Семинар 20 [06.12.2022]

Уравнение Гаусса

$$
\begin{gathered}
z\,(1-z)\,\omega'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\,\omega' - \alpha\beta\,\omega = 0, \\
\omega = F\,(\alpha,\beta;\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha\,(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}{\gamma\,(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots. \\
\omega \sim z^{\rho_0}, \quad \rho_0 = \{0, 1-\gamma\}, \quad z \to 0, \\
\omega \sim (1-z)^{\rho_1}, \quad \rho_1 = \{0, \gamma-\alpha-\beta\}, \quad z \to 1, \\
\omega \sim \frac{1}{z^{\rho_\infty}}, \quad \rho_\infty = \{\alpha, \beta\}, \quad z \to \infty.
\end{gathered}
$$

Уравнение Куммера

$$
\begin{gathered}
z\omega'' + [\gamma - z]\,\omega' - \alpha\omega = 0, \\
\omega = F\,(\alpha;\gamma;z) = \lim_{\beta\to\infty} F\,(\alpha,\beta;\gamma;z/\beta) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha\,(\alpha+1)}{\gamma\,(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots. \\
\omega \sim z^{\rho_0}, \quad \rho_0 = \{0, 1-\gamma\}, \quad z \to 0, \\
\omega \sim \left\{e^z, z^{-\alpha}\right\}, \quad z \to \infty.
\end{gathered}
$$

Задачи

Задача 1

Найти собственные функции и числа уравнения Шредингера для атома водорода в параболоидальных координатах.

Решения

Задача 1

Имеем

$$\xi X'' + X' + \left(\lambda_\xi - \frac{m^2}{4\xi} - k^2\xi\right) X = 0,$$
$$\xi Y'' + Y' + \left(\lambda_\eta - \frac{m^2}{4\eta} - k^2\eta\right) Y = 0,$$

где $\lambda_\eta + \lambda_\xi = 1$. Как видно, уравнения имеют подобный вид, поэтому можно ограничиться решением одного из них, например, первого. Особые точки: $\xi = \{0, \infty\}$ и соответствующие асимптотики: $y \sim \left\{\xi^{\pm m/2}, e^{\pm k\xi}\right\}$. Подставим $y = \xi^{m/2} e^{-k\xi} u(z)$, где $z = 2k\xi$, в уравнение и получим

$$zu'' + (m+1-z)u' - \frac{1}{2}\left(m+1-\frac{\lambda_\xi}{k}\right) u = 0,$$

и

$$u \propto F\left(\frac{1}{2}\left(m+1-\frac{\lambda_\xi}{k}\right); m+1; z\right).$$

Из условий обрыва рядов заключаем, что

$$\frac{1}{2}\left(m+1-\frac{\lambda_\xi}{k}\right) = -n_\xi, \quad \frac{1}{2}\left(m+1-\frac{\lambda_\eta}{k}\right) = -n_\eta,$$

где n_ξ и n_η неотрицательные целые числа. В итоге

$$X_{mn_\xi} \propto \xi^{m/2} e^{-k\xi} F\left(-n_\xi; m+1; 2k\xi\right),$$
$$Y_{mn_\eta} \propto \eta^{m/2} e^{-k\eta} F\left(-n_\eta; m+1; 2k\eta\right).$$

Учитывая $\lambda_\eta + \lambda_\xi = 1$, получаем выражение для энергии

$$E = 2k^2 = \frac{1}{2\left(n_\xi + n_\eta + m + 1\right)^2}.$$