1. Электрический ток

Урок 17

Закон 3/2

1.1. (Задача 3.32) Найти вольт-амперную характеристику плоского диода (площадь электродов – S, расстояние между ними – d), катод которого неограниченно испускает электроны с нулевой начальной скоростью (закон «3/2»). Считать, что электрическое поле у катода отсутствует (внешнее поле самого диода компенсируется полем образовавшегося между электродами объемного заряда).

Решение Запишем уравнение Пуассона для координаты x, отсчитываемой от катода (заземленного электрода):

$$\triangle\varphi(x) = -4\pi\rho, \;\; \rho = j/v.$$

Из закона сохранения энергии отдельного электрона в поле всех остальных

$$mv^2/2 = e\varphi(x),$$

откуда

$$v(x) = \sqrt{2e \cdot \varphi(x)/m}.$$

Подставляя выражение для скорости через потенциал в уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{2e}\frac{J}{S}}\varphi^{-1/2} \equiv A\varphi^{-1/2}, \;\text{ где }\; A = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{e}\frac{J}{S}}.$$

Граничные условия на катоде и аноде имеют вид

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(d) = U, \quad (d\varphi/dx)_{x=0} = 0,$$

причем третье условие – это условие равенства нулю электрического поля вблизи анода.

Представим уравнение в виде

$$dx \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{2}d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = A\varphi^{-1/2}d\varphi$$

и проинтегрируем его, домножив обе части на 2:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 2A\int \varphi^{-1/2}d\varphi = 4A\varphi^{1/2} + C_1,$$

$C_1 = 0$ из граничных условий $\varphi(0) = 0$ и $E(0) = 0$.

Тогда
$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{A}\varphi^{1/4} \Rightarrow 2\sqrt{A}dx = \varphi^{-1/4}d\varphi.$$

Интегрируем еще раз:
$$2\sqrt{A}x = \int \varphi^{-1/4}d\varphi = \frac{4}{3}\varphi^{3/4} + C_2; \quad C_2 = 0 \quad \text{при} \quad \varphi(0) = 0.$$

Так как $\varphi(d) = U$, то
$$2\sqrt{A}d = \frac{4}{3}U^{3/4}, \quad \text{откуда} \quad \frac{9}{4}Ad^2 = U^{3/2}.$$

Подставляя
$$A = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{e}} \cdot \frac{J}{S},$$
имеем
$$\frac{9}{4} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{2m}{e}} \cdot \frac{Jd^2}{S} = U^{3/2},$$
т. е.
$$J = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{S}{d^2} \cdot U^{3/2}.$$

1.2. (Задача 3.33) Обобщить закон «3/2» на область ультрарелятивистских энергий.

Решение Единственное, что отличает релятивистский случай от нерелятивистского – это закон сохранения энергии. Уравнение Пуассона и граничные условия остаются в том же виде.
$$\triangle\varphi(x) = -4\pi\rho, \;\; \rho = j/v.$$
Теперь наша задача – найти релятивистскую зависимость v от φ. В релятивистской механике закон сохранения энергии записывается в виде
$$\gamma mc^2 - e\varphi = mc^2, \;\; \text{или } \gamma - \frac{e}{mc^2}\varphi = 1.$$
Выбрав систему единиц, в которой $e = 1,\; m = 1,\; c = 1,$ и, следовательно, $e/mc^2 = 1$, т.е. потенциал измеряется в единицах e/mc^2, скорость измеряется в единицах скорости света и т.д., получим
$$\gamma = 1 + \varphi, \; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \varphi, \; v = \beta = \frac{\sqrt{\varphi(\varphi+2)}}{1+\varphi}.$$

Уравнение Пуассона для релятивистских электронов тогда запишется в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi j \frac{1+\varphi}{\sqrt{\varphi(\varphi+2)}}.$$

используя тот же прием, что и ранее, т.е. домножив обе части уравнения на $\frac{dvarphi}{dx}$, уравнение можно один раз проинтегрировать, и , используя граничное условие на катоде, получим первый интеграл

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = -4\pi j\sqrt{\varphi(\varphi+2)}.$$

К сожалению проинтегрировать это уравнение в рациональных функциях не удается, и мы рассмотрим ультрарелятивистский предел, т.е. $\gamma \gg 1$, откуда $\varphi \gg 1$. Тогда первый интеграл перепишется в виде

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(-8\pi j\varphi\right)^{1/2}.$$

Интегрируя и используя граничные условия, получаем решение

$$\varphi = -2\pi j x^2,$$

а при $x = d$, используя $\varphi(d) = U$, получаем соотношение типа закона Ома

$$j = -\frac{U}{2\pi d^2}, \text{(в обезразмеренных единицах)},$$

а в единицах CGSE

$$j = \frac{cU}{2\pi d^2}.$$

1.3. Найти вольтамперную характеристику цилиндрического диода с нулевым радиусом катода (радиус анода a).

Решение Уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат записывается так:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\varphi(R)}{dR}\right) = -4\pi\rho(R) = \frac{4\pi J}{2\pi R\ell}\sqrt{\frac{m}{2e}}\varphi^{-1/2}(R),$$

т. е.

$$\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\varphi}{dR}\right) = \frac{J}{\ell}\sqrt{\frac{2m}{e}}\varphi^{-1/2} = A\varphi^{-1/2}; \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi(a) = U.$$

Ищем решение в виде $\varphi(R) = CR^\alpha$.

Подставляем в уравнение и получаем

$$C\alpha(\alpha-1)R^{\alpha-1} = AC^{-1/2}R^{-\alpha/2}.$$

Степени R должны быть одинаковы: $\alpha - 1 = -\alpha/2$, откуда $\alpha = \frac{2}{3}$.

Подставляя $\alpha = \frac{2}{3}$ в предыдущее уравнение и сокращая на $R^{2/3}$, получаем уравнение для C:

$$\frac{9}{4}C = AC^{-1/2},$$

откуда

$$C = \left(\frac{4A}{9}\right)^{2/3}.$$

Таким образом,

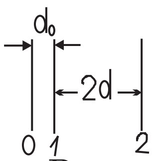
$$\varphi(R) = \left(\frac{4A}{9}\right)^{2/3},$$

откуда

$$U = \frac{4aA}{9}, \qquad J = \frac{2\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{\ell}{a}\sqrt{\frac{e}{m}}U^{3/2}.$$

3.40.

1.4. Между плоскостями 1, 2, имеющими потенциалы U_1 и U_2, проходит поток электронов, испускаемых плоскостью O с потенциалом $U = 0$. Найти максимальную плотность тока, поступающего на плоскость 2 при работе системы в режиме виртуального катода, если расстояние $d_0 \ll 2d$. Нарисовать ход потенциала между пластинами.



Решение При прохождении потока электронов между электродами 1 и 2 с потенциалами U_1 и U_2 из-за образования объемного заряда происходит «провисание» потенциала $U(x)$ вплоть до зануления в плоскости, находящейся на расстоянии x_m от электрода 1. Так как $d_0 \ll 2d$ по условию, то и на расстоянии x_m от реального катода $U = 0$). В этой плоскости скорости электронов обращаются в нуль и часть электронов поворачивает обратно к электроду 1. Такое «провисание» потенциала до нулевого значения называется образованием виртуального катода 3.

Теперь от электрода 1 идет ток с плотностью j_1, от виртуального катода 3 в обратном направлении идет отраженный ток $-j_3$ и к электроду 2 приходит ток с плотностью j_2: $j_2 = j_1 - j_3$.

Отсюда максимальный ток на аноде 2 j_{2max} получается в режиме возникновения виртуального катода, если отраженный ток j_3 обращается в нуль, т. е.

$$j_{2max} = j_1, \quad \text{при} \quad j_3 = 0. \tag{1}$$

Заметим, что режим виртуального катода соответствует при этом тому, что образовались как бы два диода с общим катодом, которые включены навстречу друг другу.

У одного анодное напряжение U_1, у другого U_2. В плоском диоде с расстоянием между электродами $2d$ и напряжением на аноде U_2 вольт-амперная характеристика выглядит так (см. задачу 3.32):

$$j_0 = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{U_2^{3/2}}{(2d)^2}. \tag{2}$$

Тогда

$$j_2 = \frac{AU_2^{3/2}}{(2d - x_m)^2}, \quad j_1 = \frac{AU_1^{3/2}}{x_m^2} = j_0\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2\frac{(2d)^2}{x_m^2}. \tag{3}$$

Введем безразмерные параметры:

$$k = (U_1/U_2)^{1/2} \quad \text{и} \quad \ell = x_m/2d, \quad \ell < 1.$$

Подставляя j_1 и j_2 из уравнения (3) в уравнение (1) и сокращая на j_0, получаем $1/(1-\ell)^2 = k^3/\ell^2$, откуда для ℓ следует квадратное уравнение:

$$\ell^2 = k^3 - 2k^3\ell + k^3\ell^2$$

.

Записываем уравнение в стандартной форме:

$$(k^3 - 1)\ell^2 - 2k^3\ell + k^3 = 0$$

и получаем решение

$$\ell_{1,2} = \frac{k^3 \pm \sqrt{k^6 - k^6 + k^3}}{k^3 - 1} = \frac{k^3 \pm k^{3/2}}{k^3 - 1}.$$

Оставляем лишь один корень, отвечающий условию $\ell < 1$.

$$\ell = \frac{k^3 - k^{3/2}}{k^3 - 1} = \frac{k^{3/2}(k^{3/2} - 1)}{(k^{3/2})^2 - 1} = \frac{k^{3/2}}{k^{3/2} + 1} = \frac{1}{1 - k^{-3/2}},$$

т. е.

$$\frac{x_m}{2d} = \frac{1}{1 + (U_2/U_1)^{3/4}}.$$

Таким образом,

$$x_m = \frac{2d}{1 + (U_2/U_1)^{3/4}},$$

$$j_{2max} = \frac{AU_2^{3/2}}{(2d - x_m)^2} = \frac{AU_2^{3/2}}{4d^2(1-\ell)^2} = \frac{AU_2^{3/2}}{4d^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{(U_2/U_1)^{3/4}}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{A}{4d^2}\left(U_1^{3/4} + U_2^{3/4}\right)^2.$$

$$j_{2max} = \frac{\sqrt{2}}{9\pi \cdot (2d)^2} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \left(U_1^{3/4} + U_2^{3/4}\right)^2.$$