

# IX

С л о ж н о е  
н а п р я ж ё н н о е  
с о с т о я н и е

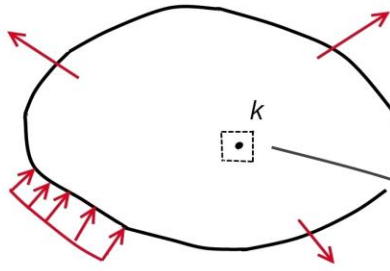
## Полное напряжение в произвольной площадке

Совокупность напряжений для всего множества площадок, проходящих через точку тела, образует **напряжённое состояние** (н.с.) в этой точке.

Естественно, вычислять бесконечное количество полных напряжений для бесконечного количества площадок, проходящих через точку, никто не будет.

Ситуация облегчается тем, что мы живём в трёхмерном мире, поэтому для определения полного напряжения в произвольной площадке, проходящей через точку тела, вполне достаточно знать полные напряжения в любой тройке взаимно перпендикулярных площадок, проходящих через эту же точку (или бесконечно близких к ней).

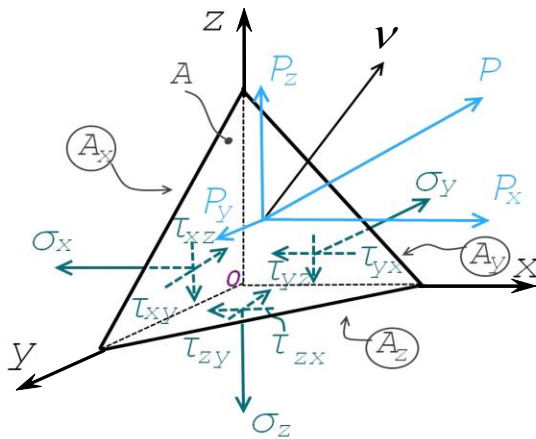
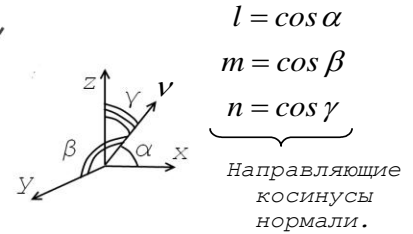
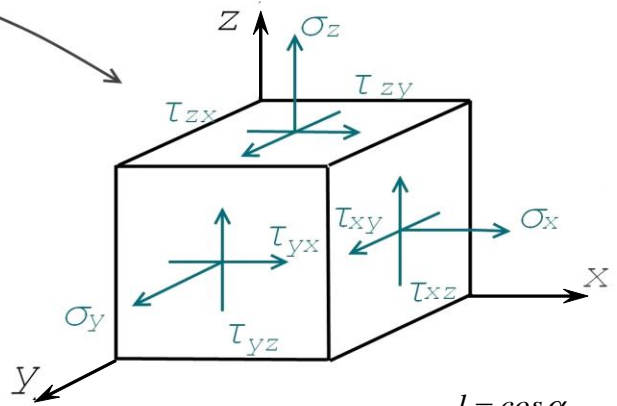
Рис. IX.1.



В окрестности точки К напряжённого тела выделим элементарный параллелепипед, грани которого – те самые три площадки, напряжения на которых нам известны. Действующие на гранях напряжения указаны в положительных направлениях:  $\sigma$  растягивающие,  $\tau$  по направлениям осей. На противоположных гранях напряжения равны.

Рассечём элементарный объём площадкой, полное напряжение в которой хотим узнать, и рассмотрим равновесие отсечённого элемента.

$\nu$  – нормаль к интересующей нас площадке.



$\vec{p} = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z$  – полное напряжение на наклонной площадке.

$A$  – площадь наклонной площадки.

$A_x = A \cdot l$  – площадь площадки,  $\perp O_x$ ;

$A_y = A \cdot m$  – площадь площадки,  $\perp O_y$ ;

$A_z = A \cdot n$  – площадь площадки,  $\perp O_z$ ;

Уравнения равновесия отсечённой части:

$$\Sigma F_x = 0: \quad p_x \cdot \cancel{A} = \sigma_x \cdot \cancel{A} \cdot l + \tau_{yx} \cdot \cancel{A} \cdot m + \tau_{zx} \cdot \cancel{A} \cdot n$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad p_y \cdot \cancel{A} = \tau_{xy} \cdot \cancel{A} \cdot l + \sigma_y \cdot \cancel{A} \cdot m + \tau_{zy} \cdot \cancel{A} \cdot n$$

$$\Sigma F_z = 0: \quad p_z \cdot \cancel{A} = \tau_{xz} \cdot \cancel{A} \cdot l + \tau_{yz} \cdot \cancel{A} \cdot m + \sigma_z \cdot \cancel{A} \cdot n$$

$$p_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n$$

$$p_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n$$

$$p_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n$$

(IX.1)

или в матричной форме:

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{p} & T_{\sigma} & \vec{v} \\ \left\{ \begin{array}{c} p_x \\ p_y \\ p_z \end{array} \right\} & = \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} l \\ m \\ n \end{array} \right\} \\ \text{вектор} & \text{матрица} & \text{вектор} \end{array}$$

$$\vec{p} = T_{\sigma} \cdot \vec{v} \quad (IX.2)$$

$\vec{v}$  – единичный вектор нормали к интересующей нас площадке, проходящей через точку;

$\vec{p}$  – вектор полного напряжения на этой площадке;

$T_{\sigma}$  – **тензор напряжений** – матрица, объединяющая в себе напряжения на трёх взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку; матрица симметрична:  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  по закону парности касательных напряжений.

Достаточно подставить в уравнение (IX.2) координаты нормали к площадке, проходящей через интересующую нас точку тела, чтобы узнать полное напряжение в этой площадке.

Если элементарный объём, мысленно вырезанный в окрестности точки, будет иначе ориентирован в пространстве, то, соответственно, изменятся напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  на его гранях (а, следовательно, и компоненты матрицы  $T_{\sigma}$ ), изменится ориентация в пространстве связанной с ним системы координат  $OXYZ$ , но результат – вектор полного напряжения в площадке с нормалью  $v$

$$\vec{p} = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z$$

останется прежним.

## Главные площадки и главные напряжения

В общем случае вектор полного напряжения  $P$  в площадке, проходящей через точку тела, не совпадает по направлению с нормалью  $V$  к этой площадке и раскладывается на две составляющие  $\sigma$  и  $\tau$  (рис. IX.2а.).

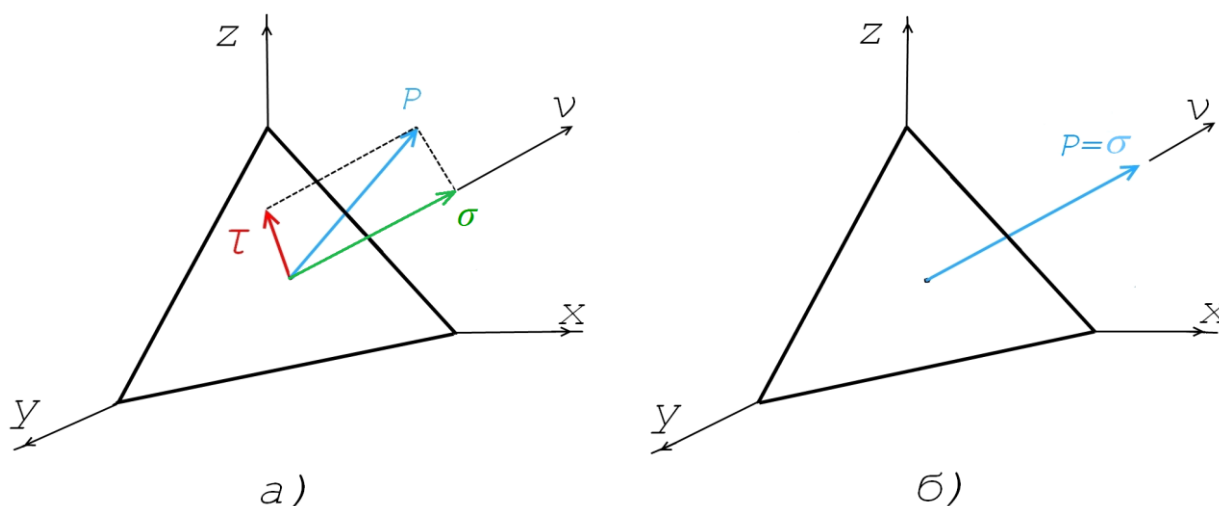
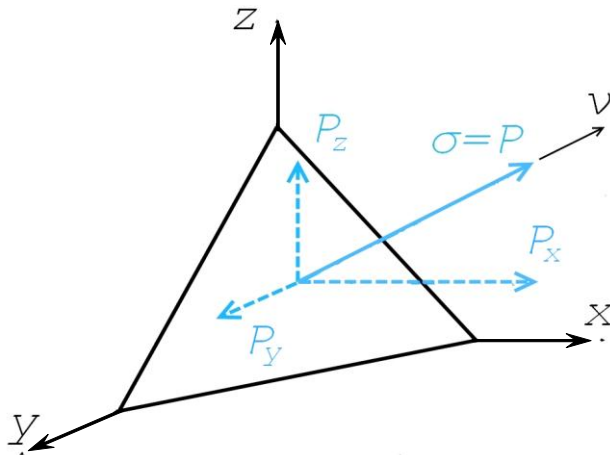


Рис. IX.2.

В частных случаях может совпадать (рис. IX.2б.). Проходящие через точку площадки, в которых происходит подобное совпадение, называются **главными площадками**, а напряжения в этих площадках (только нормальные, касательные отсутствуют по определению!) – **главными напряжениями**.

Определим главные напряжения, рассмотрев, как и прежде, равновесие кусочка элементарного объёма в окрестности точки тела:



$$\begin{aligned} p_x &= \sigma \cdot l \\ p_y &= \sigma \cdot m \\ p_z &= \sigma \cdot n \end{aligned}$$

Подставляем это в формулу (IX.1):

$$\begin{cases} \sigma \cdot l = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n \\ \sigma \cdot m = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n \\ \sigma \cdot n = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n = 0 \end{cases} \quad (IX.3)$$

Тривиального решения  $l = m = n = 0$  система (IX.3) иметь не может, направляющие косинусы все вместе в ноль не обращаются.

Условием наличия у системы (IX.3) нетривиальных решений является равенство нулю её определителя:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (IX.4)$$

Раскрывая определитель, получим кубическое уравнение относительно главных напряжений:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0 \quad (IX.5)$$

где коэффициенты (всегда вещественные!)

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = |T_\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

не зависят от ориентации в пространстве элементарного объёма и связанной с ним системы координат и, поэтому, называются **инвариантами напряжённого состояния**.

Корней у кубического уравнения три. Значит и главных площадок, проходящих через точку тела, тоже только три.

Очевидно, что эти три площадки взаимно перпендикулярны (только тогда их взаимные проекции не будут порождать касательных напряжений), а, значит, являются гранями одного элементарного объёма, выделенного в окрестности точки (рис. IX.3.)

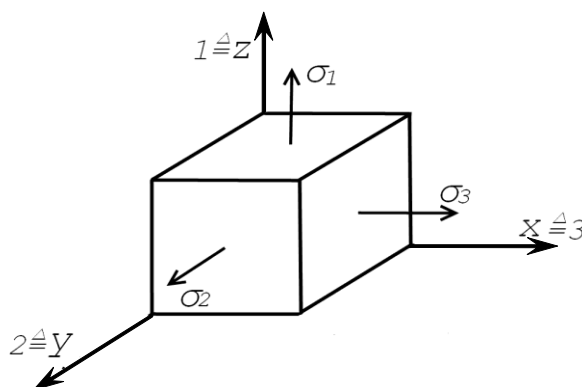


Рис. IX.3.

Оси системы координат  $OXYZ$ , связанной с этим объёмом называются **главными осями**  $O123$ . В общем случае нагружения тела для каждой его точки такая ориентация элементарного объёма – единственная и, соответственно, такая система координат – единственная.

Имеются два частных случая напряжённого состояния, при которых единственность системы трёх главных осей не соблюдается (см. тему «Эллипсоид напряжений»).

Сами главные напряжения выбираются из трёх корней уравнения (IX.5) и обозначаются  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  в зависимости от своей величины с учётом знака:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

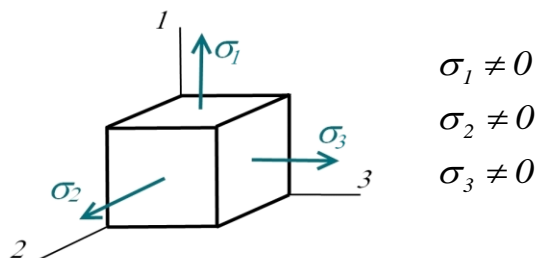
$\sigma_1$  – максимальный корень;  $\sigma_3$  – минимальный;  $\sigma_2$  – оставшийся третий.

Уравнение (IX.5) позволяет найти только *значения* главных напряжений в точке. Ориентацию главных осей в пространстве с его помощью определить нельзя.

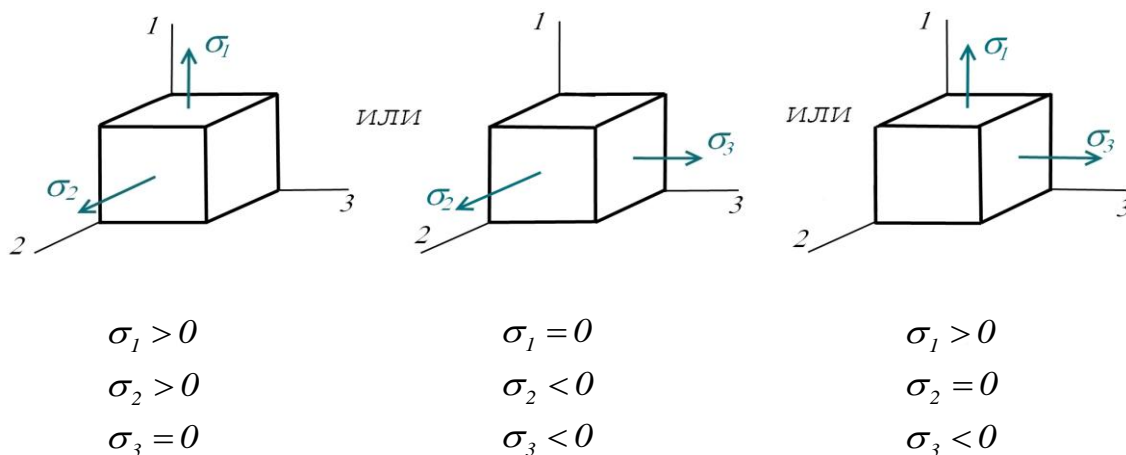


## Типы напряжённых состояний

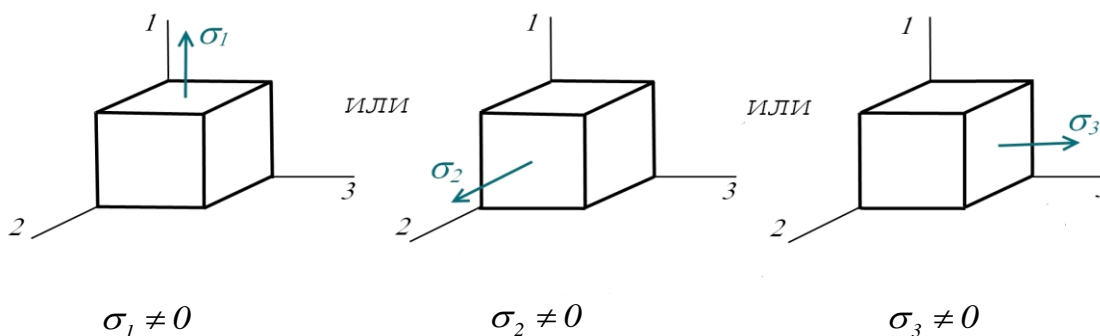
- а) Все три корня кубического уравнения (IX.5) ненулевые – **трёхосное (объёмное)** н.с.



- б) Один корень нулевой – **двухосное (плоское)** н.с. Признак:  $I_3 = 0$ .

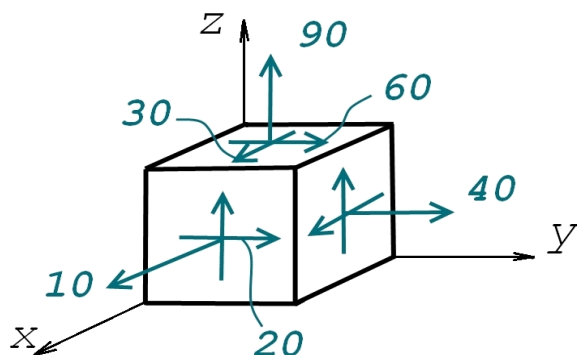


- в) Два нулевых корня – **одноосное** н.с. Признак:  $I_2 = 0$ ,  $I_3 = 0$ .



Одноосное н.с. реализуется, например, в точках растянутого (сжатого) стержня (рис. II.5.) или изогнутого стержня (рис. V.7.); примером двухосного н.с. является чистый сдвиг (рис. III.13.).

Пример IX.1 :



$$\begin{aligned}\sigma_x &= +10 \text{ МПа} \\ \sigma_y &= +40 \text{ МПа} \\ \sigma_z &= +90 \text{ МПа} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 20 \text{ МПа} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = 60 \text{ МПа} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = 30 \text{ МПа}\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = ? \quad \sigma_2 = ? \quad \sigma_3 = ?$$

Решение

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 10 + 40 + 90 = 140$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= 10 \cdot 40 + 40 \cdot 90 + 90 \cdot 10 - 60^2 - 20^2 - 30^2 = 0\end{aligned}$$

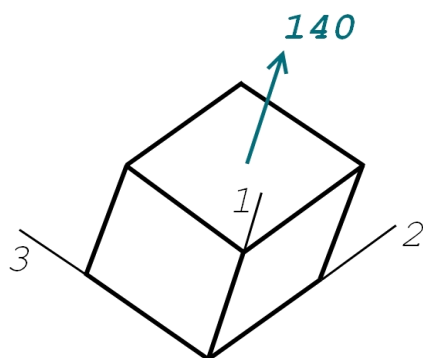
$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 40 & 60 \\ 30 & 60 & 90 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - 140 \cdot \sigma^2 = 0$$

Корни уравнения:  $\sigma' = 0$ ,  $\sigma'' = 0$ ,  $\sigma''' = 140$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



$$\left. \begin{aligned}\sigma_1 &= 140 \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= 0\end{aligned} \right\} \text{Одноосное н.с. } (I_2 = 0, I_3 = 0)$$

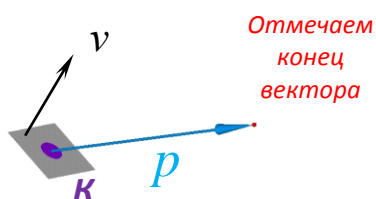
## Эллипсоид напряжений

а)



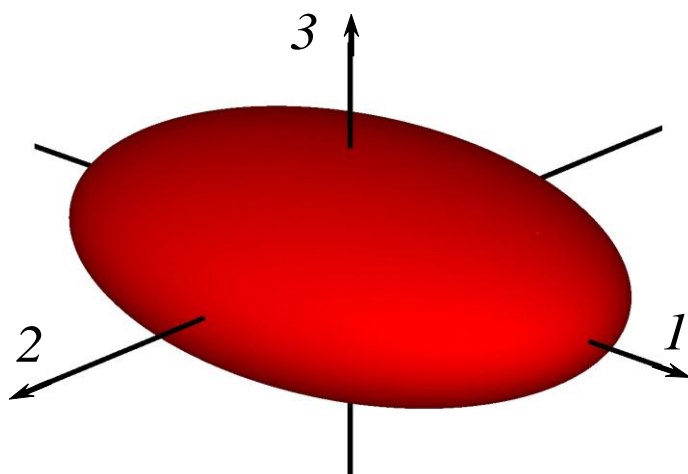
Рассмотрим произвольную точку  $K$  нагруженного тела (рис. IX.4а.).

б)



Матричное уравнение (IX.2) позволяет найти вектор  $p$  полного напряжения на любой бесконечно малой площадке, проходящей через эту точку (рис. IX.4б.).

в)



Совершим невозможное: вычислим векторы  $p$  для всех площадок, проходящих через данную точку (бесконечное количество). Концы векторов составят гладкую поверхность — эллипсоид, ориентированный по главным осям точки: 1, 2 и 3 (рис. IX.4в.).

Рис. IX.4.

Поверхность называется **эллипсоид напряжений**.

Полуосями эллипсоида будут величины соответствующих главных напряжений:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  (рис.IX.5.).

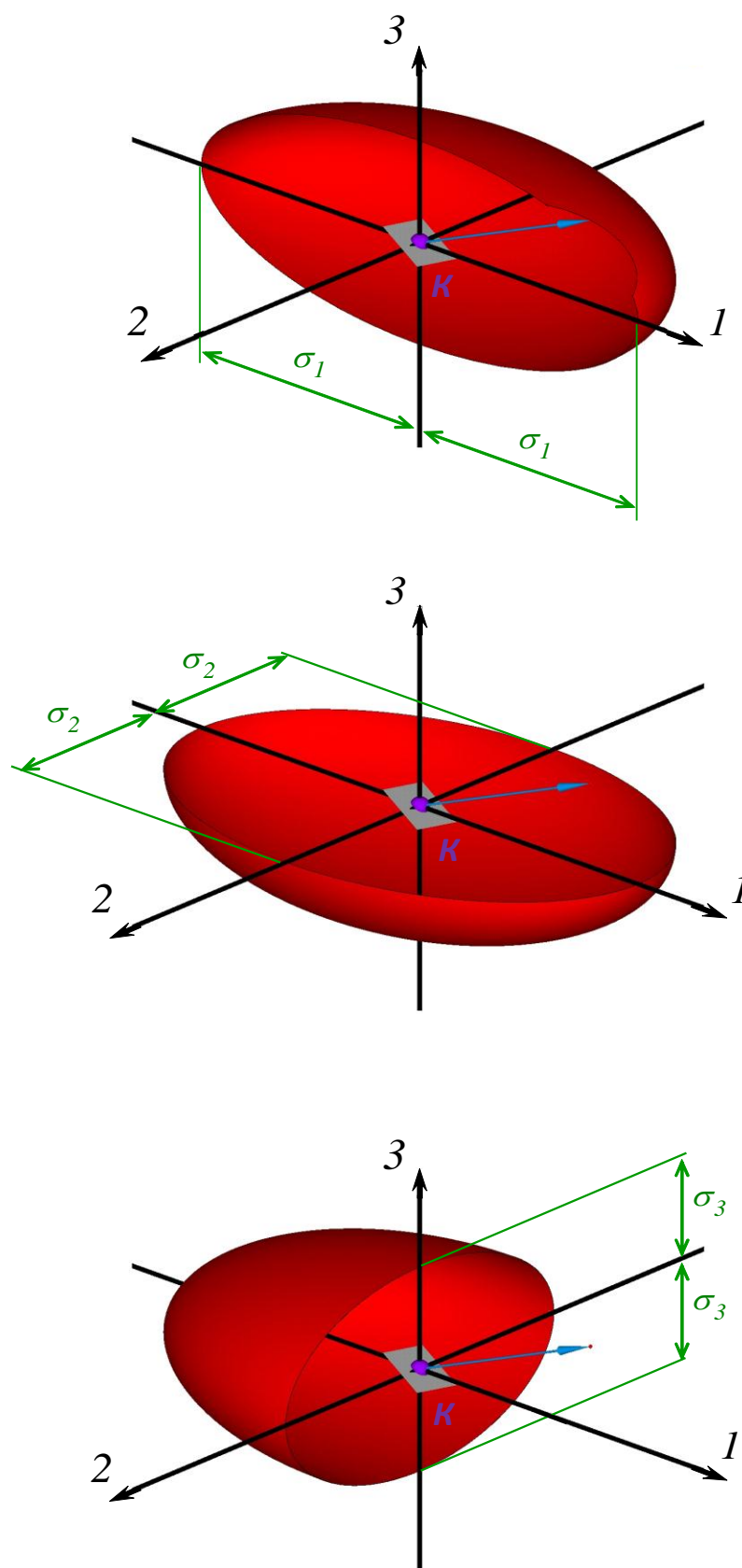


Рис. IX.5. Эллипсоид напряжений в разрезах.

Доказывается это так:

Сориентируем систему координат  $x, y, z$  элементарного объёма, выделенного в окрестности точки  $K$ , (рис. IX.1.) по главным осям (на гранях пропадут касательные напряжения), потом так же рассечём произвольной площадкой, заданной нормалью  $\nu$ :

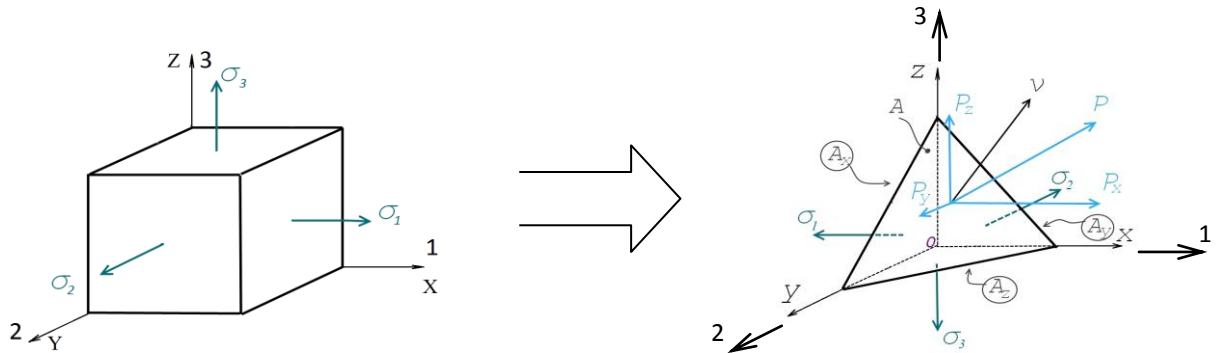


Рис. IX.6.

Система уравнений равновесия отсечённого кусочка (IX.1) примет вид:

$$p_x = \sigma_x \cdot l + \cancel{\tau_{yx}} \cdot m + \cancel{\tau_{zx}} \cdot n \Rightarrow p_x = \sigma_x \cdot l \Rightarrow l = \frac{p_x}{\sigma_x} = \frac{p_x}{\sigma_1}$$

$$p_y = \cancel{\tau_{xy}} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \cancel{\tau_{zy}} \cdot n \Rightarrow p_y = \sigma_y \cdot m \Rightarrow m = \frac{p_y}{\sigma_y} = \frac{p_y}{\sigma_2}$$

$$p_z = \cancel{\tau_{xz}} \cdot l + \cancel{\tau_{yz}} \cdot m + \sigma_z \cdot n \Rightarrow p_z = \sigma_z \cdot n \Rightarrow n = \frac{p_z}{\sigma_z} = \frac{p_z}{\sigma_3}$$

Сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице (векторная алгебра):

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$\left( \frac{p_x}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{p_y}{\sigma_2} \right)^2 + \left( \frac{p_z}{\sigma_3} \right)^2 = 1 \quad (IX.6)$$

$p_x, p_y, p_z$  – проекции вектора полного напряжения  $p$  на главные оси 1, 2 и 3 соответственно; (IX.6) – уравнение эллипсоида.

Геометрическое место концов вектора полного напряжения остаётся эллипсоидом вне зависимости от знаков главных напряжений. Просто при повороте *площадки*, проходящей через *точку*, конец *вектора*  $p$  перемещается по *поверхности эллипсоида* в разных направлениях:

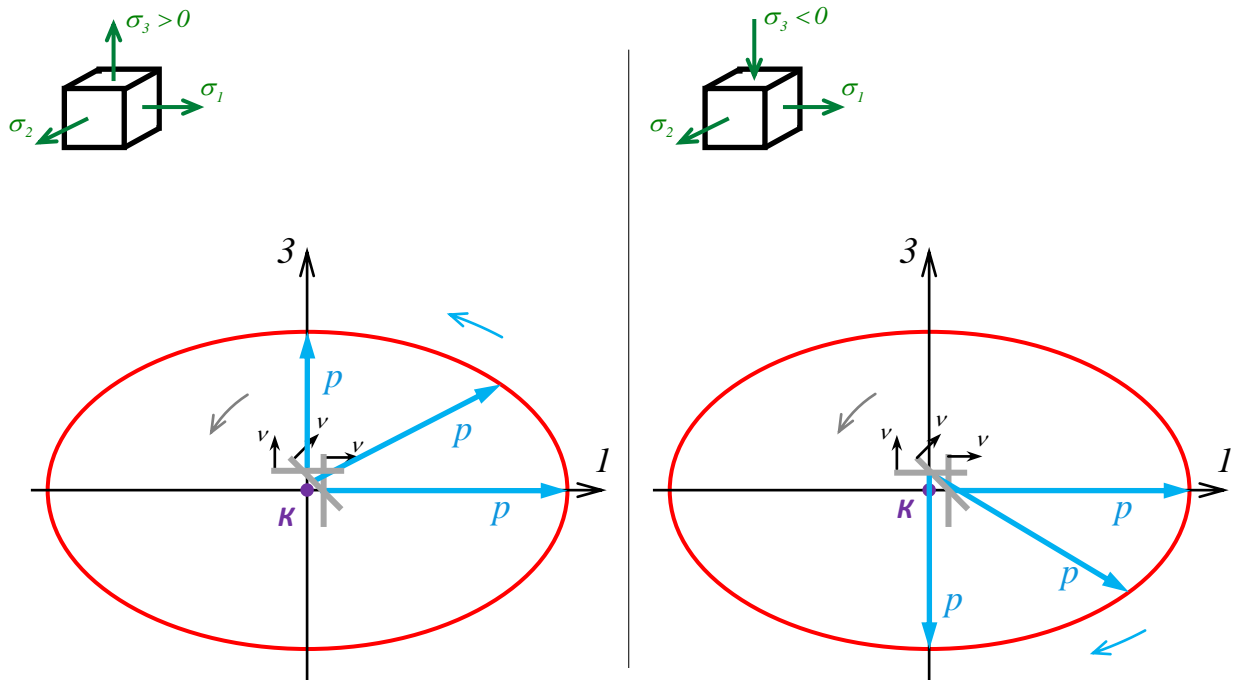


Рис. IX.7.

Эллипсоид напряжений позволяет сделать несколько важных выводов относительно свойств напряжённого состояния точки нагруженного тела.

Само существование фигуры конечных размеров позволяет оценить интервал изменений напряжений. *Вывод первый:*  $\sigma_1$  является наибольшим из всех возможных напряжений в точке, а  $\sigma_3$  - наименьшим из всех возможных полных напряжений.

Если два главных напряжения равны друг другу, эллипсоид принимает форму тела вращения относительно оставшейся третьей главной оси. Теряется свойство единственности трёх главных площадок: любая площадка, параллельная оси вращения будет главной, а любая ось, перпендикулярная ей – главной осью в рассматриваемой точке. То есть, поворот элементарного объёма не меняет ничего. Например, при  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$ :

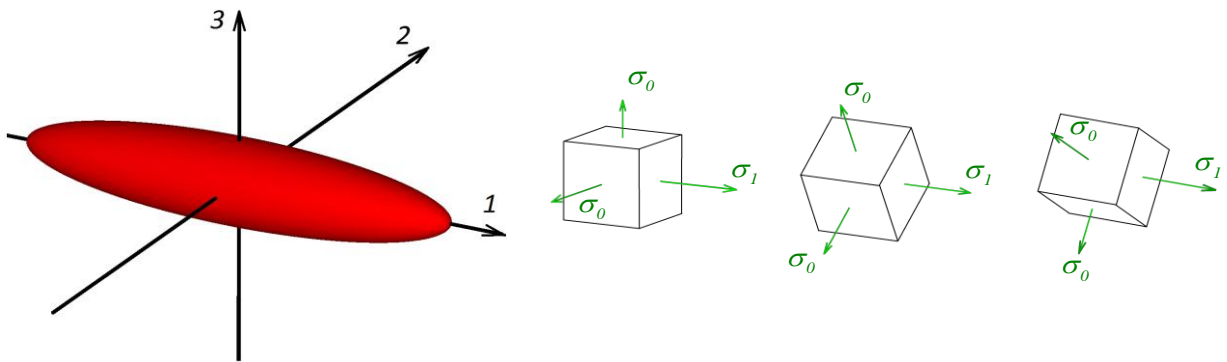


Рис. IX.8.

Итак, *второй вывод*: в случае равенства двух главных напряжений любая площадка, параллельная оси третьего напряжения является главной.

Если равны друг другу все три главных напряжения (всестороннее растяжение или всестороннее сжатие), эллипсоид становится сферой. Вектор полного напряжения в любой площадке, проходящей через точку, будет перпендикулярен ей и равен одному и тому же числу. Отсюда *третий вывод*: в случае равенства трёх главных напряжений, любая площадка, проходящая через рассматриваемую точку, является главной.

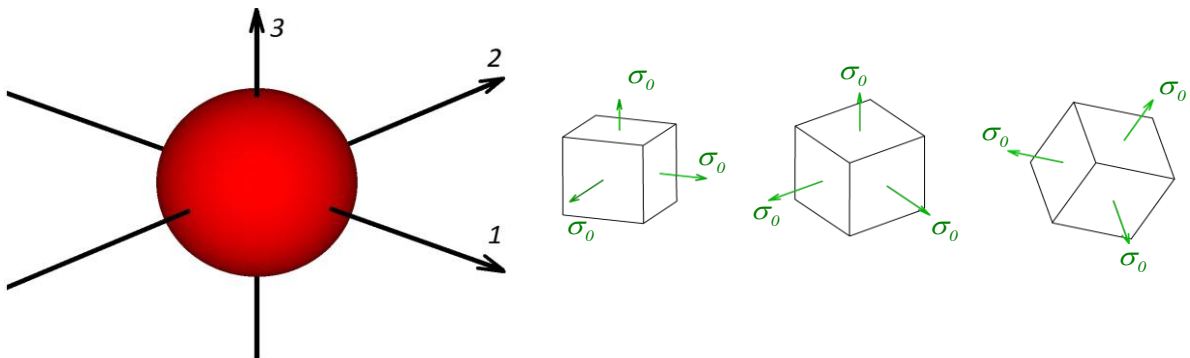
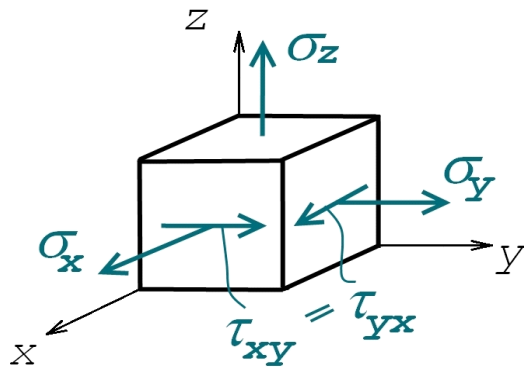


Рис. IX.9.

Определение главных напряжений в случае,  
когда одно из них известно



Одна главная площадка (например, площадка Z) известна:

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = 0\end{aligned}\quad (*)$$

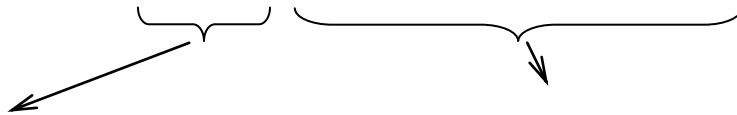
Подставляем (\*) в условие (IX.4):

Рис. IX.10.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

⇓

$$(\sigma_z - \sigma) \cdot [(\sigma_x - \sigma) \cdot (\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2] = 0$$



$$(\sigma_z - \sigma) = 0$$

$$\sigma' = \sigma_z$$

или

$$(\sigma_x - \sigma) \cdot (\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\underbrace{1 \cdot \sigma^2}_a - \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sigma}_b + \underbrace{(\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}_c = 0$$

$$\sigma^{'' , '''} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2}$$

$$\sigma^{'' , '''} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(IX.7)



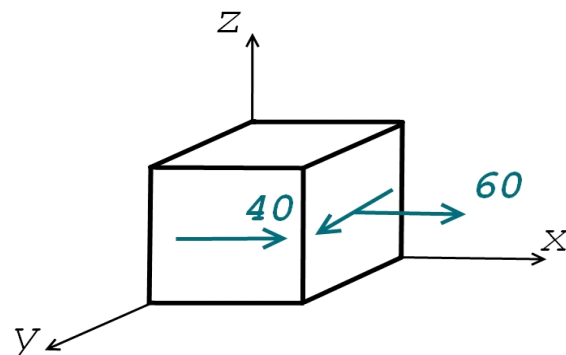
Итак: если одна главная площадка (то есть, площадка, на которой нет касательных напряжений, а есть только нормальные или вообще никаких) известна, решать громоздкое кубическое уравнение (IX.5) не нужно, ибо один из его корней ( $\sigma'$ ) уже известен (это нормальное напряжение на известной главной площадке). Два других корня ( $\sigma''$  и  $\sigma'''$ ) находятся по относительно простой формуле (IX.7).

Для того чтобы и на остальных гранях элементарного объёма, выделенного вокруг рассматриваемой точки, исчезли касательные напряжения, его нужно «повернуть» вокруг известной главной оси (для *рис. IX.10* это ось  $z$ ) на угол  $\alpha$ :

$$\boxed{tg 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \quad (IX.8)$$

Формула (IX.8) будет выведена позже с использованием кругов Мора.

Пример IX.2 :



$$\sigma_1 = ? , \sigma_2 = ? , \sigma_3 = ? , \alpha = ?$$

Решение

Корни кубического уравнения:

$$\sigma' = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma^{'' , '''} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{60 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 0}{2}\right)^2 + 40^2} = \\ &= 30 \pm 50 = \begin{cases} 80 \text{ МПа} \\ -20 \text{ МПа} \end{cases} \end{aligned}$$

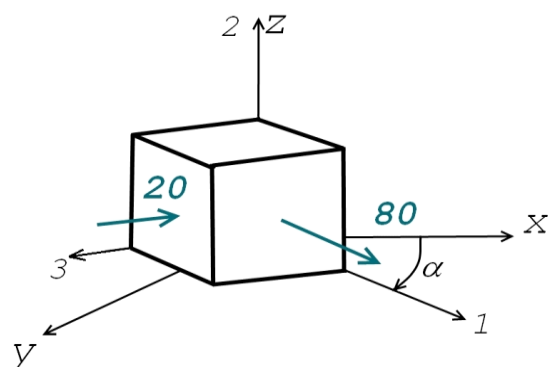
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\sigma_1 = 80 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -20 \text{ МПа}.$$

Угол поворота осей X и y до совпадения с главными осями:



$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 40}{60 - 0} = \frac{4}{3}$$

⇓

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 26^\circ 34'$$

## Круговая диаграмма Мора

Напряжённое состояние задано главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  (рис. IX.11.):

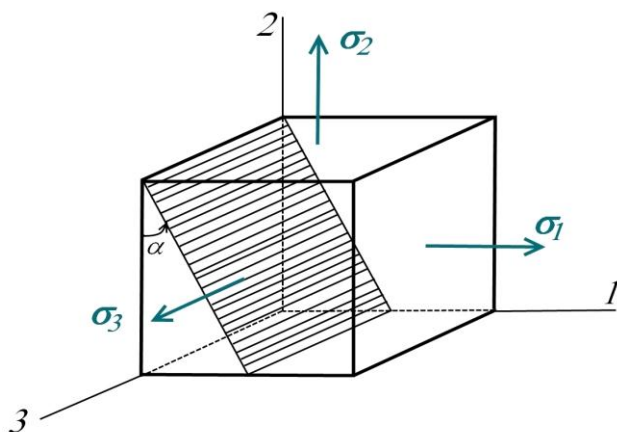
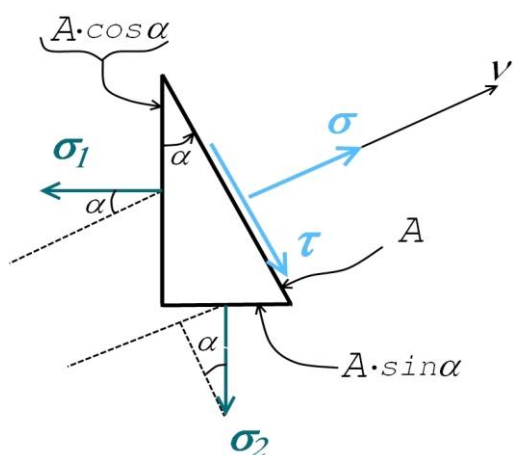


Рис. IX.11.

Рассмотрим семейство площадок, параллельных главному напряжению  $\sigma_3$ .

Найдём нормальное  $\sigma_v$  и касательное  $\tau_v$  напряжения на этих площадках:

$$\Sigma F_v = 0 = \sigma \cdot A - \sigma_1 \cdot (A \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha - \sigma_2 \cdot (A \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha$$



$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha = \\ &= \left| \begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{aligned} \right| = \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$\Sigma F_{\perp v} = 0 = \tau \cdot A + \sigma_2 \cdot (A \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha - \sigma_1 \cdot (A \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

Итак:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \end{cases} \quad (IX.9)$$

Уравнения (IX.9) задают окружность в параметрической форме ( $0 \leq 2\alpha \leq 2\pi$  – параметр) в координатах ( $\sigma$ ,  $\tau$ ):

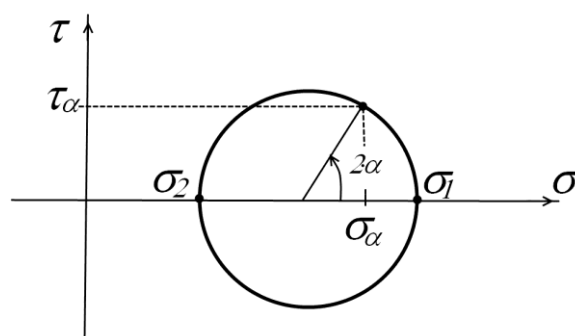


Рис. IX.12.

$\tau_\alpha$  и  $\sigma_\alpha$  – напряжения на площадке, изображённой на рис. IX.11.

Рассмотрев семейство площадок, параллельных главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , получим два других круга:

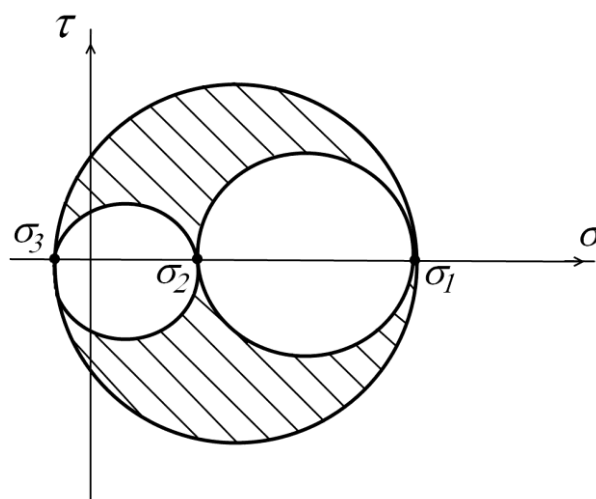


Рис. IX.13.

Знак касательного напряжения нам в расчётах на прочность безразличен, поэтому изображают обычно, верхнюю половину диаграммы:

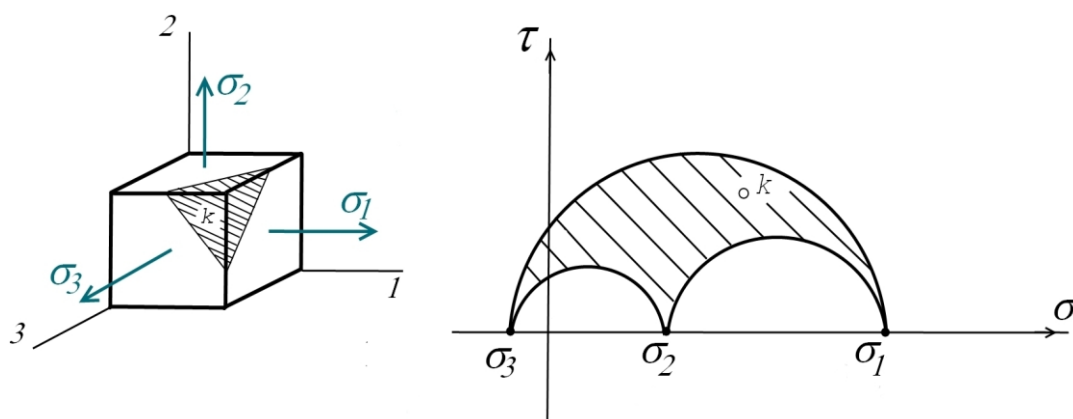


Рис. IX.14.

Строится диаграмма Мора просто – на оси  $\sigma$  отмечаются три точки, соответствующие главным напряжениям  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , на эти точки опираются три полуокружности (рис. IX.14.). А нужна эта диаграмма для графического определения напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  в наклонных площадках вместо вычислений по формулам (IX.9).

Точки, соответствующие площадкам, параллельным трём главным напряжениям, располагаются на трёх соответствующих окружностях (рис. IX.12.).

Точки, соответствующие произвольно ориентированным площадкам, точно найдены по диаграмме Мора не могут быть. Известно, однако (примем это без доказательства), что все они находятся в пределах заштрихованной области между кругами (рис. IX.13.).

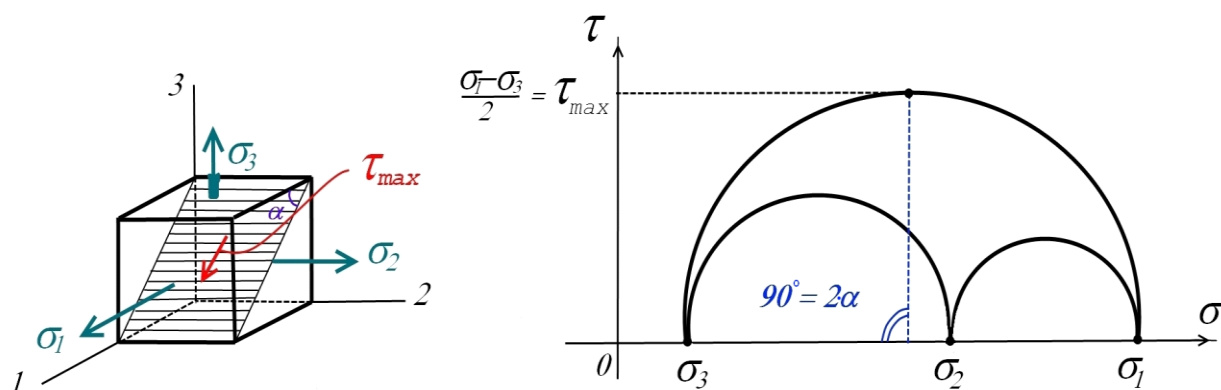
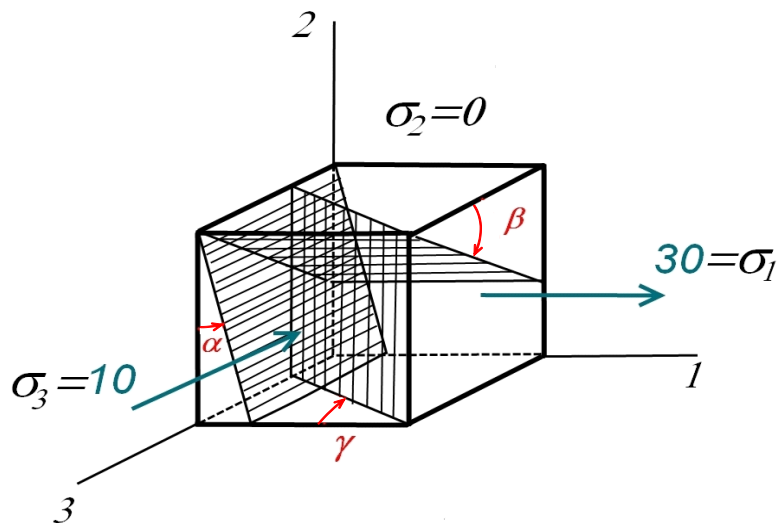


Рис. IX.15.

Из круговой диаграммы Мора видно, что наибольшие касательные напряжения ( $\tau_{max}$ ) возникают в площадках, равнонаклонённых к главным осям 1 и 3 (рис. IX.15.).

Пример IX.3 :



$$\sigma_1 = 30 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -10 \text{ МПа}$$

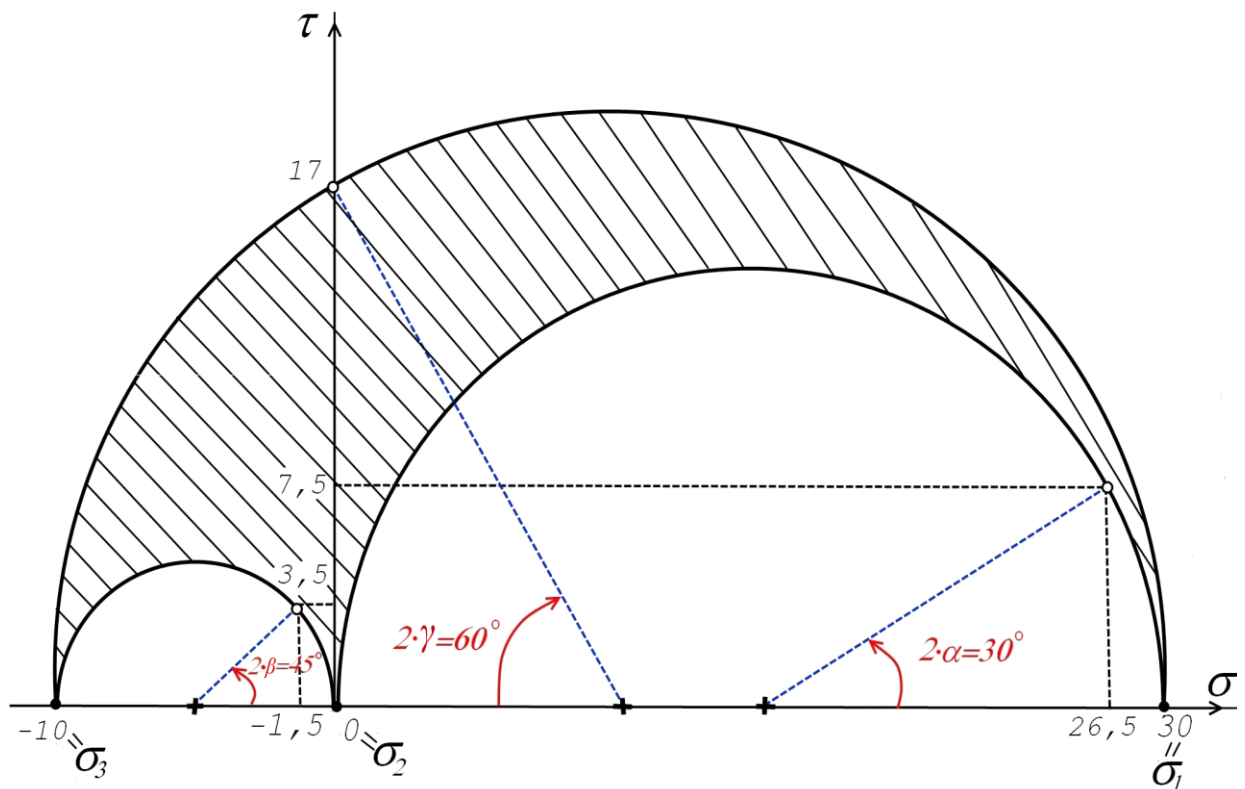
$$\alpha = 15^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$\gamma = 22,5^\circ$$

$$\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\beta, \sigma_\gamma, \tau_\gamma = ?$$

Решение



$$\sigma_\alpha = 26,5 \text{ МПа}$$

$$\sigma_\beta = 0$$

$$\sigma_\gamma = -1,5 \text{ МПа}$$

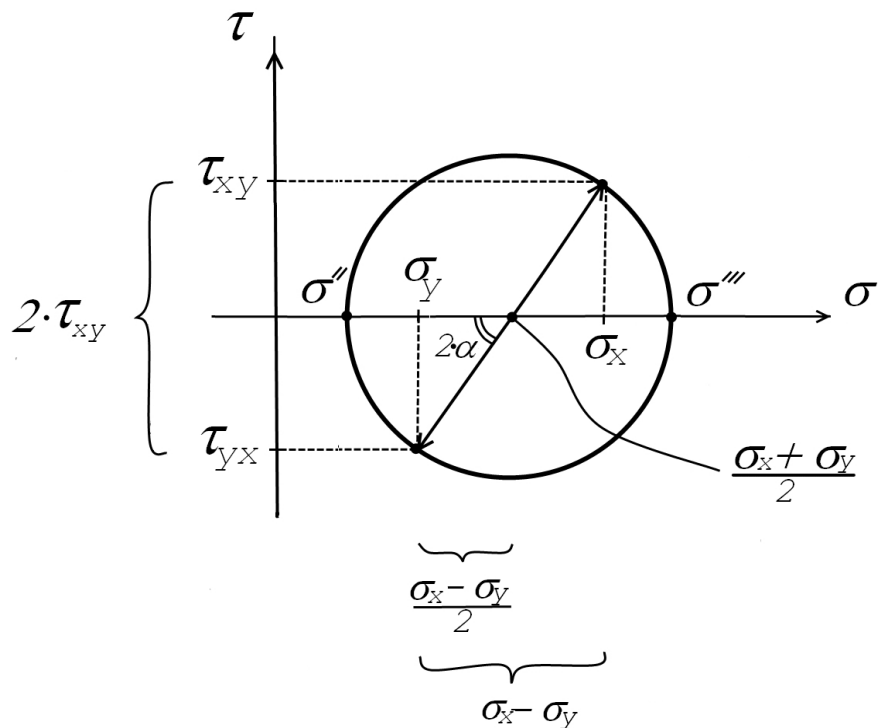
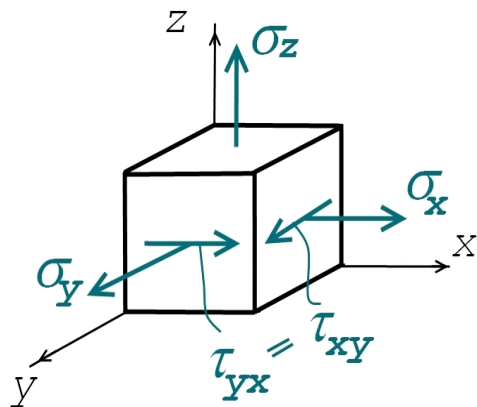
$$\tau_\alpha = 7,5 \text{ МПа}$$

$$\tau_\beta = 17 \text{ МПа}$$

$$\tau_\gamma = 3,5 \text{ МПа}$$

Примечание:

Из круговой диаграммы Мора, пользуясь геометрическими соображениями, легко выводятся формулы (IX.7) и (IX.8) :



$$\sigma' = \sigma_z$$

$$\sigma''', '' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Видео вывода: библиотека задач, пример Р-08.

## Шаровой тензор и девиатор

Экспериментально установлено (опыты Бриджмента, Давыденка, Лихарева и т.д.), что всестороннее равномерное растяжение (рис. IX.16а.) и всестороннее равномерное сжатие (рис. IX.16б.) не вызывают разрушения изотропного материала, сколь бы ни были велики напряжения.

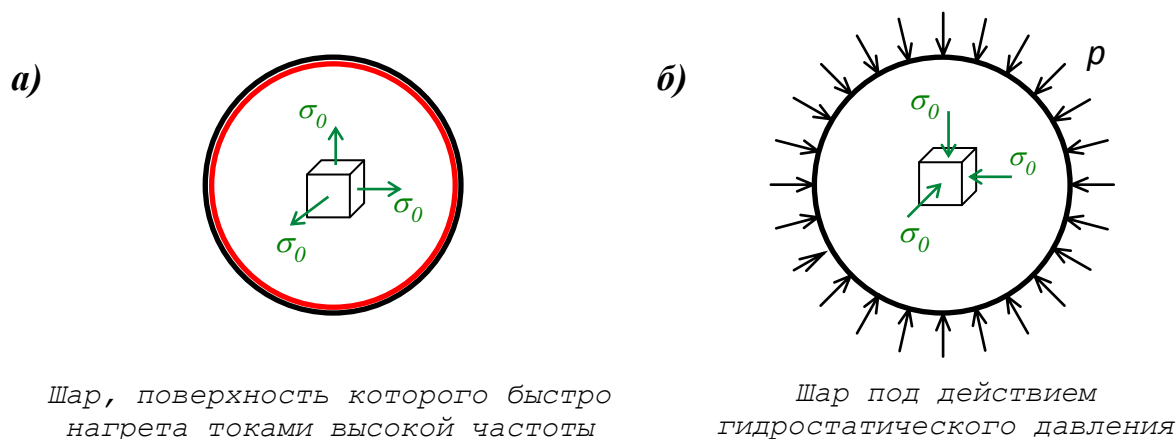


Рис. IX.16.

Хрупкий материал при этом не трескается, а пластичный не течёт. Но! Происходит упругое изменение объёма.

С другой стороны: скручивание стержня приводит к разрушению материала. Но! Объём его не изменяется:

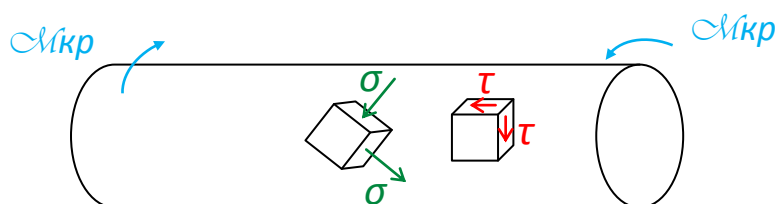
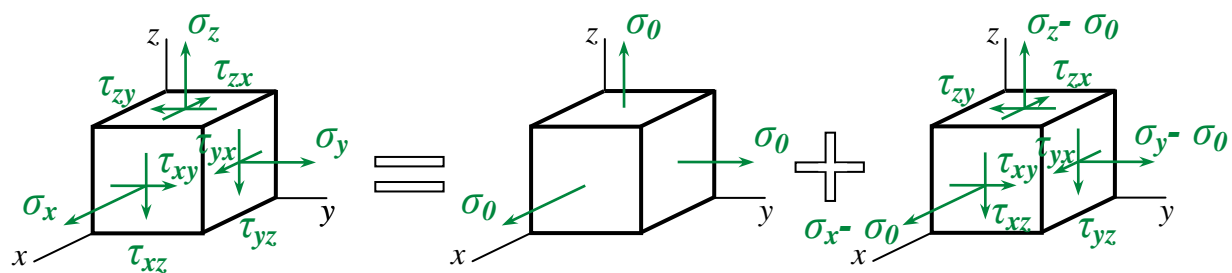


Рис. IX.17.

Очевидно, тензор напряжений  $T_\sigma$  (вектор многомерного пространства) в точке тела можно разложить на две составляющие: **шаровой тензор**  $T_{\sigma_0}$ , компоненты которого вызывают только упругое изменение объёма материала в окрестности точки и **девиатор**  $D_\sigma$ , компоненты которого искажают окрестность точки, не меняя объём этой окрестности:





$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}}_{T_\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}}_{T_{\sigma_0}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_0) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_0) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_0) \end{bmatrix}}_{D_\sigma}$$

$$T_\sigma = T_{\sigma_0} + D_\sigma \quad (IX.10)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

## Деформированное состояние в точке тела

Совокупность линейных деформаций  $\varepsilon$  по всем направлениям, проходящим через точку тела и угловых деформаций  $\gamma$  во всех площадках, проходящих через неё, образуют **деформированное состояние** в этой точке.

Так же, как и в случае рассмотрения напряжённого состояния, состояние деформированное находить вычислением бесконечного количества величин никто не будет. Достаточно знать линейные деформации по любым трём взаимно перпендикулярным направлениям и угловые деформации в трёх площадках, перпендикулярных этим направлениям, для того, чтобы вычислить всё остальное:

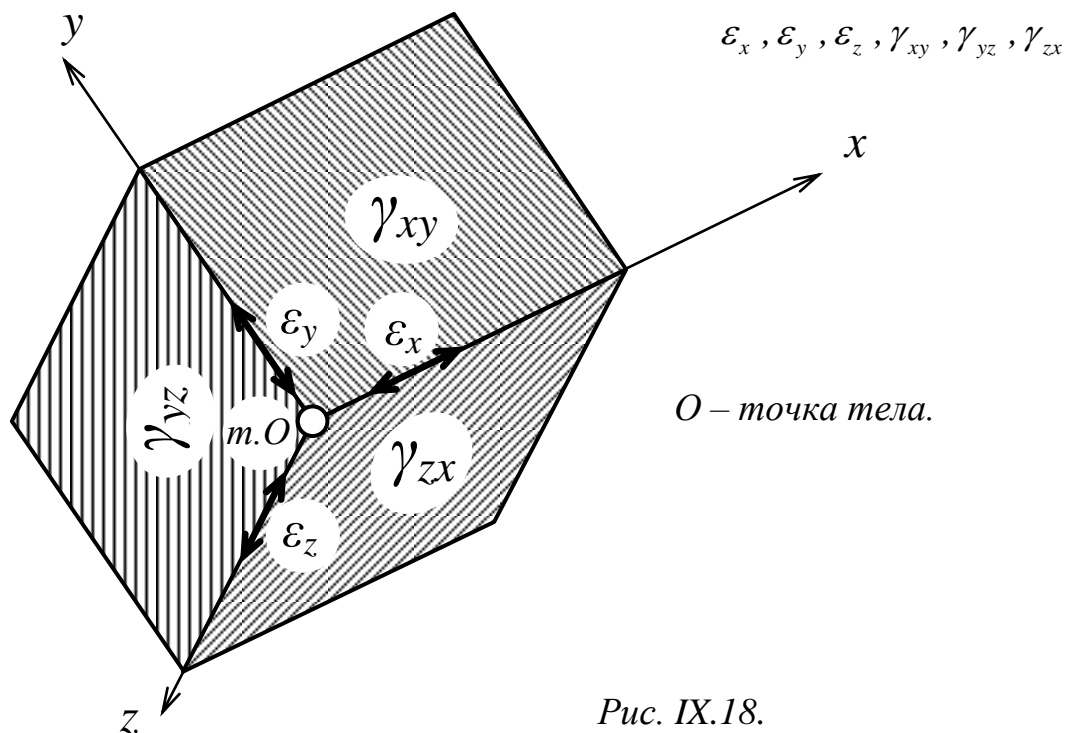
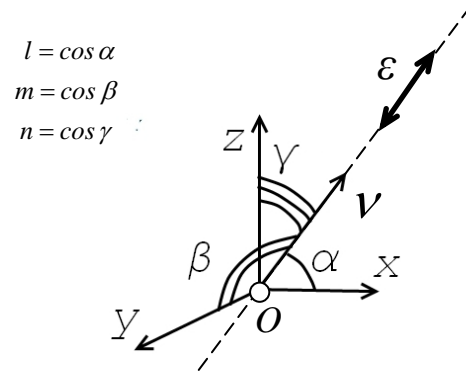


Рис. IX.18.

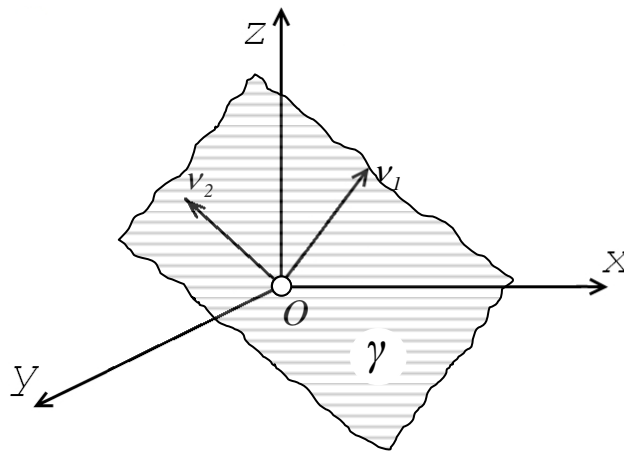
Примем без доказательства:

- 1) Линейная деформация  $\varepsilon$  в направлении, заданном вектором  $\vec{v} = (l, m, n)$ , определяется по формуле:



$$\varepsilon = \vec{v}^T \cdot T_{\varepsilon} \cdot \vec{v}$$

- 2) Угловая деформация  $\gamma$  в плоскости, заданной точкой  $O$  тела и векторами  $\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  и  $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$



$$\gamma = \vec{v}_1^T \cdot T_{\varepsilon} \cdot \vec{v}_2$$

где

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} - \text{тензор деформаций в точке } O.$$

Формулы анализа деформированного состояния (д.с.) в точке тела полностью повторяют формулы анализа напряжённого состояния (н.с.), только места  $\sigma_i$  в них занимают  $\varepsilon_i$ , а места  $\tau_{ij}$  занимают  $\frac{1}{2} \cdot \gamma_{ij}$ .

Тензор деформаций  $T_\varepsilon$ , так же, как и тензор напряжений раскладывается на шаровую  $T_{\varepsilon_0}$  и девиаторную  $D_\varepsilon$  составляющие:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{T_\varepsilon} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}}_{T_{\varepsilon_0}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_0) & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & (\varepsilon_y - \varepsilon_0) & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} & (\varepsilon_z - \varepsilon_0) \end{bmatrix}}_{D_\varepsilon}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$$

## Главные деформации

По аналогии с напряжённым состоянием: из всего бесконечного количества площадок, проходящих через рассматриваемую точку тела, существуют три взаимно перпендикулярные, в которых угловые деформации  $\gamma$  отсутствуют.

Направления, перпендикулярные этим площадкам, называются **главными осями деформированного состояния**, а линейные деформации вдоль этих осей – **главными деформациями**.

Для вычисления главных деформаций необходимо решить кубическое уравнение:

$$\varepsilon^3 - I_{1\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 + I_{2\varepsilon} \cdot \varepsilon - I_{3\varepsilon} = 0$$

где коэффициенты (всегда вещественные!)

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I_{2\varepsilon} = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x - \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx}\right)^2$$

$$I_{3\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

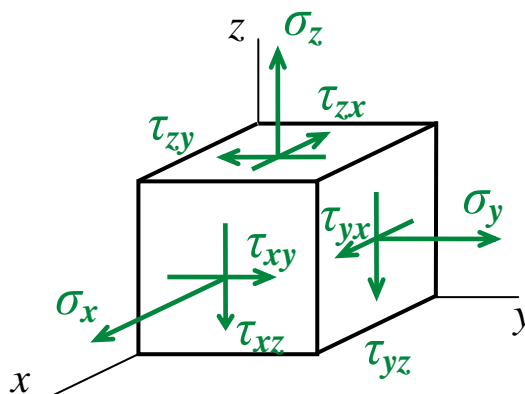
$I_{1\varepsilon}, I_{2\varepsilon}, I_{3\varepsilon}$  - **инварианты деформированного состояния**.

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$

Для изотропных материалов главные оси напряжённого состояния и главные оси деформированного состояния совпадают.

## Обобщённый закон Гука для изотропного материала

В общем случае напряжённого состояния



в пределах малых деформаций

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_y - \nu \cdot (\sigma_z + \sigma_x) \right]$$

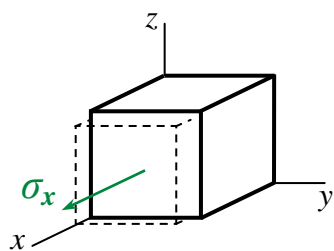
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

(IX.11)

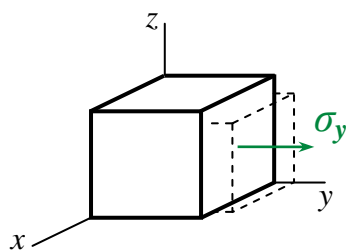
$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

здесь  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

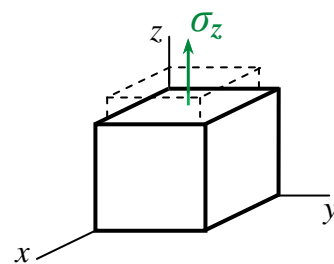
Формулы (IX.11) подтверждены экспериментально. А как они выводятся? Рассмотрим вывод первого уравнения (используем принцип суперпозиции):



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$



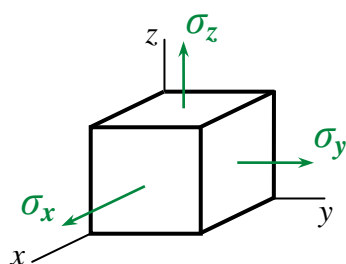
$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$



$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$



Рис. IX.19.



При совместном действии трёх напряжений их вклады суммируются:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z]$$

Для  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  формулы выводятся так же.

Экспериментальные данные показывают, что линейные деформации вызываются только нормальными, а деформации сдвига - только касательными напряжениями. Это отражено в формулах (IX.11): первые три уравнения никак не пересекаются с последними тремя.

## Объёмная деформация

Как было доказано ранее, объёмная деформация  $e$  в точке тела – это относительное изменение объёма параллелепипеда бесконечно малых размеров, мысленно вырезанного в её окрестности (I.5):

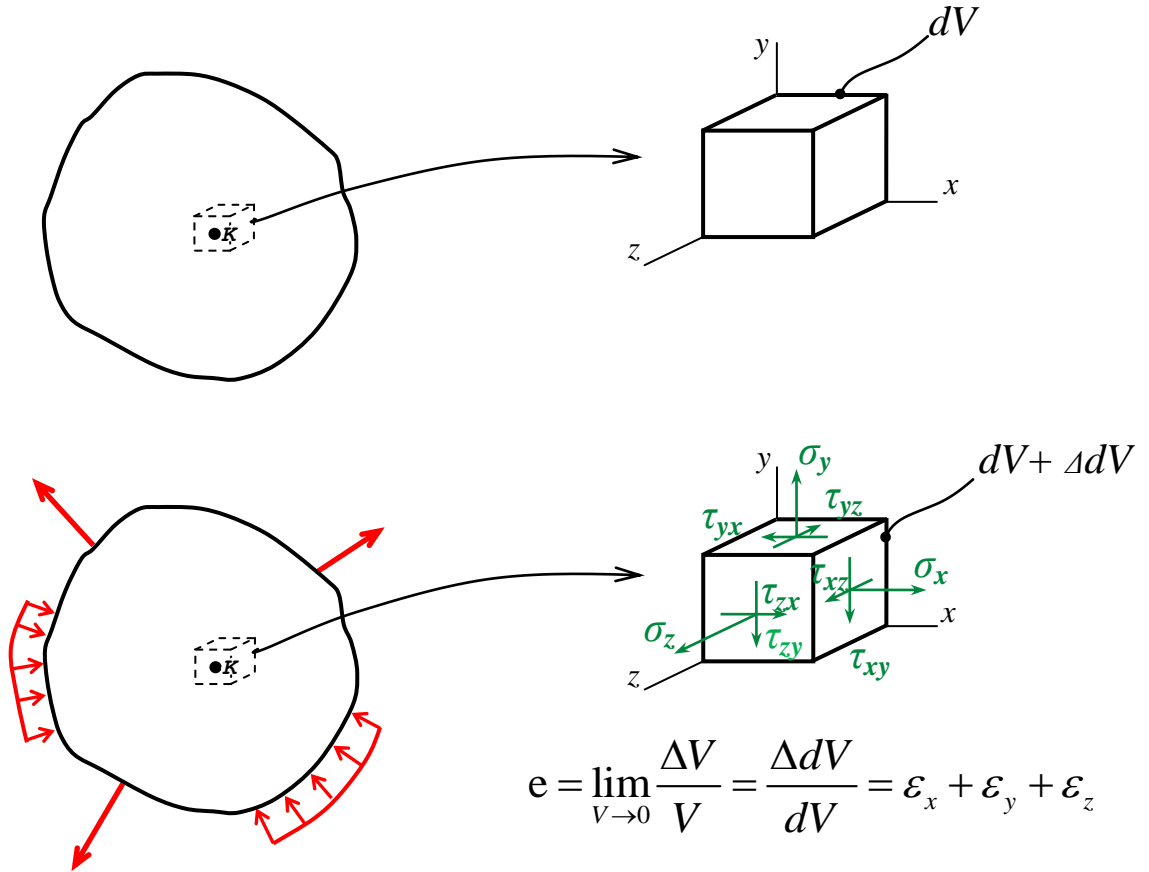


Рис. IX.20.

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z =$$

$$= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)] + \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_x)] =$$

$$= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] =$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$e = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

(IX.12)

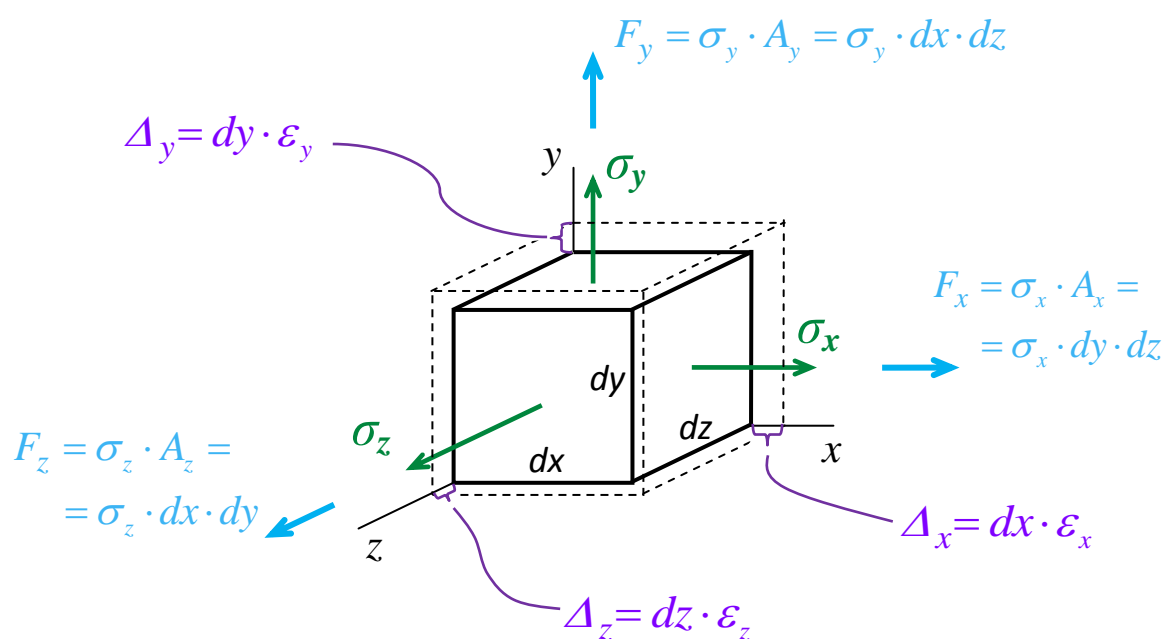
Из формулы (IX.12), в частности, следует вывод:  $\nu \leq 0,5$ .



## Потенциальная энергия деформации в общем случае напряжённого состояния

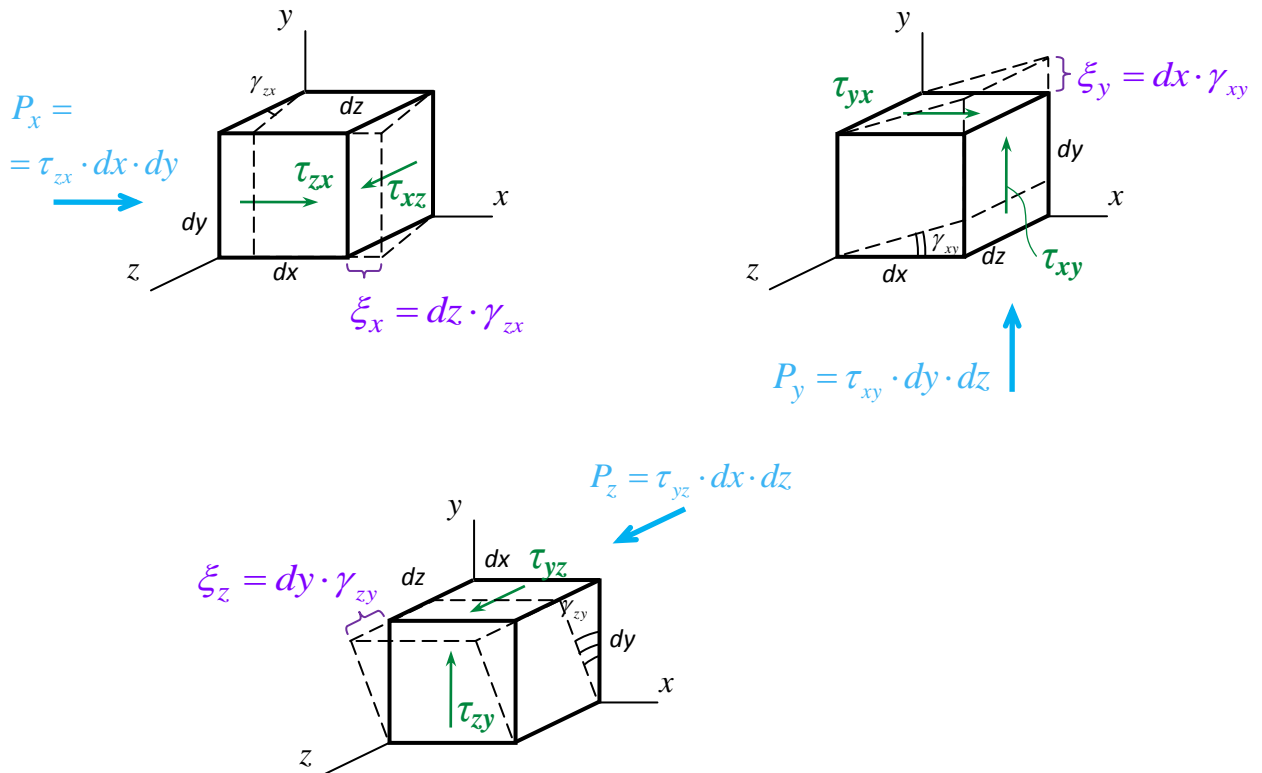
Потенциальную энергию элементарного параллелепипеда считаем равной работе внутренних сил на перемещениях его граней при нагружении тела.

а) *Потенциальная энергия, накапливаемая в элементарном объёме нормальными напряжениями:*



$$\begin{aligned}
 u_{\sigma} &= \frac{1}{2} \cdot F_x \cdot \Delta_x + \frac{1}{2} \cdot F_y \cdot \Delta_y + \frac{1}{2} \cdot F_z \cdot \Delta_z = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \cdot dy \cdot dz) \cdot (dx \cdot \epsilon_x) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_y \cdot dz \cdot dx) \cdot (dy \cdot \epsilon_y) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_z \cdot dx \cdot dy) \cdot (dz \cdot \epsilon_z) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z) \cdot \underbrace{dx \cdot dy \cdot dz}_{dV}
 \end{aligned}$$

б) Потенциальная энергия, накапливаемая в элементарном объёме касательными напряжениями:



$$\begin{aligned}
 u_{\tau} &= \frac{1}{2} \cdot P_x \cdot \xi_x + \frac{1}{2} \cdot P_y \cdot \xi_y + \frac{1}{2} \cdot P_z \cdot \xi_z = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\tau_{zx} \cdot dx \cdot dy) \cdot (dz \cdot \gamma_{zx}) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot (\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz) \cdot (dx \cdot \gamma_{xy}) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot (\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz) \cdot (dy \cdot \gamma_{yz}) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}) \cdot dV
 \end{aligned}$$

Примечание: не путайте букву  $\xi$  «кси греческое» (здесь - перемещение грани куба) с буквой  $\varepsilon$  «эпсилон греческое» (общепринятое обозначение деформации).

в) Потенциальная энергия элементарного объёма:

$$\begin{aligned}
 u &= u_{\sigma} + u_{\tau} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z) \cdot dV + \frac{1}{2} \cdot (\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}) \cdot dV = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \overbrace{[\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}]}^{u_0} \cdot dV
 \end{aligned}$$

**Удельная потенциальная энергия**  $u_0$  – это энергия в единице объёма:

$$u_0 = \frac{1}{2} \cdot [\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}] \quad (IX.13)$$

Подставляя в (IX.13) формулы для  $\varepsilon$  и  $\gamma$  обобщённого закона Гука (IX.11), получим:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x)] + \\
 &\quad + \frac{1}{2 \cdot G} \cdot [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2]
 \end{aligned}$$

Удобнее считать в главных осях, пропадает второе слагаемое:

$$\boxed{u_0 = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)]} \quad (IX.14)$$

## Деление удельной потенциальной энергии на энергию изменения формы и энергию изменения объёма

Вспоминаем: тензор напряжений  $T_\sigma$  в рассматриваемой точке тела раскладывается на две составляющие: шаровой тензор  $T_{\sigma_0}$  (элементы которого изменяют лишь объём элементарного параллелепипеда в окрестности точки, не меняя его формы) и девиатор  $D_\sigma$  (элементы которого лишь изменяют форму параллелепипеда, не изменяя его объёма), (IX.10).

Каждая из этих составляющих тензора запасает свою часть удельной потенциальной энергии. По формуле (IX.14) считаем в главных осях, так проще:

$$u_0 = u_{ob} + u_\phi$$

$$\begin{aligned}
 u_{ob} &= \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [3 \cdot \sigma_0^2 - 2 \cdot \nu \cdot 3 \cdot \sigma_0^2] = \\
 &= \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{2 \cdot E} \cdot \sigma_0^2 = \\
 &= \frac{(1 - 2 \cdot \nu)}{6 \cdot E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2
 \end{aligned}$$

- энергия изменения объёма

(IX.15)

**Энергия изменения формы:**

$$\begin{aligned}
 u_{\phi} &= u_0 - u_{об} = \frac{I}{2 \cdot E} \cdot \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right] - \\
 &\quad - \frac{(1 - 2 \cdot \nu)}{6 \cdot E} \cdot \underbrace{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}_{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)} = \\
 &= \frac{I}{2 \cdot E} \cdot \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{3} \cdot \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right] + \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} \cdot \nu \cdot \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right] \right\} = \\
 &= \frac{I}{2 \cdot E} \cdot \left\{ \left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right) \cdot \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \nu \right)}_{\frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \nu}{\frac{2}{3} \cdot (1 + \nu)}} + \right. \\
 &\quad \left. + (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \cdot \underbrace{\left( -2 \cdot \nu - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \nu \right)}_{\frac{-\frac{6}{3} \cdot \nu - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \nu}{-\frac{2}{3} \cdot (1 + \nu)}} \right\} = \\
 &= \frac{I}{3 \cdot E} \cdot (1 + \nu) \cdot \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1 \right\} = \\
 &= \frac{1 + \nu}{6 \cdot E} \cdot \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

Итак:

$$u_{\phi} = \frac{I + \nu}{6 \cdot E} \cdot \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\} \quad (IX.16)$$