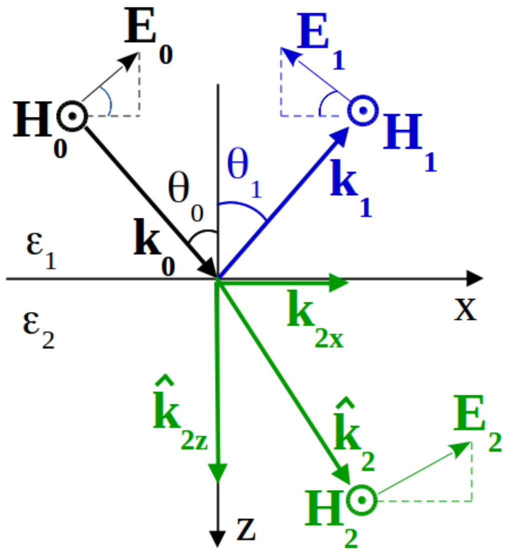
Полное внутреннее отражение для TM-волны



Задача

Плоская монохроматическая ТМ-волна падает на плоскую границу раздела (г.р.) двух диэлектриков с параметрами ε_1 и ε_2 ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $\mu_{1,2} = 1$) под углом падения θ_0, превышающим угол полного внутреннего отражения. Индексы "0", "1" и "2" при E и H относятся к падающей, отраженной и преломленной волнам соответственно. Ось z направлена по нормали к г.р. (из среды 1 в среду 2), ось x - параллельно г.р. в плоскости падения. Определить амплитудные коэффициенты отражения и пропускания.

Решение

Граничные условия для тангенциальных компонент **E** и **H**

$$\begin{cases} H_{0y} & +H_{1y} & = & H_{2y} \\ E_{0x} & +E_{1x} & = & E_{2x} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь E_i и H_i - комплексные числа (напр., $E_0 = E_{0m}e^{i(k_{0x}x-\omega t+\phi_0)}$). Перепишем систему уравнений (1) с учетом $\cos\theta_0 = \frac{k_{0z}}{k_0} = \cos\theta_1 = \frac{k_{1z}}{k_1}$, $\cos\theta_2 = \frac{k_{2z}}{k_2}$, $H_i = \frac{ck_i}{\omega}E_i$ *:

$$\begin{cases} k_0E_0 & +k_1E_1 & = & k_2E_2 \\ \frac{k_{0z}}{k_0}E_0 & +\frac{k_{1z}}{k_1}E_1 & = & \frac{k_{2z}}{k_2}E_2 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} k_0E_0 & +k_0E_1 & = & k_2E_2 \\ \frac{k_{0z}}{k_0}E_0 & -\frac{k_{0z}}{k_0}E_1 & = & \frac{k_{2z}}{k_2}E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_0E_1 & -k_2E_2 & = & -k_0E_0 \\ \frac{k_{0z}}{k_0}E_1 & +\frac{k_{2z}}{k_2}E_2 & = & \frac{k_{0z}}{k_0}E_0 \end{cases}$$

Далее удобно перейти к переменным $\zeta_1 = \frac{E_1}{E_0}$ $\zeta_2 = \frac{E_2}{E_0}$:

$$\begin{cases} k_0\zeta_1 & -k_2\zeta_2 & = & -k_0 \\ \frac{k_{0z}}{k_0}\zeta_1 & +\frac{k_{2z}}{k_2}\zeta_2 & = & \frac{k_{0z}}{k_0} \end{cases}$$

Запишем систему в матричной форме и найдем решение по правилу Крамера:

$$\begin{pmatrix} k_0 & -k_2 \\ \frac{k_{0z}}{k_0} & \frac{k_{2z}}{k_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_0 \\ \frac{k_{0z}}{k_0} \end{pmatrix} \Rightarrow \zeta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{k_2}{k_0}k_{0z} - \frac{k_0}{k_2}k_{2z}}{\frac{k_2}{k_0}k_{0z} + \frac{k_0}{k_2}k_{2z}},\ \zeta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2k_{0z}}{\frac{k_2}{k_0}k_{0z} + \frac{k_0}{k_2}k_{2z}} \tag{3}$$

Выразим проекции волновых векторов через углы падения и преломления:

$$\begin{aligned} &k_{0z} = k_0\cos\theta_0 \\ &k_{2z} = \pm\sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \pm\sqrt{k_0^2\frac{n_2^2}{n_1^2} - k_{0x}^2} = \pm\sqrt{k_0^2\frac{n_2^2}{n_1^2} - k_0^2\sin^2\theta_0} = \pm ik_0\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} \end{aligned} \tag{4}$$

Учтено, что в случае полного внутреннего отражения $\frac{n_2}{n_1} < \sin\theta_0$. Кроме того надо выбрать знак "+", так как волне, затухающей в глубь среды 2 (в направлении z), соответствует фаза $(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2) - \omega t = = k_{2x}x + i|k_{2z}|z - \omega t$.

*Чтобы не вникать в геометрический смысл θ_2, получим x-компоненту вектора $\mathbf{E_2}$ исходя из общего векторного равенства $\mathbf{E_2} = -\frac{c}{n_2\omega}[\mathbf{k_2} \times \mathbf{H_2}]$, откуда $E_{2x} = \frac{c}{n_2\omega}k_{2z}H_2 = \frac{k_{2z}}{k_2}E_2$.

С учетом (4) соотношения (3) приобретают вид:

$$\zeta_1 = \frac{k_2\cos\theta_0 - \frac{k_0^2}{k_2} i\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}}{k_2\cos\theta_0 + \frac{k_0^2}{k_2} i\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}} = \frac{\frac{n_2^2}{n_1^2}\cos\theta_0 - i\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}}{\frac{n_2^2}{n_1^2}\cos\theta_0 + i\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}}, \quad \zeta_2 = \frac{2\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_0}{\frac{n_2^2}{n_1^2}\cos\theta_0 + i\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}}.$$

Из полученных соотношений следуют три особенности, возникающие при полном внутреннем отражении:

1. Отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей волны. Величина сдвига непрерывно растет с увеличением угла падения.

2. Преломленная волна не является плоской, так как ее амплитуда зависит от z согласно

$$E_2(\mathbf{r}, t) = E_{20}\, \mathrm{e}^{-|k_{2z}|z}\, \mathrm{e}^{i(k_{0x}x - \omega t)}\,.$$

3. При фиксированном z преломленная волна имеет локальные компоненты H_{2y} и E_{2z}, связанные между собой, как в плоской поперечной волне:

$$\mathbf{H_{2y}} = -\frac{c}{\omega}[\mathbf{k_{2x}} \times \mathbf{E_{2z}}].$$

Однако наряду с "поперечными" в преломленной волне содержится "продольная" компонента поля $\mathbf{E_2}$:

$$\mathbf{E_{2x}} = \frac{c}{\varepsilon_2\omega}[i\mathbf{k_{2z}} \times \mathbf{H_{2y}}],$$

где $\mathbf{k_{2z}} \equiv (0, 0, |k_{2z}|)$.

"Продольная" компонента сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно компонент $H_2 = H_{2y}$ и E_{2z}. Именно благодаря наличию фазового сдвига z-компонента вектора Пойнтинга, усредненная по времени, равна нулю:

$$< S_z > = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left\{E_{2x}H_{2y}^*\right\} = 0.$$