Занятие 8

Уравнения высокого порядка (n>2), допускающие понижение порядка

Рассмотрим уравнение n-ого порядка ($n > 2$)

$$F(x;\, y;\, y';\, ...;\, y^{(n)}) = 0. \tag{8.1}$$

Заметим сразу, что общее решение этого уравнения содержит n произвольных констант, подбирая которые, можно решить любую корректно поставленную задачу Коши.

Посмотрим сначала, как работают приемы понижения порядка, изученные нами на предыдущем занятии.

Если уравнение имеет вид $F(x;\, y^{(k)};\, ...;\, y^{(n)}) = 0$, $k \geqslant 1$, то есть не содержит функцию $y(x)$ и ее производных до порядка $k-1$ включительно, тогда замена $z = y^{(k)}$ приведет его к уравнению порядка $n - k$.

Пример 1. Решить уравнение $xy''' = (1 - x)y''$.

Положим $z = y''$, тогда $xz' = (1 - x)z$ и $z = C_1xe^{-x}$. Возвращаясь к функции y и последовательно интегрируя, получаем

$$y'' = C_1xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad y = C_1(x + 2)e^{-x} + C_2x + C_3. \quad \square$$

Если уравнение имеет вид $F(y;\, y';\, ...;\, y^{(n)}) = 0$, то есть не содержит переменную x, тогда, как мы помним, следует сделать замену $y' = u(y)$. При этом

$$y''(x) = u'(y) \cdot y'(x) = u' \cdot u,$$

$$y'''(x) = u''(y) \cdot y'(x) \cdot u + u' \cdot u'(y) \cdot y'(x) = u'' \cdot u^2 + (u')^2 \cdot u$$

и так далее.

Пример 2. Решить уравнение $y''' = \dfrac{y' \cdot y''}{y}$.

Замена $y' = u(y)$ приводит к уравнению

$$u'' \cdot u^2 + (u')^2 \cdot u = \frac{u^2 \cdot u'}{y} \ .$$

Отсюда $u = 0$, что дает $y = C \neq 0$, или

$$u'' \cdot u + (u')^2 = \frac{u \cdot u'}{y} \ .$$

Это однородное уравнение, порядок которого можно понизить, положив $\dfrac{u'}{u} = v$. Тогда $u' = u \cdot v$, $u'' = u \cdot v^2 + u \cdot v'$ и

$$u^2(v^2 + v') + u^2 v^2 = \frac{u^2 v}{y}.$$

После деления на u^2 получаем уравнение Бернулли

$$2v^2 + v' = \frac{v}{y}.$$

Оно имеет решение $v = 0$. Если же $v \neq 0$, то, положив $z = 1/v$, придем к уравнению $z' = 2 - \dfrac{z}{y}$.

Подобрав его частное решение $z = y$, легко построить общее решение $z = \dfrac{C}{y} + y$, откуда $v = \dfrac{y}{C + y^2}$. Возвращаясь к функции u, получаем уравнение $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{y}{C + y^2}$, которое легко интегрируется: $u = C_2\sqrt{y^2 + C_1}$, где $C_2 \neq 0$.

Таким образом, $y' = C_2\sqrt{y^2 + C_1}$. Интегрируем это уравнение с разделяющимися переменными и в зависимости от значения C_1, получаем ответ:
если $C_1 \neq 0$, то $\ln|y + \sqrt{y^2 + C_1}| = C_2 x + C_3$, иначе $\ln|y| = C_2 x + C_3$. $\square$

Пример 3. Решить уравнение $y^2 \cdot y' \cdot y''' + (y \cdot y'')^2 = 2(y')^4$.

С одной стороны, это уравнение однородное, и его порядок можно понизить заменой $y' = u(x) \cdot y$. С другой стороны, оно не содержит явно переменную x, и в таком случае рекомендуется замена $y' = p(y)$.

Сразу трудно сказать, какой путь быстрее приведет к цели. Начнем с того, что проще. Сделаем замену $y' = u(x) \cdot y$. Тогда

$$y'' = u'y + u \cdot y' = u'y + u^2 y,$$

$$y''' = u''y + u' \cdot y' + 2u \cdot u'y + u^2 y' = u''y + 3u'uy + u^3 y,$$

и мы приходим к уравнению

$$u \cdot u'' + 5u'u^2 + (u')^2 = 0.$$

Теперь делаем замену $u' = v(u)$, тогда $u'' = v'(u) \cdot v$ и

$$u \cdot v' \cdot v + 5v \cdot u^2 + v^2 = 0,$$

$$v \cdot (u \cdot v' + 5 \cdot u^2 + v) = 0.$$

Отсюда $v = 0 \Rightarrow u = C \Rightarrow y' = C_1 y$ и $y = C_2 e^{C_1 x}$, или

$$uv' + 5u^2 + v = 0,$$

$$udv + 5u^2 du + vdu = 0,$$

$$d(uv) + \frac{5}{3} d(u^3) = 0,$$

$$uv + \frac{5}{3} u^3 = C_1.$$

Подставляя $v = u'$, получаем уравнение $uu' + \frac{5}{3} u^3 = C_1$, которое является уравнением с разделяющимися переменными:

$$dx = \frac{udu}{C_1 - \frac{5}{3} u^3}.$$

Из $y' = u \cdot y$ следует, что

$$\frac{dy}{y} = udx = \frac{u^2 du}{C_1 - \dfrac{5}{3}u^3}.$$

Интегрируя два последних уравнения, мы получим решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\tau d\tau}{C_1 - \frac{5}{3}\tau^3} + C_2 \\ \ln|y| = \displaystyle\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\tau^2 d\tau}{C_1 - \frac{5}{3}\tau^3} + C_3. \end{cases}$$

Проинтегрировать рациональные функции можно, но мы не будем этого делать. Если бы мы решали задачу Коши и на этапе нахождения функции $v(u)$ определили константу C_1, то дальнейшие вычисления были бы намного проще.

Так, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -\dfrac{2}{3}$, то, подставляя эти значения в $y' = u(x) \cdot y$ и $y'' = u'(x) \cdot y + u(x) \cdot y'$, мы получим, что $u(0) = 1$, $u'(0) = -\dfrac{5}{3}$.

Отсюда $v(1) = -\dfrac{5}{3}$, и из $uv + \dfrac{5}{3}u^3 = C_1$ получаем, что $C_1 = 0$.

Тогда решение находится особенно просто:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{-3du}{5u^2} \\ \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{-3du}{5u}. \end{cases}$$

Учитывая, что значению параметра $u = 1$ соответствуют значения $x = 0$ и $y = 1$, интегрируем эти уравнения:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3(1-u)}{5u} \\ y = u^{-3/5}. \end{cases}$$

Выражая y через x, получаем ответ в явном виде: $y = (\frac{5}{3}\,x + 1)^{0,6}$. $\square$

Описанные приемы решения уравнений n-ного порядка достаточно громоздки. Это связано с тем, что рассматриваемые уравнения были нелинейными. В случае линейных уравнений работает совсем другая техника, которую мы обсудим позднее.

А сейчас мы рассмотрим один весьма изящный прием решения уравнений высокого порядка, очень похожий на метод интегрируемых комбинаций (см. занятие 4).

Порядок уравнения понижается, если удается представить левую часть уравнения в виде полной производной, то есть

$$F(x;\, y;\, y';\, ...;\, y^{(n)}) = \big(G(x;\, y;\, y';\, ...;\, y^{(n-1)})\big)' = 0.$$

Тогда мы получаем уравнение порядка $(n-1)$

$$G(x;\, y;\, y';\, ...;\, y^{(n-1)}) = C.$$

Приведем несколько типичных комбинаций:

$$(xy')' = y' + xy'' \qquad (y\cdot y')' = (y')^2 + y\cdot y''$$

$$\left(\frac{y'}{x}\right)' = \frac{xy'' - y'}{x^2} \qquad (y\cdot y'')' = y''\cdot y' + y\cdot y'''$$

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y\cdot y'' - (y')^2}{y^2} \qquad (f(y'))' = f'(y')\cdot y''$$

$$\left(\frac{y}{y'}\right)' = \frac{(y')^2 - y\cdot y''}{(y')^2} \qquad ((y')^n)' = n(y')^{(n-1)}\cdot y''$$

$$(\ln y')' = y''/y'$$

Пример 4. Решить уравнение $y\cdot y''' + 3y'\cdot y'' = 0$.

Нетрудно убедиться, что левая часть уравнения является полной производной от $(y\cdot y'' + (y')^2)$, поэтому можно понизить порядок уравнения:

$$y\cdot y'' + (y')^2 = C_1.$$

Далее, $y \cdot y'' + (y')^2 = (y \cdot y')'$, поэтому из $(y \cdot y')' = C_1$ следует, что $y \cdot y' = C_1 x + C_2$. Заметив, что $2y \cdot y' = (y^2)'$, проинтегрируем уравнение еще раз и получим ответ:

$$y^2 = C_1 x^2 + 2C_2 x + C_3. \quad \square$$

Пример 5. Решить уравнение $y' \cdot y''' = 2(y'')^2$.

Уравнение имеет решение $y'' = 0$, откуда $y = C_1 x + C_2$. Если же $y'' \neq 0$, то преобразуем уравнение к виду $y' \cdot y''' - (y'')^2 = (y'')^2$ и поделим на $(y'')^2$:

$$\frac{y' \cdot y''' - (y'')^2}{(y'')^2} = 1.$$

Заметим, что левая часть уравнения является полной производной:

$$\left(-\frac{y'}{y''}\right)' = 1.$$

Отсюда $-\dfrac{y'}{y''} = x + C_1$ или $\dfrac{y''}{y'} = -\dfrac{1}{x + C_1}$.

Поскольку $\dfrac{y''}{y'} = (\ln y')'$, то $\ln y' = -\ln|x + C_1| + C_2$, или $y' = \dfrac{C_2}{x + C_1}$. Наконец, получаем решение $y = C_2 \ln|x + C_1| + C_3$. $\square$

В заключение рассмотрим случай, когда уравнение (8.1) имеет следующий специфический вид:

$$F(y;\, xy';\, x^2 y'';\, \ldots;\, x^n y^{(n)}) = 0.$$

Такие уравнения называют уравнениями Эйлера. Понятно, что $x = 0$ всегда является особой точкой такого уравнения.

Положим $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$, то есть $t = \ln|x|$. Производную по переменной t будем обозначать точкой.

Тогда $y' = \dot{y} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dot{y} \cdot \dfrac{1}{x}$, то есть $xy' = \dot{y}$.

Дифференцируя это равенство по x, получаем $y' + xy'' = \ddot{y} \cdot \frac{1}{x}$, откуда $xy' + x^2y'' = \ddot{y}$, или $x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$.

Дифференцируя последнее равенство по x, получаем $2xy'' + x^2y''' = = (\ddot{y} - \dot{y}) \cdot \frac{1}{x}$, откуда $x^3y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}$, и так далее.

Таким образом, после замены переменной x на $t = \ln|x|$ мы придем к уравнению $G(y;\ \dot{y};\ \ddot{y}; ...;\ y^n) = 0$, где дифференцирование происходит по t, но сама переменная t явно в уравнение не входит. Как мы знаем, в этом случае замена $\dot{y} = u(y)$ понижает порядок этого уравнения.

Пример 6. Решить уравнение $x^2(2y \cdot y'' - (y')^2) = 1 - 2xy \cdot y'$.

Вводим новую переменную $t = \ln|x|$, и, пересчитав производные, приходим к уравнению $2y \cdot \ddot{y} - (\dot{y})^2 = 1$.

Вводим новую функцию, положив $u(y) = \dot{y}$. Тогда $\ddot{y} = u' \cdot u$ и

$$2yu \cdot u' - u^2 = 1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными легко интегрируется: $y = 0$ или $\frac{2udu}{1+u^2} = \frac{dy}{y}$, откуда $y = C_1(1+u^2)$.

Вспомнив, что $\dot{y} = u(y)$, получаем систему

$$\begin{cases} y = C_1(1+u^2) \\ \dot{y} = u, \end{cases}$$

где u можно считать параметром. Остается найти зависимость $t(u)$, как мы уже неоднократно делали.

$$\begin{cases} dy = 2C_1udu \\ dy = udt \end{cases} \Rightarrow 2C_1udu = udt$$

Отсюда $u = 0$, что приводит к $y = C$, или $t = 2C_1u + C_2$, и, возвращаясь к переменной x, получаем ответ в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = C_2 e^{2C_1 u} \\ y = C_1(1+u^2) \end{cases}$$

При желании можно получить ответ в явном виде, исключив параметр u, но мы не будем этого делать. $\square$