1. Электростатика

Урок 10

Электростатика в среде

Уравнения Максвела в однородной среде с диэлектрической проницаемостью в дифференциальной форме имеют вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{своб}}\,,\ \ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E}$. Вектор поляризации $\mathbf{P}$ – дипольный момент единицы объема, $\mathbf{P} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\mathbf{E}$.
Интегральная форма уравнений Максвелла:

$$\iint\limits_S D_n dS = 4\pi q_{\text{своб}}\,,\ \ \oint E_\ell\, d\ell = 0\,, \tag{2}$$

где $q_{\text{своб}}$ – свободный заряд в объеме интегрирования, откуда получаются граничные условия:

$$D_{1n}| - D_{2n}| = 4\pi\sigma_{\text{своб}}\,, \text{или } \varepsilon_1 E_{1n}| - \varepsilon_2 E_{2n}| = 4\pi\sigma_{\text{своб}}\,, E_{1\tau}| = E_{2\tau}|\,. \tag{3}$$

Поле точечного заряда (закон Кулона) в среде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{\varepsilon r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\,. \tag{4}$$

Потенциал точечного заряда

$$\varphi_{\text{точ}} = -\int E_\ell\, d\ell = \frac{q}{\varepsilon r} + C\,. \tag{5}$$

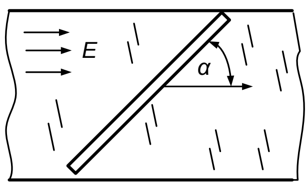
Часто константу C выбирают равной 0.
Энергия для совокупности зарядов

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq k} q_i\varphi_k = \frac{1}{2}\left(\int \rho\varphi\, dV + \int \sigma\varphi\, dS + \int \varkappa\varphi\, d\ell\right) = \\ &= \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon E^2 dV. \end{aligned} \tag{6}$$

1.1.

(Задача 2.3) Найти силу, действующую на малый заряд q, помещенный в бесконечную узкую щель в диэлектрике с проницаемостью ε, если напряженность электрического поля в диэлектрике однородна и равна $\mathbf{E}$, а ось щели образует угол α с направлением $\mathbf{E}$.

Решение Обозначим штрихом значения поля в щели



$$E'_n = \varepsilon E_n = \varepsilon E \sin\alpha$$

$$E'_t = E_t = E\cos\alpha$$

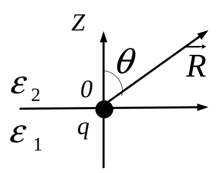
$$|E'| = E\sqrt{\varepsilon^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

$$|\mathbf{F}| = q|\mathbf{E}|\varepsilon\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon^2}}$$

.

1.2. (Задача 2.4) Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти напряженность и индукцию электрического поля, а также его потенциал.

Решение Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа и из симметрии задачи может зависеть только от R и угла θ (см. рисунок). Кроме того, на границе



раздела диэлектриков ($z = 0$) должны удовлетворяться граничные условия: 1) непрерывность касательной составляющей напряженности электрического поля $E_{1\tau}|_{z=0} = E_{2\tau}|_{z=0}$ или потенциала электрического поля $\varphi_1|_{z=0} = \varphi_2|_{z=0}$; 2) непрерывность нормальной составляющей вектора электрической индукции $D_{1n}|_{z=0} = D_{2n}|_{z=0}$, поскольку $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$, где ρ – плотность свободных зарядов в диэлектрике, а везде кроме начала координат свободные заряды отсутствуют.

Попробуем найти решение в виде потенциала от точечного заряда в вакууме, умноженного на константу:

$$\varphi_1 = a_1\frac{q}{R} \qquad \text{при} \qquad z \leqslant 0,$$

$$\varphi_2 = a_2\frac{q}{R} \qquad \text{при} \qquad z \geqslant 0.$$

Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Из непрерывности потенциала при $z = 0$ следует равенство констант $a_1 = a_2 = a$, значит, $\varphi = aq/R$. Равенство касательных составляющих электрического поля удовлетворяется автоматически, поскольку

$$\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\ \varphi = aq\mathbf{R}/R^3.$$

Кроме того, на границе раздела, вообще, нормальная составляющая $E_n = 0$, так как вектор $\mathbf{R}$ лежит в плоскости раздела при $z = 0$. Отсюда следует, что выполняется второе условие: $D_{1n}|_{z=0} = D_{2n}|_{z=0} = 0$, так как

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E} = \varepsilon_1 aq \frac{\mathbf{R}}{R^3}\ ,\ \ \mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E} = \varepsilon_2 aq \frac{\mathbf{R}}{R^3}\ .$$

Чтобы найти коэффициент a, вычислим поток вектора $\mathbf{D}$ через сферу радиуса R с центром в заряде:

$$\Phi = D_1 2\pi R^2 + D_2 2\pi R^2\ .$$

С другой стороны, по теореме Гаусса $\Phi = 4\pi q$. Приравнивая эти два выражения, получаем $a = 2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

Итак,

$$\varphi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q}{R}\ , \qquad \mathbf{E} = \frac{2q}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{\mathbf{R}}{R^3}\ ,$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q\mathbf{R}}{R^3} \qquad \text{при} \qquad z < 0\ ,$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q\mathbf{R}}{R^3} \qquad \text{при} \qquad z > 0\ .$$

Найденная функция потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям, значит, она является решением рассматриваемой задачи.

1.3. (Задача 2.5) Центр проводящего шара радиуса R (заряд q) находится на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти потенциал электрического поля, а также распределение свободных и связанных зарядов на поверхности шара.

Решение Решение этой задачи аналогично решению предыдущей задачи. Поэтому на границе металл диэлектрик

$$\varphi_{1,2} = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q}{R},$$

Из теоремы Гаусса

$$E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}|_{r=R} = 4\pi\sigma_{\text{связ.+своб.}}$$

$$D_n^{1,2} = \varepsilon_{1,2} E_n = 4\pi\sigma_{\text{своб.}}$$

$$D_n^{1,2} = -\varepsilon_{1,2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}|_{r=R} = \frac{2\varepsilon_{1,2}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{R^2} = 4\pi\sigma_{\text{своб.}}^{1,2}$$

Окончательно получаем

$$\varphi_{1,2} = \frac{2q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{r}, \;\; \sigma_{\text{своб}}^{1,2} = \frac{q\varepsilon_{1,2}}{2\pi R^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}, \;\; \sigma_{\text{связ}}^{1,2} = \frac{q(1-\varepsilon_{1,2})}{2\pi R^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}.$$

1.4. (Задача 2.6) От прямой, на которой находится точечный заряд q, расходятся веерообразно три полуплоскости, образующие три двугранных угла $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ таких, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 2\pi$. Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью соответственно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ Определить потенциал, напряженность и индукцию электрического поля в трех областях.

Решение Аналогично использованному в предыдущих задачах методу предположим, что общий вид решения для потенциала

$$\varphi_i = a_i\frac{q}{r}.$$

Из граничных условий равенства потенциала на соответствующих границах получаем как и ранее

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$$

Единственный неизвестный коэффициент в выражении $\varphi_i = \frac{cq}{r}$ находится из теоремы Гаусса

$$\int D\mathrm{d}s = 4\pi q.$$

Площадь сферы радиуса R равна $S = 4\pi R^2$ Для определения площади сегмента на радиусе R введем ось z вдоль линии раздела диэлектриков, тогда площадь каждого сегмента будет определяться углом α

$$S_{\text{сег}} = \frac{\alpha}{2\pi}4\pi R^2 = 2\alpha R^2.$$

Интеграл по поверхности при вычислении потока $\mathbf{D}$ разбивается на три части и в итоге получаем

$$2\left(D_{1n}\alpha_1 + D_{2n}\alpha_2 + D_{3n}\alpha_3\right)R^2 = 4\pi q$$

$$2c\left(\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3\right)q = 4\pi q.$$

Тогда константа c равна

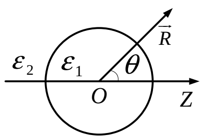
$$c = \frac{2\pi}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3}$$

И окончательно получаем

$$\varphi_i = \frac{2\pi q}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3}\frac{1}{r},$$
$$\mathbf{E}_i = \frac{2\pi q}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3}\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$
$$\mathbf{D}_i = \varepsilon_i\mathbf{E}_i, \text{ где } i = 1, 2, 3.$$

1.5. (Задача 2.8а) Однородный шар радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε_1 погружен в однородный неограниченный диэлектрик ε_2. На большом расстоянии от шара в диэлектрике имеется однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$. Найти потенциал и напряженность электрического поля во всем пространстве, а также распределение связанных зарядов на шаре и его поляризованность.

Решение Решение рассматриваемой задачи сводится к решению уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$. В сферической системе координат с центром в центре шара и с осью Z вдоль $\mathbf{E}_0$, в области $R \geqslant a$ решение будем искать в виде (см. решение задачи о металлическом шаре в однородном поле).



$$\varphi_2 = -E_0 z + A_2\frac{\mathbf{E}_0\mathbf{R}}{R^3} = -E_0 R\cos\theta + A_2\frac{E_0\cos\theta}{R^2}.$$

Введение члена $(-E_0 z)$ оправдывается тем, что на больших расстояниях от шара поле должно быть невозмущенным. Второй член учитывает поле от поляризованного шара в виде поля от дипольного момента $\sim E_0$. Для $R \leqslant a$ решение будем искать в виде

$$\varphi_1 = C_1 E_0 z \equiv C_1 E_0 R\cos\theta\ ,$$

т. е. предполагаем, что поле внутри шара однородно. Мы уже знаем из решения задачи для проводящего шара в однородном электрическом поле, что, для того чтобы скомпенсировать внешнее поле, шар приобретает дипольный момент. Заряды на поверхности распределятся таким образом, чтобы поле от них внутри шара равнялось внешнему полю $\mathbf{E}_0$ и было противоположно ему направлено. Каждый из потенциалов является решением уравнения Лапласа. Если мы подберем константы C_1 и A_2 так, чтобы удовлетворялись граничные условия, то функции φ_1 и φ_2 будут единственным решением поставленной задачи. Из условия непрерывности на поверхности шара потенциала $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ и нормальной составляющей электрической индукции

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R}\Big|_{R=a} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R}\Big|_{R=a}$$

следует, что

$$C_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}, \qquad A_2 = a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}.$$

Итак, шар приобретает дипольный момент

$$\mathbf{d} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 \mathbf{E}_0.$$

Распределение потенциала будет иметь вид

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 z \qquad \text{при} \qquad R \leqslant a\ ,$$

$$\varphi_2 = -E_0 z + \frac{\mathbf{dR}}{R^3} = -E_0 R \cos\theta + A_2 \frac{E_0 \cos\theta}{R^2} \qquad \text{при} \qquad R \geqslant a\ .$$

Производя такие же вычисления, как и в задаче о проводящем шаре, получаем выражения для напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \mathbf{E}_0 \qquad \text{при} \qquad R < a,$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{d}}{R^3} + \frac{3(\mathbf{dR})\mathbf{R}}{R^5} \quad \text{при} \qquad R > a.$$

Напряженность электрического поля внутри шара больше E_0, если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, и меньше E_0, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{св}}$ на границе раздела двух сред определяются формулой $\sigma_{\text{св}} = P_{1n}\big|_{R=a} - P_{2n}\big|_{R=a}$, где P_{1n}, P_{2n} – нормальные составляющие вектора поляризации. Орт нормали $\mathbf{n}$ проведен из первой среды во вторую. Поскольку

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{E}}{4\pi} = \frac{(\varepsilon - 1)\mathbf{E}}{4\pi}\ ,$$

то

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{1}{4\pi}\left[(\varepsilon_1 - 1)E_{1n}\big|_{R=a} - (\varepsilon_2 - 1)E_{2n}\big|_{R=a}\right]\ .$$

Вычислим E_{1n} и E_{2n} на поверхности шара:

$$E_{1n}\big|_{R=a} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial R}\Big|_{R=a} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos\theta\ ,$$

$$E_{2n}\Big|_{R=a} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial R}\Bigg|_{R=a} = E_0 \cos\theta + \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos\theta \ .$$

Окончательно

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{3}{4\pi} \ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos\theta \ .$$