Занятие 20

Разделение переменных в уравнении Гельмгольца

Уравнением Гельмгольца называется уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa^2 u = 0 \qquad (n = 2) \tag{20.1}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varkappa^2 u = 0 \qquad (n = 3) \tag{20.2}$$

Это уравнение занимает центральное место в любом курсе методов математической физики, потому что к нему сводится большое число разнообразных задач.

Мы будем искать специальные частные решения этого уравнения, а именно — решения, которые допускают представление в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Так, например, если искать решения уравнения (20.1) в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$, то уравнение примет вид

$$X''Y + XY'' + \varkappa^2 XY = 0.$$

Поскольку нас интересуют решения, отличные от тождественно нулевого, то, поделив обе части уравнения на $X(x)Y(y)$, получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \varkappa^2 = 0.$$

Переписав это уравнение в виде

$$\frac{Y''}{Y} + \varkappa^2 = -\frac{X''}{X},$$

заметим, что в его левой части записана функция, зависящая только от y, а в правой — функция, зависящая только от x. Их равенство возможно, если только они являются тождественно постоянными функциями.

Обозначив $\dfrac{X''}{X} = -\alpha$, для функции Y получим уравнение

$$\frac{Y''}{Y} + \varkappa^2 - \alpha = 0.$$

Таким образом, уравнения для функций $X(x)$ и $Y(y)$ разделились, и мы получили систему

$$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0 \\ Y'' + (\varkappa^2 - \alpha)Y = 0. \end{cases}$$

Описанный алгоритм и называется «разделением переменных». Параметр α называется константой разделения.

Поиск решения уравнения (20.2) в виде $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ приводит к системе

$$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0, \\ Y'' + \beta Y = 0, \\ Z'' + (\varkappa^2 - \alpha - \beta)Z = 0. \end{cases}$$

Здесь мы имеем уже две константы разделения: α и β.

Зададимся вопросом: возможно ли разделение переменных в уравнении Гельмгольца в других системах координат?

Говорят, что на плоскости задана *криволинейная система координат* $(q_1; q_2)$, если декартовы координаты $(x; y)$ являются взаимно однозначными функциями переменных q_1, q_2, то есть

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \end{cases}$$

и якобиан $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(q_1, q_2)}$ отличен от нуля (за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(q_1, q_2)} = 0$)

Соотношения $q_1 = const$ и $q_2 = const$ определяют на плоскости xOy два семейства *координатных линий.* Далее мы будем рассматривать только ортогональные системы координат, то есть такие, для которых координатные линии ортогональны (в точке пересечения линий их касательные векторы ортогональны).

Рассмотрим элемент дуги координатной линии $dl = H_i dq_i$. Соответствующий коэффициент H_i называется коэффициентом Ламе. Часто его можно найти, исходя из геометрических соображений, или же вычислить по формуле

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2, \qquad i = 1, 2.$$

Уравнение Гельмгольца (20.1) в произвольной ортогональной системе координат имеет вид

$$\frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)\right] + \varkappa^2 u = 0.$$

Говорят, что к некоторой системе координат уравнение Гельмгольца *допускает разделение переменных*, если можно найти частные решения этого уравнения в виде

$$u = F(q_1)\cdot G(q_2).$$

На плоскости уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных только в четырёх системах координат: декартовой, полярной, параболической и эллиптической. Сейчас мы опишем эти системы координат и произведём разделение переменных.

Полярная система координат.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho$$

Координатные линии — окружности и лучи (рис. 20.1).

Уравнение Гельмгольца в полярных координатах:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \varkappa^2 u = 0$$

Ищем решение в виде $u = F(\rho)\cdot G(\varphi)$. Получаем уравнение

$$\frac{1}{\rho F}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dF}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{G''}{G} + \varkappa^2 = 0$$

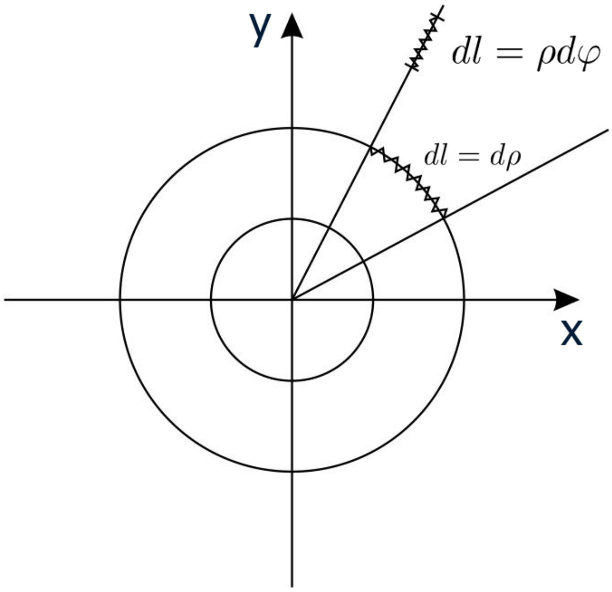

Рис. 20.1. Координатные линии полярной системы координат.

$$\begin{cases} G'' + \alpha G = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\Big(\rho\dfrac{dF}{d\rho}\Big) + (\varkappa^2 - \dfrac{\alpha}{\rho^2})F = 0 \end{cases}$$

Параболическая система координат.

$$\begin{cases} x = \sigma\tau \\ y = \dfrac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \end{cases} \qquad H_\sigma^2 = H_\tau^2 = \tau^2 + \sigma^2.$$

Координатные линии - параболы (рис. 20.2). Их уравнения:

$$\begin{cases} 2y = \dfrac{x^2}{\sigma^2} - \sigma^2, \\ 2y = \tau^2 - \dfrac{x^2}{\tau^2}. \end{cases}$$

Уравнение Гельмгольца в параболической системе координат:

$$\frac{1}{\tau^2 + \sigma^2}(u_{\sigma\sigma} + u_{\tau\tau}) + \varkappa^2 u = 0$$

Ищем решение в виде $u = F(\tau) \cdot G(\sigma)$. Тогда

$$\frac{G''}{G} + \frac{F''}{F} + (\sigma^2 + \tau^2)\varkappa^2 = 0$$

Обозначив $\dfrac{G''}{G} + \sigma^2\varkappa^2 = -\alpha$, приходим к системе

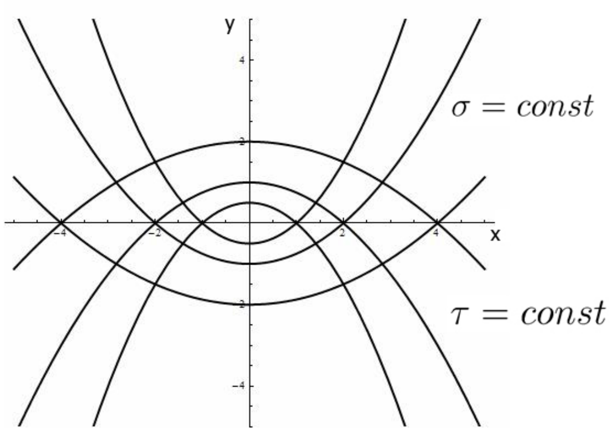

Рис. 20.2. Координатные линии параболической системы координат.

$$\begin{cases} G'' + (\sigma^2\varkappa^2 + \alpha)G = 0 \\ F'' + (\tau^2\varkappa^2 - \alpha)F = 0 \end{cases}$$

Эллиптическая система координат.

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch}\alpha \cdot \cos\beta \\ y = a \operatorname{sh}\alpha \cdot \sin\beta \end{cases} \qquad H_\alpha^2 = H_\beta^2 = a^2(sh^2\alpha + \sin^2\beta)$$

Координатными линиями являются эллипсы

$$\frac{x^2}{(a \operatorname{ch}\alpha)^2} + \frac{y^2}{(a \operatorname{sh}\alpha)^2} = 1$$

и софокусные с ними гиперболы

$$\frac{x^2}{(a\cos\beta)^2} - \frac{y^2}{(a\sin\beta)^2} = 1$$

Уравнение Гельмгольца в эллиптической системе координат:

$$\frac{1}{a^2(\operatorname{sh}^2\alpha \sin^2\beta)}(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}) + \varkappa^2 u = 0$$

Ищем решение в виде $u = F(\alpha) \cdot G(\beta)$. Тогда

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} + \varkappa^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)a^2 = 0$$

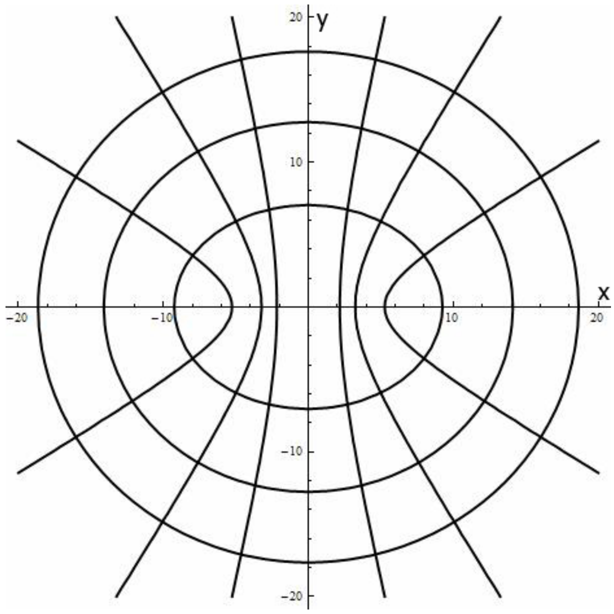

Рис. 20.3. Координатные линии эллиптической системы координат.

$$\begin{cases} F'' + (a^2 \varkappa^2 \operatorname{sh}^2 \alpha + \lambda) F = 0 \\ G'' + (a^2 \sin^2 \beta - \lambda) G = 0 \end{cases}$$

Здесь λ - константа разделения.

Перейдем к разделению переменных в уравнении Гельмгольца в трехмерном пространстве. Говорят, что в пространстве задана криволинейная система координат, если декартовы координаты x, y, z являются взаимно однозначными функциями переменных q_1, q_2, q_3:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3), \end{cases} \qquad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0.$$

Для каждой такой системы координат существуют три семейства координатных поверхностей $q_i = const$, $i = 1, 2, 3$. Пересечение двух координатных поверхностей образует координатную линию, вдоль которой меняется только одна координата. При этом, вдоль координатной линии

$$dl = H_i dq_i, \quad \text{где}$$

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \text{ — коэффициент Ламе.}$$

Уравнение Гельмгольца в произвольной ортогональной системе координат имеет вид

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)\right]+\varkappa^2u=0$$

Говорят, что в этой системе координат уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных, если можно найти решение уравнения вида

$$u=F(q_1)\cdot G(q_2)\cdot H(q_3).$$

Всего существует 11 таких систем координат, мы рассмотрим две из них — сферическую и цилиндрическую, которые используются особенно часто.

Цилиндрическая система координат.

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \qquad H_\rho=1\,,\quad H_\varphi=\rho\,,\quad H_z=1.$$

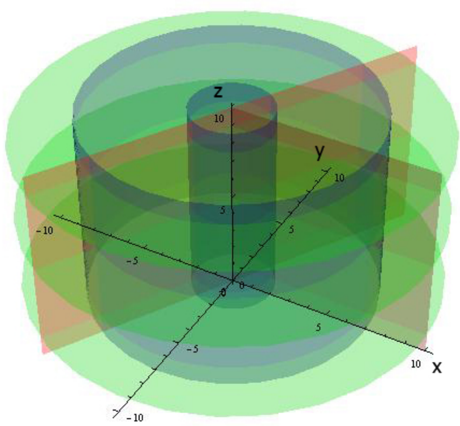

Рис. 20.4. Координатные поверхности цилиндрической системы координат.

Уравнение Гельмгольца в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\varkappa^2u=0.$$

Ищем решение в виде $u=R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\cdot F(z)$. Тогда

$$\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi}+\frac{F''}{F}+\varkappa^2=0$$

$$\begin{cases}\Phi''+\alpha\Phi=0,\\ F''+\beta F=0,\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)+(\varkappa^2-\dfrac{\alpha}{\rho^2}-\beta)R=0.\end{cases}$$

Сферическая система координат.

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\theta,\end{cases}\qquad H_r=1\,,\quad H_\theta=r\,,\quad H_\varphi=r\sin\theta.$$

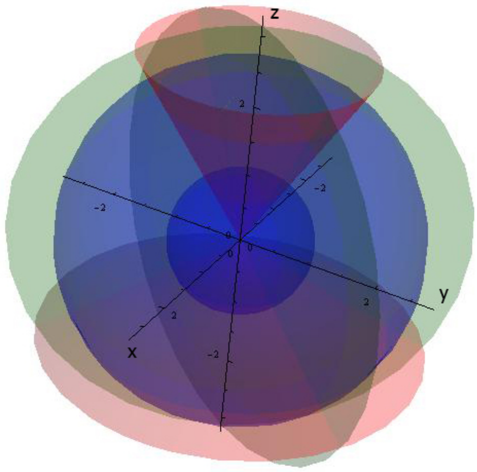

Рис. 20.5. Координатные поверхности сферической системы координат.

Уравнение Гельмгольца в сферической системе координат:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\varkappa^2u=0.$$

Ищем решение в виде $u=R(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot F(\theta)$. Тогда

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{F}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dF}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right]+\varkappa^2=0$$

$$\begin{cases} \Phi'' + \alpha\Phi = 0, \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{dF}{d\theta}\right) + \left(\beta - \dfrac{\alpha}{\sin^2\theta}\right)F = 0, \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right) + \left(\varkappa^2 - \dfrac{\beta}{r^2}\right)R = 0. \end{cases}$$

Самостоятельная работа

1. В результате вращения вокруг оси Ox эллиптической системы координат на плоскости, мы получим в трёхмерном пространстве систему координат

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch}\alpha \cos\beta, \\ y = a \operatorname{sh}\alpha \sin\beta \cos\varphi, \\ z = a \operatorname{sh}\alpha \sin\beta \sin\varphi. \end{cases}$$

Нарисуйте эскиз координатных поверхностей, укажите координатные линии, найдите коэффициенты Ламе.

2. В результате вращения вокруг оси Oy эллиптической системы координат на плоскости, мы получим в трёхмерном пространстве систему координат

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch}\alpha \cos\beta \cos\varphi, \\ y = a \operatorname{sh}\alpha \sin\beta, \\ z = a \operatorname{ch}\alpha \cos\beta \sin\varphi. \end{cases}$$

Нарисуйте эскиз координатных поверхностей, укажите координатные линии, найдите коэффициенты Ламе.

3. Покажите, что уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в описанных системах координат.