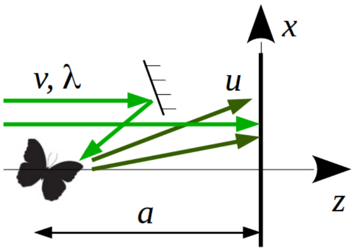
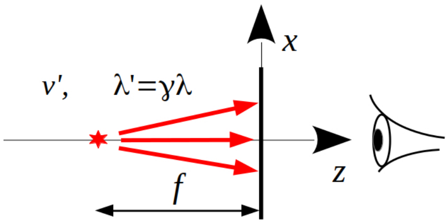
Задача



Экспонирование голограммы осуществляется плоским пучком с длиной волны λ, а восстановление – точечным источником с длиной волны $\lambda' = \gamma\lambda$. Предмет расположен на расстоянии a от голограммы. Источник восстанавливающего пучка v' находится в точке $(x_0', z_0') = (0, -f)$. Определить положение и размеры действительного изображения.



Решение:

Рассмотрим случай горизонтального опорного пучка v. Тогда

$$v(z,t) = Be^{i(kz-\omega t)}, \qquad v'(z,t) = B' \exp i\left(k'\frac{x^2}{2(z-z_0')} + k'z - \omega' t\right).$$

Рассмотрим точку предмета с координатами $(x_u, -a)$. Предметная волна от точечного источника во всем пространстве с точностью до постоянной фазы:

$$u(x,z,t) = A\exp i\left(k\frac{(x-x_u)^2}{2(z+a)} + kz - \omega t\right),$$

а в плоскости голограммы:

$$u(x,0,t) = A\exp i\left(k\frac{(x-x_u)^2}{2a} - \omega t\right).$$

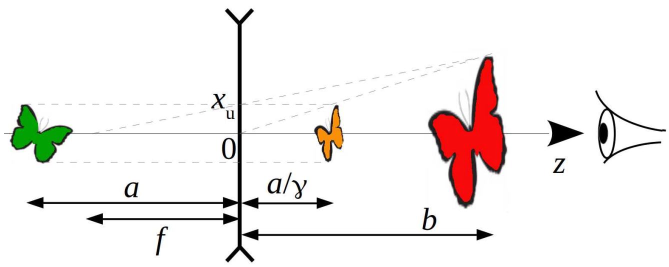
Часть $E_1 = u^* v v'$ волны при восстановлении, сразу за голограммой (при $z = +0$), равна:

$$E_1(x,0,t) = u^*(x)v(x)v'(x,t) = ABB'\exp i\left(-k\frac{(x-x_u)^2}{2a} + k'\frac{x^2}{2f} - \omega' t\right).$$

Представим фазу полученной волны в виде

$$-k'\frac{\gamma(x-x_u)^2}{2a} + k'\frac{x^2}{2f} - ck't = k'\left(-\frac{\gamma(x-x_u)^2}{2a} + \frac{x^2}{2f} - ct\right).$$

Слагаемое $k'\left(-\frac{\gamma(x-x_u)^2}{2a} - ct\right)$ – это фаза, которую в плоскости $z = 0$ имеет пучок лучей, идущих слева направо и сходящихся в точке $(x,z) = (x_u, +a/\gamma)$. При $z > 0$ та же фаза записывается как $k'z + k'\frac{(x-x_u)^2}{2(z-a/\gamma)} - \omega' t$. Слагаемое $k'\frac{x^2}{2f}$ характеризует изменение хода этих лучей при прохождении рассеивающей линзы с фокусным расстоянием f, установленной в плоскости $z = 0$.



Тогда понятно, что ход лучей от линзы при $z > 0$ такой же, как при формальном построении изображения предмета. Положение b изображения подчиняется формуле тонкой линзы *:

$$-\frac{\gamma}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad b = \frac{af}{\gamma f - a}.$$

*По умолчанию предмет находится слева от линзы на расстоянии d_1, изображение справа на расстоянии d_2, линза собирающая с фокусным расстоянием $\tilde{f}$, Тогда уравнение линзы:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{\tilde{f}}.$$

В нашем случае предмет справа ($d_1 = -\frac{a}{\gamma}$), линза рассеивающая ($\tilde{f} = -f$):

$$-\frac{\gamma}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \rightarrow b = \frac{af}{\gamma f - a},$$

где при $b > 0$ изображение располагается справа.

Если $\gamma f > a$, то $b > 0$ и это изображение является действительным псевдоскопическим, так как в нем сосредоточено фактическое поле, от которого исходят лучи в глаз наблюдателя.

Параметры изображения можно получить также, переписав выражение для фазы волны:

$$k'\left(-\frac{\gamma(x-x_u)^2}{2a}+\frac{x^2}{2f}-ct\right)=k'\left(-\frac{(x-\varkappa x_u)^2}{2b}-ct+\text{const}\right),$$

где $b=\frac{af}{\gamma f-a}$, а $\varkappa=\gamma\frac{b}{a}=\frac{\gamma}{\gamma-\frac{a}{f}}$.

При $z>0$ поле, удовлетворяющее волновому уравнению и краевому условию, равно

$$E_1(x,z,t)=ABB'\exp ik'\left(\frac{(x-\varkappa x_u)^2}{2(z-b)}+z-ct+\text{const}\right).$$

Эта фаза описывает сферическую волну с источником в точке $(x_u',z_u')=(\varkappa x_u,+b)$, распространяющуюся вправо от голограммы.

Координаты $(x_u,-a)$ относятся к некоторой точке предмета. Изображение любой другой точки предмета определяется по тем же правилам. Тогда нетрудно понять, что размер действительного изображения по x умножается на коэффициент $\varkappa$, а по z уменьшается в $(\gamma-a/f)$ раз.

Примечание. Во многих учебных материалах по голографии (см., например, на стр. 8 в предисловии к книге М. Франсона “Голография” М.: Мир, 1972) ошибочно утверждается, что увеличение составляет $\frac{\lambda'}{\lambda}$. Решение данной задачи показывает, что увеличение $\varkappa$ достигается не столько за счет увеличения длины волны λ', сколько выбором подходящего положения f точечного источника восстанавливающего пучка. В частности, в случае плоского восстанавливающего пучка ($f\to\infty$) увеличение $\varkappa$ равно 1 независимо от величины $\frac{\lambda'}{\lambda}$ (что, кстати, отмечено в той же книге Франсона на стр. 130).