Вариант 1

1. Задана аффинная система координат $\mathbf{e_1} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$, $\mathbf{e_2} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{e_3} = -3\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, вектор $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} - 2\,\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$ и ковектор $\mathbf{v} = 3\,\mathbf{e^1} + \mathbf{e^2} + \mathbf{e^3}$. Вычислить w_1, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathbf{rot}\,\mathbf{a})_1$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (\cos v + w^2, 3\,u - \sin w, u^3 + 5\,v)$, а координаты u, v, w связаны с декартовыми соотношениями $x = \mathrm{e}^{3\,u} - 3\,v + 2w$, $y = 2\,u + v$, $z = -u + 2\,v + \mathrm{e}^{w}$.

3. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в некоторой точке тензор T имеет вид $T = (T_i^j) = \mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^1} + 3\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^2} + 5\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^1} + 7\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^2} + 9\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^2} + 11\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^3} + 13\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^3}$, где $\mathbf{g_i}$ и $\mathbf{g^i}$ — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты T_i^j тензора T. Найти координату $T_{2'}^{1'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^1/\partial x^{3'} \\ \partial x^2/\partial x^{1'} & \partial x^2/\partial x^{2'} & \partial x^2/\partial x^{3'} \\ \partial x^3/\partial x^{1'} & \partial x^3/\partial x^{2'} & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\,x^{1'}} & 4 & 0 \\ -3 & \mathrm{e}^{3\,x^{2'}} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Для криволинейной системы координат (x^1, x^2), связанной с декартовой соотношениями $x = x^1 \cos 3\,x^2$, $y = \operatorname{ch} x^1 + 5x^2$, $x^1 > 0$, $x^2 > 0$, вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{1,12}$.

5. Найти компоненту $T_{12\cdot}^{\cdot\cdot 2}$ тензора $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \nabla_i S_{j\cdot}^{\cdot k}$, где $S = (S_{j\cdot}^{\cdot k}) = 2\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^1} + 3\,x^2 \mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^2} + 2\,\sin x^2\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^1} + 4\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^2} + 6\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^3}$. Здесь $\mathbf{g_i}$ и $\mathbf{g^i}$ — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты $S_{j\cdot}^{\cdot k}$ тензора S. Вычислить полную свертку тензора S. Символы Кристоффеля: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \dfrac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$; $\Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \dfrac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$; $\Gamma_{33}^3 = \dfrac{1}{x^3}$. Остальные символы Кристоффеля равны нулю.

Вариант 2.

1. Задана аффинная система координат $\mathbf{e_1} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e_2} = -\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{e_3} = -5\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}$, вектор $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} - 2\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, и ковектор $\mathbf{v} = \mathbf{e^1} + 2\,\mathbf{e^2} + 3\,\mathbf{e^3}$. Вычислить w_2, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathbf{rot}\,\mathbf{a})_2$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (v^2 + w^2, \sin u - 2\,w, 3\,u + 2\,\cos v)$, а координаты u, v, w связаны с декартовыми соотношениями $x = u - 4\,v$, $y = u + \mathrm{e}^{4\,v} - 2w$, $z = 3\,u + 2\,v + \mathrm{e}^{3\,w}$.

3. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в некоторой точке тензор T имеет вид $T = (T_i^j) = 2\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^1} + 4\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^2} + 6\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^1} + 8\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^2} + 10\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^1} + 12\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^3} + 14\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^3}$, где $\mathbf{g_i}$ и $\mathbf{g^i}$ — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты T_i^j тензора T. Найти координату $T_{1'}^{2'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^1/\partial x^{3'} \\ \partial x^2/\partial x^{1'} & \partial x^2/\partial x^{2'} & \partial x^2/\partial x^{3'} \\ \partial x^3/\partial x^{1'} & \partial x^3/\partial x^{2'} & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{7\,x^{1'}} & 2 & 0 \\ -5 & \mathrm{e}^{4\,x^{2'}} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Для криволинейной системы координат (x^1, x^2), связанной с декартовой соотношениями $x = x^1 \sin 5\,x^2 - x^2$, $y = \operatorname{sh} x^1 + 3\,x^2$, $x^1 > 0$, $x^2 > 0$, вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{2,21}$.

5. Найти компоненту $T_{12\cdot}^{\cdot\cdot 1}$ тензора $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \nabla_i S_{j\cdot}^{\cdot k}$, где $S = (S_{j\cdot}^{\cdot k}) = \mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^1} + 8\,x^1\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^2} + \cos x^1 \mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^1} + 2\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^2} + 3\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^3}$. Здесь $\mathbf{g_i}$ и $\mathbf{g^i}$ — базис и сопряженный базис соответственно. Выписать координаты $S_{j\cdot}^{\cdot k}$ тензора S. Вычислить полную

свертку тензора S. Символы Кристоффеля:
$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22} = \dfrac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$; $\Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \dfrac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$; $\Gamma^3_{33} = \dfrac{1}{x^3}$. Остальные символы Кристоффеля равны нулю.