Нормальная автономная система уравнений

$\vec{y}(t)$ — вектор-столбец с элементами $y_i(t)$.
$\vec{f}(\vec{y})$ — вектор-столбец с элементами $f_i(y_1, ..., y_n)$, определенными в $D \subset \mathbb{R}^n$.

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}(t)) \tag{1}$$

Теорема. Если $f_i(\vec{y}) \in C^1(D)$, $(i = 1, ..., n)$, то $\forall\ t_0 \in \mathbb{R}$ и $\forall\ \vec{y}_0 \in D$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = f(t; \vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Если $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ — решение $(a; b)$, то
$\{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \big| \vec{y} = \vec{\varphi}(t), t \in (a; b)\}$ — траектория системы (1).
Множество D — фазовое пространство

Свойства и классификация траекторий

1. Если $\vec{a} \in D$ т.ч. $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$, то $\vec{y}(t) \equiv \vec{a}$ — решение.
$\vec{a} \in D$ — точка покоя (целая траектория!)

2. Через любую точку $\vec{y}_0 \in D$ проходит траектория, причем единственная

3. Любая траектория — либо точка покоя, либо гладкая кривая

4. Сдвиг по траектории

Если $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ — решение автономной системы с областью определения $t \in (a; b)$, то $\forall\ C \in \mathbb{R}\ \vec{z} = \vec{\varphi}(t + C)$ — тоже решение этой системы с областью определения $t \in (a - C; b - C)$.

5. Если $\vec{y}(t)$ и $\vec{z}(t)$ — решения системы, причем $\exists\ t_1 \neq t_2$, т.ч. $\vec{y}(t_1) = \vec{z}(t_2)$, то $\vec{z}(t) = \vec{y}(t + C)$, где $C = t_1 - t_2$.

Следствие. Траектории, соответствующие разным решениям системы, либо не пересекаются, либо совпадают.

Если $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ — решение автономной системы с областью определения $t \in (a;b)$, $\vec{\varphi}(t) \neq const$, и $\exists\ t_1 < t_2 \in (a;b)$, т.ч. $\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2)$, то решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ может быть продолжено на всю $\mathbb{R}$, причем является периодическим с периодом $T = t_2 - t_1$.

$\vec{y}(t;\vec{y}_0)$ — решение задачи Коши $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y}(t) = f(t;\vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$

Определение. Решение $\vec{y}(t;\vec{y}_0)$, определенное при $t \geqslant t_0$, называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$ т.ч. $\forall\,\vec{y}_1 \in U_\delta(\vec{y}_0)$ ($\| \vec{y}_1 - \vec{y}_0 \| < \delta$)

1) решение $\vec{y}(t;\vec{y}_1)$ определено при всех $t \geqslant t_0$

2) $\forall t \geq t_0\ \| \vec{y}(t;\vec{y}_1) - \vec{y}(t;\vec{y}_0) \| < \varepsilon$

Если к тому же выполнено условие

3) $\| \vec{y}(t;\vec{y}_1) - \vec{y}(t;\vec{y}_0) \| \to 0$ при $t \to +\infty$,

то решение $\vec{y}(t;\vec{y}_0)$ называется асимптотически устойчивым по Ляпунову

$$\eta(t, \vec{y}_1) = \vec{y}(t; \vec{y}_1) - \vec{y}(t; \vec{y}_0)$$

$$\vec{y}(t; \vec{y}_1) = \vec{y}(t; \vec{y}_0) + \eta(t, \vec{y}_1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{\eta}(t) = g(t; \vec{\eta}) \\ \vec{\eta}(t_0) = \vec{\eta}_0 \end{cases}$$

Система $\dfrac{d}{dt}\vec{\eta}(t) = g(t; \vec{\eta})$ имеет решение $\eta \equiv 0$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{\eta}(t) = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

$$\vec{y}(t;\vec{y}_1) = \vec{y}(t;\vec{y}_0) + \eta(t,\vec{y}_1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{\eta}(t) = A(t)\vec{\eta} \\ \vec{\eta}(t_0) = \vec{\eta}_0 \end{cases}$$

$$\vec{\eta}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{c}$$

Критерий устойчивости (нулевого решения) однородной линейной системы

1) Нулевое решение устойчиво $\Leftrightarrow \Phi(t)$ ограничена при $t \geqslant t_0$

2) Нулевое решение асимптотически устойчиво $\Leftrightarrow$ $\Phi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$

$A = const$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{\eta}(t) = A\vec{\eta} \\ \vec{\eta}(t_0) = \vec{\eta}_0 \end{cases}$$

$\Phi(t) = e^{At} \cdot B$

Теорема. (Нулевое) решение асимпт. устойчиво $\Leftrightarrow$ $\forall\, k\ Re\lambda_k(A) < 0$

Теорема. (Нулевое) решение устойчиво $\Leftrightarrow$ $\forall\, k\ Re\lambda_k(A) \leq 0$, причем если $Re\lambda_k(A) = 0$, то его алгебраическая кратность совпадает с геометрической.

Метод Ляпунова исследования устойчивости нулевого решения

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y}(t) = f(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \qquad f(\vec{0}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{y}(t) \equiv \vec{0} \text{ — решение}$$

Определение. Пусть $V(\vec{y}) \in C^1(B(\vec{0}))$. Производной от в силу системы называется

$$\frac{d}{dt}V\Big|_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k} f_k(\vec{y}) = (\nabla V \cdot f(\vec{y}))$$

$$\frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt}$$

Определение. Функция $V(\vec{y})$ называется положительно определенной в $B(\vec{0})$, если $\forall \vec{y} \in B(\vec{0})$ $V(\vec{y}) \geqslant 0$ и $V(\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$

$V(\vec{y}) > 0$

Теорема Ляпунова об устойчивости нулевого решения

Пусть функция $V(\vec{y}) \in C^1(B(\vec{0}))$ такова, что

1) $V(\vec{y}) > 0$ в $B(\vec{0})$

2) $W(\vec{y}) = \dfrac{d}{dt}V\Big|_f \leqslant 0$ в $B(\vec{0})$.

Тогда нулевое решение системы $\dfrac{d}{dt}\vec{y}(t) = f(\vec{y})$ устойчиво по Ляпунову.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевого решения

Пусть функция $V(\vec{y}) \in C^1(B(\vec{0}))$ такова, что

1) $V(\vec{y}) > 0$ в $B(\vec{0})$

2) $W(\vec{y}) = \dfrac{d}{dt}V\Big|_f \leqslant -W_1(\vec{y})$, где $W_1(\vec{y}) > 0$ в $B(\vec{0})$.

Тогда нулевое решение системы $\dfrac{d}{dt}\vec{y}(t) = f(\vec{y})$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Теорема Ляпунова о неустойчивости нулевого решения

Пусть функция $V(\vec{y}) \in C^1(B(\vec{0}))$ такова, что $V(\vec{0}) = 0$ и в любой окрестности т. $\vec{0}$ есть точки, в которых $V(\vec{y}) > 0$ и $\frac{d}{dt}V\Big|_f > 0$, тогда нулевое решение неустойчиво.

Теорема Четаева о неустойчивости нулевого решения

Пусть функция $V(\vec{y}) \in C^1(B(\vec{0}))$ и $V(\vec{y}) > 0$ в некоторой области $D \subset R^n$, на границе которой $V(\vec{y}) = 0$, и точка $\vec{0}$ принадлежит этой границе. Если производная в силу системы $\dfrac{d}{dt}V\Big|_f > 0$ в области D, то нулевое решение неустойчиво.

Построение функции Ляпунова

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = A\vec{y},\ A = const$$

$$V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y})$$

1) $H^* = H$

2) $H > 0$

$$\frac{d}{dt}V\Big|_f = \frac{d}{dt}(H\vec{y},\vec{y}) = (H\frac{d}{dt}\vec{y},\vec{y}) + (H\vec{y},\frac{d}{dt}\vec{y}) =$$

$$= (HA\vec{y},\vec{y}) + (H\vec{y},A\vec{y}) = (HA\vec{y},\vec{y}) + (A^*H\vec{y},\vec{y}) =$$

$$= ((HA + A^*H)\vec{y},\vec{y}) = (-G\vec{y},\vec{y})$$

$$HA + A^*H = -G$$

Найти H т.ч.

1) $H^* = H$

2) $H > 0$

3) $HA + A^*H = -E$

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = A\vec{y},\ A = const$$

$$\vec{y}(t) = e^{At} \cdot \vec{y}_0$$

Пусть $\forall k \ \mathrm{Re}\, \lambda_k(A) < 0$

$$\frac{d}{dt}V\Big|_f = \frac{d}{dt}(H\vec{y}, \vec{y}) = -(\vec{y}, \vec{y})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(H\vec{y}, \vec{y})\, dt = (H\vec{y}, \vec{y})\Big|_0^{+\infty} = -(H\vec{y}_0, \vec{y}_0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(H\vec{y}, \vec{y})\, dt = \int_0^{+\infty} -(\vec{y}, \vec{y})\, dt =$$

$$= -\int_0^{+\infty} (e^{At} \cdot \vec{y}_0, e^{At} \cdot \vec{y}_0)\, dt = -\int_0^{+\infty} (e^{A^* t} e^{At} \cdot \vec{y}_0, \vec{y}_0)\, dt =$$

$$= -((\int_0^{+\infty} e^{A^* t} e^{At} dt)\vec{y}_0, \vec{y}_0\big) = -(H\vec{y}_0, \vec{y}_0)$$

$$H = \int_0^{+\infty} e^{A^* t} e^{At} dt$$

$$H = \int_0^{+\infty} e^{A^*t} e^{At} dt$$

$$\| e^{A^*t} e^{At} \| = \| e^{A^*t} \| \cdot \| e^{At} \| \leqslant (e^{-\delta t} |P_n(t)|)^2$$

Теорема. Если $\forall k \ \mathrm{Re}\,\lambda_k(A) < 0$, то уравнение Ляпунова $HA + A^*H = -E$ однозначно разрешимо и его решение дается формулой

$$H = \int_0^{+\infty} e^{A^*t} e^{At} dt$$

$$H^* = \int_0^{+\infty} (e^{A^*t}e^{At})^* dt = \int_0^{+\infty} (e^{At})^*(e^{A^*t})^* dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{A^*t}e^{At} dt = H$$

$$(H\vec{y}_0, \vec{y}_0) = \left(\left(\int_0^{+\infty} e^{A^*t}e^{At} dt \right)\vec{y}_0, \vec{y}_0 \right) =$$

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{A^*t}e^{At}\vec{y}_0, \vec{y}_0 \right) dt = \int_0^{+\infty} (e^{At} \cdot \vec{y}_0, e^{At} \cdot \vec{y}_0)\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} (\vec{y}(t), \vec{y}(t))\, dt = \int_0^{+\infty} \parallel \vec{y}(t) \parallel^2 \; dt > 0$$

$$HA + A^*H = \int_0^{+\infty} e^{A^*t}e^{At}A dt + \int_0^{+\infty} A^*e^{A^*t}e^{At}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{A^*t}\left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)dt + \int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dt}e^{A^*t}\right)e^{At}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(e^{A^*t}e^{At}\right)dt = \left(e^{A^*t}e^{At}\right)\Big|_0^{+\infty} = -E$$

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = A\vec{y} + \vec{f}(t;\vec{y}),$$

$$A = const, \ \vec{f}(t;\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\exists M > 0, \ \exists \alpha > 0: \ \| \vec{f}(t;\vec{y}) \| \leqslant M \| \vec{y} \|^{1+\alpha}$$

Если $\forall k \ \mathrm{Re}\,\lambda_k(A) < 0$, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

$V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y})$

$H = \int_0^{+\infty} e^{A^*t} e^{At} dt$

$$\frac{d}{dt} V\Big|_f = \frac{d}{dt}(H\vec{y}, \vec{y}) = (H\frac{d}{dt}\vec{y}, \vec{y}) + (H\vec{y}, \frac{d}{dt}\vec{y}) =$$

$$= (HA\vec{y}, \vec{y}) + (H\vec{y}, A\vec{y}) + (H\vec{f}, \vec{y}) + (H\vec{y}, \vec{f}) =$$

$$= -(\vec{y}, \vec{y}) + (H\vec{f}, \vec{y}) + (H\vec{y}, \vec{f})$$

$$(H\vec{f},\vec{y}) \leqslant \| H\vec{f} \| \| \vec{y} \| \leqslant \| H \| \cdot \| \vec{f} \| \cdot \| \vec{y} \| \leqslant$$

$$\leqslant \| H \| M \| \vec{y} \|^{1+\alpha} \| \vec{y} \| = M \| H \| \| \vec{y} \|^{2+\alpha}$$

$$(H\vec{y},\vec{f}) \leqslant M \| H \| \| \vec{y} \|^{2+\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}V\Big|_f = -(\vec{y},\vec{y}) + (H\vec{f},\vec{y}) + (H\vec{y},\vec{f}) \leqslant$$

$$\leqslant -\parallel \vec{y} \parallel^2 + 2M \parallel H \parallel\parallel \vec{y} \parallel^{2+\alpha} =$$

$$= -\parallel \vec{y} \parallel^2 (1 - 2M \parallel H \parallel\parallel \vec{y} \parallel^{\alpha})$$

$$\frac{d}{dt}V\Big|_f \leqslant -0,5 \parallel \vec{y} \parallel^2 = -W(\vec{y}) < 0$$

Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x)$$