Соотношение неопределенностей

Соотношение неопределенностей является прямым следствием из преобразований Фурье. Рассмотрим случай, когда функция $f(t)$ равна нулю вне интервала $0 < t < \tau$, а внутри него изменяется произвольным образом. Тогда спектр функции $f(t)$ определяется спектральной плотностью, значение которой для некоторой выделенной частоты ω_0 равно

$$f_\omega(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\tau f(t)\, \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\, dt.$$

Сравним это значение со спектральной плотностью на частоте, отличающей от ω_0 на величину $\delta\omega$:

$$f_\omega(\omega_0 + \delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\tau f(t)\, \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\, \mathrm{e}^{i\delta\omega\cdot t}\, dt.$$

Видно, что отличие определяется подынтегральным множителем $\mathrm{e}^{i\delta\omega\cdot t}$, значения которого заключены в интервале от 1 до $\mathrm{e}^{i\delta\omega\cdot\tau}$. Если $\delta\omega\cdot\tau \ll 1$, то можно считать два спектра практически неразличимыми. Различие между двумя значениями плотности становится заметным, только когда величина $\delta\omega\cdot\tau$ достигает некоторой пороговой величины ϕ_0 или превосходит ее. В качестве оценки можно принять $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\delta\omega\cdot\tau \gtrsim \frac{\pi}{2}.$$

Это неравенство задает минимальную характерную полуширину спектра. Если плотность имеет максимум в точке ω_0, то она не может уменьшиться до нуля в точке ω, если $|\omega - \omega_0| < \delta\omega$. С точки зрения оценки спектр можно считать симметричным, и тогда ширина оказывается вдвое большей. Принципиальным обстоятельством является то, что ширина обратно пропорциональна длительности сигнала τ, спектр которого анализируется. Для достаточно короткого сигнала спектр не может быть уже интервала, задаваемого соотношением неопределенностей:

$$\Delta\omega\cdot\Delta t \gtrsim \pi.$$

Аналогично, разложение Фурье по плоским волнам приводит к соотношению неопределеностей в виде

$$\Delta k_i \cdot \Delta x_i \gtrsim \pi,$$

смысл которого в том, что, если распределение поля в волне ограничено в пространстве интервалом Δx_i (за пределами которого поле равно нулю), то разброс значений k_i в такой волне оказывается не менее, чем $\frac{\pi}{\Delta x_i}$.