Семинар 3 [14.09.2022]

Гильбертово пространство. Ортогонализация. Проверка самосопряженности дифференциальных операторов. Свойства δ-функции.

Задачи

Задача 1

Ортогонализовать полиномы $q_n = x^n$ для $n = 0, 1, 2, 3$ на интервале $[-1, 1]$ со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Задача 2

Является ли оператор импульса $\hat{p} = -id/dx$ эрмитовым на отрезке $x \in [0, 2\pi]$ с граничными условиями:

а) $u(0) = u(2\pi) = 0$;

б) $u(0) = u(2\pi)$?

Задача 3

Получить общий вид самосопряженного дифференциального оператора второго порядка

$$\hat{L} = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x),$$

где a, b, c – вещественные коэффициенты (оператор Штурма-Лиувилля).

Задача 4

Доказать

$$x\delta'(x) = -\delta(x).$$

Задача 5 (21)

Доказать равенства

а)

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2},$$

б)

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{x^2\epsilon}{\left(x^2+\epsilon^2\right)^2}.$$

Задача 6 (24)

Доказать, что если $f'(a_n) \neq 0$, где $\{a_n\}$ – множество (простых) нулей функции $f(x)$, т.е. $f(a_n) = 0$, то

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(a_n)|}\delta(x - a_n).$$

Решения

Задача 1

Ортоганализация дает:

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 = 1, \\ p_1 &= q_1 - \frac{\langle q_1, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0 = q_1 = x, \\ p_2 &= q_2 - \frac{\langle q_2, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0 - \frac{\langle q_2, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} p_1 = x^2 - \frac{1}{3}, \\ p_3 &= q_3 - \frac{\langle q_3, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0 - \frac{\langle q_3, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} p_1 - \frac{\langle q_3, p_2\rangle}{\langle p_2, p_2\rangle} p_2 = x^3 - \frac{3}{5} x. \end{aligned}$$

Задача 3

Действуем по определению:

$$\left\langle f, \hat{L} g\right\rangle = \int \bar{f}\left(a g'' + b g' + c g\right) dx = \int \left(\left(\bar{f} a\right)'' g - \left(\bar{f} b\right)' g + \bar{f} g c\right) dx =$$
$$= \int \left(\left(\bar{f}'' a + \bar{f} a'' + 2\bar{f}' a'\right) g - \left(\bar{f}' b + \bar{f} b'\right) g + \bar{f} g c\right) dx =$$
$$= \int \left(a\bar{f}'' + \left(2a' - b\right)\bar{f}' + \left(a'' - b' + c\right)\bar{f}\right) g\, dx.$$

С другой стороны

$$\left\langle f, \hat{L} g\right\rangle = \left\langle \hat{L} f, g\right\rangle = \int \left(a\bar{f}'' + b\bar{f}' + c\bar{f}\right) g\, dx.$$

Тогда

$$a = a, \quad 2a' - b = b, \quad a'' - b' + c = c.$$

И в итоге

$$\hat{L} = \frac{d}{dx} a \frac{d}{dx} + c.$$

Задача 4

Вычисляем

$$\int g(x)\, x\, \delta'(x)\, dx = -\int \left(g(x)\, x\right)' \delta(x)\, dx =$$
$$= -\int g'(x)\, x\, \delta(x)\, dx - \int g(x)\, \delta(x)\, dx = -g(0).$$

Задача 5

В случае а) при $x \neq 0$ предел равен нулю. Проверяем нормировку:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x/\epsilon)}{x^2/\epsilon^2 + 1} = \frac{1}{\pi} \arctan\left[\frac{x}{\epsilon}\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

В случае б) при $x \neq 0$ предел обращается в ноль. Проверяем нормировку:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{2}{\pi} \frac{x^2\epsilon}{(x^2+\epsilon^2)^2} dx = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x^2/\epsilon^2\right) d\left(x/\epsilon\right)}{(x^2/\epsilon^2+1)^2} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2}.$$

Введем вспомогательный интеграл

$$I_+ = \frac{2}{\pi} \int\limits_{C_+(R)} \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2},$$

где $C_+(R)$ – контур в комплексной плоскости, представляющий собой полуокружность радиуса R в верхней половине комплексной плоскости; считаем, что обход по контуру идет в направлении увеличения аргумента φ. Вычислим предел:

$$\lim_{R\to+\infty} I_+ = \lim_{R\to+\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_{C_+(R)} \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2} = \frac{2}{\pi} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^\pi \frac{iR^3 e^{3i\varphi} d\varphi}{(R^2e^{2i\varphi}+1)^2} = \frac{2}{\pi} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^\pi \frac{i d\varphi}{Re^{i\varphi}} = \frac{2}{\pi} \lim_{R\to+\infty} \frac{2}{R} = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2 dy}{(y^2+1)^2} + \lim_{R\to+\infty} I_+ = \frac{2}{\pi} \oint\limits_{\gamma_+} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^2},$$

где γ_+ – контур, проходящий по вещественной оси и замыкающийся через верхнюю полуплоскость. В итоге, вычисляя интеграл, получаем

$$\frac{2}{\pi} \oint\limits_{\gamma_+} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^2} = \frac{2}{\pi} 2\pi i \mathrm{Res}_{z=1} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^2} = 4i \mathrm{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = 4i \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z+i)^2} \right)\Bigg|_{z=i} =$$

$$= 4i \left(\frac{2z}{(z+i)^2} - \frac{2z^2}{(z+i)^3} \right)\Bigg|_{z=i} = 1.$$

Задача 6

Пусть функция $f = f(x)$ является монотонной на участке $\gamma_n = \left(a_n - \Delta_n^-, a_n + \Delta_n^+\right)$. Рассмотрим интеграл

$$I_n = \int\limits_{a_n-\Delta_n^-}^{a_n+\Delta_n^+} \delta\left(f(x)\right) g(x)\, dx.$$

Сделаем замену переменной $y = f(x)$, тогда

$$I_n = \int\limits_{f\left(a_n-\Delta_n^-\right)}^{f\left(a_n+\Delta_n^+\right)} \left(g(x) \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1} \right)\Bigg|_{x=f^{-1}(y)} \delta(y)\, dy =$$

$$= \left(g(x) \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1} \right)\Bigg|_{x=f^{-1}(0)} \mathrm{sign}\left[f\left(a_n+\Delta_n^+\right) - f\left(a_n-\Delta_n^-\right) \right].$$

Поскольку $f^{-1}(0) = a_n$, а знак $f\left(a_n + \Delta_n^+\right) - f\left(a_n - \Delta_n^-\right)$ совпадает со знаком производной df/dx в точке $x = a_n$, в итоге имеем

$$I_n = \frac{g\left(a_n\right)}{|f'(a_n)|}.$$

Поскольку всю область $\mathbb{R}$ можно разбить целиком на участки монотонности, искомое равенство доказано.