

Характеристики. Метод бегущих волн

“Уравнения математической физики”

Скопинцев Артур Маркович

Новосибирск, 2023

В этой главе обсуждается метод решения линейных и квазилинейных уравнений первого порядка, который основан на нахождении характеристических кривых. Мы также покажем, как обобщить этот метод для волнового уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка. Метод характеристик может быть использован только для гиперболических задач, которые обладают нужным числом семейств характеристик. Напомним, что для параболических уравнений второго порядка у нас есть только одно семейство характеристик, а для эллиптических уравнений реальных характеристических кривых не существует.

Уравнение переноса

Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1.1)$$

может быть переписано любым из следующих способов

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (3.1.3)$$

поскольку смешанных производных нет. Если обозначить

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.1.4)$$

тогда (3.1.2) становится

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.1.5)$$

Аналогично (3.1.3) дает

$$\frac{\partial w}{\partial t} - c \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.1.6)$$

если

$$w = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.1.7)$$

Единственное различие между (3.1.5) и (3.1.6) заключается в знаке второго слагаемого. Теперь мы покажем, как решить (3.1.5), которое называется волновым уравнением первого порядка или уравнением адвекции.

Примечание: Хотя (3.1.4)-(3.1.5) или (3.1.6)-(3.1.7) можно использовать для решения одномерного волнового уравнения второго порядка (3.1.1), далее мы увидим другой способ решения (3.1.1), основанный на результатах главы 2.

Для решения (3.1.5) отметим, что если мы рассматриваем точку, движущуюся по кривой $x(t)$, то по цепному правилу получаем

$$\frac{dv(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (3.1.8)$$

Если точка движется со скоростью $\frac{dx}{dt} = c$, то, сравнивая (3.1.8) и (3.1.5), мы получим

$$\frac{dv}{dt} = 0. \quad (3.1.9)$$

Следовательно, (3.1.5) может быть заменен набором из двух ODE

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad (3.1.10)$$

$$\frac{dv}{dt} = 0. \quad (3.1.11)$$

Эти 2 уравнения легко решить. Интегрирование (3.1.10) дает

$$x(t) = x(0) + ct \quad (3.1.12)$$

а у другого есть решение

v = постоянная вдоль кривой (3.1.12).

Кривая (3.1.12) представляет собой прямую линию. Фактически, у нас есть семейство параллельных прямых линий, являющихся характеристиками, см. Рис. 1.

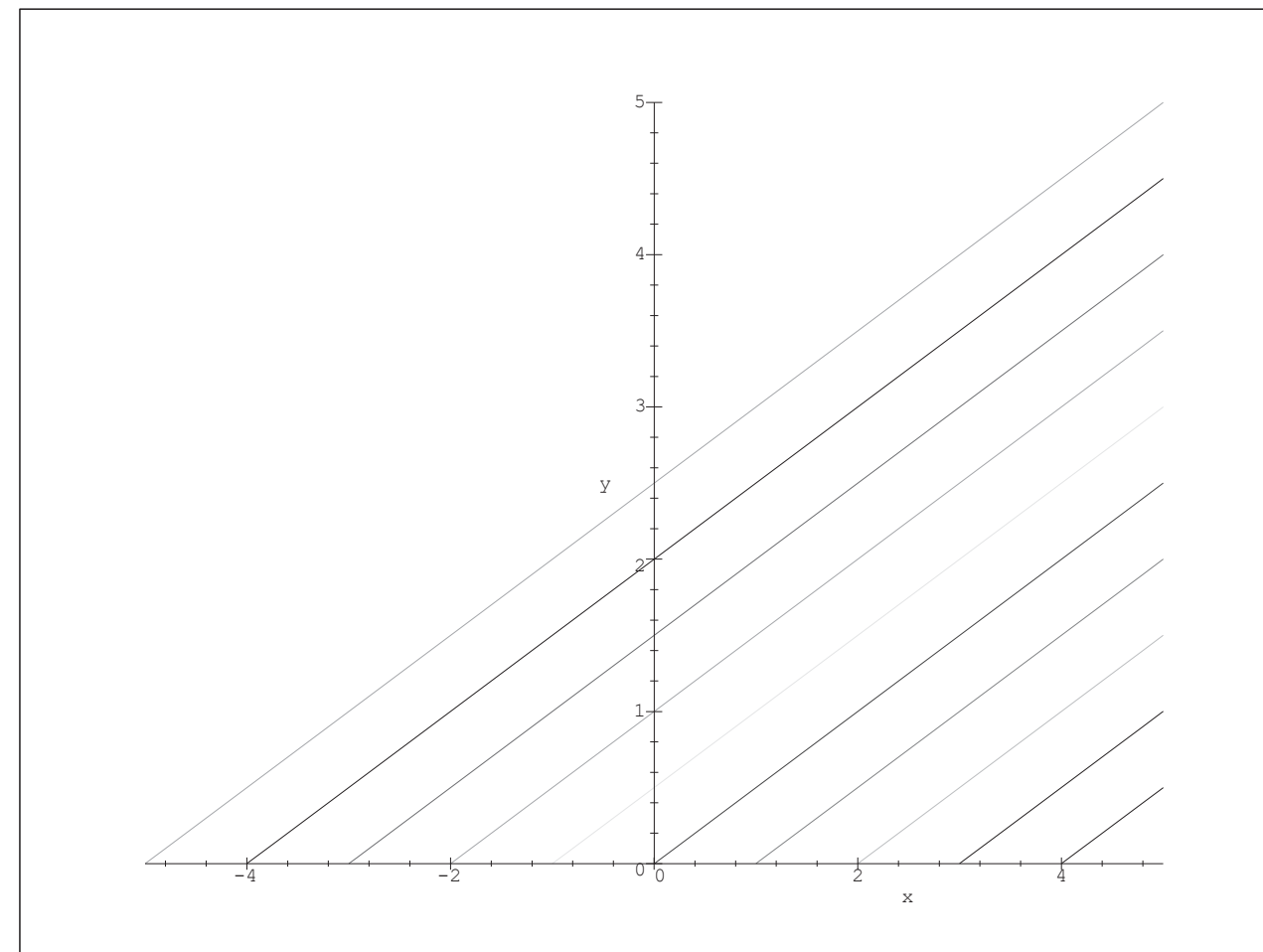


Рисунок 1: Характеристики $t = \frac{1}{c}x - \frac{1}{c}x(0)$

Для получения общего решения одномерного уравнения (3.1.5) с учетом начального значения

$$v(x(0), 0) = f(x(0)), \quad (3.1.13)$$

мы отметим, что

$$v = \text{постоянна вдоль } x(t) = x(0) + ct$$

но эта константа равна $f(x(0))$ из (3.1.13). Поскольку $x(0) = x(t) - ct$, общим решением будет

$$v(x, t) = f(x(t) - ct). \quad (3.1.14)$$

Покажем, что (3.1.14) является решением. Сначала, если положить $t = 0$, то (3.1.14) сводится к

$$v(x, 0) = f(x(0) - c \cdot 0) = f(x(0)).$$

Чтобы проверить уравнение, нам требуются первые частные производные от v . Обратите внимание, что f является функцией только одной переменной, т.е. от $x - ct$. Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{df(x - ct)}{dt} = \frac{df}{d(x - ct)} \frac{d(x - ct)}{dt} = -c \frac{df}{d(x - ct)} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{df(x - ct)}{dx} = \frac{df}{d(x - ct)} \frac{d(x - ct)}{dx} = 1 \frac{df}{d(x - ct)}. \end{aligned}$$

Подставляя эти две производные в (3.1.5) видно, что получается тождество.

Пример 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = e^{2x} \quad (3.1.22)$$

$$u(x, 0) = f(x). \quad (3.1.23)$$

Системой ODE будет

$$\frac{du}{dt} = e^{2x} \quad (3.1.24)$$

$$\frac{dx}{dt} = -2. \quad (3.1.25)$$

Решим (3.1.25), чтобы получить характеристическую кривую

$$x(t) = x(0) - 2t. \quad (3.1.26)$$

Подставляя характеристическое уравнение в (3.1.24), получаем

$$\frac{du}{dt} = e^{2(x(0)-2t)}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} du &= e^{2x(0)-4t} dt \\ u &= K - \frac{1}{4} e^{2x(0)-4t} . \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

При $t = 0$

$$f(x(0)) = u(x(0), 0) = K - \frac{1}{4} e^{2x(0)}$$

и поэтому

$$K = f(x(0)) + \frac{1}{4} e^{2x(0)} . \tag{3.1.28}$$

Подставив K в (3.1.27), мы имеем

$$u(x, t) = f(x(0)) + \frac{1}{4} e^{2x(0)} - \frac{1}{4} e^{2x(0)-4t} .$$

Теперь подставим $x(0)$ из (3.1.26), получим

$$u(x, t) = f(x + 2t) + \frac{1}{4} e^{2(x+2t)} - \frac{1}{4} e^{2x} ,$$

или

$$u(x, t) = f(x + 2t) + \frac{1}{4} e^{2x} (e^{4t} - 1) . \tag{3.1.29}$$

3.2 Квазилинейные уравнения

Метод характеристик является единственным методом, применимым для квазилинейных PDE. Все другие методы, такие как разделение переменных, функции Грина, преобразования Фурье или Лапласа, не могут быть распространены на квазилинейные задачи. В этом разделе мы опишем использование метода характеристик для решения следующих задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = S(u, x, t) \quad (3.2.1)$$

$$u(x, 0) = f(x). \quad (3.2.2)$$

Такие задачи находят применение в газовой динамике или задачах транспорта (например, вещества в потоке жидкости). Уравнение (3.2.1) может быть переписано в виде системы ОДУ

$$\frac{dx}{dt} = c(u, x, t) \quad (3.2.3)$$

$$\frac{du}{dt} = S(u, x, t). \quad (3.2.4)$$

Первое уравнение - это характеристическое уравнение. Решение этой системы может быть очень сложным, поскольку оба уравнения относительно u могут быть нелинейными. Чтобы найти характеристическую кривую, нужно знать решение. Геометрически характеристическая кривая имеет наклон, зависящий от решения u в этой точке, см. рис. 3.

Наклон характеристической кривой при x_0 равен

$$\frac{1}{c(u(x_0), x_0, 0)} = \frac{1}{c(f(x_0), x_0, 0)} \quad (3.2.5)$$

Теперь мы можем вычислить следующую точку на кривой, используя этот наклон (предполагая медленное изменение скорости и то, что точка близка к предыдущей). Как только у нас будет точка, мы сможем найти значение u в этой точке.

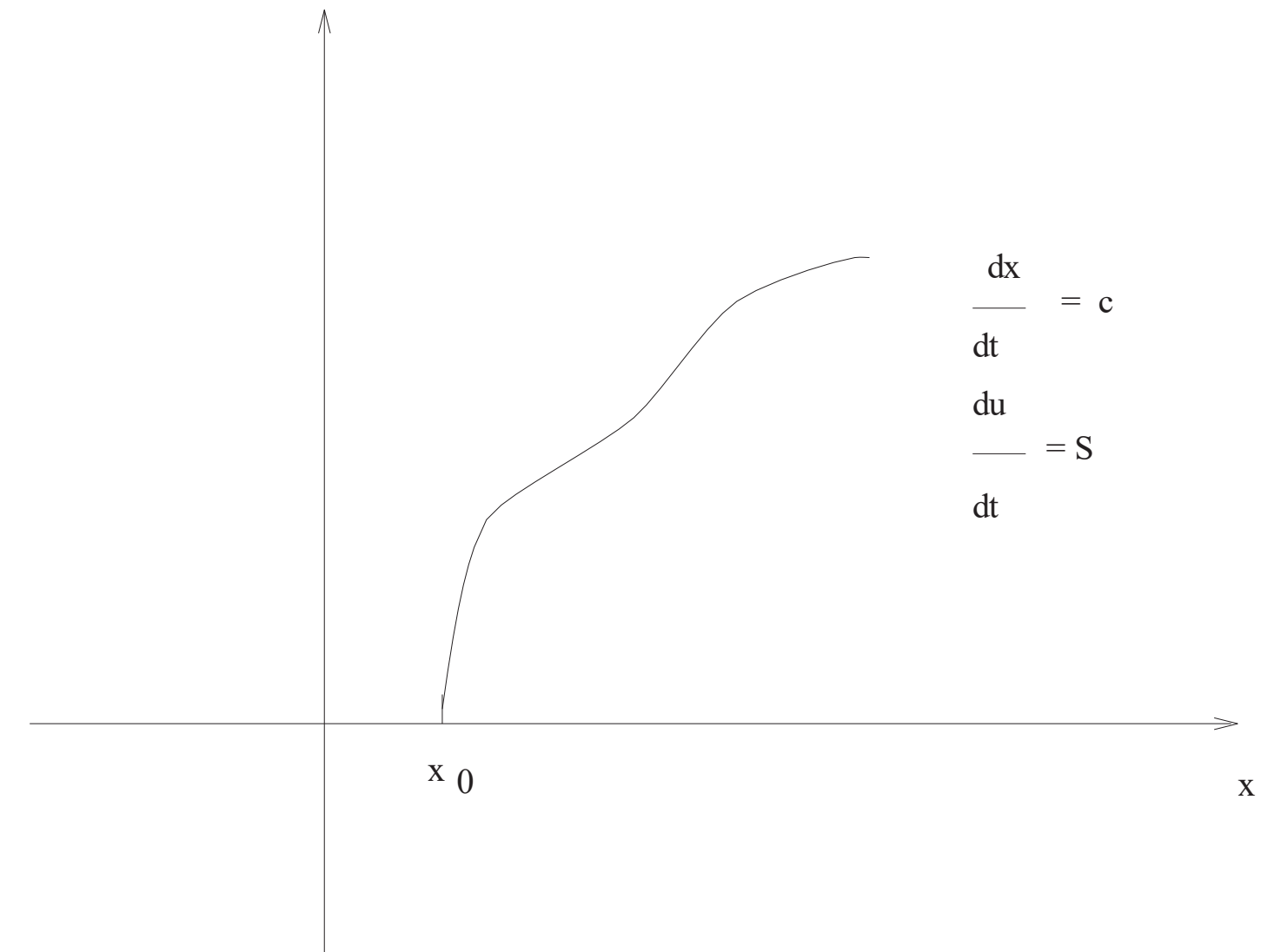


Рисунок 3: $u(x_0, 0) = f(x_0)$

3.2.1 Случай $S = 0, c = c(u)$

Квазилинейное уравнение

$$u_t + c(u)u_x = 0 \quad (3.2.1.1)$$

при соблюдении начального условия

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.2.1.2)$$

эквивалентно

$$\frac{dx}{dt} = c(u) \quad (3.2.1.3)$$

$$x(0) = \xi \quad (3.2.1.4)$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (3.2.1.5)$$

$$u(\xi, 0) = f(\xi). \quad (3.2.1.6)$$

Таким образом

$$u(x, t) = u(\xi, 0) = f(\xi) \quad (3.2.1.7)$$

$$\frac{dx}{dt} = c(f(\xi))$$

$$x = tc(f(\xi)) + \xi. \quad (3.2.1.8)$$

Решим (3.2.1.8) относительно ξ и подставим в (3.2.1.7) чтобы получить решение.

Чтобы проверить наше решение, вычислим первые частные производные u

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}.$$

Дифференцируя (3.2.1.8) относительно x и t , мы имеем

$$1 = tc'(f(\xi)) f'(\xi) \xi_x + \xi_x$$

$$0 = c(f(\xi)) + tc'(f(\xi)) f'(\xi) \xi_t + \xi_t$$

соответственно.

Таким образом, вспоминая, что $\frac{du}{d\xi} = f'(\xi)$

$$u_t = - \frac{c(f(\xi))}{1 + tc'(f(\xi))f'(\xi)} f'(\xi) \quad (3.2.1.9)$$

$$u_x = \frac{1}{1 + tc'(f(\xi))f'(\xi)} f'(\xi). \quad (3.2.1.10)$$

Подстановка этих выражений в (3.2.1.1) приводит к тождеству.
Начальное условие (3.2.1.2) в точности соответствует (3.2.1.7).

Пример 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.2.1.11)$$

$$u(x, 0) = 3x. \quad (3.2.1.12)$$

Эквивалентной системой ODE является

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (3.2.1.13)$$

$$\frac{dx}{dt} = u. \quad (3.2.1.14)$$

Решение первого из них приводит к

$$u(x, t) = u(x(0), 0) = 3x(0). \quad (3.2.1.15)$$

Подставляя это решение в (3.2.1.14)

$$\frac{dx}{dt} = 3x(0)$$

у которого есть решение

$$x = 3x(0)t + x(0). \quad (3.2.1.16)$$

Решая (3.2.1.16) на $x(0)$ и подставляя в (3.2.1.15), получим

$$u(x, t) = \frac{3x}{3t + 1}. \quad (3.2.1.17)$$

3.2.2 Графическое “решение”

Графически можно получить “решение” следующим образом :

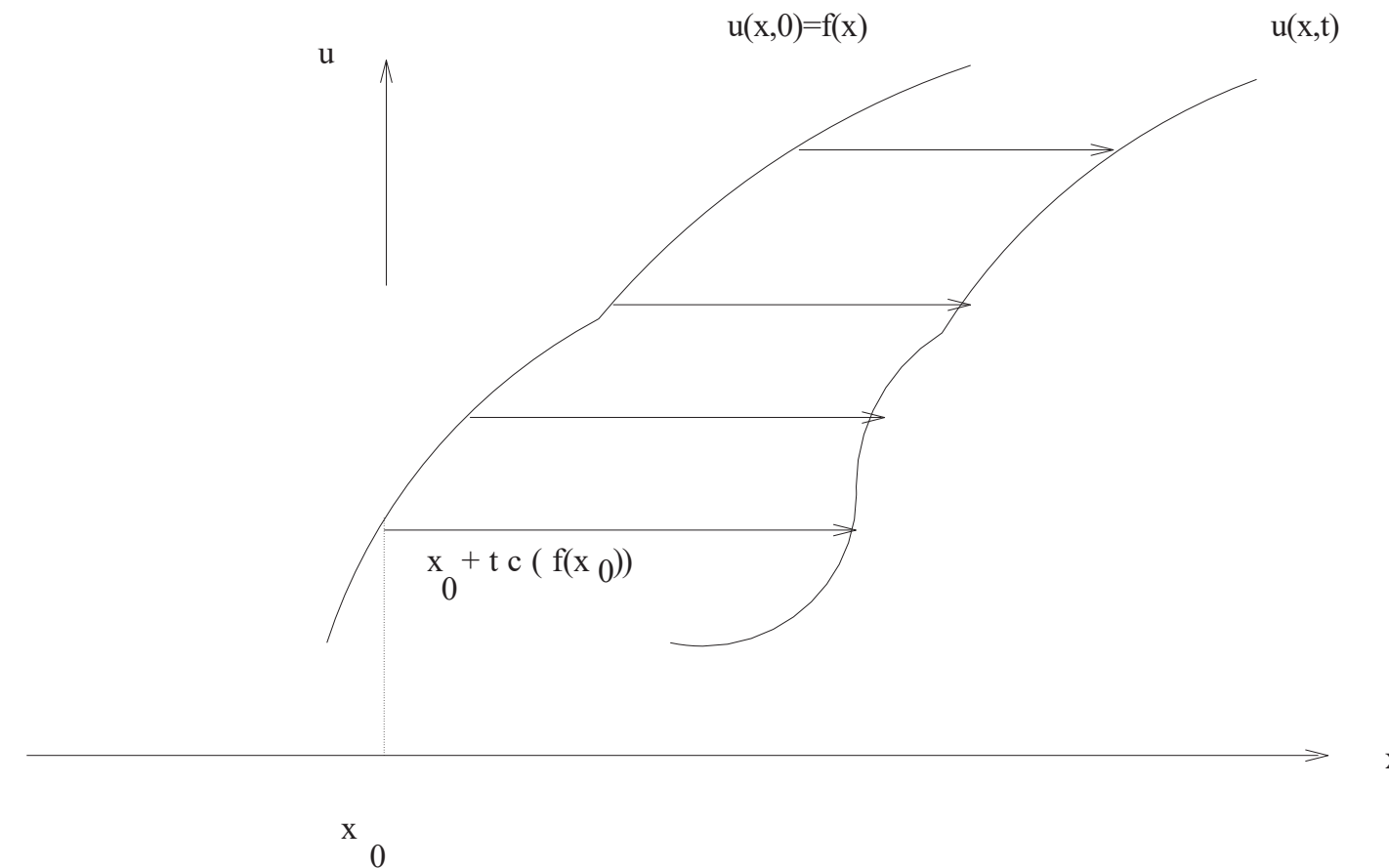


Рисунок 4: Графическое решение

Предположим, что исходное решение $u(x, 0)$ схематично изображено, как показано на Рис. 4. Мы знаем, что каждый $u(x_0)$ остается постоянным, двигаясь со своей собственной постоянной скоростью $c(u(x_0))$. В момент времени t он переместился с x_0 на $x_0 + tc(f(x_0))$ (горизонтальная стрелка). Этот процесс должен быть проведен в достаточном количестве точек на начальной кривой, чтобы получить решение в момент времени t . Обратите внимание, что длины стрелок различны и зависят от c .

Волновое уравнение. Метод д'Аламбера

Задача Коши для волнового одномерного уравнения:
(задача о бесконечной струне)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Идея метода д'Аламбера, или метода бегущих волн:
представление решения в виде

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad (2.3)$$

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at \quad (2.4)$$

(откуда следует это представление?)

Подстановкой (2.3) в (2.2) получаем:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ f'(x)(-a) + g'(x)a = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.25)$$

где используется правило цепное правило

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(x - at) \right) \Big|_{t=0} = \left(f'(x - at) \frac{\partial}{\partial t} (x - at) \right) \Big|_{t=0} = f'(x)(-a) \quad (2.26)$$

интегрируя второе уравнение, имеем

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{c}{a}. \quad (2.27)$$

Складывая или вычитая уравнения в системе, можно получить выражения на $f(x)$ и $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{c}{2a}, \quad (2.28)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{c}{2a} = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_x^0 \psi(s) ds - \frac{c}{2a}, \quad (2.29)$$

Подставляя в (2.3) получается формула д'Аламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \quad (2.30)$$

В задаче Коши (2.1)–(2.3) носителем начальных данных является ось x : $t = 0$, $-\infty < x < \infty$. Но, как следует из формулы Даламбера (2.10), решение задачи Коши в фиксированной точке (x_0, t_0) определяется значениями функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не при всех x , а только на отрезке $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ оси x . Действительно,

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}(\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)) + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(\zeta) d\zeta.$$

Отрезок $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ называется областью зависимости решения в точке (x_0, t_0) от начальных данных.

Построим область зависимости для фиксированной точки (x_0, t_0) на фазовой плоскости (x, t) .

Прямые

$$\begin{cases} x - at = c_1, \\ x + at = c_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

называются характеристиками одномерного волнового уравнения.

Найдем характеристики волнового уравнения, проходящие через точку (x_0, t_0) . Чтобы выделить из семейств (3.1) нужные характеристики, подставим в (3.1) $x = x_0$, $t = t_0$ и определим, что $c_1 = x_0 - at_0$, $c_2 = x_0 + at_0$. Таким образом, через точку (x_0, t_0) проходят две характеристики,

$$x - at = x_0 - at_0, \quad (3.2)$$

$$x + at = x_0 + at_0. \quad (3.3)$$

Характеристики (3.2), (3.3) пересекают ось x в точках с координатами $x_0 - at_0$ и $x_0 + at_0$, соответственно. Поэтому для построения области зависимости точки (x_0, t_0) достаточно построить характеристики, проходящие через эту точку. Характеристики вырезают на оси x отрезок $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$. На рисунке 3.1 область зависимости для точки (x_0, t_0) выделена жирной линией.

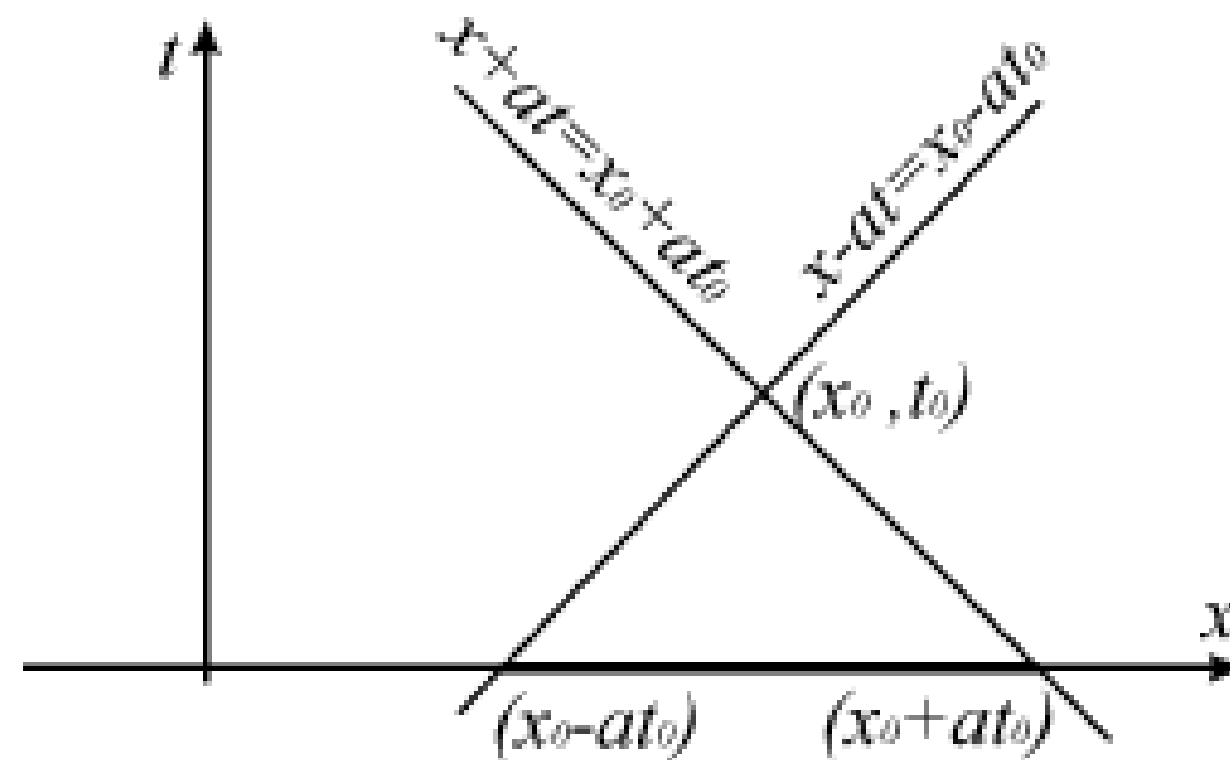


Рис. 3.1. Область зависимости для точки (x_0, t_0)

Пусть начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известны на отрезке $[x_1, x_2]$.

Множество точек фазовой полуплоскости (x, t) , области зависимости которых принадлежат отрезку $[x_1, x_2]$, называется областью определенности.

Во всех точках области определенности существует решение Даламбера (2.10). Кроме того, область определенности отрезка $[x_1, x_2]$ — это максимальная область, в которой решение начальной задачи для однородного волнового уравнения с начальными условиями, заданными только на отрезке $x \in [x_1, x_2]$ начальной прямой $t = 0$, существует, единственно и определяется по формуле Даламбера. Сами начальные условия в этом случае записываются следующим образом:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [x_1, x_2],$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [x_1, x_2].$$

Чтобы построить на фазовой полуплоскости (x, t) область определенности отрезка $[x_1, x_2]$ начальной прямой $t = 0$, нужно через концы этого отрезка провести характеристики волнового уравнения. Область определенности заключена между правой характеристикой, проходящей через левый конец отрезка начальной прямой, левой характеристикой, проходящей через правый конец отрезка, и самим отрезком прямой (рис. 3.2).

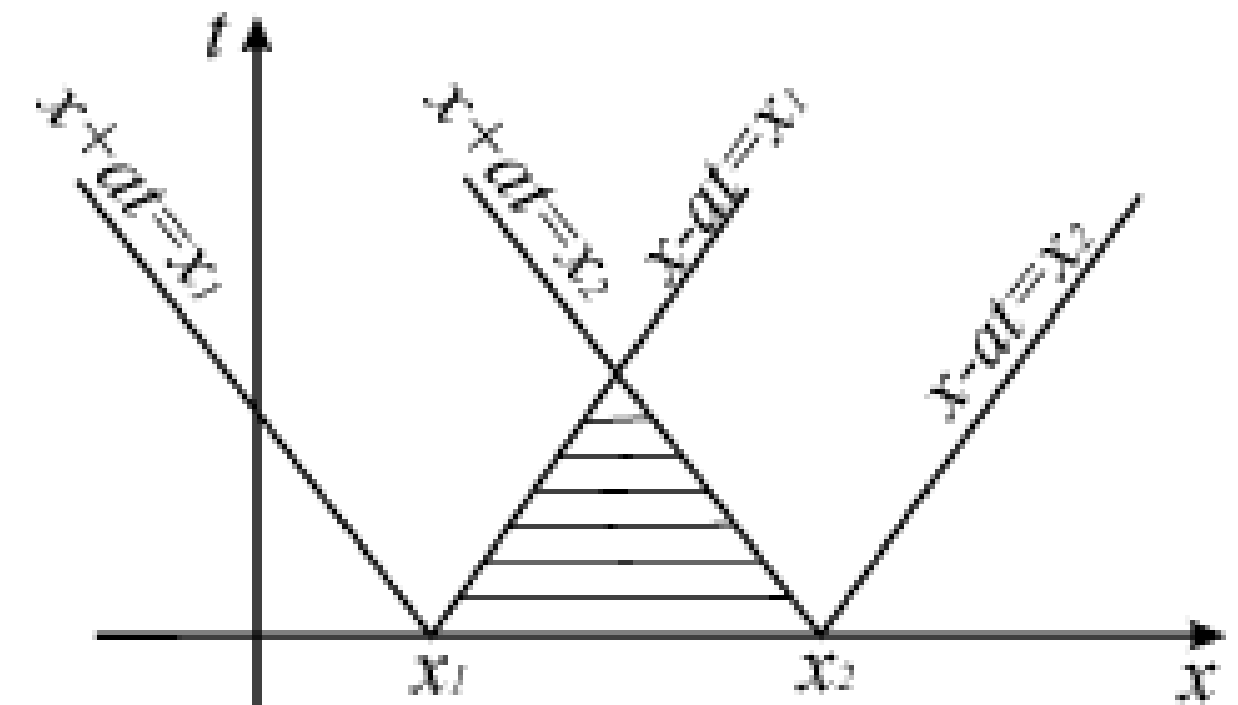


Рис. 3.2. Область определенности отрезка $[x_1, x_2]$

Из формулы Даламбера следует, что значения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданных при $x \in [x_1, x_2]$, влияют на значения решения $u(x, t)$ не только в области определенности отрезка $[x_1, x_2]$, но и в области, ограниченной отрезком $[x_1, x_2]$ оси x и характеристиками $x - at = x_1, x + at = x_2$. Эта область называется *областью влияния отрезка* $[x_1, x_2]$ (рис. 3.3). Действительно, для любой точки из области влияния область зависимости имеет непустое пересечение с отрезком $[x_1, x_2]$ оси x .

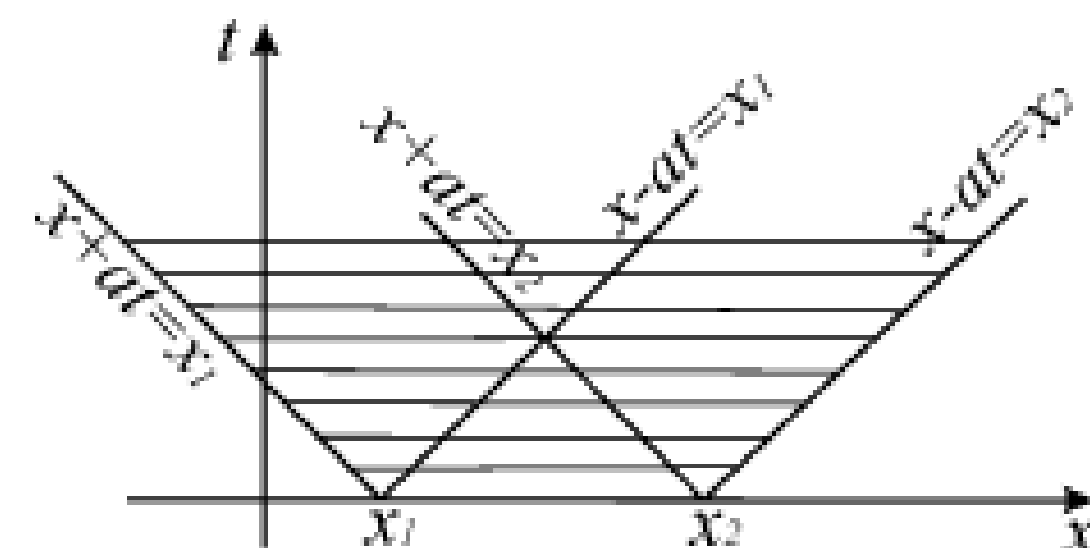


Рис. 3.3. Область влияния отрезка $[x_1, x_2]$

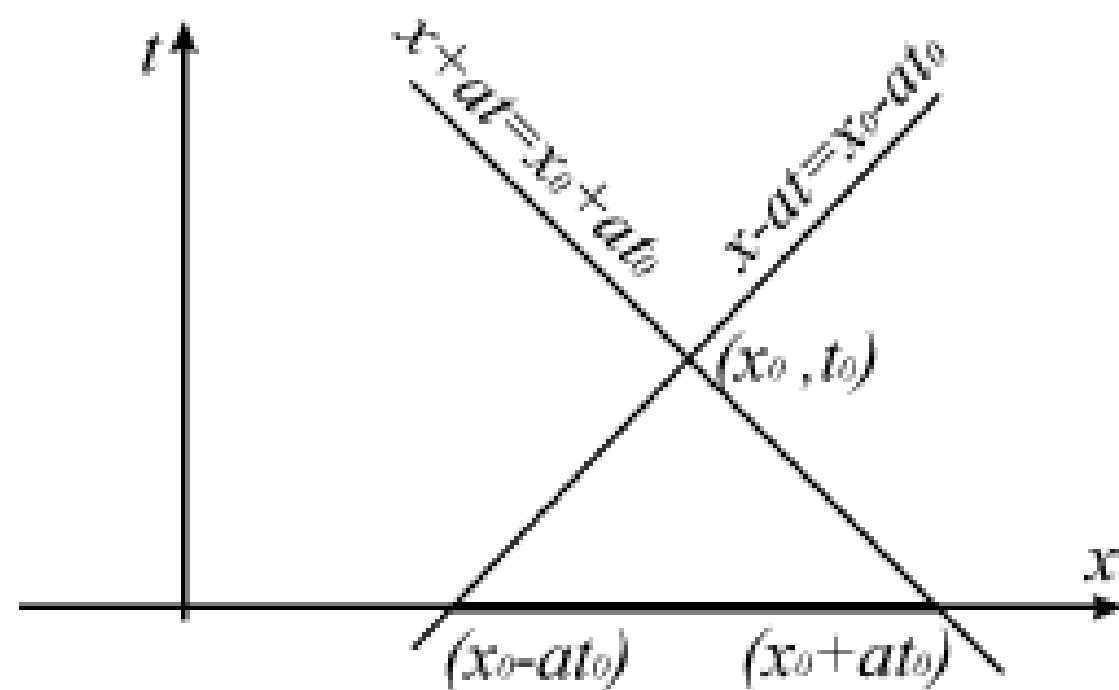


Рис. 3.1. Область зависимости для точки (x_0, t_0)

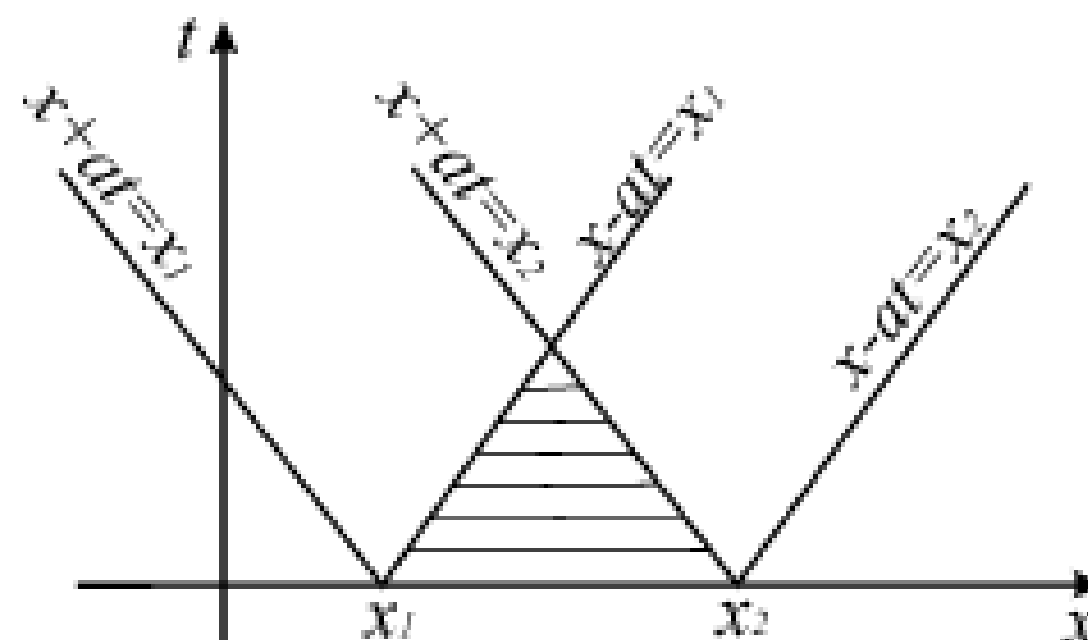


Рис. 3.2. Область определенности отрезка $[x_1, x_2]$

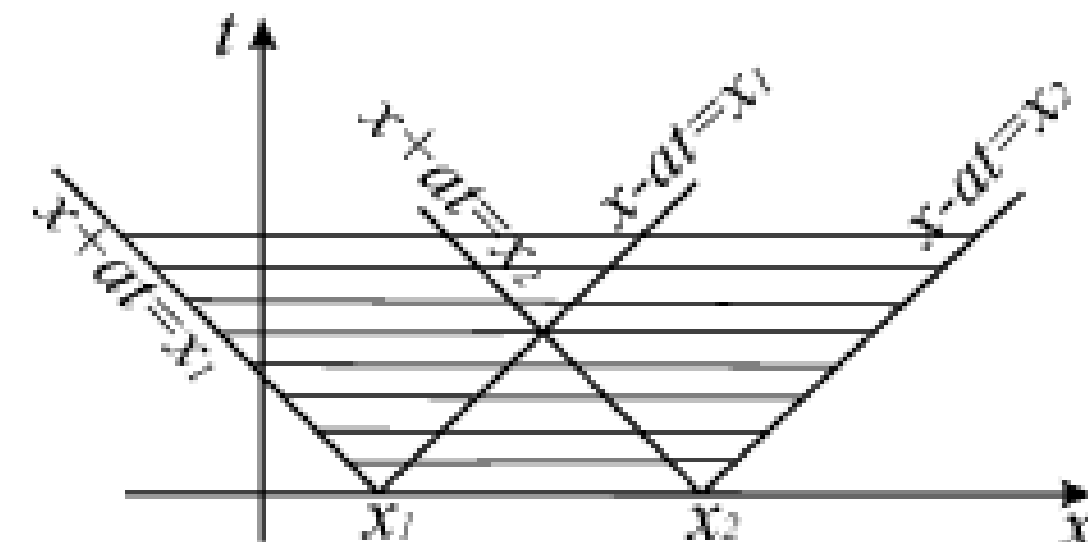


Рис. 3.3. Область влияния отрезка $[x_1, x_2]$

Типы граничных условий для уравнения колебания струны

Типы граничных условий

N	Граничное условие	Описание	Примечание
1a	$u _{x=0} = \mu(t)$	Конец $x = 0$ движется в поперечном направлении по заданному закону	
1б	$u _{x=0} = 0$	Конец $x = 0$ жестко закреплен	
2a	$u_x _{x=0} = \mu(t)$	К концу $x = 0$ приложена заданная внешняя сила $\tilde{f}(t)$, параллельная оси u .	$\mu(t) = -\frac{1}{T_0} \tilde{f}(t)$
2б	$u_x _{x=0} = 0$	Конец $x = 0$ свободен	
3a	$[u_x - h(u - \mu(t))]_{x=0} = 0$ или $(u_x - hu) _{x=0} = h\mu(t)$	Задан закон движения упруго закрепленного конца $x = 0$	$h = \frac{k}{T_0}$ Со стороны заделки на конец действует упругая сила, пропорциональная смещению и направленная в противоположную сторону $\tilde{f}(t) = -ku(0, t)$
3б	$(u_x - hu) _{x=0} = 0$	Конец $x = 0$ упруго закреплен	

Типы граничных условий для правого конца струны

N	Граничное условие	Описание	Примечание
1a	$u _{x=l} = \mu(t)$	Конец $x = l$ движется в поперечном направлении по заданному закону	
1б	$u _{x=l} = 0$	Конец $x = l$ жестко закреплен	
2a	$u_x _{x=l} = \mu(t)$	К концу $x = l$ приложена заданная внешняя сила $\tilde{f}(t)$, параллельная оси u .	$\mu(t) = \frac{1}{T_0} \tilde{f}(t)$
2б	$u_x _{x=l} = 0$	Конец $x = l$ свободен	
3a	$[u_x + h(u - \mu(t))]_{x=l} = 0$ или $(u_x + hu) _{x=l} = h\mu(t)$	Задан закон движения упруго закрепленного конца $x = l$	$h = \frac{k}{T_0}$ Со стороны заделки на конец действует упругая сила, пропорциональная смещению и направленная в противоположную сторону $\tilde{f}(t) = -ku(l, t)$
3б	$(u_x + hu) _{x=l} = 0$	Конец $x = l$ упруго закреплен	

Полубесконечная струна

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x > 0. \quad (5.2)$$

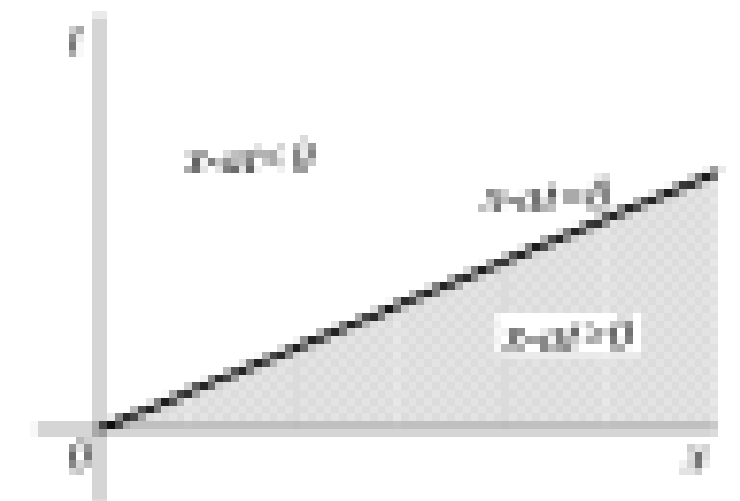
$$u(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.3)$$

Применяя метод д'Аламбера получаете формулу д'Аламбера

Вопрос. Зачем нужно краевое условие (5.3), если мы, как нам кажется, и так уже нашли решение, используя только начальные условия?

Ответ. Уравнения (2.25) — (2.29) справедливы лишь при $x > 0$, поскольку начальные условия (5.2), в отличие от (2.2), заданы только при $x > 0$. соответственно, формула Даламбера (2.30) справедлива при $x - at > 0$, а не при всех $x > 0$, $t > 0$.

Вывод. Решение смешанной задачи (5.1) — (5.3) дается формулой Двламбера (2.30) при $x - at > 0$.



Используем гран. условие:

$$f(-at) + g(at) = 0, \quad t > 0. \quad (5.5)$$

$$-at = z. \quad \Longrightarrow \quad f(z) = -g(-z), \quad z < 0.$$

Ввиду (2.28), получаем отсюда, что при $x - at < 0$

$$\begin{aligned} f(x - at) = -g(at - x) = & -\frac{\varphi(at - x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(s) ds - \frac{c}{2a} = \\ & -\frac{\varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^0 \psi(s) ds - \frac{c}{2a}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Подставляя (5.7) и (2.28) в (5.4), находим: при $x > at$ — формула Даламбера (2.30); при $0 < x < at$:

$$u(x, t) = \frac{-\varphi(at - x) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(s) ds. \quad (5.8)$$

Определение. В области $0 < x < at$ волна $g(x + at)$ называется падающей (на левый конец $x = 0$), а $f(x - at)$ — отраженной (от этого конца).

Дадим *графическую интерпретацию* построения решения задачи (5.1) — (5.3).

Решение этой задачи состоит из двух этапов:

А. Подставляем разложение Даламбера (5.4) в *начальные условия* (5.2), которые заданы в точках оси Ox ($x > 0$, $t = 0$). Решая систему (2.25) при $x > 0$, находим волны $f(x - at)$ и $g(x + at)$ в этих же точках $x > 0$, $t = 0$. Теперь $f(x - at)$ известна на всех характеристиках, бегущих вправо из этих точек (рис. 21), поскольку $f(x - at)$ постоянна вдоль таких характеристик. Эти характеристики заполняют всю область $x - at > 0$. С другой стороны, волна $g(x + at)$ известна всюду. Действительно, она постоянна на характе-

Видно (см. рис.21), что над главной характеристикой волна $f(x - at)$ (отраженная) пока не известна, а падающая $g(x + at)$ — известна.

Б. Подставляем разложение Даламбера (5.4) в краевое условие (5.3), которое задано в точках оси Ot ($t > 0$, $x = 0$). Волна $g(x + at)$ в этих точках уже найдена из начальных условий в пункте А. Поэтому краевое условие (5.5) связывает неизвестное в этих точках значение волны $f(x - at)$ с известным значением

$g(x + at)$, что позволяет определить волну $f(x - at)$. Но тогда $f(x - at)$ (и следовательно $u(x, t)$) известна на характеристиках, бегущих вправо из всех этих точек (пунктир на рис. 22), т.е. во всей области $x < at$ над главной характеристикой.

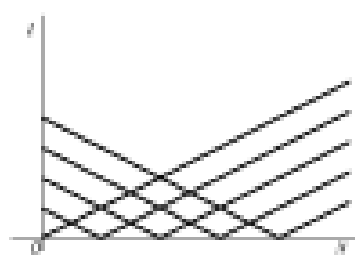


Рис. 21

ристиках, бегущих влево, а такие характеристики, выпущенные из точек луча Ox , заполняют всю область $x > 0$, $t > 0$. Таким образом, начальные данные позволяют определить решение там, где на рис. 21 проходят характеристики обоих семейств, т.е. под главной характеристикой.

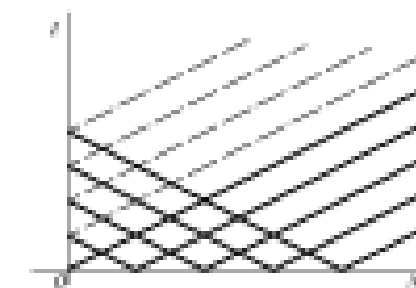


Рис. 22

Из сказанного выше следует, что решение задачи (5.1) — (5.2) выражается разными формулами при $x - at > 0$ и $x - at < 0$, поэтому вдоль линии $x - at = 0$ оно может быть разрывным. Оказывается, разрыв любого решения уравнения (5.1) вдоль линии $x - at = 0$ есть величина постоянная. Действительно, это видно из (5.4):

- 1) волна $g(x + at)$ непрерывна при переходе через главную характеристику, так как ее линии уравни $x + at = \text{const}$ пересекают прямую $x = at$;
- 2) волна $f(x - at)$ снизу от главной характеристики $x - at = 0$ имеет предел, равный $f(0+)$, так как там $x - at > 0$; аналогично, предел сверху равен $f(0-)$. Итак,

$$u \Big|_{x-at=0-} - u \Big|_{x-at=0+} = f(0-) - f(0+). \quad (5.15)$$

Поэтому условие непрерывности решения $u(x, t)$ на главной характеристике имеет вид

$$f(0-) = f(0+). \quad (5.16)$$

Упражнение. Найти условие непрерывности решения задачи (5.1) — (5.3) на главной характеристике.