13-й семинар. — Сведе́ние дифференциальных уравнений к интегральным и наоборот. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.

14-й семинар. — Альтернатива Фредгольма. Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения.

15-й семинар. — Собственные значения и собственные функции интегральных уравнений с симметричным ядром. Решение неоднородных уравнений Фредгольма с симметричным ядром.

16-й семинар. — Повторный разбор наиболее трудных вопросов.

Задания по основам функционального анализа

Задание 4 *(сдать до 15 марта)*

Геометрия пространств со скалярным произведением (продолжение)

1. В пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ найдите ортогональное дополнение к подпространству, состоящему из многочленов с нулевой суммой коэффициентов.

Ортогональные многочлены

2. Как известно, многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-1, 1)$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ докажите, что

(а) функция $\cos(n \arccos x)$ является многочленом степени n и

(б) многочлен $T_n(x)$ пропорционален $\cos(n \arccos x)$, т. е. докажите равенство $T_n(x) = C_n \cos(n \arccos x)$, где C_n — некоторая постоянная.

3. Верно ли равенство

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(1/2)}{n!},$$

где $H_n(x)$ — многочлен Эрмита, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. такой, что

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

4. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(x+1)H_n(x)H_{n+1}(x)\,dx.$$

5. Разложите функцию $|x|x + 2015x^2$ в ряд по многочленам Эрмита.

6. Как вы знаете, многочлены Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ можно определить как коэффициенты тейлоровского разложения по переменной t их производящей функции

$$w\,(x, t, \alpha) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}}, \quad \text{так что} \quad w\,(x, t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\, t^n.$$

Проверьте соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, t, \alpha) = -tw(x, t, \alpha+1)$$

и используя его выведите для любого натурального n формулу

$$\frac{\partial L_n^{\alpha}}{\partial x}(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

7. Вычислите интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} e^{4-2x} x^{\alpha+1} L_n^{\alpha}(2x) L_{n+1}^{\alpha}(2x)\,dx.$$

8. Как вам известно, функция

$$w\,(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

служит производящей функцией для многочленов Лежандра $P_n(x)$ в том смысле, что

$$w\,(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n.$$

Покажите, что

$$P_{2n}(1)+P_{2n}(0)-P_{2n}(-1)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

9. Вы знаете, что последовательность производных любых классических ортогональных многочленов в свою очередь является последовательностью классических ортогональных многочленов, причём с тем же промежутком ортогональности (но, конечно, с другим весом).

(а) Убедитесь, что последовательность производных $P_1'(x), P_2'(x), \ldots, P_n'(x), \ldots$ многочленов Лежандра ортогональна на промежутке $(-1,1)$ с весом $h(x)=1-x^2$.

(б) Найдите квадрат нормы многочлена $P_n'(x)$ в пространстве $L_2^h(-1,1)$, т. е. вычислите интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)(P_n'(x))^2\,dx.$$

Другими словами, в этой задаче вам предложено (а) убедиться, что производные многочленов Лежандра пропорциональны ультрасферическим многочленам $C_n(x;\lambda)$ при $\lambda=3/2$ и (б) найти соответствующие коэффициенты пропорциональности.

Задание 5 *(сдать до 25 апреля)*

Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

В задачах 10–16 $A:\ell_2(\mathbb{N},\mathbb{C})\to\ell_2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ обозначает «диагональный» линейный оператор, действующий по правилу:

$$A:(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots)\mapsto(a_1x_1,\ a_2x_2,\ a_3x_3,\ldots),$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

10. Докажите, что оператор A непрерывен и найдите его норму.

11. Выясните является ли оператор A обратимым и если является, то найдите A^{-1}.

12. Опишите сопряжённый к A оператор и выясните, когда оператор A самосопряжён. Выясните, когда оператор A унитарен.

13. Найдите точечный спектр оператора A.

14. Найдите непрерывный спектр оператора A.

15. Найдите остаточный спектр оператора A. Укажите резольвентное множество оператора A.

16. В каком из двух случаев оператор A компактен, если $a_n=(-1)^n n^{-1}$ или $a_n=\sin\frac{\pi n}{2}$?

17. В гильбертовом пространстве $L_2\,[-1,1]$ рассмотрим два ортогональных проектора P_1 и P_2. Оператор P_1 проектирует на подпространство четных функций, а образом P_2 является множество функций, зануляющихся на отрезке $[-1,0]$. Найдите спектр и резольвенту операторов P_1P_2 и P_2P_1.

18. В пространстве $L_2\,[0,2\pi]$ операторы A и B заданы формулами

$$A=\frac{1}{\pi}|\cos t><\cos t|\qquad\text{и}\qquad B=|t^2><t|.$$

Поясните как действуют эти операторы. Является ли A самосопряженным оператором? Найдите асимптотические выражения для собственных значений оператора $A+\varepsilon B$ при $\varepsilon\to0$.

19. Докажите, что для любых самосопряжённых ограниченных операторов $A : H \to H$ и $B : H \to H$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\bigl|([A,B]x,x)\bigr| \leqslant \|Ax\| \cdot \|Bx\|,$$

где $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B.

Отметим на будущее, что в квантовой механике вводят обозначение $\langle A \rangle_x = (Ax,x)$, переписывают предыдущее неравенство в виде

$$\langle A^2 \rangle_x \langle B^2 \rangle_x \geqslant \frac{1}{4}\langle [A,B] \rangle_x^2$$

и интерпретируют его как принцип неопределённости Гейзенберга. Докажите последнее неравенство. (Для полноты отметим, что наиболее интересные с точки зрения квантовой механики операторы не являются ограниченными, так что пока вы доказали лишь частный случай принципа неопределённости Гейзенберга.)

20. Пусть A_n — последовательность линейных ограниченных самосопряжённых операторов, определённых на некотором гильбертовом пространстве, равномерно сходящаяся к оператору A. Будет ли A линейным ограниченным самосопряжённым оператором?

Задание 6 *(сдать до 30 мая)*

Неограниченные операторы в гильбертовых пространствах

21. Пусть $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ задан формулой

$$A = \frac{1}{i}\frac{d}{dt} + t$$

на своей области определения $\mathrm{Dom} A = C_0^\infty(\mathbb{R})$. Исследовать этот оператор на симметричность и самосопряженность.

Интегральные уравнения

22. Составьте интегральное уравнение, отвечающее задаче Коши

$$x'''(t) + tx(t) = e^t,$$
$$x(0) = 1, x'(0) = 1, x''(0) = 0.$$

23. Решите интегральное уравнение, сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$x(t) = -2e^{2t} + 5t + 1 - \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds.$$

24. Найдите все решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$x(t) - \int\limits_{-1}^{1} (ts + \mu)x(s)\,ds = \cos 2\pi t.$$

Рассмотрите все возможные значения параметра μ.

25. Исследуйте разрешимость предыдущего уравнения при различных значениях параметра μ с помощью альтернативы Фредгольма.

26. Найдите повторные ядра и резольвентное ядро, а также представьте через резольвентное ядро решение интегрального уравнения

$$x(t) - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{x(s)}{(1+t)(1+s)}\,ds = t + 1.$$

27. Пусть $Ax(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$, где

$$K(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant s; \\ (s+1)t, & \text{если} \quad s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Найдите характеристические значения и собственные функции интегрального уравнения $x(t) - \mu Ax(t) = 0$, сводя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

28. Найдите разложение решения интегрального уравнения $x - \mu Ax = \cos \pi t$ по собственным функциям интегрального оператора A из задачи 27.

29. Найти сумму $\sum\limits_n \frac{1}{\mu_n^2}$, где μ_n – характеристические значения интегрального оператора A из задачи 27.

Программу и задания
по основам функционального анализа
составил к.ф.-м.н., доцент И. В. Подвигин