

## 1. Электрический ток

## Урок 15

## Закон сохранения заряда. Закон Ома

Направленное движение электрических зарядов  $q$  – ток  $J$ .

$$J = dq/dt.$$

Вектор плотности тока  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = en\mathbf{v}$ .

Закон Ома в дифференциальной форме:  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ .

Для линейных проводников закон Ома  $J = U/R$ , где  $R = \ell/(\sigma S)$ .

Закон сохранения заряда в интегральной форме

$$dq/dt = - \oint j_{1n} dS,$$

а в дифференциальной форме:  $\partial \rho / \partial t = - \operatorname{div} \mathbf{j}$ .

Для стационарных токов  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , откуда следует граничное условие  $j_{1n}| = j_{2n}|$ .

Из потенциальности поля  $\mathbf{E}$  следует  $E_{1\tau}| = E_{2\tau}|$  или  $\frac{j_{1\tau}}{\sigma_1}| = \frac{j_{2\tau}}{\sigma_2}|$ .

Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho, \quad \text{где } \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad E_{1\tau}| = E_{2\tau}|, \quad \sigma_1 E_{1n}| = \sigma_2 E_{2n}|.$$

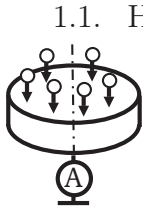
По найденному  $\mathbf{E}$  и закону Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  находим вектор плотности тока  $\mathbf{j}$ .

Правила Кирхгофа  $\sum J_i = 0$ ,  $\sum \mathcal{E}_k = \sum J_i R_i$ .

Закон Джоуля–Ленца: мощность  $N = \int \sigma E^2 dV = \int \frac{j^2}{\sigma} dV$ .

Вольт-амперная характеристика для вакуумного диода – закон «3/2»:  $j = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U^{3/2}}{d^2}$ .

Заметим, что  $J d\ell = \mathbf{j} dV = \rho \mathbf{v} dV = \frac{dq}{dV} \mathbf{v} dV = \mathbf{v} dq$ .



Решение

1.1. На полый металлический цилиндр, радиус крышек-торцов которого равен  $a$ , падает параллельно оси цилиндра однородный поток электронов. Заряд электрона –  $e$ , скорость –  $v$ , число электронов в единице объема –  $n$ . Собираемый заряд через амперметр, подсоединенный к центру нижнего торца, уходит на землю. Найти распределение тока на торцах  $j_{1,2}(R)$ .

$$\frac{env\pi r^2}{2\pi r} = j_1 = \frac{envr}{2}$$

$$j_2 = \frac{env\pi a^2}{2\pi r} = \frac{enva^2}{2r}$$

$$j_{\text{верх}} = envr/2, \quad j_{\text{нижн}} = enva^2/2r.$$

1.2. (Задача 3.2) Пучок заряженных частиц с массой  $m$ , зарядом  $q$  и скоростью  $v_0$  каждая влетает в пространство с электрическим полем  $\mathbf{E}$  в направлении вдоль поля и проходит в нем путь  $\ell$ . Найти плотность тока пучка на выходе, если на входе она равна  $j_0$ , а также скорость и плотность числа частиц в пучке.

**Решение**

$$\begin{aligned} j &= j_0 \\ \frac{mv^2}{2} &= \frac{mv_0^2}{2} + qE\ell \\ v &= \sqrt{v_0^2 + \frac{2qE\ell}{m}} \\ n &= \frac{j_0}{qv} = \frac{n_0 v_0}{v} \end{aligned}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0, \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2qE\ell/m}, \quad n = j_0/(qv).$$

1.3. (Задача 3.3) В бесконечную проводящую с проводимостью  $\sigma$  и проницаемостью  $\epsilon$  среду помещен заряд  $Q$ . Найти время релаксации, т. е. время, в течение которого заряд в этой точке уменьшится в  $e$  раз.

**Решение** Пусть в момент времени  $t$  внутри объема  $V$ , куда первоначально был помещен заряд  $Q_0$ , находится заряд  $Q(t)$ . За время  $dt$  из объема вытечет количество заряда

$$dQ = - \left( \int_S (\mathbf{j} \, d\mathbf{s}) \right) dt,$$

где  $\int_S (\mathbf{j} \, d\mathbf{s})$  – полный ток через поверхность  $S$ , ограничивающий объем  $V$ ;  $\mathbf{j}$  – вектор плотности тока на этой поверхности. Используя дифференциальный закон Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , находим, что

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \int_S (\mathbf{D} \, d\mathbf{s}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} 4\pi Q.$$

Решая это дифференциальное уравнение и используя начальное условие  $Q(0) = Q_0$ , получаем

$$Q = Q_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} t} = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

откуда видно, что заряд уменьшается в  $e$  раз за время  $\tau = \epsilon/4\pi\sigma$ .

1.4. В неоднородной проводящей среде с проводимостью  $\sigma(\mathbf{r})$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\mathbf{r})$  поддерживается стационарное распределение токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Найти объемное распределение зарядов  $\rho(\mathbf{r})$  в этой среде.

**Решение** По закону Ома в дифференциальной форме  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . По закону сохранения заряда в стационарном случае  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , т. е.

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \sigma = 0;$$

откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\mathbf{E}(\operatorname{grad} \sigma)/\sigma. \quad (1)$$

По теореме Гаусса в дифференциальной форме  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ ; откуда

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon + \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E}).$$

Взяв  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  из (1), получим

$$\rho = \frac{\mathbf{E}}{4\pi\sigma} (\sigma \operatorname{grad} \varepsilon - \varepsilon \operatorname{grad} \sigma) = \frac{\mathbf{j}}{4\pi\sigma^2} (\sigma \operatorname{grad} \varepsilon - \varepsilon \operatorname{grad} \sigma).$$

Отметим, что  $\rho \equiv 0$  при  $\frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\operatorname{grad} \sigma}{\sigma}$ .

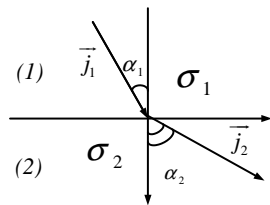
В отсутствие поляризуемости среды, когда ее свойства описываются лишь через проводимость  $\sigma(\mathbf{r})$ , получаем

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{(\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \sigma)}{4\pi\sigma^2}$$

при  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

1.5. (Задача 3.4) Найти закон преломления линий тока на плоской поверхности раздела двух сред с проводимостями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

**Решение**



$E_{1\tau} = E_{2\tau}$ . Так как  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , то

$$j_{1\tau} = \sigma_1 E_{1\tau}, \quad j_{2\tau} = \sigma_2 E_{2\tau} = j_{1\tau} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

В стационарном случае  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , откуда  $j_{1n} = j_{2n}$ . Нормальные составляющие к границе раздела двух сред непрерывны, иначе на границе будет изменяться заряд. С другой стороны,  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , откуда следует непрерывность тангенциальной составляющей напряженности электрического поля

Поскольку  $j_{1\tau}/j_{1n} = \operatorname{tg} \alpha$  (см. рисунок), то

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

1.6. (Задача 3.5) Пространство между бесконечно длинными коаксиальными идеально проводящими цилиндрами радиусов  $a, b$  заполнено веществом с проводимостью  $\sigma(r) = \alpha r^n$ . Найти распределение потенциала в пространстве между цилиндрами и сопротивление на единицу длины. Потенциалы цилиндров:  $U(a) = 0, U(b) = U_0$ .

**Решение**

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}) = -(\nabla, \sigma \nabla \varphi) = 0$$

$$\sigma \Delta \varphi + (\nabla \sigma, \nabla \varphi) = 0$$

В цилиндрической системе координат  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$ .

$$\alpha r^n \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \alpha n r^{n-1} \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

$$r^n \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + (n+1) r^{n-1} \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

$$\varphi(r) = A r^k + B$$

$$k_1 = -n, k_2 = 0, \varphi(a) = U_0, \varphi(b) = 0$$

$$\varphi(r) = U_0 \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^n - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1}$$

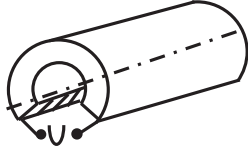
Ток на единицу длины вдоль  $z$

$$I = 2\pi r j = -2\pi r \sigma(r) \nabla \varphi = 2\pi U_0 \frac{\alpha b^n}{\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1} = \frac{U_0}{R}$$

$$R = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1}{2\pi \sigma_{\max}}$$

При  $\sigma = \text{const}$  задача о токе соответствует  $\Delta \varphi = 0$ . Это можно использовать для аналогового (модельного) решения уравнения Лапласа.  $\varphi(r) = U_0 [1 - (a/r)^n] / [1 - (a/b)^n]$ ,  $R = [(b/a)^n - 1] / (2\pi \sigma_{\max} n)$ , где  $\sigma_{\max} = \alpha b^n$ .

1.7. (Задача 3.7) Из толстой длинной трубы с радиусами  $a$  и  $b$ , сделанной из



материала с проводимости  $\sigma$ , вырезана вдоль оси часть с угловым размером  $\alpha_0$ . К продольным плоскостям разреза подведено напряжение  $U$ . Найти распределение плотности тока  $j(r)$  по сечению отрезка трубы и сопротивление единицы длины. Краевыми эффектами пренебречь.

**Решение** В цилиндрической системе координат  $j = j_\alpha$ . Поскольку плотность тока  $j_\alpha$  зависит только от  $r$ , то  $E_\alpha = j_\alpha/\sigma$  зависит тоже только от  $r$ . Тогда через интеграл по дуге определенного радиуса разность потенциалов или напряжение запишется так:

$$U = \int_0^{(2\pi-\alpha_0)r} (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = E_\alpha(r)(2\pi - \alpha_0)r,$$

откуда

$$E_\alpha(r) = \frac{U}{(2\pi - \alpha_0)r}$$

и, следовательно,

$$j_\alpha(r) = \frac{U\sigma}{(2\pi - \alpha_0)r}.$$

Найдем величину тока на единицу длины трубы:

$$J = \int_a^b j_\alpha(r) dr = \frac{U\sigma \ln b/a}{2\pi - \alpha_0}.$$

Поскольку  $J = U/R$ , то из последнего выражения следует, что сопротивление единицы длины трубы:

$$R = \frac{2\pi - \alpha_0}{\sigma \ln b/a}.$$

1.8. (Задача 3.9) Найти стационарное поле  $E$  в плоском конденсаторе с напряжением  $U$ , диэлектрик которого состоит из двух слоев толщины  $l_1$ ,  $l_2$  с диэлектрическими постоянными  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и проводимостями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ . Определить свободный и связанный заряды на границе раздела сред.

**Решение** Есть ток утечки  $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ .  $l_1 E_1 + l_2 E_2 = V$  - полное падение напряжения.

$$E_{1,2} = \frac{\sigma_{2,1} V}{l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1}$$

Обратите внимание, что  $1, 2 \rightarrow 2, 1$ . На границе между слоями свободный заряд.

$$S(D_{2n} - D_{1n}) = 4\pi\sigma_{\text{своб}},$$

откуда

$$\sigma_{\text{своб}} = \frac{V(\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1)}{4\pi(l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1)}$$

$$\sigma_{\text{связ}} = \sigma' = \frac{1}{4\pi} [(D_{2n} - E_{2n}) - (D_{1n} - E_{1n})]$$

Это все следует из

$$j_{1n} = j_{2n}$$

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}$$

$$D_{n2} - D_{n1} \neq 0 = D_{n1} \left( \frac{\sigma_1 \varepsilon_2}{\sigma_2 \varepsilon_1} - 1 \right)$$

К положительно заряженной обкладке конденсатора прилегает первый слой.

1.9. (Задача 3.18) Заземление осуществляется с помощью идеально проводящего шара радиуса  $a$ , наполовину утопленного в землю (проводимость земли  $\sigma_1 = \text{const}$ ). Слой земли радиуса  $b$ , концентрический с шаром и прилегающий к нему, имеет искусственно повышенную проводимость  $\sigma_2$ . Найти сопротивление такого заземлителя.

**Решение** Получим общее соотношение для сопротивления заземления

$$\int \mathbf{D} ds = 4\pi Q = 4\pi CV = \varepsilon \int \mathbf{E} ds = \frac{\varepsilon}{\sigma} \int \mathbf{j} ds = \frac{\varepsilon}{\sigma} I$$

Считая  $C$  емкостью в вакууме и  $\varepsilon = 1$ .

$$4\pi CV = \frac{I}{\sigma}$$

$$V = IR$$

Тогда сопротивление заземления

$$R = \frac{1}{4\pi C \sigma}.$$

Емкость полусферы —  $C_{\text{сф}/2} = \frac{b}{2}$  Емкость половины сферического конденсатора

$$2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{C_{\text{сфк}/2}}.$$

$$R = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sigma_1} \frac{2}{b} + \frac{2}{\sigma_2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right\}.$$

1.10. (Задача 3.19) Концы некоторой цепи заземлены с помощью двух идеально проводящих сфер (радиусы их  $a_1$  и  $a_2$ ), наполовину утопленных в землю, служащей вторым проводом. Расстояние между этими сферами  $\ell \gg a_1, a_2$ , проводимость земли –  $\sigma$ . Найти сопротивление между заземлителями.

**Решение**

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varphi_1}{R_1} = 4\pi C_1 \sigma_1 \varphi_1 \\ I_2 &= \frac{\varphi_2}{R_2} = -4\pi C_2 \sigma_2 \varphi_2 \\ I_1 &= I_2 = I \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{I}{4\pi} \left( \frac{1}{\sigma_1 C_1} + \frac{1}{\sigma_2 C_2} \right) = IR \\ R &\approx \frac{1}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \end{aligned}$$

1.11. (Задача 3.21) Оценить сопротивление заземления, выполненного в форме пластины с размерами  $\ell \gg a \gg h$ . Оценить напряженность электрического поля вокруг этого заземления, если заземление находится на глубине  $r \gg \ell$ . Найти «шаговое» напряжение (длина шага  $\lambda$ ) вблизи этого заземления.

**Решение**

$$\begin{aligned} C &\approx \frac{l}{2 \left( \pi + \ln l/a \right)} \\ I &= \frac{U}{R} \\ R &= \frac{2 \left( \pi + \ln l/a \right)}{4\pi\sigma l} \approx \frac{1}{2\pi\sigma l} \\ \int E ds &= E \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\sigma} \int j ds = \frac{1}{\sigma} I \\ E &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{U \cdot 2\pi\sigma l}{\pi + \ln l/a} \frac{1}{\sigma} \approx \frac{lU}{2R^2 \ln l/a} \\ IR &= U \\ \Delta U_{\text{шаг}} &= E\lambda \\ R &= \frac{\pi + \ln \ell/a}{2\pi\sigma\ell}, \quad E \simeq \frac{U\ell}{2r^2 \ln \ell/a}, \quad \Delta U_{\text{шаг}} \simeq \frac{U\ell\lambda}{2r^2 \ln \ell/a}. \end{aligned}$$

### Решение 3.18.

Из уравнения Лапласа  
электрический потенциал

$$\varphi = \begin{cases} \frac{A_1}{r}, & r > b \\ \frac{A_2}{r} + B_2, & a < r < b \end{cases},$$

где  $r$  – расстояние до центра полусферы,  
 $A_1, A_2, B_2$  – неизвестные коэффициенты.

Из непрерывности на границах  
электрического потенциала и тока

$$\begin{cases} \frac{A_1}{b} = \frac{A_2}{b} + B_2 \\ \frac{A_2}{a} + B_2 = U \\ \sigma_1 \frac{A_1}{b^2} = \sigma_2 \frac{A_2}{b^2} \end{cases},$$

откуда

$$A_1 = \frac{U}{1/b + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(1/a - 1/b)}$$

Плотность тока

$$j = \sigma_1 \frac{A_1}{r^2} = \frac{U/r^2}{\frac{1}{\sigma_1 b} + \frac{1}{\sigma_2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}.$$

Ток

$$I = 2\pi r^2 j = \frac{2\pi U}{\frac{1}{\sigma_1 b} + \frac{1}{\sigma_2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}.$$

Сопротивление заземлителя

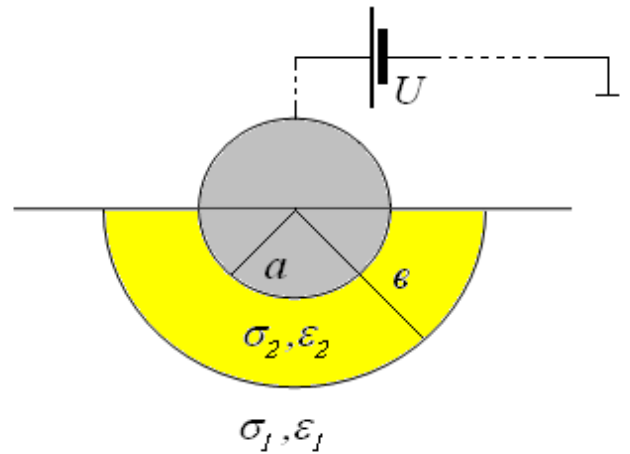
$$R = U/I = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\sigma_1 b} + \frac{1}{\sigma_2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]$$

Сопротивление заземлителя не зависит от диэлектрической проницаемости.  
Граничные условия для диэлектрической проницаемости выполняются за счёт появления  
свободного заряда на границе радиуса  $b$  плотностью:

$$\sigma_{своб} = \frac{D_1(b) - D_2(b)}{4\pi} = \frac{\epsilon_1 A_1 - \epsilon_2 A_2}{4\pi b^2} = \frac{U}{4\pi b^2} \cdot \frac{\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}}{\frac{1}{\sigma_1 b} + \frac{1}{\sigma_2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

**Ответ:**

Сопротивление заземлителя  $R = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\sigma_1 b} + \frac{1}{\sigma_2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]$  (не зависит от  
диэлектрической проницаемости).





### Комментарий (о главном секрете геофизиков).

В отсутствие электролита ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ) сопротивление заземлителя  $R = \frac{1}{2\pi\sigma_1 a}$ . С другой

стороны, при  $b \gg a$  (и  $b\sigma_1 \gg a\sigma_2$ ) сопротивление заземлителя  $R \approx \frac{1}{2\pi\sigma_2 a}$ . То есть удельная

проводимость формации  $\sigma_1$  замещается на удельную проводимость электролита  $\sigma_2$ , которая может быть много больше. В качестве электролита наиболее часто используют солёную воду. Например, удельная проводимость океанской воды в среднем 4 См/м, в то время как удельная проводимость песчаных дюн в пустыне или вечномёрзлых грунтов на Крайнем Севере может быть не более  $10^{-3}$  См/м. В таких условиях при отсутствии электролита геофизики при проведении измерений пишут на электроды для обеспечения контакта (достаточно низкого сопротивления) заземлителя. Это и есть главный секрет геофизиков.