Гл. 6. Геометрия пространств со скалярным произведением.

§ 6.1. Линейные пространства.

Пусть $\mathbb{K}$ обозначает либо множество $\mathbb{R}$ вещественных чиел, либо множество $\mathbb{C}$ комплексных чиел.

Определение 6.1 (линейного (векторного) пространства)

Непустое множество L с операциями $+\colon L \times L \to L$ (*сложения*) и $\cdot\colon \mathbb{K} \times L \to L$ (*умножения* на число, на скаляр) называется *линейным* (*векторным*) *пространством* над (полем) $\mathbb{K}$, если для всех $x, y, z \in L$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ выполнены аксиомы:

(L1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

(L2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения);

(L3) существует $0 \in L$ такой, что $x + 0 = 0 + x = x$ (существование нуля, нулевого вектора);

(L4) существует $-x \in L$ такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$ (существование противоположного элемента, обратного вектора);

(L5) $(\lambda\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$ (ассоциативность умножения);
(L6) $1\cdot x = x$ (единица умножения);
(L7) $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$ (первая аксиома дистрибутивности);
(L8) $\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$ (вторая аксиома дистрибутивности).

В случае $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ линейное пространство L называется *вещественным линейным* (*векторным*) *пространством*, а в случае $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ линейное пространство L называется *комплексным линейным* (*векторным*) *пространством*. Элементы линейного пространства L называются *векторами*.

Пример 6.2 (линейных пространств)

1) *n-мерное вещественное арифметическое (координатное) векторное пространство:*

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n\}$

n-мерное комплексное арифметическое (координатное) векторное пространство:

$\mathbb{C}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, n\}$

Операции:

для элементов $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)$ этих множеств и числа λ

сложение векторов:

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

умножение вектора на скаляр:

$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

2) Непрерывные (вещественные или комплексные) функции на некотором отрезке $[a, b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа образуют линейное пространство $C[a, b]$.
3) Пространство быстроубывающих функций $S(\mathbb{R}^n)$.

4) Пространство l_2, в котором элементами служат последовательности чисел (вещественных или комплексных)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

с операциями

сложение векторов:

$(x_1, \dots, x_n, \dots) + (y_1, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$

умножение вектора на скаляр:

$\lambda(x_1, \dots, x_n, \dots) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \dots)$

Упражнение 6.3

Проверить аксиомы векторного пространства для пространств из примера 6.2.

Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 6.4 (линейной комбинации векторов)

Пусть $a_1, \ldots, a_k \in L$, $\lambda_1 \ \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Вектор $a = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ называется линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Говорят также, что вектор a линейно выражается через векторы $a_1, \ldots, a_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Определение 6.5 (нетривиальной линейной комбинацией)

Линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ отличен от нуля. В противном случае линейная комбинация называется тривиальной.

Тривиальная линейная комбинация равна нулю.

Определение 6.6 (линейно (не)зависимости конечного набора векторов)

Конечный набор (конечная последовательность, конечное семейство) векторов $a_1, \ldots, a_k$ называется **линейно зависимым**, если существует нулевая (равная нулю) нетривиальная линейная комбинация этих векторов, т. е. если найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$. В противном случае набор векторов $a_1, \ldots, a_k$ называется **линейно независимым**. По определению считаем, что пустой набор векторов линейно независим, а нулевой вектор единственным образом линейно выражается через пустой набор векторов.

Определение 6.7 (линейно (не)зависимости бесконечного семейства векторов)

Бесконечное семейство векторов называется линейно зависимым, если оно содержит конечное линейно зависимое подсемейство, и линейно независимым, если любое его конечное подсемейство линейно независимо.

Определение 6.8 (размерности линейного пространства)

Пусть L — линейное пространство, n — целое неотрицательное число. Говорят, что пространство L имеет (конечную) размерность n, если в пространстве L можно найти n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ вектор пространства L линейно зависимы. Размерность пространства L обозначается символом $\dim L$. Говорят, что пространство L бесконечномерно, если в L можно указать последовательность из произвольного конечного числа линейно независимых векторов.

Упражнение 6.9

Вычислить размерность пространств из примера 6.2.

Определение 6.10 (линейной оболочки)

Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ и $\varnothing \neq A \subset L$. Множество

$$\mathcal{L}(A) = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k : a_1, \ldots, a_k \in A,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K},\ k \in \mathbb{N}\}$$

всевозможных линейных комбинаций векторов множества A называется линейной оболочкой множества A.

Лемма 6.11 (о линейной оболочке)

Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ и $A \subset L$. Тогда для $a, b \in \mathcal{L}(A)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ имеем $\lambda a + \mu b \in \mathcal{L}(A)$.

Определение 6.12 (подпространства)

Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Непустое подмножество $L_1 \subset L$ называется подпространством, если для $a, b \in L_1$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ имеем $\lambda a + \mu b \in L_1$.

§ 6.2. Аксиомы скалярного произведения. Евклидовы и унитарные пространства

Определение 6.13 (скалярного произведения)

Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Функция $(\cdot,\cdot)\colon L\times L\to\mathbb{K}$ называется скалярным произведением в L, если для всех $a,b,c\in L$ и $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ выполнены следующие условия (аксиомы скалярного произведения):
(1) $(a,a)\geq 0$; кроме того $(a,a)=0\Leftrightarrow a=0$ (положительная определенность скалярного произведения);
(2) $(\lambda a+\mu b,c)=\lambda(a,c)+\mu(b,c)$ (линейность по первому аргументу скалярного произведения);
(3) $(b,a)=\overline{(a,b)}$ (эрмитова симметричность скалярного произведения).

Определение 6.14 (евклидово пространства)

Вещественное векторное пространство со скалярным произведением называется евклидовым векторным пространством.

Определение 6.15 (унитарного пространства)

Комплексное векторное пространство со скалярным произведением называется унитарным пространством.

Упражнение 6.16

Показать, что 1) $(0, a) = 0$ для всех $a \in L$;
2) $(a, \lambda b + \mu c) = \overline{\lambda}(a, b) + \overline{\mu}(a, c)$ для всех $a, b, c \in L$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Определение 6.17 (нормы, порождённой скалярным произведением)

Пусть L — векторное пространство со скалярным произведением. **Нормой** вектора $a \in L$, **порождённой** (**согласованной со**) скалярным произведением, называется величина $\|a\| := \sqrt{(a, a)}$.

Лемма 6.18 (о свойствах нормы, порожденной скалярным произведением)

Пусть L — линейное пространство со скалярным произведением. Тогда
1) $\|a\| \geq 0$ *для всех* $a \in L$, *кроме того* $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (*положительная определенность нормы*);
2) $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$ *для всех* $a \in L$ *и* $\lambda \in \mathbb{K}$ (*положительная однородность нормы*);
3) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ *для всех* $a, b \in L$ (*неравенство Минковского, неравенство треугольника*);
4) $|(a, b)| \leq \|a\|\|b\|$ *для всех* $a, b \in L$ (*неравенство Коши — Буняковского*).

Пример 6.19 (скалярных произведений)

1) Формула $(u, v) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k}$ задаёт стандартное скалярное произведение векторов $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ пространства $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\|u\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k|^2\right)^{1/2}$ — норма вектора u,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k + v_k|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2\right)^{1/2}$$

(неравенство Минковского),

$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k}\right| \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |v_k|^2\right)^{1/2}$ (неравенство Коши — Буняковского). Пространство $\mathbb{R}^n$ евклидово. Пространство $\mathbb{C}^n$ унитарное.

2) Формула $(u, v) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k}$ задаёт скалярное произведение векторов $u = (u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ пространства l_2. Тогда $\|u\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|^2\right)^{1/2}$ — норма вектора u,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k + v_k|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2\right)^{1/2}$$

(неравенство Минковского),

$\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \overline{v_k}\right| \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k|^2\right)^{1/2}$ (неравенство Коши — Буняковского).

3) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $L_2(U) := \{f : U \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) : \int\limits_U |f(t)|^2\,dt < \infty\}$ — лебеговское функциональное пространство всех измеримых по Лебегу комплексно-значных (либо вещественно-значных) функций, модуль которых интегрируем с квадратом. Формула $(f,g) := \int\limits_U f(t)\overline{g(t)}\,dt$ задаёт скалярное произведение функций f и g пространства $L_2(U)$. Тогда $\|f\| = \left(\int\limits_U |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$ — норма функции f,

$$\left(\int\limits_U |f(t)+g(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int\limits_U |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} + \left(\int\limits_U |g(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

(неравенство Минковского),

$$\left|\int\limits_U f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \le \left(\int\limits_U |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_U |g(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$ (неравенство Коши — Буняковского).

Упражнение 6.20

Проверить аксиомы скалярного произведения из примеров 6.19.

Упражнение 6.21

Показать, что

1) $|(a, b)| = \|a\|\|b\| \iff a$ и b коллинеарны;

2) $\|a + b\| = \|a\| + \|b\| \iff a$ и b сонаправлены.

Лемма 6.22 (равенство параллелограмма)

Пусть L — линейное пространство со скалярным произведением и норма в нем порождена скалярным произведением. Тогда для любых элементов a и b пространства L выполняется равенство

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Замечание 6.23

Заметим, что в параллелограмме, построенном на векторах a и b, диагоналями являются векторы $a+b$ и $a-b$. Поэтому равенство параллелограмма соответствует следующему известному факту из школьного курса планиметрии: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

Упражнение 6.24

Показать, что если в линейном пространстве L задана норма, т. е. функция $\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами 1)–3) из леммы 6.18, и для любых двух элементов пространства L выполняется равенство параллелограмма с этой нормой, то в пространстве L можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

§ 6.3. Нормированные линейные пространства

Определение 6.25 (нормы)

Нормой в линейном пространстве L называется функция $\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям
1) $\|a\| \geq 0$ для всех $a \in L$, кроме того $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (положительная определенность нормы);
2) $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$ для всех $a \in L$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ (положительная однородность нормы);
3) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ для всех $a, b \in L$ (неравенство Минковского, неравенство треугольника).

Пример 6.26 (норм)

1) В пространстве $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ любая из следующих формул определяет норму

$$\|u\| := \Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2\Big)^{1/2};$$

$$\|u\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |u_k|;$$

$$\|u\|_\infty : \max_{k=1,\dots,n} |u_k|.$$

Покажите, что из указанных норм только для нормы $\|u\|$ существует скалярное произведение, ее порождающее.

2) Формула $\|f\| := \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ задаёт норму в пространстве непрерывных функций $C[a,b]$). Покажите, что эта норма не может быть задана никаким скалярным произведением.

Определение 6.27 (сходящейся последовательности)

Говорят, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек нормированного линейного пространства L **сходится** к точке x, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ сужествует номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Обозначение: $x_n \to x$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Определение 6.28 (предельной точки множества)

Точка x линейного нормированного пространства L называется **предельной точкой** множества $M \subset L$, если существует последовательность точек множества M, отличных от x, сходящаяся к x.

Определение 6.29 (замыкания множества)

Замыканием множества M, являющегося подмножеством линейного нормированного пространства L, называется объединение множества M и множества всех его предельных точек.

Определение 6.30 (замкнутого множества)

Множество в линейном нормированном пространстве называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием. Другими словами, множество M замкнуто, если из того, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек множества M сходится к точке x, следует, что $x \in M$.

Определение 6.31 (плотного множества)

Множество в линейном нормированном пространстве называется плотным, если его замыкание совпадает со всем пространством.

Определение 6.32 (сепарабельного пространства)

Линейное нормированное пространство называется сепарабельным, если в нём существует плотное счётное подмножество.

Замечание 6.33

Напомним, что множество называется счётным, если оно допускает взаимно однозначное отображение на множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел (и в этом смысле не очень обширно). Из курса анализа известно, что множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счётное, а множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел несчётное.

Пример 6.34 (незамкнутого подпространства)

Подпространство пространства $C[0, 2\pi]$, состоящее из всех многочленов, незамкнуто.

Разложим функцию $f(t) = \sin t$ по формуле Тейлора в точке $t_0 = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$f(t) = P_n(t) + \frac{f^{(n+1)}(\theta_n)}{(n+1)!} t^{n+1}$, где

$P_n(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$ — многочлен Тейлора порядка n, а $\theta_n \in [0, 2\pi]$ — некоторое число. Имеем

$$\|f - P_n\| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(t) - P_n(t)| = \sup_{t\in[0,2\pi]} \left| \frac{\sin^{(n+1)}(\theta_n)}{(n+1)!} t^{n+1} \right| \leq \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Получаем, что последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ многочленов Тейлора лежит в подпространстве многочленов, сходится (к функции $\sin t$), но предельная функция не лежит в подпространстве многочленов. Следовательно, рассматриваемое подпространство незамкнуто.

Определение 6.35 (фундаментальной последовательности)

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек нормированного линейного пространства L называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ сужествует номер n_0 такой, что для всех $m, n > n_0$ выполняется неравенство $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Замечание 6.36

Несложно показать, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное не всегда верно.

В приведённом выше примере последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна (т. к. является сходящейся). Но если бы мы рассматривали пространство многочленов, забыв о существовании объемлющего пространства $C[a,b]$, то она не была бы сходящейся: иначе у неё было два предела — синус и некоторый многочлен, что не возможно. Причина этого обстоятельства в том, что мы из «хорошего» пространства $C[a,b]$ выбросили часть функций, так что в оставшейся части образовались «дырки», одной из которых и является синус. Другим примером «дрявого» множества является множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел, рассматриваемое как подмножество множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел. «Недырявые» пространства наиболее удобны для работы. Поэтому для них придумали специальный термин:

Определение 6.37 (полного пространства)

Линейное нормированное пространство называется **полным**, если всякая его фундаментальная последовательность сходится.

Определение 6.38 (гильбертова пространства)

Линейное пространство со скалярным произведением называется **гильбертовым**, если оно полно относительно нормы, порожденной скалярным произведением.

Лемма 6.39 (о непрерывности скалярного произведения)

В линейном пространстве со скалярным произведением скалярное произведение непрерывно по первому аргументу относительно сходимости по норме, порожденной скалярным произведением, т. е. если $x_n \to x$, *то* $(x_n, y) \to (x, y)$ *для любого вектора* y.

§ 6.4. Лебеговские функциональные пространства

Определение 6.40 (пространства Лебега)

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $1 \le p < +\infty$. Лебеговским функциональным пространством $L_p(U)$ называется совокупность всех комплексно-значных (соответственно — вещественно-значных) измеримых по Лебегу функций $f : U \to \mathbb{C}$ (соответственно — $f : U \to \mathbb{R}$) таких, что $|f|^p$ интегрируема на U, т. е. $\int\limits_U |f(t)|^p\,dt < \infty$. Число

$\|f\|_{L_p(U)} := \left(\int\limits_U |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ называется нормой функции f в пространстве $L_p(U)$.

Свойства лебеговских пространств:

Лемма 6.41 (неравенство Гёльдера)

Пусть $p > 1$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L_p(U)$, $g \in L_q(U)$. *Тогда* $fg \in L_1(U)$ *и выполнено неравенство* $\|fg\|_{L_1(U)} \leq \|f\|_{L_p(U)} \|g\|_{L_q(U)}$, *т. е.*

$$\int\limits_U |f(t)g(t)|\, dt \leq \left(\int\limits_U |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_U |g(t)|^q\, dt\right)^{1/q}.$$

Замечание 6.42

При доказательстве воспользоваться неравенством $ab \leq a^p/p + b^q/q$ для $a, b \geq 0$.

Лемма 6.43 (неравенство Минковского)

Пусть $p \geq 1$, $f, g \in L_p(U)$. *Тогда* $f + g \in L_p(U)$ *и выполнено неравенство* $\|f + g\|_{L_p(U)} \leq \|f\|_{L_p(U)} + \|g\|_{L_q(U)}$, *т. е.*

$$\left(\int\limits_U |f(t) + g(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_U |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int\limits_U |g(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Лемма 6.44 ($L_p(U)$ — линейное нормированное пространство)

Для любого $p \geq 1$ пространство $L_p(U)$ с введённой нормой $\|\cdot\|_{L_p(U)}$ является линейным нормированным пространством.

Лемма 6.45 (полнота лебеговских пространств)

Для любого $p \geq 1$ линейное нормированное пространство $L_p(U)$ является полным.

Без доказательства.

Лемма 6.46 (плотность бесконечно дифференцируемых функций в лебеговском пространстве)

Для любого $p \geq 1$ множество бесконечно дифференцируемых функций плотно в $L_p(U)$.

Без доказательства.

Лемма 6.47 (сепарабельность лебеговских пространств)

Для любого $p \geq 1$ пространство $L_p(U)$ сепарабельно.

Без доказательства.

§ 6.5. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта.

Определение 6.48 (ортогональных векторов)

Пусть L — линейное пространство со скалярным произведением. Два вектора $a, b \in L$ называются ортогональными, если $(a, b) = 0$, и обозначается $a \perp b$.

Упражнение 6.49 (теорема Пифагора)

Пусть L — векторное пространство со скалярным произведением, $a, b \in L$. Тогда $a \perp b \iff |a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2$.

Определение 6.50 (ортогонального набора векторов)

Набор векторов $a_1, a_2 \ldots \in L$ называется *ортогональным*, если эти векторы попарно ортогогональны, т. е. $a_i \perp a_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$.

Определение 6.51 (ортонормированного набора векторов)

Ортогональный набор векторов $a_1, a_2 \ldots \in L$ называется *ортонормированным*, если каждый вектор набора имеет единичную дилну, т. е. $|a_j| = 1$, $j = 1, 2, \ldots$.

Ортонормированность набора $a_1, a_2 \ldots$ равносильна условию $(a_i, a_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Теорема 6.52 (об ортогонализации Грама — Шмидта)

Пусть $a_1, a_2, \dots$ *— линейно независимый набор векторов линейного пространства* L *со скалярным произведением. Тогда набор векторов* $c_1, c_2, \dots,$ *построенный по формулам*

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1, & c_1 &= b_1/|b_1|,\\
b_2 &= a_2 - (a_2, c_1)c_1, & c_2 &= b_2/|b_2|,\\
&\dots & &\dots\\
b_n &= a_n - \sum_{i=1}^{n-1}(a_n, c_i)c_i, & c_n &= b_n/|b_n|,\\
&\dots & &\dots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

является ортонормированным и $\mathcal{L}\{a_1, \dots, a_n\} = \mathcal{L}\{c_1, \dots, c_n\}$, $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство в курсе Линейной алгебры и геометрии.

Определение 6.53 (ортогонализации Грама — Шмидта)

Говорят, что набор $c_1, c_2, \ldots$, построенный из набора $a_1, a_2, \ldots$ по формулам (1), получен методом (процессом) ортогонализации Грама — Шмидта.

Определение 6.54 (угла)

Углом между ненулевыми векторами a и b евклидова пространства L называется число $\varphi \in [0, \pi]$ такое, что $\cos\varphi = \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|}$. Если хотя бы один из векторов a или b равен нулевому, то любое число $\varphi \in [0, \pi]$ называется углом между такими векторами.

Упражнение 6.55

Пусть φ — угол между ненулевыми векторами a и b. Показать, что $a \perp b \iff \varphi = \pi/2$.

§ 6.6. Вектор наилучшего приближения и ортогональная проекция

Определение 6.56 (вектора наилучшего приближения)

Если S — подпространство в линейном пространстве L со скалярным произведением, то вектор $x \in S$ называется **вектором наилучшего приближения** для вектора $y \in L$ посредством векторов подпространства S, или **ближайшим** к y вектором подпростарнства S, если для любого вектора $z \in S$ выполнено неравенство $\|y - x\| \leq \|y - z\|$. Другими словами, $x \in S$ называется ближайшим к y вектором, если

$$\|y - x\| = \inf_{z \in S} \|y - z\|.$$

Лемма 6.57 (о существовании и единственности вектора наилучшего приближения)

Пусть H — гильбертово пространство, S — его замкнутое подпространство, и пусть $y \in H$. Тогда в S существует единственный вектор x, ближайший к y.

Замечание 6.58

Утверждение леммы вообще говоря перестаёт быть верным для неполных пространств H и незамкнутых подпространств S.

Определение 6.59 (ортогональной проекции)

Если S — подпространство в линейном пространстве L со скалярным произведением, то вектор $x \in S$ называется **ортогональной проекцией** вектора $y \in L$ на подпространство S, если вектор $y - x$ ортогонален S, т. е. если $y - x \perp z$ для любого $z \in S$.

Лемма 6.60 (о совпадении ортогональной проекции и вектора наилучшего приближения)

Если S — подпространство в линейном пространстве L со скалярным произведением и $y \in L$, то следующие утверждения эквивалетны:
а) вектор $x \in S$ является ортогональной проекцией вектора y на подпространство S;
б) $x \in S$ является ближайшим к y вектором подпространства S.

Определение 6.61 (ортогонального дополнения)

Если S — подмножество в линейном пространстве L со скалярным произведением, то совокупность всех векторов $x \in L$, ортогональных к каждому вектору $y \in S$ обозначают символом $S^{\perp}$ и называют ортогональным дополнением к S.

Определение 6.62 (прямой суммы)

Говорят, что линейное пространство L является прямой суммой своих подпространств S и T, если любой вектор $x \in L$ может быть, и к тому же единственным образом, представлен в виде суммы векторов $y \in S$ и $z \in T$: $x = y + z$. Обозначение $L = S \oplus T$.

Лемма 6.63 (о $H = S \oplus S^{\perp}$)

Пусть H — гильбертово пространство, S — его замкнутое подпространство. Тогда H есть прямая сумма S и $S^{\perp}$.

Теорема 6.64 (о проектировании на конечномерное подпространство)

Пусть S *— конечномерное подпространство в линейном пространстве* L *со скалярным произведением,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ортонормированный базис в* S*. Тогда для любого вектора* $y \in L$ *вектор*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

с коэффициентами, вычисленными по формуле $\lambda_k = (y, x_k)$*, является ортогональной проекцией вектора* y *на подпространство* S*. При этом* $\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y - x\|^2$*.*

§ 6.7. Ряд Фурье, полные ортонормированные системы, равенство Парсеваля, замкнутые ортонормированные системы, гильбертов базис

Определение 6.65 (коэффициентов Фурье и ряда Фурье)

Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots$ — ортонормированная система в линейном пространстве L со скалярным произведением и $x \in L$. Числа

$$\lambda_k = (x, x_k)$$

называются коэффициентами Фурье вектора x относительно ортонормированной системы $x_1, \dots, x_n, \dots$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$$

— рядом Фурье вектора x.

Определение 6.66 (пополнения ортонормированной системы)

Ортонормированная система векторов $x, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ линейного пространства L со скалярным произведением называется **пополнением** последовательности $x_1, \ldots, x_n, \ldots$.

Определение 6.67 (полной ортонормированной системы)

Ортонормированная последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ векторов в линейном пространстве L со скалярным произведением называется **полной**, если её уже нельзя пополнить, т. е. если её ортогональное дополнение состоит из нуля.

Теорема 6.68 (равенство Парсеваля)

Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *— полная ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для любых векторов* x *и* y *из* H *справедливо равенство*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k},$$

где $\lambda_k = (x, x_k)$ *и* $\mu_k = (y, x_k)$ *являются коэффициентами Фурье векторов* x *и* y *соответственно. В частности,*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Ортонормированные системы, для которых выполнено равенство Парсеваля, столь важны, что для них введено специальное название.

Определение 6.69 (замкнутой ортонормированной системы)

Ортонормированная система векторов $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ линейного пространства L со скалярным произведением называется **замкнутой**, если для любого вектора $x \in L$ справедливо равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2,$$

где $\lambda_k = (x, x_k)$ — коэффициенты Фурье вектора x.

Замечание 6.70

В силу теоремы о равенстве Парсеваля полная ортонормированная систма векторов в гильбертовом пространстве является замкнутой.

Соотношение $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (x, x_k)$, доказанное в процессе вывода равенства Парсеваля, имеет очень простой и важный смысл: оно означает, что элемент x представляется своим рядом Фурье. Для формулировки этого уже доказанного утверждения удобно использовать следующее определение.

Определение 6.71 (гильбертова базиса)

Ортонормированная система векторов $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ линейного пространства L со скалярным произведением называется **гильбертовым базисом**, если любой вектор $x \in L$ может быть записан в виде

$$x = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = (x, x_k),$$

Отметим отличие понятия гильбертова базиса от понятия базиса в конечномерном линейном пространстве: сейчас допускаются бесконечные линейные комбинации, не имеющие смысла с чисто алгебраической точки зрения.

Теорема 6.72 (о представлении элемента его рядом Фурье)

Всякая полная ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве является гильбертовым базисом в нём.

Доказано при доказательстве теоремы о равенстве Парсеваля.

Теорема 6.73 (о существовании гильбертова базиса)

Во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве существует гильбертов базис, состоящий из конечного или счётного множества векторов.

Без доказательства.

Теорема 6.74 (Рисса — Фишера)

Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *— произвольная ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве* H*, и пусть числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *таковы, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

сходится. Тогда существует такой вектор $x \in H$*, что* $\lambda_n = (x, x_n)$ *и*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2,$$

т. е. такой x*, для которого* λ_n *являются коэффициентами Фурье, а норма вычисляется в соответствии с равенством Парсеваля.*

Без доказательства.

Теорема 6.75 (критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве)

Пусть H *— сепарабельное гильбертово пространство и* $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *— ортонормированная система векторов в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) система $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *полна;*

2) система $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *замкнута;*

3) для любого вектора $x \in H$ *справедливо разложение*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n,$$

где $\lambda_n = (x, x_n)$ *— коэффициенты Фурье вектора* x *относительно ортонормированной системы* $x_1, \ldots, x_n, \ldots$.

Без доказательства.

§ 6.8. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы в $L_2([-\pi,\pi])$

Как известно, в пространстве $L_2([-\pi,\pi])$, состоящем из функций, модуль которых интегрируем с квадратом, скалярное произведение вводится с помощью равенства

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

При этом последовательность функций

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,\ldots\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \tag{2}$$

ортонормирована в пространстве $L_2([-\pi,\pi])$, а коэффициенты Фурье функции f из $L_2([-\pi,\pi])$ вычисляются по формулам

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Равенство Парсеваля для (2) выглядит так:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = |\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2),$$

что лишь обозначениями отличается от равенства Ляпунова

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

известного вам из темы «Ряды Фурье».

Далее, поскольку для системы выполняется равенство Парсеваля, то она полна, а значит любая функция $f \in L_2([-\pi, \pi])$ разлагается в ряд Фурье по ортонормированной последовательности (2):

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt,$$

что, в совокупности с (3) и (4), лишь расстановкой множителей $1/\sqrt{\pi}$ отличается от формул Эйлера и разложения функции в ряд Фурье, знакомого вам по теме «Ряды Фурье»:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Аналогично можно проверить, что система функций

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int},$$

где n проберает все целые числа, ортонормированна и полна в пространстве $L_2([-\pi, \pi])$ а известные по теме «Ряды Фурье» формулы

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int},$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2,$$

являются частным случаем уже рассмотренных в этой главе.

Отметим особо, что вышеизложенное не даёт оснований сожалеть о времени, потраченном на изучение темы «Ряды Фурье». Из общей теории гильбертовых пространств ничего не вытекает о поточечной сходимости рядов Фурье, связи между гладкостью функции и скоростью сходимости её ряда Фурье, явлении Гиббса и тому подобных вещах, рассмотренных в теме «Ряды Фурье».

§ 6.9. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации системы мономов

Начиная с этого параграфа до конца главы будут рассматриваться не унитарные, а только евклидовы (вещественные) гильбертовы пространства.

По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция на ограниченном промежутке может быть приближена в равномерной норме полиномом. Так как гладкие функции плотны в пространстве Лебега $L_2(a, b)$, то полиномы также плотны в $L_2(a, b)$.

Определение 6.76 (весовой функции)

Пусть (a, b) — интервал в $\mathbb{R}$ (необязательно ограниченный). Функция $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется **весовой функцией** или **весом** в интервале (a, b), если на этом интервале она неотрицательна, интегрируема и её интеграл положителен, т. е. если $h(x) \geq 0$ и выполняются условия

$$0 < \int_a^b h(x)\,dx < +\infty.$$

Определение 6.77 (пространства Лебега с весом)

Множество $L_2^h(a,b)$ состоит из тех функций $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, для которых интеграл

$$\int\limits_a^b f^2(x)h(x)\,dx$$

сходится.

Вещественное линейное пространство $L_2^h(a, b)$ становится евклидовым, если в нём рассмотреть скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)h(x)\,dx \tag{5}$$

(при этом принимается обычное соглашение о том, что функция $f \in L_2^h(a, b)$ считается нулём пространства $L_2^h(a, b)$, если $(f, f) = \int_a^b f^2(x)h(x)\,dx = 0$). Пространство $L_2^h(a, b)$ является полным относительно нормы, порождённой скалярным произведением (5), т. е. $L_2^h(a, b)$ — гильбертово пространство.

Если интервал (a, b) конечен, то, очевидно, каждый моном x^n принадлежит $L_2^h(a, b)$. Если же (a, b) бесконечен, то будем дополнительно считать, что весовая функция убывает на бесконечности настолько быстро, что все мономы x^n лежат в $L_2^h(a, b)$.

Ясно, что на любом интервале (a, b) последовательность мономов $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ образует линейно независимую систему. Применим к ней процесс ортогонализации Грама — Шмидта относительно скалярного произведения, введённого в $L_2^h(a, b)$. В результате получим последовательность многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$, в которой при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ многочлен q_k имеет степень k и

$$\int_a^b q_n(x) q_m(x) h(x)\, dx = \delta_{nm}.$$

Для того, чтобы в последующем нам было удобнее формулировать свойства ортогональных многочленов, давайте домножим, если это необходимо, многочлен q_n на минус единицу так,чтобы у каждого из q_n старший коэффициент a_n стал положительным.

Определение 6.78 (ортогональных многочленов)

Полученные многочлены по-прежнему обозначаем q_n и называем многочленами, ортогональными с весом h на интервале(a, b). При этом интервал (a, b) будем называть интервалом ортогональности.

Последовательность ортогональных многочленов полна на любом конечном промежутке (a, b) при любой весовой функции h. Значит, последовательность ортогональных многочленов может рассматриваться как ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2^h(a, b)$, а значит можно ввести коэффициенты Фурье относительно этого базиса и разлагать функции в ряд по ортогональным многочленам.

Непосредственно из метода Грама — Шмидта следуют следующие два свойства ортогональных многочленов:

Предложение 6.79 (об однозначной определенности ортогональных многочленов)

Последовательность ортогональных многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ (при принятых выше условиях, что старший коэффициент $a_n > 0$) интервалом ортгоналности (a, b) и весом h определена однозначно.

Предложение 6.80 (об ортогональности q_n многочленам меньшей степени)

Если Q_m — произвольный многочлен степени m и $n > m$, то

$$\int\limits_a^b Q_m(x) q_n(x) h(x)\, dx = 0.$$

Последнее свойство следует из того факта, что $Q_m(x) \in \mathcal{L}\{1, x, \ldots, x^m\} = \mathcal{L}\{q_0(x), q_1(x), \ldots, q_m(x)\}$.

Предложение 6.81 (о рекурентном соотношении)

Пусть $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ *— последовательность ортогональных многочленов, причём* a_n *и* b_n *— коэффициенты при старших степенях многочлена* q_n*:*

$$q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots.$$

Тогда

$$xq_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x).$$

Несколько огрубляя ситуацию, можно переформулировать последнеее утверждение: для любой последовательности ортогональных многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ существуют постоянные A_n, B_n и C_n такие, что для любого n и всех $x \in (a, b)$ справедливо равенство

$$q_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) q_n(x) + C_n q_{n-1}(x).$$

Предложение 6.82 (о нулях ортогонального многочлена)

Все нули многочлена q_n действительны, просты и расположены на интервале (a, b).

Предложение 6.83 (о нулях соседних ортогональных многочленов)

При любом n два соседних многочлена q_{n-1} и q_n не могут иметь общих корней.

Предложение 6.84 (о значения в нулях соседних ортогональных многочленов)

Если x_0 есть корень многочлена q_n, то многочлены q_{n-1} и q_{n+1} принимают в точке x_0 значения разных знаков.

Предложение 6.85 (о перемежаемости нулей соседних ортогональных многочленов)

Корни многочлена q_n лежат между корнями многочлена q_{n+1}.

Наиболее важный класс ортогональных многочленов образуют так называемые классические ортогональные многочлены, которые приведены в следующей таблице:

Название	Обозн.	Интервал ортог.	Весовая функция
Многочлены Якóби	$P_n(x;\alpha,\beta)$	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha>-1,\beta>-1$
Многочлены Эрми́та	$H_n(x)$	$(-\infty,+\infty)$	e^{-x^2}
Многочлены Лагéрра	$L_n^\alpha(x)$	$(0,+\infty)$	$x^\alpha e^{-x}, \alpha>-1$
Ультрасферические многочлены или многочлены Гегенбáуэра	$C_n(x;\lambda)$	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda>-1/2$
Многочлены Чебышёва первого рода	$T_n(x)$	$(-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Многочлены Чебышёва второго рода	$U_n(x)$	$(-1,1)$	$\sqrt{1-x^2}$
Многочлены Лежандра	$P_n(x)$	$(-1,1)$	1

Как легко видеть, многочлены Гегенбауэра являются частным случаем многочленов Якоби: $C_n(x;\lambda) = P_n(x;\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})$, а многочлены Чебешёва и Лежандра являются частными случаями как многочленов Якоби, так и многочленов Гегенбауэра, например $P_n(x) = P_n(x;0,0) = C_n(x;\frac{1}{2})$.

Ясно, что если каждый из ортогональных многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_{n+1}, \ldots$ мы умножим на некоторую постоянную, то большинство изложенных свойств останется в силе. Однако ниже мы увидим, что если мы домножаем на специальным образом подобранные постоянные, то формулы принимают наиболее простой вид (например, уже известная нам рекуррентная формула). Выбор этих постоянных множителей называется *стандартизацией ортогональных многочленов.* Таким образом, наше соглашение о том, что каждый из многочленов q_n имеет единичную длину в $L_2^h(a,b)$ и положительный старший коэффициент, является хотя и очень естественным, но лишь одним из возможных способов стандартизации.

Легко указать другие естественные, правда очень редко используемые, способы стандартизации: у каждого q_n старший коэффициент равен единице или для каждого n $q_n(1) = 1$. Как ни странно, наиболее удобные формулы получаются, если многочлены $q_0, q_1, \ldots, q_{n+1}, \ldots$ — стандартизированы с помощью производящей функции в соответствии со следующим определением:

Определение 6.86

Функцию $w(x,t)$ двух переменных называют **производящей функцией** для последовательности многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_{n+1}, \ldots$, если ее разложение в ряд по степеням t при достаточно малых t имеет вид

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x)}{\alpha_n} t^n,$$

где α_n — некоторые постоянные.

Условимся применять названия и обозначения для многочленов из приведённой выше таблицы не зависимо от способа стандартизации, который будет ясен из контекста.
В математике какое-либо перечисление оправдано в том случае, если оно заканчивается словами «и других объектов такого типа нет».

Легко проверить, что классические ортогональные многочлены, приведённые в таблице, задаются с помощью весовых функций h, удовлетворяющих так называемому уравнению Пи́рсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}$$

и предельным условиям

$$\lim_{x\to a+0} h(x)B(x) = \lim_{x\to b-0} h(x)B(x) = 0,$$

где $B(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, $A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$.
С помощью несложных, но довольно громоздких и по этой причине опускаемых нами рассуждений, можно показать, что и наоборот, если весовая функция h удовлетворяет уравнению Пирсона (хоть с какими-нибудь постоянными $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2$) и указанным выше предельным условиям, то она с точностью до линейной замены переменной совпадает с одной из весовых функций приведённых в таблице классических ортогональных многочленов.

Именно в этом смысле в таблице перечислены все классические ортогональные многочлены.
Если мы будем эксплуатировать тот факт, что весовая функция классических ортогональных многочленов не произвольна, а удовлетворяет уравнению Пирсона, то мы сможем получить дополнительные свойства таких многочленов, которые и приведём ниже без доказательства.

Если весовая функция h *удовлетворяет уравнению Пирсона и граничным условиям, то*

1) *ортогональный многочлен* q_n *является решением дифференциального уравнения*

$$B(x)y''(x) + [A(x) + B'(x)]y'(x) - \gamma_n y(x) = 0,$$

где $\gamma_n = n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]$;

2) *имеет место* формула Родри́га

$$q_n(x) = c_n \frac{1}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n}[h(x)B^n(x)], \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

где c_n — некоторые постоянные;

3) *производные* $\frac{d^m}{dx^m} q_n(x)$ *являются классическими ортогональными многочленами с тем же промежутком ортогональности*;

4) *у многочленов* $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ *имеется производящая функция, выражающаяся через элементарные функции.*

§ 6.10. Многочлены Лежандра

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

определённую и бесконечно дифференцируемую в некоторой окрестности оси x плоскости (x,t).

При каждом фиксированном x разложим её в ряд Тейлора по степеням t:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

где $P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n} w(x,t)\Big|_{t=0}$.

Ниже мы займёмся изучением свойств возникающих функций P_n с тем, чтобы по мере их накопления доказать, что при каждом n функция P_n является многочленом степени n, причём эти многочлены ортогональны на интервале $(-1, 1)$ с весовой функцией $h(x) = 1$. В соответствии с определениями, принятыми в предыдущем параграфе, именно многочлены P_n называются многочленами Лежандра. При этом из самого их определения следует, что w является для них производящей функцией, а стандартизованы многочлены Лежандра «с помощью производящей функции».

Предложение 6.87 (рекуррентные соотношения)

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Следствие 6.88

При каждом n функция P_n является многочленом степени n.

Предложение 6.89 (дифференциальное уравнение)

Многочлен Лежандра $y = P_n(x)$ *является частным решением линейного дифференциального уравнения второго порядка*

$$[(1 - x^2)y']' + n(n + 1)y = 0,$$

называемого дифференциальным уравнением Лежандра.

Предложение 6.90 (соотношение ортогональности)

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Предложение 6.91 (формула Родрига)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Без доказательства.

Теорема 6.92

Если функция $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *дважды непрерывно дифференцируема, то для каждого* $x \in [-1, 1]$ *справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

где $c_n = (P_n, P_n)^{-1}(f, P_n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx.$

Без доказательства.