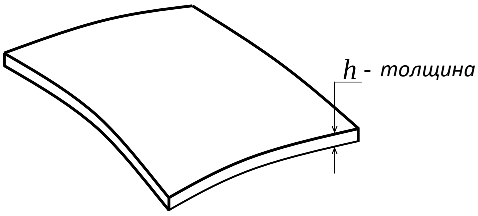
XIV

Безмоментная теория оболочек вращения.

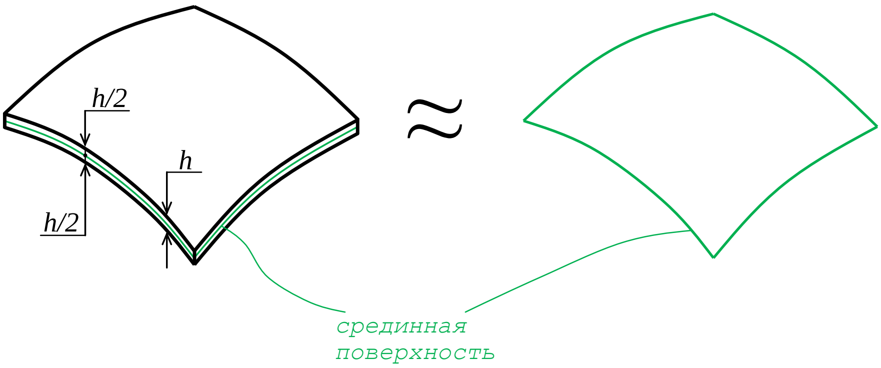
Вспоминаем:

Оболочка это тело, один из размеров которого много меньше двух других. Этот наименьший размер называется **толщиной** оболочки



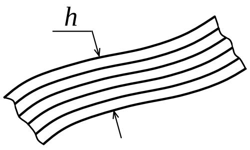
Свои размеры и форму оболочка может менять, как под действием внутренних изгибающих моментов (см. раздел XVII «Изгиб пластин» *будет написан позже*), так и под действием внутренних растягивающих (сжимающих) усилий.

Рис. XIV.1.

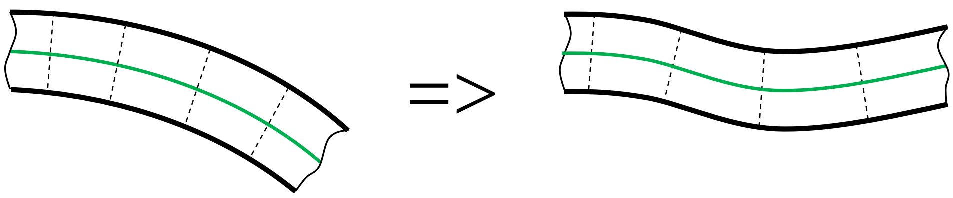


Для упрощения расчётов геометрии при решении задач рассматривают только срединную поверхность оболочки *(рис. XIV.1)*. Подобный подход стал возможен в результате применения гипотез:

1) **Гипотеза о ненадавливании слоёв:** слои оболочки при её деформировании друг на друга не давят;



2) **Гипотеза прямых нормалей:** точки, лежащие на нормали к недеформированной срединной поверхности, после нагружения остаются лежать на единой прямой, нормальной к уже деформированной срединной поверхности.



Первая гипотеза позволяет пренебречь поперечными нормальными напряжениями, вторая – пренебречь напряжениями касательными (именно они искривляют нормали.)

В результате, в расчётах можно рассматривать только нормальные напряжения, действующие вдоль срединной поверхности.

Оболочка вращения: оболочка, срединная поверхность которой получена вращением образующей вокруг некоторой оси (*рис. XIV.2*).

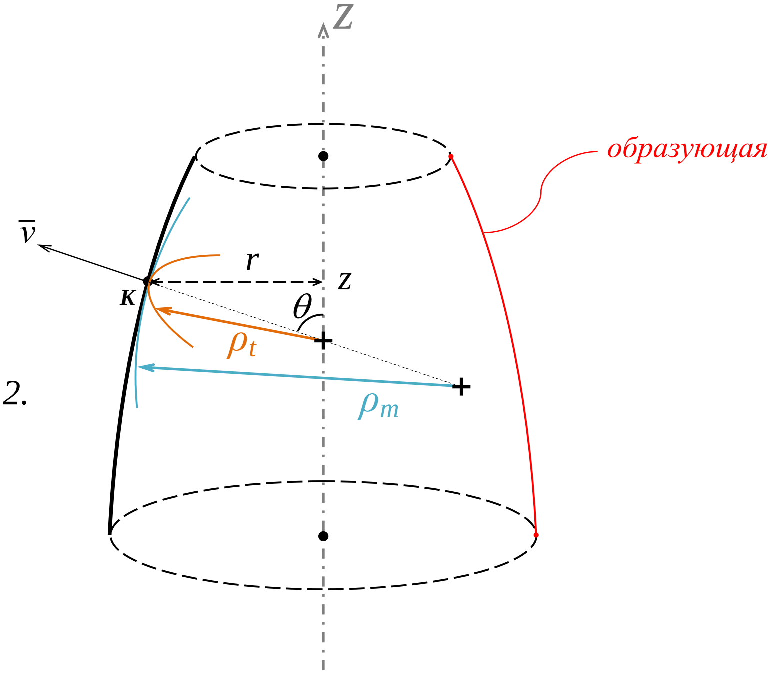


Рис. XIV.2.

В любой точке срединной поверхности оболочки вращения можно выделить два направления: меридиональное (вдоль образующей) и окружное (перпендикулярное меридиональному)

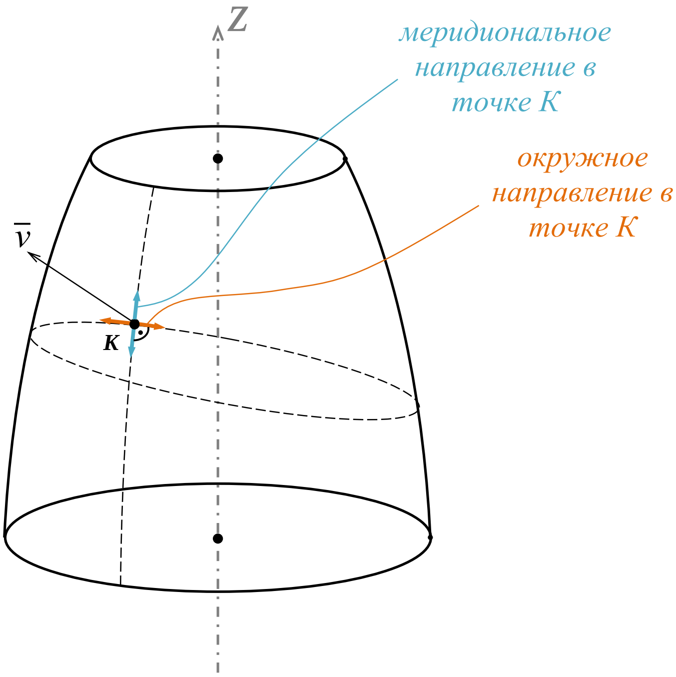


Рис. XIV.3.

и, соответственно, два радиуса кривизны (*рис. XIV.2.*):

ρ_m – радиус кривизны меридионального направления в рассматриваемой точке (то есть, радиус кривизны образующей в этой точке);

ρ_t – радиус кривизны окружного направления в рассматриваемой точке.

Пример $\boxed{XIII.1}$:

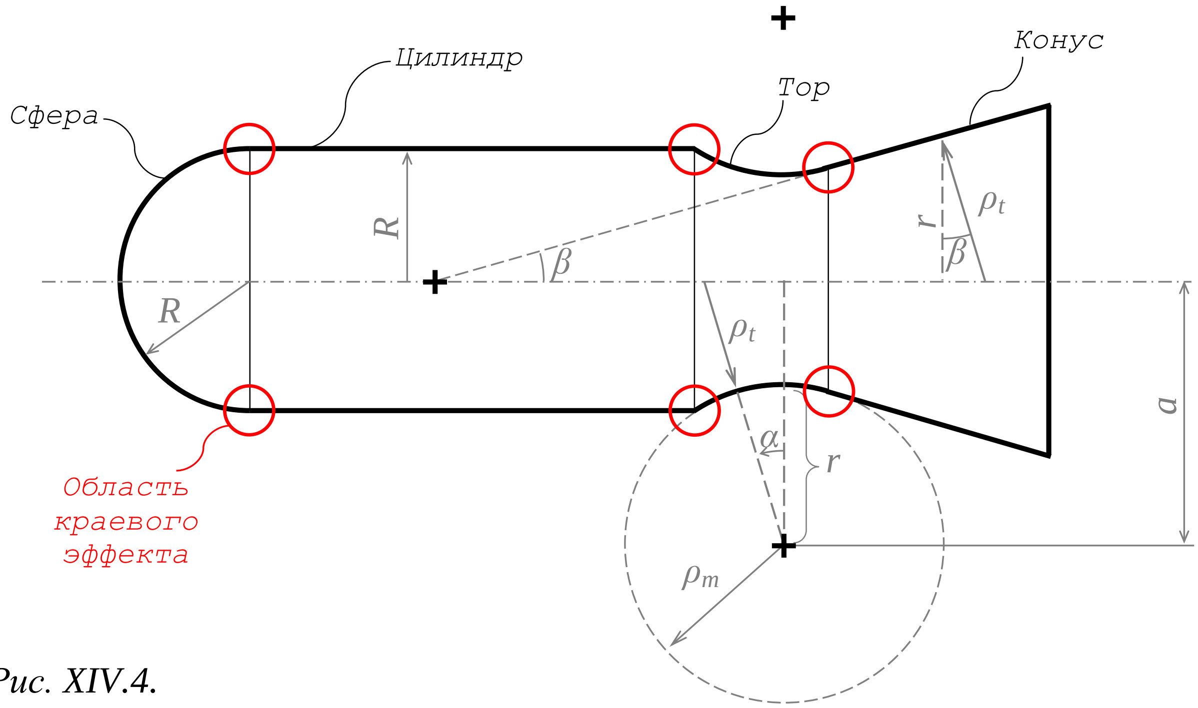


Рис. XIV.4.

$$Сфера: \quad \rho_m = \rho_t = R;$$

$$Цилиндр: \begin{cases} \rho_m = \infty \\ \rho_t = R \end{cases};$$

$$Тор: \begin{cases} \rho_m = r \\ \rho_t = \dfrac{a}{\cos\alpha} - r \end{cases};$$

$$\alpha = 0^\circ: \quad \rho_t = a - r$$

$$\alpha = 90^\circ: \quad \rho_t = \infty$$

$$\alpha = 180^\circ: \quad \rho_t = -(a + r)$$

$$\alpha = 270^\circ: \quad \rho_t = \infty$$

$$Конус: \begin{cases} \rho_m = \infty \\ \rho_t = \dfrac{r}{\cos\beta} \end{cases}.$$

▼

Будем изучать оболочки вращения плавных (то есть, без изломов) очертаний, нагруженных давлением жидкости, газа или сыпучих веществ. Закрепления рассматриваемых оболочек таковы, что реакции связей направлены по касательной к срединной поверхности (*рис. XIV.5а.*).

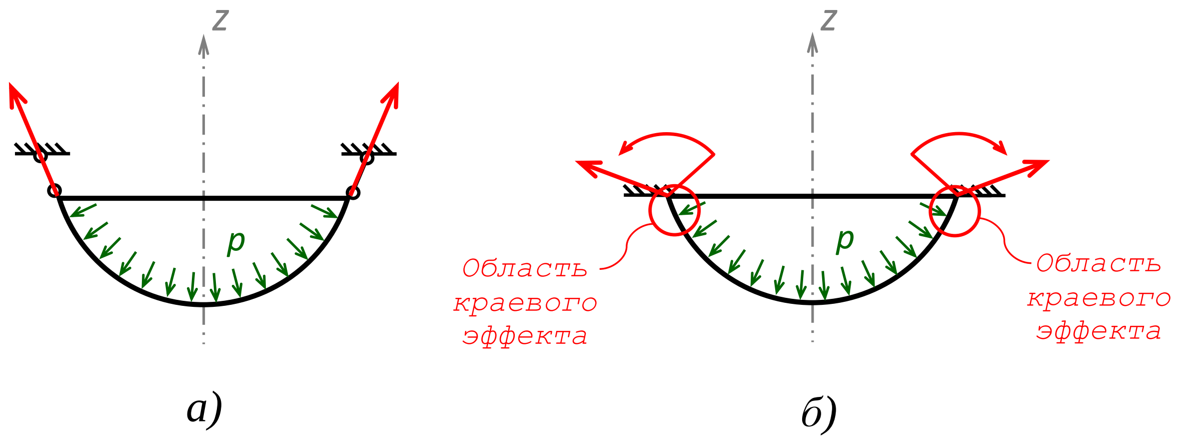


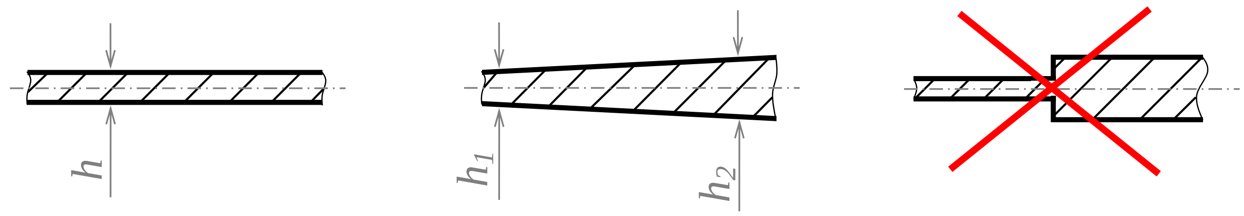
Рис. XIV.5.

Внутренние изгибающие моменты в таких оболочках не образуются, только усилия растяжения (сжатия) и рассчитываются подобные конструкции по наиболее простым формулам – формулам безмоментной теории тонкостенных оболочек.

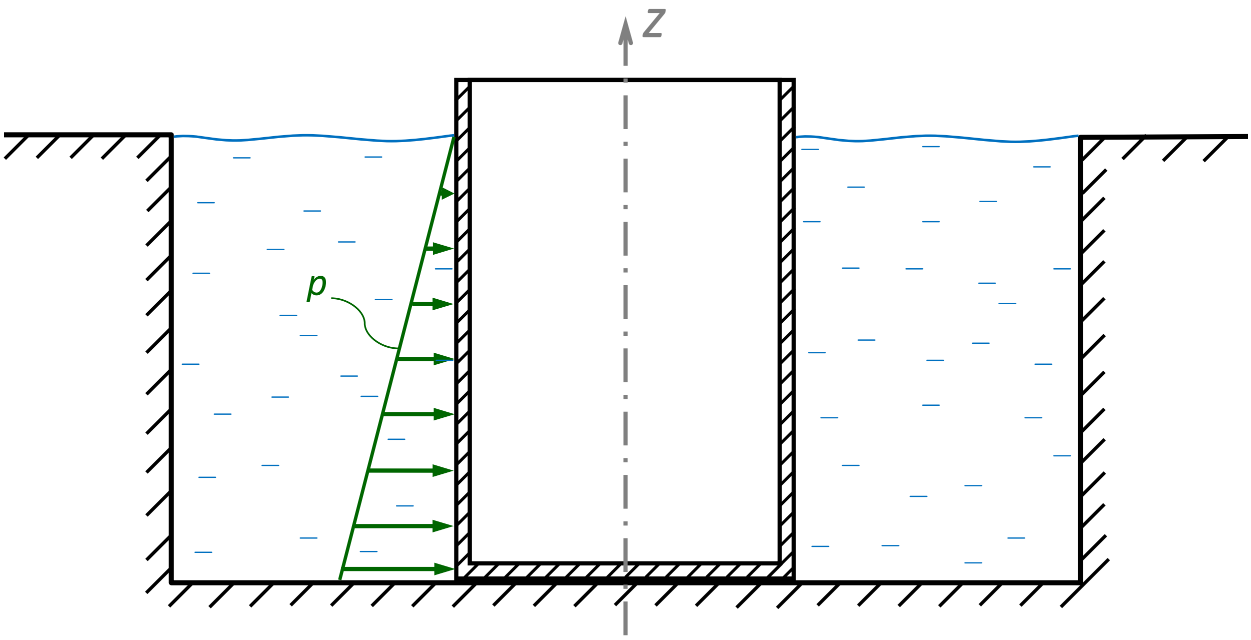
Примечание:

В районе моментного закрепления оболочки вращения (*рис. XIV.5б.*) или изменений её геометрии (*рис. XIV.4.*) в оболочке может возникать моментное состояние, которое, однако, быстро (в смысле размера) затухает. Это явление носит название **краевого эффекта**. В таком случае по безмоментной теории рассчитывается только та часть оболочки, которая удалена от области краевого эффекта. Часть оболочки, попавшая в эту область, рассчитывается по значительно более сложным формулам моментных теорий.

Толщина оболочки может быть постоянной, либо плавно изменяющейся по её длине:



Внешняя нагрузка также может изменяться по длине оболочки, но обязательно плавно:



Уравнения равновесия безмоментной теории

Рассечём оболочку мысленно поперёк оси вращения коническим сечением, перпендикулярным меридиану:

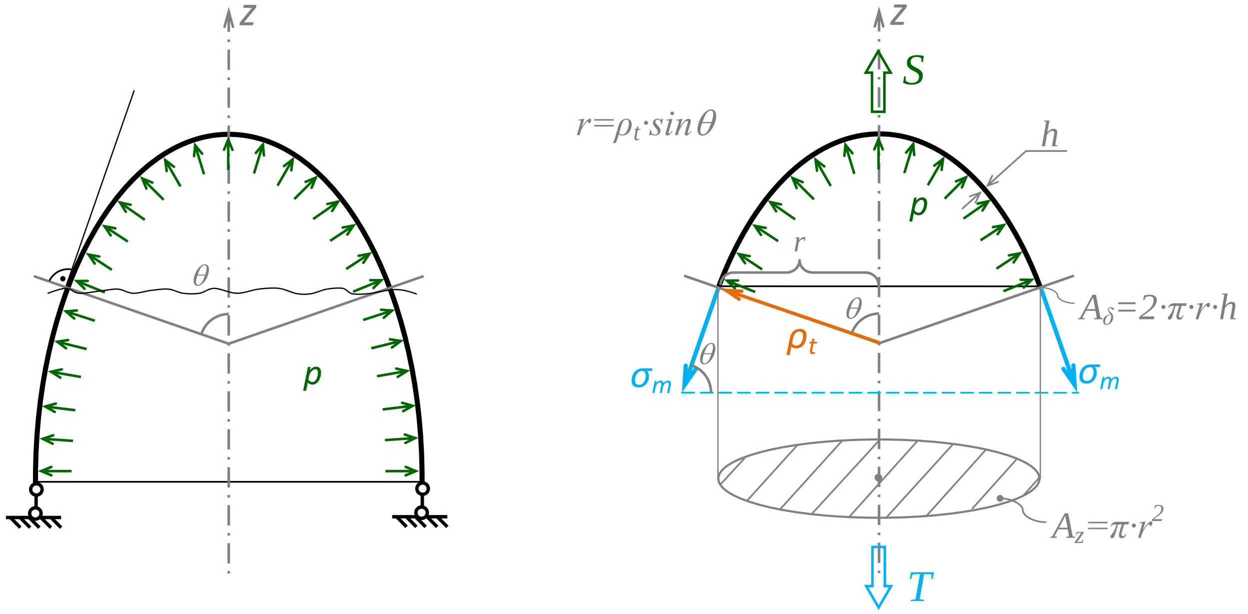


Рис. XIV.6.

Запишем уравнение равновесия отсечённой части в проекции на ось оболочки:

$$\Sigma F_Z = 0 = S - T \qquad (XIV.1)$$

Полезно помнить о том, что равнодействующая S сил постоянного давления зависит не от формы оболочки, а только от площади её проекции на плоскость, перпендикулярную оси z:

$$S = p \cdot A_z$$

Теперь выделим из оболочки небольшой прямоугольный элемент со сторонами, параллельными меридиональному и окружному направлениям (р*ис. XIV.3.*) и запишем уравнение его равновесия в проекции на нормаль ν к срединной поверхности в его центре:

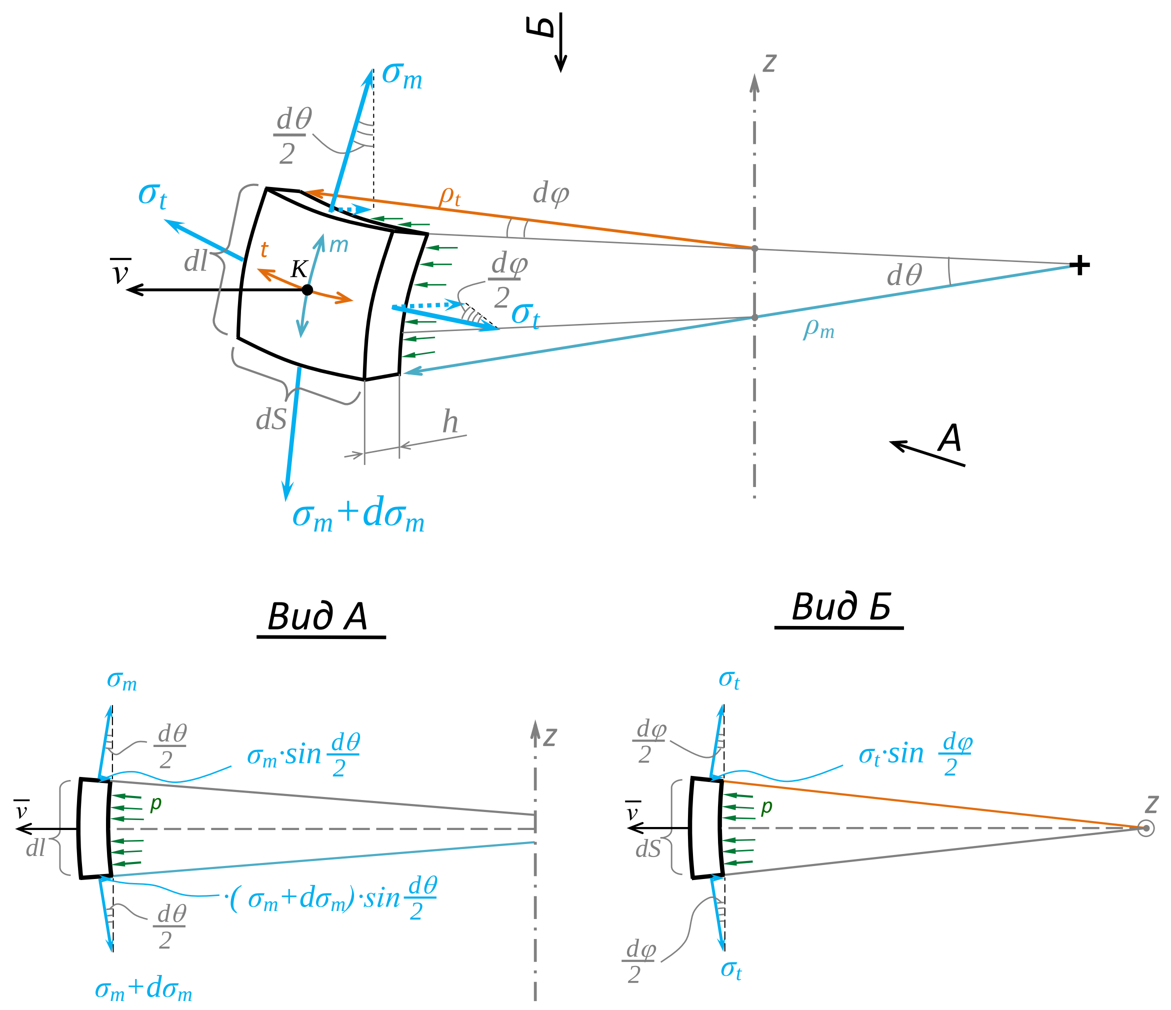


Рис. XIV.7.

$$\Sigma F_v = 0 = p\cdot dl\cdot dS - \overset{\text{с двух сторон}}{2}\cdot\underbrace{\underbrace{\sigma_t\cdot\sin\frac{d\varphi}{2}}_{\text{напряжение}}\cdot \underset{\text{площадь}}{dl\cdot h}}_{\text{сила}} - \underbrace{\underbrace{\sigma_m\cdot\sin\frac{d\theta}{2}}\cdot dS\cdot h} -$$

$$-\underbrace{\underbrace{(\sigma_m + d\sigma_m)\cdot\sin\frac{d\theta}{2}}\cdot dS\cdot h}$$

Для малых углов:

$$\sin\frac{d\varphi}{2}\approx\frac{d\varphi}{2}=\frac{dS/\rho_t}{2}=\frac{dS}{2\cdot\rho_t}$$

$$\sin\frac{d\theta}{2}\approx\frac{d\theta}{2}=\frac{dl/\rho_m}{2}=\frac{dl}{2\cdot\rho_m}$$

значит

$$p\cdot \cancel{dl}\cdot \cancel{dS}-\cancel{2}\cdot\sigma_t\cdot\frac{\cancel{dS}}{\cancel{2}\cdot\rho_t}\cdot\cancel{dl}\cdot h-\sigma_m\cdot\frac{\cancel{dl}}{2\cdot\rho_m}\cdot\cancel{dS}\cdot h-\sigma_m\cdot\frac{\cancel{dl}}{2\cdot\rho_m}\cdot\cancel{dS}\cdot h-$$

$$\underbrace{\xcancel{-\,d\sigma_m\cdot\frac{dl}{2\cdot\rho_m}\cdot dS}}_{\text{Произведение трёх бесконечно малых величин}}\cdot h=0$$

$$p-\frac{\sigma_t}{\rho_t}\cdot h-\frac{\sigma_m}{\rho_m}\cdot h=0$$

$$\boxed{\frac{\sigma_t}{\rho_t}+\frac{\sigma_m}{\rho_m}=\frac{p}{h}}$$ ***уравнение Лапласа*** *(XIV.2)*

Последовательно используя уравнения равновесия *(XIV.1)* и *(XIV.2)*, можно определить сначала меридиональное σ_m , потом окружное σ_t напряжения в любой статически определимой оболочке вращения (по окружности σ_m и σ_t не меняются, изменяются только по координате z).

Эквивалентное напряжение в оболочке проще вычислять по формуле теории Мора:

$$\sigma_{экв}=\sigma_1-\nu_T\cdot\sigma_3$$

При внутреннем давлении $\sigma_3=0$ и $\sigma_{экв}$ будет равно бо́льшему из двух напряжений:

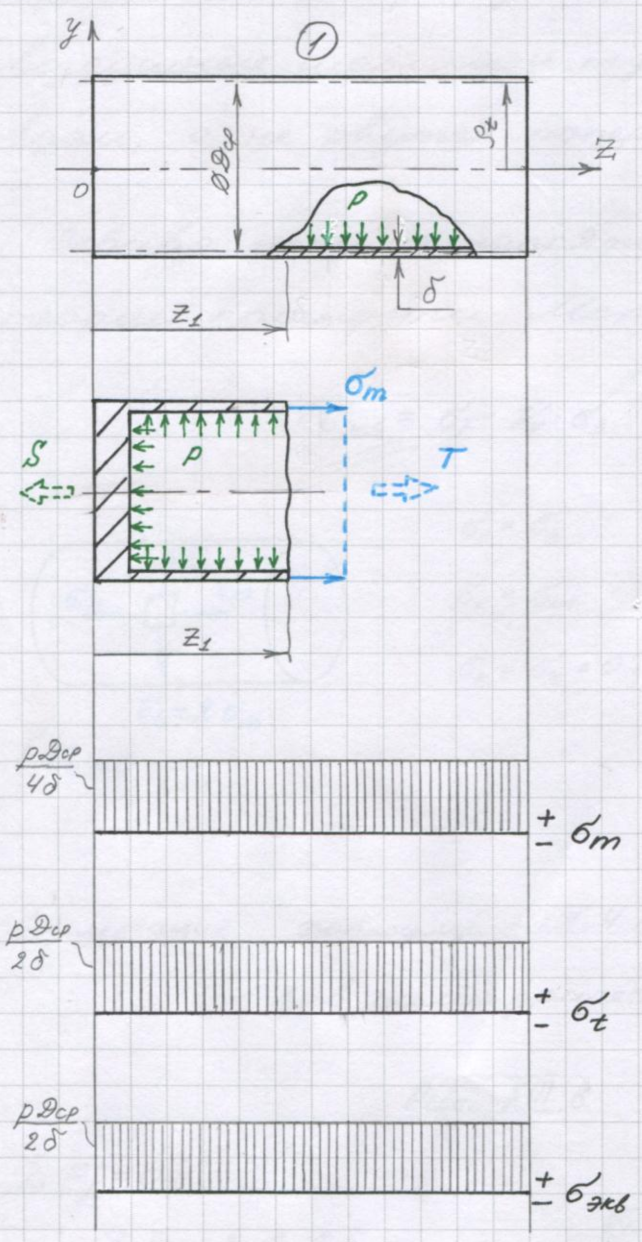
$$\sigma_{экв}=\max(\sigma_m,\sigma_t)$$

П р и м е ч а н и е:

Толщина оболочки обозначается, как *h*, так и δ.

$\boxed{1}$

Цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием постоянного давления:



$$\rho_m = \infty$$

$$\rho_t = \frac{D_{ср}}{2}$$

$$S = p \cdot A_{днища} = p \cdot \frac{\pi \cdot D_{ср}^2}{4}$$

$$T = \sigma_m \cdot A_{поперечного\ сечения} = \sigma_m \cdot \underbrace{\pi \cdot D_{ср}}_{длина\ кольца} \cdot \underbrace{\delta}_{толщина\ кольца}$$

1) Уравнение равновесия отсечённой части:

$$\sum F_{z_1} = 0 = T - S = \sigma_m \cancel{\pi} \cdot \cancel{D_{ср}} \cdot \delta - p \frac{\cancel{\pi} D_{ср}^{\cancel{2}}}{4}$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{p \cdot D_{ср}}{4\delta}} = \frac{p \rho_t}{2\delta} \qquad (XIII.3)$$

2) Уравнение Лапласа:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m = \infty}}^{\,0} = \frac{p}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_t}{D_{ср}/2} = \frac{p}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_t = \frac{p \cdot D_{ср}}{2\delta}} \qquad (XIII.4)$$

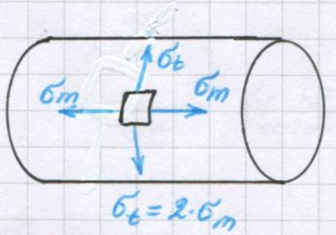
$\rho_t = \frac{D_{ср}}{2}$

Формулы (XIII.3) и (XIII.4) называются котельными.

Характерно: окружное напряжение σ_t вдвое больше напряжения меридионального σ_m. Поэтому садовые шланги, трубопроводы, длинные узкие воздушные шарики и т.д. от давления лопаются вдоль, а не рвутся поперёк.

Эквивалентное напряжение рассчитываем по теории прочности Мора:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \nu_T \cdot \cancelto{0}{\sigma_3} = \sigma_t = \frac{p \cdot D_{ср}}{2\delta}$$



$\sigma_r \approx 0$ – ибо слои

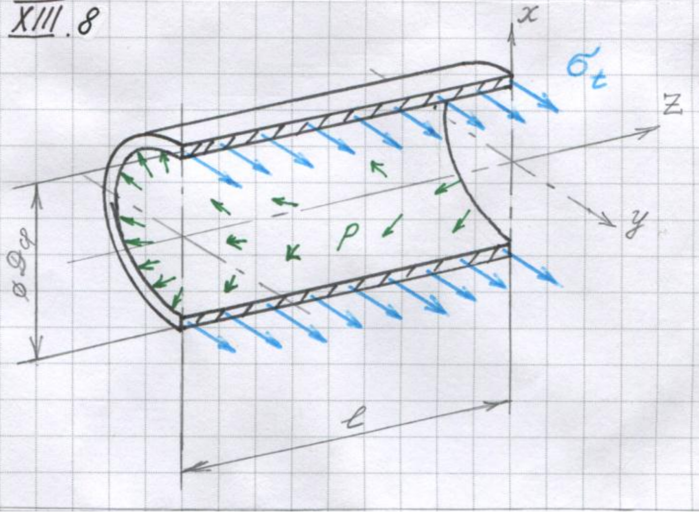
$$\sigma_1 = \sigma_t$$

$$\sigma_2 = \sigma_m$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = 0$$

Примечание: формулу (XIII.4) можно вывести, разрезав цилиндрическую оболочку вдоль:

Рис. XIII.8



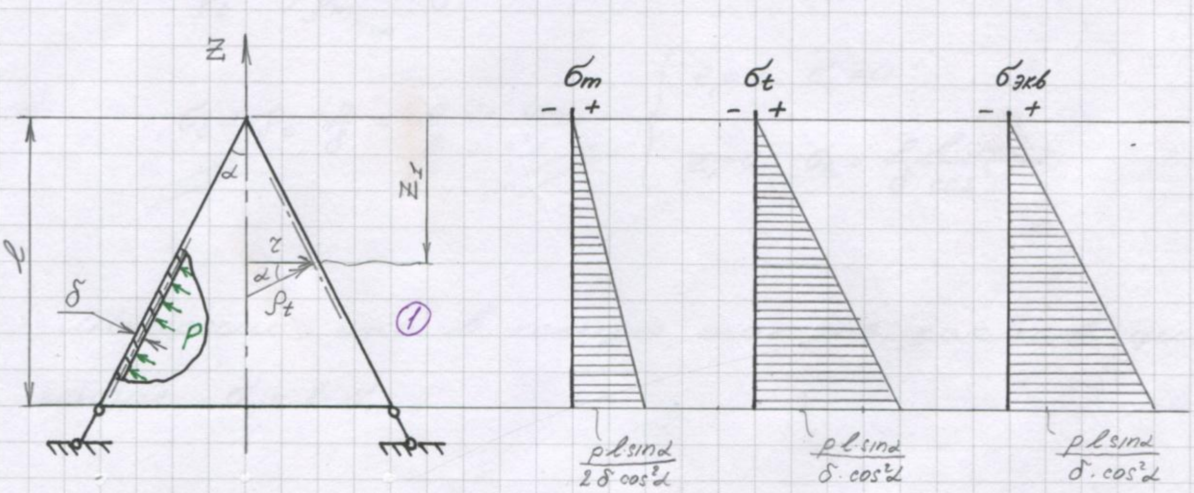
$$\sum F_y = 0 = -p \cdot \cancel{l} \cdot D_{ср} + 2 \cdot \sigma_t \cdot \cancel{l} \cdot \delta$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_t = \frac{p \cdot D_{ср}}{2\delta}$$

2

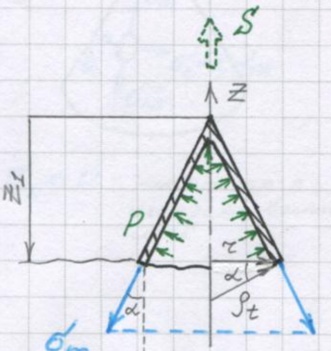
Коническая оболочка, находящаяся под действием постоянного давления:



$$\rho_m = \infty$$

$$\rho_t = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{z_1\cdot tg\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{z_1\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

1) Разрезаем оболочку поперёк:



$$S = p\cdot\pi\cdot r^2 = p\cdot\pi\cdot(\rho_t\cdot\cos\alpha)^2 = p\cdot\pi\cdot\rho_t^2\cdot\cos^2\alpha;$$

$$T = (\sigma_m\cdot\underbrace{2\pi\cdot r}_{\text{длина кольца}}\cdot\underbrace{\delta}_{\text{толщина кольца}})\cdot\cos\alpha =$$

$$= \sigma_m\cdot 2\cdot\pi\cdot\rho_t\cdot\cos\alpha\cdot\delta\cdot\cos\alpha =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\sigma_m\cdot\rho_t\cdot\delta\cdot\cos^2\alpha;$$

$$\sum F_{z_1} = 0 = T - S = 2\cancel{\pi}\sigma_m\cancel{\rho_t}\delta\cdot\cancel{\cos^2\alpha} - p\cdot\cancel{\pi}\cdot\rho_t^{\cancel{2}}\cdot\cancel{\cos^2\alpha};$$

$$0 = 2\sigma_m\delta - p\rho_t$$

$$\sigma_m = \frac{p\cdot\rho_t}{2\delta} = \frac{p\cdot z_1\cdot\sin\alpha}{2\cdot\delta\cdot\cos^2\alpha}$$

$$\begin{cases} z_1 = 0: \ \sigma_m = 0; \\ z_1 = \ell: \ \sigma_m = \dfrac{p\cdot\ell\cdot\sin\alpha}{2\cdot\delta\cdot\cos^2\alpha}; \end{cases}$$

2) Уравнение Лапласа:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}}^{\,0}_{\rho_m=\infty} = \frac{p}{\delta}$$

$$\sigma_t = \rho_t \cdot \frac{p}{\delta} = \frac{p \cdot z_1 \cdot \sin\alpha}{\delta \cdot \cos^2\alpha}$$

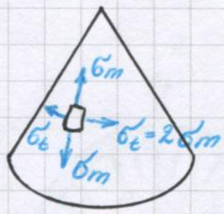
$$\begin{cases} z_1 = 0: \ \sigma_t = 0 \\ z_1 = 0: \ \sigma_t = \dfrac{p \cdot l \cdot \sin\alpha}{\delta \cdot \cos^2\alpha} \end{cases}$$

Интересно, что в конусе, так же, как и в цилиндре $\sigma_t = 2 \cdot \sigma_m$.

Эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \nu_T \cdot \cancel{\sigma_3}^{\,0} = \sigma_t = \frac{p \cdot z_1 \cdot \sin\alpha}{\delta \cdot \cos^2\alpha}$$

$$\begin{cases} z_1 = 0: \ \sigma_{экв} = 0 \\ z_1 = l: \ \sigma_{экв} = \dfrac{p l \sin\alpha}{\delta \cdot \cos^2\alpha} \end{cases}$$



$$\sigma_1 = \sigma_t$$

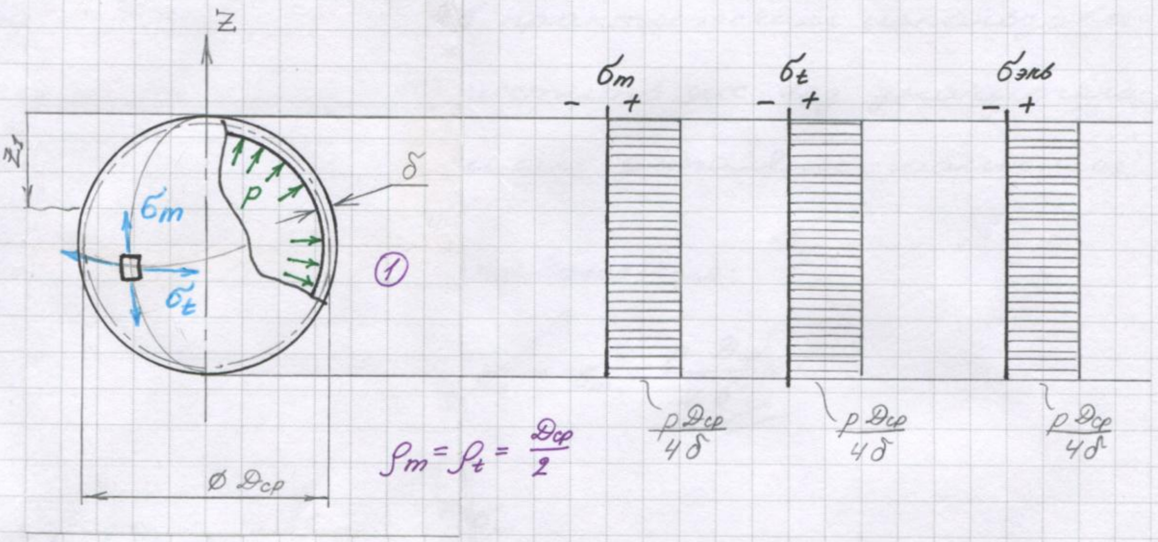
$$\sigma_2 = \sigma_m$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = 0$$

$\sigma_r \approx 0$ - гипотеза о ненадавливании слоёв

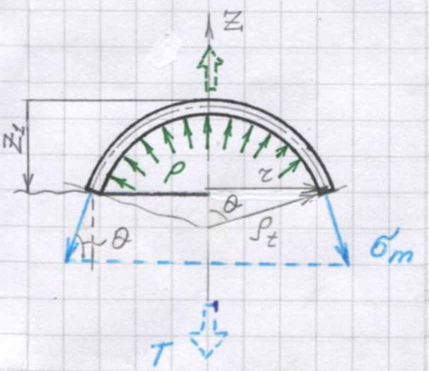
3

Сферическая оболочка под действием постоянного давления:



$$\rho_m = \rho_t = \frac{D_{ср}}{2}$$

1) Разрезаем оболочку поперёк:



$$\theta = \arcsin \frac{D_{ср} - 2\cdot Z_1}{D_{ср}}$$

$$S = p\cdot\pi\cdot r^2 = p\cdot\pi\cdot(\rho_t\cdot\sin\theta)^2;$$

$$T = (\sigma_m\cdot \underbrace{2\cdot\pi\cdot r}_{\text{длина кольца}}\cdot\underbrace{\delta}_{\text{толщина кольца}})\cdot\sin\theta =$$

$$= \sigma_m\cdot 2\cdot\pi\cdot\rho_t\cdot\sin\theta\cdot\delta\cdot\sin\theta$$

$$\sum F_{z_1} = 0 = T - S = \sigma_m\cdot 2\cdot\cancel{\pi}\cdot\cancel{\rho_t}\,\delta\,\cancel{\sin^2\theta} - p\,\cancel{\pi}\,\cancel{\rho_t}\,\rho_t\,\cancel{\sin^2\theta}$$

$$\sigma_m = \frac{p\cdot\rho_t}{2\cdot\delta} = \frac{p\cdot D_{ср}}{4\cdot\delta}$$

2) Уравнение Лапласа:

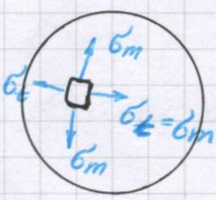
$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m = \rho_t} = \frac{p}{\delta}$$

$$\sigma_t = \rho_t\frac{p}{\delta} - \sigma_m = \frac{D_{ср}}{2}\cdot\frac{p}{\delta} - \frac{p\cdot D_{ср}}{4\delta} = \frac{p\cdot D_{ср}}{4\cdot\delta}$$

$\sigma_t = \sigma_m$ – в оболочке нет „перегруженных" направлений, материал оболочки используется наиболее эффективно. Сферические сосуды под давлением, однако, неудобны в практическом использовании; трудно разместить их без значительных зазоров с другими деталями машины.

Эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \nu_T \cdot \sigma_3 = \sigma_m = \frac{p \cdot D_{ср}}{4\delta}$$

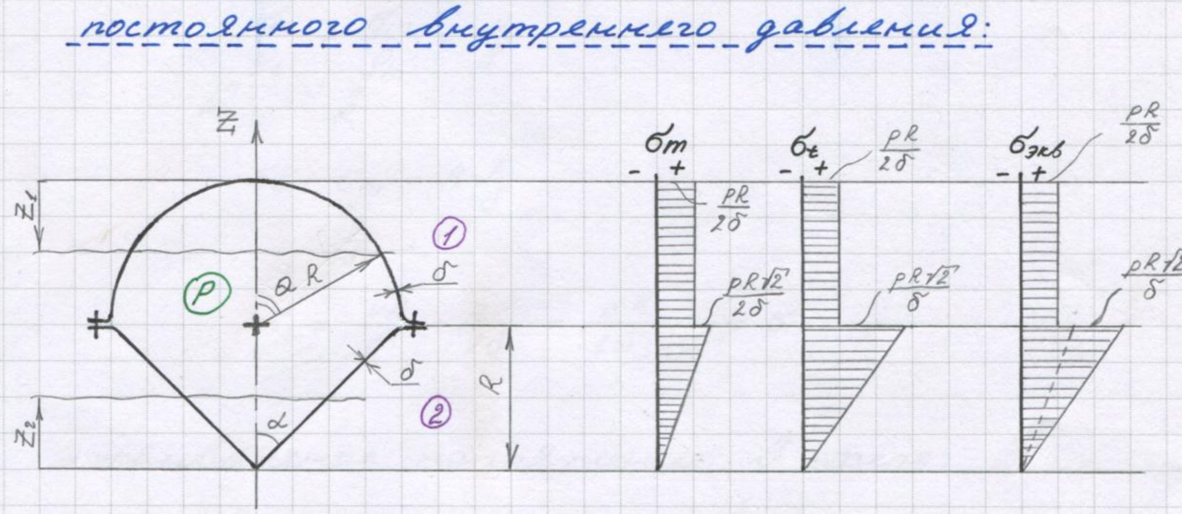


$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_m$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = 0$$

$\boxed{4}$

Комбинированная оболочка под действием постоянного внутреннего давления:



$\alpha = 45°$

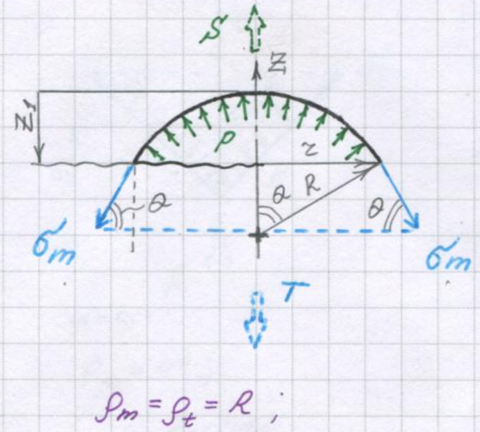
Дано: $p, R, \delta, \sigma_{тс} = \sigma_{тр} = \sigma_т$

Найти: $\sigma_{экв}$

Решение

① Сфера:

1) Рассекаем оболочку поперёк, записываем уравнение равновесия отсечённой части:



$$S = p \cdot \pi \cdot r^2 = p \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sin\theta^2$$

$$T = \sigma_m \cdot (2\pi \cdot r\delta) \cdot \sin\theta \cdot = $$

$$= 2\pi \, \sigma_m \, R \cdot \sin^2\theta \cdot \delta$$

$$\sum F_{z_1} = 0 = T - S = 2\cancel{\pi}\,\sigma_m \cancel{R} \cancel{\sin^2\theta}\,\delta - p\cancel{\pi} R^{\cancel{2}} \cancel{\sin^2\theta}$$

$$\sigma_m = \frac{p \cdot R}{2\delta}$$

$\rho_m = \rho_t = R$;

$\theta = \arcsin \frac{R - z_1}{R}$;

2) Уравнение Лапласа:

$$\frac{\sigma_t}{\underbrace{\rho_t}_{=R}} + \frac{\sigma_m}{\underbrace{\rho_m}_{=R}} = \frac{p}{\delta}$$

$$\sigma_t + \underbrace{\sigma_m}_{=\frac{pR}{2\delta}} = R\,\frac{p}{\delta}$$

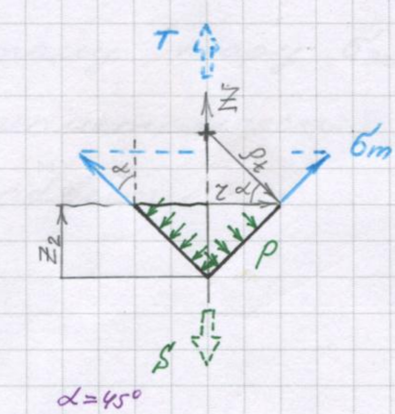
$$\sigma_t = \frac{pR}{\delta} - \frac{pR}{2\delta} = \frac{pR}{2\delta} = \sigma_m$$

Эквиваленое напряжение в сфере:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_m \\ \sigma_2 &= \sigma_m \\ \sigma_3 &= \sigma_z \approx 0 \end{aligned}\right\} \quad \sigma_{экв} = \sigma_1 - \underbrace{\nu_т}_{=\frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{тс}}=1} \cdot \underbrace{\sigma_3}_{\to 0} = \sigma_m = \frac{pR}{2\delta}$$

② Конус:

1) Рассекаем оболочку поперёк, записываем уравнение равновесия отсечённой части:



$\alpha = 45°$

$\rho_m = \infty$;

$$\rho_t = \frac{Z_2 \cdot \sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{Z_2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{4}} = Z_2\sqrt{2};$$

$$T = \sigma_m \cdot (2\pi r \delta) \cdot \cos\alpha = \sigma_m \cdot 2\pi \rho_t \cdot \cos\alpha \cdot \delta \cdot \cos\alpha =$$

$$= 2\pi \rho_t \delta \cdot \sigma_m \cdot \cos^2\alpha$$

$$S = p \cdot \pi r^2 = p \cdot \pi \cdot \rho_t^2 \cdot \cos^2\alpha$$

$$\sum F_{Z_2} = 0 = T - S = 2\cancel{\pi}\cancel{\rho_t}\delta\sigma_m \cancel{\cos^2\alpha} - p\cancel{\pi}\rho_t^{\cancel{2}}\cancel{\cos^2\alpha}$$

$\Downarrow$

$$\sigma_m = \frac{p \cdot \rho_t}{2\delta} = \frac{pZ_2}{2\delta} \cdot \sqrt{2} \quad \begin{cases} Z_2 = 0: \ \sigma_m = 0 \\ Z_2 = R: \ \sigma_m = \dfrac{pR\sqrt{2}}{2\delta} \end{cases}$$

2) Уравнение Лапласа:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}}^{\,0} = \frac{p}{\delta}, \qquad \rho_m = \infty$$

$$\sigma_t = \rho_t \frac{p}{\delta} = z_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{p}{\delta} = \frac{p \cdot z_2}{\delta}\sqrt{2} \quad \begin{cases} z_2 = 0: \ \sigma_t = 0 \\ z_2 = R: \ \sigma_t = \frac{pR}{\delta}\sqrt{2} \end{cases}$$

Эквивалентное напряжение в конусе:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_t = \frac{pR}{\delta}\sqrt{2} \\ \sigma_2 &= \sigma_m = \frac{1}{2}\sigma_t = \frac{pR}{2 \cdot \delta}\sqrt{2} \\ \sigma_3 &= \sigma_r \approx 0 \end{aligned}\right\} \quad \sigma_{экв} = \sigma_1 - \mathcal{V}_T \cdot \sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_t = \frac{pR}{\delta}\sqrt{2};$$

И на сфере и на конусе эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$ равно большему из двух: σ_m и σ_t. Поэтому эпюру $\sigma_{экв}$ можно построить чисто геометрически: наложить эпюры σ_m и σ_t и обвести.