Домашняя работа к занятию 28.

1.1 Покажите, что уравнение Гельмгольца имеет следующее сферически симметричное решение

$$u(r) = C_1 \frac{\sin \varkappa r}{r} + C_2 \frac{\cos \varkappa r}{r}.$$

Как эти функции связаны с функциями Бесселя?

1.2 При каких значениях $\varkappa$ уравнение Гельмгольца имеет ограниченное сферически симметричное решение внутри шара, обращающееся в ноль на его границе?

1.3 При каких значениях $\varkappa$ уравнение Гельмгольца имеет ограниченное сферически симметричное решение внутри шара радиуса r_0, такое что $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0$?

2.1 При каких значениях $\varkappa$ уравнение Гельмгольца имеет сферически симметричное решение, обращающееся в ноль на границе сферического слоя $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$?

2.2 Найдите гармоническую внутри шарового слоя $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ функцию u такую, что $u\big|_{r=r_1} = 1$, $u\big|_{r=r_2} = \cos\theta$.

3.1 Найдите решение уравнения Гельмгольца $\Delta u + u = 0$ внутри шара радиуса 1 такое, что $u\big|_{r=1} = \sin^2\varphi \cdot \sin^2\theta$.

3.2 Найдите все значения $\varkappa$, при которых уравнение Гельмгольца имеет ограниченные решения внутри шара радиуса r_0, такие что $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0$.

Ответы и указания.

1.1 $u(r) = C_1\dfrac{\sin\varkappa r}{r} + C_2\dfrac{\cos\varkappa r}{r} = C_1\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{J_{1/2}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} + C_2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{J_{-1/2}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}$

1.2 $\varkappa_n^2 = (\dfrac{\pi n}{r_0})^2$, $u_n(r) = \dfrac{\sin(\pi n r/r_0)}{r}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.3 $\varkappa_n^2 = (\dfrac{\tau_n}{r_0})^2$, $u_n(r) = \dfrac{\sin(\tau_n r/r_0)}{r}$, где τ_n — отличные от нуля корни уравнения $\operatorname{tg}\tau_n = \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$.

2.1 $\varkappa_n^2 = (\dfrac{\pi n}{r_2 - r_1})^2$, $u_n(r) = \dfrac{1}{r}\sin\big(\dfrac{\pi n(r - r_1)}{r_2 - r_1}\big)$, $n \in \mathbb{N}$.

2.2 *Указание*: $u = A + B\dfrac{1}{r} + Cr\cos\theta + D\dfrac{1}{r^2}\cos\theta$

Ответ: $u = \dfrac{r_1(r - r_2)}{r(r_1 - r_2)} + \dfrac{(r^3 - r_1^3)r_2^2}{(r_2^3 - r_1^3)r^2}\cos\theta$

3.1 *Указание*: $\sin^2\varphi \cdot \sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\varphi}{2} \cdot \sin^2\theta =$
$= \dfrac{1}{2}\sin^2\theta - \dfrac{1}{2}\cos 2\varphi \cdot \sin^2\theta = -\dfrac{1}{2}(\cos^2\theta - \dfrac{1}{3}) + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\cos 2\varphi \cdot \sin^2\theta$

Ответ: $u = \dfrac{1}{3}\dfrac{J_{1/2}(r)}{J_{1/2}(1)\sqrt{r}} - \dfrac{1}{2}(\cos^2\theta - \dfrac{1}{3})\dfrac{J_{5/2}(r)}{J_{5/2}(1)\sqrt{r}} - \dfrac{1}{2}\sin^2\theta \cdot \cos 2\varphi\dfrac{J_{7/2}(r)}{J_{7/2}(1)\sqrt{r}}$