Семинар 19 [28.11.2022]

Уравнение Гаусса

$$z\,(1-z)\,\omega'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\,\omega' - \alpha\beta\,\omega = 0,$$
$$\omega = F\,(\alpha,\beta;\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha\,(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}{\gamma\,(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots.$$
$$\omega \sim z^{\rho_0}, \quad \rho_0 = \{0, 1-\gamma\}, \quad z \to 0,$$
$$\omega \sim (1-z)^{\rho_1}, \quad \rho_1 = \{0, \gamma-\alpha-\beta\}, \quad z \to 1,$$
$$\omega \sim \frac{1}{z^{\rho_\infty}}, \quad \rho_\infty = \{\alpha, \beta\}, \quad z \to \infty.$$

Уравнение Куммера

$$z\omega'' + [\gamma - z]\,\omega' - \alpha\omega = 0,$$
$$\omega = F\,(\alpha;\gamma;z) = \lim_{\beta\to\infty} F\,(\alpha,\beta;\gamma;z/\beta) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha\,(\alpha+1)}{\gamma\,(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots.$$
$$\omega \sim z^{\rho_0}, \quad \rho_0 = \{0, 1-\gamma\}, \quad z \to 0,$$
$$\omega \sim \left\{e^z, z^{-\alpha}\right\}, \quad z \to \infty.$$

Задачи

Задача 1

Выразить функции

а)

$$f\,(z) = \frac{\ln[1+z]}{z};$$

б)

$$f\,(z) = (1-z)^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

через гипергеометрическую функцию Гаусса.

Задача 2

Выразить функцию Бесселя $J_\nu(x)$ через вырожденную гипергеометрическую функцию.

Решения

Задача 1

Случай а). Разложение в ряд дает

$$f(z) = \frac{\ln[1+z]}{z} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1!}{2}\frac{(-z)}{1!} + \frac{2!}{3}\frac{(-z)^2}{2!} + \frac{3!}{4}\frac{(-z)^3}{3!} + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{(-z)}{1!} + \frac{1(1+1)1(1+1)}{2(2+1)}\frac{(-z)^2}{2!} + \frac{1(1+1)(1+2)1(1+1)(1+2)}{2(2+1)(2+2)}\frac{(-z)^3}{3!} + \ldots.$$

Таким образом $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $\beta = 1$:

$$f(z) = F(1,1;2;-z).$$

Случай б). Биномиальное разложение дает

$$f(z) = (1-z)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-z)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{(-z)^k}{k!} =$$
$$= 1 + n\frac{(-z)}{1!} + n(n-1)\frac{(-z)^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{(-z)^3}{3!} + \ldots =$$
$$= 1 + (-n)\frac{z}{1!} + (-n)(-n+1)\frac{z^2}{2!} + (-n)(-n+1)(-n+2)\frac{z^3}{3!} + \ldots.$$

Таким образом
$$f(z) = F(-n,\beta;\beta;z).$$

Задача 2

Уравнение Бесселя
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$
имеет две особые точки: $x = \{0, \infty\}$, с асимптотиками $y \sim x^{\pm\nu}$ при $x \to 0$, и $y \sim e^{\pm ix}$ при $x \to \infty$, соответственно. Подстановка $y = x^{\nu}e^{-ix}u(x)$ дает

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + [2\nu + 1 - 2ix]\frac{dy}{dx} - i(2\nu+1)y = 0$$

Сделав замену $z = 2ix$, в итоге получаем, что

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)} F\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu+1; 2ix\right),$$

где коэффициент находится из сравнения главных членов разложений в ряд гипергеометрической функции и функции Бесселя.