Аналоговая электроника

Электрические цепи переменного однофазного синусоидального тока.

Переменные величины

Переменной величиной является величина изменяющаяся во времени. Процессы являются периодическими, если мгновенные значения напряжений и токов повторяются через равные промежутки времени.

$$F(t) = F(t + T)$$

наименьший промежуток времени, через который эти величины повторяются, называются **периодом Т**. Величина, обратная периоду называется **частотой**:

$$f = \frac{1}{T},$$

Частный случай – синусоидальная величина.

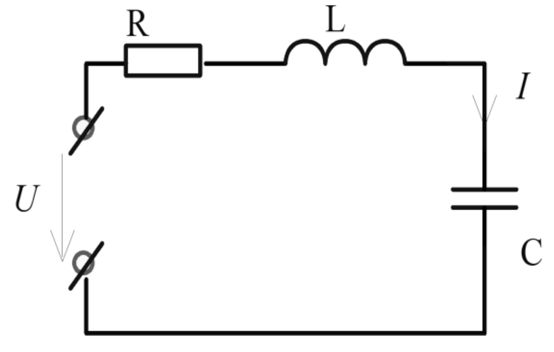
Синусоидальные величины тока и напряжения.

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_\mathrm{u}),$$
$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_\mathrm{i})$$

- $u(t), i(t)$ – мгновенные значения напряжений и токов,
- $U_m,\ \ I_m$ – амплитудные значения,
- $\omega = 2\pi f$ – угловая частота,
- $\omega t + \psi_\mathrm{u}$ и $\omega t + \psi_\mathrm{i}$ - фазы синусоид,
- $\psi_\mathrm{u}, \psi_\mathrm{i}$ – начальные фазы напряжения и тока.

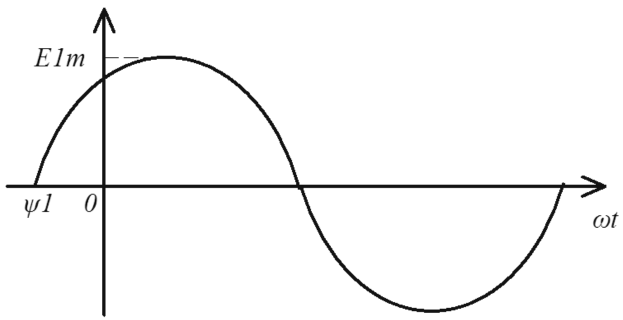
Уравнение описывающее работу цепи на переменном токе, составленное согласно второму правилу Кирхгофа будет иметь следующий общий вид:

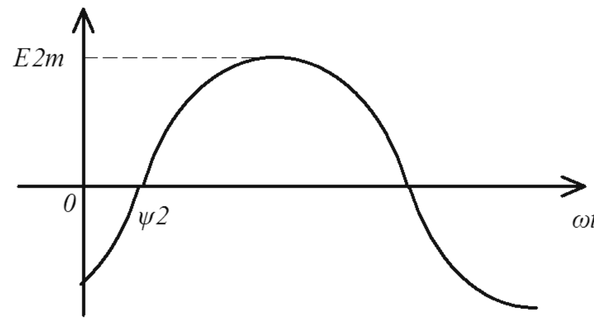
$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$



Тригонометрическая форма

$$e_1(t) = E_{1m} \cdot \sin(\omega t + \psi_1), \qquad e_2(t) = E_{2m} \cdot \sin(\omega t + \psi_2)$$





$\psi_1 > 0$ $\qquad$ $\psi_2 < 0.$

При совместном рассмотрении двух синусоидальных величин одной частоты разность их фазовых углов, равную разности начальных фаз, называют **углом сдвига фаз**.

$$(\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = \psi_1 - \psi_2.$$

Комплексное представление синусоидальных величин.

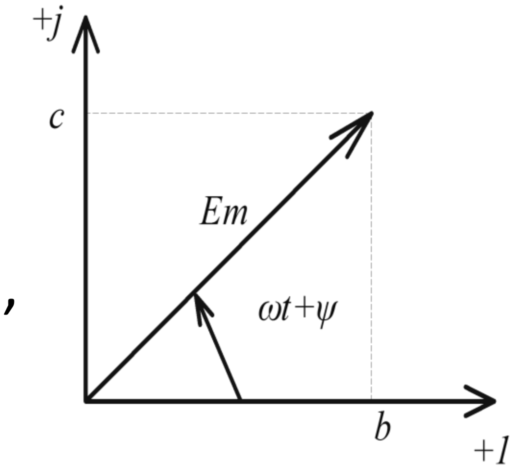
Каждое комплексное число может быть записано в трех разных формах:

показательной $\boldsymbol{\alpha e^{j\psi}}$,

тригонометрической $\boldsymbol{\alpha \cdot cos\psi + j\alpha \cdot sin\psi}$,

алгебраической $\boldsymbol{b + jc}$.

Здесь $\boldsymbol{\alpha = \sqrt{b^2 + c^2}}$, а $\boldsymbol{\psi = arctg\frac{c}{b}}$.



Графически синусоидальная величина может быть представлена вращающимся с частотой ω вектором, с начальной фазой ψ , и длиной вектора равной амплитуде синусоиды.

Следует обратить внимание, что в связи с тем что символ i в электротехнике «занят» током, мнимая единица обозначена как $\boldsymbol{j = \sqrt{-1}}$.

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e) = E_m e^{j(\omega t + \psi_e)} = E_m \cdot e^{j\psi_e} \cdot e^{j\omega t}$$

Обозначим $E_m e^{j\psi_e} = \dot{E_m}$, эта величина называется **комплексной амплитудой**.

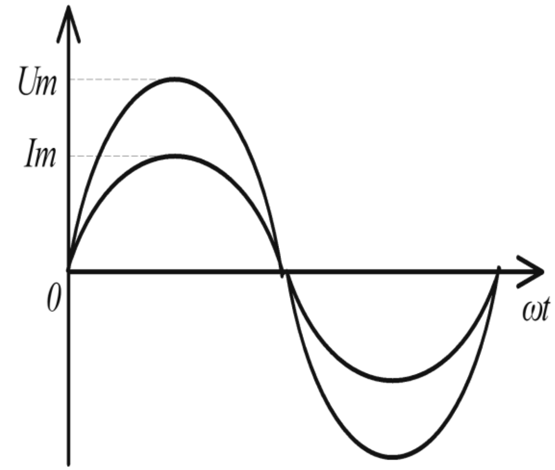
$$e(t) = \dot{E_m} \cdot e^{j\omega t}$$

Умножение вектора на оператор поворота $e^{\pm j\alpha}$ *есть его поворот относительно первоначального положения на угол* $\pm\,\alpha$ *соответственно.*

Параметр $e^{j\omega t}$является оператором поворота на угол ωt на комплексной плоскости относительно начального положения.

Элементы в цепях синусоидального тока. Резистор.

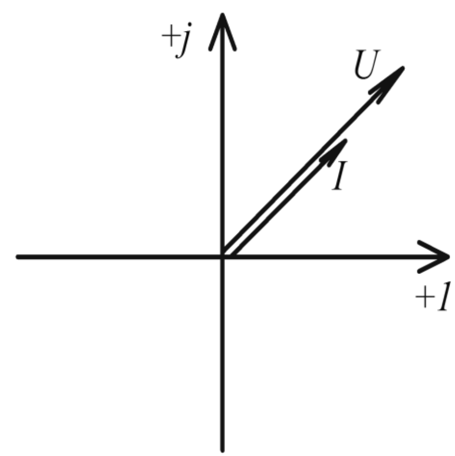
Закон Ома для мгновенных значений:



$$u_R(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi) =$$
$$I_m \cdot R \cdot \sin(\omega t + \psi) = R \cdot i(t),$$

Запись через комплексные амплитуды:

$$\dot{I} \cdot e^{j\omega t} \cdot R = \dot{U} \cdot e^{j\omega t},$$



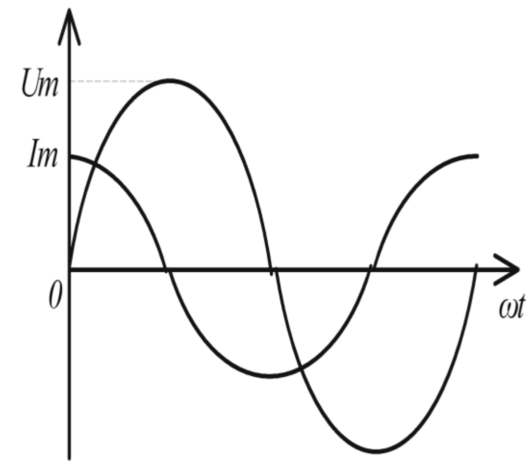
$$\dot{I} \cdot R = \dot{U}$$

закон Ома в символической форме.

Элементы в цепях синусоидального тока. Конденсатор.

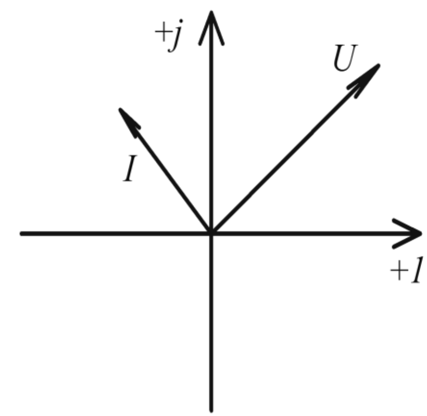
Ток в конденсаторе через приложенное к нему напряжение:

$$i_c = C\frac{du_c}{dt} = \omega C \cdot U_m \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \;,$$



Из полученного соотношения видно что фаза тока в конденсаторе «опережает» фазу напряжения на $\frac{\pi}{2}$. Если использовать экспоненциальную форму записи, то:

$$i_c = C\frac{du_c}{dt} = j\omega C \cdot U_m \cdot e^{j\omega t}$$

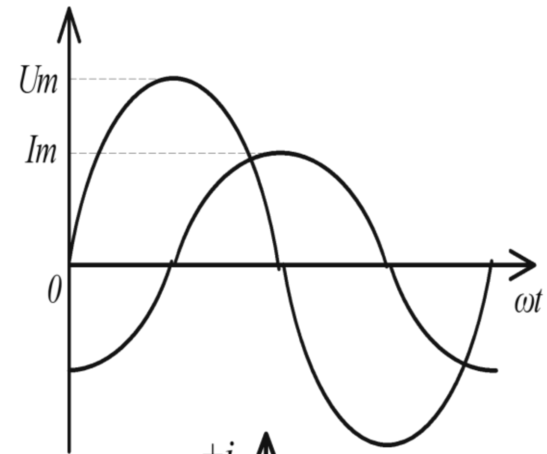


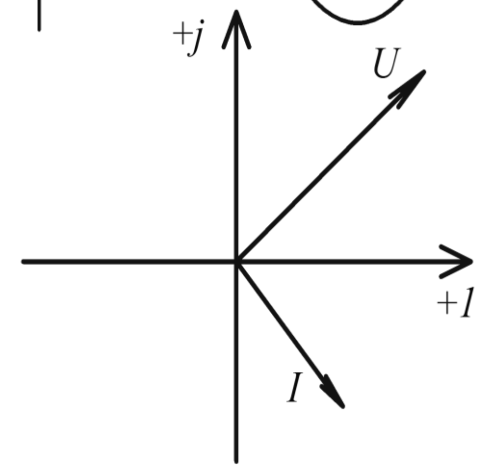
Элементы в цепях синусоидального тока. Катушка индуктивности.

Запишем напряжение на индуктивности через ток:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = \omega L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Фаза тока в индуктивности «отстает» от фазы напряжения на $\frac{\pi}{2}$.





В экспоненциальной форме:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = j\omega L \cdot I_m \cdot e^{j\omega t}$$

Сравнивая формулы связи токов и напряжений записанные в тригонометрической и экспоненциальной формах, можно заметить что, умножение на величину равную $\pm j$ *эквивалентно повороту вектора на* $\pm\frac{\pi}{2}$.

Реактивное сопротивление.

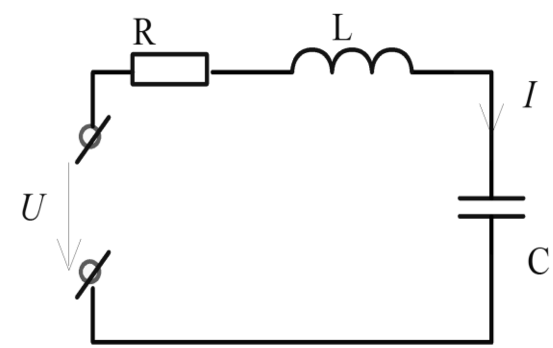
Введем следующие обозначения: $X_c = \frac{1}{\omega C}$ и $X_L = \omega L$

$$\dot{I} = j\frac{1}{X_C} \cdot \dot{U}\,, \qquad \dot{U} = jX_L \cdot \dot{I}$$

Величины X_L и X_c – называются индуктивное и емкостное реактивные сопротивления соответственно.

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot (R + j(X_L - X_C)),$$

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot Z$$



Z - импеданс цепи.

Импеданс и комплексная проводимость

Z - импеданс цепи (комплексное сопротивление), комплексная проводимость, величина обратная импедансу:

$$\boldsymbol{Y = \frac{1}{Z}}$$

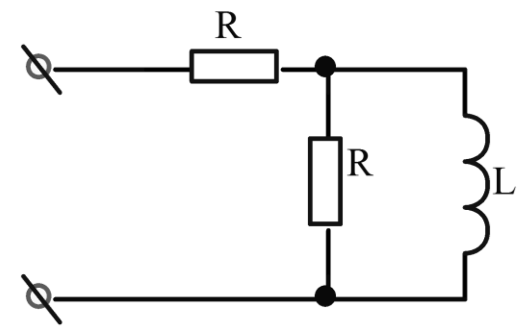
$$\boldsymbol{Z = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot e^{j\psi}}\ ,$$

$$\boldsymbol{Y = G + jB = \sqrt{G^2 + B^2} \cdot e^{j\psi}}\ ,$$

$$\boldsymbol{\psi = arctg\frac{X}{R} = arctg\frac{B}{G}}$$

Пример. Вычисление импеданса цепи.

Определим импеданс, проведя замену индуктивности на величину $j\omega L$ и используя соотношения для последовательного и параллельного соединения резисторов:



$$Z = R + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = R + \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega \frac{LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Из полученного соотношения видно, что цепь на рисунке эквивалентна последовательному соединению резистора и индуктивности -

$Z = R_э + j\omega L_э$, здесь

$$R_э = R + \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \qquad L_э = \frac{LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Анализ электрических цепей переменного однофазного синусоидального тока

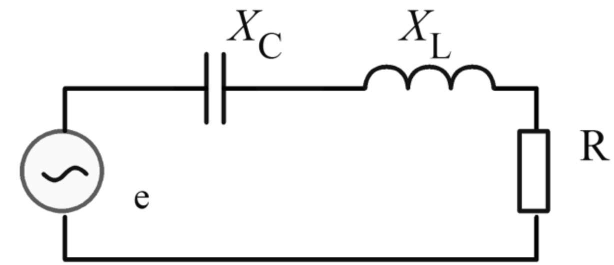
Метод анализа электрических цепей, с использованием понятий комплексных амплитуд и импедансов (или комплексных проводимостей) называется **символическим методом.**

Правила Кирхгофа, записанные в символической форме:

$$\sum \dot{I} = 0, \quad \sum \dot{\mathrm{E}} = \sum \dot{I} \cdot Z,$$

Пример.

Найти ток в цепи, построить векторную диаграмму.
$e(t) = 10 sin\omega t, R = 10\Omega, X_L = j15\Omega, X_C = -j5\Omega$.



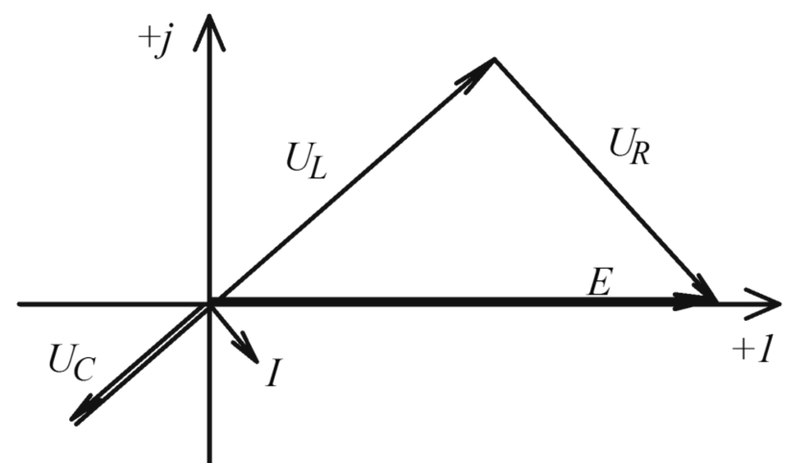
Согласно второму правилу Кирхгофа:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{10}{10+j10} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45°}$$

Векторы напряжений на элементах:

$$\dot{U}_C = X_C \dot{I} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j135°}, \dot{U}_L = X_L \dot{I} = \frac{15}{\sqrt{2}} e^{j45°}, \dot{U}_R = R\dot{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j45°}$$

Выполним построение векторов.



Мощность в цепях переменного синусоидального тока.

Мгновенная мощность

$$s(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{u}}) \ \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{i}})$$

Для резистора (начальный угол равен нулю) мгновенная мощность:

$$p(t) = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2\omega t = R \cdot I_m^2 \cdot \sin^2\omega t$$

Для вычисления средней мощности возьмем интеграл:

$$P(T) = \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot I_m^2 \cdot \sin^2\omega t dt = R \cdot I_m^2 \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1 - cos2\omega t}{2} dt = \frac{R \cdot I_m^2}{2}$$

Учитывая что, $i(t) = I_m \cdot \sin\omega t$, введем обозначение:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

Эту величину называют действующим (среднеквадратичным или эффективным) значением. С учетом этого, средняя мощность выделяющаяся в резисторе:

$$P_{\text{ср}} = R \cdot I_{rms}^2$$

Для индуктивности и конденсатора мгновенная мощность:

$$u(t) \cdot i(t) = U_m \cdot \cos \omega t \cdot I_m \cdot \sin \omega t = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

Интеграл по периоду от этого соотношения равен нулю, мощность называется реактивной, реактивный элемент половину периода накапливает энергию, а вторую половину отдает.

$$Q_L = ui = \omega L \frac{{I_m}^2}{2}, \qquad Q_C = ui = \omega C \frac{{U_m}^2}{2}$$

Для цепи содержащей *R* , *L* и *C*:

$$P(T) = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cdot \sin\omega t \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)\, dt = I_{rms} \cdot U_{rms} \cdot cos\varphi$$

$$Q(T) = I_{rms} \cdot U_{rms} \cdot sin\varphi$$

Полная мощность:

$$S(T) = I_{rms} \cdot U_{rms} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Комплексная мощность:

$$\overline{S} = \dot{U} \cdot e^{j\psi_U} \cdot \dot{I} \cdot e^{-j\psi_I} = \dot{U}\,\dot{I} \cdot e^{j\varphi}$$
$$= \dot{U}\,\dot{I} \cdot cos\varphi + j\dot{U} \cdot \dot{I} \cdot sin\varphi = P + jQ$$

$$P = Re(\overline{S})\,,\ Q = Im(\overline{S})\,, \qquad \overline{S} = I_{rms}^2(R + jX)$$

Баланс мощностей

Баланс соблюдается для всех типов мощности:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot cos\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot I_k^2$$

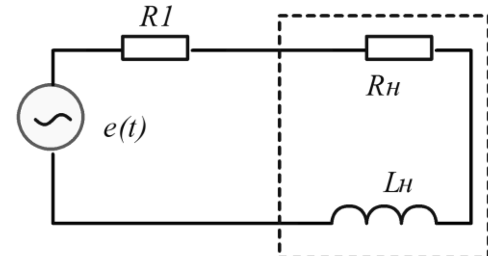
$$\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot I_k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot cos\varphi_k + j\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot I_k^2 + j\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot I_k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot e^{j\varphi_k} = \sum_{k=1}^{n} (R_k + jX_k) \cdot I_k^2 = \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot I_k^2$$

Пример.

Определить величину ЭДС (частота *50 Гц*) и КПД цепи, при cosφ=0.75, мощность в нагрузке 15 кВт, сопротивление линии $R_1 = 10\ \text{Ом}$, ток нагрузки $10A_{rms}$.



$$|Z_\text{н}| = \frac{S_\text{н}}{{I_{\text{н}rms}}^2} = \frac{P_\text{н}}{cos\varphi {I_{\text{н}rms}}^2} = 200\ \text{Ом}$$

$$Z_\text{н} = R_\text{н} + j\omega L_\text{н} = |Z_\text{н}|cos\varphi + j|Z_\text{н}|sin\varphi = 150 + j132$$

$$\dot{E} = (R_1 + R_\text{н} + j\omega L_\text{н}) I_{\text{н}rms}\sqrt{2} = 14{,}1(160 + j132) = 2927e^{j39{,}5°}$$

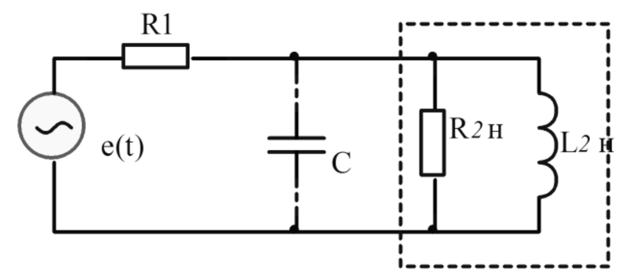
$$\eta = \frac{P_\text{н}}{P_\text{н} + P_1} = \frac{15000}{16000} = 0{,}9375$$

Пример. Корректор коэффициента мощности.

Для цепи из предыдущего примера определить величину корректирующей емкости (cosφ=1) и КПД получившейся цепи.

Представим нагрузку как параллельное соединение резистора и индуктивности. Тогда, используя понятие проводимости:

$$\frac{1}{Z_{\text{н}}} = \frac{1}{R_{2\text{н}}} + j\,\frac{1}{X_{2\text{н}}} = \frac{cos\varphi}{|Z_{\text{н}}|} + j\,\frac{sin\varphi}{|Z_{\text{н}}|}$$



Для компенсации сопротивление в цепи должно быть активным:

$$X_C = X_L = \frac{|Z_{\text{н}}|}{sin\varphi} \;\; => \text{C} = \frac{sin\varphi}{\omega|Z_{\text{н}}|} = 10{,}5\;\mu F\;, \qquad R_{2\text{н}} = \frac{|Z_{\text{н}}|}{cos\varphi} = 267\;\text{Ом}$$

$$\eta = \frac{R_{2\text{н}}}{R_{2\text{н}} + R_1} = \frac{267}{277} = 0{,}9634$$

Цепи с индуктивно связанными элементами.

Если изменение тока в одном из элементов цепи приводит к появлению ЭДС в другом элементе цепи, то эти два элемента индуктивно связаны друг с другом. Возникающая ЭДС называется ЭДС взаимной индукции.

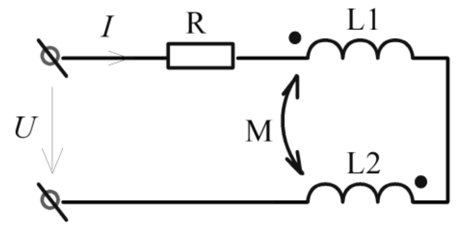
$$k_{\text{св}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

где M – взаимная индуктивность элементов цепи, а L_1 и L_2 - собственные индуктивности этих элементов.

$$e_M = -M\frac{di}{dt}$$

На эффекте взаимоиндукции основан принцип работы трансформатора.

Цепи с индуктивно связанными элементами.



ЭДС самоиндукции в катушках:

$$e_1 = -L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} = -(\omega L_1 + \omega M)\, I_m \cdot \cos\omega t$$

$$e_2 = -L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} = -(\omega L_2 + \omega M)\, I_m \cdot \cos\omega t$$

В символическом виде:

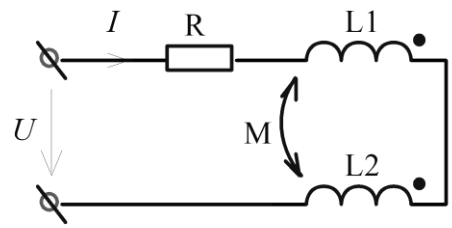
$$\dot{E}_1 = -j\omega L_1\dot{I} - j\omega M\dot{I} \qquad \dot{E}_2 = -j\omega L_2\dot{I} - j\omega M\dot{I}$$

По второму правилу Кирхгофа:

$$\dot{U} + \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{U} - j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} = \dot{I}R$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)}$$

Цепи с индуктивно связанными элементами.



ЭДС самоиндукции в катушках:

$$e_1 = -L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = -(\omega L_1 - \omega M)\, I_m \cdot \cos\omega t$$

$$e_2 = -L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = -(\omega L_2 - \omega M)\, I_m \cdot \cos\omega t$$

В символическом виде:

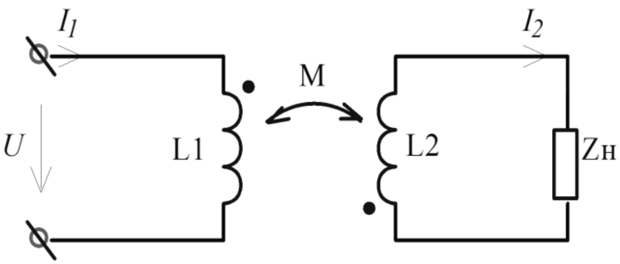
$$\dot{E}_1 = -j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} \qquad \dot{E}_2 = -j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I}$$

По второму правилу Кирхгофа:

$$\dot{U} + \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{U} - j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I} = \dot{I}R$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}$$

Воздушный трансформатор.



$$\dot{I}_1 j\omega L_1 + \dot{I}_2 j\omega M = \dot{U}$$

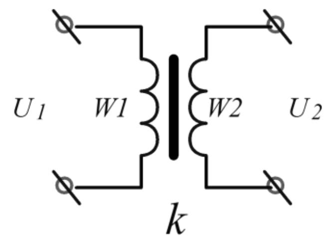
$$\dot{I}_1 j\omega M + \dot{I}_2 (j\omega L_2 + Z_\text{н}) = 0$$

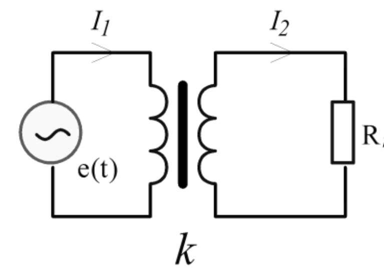
$$Z_\text{н} = R_\text{н} + jX_\text{н}$$

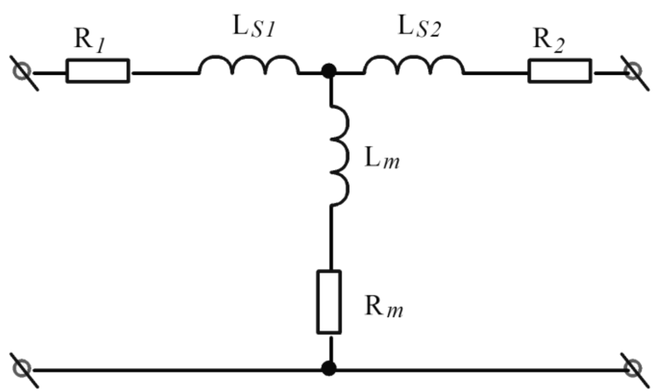
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{j\omega L_1 + \dfrac{(R_\text{н} - j(\omega L_2 + X_\text{н}))\omega^2 M^2}{R_\text{н}^2 + (\omega L_2 + X_\text{н})^2}}$$

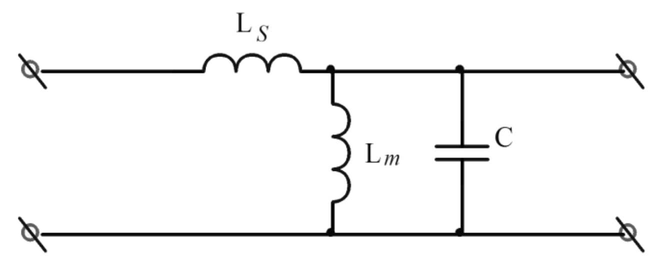
Трансформатор. Модели трансформатора.

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{W_2}{W_1}$$









Пример. Идеальная модель трансформатора

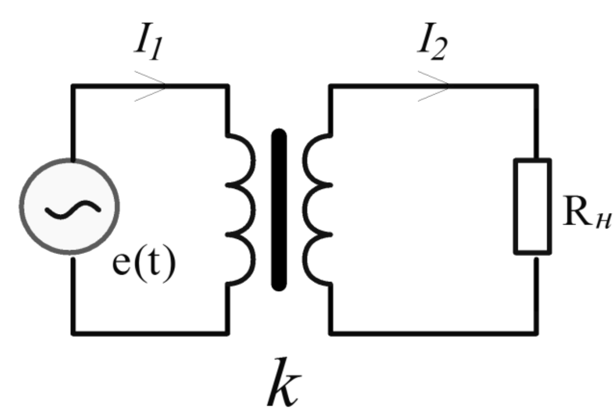
Определить величину вносимого сопротивления и коэффициент передачи по току, при известном коэффициенте трансформации. Трансформатор считать идеальным.

Из условия баланса мощности и определения коэффициента трансформации:

$$E \cdot I_1 = I_2^2 \cdot R_\text{н} \ , \qquad k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2 \cdot R_\text{н}}{E}$$

Подставив, получим $I_1 = k \cdot I_2$ условие для тока, и

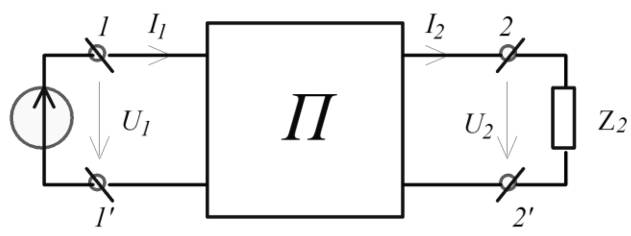
$$R_\text{внос.} = \frac{E}{I_1} = \frac{R_\text{н}}{k^2}$$



Комплексный коэффициент передачи и сопротивления четырехполюсников.

Нагрузка, коэффициент передачи, входное и характеристическое сопротивления четырехполюсника.

$$Z_{\text{н}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \qquad K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \qquad K_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \qquad Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$$



Амплитудно и фазо-частотные характеристики

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ - $H(\omega)$) – зависимость модуля коэффициента передачи четырехполюсника от частоты. Функция $\varphi(\omega)$ - зависимость фазы - **фазо-частотная характеристика** (ФЧХ).

Для наглядности характеристики используют в логарифмическом виде ЛАЧХ и ЛФЧХ. Для характеристик частота изображается в логарифмическом масштабе ($\lg\omega$) , фаза в линейном масштабе (в градусах), а модуль коэффициента передачи (единица измерения - децибел), показывается как :

$$20\lg\bigl(H(\omega)\bigr)$$

Бел - логарифм отношения энергетических величин: $\lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$, децибел *1дБ=0,1Б*.

Для децибела $10\lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$. Для напряжения (или тока): $10\lg\left(\frac{{U_1}^2}{{U_2}^2}\right) = 20\lg\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$

Электрические фильтры

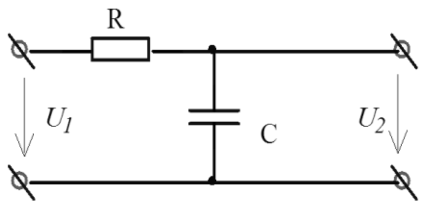
Электрический фильтр – это четырехполюсник, устанавливаемый между источником энергии или информационного сигнала и приемником (нагрузкой), предназначенный для беспрепятственного, или с малым затуханием, пропускания токов или сигналов одних частот и задержки или пропускания с большим затуханием токов или сигналов других частот.

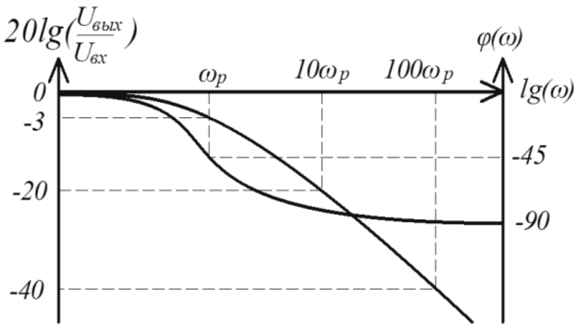
Типы фильтров

- - фильтр нижних частот, полоса пропускания $0 \leq \omega \leq \omega_{\mathrm{C}}$,
- - фильтр верхних частот, полоса пропускания $\omega_{\mathrm{C}} \leq \omega \leq \infty$,
- - полосовой фильтр, полоса пропускания $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, где $\omega_1 < \omega_2$,
- - режекторный фильтр, полоса пропускания $0 \leq \omega \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \omega \leq \infty$, где $\omega_1 < \omega_2$

Частоты, ограничивающие область прозрачности называются **частотами среза**. Фильтр активный, если в полосе пропускания коэффициент передачи больше 1.

Пример. RC фильтр.





$$K = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot e^{-jarctg(\omega RC)}$$

$\omega = 0$	$20\lg\lvert K\rvert = 0$ дБ	$\varphi = 0°$
$\omega = \mathbf{1/10}RC$	$20\lg\lvert K\rvert \approx -0{,}05$ дБ	$\varphi = -5{,}7°$
$\omega = 1/RC$	$20\lg\lvert K\rvert = -3{,}01$ дБ	$\varphi = -45°$
$\omega = 10/RC$	$20\lg\lvert K\rvert = -20{,}04$ дБ	$\varphi = -84{,}3°$
$\omega = 100/RC$	$20\lg\lvert K\rvert = -40{,}0004$ дБ	$\varphi = -89{,}4°$