СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
Лекция 10 Броуновское движение.

Образовский Е. Г.

14 ноября 2022 г.

План лекции:

План лекции:

- **Броуновское движение**

План лекции:

- **Броуновское движение**
- **Уравнение Ланжевена**

Уравнение Ланжевена

Наиболее просто броуновское движение описывается с помощью уравнения Ланжевена. Если интересоваться движением броуновской частицы на достаточно больших временных масштабах, то влияние на частицу среды, в которой она движется, можно разбить на практически мгновенные некоррелированные толчки и усредненное по достаточно большим промежуткам времени воздействие, сводящееся к трению.

Модель броуновской частицы

Броуновское движение

Отвлекаясь от движения атомов среды понаблюдаем за типичными траекториями броуновских частиц

Броуновское движение

Чтобы выявить закономерности движения броуновских частиц следует проследить за движением большого числа броуновских частиц.

Броуновское движение

Если броуновские частицы находятся во внешнем поле (здесь в поле гармонического осциллятора), то функции распределения в координатном, импульсном пространстве и среднеквадратичное смещение выглядят так:

Броуновское движение

Рассмотрим одномерное уравнение Ланжевена

$$m\frac{dv}{dt} + \alpha v = F(t). \tag{1}$$

Для сферической частицы радиуса R коэффициент $\alpha = 6\pi\eta R$ определяется формулой Стокса. Случайной силе $F(t)$ приписываются следующие естественные статистические свойства

$$\langle F(t)\rangle = 0, \quad \langle F(t)F(t')\rangle = D\delta(t - t'), \tag{2}$$

где D – постоянная, которую мы определим позже. Здесь обозначение $\langle ...\rangle$ означает усреднение по ансамблю броуновских частиц.

Броуновское движение

Решаем уравнение Ланжевена методом вариации постоянной, представляя скорость частицы v в виде $v(t) = a(t)\exp(-\gamma t)$, получая

$$a(t) = \frac{1}{m}\int_0^t e^{\gamma t'}F(t')dt' + a_0, \qquad (3)$$

откуда

$$v(t) = \frac{1}{m}e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma t'}F(t')dt' + v(0)e^{-\gamma t}. \qquad (4)$$

Из этого выражения видно, что для времен $t \gg 1/\gamma$ начальное значение скорости “забывается". Найдем теперь среднее от произведения скоростей в два различных момента времени, называемое корреляционной функцией

$$\langle v(t)v(t+\tau)\rangle = \frac{1}{m^2}e^{-2\gamma t-\gamma\tau}\int_0^{t+\tau}\int_0^t e^{\gamma(t'+t'')}D\delta(t'-t'')dt'dt'' =$$

$$= \frac{D}{m^2}e^{-\gamma\tau}\left(\frac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma}\right)_{t\gg 1/\gamma} \to \frac{D}{2m^2\gamma}e^{-\gamma\tau} \qquad (5)$$

Константу D можно найти из условия, что в равновесии $\langle v^2\rangle = T/m$. В результате получаем

$$D = 2\gamma m T = 12\pi R\eta T \qquad (6)$$

одну из форм флуктуационно-диссипационной теоремы (флуктуации силы, D, связаны с диссипацией , вязкостью η).

Решение уравнения Ланжевена методом фурье-преобразования.

Из уравнения Ланжевена для броуновской частицы

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{F(t)}{m} \tag{7}$$

используя фурье-преобразование

$$v(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{i\omega t} dt, \quad v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{8}$$

получим

$$v(\omega) = \frac{F(\omega)}{m(-i\omega + \gamma)} \tag{9}$$

Броуновское движение

Корреляционная функция скорости тогда получается равной

$$\langle v(t)v(t')\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega' t'} \langle v(\omega)v(\omega')\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega' t'} \frac{\langle F(\omega)F(\omega')\rangle}{m^2(-i\omega+\gamma)(-i\omega'+\gamma)} \qquad (10)$$

Корреляционная функция фурье-компонент силы

$$\langle F(\omega)F(\omega')\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega' t'} D\delta(t-t') = 2\pi D\delta(\omega+\omega'). \tag{11}$$

Тогда

$$\langle v(t)v(t')\rangle == \frac{D}{m^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi(\gamma^2+\omega^2)}e^{-i\omega(t-t')}. \tag{12}$$

Этот интеграл берется методом контурного интегрирования в комплексной плоскости, замыкая для $t - t' > 0$ контур в нижней, а для $t - t' < 0$ в верхней полуплоскости, получая

$$\langle v(t)v(t')\rangle = \frac{D}{2m^2\gamma} e^{-\gamma|t-t'|} \qquad (13)$$

Броуновское движение

Найдем флуктуации напряжения на концах сопротивления – проводника длиной L, поперечным сечением S, в котором хаотически движется N электронов проводимости, рассматриваемые как броуновские частицы.
Плотность тока, создаваемая движением электронов

$$j(t) = ne\bar{v}(t) = \frac{ne}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i(t) \tag{14}$$

Корреляционная функция плотности тока равна

$$\langle j(t')j(t'')\rangle = \frac{n^2e^2}{N^2}\sum_i\sum_j\langle v_i(t')v_j(t'')\rangle = \frac{n^2e^2}{N^2}N\frac{T}{m}e^{-|t'-t''|/\tau}, \tag{15}$$

где $\tau = 1/\gamma$ – время свободного пробега электрона (типично $\tau \sim 10^{-13}$ с).

Броуновское движение

Тогда корреляционная функция напряжения на концах сопротивления равна

$$\langle U(t')U(t'')\rangle = R^2S^2\langle j(t')j(t'')\rangle = \frac{R^2S^2n^2e^2}{N}\frac{T}{m}e^{-|t'-t''|/\tau}, \quad (16)$$

Выразим величину сопротивления R через характерное время между столкновениями электрона τ, находя установившуюся среднюю скорость движения электронов во внешнем электрическом поле E.

$$\frac{\bar{v}}{\tau} = \frac{eE}{m} \quad \to j = \frac{ne^2\tau}{m}E \quad \to R = \frac{Lm}{Sne^2\tau} \quad (17)$$

Подставляя это выражение для одной степени R в предыдущее уравнение, получим

$$\langle U(t')U(t'')\rangle = RT\frac{e^{-|t'-t''|/\tau}}{\tau}. \quad (18)$$

Если нас будут интересовать корреляции на промежутках времени $|t' - t''| \gg \tau$, что типично для радиотехнических цепей, то мы можем совершить предельный переход

$$\left[\frac{e^{-|t'-t''|/\tau}}{\tau}\right]_{\tau\to 0} \to 2\delta(t' - t''), \tag{19}$$

получая формулу Найквиста

$$\langle U(t')U(t'')\rangle = 2RT\delta(t' - t''). \tag{20}$$

Пример RC-цепочка, сопротивление является источником случайной ЭДС U_{fl}. Найдем корреляционную функцию заряда на конденсаторе. Из уравнения

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=U_{fl} \tag{21}$$

$$q(\omega)=\frac{U_{fl}(\omega)}{R(-i\omega+\gamma)}, \tag{22}$$

где $\gamma=1/RC$.

Корреляционная функция заряда тогда получается равной

$$\langle q(t)q(t')\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega' t'} \langle q(\omega)q(\omega')\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega' t'} \frac{\langle U_{fl}(\omega)U_{fl}(\omega')\rangle}{R^2(-i\omega+\gamma)(-i\omega'+\gamma)} \quad (23)$$

Броуновское движение

Корреляционная функция фурье-компонент ЭДС

$$\langle U_{fl}(\omega)U_{fl}(\omega')\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dte^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'e^{i\omega' t'}2RT\delta(t-t') = 4\pi RT\delta(\omega+\omega'). \quad (24)$$

Тогда

$$\langle q(t)q(t')\rangle == \frac{T}{\pi R}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{\gamma^2+\omega^2}e^{-i\omega(t-t')} = CTe^{-|t-t'|/RC}. \quad (25)$$