

Алгебра высказываний.

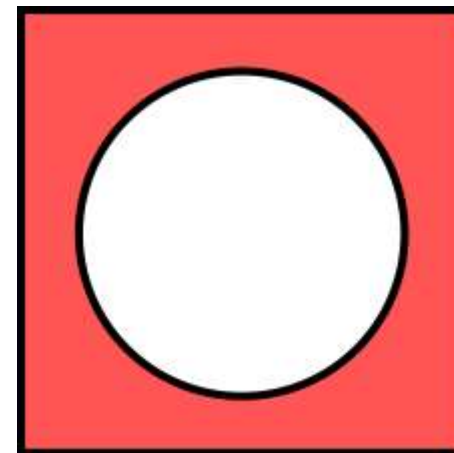
Высказывания принято обозначать большой латинской буквой (A, B, ...)

Утверждение. Возможны два результата высказываний: истина (и/1) и ложь (л/0)

Основные логические операции.

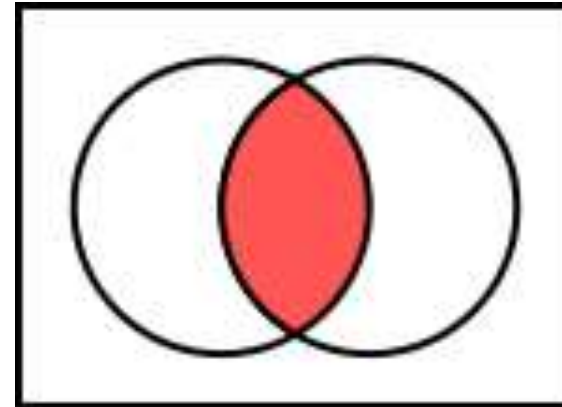
1) Отрицание (\neg , $\bar{}$, \sim , $!$, not, НЕ)

A	$\neg A$
0	1
1	0



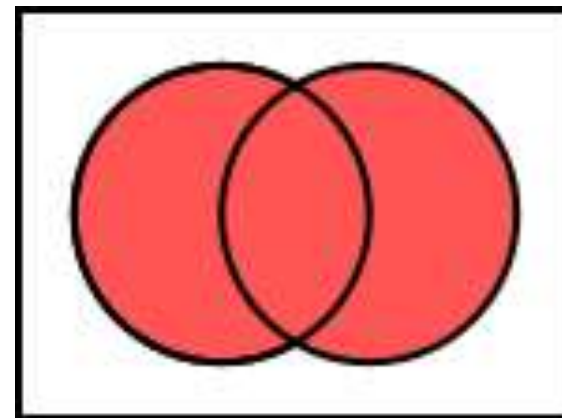
2) Конъюнкция (\wedge , $\&$, \times , \bullet , and, И)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



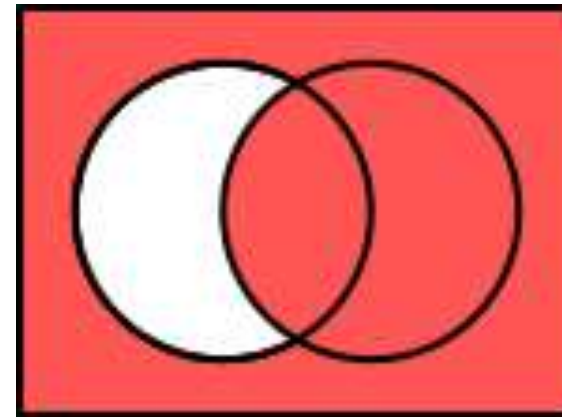
3) Дизъюнкция (\vee , $|$, $+$, \parallel , or, ИЛИ)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



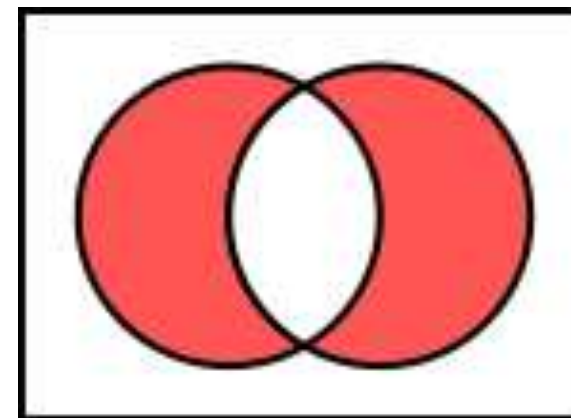
4) Импликация ($\rightarrow, \Rightarrow, \rightarrow, \supset, \text{из ... следует ...}$)

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



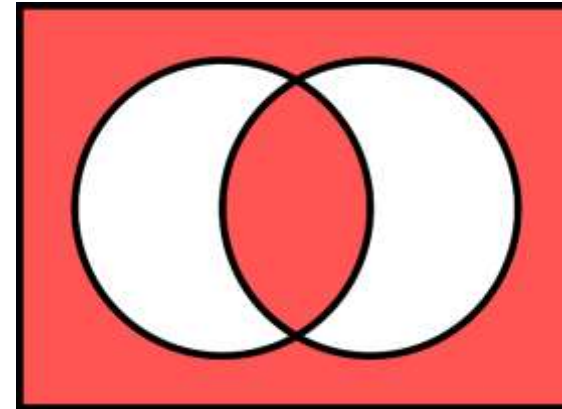
5) Сложение по модулю два / Исключающее или ($\oplus, \underline{\vee}, \oplus_2, \dot{\vee}, \text{либо ... , либо ...}$)

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



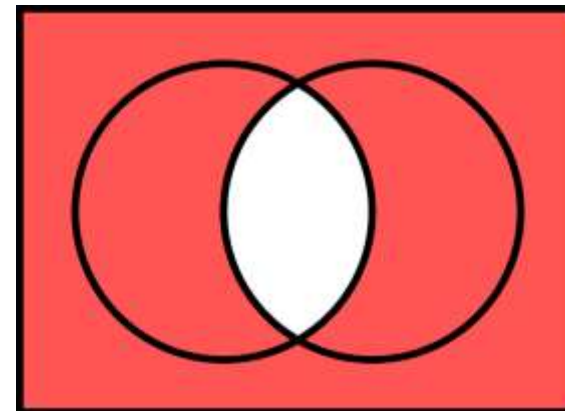
6) Эквивалентность / Конгруэнтность (\Leftrightarrow , \equiv , \leftrightarrow , ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА)

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



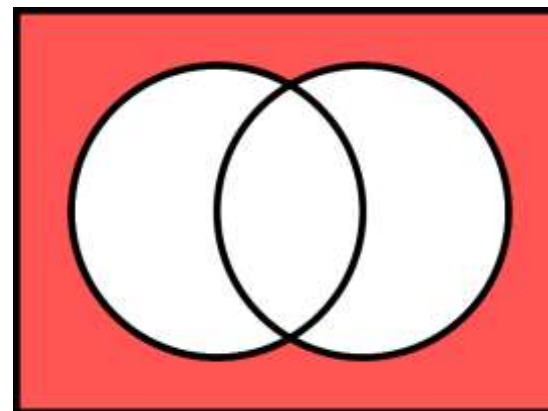
7) Штрих Шефера ($|$, НЕ И)

A	B	$A B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



8) Стрелка Пирса (\downarrow , НЕ ИЛИ)

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Список других логических операций.

- 1) Тавтология или тождественная единица (\top , T , 1) – высказывание всегда верно или высказывание безусловно верно
- 2) Противоречие или тождественный ноль (\perp , F , 0) – высказывание всегда неверно или высказывание безусловно неверно
- 3) Квантор всеобщности (\forall) – обозначение “для любого” или “для всех”
- 4) Квантор существования (\exists) – обозначение “существует” или “найдется”
- 5) Квантор единственности ($\exists!$) – обозначение “существует единственный” или “найдется только один”
- 6) Определение ($:=$, \equiv , $:\Leftrightarrow$) – определение высказываний (задание значений)

Теорема: Формулы эквивалентности:

$$A \mid B = \overline{A \& B}$$

$$A \downarrow B = \overline{A \vee B}$$

$$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$$

$$A \rightarrow B = \overline{B} \rightarrow \overline{A}$$

$$A \oplus B = (A \& \overline{B}) \vee (\overline{A} \& B)$$

$$A \leftrightarrow B = (A \& B) \vee (\overline{A} \& \overline{B})$$

$$A \leftrightarrow B = (A \vee \overline{B}) \& (\overline{A} \vee B)$$

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$$

Доказательство. Самостоятельно.

Теорема: Правила логических операций:

1) Закон противоречия:

$$A \& \overline{A} = 0$$

1) Закон исключения третьего:

$$A \vee \overline{A} = 1$$

1) Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

4) Свойство констант:

$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{1} = 0$$

$$A \& 0 = 0$$

$$A \& 1 = A$$

$$A \vee 0 = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

5) Закон идемпотентности (тавтологии):

$$A \& A = A$$

$$A \vee A = A$$

6) Закон коммутативности (переместительный):

$$A \& B = B \& A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

7) Закон ассоциативности (сочетательный):

$$A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$$

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

8) Закон дистрибутивности (распределительный):

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

9) Закон поглощения:

$$A \vee (A \& B) = A$$

$$A \& (A \vee B) = A$$

10) Закон де Моргана:

$$\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$$

11) Правило свертки:

$$A \vee \overline{A} \& B = A \vee B$$

$$\overline{A} \vee A \& B = \overline{A} \vee B$$

12) Правило расширения:

$$A \& B \vee \overline{A} \& C \vee B \& C = A \& B \vee \overline{A} \& C$$

13) Правило склеивания:

$$A \& B \vee A \& \overline{B} = A$$

14) Свойства операции сложения по модулю два:

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus \bar{A} = 1$$

$$A \oplus 1 = \bar{A}$$

$$A \oplus 0 = A$$

15) Свойства штриха Шеффера:

$$\bar{A} = A | A$$

$$A \& B = (A | B) | (A | B)$$

$$A \vee B = (A | A) | (B | B)$$

$$A | \bar{A} = 1$$

$$A | 0 = 1$$

$$A | 1 = \bar{A}$$

16) Свойства стрелки Пирса:

$$A \downarrow A = \bar{A}$$

$$A \downarrow 0 = \bar{A}$$

$$A \downarrow \bar{A} = 0$$

$$A \downarrow 1 = 0$$

Доказательство. Самостоятельно.

Метод фиксации переменной.

Метод необходим для того, чтобы узнать эквивалентны ли две формулы

Пример.

$A \& B \vee A \& C \vee B \& C \quad ? \quad (A \vee B) \& (A \vee C) \& (B \vee C)$

Зафиксируем $A=0$ и получим:

$B \& C$ и $B \vee C$

Они эквивалентны. Теперь фиксируем $A=1$:

$B \vee C \quad ? \quad B \vee C$

Они тоже эквивалентны. Следовательно, формулы эквивалентны.

Метод Шенона (Формула).

$$f(A_1, \dots, A_n) = A_1 \cdot f(1, A_2, \dots, A_n) \vee \bar{A}_1 \cdot f(0, A_2, \dots, A_n)$$

при $A_1=0$ остается $f(0, A_2, \dots, A_n)$

при $A_2=1$ остается $f(1, A_2, \dots, A_n)$

Метод работает для любой A_i

СКНФ – совершенно конъюнктивная нормальная форма

СДНФ – совершенно дизъюнктивная нормальная форма

Алгоритм построения СКНФ [СДНФ].

Шаг 1. Убрать все формулы кроме отрицания, дизъюнкции и конъюнкции.

Шаг 2. По правилу де Моргана опустить отрицание на переменные.

Шаг 3. По дистрибутивности поднять дизъюнкции [конъюнкции]

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C) \quad [A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)]$$

Шаг 4. Добавить недостающие переменные. Например $n=3$:

$$A \& B = A \& B \& (C \vee \bar{C}) = A \& B \& C \vee A \& B \& \bar{C} \quad [A \vee B = A \vee B \vee (C \& \bar{C}) = (A \vee B \vee C) \& (A \vee B \vee \bar{C})]$$

Шаг 5. Убрать повторяющиеся слагаемые.