

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет  
Кафедра высшей математики**

**А.С. Романов**

**НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО  
АНАЛИЗА**

**(учебное пособие)**

**Новосибирск  
2012**

УДК 517.53+517.54

**Романов А. С.** Некоторые приложения комплексного анализа: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012, 132 с.

В пособии рассматриваются вопросы, связанные с различными приложениями теории вычетов и применением теории конформных отображений в гидродинамике, обсуждаются основы метода перевала и нахождение асимптотики функции Эйри, содержится базовая информация о функциях Бесселя и их приложениях. Текст пособия включает в себя необходимый теоретический материал и довольно большое количество подробно разобранных примеров вычислительного и физического содержания. Пособие предназначено студентам и преподавателям физического факультета.

Издание подготовлено в рамках реализации Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет» на 2009-2018 годы.

Рецензент  
канд. физ.-мат. наук С. Г. Бугаева

© Новосибирский государственный  
университет, 2012  
© А. С. Романов, 2012

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание учебного пособия в основном соответствует программе специального курса „Дополнительные главы теории функций комплексного переменного“, читаемого на физическом факультете НГУ в 4-м семестре. Вопросы обсуждаемые в рамках специального курса относятся к разделам комплексного анализа, ставшим уже классическими и естественно нашедшим отражение в учебной и научной литературе. Однако сложно порекомендовать слушателям какую-либо конкретную книгу близкую по содержанию к программе данного спецкурса. В замечательной книге М.А. Лаврентьева и Б.В. Шабата [9] можно найти, в несколько ином изложении, значительную часть фактического материала рассматриваемого в спецкурсе, однако попытки рекомендовать данную книгу слушателям для самостоятельного изучения оказались малоэффективными. Видимо, для студентов 2-го курса монография объемом в 688 страниц, написанная местами в расчете на хорошо подготовленного читателя, оказывается довольно сложным источником информации.

Пособие состоит из четырех глав, в каждой из которых рассматриваются разделы комплексного анализа связанные между собой общей идеей и методами их приложения к решению конкретных задач, используемых в различных курсах физического цикла. Основным и в спецкурсе и в пособии являются именно приложения, которые иллюстрируются довольно большим количеством подробно разобранных задач. При этом пособие содержит весь необходимый теоретический материал, изложение которого подчинено основной цели курса.

В пособии для утверждений используется тройная нумерация – (глава, параграф, порядковый номер в данном параграфе), отдельная аналогичная нумерация используется для выделенных формул.

## ВВЕДЕНИЕ

Для начала нужно уточнить некоторые термины и понятия, используемые в современном комплексном анализе.

В курсе лекций по ТФКП, читавшемся на физическом факультете НГУ, термин *аналитическая функция* по сложившейся традиции означает дифференцируемую в смысле комплексного переменного функцию  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , у которой производная является непрерывной функцией в области  $D$ . Такое определение основного класса функций позволяет упростить доказательство интегральной теоремы Коши, однако создает и некоторые проблемы, возникающие, к примеру, при чтении математической литературы.

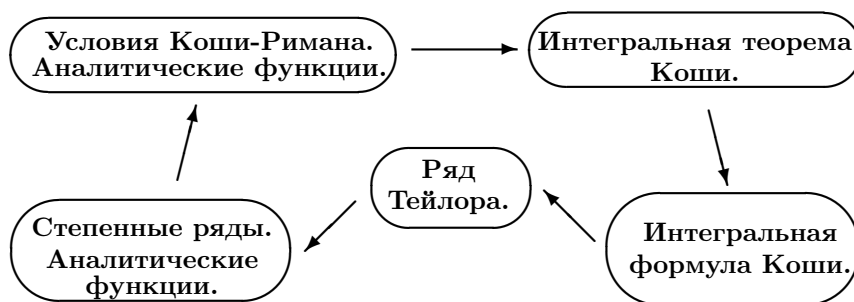
Во-первых, термин «*аналитическая функция*» не связан конкретно с комплексным анализом, в современной математике аналитической принято называть функцию, представимую степенным рядом в окрестности каждой точки области определения. При этом рассматриваются аналитические функции не только комплексного переменного, но и аналитические функции одной и многих действительных переменных и даже абстрактные аналитические функции, связанные с банаховыми пространствами. В общем случае аналитичность функции не является простым следствием ее дифференцируемости, к примеру, на действительной прямой даже бесконечно дифференцируемая функция может не быть аналитической. Рассматриваемая в ТФКП ситуация является исключительной в том смысле, что всякая дифференцируемая в смысле комплексного переменного в области  $D \subset \mathbb{C}$  функция  $f$  в окрестности каждой точки области  $D$  представима степенным рядом, т.е. функция  $f$  является аналитической в области  $D$ . При этом в литературе по комплексному анализу *аналитические функции* часто называют *голоморфными* или *регулярными* функциями, а термин *аналитическая функция* используется не только для однозначных функций, но и для многозначных функций комплексного переменного.

Во-вторых, для функций, дифференцируемых в смысле комплексного переменного, априори непрерывность производных никогда не предполагается, поскольку это требование является *излишним*: всякая функция комплексного переменного дифференцируемая в области  $D \subset \mathbb{C}$  один раз оказывается бесконечно дифференцируемой в области  $D$  и все ее производные являются непрерывными функциями. Доказательство этого факта не является тривиальным, и одна из возможностей связана с дифференцированием интегральной формулы Коши. В рамках лек-

ционного курса мы попадаем в замкнутый цикл: мы можем доказать непрерывность производной, используя интегральную формулу Коши, являющуюся следствием интегральной теоремы Коши, при доказательстве которой мы уже использовали непрерывность производной ...

Учитывая ограниченность учебного времени, использование в лекционном курсе дополнительных предположений о свойствах изучаемых объектов, представляется вполне оправданным, если это приводит к более простому изложению материала и при этом позволяет получить все необходимые физикам содержательные утверждения и вычислительные формулы. Однако тем кто желает научиться применять методы комплексного анализа не только при решении учебных задач, но и при изучении различных проблем физического содержания, на наш взгляд целесообразно иметь адекватное представление о базовых понятиях рассматриваемой теории и о способах доказательства основных теорем и утверждений.

Пожалуй важнейшей теоремой в комплексном анализе является интегральная теорема Коши. Вспоминая структуру лекционного курса, взаимосвязь основных понятий и свойств функций в ТФКП можно изобразить при помощи следующей замкнутой диаграммы:



Из диаграммы видно, что изложение теории функций комплексного переменного можно начинать с любого ее пункта. Обычно начинают либо с условий дифференцируемости либо со степенных рядов, а в книге А. Гурвица, Р. Куранта «Теория функций» реализуются оба подхода. При этом нужно иметь в виду, что в основе доказательства большинства важнейших утверждений комплексного анализа лежит использование различных следствий интегральной теоремы Коши, что и определяет особое место этой теоремы в теории функций комплексного переменного.

Основная часть данного курса будет посвящена различным приложениям комплексного анализа, но начнем курс мы с классического доказательства интегральной теоремы Коши, в котором непрерывность производной не предполагается. Это будет первым и по большому счету единственным подробным и строгим доказательством теоремы, требующим времени и усилий.

## § 1. Необходимые определения

Для доказательства интегральной теоремы Коши нам потребуются лишь определение аналитической функции и определение интеграла функции комплексного переменного вдоль ориентированной кривой.

Рассмотрим область  $D \subset \mathbb{C}$  и точку  $z_0 \in D$ .

**Определение.** Функция  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  называется дифференцируемой в точке  $z_0$ , если существует такое число  $\lambda \in \mathbb{C}$ , что

$$f(z) - f(z_0) = \lambda(z - z_0) + o(z - z_0) \quad \text{при } z \rightarrow z_0. \quad (1)$$

Если функция  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0$ , то соответствующее число  $\lambda$  называется производной функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  и обозначается стандартным образом  $f'(z_0)$ .

Равенство (1) эквивалентно существованию конечного предела

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Функцию  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  будем называть *аналитической*<sup>1</sup> в области  $D$ , если она дифференцируема в каждой точке  $z \in D$ . Отметим, что мы требуем лишь существования в области  $D$  конечной производной и не предполагаем никаких дополнительных свойств.

Функцию  $f(z)$  называют *аналитической в точке*  $z_0 \in \mathbb{C}$ , если она является аналитической в некоторой окрестности точки  $z_0$ . Функцию называют *аналитической на некотором множестве*  $E \subset \mathbb{C}$ , если она является аналитической в каждой точке  $z \in E$ . Отметим, что требование аналитичности функции на множестве  $E$  является более сильным по сравнению с требованием дифференцируемости функции в каждой точке множества  $E$ .

---

<sup>1</sup>Чтобы не вводить новых понятий, мы будем использовать для однозначных функций комплексного переменного термин *аналитическая*, понимая его в несколько ином смысле по сравнению с основным лекционным курсом ТФКП.

Пусть  $\gamma \subset \mathbb{C}$  – ориентированная гладкая кривая,  $z = z(t)$  – ее гладкая параметризация, т.е. гладкое отображение

$$z(t) : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \gamma \subset \mathbb{C}, \quad z'(t) \neq 0.$$

**Определение.** Интеграл от непрерывной функции  $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  вдоль ориентированной кривой  $\gamma$  определяется равенством

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt,$$

в котором правая часть понимается как линейная комбинация интегралов от действительной и мнимой частей.

Полагая  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , комплексный интеграл можно записать в виде комбинации действительных криволинейных интегралов

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy.$$

Используя аддитивность, естественным образом определяется интеграл по ориентированной кусочно-гладкой кривой. Для непрерывной функции интеграл по кусочно-гладкой кривой всегда существует и не зависит от выбора параметризации. Всюду далее, если об этом не будет сказано отдельно, предполагается, что все кривые, по которым будут вычисляться интегралы, являются кусочно-гладкими.

**Пример.** Пусть  $\gamma \subset \mathbb{C}$  – ориентированная гладкая кривая, имеющая начало в точке  $a$  и конец в точке  $b$ , а  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  – ее гладкая параметризация. Тогда

$$\int_{\gamma} dz = \int_{\alpha}^{\beta} [x'(t) + iy'(t)] dt = z(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = b - a, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( [x(t)x'(t) - y(t)y'(t)] + i[x(t)y'(t) + y(t)x'(t)] \right) dt = \\ &= \frac{z^2(t)}{2} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Следовательно для всякого простого замкнутого кусочно-гладкого контура  $\Gamma \subset \mathbb{C}$

$$\int_{\Gamma} dz = 0, \quad \int_{\Gamma} z dz = 0. \quad (4)$$

## § 2. Интегральная теорема Коши

Интегральная теорема была опубликована О. Коши<sup>1</sup> в 1825 году, однако приведенное им доказательство было не совсем строгим.

Полное доказательство интегральной теоремы Коши получил Э. Гурса<sup>2</sup> в 1884 году. Основная идея в схеме Э. Гурса заключается в оригинальном доказательстве утверждения теоремы для контуров, являющихся границей многоугольников, и аппроксимации интеграла по произвольному контуру интегралом по границе многоугольника.

Покажем вначале возможность аппроксимации интересующего нас вида.

**Лемма Гурса.** Пусть функция  $f(z)$  непрерывна в односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$  и  $\gamma$  – простой замкнутый кусочно-гладкий контур, лежащий в  $D$ . Тогда для произвольного  $\varepsilon > 0$  существует такой многоугольник  $P \subset D$  с вершинами на  $\gamma$ , что

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\partial P} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $L$  длину контура  $\gamma$ .

Рассмотрим такую ограниченную односвязную подобласть  $D_1$ , что  $\gamma \in D_1$  и  $\overline{D_1} \subset D$ . В силу компактности множества  $\overline{D_1}$  непрерывная функция  $f(z)$  будет равномерно непрерывной в области  $D_1$ . Поэтому для произвольного  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $z_1, z_2 \in D_1$  из неравенства

$$|z' - z''| < \delta$$

---

<sup>1</sup>Коши Огюст Луи(1789–1857)– французский математик, член Парижской академии наук, иностранный почетный член Петербургской академии наук, основные исследования посвящены математическому анализу и математической физике, является одним из создателей теории функций комплексного переменного.

<sup>2</sup>Гурса Эдуар Жан Батист(1858–1936)– французский математик, член Парижской академии наук, основные труды по дифференциальным уравнениям и теории функций комплексного переменного.



будет следовать оценка

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}. \quad (5)$$

Фиксируем положительное число  $\delta_0 < \min\{\delta, \text{dist}(\gamma, \partial D_1)\}$  и разобьем точками  $z_1, z_2, \dots, z_n$  контур  $\gamma$  на дуги  $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, n$ , длина каждой из которых меньше чем  $\delta_0$ . Обозначим через  $P$  многоугольник с вершинами в точках  $z_k$ , а через  $l_k$  его соответствующие стороны. Отметим, что число  $\delta_0$  выбрано так, что  $P \subset D_1 \subset D$ .

Воспользовавшись равенством (2), получаем

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \int_{\gamma_k} dz = \int_{l_k} dz. \quad (6)$$

Используя неравенство (5) и равенство (6), получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| < \frac{\varepsilon}{2L} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} |dz| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогичным образом получается оценка

$$\left| \int_{\partial P} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{l_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Теперь результат леммы очевидным образом следует из оценок (7) и (8)

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\partial P} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| + \\ & + \left| \int_{\partial P} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Основная лемма.** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$ . Тогда для произвольного треугольника  $\Delta \subset D$

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный треугольник  $\Delta \subset D$  и пусть

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = M.$$

Проведем в треугольнике  $\Delta$  средние линии и разобьем его на четыре треугольника  $\Delta^{(k)}$ , рис. 1.

Учитывая, что по средним линиям интегрирование происходит дважды, в противоположных направлениях, получаем

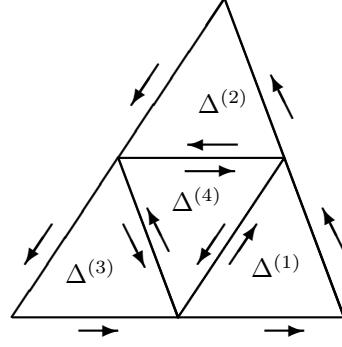


Рис. 1.

$$M = \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = \left| \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta^{(k)}} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\partial\Delta^{(k)}} f(z) dz \right|.$$

Из неравенства видно, что модуль интеграла по границе хотя бы одного из треугольников  $\Delta^{(k)}$  не меньше чем  $\frac{M}{4}$ . Фиксируем такой треугольник и обозначим его через  $\Delta_1$ . Применяя описанную ранее процедуру к треугольнику  $\Delta_1$ , мы найдем треугольник  $\Delta_2$ , для которого

$$\left| \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность треугольников  $\{\Delta_k\}$ , обладающую следующими свойствами:

- 1)  $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;
- 2) периметр треугольника  $\Delta_k$  равен  $\frac{L}{2^k}$ , где  $L$  – периметр исходного треугольника  $\Delta$ ;

3) выполняется оценка

$$\left| \int_{\partial \Delta_k} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^k}. \quad (9)$$

Последовательность вложенных замкнутых треугольников имеет единственную общую точку  $z_0 \in D$ . Поскольку функция  $f(z)$  является аналитической в точке  $z_0$ , то согласно определению дифференцируемости (1) для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0| \quad (10)$$

при всех  $z$ , лежащих в круге  $B(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$ .

Начиная с некоторого номера  $k_0$  все треугольники  $\Delta_k$  лежат в круге  $B(z_0, \delta)$ , при этом из равенств (4) следует, что

$$\int_{\partial \Delta_k} f(z_0) dz = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\partial \Delta_k} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0.$$

Учитывая эти соотношения и неравенство (10), мы можем получить следующую оценку для интеграла

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Delta_k} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial \Delta_k} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial \Delta_k} |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon \frac{L^2}{4^k}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из неравенств (9) и (11) следует оценка

$$M \leq \varepsilon L^2,$$

из которой в силу произвольности  $\varepsilon$  получаем  $M = 0$ , что и завершает доказательство леммы.

**Интегральная теорема Коши.** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$ . Тогда для произвольного замкнутого кусочно-гладкого контура  $\gamma \subset D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из доказанных лемм. Всякий многоугольник  $P \subset D$  можно разбить на треугольники. Представляя интеграл по границе многоугольника в виде суммы интегралов по границам треугольников и учитывая результат основной леммы, получаем

$$\int_{\partial P} f(z) dz = 0.$$

Согласно лемме Гурса интеграл по контуру  $\gamma$  можно аппроксимировать с любой точностью интегралами по многоугольникам, которые все равны нулю. Следовательно и интеграл по контуру  $\gamma$  равен нулю.

Интегральная теорема Коши имеет множество различных следствий и обобщений. На практике часто используется следующий вариант теоремы, строгое доказательство которого выходит за рамки нашего курса.

**Обобщенная теорема Коши.** Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  – ограниченная многосвязная область с ориентированной кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , функция  $f(z)$  является аналитической в  $D$  и непрерывной в  $\bar{D}$ . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Важнейшим следствием интегральной теоремы Коши является интегральная формула Коши, позволяющая однозначно восстановить значения аналитической функции внутри области по ее значениям на границе области.

**Интегральная формула Коши.** Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  – ограниченная многосвязная область с ориентированной кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , функция  $f(z)$  является аналитической в  $D$  и непрерывной в  $\bar{D}$ . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z} = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in D, \\ 0 & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus D. \end{cases} \quad (12)$$

**Замечание.** Если  $z \in \Gamma$ , то интеграл Коши (12) имеет в этой точке особенность и его значение зависит от строения граничной кривой в окрестности точки  $z$ .

## I. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

Традиционно приложения теории вычетов в первую очередь ассоциируются с вычислением интегралов, однако реально вычеты используются при решении множества задач различного содержания. К таким задачам можно отнести нахождение интегральных формул для нулей аналитических функций, вычисление коэффициентов ряда Тейлора для обратной функции, разложение мероморфной функции на элементарные дроби, представление целой функции в виде бесконечного произведения ...

### § 1. Обобщенный логарифмический вычет

При решении различных задач возникает необходимость нахождения нулей трансцендентных аналитических функций. Существуют итерационные методы, позволяющие находить приближенные значения с любой требуемой точностью, однако эффективность этих методов существенным образом зависит от правильности выбора первоначального приближения.

Известно, что для мероморфной функции  $f$  разность между количеством нулей  $N$  и количеством полюсов  $P$ , лежащих внутри замкнутого контура  $\Gamma$ , может быть выражена через логарифмический вычет

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

Этот результат допускает довольно простое обобщение.

**Теорема 1.1.1.** Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , ориентированной в положительном направлении. Функция  $\varphi(z)$  является аналитической в  $D$  и непрерывной в  $\overline{D}$ , а функция  $f(z)$  является аналитической в  $\overline{D}$  за исключением конечного числа полюсов, лежащих в области  $D$ , и  $f(z) \neq 0$  при  $z \in \Gamma$ . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_i n_i \varphi(a_i) - \sum_j m_j \varphi(b_j),$$

где  $a_i \in D$  – нули функции  $f(z)$  кратности  $n_i$ , а  $b_j \in D$  – полюсы функции  $f(z)$  кратности  $m_j$ .

При выполнении условий теоремы функция  $f(z)$  может иметь в области  $D$  лишь конечное число нулей. Положим  $F(z) = \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ . Особыми точками функции  $F(z)$  являются нули и полюсы функции  $f(z)$ , а искомый интеграл равен сумме вычетов функции  $F(z)$  во всех особых точках.

Если точка  $a_i$  является нулем функции  $f(z)$  кратности  $n_i$ , то в ее окрестности  $f(z) = (z - a_i)^{n_i} g(z)$ , где  $g(a_i) \neq 0$ . Поэтому

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_i}{z - a_i} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

и следовательно в лорановском разложении функции  $F(z)$  коэффициент при  $(z - a_i)^{-1}$  равен  $n_i \varphi(a_i)$ . Аналогичное рассуждение показывает, что в лорановском разложении функции  $F(z)$  в окрестности полюса  $b_j$  коэффициент при  $(z - b_j)^{-1}$  равен  $-m_j \varphi(b_j)$ . Суммируя по всем нулям и полюсам, получаем требуемую формулу.

Если функция  $f(z)$  не имеет полюсов, то полагая  $\varphi(z) \equiv 1$ , мы получаем стандартную формулу количества нулей функции  $f(z)$  в области  $D$ , т.е.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Применяя теорему 1.1.1 в случае, когда  $\varphi(z) = z$ , мы получаем интегральную формулу для нахождения простого нуля.

**Следствие 1.1.2.** Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , ориентированной в положительном направлении. Если аналитическая в  $\overline{D}$  функция  $f(z)$  имеет единственный простой нуль  $a \in D$ , то

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (1.1.1)$$

Если в области содержатся два простых нуля, то они могут быть найдены как решения простой алгебраической системы уравнений.

**Следствие 1.1.3.** Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , ориентированной в положительном

направлении. Если аналитическая в  $\bar{D}$  функция  $f(z)$  имеет два простых нуля  $a, b \in D$ , то они могут быть найдены из равенств

$$a + b = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (1.1.2)$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^2 \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (1.1.3)$$

*Каким образом можно найти единственный нуль кратности 3?*

Отметим, что универсальных методов решения трансцендентных уравнений не существует, при этом приближенное вычисление интеграла является алгоритмической задачей и может быть легко реализовано при помощи вычислительной техники.<sup>1</sup>

## § 2. Вычисление интегралов.

Используемые в комплексном анализе приемы вычисления интегралов являются весьма эффективными и часто технически существенно более простыми по сравнению с другими методами. К сожалению не существует единой универсальной схемы, подходящей для всех интегралов сразу. Для различных типов подинтегральных функций приходится использовать различные контуры интегрирования, различными способами строить вспомогательные функции комплексного переменного, приходится получать дополнительные оценки, однако общим элементом всегда остается использование теории вычетов.

### Интегралы в смысле главного значения по Коши.

Пусть  $\Gamma$  – кусочно-гладкая кривая, точка  $t_0 \in \Gamma$ . Обозначим через  $C_\varepsilon$  окружность  $|z - t_0| = \varepsilon$ , а через  $\Gamma_\varepsilon$  часть кривой  $\Gamma$ , лежащую вне круга  $|z - t_0| \leq \varepsilon$ .

Если функция  $f(z)$  имеет единственную особенность в точке  $t_0 \in \Gamma$ , то интеграл в смысле главного значения по Коши определяется условием:

$$V.p. \int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz \quad [V.p. - \text{Valeur principale (фр.)}]$$

---

<sup>1</sup>Было несколько неожиданным увидеть формулы (1.1.2) и (1.1.3) в статье по физике плазмы, показанной автору слушателем спецкурса И. Сtryгиным.

Аддитивность интеграла позволяет естественным образом определить главное значение интеграла в случае конечного числа особых точек.

Напомним результат из лекционного курса.

**Утверждение 1.2.1.** Пусть  $D$  – ограниченная односвязная область с гладкой границей  $\Gamma$ , ориентированной в положительном направлении, функция  $f(z)$  является аналитической в  $\overline{D}$  за исключением конечного числа особых точек  $b_1, \dots, b_n \in D$  и простых полюсов  $a_1, \dots, a_m \in \Gamma$ . Тогда

$$V.p. \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=b_k} \operatorname{res} f(z) + \pi i \sum_{z=a_k} \operatorname{res} f(z).$$

1. Почему полюсы простые?

2. Что делать, если в особой точке граничная кривая не является гладкой?

**Пример.** Рассмотрим криволинейный треугольник  $\Delta_\lambda$ , образованный отрезками  $L_1 = [0, 1]$ ,  $L_2 = [1, 1 + (1 + \lambda)i]$  и дугой параболы  $y = x^2 + \lambda x$ , обозначенной через  $L_3$ .

Парабола имеет в нуле касательную, пересекающую действительную ось под углом  $\varphi_0 = \arctg \lambda$ . Пусть  $C_r$  – дуга окружности радиуса  $r$  с центром в нуле, соединяющая действительную ось с параболой. Обозначим через  $\gamma_r$  кусочно-гладкую кривую, образованную отрезками  $[r, 1]$ ,  $L_2$  и частью параболы, соединяющей  $L_2$  с  $C_r$ . Согласно интегральной теореме Коши получаем

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \int_{C_r} \frac{dz}{z} = i \int_0^{\varphi_r} d\varphi = i\varphi_r,$$

где  $\varphi_r$  – радианная мера дуги  $C_r$ , стремящаяся при  $r \rightarrow 0$  к значению  $\varphi_0$ .

Следовательно при  $0 \leq \lambda < +\infty$

$$V.p. \int_{\partial \Delta_\lambda} \frac{dz}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = i \arctg \lambda.$$

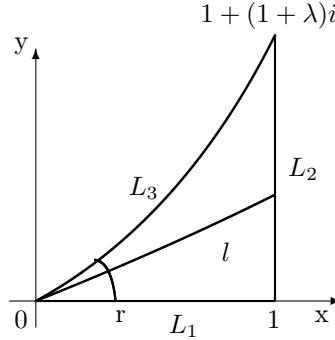


Рис. 1.2.1.



Таким образом значение интеграла зависит от угла между «сторонами» криволинейного треугольника в вершине, являющейся особой точкой подинтегральной функции.

В общем случае ситуация вполне аналогичная.

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $D$  – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , ориентированной в положительном направлении, функция  $f(z)$  является аналитической в  $\bar{D}$  за исключением конечного числа особых точек  $b_1, \dots, b_n \in D$  и простых полюсов  $a_1, \dots, a_m \in \Gamma$ , в которых односторонние касательные к границе образуют углы  $\alpha_m$ . Тогда

$$V.p. \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=b_k} \operatorname{res} f(z) + i \sum \alpha_k \operatorname{res}_{z=a_k} f(z). \quad (1.2.1)$$

Доказательство теоремы 1.2.1 сводится к интегрированию лорановского разложения функции в окрестности особой точки  $a_k$  по дуге окружности  $C_r$ , попадающей внутрь области

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \left( \frac{c_{-1}}{z - a_k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a_k)^n \right) dz = i \alpha_k \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

Для расходящихся интегралов на действительной прямой  $R$ , когда особой является бесконечно удаленная точка, главное значение определяется условием:

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

**Пример.** Показать, что при  $a \in \mathbb{C}$

$$I(a) = V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - a} = i\pi \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} a).$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда  $a$  является действительным числом и когда  $a$  является комплексным.

1. Пусть  $a \in \mathbb{R}$  и  $a \leq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \left( \int_{-A}^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^A \right) \frac{dx}{x-a} \right| &= \left| \int_{-A}^{2a-A} \frac{dx}{x-a} + \left( \int_{2a-A}^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^A \right) \frac{dx}{x-a} \right| = \\ &= \left| \int_{-A}^{2a-A} \frac{dx}{x-a} + 0 \right| \leq \frac{2a}{A-2a} \rightarrow 0 \text{ при } A \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

При отрицательных значениях  $a$  ситуация вполне аналогичная.

2. Пусть  $\operatorname{Im} a > 0$ ,  $C_R$  – дуга окружности  $|z-a| = R$ , лежащая в верхней полуплоскости и  $\varphi_R$  – ее радианная мера. Несложно показать, что

$$I(a) = \operatorname{res}_{z=a} \frac{1}{z-a} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i - i \lim_{R \rightarrow \infty} \varphi_R = i\pi.$$

Если  $\operatorname{Im} a > 0$ , то  $I(a) = \overline{I(\bar{a})} = -i\pi$ .

Напомним еще одно утверждение из лекционного курса.

**Лемма 1.2.3. (Лемма Жордана.<sup>1</sup>)** Пусть функция  $f(z)$  непрерывна в секторе  $S = \{|z| \geq r > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  и  $M(R) = \max_{z \in C_R^+} |f(z)| \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , где  $C_R^+$  – верхняя полуокружность. Тогда при  $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

Что нужно изменить в формулировке леммы, если  $a < 0$ ?

Вычислить интегралы:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \quad 2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; \quad 3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$$

---

<sup>1</sup>Жордан Мари Энмон Камиль [1838-1922] – французский математик, член Парижской Академии наук, иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук. Основные труды относятся к алгебре, теории функций, топологии и кристаллографии.

Во всех трех заданиях используется один контур интегрирования  $\Gamma_R$ , изображенный на рис 1.2.2 и состоящий из верхней полуокружности  $C_R^+$  и отрезка  $[-R, R]$ .

Исходные интегралы не имеют особенностей в нуле, однако при интегрировании по контуру  $\Gamma_R$  вспомогательных функций:

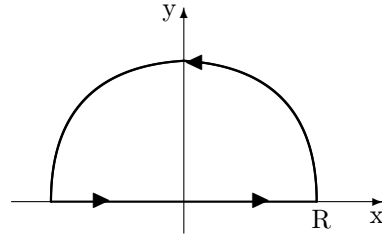


Рис. 1.2.2.

$$1) f(z) = \frac{e^{iz}}{z}; \quad 2) f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}; \quad 3) f(z) = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$$

приходится находить главное значение соответствующего интеграла.

*Решение.* Для примера рассмотрим интеграл 2). Поскольку функция  $\frac{e^{2iz} - 1}{z^2}$  имеет простой полюс в точке  $z = 0$  и

$$\frac{e^{2ix} - 1}{x^2} = -\frac{2 \sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin 2x}{x^2},$$

то, учитывая нечетность функции  $\sin 2x$ , лемму Жордана и утверждение 1.2.1, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz} - 1}{z^2} dz = -\frac{i\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2iz} - 1}{z^2} = -\frac{i\pi}{2} \cdot 2i = \pi.$$

Обычно вычисление рационально-тригонометрического интеграла при помощи замены переменной  $z = e^{i\varphi}$  сводится к вычислению комплексного интеграла по единичной окружности. Следующий результат представляет собой альтернативный подход к вычислению интегралов от периодических функций.

**Теорема 1.2.4.** Пусть  $2\pi$ -периодическая функция  $f(z)$  является аналитической в полосе

$$P = \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

за исключением конечного числа особых точек  $b_1, \dots, b_n \in P$  и простых полюсов  $a_1, \dots, a_m \in (-\pi, \pi)$ . Если  $f(z) \rightarrow A \neq \infty$  при  $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$ , то

$$\text{V.p.} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi A + 2\pi i \sum_{z=b_k} \operatorname{res} f(z) + \pi i \sum_{z=a_k} \operatorname{res} f(z).$$

Идея доказательства совсем проста: обрезаю полосу  $P$  прямой  $\text{Im } z = L > 0$  и интегрируя по полученному прямоугольнику, мы видим, что в силу периодичности функции  $f(z)$  сумма интегралов по боковым сторонам равна нулю, а интеграл по верхней стороне стремится к  $-2\pi A$  при  $L \rightarrow +\infty$ .

4) Вычислить интеграл:  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi}$  (a)  $c > 1$ , (b)  $0 < c < 1$ .

*Решение.* Подинтегральная функция примера 4) удовлетворяет условию теоремы 1.2.4 и при этом  $f(z) \rightarrow 0$  при  $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ , поскольку при  $y > 0$

$$|\cos(x + iy)| = \frac{1}{2} |e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y| \geq \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) \geq \frac{1}{2} (e^y - 1).$$

4(a). Подинтегральная функция имеет в полосе  $P$  один простой полюс  $z_0$ , в котором  $\sin z_0 = -i\sqrt{c^2 - 1}$ , поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{c + \cos z} = 2\pi i \frac{1}{-\sin z_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}.$$

4(b). Подинтегральная функция имеет на интервале  $(0, 2\pi)$  два простых полюса  $z_1, z_2$ . При этом  $\operatorname{res}_{z=z_2} f(z) = -\operatorname{res}_{z=z_1} f(z)$ , поэтому главное значение расходящегося несобственного интеграла равно нулю.

### Интегрирование показательных функций

5) Вычислить интеграл:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx$  ( $0 < a < 1$ ).

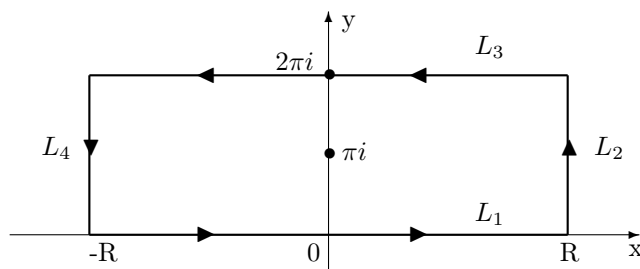


Рис. 1.2.3.

*Решение.* Учитывая периодичность функции  $e^z$ , воспользуемся интегрированием функции  $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$  по изображенному на рис. 1.2.3 контуру  $\Gamma_R$ .

Заметим, что

$$\int_{L_3} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

На отрезке  $L_2$  имеем

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1},$$

следовательно

$$\left| \int_{L_2} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

На отрезке  $L_4$  имеем

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} \right| \leq \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}},$$

следовательно

$$\left| \int_{L_4} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Функция  $f(z)$  внутри контура  $\Gamma_R$  имеет единственную особую точку – простой полюс  $z_0 = \pi i$ , в котором

$$\operatorname{res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{e^{a\pi i}}{(1+e^z)'_{z=\pi i}} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

Согласно теории вычетов

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\pi i} f(z) = -2\pi i e^{a\pi i}. \quad (1.2.2)$$

Переходя в равенстве (1.2.2) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{2\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{a\pi i},$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}} = \pi \frac{2i}{e^{\pi ai} - e^{-\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

**Следствие.** Делая в интеграле 5) замену переменной  $e^x = t$ , получаем *формулу дополнения для бета-функции*

$$B(a, 1-a) = \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (0 < a < 1).$$

6) Вычислить интеграл: *V.p.*  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1-e^x} dx$ . ( $0 < a < 1$ )

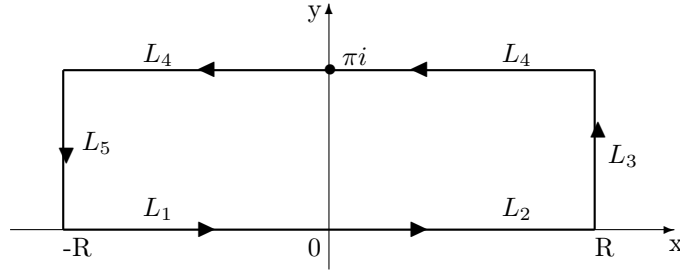


Рис. 1.2.4.

*Решение.* Рассмотрим контур  $\Gamma_R$ , изображенный на рис. 1.2.4. Подынтегральная функция внутри контура особенностей не имеет, а на границе есть один простой полюс в точке  $z = 0$ ,  $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -1$ .

Как и в примере 5 интегралы по отрезкам  $L_3$  и  $L_5$  стремятся к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , а для интеграла по отрезку  $L_4$  имеем равенство

$$\int_{L_4} \frac{e^{az}}{1-e^z} dz = -e^{\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

Переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и учитывая результат примера 5, получаем

$$\begin{aligned} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1-e^x} dx &= \lim_{R \rightarrow 0} \int_{L_4} \frac{e^{az}}{1-e^z} dz + \pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{ax}}{1-e^x} = \\ &= e^{\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - \pi i = \pi \left( \frac{e^{\pi ai}}{\sin \pi a} - i \right) = \pi \operatorname{ctg} \pi a. \end{aligned}$$

7) Вычислить интеграл Лежандра:<sup>1</sup>  $\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx.$

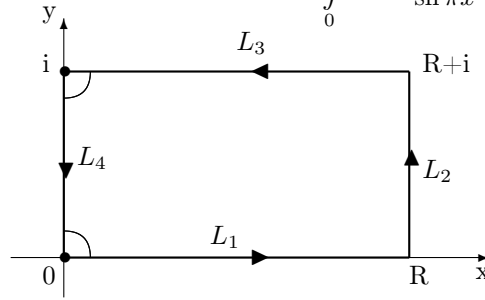


Рис. 1.2.5.

*Решение.* Рассмотрим вспомогательную функцию  $\Phi(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$  и заметим, что на действительной оси  $2 \operatorname{Im} \Phi(x) = e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x}.$

Контур интегрирования  $P_R$ , изображенный на рис. 1.2.5, содержит два простых полюса функции  $\Phi(z)$  в вершинах  $z = 0$  и  $z = i$ .

Найдем вычеты в точках  $z = 0$  и  $z = i$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) &= \left[ \frac{e^{iaz}}{(e^{2\pi z} - 1)'} \right]_{z=0} = \frac{1}{2\pi}; \\ \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z) &= \left[ \frac{e^{iaz}}{(e^{2\pi z} - 1)'} \right]_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2\pi}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Лежандр Адриен Мари [1752-1833] – французский математик, член Парижской Академии наук, иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук. Основные труды относятся к математическому анализу, геометрии, теории чисел и вариационному исчислению.

Интеграл от функции  $\Phi(z)$  по отрезку  $L_2$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Поскольку  $\Phi(z+i) = e^{-a}\Phi(z)$ , то

$$\int_{L_3} \Phi(z) dz = -e^{-a} \int_0^R \Phi(x) dx.$$

Еще нам будет нужна мнимая часть интеграла от функции  $\Phi(z)$  по отрезку  $L_4$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(z) dz &= \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(iy) d(iy) = -\operatorname{Re} \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{2} dy = \frac{1}{2a} (1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1.2.2

$$\operatorname{Im} \int_{P_R} \Phi(z) dz = \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) + \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z).$$

Устремляя  $R \rightarrow \infty$ , получаем

$$\begin{aligned} (1 - e^{-a}) \int_0^\infty e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx &= \\ &= 2 \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{L_1} \Phi(z) dz + \int_{L_2} \Phi(z) dz + \int_{L_3} \Phi(z) dz \right) = \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) + \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z) - \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(z) dz \right) = \frac{1}{2} (1 + e^{-a}) - \frac{1}{a} (1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\int_0^\infty e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + e^{-a})}{(1 - e^{-a})} - \frac{1}{a}.$$



## Интегрирование многозначных функций

8) Вычислить интеграл:  $V.p. \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx \quad (0 < a < 1).$

*Решение.* Функция комплексного переменного  $F(z) = \frac{z^{a-1}}{1-z}$  является многозначной. Проведем в плоскости  $\mathbb{C}$  разрез по положительной действительной полуоси и обозначим через  $f(z)$  однозначную ветвь функции  $F(z)$ , принимающую действительные значения на верхнем берегу разреза.

Проведем две окружности радиуса  $r$  с центрами в особых точках:  $C_r$  — с центром в точке  $z = 0$  и  $S_r$  — с центром в точке  $z = 1$ . Через  $S_r^+$  и  $S_r^-$  обозначим соответственно верхнюю и нижнюю полуокружности.

Проведем еще большую окружность  $C_R$  и рассмотрим контур  $\Gamma_{r,R}$ , изображенный на рис. 1.2.6. На нижнем берегу разреза значение функции  $f(z)$  отличается лишь на постоянный множитель от значения в соответствующей точке верхнего берега разреза:  $f(xe^{2\pi i}) = e^{2\pi ai} f(x)$ .

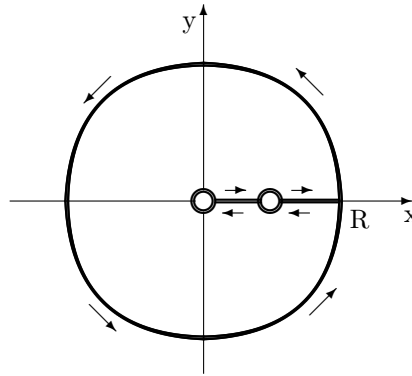


Рис. 1.2.6.

Поскольку на контуре  $\Gamma_{r,R}$  и внутри его функция  $f(z)$  не имеет особенностей, то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{r,R}} f(z) dz &= \int_{C_r} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{S_r^+} f(z) dz + \int_{S_r^-} f(z) dz + \\ &+ (1 - e^{2\pi ai}) \int_r^{1-r} f(x) dx + (1 - e^{2\pi ai}) \int_{1+r}^R f(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Поскольку  $|f(z)| \sim |z|^{a-1}$  при  $|z| \rightarrow 0$  и  $|f(z)| \sim |z|^{a-2}$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ,

то при  $r \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_r} f(z) dz \rightarrow 0, \quad \int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0.$$

На полуокружности  $S_r^+$  имеем  $z^{a-1} = 1 + O(r)$ , а на полуокружности  $S_r^-$  соответственно  $z^{a-1} = e^{2\pi ai} + O(r)$ . Положим  $1 - z = re^{i\varphi}$ , тогда  $dz = -ire^{i\varphi} d\varphi$  и

$$\begin{aligned} \int_{S_r^+} f(z) dz + \int_{S_r^-} f(z) dz &= -i \int_{\pi}^0 d\varphi - i \int_{2\pi}^{\pi} e^{2\pi ia} d\varphi + O(r) = \\ &= \pi i (1 + e^{2\pi ai}) + O(r). \end{aligned}$$

Переходя в равенстве (1.2.3) к пределу при  $r \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$ , получаем

$$(1 - e^{2\pi ai}) \left( V.p. \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx \right) + \pi i (1 + e^{2\pi ai}) = 0.$$

Откуда следует, что

$$V.p. \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx = -\pi i \frac{(1 + e^{2\pi ai})}{(1 - e^{2\pi ai})} = \pi \operatorname{ctg} \pi a.$$

### § 3. Преобразование Лапласа. Формула обращения.

Функцию  $f : R \rightarrow C$  будем называть *оригиналом*<sup>1</sup>, если

1. Функция  $f = 0$  при  $t < 0$ .
2. На каждом конечном интервале всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, функция  $f$  локально удовлетворяет условию Гельдера:  $|f(t) - f(t+h)| \leq C|h|^\gamma$ ,  $\gamma \in (0, 1]$ .
3. Функция  $f$  по модулю ограничена показательной функцией, т.е. существуют постоянная  $M > 0$  и называемое *показателем роста* число  $\alpha(f) \geq 0$  такие, что при всех  $t$  и  $\alpha > \alpha(f)$

$$|f(t)| < M e^{\alpha t}.$$

---

<sup>1</sup>Иногда в определении оригинала используются несколько иные условия

Изображением оригинала  $f(t)$  называется функция комплексного переменного  $p = a + i\lambda$ , определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Изображение  $F(p)$  является аналитической функцией в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \alpha(f)$ , при этом  $F(p) \rightarrow 0$ , если  $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$ .

Преобразование сопоставляющее оригиналу  $f(t)$  и его изображение  $F(p)$  называют *преобразованием Лапласа*,<sup>1</sup> при этом используются обозначения:  $f(t) \doteq F(p)$  или  $F(p) \doteq f(t)$ .

**Формула обращения.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом, а  $F(p)$  – ее изображение, то в каждой точке  $t > 0$ , в которой  $f(t)$  удовлетворяет условию Гельдера, выполняется равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (c \in R, c > \alpha(f)).$$

Следующее утверждение описывает класс аналитических функций, которые являются изображением соответствующих оригиналов.

**Теорема 1.3.1.** Если функция  $F(p)$  является аналитической в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ , в любой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$  функция  $F(p) \rightarrow 0$  равномерно относительно  $\arg p$  при  $|p| \rightarrow \infty$  и интеграл  $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) dp$  сходится абсолютно, то функция  $F(p)$  является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

**Лемма 1.3.2. (Еще один вариант леммы Жордана.)** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической во всей комплексной плоскости

---

<sup>1</sup>Лаплас Пьер Симон [1749-1827] – французский астроном, математик, физик, член Парижской Академии наук, иностранный член Петербургской Академии наук. Основные труды относятся к небесной механике, математике, математической физике.

за исключением конечного числа особых точек,  $M(R) = \sup_{|p|=R} |f(p)|$  и  $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$ . Обозначим через  $\gamma_l(R)$  дугу окружности  $|z| = R$ , лежащую в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \leq c$ . Тогда при  $t > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_l(R)} f(p) e^{tp} dp = 0. \quad (1.3.1)$$

**Доказательство.** Через  $C_R^l$  обозначим левую полуокружность с центром в точке  $p = 0$  и радиуса  $R$ . Делая замену переменной  $p = iz$  и учитывая стандартную формулировку леммы Жордана, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^l} f(p) e^{tp} dp &= \\ &= i \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} f(iz) e^{itz} dz = 0. \end{aligned}$$

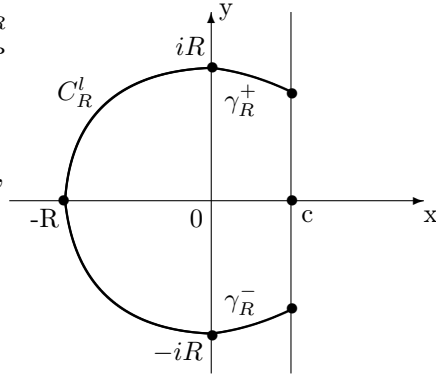


Рис. 1.3.1.

Следовательно при  $c \leq 0$  равенство (1) доказано. Если  $c > 0$ , то дуга  $\gamma_l(R)$  кроме полуокружности содержит еще две дуги, заключенные между прямыми  $\operatorname{Re} p = 0$  и  $\operatorname{Re} p = c$ , т.е.  $\gamma_l(R) = C_R^l \cup \gamma_R^+ \cup \gamma_R^-$ . Длина каждой из дополнительных дуг равна  $R \arcsin \frac{c}{R}$  и на каждой из них подынтегральная функция допускает оценку  $|f(p) e^{tp}| \leq M(R) e^{ct}$ . Поэтому при  $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{\gamma_R^\pm} f(p) e^{tp} dp \right| \leq M(R) e^{ct} R \arcsin \frac{c}{R} \rightarrow 0.$$

**Замечание.** Если  $t < 0$ , то равенство (1.3.1) выполняется для дуги  $\gamma_r(R)$ , лежащей в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z \geq c$ .

1) При  $c > 0, t > 0$  и целых  $n \geq 0$  вычислить интегралы

$$a) I_1(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} dp; \quad b) I_2(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{t^p}{p^{n+1}} dp \quad (n \geq 0).$$

*Решение.* а) Проводя дополнительную дугу  $\gamma_l(R)$ , используя лемму Жордана и учитывая, что точка  $p = 0$  для подынтегральной функции является полюсом порядка  $n + 1$ , получаем

$$I_1(n) = \operatorname{res}_{p=0} \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} = \frac{t^n}{n!}.$$

Это равенство эквивалентно соотношению

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (1.3.2)$$

б) По определению  $t^p = e^{p \ln t}$ , поэтому при различных значениях  $t$  мы получаем интегралы разного типа.

Поскольку  $\ln t > 0$  при  $t > 1$ , то согласно пункту а)

$$I_2(n) = \frac{(\ln t)^n}{n!}.$$

При  $t = 1$  первообразная находится в явном виде. При  $n > 0$  получаем  $I_2(n) = 0$ . При  $n = 0$  интеграл в смысле главного значения равен  $\frac{1}{2}$ .

Поскольку  $\ln t < 0$  при  $0 < t < 1$ , то для использования леммы Жордана нужно рассматривать дугу окружности, лежащую правее прямой интегрирования, но в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > c$  подынтегральная функция не имеет особых точек, следовательно  $I_2(n) = 0$ .

2) Найти изображение оригинала  $f(t) = t^a$ , где  $a > -1$  и не является целым числом. Показать, что  $\frac{1}{\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{p}}$ .

$$\text{Решение. По определению} \quad \Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^a e^{-t} dt.$$

Произвольное комплексное число из первого квадранта запишем в виде  $p = r e^{i\theta}$ , где  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

Вводя в новую комплексную переменную интегрирования  $q = \frac{t}{p}$ , получим

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_L q^a e^{-pq} dq, \quad (1.3.3)$$

где интеграл берется вдоль луча  $L : \arg q = -\theta$ .

Обозначим через  $C_R$  наименьшую из дуг окружности  $|q| = R$ , соединяющих луч  $L$  и положительную полуось. Всякая точка  $q \in C_R$  имеет вид  $q = R e^{i\varphi}$ , где  $-\theta < \varphi < 0$ . При таких ограничениях на изменение угла  $\varphi$  выполняется оценка  $\cos(\theta + \varphi) \geq \alpha > 0$  поскольку  $0 < \theta + \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

Теперь довольно просто получить нужную оценку для интеграла по дуге  $C_R$  при  $R \rightarrow \infty$

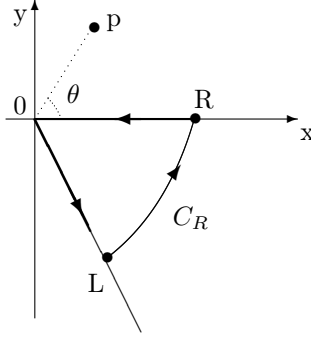


Рис. 1.3.2.

$$\left| \int_{C_R} q^a e^{-pq} dq \right| \leq R^{a+1} \left| \int_{-\theta}^0 e^{-rR \cos(\theta+\varphi)} d\varphi \right| \leq C R^{a+1} e^{-rR\alpha} \rightarrow 0.$$

Поскольку подинтегральная функция не имеет особенностей в секторе, образованном лучем  $L$  и положительной полуосью, то в формуле (1.3.3) интеграл по лучу  $L$  можно заменить на интеграл по положительной полуоси. Используя для новой переменной интегрирования символ  $t$ , получаем

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_0^\infty t^a e^{-pt} dt. \quad (1.3.4)$$

С точки зрения преобразования Лапласа равенство (1.3.4) означает, что

$$t^a \doteq \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}, \quad (1.3.5)$$

в частности, при  $a = -\frac{1}{2}$  получаем  $\frac{1}{\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{p}}$ . Поскольку  $\Gamma(n+1) = n!$ ,

то формула (1.3.5) является обобщением формулы (1.3.2) для случая нецелых показателей степени.

**ВОПРОС?** Что можно сказать о выполнении формулы (1.3.5) при  $a \leq -1$ ?

**Теорема 1.3.3. (Первая теорема разложения.)** Если аналитическое в окрестности бесконечно удаленной точки изображение  $F(p)$  имеет лорановское разложение

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{p^k}, \quad (1.3.6)$$

то оригиналом для  $F(p)$  служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(k-1)!} t^{k-1} \quad (t > 0). \quad (1.3.7)$$

**Доказательство.** Поскольку в окрестности бесконечно удаленной точки ряд (1.3.6) сходится равномерно, то используя формулу обращения для достаточно больших значений  $c = \operatorname{Re} p$  мы можем интегрировать ряд почленно

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{p^k} \right) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^k} dp = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(k-1)!} t^{k-1}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Последнее равенство в формуле (1.3.8) является следствием вычисления интеграла  $I_1(n)$  в примере 1.

Остается показать, что ряд (1.3.7) сходится и функция  $f(t)$  является оригиналом.

Согласно неравенствам Коши для коэффициентов ряда Лорана  $|c_{-k}| \leq M(R) R^k$ , где  $M(R) = \max_{|p|=R} |F(p)| < \infty$ . Учитывая разложение экспоненты в ряд Тейлора, получаем

$$|f(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_{-k}|}{(k-1)!} |t|^{k-1} \leq R M(R) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(R|t|)^{k-1}}{(k-1)!} = R M(R) e^{R|t|} < \infty.$$

Эта оценка показывает, что ряд (1.3.7) сходится абсолютно, а функция  $f(t)$  является оригиналом.

3) Найти разложение в степенной ряд функции Бесселя<sup>1</sup>

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} \frac{dz}{z}.$$

*Решение.* Находя интеграл при помощи вычетов, получаем  $J_0(x) = c_0$ , где  $c_0$  находится из разложения в ряд Лорана функции  $f(z) = e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ . Используя разложение экспоненты в ряд Тейлора, получаем

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{-m}}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m.$$

Следовательно

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

4) Показать, что  $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \doteq J_0(2\sqrt{t}) = f(t)$ .

*Решение.* Используя первую теорему разложения, получаем

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^{k+1} k!} \doteq \\ &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k!]^2} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k!]^2} \left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2k} = J_0(2\sqrt{t}) = f(t). \end{aligned}$$

Таким образом теперь мы можем представить функцию Бесселя интегралом по прямой, параллельной мнимой оси

$$J_0(2\sqrt{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(pt-\frac{1}{p})} \frac{dp}{p}. \quad (1.3.9)$$

---

<sup>1</sup>Бессель Фридрих Вильгельм [1784-1846] – немецкий астроном и математик, член Берлинской Академии наук, иностранный почетный член Петербургской Академии наук. Основные труды относятся к астрономии и дифференциальным уравнениям.



5. Показать, что  $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \doteq J_0(t) = f(t)$ .

*Решение.* Положим  $\tau = 2\sqrt{t}$  и в интеграле (1.3.9) сделаем замену переменной  $p = \frac{2}{\tau} z$ . В результате получаем

$$J_0(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} e^{\frac{\tau}{2}(z - \frac{1}{z})} \frac{dz}{z}. \quad (1.3.10)$$

Делая в интеграле (1.3.10) замену переменной  $q = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)$ , получаем

$$J_0(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{q\tau}}{\sqrt{q^2 + 1}} dq,$$

где кривая  $L$  является образом прямой  $\operatorname{Re} z = c_1$ .

При  $z \rightarrow c_1 \pm i\infty$  соответствующая точка  $q \rightarrow \frac{c_1 \pm i\infty}{2}$ . Поскольку подинтегральная функция имеет особенности лишь в точках  $z = \pm i$ , а кривая  $L$  проходит правее особых точек, то интегрирование по кривой  $L$  может быть заменено на интегрирование по прямой  $\operatorname{Re} q = \frac{c_1}{2}$ . Вспоминая формулу обращения, получаем

$$f(t) = J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} = F(p).$$

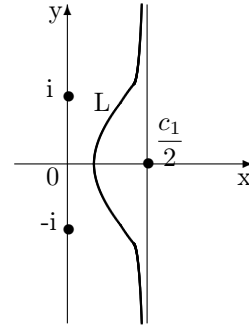


Рис. 1.3.3.

**Теорема 1.3.4. (Вторая теорема разложения.)** Если изображение является дробно-рациональной функцией  $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ , то оригиналом является функция

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p=a_k} (F(p) e^{pt}),$$

причем вычеты берутся по всем полюсам  $a_k$  функции  $F(p)$ .

Поскольку изображение должно стремиться к нулю при  $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$ , то дробно-рациональная функция  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ . Поэтому доказательство является непосредственным следствием формулы обращения, леммы 1.3.2 и основной теоремы теории вычетов.

В случае простых полюсов вычеты легко вычисляются в явном виде.

**Следствие 1.3.5.** Если все полюсы функции  $F(p)$  простые, то

$$F(p) \doteq \sum_k \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}.$$

Если все коэффициенты многочлена  $Q(p)$  являются действительными, то всякому его комплексному корню  $b$  соответствует комплексно сопряженный корень  $\bar{b}$ , поскольку  $Q(b) = \overline{Q(\bar{b})} = 0$ , при этом

$$\operatorname{res}_{p=b} (F(p) e^{pt}) = \overline{\operatorname{res}_{p=\bar{b}} (F(p) e^{pt})}.$$

Это позволяет модифицировать утверждение теоремы 1.3.4.

**Следствие 1.3.6.** Если многочлены  $P(p)$  и  $Q(p)$  имеют действительные коэффициенты, то

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p=a_k} (F(p) e^{pt}) + 2 \operatorname{Re} \sum_m \operatorname{res}_{p=b_m} (F(p) e^{pt}),$$

где  $a_k$  – действительные корни многочлена  $Q(p)$ , а  $b_m$  – его комплексные корни, лежащие в верхней полуплоскости.

6) Показать, что

$$a) \frac{1}{p(p+1) \dots (p+n)} \doteq \frac{1}{n!} (1 - e^{-t})^n;$$

$$b) \frac{1}{(p^2+1)^3} \doteq \frac{1}{8} (3 \sin t - 3t \cos t - t^2 \sin t).$$

*Решение.* а) Поскольку все полюсы простые, то воспользуемся следствием 1.3.5. Пусть  $0 \leq k \leq n$ , тогда

$$[p(p+1) \dots (p+n)]'_{p=-k} = (-k) \cdot (-k+1) \dots (-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-k) = (-1)^k k! (n-k)!.$$

Учитывая формулу бинома Ньютона, получаем

$$\frac{1}{p(p+1) \dots (p+n)} \doteq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k e^{-kt} = \frac{1}{n!} (1 - e^{-t})^n.$$

б) Функция  $F(p)$  имеет два полюса третьего порядка в точках  $p = \pm i$ . Найдем вычет функции  $F(p) e^{pt}$  в точке  $i$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=i} \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{pt}}{(p+i)^3} \right)''_{p=i} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{t^2 e^{pt}}{(p+i)^3} - \frac{6t e^{pt}}{(p+i)^4} + \frac{12 e^{pt}}{(p+i)^5} \right)_{p=i} = \frac{1}{2} \left( -\frac{t^2 e^{it}}{8i} - \frac{6t e^{it}}{16} + \frac{12 e^{it}}{32i} \right). \end{aligned}$$

Используя следствие 1.3.6, получаем

$$\frac{1}{(p^2+1)^3} \doteq 2 \operatorname{Re} \frac{1}{2} \left( -\frac{t^2 e^{it}}{8i} - \frac{6t e^{it}}{16} + \frac{12 e^{it}}{32i} \right) = \frac{1}{8} (3 \sin t - 3t \cos t - t^2 \sin t).$$

**Теорема 1.3.7. (Обобщенная теорема умножения.<sup>1)</sup>** Пусть функции  $G(p)$ ,  $h(p)$  и  $g(t, \tau)$  таковы, что

$$g(t, \tau) \doteq G(p) e^{-\tau h(p)}.$$

Если  $F(p) \doteq f(t)$ , то

$$F(h(p))G(p) \doteq \int_0^\infty f(\tau)g(t, \tau) d\tau. \quad (1.3.11)$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(\tau)g(t, \tau) d\tau &\doteq \int_0^\infty \left( \int_0^\infty f(\tau)g(t, \tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \left( \int_0^\infty g(t, \tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = G(p) \int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau h(p)} d\tau = G(p)F(h(p)). \end{aligned}$$

Формула (1.3.11) является обобщением теоремы Бореля об умножении изображений. Пусть  $g(t) \doteq G(p)$ , тогда по теореме о запаздывании оригинала  $g(t - \tau) \doteq G(p) e^{-\tau p}$ . Полагая  $h(p) = p$  и  $g(t, \tau) = g(t - \tau)$ ,

---

<sup>1</sup>Теорема доказана советским математиком А.М.Эфросом в 1935 г.

непосредственно из формулы (1.3.11) получаем утверждение теоремы Бореля

$$\begin{aligned} F(p)G(p) &= F(h(p))G(p) \doteq \\ &\doteq \int_0^\infty f(\tau)g(t, \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau = (f * g)(t). \end{aligned}$$

7) Пусть  $F(p) \doteq f(t)$ . Показать, что

$$a) \frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) \doteq \int_0^\infty f(\tau) J_0\left(2\sqrt{t\tau}\right) d\tau; \quad b) \int_0^\infty \cos(\tau) J_0\left(2\sqrt{t\tau}\right) d\tau = \sin t.$$

*Решение.* а) Положим  $G(p) = \frac{1}{p}$ , и  $h(p) = \frac{1}{p}$  и  $g(t, \tau) \doteq \frac{1}{p} e^{-\tau/p}$ . Используя теорему подобия для преобразования Лапласа и результат задачи 4, получаем

$$g(t, \tau) = J_0\left(2\sqrt{t\tau}\right).$$

Из теоремы Эфроса следует, что

$$\frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) \doteq \int_0^\infty f(\tau) J_0\left(2\sqrt{t\tau}\right) d\tau. \quad (1.3.12)$$

б) Положим  $f(\tau) = \cos \tau$ , тогда

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1/p}{1 + (1/p)^2} = F\left(\frac{1}{p}\right).$$

Согласно формуле (1.3.12) получаем

$$\int_0^\infty \cos(\tau) J_0\left(2\sqrt{t\tau}\right) d\tau \doteq \frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2 + 1} \doteq \sin t.$$

В силу единственности оригинала

$$\int_0^\infty \cos(\tau) J_0\left(2\sqrt{t\tau}\right) d\tau = \sin t.$$

#### § 4. Обращение степенного ряда.

Пусть функция  $w = f(z)$  является аналитической в окрестности точки  $z_0 \in C$ , и  $f'(z_0) \neq 0$ . Согласно теореме об обратной функции существуют такие окрестности  $U$  точки  $z_0$  и  $V$  точки  $w_0 = f(z_0)$ , что отображение  $f : U \rightarrow V$  является конформным. Следовательно существует аналитическая функция  $z = f^{-1}(w) = h(w)$  являющаяся обратной к функции  $w = f(z)$ .

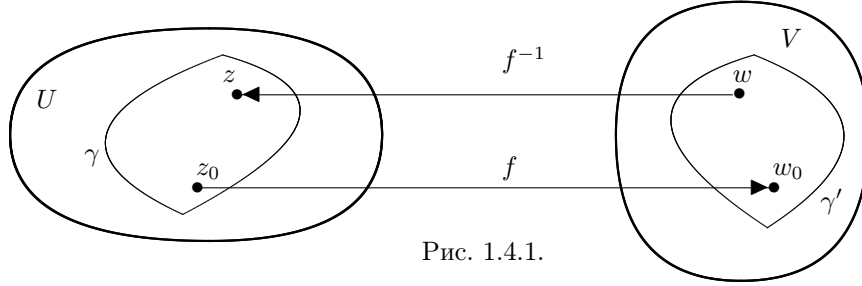


Рис. 1.4.1.

Нас будет интересовать разложение функции  $h(w)$  в степенной ряд в окрестности точки  $w_0$ , т.е. нахождение коэффициентов ряда

$$z = h(w) = f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n. \quad (1.4.1)$$

Рассмотрим замкнутый контур  $\gamma'$ , содержащий внутри себя точки  $w_0$  и  $w$ , а также его прообраз контур  $\gamma$ , содержащий внутри себя точки  $z_0$  и  $z$ . Воспользуемся интегральной формулой Коши для функции  $f^{-1}(w)$ , а затем заменой переменной перейдем к интегрированию по контуру  $\gamma$

$$\begin{aligned} z = h(w) = f^{-1}(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f^{-1}(\tau) d\tau}{\tau - w} = \left| \begin{array}{l} t = f^{-1}(\tau) \\ \tau = f(t) \\ d\tau = f'(t) dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t f'(t)}{f(t) - w} dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n. \end{aligned}$$

Коэффициенты ряда Тейлора для аналитической функции  $h(w)$  находятся по формуле

$$b_n = \frac{h^{(n)}(w_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t f'(t)}{(f(t) - w_0)^{n+1}} dt.$$

Отметим, что коэффициент  $b_0$  проще найти из равенства (1.4.1):  $b_0 = f^{-1}(w_0) = z_0$ . При  $n > 0$  формулу для коэффициентов  $b_n$  можно упростить, используя интегрирование по частям. Поскольку

$$d \left( \frac{t}{(f(t) - w_0)^n} \right) = \frac{dt}{(f(t) - w_0)^n} - \frac{nt f'(t) dt}{(f(t) - w_0)^{n+1}}$$

и интеграл от дифференциала однозначной функции по замкнутому контуру равен нулю, то

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t f'(t)}{(f(t) - w_0)^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi i n} \int_{\gamma} \frac{dt}{(f(t) - w_0)^n}.$$

По условию  $f(z_0) - w_0 = 0$  и  $f'(z_0) \neq 0$ , следовательно в последнем интеграле подынтегральная функция имеет в точке  $t = z_0$  полюс порядка  $n$ . Находя вычет в точке  $z_0$ , получаем

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ \frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4.2)$$

Если  $z_0 = 0$  и  $w_0 = 0$ , то формулы (1.4.2) приобретают более простой вид

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[ \left( \frac{z}{f(z)} \right)^n \right]_{z=0}^{(n-1)}. \quad (1.4.3)$$

При этом следует иметь ввиду, что исходная функция  $f(z)$  часто сама определяется как сумма некоторого степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Поэтому полезно знать явные формулы, связывающие коэффициенты рядов для прямой и обратной функций

$$b_0 = z_0, \quad b_1 = \frac{1}{c_1}, \quad b_2 = -\frac{c_2}{c_1^3}, \quad b_3 = \frac{2c_2^2 - c_1 c_3}{c_1^5}, \quad b_4 = \frac{5c_1 c_2 c_3 - 5c_2^3 - c_4 c_1^2}{c_1^7}, \dots \quad (1.4.4)$$

Формулы (1.4.4) являются следствием формул (1.4.2)

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - c_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{c_1(z - z_0) + o(z - z_0)} = \frac{1}{c_1}, \\ b_2 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \left( \frac{z - z_0}{f(z) - c_0} \right)^2 \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - c_0} \cdot \frac{f(z) - c_0 - (z - z_0)f'(z)}{(f(z) - c_0)^2} = \\ &= \frac{1}{c_1} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{-c_2(z - z_0)^2 + o((z - z_0)^2)}{c_1^2(z - z_0)^2 + o((z - z_0)^2)} = -\frac{c_2}{c_1^3}, \dots \end{aligned}$$

1) В окрестности точки  $w_0 = 0$  для многозначной функции  $h(w)$ , обратной к функции  $w = f(z) = \frac{\sin z}{2 - z}$ , найти первые члены разложения аналитической ветви, определяемой условием  $h(0) = 0$ .

*Решение.* Достаточно найти первые члены разложения в ряд Тейлора функции  $f(z)$ , а затем воспользоваться формулами (1.4.4). Используя известные асимптотические равенства, получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{2 - z} = \frac{1}{2} \sin z \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left( z - \frac{z^3}{6} + o(z^4) \right) \left( 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + o(z^3) \right) = \\ &= \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} z^2 + \frac{1}{24} z^3 + o(z^3). \end{aligned}$$

Находим коэффициенты ряда для обратной функции:  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = -2$ ,  $b_3 = \frac{10}{3}$ . Следовательно

$$z = h(w) = 2w - 2w^2 + \frac{10}{3}w^3 + o(w^3).$$

2) Найти разложение в ряд решения  $z = z(w)$  трансцендентного уравнения

$$w = ze^{-az}.$$

*Решение.* Согласно формулам (1.4.3)

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{anz} \Big|_{z=0} = \frac{(an)^{n-1}}{n!},$$

и следовательно решение имеет вид

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} w^n.$$

3) Используя разложение в ряд по степеням  $w$  решения уравнения

$$2 \frac{z-a}{z^2-1} = w, \quad (1.4.5)$$

вывести формулы Родрига для многочленов Лежандра.

*Решение.* Положим  $z_0 = a$ , тогда  $w_0 = 0$  и

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n,$$

где

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ \left( \frac{z^2-1}{2} \right)^n \right] \Big|_{z=a} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[ (a^2-1)^n \right]. \quad (1.4.6)$$

Из формулы (1.4.5) получаем равенство

$$wz^2 - 2z = w - 2a. \quad (1.4.7)$$

Умножая равенство (1.4.7) на  $w$  и прибавляя к обеим частям по единице, получаем

$$(1-wz)^2 = 1 - 2aw + w^2. \quad (1.4.8)$$

Считая  $z$  функцией переменных  $w$  и  $a$ , дифференцируя равенство (1.4.7) по  $a$  и учитывая равенство (1.4.8), получаем

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{1-wz} = \frac{1}{\sqrt{1-2aw+w^2}}.$$

Учитывая равенства (1.4.6) и определение многочленов Лежандра  $P_n(a)$  через производящую функцию, получаем



$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(a) w^n &= \frac{1}{\sqrt{1-2aw+w^2}} = \\
&= \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left( a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[ (a^2-1)^n \right] w^n \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{da^n} \left[ (a^2-1)^n \right] w^n.
\end{aligned}$$

Следствием единственности разложения производящей функции являются формулы Родрига

$$P_n(a) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{da^n} \left[ (a^2-1)^n \right].$$

### Обобщенный ряд Бурмана-Лагранжа

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в окрестности точки  $z = z_0$ , причем  $f'(z_0) \neq 0, f(z_0) = w_0$ . Если функция  $g(z)$  аналитична в окрестности точки  $z = z_0$ , то

$$g(z) = d_0 + d_1 (f(z) - w_0) + d_2 (f(z) - w_0)^2 + d_3 (f(z) - w_0)^3 + \dots, \quad (1.4.9)$$

где  $d_0 = g(z_0)$ , а при  $n > 0$

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ g'(z) \frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right]. \quad (1.4.10)$$

Ряд (1.4.9) представляет собой разложение одной аналитической функции  $g(z)$  по степеням другой аналитической функции  $f(z)$  и называется рядом Бурмана-Лагранжа. Первоначально разложение для случая  $w_0 = 0$  было получено Лагранжем<sup>1</sup> в 1770 году, общий случай опубликован в работе Бурмана<sup>2</sup> в 1799 году.

<sup>1</sup>Лагранж Жозеф Луи [1736-1813] – французский математик и механик, член Парижской академии наук, иностранный почетный член Петербургской академии наук, основные исследования относятся к вариационному исчислению и механике.

<sup>2</sup>Burmann H., "Mem. de l'Inst. national des sci. et arts. Sci. Math, et Phys. P., 1799, t. 2, p. 13-17.

Формулы (1.4.10) для коэффициентов ряда Бурмана-Лагранжа являются следствием равенства

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(t)f'(t)}{f(t) - f(z)} dt, \quad (1.4.11)$$

обобщающего интегральную формулу Коши и доказываемого довольно просто.

Поскольку  $f'(z_0) \neq 0$ , то в силу непрерывности производной  $f'(z) \neq 0$  для точек  $z$  близких к  $z_0$ . Поэтому в некоторой окрестности точки  $z_0$  функция  $f$  будет взаимно однозначной и внутри достаточно малого контура  $\gamma$  подинтегральная функция будет иметь единственную особую точку  $t = z$ , являющуюся простым полюсом. Находя вычет в точке  $z$ , получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(t)f'(t)}{f(t) - f(z)} dt = \lim_{t \rightarrow z} \frac{g(t)f'(t)(t - z)}{f(t) - f(z)} = g(z).$$

Рассмотрим окружность  $C_\rho = \{z \mid |z - z_0| = \rho\}$ , ее образом при отображении  $w = f(z)$  будет замкнутый контур  $\gamma$ , содержащий точку  $w_0$  внутри себя. Расстояние от точки  $w_0$  до контура  $\gamma$  будет положительным:  $\text{dist}(w_0, \gamma) = \alpha > 0$ . В силу непрерывности функции  $f(z)$  существует такой круг  $B(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ , что  $|f(z) - w_0| < \alpha$  для всех  $z \in \overline{B(z_0, r)}$ . Следовательно

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{f(t) - w_0} \right| \leq q < 1 \quad (1.4.12)$$

для всех  $z \in \overline{B(z_0, r)}$  и всех  $t \in C_\rho$ .

Используя формулу для суммы геометрической прогрессии преобразуем подинтегральное выражение

$$\begin{aligned} \frac{g(t)f'(t)}{f(t) - f(z)} &= \frac{g(t)f'(t)}{f(t) - w_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{f(z) - w_0}{f(t) - w_0}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (f(z) - w_0)^n \cdot \frac{g(t)f'(t)}{(f(t) - w_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

В силу оценки (1.4.12) ряд сходится равномерно по  $t$ , и его можно почленно интегрировать. Из равенства (1.4.11) получаем

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (f(z) - w_0)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{g(t) f'(t)}{f(t) - f(z)} dt =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f(z) - w_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{g(t) f'(t)}{(f(t) - w_0)^{n+1}} dt.$$

Очевидно, что  $d_0 = g(z_0)$ . При  $n > 0$ , учитывая равенство

$$d \left( \frac{g(t)}{(f(t) - w_0)^n} \right) = \frac{g'(t) dt}{(f(t) - w_0)^n} - \frac{ng(t) f'(t) dt}{(f(t) - w_0)^{n+1}},$$

интегрируя по частям и находя вычет в точке  $z_0$ , получаем

$$d_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{C_\rho} \frac{g'(t)}{(f(t) - w_0)^n} dt = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ g'(z) \frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right].$$

4) В окрестности точки  $z = 0$  найти разложение функции  $g(z) = e^{bz}$  по степеням функции  $f(z) = z e^{-z}$  и показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} e^{-n} = 1.$$

*Решение.* В данном случае  $z_0 = 0$ ,  $w_0 = 0$  и  $d_0 = g(0) = 1$ . Согласно формулам (1.4.10) получаем

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [b e^{bz} e^{nz}] = \frac{b(b+n)^{n-1}}{n!}.$$

Следовательно

$$e^{bz} = 1 + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b+n)^{n-1}}{n!} z^n e^{-nz}.$$

Полагая  $z = 1$ , из последнего равенства получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b+n)^{n-1}}{n!} e^{-n} = \frac{e^b - 1}{b}.$$

Ряд сходится равномерно по  $b$  в окрестности значения  $b = 0$ , поэтому, переходя к пределу при  $b \rightarrow 0$ , получаем числовое равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} e^{-n} = 1.$$

## § 5. Разложение функций на элементарные дроби и в бесконечные произведения

В основном курсе теории функций уже изучались разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. В этом параграфе мы рассмотрим новые представления: мероморфных функций в виде рядов специального типа и целых функций в виде бесконечных произведений.

### Разложение мероморфных функций на элементарные дроби

Функция  $w = f(z)$  называется *мероморфной*, если во всякой ограниченной области  $D \subset \mathbb{C}$  она является аналитической всюду, за исключением конечного числа полюсов.

**Определение.** Рассмотрим последовательность  $\{\Gamma_n\}$  вложенных замкнутых контуров, содержащих внутри себя точку  $z = 0$  ( $\Gamma_n$  лежит внутри  $\Gamma_{n+1}$ ). Обозначим через  $S_n$  длину контура  $\Gamma_n$ , а через  $d_n$  расстояние от начала координат до контура  $\Gamma_n$ . Последовательность контуров называется *правильной*, если  $d_n \rightarrow \infty$  и  $S_n \leq L d_n$  ( $L < +\infty$ ).

**Теорема 1.5.1.** Пусть все полюсы  $a_k$  мероморфной функции  $f(z)$  (аналитической в точке  $z = 0$ ) являются простыми и занумерованы в порядке неубывания их модулей. Если функция  $f(z)$  ограничена на некоторой правильной системе контуров, то

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left( \frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right), \quad (1.5.1)$$

где  $A_k = \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$ .

Ряд сходится равномерно на всякой ограниченной области с выколотыми полюсами  $a_k$ .

**Доказательство.** Пусть  $G_n$  – внутренность контура  $\Gamma_n$ ,  $z \in G_n$  и  $z \neq a_k$ . Рассмотрим функцию  $F(t) = \frac{zf(t)}{t(t-z)}$ , имеющую полюсы в точках  $t = 0, t = z, t = a_k$ . Используя теорему о вычетах, вычислим интеграл

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} F(t) dt = \operatorname{res}_{t=0} F(t) + \operatorname{res}_{t=z} F(t) + \sum_{a_k \in G_n} \operatorname{res}_{t=a_k} F(t).$$

Поскольку все полюсы  $a_k$  являются простыми, а точки  $t = 0$  и  $t = z$  являются либо простыми полюсами либо устранимыми точками, то

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{t=0} F(t) &= \left[ \frac{zf(t)}{t-z} \right]_{t=0} = -f(0), & \operatorname{res}_{t=z} F(t) &= \left[ \frac{zf(t)}{t} \right]_{t=z} = f(z), \\ \operatorname{res}_{t=a_k} F(t) &= \left[ \frac{z}{t(t-z)} \right]_{t=a_k} \cdot \operatorname{res}_{t=a_k} f(t) = \frac{z A_k}{a_k(a_k - z)}. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$I_n(z) = -f(0) + f(z) + \sum_{a_k \in G_n} \frac{A_k z}{a_k(a_k - z)}$$

или

$$f(z) = f(0) + \sum_{a_k \in G_n} A_k \left( \frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right) + I_n(z). \quad (1.5.2)$$

Остается показать, что  $I_n(z)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  – ограниченная область, тогда существует круг  $K = \{z \mid |z| < R\}$  такой, что  $D \subset K$ . Выберем номер  $n$  так, что  $d_n > R$ . Тогда для всех  $z \in D$  и всех  $t \in \Gamma_n$  выполняется оценка  $|t-z| \geq |t| - |z| > d_n - R$ .

Согласно условию  $S_n \leq Ld_n$  и  $|f(t)| \leq M$  при всех  $t \in \Gamma_n$  и всех  $n \in N$ . Следовательно

$$|I_n(z)| = \frac{|z|}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(t)|}{|t||t-z|} |dt| \leq \frac{RM}{2\pi} \frac{S_n}{d_n(d_n - R)} \leq \frac{RML}{2\pi(d_n - R)} \rightarrow 0,$$

поскольку  $d_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Переходя к пределу в равенстве (1.5.2), получаем утверждение теоремы.

**Примеры.** а) Доказать следующие разложения мероморфных функций:

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{ctg} z &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}; & 2) \operatorname{cth} z &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2\pi^2}; \\ 3) \frac{1}{e^z - 1} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4k^2\pi^2}; & 4) \operatorname{tg} z &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}}; \\ 5) \frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2z}{z^2 - k^2\pi^2}; & 6) \frac{1}{\sin^2 z} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - k\pi)^2}. \end{aligned}$$

б) Найти сумму ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}$ .

**Решение.** а1) Непосредственно воспользоваться теоремой мы не можем, т.к. точка  $z = 0$  является полюсом функции  $\operatorname{ctg} z$ . Поэтому рассмотрим вспомогательную функцию  $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ , для которой начало координат является устранимой особой точкой. Полагая  $f(0) = 0$ , получаем аналитическую в точке  $z = 0$  функцию, удовлетворяющую условиям теоремы. Функция  $f(z)$  является мероморфной, имеет простые полюсы в точках  $a_k = k\pi$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и  $\operatorname{res}_{z=k\pi} f(z) = 1$ .

Покажем, что функция  $f(z)$  ограничена на специальной правильной системе контуров  $\{\Gamma_n\}$ , состоящей из квадратов с центром в точке  $z = 0$  и сторонами длины  $l_n = \pi + 2\pi n$ , параллельными осям координат.

Все точки, лежащие на двух вертикальных сторонах  $L_2$  и  $L_4$  квадрата  $\Gamma_n$ , имеют комплексную

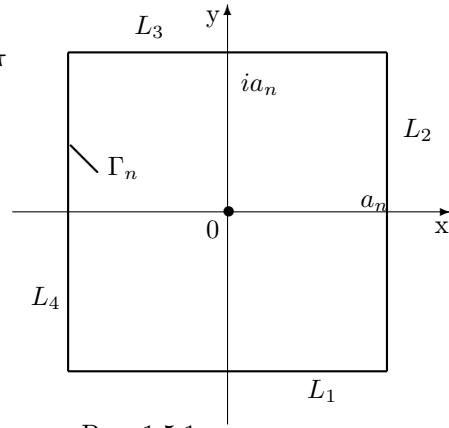


Рис. 1.5.1.

запись вида  $z = \pm \frac{\pi}{2} \pm \pi n + iy$ , поэтому

$$|\operatorname{ctg} z| = |\operatorname{tg}(iy)| = \frac{|e^y - e^{-y}|}{|e^y + e^{-y}|} \leq 1.$$

Точки, лежащие на верхней стороне  $L_3$  квадрата  $\Gamma_n$ , имеют вид  $z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ , поэтому

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|e^{2iz} + 1|}{|e^{2iz} - 1|} = \frac{|e^{2ix} e^{-l_n} + 1|}{|e^{2ix} e^{-l_n} - 1|} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1} = M.$$

Поскольку  $|\operatorname{ctg}(-z)| = |\operatorname{ctg} z|$ , то последняя оценка будет выполняться и на нижней стороне квадрата.

Согласно теореме 1.5.1

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right). \quad (1.5.3)$$

Между контурами  $\Gamma_{k-1}$  и  $\Gamma_k$  у функции  $f(z)$  имеется ровно два полюса:  $a_k = k\pi$  и  $a_{-k} = -k\pi$ . Объединяя в сумме (1.5.3) слагаемые, соответствующие этим полюсам, получаем

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (1.5.4)$$

а2) Является следствием а1) и равенства  $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg}(iz)$ .

а3) Является следствием а2) и равенства

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2}.$$

а4) Является следствием равенства  $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$  и первой части формулы (1.5.4).

а5) Является следствием равенства

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right).$$

а6) Является следствием дифференцирования формулы (1.5.3).

б) Для нахождения искомого ответа нужно в а2) подставить  $z = a\pi$ . В результате получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left( \operatorname{cth}(a\pi) - \frac{1}{a\pi} \right).$$

### Разложение целых функции в бесконечное произведение

Аналитическая на всей комплексной плоскости функция называется *целой*.

**Теорема 1.5.2.** Если целая функция  $h(z)$  такова, что мероморфная функция  $f(z) = h'(z)/h(z)$  удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1, то

$$h(z) = h(0)e^{Bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{z}{a_k} \right) e^{z/a_k} \right]^{n_k}, \quad (1.5.5)$$

где  $a_k$  — нули функции  $h(z)$ ,  $n_k$  — кратность нуля и  $B = f(0) = \frac{h'(0)}{h(0)}$ .

**Доказательство.** Функция  $f(z)$  имеет полюсы только в точках, являющихся нулями функции  $h(z)$ , при этом  $\operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = n_k$ . Согласно теореме 1.5.1

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left( \frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right).$$

Интегрируя равенство от 0 до  $z$  вдоль кривой, не проходящей через нули функции  $h(z)$ , приходим к формуле

$$\ln h(z) - \ln h(0) = f(0)z + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left[ \ln \left( 1 - \frac{z}{a_k} \right) + \frac{z}{a_k} \right].$$

Потенцируя, получаем

$$h(z) = h(0)e^{f(0)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{z}{a_k} \right) e^{z/a_k} \right]^{n_k}.$$



**Примеры.** Доказать следующие разложения:

$$a) \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right); \quad b) e^z - 1 = ze^{z/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4k^2 \pi^2}\right).$$

*Решение.* а) Рассмотрим целую функцию  $h(z) = \frac{\sin z}{z}$ , имеющую простые нули в точках  $a_k = k\pi$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Функция

$$f(z) = \frac{h'(z)}{h(z)} = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1, и  $h(0) = 1, h'(0) = 0$ . По формуле (1.5.5) получаем

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{z/k\pi} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-z/k\pi} \right].$$

Следовательно

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

б) Следует из равенств  $e^z - 1 = 2e^{z/2} \operatorname{sh} \frac{z}{2}$  и  $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$ .

## II. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В этой части мы познакомимся с приложениями теории конформных отображений к решению некоторых задач, имеющих физическое содержание. В математических моделях физических процессов особую роль играют оператор Лапласа и связанные с ним гармонические функции. Поскольку на плоскости при конформной замене переменной гармоническая функция преобразуется вновь в гармоническую, появляется возможность переноса задачи из исходной области, часто имеющей довольно сложное строение, в каноническую область (к примеру, в *круг*), в которой можно использовать дополнительные технические приемы для нахождения решения.

**Определение.** Отображение  $f$  области  $D \subset C$  на область  $D' \subset C$  называют *конформным*, если отображение  $f : D \rightarrow D'$

1. является взаимно однозначным;

и в каждой точке  $z \in D$  обладает свойствами:

2. постоянства растяжения по всем направлениям;

3. консерватизма углов.

**Замечание.** Отображение обратное к конформному является конформным.

**Замечание.** Аналитическая функция  $f(z)$ , у которой  $f'(z) \neq 0$ , локально осуществляет конформное отображение.

Существование соответствующего конформного отображения для односвязных областей является следствием теоремы Римана, а для многосвязных областей следствием различных ее обобщений.

**Теорема Римана.**<sup>1</sup> Для произвольных односвязных областей  $D$  и  $D^*$ , границы которых состоят более чем из одной точки, существует конформное отображение области  $D$  на область  $D^*$ .

**Замечание.** Для двух односвязных областей  $D$  и  $D^*$  существует бесконечно много конформных отображений  $f : D \rightarrow D^*$ . Семейство

---

<sup>1</sup>Риман Георг Фридрих Бернхард (1826-1866) – немецкий математик. Основные работы посвящены математическому анализу, теории функций комплексного переменного и геометрии. Основоположник геометрического направления в теории аналитических функций.

таких отображений зависит от трех действительных параметров. Фиксируя значения *трех параметров*, мы получим *единственное* конформное отображение  $f : D \rightarrow D^*$ , удовлетворяющее указанным условиям. В зависимости от задачи могут выбираться различные наборы параметров, обеспечивающих единственность отображения.

Для многосвязных областей ситуация сложнее, для существования конформного отображения одной области на другую должны выполняться некоторые дополнительные условия на геометрическую структуру этих областей. Концентрическое кольцо  $K(r, R) = \{r < |z| < R\}$  может быть конформно отображено на кольцо  $K(r_1, R_1) = \{r_1 < |z| < R_1\}$  тогда и только тогда, когда эти кольца подобны, т.е.  $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r}$ . Всякая двухсвязная область  $D \subset \mathbb{C}$  может быть конформно отображена на некоторое концентрическое кольцо  $K(r, R)$ , при этом отношение  $\frac{R}{r}$  определено однозначно и называется *конформным модулем* области  $D$ . Следовательно две двухсвязные области, имеющие разные конформные модули, не могут быть конформно отображены одна на другую.

Таким образом для многосвязных областей полного аналога теоремы Римана быть не может, однако выполняется следующее утверждение

*Любую  $n$ -связную область  $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ , ограниченную простыми замкнутыми кривыми, можно конформно отобразить на всю расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  с  $n$  разрезами по некоторым отрезкам прямых, параллельных действительной оси.*

## §1. Плоскопараллельные векторные поля

Мы ограничимся рассмотрением *стационарных плоскопараллельных векторных полей*  $\mathbf{V}$  в пространстве  $R^3$ , т.е. будем предполагать, что

1. векторы поля не меняются с течением времени и зависят лишь от координат точки приложения;
2. все векторы поля параллельны некоторой фиксированной плоскости  $\alpha$ .

Такое поле однозначно определяется плоским полем векторов в плоскости  $\alpha$ , и для его описания достаточно двух скалярных функций (двух компонент вектора) от двух переменных (двух координат точки на плоскости). Вводя в плоскости систему декартовых координат  $(x, y)$  и полагая  $z = x + iy$ , мы будем использовать для поля  $\mathbf{V}$  с компонентами

$(V_x, V_y)$  комплексную форму записи

$$\mathbf{V} = V_x + iV_y,$$

где  $V_x = V_x(x, y) = V_x(z)$ ,  $V_y = V_y(x, y) = V_y(z)$ .

Основными интегральными характеристиками плоского векторного поля являются:

*поток* векторного поля  $\mathbf{V}$  через кривую  $\gamma$

$$N = \int_{\gamma} (\mathbf{V}, \vec{n}) dl = \int_{\gamma} -V_y dx + V_x dy$$

и *циркуляция* векторного поля  $\mathbf{V}$  вдоль замкнутого контура  $C$

$$\Gamma = \int_C (\mathbf{V}, \vec{\tau}) dl = \int_C V_x dx + V_y dy,$$

в этих формулах  $\vec{\tau}$  – единичный касательный вектор,  $\vec{n}$  – единичная нормаль и  $\vec{n} = -i\vec{\tau}$ .

Если гладкое поле  $\mathbf{V}$  является бездивергентным в области  $D \subset \mathbb{C}$ , т.е.  $\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$ , то дифференциальная форма потока  $\omega_N = -V_y dx + V_x dy$  является замкнутой в  $D$ , т.е.  $d\omega_N = 0$ . Согласно теореме Пуанкаре форма  $\omega_N$  является локально точной, и у нее существует первообразная, т.е. такая функция  $v = v(x, y)$ , что  $dv = \omega_N$  и следовательно

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -V_y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = V_x. \quad (2.1.1)$$

Функцию  $v$  называют *функцией тока*, поскольку ее линии уровня

$$L_a = \{(x, y) \in D \mid v(x, y) = a\}$$

совпадают с траекториями движения, определяемыми векторным полем  $\mathbf{V}$ , т.е. кривая  $L_a$  является интегральной линией, поскольку в каждой точке соответствующий вектор поля  $\mathbf{V}$  является касательным к кривой  $L_a$ . Линию уровня  $L_a$  называют *линией тока*, а область, ограниченную двумя линиями тока называют *трубкой тока*. Легко заметить, что поток через любое сечение трубки тока одинаков. Действительно,

поток через сечение  $\gamma(a, b)$  с началом в точке  $z_a \in L_a$  и концом в точке  $z_b \in L_b$  вычисляется просто

$$N = \int_{\gamma(a,b)} \omega_N = \int_{\gamma(a,b)} dv = v(z_b) - v(z_a) = b - a.$$

Если гладкое поле  $\mathbf{V}$  является безвихревым в области  $D \subset \mathbb{C}$ , т.е.  $\text{rot } \mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$ , то форма работы  $\omega_\Gamma = V_x dx + V_y dy$  является замкнутой в  $D$ , т.е.  $d\omega_\Gamma = 0$ . Согласно теореме Пуанкаре форма  $\omega_\Gamma$  является локально точной, и у нее существует первообразная, т.е. такая функция  $u = u(x, y)$ , что  $du = \omega_\Gamma$  и следовательно

$$\text{grad } u = \mathbf{V}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = V_y. \quad (2.1.2)$$

Функцию  $u$  называют *потенциальной функцией* или *потенциалом* поля  $\mathbf{V}$ .

Если гладкое поле  $\mathbf{V}$  является одновременно бездивергентным и безвихревым в области  $D$ , то согласно равенствам (2.1.1) и (2.1.2) потенциальная функция  $u$  и функция тока  $v$  оказываются связанными условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = V_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = V_y$$

и являются действительной и мнимой частями аналитической функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , называемой *комплексным потенциалом* поля  $\mathbf{V}$ .

Через комплексный потенциал выражаются все основные характеристики поля  $\mathbf{V}$ , и, в частности, само поле

$$\mathbf{V} = V_x + iV_y = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)}. \quad (2.1.3)$$

Интегрируя вдоль замкнутого контура  $C$  производную комплексного потенциала, получаем

$$\begin{aligned} \int_C f'(z) dz &= \int_C (V_x - iV_y) (dx + i dy) = \\ &= \int_C V_x dx + V_y dy + i \int_C -V_y dx + V_x dy = \Gamma + iN. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Если область  $D$  окажется многосвязной, то локально (в окрестности каждой точки) можно найти однозначно определенную ветвь комплексного потенциала, однако глобально (во всей области) комплексный потенциал может оказаться многозначной функцией.

Если векторное поле задано в явном виде, то комплексный потенциал может быть найден стандартными методами. На практике же ситуация выглядит прямо наоборот: часто имеется некоторое описание физического процесса, при котором непосредственное нахождение соответствующего векторного поля представляется проблематичным, однако, используя различные методы теории функций, удается найти комплексный потенциал, однозначно определяемый условиями задачи. В свою очередь знание комплексного потенциала позволяет найти линии тока, соответствующее векторное поле и его интегральные характеристики.

## §2. Комплексный потенциал в гидродинамике

Рассмотрим стационарное плоское течение идеальной несжимаемой жидкости в области  $D \subset \mathbb{C}$ . Векторное поле  $\mathbf{V}$  в данном случае представляет собой поле скоростей, описывающее движение жидкости.

Обозначим через  $B(z, r)$  – круг, через  $C_r$  – его граничную окружность, а через  $S_r$  – его площадь, и предположим, что  $\overline{B(z, r)} \subset D$ . Если в области  $D$  нет источников (стоков), то поток  $N$  через окружность  $C_r$  равен нулю (сколько втекает столько и вытекает). Используя векторный вариант формулы Грина, получаем

$$N = \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{n}) dl = \iint_{B(z, r)} \operatorname{div} \mathbf{V} ds = 0.$$

Таким образом

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{div} \mathbf{V} ds = 0.$$

Следовательно поле  $\mathbf{V}$  является бездивергентным.

В стационарном течении жидкости при отсутствии внешнего воздействия циркуляция  $\Gamma$  вектора скорости вдоль окружности  $C_r$  равна нулю, и векторное поле  $\mathbf{V}$  является безвихревым, поскольку

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{rot} \mathbf{V} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{\tau}) dl = 0.$$

Таким образом стационарное плоское течение идеальной несжимаемой жидкости описывается комплексным потенциалом  $f(z)$ , осуществляющим конформное отображение рассматриваемой области  $D$  на некоторую область  $D^*$ , строение которой определяется условиями рассматриваемой задачи.

Приведем простейшие примеры векторных полей, связанных с точечными источниками и вихрями.

**I. Источник.** Пусть имеется единственный точечный источник, расположенный в начале координат и порождающий безциркуляционный поток жидкости. Из соображений симметрии ясно, что поле скоростей имеет вид

$$\mathbf{V} = h(r) \vec{e}_r,$$

где  $r = |z|$ ,  $\vec{e}_r = z/|z|$ .

Поскольку в произвольном кольце

$$K(r, R) = \{z \mid 0 < r < |z| < R < \infty\}$$

нет источников, то поток через границу кольца равен нулю, т.е.

$$\int_{\partial K(r, R)} (\mathbf{V}, \vec{n}) dl = \int_{C_R} (\mathbf{V}, \vec{n}) dl - \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{n}) dl = 0.$$

Следовательно поток не зависит от радиуса окружности и

$$\int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{e}_r) dl = 2\pi r h(r) = N = \text{const.}$$

Таким образом  $h(r) = N/2\pi r$  и

$$\mathbf{V} = \frac{N}{2\pi r} \vec{e}_r = \frac{N}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}}.$$

Учитывая выражение поля через комплексный потенциал, получаем

$$f'(z) = \bar{\mathbf{V}} = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{z},$$

откуда

$$f(z) = \frac{N}{2\pi} \text{Ln } z + c.$$

Функция тока

$$v = \operatorname{Im} \left( \frac{N}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c \right) = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Arg} z + c_2$$

как и следовало ожидать имеет радиальный вид.

Поскольку область  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  является двусвязной то комплексный потенциал в данном случае оказывается многозначной функцией. Проводя в области  $D$  разрез вдоль положительной (отрицательной) полуоси и выделяя однозначную ветвь, мы получаем отображение на горизонтальную полосу ширины  $N$ .

**II. Вихрь.** Пусть имеется единственный точечный вихрь, расположенный в начале координат. Совершенно аналогичными рассуждениями получаем

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{i}{\bar{z}},$$

где постоянная  $\Gamma$  – циркуляция вектора скорости вдоль любого замкнутого контура, окружающего начало координат. По сравнению с пунктом I происходит поворот всех векторов поля на угол  $\pi/2$ . Комплексный потенциал отличается от предыдущего лишь множителем  $1/i$

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z + c.$$

При этом линиями уровня функции тока

$$v = \operatorname{Im} \left( \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z + c \right) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln |z| + c_1$$

являются окружности с центром в начале координат.

### §3. Обтекание бесконечной кривой

Рассмотрим течение жидкости в области  $D$ , границей которой является кривая  $\gamma$ , проходящая через бесконечно удаленную точку. Мнимая часть комплексного потенциала  $f(z)$  сохраняет постоянное значение на линии тока, в частности, и на граничной кривой  $\gamma$  функция тока является постоянной  $v = C \in \mathbb{R}$ . Линии тока проходят через бесконечно удаленную точку, и их образы, лежащие на параллельных прямых, могут иметь в качестве общей точки лишь точку  $w = \infty$ , т.е.  $f(\infty) = \infty$ . Следовательно комплексный потенциал отображает область  $D$  на верхнюю



полуплоскость  $\text{Im } w > C$ . Чтобы однозначно определить комплексный потенциал нужно еще задать значение  $C$  и значение скорости в некоторой граничной точке (часто фиксируется значение скорости в бесконечно удаленной точке). Следует иметь в виду, что основной интерес представляет не сам комплексный потенциал, а его производная, через которую выражаются все основные характеристики потока. Поскольку добавление постоянного слагаемого не влияет на значение производной, то значение постоянной  $C$  можно выбирать из соображений удобства.

Это позволяет нам сформулировать следующее утверждение.

I. Комплексный потенциал  $w = f(z)$  безциркуляционного потока  $\mathbf{V}$ , обтекающего бесконечную кривую  $\gamma$ , реализует конформное отображение криволинейной области  $D$  на верхнюю полуплоскость с нормировкой:  $f(\infty) = \infty$ ,  $|f'(\alpha)| = |\mathbf{V}(\alpha)| = v_\alpha$ ,  $\alpha \in \gamma$ .

Рассмотрим некоторые примеры течений такого типа.

1) Обтекание плотины высоты  $h$  бесконечно глубоким потоком жидкости, имеющим в бесконечности скорость  $v_\infty$ .

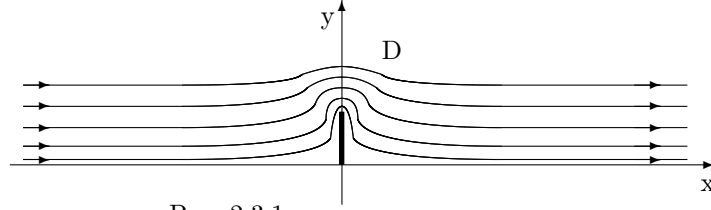


Рис. 2.3.1.

*Решение.* Конформное отображение области  $D$  на верхнюю полуплоскость реализуется функцией  $f(z) = A\sqrt{z^2 + h^2}$ ,  $A > 0$ . Поскольку  $\bar{\mathbf{V}} = f'(z) = \frac{Az}{\sqrt{z^2 + h^2}}$ , то  $v_\infty = |f'(\infty)| = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{Az}{\sqrt{z^2 + h^2}} \right| = A$ . Следовательно комплексный потенциал имеет вид  $f(z) = v_\infty \sqrt{z^2 + h^2}$ . При этом линии тока  $\text{Im } f(z) = C > 0$  находятся из равенства  $(u + iC)^2 = v_\infty [(x + iy)^2 + h^2]$  и имеют вид

$$y = \frac{c}{v_\infty} \sqrt{1 + \frac{v_\infty^2 h^2}{v_\infty^2 x^2 + C^2}}.$$

Таким образом мы получаем полное описание потока.

2) Обтекание параболы  $y^2 = 2px$  потоком жидкости, имеющим в точке  $z = 0$  скорость  $v_0$ .

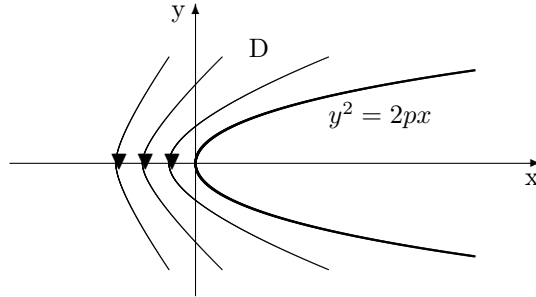


Рис. 2.3.2.

*Решение.* Найдем конформное отображение области  $D$  (рис. 2.3.2) на верхнюю полуплоскость  $D^* = \{Im w > C_0\}$ . Положим

$$z = x + iy, \quad w = u + iv$$

и рассмотрим отображение  $g : D^* \rightarrow D$ , определяемое равенством

$$z = g(w) = w^2 + \frac{p}{2}.$$

На всякой прямой, параллельной действительной оси,

$$w = u + iC, \quad x + iy = (u^2 - C^2 + p/2) + 2iCu, \quad x = u^2 - C^2 + p/2,$$

$$u = y/2C, \quad y^2 = 4C^2(x + C^2 - p/2).$$

Следовательно прямая  $v = C_0 = \sqrt{p/2}$  отображается в параболу  $y^2 = 2px$ .

Таким образом отображение  $w = g^{-1}(z) = \sqrt{z - \frac{p}{2}}$ , устанавливающее соответствие между параболлами  $y^2 = 4C^2(x + C^2 - p/2)$  с фокусами в точке  $z = \frac{p}{2}$  и прямыми  $v = C > C_0$ , отображает область  $D$  на полуплоскость  $v > \sqrt{p/2}$ . При этом  $|w'(0)| = \frac{1}{\sqrt{2p}}$ . Поскольку скорость течения в точке  $z = 0$  равна  $v_0$ , то комплексный потенциал имеет вид

$$f(z) = v_0 \sqrt{2p} g^{-1}(z) = v_0 \sqrt{2pz - p^2}.$$

3) Обтекание параболы  $y^2 = 2px$  симметричным относительно действительной оси потоком жидкости, набегающим на параболу слева.

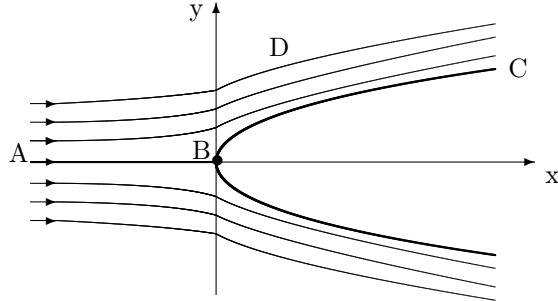


Рис. 2.3.3.

*Решение.* В силу симметрии отрицательная полуось является линией тока. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением потока, обтекающего контур  $ABC$  лежащий в верхней полуплоскости (рис. 2.3.3). Функция  $g(z) = \sqrt{z - \frac{p}{2}}$  отображает область  $D$ , ограниченную контуром  $ABC$ , на область  $D^*$  – внутренность прямого угла: отрицательная полуось отображается на луч  $\left[i\sqrt{\frac{p}{2}}, +i\infty\right)$ , дуга параболы  $BC$  отображается на луч  $\left[i\sqrt{\frac{p}{2}}, +\infty + i\sqrt{\frac{p}{2}}\right)$  (рис. 2.3.4).

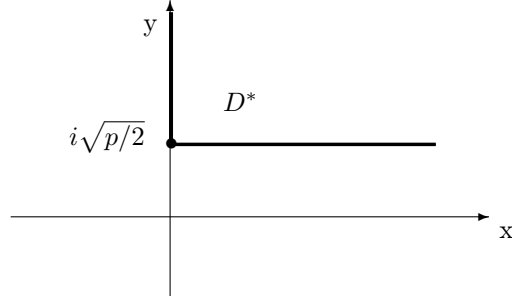


Рис. 2.3.4.

Поэтому функция  $h(z) = \left(\sqrt{z - \frac{p}{2}} - i\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2 = z - p - i\sqrt{2pz - p^2}$  отображает область  $D$  на верхнюю полуплоскость.

Поскольку  $h'(0) = 0$  (это согласуется и с физическими представлениями), то задать произвольным образом скорость потока в точке  $z = 0$  мы не можем. Однако мы можем фиксировать скорость в бесконечности  $v_\infty$  и, учитывая, что  $h'(\infty) = 1$ , однозначно определить комплексный потенциал рассматриваемого течения, полагая

$$f(z) = v_\infty \left( z - p - i \sqrt{2pz - p^2} \right).$$

Рассмотренные примеры показывают, что построение комплексного потенциала оказывается эффективным методом изучения потоков жидкости. При этом метод комплексного потенциала используется не только в гидродинамике, но и в других разделах физики, к примеру, в электростатике и теплотехнике.

#### §4. Комплексный потенциал в теплотехнике и электростатике

**Теплотехника.** Пусть функция  $v = v(x, y)$  описывает установившееся распределение температуры в плоской односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$ , не содержащей тепловых источников. Согласно принципам теплотехники поток тепла  $\mathbf{Q} = -k \operatorname{grad} v$ , где  $k$  – коэффициент теплопроводности (будем считать его постоянным), а знак минус связан с тем, что поток тепла направлен из области более высоких температур в область более низких. Таким образом  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{k} Q_x$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y$ .

Согласно классическому уравнению теплопроводности в установившемся режиме температура удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

и следовательно  $\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -\frac{\partial Q_y}{\partial y}$ . Поэтому выражение

$$-\frac{1}{k} (Q_y dx - Q_x dy)$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x, y)$ , называемой *функцией тока тепла* и связанной с температурой  $v$  условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k} Q_x.$$

Линия уровня  $u(x, y) = \text{const}$  является линией тока тепла, т.к. касательный вектор к ней параллелен вектору потока  $\mathbf{Q} = -k \text{grad } v$ .

Функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  называется *комплексным потенциалом теплового потока*, и

$$\mathbf{Q} = -k \text{grad } v = -k \left( \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -ki \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -ki \overline{f'(z)}.$$

**Электростатика.** Пусть  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электростатического поля в некоторой односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$ , не содержащей зарядов. Так как для поддержания электростатического поля не требуется затраты энергии, то циркуляция вектора напряженности  $\mathbf{E}$  вдоль любого замкнутого контура равна нулю.<sup>1</sup> Следовательно поле  $\mathbf{E}$  является потенциальным и  $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ . Поэтому выражение

$$-(E_x dx + E_y dy)$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $v = v(x, y)$ , называемой *потенциальной функцией* или *потенциалом* поля, а ее линии уровня  $v(x, y) = \text{const}$  называют *эквипотенциальными линиями*. При этом

$$\mathbf{E} = -\text{grad } v = -\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y},$$

и в каждой точке вектор напряженности  $\mathbf{E}$  направлен по нормали к проходящей через эту точку эквипотенциальной линии.

Поскольку в области нет зарядов, то поток вектора напряженности через любой замкнутый контур равен нулю, поэтому поле  $\mathbf{E}$  является соленоидальным и

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Поэтому выражение  $-E_y dx + E_x dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x, y)$ , называемой *силовой функцией поля* и связанной с потенциалом  $v$  условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -E_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = E_x.$$

---

<sup>1</sup>Если бы существовал контур, при обходе которого в определенном направлении работа была бы положительной, то обход контура неограниченное число раз давал бы неограниченный источник энергии (*вечный двигатель!!!*).

Функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  называется *комплексным потенциалом электростатического поля*, и

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} v = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -i\overline{f'(z)}.$$

## §5. Дробно-линейные функции

Во всех рассмотренных в параграфе 3 примерах для построения комплексного потенциала (конформного отображения исходной области на верхнюю полуплоскость) нам удалось обойтись достаточно элементарными соображениями. В более общей ситуации нахождения конформного отображения одной области на другую оказывается довольно сложной задачей. Поэтому в первую очередь нам нужно познакомиться с основными фактами и принципами теории конформных отображений.

*Линейная функция*  $f(z) = \alpha z + \beta$  осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя и сводится к растяжению в  $|\alpha|$  раз, повороту на угол  $\arg \alpha$  и сдвигу на  $\beta$ .

При линейном отображении прямые переходят в прямые ( $f(\infty) = \infty$ ), а окружности в окружности. Следовательно, линейным отображением верхнюю полуплоскость можно отобразить на любую другую полуплоскость, а единичный круг на любой другой круг.

*Дробно-линейная функция*  $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\xi z + \eta}$  осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя и обладает замечательным круговым свойством: *прямые и окружности отображаются либо в прямые, либо в окружности*. Таким образом дробно-линейная функция отображает верхнюю полуплоскость либо на полуплоскость, либо на внутренность некоторого круга, либо на внешность круга. При этом  $f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$ ,  $f\left(-\frac{\eta}{\xi}\right) = \infty$ ,  $f(\infty) = \frac{\alpha}{\xi}$ .

Вполне очевидно, что функция  $f(z) = \frac{1}{z}$  отображает внутренность единичного круга на его внешность, а внешность на внутренность.

Общий вид дробно-линейных отображений:

- 1) верхней полуплоскости на себя

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где  $a, b, c, d$  – действительные числа и  $ad - bc > 0$ ;

2) верхней полуплоскости на единичный круг (нижней полуплоскости на внешность круга)

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}},$$

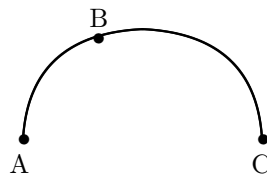
где  $\theta$  – действительное число и  $\text{Im } \beta > 0$ ;

3) единичного круга на себя

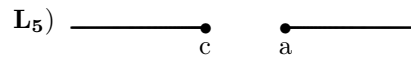
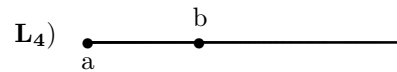
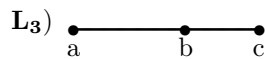
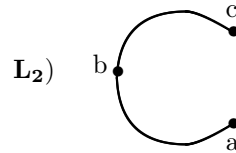
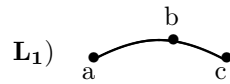
$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z},$$

где  $\theta$  – действительное число и  $|\alpha| < 1$ .

Если рассматривать отображение отрезка или дуги окружности, то их образами будут либо участки прямой, либо дуги окружностей. К примеру, дугу полуокружности  $ABC$



соответствующей дробно-линейной функцией  $f_k$  можно отобразить на любую из линий  $L_k$ , изображенных ниже.



Для нахождения соответствующих функций достаточно установить соответствие точек  $A \Leftrightarrow a$ ,  $B \Leftrightarrow b$ ,  $C \Leftrightarrow c$  и воспользоваться ангармоническим отношением (в последних двух случаях полуокружность отображается на „бесконечные отрезки“ с соответствием точек  $f_4(C) = \infty$  и  $f_5(B) = \infty$ ). При этом дробно-линейная функция  $f_m \circ f_n^{-1}$  отображает линию  $L_n$  на линию  $L_m$ .

## §6. Функция Жуковского

В различных приложениях оказывается полезной функция Жуковского,<sup>1</sup> определяемая равенством

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Функция  $f(z)$  конформно отображает внешность круга  $|z| \leq 1$  на область  $D = \mathbb{C} \setminus I$ , представляющую собой всю комплексную плоскость  $C$  с разрезом по отрезку  $I = [-1, 1]$ . При этом и внутренность круга  $|z| \leq 1$  тоже конформно отображается на область  $D$ .

Всякая окружность  $|z| = R$  ( $R \neq 1$ ) отображается в эллипс

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

где  $a = \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{R} \right)$ ,  $b = \frac{1}{2} \left( R - \frac{1}{R} \right)$ .

Это легко увидеть, записывая точку окружности в показательной форме и выделяя в действительную и мнимую части отображения

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left( R e^{i\varphi} + \frac{1}{R} e^{-i\varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{R} \right) \cos \varphi + i \frac{1}{2} \left( R - \frac{1}{R} \right) \sin \varphi = u + iv. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

При  $R \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$  размеры эллипса увеличиваются, и он по форме становится все более похожим на окружность, при  $R \rightarrow 1$  размеры

---

<sup>1</sup>Жуковский Николай Егорович (1847-1921) – русский ученый, основоположник современной гидроаэродинамики, член-корреспондент Петербургской академии наук, первым стал применять методы теории функций комплексного переменного в гидро- и аэродинамике.



эллипса уменьшаются, он становится все более вытянутым и в пределе „вырождается“ в отрезок  $[-1, 1]$ .

Отображение, осуществляемое функцией Жуковского, является двулиственным, а обратная функция, определяемая формулой  $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ , является многозначной. Из равенства

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$$

получаем

$$(z_1 - z_2) \left( 1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0,$$

следовательно две различные точки  $z_1, z_2$ , связанные условием  $z_1 z_2 = 1$ , имеют один образ.

Функция Жуковского  $w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  является однолистной

в следующих областях:

- 1)  $|z| < 1$  — единичный круг;
- 2)  $|z| > 1$  — внешность единичного круга;
- 3)  $\operatorname{Im} z > 0$  — верхняя полуплоскость;
- 4)  $\operatorname{Im} z < 0$  — нижняя полуплоскость.

Функция Жуковского конформно отображает:

- 1) верхний полукруг  $K^+ = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  на нижнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w < 0$ ;
- 2) нижний полукруг  $K^- = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ ;
- 3) область  $G^+ = \{|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ ;
- 4) область  $G^- = \{|z| > 1, \operatorname{Im} z < 0\}$  на нижнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w < 0$ ;
- 5) единичный круг  $K = \{|z| < 1\}$  на внешность отрезка  $[-1, 1]$ ;
- 6) верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  на плоскость  $w$  с разрезами на действительной оси по лучам  $(-\infty, -1]$  и  $[1, \infty)$ ;
- 7) нижнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z < 0$  на плоскость  $w$  с разрезами на действительной оси по лучам  $(-\infty, -1]$  и  $[1, \infty)$ .

Как мы видим, не смотря на простоту определяющей ее формулы, отображение, осуществляемое функцией Жуковского, устроено совсем не так тривиально.

## §7. Тригонометрические и гиперболические функции

Используя формулу Эйлера, тригонометрические функции комплексного аргумента определим равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функции  $\sin z$  и  $\cos z$  аналитичны на всей комплексной плоскости и являются  $2\pi$ -периодическими, функции  $\operatorname{tg} z$  и  $\operatorname{ctg} z$  являются  $\pi$ -периодическими.

На комплексной плоскости сохраняются многие стандартные свойства тригонометрических функций действительного переменного: основное тригонометрическое тождество, формулы приведения, формулы для синуса и косинуса суммы и разности аргументов и т.д. В частности,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin(z + \pi/2) = \cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z,$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

При этом на комплексной плоскости тригонометрические функции приобретают и некоторые новые свойства, которых ранее не было на действительной прямой. Так, на комплексной плоскости синус и косинус, несмотря на выполнение основного тригонометрического тождества, перестают быть ограниченными функциями. К примеру,

$$\cos(0 + iy) = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \rightarrow +\infty$$

при  $|y| \rightarrow \infty$ .

**Пример.** Найдем образ полуполосы  $P = \{|\operatorname{Re} z| < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$  при отображении, осуществляемом функцией  $w = \sin z$ .

Поскольку  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{iz}}{i} + \frac{i}{e^{iz}} \right)$ , то искомое отображение можно представить в виде композиции простых преобразований

$$z_1 = iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad z_3 = \frac{z_2}{i}, \quad w = \frac{1}{2} \left( z_3 + \frac{1}{z_3} \right).$$

В результате в плоскости  $z_1$  получаем полуполосу

$$iP = \{\operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < \pi/2\},$$

в плоскости  $z_2$  правый полукруг

$$K = \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\},$$

в плоскости  $z_3$  нижний полукруг

$$K^- = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$$

и наконец в плоскости  $w$  получаем верхнюю полуплоскость.

Гиперболические функции на комплексной плоскости определяются стандартными формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

и для них выполняется стандартное тождество

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

На комплексной плоскости тригонометрические и гиперболические функции выражаются одни через другие

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz.$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции выражаются через логарифмическую функцию

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i + z}{i - z}, \quad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i},$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right), \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

## §8. Профили Жуковского

Пусть  $a > 0$ ,  $h > 0$ . На комплексной плоскости переменной  $z$  рассмотрим дугу окружности  $\gamma$ , с началом в точке  $a$ , концом в точке  $-a$ , проходящую через точку  $ih$ , рис. 2.8.1.

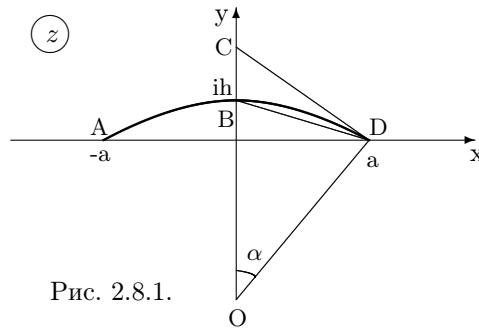


Рис. 2.8.1.

На комплексной плоскости переменной  $w$  рассмотрим окружность  $C_0$  с центром в точке  $ih$ , проходящую через точки  $a$  и  $-a$ , рис. 2.8.2.

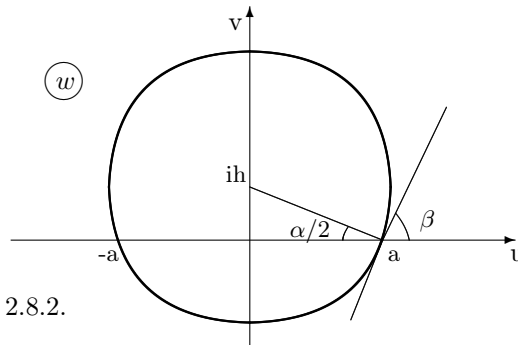


Рис. 2.8.2.

Нас будет интересовать отображение внешности дуги  $\gamma$  на внешность круга  $K_0$ , ограниченного окружностью  $C_0$ .

При отображении

$$t = f_1(z) = \frac{z - a}{z + a} \quad (2.8.1)$$

точка  $z = a$  отображается в нуль, точка  $z = -a$  в бесконечность. Из кругового свойства и консерватизма углов дробно-линейного отображения  $f_1(z)$  следует, что хорда  $AD = [-a, a]$  отображается в отрицательную

часть действительной оси, а дуга окружности в луч  $L$  с углом наклона к отрицательной полуоси равным углу между касательной  $CD$  и хордой  $AD$ . Таким образом внешность дуги отображается на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча  $L$ .

Найдем угол  $\alpha = \angle ADC$ . Из подобия прямоугольных треугольников следует, что  $\angle COD = \angle ADC = \alpha$ . Поскольку центральный угол  $\angle BOD$  и вписанный угол  $\angle ADB$  опираются на равные дуги, то  $\alpha = 2\angle ADB = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$ .

Угол между касательной к окружности  $C_0$  в точке  $a$  и положительным направлением действительной оси обозначим через  $\beta$ . Из рисунка 2.8.2 видно, что  $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ . Рассмотрим дробно-линейное отображение, определенное в плоскости  $w$ , полагая

$$\xi = \frac{w - a}{w + a}.$$

При этом отображении действительная ось отображается на себя, окружность на прямую  $M$ , проходящую через начало координат и пересекающую действительную ось под углом  $\beta$ , а внешность круга  $K_0$  отображается на полуплоскость, лежащую ниже прямой  $M$ . Функция  $t = \xi^2$  переводит прямую  $M$  в луч  $L$ , а функция

$$t = f_2(w) = \left( \frac{w - a}{w + a} \right)^2 \quad (2.8.2)$$

отображает внешность круга  $K_0$  на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча  $L$ . Поскольку функции  $f_1(z)$  и  $f_2(w)$  отображают соответственно внешность дуги  $\gamma$  и внешность круга  $K_0$  на одно и то же множество, то интересующее нас отображение можно найти, приравняв правые части соотношений (2.8.1) и (2.8.2)

$$\frac{z - a}{z + a} = \left( \frac{w - a}{w + a} \right)^2.$$

Простые преобразования приводят к равенствам

$$z = \frac{1}{2} \left( w + \frac{a^2}{w} \right), \quad w = z + \sqrt{z^2 - a^2}. \quad (2.8.3)$$

На плоскости переменной  $w$  рассмотрим еще одну окружность  $C_1$ , касающуюся окружности  $C_0$  в точке  $a$  и имеющую радиус больший чем

радиус окружности  $C_0$ . При конформном отображении внешности круга  $K_0$  на внешность дуги  $\gamma$  окружности  $C_1$  будет соответствовать лежащая в плоскости переменной  $z$  замкнутая кривая  $\Gamma$ , охватывающая дугу  $\gamma$  и в силу консерватизма углов с двух сторон касающаяся дуги  $\gamma$  в точке  $z = a$ .



Такие кривые, напоминающие профиль крыла самолета, называют *профилями Жуковского*.

Профиль Жуковского  $\Gamma(a, h, d)$  однозначно определяется тремя параметрами:  $a$  – длиной хорды,  $h$  – „высотой“ дуги и  $d$  – расстоянием между центрами окружностей  $C_0$  и  $C_1$ . Варьируя эти параметры можно получать кривые различного размера и конфигурации: параметр  $a$  определяет ширину крыла, от параметра  $d$  зависит его толщина, а величина  $h$  характеризует его искривленность.

## §9. Общие принципы теории конформных отображений

В этом параграфе мы сформулируем и немного прокомментируем некоторые положения теории конформных отображений.

**Теорема существования и единственности.** Пусть  $D$  и  $D^*$  – произвольные односвязные области, границы которых состоят более чем из одной точки, и пусть  $z_0$  и  $w_0$  – любые их внутренние точки, а  $\theta_0$  – любое действительное число. Тогда существует единственное конформное отображение  $w = f(z)$  области  $D$  на область  $D^*$ , удовлетворяющее условиям

$$f(z_0) = w_0, \quad \text{Arg } f'(z_0) = \theta_0.$$

Существование отображения является следствием теоремы Римана, а его единственность обеспечивается нормировкой фиксирующей три действительных параметра: равенство двух комплексных чисел сводится к двум действительным уравнениям, а третьим является аргумент производной. Часто используют и другие нормировки, также содержащие три действительных параметра. К примеру, задают образы одной внутренней точки и одной граничной точки:

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1, \quad z_0 \in D, \quad w_0 \in D^*, \quad z_1 \in \partial D, \quad w_1 \in \partial D^*,$$

или задают образы трех граничных точек:

$$f(z_k) = w_k, \quad z_k \in \partial D, \quad w_k \in \partial D^* \quad (k = 1, 2, 3).$$

Отметим, что в теореме говорится лишь об отображении внутренней области  $D$  на внутренность области  $D^*$  и ничего не говорится об отображении границ. В общем случае граница односвязной области может иметь весьма сложную неоднородную структуру, поэтому полное исследование граничного поведения конформных отображений является довольно сложной задачей и выходит за рамки нашего курса. В случае, когда границы являются достаточно «хорошими» кривыми конформное отображение продолжается по непрерывности на границу области.

**Теорема Каратеодори.**<sup>1</sup> Пусть области  $D$  и  $D^*$  ограничены жордановыми кривыми  $\partial D$  и  $\partial D^*$ . Тогда конформное отображение  $f : D \rightarrow D^*$  можно продолжить на границу области  $D$  до гомеоморфизма замкнутых областей  $\bar{D}$  и  $\bar{D}^*$ .

Отметим, что при конформном отображении областей сохраняется направление обхода их границ.

В практических вопросах, связанных с конформными отображениями, большую роль играет

**Принцип соответствия границ.** Пусть односвязные области  $D$  и  $D^*$  ограничены соответственно контурами  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ . Если аналитическая в  $D$  и непрерывная в  $\bar{D}$  функция  $w = f(z)$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ , то она осуществляет взаимно однозначное конформное отображение области  $D$  на область  $D^*$ .

Следовательно, если аналитическая функция является взаимно однозначной на границе области, то, зная образ границы, мы найдем и образ всей области.

Топологическую структуру образа при отображении, осуществляемом аналитической функцией, описывает

**Принцип сохранения области.** Если функция  $w = f(z)$  аналитична в области  $D$  и отлична от постоянной, то множество  $D^*$ , на которое она отображает  $D$ , также является областью.

---

<sup>1</sup>Каратеодори Константин (1873-1950) – немецкий математик. Основные труды по теории конформных отображений, общей теории меры, вариационному исчислению. В 1909 году дал логически четкое аксиоматическое построение основ термодинамики.

## §10. Принцип симметрии

В этом параграфе мы рассмотрим вопросы продолжения аналитической функции за границу исходной области определения.

**Принцип непрерывности.** Пусть области  $D_1$  и  $D_2$  примыкают друг к другу по кривой  $\gamma$ , являющейся общей частью границ этих областей, а функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  являются, соответственно, аналитическими в  $D_1$  и  $D_2$ , непрерывными в  $D_1 \cup \gamma$  и  $D_2 \cup \gamma$  и  $f_1(z) = f_2(z)$  при  $z \in \gamma$ . Тогда функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{при } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{при } z \in D_2, \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{при } z \in \gamma \end{cases}$$

является аналитической в области  $D = D_1 \cup D_2 \cup \gamma$ .

Аналитичность является локальным свойством, поэтому достаточно показать, что функция  $f(z)$  аналитична в некоторой окрестности произвольной точки  $z_0 \in \gamma$ . Рассмотрим такую окрестность  $U$  точки  $z_0$ , что  $\bar{U} \subset D$ , и положим  $G_1 = D_1 \cap U$ ,  $G_2 = D_2 \cap U$ . Без ограничения общности можно считать, что области  $G_1$  и  $G_2$  являются односвязными.

Поскольку функция  $f(z)$  непрерывна на  $\partial U$ , то функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(t) dt}{t - z},$$

являющаяся интегралом типа Коши, аналитична в  $U$ .

Функцию  $F(z)$  можно представить и другим способом

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_1} \frac{f(t) dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_2} \frac{f(t) dt}{t - z} = I_1(z) + I_2(z).$$

Согласно интегральной формуле Коши

$$I_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_k} \frac{f(t) dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_k} \frac{f_k(t) dt}{t - z} = \begin{cases} f_k(z) & \text{при } z \in G_k, \\ 0 & \text{при } z \notin \bar{G}_k. \end{cases}$$

Следовательно при  $z \in G_1$  имеем  $F(z) = I_1(z) + I_2(z) = f_1(z) + 0 = f_1(z)$ , а при  $z \in G_2$  имеем  $F(z) = 0 + f_2(z) = f_2(z)$ . В силу непрерывности



функций  $f(z)$  и  $F(z)$  равенство  $f(z) = F(z)$  выполняется в окрестности  $U$  всюду, и следовательно  $f(z)$  является аналитической в  $U$ .

Таким образом при непрерывной склейке двух аналитических функций вновь получается аналитическая функция.

**Принцип симметрии.** (Б.Риман, Г.Шварц<sup>1</sup>). Пусть граница области  $D_1$  содержит дугу окружности либо отрезок прямой  $\gamma$ , функция  $w = f(z)$  реализует конформное отображение области  $D_1$  на область  $D_2$  такое, что „дуга“  $\gamma$  переходит в участок  $\Gamma$  границы области  $D_2$ , также являющийся дугой окружности либо отрезком прямой. Тогда функция  $f(z)$  допускает аналитическое продолжение  $f^*(z)$  через „дугу“  $\gamma$  в область  $D_1^*$ , симметричную области  $D_1$  относительно „дуги“  $\gamma$ , причем функция  $f^*(z)$  реализует конформное отображение области  $D_1^*$  на область  $D_2^*$ , симметричную области  $D_2$  относительно „дуги“  $\Gamma$ .

При помощи дробно-линейных отображений, переводящих симметричные точки в симметричные, общая ситуация может быть сведена к случаю, когда  $\gamma$  и  $\Gamma$  являются отрезками, лежащими на соответствующей действительной оси, рис.2.10.1.

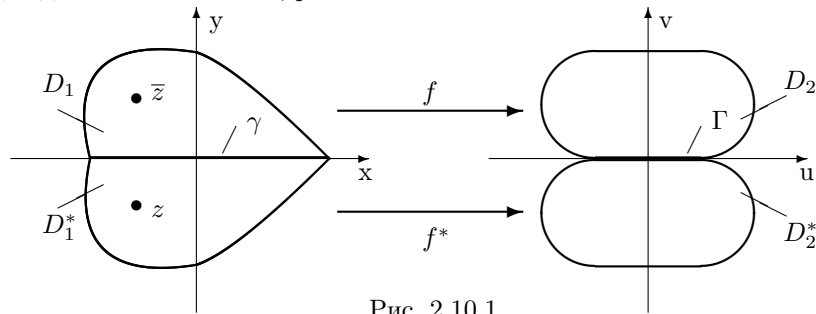


Рис. 2.10.1

В этом случае функция  $f^*(z)$  для всех  $z \in D_1^*$  может быть определена в явном виде равенством  $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ . Несложно проверить, что аналитичность функции  $f^*(z)$  в области  $D_1^*$  является следствием аналитичности функции  $f(z)$  в области  $D_1$ . Учитывая, что для всякой точки

<sup>1</sup>Шварц Карл Герман Амандус(1843-1921)– немецкий математик, член Берлинской академии наук, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук, основные работы по теории минимальных поверхностей и теории конформных отображений.

$z \in D_1^*$  точка  $t = \bar{z}$  лежит в области  $D_1$ , получаем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^*(z) - f^*(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{f^*(z)} - \overline{f^*(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overline{f(t)} - \overline{f(t_0)}}{t - t_0} = \overline{f'(t_0)}.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться принципом непрерывности.

Рассмотрим примеры применения принципа симметрии.

1) Найти конформное отображение полосы с разрезами на верхнюю полуплоскость.

Рассматривается отображение полосы  $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}$  с разрезами вдоль отрезков  $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$  и  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ , изображенной в левой части рис. 2.10.2.

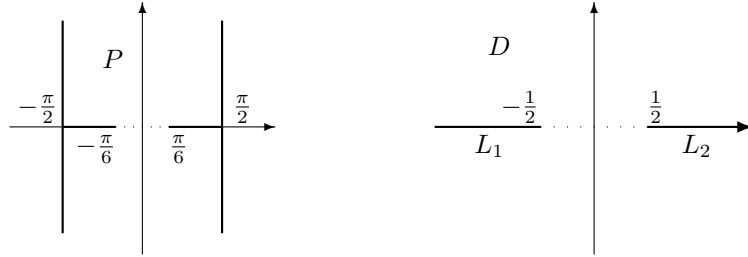


Рис. 2.10.2

*Решение.* Проведем дополнительный разрез вдоль интервала  $I = \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$  и рассмотрим отображение верхней полуполосы  $P^+$  на верхнюю полуплоскость. Из примера §7 мы уже знаем, что такое соответствие осуществляет функция  $t = \sin z$ . Применение принципа симметрии к интервалу  $I$  показывает, что эта функция отображает нижнюю полуполосу  $P^-$  на нижнюю полуплоскость, а всю исходную полосу  $P$  с разрезами на область  $D$ , представляющую собой плоскость с разрезами вдоль лучей  $L_1 = \left[\infty, -\frac{1}{2}\right]$  и  $L_2 = \left[\frac{1}{2}, \infty\right]$ , лежащих на действительной оси [дополнительный разрез  $I$  при аналитическом продолжении „затирается“ и отображается в интервал  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ].

Дробно-линейная функция

$$\xi = \frac{t + \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}}$$

отображает область  $D$  на всю плоскость с разрезом вдоль положительной полуоси. Остается вспомнить, что при извлечении квадратного корня аргумент комплексного числа уменьшается в два раза. Окончательно получаем

$$w = \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{2t+1}{2t-1}} = \sqrt{\frac{2\sin z + 1}{2\sin z - 1}}.$$

2) Найти конформное отображение внешности буквы Т на верхнюю полуплоскость.

Рассматривается отображение внешности фигуры, состоящей из двух отрезков  $[0, 2]$  и  $[-i, i]$ .

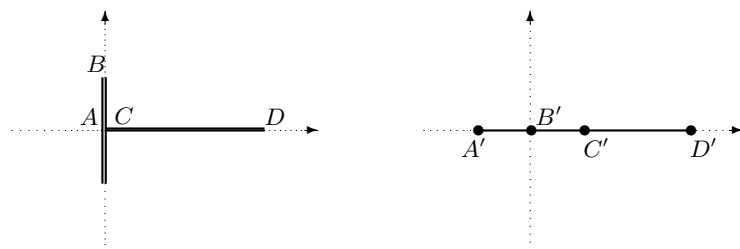


Рис. 2.10.3

*Решение.* Проведем дополнительные разрезы вдоль отрицательной полуоси и луча  $(2, +\infty)$ . При изучении течений жидкости в §3 мы уже использовали функцию  $t = h(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ , отображающую верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку  $[0, i]$  на всю верхнюю полуплоскость. Чтобы найти образы отрезков  $I_1 = [0, 2]$  и  $I_2 = [0, i]$  при этом отображении нужно учитывать, что при обходе границы отрезок  $I_2$  проходится дважды. Пусть  $\varepsilon > 0$ , рассмотрим близкие к нулю точки  $a_1 = \varepsilon$  и  $a_2 = -\varepsilon = \varepsilon e^{i\pi}$ . Тогда

$$h(a_1) = \left| \sqrt{(1 + \varepsilon^2)} \right|, \quad h(a_2) = \sqrt{(1 + \varepsilon^2)} e^{2i\pi} = - \left| \sqrt{(1 + \varepsilon^2)} \right|.$$

Поэтому граничному отрезку  $I_2$  будет соответствовать отрезок  $[-1, 1]$ , а отрезку  $I_1$  отрезок  $[1, \sqrt{5}]$ . Соответствие граничных точек изображено на рис. 2.10.3.

Используя принцип симметрии и продолжая функцию  $h(z) = \sqrt{z^2 + 1}$  через „отрезок действительной прямой“  $I_0 = [-\infty, 0] \cup [2, +\infty]$ , мы получаем отображение внешности буквы Т на всю комплексную плоскость с вырезанным отрезком  $J = [-1, \sqrt{5}]$ .

Дробно-линейная функция

$$\xi = \frac{\sqrt{5} - t}{1 + t}$$

отображает разрез  $J$  на положительную полуось. Для нахождения конформного отображения внешности буквы Т на верхнюю полуплоскость остается извлечь квадратный корень

$$w = \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{z^2 + 1}}{1 + \sqrt{z^2 + 1}}}.$$

### §11. Решение задачи Дирихле в полуплоскости в случае кусочно-постоянных граничных значений.

Решение задачи Дирихле<sup>1</sup> в верхней полуплоскости, т.е. нахождение гармонической в верхней полуплоскости функции  $v(x, y)$ , принимающей на действительной оси заданные значения  $v(x, 0) = h(x)$ , может быть представлено интегралом Пуассона

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \frac{y dt}{(x - t)^2 + y^2}.$$

Предположим, что на интервалах  $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, \infty)$  функция  $h(x)$  принимает соответствующие постоянные значения  $v_0, v_1, \dots, v_n$ .

---

<sup>1</sup>Дирихле Петер Густав Лежен (1805–1859) – немецкий математик, иностранный член Петербургской академии наук, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Берлинской академии наук. Основные работы посвящены теории чисел и математическому анализу.

Рассмотрим точку  $z$ , лежащую в верхней полуплоскости и обозначим через  $\varphi_k$  угол между вектором  $z - a_k$  и положительным направлением действительной оси.

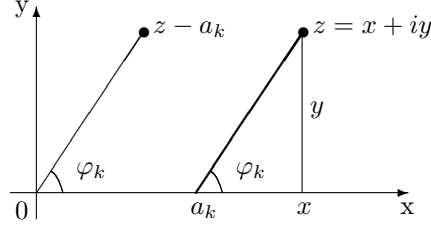


Рис. 2.11.1

Из рис. 2.11.1 видно, что

$$\begin{aligned} \arg(z - a_k) = \varphi_k &= \operatorname{arctg} \frac{x - a_k}{y} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x - a_k}{y} = \\ &= \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{a_k - x}{y}. \end{aligned} \quad (2.11.1)$$

Применяя к функции  $h(x)$  формулу Пуассона, вычисляя в явном возникающие интегралы и учитывая равенство (2.11.1), получаем

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{v_0 y}{\pi} \int_{-\infty}^{a_1} \frac{dt}{(x - t)^2 + y^2} + \frac{v_1 y}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dt}{(x - t)^2 + y^2} + \dots + \\ &+ \frac{v_n y}{\pi} \int_{a_n}^{\infty} \frac{dt}{(x - t)^2 + y^2} = \frac{v_0}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{a_1 - x}{y} + \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ \frac{v_1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{a_2 - x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{a_1 - x}{y} \right) + \dots + \frac{v_n}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a_n - x}{y} \right) = \\ &= \frac{v_0 + v_n}{2} + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a_1 - x}{y} + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a_n - x}{y} = \\ &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n) = \\ &= v_n + \operatorname{Im} \left( \frac{v_0 - v_1}{\pi} \ln(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \ln(z - a_n) \right). \end{aligned}$$

Таким образом мы получаем две явные формы записи для решения задачи Дирихле с кусочно-постоянными граничными значениями

$$\begin{aligned} v(x, y) &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n) = \\ &= v_n + \operatorname{Im} \left( \frac{v_0 - v_1}{\pi} \ln(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \ln(z - a_n) \right). \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

Формулой (2.11.2) мы воспользуемся в следующем примере, и еще она потребуется нам при выводе формулы Кристоффеля – Шварца.

**Пример.** (*Распределение температуры в канале*). Рассмотрим полуполосу  $D = \{| \operatorname{Re} z | < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$ , у которой на основании поддерживается температура  $T^\circ$ , а на боковых сторонах температура  $0^\circ$ .

В установившемся режиме функция температуры  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической. Конформной заменой рассматриваемую задачу можно свести к нахождению гармонической функции в верхней полуплоскости.

Функция  $w = \sin z$  отображает полуполосу  $D$  на верхнюю полуплоскость, при этом основание отображается на интервал  $(-1, 1)$ , а боковые стороны соответственно на лучи  $(-\infty, -1)$  и  $(1, \infty)$ .

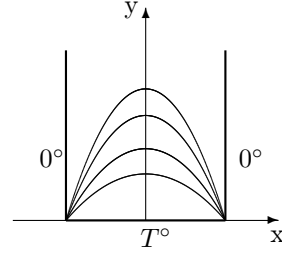


Рис. 2.11.1

Остается воспользоваться формулой (2.11.2), учитывая, что  $n = 2$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $v_0 = v_2 = 0$ ,  $v_1 = T$ . Получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{T}{\pi} \arg(w + 1) + \frac{T}{\pi} \arg(w - 1) = \frac{T}{\pi} \arg \frac{w - 1}{w + 1} = \\ &= \frac{T}{\pi} \arg \frac{\sin z - 1}{\sin z + 1}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$ , то

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{T}{\pi} \arg \frac{(\sin x \operatorname{ch} y - 1) + i \cos x \operatorname{sh} y}{(\sin x \operatorname{ch} y + 1) + i \cos x \operatorname{sh} y} = \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x} = \\ &= \frac{2T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\operatorname{sh} y}. \end{aligned}$$

## §12. Отображения многоугольных областей. Интеграл Кристоффеля–Шварца

Рассмотрим многоугольник  $M$  с вершинами в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и углами  $\theta_1\pi, \theta_2\pi, \dots, \theta_n\pi$  при соответствующих вершинах. Согласно теореме Римана существует конформное отображение  $f(z)$  верхней полуплоскости  $P$  на многоугольник  $M$ . К сожалению теорема Римана является классической теоремой существования и не содержит никаких рекомендаций относительно построения искомого отображения в конкретной ситуации. Нас же в данном случае будет интересовать именно нахождение формулы, определяющей отображение  $f(z)$ .

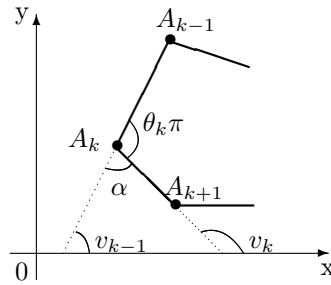


Рис. 2.12.1

Предположим, что нам известны лежащие на действительной прямой точки  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , соответствующие вершинам многоугольника, т. е.  $f(a_k) = A_k$ . На каждом интервале  $I_k = (a_k, a_{k+1})$  функция  $f(z)$  принимает значения, лежащие на стороне  $A_k A_{k+1}$  многоугольника, при этом  $\arg f'(z) = v_k = \text{const}$  на интервале  $I_k$ .

Поскольку производная аналитической функции является аналитической функцией, то мнимая часть функции  $\ln f'(z)$  является гармонической в верхней полуплоскости функцией, принимающей кусочно-постоянные значения на действительной оси, и к ней применима формула (2.11.2) предыдущего параграфа, согласно которой получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \ln f'(z) &= \arg f'(z) = \\ &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n). \end{aligned}$$

Из геометрических соображений (см. рис. 2.12.1) следует, что

$$v_k - v_{k-1} = (1 - \theta_k) \pi.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \ln f'(z) &= \arg f'(z) = \\ &= c_2 + (\theta_1 - 1) \arg(z - a_1) + \dots + (\theta_n - 1) \arg(z - a_n) \end{aligned}$$

и

$$\ln f'(z) = (c_1 + ic_2) + (\theta_1 - 1) \ln(z - a_1) + \dots + (\theta_n - 1) \ln(z - a_n).$$

Потенцируя и интегрируя последнее равенство, получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} (t - a_2)^{\theta_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\theta_n - 1} dt + C_1. \quad (2.12.1)$$

Формулу (2.12.1), которая позволяет найти искомое конформное отображение, называют *интегралом Кристоффеля<sup>1</sup>-Шварца*.

Формула получена нами в предположении, что точки  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , соответствующие вершинам многоугольника  $M$ , известны. Однако в практических задачах задаются лишь вершины многоугольника  $M$ , а точки  $a_k$  и постоянные  $C, C_1$  должны определяться из условий задачи. Поскольку нормировка конформного отображения зависит от трех действительных параметров, то, к примеру, мы можем произвольным образом фиксировать прообразы трех вершин многоугольника, после чего все остальные характеристики должны однозначно находиться из других соображений.

### Случаи вырождения

В общем случае не существует методов нахождения явного вида первообразной в интеграл Кристоффеля–Шварца, поэтому особый интерес представляют ситуации, в которых удастся упростить поинтегральное выражение. Кроме этого следует отметить, что формула Кристоффеля–Шварца остается верной и для „странных многоугольников“, у которых одна или даже несколько „вершин“ находятся в бесконечно удаленной точке.

I. Если одна из точек  $a_k$  является бесконечно удаленной, то интеграл Кристоффеля–Шварца имеет более простой вид.

---

<sup>1</sup>Кристоффель (1829-1900) – немецкий математик. Основные труды по теории функций, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории инвариантов алгебраических форм и теории дифференциальных квадратичных форм.



Пусть все  $a_k \neq 0, a_n = \infty, a'_n \in R$  и  $a'_n \neq \infty$ . Введем новую переменную  $\xi = a'_n - \frac{1}{z}$ , тогда точкам  $a_1, a_2, \dots, a_n$  будут соответствовать конечные точки  $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ , и мы можем воспользоваться интегралом Кристоффеля–Шварца для нахождения функции  $g$ , отображающей верхнюю полуплоскость  $\xi > 0$  на многоугольник  $M$

$$g(\xi) = C' \int_{\xi_0}^{\xi} (\tau - a'_1)^{\theta_1-1} (\tau - a'_2)^{\theta_2-1} \dots (\tau - a'_n)^{\theta_n-1} d\tau + C'_1. \quad (2.12.2)$$

Полагая  $\tau = a'_n - \frac{1}{t}$  и делая замену переменной в интеграле, согласно формуле (2.12.2) получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= C' \int_{z_0}^z \left(a'_n - a'_1 - \frac{1}{t}\right)^{\theta_1-1} \left(a'_n - a'_2 - \frac{1}{t}\right)^{\theta_2-1} \dots \left(-\frac{1}{t}\right)^{\theta_n-1} \frac{dt}{t^2} + C'_1 = \\ &= C' \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{t}\right)^{\theta_1-1} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{t}\right)^{\theta_2-1} \dots \left(-\frac{1}{t}\right)^{\theta_n-1} \frac{dt}{t^2} + C'_1 = \\ &= C'' \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1-1} (t - a_2)^{\theta_2-1} \dots (t - a_{n-1})^{\theta_{n-1}-1} \frac{dt}{t^{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1}+2}} + C''_1. \end{aligned}$$

Используя хорошо известное утверждение о сумме внутренних углов  $n$ -угольника:  $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = n - 2$ , окончательно получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1-1} (t - a_2)^{\theta_2-1} \dots (t - a_{n-1})^{\theta_{n-1}-1} dt + C_1. \quad (2.12.3)$$

Таким образом, если одной из вершин многоугольника  $M$  соответствует бесконечно удаленная точка, то формула Кристоффеля–Шварца не содержит множитель, соответствующий этой вершине.

**Замечание.** Если одна из точек  $a_k$  равна нулю, то следует рассмотреть модифицированную замену переменной  $\xi = a'_n - \frac{1}{z-b}$ , где  $b \in R$  и отлично от всех  $a_k$ . При такой замене переменной все точки  $a'_k$  будут

конечными и мы сможем повторить приведенные выше преобразования интеграла Кристоффеля–Шварца.

II. Формула (2.12.1) остается верной и для многоугольника, у которого одна или несколько вершин  $A_k$  совпадают с бесконечно удаленной точкой, если при этом условиться понимать под углом между двумя, прямыми пересекающимися в бесконечности, взятый со знаком минус угол в конечной точке их пересечения (см. рис. 2.12.2).

Угол в конечной точке пересечения сторон  $A_{k-1}A_k$  и  $A_kA_{k+1}$  обозначим через  $\alpha$ . Проведем дополнительный разрез  $A'_kA''_k$  и получим ограниченный многоугольник  $M'$ , углы которого при вершинах  $A'_k, A''_k$  соответственно обозначим через  $\alpha'$  и  $\alpha''$ , а точки действительной прямой, соответствующие вершинам  $A'_k$  и  $A''_k$ , обозначим через  $a'_k$  и  $a''_k$ .

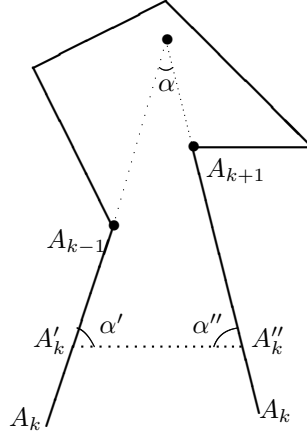


Рис. 2.12.2

Согласно формуле Кристоффеля–Шварца отображение верхней полуплоскости на многоугольник  $M'$  имеет вид

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} \dots (t - a'_k)^{\alpha' - 1} (t - a''_k)^{\alpha'' - 1} \dots (t - a_n)^{\theta_n - 1} dt + C_1.$$

При  $A'_k \rightarrow A_k$  и  $A''_k \rightarrow A_k$  точки  $a'_k$  и  $a''_k$  стремятся к общему пределу — точке  $a_k$ . Поскольку  $\alpha + \alpha' + \alpha'' = 1$ , то

$$(\alpha' - 1) + (\alpha'' - 1) = -\alpha - 1.$$

Окончательно получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} \dots (t - a_k)^{-\alpha - 1} \dots (t - a_n)^{\theta_n - 1} dt + C_1.$$

Отметим, что формула остается верной и в случае, когда несколько вершин многоугольника находятся в бесконечно удаленной точке.

В следующих примерах ищется конформное отображение верхней полуплоскости на соответствующий многоугольник  $M$ .

1) Полуполоса

$$M = \{ |Re w| < \frac{\pi}{2}, Im w > 0 \}$$

представляет собой „треугольник“ с вершинами  $A_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $A_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $A_3 = \infty$ . Поскольку нормировка конформного отображения определяется тремя действительными параметрами, то в данном случае точки  $a_1, a_2, a_3$  мы можем выбрать произвольным образом. Естественно, что выбор определяется желанием получить интеграл Кристоффеля–Шварца наиболее простого вида.

$A_k$	$\theta_k$	$a_k$
$A_1 = -\pi/2$	$\theta_1 = 1/2$	$a_1 = -1$
$A_2 = \pi/2$	$\theta_2 = 1/2$	$a_2 = 1$
$A_3 = \infty$	$\theta_3 = 0$	$a_3 = \infty$

Интеграл Кристоффеля–Шварца принимает вид

$$f(z) = C \int_0^z (t+1)^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{2}} dt + C_1 = C' \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-z^2}} + C_1 =$$

$$C' \arcsin z + C_1.$$

Используя соответствие между  $A_1, A_2$  и  $a_1, a_2$ , получаем

$$-\frac{\pi}{2} = -C' \frac{\pi}{2} + C_1, \quad \frac{\pi}{2} = C' \frac{\pi}{2} + C_1,$$

следовательно  $C' = 1$ ,  $C_1 = 0$ .

Таким образом функция, отображающая полуплоскость на полуполосу, имеет вид

$$w = \arcsin z.$$

Этот ответ был вполне ожидаемым, поскольку ранее мы рассматривали отображение, осуществляемое обратной функцией  $z = \sin w$ .

2) Пусть  $M$  – изображенный на рис. 2.12.3 „четыреугольник“, граница которого состоит из двух прямых  $L_1 = \{Re w = -h_1\}$ ,  $L_2 = \{Re w = h_2\}$  и луча  $L_3 = \{Re w = 0, Im w < 0\}$ . У данного многоугольника три вершины  $A_1, A_2, A_4$  находятся в бесконечности, и углы в этих вершинах равны нулю. Угол в вершине  $A_3$  равен  $2\pi$ .

$A_k$	$\theta_k$	$a_k$
$A_1 = \infty$	$\theta_1 = 0$	$a_1 = \infty$
$A_2 = \infty$	$\theta_2 = 0$	$a_2 = -1$
$A_3 = 0$	$\theta_3 = 2$	$a_3 = \xi$
$A_4 = \infty$	$\theta_4 = 0$	$a_4 = 1$

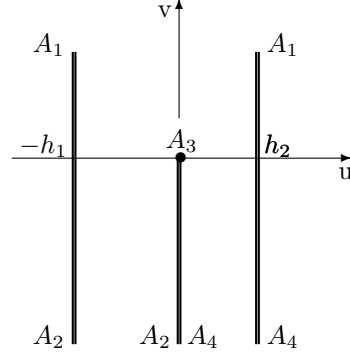


Рис. 2.12.3

В данном случае мы можем фиксировать три точки действительной прямой, соответствующие вершинам, находящимся в бесконечности, а четвертую точку пока обозначим символом  $\xi$ .

Интеграл Кристоффеля–Шварца

$$w = f(z) = C \int (z+1)^{-1} (z-\xi)(z-1)^{-1} dz = C \int \frac{z-\xi}{z^2-1} dz =$$

$$C \left[ \frac{1+\xi}{2} \ln(z+1) + \frac{1-\xi}{2} \ln(z-1) \right] + C_1 \quad (2.12.4)$$

содержит три неизвестные постоянные  $C, C_1, \xi$ , которые нужно найти.

При обходе точки  $a_2 = -1$  по сколь угодно малой верхней полуокружности  $C_r^+ = \{z = -1 + re^{i\varphi}, Im z > 0\}$  соответствующая точка  $w$  должна перейти с луча  $A_1A_2$  на луч  $A_2A_3$ . При малых  $r$  образ полуокружности  $C_r^+$  близок к горизонтальному отрезку, соединяющему лучи, поэтому для приращения функции вдоль  $C_r^+$  получаем оценку

$$\Delta w = h_1 + O(r).$$

При обходе  $C_r^+$  приращение мнимой части функции  $\ln(z-1)$  равно нулю, а приращение действительной части является бесконечно малым при  $r \rightarrow 0$ . Приращение мнимой части функции  $\ln(z+1) = \ln r + i\varphi$  равно  $-\pi i$ , а приращение действительной части равно нулю. Согласно формуле (2.12.4)

$$\Delta w = -C \frac{1+\xi}{2} \pi i + O(r).$$

Переходя к пределу при  $r \rightarrow 0$ , получаем

$$-C \frac{1+\xi}{2} \pi i = h_1.$$

Аналогично, рассматривая обход вокруг точки  $a_4 = 1$ , приходим к равенству

$$-C \frac{1-\xi}{2} \pi i = h_2.$$

Из полученных соотношений находим постоянные

$$C = i \frac{h_1 + h_2}{\pi}, \quad \xi = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}.$$

Следовательно искомая функция имеет вид

$$w = f(z) = \frac{i}{\pi} [h_1 \ln(z+1) + h_2 \ln(z-1)] + C_1.$$

Учитывая соответствие точек  $a_3 = \xi$  и  $A_3 = 0$ , постоянную  $C_1$  находим из равенства  $f(\xi) = 0$

$$C_1 = -h_2 \pi^2 + \pi i \ln h_1^{h_1} h_2^{h_2} \left( \frac{2}{h_1 + h_2} \right)^{h_1 + h_2}.$$

3) Пусть  $M$  – „четырёхугольник“, граница которого состоит из четырех лучей

$$L_1 = \{\operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} w = 0\}, L_2 = \{\operatorname{Re} w = 0, \operatorname{Im} w > 0\},$$

$$L_3 = \{\operatorname{Re} w = 0, -\infty < \operatorname{Im} w < -2h\}, L_4 = \{\operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} w = -2h\}.$$

Проведем дополнительный разрез  $L = \{\operatorname{Im} w = -h\}$ . Верхняя половина многоугольника является „треугольником“ с „вершинами“ в точках  $A_1, A_2, A_3$ . Выбирая соответствие точек действительной прямой и

вершин треугольника, указанное в таблице, мы получаем достаточно простой интеграл.

$A_k$	$\theta_k$	$a_k$
$A_1 = \infty$	$\theta_1 = 0$	$a_1 = 1$
$A_2 = \infty$	$\theta_2 = -1/2$	$a_2 = \infty$
$A_3 = 0$	$\theta_3 = 3/2$	$a_3 = 0$

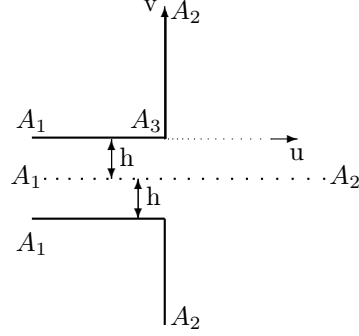


Рис. 2.12.4

Интеграл Кристоффеля–Шварца имеет вид

$$w = g(\xi) = C \int_0^\xi (t-1)^{-1} t^{1/2} dt + C_1 = C \int_0^\xi \frac{\sqrt{t} dt}{t-1} =$$

$$C \left( 2\sqrt{\xi} + \ln \frac{\sqrt{\xi}-1}{\sqrt{\xi}+1} - hi \right) \quad (2.12.5)$$

(в данном случае  $C_1 = 0$ , т.к. по условию  $g(0) = 0$ ).

При обходе точки  $\xi = 1$  соответствующая точка  $w$  переходит с луча  $A_3A_1$  на разрез  $A_1A_2$ , и следовательно функция  $g(\xi)$  имеет приращение  $\Delta w \sim -hi$ . С другой стороны, согласно формуле (2.12.5) имеем  $\Delta w \sim -C\pi i$ , т.е.  $C = h/\pi$ .

Таким образом функция

$$g(\xi) = \frac{2h}{\pi} \sqrt{\xi} + \frac{h}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\xi}-1}{\sqrt{\xi}+1} - hi \quad (2.12.6)$$

отображает верхнюю полуплоскость  $\xi > 0$  на верхнюю половину исходного „четырёхугольника“, при этом разрезу  $A_1A_2$  соответствует луч  $(1, +\infty)$ . Обозначим через  $D$  всю комплексную плоскость с разрезом по лучу  $(-\infty, 1)$ . Согласно принципу симметрии функция  $g(\xi)$ , определяемая равенством (2.12.6) отображает область  $D$  на весь „четырёхугольник“.

Функция  $\xi = 1 - z^2$  отображает верхнюю полуплоскость на область  $D$ . Используя эту подстановку, находим отображение верхней полуплоскости на исходный „четыреугольник“

$$f(z) = \frac{2h}{\pi} \sqrt{1 - z^2} + \frac{h}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1 - z^2} - 1}{\sqrt{1 - z^2} + 1} - hi =$$

$$\frac{2h}{\pi} \left( \sqrt{1 - z^2} + \ln \frac{z}{1 + \sqrt{1 - z^2}} \right).$$

### §13. Поток во внешности замкнутого контура

Пусть  $C$  – замкнутый контур, ограничивающий область  $G \subset \mathbb{C}$ . Рассмотрим поток жидкости, обтекающий со скоростью  $\mathbf{V}(z)$  контур  $C$  и имеющий в бесконечности фиксированную скорость  $\mathbf{V}_\infty$ .

Комплексный потенциал данного течения является аналитической функцией в области  $D = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ , а его производная  $f'(z) = \overline{\mathbf{V}(z)}$  аналитична в  $D$  и имеет в бесконечно удаленной точке устранимую особенность. Поэтому в окрестности бесконечности ряд Лорана функции  $f'(z)$  не содержит главной части и имеет вид

$$f'(z) = \overline{\mathbf{V}_\infty} + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

Согласно формуле (2.1.4) для произвольного замкнутого контура  $C^*$ , содержащего внутри себя точку  $z = 0$  и охватывающего контур  $C$

$$\Gamma + iN = \int_{C^*} f'(z) dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Поскольку поток через контур  $C^*$  равен нулю, то  $2\pi i c_{-1} = \Gamma$ .

Поэтому комплексный потенциал имеет вид

$$f(z) = \overline{\mathbf{V}_\infty} z + c + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{c_{-2}}{z} - \dots \quad (2.13.1)$$

Из условия обтекания следует, что контур  $C$  должен быть одной из линий тока, а мнимая часть комплексного потенциала – функция  $v(x, y)$ , являющаяся функцией тока, будет постоянной на контуре  $C$ . Следовательно, комплексный потенциал отображает контур  $C$  в некоторый отрезок  $I$ , параллельный действительной оси.

Предположим, что фиксированы скорость в бесконечности  $\mathbf{V}(\infty)$  и циркуляция  $\Gamma$ , а  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  – два комплексных потенциала, соответствующих данному потоку. Тогда функция  $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$  является однозначной и аналитической всюду в области  $D \cup \infty$ ,<sup>1</sup> при этом ее мнимая часть  $v(z)$  является гармонической в  $D \cup \infty$  и постоянной на контуре  $C$ . По теореме о единственности решения задачи Дирихле всюду в  $D$  функция  $v(z) \equiv \text{const}$ , и, следовательно,  $f(z) \equiv \text{const}$ . Таким образом комплексный потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого, не влияющего на распределение скоростей.

В случае, когда циркуляция равна нулю комплексный потенциал является однолистной функцией.

*Комплексный потенциал  $w = f_0(z)$  безциркуляционного ( $\Gamma = 0$ ) потока  $\mathbf{V}_0$  реализует конформное отображения внешности замкнутого контура на внешность некоторого отрезка  $I$ , параллельного действительной оси, с нормировкой  $f'(z) = \mathbf{V}(\infty)$ .*

Поскольку в данном случае комплексный потенциал имеет вид

$$f(z) = \overline{\mathbf{V}}_\infty z + c - \frac{c-2}{z} - \dots,$$

то в окрестности бесконечно удаленной точки отображение близко к линейному  $f(z) \sim \overline{\mathbf{V}}_\infty z + c$  и является взаимно однозначным. Обозначим через  $n(a)$  количество нулей функции  $f(z) - a$ . Поскольку функция  $f(z) - a$  имеет единственный полюс первого порядка в бесконечно удаленной точке, то по принципу аргумента для значений  $a \notin f(C)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = 1 - n(a). \quad (2.13.2)$$

Целочисленная функция  $n(a)$ , определяемая равенством (2.13.2), является непрерывной, при этом  $n(a) = 1$  для достаточно больших по модулю значений  $a$ , поэтому  $n(a) \equiv 1$  для всех  $a \notin I$ . Это и доказывает взаимную однозначность отображения.

#### §14. Подъемная сила

Выведем классическую *формулу Чаплыгина*<sup>1</sup> позволяющую выра-

<sup>1</sup>Функцию называют аналитической (гармонической) в точке  $z = \infty$ , если бесконечно удаленная точка является устранимой.

<sup>1</sup>Чаплыгин Сергей Алексеевич (1869-1942) – российский, советский ученый, академик АН СССР. Основные труды по теоретической механике, гидро-, аэро-, и газовой динамике.



зить подъемную силу, действующую на крыло в установившемся безвихревом потоке, через комплексный потенциал потока.

Будем считать, что крыло расположено неподвижно, а поток  $\mathbf{V}$ , имеющий фиксированную скорость в бесконечности  $\mathbf{V}_\infty$ , обтекает крыло, сечение которого является плоским замкнутым контуром  $C$ .

В безвихревом потоке давление определяется формулой Бернулли<sup>2</sup>-Эйлера<sup>3</sup>

$$p = A - \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2.$$

Поскольку давление на контуре  $C$  направлено внутрь по нормали, то вектор силы, действующей на элемент  $dz$  контура  $C$ , равен

$$p i dz = A i dz - \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2 i dz,$$

а полная сила, действующая на контур  $C$ , равна

$$\mathbf{P} = \int_C p i dz = -\frac{\rho i}{2} \int_C |\mathbf{V}|^2 dz, \quad (2.14.1)$$

(интеграл по замкнутому контуру  $C$  от постоянной  $A i$  равен нулю).

Поскольку происходит обтекание контура  $C$ , то в точках контура скорость потока направлена по касательной, т.е.  $\mathbf{V} = f'(z) = \pm |\mathbf{V}| e^{i\varphi}$ , где  $\varphi = \arg dz$ .

Учитывая соотношения  $e^{-2i\varphi} dz = e^{-i\varphi} |dz| = \overline{dz}$  и  $|\mathbf{V}|^2 = [\overline{f'(z)}]^2 e^{-2i\varphi}$ , из равенства (2.14.1) получаем

$$\mathbf{P} = -\frac{\rho i}{2} \int_C [\overline{f'(z)}]^2 e^{-2i\varphi} dz = -\frac{\rho i}{2} \int_C [\overline{f'(z)}]^2 \overline{dz}.$$

<sup>2</sup>Бернулли Даниил (1700-1782) – швейцарский математик и механик, иностранный почетный член Петербургской, член Болонской, Берлинской, Парижской академий, член Лондонского королевского общества. В Базеле был профессором анатомии и ботаники, а затем физики. Основные труды по алгебраическим уравнениям, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и механике. Вывел уравнение стационарного движения идеальной жидкости.

<sup>3</sup>Эйлер Леонард (1707-1783) – математик, механик и физик, член Петербургской, Берлинской, Парижской академий, член Лондонского королевского общества. С 1727 по 1741 и с 1766 до конца жизни работал в Петербургской академии наук. Круг интересов Эйлера включал в себя все отделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию музыки, теорию машин, баллистику, морскую науку, страховое дело, ... Эйлер первым начал систематическое изучение функций комплексного переменного и применение мнимых величин к вычислению интегралов.

Переходя к сопряженным величинам, получаем классическую формулу Чаплыгина

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz. \quad (2.14.2)$$

Согласно результатам предыдущего параграфа производная комплексного потенциала имеет вид

$$f'(z) = \overline{\mathbf{V}}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} - \dots,$$

следовательно

$$[f'(z)]^2 = (\overline{\mathbf{V}}_\infty)^2 + \frac{\Gamma \overline{\mathbf{V}}_\infty}{\pi i} \frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z^3} + \dots$$

Вычисляя интеграл в формуле Чаплыгина (2.14.2), получаем

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz = \frac{\rho i}{2} 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} [f'(z)]^2 = \frac{\rho i}{2} 2\pi i \frac{\Gamma \overline{\mathbf{V}}_\infty}{\pi i} = i\rho \Gamma \overline{\mathbf{V}}_\infty.$$

Переходя к сопряженным величинам, получаем формулу Жуковского

$$P = -i\rho \Gamma \mathbf{V}_\infty, \quad (2.14.3)$$

согласно которой *подъемная сила, действующая на обтекаемый контур, по величине равна произведению плотности, циркуляции и модуля скорости в бесконечности, а ее направление повернуто относительно  $\mathbf{V}_\infty$  на прямой угол (при  $\Gamma > 0$  поворот происходит по часовой стрелке, а при  $\Gamma < 0$  против).*

### §15. Обтекание кругового цилиндра

Найдем вначале комплексный потенциал  $f_0(z)$  безциркуляционного потока, обтекающего окружность  $C_R = \{|z| = R\}$  с заданной скоростью на бесконечности  $\mathbf{V}_\infty = v_\infty e^{i\theta}$ . Мы уже знаем, что в данном случае комплексный потенциал отображает внешность круга  $K_R = \{|z| \leq R\}$  на плоскость с разрезом по отрезку параллельному действительной оси.

Отображение  $t = \frac{ze^{-i\theta}}{R}$  переводит внешность круга  $K_R$  во внешность единичного круга, а функция Жуковского  $w = L \left( t + \frac{1}{t} \right)$  при

$L > 0$  отображает внешность единичного круга на внешность некоторого отрезка  $I_L$ , лежащего на действительной оси. Следовательно отображение

$$w = L \left( \frac{ze^{-i\theta}}{R} + \frac{R}{ze^{-i\theta}} \right)$$

переводит внешность круга  $K_R$  во внешность отрезка  $I_L$ , и при  $L = Rv_\infty$  получаем

$$\overline{w'(\infty)} = \frac{Le^{-i\theta}}{R} = v_\infty e^{i\theta} = \mathbf{V}_\infty.$$

Поэтому искомым комплексный потенциал  $f_0(z)$  имеет вид

$$f_0(z) = Rv_\infty \left( \frac{ze^{-i\theta}}{R} + \frac{R}{ze^{-i\theta}} \right) = \overline{\mathbf{V}_\infty} z + \frac{\mathbf{V}_\infty R^2}{z}.$$

Добавляя комплексный потенциал  $f_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$  чисто циркуляционного потока, обтекающего окружность  $C_R$ , окончательно находим

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) = \overline{\mathbf{V}_\infty} z + \frac{\mathbf{V}_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad (2.15.1)$$

$$\overline{\mathbf{V}} = f'(z) = \overline{\mathbf{V}_\infty} - \frac{\mathbf{V}_\infty R^2}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \frac{1}{z}. \quad (2.15.2)$$

Учитывая симметрию и принимая для простоты  $\theta = 0$ , получаем

$$f'(z) = v_\infty - \frac{v_\infty R^2}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

Критическими точками потока ( $\mathbf{V} = f'(z) = 0$ ) являются точки

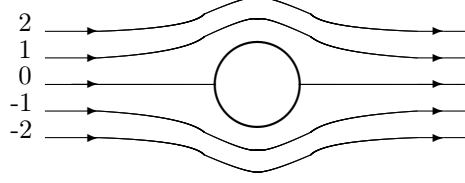
$$z_{1,2} = \frac{1}{4\pi v_\infty} \left( \Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 v_\infty^2 R^2 - \Gamma^2} \right).$$

Структура рассматриваемого течения существенным образом зависит от величины циркуляции. При  $\Gamma \geq 0$  можно выделить четыре случая, в каждом из которых строение линий тока имеет свои качественные особенности.

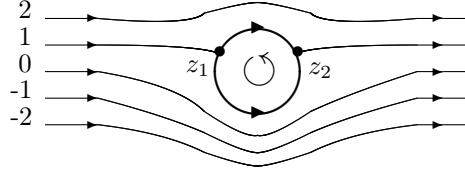
В зависимости от величины циркуляции получаем :

I.  $\Gamma = 0$ . Это простейшая ситуация безциркуляционного потока, при котором течение симметрично относительно действительной оси, а

критическими являются диаметрально противоположные точки окружности  $z_{1,2} = \pm R$ .



II.  $0 < \Gamma < 4\pi v_\infty R$ . В этом случае мы имеем две различные критические  $z_1$  и  $z_2$ , расположенные симметрично относительно мнимой оси. При этом легко проверить, что  $|z_1| = |z_2| = R$ , т.е. критические точки лежат на окружности.



В точке  $z_1 = Re^{i\varphi_1}$  соответствующая линия тока разветвляется на две: одна обходит верхнюю дугу окружности, а вторая нижнюю. В точке  $z_2 = Re^{i\varphi_2}$  обе линии вновь соединяются. Точку  $z_1$  называют *точкой разветвления*, а точку  $z_2$  называют *точкой схода*.

Циркуляция  $\Gamma$  и точка схода  $Re^{i\varphi_2}$  связаны простыми соотношениями

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}, \quad \Gamma = 4\pi R v_\infty \sin \varphi_2,$$

при увеличении циркуляции точки разветвления и схода сближаются.

В общем случае, когда  $\theta \neq 0$ , из геометрических соображений видно, что

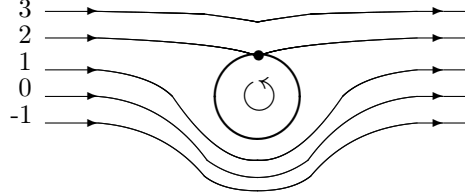
$$\Gamma = 4\pi R v_\infty \sin(\varphi_2 - \theta). \quad (2.15.3)$$

Подставляя равенство (2.15.3) в формулу Жуковского, получаем выражение для величины подъемной силы потока через точку схода

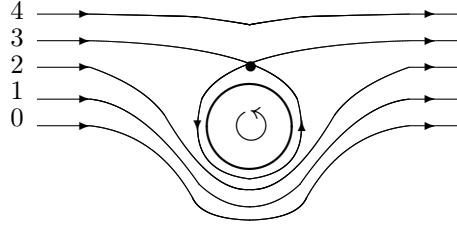
$$|\mathbf{P}| = 4\pi \rho R v_\infty^2 |\sin(\varphi_2 - \theta)|. \quad (2.15.4)$$

III.  $\Gamma = 4\pi v_\infty R$ . В этом случае точки разветвления и схода сливаются в одну. Возникает неустойчивая ситуация, поскольку малые из-

менения величины циркуляции  $\Gamma$  приводят к качественно различным типам течений, соответствующих случаю II и случаю IV.



IV.  $\Gamma > 4\pi v_\infty R$ . В этом случае  $|z_1| \neq |z_2|$  и  $|z_1||z_2| = R^2$ . Поэтому одна из критических точек лежит внутри круга, а вторая во внешности. В результате появляются замкнутые линии тока, охватывающие исходную окружность.



## §16. Обтекание профилей Жуковского

Рассмотрим замкнутый контур  $C$  и такое конформное отображение  $t = h(z)$  внешности контура  $C$  на внешность круга  $K_R = \{|t| \leq R\}$ , что  $h(\infty) = \infty, h'(\infty) = 1$ .

Учитывая формулу (2.15.1), описывающую комплексный потенциал потока, обтекающего окружность, несложно найти комплексный потенциал  $f(z)$  для потока, обтекающего контур  $C$  с заданной точкой схода  $z_0$  и заданной скоростью в бесконечности  $\mathbf{V}_\infty$

$$f(z) = \overline{\mathbf{V}_\infty} h(z) + \frac{\mathbf{V}_\infty R^2}{h(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln h(z). \quad (2.16.1)$$

Отметим, что циркуляцию  $\Gamma$  можно найти по формуле (2.15.3) через точку  $t_0$ , являющуюся образом точки схода, т.е.  $t_0 = h(z_0)$ .

При этом для нахождения самой точки схода часто используется *условие Чаплыгина*: при обтекании профиля с острой точкой  $z_0$  в

эту точку под влиянием вязкости и вихреобразования смещается точка схода потока.

Рассмотрим обтекание профилей Жуковского, описанных в §8. Функция  $\omega = g(z) = z + \sqrt{z^2 - a^2}$  отображает внешность профиля Жуковского  $\Gamma(a, h, d)$  на внешность круга  $K'$  радиуса  $R' = d + \sqrt{a^2 + h^2}$  и с центром в точке  $\omega_0 = ih - de^{-i\alpha/2}$ , где  $\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$ . При этом  $g'(\infty) = 2$ .

Следовательно функция

$$t = h(z) = \frac{1}{2}(g(z) - \omega_0) = \frac{1}{2} \left( z - \omega_0 + \sqrt{z^2 - a^2} \right)$$

отображает внешность профиля Жуковского на внешность круга с центром в нуле и радиуса

$$R = \frac{R'}{2} = \frac{1}{2} \left( d + \sqrt{a^2 + h^2} \right).$$

Подставляя явный вид функции  $h(z)$  в формулу (2.16.1), получим комплексный потенциал потока, обтекающего профиль Жуковского.

Из построения профиля Жуковского видно, что аргумент точки  $t_0$  — образа острой точки, являющейся согласно условию Чаплыгина точкой схода, равен  $-\frac{\alpha}{2}$ .

Формула (2.15.3) позволяет найти циркуляцию

$$\Gamma = -2\pi v_\infty \left( d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \sin \left( \theta + \frac{\alpha}{2} \right),$$

а формула (2.15.4) величину подъемной силы для профиля Жуковского  $\Gamma(a, h, d)$

$$|P| = 2\pi \rho v_\infty^2 \left( d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \left| \sin \left( \theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right|.$$

### III. МЕТОД ПЕРЕВАЛА

#### §1. Идея метода.

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz, \quad (3.1.1)$$

где  $\gamma$  – кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , а функции  $f(z)$  и  $S(z)$  являются аналитическими в некоторой области  $D$ , содержащей кривую  $\gamma$ . Нас интересует асимптотика функции  $F(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Идея метода основана на том, что согласно интегральной теореме Коши в односвязной области интеграл аналитической функции не зависит от выбора контура, соединяющего две фиксированные точки. Это позволяет перейти от исходного интеграла к интегралу по новому контуру, на котором получить необходимые асимптотические оценки оказывается проще.

Предположим, что существует такой контур  $\gamma^*$ , что

1.

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = \int_{\gamma^*} f(z) e^{\lambda S(z)} dz;$$

2. Существует единственная точка  $z_0 \in \gamma^*$ , в которой функция  $\operatorname{Re} S(z)$  имеет строгий максимум и  $f(z_0) \neq 0$ ;

3.  $\operatorname{Im} S(z) \equiv \text{const}$  при  $z \in \gamma^*$  в окрестности точки  $z_0$ .

Пусть  $\gamma_0^*$  малая дуга контура  $\gamma^*$ , содержащая точку  $z_0$  и удовлетворяющая условию 3. Поскольку  $z_0$  является единственной точкой строгого максимума действительной части функции  $S(z)$ , то существует такое  $\delta > 0$ , что  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0) - \delta$  при  $z \in \gamma^* \setminus \gamma_0^*$ . Поскольку  $|e^{\lambda S(z)}| = e^{\lambda \operatorname{Re} S(z)} < e^{\lambda \operatorname{Re} S(z_0)} e^{-\lambda \delta}$ , то как и в методе Лапласа, используя принцип локализации, можно показать, что

$$\int_{\gamma^*} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = \int_{\gamma_0^*} f(z) e^{\lambda S(z)} dz (1 + O(\lambda^{-\infty})).$$

Пусть  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  регулярная параметризация

контур  $\gamma_0^*$  такая, что  $z(0) = z_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\gamma^*} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = \int_{\gamma_0^*} f(z) e^{\lambda S(z)} dz (1 + O(\lambda^{-\infty})) = \\ &= \int_{\lambda}^{\beta} f(z(t)) z'(t) e^{\lambda S(z(t))} dt = e^{i\lambda \operatorname{Im} S(z_0)} \int_{\alpha}^{\beta} f_*(t) e^{\lambda S_*(t)} dt (1 + O(\lambda^{-\infty})), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

где  $f_*(t) = f(z(t))z'(t)$  и  $S_*(t) = \operatorname{Re} S(z(t))$ .

Поскольку функция  $S_*(t)$  является функцией действительного переменного и принимает только действительные значения, то асимптотику последнего интеграла можно найти с помощью метода Лапласа.

Контур, удовлетворяющий условиям 1, 2, 3, называют **перевальным** контуром. Причина такого названия будет ясна из следующего пункта.

## §2. Принципы нахождения перевального контура.

Пусть  $S(z) = U(z) + iV(z)$  и  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  регулярная параметризация ( $|z'(t)| \neq 0$ ) контура  $\gamma^*$  такая, что  $z(0) = z_0$ . Поскольку  $t = 0$  – точка максимума функции  $\operatorname{Re} S(z(t))$ , то

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re} S(z(t))|_{t=0} = U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0.$$

А так как  $\operatorname{Im} S(z) \equiv \operatorname{const}$  на  $\gamma^*$ , то

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Im} S(z(t))|_{t=0} = V'_x x'_t + V'_y y'_t = 0.$$

Таким образом мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0 \\ V'_x x'_t + V'_y y'_t = 0. \end{cases}$$

С учетом условий Коши - Римана ( $U'_x = V'_y$ ,  $U'_y = -V'_x$ ) получаем

$$\begin{cases} U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0 \\ U'_x y'_t - U'_y x'_t = 0. \end{cases}$$



Так как определитель системы  $\Delta = -(x'_t{}^2 + y'_t{}^2) = |z'_t|^2 \neq 0$ , то она имеет единственное решение

$$U'_x(z_0) = U'_y(z_0) = V'_x(z_0) = V'_y(z_0) = 0.$$

Таким образом интересующий нас контур  $\gamma^*$  обязательно должен проходить через точку  $z_0$ , в которой  $S'(z_0) = U'_x(z_0) + iV'_x(z_0) = 0$ .

Рассмотрим подробнее строение поверхности  $u = U(x, y) = \operatorname{Re} S(z)$  в окрестности точки  $z_0$ , в которой  $S'(z_0) = 0$ .

**Лемма 3.2.1. (Принцип максимума для гармонической функции.)** Пусть функция  $U(z)$  является гармонической в ограниченной односвязной области  $D$  и непрерывной в  $\bar{D}$ . Если  $U(z)$  не является постоянной, то она не принимает своего максимального значения во внутренних точках области.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существует точка  $z_0 \in D$ , в которой функция  $U(z)$  принимает максимальное значение. Гармоническая функция  $U(z)$  является действительной частью некоторой аналитической в области  $D$  функции  $S(z)$ . Функция  $W(z) = e^{S(z)}$  будет так же аналитической в области  $D$  и ее модуль  $|W(z)| = e^{U(z)}$  будет достигать максимального значения в точке  $z_0$  - внутренней точке области  $D$ . По принципу максимума модуля аналитической функции получаем  $W(z) \equiv \text{const}$ , а следовательно и  $U(z) \equiv \text{const}$ , что противоречит условию теоремы.

В точке  $z_0$  первый дифференциал функции  $u = U(x, y)$  равен нулю, но, согласно принципу максимума, функция не имеет в этой точке экстремума. Поэтому график функции  $u = U(x, y)$  в окрестности точки  $z_0$  является седловой поверхностью. На рис. 3.2.1 это напоминает перевал между двумя вершинами. Поэтому точку  $z_0$ , в которой  $S'(z_0) = 0$ , называют **точкой перевала**, а соответствующий контур  $\gamma^*$ , проходящий через эту точку **перевальным контуром**.

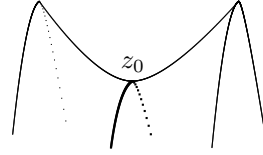


Рис. 3.2.1

При нахождении асимптотики исходного интеграла желательно двигаться через перевал так, чтобы функция  $\operatorname{Re} S(z)$  имела в точке  $z_0$  наиболее ярко выраженный максимум.

**Определение.** Кривая  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  называется линией наискорейшего спуска функции  $u = U(x, y)$ , если вектор скорости этой

линии пропорционален градиенту функции  $u = U(x, y)$ , т.е.

$$\begin{cases} x'_t = \alpha(t)U'_x \\ y'_t = \alpha(t)U'_y. \end{cases}$$

**Лемма 3.2.2 (О линии наискорейшего спуска.)** Пусть функция  $W = U(x, y) + iV(x, y)$  аналитична в области  $D \subset C$ . Тогда линия наискорейшего спуска функции  $U(x, y)$  задается уравнением  $V(x, y) \equiv \text{const}$ .

**Доказательство.** Пусть

$$\begin{cases} x'_t = \alpha(t)U'_x \\ y'_t = \alpha(t)U'_y. \end{cases}$$

Учитывая условия Коши - Римана ( $U'_x = V'_y$ ,  $U'_y = -V'_x$ ) получаем

$$\frac{d}{dt} \text{Im } S(z(t)) = V'_x x'_t + V'_y y'_t = V'_x \alpha(t)U'_x + V'_y \alpha(t)U'_y =$$

$$\alpha(t)[-U'_y U'_x + U'_x U'_y] = 0.$$

Следовательно  $V(x, y) \equiv \text{const}$  вдоль линии наискорейшего спуска.

Таким образом перевальный контур является линией наискорейшего спуска, проходящей через точку перевала  $z_0$ , ( $S'(z_0) = 0$ ).

**Пример.** Рассмотрим функцию  $S(z) = -z^2$ . Точка  $z = 0$  является точкой перевала данной функции. Выделим действительную и мнимую части функции  $S(z) = u(z) + iv(z)$

$$u = y^2 - x^2, \quad v = 2xy.$$

Графиком действительной части является классическая седловая поверхность - гиперболический параболоид. Линиями уровня  $u(z) = u(0)$  являются ортогональные прямые  $y = x$  и  $y = -x$ , делящие плоскость на четыре сектора. Секторы  $D_k$ ,  $k = 2, 3, 4$ , получаются из сектора  $D_1 = \{z \mid |\arg z| < \frac{\pi}{4}\}$  поворотом на угол  $\frac{k\pi}{2}$ . При этом на всякой кривой, проходящей через точку  $z = 0$  и расположенной внутри секторов  $D_2$  и  $D_4$ , функция  $u(z)$  в точке  $z = 0$  имеет строгий минимум. А на всякой кривой, проходящей через точку  $z = 0$  и расположенной внутри секторов  $D_1$  и  $D_3$ , функция  $u(z)$  в точке  $z = 0$  имеет строгий максимум. Поскольку  $v(z) = v(0) = 0$  на прямой  $y = 0$ , проходящей через секторы  $D_1$  и  $D_3$ , то данная прямая и будет перевальным контуром, на котором функция  $S(z) = -x^2$ .

Несложно показать, что в окрестности *простой точки перевала*  $z_0$ , в которой  $S'(z_0) = 0$ ,  $S''(z_0) \neq 0$ , качественно линии уровня функции  $\operatorname{Re} S(z)$  устроены также как в рассмотренной в примере ситуации.

**Лемма 3.2.3.** Пусть  $z_0$  - простая точка перевала функции  $S(z)$ , т.е.  $S'(z_0) = 0$ ,  $S''(z_0) \neq 0$ . Тогда в малой окрестности  $U$  точки  $z_0$  линия уровня  $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$  состоит из двух гладких кривых, которые ортогональны в точке  $z_0$  и разбивают окрестность  $U$  на четыре сектора. Знаки функции  $\operatorname{Re}(S(z) - S(z_0))$  в соседних секторах различны, и через сектора, в которых  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ , проходит гладкая кривая  $\gamma^*$ , являющаяся перевальным контуром, и при  $z \in \gamma^*$  функция  $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{const} = \operatorname{Im} S(z_0)$ .

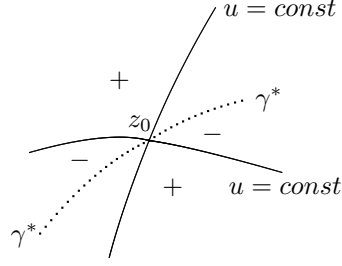


Рис. 3.2.2

**Доказательство.** Простая точка перевала  $z_0$  является нулем второго порядка функции  $S(z)$ , поэтому

$$w - w_0 = S(z) - S(z_0) = (z - z_0)^2 h(z),$$

где  $h(z)$  - аналитическая в окрестности точки  $z_0$  функция и  $h(z_0) \neq 0$ .

Положим  $\xi = (z - z_0)\sqrt{-h(z)}$ . Поскольку  $h(z_0) \neq 0$ , то функция  $\sqrt{-h(z)}$  допускает выделение в окрестности точки  $z_0$  двух однозначных аналитических ветвей. Пусть  $\psi(z)$  - одна из этих ветвей, тогда

$$w - w_0 = -\xi^2, \quad \xi = (z - z_0)\psi(z).$$

Поскольку  $\xi'(z_0) = \psi(z_0) \neq 0$ , то по теореме об обратной функции существуют окрестность  $U$  точки  $z_0$ , окрестность  $V$  точки  $\xi = 0$  и аналитическая функция  $\varphi : V \rightarrow U$ , такая что

$$S(\varphi(\xi)) = S(z_0) - \xi^2.$$

Функция  $\varphi$  осуществляет конформное отображение окрестности  $V$  на окрестность  $U$ , и при этом линии уровня функций  $\operatorname{Re}(-\xi^2)$  и  $\operatorname{Im}(-\xi^2)$ , устроенные точно также как в рассмотренном выше примере, конформно отображаются в линии уровня функций  $\operatorname{Re} S(z)$  и  $\operatorname{Im} S(z)$  соответственно. При этом сами получаемые кривые будут гладкими, а углы

между ними, в силу конформности отображения, будут равны углам между их прообразами. Перевальный контур  $\gamma^*$ , являющийся образом части прямой  $\text{Im } \xi = 0$ , лежащей в окрестности  $V$ , будет касаться в точке  $z_0$  биссектрисы угла между линиями уровня  $\text{Re } S(z) = \text{Re } S(z_0)$ .

### §3. Нахождение главного члена асимптотики.

Выведем формулу главного члена асимптотики интеграла (3.1.1) для наиболее типичной ситуации. Мы будем предполагать существование перевального контура для рассматриваемого интеграла.

**Теорема 3.3.1.** Пусть функции  $f(z)$  и  $S(z)$  являются аналитическими,  $z_0$  – простая точка перевала ( $S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$ ), являющаяся внутренней точкой перевального контура,  $f(z_0) \neq 0$  и  $z = z(t)$  – такая параметризация перевального контура, что  $z_0 = z(0)$ . Тогда

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} e^{i\theta_0} (1 + O(\lambda^{-1/2})), \quad (3.3.1)$$

где  $\theta_0 = \arg z'(0)$ .

**Доказательство.** К последнему интегралу в формуле (3.1.2) применим метод Лапласа, позволяющий выделить главный член асимптотики

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\gamma^*} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = e^{i\lambda \text{Im } S(z_0)} \int_{\alpha}^{\beta} f_*(t) e^{\lambda S_*(t)} dt (1 + O(\lambda^{-\infty})) = \\ &= e^{i\lambda \text{Im } S(z_0)} e^{\lambda S_*(0)} f_*(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''_*(0)|}} (1 + O(\lambda^{-1/2})). \end{aligned}$$

Все интересующие нас значения функции  $S_*(t)$  и ее производных, мы можем выразить через соответствующие значения исходной функции  $S(z)$ . Поскольку на перевальном контуре  $\text{Im } S(z(t)) \equiv \text{const}$  и  $S'(z_0) = 0$ , то

$$\frac{d^2}{dt^2} S_*(t)|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} S(z(t))|_{t=0} = S''(z_0)[z'(0)]^2.$$

Учитывая, что  $S_*(0) = \operatorname{Re} S(z_0)$ ,  $f_*(0) = f(z_0)z'(0)$ , получаем

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = \\ &= f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} z'(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)| |z'(0)|^2}} (1 + O(\lambda^{-1/2})) = \\ &= f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} e^{i\theta_0} (1 + O(\lambda^{-1/2})). \end{aligned}$$

**Замечание.** Основные сложности при использовании метода перевала обычно бывают связаны с доказательством возможности деформации исходного контура в перевальный (с сохранением значения интеграла) и нахождением направления входа перевального контура в точку перевала. В случае, когда удастся в явном виде найти линии уровня функции  $u = \operatorname{Re} S(z)$ , проходящие через точки перевала, направления перевального контура в точках перевала находятся довольно просто, поскольку он касается биссектрисы угла, образованного линиями уровня. В более общей ситуации для нахождения соответствующего угла могут быть использованы несколько иные соображения.

Предположим, что удастся найти проходящий через точку перевала  $z_0$  контур  $L$  такой, что функция  $\operatorname{Re} S(z)$  имеет в точке  $z_0$  строгий максимум при  $z \in L$ . Контур  $L$ , вообще говоря, не является перевальным, но согласно лемме 2.5 в окрестности точки  $z_0$  он будет проходить через те же секторы, через которые проходит перевальный контур. Поэтому направления входа в точку  $z_0$  перевального контура и контура  $L$  не могут отличаться более чем на  $\frac{\pi}{2}$ .

Пусть  $z = z(t)$  - параметризация перевального контура и  $z(0) = z_0$ . Тогда  $\operatorname{Re} S(z(t)) < \operatorname{Re} S(z_0)$  и  $\operatorname{Im} S(z(t)) = \operatorname{Im} S(z_0)$ . Следовательно при  $t \rightarrow 0$

$$0 > S(z(t)) - S(z_0) = \frac{1}{2} S''(z_0) (z'(0))^2 t^2 + o(t^2).$$

Откуда получаем

$$\pi = \arg (S''(z_0) (z'(0))^2),$$

что позволяет найти направление входа перевального контура в точку  $z_0$  с точностью до поворота на угол  $\pi$ . Учитывая имеющуюся на контуре  $L$  ориентацию, мы можем однозначно определить искомое значение  $\theta_0 = z'(0)$ .

1) Найдем главный член асимптотики функции Бесселя

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{\lambda}{2}(z-\frac{1}{z})} \frac{dz}{z^{n+1}}$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

*Решение.* В данном интеграле  $S(z) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)$ ,  $f(z) = z^{-(n+1)}$ .

В точках перевала  $z_{1,2} = \pm i = e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$  вычислим необходимые для использования формулы (3.3.1) значения:  $S(\pm i) = \pm i$ ,  $f(e^{\pm i \frac{\pi}{2}}) = \mp i e^{\mp i \frac{n\pi}{2}}$ ,  $|S''(\pm i)| = 1$ .

Поскольку

$$u(x, y) = \operatorname{Re} S(z) = \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right),$$

то линиями уровня функции  $u(x, y)$ , проходящими через точки перевала  $z_{1,2} = \pm i$ , являются мнимая ось  $x = 0$  и единичная окружность  $|z| = 1$ . Из геометрических соображений направление входа перевального контура в точки перевала находится легко

$$\theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \quad e^{i\theta_1} = -e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Используя формулу (3.3.1) и складывая асимптотики в двух точках перевала, получаем

$$\begin{aligned} J_n(\lambda) &\sim \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left( e^{i\lambda} (-i) e^{-i\frac{n\pi}{2}} (-1) e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\lambda} i e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos \left( \lambda - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

#### §4. Асимптотика функции Эйри на действительной оси

Функция Эйри действительного аргумента

$$Ai(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left( \frac{x^3}{3} + \lambda x \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i \left( \frac{x^3}{3} + \lambda x \right)} dx \quad (3.4.1)$$

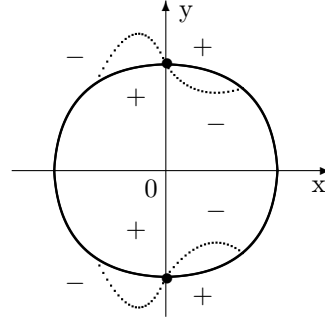


Рис. 3.3.1

была введена в 1838 Эйри<sup>1</sup>, изучавшим различные вопросы дифракции волн. Функция Эйри используется в дифракции, квантовой механике, теории поля ...

Найдем главный член асимптотики функции Эйри при  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ .

**I.** Пусть  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Делая замену переменной  $x = \sqrt{\lambda}t$ , получаем интеграл

$$Ai(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^{3/2} \left( \frac{t^3}{3} + t \right)} dt.$$

В данном случае  $f(z) \equiv 1$ , а функция  $S(z) = i \left( \frac{z^3}{3} + z \right)$  имеет две точки перевала  $z_{1,2} = \pm i$ .

Рассмотрим проходящую через точку перевала  $z_1 = i$  прямую  $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z = i\}$  и оценим интегралы по вертикальным отрезкам  $I_{\pm R} = [\pm R, \pm R + i]$ , соединяющим действительную ось и прямую  $L$ .

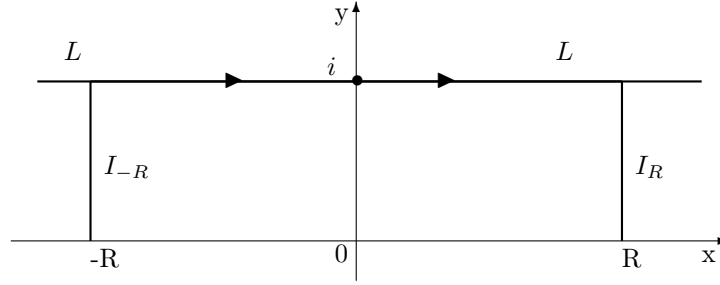


Рис. 3.4.1

Если  $z \in I_{\pm R}$ , то  $z = \pm R + iy$  и  $\text{Re } S(z) = -R^2 y + \frac{y^3}{3} - y \leq -R^2 y$ , поскольку  $0 \leq y \leq 1$ .

Поэтому

$$\left| \int_{I_{\pm R}} e^{\lambda^{3/2} S(z)} dz \right| \leq \int_0^1 e^{-\lambda^{3/2} R^2 y} dy = \frac{1 - e^{-\lambda^{3/2} R^2}}{\lambda^{3/2} R^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (3.4.2)$$

<sup>1</sup>Эйри Джордж Биддель (1801-1892). Занимался небесной механикой, астрономией и оптикой. Был королевским астрономом и президентом Лондонского королевского общества. Создал дифракционную теорию радуги.

Учитывая оценку (3.4.2) и интегральную теорему Коши, получаем

$$Ai(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_L e^{i\lambda^{3/2} \left( \frac{z^3}{3} + z \right)} dz.$$

Остается вычислить значения величин, входящих в формулу (3.3.1):

$$S(i) = -\frac{2}{3},$$

$$|S''(i)| = 2.$$

На прямой  $L$  функция  $\operatorname{Im} S(z) \neq \operatorname{const}$ , т.е.  $L$  не является перевальным контуром. Однако функция  $u = \operatorname{Re} S(z) = -x^2 - \frac{2}{3}$  имеет на прямой  $L$  единственный максимум в точке  $z_1 = i$ , следовательно прямая  $L$  в окрестности точки перевала  $z_1 = i$  проходит через те секторы, через которые проходит перевальный контур. Учитывая замечание предыдущего параграфа, равенство  $\pi = \arg (S''(i) [z'(0)]^2) = \pi + \arg ([z'(0)]^2)$  и направление прямой  $L$ , находим, что  $\theta_0 = 0$ .

В результате получаем

$$Ai(\lambda) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}\lambda^{3/2}}. \quad (3.4.3)$$

**Замечание.** Согласно формуле (3.4.3) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  функция  $Ai(\lambda) \rightarrow 0$ . В точке перевала  $z_2 = -i$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$  значение подинтегральной функции  $e^{\lambda^{3/2}S(z_2)} = e^{\frac{2}{3}\lambda^{3/2}}$  экспоненциально растет, при этом мы не можем перейти от интегрирования по действительной оси к интегралу по прямой  $L_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = -i\}$ , поскольку интегралы по вертикальным отрезкам  $[R, R-i]$  и  $[-R, -R-i]$ , соединяющим действительную ось и прямую  $L_1$ , в отличие от оценки (3.4.2) к нулю не стремятся. Поэтому для нахождения асимптотики интересующего нас интеграла и была выбрана точка перевала  $z_1 = i$ .

**II.** При  $\lambda \rightarrow -\infty$  замена переменной  $x = \sqrt{|\lambda|} t$ , приводит к интегралу

$$Ai(\lambda) = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|\lambda|^{3/2} \left( \frac{t^3}{3} - t \right)} dt.$$

Функция  $S(z) = i \left( \frac{z^3}{3} - z \right)$  имеет две точки перевала  $z_{1,2} = \pm 1$ , лежащие на контуре интегрирования, при этом  $\operatorname{Re} S(\pm 1) = 0$ . Уравнение



$\operatorname{Re} S(z) = 0$  имеет вид

$$y \left( x^2 - \frac{y^2}{3} - 1 \right) = 0.$$

Поэтому линиями уровня функции  $u = \operatorname{Re} S(z)$ , проходящими через точки перевала, являются ветви гиперболы  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  и действительная ось. Направление входа перевального контура в точку перевала легко находится из геометрических соображений: в точке  $z_1 = -1$  угол  $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ , в точке  $z_2 = 1$  угол  $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ .

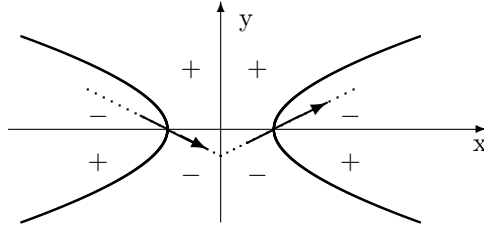


Рис. 3.4.2

Поскольку  $S(\pm 1) = \mp i \frac{2}{3}$ ,  $|S''(\pm 1)| = 2$ , то складывая асимптотики в двух точках перевала, получаем

$$Ai(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{|\lambda|^{1/4}} \cos \left( \frac{2}{3} |\lambda|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.4.4)$$

## §5. Асимптотика функции Эйри на комплексной плоскости

Функция Эйри, изначально определенная для действительных значений  $\lambda$  равенством

$$Ai(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \left( \frac{x^3}{3} + \lambda x \right)} dx, \quad (3.5.1)$$

допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость  $\mathbb{C}$ . Однако нельзя просто считать, что в формуле (3.5.1) параметр  $\lambda$  может принимать произвольные комплексные значения, т.к., к примеру,

при  $\lambda = -i$  модуль подынтегральной функции  $\left| e^{i\left(\frac{x^3}{3} - ix\right)} \right| = e^x$  экспоненциально растет при  $x \rightarrow +\infty$ , а интеграл расходится.

Нужно так модифицировать интеграл в определении функции Эйри, чтобы вновь полученный интеграл сходилась абсолютно при всех комплексных значениях  $\lambda$ .

Рассмотрим лучи

$$L_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{\pi}{6}\}, \quad L_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{5\pi}{6}\},$$

$$L_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{3\pi}{2}\}.$$

Чтобы отметить направление движения по соответствующему лучу будем использовать обозначение  $L_k^+$  при направлении от точки  $z = 0$  к точке  $z = \infty$  и  $L_k^-$  при движении в противоположном направлении, рис. 3.5.1. Покажем, что в формуле (3.5.1) интегрирование по действительной оси можно заменить на интегрирование по контуру  $L_2^- \cup L_1^+$ .

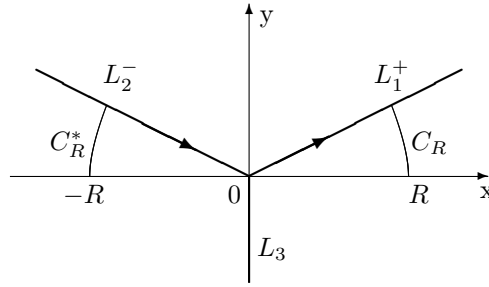


Рис. 3.5.1

При положительных значениях  $\lambda$  на дуге окружности

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{6}\}$$

выполняется оценка

$$\left| e^{i\left(\frac{z^3}{3} + \lambda z\right)} \right| = \left| e^{i\left(\frac{R^3}{3} e^{3i\varphi} + \lambda R e^{i\varphi}\right)} \right| \leq e^{-\frac{R^3}{3} \sin 3\varphi}.$$

Поскольку при  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$  выполняется неравенство  $\sin 3\varphi \geq \frac{6}{\pi} \varphi$ , то

$$\left| \int_{C_R} e^{i\left(\frac{z^3}{3} + \lambda z\right)} dz \right| \leq R \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{R^3}{3} \sin 3\varphi} d\varphi \leq R \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{R^3}{3} \sin 3\varphi} d\varphi \leq$$

$$R \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{2R^3}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2R^2} \left(1 - e^{-\frac{R^3}{3}}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (3.5.2)$$

Аналогичная оценка выполняется на дуге

$$C_R^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \frac{5\pi}{6} \leq \arg z \leq \pi\}.$$

Учитывая интегральную теорему Коши и оценку (3.5.2), мы можем преобразовать интеграл (3.5.1) в исходном определении функции Эйри к виду

$$Ai(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_2^- \cup L_1^+} e^{i\left(\frac{z^3}{3} + \lambda z\right)} dz \quad (3.5.3).$$

Если  $z \rightarrow \infty$  вдоль лучей  $L_1$  и  $L_2$ , то подынтегральная функция в формуле (3.5.3) экспоненциально стремится к нулю, поэтому интеграл абсолютно сходится при всех  $\lambda \in \mathbb{C}$  и определяет аналитическую во всей комплексной плоскости функцию, которая совпадает с функцией Эйри при действительных значениях  $\lambda$ . В силу теоремы единственности, определяемая формулой (3.5.3) функция  $Ai(\lambda)$  является аналитическим продолжением функции Эйри в комплексную плоскость.

Отметим некоторые свойства функции Эйри.

Дифференцируя дважды равенство (3.5.3) по переменной  $\lambda$ , получаем

$$[Ai(\lambda)]'' = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_2^- \cup L_1^+} z^2 e^{i\left(\frac{z^3}{3} + \lambda z\right)} dz =$$

$$= \lambda Ai(\lambda) + \frac{i}{2\pi} \int_{L_2^- \cup L_1^+} d e^{i\left(\frac{z^3}{3} + \lambda z\right)} = \lambda Ai(\lambda),$$

последний интеграл равен нулю, поскольку  $\left| e^{i\left(\frac{z^3}{3} + \lambda z\right)} \right| \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$

вдоль лучей  $L_k$ .

Следовательно функция  $w = Ai(\lambda)$  является решением линейного уравнения второго порядка

$$w'' - \lambda w = 0. \quad (3.5.4).$$

Пусть  $\omega = e^{2\pi i/3}$  – кубический корень из единицы. Непосредственной проверкой легко устанавливается, что функции  $Ai(\omega\lambda)$  и  $Ai(\omega^2\lambda)$  являются решениями уравнения (3.5.4). Делая в интегралах, определяющих функции  $Ai(\lambda)$ ,  $\omega Ai(\omega\lambda)$  и  $\omega^2 Ai(\omega^2\lambda)$ , соответствующие замены переменной  $z = t$ ,  $\omega z = t$  и  $\omega^2 z = t$ , получим интегралы от одной функции  $e^{i\left(\frac{t^3}{3} + \lambda t\right)}$ , но по различным контурам:  $L_2^- \cup L_1^+$ ,  $L_3^- \cup L_2^+$ ,  $L_1^- \cup L_3^+$ . Поскольку в совокупности по каждому лучу интегрирование происходит дважды в противоположных направлениях, то

$$Ai(\lambda) + \omega Ai(\omega\lambda) + \omega^2 Ai(\omega^2\lambda) \equiv 0. \quad (3.5.5)$$

Асимптотику функции Эйри на комплексной плоскости описывает следующее утверждение.

**Теорема 3.5.1.** Пусть  $0 < \varepsilon < \pi$ . Тогда:

1. При  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$

$$Ai(\lambda) \simeq \frac{1}{2\pi\lambda^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}\lambda^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(3n + 1/2)}{3^{2n}(2n)!} \lambda^{-3n/2}, \quad (3.5.6)$$

где значения  $\lambda^{1/2}$  и  $\lambda^{1/4}$  вычисляются для ветвей, определенных в данном секторе.

2. При  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $|\pi - \arg \lambda| \leq \varepsilon < \frac{2\pi}{3}$

$$Ai(\lambda) \simeq \frac{1}{2\pi\lambda^{1/4}} \left[ e^{-\frac{2}{3}\lambda^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(3n + 1/2)}{3^{2n}(2n)!} \lambda^{-3n/2} + \right. \\ \left. + i e^{\frac{2}{3}\lambda^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3n + 1/2)}{3^{2n}(2n)!} \lambda^{-3n/2} \right], \quad (3.5.7)$$

где  $\lambda^{1/2} = i|\lambda|^{1/2}$  и  $\lambda^{1/4} = e^{i\pi/4}|\lambda|^{1/4}$  при  $\lambda \in (-\infty, 0)$ .

Полученные асимптотические разложения можно дифференцировать любое число раз.

Степенная функция с дробным показателем не может быть определена сразу на всей комплексной плоскости, поэтому мы вынуждены в разных пунктах теоремы использовать разные ветви степенных функций. Полагая  $-\pi < \arg z < \pi$ , определим в плоскости с разрезом по отрицательной действительной полуоси ветвь степенной функции  $w = z^{m/n}$  равенством  $(z)_1^{m/n} = |z|^{m/n} e^{\frac{im \arg z}{n}}$ , а ветвь, определенную в плоскости с разрезом по положительной действительной полуоси, обозначим через  $(z)_2^{m/n}$ .

Для доказательства первого пункта теоремы, считая значение  $\lambda$  положительным, в интеграле (3.5.1) сделаем замену переменной  $x = t + i\sqrt{\lambda}$ . Поскольку

$$i \left( \frac{x^3}{3} + \lambda x \right) = i \frac{t^3}{3} - t^2 \sqrt{\lambda} - \frac{2}{3} \lambda^{3/2}$$

и функция  $\sin \frac{t^3}{3}$  является нечетной, получаем

$$Ai(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \left( \frac{x^3}{3} + \lambda x \right)} dx = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{2}{3} \lambda^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-t^2 \sqrt{\lambda}} \cos \frac{t^3}{3} dt. \quad (3.5.8)$$

Интеграл в равенстве (3.5.8) абсолютно сходится при всех  $\lambda \notin (-\infty, 0)$  и определяет аналитическую функцию, которая (в силу единственности аналитического продолжения) в области  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$  совпадает с функцией Эйри  $Ai(\lambda)$ , определяемой равенством (3.5.3). Для получения формулы (3.5.6) остается применить к интегралу в равенстве (3.5.8) лемму Ватсона:

*Пусть  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , функция  $f(x) \in C^\infty([0, d])$ . Тогда при  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $|\arg \mu| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , справедливо асимптотическое разложение*

$$\int_0^d x^{\beta-1} f(x) e^{-\mu x^\alpha} dx \simeq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) \mu^{-\frac{\beta+k}{\alpha}}.$$

*это асимптотическое разложение можно дифференцировать любое число раз.*

Учитывая разложение

$$\cos \frac{t^3}{3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)! 3^{2k}} t^{6k},$$

принцип локализации и значения параметров  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} Ai(\lambda) &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{2}{3} \lambda^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-t^2 \sqrt{\lambda}} \cos \frac{t^3}{3} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{2}{3} \lambda^{3/2}} \int_0^1 e^{-t^2 \sqrt{\lambda}} \cos \frac{t^3}{3} dt (1 + \lambda^{-\infty}) = \\ &= \frac{1}{2\pi(\lambda)_1^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} (\lambda)_1^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} (\lambda)_1^{-3n/2}. \end{aligned}$$

Для доказательства второго пункта теоремы воспользуемся равенством (3.5.5). Пусть  $|\pi - \arg \lambda| \leq \varepsilon$ , тогда точки  $\omega\lambda$  и  $\omega^2\lambda$  лежат в некотором секторе  $|\arg z| \leq \pi - \delta$  и к функциям  $Ai(\omega\lambda)$  и  $Ai(\omega^2\lambda)$  можно применить формулу (3.5.6).

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} (\omega\lambda)_1^{3/2} &= (\lambda)_2^{3/2}, \quad (\omega\lambda)_1^{1/4} = e^{-i\pi/3} (\lambda)_2^{1/4}, \quad (\omega^2\lambda)_1^{3/2} = -(\lambda)_2^{3/2}, \\ (\omega^2\lambda)_1^{1/4} &= e^{-i\pi/6} (\lambda)_2^{1/4}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \omega Ai(\omega\lambda) &\simeq -\frac{1}{2\pi(\lambda)_2^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} (\lambda)_2^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} (\lambda)_2^{-3n/2} \\ \omega Ai(\omega\lambda) &\simeq -i \frac{1}{2\pi(\lambda)_2^{1/4}} e^{\frac{2}{3} (\lambda)_2^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} (\lambda)_2^{-3n/2}. \end{aligned}$$

Теперь формула (3.5.7) может быть получена как следствие равенства (3.5.5).

Из формул (3.5.6) и (3.5.7) следует, что функция Эйри  $Ai(\lambda)$

1. в секторе  $S = \{|\arg \lambda| < \frac{\pi}{3}\}$  экспоненциально **убывает**;

2. в секторах  $S_1 = \{\frac{\pi}{3} < \arg \lambda < \pi\}$  и  $S_2 = \{-\pi < \arg \lambda < -\frac{\pi}{3}\}$  экспоненциально **возрастает**;
3. на лучах  $L_{1,2} = \{\arg \lambda = \pm \frac{\pi}{3}\}$  и  $L_3 = \{\arg \lambda = \pi\}$  **осциллирует**.

Заметим, что функция Эйри может быть определена через комплексный интеграл несколько иного вида. Сделаем в формуле (3.5.3) замену переменной, полагая  $p = iz$ . Тогда

$$Ai(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} e^{\left(\lambda p - \frac{p^3}{3}\right)} dp, \quad (3.5.9)$$

где  $L^*$  – контур, получаемый из контура  $L_2^- \cup L_1^+$  поворотом на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. Из интегральной теоремы Коши и экспоненциального стремления подинтегральной функции к нулю при  $p \rightarrow \infty$  вдоль контура  $L^*$  следует, что в формуле (3.5.9) можно взять произвольный контур  $L$ , лежащий в левом секторе и асимптотически приближающийся в окрестности бесконечно удаленной точки к контуру  $L^*$ , рис. 3.5.2.

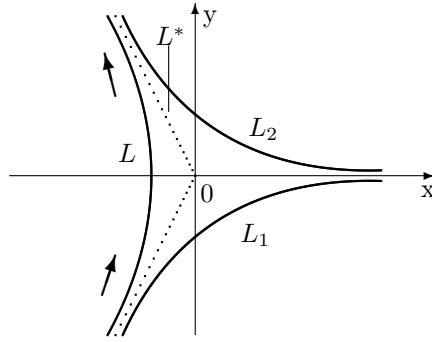


Рис. 3.5.2

Таким образом

$$Ai(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\left(\lambda p - \frac{p^3}{3}\right)} dp, \quad (3.5.10)$$

а через интегралы по контурам  $L_1$  и  $L_2$  выражаются функции  $Ai(\omega\lambda)$  и  $Ai(\omega^2\lambda)$ .

## VI. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Особая роль цилиндрических функций при решении задач, связанных с круглыми и цилиндрическими объектами, объясняется тем, что они являются решениями дифференциального уравнения, к которому в цилиндрических координатах приводятся различные уравнения математической физики, содержащие оператор Лапласа.

Впервые цилиндрическая функция  $J_0(x)$  была рассмотрена в 1732 году Д. Бернулли в работе о колебаниях тяжелых цепей. В 1738 году цилиндрические функции  $J_n(x)$  были использованы Л. Эйлером при изучении колебаний круглой мембраны. Следует отметить, что Л. Эйлером получены многие результаты теории цилиндрических функций и найдены их приложения к математической физике.

В этой главе мы рассмотрим цилиндрические функции 1-го рода, обычно называемые функциями Бесселя. В основном мы ограничимся рассмотрением функций Бесселя целого индекса, поскольку это позволяет нам реализовать удобную и достаточно простую схему изложения учебного материала, вполне аналогичную той, которая была ранее использована в курсе функционального анализа при изучении ортогональных многочленов.

### §1. Определение и свойства функций Бесселя

#### 1. Производящая функция

Бесселевы функции  $J_n(x)$  с целыми индексами могут быть найдены как коэффициенты в разложении производящей функции в ряд Лорана по степеням переменной  $w$

$$F(z, w) = e^{\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n \quad (z, w \in \mathbb{C}). \quad (4.1.1)$$

Делая замену переменной  $w = -\frac{1}{p}$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n &= e^{\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w})} = e^{\frac{z}{2}(p - \frac{1}{p})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) p^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{-n}(z) w^n. \end{aligned}$$



В силу единственности разложения функции в ряд Лорана, получаем

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (4.1.2)$$

Это позволяет ограничиться изучением свойств функций Бесселя с неотрицательными индексами.

Для произвольного целого  $n$  и комплексных  $z_1$  и  $z_2$  выполняется равенство

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) J_{n-k}(z_2), \quad (4.1.3)$$

называемое *теоремой сложения для бесселевых функций*.

Используя разложение производящей функции, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1 + z_2) w^n &= e^{\frac{z_1+z_2}{2}(w-\frac{1}{w})} = e^{\frac{z_1}{2}(w-\frac{1}{w})} e^{\frac{z_2}{2}(w-\frac{1}{w})} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) w^k \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z_2) w^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) J_{n-k}(z_2) \right] w^n, \end{aligned}$$

откуда в силу единственности разложения в ряд Лорана следует равенство (4.1.3).

Предположим, что в равенстве (4.1.1) переменная  $z$  является действительным числом, т.е.  $z = x \in R$ , и  $w = e^{i\theta}$ , тогда мы получим разложение в ряд Фурье функции

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}.$$

Выделяя в последнем равенстве действительные и мнимые части и учитывая равенство (4.1.2), получаем

$$\begin{aligned} \cos(x \sin \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos n\theta = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\theta, \\ \sin(x \sin \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \sin n\theta = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin(2n-1)\theta. \end{aligned}$$

В частности, при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  получаем разложение тригонометрических функций по функциям Бесселя

$$\cos(x) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x),$$

$$\sin(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(x).$$

## 2. Интегральные представления

При фиксированном значении  $z$  производящая функция  $F(z, w)$  имеет только две особые точки  $w = 0$  и  $w = \infty$ , поэтому, используя интегральную формулу для нахождения коэффициентов ряда Лорана, получаем

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} \frac{dw}{w^{n+1}}. \quad (4.1.4)$$

Модуль подинтегральной функции не превосходит величины  $e^{|z|}$ , поэтому интеграл в равенстве (4.1.4) сходится равномерно на всяком замкнутом шаре  $B_R = \{|z| \leq R\}$  и согласно теореме об аналитической зависимости интеграла от параметра функция Бесселя  $J_n(z)$  является целой, т.е. аналитической во всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ .

Делая в интеграле (4.1.4) замену переменной  $w = e^{i\varphi}$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ , получаем

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \varphi} e^{-n\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi.$$

Выделяя в подинтегральном выражении действительную и мнимую части и учитывая нечетность функции  $\sin(z \sin \varphi - n\varphi)$  и четность функции  $\cos(z \sin \varphi - n\varphi)$ , приходим к интегральному представлению

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi - n\varphi) d\varphi, \quad (4.1.5)$$

которое было получено немецким астрономом и математиком Ф. Бесселем при изучении движения планет вокруг солнца. Интеграл (4.1.5), называемый *интегралом Бесселя*, фигурирует в выражении для радиуса-вектора движущейся планеты в зависимости от угла.

### 3. Представление рядом

Используя разложение экспоненты и представляя производящую функцию в виде произведения двух степенных рядов (одного по степеням  $w^k$ , другого по степеням  $(1/w)^m$ ), получаем

$$F(z, w) = e^{\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! w^m} \left(\frac{z}{2}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n.$$

Пусть  $n \geq 0$  и  $k - m = n$ . Собирая вместе получаемые в результате умножения рядов коэффициенты при степени  $w^n$ , получаем:

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}. \quad (4.1.6)$$

Разложение для функции Бесселя  $J_{-n}(z)$  можно получить из равенства (4.1.2), но можно получить и непосредственно из произведения рядов. Положим  $k - m = -n$ , тогда

$$J_{-n}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+m} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}. \quad (4.1.7)$$

Из формул (4.1.6) и (4.1.7) следует уже знакомое нам равенство  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$  и новое соотношение  $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$ .

Это позволяет при изучении свойств функций Бесселя  $J_n(x)$  на действительной оси ограничиться рассмотрением функций с неотрицательными индексами на положительной полуоси.

### 4. Рекуррентные соотношения

Используя представление (4.1.6) функции Бесселя в виде ряда, получаем

$$(z^{n+1} J_{n+1}(z))' = \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+1+m)!} \frac{z^{2n+2m+2}}{2^{n+2m+1}} \right)' =$$

$$= z^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} = z^{n+1} J_n(z),$$

таким образом

$$(z^{n+1} J_{n+1}(z))' = z^{n+1} J_n(z). \quad (4.1.8)$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к равенству

$$\begin{aligned} (z^{-n} J_n(z))' &= \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \frac{z^{2m}}{2^{n+2m}} \right)' = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)! (n+m)!} \frac{z^{2m-1}}{2^{n+2m-1}} = \\ &= -z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+1+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1+2k} = -z^{-n} J_{n+1}(z), \end{aligned}$$

(в ходе преобразований мы заменили индекс суммирования, полагая  $m-1=k$ ), окончательно получаем

$$(z^{-n} J_n(z))' = -z^{-n} J_{n+1}(z). \quad (4.1.9)$$

Равенство (4.1.9) легко преобразуется к виду

$$J_n'(z) - \frac{n}{z} J_n(z) + J_{n+1}(z) = 0. \quad (4.1.10)$$

## 5. Дифференциальное уравнение

Умножая равенство (4.1.10) на  $z^{n+1}$ , дифференцируя и учитывая соотношение (4.1.8), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= (z^{n+1} J_n'(z) - n z^n J_n(z) + z^{n+1} J_{n+1}(z))' = \\ &= (n+1) z^n J_n'(z) + z^{n+1} J_n''(z) - n^2 z^{n-1} J_n(z) - n z^n J_n'(z) + z^{n+1} J_n(z) = \\ &= z^{n-1} [z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z)] \equiv 0. \end{aligned}$$

Следовательно функция  $J_n(z)$  является частным решением уравнения второго порядка

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - n^2) u = 0. \quad (4.1.11)$$

## 6. Нули функции $J_n(x)$ на действительной оси

При изучении метода перевала мы получили формулу (3.3.2), описывающую асимптотику функции Бесселя  $J_n(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно на положительной полуоси функция  $J_n(x)$  имеет бесконечно много нулей в точках  $a_k$ , где

$$a_k \approx n\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + k\pi.$$

Из равенства  $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$  следует, что и на отрицательной полуоси функция  $J_n(x)$  имеет бесконечно много нулей.

Если  $a_k$  и  $a_{k+1}$  являются последовательными нулями функции  $J_n(x)$ , а функция  $h(x) = x^{-n} J_n(x)$ , то из теоремы Ролля следует существование такой точки  $b_k \in (a_k, a_{k+1})$ , что  $h'(b_k) = 0$ . Согласно равенству (4.1.9) получаем, что  $J_{n+1}(b_k) = 0$ . Аналогичные рассуждения и использование равенства (4.1.8) показывают, что между нулями функции  $J_{n+1}(x)$  находится нуль функции  $J_n(x)$ , т.е. нули функций  $J_n(x)$  и  $J_{n+1}(x)$  разделяют друг друга.

## §2. Ортогональные системы функций Бесселя

### Ортогональность системы функций Бесселя

Пусть  $x \in R, a \in R$ . Положим  $x = at, y(t) = J_n(at)$ , тогда  $y'(t) = aJ'_n(x), y''(t) = a^2 J''_n(x)$  и уравнение (4.1.11) преобразуется в

$$y'' + \frac{1}{t}y' + \left(a^2 - \frac{n^2}{t^2}\right)y = 0. \quad (4.2.1)$$

Рассмотрим два положительных числа  $\alpha, \beta$  и две функции  $y_1 = J_n(\alpha t)$  и  $y_2 = J_n(\beta t)$ , тогда

$$(a) \ y_1'' + \frac{1}{t}y_1' = \left(\frac{n^2}{t^2} - \alpha^2\right)y_1, \quad (b) \ y_2'' + \frac{1}{t}y_2' = \left(\frac{n^2}{t^2} - \beta^2\right)y_2. \quad (4.2.2)$$

Умножим уравнение (4.2.2 (a)) для первой функции на  $t y_2$ , а уравнение (4.2.2 (b)) для второй функции на  $t y_1$  и вычтем из первого второе. В результате получим

$$(\beta^2 - \alpha^2) y_1 y_2 t = t(y_1'' y_2 - y_1 y_2'') + (y_1' y_2 - y_1 y_2') = [t(y_1' y_2 - y_1 y_2')]'$$

или

$$(\beta^2 - \alpha^2) J_n(\alpha t) J_n(\beta t) t = [t(\alpha J'_n(\alpha t) J_n(\beta t) - \beta J_n(\alpha t) J'_n(\beta t))]'.$$

Фиксируем произвольное  $l > 0$  и проинтегрируем последнее равенство по отрезку  $[0, l]$

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^l J_n(\alpha t) J_n(\beta t) t dt = [l(\alpha J'_n(\alpha l) J_n(\beta l) - \beta J_n(\alpha l) J'_n(\beta l))]. \quad (4.2.3)$$

Если предположить, что числа  $\alpha$  и  $\beta$  являются решениями уравнения  $J_n(xl) = 0$ , то согласно равенству (4.2.3) функции  $\sqrt{t}J_n(\alpha t)$  и  $\sqrt{t}J_n(\beta t)$  будут ортогональны, т.е.

$$\int_0^l J_n(\alpha t) J_n(\beta t) t dt = 0.$$

С другой стороны, если рассмотреть весовое пространство Лебега  $L_{2,h}(0, l)$  с весом  $h(t) = t$  и последовательность  $\{a_k\}$  – корней уравнения  $J_n(xl) = 0$ , то на интервале  $(0, l)$  функции Бесселя

$$J_n(a_1 t), J_n(a_2 t), \dots, J_n(a_k t), \dots$$

образуют ортогональную систему относительно скалярного произведения в пространстве  $L_{2,h}(0, l)$ .

### Полнота системы функций Бесселя

Строгое доказательство полноты системы функций Бесселя  $\{J_n(a_k t)\}$  выходит за рамки нашего курса. Один из вариантов доказательства этого факта можно найти, к примеру, в книге В.С. Владимирова [3].

Вопрос о нахождении решений  $a_k$  уравнения  $J_n(xl) = 0$  и соответствующих функций  $J_n(a_k t)$  сводится к нахождению собственных значений и собственных функций дифференциального оператора

$$Lu = -u'' - \frac{1}{t} u' + \frac{n^2}{t^2} u$$

с краевыми условиями:  $u(l) = 0$  и  $u(t) = O(t^n)$  при  $t \rightarrow 0$ . Действительно, если функция  $u$  является решением уравнения  $Lu = \lambda u$ , то

согласно равенству (4.2.1) и краевым условиям  $u(t) = J_n(\sqrt{\lambda}t)$ , а из условия  $u(l) = 0$  следует, что  $\sqrt{\lambda} = a_k$  при некотором  $k \in N$ .

В свою очередь краевая задача для дифференциального оператора сводится к интегральному уравнению

$$Av = \int_0^l \sqrt{ts} K_n(t, s) v(s) ds$$

с симметричным ядром  $K_n(t, s)$ .

Собственными значениями интегрального оператора являются числа  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ , а собственные функции выражаются через функции Бесселя  $\varphi_k(t) = \sqrt{t} J_n(a_k t)$ .

Поскольку оператор  $A$  является компактным и самосопряженным, то согласно известной из курса функционального анализа теореме Гильберта<sup>1</sup>-Шмидта<sup>2</sup> его собственные функции  $\varphi_k(t)$  образуют базис в пространстве  $L_2(0, l)$ , а функции Бесселя  $J_n(a_k t)$  образуют базис в весовом пространстве  $L_{2,t}(0, l)$  со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^l f(t) g(t) t dt.$$

### §3. Ряды по функциям Бесселя

С точки зрения сходимости в пространстве Лебега разложение функции  $f \in L_{2,t}(0, l)$  в ряд по функциям Бесселя является частным случаем разложения элемента гильбертова пространства в ряд Фурье по ортогональному базису. Предполагая априори равномерную сходимость ряда в равенстве

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_n(a_k t), \quad (4.3.1)$$

---

<sup>1</sup>Гильберт Давид (1862-1943) – немецкий математик, иностранный почетный член Академии наук СССР. Оказал большое влияние на развитие многих разделов математики, в том числе, теории инвариантов, теории алгебраических чисел, вариационного исчисления, дифференциальных уравнений, теории интегральных уравнений, основ математической физики, логических основ математики. . .

<sup>2</sup>Шмидт Эрхард (1876-1959) – немецкий математик, профессор Берлинского университета. Основные труды по теории функций, интегральным уравнениям, функциональному анализу.

получаем

$$\begin{aligned} (f(t), J_n(a_k t)) &= \int_0^l f(t) J_n(a_k t) t dt = \int_0^l \left( \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n(a_m t) \right) J_n(a_k t) t dt = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m (J_n(a_k t), J_n(a_m t)) = c_k \int_0^l J_n^2(a_k t) t dt = c_k d_k^2. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Таким образом

$$c_k = \frac{1}{d_k^2} \int_0^l f(t) J_n(a_k t) t dt, \quad d_k^2 = \int_0^l J_n^2(a_k t) t dt.$$

Для вычисления величины  $d_k^2$  — квадрата нормы функции  $J_n(a_k t)$  в пространстве Лебега  $L_{2,t}(0, l)$  воспользуемся формулой (4.2.3), в которой предположим, что  $\alpha = a_k$  и  $\beta$  стремится к  $a_k$ ,

$$d_k^2 = \lim_{\beta \rightarrow a_k} \int_0^l J_n(a_k t) J_n(\beta t) t dt = \lim_{\beta \rightarrow a_k} \frac{a_k l J'_n(a_k l) J_n(\beta l)}{\beta^2 - a_k^2} = \frac{l^2}{2} J_n'^2(a_k l).$$

Поскольку  $J_n(a_k l) = 0$ , то полагая в формуле (4.1.9) значение  $z = a_k l$ , находим  $J'_n(a_k l) = -J_{n+1}(a_k l)$ . Следовательно

$$d_k^2 = \frac{l^2}{2} J_{n+1}^2(a_k l). \quad (4.3.3)$$

Для ряда (4.3.1), называемого обычно рядом Фурье-Бесселя, естественным образом верны общие результаты, касающиеся рядов Фурье в гильбертовом пространстве. В частности, выполняется неравенство Бесселя, записываемое в данном случае в виде

$$\int_0^l f^2(t) t dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 d_k^2. \quad (4.3.4)$$

Из сходимости ряда (4.3.4) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k^2 d_k^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ c_k^2 \int_0^l J_n^2(a_k t) t dt \right] = 0.$$



Учитывая равенство (4.3.3), асимптотику функций Бесселя (3.3.2) и используя условие  $J_n(a_k l) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} d_k^2 &= \frac{l^2}{2} J_{n+1}^2(a_k l) \sim \frac{l^2}{2} \frac{2}{\pi a_k} \cos^2 \left( a_k l - (k+1) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{l}{\pi a_k} \sin^2 \left( a_k l - k \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{l}{\pi a_k} \left( 1 - \cos^2 \left( a_k l - k \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \sim \\ &\sim \frac{l}{\pi a_k} - \frac{l^2}{2} J_n^2(a_k l) \sim \frac{l}{\pi a_k}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{l}{\pi} \frac{c_k^2}{a_k} \sim c_k^2 d_k^2 \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{c_k}{\sqrt{a_k}} \rightarrow 0.$$

Наконец из (4.3.2) следует, что при  $k \rightarrow \infty$

$$\int_0^l f(t) J_n(a_k t) t dt = c_k d_k^2 \sim \frac{l c_k}{\pi a_k} = \frac{l}{\pi \sqrt{a_k}} \frac{c_k}{\sqrt{a_k}} \rightarrow 0.$$

Мы получили аналог результата Римана о стремлении к нулю интегралов, содержащих тригонометрические функции кратных аргументов.

Относительно поточечной сходимости рядов Фурье-Бесселя выполняются утверждения вполне аналогичные результатам для тригонометрических рядов Фурье.

**Теорема 4.3.1.** Ряд Фурье-Бесселя (4.3.1) кусочно-гладкой на  $[0, l]$  функции  $f(t)$  сходится при  $0 \leq t \leq l$ , причем для  $0 < t < l$  его сумма равна  $f(t)$  в точках непрерывности функции и равна значению  $\frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)]$  в точках разрыва.

В точке  $t = 0$  и в точке  $t = l$  ряд сходится к нулю, поскольку все функции Бесселя  $J_n(a_k t)$  в этих точках равны нулю.

**Пример.** Найдем разложение функции  $f(t) = t^n$  в ряд Фурье-Бесселя.

Вычислим коэффициенты ряда

$$c_k = \frac{2}{l^2 J_{n+1}^2(a_k l)} \int_0^l t^{n+1} J_n(a_k t) dt.$$

Делая в интеграле замену переменной  $a_k t = x$  и применяя формулу (4.1.8), согласно которой

$$d(x^{n+1} J_{n+1}(x)) = x^{n+1} J_n(x) dx,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_0^l t^{n+1} J_n(a_k t) dt &= \frac{1}{a_k^{n+2}} \int_0^{a_k l} x^{n+1} J_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{a_k^{n+2}} \int_0^{a_k l} d(x^{n+1} J_{n+1}(x)) = \frac{l^{n+1}}{a_k} J_{n+1}(a_k l). \end{aligned}$$

Следовательно

$$c_k = \frac{2l^{n-1}}{a_k J_{n+1}(a_k l)}.$$

Поэтому при  $0 \leq t < l$

$$t^n = 2l^{n-1} \sum_1^{\infty} \frac{J_n(a_k t)}{a_k J_{n+1}(a_k l)}.$$

**Замечание.** Согласно равенству (4.2.3) для ортогональности соответствующих функций Бесселя вместо корней уравнения  $J_n(xl) = 0$  можно рассмотреть значения  $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ , являющиеся корнями уравнения  $J'_n(xl) = 0$ , и получить другую ортогональную систему функций Бесселя —  $\{J_n(b_k t)\}$ .

Разложение по этой системе функций будет иметь вид

$$\frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_n(b_k t), \quad (4.3.5)$$

где

$$c_k = \frac{1}{s_k^2} \int_0^l f(t) J_n(b_k t) t dt, \quad s_k^2 = \frac{1}{2} \left( l^2 - \frac{n^2}{b_k^2} \right) J_n^2(b_k l).$$

## §4. Приложения

### 1. Задача Бернулли о колебаниях висящей цепи.

Пусть однородная тяжелая цепь длины  $L$  подвешена вертикально и под действием силы тяжести совершает малые колебания относительно положения равновесия. Отклонение  $u = u(x, t)$  от вертикали удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \left( x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (4.4.1)$$

где  $x$  — длина дуги от соответствующей точки цепи до ее свободного конца.

Решение ищется в виде  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Подставляя это в (4.4.1), получаем

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = g \frac{xX''(x) + X'(x)}{X(x)} = \text{const} = -\omega^2 \quad (4.4.2)$$

или

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (4.4.3)$$

и

$$xX''(x) + X'(x) + \frac{\omega^2}{g}X(x) = 0. \quad (4.4.4)$$

В уравнении (4.4.2) постоянная выбирается отрицательной поскольку решение уравнения (4.4.3) должно быть периодическим, т.е.

$$T(t) = C \sin(\omega t + \varphi).$$

Делая замену переменной  $x = \frac{g}{4\omega^2}y^2$  и полагая  $X(y) = X\left(\frac{g}{4\omega^2}y^2\right)$ , преобразуем равенство (4.4.4) к уравнению Бесселя нулевого индекса, имеющему решение  $X = BJ_0(y) = BJ_0(2\omega\sqrt{x/g})$ .

Следовательно решение уравнения (4.4.1) имеет вид

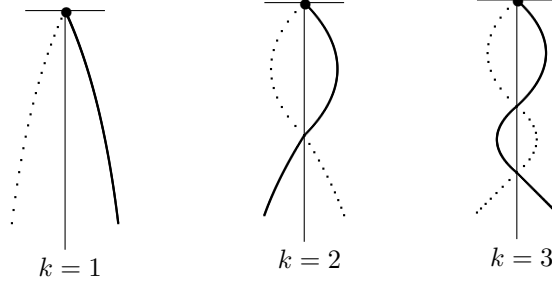
$$u(x, t) = A J_0\left(2\omega\sqrt{x/g}\right) \sin(\omega t + \varphi).$$

Поскольку цепь закреплена в верхней точке, соответствующей значению  $x = L$ , то  $u(L, t) \equiv 0$ , т.е.  $J_0(2\omega\sqrt{L/g}) = 0$ . Следовательно

$$\omega = \omega_k = \frac{a_k}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}, \text{ где } a_k - \text{одно из решений уравнения } J_0(x) = 0.$$

Таким образом все точки цепи совершают гармонические колебания с одинаковой частотой  $\omega_k$ , а амплитуда зависит от положения точки и равна  $AJ_0\left(a_k\sqrt{x/L}\right)$ . Поскольку  $J_0(0) = 1$ , то постоянная  $A$  равна амплитуде колебаний свободного конца цепи.

При выборе различных значений  $a_k$  получаем различные типы колебаний



В общем случае колебания цепи представляют собой наложение колебаний с различными частотами, амплитудами и начальными фазами

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k J_0\left(a_k\sqrt{x/L}\right) \sin(\omega_k t + \varphi_k).$$

## 2. Задача Эйлера о колебаниях круглой мембраны.

Прогиб  $u = u(x, y, t)$  – отклонение от равновесного состояния мембраны, совершающей малые колебания под действием сил натяжения, подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = d^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

которое в полярных координатах имеет вид

$$d^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4.4.5)$$

Частное решение ищется в виде

$$u(r, \varphi, t) = R(r) \sin(\omega t + \gamma) \sin(n\varphi + \delta).$$

Подставляя в уравнение (4.4.5) и делая замену  $\rho = \frac{r\omega}{d}$ , получаем

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\rho^2 - n^2) R = 0. \quad (4.4.6)$$

Решением уравнения (4.4.6) является функция Бесселя  $R(\rho) = J_n(\rho)$  или  $R(r) = J_n\left(\frac{r\omega}{d}\right)$ , т.е.

$$u_n(r, \varphi, t) = J_n\left(\frac{r\omega}{d}\right) \sin(\omega t + \gamma) \sin(n\varphi + \delta).$$

Пусть радиус мембраны  $r_0 = 1$  и она закреплена на краю, тогда  $u_n(1, \varphi, t) \equiv 0$ , т.е.  $J_n\left(\frac{\omega}{d}\right) = 0$ . Если  $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}, \dots$  – корни уравнения  $J_n(x) = 0$ , то  $\omega_{nk} = a_{nk}d$ .

Общий вид колебаний получается сложением всех элементарных колебаний

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n,k=0}^{\infty} C_{nk} J_n(a_{nk}r) \sin(a_{nk}dt + \gamma_{nk}) \sin(n\varphi + \delta_{nk}). \quad (4.4.7)$$

Колебания, соответствующие  $n = 0$ , не зависят от  $\varphi$ :

$$u_0(r, \varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k J_0(a_{0k}r) \sin(a_{0k}dt + \gamma_{0k}),$$

т.е. все точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра, колеблются одинаково.

Значения  $C_{nk}, \gamma_{nk}, \delta_{nk}$  определяются начальными данными задачи.

## §5. Функции Бесселя с дробными индексами и другие цилиндрические функции

Использование производящей функции позволяет нам рассматривать функции Бесселя только лишь с целыми индексами. Однако, полученные в ходе изучения другие описания бесселевых функций вполне могут быть использованы для определения функций Бесселя с дробными индексами.

Учитывая выполняющееся для натуральных чисел равенство  $(n+k)! = \Gamma(n+k+1)$  и формулу (4.1.6), для  $\lambda \in R$  воспользуемся представлением функции Бесселя соответствующим рядом

$$J_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda+k+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k}. \quad (4.5.1)$$

Для функций  $J_\lambda(z)$  выполняются рекуррентные соотношения

$$(z^\lambda J_\lambda(z))' = z^\lambda J_{\lambda-1}(z), \quad (z^{-\lambda} J_\lambda(z))' = -z^{-\lambda} J_{\lambda+1}(z),$$

которые можно записать в виде

$$\frac{d}{z dz} \left( \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} \right) = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^{\lambda+1}}, \quad \frac{d}{z dz} (z^\lambda J_\lambda(z)) = z^{\lambda-1} J_{\lambda-1}(z).$$

Полагая

$$\frac{d^n}{(z dz)^n} = \underbrace{\frac{d}{z dz} \cdot \frac{d}{z dz} \cdots \frac{d}{z dz}}_{n \text{ раз}},$$

получаем

$$\frac{d^n}{(z dz)^n} \left( \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} \right) = (-1)^n \frac{J_{\lambda+n}(z)}{z^{\lambda+n}}, \quad \frac{d^n}{(z dz)^n} (z^\lambda J_\lambda(z)) = z^{\lambda-n} J_{\lambda-n}(z). \quad (4.5.2)$$

Наиболее простой вид имеют функции Бесселя с полуцелыми индексами. Эти функции, как показал Эйлер, выражаются через элементарные функции. Учитывая определение (4.5.1) и равенства

$$\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k} = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{4^k k!},$$

$$\Gamma(k + \frac{3}{2}) = \frac{(2k+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} = \frac{(2k+2)!\sqrt{\pi}}{4^{k+1}(k+1)!},$$

получаем

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^{k+1} (k+1)!}{k! (2k+2)! \sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \sin z,$$

$$\begin{aligned}
J_{-\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k k!}{k! (2k)! \sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \cos z.
\end{aligned}$$

Используя соотношения (4.5.2), находим

$$\begin{aligned}
J_{n+\frac{1}{2}}(z) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(z dz)^n} \left( \frac{\sin z}{z} \right), \\
J_{-n-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(z dz)^n} \left( \frac{\cos z}{z} \right).
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что функция Бесселя  $J_{\lambda}(z)$  является решением дифференциального уравнения

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - \lambda^2) u = 0. \quad (4.5.3)$$

При дробных  $\lambda$  функции  $J_{\lambda}(z)$  и  $J_{-\lambda}(z)$  линейно независимы и общее решение уравнения (4.5.3) может быть записано в виде

$$u(z) = C_1 J_{\lambda}(z) + C_2 J_{-\lambda}(z).$$

Согласно равенству (4.1.2) при целых значениях индекса функции  $J_n(z)$  и  $J_{-n}(z)$  линейно зависимы, поэтому возникает потребность в рассмотрении других решений уравнения (4.5.3). Функции Бесселя называют цилиндрическими функциями 1-го рода. Нам удобнее вначале определить *цилиндрические функции 3-го рода*

$$H_{\lambda}^{(1)}(z) = i \frac{e^{-i\lambda\pi} J_{\lambda}(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin \lambda\pi}, \quad H_{\lambda}^{(2)}(z) = -i \frac{e^{i\lambda\pi} J_{\lambda}(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin \lambda\pi}, \quad (4.5.4)$$

называемые *функциями Ханкеля*.<sup>1</sup>

Вообще говоря, равенства (4.5.4) определяют функции Ханкеля для дробных индексов, а чтобы получить выражения для целых индексов

---

<sup>1</sup>Ханкель Герман (1839-1873) – немецкий математик, профессор Тюбингенского университета. Основные работы по теории цилиндрических функций, основаниям арифметики и истории математики.

нужно перейти к пределу по переменной  $\lambda$  и раскрыть неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .

Функции Бесселя выражаются через функции Ханкеля аналогично тому, как  $\cos z$  выражается через функции  $e^{iz}$  и  $e^{-iz}$ ,

$$J_\lambda(z) = \frac{H_\lambda^{(1)}(z) + H_\lambda^{(2)}(z)}{2}.$$

Рассматриваются также функции, которые выражаются через функции Ханкеля как синус

$$Y_\lambda(z) = \frac{H_\lambda^{(1)}(z) - H_\lambda^{(2)}(z)}{2i}.$$

Эти функции называют *цилиндрическими функциями 2-го рода* или *функциями Вебера*.<sup>1</sup>

Общее решение уравнения (4.5.2) может быть записано в виде

$$u(z) = C_1 H_\lambda^{(1)}(z) + C_2 H_\lambda^{(2)}(z)$$

или

$$u(z) = C_3 J_\lambda(z) + C_4 Y_\lambda(z).$$

Отдельно рассматриваются цилиндрические функции чисто мнимого аргумента  $z = ix$ , удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + \lambda^2) y = 0. \quad (4.5.5)$$

Решение уравнения (4.5.5), принимающее действительные значения при действительных  $\lambda$  и  $x$ , может быть записано в виде

$$I_\lambda(x) = e^{-\lambda\pi i/2} J_\lambda(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k}.$$

При дробных индексах функции  $I_\lambda(x)$  и  $I_{-\lambda}(x)$  линейно независимы, а при целых индексах  $I_n(x) = I_{-n}(x)$  и для нахождения второго решения линейно независимого с  $I_n(x)$  используются другие цилиндрические

---

<sup>1</sup>Вебер Генрих (1842-1913) – немецкий математик, профессор Кенигсбергского, Геттингенского и Страсбургского университетов. Основные труды по теории алгебраических чисел, алгебраическим функциям, алгебраической геометрии и математической физике.



функции. Чаще такое решение получают из первой функции Ханкеля от мнимого аргумента, полагая

$$K_{\lambda}(x) = \frac{\pi i}{2} e^{-\lambda \pi i/2} H_{\lambda}^{(1)}(ix).$$

Функция  $K_{\lambda}(x)$ , называемая *функцией Макдональда*,<sup>1</sup> является положительным решением уравнения (4.5.5) и экспоненциально стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ .

---

<sup>1</sup>Macdohald H. M., "Proc. London Math. Soc. 1899, v. 30, p. 165-79.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.
2. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
4. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1975.
5. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.
6. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Выпуск 2,3. М.: Мир, 1970.
7. Копсон Э. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.
8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.
12. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976.
13. Смоленцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. М.: Высшая школа, 1988.
14. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
15. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
16. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.: Наука, 1964.
17. Эрдеи А. Асимптотические разложения. М.: Изд-во физ.-матем. лит., 1962.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
§ 1. Необходимые определения .....	6
§ 2. Интегральная теорема Коши .....	8
Глава I. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ	
ВЫЧЕТОВ .....	13
§ 1. Обобщенный логарифмический вычет .....	13
§ 2. Вычисление интегралов .....	15
§ 3. Преобразование Лапласа. Формула обращения .....	26
§ 4. Обращение степенного ряда .....	37
§ 5. Разложение функций на элементарные дроби и в бесконечные произведения .....	44
Глава II. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ .....	50
§ 1. Плоскопараллельные векторные поля .....	51
§ 2. Комплексный потенциал в гидродинамике .....	54
§ 3. Обтекание бесконечной кривой .....	56
§ 4. Комплексный потенциал в теплотехнике и электростатике .....	60
§ 5. Дробно-линейные функции .....	62
§ 6. Функция Жуковского .....	64
§ 7. Тригонометрические и гиперболические функции .....	66
§ 8. Профили Жуковского .....	68
§ 9. Общие принципы теории конформных отображений .....	70
§ 10. Принцип симметрии .....	72
§ 11. Решение задачи Дирихле в полуплоскости в случае кусочно-постоянных граничных значений .....	76
§ 12. Отображения многоугольных областей. Интеграл Кристоффеля–Шварца .....	79
§ 13. Поток во внешности замкнутого контура .....	87
§ 14. Подъемная сила .....	88
§ 15. Обтекание кругового цилиндра .....	90
§ 16. Обтекание профилей Жуковского .....	93

Глава III. МЕТОД ПЕРЕВАЛА .....	95
§ 1. Идея метода .....	95
§ 2. Принципы нахождения перевального контура .....	96
§ 3. Нахождение главного члена асимптотики .....	100
§ 4. Асимптотика функции Эйри на действительной оси ....	102
§ 5. Асимптотика функции Эйри на комплексной плоскости .	105
Глава IV. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ .....	112
§ 1. Определение и свойства функций Бесселя .....	112
§ 2. Ортогональные системы функций Бесселя .....	117
§ 3. Ряды по функциям Бесселя .....	119
§ 4. Примеры .....	123
§ 5. Функции Бесселя с дробными индексами и другие цилиндрические функции .....	125
ЛИТЕРАТУРА .....	130