Матричные уравнения

Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс

1777–1855

Немецкий математик, механик, физик, астроном, геодезист…

Задача

Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Задача

Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1$

Задача

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 4 & 2 & -1 & 1 & A1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 & A2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & A3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & A4 = A2 - A1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & A5 = A1 - 4A4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & A6 = A3 - 3A4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & A7 = A5 - 2A6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & A8 = A7 : 3 \end{array}$$

Движение слева направо

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & -1 & 1 & B1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & B2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & B3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & B4 = B1 + B3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & B5 = B2 + B3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & B6 = B4 - B5 \end{array}$$

Движение справа налево

Что ещё?

Умеем решать: $Ax = b$

A – матрица
x – вектор
b – вектор

Будем решать: $AX = B$

A – матрица
X – матрица
B – матрица

Матричные уравнения

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}$$

Задача № 861

Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Задача № 861

Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Задача № 861

Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{array}{cc|cc l}
\cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{5} & A1 \\
\cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{9} & A2 \\
\cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-4} & \cancel{-6} & A3 = A2 - 3A1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & A4 = A3 : (-2) \\
1 & 0 & -1 & -1 & A5 = A1 - 2A4
\end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задача

Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача

Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

Обозначение: E

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

Обратная матрица

Обратная матрица к А – это такая матрица A^{-1}, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

$$(A \mid E) \rightsquigarrow (E \mid A^{-1})$$

Задача № 862

Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача № 862

Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$XA = B$$

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$XE = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

Умножаем справа!!!

Задача № 862

Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$XA = B$$

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$XE = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

Умножаем справа!!!

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Задача (~ № 870)

Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 1 & 7 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача (~ № 870)

Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 1 & 7 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 7-3x_{31} & 7-3x_{32} & 5-3x_{33} \\ -9+5x_{31} & -7+5x_{32} & -3+5x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

$$x_{31}, x_{32}, x_{33} \in \mathbb{R}$$

Задача № 868

Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Задача № 868

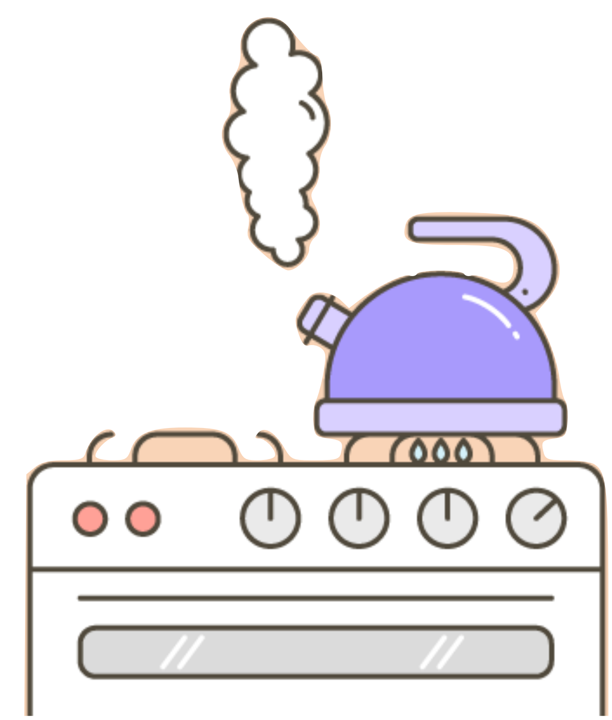
Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$XA = B$$

$$(XA)^T = B^T$$

$$A^T X^T = B^T$$



Задача № 868

Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

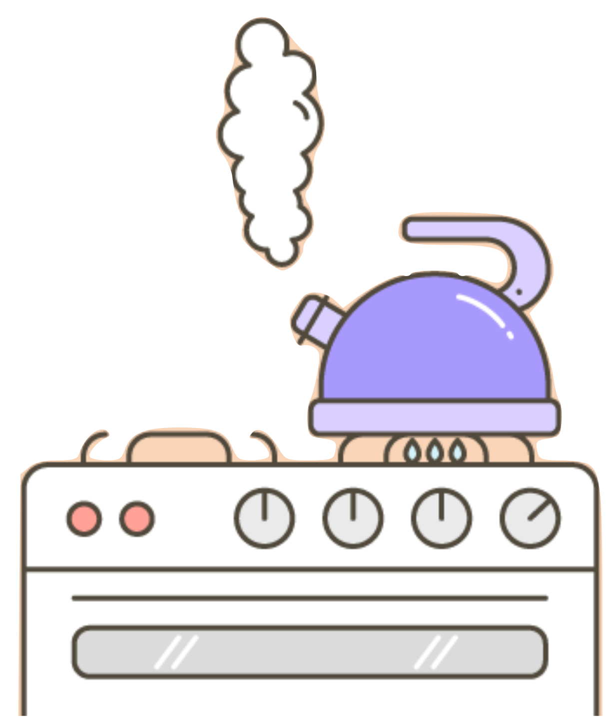
$$XA = B$$

$$(XA)^T = B^T$$

$$A^T X^T = B^T$$

$$(A^T | B^T)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$



Задача № 868

Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$XA = B$$

$$(XA)^T = B^T$$

$$A^T X^T = B^T$$

$$(A^T | B^T)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x_{12} & x_{12} \\ 3 - \frac{4}{3}x_{22} & x_{22} \end{pmatrix}, \ x_{12}, \ x_{22} \in \mathbb{R}$$