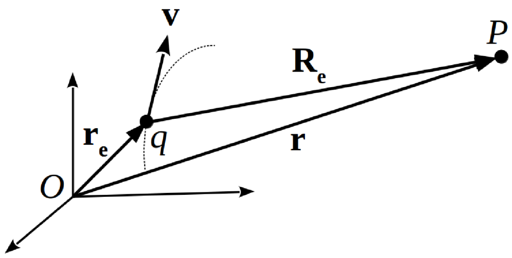
Потенциалы Лиенара-Вихерта



Задача. Частица с зарядом q движется по траектории $\mathbf{r}_e(\tau)$. Сигнал от частицы приходит в точку наблюдения P с радиус-вектором $\mathbf{r}$ в момент времени t. Требуется определить вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ и скалярный потенциал $\varphi(\mathbf{r},t)$.

Решение.

Запишем сначала общее решение для запаздывающего вектор-потенциала, верное для произвольного пространственного распределения переменной во времени плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{R}dV', \tag{1}$$

где $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Здесь t' зависит от положения $\mathbf{r}'$ элемента объема dV' в соответствии с условием

$$t - t' = \frac{R}{c}, \tag{2}$$

Для того, чтобы (2) выполнялось для любого элемента объема, перепишем интеграл (1) в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',\tau)}{R(\tau)}\delta\left(\tau - t + \frac{R(\tau)}{c}\right)d\tau dV' \tag{3}$$

Теперь учтем, что в нашем случае плотность тока в произвольный момент времени τ определяется положением $\mathbf{r}_e(\tau)$ и скоростью $\mathbf{v}(\tau)$ частицы (используем общее выражение через плотность заряда):

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}',\tau) = \rho(\mathbf{r}')\mathbf{v}(\tau) = q\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_e(\tau))\mathbf{v}(\tau) \tag{4}$$

Интегрирование по V' вырезает из всего объема траекторию движения частицы:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{q\mathbf{v}(\tau)\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(\tau))}{R_e(\mathbf{r}')}\delta\left(\tau - t + \frac{R_e}{c}\right)d\tau dV' = \int \frac{q\mathbf{v}(\tau)\delta\left(\tau - t + \frac{R_e(\tau)}{c}\right)}{cR_e(\tau)}d\tau$$

Остается проинтегрировать по τ. Преобразуем $\delta\left(\tau - t + \frac{R_e(\tau)}{c}\right)$ под интегралом, используя свойство дельта-функции от сложной функции *:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \int \frac{q\mathbf{v}(\tau)\delta\left(\tau-t+\frac{R_e(\tau)}{c}\right)}{cR_e(\tau)}d\tau = \int \frac{q\mathbf{v}(\tau)\delta(\tau-t')}{cR_e(\tau)\left(\tau-t+\frac{R_e(\tau)}{c}\right)'}d\tau.$$

---

*По определению дельта-функция от сложной функции удовлетворяет уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f(x))df(x) = 1.$$

Перепишем $df(x)$ в подынтегральном выражении:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f(x))\frac{df}{dx}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(f(x))\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}dx = 1,$$

где x_0 – одна и единственная точка, в которой $f(x)=0$.

Сравнивая выражение в левой части равенства с определением дельта-функции $\delta(x)$

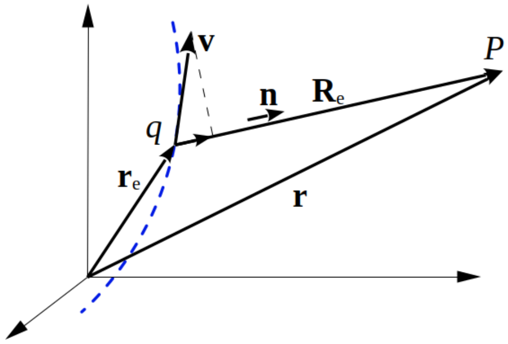
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx = 1,$$

получаем тождество

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{f'(x_0)}.$$

Производная суммы в знаменателе равна

$$\left(\tau - t + \frac{R_e(\tau)}{c}\right)'_\tau = 1 + \frac{1}{c}\dot{R}_e = 1 - \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{r}}_e \cdot \mathbf{n}) = 1 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}),$$



где учтено, что скорость изменения расстояния R_e равна по абсолютной величине и противоположна по знаку проекции скорости частицы на направление $\mathbf{n}$ к точке P ($\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_e}{R_e}$). Окончательно получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{v}(t')}{cR_e(t')(1 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}))}.$$

В результате из всей траектории вырезалась только нужная точка в нужный момент времени.

Выражение для запаздывающего скалярного потенциала получается с помощью тех же рассуждений с заменой $\frac{\mathbf{j}}{c} \to \rho$ и соответственно $\frac{\mathbf{v}}{c} \to 1$:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{R_e(t')(1 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}))}.$$

Таким образом, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\beta}\varphi(\mathbf{r}, t)$.