**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 1*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x + 9y + 7 = 0$;

(b) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 + i\operatorname{ctg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{21}; \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} + 2i}{1 - i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^5 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 2*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i^{\,\prime}$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $6x^2 - 4xy + 9y^2 + 10y + 3 = 0$;

(b) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 8x + 6y + 2 = 0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i - \operatorname{tg}\alpha}{1 + i\operatorname{ctg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{23}; \quad \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{1+i}{2\sqrt{3} + 2i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\cos^5 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{5\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 3*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i^{\,\prime}$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $i=1,2,3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $3x^2+8xy-3y^2+6x-2y-2=0$;

(b) $3x^2+8xy-3y^2-2x-6y=0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1-i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{ctg}\alpha};\quad (1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{25};\quad \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{18};\quad \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}+2i}{1+i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^6 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{5\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{7\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{9\pi}{5}\right)=0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1}+x^2+1$ делится на $x^2-x+1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z+z^{-1}=2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z\mid |z|=\rho\}$;

(b) луч $\{z\mid \arg z=\varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 4*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i^{\,\prime}$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y + 3 = 0$;

(b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 - i\operatorname{tg}\alpha}{1 + i\operatorname{ctg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{27}; \quad \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} - i}{2 - 2i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\cos^6 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{5\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 5*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i{}'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 10y - 5 = 0$;

(b) $x^2 - 6xy + y^2 - 8x - 8y - 16 =$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 + i\operatorname{ctg}\alpha}{1 + i\operatorname{tg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{29}; \quad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{-1+i}{2\sqrt{3}+2i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^7 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 6*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i\,'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $i=1,2,3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $x^2+10xy+y^2+14x-2y+5=0$;

(b) $x^2+10xy+y^2+14x-2y-5=0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\frac{i-\operatorname{ctg}\alpha}{1+i\operatorname{tg}\alpha};\quad (1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{21};\quad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{18};\quad \sqrt[3]{\frac{1-i}{2\sqrt{3}-2i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\cos^7 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(x-\frac{3\pi}{5}\right)+\sin\left(x-\frac{5\pi}{5}\right)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{5}\right)+\sin\left(x-\frac{9\pi}{5}\right)=0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1}+x^2+1$ делится на $x^2-x+1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z+z^{-1}=2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z|=\rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z=\varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 7*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i{}'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y = 0$;

(b) $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i - \operatorname{ctg}\alpha}{i - \operatorname{tg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{23}; \quad \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{-2 + 2i}{1 + i\sqrt{3}}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^5 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 8*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i{}'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 2y - 1 = 0$;

(b) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 2y = 0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i + \operatorname{ctg}\alpha}{i - \operatorname{ctg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{25}; \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{3} + i}{-4 + 4i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\cos^5 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{5\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)

*Вариант 9*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i\,'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $i=1,2,3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $5x^2+6xy-3y^2-8x+1=0$;

(b) $5x^2+6xy-3y^2-8x+2=0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1-i\operatorname{ctg}\alpha}{1+i\operatorname{ctg}\alpha};\quad (1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{27};\quad \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{18};\quad \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-2i}{1+\sqrt{3}i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^6 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{5\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{7\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{9\pi}{5}\right)=0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1}+x^2+1$ делится на $x^2-x+1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z+z^{-1}=2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z\mid |z|=\rho\}$;

(b) луч $\{z\mid \arg z=\varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 10*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i{}'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x + 4y + 1 = 0$;

(b) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i - \operatorname{ctg}\alpha}{i + \operatorname{ctg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{29}; \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{-\sqrt{3} + i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\cos^6 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{5\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 11*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i^{\,\prime}$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $i=1,2,3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $5x^2-2xy+5y^2+14x+2y+10=0$;

(b) $5x^2-2xy+5y^2+14x+2y+11=0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1+i\operatorname{ctg}\alpha}{1-i\operatorname{ctg}\alpha};\quad (1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{21};\quad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{-1+i}\right)^{18};\quad \sqrt[3]{\frac{-2\sqrt{3}+2i}{-1+i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^7 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{5\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{7\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{9\pi}{5}\right)=0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1}+x^2+1$ делится на $x^2-x+1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z+z^{-1}=2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z|=\rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z=\varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)

*Вариант 12*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i\,'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 12x - 4y + 6 = 0$;

(b) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i + \operatorname{tg}\alpha}{i - \operatorname{tg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{23}; \quad \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{2 + 2i}{\sqrt{3} - i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\cos^7 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{5\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 13*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i\,'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $i=1,2,3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $x^2-xy+y^2+4x-2y+4=0$;

(b) $x^2-xy+y^2+4x-2y+3=0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha};\quad (1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{25};\quad \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{18};\quad \sqrt[3]{\frac{2-2i}{\sqrt{3}-i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^5 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{5\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{7\pi}{5}\right)+\cos\left(x+\frac{9\pi}{5}\right)=0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1}+x^2+1$ делится на $x^2-x+1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z+z^{-1}=2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z\mid |z|=\rho\}$;

(b) луч $\{z\mid \arg z=\varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 14*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $5x^2 + 24xy - 5y^2 - 2x + 16y - 4 = 0$;

(b) $5x^2 + 24xy - 5y^2 - 2x + 16y - 3 = 0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i - \operatorname{tg}\alpha}{i + \operatorname{tg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{27}; \quad \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\cos^5 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{5\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

**Задание 2** (сдать до 6 ноября)
*Вариант 15*

**1.** Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

**2.** Доказать, что произведение расстояний от фокусов кривой второго порядка до любой касательной к ней равно квадрату малой полуоси в случае эллипса и квадрату мнимой полуоси в случае гиперболы.

**3.** Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

**4.** Найти формулы перехода между прямоугольными системами координат в пространстве, если начала двух систем совпадают, а вектор $\vec{e}_i'$ второй системы получен из вектора $\vec{e}_i$ первой системы поворотом на $\pi/3$ по часовой стрелке относительно оси с направляющим вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $i = 1, 2, 3$.

**5.** Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $4x^2 + 6xy - 4y^2 + x + 7y - 2 = 0$;

(b) $4x^2 + 6xy - 4y^2 + x + 7y - \frac{3}{2} = 0$.

**6.** Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i \sin\alpha)^{29}; \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{3} + i}{-4 + 4i}}.$$

**7.** Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^6 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных $x$.

**8.** Применяя комплексные числа, доказать тождество

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**9.** Найти все $n$, при которых многочлен $x^{3n+1} + x^2 + 1$ делится на $x^2 - x + 1$.

**10*.** Комплексные переменные $z$ и $w$ связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает $w$, когда $z$ пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.