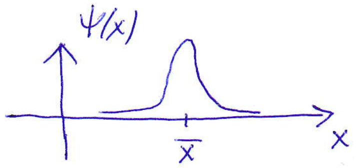
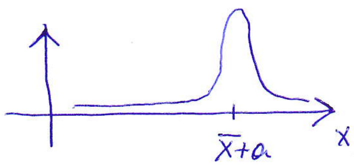
$\boxed{\text{Лекция 9}}$

Геометр. смысл оператора импульса

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x-a)$$



сдвиг по оси x на расстояние −a



$$\psi'(x) = \psi(x-a) = \psi(x) - a\psi'(x) + \frac{(-a)^2}{2!}\psi''(x) + \dots$$

но $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $\psi(x-a) = e^{-i\frac{\hat{p}_x a}{\hbar}}\psi(x)$

Унитарный оператор конечного сдвига: $\hat{U}_a = e^{-i\frac{\hat{p}_x a}{\hbar}}$

$$\hat{U}_a \hat{U}_a^{+} = \hat{1}$$

В 3D – сдвиг на вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$$\hat{U}_{\vec{a}} = e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}\vec{a}}{\hbar}}$$

где $\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$

При $|\vec{a}| \to 0$ $\hat{U}_a \approx 1 - i\frac{\hat{\vec{p}}\vec{a}}{\hbar}$

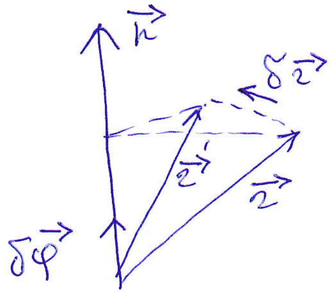
Говорят, что оператор $\hat{\vec{p}}$ генерирует бесконечно малые сдвиги, или $\hat{\vec{p}}$ – генератор сдвигов.

Геометрический смысл оператора момента импульса

$\hat{\vec{L}} = [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}]$ Далее мы будем рассматривать

$$\hat{\vec{\ell}} = \frac{\hat{\vec{L}}}{\hbar} \; ; \quad \hat{\vec{\ell}} = (\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z)$$

Рассмотрим поворот на угол $\delta\varphi$ относительно выбранной оси $\vec{n}$, $\vec{n}^2 = 1$



$|\delta\vec{\varphi}| = \delta\varphi$ – угол поворота

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}$$

где $\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}]$

$$\psi'(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \delta\vec{r}) \approx \psi(\vec{r}) - \delta\vec{r}\,\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) = [\psi(\vec{r}) - [\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}]\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{r})]$$

$$= (1 - \delta\vec{\varphi}[\vec{r} \times \vec{\nabla}])\psi(\vec{r})$$

← использован. векторное тождество $\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}] = \vec{b}[\vec{c}\times\vec{a}]$

$1 - \delta\vec{\varphi}[\vec{r}\times\vec{\nabla}] = (1 - i\delta\vec{\varphi}\cdot\hat{\vec{\ell}})$ – оператор бесконечно малого поворота

И оператор $\hat{\vec{\ell}}$, подобно оператору импульса $\hat{\vec{p}}$ – в случае сдвигов, является генератором поворотов.

Для оператора конечного поворота на угол φ вдоль оси $\vec{n}$

$$\hat{U}_{\vec{n}\varphi} = e^{-i(\hat{\vec{\ell}}\cdot\vec{n})\varphi} \qquad \hat{U}_{\vec{n}\varphi}\,\hat{U}^{+}_{\vec{n}\varphi} = 1$$

↑ унитарный оператор поворотов.

Рассмотрим коммутатор $\hat{\ell}_z$ с компонентами оператора $\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

$$\hat{\ell}_z = \frac{1}{\hbar}\left[\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}\right]_z = \frac{1}{\hbar}\left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right)$$

Простое вычисление даёт

$$[\hat{\ell}_z, \hat{z}] = 0 \qquad [\hat{\ell}_z, \hat{x}] = \frac{1}{\hbar}[\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{1}{\hbar}[-\hat{y}\hat{p}_x, \hat{x}] =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{\hbar}[\hat{p}_x, \hat{x}] = i\hat{y}$$

$$[\hat{\ell}_z, \hat{y}] = -i\hat{x}$$ ← проверить!

Можно написать эти результаты "в одну формулу"

$$[\hat{\ell}_i, \hat{r}_j] = i\varepsilon_{ijk} r_k$$ ← подразумевается суммирование по повтор. индексам.

ε_{ijk} – инвариантный псевдотензор $3^{\text{го}}$ ранга

Его не нулевые компоненты $\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1$

$\varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{yxz} = \varepsilon_{zyx} = -1$

→ это инвар. тензор ⇒ его компоненты одинаковы во всех системах отсчёта

При преобразов. пространств. инверсии $\hat{P}$

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = -\vec{r}$$

$$\hat{P} \cdot \hat{\vec{A}} = -\hat{\vec{A}}$$ – истинный вектор переходит в себя с дополн. знаком –

скажем $\hat{P}\hat{\vec{r}} \to -\hat{\vec{r}}$

если $\hat{P}\hat{\vec{B}} = +\hat{\vec{B}}$ – тогда $\hat{\vec{B}}$ является псевдо-вектором.

Истинные и псевдовектора одинаково преобразуются при поворотах, но по разному при простр. инверсии

Тензора преобразуются как произведения компонент векторов.

A_{ijk} — истинный тензор $3^{го}$ ранга, если при

пространств. инверсии $\hat{P}\,\hat{A}_{ijk} = (-1)^3\,\hat{A}_{ijk} = -\,\hat{A}_{ijk}$

Для псевдотензора имеется дополнительный знак (-1)

Например $\hat{P}\,\varepsilon_{ijk} = (-1)^3\cdot(-1)\,\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$

Для векторного произведения векторов $\vec{C} = [\vec{A}\times\vec{B}]$

можно записать в компонентах: $C_i = \varepsilon_{ijk}\,A_j\,B_k$

Легко проверить прямым вычислением: ↓ проверить!!

$$[\hat{e}_i\,\hat{p}_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{p}_k \qquad [\hat{e}_i\,\hat{e}_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_k$$

Имея ввиду геометрический смысл оператора момента как генератора поворотов можно предположить, что для произвольной векторной величины $\hat{\vec{A}} = (\hat{A}_x, \hat{A}_y, \hat{A}_z)$, выполнено

$$\Longrightarrow [\hat{e}_i\,\hat{A}_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{A}_k$$

Скалярная величина — переходит сама в себя при поворотах

$$S \to S' = S$$

Скалярами являются скалярн. произвед. векторов

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ а также $\vec{A}\cdot\vec{A} = \vec{A}^2$

Из геометр. смысла можно ожидать, что

$[\hat{e}_i, \hat{S}] = 0$. в частности $\hat{\vec{e}}^{\,2} = \hat{e}_x^2 + \hat{e}_y^2 + \hat{e}_z^2 = \hat{e}_i\,\hat{e}_i$ — скаляр

<u>Проверить вычислением</u>, что $[\hat{e}_i, \hat{\vec{e}}^{\,2}] = 0$

Далее я буду для краткости писать

$$\hat{\ell}^2 \equiv \hat{\vec{\ell}}^{\,2} = \hat{\ell}_i \hat{\ell}_i$$

Совместно измеримые величины – $\hat{\ell}^2$ и одна из компонент момента, например $\hat{\ell}_z$

поскольку $[\hat{\ell}^2, \hat{\ell}_z] = 0$.

Важное отличие операций сдвига и поворота.

Операции:
- сдвига → перестановочны
- повороты → не перестановочны, если делать повороты вдоль различных осей

Следствие для $\forall\ i, j$ $\quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$

$[\hat{\ell}_i, \hat{\ell}_j] \neq 0$, если $i \neq j$

$\Rightarrow$ Различные компоненты момента не могут иметь одновременно фиксированн. значения.

Решим спектральную задачу / операторный метод, как мы делали для осциллятора

$$\begin{cases} \hat{\ell}^2 |\lambda, \mu\rangle = \lambda |\lambda, \mu\rangle \\ \hat{\ell}_z |\lambda, \mu\rangle = \mu |\lambda, \mu\rangle \end{cases}$$

$|\lambda, \mu\rangle$ – состояние, которое одноврем. является собственным для операторов $\hat{\ell}^2$ и $\hat{\ell}_z$

λ – собств. значение $\hat{\ell}^2$

μ – собств. значение $\hat{\ell}_z$

Определим следующ. операторы

$$\hat{\ell}_+ \equiv \hat{\ell}_x + i\hat{\ell}_y \qquad \hat{\ell}_- \equiv \hat{\ell}_x - i\hat{\ell}_y$$

Посчитаем

$$[\hat{\ell}_z \hat{\ell}_+] = [\hat{\ell}_z, \hat{\ell}_x + i\hat{\ell}_y] = i\,\varepsilon_{zxy}\,\hat{\ell}_y + i\cdot i\cdot \varepsilon_{zyx}\,\hat{\ell}_x = \hat{\ell}_x + i\hat{\ell}_y = \hat{\ell}_+$$

$$[\hat{\ell}_z \hat{\ell}_-] = -\hat{\ell}_- \leftarrow \text{проверить !}$$

Далее $\hat{\ell}_z \hat{\ell}_+ = \hat{\ell}_+ \hat{\ell}_z + [\hat{\ell}_z \hat{\ell}_+] = \hat{\ell}_+ \hat{\ell}_z + \hat{\ell}_+ = \hat{\ell}_+ (\hat{\ell}_z + \hat{1})$

$$\Rightarrow \hat{\ell}_z \hat{\ell}_+ |\lambda, \mu\rangle = \hat{\ell}_+ (\hat{\ell}_z + \hat{1}) |\lambda, \mu\rangle = (\mu+1)\hat{\ell}_+ |\lambda, \mu\rangle$$

это означает, что $\hat{\ell}_+ |\lambda, \mu\rangle$ – является собственным состоян. оператора $\hat{\ell}_z$, с собствен. значением – $(\mu+1)$

$\Rightarrow \hat{\ell}_+$ – повышающий (проекцию $\hat{\ell}_z$) оператор

Проверить, что !

$$\hat{\ell}_z \hat{\ell}_- |\lambda, \mu\rangle = (\mu-1)\hat{\ell}_- |\lambda, \mu\rangle \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{\ell}_- |\lambda, \mu\rangle$ – собственное состоян. оператора $\hat{\ell}_z$, с собственным значением – $(\mu-1)$

$\Rightarrow \hat{\ell}_-$ – понижающий (проекцию $\hat{\ell}_z$) оператор

Итак мы имеем:

$$\hat{\ell}_+ |\lambda, \mu\rangle = C_+ |\lambda, \mu+1\rangle$$
$$\hat{\ell}_- |\lambda, \mu\rangle = C_- |\lambda, \mu-1\rangle$$

Определим константы C_+ и C_-, считая $\langle\lambda,\mu|\lambda,\mu\rangle = 1$ для $\forall\, \lambda$ и μ.

$$\hat{\ell}_+ |\lambda, \mu\rangle \xrightarrow{\text{эрмитово сопряж.}} \langle\lambda,\mu|\hat{\ell}_-$$

$$\Rightarrow \langle\lambda,\mu|\hat{\ell}_- \hat{\ell}_+ |\lambda,\mu\rangle = |C_+|^2 \langle\lambda,\mu+1|\lambda,\mu+1\rangle = |C_+|^2$$

$$\hat{e}_-\hat{e}_+ = (\hat{e}_x - i\hat{e}_y)(\hat{e}_x + i\hat{e}_y) = \hat{e}_x^2 + \hat{e}_y^2 + i[\hat{e}_x\hat{e}_y] = \hat{e}_x^2 + \hat{e}_y^2 - \hat{e}_z =$$

$$= \hat{e}^2 - \hat{e}_z^2 - \hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad |c_+|^2 = \lambda - \mu(\mu+1)$$

Действуя аналогично, находим $\hat{e}_+\hat{e}_- = \hat{e}^2 - \hat{e}_z^2 + \hat{e}_z$

и $|c_-|^2 = \lambda - \mu(\mu-1)$

Возможные значения μ – ограничены, действительно

$$0 \leq \langle \lambda,\mu | \hat{e}_x^2 + \hat{e}_y^2 | \lambda,\mu \rangle = \langle \lambda,\mu | \hat{e}^2 - \hat{e}_z^2 | \lambda,\mu \rangle = \lambda - \mu^2$$

$\Rightarrow$ должны существовать μ_{max} и μ_{min} и $\mu_{max} > \mu_{min}$

$$\hat{e}_+ |\lambda, \mu_{max}\rangle = 0$$

$$\hat{e}_- |\lambda, \mu_{min}\rangle = 0.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda - \mu_{max}(\mu_{max}+1) = 0 \\ \lambda - \mu_{min}(\mu_{min}-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_{max}^2 + \mu_{max} = \mu_{min}^2 - \mu_{min}$$

$$\Rightarrow \mu_{max} = \pm\left(\mu_{min} - \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} =$$

$$= \begin{cases} -\mu_{min} \\ \mu_{max} - 1 \end{cases}$$

$\leftarrow$ не подходит, нарушает $\mu_{max} > \mu_{min}$

$$\Rightarrow \mu_{max} = -\mu_{min}$$

Поскольку $\hat{e}_+$ – увеличивает μ на 1, $\mu \to \mu+1$

$\Rightarrow$ $2\mu_{max} = 0, 1, 2, 3 \ldots$ – целое число.

Принято обозначать: $\mu_{max} \equiv e$ $\quad e = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$

– целое или полуцелое число

$\mu \equiv m$ и $-\ell \leq m \leq \ell$ – всего $2\ell+1$ – различных значений m.

Далее $|\lambda, \mu\rangle \to |\ell m\rangle$

Поскольку $|C_+|^2 = 0$ при $m = \ell$ $\Rightarrow$ $\lambda = \ell(\ell+1)$

Кроме того:

$$\hat{\ell}^2 |\ell m\rangle = \ell(\ell+1)|\ell m\rangle$$

ℓ – значение момента, и м просто – момент

$$\hat{\ell}_z |\ell m\rangle = m\, |\ell m\rangle$$

m – значение проекции момента.

$$\hat{\ell}_+ |\ell m\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\; |\ell, m+1\rangle$$

$$\hat{\ell}_- |\ell m\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\; |\ell, m-1\rangle$$

$\Leftarrow$ Эти соотношения означают определённое соглашение относительно фазы состояний в мультиплете $|\ell, m\rangle$

$$\hat{\ell}_+ |\ell, \ell\rangle = 0$$

$$\hat{\ell}_- |\ell, -\ell\rangle = 0$$

Угловые функции

$$\hat{\ell}_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\hat{\ell}_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{\ell}_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

m – целое $\Rightarrow$ ℓ – целое

В сферических координатах

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$\Rightarrow$ $\hat{\ell}_z = -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ $\quad$ $\hat{\ell}_z|\ell m\rangle = m\,|\ell m\rangle$ $\quad$ $\underset{\psi(\theta,\varphi)}{\underset{\parallel}{\langle\theta,\varphi|\ell m\rangle}} \sim e^{im\varphi}$

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{im\varphi}\right) = m\,e^{im\varphi}; \quad \psi(\theta,\varphi) = \psi(\theta,\varphi+2\pi) \Rightarrow e^{2i\pi m} = 1$$