Семинар 7. *(23 сентября 2024 г.)*

Характеристические поверхности. Задача Коши для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными

1. *Примеры решения задач Коши*

№ 38 из задачника Н. Л. Абашеевой. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y - \dfrac{1}{16}u = 0; \\ u|_{x=0} = 2ye^{\frac{y}{8}}; \\ u_x|_{x=0} = (2 + \dfrac{y}{4})e^{\frac{y}{8}}. \end{cases}$$

Решение. Сначала приведем уравнение к каноническому виду. Это уравнение с постоянными коэффициентами, поэтому воспользуемся методом квадратичной формы. Запишем квадратичную форму, которая соответствует старшей части уравнения:

$$\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 - 3\xi_2^2$$

Приведем эту квадратичную форму к такому виду, чтобы осталось только смешанное слагаемое:

$$\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 - 3\xi_2^2 = (\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2) - 4\xi_2^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 - 4\xi_2^2 = \\ = \eta_1^2 - \eta_2^2 = (\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 + \eta_2) = \zeta_1\zeta_2,$$

где $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2$, $\eta_2 = 2\xi_2$, $\zeta_1 = \eta_1 - \eta_2$, $\zeta_2 = \eta_1 + \eta_2$. Отсюда

$$\xi_1 = \eta_1 + \frac{\eta_2}{2} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{4} = \frac{3\zeta_2 + \zeta_1}{4},$$

$$\xi_2 = \frac{\eta_2}{2} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{4}.$$

Тогда

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = T\zeta$$

Сделаем замену в уравнении:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Пересчитаем первую производную

$$u_y = -\frac{1}{4}u_{\tilde{x}} + \frac{1}{4}u_{\tilde{y}}$$

Итак, канонический вид уравнения:

$$u_{\tilde{x}\tilde{y}} - \frac{1}{4}u_{\tilde{x}} + \frac{1}{4}u_{\tilde{y}} - \frac{1}{16}u = 0.$$

2) Преобразуем уравнение

$$u_{\tilde{x}\tilde{y}} - \frac{1}{4}u_{\tilde{x}} + \frac{1}{4}u_{\tilde{y}} - \frac{1}{16}u = (u_{\tilde{y}} - \frac{1}{4}u)_{\tilde{x}} + \frac{1}{4}(u_{\tilde{y}} - \frac{1}{4}u) = 0.$$

и введем замену $v = u_{\tilde{y}} - \frac{1}{4}u$. В результате получим уравнение в ЧП первого порядка

$$v_{\tilde{x}} + \frac{1}{4}v = 0.$$

Поскольку данное уравнение не содержит производной по $\tilde{y}$, его можно решать как линейное однородное ОДУ:

$$\frac{dv}{d\tilde{x}} = -\frac{1}{4}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{1}{4}d\tilde{x} \Rightarrow \ln|v| = -\frac{1}{4}\tilde{x} + C(\tilde{y}) \Rightarrow v = \tilde{C}(\tilde{y})e^{-\frac{\tilde{x}}{4}}$$

Здесь добавлена произвольная функция $C(\tilde{y})$, зависящая от $\tilde{y}$ вместо константы (в отличие от ОДУ), поскольку v зависит от двух переменных. Подставим выражение для v и получим уравнение для u:

$$v = u_{\tilde{y}} - \frac{1}{4}u = \tilde{C}(\tilde{y})e^{-\frac{\tilde{x}}{4}}$$

Данное уравнение можно решать как линейное неоднородное ОДУ:

$$\frac{du}{d\tilde{y}} = \frac{1}{4}u + \tilde{C}(\tilde{y})e^{-\frac{\tilde{x}}{4}}.$$

Найдем общее решение однородного уравнения

$$\frac{du}{d\tilde{y}} = \frac{1}{4}u \Rightarrow u_{\text{о.р.о}} = f(\tilde{x})e^{\frac{\tilde{y}}{4}}.$$

Частное решение неоднородного уравнения найдем методом вариации произвольной постоянной. Положим $f = f(\tilde{x}, \tilde{y})$ и подставим $u_{\text{ч.р.н.}} = f(\tilde{x}, \tilde{y})e^{\frac{\tilde{y}}{4}}$ в уравнение:

$$\frac{du}{d\tilde{y}} = f'_{\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y})e^{\frac{\tilde{y}}{4}} + \frac{1}{4}f(\tilde{x}, \tilde{y})e^{\frac{\tilde{y}}{4}} = \frac{1}{4}f(\tilde{x}, \tilde{y})e^{\frac{\tilde{y}}{4}} + \tilde{C}(\tilde{y})e^{-\frac{\tilde{x}}{4}}.$$

Отсюда

$$f'_{\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{C}(\tilde{y})e^{-\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{4}}$$

Проинтерируем по $\tilde{y}$:

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = e^{-\frac{\tilde{x}}{4}} \int\limits_{\tilde{y}_0}^{\tilde{y}} \tilde{C}(s)e^{-\frac{s}{4}}ds$$

Обозначим $g(\tilde{y}) := \int\limits_{\tilde{y}_0}^{\tilde{y}} \tilde{C}(s)e^{-\frac{s}{4}}ds$, где $g(\tilde{y})$ — произвольная функция, которую мы найдем из начальных условий. Тогда $u_{\text{ч.р.н.}} = f(\tilde{x}, \tilde{y})e^{\frac{\tilde{y}}{4}} = e^{\frac{\tilde{y}}{4}}e^{-\frac{\tilde{x}}{4}}g(\tilde{y})$

$$u_{\text{о.р.н.}} = u_{\text{о.р.о.}} + u_{\text{ч.р.н.}} = (f(\tilde{x}) + e^{-\frac{\tilde{x}}{4}}g(\tilde{y}))e^{\frac{\tilde{y}}{4}}.$$

3) Запишем общее решение уравнения в старых переменных:

$$u(x, y) = \left(f\left(\frac{x-y}{4}\right) + e^{-\frac{x-y}{16}}g\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right)e^{\frac{3x+y}{16}} = \\ = e^{\frac{3x+y}{16}}f\left(\frac{x-y}{4}\right) + e^{\frac{x+y}{8}}g\left(\frac{3x+y}{4}\right)$$

4) Подставим начальные условия:

$$u|_{x=0} = e^{\frac{y}{16}}f\left(-\frac{y}{4}\right) + e^{\frac{y}{8}}g\left(\frac{y}{4}\right) = 2ye^{\frac{y}{8}}$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{y}{16}}f'\left(\frac{-y}{4}\right) + 3e^{\frac{y}{8}}g'\left(\frac{y}{4}\right)\right) + \\ + \frac{3}{16}e^{\frac{y}{16}}f\left(\frac{-y}{4}\right) + \frac{1}{8}e^{\frac{y}{8}}g\left(\frac{y}{4}\right) = (2+\frac{y}{4})e^{\frac{y}{8}}.$$

Обозначим $t = \frac{y}{4}$ и получим два уравнения для двух неизвестных функций, зависящих от t:

$$u|_{x=0} = e^{\frac{t}{4}}f\left(-t\right) + e^{\frac{t}{2}}g\left(t\right) = 8te^{\frac{t}{2}}$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{t}{4}}f'\left(-t\right) + 3e^{\frac{t}{2}}g'\left(t\right)\right) + \frac{3}{16}e^{\frac{t}{4}}f\left(-t\right) + \frac{1}{8}e^{\frac{t}{2}}g\left(t\right) = (2+t)e^{\frac{t}{2}}.$$

Из первого уравнения выразим $g(t)$, продифференцируем

$$g(t) = 8t - e^{-\frac{t}{4}}f(-t), \quad g'(t) = 8 + e^{-\frac{t}{4}}(\frac{1}{4}f(-t) + f'(-t))$$

и подставим во второе уравнение:

$$\frac{1}{4}\left(e^{\frac{t}{4}}f'\left(-t\right) + 3e^{\frac{t}{2}}g'\left(t\right)\right) + \frac{3}{16}e^{\frac{t}{4}}f\left(-t\right) + \frac{1}{8}e^{\frac{t}{2}}g\left(t\right) = \\ = e^{\frac{t}{4}}f'(-t) + \frac{e^{\frac{t}{4}}}{4}f(-t) + 6e^{\frac{t}{2}} + te^{\frac{t}{2}} = 2e^{\frac{t}{2}} + te^{\frac{t}{2}}.$$

Пусть $s = -t$, тогда

$$f'(s) + \frac{1}{4}f(s) = -4e^{-\frac{s}{4}}.$$

Найдем решение линейного неоднородного ОДУ:

$$f_{\text{о.р.н.}}(s) = f_{\text{о.р.о}}(s) + f_{\text{ч.р.н.}}(s) = (C - 4s)e^{-\frac{s}{4}}$$

Далее найдем $g(t)$:

$$g(t) = 8t - e^{-\frac{t}{4}}f(-t) = 8t - e^{-\frac{t}{4}}((C+4t)e^{\frac{t}{4}}) = 4t - C$$

В итоге

$$u(x,y) = e^{\frac{3x+y}{16}}f\left(\frac{x-y}{4}\right) + e^{\frac{x+y}{8}}g\left(\frac{3x+y}{4}\right) = \\ = e^{\frac{x+y}{8}}(C + y - x) + e^{\frac{x+y}{8}}(3x + y - C) = 2e^{\frac{x+y}{8}}(x+y).$$