Домашняя работа к занятию 6

1.1 — 1.3 Решите уравнения, вводя параметр указанным образом.

1.1 $xy'(xy'+1) = y$; $p = xy'$.

1.2 $\ln y' + \ln y + yy' = x$; $p = yy'$.

1.3 $xy' - \sqrt[3]{(y')^4} = y$; $p = y'$. Изобразите интегральные линии.

2.1 — 2.2 Решите уравнения, вводя параметр.

2.1 $(y')^{2/3} + y^{2/3} = 1$

2.2 $xy' + \sqrt{1+(y')^2} = y$

3.1 Найдите кривую (не являющуюся прямой), отрезки касательных к которой, отсекаемые осями координат, имеют длину 1.

3.2 Задача о брахистохроне заключается в том, чтобы найти кривую, двигаясь по которой под действием силы тяжести, материальная точка скатится из точки $A(0;0)$ в точку $B(x_1;y_1)$ за кратчайшее время. При решении этой задачи возникает дифференциальное уравнение $y(1+(y')^2) = C$. Решите это уравнение, вводя параметр.

Ответы и указания

1.1 *Указание*: полагая $p = xy'$, запишем уравнение в виде $y = p^2 + p$. Дифференцируя это соотношение и учитывая, что $dy = y'\,dx$, получаем систему $\begin{cases} dy = (2p+1)dp \\ dy = \dfrac{p}{x}dx \end{cases}$ Отсюда $\dfrac{p}{x}dx = (2p+1)dp$, что приводит к уравнению $\dfrac{dx}{x} = (2+\dfrac{1}{p})dp$. Кроме того, $p = 0$ также является решением.

Ответ: общее решение $\begin{cases} x = Cpe^{2p} \\ y = p^2 + p \end{cases}$ и решение $y \equiv 0$.

1.2 *Указание*: полагая $p = yy'$, запишем уравнение в виде $x = \ln p + p$. Дифференцируя это соотношение и учитывая, что $dy = y'\,dx$, получаем систему $\begin{cases} dx = (\frac{1}{p} + 1)dp \\ ydy = pdx \end{cases}$ Отсюда $ydy = (1+p)dp$.

Ответ: общее решение $\begin{cases} x = \ln p + p \\ y^2 = 2p + p^2 + C \end{cases}$

1.3 *Указание*: данное уравнение является уравнением Клеро. Полагая $p = y'$, получаем $y = xp - p^{4/3}$. Далее, $pdx = xdp + pdx - \frac{4}{3}p^{1/3}dp$, откуда $p = C$ или $x = \frac{4}{3}p^{1/3}$.

Ответ: семейство прямых $y = Cx - C^{4/3}$ и их огибающая $y = \frac{27}{256}x^4$.

2.1 *Указание*: уравнение обращается в тождество, если ввести параметр следующим образом: $\begin{cases} y = \sin^3 p \\ y' = \cos^3 p \end{cases}$ $p \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Тогда $\begin{cases} dy = 3\sin^2 p \cos p dp \\ dy = \cos^3 p dx \end{cases}$, что приводит к уравнению $3\sin^2 p \cos p dp = \cos^3 p dx$.

Отсюда либо $\cos p = 0$, то есть $p = \pm\frac{\pi}{2}$ и соответственно $y \equiv \pm 1$, либо $3\sin^2 p dp = \cos^2 p dx$. Разделяя переменные в этом уравнении, получаем $x = 3\operatorname{tg} p - 3p + C$.

Ответ: общее решение $\begin{cases} x = 3\operatorname{tg} p - 3p + C \\ y = \sin^3 p \end{cases}$, $p \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, и $y \equiv \pm 1$.

2.2 *Указание*: данное уравнение является уравнением Клеро. Однако уравнение содержит выражение $\sqrt{1+(y')^2}$, поэтому введем параметр следующим образом: $y' = \operatorname{tg} p$, где $p \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Тогда $\sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{\cos p}$, и уравнение принимает вид $x \operatorname{tg} p + \frac{1}{\cos p} = y$.

Дифференцируя это соотношение и учитывая, что $dy = \operatorname{tg} p dx$, получаем уравнение $(x + \sin p)dp = 0$. Отсюда $p = C$, что дает семейство прямых $y \cos C - x \sin C = 1$, или $x = -\sin p$, что дает огибающую этого семейства $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: семейство прямых $y \cos C - x \sin C = 1$ и их огибающая — окружность $x^2 + y^2 = 1$.

3.1 Уравнение касательной, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $a = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}$ и $b = y_0 - x_0 y'(x_0)$.

По теореме Пифагора квадрат длины отсекаемого отрезка равен

$$a^2 + b^2 = \big(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}\big)^2 + \big(y_0 - x_0 y'(x_0)\big)^2 = 1$$

В дальнейших преобразованиях индекс, обозначающий фиксированную точку, мы опустим, и получим уравнение

$$\big(\frac{y}{y'(x)} - x\big)^2 + \big(y - x y'(x)\big)^2 = 1$$

$$\big(1 + \frac{1}{(y')^2}\big)\big(y - x y'\big)^2 = 1$$

Введем параметр: $y' = \operatorname{tg} p$, где $p \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Тогда $1 + \frac{1}{(y')^2} = \frac{1}{\sin^2 p}$, и уравнение принимает вид $y - x \operatorname{tg} p = \pm \sin p$.

Дифференцируя это соотношение и учитывая, что $dy = \operatorname{tg} p dx$, получаем уравнение $(x \pm \cos^3 p)dp = 0$. Отсюда $p = C$, что дает семейство прямых $y = x \operatorname{tg} C \pm \sin C$, или $x = \mp \cos^3 p$, что дает огибающую этого семейства $\begin{cases} x = \mp \cos^3 p \\ y = \pm \sin^3 p \end{cases}$. Исключая из этой системы параметр p, получаем уравнение астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Ответ: искомая кривая — астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

3.2 Введем параметр: $y' = \operatorname{ctg} \frac{p}{2}$, где $p \in (0; 2\pi)$. Тогда уравнение принимает вид $y = C \sin^2 \frac{p}{2}$. Дифференцируя это соотношение и учитывая, что $dy = \operatorname{ctg} \frac{p}{2} dx$, получаем уравнение $C \sin \frac{p}{2} \cos \frac{p}{2} dp = \operatorname{ctg} \frac{p}{2} dx$. Отсюда $C \sin^2 \frac{p}{2} dp = dx$, следовательно $x = \frac{C}{2}(p - \sin p) + D$.

Таким образом, общее решение $\begin{cases} x = \frac{C}{2}(p - \sin p) + D \\ y = \frac{C}{2}(1 - \cos p) \end{cases}$.

При $p = 0$ получаем $y = 0$. Для выполнения начальных условий $x = 0$, $y = 0$ нужно положить $D = 0$.

Ответ: искомой кривой является циклоида $\begin{cases} x = \frac{C}{2}(p - \sin p) \\ y = \frac{C}{2}(1 - \cos p) \end{cases}$.