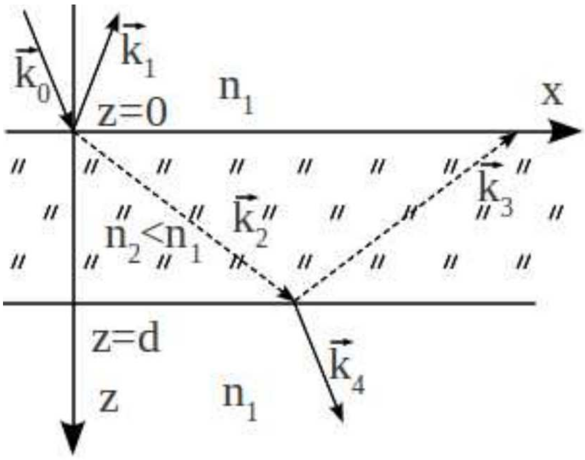
<u>Решение</u> задачи 1.25



В области $z<0$ имеются падающая ТЕ-волна $\hat{E}_0$ и волна $\hat{E}_1$, идущая от верхней границы раздела (г.р.).

$$\hat{E}_0 = E_0\,\mathrm{e}^{i(k_{0x}x+k_{0z}z-\omega t)},\ \hat{E}_1 = E_1\,\mathrm{e}^{i(k_{0x}x-k_{0z}z-\omega t)}\,.$$

В области $0<z<d$ имеются преломленная волна $\hat{E}_2$ и волна $\hat{E}_3$, отраженная от нижней г.р.:

$$\hat{E}_2 = E_2\,\mathrm{e}^{i(k_{2x}x+k_{2z}z-\omega t)},\ \hat{E}_3 = E_3\,\mathrm{e}^{i(k_{2x}x-k_{2z}z-\omega t)}\,.$$

В области $z>d$ имеется прошедшая волна $\hat{E}_4$:

$$\hat{E}_4 = E_4\,\mathrm{e}^{i(k_{0x}x+k_{0z}(z-d)-\omega t)}\,.$$

Волны, возникающие в результате многократных отражений в слое, имеют вид $A_m\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r}-\omega t)}$, а их сумма на заданной l-й границе – $A_l\,\mathrm{e}^{i(k_{2x}x-\omega t+\phi_l)} = \hat{A}_l\,\mathrm{e}^{i(k_{2x}x-\omega t)}$. Поэтому величины $\hat{E}_i$ можно рассматривать как значения полей на границах с учетом многократных отражений.

Введем обозначение $\delta{=}k_{2z}d$. С учетом $k_{1x}{=}k_{2x}{=}k_{3x}{=}k_{4x}{=}k_{0x}$ граничные условия для тангенциальных компонент E и H на верхней (первая пара ур-ий) и нижней (вторая пара ур-ий) г.р. принимают вид *:

$$\begin{array}{lcl}
E_0+E_1 & = & E_2+E_3\\
k_{0z}E_0-k_{0z}E_1 & = & k_{2z}E_2-k_{2z}E_3\\
E_2\,\mathrm{e}^{i\delta}+E_3\,\mathrm{e}^{-i\delta} & = & E_4\\
k_{2z}E_2\,\mathrm{e}^{i\delta}-k_{2z}E_3\,\mathrm{e}^{-i\delta} & = & k_{0z}E_4
\end{array}$$

Вводя переменные $\xi_i{=}\frac{E_i}{E_0}$, получим систему уравнений относительно неизвестных ξ_i в матричной форме:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & -1\\
k_{0z} & k_{2z} & -k_{2z} & 0 & k_{0z}\\
0 & \mathrm{e}^{i\delta} & \mathrm{e}^{-i\delta} & -1 & 0\\
0 & k_{2z}\,\mathrm{e}^{i\delta} & -k_{2z}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & -k_{0z} & 0
\end{array}\right)$$

Решение будем искать методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix}
1 & -1 & -1 & 0\\
k_{0z} & k_{2z} & -k_{2z} & 0\\
0 & \mathrm{e}^{i\delta} & \mathrm{e}^{-i\delta} & -1\\
0 & k_{2z}\,\mathrm{e}^{i\delta} & -k_{2z}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & -k_{0z}
\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}
k_{2z} & -k_{2z} & 0\\
\mathrm{e}^{i\delta} & \mathrm{e}^{-i\delta} & -1\\
k_{2z}\,\mathrm{e}^{i\delta} & -k_{2z}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & -k_{0z}
\end{vmatrix} - k_{0z}\cdot\begin{vmatrix}
-1 & -1 & 0\\
\mathrm{e}^{i\delta} & \mathrm{e}^{-i\delta} & -1\\
k_{2z}\,\mathrm{e}^{i\delta} & -k_{2z}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & -k_{0z}
\end{vmatrix} =$$

$$= k_{2z}\cdot(-k_{0z}\,\mathrm{e}^{-i\delta}-k_{2z}\,\mathrm{e}^{-i\delta})+k_{2z}\cdot(-k_{0z}\,\mathrm{e}^{i\delta}+k_{2z}\,\mathrm{e}^{i\delta})-k_{0z}\cdot\Big[(-1)\cdot(-k_{0z}\,\mathrm{e}^{-i\delta}-k_{2z}\,\mathrm{e}^{-i\delta})+1\cdot(-k_{0z}\,\mathrm{e}^{i\delta}+k_{2z}\,\mathrm{e}^{i\delta})\Big] =$$

$$= \mathrm{e}^{-i\delta}\cdot(-k_{0z}^2-2k_{0z}k_{2z}-k_{2z}^2)+\mathrm{e}^{i\delta}\cdot(k_{0z}^2-2k_{0z}k_{2z}+k_{2z}^2) = 2(k_{0z}^2-k_{2z}^2)\,\mathrm{sh}(i\delta)-4k_{0z}k_{2z}\,\mathrm{ch}(i\delta).$$

*Граничное условие на нижней границе раздела записывается для произвольной $x-$координаты. При этом фазовый множитель e^{ik_xx} содержится в каждом слагаемом второй пары уравнений и поэтому может быть опущен.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ k_{0z} & k_{2z} & -k_{2z} & k_{0z} \\ 0 & \mathrm{e}^{i\delta} & \mathrm{e}^{-i\delta} & 0 \\ 0 & k_{2z}\,\mathrm{e}^{i\delta} & -k_{2z}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot k_{0z} \cdot (-k_{2z} - k_{2z}) - k_{0z} \cdot (-1) \cdot (-2k_{2z}) = -4k_{0z}k_{2z}.$$

$$\frac{E_4}{E_0} = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-4k_{0z}k_{2z}}{2(k_{0z}^2 + k_{2z}^2)\,\mathrm{sh}(i\delta) - 4k_{0z}k_{2z}\,\mathrm{ch}(i\delta)}. \tag{1}$$

Введем обозначения $\alpha = |k_{0z}| = k_0 \cos\phi$, $\varkappa = |k_{2z}| = k_0 \left|\sqrt{\sin^2\phi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}\right|$.

В случае “полного внутреннего отражения” от верхней границы

$$k_{2z} = i\varkappa = ik_0\sqrt{\sin^2\phi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2},\ k_{0z} = \alpha = k_0\cos\phi.$$

Тогда (1) принимает вид ($i\delta = i \cdot (k_{2z}d) = i \cdot (i\varkappa d) = -\varkappa d$):

$$\frac{E_4}{E_0} = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-2i\alpha\varkappa}{(\alpha^2 - \varkappa^2)\,\mathrm{sh}(-\varkappa d) - 2i\alpha\varkappa\,\mathrm{ch}(\varkappa d)} = \frac{2i\alpha\varkappa}{(\alpha^2 - \varkappa^2)\,\mathrm{sh}(\varkappa d) + 2i\alpha\varkappa\,\mathrm{ch}(\varkappa d)}. \tag{2}$$

Коэффициент прохождения:

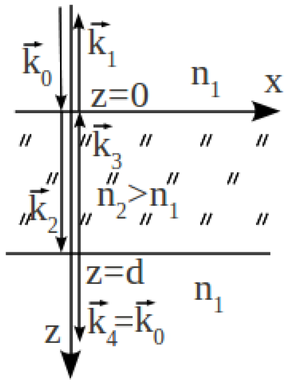
$$D = \left|\frac{E_4}{E_0}\right|^2 = \frac{4(\alpha\varkappa)^2}{(\alpha^2 - \varkappa^2)^2\,\mathrm{sh}^2(\varkappa d) + 4(\alpha\varkappa)^2\,\mathrm{ch}^2(\varkappa d)}.$$

Проверим полученную формулу в предельных случаях:

$$\begin{aligned} &d \to 0 : \mathrm{sh}\,0 = 0,\ \mathrm{ch}\,0 = 1, && D = 1; \\ &d \to \infty : && D \sim \tfrac{1}{\mathrm{e}^{2\varkappa d}} = 0; \\ &n_1 = n_2 : k_{0z} = k_{2z}, && \tfrac{E_4}{E_0} = \tfrac{-1}{\mathrm{sh}(i\delta) - \mathrm{ch}(i\delta)} = \mathrm{e}^{i\delta} = \mathrm{e}^{ik_{2z}d}. \end{aligned}$$

Напомним, что $\hat{E}_0 = E_0\,\mathrm{e}^{i(k_{0x}x + k_{0z}z - \omega t)}$ и $\hat{E}_4 = E_4\,\mathrm{e}^{i(k_{0x}x + k_{0z}(z-d) - \omega t)}$, поэтому соотношение $E_4 = E_0\,\mathrm{e}^{ik_{2z}d}$ означает, что волна $\hat{E}_4$ просто описывает продолжение волны $\hat{E}_0$.

Решение задачи 1.21



Задача сводится к предыдущей (1.25) с заменой $k_{iz} = k_i$, $k_{4z} = k_0$. Кроме того, поскольку теперь имеет место не полное внутреннее, а обычное отражение, то $k_{2z} = k_2$ является действительным числом. Поэтому знаменатель $\frac{\Delta_1}{\Delta}$ удобнее записать в другом виде:

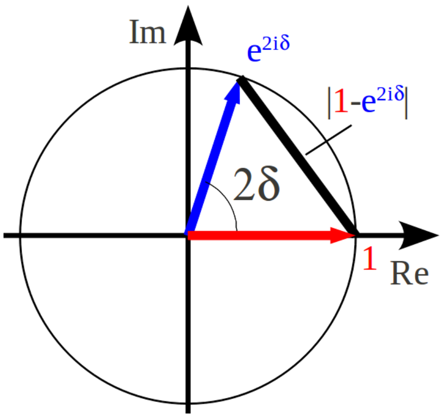
$$\Delta = \mathrm{e}^{-i\delta} \cdot (-k_0^2 - 2k_0k_2 - k_2^2) + \mathrm{e}^{i\delta} \cdot (k_0^2 - 2k_0k_2 + k_2^2) = (k_0 - k_2)^2 \,\mathrm{e}^{i\delta} - (k_0 + k_2)^2 \,\mathrm{e}^{-i\delta}.$$

Числитель:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ k_0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{i\delta} & \mathrm{e}^{-i\delta} & -1 \\ 0 & k_2\,\mathrm{e}^{i\delta} & -k_2\,\mathrm{e}^{-i\delta} & -k_0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot [k_2 \cdot (-k_0 - k_2)\,\mathrm{e}^{-i\delta} + k_2 \cdot (-k_0 - k_2)\,\mathrm{e}^{i\delta}] - k_0 \cdot [1 \cdot (k_2\,\mathrm{e}^{-i\delta} - k_0\,\mathrm{e}^{i\delta}) - k_0 \cdot (-\,\mathrm{e}^{-i\delta} + \mathrm{e}^{i\delta})] = (k_2^2 - k_0^2) \cdot (\mathrm{e}^{-i\delta} - \mathrm{e}^{i\delta}).$$

Отношение комплексов отраженной и падающей волн:



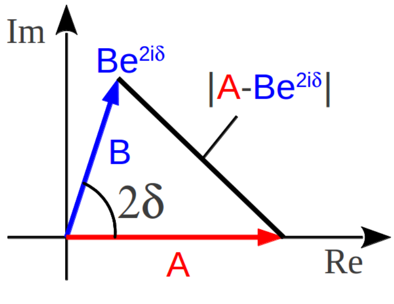
$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(k_2^2 - k_0^2) \cdot (1 - \mathrm{e}^{2i\delta})}{(k_0 - k_2)^2 \,\mathrm{e}^{2i\delta} - (k_0 + k_2)^2}.$$

Коэффициент отражения:

$$R = \left|\frac{E_1}{E_0}\right|^2 = \frac{(k_2^2 - k_0^2)^2 \cdot \left|1 - \mathrm{e}^{2i\delta}\right|^2}{\left|(k_0 - k_2)^2 \,\mathrm{e}^{2i\delta} - (k_0 + k_2)^2\right|^2}.$$

Квадрат модуля числителя находим, учитывая, что по теореме косинусов (см. рисунок)

$$\left|1 - \mathrm{e}^{2i\delta}\right|^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(2\delta) = 2(1 - \cos(2\delta)) = 4\sin^2\delta.$$



Теперь определяем квадрат модуля знаменателя. Обозначим $A = (k_0 + k_2)^2$, $B = (k_0 - k_2)^2$. Тогда

$$\left|(k_0 - k_2)^2 \,\mathrm{e}^{2i\delta} - (k_0 + k_2)^2\right|^2 = \left|B\,\mathrm{e}^{2i\delta} - A\right|^2.$$

По теореме косинусов (см. рисунок)

$$\left|B\,\mathrm{e}^{2i\delta} - A\right|^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(2\delta) = A^2 + B^2 - 2AB + 2AB - 2AB\cos(2\delta) =$$

$$= (A - B)^2 + 2AB(1 - \cos(2\delta)) = (4k_0k_2)^2 + 2 \cdot (k_0^2 - k_2^2)^2 \cdot 2\sin^2\delta = 16k_0^2k_2^2 + 4\left(k_0^2 - k_2^2\right)^2 \sin^2\delta.$$

$$R = \frac{4\left(k_2^2 - k_0^2\right)^2 \sin^2\delta}{16k_0^2k_2^2 + 4\left(k_0^2 - k_2^2\right)^2 \sin^2\delta} = \frac{(n^2-1)^2 \sin^2\delta}{4n^2 + (n^2-1)^2 \sin^2\delta},$$

где введено обозначение $n = n_2/n_1$.

При $\sin^2\delta = 1$ $\quad R = R_{max} = \frac{(n^2-1)^2}{4n^2+(n^2-1)^2} = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2;$

при $\sin^2\delta \to 0$ $\quad R \to \frac{(n^2-1)^2}{4n^2}(k_2d)^2 = \left(\frac{n^2-1}{2n} \cdot \frac{2\pi d}{\lambda_2}\right)^2 = \left(\frac{n^2-1}{2n} \cdot \frac{2\pi n d}{\lambda}\right)^2 = \left(\pi \cdot (n^2 - 1) \cdot \frac{d}{\lambda}\right)^2.$