Потоки в сетях

Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе

Лекция 6

Сеть

- Ориентированный граф G с пропускными способностями дуг $u\colon E(G) \to \boldsymbol{R}^{+}$ и две выделенные вершины s (**источник**) и t (**сток**).
- Четверка (G, u, s, t) называется **сетью**.
- Главная задача — транспортировать так много единиц продукта, как возможно, одновременно из s в t. Решение этой задачи назовем максимальным потоком.

Поток

Определение Дан орграф G с пропускными способностями (вместимостями) u: $E(G) \to \boldsymbol{R}^+$,

s-t-потоком называется функция $f : E(G) \to \boldsymbol{R}^+$, если выполняются условия:

1) $0 \le f(e) \le u(e)$ для всех $e \in E(G)$

2) f удовлетворяет **закону сохранения** в каждой вершине $v \in V$ кроме вершин s и t:

$$\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e).$$

$\delta^+(v)$ –ребра, исходящие из вершины v,

$\delta^-(v)$ –ребра, входящие в вершину v.

s-t-Поток

Дана сеть (G, u, s, t) и *s*-t-поток f.

Определим **величину *s-t*-потока** функцией

$$v(f) = \sum_{e \in \delta^+(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(s)} f(e)$$

вершина s - **источник**

$\delta^+(s)$ –ребра, исходящие из вершины s

$\delta^-(s)$ –ребра, входящие в вершину s

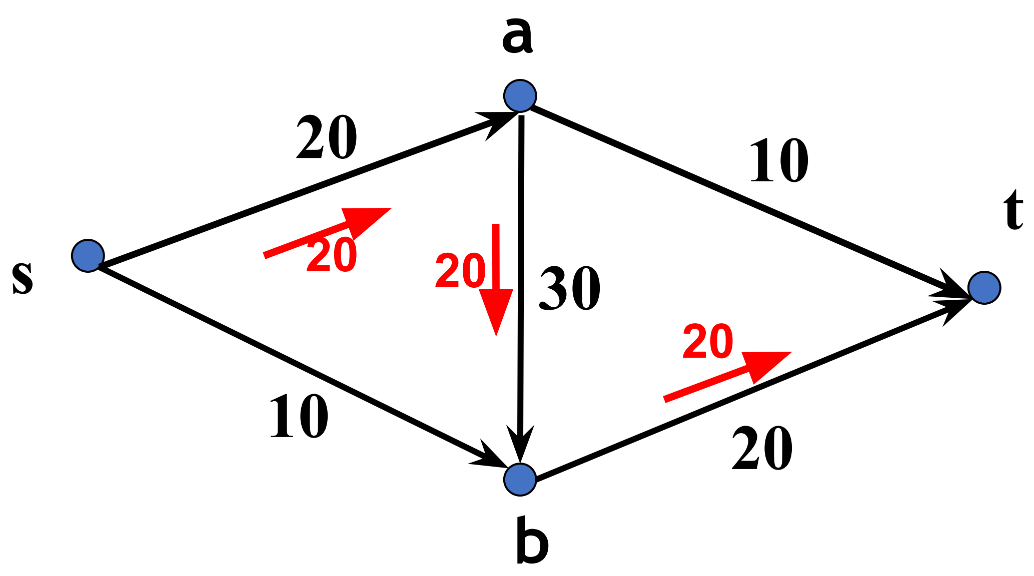
Задача «Максимальный Поток»

Дано: Сеть (G, u, s, t).

Найти s-t-поток максимальной величины.

Пример

G и поток f



Видно, что больше нельзя добавить поток, но по-другому было бы лучше

Остаточный граф G_f

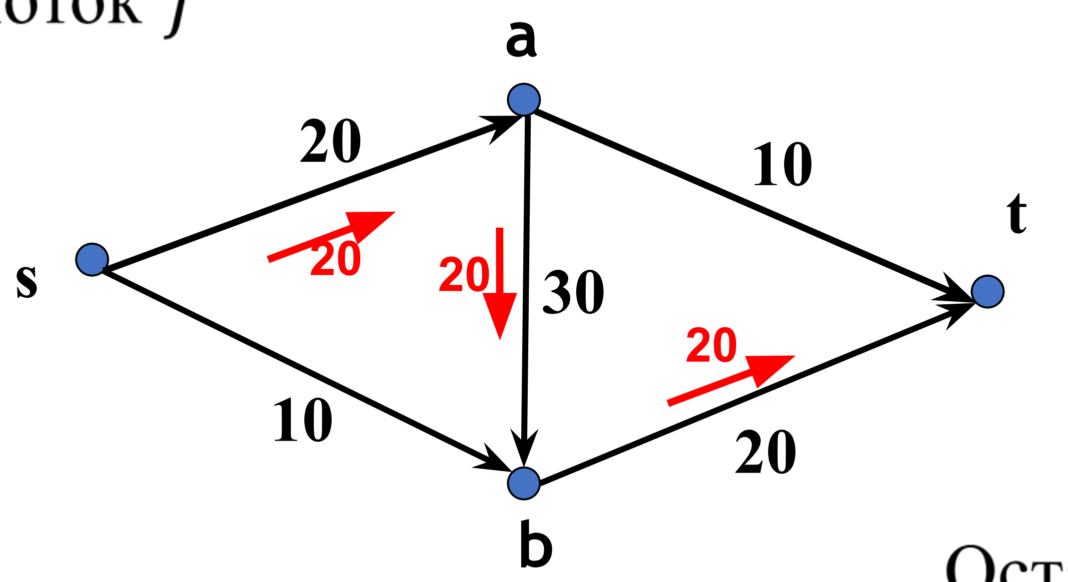
- Дан орграф G с вместимостями $u\colon E(G) \to \boldsymbol{R}_+$ и поток f, определим **остаточный** граф G_f:

1) Множество вершин графа G_f совпадает с V.

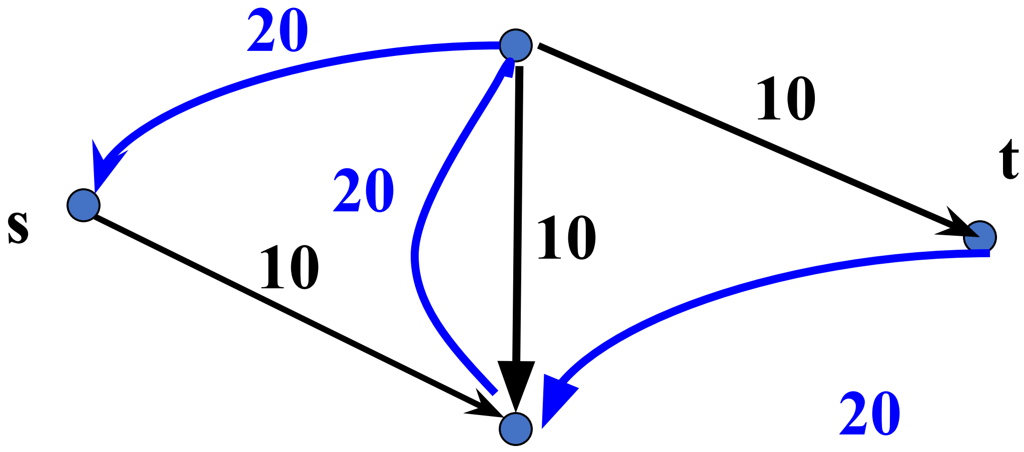
2) Для каждой дуги $e = (v, w)$, такой что $f(e) < u(e)$ создаем ***прямую*** дугу $e_f = (v, w)$ и определим ее пропускную способность $u(e_f) = u(e) - f(e)$.

3) Для каждой дуги $e = (v, w)$, такой что $f(e) > 0$ создаем ***обратную*** дугу $e_f^* = (w, v)$ и определим ее пропускную способность $u(e_f^*) = f(e)$.

граф G и поток f



Остаточный граф G_f



Увеличивающий Путь

- Даны поток f и простой путь P из s в t в остаточном G_f.

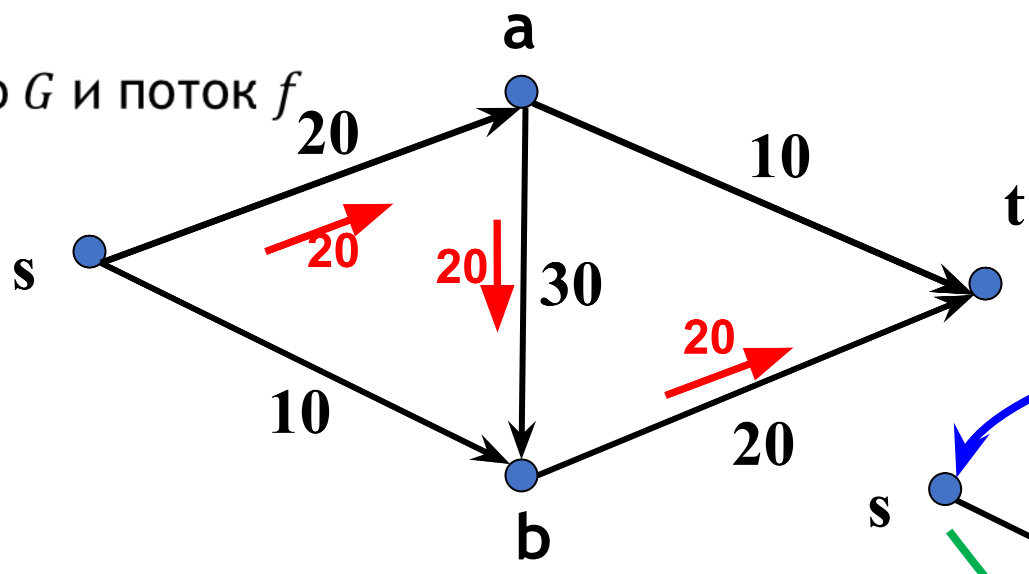
Определим γ как минимальную пропускную способность дуги в пути P.

Увеличение f вдоль P на γ означает следующее для каждой дуги из пути:

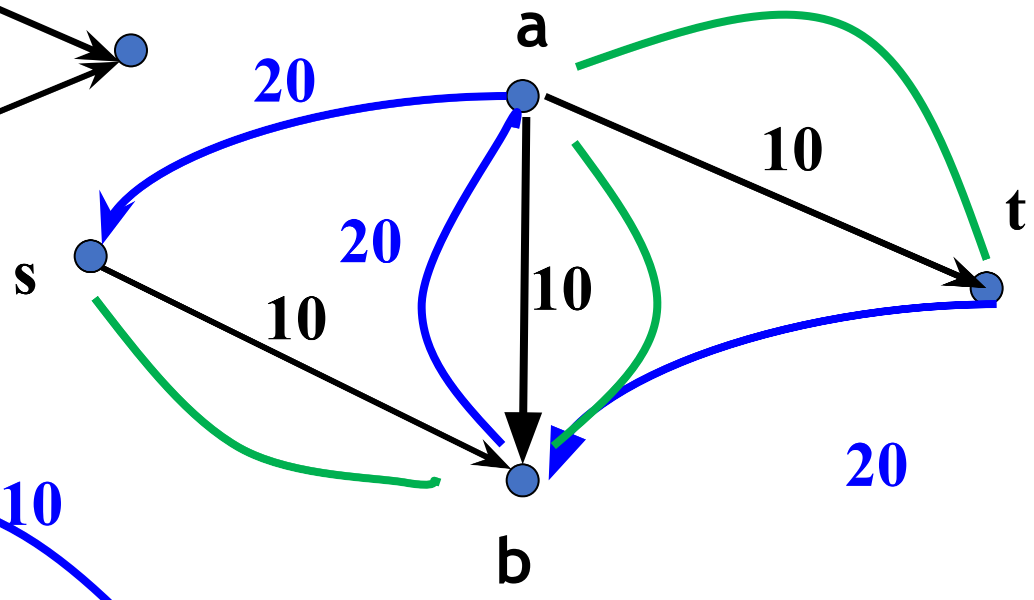
- если это прямая дуга e, то увеличим $f(e)$ на γ ,
- если это обратная дуга e^*, то уменьшим $f(e)$ на γ.

Увеличивающий Путь

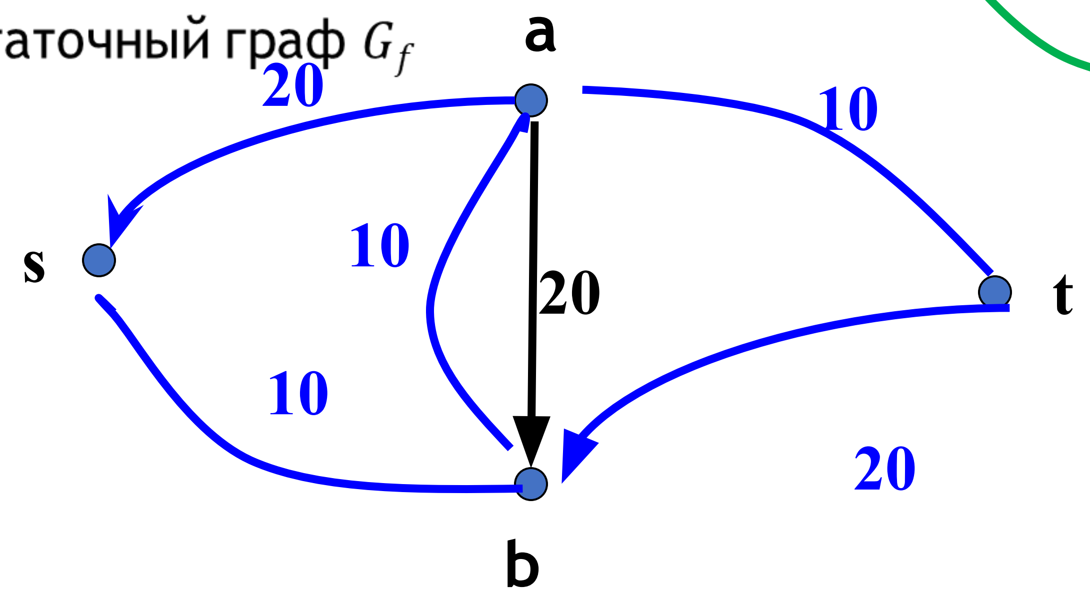
1. граф G и поток f



2. Остаточный граф G_f и новый увеличивающий путь $(s, b, a, t) \rightarrow$



3. Новый остаточный граф G_f



Алгоритм Форда-Фалкерсона

Input: Сеть (G, u, s, t).
Output: s-t-поток f максимальной величины.

1. Положим $f(e) = 0$ для всех $e \in E(G)$, остаточный граф G_f совпадает с графом G.
2. Найти f-увеличивающий путь P в графе G_f
   If такого пути нет **then stop.**
3. Вычислить $\gamma := \min_{e \in E(P)} u_f(e)$.
4. Увеличить f вдоль P на γ, обновить G_f и **go to** 2.

Анализ Алгоритма Ф-Ф

Предполагаем, что все пропускные способности целые

Замечание 1

Полученный алгоритмом f является s-t-потоком в графе G.

Необходимо проверить, что $u(e) \geq f(e)$ и закон сохранения потока.

Это выполняется по способу построения остаточного графа и увеличения потока вдоль пути.

Анализ Алгоритма Ф-Ф

Предполагаем, что все пропускные способности целые

Замечание 2

На каждом шаге алгоритма Ф-Ф величины потока $f(e)$ и остаточные пропускные способности $u(e_f)$ – целые числа.

Изначально все целое, изменение происходит на величину γ, которая тоже целая.

Анализ Алгоритма Ф-Ф

Предполагаем, что все пропускные способности целые

Замечание 3

На каждом шаге алгоритма Ф-Ф величина потока $v(f)$ строго возрастает.

Пусть f поток, который был на шаге 2. γ>0.

Первое ребро e в пути P должно выходить из s в остаточном графе.
Это не может обратное ребро, т.к. все пути P простые.
Значит это прямое ребро.
Значит новая величина потока $v(f) = v(f) + \gamma$

Анализ Алгоритма Ф-Ф

Предполагаем, что все пропускные способности целые

Замечание 4

Пусть $C = \sum_{e \in \delta^+(s)} u(e)$, тогда алгоритм Ф-Ф завершится не более чем за C итераций основного цикла.

Это следует из замечаний 2 и 3

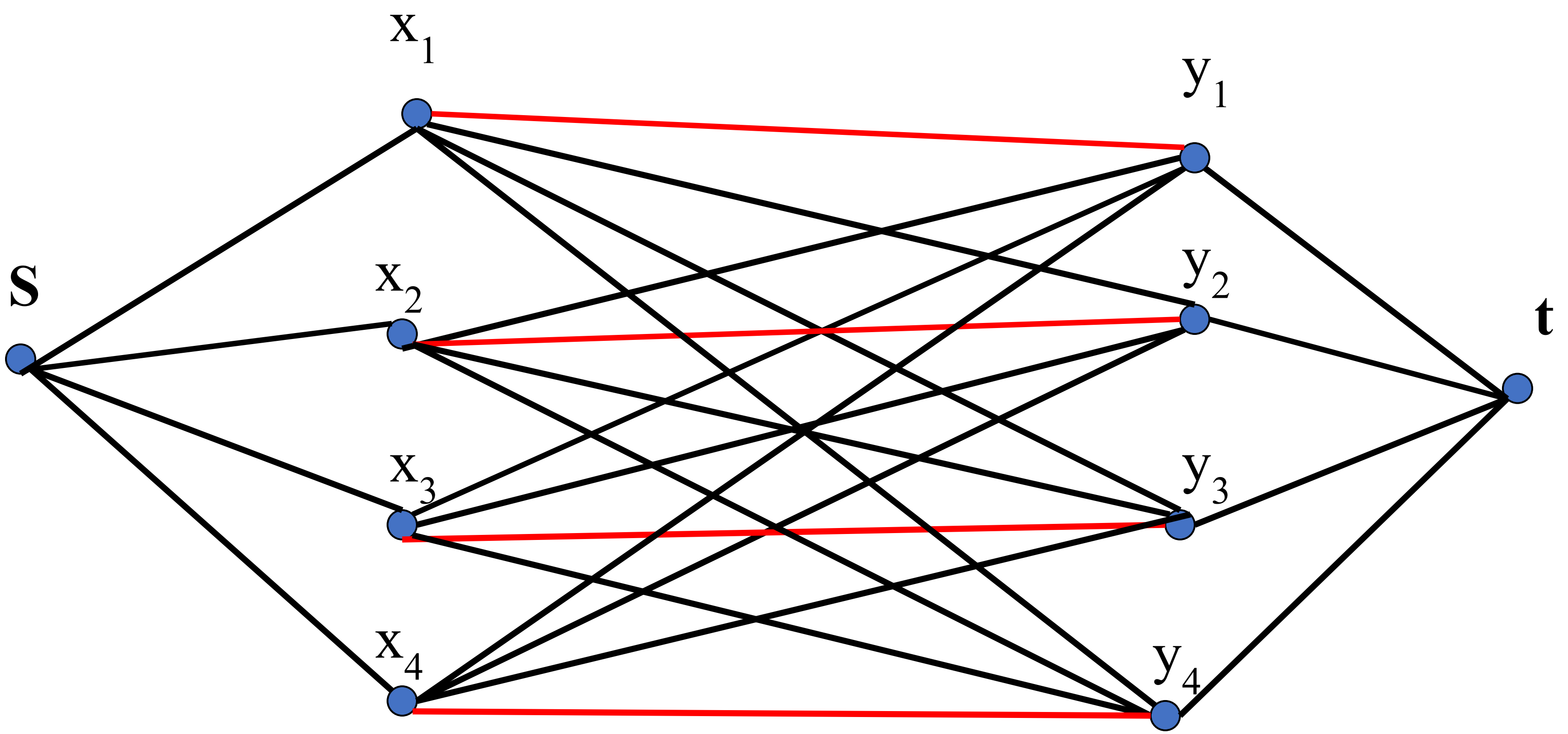
Замечание

Найти увеличивающий путь легко (любой s-t-путь в G_f).

Если выбирать произвольный увеличивающий путь в G_f , то

- Существует пример с иррациональными вместимостями дуг, когда алгоритм никогда не остановится.
- Существует пример с целыми вместимостями дуг, на котором алгоритм производит экспоненциальное от размера входа число увеличений.

Пример с бесконечным числом итераций
(все линии представляют ребра, то есть поток может идти в оба направления)

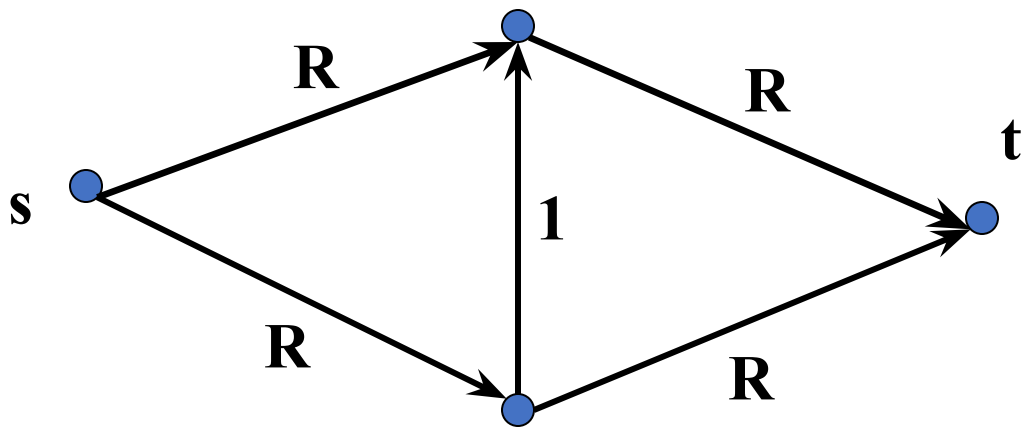


$u(x_1, y_1)=1$, $u(x_2, y_2)=\sigma$, $u(x_3, y_3)= u(x_4, y_4)= \sigma^2$

$$\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Пропускная способность остальных ребер $1/(1- \sigma)$.

Целочисленный пример
с экспоненциальным числом итераций



2**R** итераций.

Длина входа — O(log **R**).

s-t-Разрез

Пусть $V(G) = V_1 \cup V_2, s \in V_1$ и $t \in V_2$ тогда
***s-t*-разрез (V_1)** — это множество дуг вида (v, w), таких что $v \in V_1$ и $w \in V_2$.

пропускной способностью s-t-разреза называется сумма вместимостей его дуг (ребер).

Под **минимальным *s-t*-разрезом** в (G, u, s, t) мы понимаем *s*-*t*-разрез с минимальной пропускной способностью (относительно *u*) в G.

s-t-Поток и s-t-разрез

Лемма 1

Для всех $V(G) = V_1 \cup V_2$ таких, что $s \in V_1$, $t \in V_2$, и любого s-t-потока f верно

$$v(f) = \sum_{e \in \delta^+(V_1)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(V_1)} f(e) \qquad \text{(a)}$$

$$v(f) \leq \sum_{e \in \delta^+(V_1)} u(e) \qquad (b)$$

Величина максимального потока не превосходит пропускной способности минимального разреза.

Доказательство (a)

$$v(f) = \sum_{e \in \delta^+(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(s)} f(e) = \sum_{v \in V_1} \left(\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) \right) =$$

$$\sum_{e \in \delta^+(V_1)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(V_1)} f(e)$$

Первое равенство по определению.
Во втором добавили все вершины из V_1, а для них выполняется закон сохранения потока (кроме вершины s, которая тоже входит в V_1).
В последнем заметили, что если обе вершины дуги лежат в V_1, то эта дуга посчитается два раза (как входящая и исходящая) и сократится.

Доказательство (b)

$$v(f) = \sum_{e\in\delta^+(V_1)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(V_1)} f(e) \le \sum_{e\in\delta^+(V_1)} f(e) \le \sum_{e\in\delta^+(V_1)} u(e)$$

Первое равенство из доказанного в а).

Во втором неравенстве учли положительность потока.

В последнем использовали, что поток не превосходит пропускной способности.

В итоге получили, что величина s-t-потока не превосходит величины s-t-разреза.

Замечание

В частности, из доказательства следует, что каждому максимальному потоку соответствует s-t-разрез, пропускная способность которого равна величине потока.

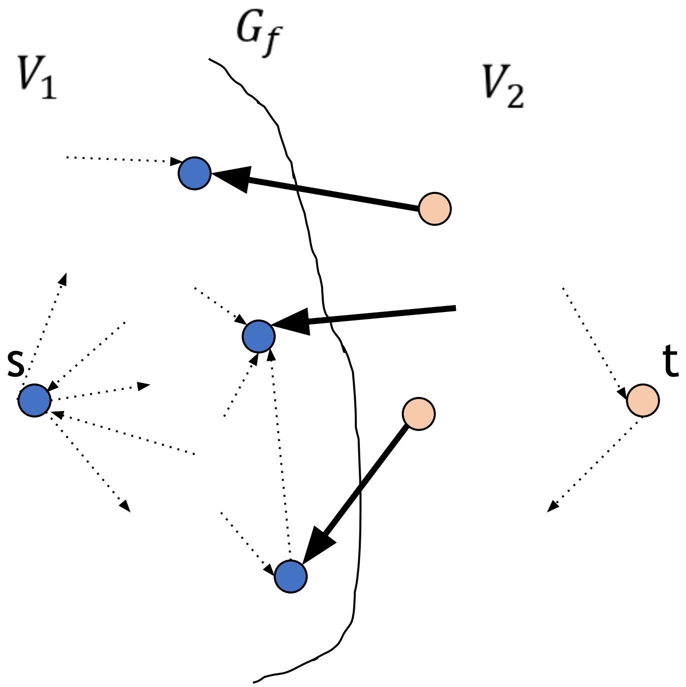
s-t Поток и s-t Разрез

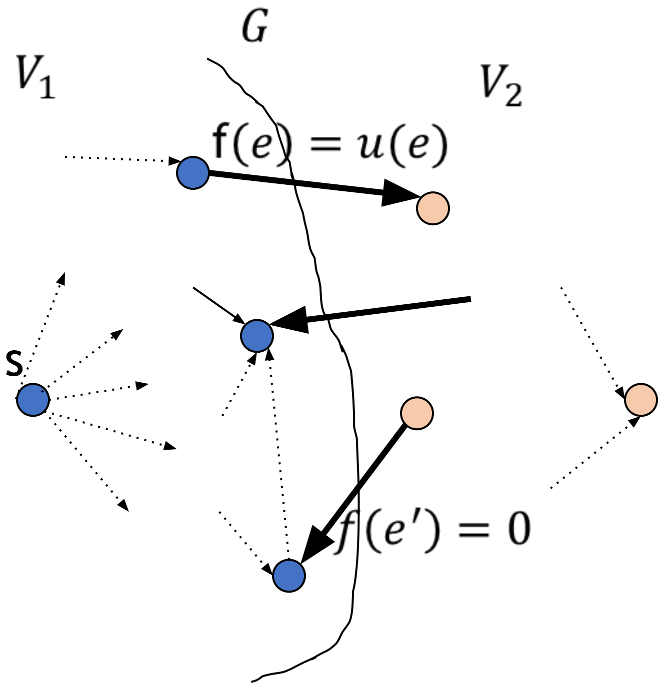
Лемма 2

Если f – такой $s-t$ поток, для которого не существует $s-t$ пути в остаточном графе G_f, то в G существует $s-t$ разрез, величина которого совпадает с величиной потока $v(f)$.
Соответственно f имеет **максимальную** величину среди всех потоков в G.

Доказательство

Пусть f – такой $s-t$ поток, для которого не существует $s-t$ пути в остаточном графе G_f





V_1 –вершины достижимые из s в G_f, V_2 – остальные вершины.
e – ребро из G выходящее из V_1, $f(e) = u(e)$, т.к. иначе было бы прямое ребро в G_f.
e' – ребро из G входящее в $V_1, f(e') = 0$, т.к. иначе было б обратное ребро в G_f.
По лемме 1 получаем, что **величина потока $\boldsymbol{f}$ равна величине разреза $(\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2})$**

Максимальный поток и минимальный разрез

Теорема Форда-Фалкерсона

Величина максимального s-t-потока равна пропускной способности минимального s-t-разреза.