Урок 5. Фазовая и групповая скорость

1. (Задача 2.18.) Вычислить групповую скорость для различных законов дисперсии (v – фазовая скорость): а) $v = \text{const}$ – звук в воздухе; б) $v = a\sqrt{\lambda}$ – гравитационные волны на воде; в) $v = a/\sqrt{\lambda}$ – капиллярные волны; г) $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}$ – электромагнитные волны в ионосфере (c – скорость света; λ – длина волны в среде); д) $v = c\omega/\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - c^2\alpha^2}$ – электромагнитные волны в прямолинейном волноводе, заполненном диспергирующей средой с $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$; c – скорость света в вакууме, α – геометрический фактор волновода.

Решение а) $v = \frac{\omega}{k}$ — групповая скорость $u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v$, поскольку $v =$ const.

б) $\omega = vk = ka\lambda = ka\sqrt{\frac{2\pi}{k}} = \sqrt{2\pi}a\sqrt{k}$; $v = \sqrt{2\pi}a/\sqrt{k}$, $u = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\pi}/\sqrt{2k} = v/2$.

в) $v = a/\sqrt{\lambda} = a\sqrt{k/2\pi}$, $\omega = a\sqrt{k^3/2\pi}$, $u = (3/2)a\sqrt{k/2\pi} = 3v/2$.

г) $\omega = vk$, $u = \frac{d\omega}{dk} = v + k \cdot \frac{dv}{dk}$, $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2} = \sqrt{c^2 + b^2(\frac{2\pi}{k})^2}$.

$$u = v - \frac{1}{v}\left(\frac{2\pi b}{k}\right)^2 = c^2/v.$$

д) $v = c\omega/\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 c^2\alpha^2}$, $\omega = kv = \sqrt{k^2c^2 + \alpha^2c^2}/\varepsilon\mu$,

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{k^2c^2 + \alpha^2c^2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{k^2c^2 + \alpha^2c^2}\frac{d(\varepsilon\lambda)}{(\varepsilon\mu)^{3/2}d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dk}.$$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{c^2}{[1 + (\omega/2\varepsilon\mu) \cdot d(\varepsilon\mu)/d\omega]v}.$$

2. (Задача 2.19.) Найти фазовую и групповую скорости волн в среде, диэлектрическая проницаемость которой имеет вид $\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$ где ω_p и ω_0 – константы. Ограничиться случаями $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0, (\mu = 1)$.

Решение Фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c\left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Для нахождения групповой скорости выражение (1) запишем в виде

$$k^2c^2 = \omega^2(1 + \omega_p^2/(\omega_0^2 - \omega^2))$$

и обе части продифференцируем по k.

После несложных преобразований получим

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{kc^2}{\omega}\left[1 + \frac{\omega_p^2\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\right]^{-1}. \tag{2}$$

Подставляя в уравнение (2) выражение для k через ω из формулы (1), для групповой скорости $u = \frac{d\omega}{dk}$ получаем

$$u = c \cdot \left[1 + \omega_p^2/(\omega_0^2 - \omega^2)\right]^{1/2} \Big/ \left[1 + \omega_p^2\omega_0^2/(\omega_0^2 - \omega^2)^2\right]. \tag{3}$$

Для нахождения поведения групповой скорости при $\omega \ll \omega_0$ выражение (3) запишем в виде

$$u = c \cdot \frac{\left[1 + \frac{\omega_p^2/\omega_0^2}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right]^{1/2}}{1 + \frac{\omega_p^2/\omega_0^2}{\left(1-\omega^2/\omega_0^2\right)^2}}$$

и разложим правую часть в ряд Тейлора по малой величине ω^2/ω_0^2. Ограничиваясь первым порядком малости, получаем

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\omega_p^2\omega^2}{\varepsilon_0\omega_0^4}\right), \quad \omega \ll \omega_0,$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(\omega = 0) = 1 + \omega_p^2/\omega_0^2$.

Поступая аналогичным образом, для фазовой скорости при $\omega \ll \omega_0$ из уравнения (1) получим

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2\omega^2}{\varepsilon_0\omega_0^4}\right), \quad \omega \ll \omega_0.$$

Для нахождения групповой скорости при $\omega >> \omega_0$ выражение (3) запишем в виде

$$u = c \cdot \frac{[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}/(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1)]^{1/2}}{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}(\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2/(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1)^2}$$

и разложим в ряд Тейлора по малой величине ω_0^2/ω^2. Ограничиваясь, как и прежде, первым порядком малости, получим

$$u = c \cdot \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right].$$

Поступая аналогичным образом для фазовой скорости при $\omega \gg \omega_0$, находим $v = c \cdot (1 + \omega_p^2/2\omega^2)$.