# Раскраски графа.

Определение. Функция $f: V(G) \to \{1,\ldots,k\}$ называется *k-раскраской графа* $G$, если $f(u) \neq f(v)$ для любого ребра $(u, v) \in E(G)$. Множества $V_i = \{v \in V(G) / f(v) = i\}$ называются *одноцветными классами* раскраски $f$. Вершины $v \in V_i$ считаются покрашенными в цвет $i$.

Определение. Минимальное значение $k$, при котором граф $G$ имеет $k$-раскраску, называется *хроматическим числом графа* и обозначается $\chi(G)$.

Пример. $\chi(K_n) = n$, $\chi(K_{n,m}) = 2$, $\chi(C_{2n}) = 2$, $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

Утверждение. Хроматическое число графа не меньше, чем хроматическое число подграфа.

Утверждение. Хроматическое число графа равно максимуму из хроматических чисел его компонент связности.

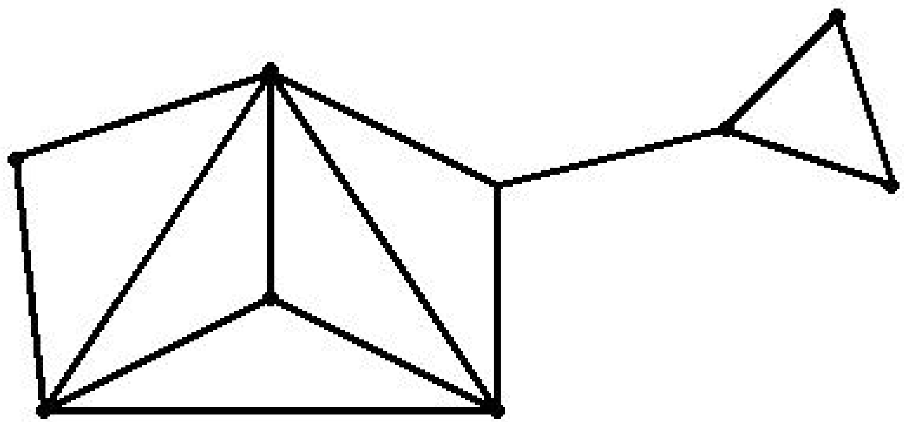
Пример. Задача об электричках. Пусть есть расписание электропоездов. Для каждого маршрута $i$ известен промежуток его выполнения $[a_i, b_i]$. Найти наименьшее количество составов, необходимое для выполнения маршрутов.
Сведение к задаче о раскраске. Пусть $V(G)$ — множество всех маршрутов. Пара $(i, j) \in E(G)$, если промежутки $[a_i, b_i]$ и $[a_j, b_j]$ пересекаются. Тогда наименьшее количество составов равно $\chi(G)$.

В общем случае задача о нахождении хроматического числа графа не решена. Не известно лучшего алгоритма, чем перебор всех возможных раскрасок.

Определение. Граф $G$ называется *$k$-вырожденным*, если может быть получен из одновершинного графа добавлением вершин, смежных не более чем с $k$ из ранее включенных вершин.

Замечание. Понятие 1-вырожденности и 1-конструируемости совпадают.

Пример. Данный граф является 3-вырожденным, но не является 2-вырожденным.



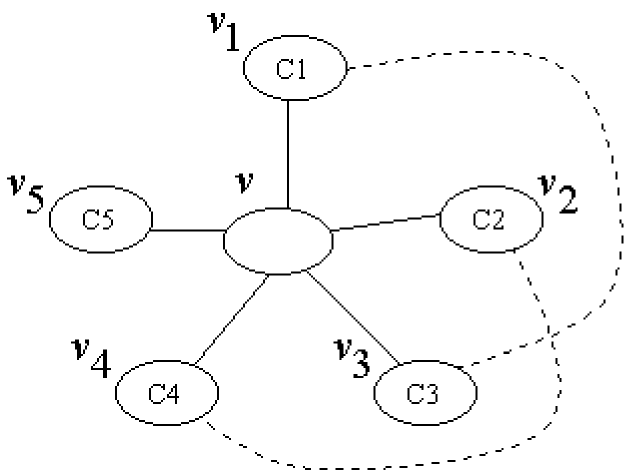
Утверждение. $k$-вырожденный граф является $(k+1)$-раскрашиваемым.

Утверждение. Любой планарный граф является 5-вырожденным.
Доказательство. По следствию из теоремы Эйлера в плоском графе существует вершина $v_1$ степени не более чем 5. После ее удаления получим снова плоский граф, в котором снова существует вершина $v_2$. Продолжая процедуру, получим одновершинный граф. Добавляя вершины в обратном порядке, убедимся, что граф 5-вырожден.

Теорема. Планарный граф 6-раскрашиваем.

Теорема о 5 красках. Каждый плоский граф 5-раскрашиваем.

Доказательство. Пусть это не так и $G$ минимальный по количеству вершин контрпример, а $v$ — вершина графа $G$ минимальной степени. Тогда $d(v) \leq 5$. Пусть граф $G_1$ получен из графа $G$ удалением вершины $v$. Рассмотрим 5-раскраску $f$ графа $G_1$. Если среди соседей $v$ нет хотя бы одного цвета, то она легко продолжается на раскраску $G$.




Значит $d(v) = 5$ и вершины $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$ — соседи вершины $v$ покрашены в разные цвета. Рассмотрим множество $V_{1,3}$ всех вершин достижимых из $v_1$ по чередующимся C1-C3 путям. Можно поменять цвет всем вершинам из $V_{1,3}$ и снова получим раскраску. Если $v_3 \notin V_{1,3}$, то в полученной раскраске вершина $v_1$ окрасится в C3 и $v$ можно покрасить в C1. Пусть существует чередующийся путь из $v_1$ в $v_3$. Но тогда, поскольку граф плоский, не существует чередующегося C2-C4 пути из $v_2$ в $v_4$.

Пример. Граф $K_4$ плоский. $\chi(K_n) = 4$.

Проблема 4 красок. Существует ли плоский граф, для которого $\chi(G) = 5$?

Теорема (Kenneth Appel and Wolfgang Haken, 1976). Любой плоский граф является 4-раскрашиваем.

# Оценки хроматического числа графа.

Обозначим $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$ максимальную степень вершин графа.

Утверждение. Любой граф является $(\Delta(G)+1)$-раскрашиваемым.
Доказательство. Граф можно красить в произвольном порядке. Каждая следующая вершина красится в любой цвет, которого нет у её покрашенных соседей.

Замечание. Оценка достигается для полных графов и нечетных циклов.

Определение. Граф называется $k$-однородным, если все вершины имеют одинаковую степень $k$.

Теорема. Не $\Delta(G)$-однородный связный граф является $\Delta(G)$-раскрашиваемым.

Доказательство. В графе $G$ существует вершина $v_1$, для которой $d(v_1) < \Delta(G)$. После её удаления получим граф $G_1$, любая компонента связности которого тоже не является $\Delta(G)$-однородным графом. Повторяя процедуру, получим одновершинный граф. Следовательно, граф является $(\Delta(G)-1)$-вырожденным и $\Delta(G)$-раскрашиваемым.

Теорема Брукса. Если связный граф с $\Delta(G) > 2$ не является полным, то он $\Delta(G)$-раскрашиваемый.

Доказательство. Обозначим $d = \Delta(G)$. Пусть это не так и $G$ минимальный по количеству рёбер контр пример. Тогда он является $d$-однородным. Выберем любую вершину $v$ и рассмотрим её соседей $v_1$, $v_2$,…, $v_d$. Поскольку граф не является графом $K_d$, то существуют такие $i$ и $j$, что вершины $v_i$ и $v_j$ не инцидентны.

Лемма 1. В графе $G$ нет одновершинного разделяющего множества.

Доказательство. Пусть это не так и существует вершина $v_0$, после удаления которой, множество вершин $V(G) \setminus \{v_0\}$ разбивается на две несвязных компоненты $V_1$ и $V_2$. Рассмотрим два подграфа $G_1$ и $G_2$ порожденные множествами $V_1 \cup \{v_0\}$ и $V_2 \cup \{v_0\}$. Степень каждого из них не больше чем $d$, по предположению они $d$-раскрашиваемы. Обозначим соответствующие раскраски $f_1$ и $f_2$. Поменяем в графе $G_2$ цвета $f_1(v_0)$ и $f_2(v_0)$. Поскольку у графов $G_1$ и $G_2$ единственная общая точка, то объединив полученные раскраски, получим раскраску графа $G$. Противоречие.

Лемма 2. В графе $G$ нет двухвершинного разделяющего множества.
Доказательство. Пусть это не так и существует множество вершин $\{v_1, v_2\}$ после удаления которого, множество вершин $V(G)\backslash \{v_1, v_2\}$ разбивается на две несвязных компоненты $V_1$ и $V_2$. Рассмотрим два подграфа $G_1$ и $G_2$ порожденные множествами $V_1 \cup \{v_1, v_2\}$ и $V_2 \cup \{v_1, v_2\}$.

Если ребро $\{v_1, v_2\} \in E(G)$, то доказательство аналогично доказательству леммы 1. Пусть это не так. Добавим к графам $G_1$ и $G_2$ ребро $(v_1, v_2)$. Очевидно, что и после этой операции $\Delta(G_i) \le d$. Если оба графа отличны от $K_{d+1}$, то они $d$-раскрашиваемы и раскраски можно объединить.
Пусть $G_1 = K_{d+1}$. Рассмотрим графы $G_1^*$ и $G_2^*$ полученные из $G_1$ и $G_2$ склеиванием вершин $v_1$, $v_2$ в одну вершину $w$. Граф $G_1^* = K_d$ и является $d$-раскрашиваемым. В графе $G_2$ вершины $v_1$ и $v_2$ связаны с единственной вершиной, следовательно, в графе $G_2^*$ вершина $w$ инцидентна 2 вершинам. Граф не является однородным и, по предыдущей теореме он $d$-раскрашиваем. Склеив раскраски по вершине $w$ и разбив её на одинаково покрашенные вершины $v_1$ и $v_2$, получим раскраску графа $G$. Противоречие.

## Окончание доказательства теоремы Брукса.

Объединим в графе $G$ вершины $v_i$ и $v_j$ в одну вершину $w$ получим граф $G^*$. Если он ($d$-1)-вырожденный, то $G^*$ $d$-раскрашиваем. Разбив $w$ на одинаково окрашенные вершины $v_i$ и $v_j$, получим $d$-раскраску графа $G$.

Пусть это не так. Начнем разборку графа $G^*$ с вершины $v$, степень которой равна $d$-1. Если на некотором шаге разборка остановится, то это означает, что получился $d$-однородный граф $G'$. Граф $G^*$ связен, следовательно, существует путь из $v$ в $G'$. Но вершина, в которой заканчивается этот путь, имеет степень больше $d$, следовательно, это вершина $w$. Таким образом, после удаления вершины $w$ граф $G^*$ становится несвязным. Тогда исходный граф $G$ является двусвязным, что противоречит лемме 2.

Пример. Пусть граф $G$ — звезда на 1000 вершинах. Тогда теорема Брукса дает оценку 999,  Звезда, как любое дерево имеет хроматическое число 2.

Утверждение. $\chi(G) \le \chi(G \setminus \{v\}) + 1$.

Пример. Пусть в графе $G$ 1000 вершин степени 10 и 10 вершин степени 1000. Тогда $\chi(G) \le 20$.

Пример. $\chi(K_{1000,10}) = 2$.

# Рёберные раскраски графа.

Определение. Функция $f: E(G) \to \{1,\dots,k\}$ называется *рёберной k-раскраской графа G*, если $f(e_1) \neq f(e_2)$ для любых рёбер с общим концом. Множества $E_i = \{e \in E(G) / f(e) = i\}$ называются *одноцветными классами* раскраски $f$. Рёбра $e \in E_i$ считаются покрашенными в цвет $i$.

Определение. Минимальное значение $k$, при котором граф $G$ имеет рёберную $k$-раскраску, называется *рёберным хроматическим числом графа* и обозначается $\chi'(G)$.

Пример. $\chi'(C_{2n}) = 2$, $\chi'(C_{2n+1}) = 3$.

Замечание. Одноцветный класс рёберной раскраски является паросочетанием.

Теорема Кёнига о раскраске рёбер. В двудольном графе $G$ рёберное хроматическое число равно $\Delta(G)$.

Доказательство. Рёберная раскраска содержит не менее $\Delta(G)$ цветов. Построим раскраску двудольного графа в $\Delta(G)$ цветов. По следствию из теоремы Кёнига-Холла в двудольном графе существует парасочетание накрывающее все вершины максимальной степени. Покрасим его рёбра в 1-ый цвет и удалим их из графа. Полученный граф будет двудольным со степенью на 1 меньше. Повторяя процедуру $\Delta(G)$ раз, мы удалим все рёбра графа.

Теорема Визинга. Любой граф имеет рёберную раскраску в $\Delta(G)+1$ цветов.

**Пример.** $\chi'(K_{2n+1}) = 2n+1$, $\chi'(K_{n,m}) = \max\{n,m\}$.

**Решение.** По теореме Кёнига двудольный граф можно раскрасить в $\Delta(G)$ цветов. Очевидно, что $\Delta(K_{n,m}) = \max\{n,m\}$.
По теореме Визинга $K_{2n+1}$ можно раскрасить в $2n+1$ цвет. Любое парасочетание графа $K_{2n+1}$ содержит не более чем $n$ рёбер. Всего рёбер $n(2n+1)$, поэтому потребуется не менее, чем $2n+1$ парасочетание.