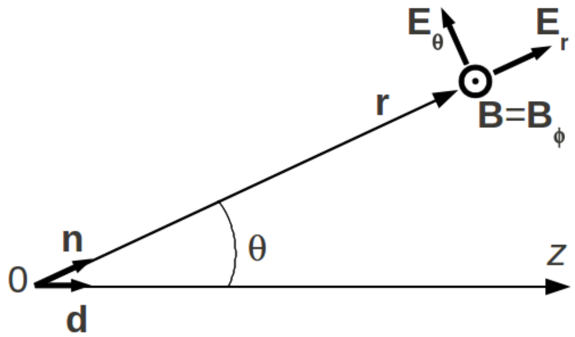
**Задача 4.4a.**




Излучатель представляет собой точечный диполь с дипольным моментом $\mathbf{d}(t') = \mathbf{d_0}\,\mathrm{e}^{-i\omega t'}$. Найти электрическое и магнитное поле в окружающем пространстве.

**Решение.**

Магнитное поле в приближении дипольного излучения равно (для облегчения дальнейшего анализа будем во всех математических выкладках выделять произведения $kr$)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{\dot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}}{cr^2} = \frac{\mathbf{d}\times\mathbf{n}}{r}\left(-\frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\omega}{cr}\right) = -\frac{d_0\sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\omega t'}}{r}\left(k^2 + i\frac{k}{r}\right)\mathbf{e}_\phi =$$

$$= -\frac{k^3}{kr}\left(1+\frac{i}{kr}\right) d_0\sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\omega t'}\,\mathbf{e}_\phi,$$

где $t' = t - r/c$.

Учтем, что аргумент в экспоненте $-i\omega(t-r/c) = i(\frac{\omega}{c}r - \omega t) = i(kr-\omega t)$. Тогда

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{k^3}{kr}\left(1+\frac{i}{kr}\right) d_0\sin\theta\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\,\mathbf{e}_\phi.$$

Для заданного вида $\mathbf{d}(t)$ все поля будут представлять собой гармонический осциллятор. Это следует из уравнений Максвелла относительно Фурье-полей при разложении на монохроматические волны. Тогда из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}$ получаем формулу для выражения $\mathbf{E}$ через $\mathbf{B}$ ($\varepsilon = 1,\ \mu = 1$):

$$\mathbf{E}(r,t) = -\frac{c}{i\omega}\operatorname{rot}\mathbf{B}(r,t) = -\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\mathbf{B}(r,t).$$

Поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{B}(r,t) = [\nabla\times B\mathbf{e}_\phi]$, то $\phi$-компонента вектора $\mathbf{E}$ равна нулю. Радиальную ($r$-) и зенитную ($\theta$-) компоненты найдем, подставив $B_\phi$ в формулы для ротора в сферических координатах

$$E_r = -\frac{1}{ik}\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(B_\phi\sin\theta\right) = \frac{1}{ikr}\cdot\frac{k^3}{kr}\left(1+\frac{i}{kr}\right) d_0\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\,\frac{\partial\sin^2\theta}{\sin\theta\partial\theta} =$$

$$= \frac{k^3}{i(kr)^2}\left(1+\frac{i}{kr}\right) d_0\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\,\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\frac{k^3}{(kr)^2}\left(\frac{1}{kr} - i\right) d_0\cos\theta\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{ik}\left(-\frac{\partial(rB_\phi)}{r\partial r}\right) = -\frac{k^2 d_0\sin\theta}{ikr}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(1+\frac{i}{kr}\right)\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\right) = -\frac{k^2 d_0\sin\theta}{ikr}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\left(ik\left(1+\frac{i}{kr}\right) - \frac{i}{kr^2}\right) =$$

$$= -\frac{k^3 d_0\sin\theta}{ikr}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\left(i\left(1+\frac{i}{kr}\right) - \frac{i}{k^2r^2}\right) = \frac{k^3 d_0\sin\theta}{kr}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\left(\frac{1}{(kr)^2} - 1 - \frac{i}{kr}\right).$$

В квазистационарной зоне ($ka \ll kr \ll 1$)

$$\left.\begin{aligned} E_r &= 2\tfrac{k^3}{(kr)^2}\cdot\tfrac{1}{kr}\cdot d_0\cos\theta\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} = 2\tfrac{d_0\cos\theta}{r^3}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} \\ E_\theta &= \tfrac{k^3 d_0\sin\theta}{kr}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\cdot\tfrac{1}{(kr)^2} = \tfrac{d_0\sin\theta}{r^3}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{\mathbf{d}(t-r/c)}{r^3} + 3\tfrac{(\mathbf{d}(t-r/c)\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}}{r^3}.$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = kr\tfrac{\mathbf{n}\times\mathbf{d}(t-r/c)}{r^3},\ B \ll E.$$

Электрическое поле в квазистационарной зоне представляет собой запаздывающее поле диполя и по модулю превосходит магнитное приблизительно в $\frac{1}{kr}$ раз.

В волновой зоне ($kr \gg 1$)

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -2i\tfrac{k^3}{(kr)^2} d_0 \cos\theta\, \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} \\ E_\theta &= -\tfrac{k^3 d_0 \sin\theta}{kr}\, \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \approx -\tfrac{k^2 d_0 \sin\theta}{r}\, \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\, \mathbf{e}_\theta.$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{k^3 d_0 \sin\theta}{kr}\, \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\, \mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{B} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}.$$

Электрическое и магнитное поля в волновой зоне локально образуют плоскую линейно поляризованную монохроматическую волну.