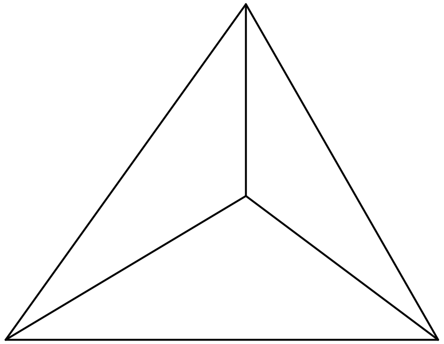
Планарные графы.

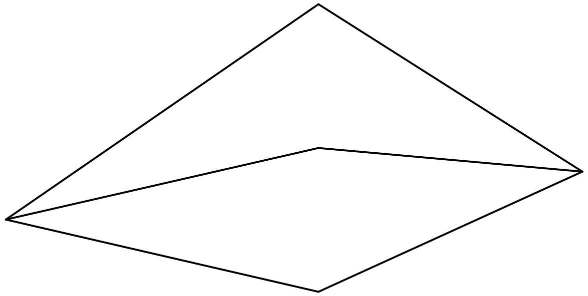
Определение. Граф называется *планарным*, если существует изоморфный ему плоский граф.

Определение. Граф $G=(V, E)$ называется двудольным, если существуют множества вершин U и W, такие что:
1. $V = U \bigcup W$, $U \bigcap W = \varnothing$;
2. ребро $(u, w) \notin E$, если вершины u и w лежат в одном множестве.
Обозначается $G=(U, W; E)$.

Определение. *Полный граф* K_n – это граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром. *Полный двудольный граф* $K_{n,m}$ – это двудольный граф $G=(U, W, E)$, у которого $|U| = n$, $|W| = m$ и $E = \{(u, w) / u \in U, w \in W\}$.

Пример. Графы K_4 и $K_{3,2}$ — планарные графы.





Утверждение. Графы K_5 и $K_{3,3}$ — непланарные графы.

Доказательство.

I. В графе K_5 10 ребер, а для любого плоского графа количество рёбер не превосходит $3n$-6=9 рёбер.

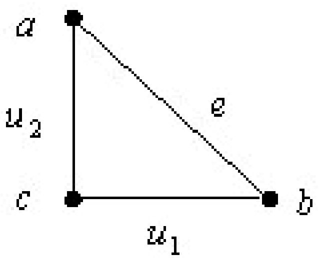
II. Граф $K_{3,3}$ не содержит циклов длины 3. Если это планарный граф, то количество его рёбер не может превосходить $2n$-4=8. Но у $K_{3,3}$ 9 рёбер.

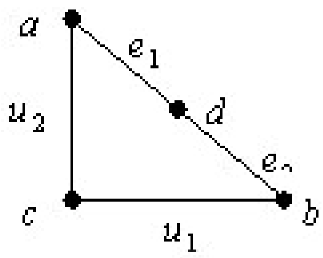
Утверждение. Подграф планарного графа тоже планарный граф.

Следствие. Планарный граф не содержит подграфов изоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

Определение. Будем говорить, что граф $G_1=(V_1, E_1)$ получен из графа $G=(V, E)$ с помощью *операции разбиения ребра* $e=(u,v)$, если $V_1 = V \bigcup \{v_e\}$ и $E_1 = \left(E \setminus \{e\}\right) \bigcup \left\{(u, v_e), (v_e, v)\right\}$.

Пример.





Определение. Два графа называются гомеоморфными, если могут быть получены из одного и того же графа с помощью операций разбиения ребра.

Теорема. (Критерий планарности Понтрягина-Куратовского) Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам K_5 и $K_{3,3}$.

Двудольные графы.

Пример. (Задача о назначении) Пусть U — работники, W — работы, а множество E указывает, какие работы может выполнять каждый из работников. Какое наибольшее количество работ можно выполнить одновременно.
Граф, соответствующий этой задаче, является двудольным.

Теорема. Граф является двудольным, если и только если нет циклов нечетной длины.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Очевидно.

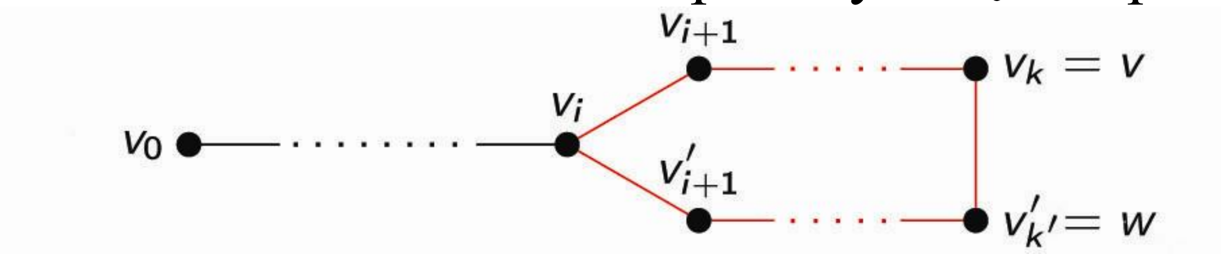
(⇐) Можно считать, что граф G=(V, E) связный. Разобьем множество вершин графа на подмножества X_i с помощью следующей рекуррентной процедуры.

$X_0=\{v_0\}$;

$$X_i=\left\{u\in V\setminus\bigcup_{k=0}^{i-1}X_i\;\middle|\;\exists v\in X_{i-1}\left((u,v)\in E\right)\right\}.$$

Положим $U=X_0\bigcup X_2\bigcup X_4\bigcup\ldots$ и $W=X_1\bigcup X_3\bigcup X_5\bigcup\ldots$.

Пусть существует ребро e=(w,v) такое, что его концы принадлежат одной доле. Тогда $v\in X_k$ и $w\in X_{k'}$ для некоторых номеров k и k' таких, что k'-k — чётное число. Рассмотрим пути v_0 в вершины w и v.



Они порождают цикл v_i, v_{i+1},…,v,w,…,v'_{i+1},v_i нечётной длины.

Следствие. Деревья и четные циклы являются двудольными графами, а нечетные циклы — нет.

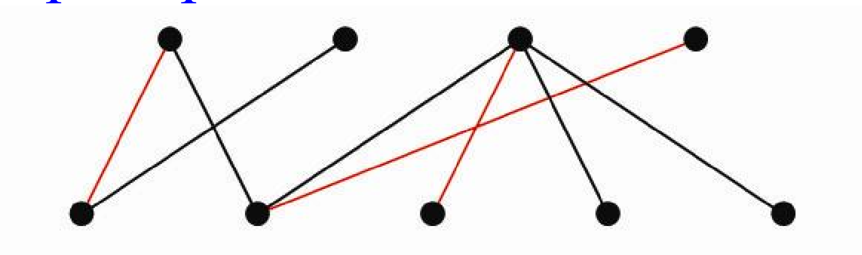
Определение. *Парасочетанием* называется подграф, у которого степень любой вершины равна 1.
Часто парасочетанием называют только множество ребер такого подграфа.

Определение. Парасочетание называется *совершенным*, если оно накрывает все вершины графа.

Определение. Обозначим $\pi(G)$ обозначим мощность наибольшего паросочетания в G.

Очевидно, что любое совершенное паросочетание максимально. Обратное утверждение не верно.

Пример.



К задаче выбора максимального парасочетания в двудольном графе сводится целое семейство задач дискретной математики.

Определение. Множество V_1 вершин из $V(G)$ называется *вершинным покрытием* графа G, если для любого ребра $e \in E(G)$ хотя бы один из его концов лежит в V_1. Мощность наименьшего вершинного покрытия графа G обозначим через $\tau(G)$.

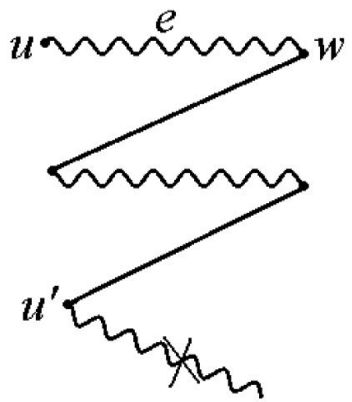
Пример. $\pi(K_{10}) = 5$, $\tau(K_{10}) = 9$; $\pi(C_5) = 2$, $\tau(C_5) = 3$.

Утверждение. $\pi(G) \le \tau(G)$ для любого графа G.
Доказательство. Для покрытия ребер произвольного паросочетания M уже требуется $|M|$ вершин.

Из приведенного выше примера следует, что данное неравенство иногда бывает строгим.

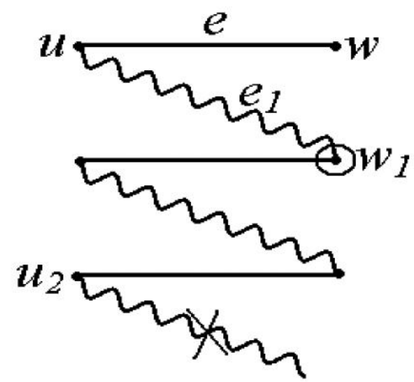
Теорема Кёнига. Для любого двудольного графа G $\pi(G) = \tau(G)$.
Доказем, что $\pi(G) \ge \tau(G)$.
Назовем путь P *чередующимся* относительно паросочетания M, если из двух любых последовательных ребер в P одно ребро принадлежит M.
Рассмотрим максимальное паросочетание M в графе $G=(U, W, E)$ и построим множество вершин T по следующему правилу.

Для любого ребра $(u,w)\in M$, где $u\in U$, $w\in W$, включаем в T вершину w, если существует чередующийся путь $u,w,\dots,u'$ такой, что вершина $u'\in U$ не покрыта паросочетанием M; в противном случае включаем в T вершину u.



Если T — вершинное покрытие то, $\pi(G)=|M|=|T|\geq\tau(G)$.

Покажем, что T накрывает все ребра графа. Пусть это не так и ребро $e=(u,w)\in E\backslash M$ не инцидентно вершинам из T. Из максимальности M следует, что по меньшей мере одна из вершин u и w инцидентна ребру из M. Если u не инцидентна ребру из M, то существует ребро $(w,u_1)\in M$. Но тогда из его концов в T выбрана вершина w, ввиду наличия тривиального чередующегося пути u_1, w, u.



Будем считать, что существует ребро $e_1=(u, w_1)\in M$ и из него выбрана вершина w_1. Но это возможно, если существует чередующийся путь $P = w_1,\ldots,u_2$, причем вершина u_2 не инцидентна рёбрам из M. Если вершина w также не инцидентна ребрам из M, то парасочетание M можно увеличить.

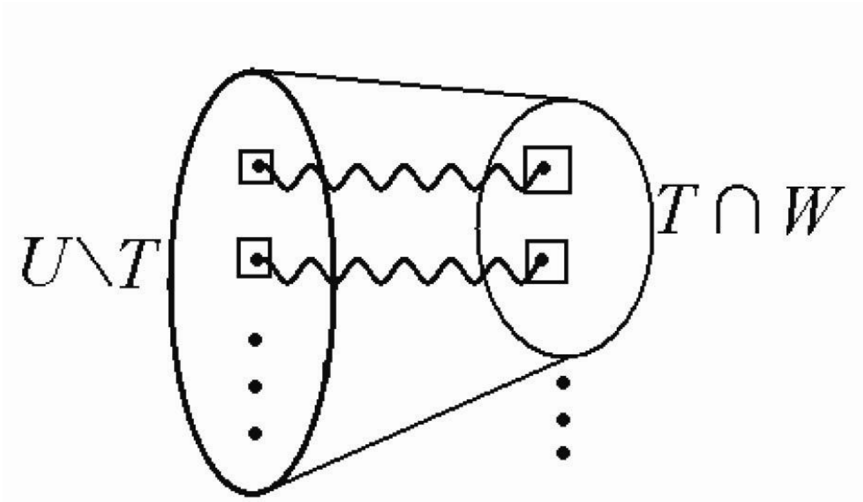
И, наконец, если существует ребро $(u_3, w)\in M$, то $w\in T$, так как существует чередующийся путь $P = u_3, w, u, w_1,\ldots,u_2$

Определение. Для двудольного графа $G=(U,W,E)$ и любого $U'\subseteq U$ через $N(U')$ обозначим множество вершин из W, смежных с вершинами из U'.

Теорема (теорема Кёнига-Холла). В двудольном графе $G=(U,W;E)$ существует паросочетание, покрывающее U, тогда и только тогда когда для любого $U'\subseteq U$ выполнено неравенство
$|N(U')|\geq|U'|$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Очевидно.

($\Leftarrow$) Пусть M — наибольшее паросочетание, а T — наименьшее вершинное покрытие в $G=(U,W,E)$. Поскольку все рёбра, инцидентные $U \setminus T$ накрываются вершинами из множества T, то $N(U\setminus T)\subseteq T\cap W$ и $|N(U\setminus T)|\leq|T\cap W|$.



По условию $|U \setminus T| \le |N(U \setminus T)|$ и, следовательно,
$|T \cap W| \ge |U \setminus T| = |U \setminus (T \cap U)| = |U| - |T \cap U|$.
Поскольку по теореме Кёнига $|T|=|M|$, то из этого неравенства получаем
$|U| \le |T \cap U| + |T \cap W| = |T| = |M|$.
Но с другой стороны в двудольном графе $|M| \le \min\{|U|, |W|\}$ и, следовательно, $|U|=|M|$ и все вершины из U накрываются парасочетанием M.

Определение. *Системой различных представителей* для набора множеств $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ называется такой набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ элементов множества $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, что $a_i \in A_i$ для любого i и все a_i различны.

Теорема Холла. Пусть $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ система подмножеств множества Ω. Система различных представителей для набора $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ существует тогда и только тогда, когда для любого $I \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$

$$\left|\bigcup_{i\in I}^{k} A_i\right| \ge |I|.$$

Доказательство. Построим двудольный граф $G=(U,W;E)$, в котором $W=\Omega$, $U=\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ и $E=\{(A_i,\sigma) \mid \sigma \in A_i\}$. Системе представителей множества $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ соответствует парасочетание графа G, накрывающее долю U. Применив теорему Кёнига-Холла к построенному графу, получим необходимое неравенство.

Определение. Граф называется *однородным*, если степени всех вершин равны.

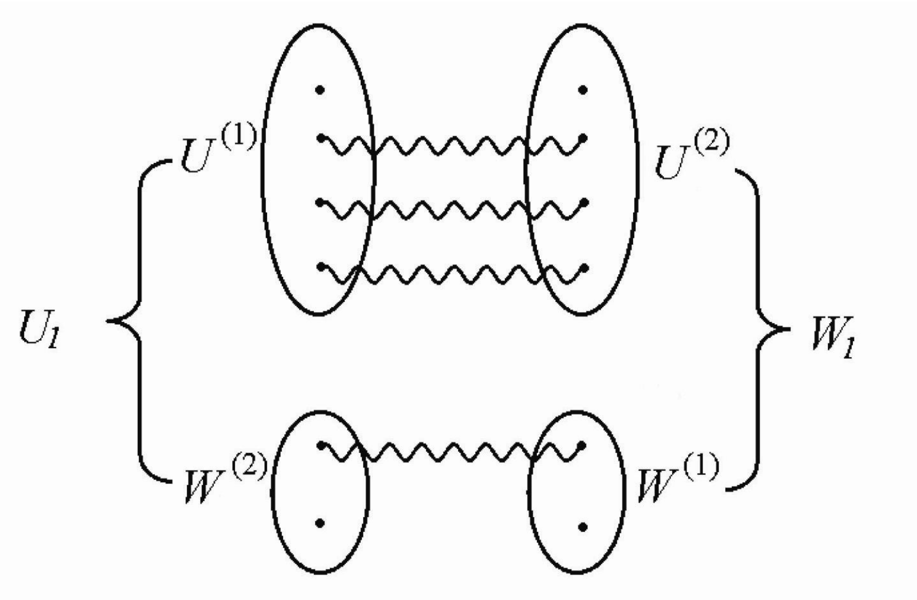
Следствие теоремы Кёнига-Холла. Любой однородный двудольный граф имеет совершенное парасочетание.

Доказательство. Пусть граф $G=(U,W;E)$ однородный степени k. Тогда из любого $U'\subseteq U$ выходит $k|U'|$ ребер, но в каждую вершину из $N(U')$ входит не более чем k из этих ребер. Поэтому $k|U'|\le\sum_{v\in N(U')}d(v)=k|N(U')|$, и по теореме Кёнига-Холла существует парасочетание, накрывающее U. Поскольку $|U|=|W|$, то это же парасочетание накрывает и множество W.

Теорема. Любой двудольный граф имеет парасочетание накрывающее все вершины максимальной степени.

Доказательство. Пусть это не так и существует граф с максимальной степенью вершины равной k, для которого нет парасочетания, накрывающего все вершины максимальной степени. Пусть граф $G=(U,W;E)$ контрпример, для которого минимальная степень вершины $t(G)$ максимальна. По предыдущему следствию $t(G)<k$.

Возьмем две непересекающиеся копии $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ графа G и построим граф $G_1=(U_1,W_1;E_1)$ следующим образом.



$U_1= U^{(1)}\cup W^{(2)}$, $W_1= U^{(2)}\cup W^{(1)}$. Множество E состоит из всех ребер графов $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ и ребер парасочетания, соединяющего одноименные ребра немаксимальной степени из различных графов.

Очевидно что $t(G)< t(G_1)$ и ,следовательно, в нем существует искомое парасочетание P. Но степень максимальных вершин графа G не изменилась. Сужение P на $G^{(1)}$ дает искомое парасочетание графа G. Противоречие.