Представление функции класса DM с помощью медианы

Теорема:

Любую монотонную самодвойственную булеву функцию (self-**D**ual, **M**onotone) можно представить как некоторую суперпозицию функции медианы(majority function, median operator).

Доказательство:

$\triangleright$

Единственная унарная функция из класса DM — проектор. С помощью медианы её можно выразить так: $P_1(x) = \langle x, x, x \rangle$.

Бинарных функций из класса DM всего две. Рассмотрим эти функции :

1. $f(0,0) < f(1,1)$ и $f(0,0) = \neg f(1,1)$, следовательно, $f(0,0) = 0$ и $f(1,1) = 1$
2. $f(0,1) = \neg f(1,0)$

Из первого и второго пункта видно, что подходят только проекторы — P_1, P_2

Теперь покажем, как эти функции можно представить с помощью медианы :

$P_1 = \langle x, x, y \rangle, P_2 = \langle x, y, y \rangle$.

Только четыре тернарные функции принадлежат классу DM. Рассмотрим эти функции :

Заметим, что для всех таких функций

$f(0,0,0) < f(1,1,1)$ и $f(0,0,0) = \neg f(1,1,1)$, следовательно , $f(0,0,0) = 0$ и $f(1,1,1) = 1$

1. $f(1,0,0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(0,1,1) = \neg f(1,0,0) = 0 \\ f(0,0,1) = f(0,1,0) = 0 \\ f(1,0,1) = f(1,1,0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f = P_1$
2. $f(0,1,0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1,0,1) = \neg f(0,1,0) = 0 \\ f(0,0,1) = f(1,0,0) = 0 \\ f(1,1,0) = f(0,1,1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f = P_2$
3. $f(0,0,1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1,1,0) = \neg f(1,0,0) = 0 \\ f(1,0,0) = f(0,1,0) = 0 \\ f(1,0,1) = f(0,1,1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f = P_3$
4. $f(1,0,0) = f(0,1,0) = f(0,0,1) = 0$, следовательно, $f = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$

Покажем как эти функции представляются с помощью медианы :

1. $P_1 = \langle x, x, y \rangle$
2. $P_2 = \langle x, y, y \rangle$
3. $P_3 = \langle x, z, z \rangle$.

Теперь рассмотрим произвольную монотонную самодвойственную функцию $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ для $n > 3$. Обозначим аргументы $x_4, x_5 \ldots x_n$ за $\bar{x}$, то есть $f(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \bar{x})$. Тогда введем три функции от $n - 1$ аргумента :

$$f_1(x_1, x_2, \bar{x}) = f(x_1, x_2, x_2, \bar{x})$$
$$f_2(x_2, x_3, \bar{x}) = f(x_3, x_2, x_3, \bar{x})$$
$$f_3(x_3, x_1, \bar{x}) = f(x_1, x_1, x_3, \bar{x})$$

Очевидно, они также самодвойственны и монотонны из определения f, и f можно выразить одной из функций f_1, f_2, f_3, так как два из трех аргументов точно совпадут. Теперь выразим f через f_1, f_2, f_3 :

$$f(x_1 \ldots x_n) = \langle f_1(x_1, x_2, \bar{x}), f_2(x_2, x_3, \bar{x}), f_3(x_3, x_1, \bar{x}) \rangle$$

1. Все три аргумента равны : $x_1 = x_2 = x_3$, тогда, очевидно, что равенство выполняется.
2. Равны два аргумента : $x_1 = x_2 \neq x_3$ (случаи $x_1 = x_3 \neq x_2$ и $x_2 = x_3 \neq x_1$ доказываются аналогично). Тогда :

   $f = f(x_1, x_1, x_3, \bar{x})$, $f_1 = f(x_1, x_1, x_1, \bar{x})$, $f_2 = f(x_3, x_1, x_3, \bar{x})$, $f_3 = f(x_1, x_1, x_3, \bar{x})$.Рассмотрим два случая :

   - $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1.$
     Тогда можно упорядочить f_1, f_2, f_3 по возрастанию наборов их переменных (используя свойство их монотонности):
     $f(0, 0, 0, \bar{x}) \leq f(0, 0, 1, \bar{x}) \leq f(1, 0, 1, \bar{x})$. Так как $f(0, 0, 1, \bar{x})$ зажато между двумя остальными функциями, то она и будет медианой f_1, f_2, f_3.
   - $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$. Доказывается аналогично.

◁

Ссылки

- Количество монотонных самодвойственных булевых функций от n аргументов (http://oeis.org/A001206).
- Monotone self-dual boolean functions clone (http://math.stackexchange.com/questions/5523/monotone-self-dual-boolean-functions-clone).