ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Лектор — Иванов Вячеслав Львович

Программа курса лекций
(4-й семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экз.)

5. Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1. Метрические пространства. Шкала пространств. Метрические пространства: определение и примеры. Сходимость последовательности, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое множество, плотное множество, примеры плотного и неплотного множества в $\mathbb{R}$. Открытый и замкнутый шар, открытое множество. Сепарабельное пространство. Фундаментальная последовательность, полнота пространства. Принцип сжимающих отображений.

5.2. Линейные пространства. Определение, примеры, линейная зависимость (конечной или бесконечной) совокупности векторов, размерность пространства, пример бесконечномерного пространства, подпространство, примеры конечномерных и бесконечномерных подпространств.

5.3. Нормированные линейные пространства. Определение и примеры. Примеры сепарабельных нормированных пространств. Пример незамкнутого подпространства в бесконечномерном нормированном пространстве. Банаховы пространства. Примеры полных и неполных нормированных пространств. Лебеговские функциональные пространства L_p как важнейший пример полных нормированных пространств: определение и свойства, в том числе — интегральные неравенства Гёльдера и Минковского, полнота и сепарабельность (без доказательства), плотность множества гладких функций (без доказательства).

5.4. Линейные пространства со скалярным произведением. Определение и примеры. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Норма, порождённая скалярным произведением. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Гильбертово пространство: определение и примеры. Ортогональность векторов. Угол между векторами. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Вектор наилучшего приближения. Лемма о существовании и единственности вектора наилучшего приближения.

Ортогональная проекция вектора на подпространство. Лемма об эквивалентности понятий «вектор наилучшего приближения» и «ортогональная проекция вектора». Ортогональное дополнение к подпространству. Прямая сумма подпространств. Примеры разложения пространства в прямую сумму подпространств. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму подпространств. Теорема об ортогональном проектировании на конечномерное подпространство (теорема Пифагора).

5.5. Гильбертов базис. Коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы. Ряд Фурье вектора из гильбертова пространства. Неравенство Бесселя. Пополнение ортонормированной системы. Полная ортонормированная система. Гильбертов базис. Замкнутая ортонормированная система. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля. Теорема о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема Рисса–Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств: определение. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств: формулировка и идея доказательства. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi, \pi]$.

Литература: основная — 1, 5; дополнительная — 7, 8 (глава III), 9 (глава 1).

6. Ортогональные многочлены

6.1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов. Определения весовой функции и весового лебеговского пространства. Идея построения ортогональных многочленов посредством ортогонализации последовательности мономов. Ортогональные многочлены: определение.

6.2. Общие свойства ортогональных многочленов. Однозначная определённость ортогональных многочленов их весовой функцией. Чётность или нечётность многочлена с чётным весом. Трёхчленная рекуррентная формула. Свойства нулей ортогональных многочленов, в том числе: все нули простые и содержатся в промежутке ортогональности; два многочлена с последовательными номерами не могут иметь общего корня; нули многочленов перемежаются (последнее — без доказательства).

6.3. Классические ортогональные многочлены. Определения классических ортогональных многочленов. Стандартизация ортогональных многочленов, примеры. Производящая функция: определение. Уравнение Пирсона. Обзор основных свойств классических ортогональных многочленов (без доказательства).

6.4. Многочлены Лежандра. Формула Родрига и вывод из нее производящей функции. Рекуррентные соотношения. Дифференциальное уравнение. Соотношения ортогональности. Теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра (без доказательства). Пример: мультипольное разложение кулонова потенциала.

Многочлены Эрмита и Лагерра (*изучаются только на семинарах*): Формула Родрига и вывод из нее производящей функции. Рекуррентные соотношения. Дифференциальное уравнение. Соотношения ортогональности. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита и Лагерра. Функции Эрмита и Лагерра.

Литература: основная — 2; дополнительная — 8 (глава VII, § 3).

7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

7.1. Линейные операторы. Определение, примеры и простейшие свойства.

7.2. Непрерывные и ограниченные операторы. Определения и теорема об эквивалентности понятий непрерывного и ограниченного операторов.

7.3. Норма оператора. Определение. Лемма о трёх формулах, задающих норму оператора. Свойства нормы оператора.

7.4. Сходимость операторных последовательностей и рядов. Определение и свойства сходящихся последовательностей операторов. Теорема о полноте пространства ограниченных операторов. Определение и свойства операторных рядов.

7.5. Обратный оператор. Определение обратимого оператора, образа оператора и обратного оператора. Свойства обратного оператора. Теорема Неймана.

7.7. Спектр оператора. Определение собственного значения оператора и точечного спектра оператора. Определение резольвентного множества и резольвентного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Определение непрерывного и остаточного спектра оператора. Определение спектра оператора. Простейшие свойства спектра, в том числе, то, что спектр является замкнутым множеством и содержится в замкнутом круге, радиус которого равен норме оператора.

7.8. Линейные функционалы. Определение и пример линейного функционала. Ядро линейного функционала и его свойства, в том числе то, что оно всегда является подпространством; что ядро ненулевого линейного функционала имеет коразмерность один; что линейный функционал непрерывен, если и только если его ядро замкнуто. Определение сопряжённого пространства. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала.

7.9. Бра- и кет-векторы. Введение бра- и кет-обозначений. Примеры использования бра- и кет-обозначений для нахождения разложения тождественного оператора и нахождения резольвенты.

7.10. Оператор, сопряжённый к ограниченному. Определение и свойства сопряженного оператора. Пример нахождения оператора, сопряжённого к оператору, отображающему конечномерное пространство в конечномерное. Теорема о применении сопряжённого оператора к нахождению спектра (без доказательства). Нормальные, самосопряженные и унитарные операторы. Пустота остаточного спектра нормального оператора (без доказательства).

7.11. Ограниченные самосопряжённые операторы. Теорема о точечном спектре и ортогональности собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям. Определение и примеры инвариантных подпространств. Теорема об инвариантном подпространстве. Теорема о норме самосопряжённого оператора (без доказательства).

7.12. Компактные операторы. Определение и простейшие свойства. Теорема о существовании базиса из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора (без доказательства).

Литература: основная — 3, 6; дополнительная — 7, 8 (глава IV, §§ 5 и 6), 9 (главы 7 и 8).

8. Интегральные уравнения

8.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра Определения интегральных уравнений Фредгольма и Волтерра. Сведение начальной задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения к интегральному уравнению Вольтерра.

8.2. Интегральный оператор Гильберта–Шмидта. Определение, теоремы о компактности и об операторе, сопряжённом к оператору Гильберта–Шмидта.

8.3. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром. Определение вырожденного ядра, сведéние решения интегрального уравнения с вырожденным ядром к решению системы линейных алгебраических уравнений.

8.4. Альтернатива Фредгольма. Формулировка альтернативы Фредгольма для компактных операторов, доказательство только для операторов Гильберта–Шмидта с вырожденным ядром.

8.5. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана, метод последовательных приближений. Определение повторного ядра. Теорема о повторном ядре оператора Гильберта–Шмидта.

8.6. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта–Шмидта для интегральных операторов с симметричным ядром. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра. Разложение повторного ядра интегрального оператора по его собственным функциям. Билинейная формула. Теорема Мерсера (без доказательства).

Литература: основная — 4, дополнительная — 7–9.

Литература

Учебные и методические пособия, изданные в НГУ, доступны в электронном виде на сайте кафедры `http://www.phys.nsu.ru/ok03`

1. *Александров В. А.* Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995.
2. *Александров В. А.* Ортогональные многочлены: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
3. *Александров В. А.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
4. *Александров В. А., Колесников Е. В.* Интегральные уравнения: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
5. *Подвигин И. В.* Гильбертово пространство в примерах и задачах: Учебно-метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2012.
6. *Абашеева Н. Л.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2007.
7. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. шк., 1978.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
9. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. Т. 1.

План семинаров

1-й семинар. — Шкала пространств. Метрические пространства. Примеры метрик: дискретная метрика, метрика на гладкой поверхности, метрика на графе, манхэттенская, евклидова и чебышевская метрики, метрика Хемминга, метрика Махаланобиса. Полнота пространства. Принцип сжимающих отображений и его применения: нахождение пределов рекуррентных последовательностей; нахождение корней уравнений (в т.ч. метод Ньютона); нахождение решения системы линейных алгебраических уравнений (метод простых итераций Якоби).

2-й семинар. — Применения принципа сжимающих отображений: применение в доказательстве существования и единственности решения задачи Коши (теорема Пикара); применение в доказательстве существования и единственности решения интегральных уравнений Фредгольма (при достаточно малом параметре) и Вольтерра (при любом параметре) второго рода. Нормированные пространства. Банаховы пространства. Сепарабельные пространства.

3-й семинар. — Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства со скалярным произведением и гильбертово пространство. Неравенство Коши–Буняковского. Поляризационное тождество. Равенство параллелограмма. Простейшие свойства сходимости в гильбертовом пространстве: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, ограничена и имеет не более одного предела; всякое конечномерное подпространство замкнуто.

4-й семинар. — Парадоксальные свойства бесконечномерных гильбертовых пространств: существование незамкнутых подпространств и возможность поместить бесконечно много попарно непересекающихся шаров фиксированного радиуса в единичный шар. Вычисление углов в гильбертовом пространстве. Кривая Винера. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное проектирование на конечномерные и бесконечномерные подпространства. Задача наилучшего приближения.

5-й семинар. — Нахождение замыкания подпространства. Нахождение ортогонального дополнения к подпространству. Изоморфизм гильбертовых пространств. Полные и неполные ортонормированные системы.

6-й семинар. — Общие свойства ортогональных многочленов и их корней. Пример: $x^2 + 1$, $x^4 - x^2$ не могут быть ортогональными многочленами ни при каком весе ни на каком промежутке. Многочлены Эрмита: формула Родрига. Вывод производящей функции из формулы Родрига.

7-й семинар. — Многочлены Эрмита: вывод и использование рекуррентных формул. Доказать, что производная $H_n^{(k)}(x)$, $k \leq n -$

тоже многочлен Эрмита (с точностью до нормировки). Вывод и использование соотношений ортогональности и дифференциального уравнения. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита с использованием схожести с производящей функцией, и путем прямого вычисления коэффициентов Фурье. Соотношение полноты для функций Эрмита.

8-й семинар. — Многочлены Лагерра: формула Родрига и производящая функция. Рекуррентные формулы, соотношение ортогональности и дифференциальное уравнение (можно без вывода). Разложение функций в ряды по многочленам Лагерра с использованием схожести с производящей функцией, и путем прямого вычисления коэффициентов Фурье.

9-й семинар. — Многочлены Лежандра: применение производящей функции, рекуррентных формул и соотношений ортогональности. Разложение функций в ряды по многочленам Лежандра с использованием схожести с производящей функцией, и путем прямого вычисления коэффициентов Фурье. Пример: задача о поле точечного заряда, помещенного внутри полой проводящей сферы.

10-й семинар. — Вычисление нормы ограниченного оператора. Норма оператора проектирования. Ограниченность оператора Вольтерра $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$, $t \in [0,1]$. Примеры неограниченных операторов. Обратимость и обратный оператор. Норма обратного оператора.

11-й семинар. — Линейные непрерывные функционалы. Пример: дельта–функция. Бра- и кет- формализм. Запись в бра- и кет- формализме: матричного элемента i, j оператора $\mathcal{A}$; разложения тождественного оператора; правила умножения матриц операторов, т.е. $\langle i|\mathcal{A}\mathcal{B}|j\rangle = \langle i|\mathcal{A}I\mathcal{B}|j\rangle = \langle i|\mathcal{A}\sum_n |n\rangle\langle n|\mathcal{B}|j\rangle = \sum_n \langle i|\mathcal{A}|n\rangle\langle n|\mathcal{B}|j\rangle$; оператора проектирования на подпространство; внешнего (тензорного) произведения векторов; сингулярного разложения матрицы.

12-й семинар. — Сопряжённый оператор. Спектр и резольвента ограниченного оператора. Применение сопряжённого оператора к нахождению спектра. Пустота остаточного спектра нормального оператора (без доказательства). Свойства самосопряженных и унитарных операторов и их спектров. Нахождение спектров ограниченных операторов: проектирования, левого и правого сдвигов и др.

13-й семинар. — Формула Гельфанда–Бёрлинга для спектрального радиуса на примере оператора Вольтерра $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$, $t \in [0,1]$. Компактные операторы. Задачи на спектр компактных и компактных самосопряжённых операторов. Исследование ранее изученных операторов на компактность. Компактность интегрального оператора Гильберта–Шмидта. Примеры нахождения спектра оператора Гильберта–Шмидта.

14-й семинар. — Сведéние дифференциальных уравнений к интегральным и наоборот. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма.

15-й семинар. — Исследование разрешимости уравнений с вырожденным ядром при различных значениях параметра перед интегральным оператором. Метод последовательных приближений, повторные ядра и резольвента интегрального уравнения.

16-й семинар. — Собственные значения и собственные функции интегральных уравнений с симметричным ядром. Представление решения неоднородных уравнений Фредгольма с симметричным ядром в виде ряда по собственным функциям ядра.

Задания по основам функционального анализа

Задание 4 *(сдать до 15 марта)*

Геометрия пространств со скалярным произведением

1. (6 баллов) Найдите все возможные пределы рекуррентной последовательности $x_{n+1} = \sqrt[5]{5x_n^3 - 4x_n}$ при всех возможных начальных значениях x_1. С помощью принципа сжимающих изображений поясните графически, к каким из найденных пределов сходимость реализуется более чем при одном значении x_1 и почему. *Указание:* графические построения рекомендуется проделать на компьютере.
2. (6 баллов) Докажите, что скалярное произведение (x, y) любых двух точек x, y любого комплексного пространства со скалярным произведением удовлетворяет равенству

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \|x + e^{i\varphi} y\|^2 e^{i\varphi} \, d\varphi.$$

Смысл этого равенства в том, что оно выражает скалярное произведение через норму вектора. Известно много таких равенств. Обычно их называют *поляризационными тождествами.*
3. (6 баллов) Докажите, что:
(а) В пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ невозможно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.
(б) В пространстве $L_p[a, b]$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства, если и только если $p = 2$.
4. (6 баллов) Докажите, что сумма внутренних углов треугольника в евклидовом пространстве равна $180°$ и проверьте справедливость этого утверждения, найдя углы треугольника, образованного векторами $f_1(t) = t^2$, $f_2(t) = \sin t + t \operatorname{sh}(\ln(t + \sqrt{t^2 + 1}))$, $f_3(t) = \cos 2t + t^2$ в евклидовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.
5. (6 баллов) Пусть S обозначает подпространство в $L_2([-1, 1] \times [-1, 1])$, натянутое на функции

$$f_1(x, y) = 1, \quad f_2(x, y) = x, \quad f_3(x, y) = y.$$

Найдите функцию в S, ближайшую (по норме в L_2) к функции $f(x, y) = x^2 - y^2$.

6. (6 баллов) В пространстве $L_2[-1,1]$ найдите ортогональное дополнение к подпространству, состоящему из многочленов с нулевой суммой коэффициентов.

7. (6 баллов) Убедитесь, что система функций $\sin \mu_n x$, где μ_n – положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$, является ортогональной в $L_2[0,1]$, но не является гильбертовым базисом этого пространства. *Указание:* попробуйте разложить по данной ортогональной системе функцию $f(x) = x$.

Ортогональные многочлены

8. (6 баллов) Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта, ортогонализуйте мономы 1, x, x^2 в весовом лебеговском пространстве $L_2^h(-\infty,+\infty)$, если весовая функция h задана формулой $h(x) = e^{-x^2}$. Обратите внимание, что тем самым вы нашли три первых многочлена Эрмита. Каким условием они стандартизованы?

9. (6 баллов) Как известно, многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-1,1)$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Выберем стандартизацию этих многочленов, при которой коэффициент при старшей степени x в $T_n(x)$ равен единице. Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$:

(а) докажите, что $T_n(x) = \cos(n \arccos x)/2^{n-1}$;

(б) найдите экстремумы $T_n(x)$ на промежутке $[-1,1]$;

(в) докажите *минимаксное* свойство многочленов Чебышёва 1-го рода: среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным 1, отклонение $T_n(x)$ от нуля (т.е. $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x) - 0|$) на промежутке $[-1,1]$ минимально. *Указание*: рассуждайте от противного: пусть многочлен $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ отклоняется от нуля на промежутке $[-1,1]$ меньше, чем $T_n(x)$. Рассмотрите многочлен $T_n(x) - p_n(x)$ и его значения в точках экстремума $T_n(x)$.

Отметим, что с доказанным в пункте (в) свойством полиномов Чебышёва связано их широкое применение в задачах *равномерного* приближения непрерывных функций.

Задание 5 *(сдать до 25 апреля)*

10. (8 баллов) Докажите справедливость следующих представлений многочленов Эрмита:

(а) $H_n(x) = (2x - \frac{d}{dx})^n \cdot 1$ (считать известной формулу Родрига);

(б)

$$H_n(x) = 2^n \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & x & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+1}{2} & x & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{n-2}{2} & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \frac{n-1}{2} & x \end{vmatrix}$$

(считать известной трёхчленную рекуррентную формулу);

(в)

$$H_n(x) = \begin{cases} n! \sum\limits_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^{n/2-k}}{(2k)!(n/2-k)!}(2x)^{2k}, & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ n! \sum\limits_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^{(n-1)/2-k}}{(2k+1)!((n-1)/2-k)!}(2x)^{2k+1}, & n = 2m+1, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

— явный вид многочленов Эрмита. Ограничтесь случаем чётного или нечётного n, по собственному выбору.

11. (6 баллов) Разложите функцию e^{ax}, $a \in \mathbb{C}$ в ряд по многочленам Эрмита, стандартизованным с помощью производящей функции. Поясните, как, используя полученный результат выписать аналогичное разложение для функции $x \cos x \, \mathrm{sh} x$.

12. (6 баллов) Разложите, если возможно, функцию $ln\, x$ в ряд по многочленам Лагерра. *Указание*: для нахождения коэффициента при $L_0^{\alpha}(x)$ воспользуйтесь тем, что $\frac{d}{d\alpha}x^{\alpha} = x^{\alpha} ln x$.

13*. (12 баллов) Как известно, формула Родрига для многочленов Лагерра имеет вид

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}\Big[x^{\alpha+n} e^{-x}\Big].$$

Исходя из этой формулы получите производящую функцию многочленов Лагерра.

14. (6 баллов) Пусть $P_n(x)$ – многочлены Лежандра со стандартизацией $P_n(1) = 1$. Запишите соотношение полноты для системы $\{P_n(x), n = 0, 1, 2, ...\}$ и получите разложение дельта-функции $\delta(x)$ в ряд по $P_n(x)$.

Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

15. (12 баллов) Рассмотрим оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(а) Найдите матрицу резольвенты данного оператора прямым вычислением и с использованием бра- и кет- обозначений, т.е. по формуле

$$R_\lambda = \sum_{i=0}^{n} \frac{|x_i\rangle\langle x_i|}{\lambda_i - \lambda},$$

где $|x_i\rangle$ – собственные векторы оператора, отвечающие собственным значениям λ_i, и образующие ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$.

(б) Найдите проекторы P_{λ_i} на собственные подпространства оператора $\mathcal{A}$ с использованием бра- и кет- обозначений, и путем интегрирования резольвенты

$$P_{\lambda_i} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^+_{\lambda_i}} \frac{dz}{zI - A} = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^+_{\lambda_i}} R_z dz$$

по замкнутому контуру C_{λ_i}, ориентированному против часовой стрелки и охватывающему только собственное значение λ_i. Запишите матрицу A в виде разложения по найденным проекторам в бра- и кет- обозначениях.

(в) Известно [1], что интегральная формула Коши для функции $f(z)$, аналитической в области $\mathcal{D}$, справедлива и для функций от матриц при условии, что спектр матрицы целиком охватывается контуром интегрирования $\gamma \subset \mathcal{D}$. А именно,

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)dz}{z - AI} = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^+} f(z) R_z dz.$$

Пользуясь данной формулой найдите матричную экспоненту e^A.

16*. (6 баллов) Показать, что операторы $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $(Ax)(t) = t\,x(t)$ и $B : C^1[0,1] \to C[0,1]$ ($\mathrm{dom}\, B$ и $\mathrm{im}\, B$ нормированы L_2 нормой), $(Bx)(t) = dx(t)/dt$ являются разрывными.

Задание 6 *(сдать до 30 мая)*

17. (18 баллов) Рассмотрим «диагональный» линейный оператор $M_a : \ell_2 \to \ell_2$, действующий по правилу:

$$M_a : (x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots) \mapsto (a_1 x_1,\ a_2 x_2,\ a_3 x_3, \ldots),$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

(а) Докажите, что оператор M_a непрерывен и найдите его норму.

[1] см., например, Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1966 г., с. 118–119.

(б) Выясните является ли оператор M_a обратимым, и если является, то найдите M_a^{-1}.

(в) Опишите сопряжённый к M_a оператор и выясните, когда оператор M_a самосопряжён и когда M_a унитарен.

(г) Найдите точечный спектр оператора M_a.

(д) Найдите непрерывный спектр оператора M_a.

(е) Найдите остаточный спектр оператора M_a. Укажите резольвентное множество оператора M_a.

(ж) В каком из двух случаев оператор M_a компактен: если $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$ или если $a_n = (-1)^n n^{-1}$?

18*. (12 баллов) Для оператора преобразования Фурье $\mathcal{F}_+ : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$:

(а) Найдите норму и сопряженный оператор.

(б) Выясните, является ли этот оператор нормальным, самосопряженным, унитарным. Исходя из ответа на этот вопрос найдите остаточный спектр.

(в) Докажите, что $\mathcal{F}_+^4 = I$ (тождественный оператор). Исходя из этого факта выясните, какие собственные значения могут присутствовать в точечном спектре $\mathcal{F}_+$.

(г) Из темы «Ортогональные многочлены» Вы узнали, что система функций Эрмита $\{\psi_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x), n = 0, 1, 2, ...\}$, где $H_n(x)$ – многочлены Эрмита, образует ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$. Посчитав преобразование Фурье по x от функции $e^{-x^2/2}w(x,t)$, где $w(x,t) = e^{2xt-t^2}$ – производящая функция многочленов Эрмита, убедитесь, что $\psi_n(x)$ являются собственными функциями оператора $\mathcal{F}_+$. Определите точечный спектр $\mathcal{F}_+$.

(д) Определите резольвентное множество и непрерывный спектр оператора $\mathcal{F}_+$.

19. (6 баллов) Докажите, что для любых самосопряжённых ограниченных операторов $A : H \to H$ и $B : H \to H$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\big|([A,B]x,x)\big| \leqslant \|Ax\| \cdot \|Bx\|,$$

где $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B.

Отметим на будущее, что в квантовой механике вводят обозначение $\langle A\rangle_x = (Ax,x)$, переписывают предыдущее неравенство в виде

$$\langle A^2\rangle_x \langle B^2\rangle_x \geqslant \frac{1}{4}\langle [A,B]\rangle_x^2$$

и интерпретируют его как принцип неопределённости Гейзенберга. Докажите последнее неравенство. (Для полноты отметим, что наиболее интересные с точки зрения квантовой механики операторы не являются ограниченными, так что пока вы доказали лишь частный случай принципа неопределённости Гейзенберга.)

Интегральные уравнения

20. (6 баллов) Составьте интегральное уравнение, отвечающее задаче Коши

$$x''(t) - tx'(t) + t^2x(t) = 1,$$
$$x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

21. (6 баллов) Решите интегральное уравнение

$$x(t) = 5\sin t + 3 - 4\int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds,$$

сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению.

22. (6 баллов) Найдите все решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) - \mu\int\limits_{-1}^{1} K(t,s)x(s)\,ds = t$$

с ядром

$$K(t,s) = 5 + 4ts - 3t^2 - 3s^2 + 9t^2s^2.$$

(Что можно сказать о вырожденности, симметричности данного ядра?) Рассмотрите все возможные значения параметра μ и убедитесь в справедливости утверждений альтернативы Фредгольма.

23. (6 баллов) Найти повторные ядра и резольвенту, а также представить через резольвенту решение интегрального уравнения

$$x(t) + \pi\int\limits_0^1 t\,\sin(2\pi s)x(s)ds = \cos(2\pi t).$$

24. (6 баллов) Пусть $Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$, где

$$K(t,s) = \begin{cases} -t-1, & \text{если } \ 0 \leqslant t \leqslant s; \\ -s-1, & \text{если } \ s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Найдите характеристические значения и собственные функции интегрального уравнения $x(t) - \mu Ax(t) = 0$, сведя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Проверьте ортогональность собственных функций, отвечающих различным собственным значениям данного интегрального уравнения с симметричным ядром.

Программу и задания
по «Основам функционального анализа»
составил старший преподаватель В. Л. Иванов.
1 февраля 2023 года

Правила аттестации студентов по «Основам функционального анализа»

§1. Контроль работы в семестре

(1) В течение семестра студенту настоятельно рекомендуется сдать своему семинаристу в устной форме задачи из приведённых выше заданий.

(2) За каждую задачу, полностью сданную в срок, студент получает указанные в тексте задачи баллы. За задачу, сданную (полностью или частично) после установленного срока, студент получает ноль баллов.

(3) Задачи, номера которых отмечены «звездочками», не являющиеся обязательными; тем не менее, за их правильное решение и сдачу в указанный в задании срок также начисляются баллы. Отметим, что задачи со «звездочкой» в данных заданиях **не** отличаются от остальных задач повышенной сложностью.

(4) Сразу после прохождения каждой из четырех тем курса на лекциях и семинарах семинаристы проводят в своих группах коллоквиум по только что пройденной теме по теоретическим вопросам, изложенным на лекциях. Время проведения коллоквиума составляет 45 минут. Письменный ответ студента на билет оценивается в пределах от 0 до 25 баллов. Пересдача коллоквиума возможна только по уважительной причине (болезнь, вынужденный отъезд и т.п.). Сумма баллов, полученных студентом за четыре коллоквиума, варьируется от 0 до 100.

(5) В конце семестра семинарист оценивает работу каждого студента своей группы и добавляет ему от 0 до 50 баллов в зависимости от того, насколько активно студент решал задачи у доски в классе, домашние задания, контрольные работы и т.п.

(6) Сумма баллов, начисленных студенту в соответствии с пунктами (2–5) называется «баллами за работу в семестре». Она сообщается всем студентам до проведения консультации через страничку лектора на сайте НГУ

`https://www.nsu.ru/n/physics-department/about/prepodavateli/3464911/`

и учитывается при выставлении оценки за экзамен.

(7) Приём задач из задания семинаристами заканчивается с окончанием зачётной сессии, т. е. 31-го мая 2023 года.

§2. Проведение экзамена

(8) Экзамен проводится в очной форме. Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы. При наличии уважительной причины и по предварительному согласованию с лектором в особых случаях допускается сдача экзамена с другой группой. Примером уважительной причины может служить поездка на Всероссийскую студенческую олимпиаду по теоретической механике.

(9) Поскольку по «Основам функционального анализа» не предусмотрен зачёт, то к сдаче экзамена допускаются все студенты (даже те, кто не сдал все задачи из приведённых выше заданий).

(10) Очный экзамен начинается с того, что студент вытягивает экзаменационный билет. Каждый билет содержит три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий и блиц-опрос». Правила сдачи первого вопроса билета и оценивания ответа на него изложены в пунктах (12)–(15). Два других вопроса являются теоретическими (т.е. не содержащими задач) вопросами из программы лекций. Список теоретических вопросов, выносимых на экзамен, выкладывается заранее (до проведения консультации) на страничку лектора на сайте НГУ

`https://www.nsu.ru/n/physics-department/about/prepodavateli/3464911/`.

Правила сдачи второго и третьего вопросов билета и оценивания ответов на них изложены в пунктах (17)–(22).

(11) Если студент не смог ответить хоть на один вопрос билета, то экзамен прекращается (т. е. остальные вопросы билета студент даже не отвечает), а в экзаменационную ведомость ставится оценка «неудовлетворительно».

(12) Ответ по билету всегда начинается с ответа на первый вопрос «Сдача задач из заданий и блиц-опрос», причём на этот вопрос нужно отвечать без подготовки и не своему семинаристу, а любому другому свободному экзаменатору. При успешном ответе на первый вопрос, этот же экзаменатор будет в последующем спрашивать второй и третий вопросы билета.

(13) Сдача задач из заданий (как часть ответа на первый вопрос билета) не может длиться более 30 минут. При этом студент может (и даже должен) пользоваться своей тетрадью, в которой он заранее решил те задачи из приведённых выше заданий, решения которых он не сумел объяснить своему семинаристу во время семестра. Если за 30 минут студент сумел объяснить экзаменатору решения всех своих долгов по заданиям, то он переходит к ответу на блиц-опрос (см. пункт (15) настоящих Правил); в противном

случае экзамен заканчивается (см. пункт (11) настоящих Правил), но из долга студента вычёркиваются сданные им на экзамене задачи.

(14) Если студент сдал все задачи из заданий до начала экзаменационной сессии (что очень рекомендуется), то первый вопрос сводится для него к блиц-опросу.

(15) Блиц-опрос — это беседа с преподавателем на одну из тем, не вошедших в билет. Во время блиц-опроса экзаменатор задаёт 3–5 вопросов, на которые студент должен отвечать сразу (без подготовки). Цель блиц-опроса в том, чтобы выяснить насколько свободно студент владеет самыми основными понятиями и фактами, изученными в курсе «Основы функционального анализа». Речь идёт только о формулировках теорем и определениях. В этот момент доказательства теорем не спрашивают. По результатам блиц-опроса никаких оценок не ставится и баллы не начисляются. Но для тех студентов, кто не может поддерживать разговор в таком формате экзамен прекращается в соответствии с пунктом (11) настоящих Правил.

(16) Студент, ответивший на первый вопрос билета получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета.

(17) При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета можно пользоваться только собственной головой. Другими словами, при подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами и подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена и отправлены на пересдачу.

(18) Выходить из аудитории до начала устного ответа на второй и третий вопросы билета нельзя (точнее — выйти можно, а вот снова войти уже нельзя).

(19) Экзаменатор может задавать сопутствующие вопросы, непосредственно вытекающие из ответа студента на второй и третий вопросы билета. Например, если студент в своём ответе упомянул какую-то теорему, свойство или понятие, то преподаватель может попросить сформулировать эту теорему (или свойство, или понятие) в общем виде и попросить проверить выполяются ли условия этой теоремы в той конкретной ситуации, в связи с которой студент эту теорему упомянул.

(20) В случае необходимости преподаватель может заменить сопутствующий вопрос задачей, не требующей сложных вычислений или нестандартных подходов.

(21) Ответ на второй и третий вопросы билета оценивается по пятибальной системе:

• «пятёрка» ставится за полный и правильный ответ как на вопрос билета, так и на сопутствующие вопросы экзаменатора;

• «четвёрка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из данного вопроса билета и объяснение основных идей доказательства (при этом допускается, что доказательство не доведено до конца);

• «тройка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из билета (при этом допускается, что о доказательстве не сказано ничего);

• «двойка» ставится за незнание хоть одной из теорем или хоть одного из важных (т. е. многократно используемых в курсе) определений.

(22) Положительные оценки, полученные за ответ на второй и третий вопросы билета, конвертируются в баллы следующим образом: «пятёрка» — 200 баллов; «четвёрка» — 100 баллов, «тройка» — ноль баллов. (Напомним, что в соответствии с пунктом (11) настоящих Правил, «двойка», полученная за ответ на любой вопрос билета, немедленно ведёт к прекращению экзамена.)

(23) После того, как студент ответил (не на «двойку») на все вопросы билета, все заработанные им баллы суммируются (т. е. складываются баллы за ответы на второй и третий вопросы с баллами за работу в семестре). В ведомость и зачётную книжку выставляется общая оценка за весенний семестр по курсу «Основы функционального анализа», определяемая следующим образом:

• «отлично» — если сумма баллов не меньше 550;
• «хорошо» — если сумма баллов от 400 до 549;
• «удовлетворительно» — если сумма баллов от 200 до 399;
• «неудовлетворительно» — если сумма баллов менее 200.

§3. Проведение пересдачи

(24) Пересдача проводится по тем же правилам и тем же билетам, что и основной экзамен.

(25) На пересдаче долг по задачам из заданий состоит из задач, не сданных в течении семестра, на основном экзамене и на предыдущих пересдачах.

§4. Особые ситуации

(26) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе (например, если из-за праздников пропало занятие и студенты ещё не решали в классе задачи, аналогичные некоторым задачам из

задания), так и отдельному студенту (например, в случае его документально подтвержденной продолжительной болезни или командировки для участия в студенческой олимпиаде). В любом случае продление срока должно быть согласовано с лектором.

(27) Все конфликтные, спорные и неоднозначные ситуации, возникающие при изучении курса «Основы функционального анализа», урегулирует лектор.

Правила аттестации студентов
по «Основам функционального анализа»
составил старший преподаватель В. Л. Иванов.