Семинар 8 [10.10.2022]

Системы уравнений. Инварианты Римана.

Задачи

Задача 1

Найти инварианты Римана для политропного газа, у которого давление и плотность связаны степенной зависимостью $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$.

Задача 2

Найти условия, при которых решение уравнений одномерной газодинамики оказывается таким, что $v = v(\rho)$. Такое решение называется простой волной Римана.

Задача 3

Пусть в газе задано начальное распределение плотности $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ и известно, что возникшее течение представляет собой простую волну Римана с заданным значением инварианта J_+. Найти решение $\rho = \rho(x, t)$.

Решения

Задача 1

Уравнения гидродинамики в одномерном случае имеют вид:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0,$$
$$\partial_t v + v \partial_x v = -\frac{c^2}{\rho} \partial_x \rho,$$

где

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}},$$

скорость звука. В матричном виде:

$$\partial_t \psi + C \partial_x \psi = 0,$$

где

$$\psi = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} v & \rho \\ c^2/\rho & v \end{pmatrix}.$$

Уравнения на характеристики дают:

$$\left| E \frac{dx}{dt} - C \right| = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_\pm = v \pm c.$$

Соотношения на характеристиках приводят к уравнениям

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 1 & v & 0 \\ dt & 0 & 0 & d\rho \\ 0 & dt & \lambda_\pm dt & dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho dt & d\rho \\ \lambda_\pm dt - v dt & dv \end{vmatrix} = ((v - \lambda_\pm) d\rho - \rho dv) dt = 0,$$

из которых получаем инварианты Римана:

$$J_\pm = v \pm \int c \frac{d\rho}{\rho},$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\partial_t J_\pm + (v \pm c) \partial_x J_\pm = 0.$$

В случае политропного газа $p \rho^{-\gamma} = \text{const}$, имеем

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}},$$

тогда

$$J_\pm = v \pm \frac{2}{\gamma - 1} (c - c_0),$$

где постоянную c_0 удобно положить равной скорости звука при $v = 0$, $\rho = \rho_0$ в покоящемся газе.

Задача 2

Подставляя функцию $v = v(\rho)$ в уравнения системы, получаем

$$\partial_t \rho + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \partial_x \rho = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial \rho} \partial_t \rho + \left(v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{c^2}{\rho} \right) \partial_x \rho = 0.$$

Таким образом, получаем линейную систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} & v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{c^2}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \rho \\ \partial_x \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Она имеет нетривиальное решение, только когда

$$\begin{vmatrix} 1 & v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \\ 1 & v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{c^2}{\rho} \end{vmatrix} = v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{c^2}{\rho} - \frac{\partial v}{\partial \rho} \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) = 0,$$

откуда получаем условие

$$\frac{c^2(\rho)}{\rho^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2,$$

которое приводится к

$$\mathrm{const} = v \pm \int c(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = J_\pm.$$

То есть один из инвариантов Римана должен быть постоянен вдоль всего потока.

Задача 3

Выражая скорость через инвариант J_+:

$$v = J_+ - \int c(\rho) \frac{d\rho}{\rho},$$

и подставляя в одно из уравнений системы, получаем

$$\partial_t \rho + \left(J_+ - c(\rho) - \int c(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \right) \partial_x \rho = 0.$$

Уравнения на характеристики:

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = J_+ - c(\rho) - \int c(\rho) \frac{d\rho}{\rho}, \quad \dot{\rho} = 0.$$

Откуда получаем общее решение

$$f\left(\rho, x - \left(J_+ - c(\rho) - \int c(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \right) t \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \rho = g\left(x - \left(J_+ - c(\rho) - \int c(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \right) t \right).$$

Из задачи Коши получаем:

$$\rho = \rho_0 \left(x - \left(J_+ - c(\rho) - \int c(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \right) t \right).$$