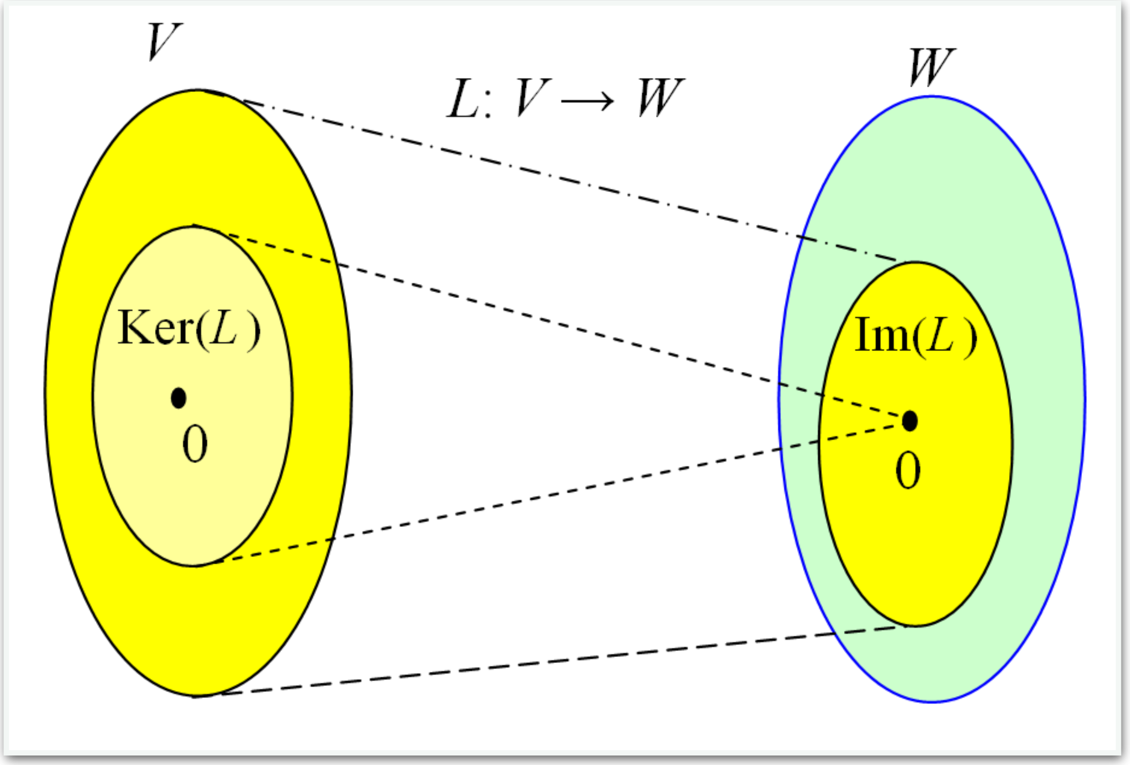
Ядро и образ



Тест

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейное отображение такое, что $\varphi(a_1) = 2a_1$, $\varphi(a_2) = a_1 + 2a_2$, где $\cancel{a_1 = (1, 2)^T, a_2 = (3, -1)^T}$. Тогда матрица φ в базисе a_1, a_2 имеет вид

$$\varphi(a_1) = 2a_1 = (2, 0)^T_a$$

$$\varphi(a_2) = a_1 + 2a_2 = (1, 2)^T_a$$

$$[\varphi]_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\alpha A) \neq \alpha^n \det A$$

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

$$\det : M_{3\times3} \to \mathbb{R} \quad ✗$$

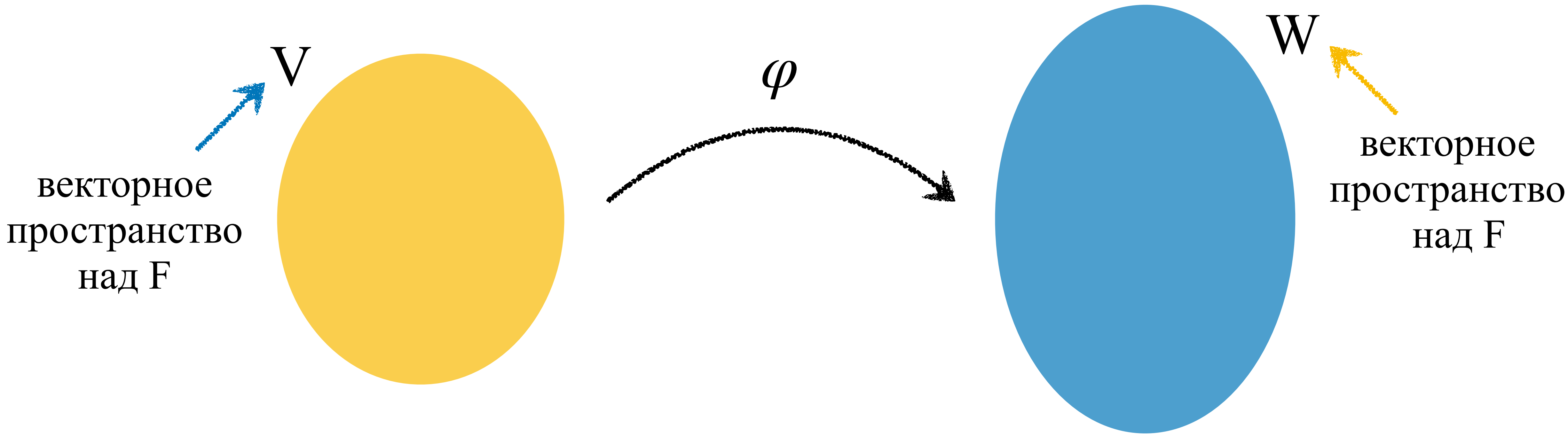
$$\varphi(f(x)) = (x^2+1) f(x) \quad ✓$$

$$\varphi(\alpha f + \beta g) = (x^2+1)(\alpha f + \beta g)$$

$$\parallel$$

$$\alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) = \alpha(x^2+1)f(x) + \beta(x^2+1)g(x)$$

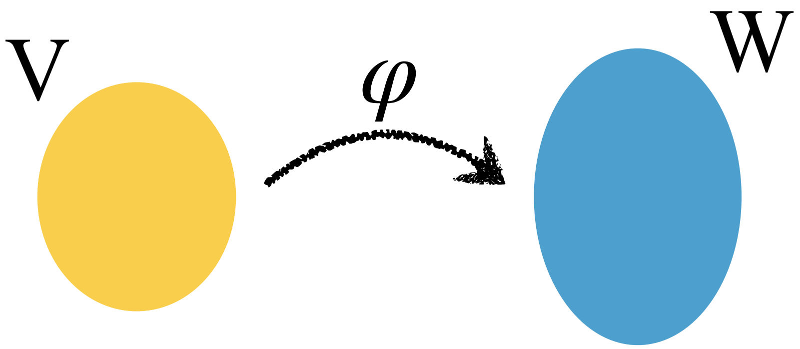
Линейное отображение



φ – линейное отображение

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \text{ для всех } x, y \in V \text{ и } \alpha, \beta \in F$$

Ядро



kernel

$$\ker\varphi = \{x \in V \,|\, \varphi(x) = 0\} \le V$$

нулевой вектор в W

Пример 1

$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$

$D(f) = \dfrac{d}{dx} f(x)$ – оператор дифференцирования

$$\ker D = \,?$$

Пример 1

$$D : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$D(f) = \dfrac{d}{dx} f(x)$ – оператор дифференцирования

$$\ker D = ?$$

$$D(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = const$$

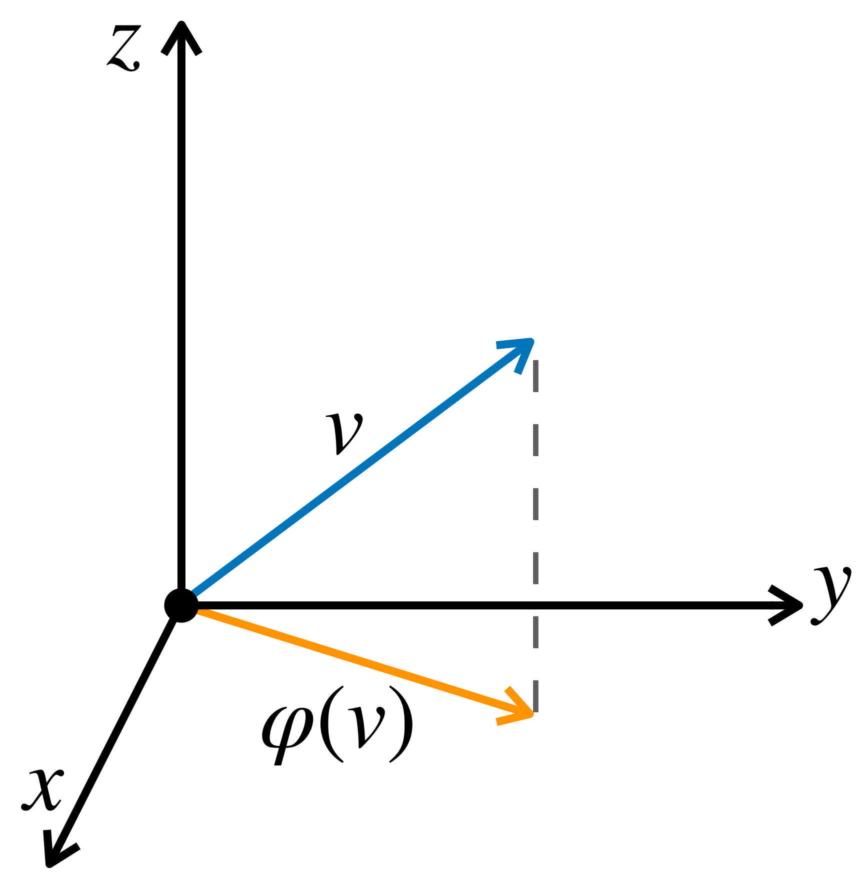
$$\ker D = \{f(x) = c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Пример 2

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v = (v_1,\ v_2,\ v_3)^T \in \mathbb{R}^3$

$\varphi(v) = (v_1,\ v_2,\ 0)^T$

$\ker \varphi = ?$



Пример 2

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v = (v_1,\ v_2,\ v_3)^T \in \mathbb{R}^3$

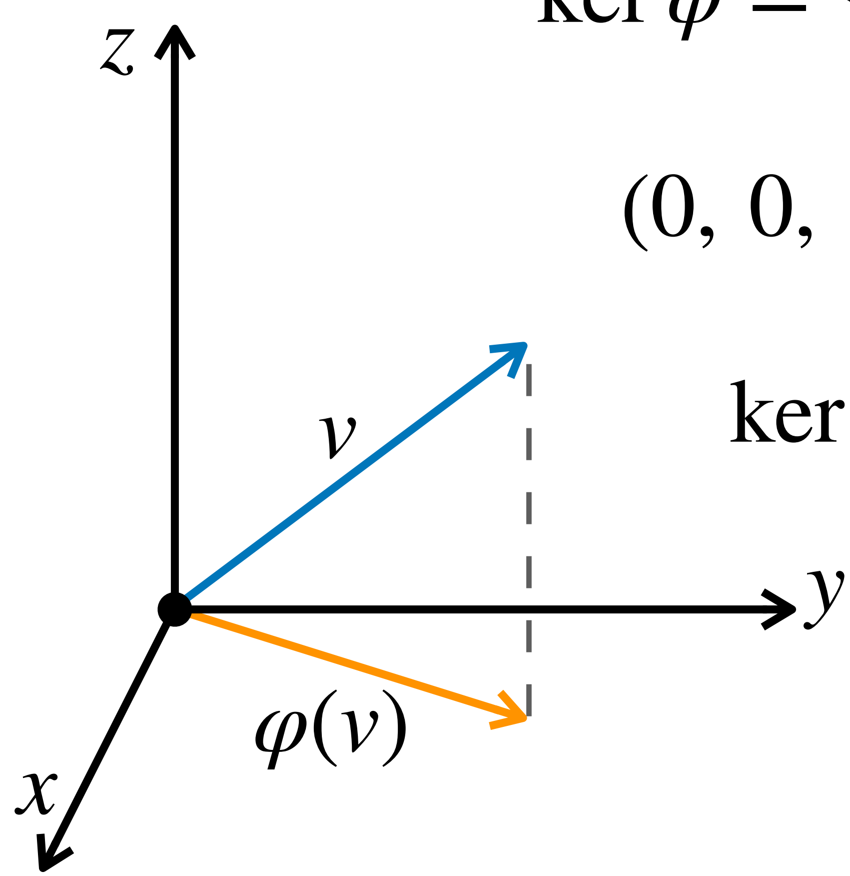
$\varphi(v) = (v_1,\ v_2,\ 0)^T$

$\ker \varphi = \ ?$

$\ker \varphi = \{(0,\ 0,\ v_3)^T \,|\, v_3 \in \mathbb{R}\}$

$(0,\ 0,\ 1)^T$ – базис $\ker \varphi$

$\ker \varphi = \ < (0,\ 0,\ 1)^T >$



Пример 3

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a = (2,\ 3)^T \in \mathbb{R}^2$

$\varphi(v) = v \cdot a$

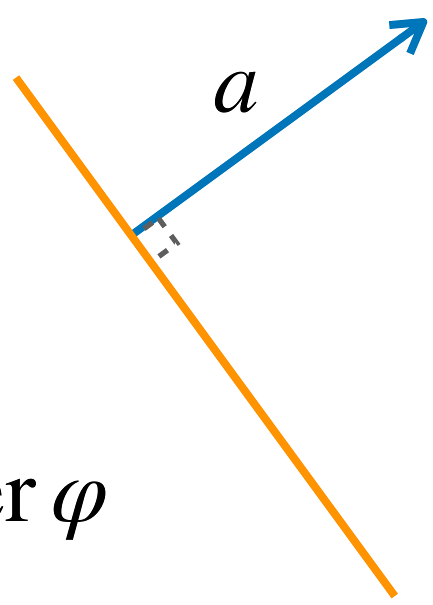
$$\ker \varphi = ?$$

Пример 3

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a = (2,\ 3)^T \in \mathbb{R}^2$

$\varphi(v) = v \cdot a$

$\ker \varphi = ?$



$v \cdot a = 0 \Leftrightarrow v \perp a$

$(3, -2)^T$ – базис $\ker \varphi$

$\ker \varphi = <(3, -2)^T>$

Пример 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \ker A = ?$$

Пример 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \ker A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$$

базис $\ker A$ = ФСР $Ax = 0$

$\ker\varphi = \{\alpha(-1,5,3,0)^T + \beta(-2,1,0,3)^T \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

Пример 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \ker A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$$

базис $\ker A$ = ФСР $Ax = 0$

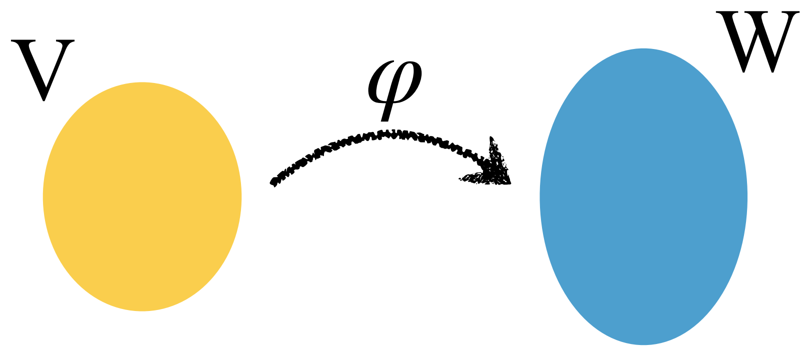
$$\begin{array}{cccc|l}
2 & 1 & -1 & 1 & A1 \\
3 & 0 & 1 & 2 & A2 \\
0 & -3 & 5 & 1 & A3 \\
5 & 1 & 0 & 3 & A4 \\
1 & -1 & 2 & 1 & A5 = A2 - A1 \\
0 & 3 & -5 & -1 & A6 = A1 - 2A5 \\
0 & 6 & -10 & -2 & A7 = A4 - 5A5 \\
0 & 1 & -5/3 & -1/3 & A8 = A6 : 3 \\
1 & 0 & 1/3 & 2/3 & A9 = A5 + A8
\end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	5	3	0
-2	1	0	3

$\ker\varphi = \langle (-1,5,3,0)^T, (-2,1,0,3)^T \rangle$

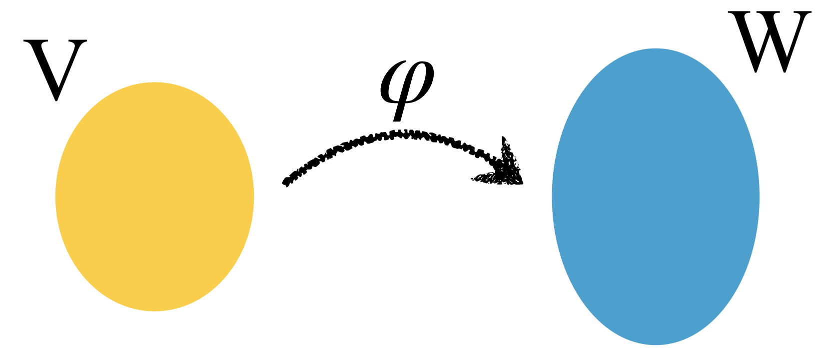
Образ



Image

$$\operatorname{Im}\varphi = \{y \in W \mid \exists x \in V \ \varphi(x) = y\} \le W$$

Образ



Image

$$\operatorname{Im}\varphi = \{y \in W \mid \exists x \in V\ \varphi(x) = y\} \le W$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$$

Пример 1

$D : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$

$D(f) = \dfrac{d}{dx} f(x)$ – оператор дифференцирования

$$\operatorname{Im} D = ?$$

Пример 1

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

$D(f) = \dfrac{d}{dx} f(x)$ – оператор дифференцирования

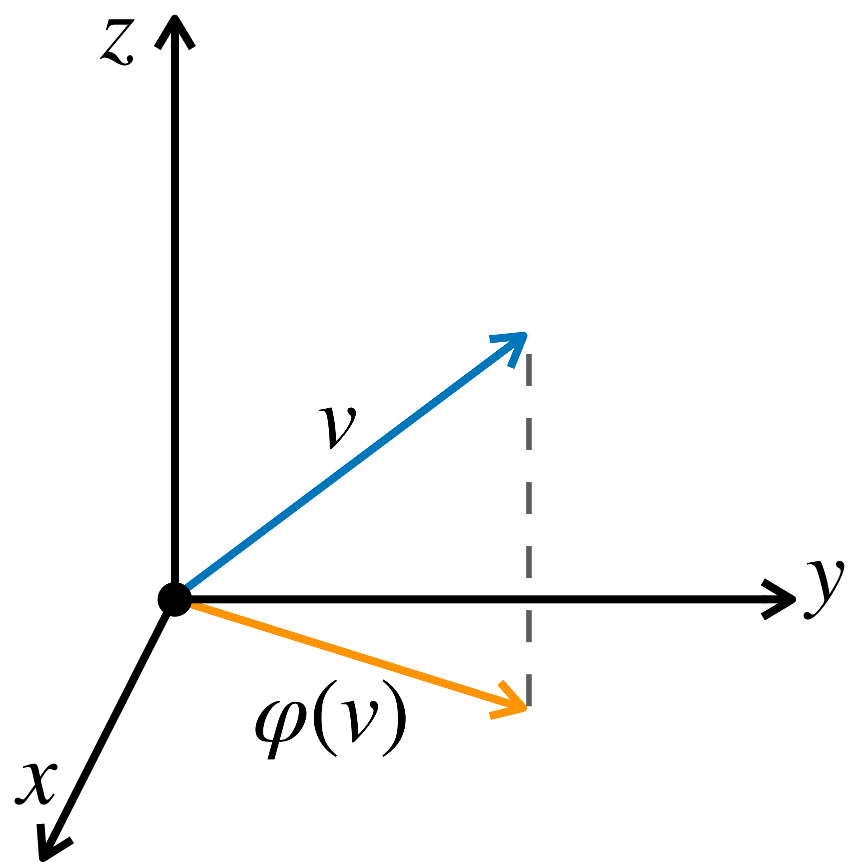
$$\operatorname{Im} D = C^\infty(\mathbb{R})$$

Пример 2

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v = (v_1,\ v_2,\ v_3)^T \in \mathbb{R}^3$

$\varphi(v) = (v_1,\ v_2,\ 0)^T$

$$\mathrm{Im}\varphi = ?$$



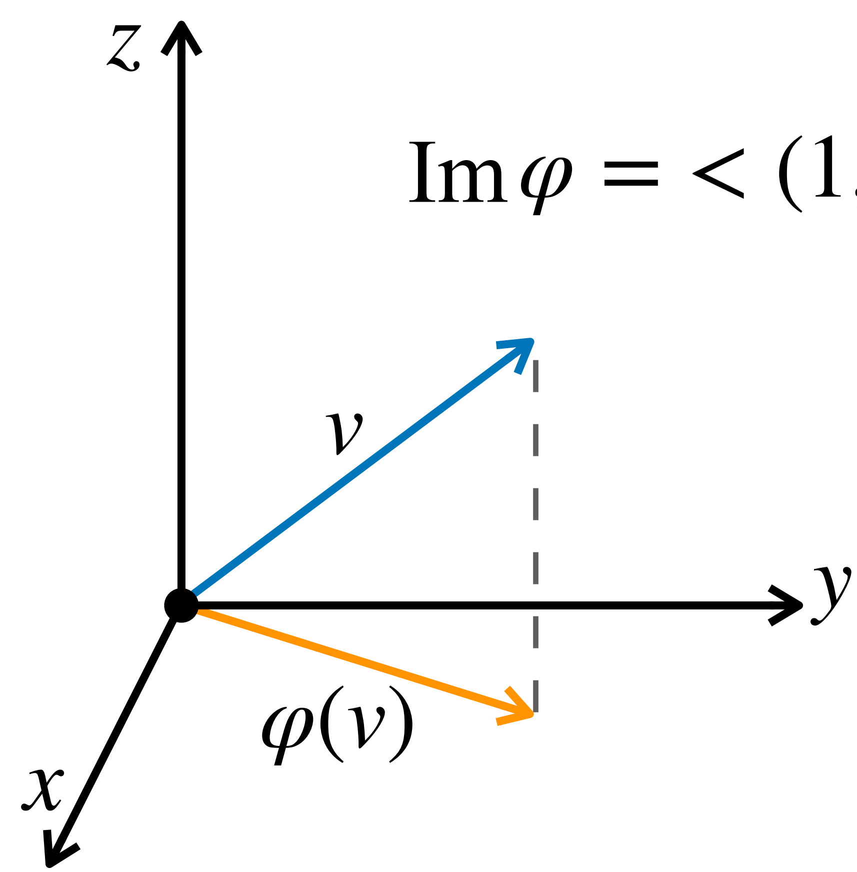
Пример 2

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v = (v_1,\ v_2,\ v_3)^T \in \mathbb{R}^3$

$\varphi(v) = (v_1,\ v_2,\ 0)^T$

$$\mathrm{Im}\,\varphi = ?$$

$$\mathrm{Im}\,\varphi = < (1,\ 0,\ 0)^T,\ (0,\ 1,\ 0)^T >$$



Пример 3

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a = (2,\ 3)^T \in \mathbb{R}^2$

$\varphi(v) = v \cdot a$

$$\operatorname{Im} \varphi = ?$$

Пример 3

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a = (2,\ 3)^T \in \mathbb{R}^2$

$\varphi(v) = v \cdot a$

$$\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}$$

Пример 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ \ \mathrm{Im} A = ?$$

Столбцы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$Ax = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n \in < A^1, A^2, \dots, A^n >$$

Образ матрицы

- $\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, $A \in M_{m\times n}$
- $\operatorname{Im} A = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \ Ax = y\}$

$y \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow Ax \in \operatorname{Im} A$

$$\operatorname{Im} A = < A^1, A^2, \ldots, A^n >$$

Пример 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Im} A = ?$$

Пример 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} A = ?$$

$$\begin{array}{cccc|ll}
\cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} & A1 & \\
\cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & A2 & \\
\cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{5} & \cancel{1} & A3 & \\
\cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{3} & A4 & \\
1 & -1 & 2 & 1 & A5 & = A2 - A1 \\
0 & 3 & -5 & -1 & A6 & = A1 - 2A5 \\
\cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{-10} & \cancel{-3} & A7 & = A4 - 5A5
\end{array}$$

$$\operatorname{Im} A = \langle (2,\ 3,\ 0,\ 5)^T,\ (1,\ 0,\ -3,\ 1)^T \rangle$$

Пример 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ \operatorname{Im} A = \ <(2,\ 3,\ 0,\ 5)^T,\ (1,\ 0,\ -3,\ 1)^T>$$

~~2~~	~~1~~	~~−1~~	~~1~~	$A1$
~~3~~	~~0~~	~~1~~	~~2~~	$A2$
~~0~~	~~−3~~	~~5~~	~~1~~	$A3$
~~5~~	~~1~~	~~0~~	~~3~~	$A4$
1	−1	2	1	$A5 = A2 - A1$
0	3	−5	−1	$A6 = A1 - 2A5$
~~0~~	~~6~~	~~−10~~	~~−3~~	$A7 = A4 - 5A5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \tfrac{1}{3}A^1 - \tfrac{5}{3}A^2$$

$$A^4 = \tfrac{2}{3}A^1 - \tfrac{1}{3}A^2$$

$\operatorname{Im}\varphi = \langle (5,-1,-1)^T, (-1,2,2)^T \rangle, \ \operatorname{Ker}\varphi = \langle (0,-1,1)^T \rangle$

Задача

2. Найти ядро и образ оператора на $\mathbb{R}^3$ с матрицей

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^\top + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^\top,$$

где

$$\mathbf{x} = (1,1,1)^\top, \ \mathbf{y} = (2,-1,-1)^\top.$$

$$A = x \cdot x^T + y \cdot y^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 1\ 1) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (2\ {-1}\ {-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$(0,-1,1)^T$

Интересный вывод

Дефект A

$$\dim(\ker A) = \text{количество свободных переменных}$$

$$\dim(\operatorname{Im} A) = \text{количество главных переменных}$$

Ранг A

$$\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \dim V$$

Способ II

Пример 56 *Найдите базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$[A^T \mid E] \rightsquigarrow [\text{ступ вид} \mid \ldots]$$

Способ II

Пример 56 *Найдите базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\,\varphi \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} \\ & A_{(5)} = A_{(2)} + A_{(3)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(4)} - A_{(2)} \\ \times & A_{(7)} = A_{(1)} - 2A_{(2)} \\ & A_{(8)} = A_{(6)} - 2A_{(5)} \\ & A_{(9)} = A_{(7)} - 3A_{(5)}. \end{array}$$

Работаем со строками!

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \mathrm{Ker}\,\varphi$$

Ещё пример

Найдите базис и образ линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ещё пример

Найдите базис и образ линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

базис Kerφ

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

базис Imφ

Работаем со столбцами!

Задание 5 (сдать до до 8 марта)

Вариант 1

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,3,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,-1,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,0]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\},$$
$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [4,4,-1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [-2,5,6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-3,2,-2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,-1,0]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -6 & 8 & 3 \\ 6 & -6 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

Может быть
нужны матрицы?

Нужно вспомнить
аналитическую геометрию!

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

Дано: a, b, n

$n \cdot n$

$a \cdot n$

$b \times n$

(a, b, n)

Может быть нужны матрицы?

Нужно вспомнить аналитическую геометрию!

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

Дано: a, b, n, v

- $n \cdot n$
- $a \cdot n$
- $b \times n$
- (a, b, n)

$$P_a(v) = \dots$$

Может быть нужны матрицы?

Нужно вспомнить аналитическую геометрию!

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

Дано: a, b, n, v

- $n \cdot n$
- $a \cdot n$
- $b \times n$
- (a, b, n)

$P_a(v) = \ldots$

Может быть нужны матрицы?

Нужно вспомнить аналитическую геометрию!

По определению суммы отображений:

$$(P_a + P_b)(v) = P_a(v) + P_b(v)$$