Занятие 25

Решение дифференциальных уравнений в виде степенных рядов.

На предыдущем занятии мы рассмотрели некоторые приемы решения линейных уравнений с переменными коэффициентами, но все они так или иначе содержали элемент «везения». Естественно, возникает вопрос — существует ли алгоритм построения ФСР уравнения с переменными коэффициентами в более общем случае?

Поскольку в приложениях зачастую встречаются уравнения, коэффициенты которых являются полиномами или отношениями полиномов, метод, с которым мы сейчас познакомимся, можно считать универсальным ответом на поставленный вопрос. Идея этого метода заключается в построении решения в виде степенного ряда.

Напомним, что функция $y(x)$ называется аналитической в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки она допускает представление в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - x_0)^k. \tag{25.1}$$

Коэффициенты c_k вычисляются по формуле $c_k = \dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Известно, что если функция $f(x;y)$ является аналитической в точке $(x_0;y_0)$, то есть в некоторой окрестности этой точки допускает представление

$$f(x;y) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} a_{mn}(x - x_0)^m (y - y_0)^n,$$

то задача Коши для уравнения $y' = f(x;y)$ с начальным условием

$y(x_0) = y_0$ имеет единственное аналитическое решение, то есть решение, представимое в виде (25.1).

Наша цель — научиться строить это решение.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Мы уже обращались к этому примеру при обсуждении теоремы Пикара и строили решение задачи Коши методом последовательных приближений, сводя дифференциальное уравнение к интегральному. Уже на втором шаге итерационного процесса мы получили приближение $y^{[2]}(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^7}{63}$.

Сейчас мы получим несколько первых членов степенного ряда (25.1), последовательно вычисляя производные $y^{(k)}(x_0)$ из уравнения и выражая через них коэффициенты c_k.

Подставляя в уравнение $y'(x) = x^2 + y^2(x)$ значение $x = 0$ и учитывая начальное условие $y(0) = 0$, получаем $y'(0) = 0$.

Дифференцируя правую и левую части уравнения по x и опять полагая $x = 0$, получаем $y''(x) = 2x + 2y \cdot y'(x)$, $\ y''(0) = 0$.

Повторяем этот процесс:
$y'''(x) = 2 + 2(y'(x))^2 + 2y \cdot y''(x) \Rightarrow\ y'''(0) = 2.$
$y^{IV}(x) = 4y'(x) \cdot y''(x) + 2y' \cdot y''(x) + 2y \cdot y'''(x) = 6y' \cdot y''(x) + 2y \cdot y'''(x)$
$\Rightarrow\ y^{IV}(0) = 0.$
$y^{V}(x) = 6(y''(x))^2 + 8y' \cdot y'''(x) + 2y \cdot y^{IV}(x) \Rightarrow\ y^{V}(0) = 0.$
$y^{VI}(x) = 20y''(x) \cdot y'''(x) + 10y' \cdot y^{IV}(x) + 2y(x) \cdot y^{V}(x) \Rightarrow\ y^{VI}(0) = 0.$
$y^{VII}(x) = 20(y'''(x))^2 + 30y'' \cdot y^{IV}(x) + 2y(x) \cdot y^{VI}(x) \Rightarrow\ y^{VII}(0) = 80.$

Таким образом,

$$y(x) = \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{VII}(0)}{7!}x^7 + o(x^7) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + o(x^7). \quad \square$$

Метод последовательных приближений привел нас к этому результату гораздо быстрее. В чем же преимущество рассмотренного сейчас способа? Дело в том, что процесс вычисления коэффициентов ряда (25.1) можно упростить, получив для них рекуррентные соотношения, а иногда даже удается вывести их общую формулу. Тогда мы получаем решение в виде «полного» ряда, а не только его отрезок.

Пример 2. Построим решение задачи Коши $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$ в виде степенного ряда.

Дифференцируя обе части уравнения $(n-1)$ раз и применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения, получаем рекуррентное соотношение для производных:

$$y^{(n)}(x) = 2xy^{(n-1)}(x) + 2(n-1)y^{(n-2)}(x), \quad n = 2,\ 3, \ldots$$

После подстановки $x = 0$ оно становится еще проще:

$$y^{(n)}(0) = 2(n-1)y^{(n-2)}(0).$$

Поскольку $c_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$, то для коэффициентов c_n также получаем рекуррентную формулу $c_n = \dfrac{2}{n}c_{n-2}$.

Из начальных данных $y(0) = 1$, а из уравнения получаем $y'(0) = 0$, поэтому $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Таким образом, $c_{2k-1} = 0$, $c_{2k} = \dfrac{1}{k!}$ для всех натуральных k. Выпишем несколько членов ряда:

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \ldots + \frac{1}{k!}x^{2k} + \ldots$$

В этой формуле нетрудно узнать разложение в ряд функции $y = e^{x^2}$. Конечно, это решение можно было легко получить методом разделения переменных, однако нас интересовал сам процесс построения решения в виде ряда.

Мы получили рекуррентные формулы для коэффициентов разложения (25.1), дифференцируя исходное уравнение и выражая коэффициенты c_n через производные $y_n(0)$. Можно было сделать это проще, продифференцировав ряд (25.1) и подставив полученную таким образом производную в уравнение.

Действительно, если решение представлено в виде степенного ряда (25.1), то на интервале его сходимости производную от решения можно получить почленным дифференцированием:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}.$$

Подставим эти разложения в уравнение $y' = 2xy$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1} = 2x \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$$

В ряду, стоящем в левой части уравнения, сдвинем индекс, положив $k = n + 1$, а в правой части внесем $2x$ под знак ряда и сдвинем индекс, положив $k = n - 1$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) c_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2 c_{n-1} x^n.$$

Полученное равенство должно выполняться на всем интервале сходимости, следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в правой и левой его частях должны совпадать. Отсюда $c_1 = 0$, и $nc_n = 2c_{n-2}$ для $n \geqslant 2$.

Из начальных данных $c_0 = y(0) = 1$. Таким образом, мы получили те же рекуррентные формулы для коэффициентов ряда, но более удобным способом. Именно так мы и будем поступать в дальнейшем. $\square$

Перейдем к построению аналитических решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y = 0 \tag{25.2}$$

Как обычно, начнем с примера.

Пример 3. Найдем аналитическое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Ищем решение в виде ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$. Дифференцируем ряд два раза почленно и подставим в уравнение:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 0$$

В первой сумме сдвинем индекс на две единицы и сложим ряды почленно:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big((k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k \Big) x^k = 0$$

Все коэффициенты разложения тождественно нулевой функции в ряд равны нулю. Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k = 0 \ \text{ или}$$

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+1)} \tag{25.3}$$

Из начальных условий $c_0 = y(0) = 0$, $c_1 = y'(0) = 1$. Поэтому все коэффициенты с четными номерами равны нулю, а для нечетных номеров

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

Выпишем получившийся ряд:

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + ...$$

Нетрудно узнать в нем ряд Тейлора для функции $y = \sin x$.

Если мы поставим задачу Коши с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, то рекуррентная формула (25.3) останется прежней, но изменятся коэффициенты $c_0 = y(0) = 1$ и $c_1 = y'(0) = 0$. Тогда все коэффициенты с нечетными номерами обратятся в ноль, а с четными — определятся формулой

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Решение новой задачи Коши представляется рядом:

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + ...,$$

в котором легко узнать ряд Тейлора для функции $y = \cos x$.

Итак, мы получили два частных решения уравнения $y'' + y = 0$. Они образуют ФСР этого уравнения, так как в точке $x_0 = 0$ их определитель Вронского отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Для построения ФСР уравнения второго порядка в виде рядов обычно поступают таким же образом: решают две задачи Коши с начальными данными $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$ и $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$. $\square$

Всегда ли можно построить такие решения? Рассмотрим уравнение, разрешенное относительно старшей производной и сформулируем общую теорему.

Если коэффициенты уравнения $y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=0$ являются аналитическими функциями в окрестности точки x_0, имеющими общий интервал сходимости $|x-x_0|<R$, то уравнение имеет аналитическое решение, определенное в той же области.

Такую точку x_0 принято называть обыкновенной. В противном случае точку считают особой.

Заметим, что термин «особая точка», как правило, нуждается в уточнении. На первом занятии мы определили особую точку уравнения первого порядка как точку, в которой дифференциальное уравнение не определяет значения производной искомой функции. Далее мы расширили это понятие и классифицировали как особую точку, в которой не выполнены условия теоремы существования и единственности Пикара.

Сейчас же мы хотим найти аналитические решения уравнения второго порядка, поэтому естественно считать особой точку, в окрестности которой нам не удается это сделать.

Вернемся к уравнению (25.2). Допустим, что все его коэффициенты являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки x_0. Можно ли сделать вывод о существовании в этой окрестности аналитического решения? Очевидно, нет.

Во-первых, для разрешимости относительно старшей производной нужно потребовать, чтобы $a_0(x_0)\neq 0$. Во-вторых, если это условие выполнено, область сходимости ряда для решения $y(x)$ может сузиться до интервала $|x-x_0|<\rho$, где ρ — расстояние от точки x_0 до ближайшего нуля функции $a_0(x)$. При этом надо рассматривать и комплексные нули этой функции, поскольку теорема об аналитических решениях линейных дифференциальных уравнений изначально формулируется и доказывается для функций комплексной переменной.

Поясним сказанное на примерах.

Пример 4. Имеет ли уравнение $(x^2+1)y''+y'+y=0$ аналитическое решение в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$? Если да, найдем это решение и укажем область сходимости полученного ряда.

Так как все коэффициенты уравнения — аналитические функции и $a_0(0) \neq 0$, то аналитическое решение существует. Область сходимости соответствующего ряда: $|x| < 1$, поскольку функция z^2+1 имеет нули в точках $z = \pm i$.

Ищем решение в виде ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$. Продифференцируем его почленно и подставим в уравнение:

$$(x^2+1)(\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}) + (\sum_{k=1}^{+\infty} kc_k x^{k-1}) + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 0$$

Приводя подобные слагаемые, мы получим степенной ряд, который должен быть равен нулю тождественно на интервале $|x| < 1$. Следовательно, все его коэффициенты равны нулю, откуда получаем:

$$2c_2 + c_1 + c_0 = 0$$

$$6c_3 + 2c_2 + c_1 = 0$$

....

$$k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + (k+1)c_{k+1} + c_k = 0$$

Таким образом, зная c_0 и c_1, можно из рекуррентной формулы

$$c_{k+2} = -\frac{(k+1)c_{k+1} + (k^2-k+1)c_k}{(k+2)(k+1)}$$

определить все остальные коэффициенты.

Так, решая задачу Коши $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, придем к $c_0 = 0$, $c_1 = 1$,

$c_2 = -1/2$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1/8$ и так далее. Следовательно,

$$y_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots$$

Решая задачу Коши $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$, придем к $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = -1/2$, $c_3 = 1/6$, $c_4 = 1/12$ и так далее. Следовательно,

$$y_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \ldots$$

Хотя нам не удалось получить общую формулу для коэффициентов и тем более свернуть ряд, задачу можно считать полностью решенной. □

Далее, не ограничивая общности, мы будем рассматривать только точку $x_0 = 0$.

В приложениях часто встречаются уравнения вида

$$x^2 y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{25.4}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — функции, аналитические в окрестности нуля, причем хотя бы одно из значений $P(0)$, $Q(0)$ или $Q(0)$ не равно нулю. В этом случае точку $x = 0$ называют *регулярной особой точкой*. Если уравнение можно привести к указанному виду, точку $x = 0$ также будем называть регулярной особой.

Найти решение в виде степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ в таком случае, вообще говоря, нельзя. Но можно попробовать искать решение в виде так называемого обобщенного степенного ряда

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0, \tag{25.5}$$

где λ может быть любым числом (возможно даже комплексным).

Если уравнение (25.4) имеет решение в виде ряда (25.5), то λ должно быть корнем *определяющего уравнения*

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda P(0) + Q(0) = 0.$$

Ограничимся случаем вещественных функций $P(x)$ и $Q(x)$. Тогда возможны следующие четыре случая:

1. Определяющее уравнение имеет комплексные корни $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Тогда функцию x^λ следует определить (при $x > 0$) следующим образом:

$$x^\lambda = e^{(\alpha+i\beta)\ln x} = e^{\alpha \ln x} \cdot e^{i\beta \ln x} = x^\alpha \cdot (\cos\beta\ln x + i\sin\beta\ln x).$$

Вещественные функции, образующие ФСР, будут такими:

$$y_1(x) = x^\alpha \cdot \cos(\beta\ln x) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = x^\alpha \cdot \sin(\beta\ln x) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k, \quad d_0 \neq 0$$

2. Корни определяющего уравнения λ_1, λ_2 вещественны и разность $(\lambda_2 - \lambda_1)$ — не целое число. Тогда уравнение (25.4) имеет два решения в виде обобщенных степенных рядов с показателями λ_1 и λ_2, и эти решения образуют ФСР.

3. Корни определяющего уравнения λ_1, λ_2 вещественны и разность $(\lambda_2 - \lambda_1) = n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда уравнение (25.4) имеет решение в виде обобщенного степенного ряда с бóльшим показателем λ_2. Второе линейно независимое решение может также быть обобщенным степенным рядом λ_1, а может иметь в точке $x = 0$ логарифмическую особенность.

4. Корни определяющего уравнения λ_1, λ_2 вещественны и равны. В этом случае уравнение (25.4) имеет решение в виде обобщенного степенного ряда, а второе линейно независимое решение обязательно имеет в точке $x = 0$ логарифмическую особенность. Предлагаем доказать это в качестве упражнения.

Пример 5. Имеет ли уравнение $x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$ решение в виде обобщенного степенного ряда?

Определяющее уравнение $\lambda(\lambda-1)+\lambda-1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, их разность — целое число. Согласно общей теории, уравнение имеет решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующего большему корню: $y(x) = x\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+1}$.

Подставляя этот ряд в дифференциальное уравнение, мы получим рекуррентные формулы для коэффициентов:

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{k+2}, \quad \text{откуда } c_k = 2\frac{(-1)^k c_0}{(k+2)!}.$$

Положив $c_0 = 1/2$, получим решение

$$y_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3!} + ... + \frac{(-1)^k x^{k+1}}{(k+2)!} + ...$$

Можно выразить эту функцию через элементарные, если заметить, что

$$xy_1 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^k x^{k+2}}{(k+2)!} + ... = e^{-x} - 1 + x$$

Таким образом, $y_1(x) = \dfrac{e^{-x} - 1 + x}{x}$.

Отметим, что найти это решение методами, которые мы обсуждали ранее (занятие 21), было бы затруднительно.

Теория не гарантирует нам возможность построения второго частного решения в виде ряда

$$y(x) = x^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k-1}$$

И все же попробуем это сделать. Подставим этот ряд в уравнение:

$$x^2\Big(\frac{2c_0}{x^3}+\sum_{k=3}^{+\infty}(k-1)(k-2)c_kx^{k-3}\Big)+ \\ +(x^2+x)\Big(-\frac{c_0}{x^2}+\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)c_kx^{k-2}\Big)-\sum_{k=0}^{+\infty}c_kx^{k-1}=0.$$

Коэффициент при c_0 обратился ноль, и это следствие того, что $\lambda=-1$ является корнем определяющего уравнения.

Далее, $c_1=-c_0$ и $(k-1)(k-2)c_k+(k-1)c_k+(k-2)c_{k-1}-c_k=0$ для $k\geqslant 2$. Отсюда $k(k-2)c_k+(k-2)c_{k-1}=0$.

При $k=2$ это соотношение не определяет значения c_2, и мы можем выбрать его произвольно, например, положить $c_2=0$. Тогда при $k>2$ все коэффициенты также будут равны нулю, поскольку они удовлетворяют соотношению $kc_k+c_{k-1}=0$. Положив $c_0=1$, мы получим решение

$$y_2(x)=\frac{1}{x}-1.$$

Заметим, что $y_1(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}-(\dfrac{1}{x}-1)=\dfrac{e^{-x}}{x}-y_2(x)$, то есть мы могли бы выбрать функции $\dfrac{e^{-x}}{x}$ и $(\dfrac{1}{x}-1)$ в качестве ФСР, однако обе они имеют особенности в нуле, в то время как построенная выше функция $y_1(x)$ имеет в этой точке ноль первого порядка, как и было обещано теорией. □

Пример 6. Имеет ли уравнение $x^2y''+xy'+(x-1)y=0$ два линейно независимых решения в виде обобщенных степенных рядов?

Определяющее уравнение $\lambda(\lambda-1)+\lambda-1=0$ имеет те же корни $\lambda_{1,2}=\pm1$, их разность — целое число.

Ищем решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующего большему корню:

$$y(x) = x\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+1}, \quad c_0 \neq 0.$$

Подставляя этот ряд в дифференциальное уравнение, мы получим рекуррентные формулы для коэффициентов:

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{k(k+2)}.$$

Если положить $c_0 = 1$, то

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!(k+2)!}$$

и мы получим решение

$$y_1(x) = x - \frac{x^2}{6} + ... + \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k!(k+2)!} + ... \tag{25.6}$$

Второе частное решение ищем в виде

$$y_2(x) = \frac{c_0}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0, \tag{25.7}$$

и приходим к рекуррентным соотношениям $k(k-2)c_k + c_{k-1} = 0$, $k \geqslant 1$.

При $k = 1$ получаем $-c_1 + c_0 = 0$, то есть $c_1 = c_0 \neq 0$. При $k = 2$ получаем $0 \cdot c_2 + c_1 = 0$, то есть $c_1 = 0$. Таким образом, эти два условия несовместны, и найти второе линейно независимое решение в виде обобщенного степенного ряда нам не удастся.

Но, имея одно решение линейного однородного уравнения (оно представлено рядом (25.6)), мы можем построить второе решение с помощью формулы Лиувилля:

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{W(x)}{y_1^2(x)},$$

где $\dfrac{dW}{dx} = -\dfrac{x}{x^2}W$, то есть $W = \dfrac{C}{x}$. Таким образом,

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{1}{xy_1^2(x)}. \tag{25.8}$$

Правую часть уравнения разложим в ряд Лорана:

$$\frac{1}{xy_1^2(x)} = \frac{1}{x(x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{2!4!} + ...)^2} = \frac{1}{x^3}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 можно определить из равенства

$$1 = (1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{2!4!} + ...)^2 \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)$$

Отсюда $a_0 = 1$, $a_1 = 1/6$, $a_2 = -1/12$. Значения остальных коэффициентов для нас сейчас не существенны.

Интегрируя равенство (25.8) и положив константу интегрирования равной нулю, получим

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = -\frac{a_0}{2x^2} - \frac{a_1}{x} + a_2 \ln|x| + ...$$

Обозначенные точками слагаемые представляют собой некоторый степенной ряд. Здесь важно, что $a_2 \neq 0$, то есть в разложении присутствует логарифм. Поэтому

$$y_2(x) = -\frac{1}{12}\ln|x| \cdot y_1(x) + (-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x} + ...) \cdot y_1(x)$$

Как видим, решение $y_2(x)$ имеет логарифмическую особенность в точке $x = 0$. Это объясняет, почему нам не удалось найти второе частное решение в виде (25.7). □

Подведем итоги. Если коэффициенты уравнения

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y = 0$$

являются аналитическими в окрестности точки x_0, причем $a_0(x_0) \neq 0$, то точка x_0 является обыкновенной, и существует ФСР уравнения в виде функций, аналитических в окрестности этой точки.

Точки, в которых коэффициенты уравнения не аналитичны или $a_0(x) = 0$, являются особыми.

Тем не менее, если можно привести уравнение к виду

$$(x - x_0)^2 y''(x) + (x - x_0)P(x)y'(x) + Q(x)y = 0,$$

где функции $P(x)$ и $Q(x)$ аналитичны в окрестности точки x_0, тогда x_0 называется регулярной особой точкой. В этом случае существует решение уравнения в виде обобщенного степенного ряда

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad c_0 \neq 0,$$

где λ_2 — корень определяющего уравнения $\lambda(\lambda-1)+\lambda P(x_0)+Q(x_0) = 0$ такой, что $\operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_1$.

Второе решение уравнения, линейно независимое с указанным, может быть обобщенным степенным рядом

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (x - x_0)^k, \quad d_0 \neq 0,$$

а может иметь логарифмическую особенность в точке x_0. Определить, какая из этих возможностей на самом деле имеет место, можно с помощью формулы Лиувилля.