему в качестве источника шума используется две лампы накаливания? Почему при определении постоянной Больцмана под R понимается половина сопротивления лампы?

5. Какую максимальную мощность, может отдать в не шумящую нагрузку источник теплового шума при $T = 300$ К, $\Delta f = 10$ кГц.

6. На входе усилителя напряжения стоит RC -контур с емкостью $C = 1000$ пФ. Какова предельная теоретическая чувствительность такого усилителя при $T = 300$ К?

7. Определить величину флуктуаций указателя пружинных весов, которые обладают чувствительностью 10 мм на миллиграмм при $T = 300$ К.

8. Оценить величину флуктуаций давления в газе при нормальных условиях.

Приложение А

Вычисление среднеквадратичного напряжения тепловых флуктуаций в RC -цепи

При теоретическом анализе шума часто бывает необходимо знать вероятность dP того, что непрерывная флуктуирующая величина x имеет значение, заключенное в интервале $(x, x + dx)$.

Эту вероятность пишут в виде

$$dP = f(x) \cdot dx,$$

где $f(x)$ – так называемая функция плотности вероятностей.

Вероятность того, что величина x находится в пределах диапазона ее всех допустимых значений, очевидно, равна 1, т. е.

$$\int f(x) dx = 1.$$

Плотность вероятности $f(x)$, удовлетворяющая данному условию, называется нормированной.

В большинстве случаев мгновенные значения флуктуирующих величин имеют меньший интерес, чем их средние значения.

Мгновенные значения изменяются от наблюдения к наблюдению, в то время как среднее значение остается постоянным, по крайней мере, до тех пор, пока существует статистическое равновесие. В соответствии с определением понятия распределения вероятностей, среднее значение величины $\overline{x^n}$ выражается следующим образом:

$$\overline{x^n} = \int x^n f(x) dx,$$

где интегрирование распространяется на область всех возможных значений x . Если $\bar{x} = 0$, то наиболее важной характеристикой флуктуирующей величины является ее средний квадрат $\overline{x^2}$. В случае произвольной функции $g(x)$ среднее значение определяется по формуле:

$$\overline{g(x)} = \int g(x)f(x)dx. \quad (9)$$

Обычно используется два способа усреднения. В первом способе имеют дело с одной-единственной системой, подверженной флуктуациям, и производят усреднение этих флуктуаций по достаточно длинному интервалу времени. Во втором методе рассматривается *ансамбль*, состоящий из очень большого числа идентичных систем, каждая из которых подвержена флуктуациям. Средние значения определяются по всему ансамблю в определенный момент времени. Оба способа дают один и тот же результат, поскольку значения флуктуирующей величины, соответствующей одной системе, распределены на длинном временном интеграле в соответствии с распределением вероятностей этой величины по ансамблю систем в определенный момент времени. В случае равновесия распределение вероятностей флуктуирующей величины не зависит от времени, поэтому расчет флуктуационных явлений удобно вести, используя усреднение по ансамблю. Воспользуемся этим свойством на примере следующей задачи.

Рассмотрим электрическую RC -цепь, в которой конденсатор будет заряжаться и разряжаться по причине случайного характера теплового движения электронов в резисторе. Вычислим среднеквадратичное напряжение $\overline{U^2}$ тепловых флуктуаций в RC -цепи. Пусть система находится в тепловом равновесии при температуре T . В этом случае вероятность того, что система находится в некотором состоянии с энергией $E = CU^2/2$, выражается распределением Больцмана

$$dP = C_0 \exp\left(-\frac{CU^2}{2kT}\right)dU,$$

где постоянная C_0 определяется из условия нормировки:

$$C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{CU^2}{2kT}\right) dU = 1.$$

Вычисляя интеграл, находим $C_0 = \left(\frac{c}{2\pi kT}\right)^{1/2}$. Тогда, учитывая выражение (9), среднеквадратичное значение напряжения шума равно

$$\overline{U^2} = C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 \exp\left(-\frac{CU^2}{2kT}\right) dU = C_0 \left(\frac{2kT}{C}\right)^{3/2} \frac{\pi^{1/2}}{2} = \frac{kT}{C}. \quad (10)$$

Этот результат можно было получить еще проще, если воспользоваться утверждением теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы, по которой на каждую степень свободы любой классической системы, находящейся в равновесии, приходится средняя энергия, равная $kT/2$.

В данном случае это можно записать так:

$$\frac{1}{2} C \overline{U^2} = \frac{1}{2} kT.$$

Приложение В

Теорема Найквиста для электрических цепей

Формулировка теоремы Найквиста: шум в любой цепи, поддерживаемой при определенной температуре T , может быть описан шумовой ЭДС $\sqrt{dU^2}$, включенной последовательно с каждым сопротивлением цепи R , такой, что среднеквадратичное значение напряжения $\overline{dU^2}$ в малом интервале df равно:

$$\overline{dU^2} = 4kTRdf.$$

Рассмотрим вывод данной формулы на основе методов статистической физики и теории анализа электрических цепей переменного тока.

Рассмотрим RC -контур. По закону Ома напряжение на конденсаторе запишется следующим образом:

$$U_c = \frac{E}{Z} \cdot X_c, \quad E = \sqrt{S_v(f)}df, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}, \quad X_c = \frac{1}{\omega C},$$

где E – величина шумовой ЭДС, Z – полное сопротивление цепи, X_c – реактивное сопротивление конденсатора.

Тогда средний квадрат напряжения на конденсаторе в малом диапазоне частот df равен:

$$\overline{dU_c^2} = S_v(f)df \cdot \frac{1/\omega^2 C^2}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}.$$

Интегрируя данное выражение, в предположении, что спектральное распределение $S_v(f) = S_v$ не зависит от частоты, и $2\pi f = \omega$, находим:

$$\overline{U_c^2} = \int_0^\infty \overline{dU_c^2} = S_v \cdot \int_0^\infty \frac{df}{1 + \omega^2 C^2 R^2} = \frac{S_v}{2\pi C R} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{S_v}{4 C R}.$$

При этом, учитывая результат (10), полученный ранее (см. приложение А),

$$\frac{1}{2} C \overline{U_c^2} = \frac{1}{2} kT,$$

получаем окончательно $S_v = 4kTR$.

Источник шума можно также представить в виде генератора тока $\sqrt{S_i}df$, включенного параллельно сопротивлению R , и, проделав аналогичные выкладки, получить спектральную плотность флуктуирующего тока $S_i = 4kT/R$.

Приложение С

Зависимость электросопротивления вольфрама от температуры [6]

T(K)	R/R ₂₉₃	T(K)	R/R ₂₉₃	T(K)	R/R ₂₉₃
300	1,00	1200	5,60	2100	11,10
400	1,44	1300	6,18	2200	11,83
500	1,89	1400	6,77	2300	12,39
600	2,37	1500	7,38	2400	13,03
700	2,86	1600	7,98	2500	13,69
800	3,39	1700	8,59	2600	14,33
900	3,93	1800	9,21	2700	14,99
1000	4,48	1900	9,83	2800	15,65
1100	5,03	2000	10,48	2900	16,31

Приложение D

Альтернативный вывод теоремы Найквиста

Пусть по проводнику длиной l и площадью поперечного сечения S протекает электрический ток J . Говорят, что в этом случае мы имеем дело с *элементом тока* $J \cdot l$. Для исследования вопроса о шумах элемент тока $J \cdot l$ удобно представить в другой форме. Поскольку сила тока связана с плотностью тока соотношением $J = i \cdot S$, а плотность тока, в свою очередь, может быть представлена в форме

$$I = -e \langle n \rangle \langle v \rangle ,$$

где $\langle n \rangle$ – концентрация электронов, а $\langle v \rangle$ – их средняя скорость, то

$$J \cdot l = iSl = iV = -e \langle v \rangle \langle n \rangle V = -e \langle v \rangle \langle N \rangle$$

($V = Sl$ – объем проводника, $\langle N \rangle = \langle n \rangle V$ – число электронов в нем).

Полученное выражение допускает следующую физическую интерпретацию. Электрон, обладающий зарядом $-e$ и движущийся со скоростью v , представляет собой элемент тока $-ev$. Элемент тока $J \cdot l$ есть просто сумма элементов тока отдельных электронов. Это

положение мы будем считать точным не только для средних значений, но и для мгновенных, так что:

$$J(t)l = \sum -ev_{\alpha x},$$

где $v_{\alpha x}$ – мгновенное значение проекции скорости электрона с номером α на направление тока (ось x). Сумма берется по всем электронам, находящимся в проводнике. Из последнего соотношения для мгновенной силы тока следует:

$$J(t) = -\frac{e}{l} \cdot \sum v_{\alpha x}. \quad (11)$$

Дальнейший анализ будет опираться на это уравнение. Из (11) вытекает, что ток – величина случайная, и ее случайность вызвана двумя причинами. С одной стороны, скорости электронов имеют случайную составляющую, обусловленную тепловым хаотическим движением. С другой стороны, число электронов в проводнике тоже случайно, так что число слагаемых в сумме флуктуирует.

Рассчитаем дисперсию тока, которая по определению равна

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \langle [J(t) - \langle J \rangle]^2 \rangle.$$

С помощью (11) для дисперсии получаем:

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \left\langle \left[\frac{e}{l} \cdot \sum v_{\alpha x} - \frac{e}{l} \cdot \langle v_{\alpha x} \rangle \cdot \langle N \rangle \right]^2 \right\rangle. \quad (12)$$

Предполагая, что по проводнику идет ток, скорость электрона с номером α может быть представлена в виде:

$$v_{\alpha x} = \langle v_{\alpha x} \rangle + \Delta v_{\alpha x},$$

где $\langle v_{\alpha x} \rangle$ – среднее значение скорости (отличное от нуля, поскольку идет ток), а $\Delta v_{\alpha x}$ – случайная тепловая скорость. Учитывая, что среднее значение проекции тепловой скорости на ось x равно нулю и скорости различных электронов независимы, после подстановки последнего выражения в (12) получим для дисперсии тока:

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \frac{e^2}{l^2} \cdot \left\langle \left[\sum (\langle v_{\alpha x} \rangle + \Delta v_{\alpha x}) - \langle v_{\alpha x} \rangle \cdot \langle N \rangle \right]^2 \right\rangle.$$

Сумма $\sum \langle v_{ax} \rangle$ равна $\langle v_{ax} \rangle \cdot N$, где N – мгновенное значение числа электронов. Положим $N = \langle N \rangle + \Delta N$, так что ΔN – отклонение числа электронов от среднего.

Выражение для дисперсии тогда примет следующий вид:

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \frac{e^2}{l^2} \cdot \left\langle \left[\langle v_{ax} \rangle \cdot \Delta N + \sum \Delta v_{ax} \right]^2 \right\rangle.$$

Флуктуации числа электронов и флуктуации скорости электронов независимы, поэтому средние значения от произведений $\Delta v_{ax} \cdot \Delta N$ равны нулю. Это позволяет после возведения в квадрат и усреднения написать:

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \frac{e^2}{l^2} \cdot \left[\langle v_{ax} \rangle^2 \cdot \langle \Delta N^2 \rangle + \left\langle \left(\sum \Delta v_{ax} \right)^2 \right\rangle \right].$$

Если учесть и независимость скоростей различных электронов, то усреднением по скоростям легко получить:

$$\left\langle \left(\sum \Delta v_{ax} \right)^2 \right\rangle = \sum \langle \Delta v_{ax}^2 \rangle = N \langle \Delta v_{ax}^2 \rangle.$$

Теперь проведем усреднение по числу электронов, запишем следующее выражение для дисперсии тока в проводнике

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \frac{e^2}{l^2} \cdot \langle v_{ax} \rangle^2 \cdot \langle \Delta N^2 \rangle + \frac{e^2}{l^2} \cdot \langle N \rangle \cdot \langle \Delta v_{ax}^2 \rangle. \quad (13)$$

Из (13) видно, что дисперсия тока состоит из двух составляющих. Одна связана с флуктуациями скоростей электронов и называется тепловым шумом (второе слагаемое в (13)). Она не зависит от силы тока (от скорости направленного движения) и поэтому имеет место и тогда, когда по проводнику ток не идет. Вторая составляющая носит название дробового шума, или шума Шоттки. Она связана с флуктуацией числа электронов и проявляется только тогда, когда по проводнику идет ток (первое слагаемое в (13)). Иногда ее называют генерационно-рекомбинационным шумом, что зависит от причин, вызывающей флуктуацию числа частиц (процессы генерации и рекомбинации носителей тока в полупроводнике).

Рассмотрим более подробно составляющую, обусловленную тепловым шумом. Когда ток в проводнике равен нулю ($\langle v_{ax} \rangle^2 = 0$), среднее квадратичное значение теплового шума, как это следует из (13), равно:

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \frac{e^2}{l^2} \cdot \langle N \rangle \cdot \langle \Delta v_{ax}^2 \rangle.$$

В рамках классической теории электропроводности электроны в металле беспорядочно движутся подобно молекулам газа, образуя своеобразный электронный газ. В этом случае, поскольку $\langle \Delta v_{ax}^2 \rangle = kT / m_e$, а среднее число частиц $\langle N \rangle = nV$, то

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \frac{e^2}{l^2} V n \frac{kT}{m_e}. \quad (14)$$

Предположим, что от столкновения до столкновения электроны движутся одно и то же время τ независимо от их скорости. Другими словами, ток, обусловленный данным электроном, представляет собой последовательность импульсов одинаковой длительности, но разной амплитуды.

В рассматриваемой модели подвижность электронов оказывается равной

$$\mu = \frac{e\tau}{2m_e}. \quad (15)$$

Действительно, при наличии электрического поля с напряженностью E внутри металла каждый электрон будет двигаться с ускорением a , равным отношению силы eE к массе:

$$a = \frac{eE}{m_e}.$$

Это приведет к возрастанию скорости электрона от нулевой после столкновения до $v = a\tau = \frac{eE\tau}{m_e}$ перед следующим

столкновением, после которого он снова теряет направленную скорость движения. Средняя скорость дрейфа равна, таким образом,

$\langle v \rangle = \frac{v+0}{2} = \frac{v}{2} = \frac{eE\tau}{2m_e} = \mu E$, откуда и вытекает формула (15). Если

(14) умножить и разделить на τ , то можно получить:

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \frac{e^2 n V k T \tau}{l^2 m_e \tau} = 2 \frac{e \tau}{2 m_e} e n \cdot \frac{V}{l^2} \cdot \frac{k T}{\tau} = 2 \mu e n \cdot \frac{V}{l^2} \cdot \frac{k T}{\tau}.$$

Вводя проводимость $\sigma = \mu e n$, найдем

$$\langle \Delta J^2 \rangle = 2 \sigma \frac{k T}{l^2} \cdot V \cdot \frac{1}{\tau} = 2 \frac{k T}{l^2 / (\sigma V)} \cdot \frac{1}{\tau}.$$

Поскольку сопротивление проводника равно

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{l^2}{\sigma V},$$

то полученную формулу можно также записать в виде:

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \frac{2 k T}{R} \cdot \frac{1}{\tau} = \frac{4 k T}{R} \Delta f(\tau),$$

где $f(\tau) = 1/2 \tau$ – полоса частот теплового шума. Поскольку τ очень мал (порядка 10^{-12} с при комнатных температурах), то спектр теплового шума практически равномерен от нулевой частоты до очень высоких частот порядка $1/\tau$. Эти частоты соответствуют миллиметровому диапазону длин волн. Прибор, подключенный к шумящему проводнику, может реагировать не на все частоты, содержащиеся в спектре теплового шума. Поэтому тепловой шум, воздействующий на прибор, подключенный к проводнику, с полосой пропускания Δf , обладает дисперсией

$$\langle \Delta J^2 \rangle = \frac{4 k T}{R} \Delta f.$$

Для среднего значения квадрата напряжения тепловых шумов получим

$$\langle \Delta U^2 \rangle = 4 k T R \Delta f,$$

а для мощности теплового шума

$$P = 4 k T \Delta f.$$

Последние три формулы, определяющие величину тепловых шумов в электрической цепи, носят название формул Найквиста.

Благодарности

Авторы благодарны Брагину Олегу Анатольевичу за полезные замечания, преподавателям практикума за обсуждение, Людмиле Анатольевне Коноваловой за плодотворную работу с текстом методического пособия.

Библиографический список

1. *Мак-Доналд Д.* Введение в физику шумов и флуктуаций. М.: Мир, 1964.
 2. *Ван-дер-Зил А.* Флуктуации в радиотехнике и физике. М.: ГЭИ, 1958.
 3. *Бонч-Бруевич А. М.* Радиоэлектроника в экспериментальной физике. М.: Наука, 1966.
 4. *Сморodinский Я. А.* Температура. М.: Наука, 1981.
 5. *Эдельман В. С.* Вблизи абсолютного нуля. М.: Наука, 1983.
 6. *Пелецкий В. Э., Бельская Э. А.* Электрическое сопротивление тугоплавких металлов: Справочник. М.: Энергоиздат, 1981. С. 81.
 7. *Васильев А. М.* Введение в статистическую физику. М.: Высш. шк., 1980, с. 251.
 8. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М., 1964.
- Манаев Е. И.* Основы радиоэлектроники. М.: Высш. шк., 1990.