1. Волны в пространстве-времени

Урок 1

Кинематика электромагнитных волн

1.1. (Задача 1.1.)[1] 1) Доказать поперечность любой электромагнитной волны, имеющей вид $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\left(t - x \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\right)$. Показать, что $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$. 2) Найти поток энергии, плотность импульса и момента импульса электромагнитной волны. 3) Записать векторы напряженности плоской монохроматической волны: а) плоскополяризованной; б) поляризованной по кругу; в) эллиптически поляризованной.

Решение

1) Прежде чем решать эту задачу, вспомним уравнения Максвела в области, где отсутствуют заряды и токи.

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0.$$

Введем векторный потенциал $\mathbf{A}$ такой, что $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Тогда из 1-го уравнения имеем $\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}\right) = 0$, что позволяет ввести также скалярный потенциал φ такой, что $\nabla\varphi = -\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}\right)$. Поскольку потенциалы определяются не однозначно, выберем дополнительные условия на потенциалы $\varphi = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. Тогда

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Волновое уравнение, которому удовлетворяет электромагнитное поле (каждая из декартовых компонент электрического и магнитного поля, а также векторного потенциала), имеет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta f = 0.$$

Рассмотрим это уравнение для векторного потенциала $\mathbf{A}$ в случае зависимости всех переменных волны от одной пространственной переменной (это и называется плоской волной)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

[1] В круглых скобках дана нумерация задач по книге Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах: Учебное пособие: В 2 ч. Изд. 2-е, испр. и доп./ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. Ч. 2. Электродинамика частиц и волн. 158 с.

Решение этого уравнения имеет вид $f_1(t - \frac{x}{c'}) + f_2(t + \frac{x}{c'})$, где $c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ – скорость плоской волны в среде.

Из условия $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ следует
$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0.$$
Тогда из волнового уравнения
$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial A_x}{\partial t} = \mathrm{const}\,.$$
Поскольку $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, отличная от нуля компонента A_x означает отличное от нуля продольное электрическое поле, но оно не имеет отношения к электромагнитной волне, поэтому можно выбрать $A_x = 0$, т. е. $\mathbf{A}$ перпендикулярен направлению распространения волны. Тогда из формул
$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$
введя переменную $\xi = t - x/c'$, находим
$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] = e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k = e_{ijk}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_j}A_k = \left[\nabla(t - \frac{x}{c'}) \cdot \mathbf{A}'\right] = -\frac{1}{c'}[\mathbf{n}\mathbf{A}'],$$
$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}$$
$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c'}\,[\mathbf{n}\mathbf{A}'] = \sqrt{\varepsilon\mu}\,[\mathbf{n}\mathbf{E}]\,,$$
откуда следует
$$\sqrt{\mu}\mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon}\,[\mathbf{n}\mathbf{E}]\,.$$
Из этого равенства следует соотношение для модулей:
$$\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E.$$
Вектор Пойнтинга в вакууме
$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E}\,[\mathbf{n}\mathbf{E}]] = \frac{c}{4\pi}\mathbf{n}E^2 = \frac{c}{4\pi}\mathbf{n}\mathbf{H}^2$$
$$(\mathbf{n}\mathbf{E}) = 0$$
$$W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$$

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n}$$
$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \left(\frac{W}{c}\right)\mathbf{n}$$

2)Поскольку в плоской волне все вектора (поля и потенциал) - 2-мерные вектора, то можем заменить рассмотрение векторов комплексными числами. Если определить комплексную функцию $A = A_x + iA_y$, то для плоской волны, распространяющейся вдоль оси z
$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_x = -\frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial z},\ (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_y = \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial z}.$$
Записав $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ тоже как комплексную функцию и используя выведенные соотношения
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = (\mathrm{rot}\,A)_x + i\,(\mathrm{rot}\,A)_y = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + i\frac{\partial A_x}{\partial z} = i\frac{\partial A}{\partial z},$$
получаем, что вместо вычисления ротора можно использовать производную от комплексной функции. Плоская монохроматическая волна

$$E(z,t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)},$$

где E_0 – действительная величина.

$$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

Волна с круговой поляризацией

$$E(z,t)_{\text{круг}} = E_0 e^{i(kz-\omega t)},$$

где E_0 – комплексная величина.

$$\begin{aligned}&E_{\text{круг}} = E_0 e^{i(kz-\omega t)} = (E_{0x} + iE_{0y})\left[\cos(kz-\omega t) + i\sin(kz-\omega t)\right] = \\ &= (E_{0x}\cos(kz-\omega t) - E_{0y}\sin(kz-\omega t)) + i\left[E_{0x}\sin(kz-\omega t) + E_{0y}\cos(kz-\omega t)\right],\end{aligned}$$

введя величину $\psi = (kz-\omega t)$, получим

$$E_{\text{круг}} = E\left\{(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi) + i\,(\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi)\right\},$$

где
$$E = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2},$$
$$\cos\phi = \frac{E_{0x}}{E},$$

$$\sin\phi = \frac{E_{0y}}{E},$$

$$\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi = \cos\left(kz - \omega t + \phi\right),$$

$$\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi = \sin\left(kz - \omega t + \phi\right).$$

Тогда

$$E_{\text{круг}} = E\left\{\cos\left(kz - \omega t + \phi\right) + i\sin\left(kz - \omega t + \phi\right)\right\}.$$

Очевидно, что

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

Конец вектора E описывает правую спираль, если смотреть вдоль $\mathbf{n}$. Левая спираль получается если

$$Ee^{-i(kz-\omega t)}.$$

Произвольное поле

$$A = A_{\text{п}} e^{i(kz-\omega t)} + A_{\text{л}} e^{-i(kz-\omega t)}.$$

Плоская поляризация

$$\mathbf{A}\left(z,t\right) = \mathbf{A_0}\cos\left(kz - \omega t\right).$$

где $\mathbf{A_0} = A_0(a,\, b\,\mathrm{e}^{i\alpha})$, a и b - действительные, $\sqrt{a^2+b^2} = 1$, $\alpha = m\pi$, m – целое.

1.2. (Задача 1.3.) Вычислить напряженности электрического и магнитного полей для солнечного света, если в одну минуту на 1 см^2 падает в среднем две калории солнечной энергии (1кал $= 4,2\cdot 10^7$эрг).

Решение Для плоской волны в вакууме $E = H$ поскольку $\varepsilon = \mu = 1$. Вектор Пойнтинга (поток энергии)

$$S = \frac{c}{4\pi}EH = \frac{c}{4\pi}E^2.$$

Для условий нашей задачи

$$\bar{S} = \frac{2\cdot 4,2\cdot 10^7}{60} = 1,4\cdot 10^6\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\text{с}}.$$

Тогда

$$\sqrt{\bar{E^2}} = \sqrt{\frac{4\pi}{c}\bar{S}} \simeq \sqrt{5,8\cdot 10^{-4}} = 0,024 \text{ СГСЕ (стат-Вольт/см)}.$$

$$E \simeq 7,2 \text{ В/см}; H \simeq 2,4\cdot 10^{-2} \text{ Эрстед} = 2,4\cdot 10^{-2}/(4\pi)10^3 \text{ А/м} = 1,9 \text{ А/м}.$$

1.3. (Задача 1.6.) Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частоты распространяются вдоль оси Z. Одна с амплитудой a поляризована по оси X, а другая с амплитудой b – по оси Y, причем опережает первую по фазе на χ. Какова поляризация результирующей волны? Рассмотреть случай равных амплитуд.

Решение Пусть комплексные амплитуды исходных волн $\mathbf{E}_1 = a\mathbf{e}_x$, $\mathbf{E}_2 = be^{i\chi}\mathbf{e}_y$, тогда

$$\mathbf{E}_0 = a\mathbf{e}_x + be^{i\chi}\mathbf{e}_y.$$

Удобно сдвинуть начало отсчета фаз так, чтобы в 2-х взаимно перпендикулярных направлениях получились колебания, сдвинутые по фазе на $\pi/2$

$$\mathbf{E}_0' = \mathbf{E}_0 e^{-i\alpha} = \mathbf{E}' - i\mathbf{E}''$$

и потребуем, чтобы векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}''$ были вещественными и $\mathbf{E}' \perp \mathbf{E}''$. Тогда

$$\mathbf{E}_0' = \left(a\mathbf{e}_x + be^{i\chi}\mathbf{e}_y\right) e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}\mathbf{e}_x + be^{i(\chi-\alpha)}\mathbf{e}_y = \mathbf{E}' - i\mathbf{E}'',$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= a\cos\alpha \cdot \mathbf{e}_x + b\cos(\alpha-\chi)\cdot \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{E}'' &= a\sin\alpha \cdot \mathbf{e}_x + b\sin(\alpha-\chi)\cdot \mathbf{e}_y, \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'' = 0.$$

Раскрывая скалярное произведение, получим

$$a^2\cos\alpha\sin\alpha + b^2\cos(\alpha-\chi)\sin(\alpha-\chi) = 0,$$

и используя известные тригонометрические соотношения

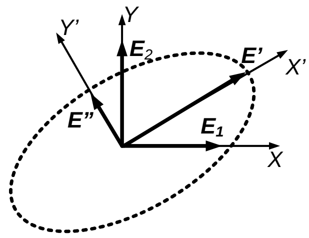
$$\begin{aligned} 2\sin\alpha\cos\alpha &= \sin 2\alpha, \\ \sin 2(\alpha-\chi) &= \sin 2\alpha\cos 2\chi - \cos 2\alpha \sin 2\chi, \end{aligned}$$

можно получить выражение

$$\frac{a^2}{2} tg 2\alpha = -\frac{b^2}{2}\left\{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cos 2\chi - \sin 2\chi\right\}$$

откуда, делая простые преобразования, получаем

$$\mathrm{tg} 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2\chi}{a^2 + b^2\cos^2\chi}.$$



Введя новые оси $\mathbf{e}_{x'} \parallel \mathbf{E}'$ и $\mathbf{e}_{y'} \parallel \mathbf{E}''$ получим

$$\begin{aligned} E_{x'} &= E' \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)\,, \\ E_{y'} &= E'' \sin(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)\,. \end{aligned}$$

Из полученного выражения очевидно, что в новой системе координат конец вектора электрического поля $\mathbf{E}$ описывает в новой системе координат эллипс. Это следует из следующего очевидного соотношения

$$\frac{E_{x'}^2}{E'^2} + \frac{E_{y'}^2}{E''^2} = 1,$$

что является уравнением эллипса.

1.4. (Задача 1.7.) Две монохроматические волны одной частоты поляризованы по кругу в противоположных направлениях и, имея одинаковые фазы, распространяются в одном направлении. Найти зависимость поляризации результирующей волны, от отношения E_l/E_r амплитуд соответственно правополяризованной и левополяризованной волн.

Решение

$$\mathbf{E}_1 = E_r \{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y\}$$

$$\mathbf{E}_2 = E_l \{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y\}$$

$$\mathbf{E} = (E_r + E_l)\,\mathbf{e}_x + (E_r - E_l)\,i\mathbf{e}_y$$

$$E_x = (E_r + E_l)\cos\omega t$$

$$E_y = (E_r - E_l)\sin\omega t$$

$$\frac{E_x^2}{(E_r + E_l)^2} + \frac{E_y^2}{(E_r - E_l)^2} = 1.$$

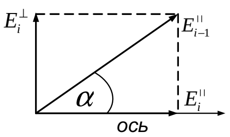
Если $E_r > E_l$ или $E_r < E_l$ – поляризация эллиптическая, если $E_r = E_l$ – поляризация линейная, если $E_r = 0$ или $E_l = 0$ – поляризация круговая.

1.5. (Задача 1.8.) Большое число (N+1) поляроидов уложено в стопку. Ось каждого последующего поляроида составляет угол α с осью предыдущего, так что ось последнего образует с осью первого угол $\theta = N\alpha$. Найти интенсивность света на выходе из стопки, если на вход падает линейно поляризованный свет интенсивности I_0, направление плоскости поляризации которого совпадает с осью первого поляроида. Поляроиды считать идеальными, потерями на отражение света пренебречь. Оценить интенсивность при $\theta = 90^\circ$ и $N = 50$.

Решение Поляроиды — это искусственно приготовляемые коллоидные пленки, служащие для получения поляризованного света. У поляроидов есть выделенное направление, называемое оптической осью поляроида. Они обладают способностью сильно поглощать световые лучи, у которых электрический вектор перпендикулярен к оптической оси, и пропускать без поглощения лучи, у которых электрический вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси.

После прохождения первого поляроида интенсивность волны не изменится, поскольку по условию задачи у падающей волны вектор $\mathbf{E_0}$ направлен вдоль оптической оси поляроида. Пусть амплитуда падающей волны будет E_0, тогда $E_1^{\|} = E_0$, где $E_1^{\|}$ — амплитуда волны после прохождения первого поляроида. У второго поляроида ось направлена под углом α по отношению к $\mathbf{E_1^{\|}}$. Представляя волну с вектором $\mathbf{E_1^{\|}}$ в виде суперпозиции двух волн, одна из которых имеет вектор $\mathbf{E}$, параллельный оптической оси $\mathbf{E_2^{\|}}$, другая — в перпендикулярном направлении $\mathbf{E_2^{\perp}}$, заключаем, что после второго поляроида волна будет иметь амплитуду

$$E_2 = E_2^{\|} = E_1^{\|} \cos\alpha = E_0 \cos\alpha.$$



Понятно, что прохождение через каждый последующий поляроид добавляет в качестве множителя к напряженности электрического поля падающей волны $\cos\alpha$. После прохождения i-го поляроида $E_i = E_0(\cos\alpha)^{i-1}$. При $i = N+1$, $E_{N+1} = E_0(\cos\alpha)^N$. Так как интенсивность падающей волны $I_0 = \frac{c}{4\pi}E_0^2$, то интенсивность света, проходящего стопку поляроидов,

$$I_{N+1} = \frac{c}{4\pi}E_{N+1}^2 = I_0(\cos\alpha)^{2N}.$$

При $\theta = 90^0$ и $N = 50$ $\alpha = \theta/N = 1,8^0 \approx 3\cdot 10^{-2}$ рад. Как видим, $\alpha << 1$, тогда для вычисления степени косинуса малого угла воспользуемся его разложением в ряд Тейлора. Поэтому

$$I_{51} = I_0(\cos(3\cdot 10^{-2}))^{100} \approx I_0[1 - \frac{100}{2}\cdot(3\cdot 10^{-2})^2] = I_0(1-0,05) = 0,95 I_0.$$