Транзитивное замыкание

Определение:

Транзитивным замыканием (англ. *transitive closure*) $\mathrm{TrCl}(R)$ отношения R на множестве X называется пересечение всех транзитивных отношений, содержащих R как подмножество (иначе, минимальное транзитивное отношение, содержащее R как подмножество).

Например, если V — множество городов, и на них задано отношение R, означающее, что если xRy, то "существует автобусный маршрут из x в y", то транзитивным замыканием этого отношения будет отношение "существует возможность добраться из x в y, передвигаясь на автобусах".

Содержание

Существование и описание

Транзитивное замыкание существует для любого отношения. Для этого отметим, что пересечение любого множества транзитивных отношений транзитивно. Более того, обязательно существует транзитивное отношение, содержащее R как подмножество (например, $X \times X$).

Теорема:

Докажем, что R^+ является транзитивным замыканием отношения R.

$$R^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R^i$$

Доказательство:

▷

- $R \subset R^+$ по определению R^+
- R^+ транзитивно. Пусть aR^+b и bR^+c. Это значит, что существуют i, j такие, что aR^ib и bR^jc. Но тогда $aR^{i+j}c$, и, так как $R^{i+j} \subset R^+$, то aR^+c
- R^+ — минимальное отношение, удовлетворяющее представленным требованиям. Пусть T — транзитивное отношение, содержащее R в качестве подмножества. Покажем, что $R^+ \subset T$. $R \subset T \Leftrightarrow R^i \subset T$ для любого натурального i. Докажем это по индукции. $R^1 = R \subset R^+$, как было показано выше. Пусть верно для любого $i \leqslant k$. Пусть $aR^{k+1}c$. Но тогда существует $b : aR^kb$ и bRc, но $R \subset T$, $R^k \subset T$, следовательно aTb, bTc. Из транзитивности T следует, что aTc, следовательно $R^{k+1} \subset T$.

◁

Построение транзитивного замыкания

Представленное доказательство указывает на способ построения транзитивного замыкания, а также позволяет определить транзитивное замыкание отношения R как отношение T такое, что aTb тогда и только тогда, когда существуют $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что $aRx_1, x_1Rx_2, x_2Rx_3, \dots, x_{n-1}Rx_n, x_nRb$, то есть существует путь из вершины a в вершину b по рёбрам графа отношения.

Теорема:

Если R — отношение на конечном множестве размера n, то транзитивным замыканием такого отношения будет отношение

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} R^i.$$

Доказательство:

▷

Действительно, если по рёбрам графа есть путь длины $l > n$, то он проходит по всем вершинам графа, а, значит, в этом пути есть цикл и его можно отбросить, тем самым уменьшив длину пути. Длину пути можно уменьшать до того, пока она не будет не превосходить количество вершин графа (элементов множества), а значит, все пути длины более, чем n можно "выкинуть" из объединения.

◁

Для построения транзитивного замыкания отношения, заданного матрицей смежности, используется алгоритм Флойда — Уоршелла.

Свойства транзитивного замыкания

- Транзитивное замыкание рефлексивного отношения рефлексивно, так как транзитивное отношение содержит исходное отношение
- Транзитивное замыкание симметричного отношения симметрично. Действительно, пусть aTb, значит существуют $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что $aRx_1, x_1Rx_2, \dots, x_nRb$. Но из симметричности отношения R следует $bRx_n, x_nRx_{n-1}, \dots, x_1Ra$, а, следовательно, bTa
- Транзитивное замыкание не сохраняет антисимметричность, например, для отношения $\{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ на множестве $\{a, b, c\}$

- Транзитивное замыкание транзитивного отношения — оно само

Рефлексивно-транзитивное замыкание

Отношение $R^* = R^+ \cup R^0$, где

$$R^0 = \{(e, e) | e \in X\}$$

иногда называют рефлексивно-транзитивным замыканием, хотя часто под "транзитивным замыканием" подразумевается именно R^*. Обычно различия между этими отношениями не являются значительными.

См. также

- Транзитивное отношение
- Алгоритм Флойда-Уоршалла (построение транзитивного замыкания отношения)
- Транзитивный остов

Источники информации

- Wikipedia | Transitive closure (англ.) (http://en.wikipedia.org/wiki/Transitive_closure)