Домашняя работа к занятию 10

1.1 — 1.3 Решите задачи Коши

1.1 $\begin{cases} y'' - y = \operatorname{sh} x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$ **1.2** $\begin{cases} y'' + y = 2\sin x \sin 2x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} x^2 y'' - x y' + y = 2x \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0 \end{cases}$

2.1 Найдите общее решение уравнения $x^2 y'' + x y' + y = 4\cos\big(\ln|x|\big)$ и решите задачу Коши $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

2.2 Найдите все решения уравнения $y'' + y' - 2y = \sin x$, ограниченные при $|x| \to \infty$.

3.1 Покажите, что уравнение колебаний при наличии периодической возмущающей силы $\ddot{x} + a^2 x = A \sin \omega t$ имеет периодическое частное решение с частотой ω только при условии $\omega \neq a$ ($\omega > 0$, $a > 0$).

3.2 Уравнение колебаний при наличии сопротивления среды и периодической возмущающей силы имеет вид $\ddot{x} + 2k\dot{x} + a^2 x = A\sin(\omega t)$.

Покажите, что это уравнение имеет периодическое частное решение $x(t) = \dfrac{A}{\sqrt{(\omega^2 - a^2)^2 + 4k^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta)$, где $\delta = \operatorname{arctg} \dfrac{2k\omega}{\omega^2 - a^2}$.

Рассмотрите случаи $\omega \neq a$ и $\omega = a$ ($\omega > 0$, $a > 0$).

Ответы и указания

1.1 *Указание*: ФСР однородного уравнения $\varphi_1(x) = \operatorname{ch} x$, $\varphi_2(x) = \operatorname{sh} x$.

Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{2}(x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$

1.2 *Указание*: $2\sin x \sin 2x = \cos x - \cos 3x$.

Уравнение $y'' + y = \cos x$ имеет частное решение $y_1(x) = \dfrac{1}{2}x\sin x$. Уравнение $y'' + y = \cos 3x$ имеет частное решение $y_2(x) = -\dfrac{1}{8}\cos 3x$.

Общее решение $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}x\sin x + \dfrac{1}{8}\cos 3x$.

Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{2}x\sin x + \dfrac{1}{8}\cos 3x - \dfrac{1}{8}\cos x = \dfrac{1}{2}x\sin x - \dfrac{1}{4}\sin x\sin 2x$.

1.3 *Указание*: уравнение является уравнением Эйлера. Его характеристический многочлен $P_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2$.

Общее решение $y(x) = C_1x + C_2x\ln|x| + x\ln^2|x|$

Ответ: $y(x) = x\ln^2 x$, $x \in (0; +\infty)$

2.1 $y(x) = 2(1 + \ln x)\sin(\ln x)$, $x \in (0; +\infty)$

2.2 $y = -0,3\sin x - 0,1\cos x$

3.1 — 3.2 *Указание*: воспользуйтесь методом комплексных амплитуд.