СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
Лекция 12 Кинетическое уравнение Больцмана.

Образовский Е. Г.

7 декабря 2022 г.

План лекции:

План лекции:

- **Кинетическое уравнение Больцмана.**

План лекции:

- **Кинетическое уравнение Больцмана.**
- **H-теорема**

План лекции:

- **Кинетическое уравнение Больцмана.**
- **H-теорема**
- **Уравнения гидродинамики**

План лекции:

- **Кинетическое уравнение Больцмана.**
- **H-теорема**
- **Уравнения гидродинамики**
- **Приложение: динамический вывод Боголюбова**

Кинетическое уравнение Больцмана.

Кинетика описывает процессы, происходящие в неравновесных системах. В основном мы ограничимся кинетикой классических систем.
Многие неравновесные свойства определяются одночастичной функцией распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Как правило используется нормировка

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p = n(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

где $n(\mathbf{r}, t)$ – плотность числа частиц.

Кинетическое уравнение Больцмана.

Если можно пренебречь столкновениями, то отдельная частица представляет собой замкнутую систему, для которой выполняется теорема Лиувилля

$$\frac{df(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{dt} = 0, \qquad (2)$$

то есть функция распределения остается постоянной вдоль фазовой траектории. Расписывая полную производную по времени, получим

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{p}} = 0, \qquad (3)$$

где $\mathbf{F} = -\partial U(\mathbf{r})/\partial\mathbf{r}$ – сила, создаваемая внешним полем U. Это бесстолкновительное уравнение Больцмана.

Кинетическое уравнение Больцмана.

При необходимости учитывать столкновения, уравнение Больцмана имеет вид:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{p}} = \mathcal{I}[f]. \qquad (4)$$

Правая часть называется интегралом столкновений и является функционалом от функций распределения (вообще говоря многочастичных). Если предположить отсутствие корреляций между частицами, то для разреженного газа интеграл столкновений можно представить в виде

$$\mathcal{I}[f] = -\int\int\int w(\mathbf{p},\mathbf{p}_1;\mathbf{p}',\mathbf{p}_1')f(\mathbf{p})f(\mathbf{p}_1)d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}' d\mathbf{p}_1' +$$

$$+\int\int\int w(\mathbf{p}',\mathbf{p}_1';\mathbf{p}_1,\mathbf{p})f(\mathbf{p}')f(\mathbf{p}_1')d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}' d\mathbf{p}_1'. \qquad (5)$$

Кинетическое уравнение Больцмана.

Здесь $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1)$ – вероятность рассеяния в единицу времени частицы с импульсом $\mathbf{p}$ на частице с импульсом $\mathbf{p}_1$, в результате чего их импульсы становятся равными $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}'_1$. Первый член описывает уменьшение величины $f(\mathbf{p})$ – "уход". Во втором члене величина $w(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}_1, \mathbf{p})$ – вероятность рассеяния в единицу времени, в результате которого появляются частицы с импульсом $\mathbf{p}$ – " приход".

Кинетическое уравнение Больцмана.

Принимаем далее, что происходят только упругие столкновения. Входящие в интеграл столкновений вероятности могут быть выражены через сечение рассеяния:

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 \to \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) \propto$$

$$\propto \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) v_{\text{отн}}\, \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1)\, \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}') - \varepsilon(\mathbf{p}'_1)) \tag{6}$$

Кинетическое уравнение Больцмана.

Здесь $v_{\text{отн}} = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}|/m$ — относительная скорость частиц. Интегрирование δ-функций превращает интегрирование по $d^3p' d^3p'_1$ в интегрирование по углам, определяющим направление рассеянных частиц, телесный угол отвечает направлению $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. (В таком виде уравнение и было написано Больцманом.) Однако нам удобнее сохранить симметричную форму записи. Заметим, что столкновения частиц представлены в кинетическом уравнении только сечением, сам же процесс столкновения может описываться квантовой механикой.

Кинетическое уравнение Больцмана.

Для равновесной функции распределения f_0 интеграл столкновений должен обратиться в ноль. Отсюда можно найти вид равновесной функции распределения. В однородном случае $f_0 = f(p^2) = f(\epsilon)$. Из условия

$$f(\epsilon)f(\epsilon_1) = f(\epsilon_2)f(\epsilon_3), \tag{7}$$

полагая $\epsilon_2 = 0$ и дифференцируя по ϵ_1, получим

$$f(\epsilon)\frac{\partial f(\epsilon_1)}{\partial \epsilon_1} = f(0)\frac{\partial f(\epsilon + \epsilon_1)}{\partial \epsilon_1} = f(0)\frac{\partial f(\epsilon + \epsilon_1)}{\partial \epsilon}, \tag{8}$$

Устремляя $\epsilon_1 \to 0$, имеем

$$\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{1}{f(0)} \frac{\partial f(\epsilon_1)}{\partial \epsilon_1}\Big|_{\epsilon_1 \to 0} f(\epsilon) \equiv -\alpha f(\epsilon), \qquad (9)$$

где

$$-\alpha = \frac{1}{f(0)} \frac{\partial f(\epsilon_1)}{\partial \epsilon_1}\Big|_{\epsilon_1 \to 0}. \qquad (10)$$

Отсюда получаем вид равновесной функции распределения

$$f(\epsilon) \sim e^{-\alpha\epsilon}. \qquad (11)$$

Кинетическое уравнение Больцмана.

H-теорема Больцмана

Движение газа, удовлетворяющее кинетическому уравнению, приводит к возрастанию энтропии. Это утверждение традиционно называют H-теоремой Больцмана.[1]

Теорема.

Энтропия газа

$$S = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \ln \frac{e}{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)} d^3 r d^3 p \tag{12}$$

не убывает со временем.

[1] Он рассматривал функцию $H = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \ln f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 r d^3 p$, которая отличается от энтропии знаком и на константу

Кинетическое уравнение Больцмана.

Формула для энтропии больцмановского газа получается так. Разобъем уровни энергии на близкие группы, число уровней в группе i обозначим G_i, число частиц, попавших в эту группу - N_i. Для больцмановского газа $N_i \ll G_i$. Число способов реализации такого распределения есть

$$\Gamma_i = \frac{G_i!}{N_i!(G_i - N_i)!} \approx \frac{G_i^{N_i}}{N_i!} \approx \left(\frac{G_i e}{N_i}\right)^{N_i} . \qquad (13)$$

Энтропия

$$S = \prod_i \ln \Gamma_i = \sum_i N_i \ln \left(\frac{G_i e}{N_i}\right) = \sum_p f(p) \ln \left(\frac{e}{f(p)}\right) , \qquad (14)$$

где $f(p) \approx N_i / G_i$, считая в i-ой группе импульс p постоянным.

Доказательство
Составим производную функции S :

$$\frac{dS}{dt} = -\int \frac{\partial f}{\partial t} \ln f \; d^3 r d^3 p \tag{15}$$

и подставим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{I} - \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \tag{16}$$

из кинетического уравнения.

Учтем при этом, что $\int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d^3 r = 0$ т. к. он сводится к интегралу по бесконечно удаленной поверхности в координатном пространстве, где функция распределения обращается в нуль. Аналогично $\int \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} d^3 p = 0$, т. к. он сводится к интегралу по бесконечно удаленной поверхности в пространстве импульсов, где функция распределения обращается в нуль;
$\int \mathcal{I}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p = 0$ (смысл последнего равенства в том, что число частиц при столкновении сохраняется).

$$\frac{dS}{dt} = -\int \mathcal{I} \ln f \, d^3 r d^3 p. \tag{17}$$

$$\frac{dS}{dt} = \int d^3 r d^3 p d^3 p_1 d^3 p' d^3 p_1' \cdot w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 \to \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1)(f f_1 - f' f_1') \ln f \tag{18}$$

Кинетическое уравнение Больцмана.

Заметим, что если поменять конечные и начальные частицы ролями, то должны получить ту же вероятность[2] :

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 \to \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) = w(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1 \to \mathbf{p}, \mathbf{p}_1). \tag{19}$$

Заметим также, что вероятность не изменится, если поменять частицы местами: $\mathbf{p} \rightleftarrows \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}' \rightleftarrows \mathbf{p}'_1$. Это означает просто перемену обозначений частиц. Если же сделать такую замену переменных в интеграле, то изменение подынтегральной функции сведется к замене под знаком логарифма $\ln f \to \ln f_1$.

[2] Сечение, входящее в выражение w, при заданной величине относительной скорости зависит только от угла рассеяния — угла между векторами $\mathbf{p} - \mathbf{p_1}$ и $\mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1$.

После замены (в исходном интеграле) $\mathbf{p} \rightleftarrows \mathbf{p}'$, $\mathbf{p_1} \rightleftarrows \mathbf{p}_1'$ нужно будет поставить под знак логарифма f' вместо f и изменить знак подынтегрального выражения.
Наконец, замена (в исходном интеграле) $\mathbf{p} \rightleftarrows \mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p_1} \rightleftarrows \mathbf{p}'$ приведет к замене f под знаком логарифма на f_1' и изменению знака подынтегрального выражения.
Таким образом, подынтегральное выражение можно представить четырьмя различными способами. Сложив и разделив на четыре, получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{4}\int w \ln \frac{ff_1}{f'f_1'}(ff_1 - f'f_1')d^3rd^3pd^3p_1d^3p'd^3p_1' \geqslant 0, \quad (20)$$

так как $(x-y)\ln(x/y) \geqslant 0$.

Кинетическое уравнение Больцмана.

Итак, $\dfrac{dS}{dt} \geqslant 0$. Для распределения Максвелла $ff_1 - f'f_1' = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, уравнение Больцмана описывает необратимые процессы. Между тем, оно было получено из уравнений механики, обратимых по времени. Конечно, причина появления необратимости в использовании понятия вероятности рассеяния, подразумевающей молекулярный хаос.

Уравнения гидродинамики

Из кинетического уравнения можно получить уравнения гидродинамики, описывающие движение газа более грубо, без явного учета отличия скоростей молекул газа в каждой точке пространства от некоторой средней скорости.
Проинтегрируем обе части кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \mathcal{I}, \tag{21}$$

по d^3p. Учтем при этом, что $\int \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} d^3p = 0$, т. к. он сводится к интегралу по бесконечно удаленной поверхности в пространстве импульсов, где функция распределения обращается в нуль; $\int \mathcal{I}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p = 0$ (смысл последнего равенства в том, что число частиц при столкновении сохраняется).

Кинетическое уравнение Больцмана.

В итоге получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \tag{22}$$

а после умножения на массу частицы —

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{V} = 0, \tag{23}$$

уравнение непрерывности.

Если умножить обе части кинетического уравнения на компоненту импульса p_α, проинтегрировать по d^3p и учесть, что $\int \mathbf{p}\mathcal{I}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)d^3p = 0$, [3] то получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho V_\alpha + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{24}$$

---

[3] Чтобы доказать это, надо проделать такие же замены переменных, какие были проделаны при доказательстве H - теоремы и учесть, что при каждом столкновении сохраняется суммарный импульс сталкивающихся частиц.

Здесь

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int p_\alpha v_\beta f d^3 p \qquad (25)$$

— тензор плотности потока импульса. Пусть средняя скорость газа равна нулю. Представим себе находящуюся в газе единичную площадку, перпендикулярную оси x_β. Тогда величину $\Pi_{\alpha\beta}$ можно понимать как α-ую компоненту силы, с которой газ, находящийся с одной стороны этой площадки, действует на нее. Если распределение по скоростям изотропно, то $\Pi_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta}$, где P — давление газа. Если же средняя скорость $\mathbf{V}$ отлична от нуля, $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$, но изменяется в пространстве очень плавно, то в системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{V}$, распределение по скоростям $\mathbf{v}'$ можно считать равновесным, в частности, изотропным.

Кинетическое уравнение Больцмана.

Тогда $\Pi_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} + \rho V_\alpha V_\beta$, и уравнение (24) сводится к уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}})\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, P. \tag{26}$$

Если характерное расстояние L, на котором средняя скорость заметно изменяется, не очень велико по сравнению с длиной свободного пробега l, то распределение по скоростям $\mathbf{v}'$ оказывается анизотропным (т.к. в избранную нами точку попадают частицы из других точек, где средняя скорость иная). В случае, когда все-таки $L \gg l$, в тензор потока импульса добавляются вклады, пропорциональные $\dfrac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}$ и $\dfrac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}$, определяющие вязкость газа. С учетом этих вкладов из уравнения (24) можно получить уравнение Навье – Стокса.

Кинетическое уравнение Больцмана.

Если же $L \sim l$, то переход к уравнениям гидродинамики невозможен. Например, для изучения строения фронта сильной ударной волны необходимо использовать не уравнения газовой динамики, а кинетическое уравнение.
В процессах, происходящих в плазме, обычно существенны электромагнитные волны, с длиной волны меньшей длины свободного пробега. Поэтому для большинства задач теории плазмы удобно использовать кинетическое уравнение, а гидродинамическое приближение — не достаточно.

Кинетическое уравнение Больцмана.

Из-за сложности устройства интеграла столкновений часто используют грубое приближение вида

$$\mathcal{I}[f] = -\frac{f - f_0}{\tau}, \tag{27}$$

называемое τ-приближение. Учтено, что интеграл столкновений обращается в ноль для равновесной функции распределения f_0. Величина τ имеет смысл времени свобоного пробега частиц в среде.

Приложение: Динамический вывод Боголюбова

Для разреженного газа малый параметр $(d/\bar{r})^3 \ll 1$, d – радиус действия атомных сил, $\bar{r}$ – расстояние между атомами.

N-частичная функция распределения $f^{(N)}(t, \Gamma_1, ..., \Gamma_N)$ с нормировкой

$$\int f^{(N)}(t, \Gamma_1, ..., \Gamma_N) d\Gamma_1 ... d\Gamma_N = 1, \quad d\Gamma_a = d^3 r_a d^3 p_a. \tag{28}$$

Одночастичная функция распределения

$$f^{(1)} = \int f^{(N)}(t, \Gamma_1, ..., \Gamma_N) d\Gamma_2 ... d\Gamma_N. \tag{29}$$

Теорема Лиувилля

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{a=1}^{N} \left[\dot{\mathbf{r}}_a \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_a} + \dot{\mathbf{p}}_a \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_a} \right] = 0 \qquad (30)$$

с гамильтонианом парного взаимодействия

$$H = \sum_{a=1}^{N} \frac{p_a^2}{2m} + \sum_{a=1}^{N} \sum_{b<a} U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|) \qquad (31)$$

принимает вид

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{a=1}^{N} \left[\mathbf{v}_a \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_a} - \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_a} \sum_{b<a} \frac{\partial U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)}{\partial \mathbf{r}_a} \right] = 0. \qquad (32)$$

Проинтегрируем по $d\Gamma_2 ... d\Gamma_N$. Получим

$$\frac{\partial f^{(1)}(t,\Gamma_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f^{(1)}(t,\Gamma_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = N \int \frac{\partial f^{(2)}(t,\Gamma_1,\Gamma_2)}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1} d\Gamma_2. \tag{33}$$

Интегралы, которые не содержат дифференцирование по $\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1$ сводятся к поверхностным и зануляются. Двухчастичная функция

$$f^{(2)}(t,\Gamma_1,\Gamma_2) = \int f^{(N)} d\Gamma_3 ... d\Gamma_N \tag{34}$$

Кинетическое уравнение Больцмана.

Проинтегрируем по $d\Gamma_3 ... d\Gamma_N$. Имеем

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_2} =$$

$$= N \int \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|)}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|)}{\partial \mathbf{r}_2} d\Gamma_3. \qquad (35)$$

Получается цепочка зацепляющихся уравнений.
Оценка правой части

$$N \int \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|)}{\partial \mathbf{r}_1} d\Gamma_3 \sim \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{d^3}{\bar{r}^3} \qquad (36)$$

и правой частью можно пренебречь. Тогда

$$\frac{df^{(2)}}{dt} = 0. \qquad (37)$$

Кинетическое уравнение Больцмана.

Принцип ослабления корреляций

$$f^{(2)}(t, \Gamma_1, \Gamma_2) = f^{(1)}(t, \Gamma_1) f^{(1)}(t, \Gamma_2). \tag{38}$$

Тогда для $f = N f^{(1)}$ имеем

$$\frac{\partial f(t, \Gamma_1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f(t, \Gamma_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = \int \frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} [f(\Gamma_1) f(\Gamma_2)] \, d\Gamma_2. \tag{39}$$

Кинетическое уравнение Больцмана.

Из

$$\mathbf{v}_1 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_2} = 0 \tag{40}$$

получим

$$\frac{\partial U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} [f(\Gamma_1) f(\Gamma_2)] = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [f(\Gamma_1) f(\Gamma_2)] \tag{41}$$

Член с производной по $\mathbf{p}_2$ обращается в ноль при интегрировании по частям.

Кинетическое уравнение Больцмана.

Интеграл столкновений принимает вид

$$\mathcal{I} = \int \mathbf{v}_{rel} \frac{\partial (f(\Gamma_1) f(\Gamma_2))}{\partial \mathbf{r}} d^3 p_2 d^3 r, \qquad (42)$$

где $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Цилиндрическая система координат с осью z вдоль $\mathbf{v}_{rel}$.

$$\mathcal{I} = \int v_{rel} \rho d\rho d\phi d^3 p_2 f(\Gamma_1) f(\Gamma_2) \Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} \qquad (43)$$

При $z \to -\infty$ величины $f(\Gamma_1) \to f(\mathbf{p})$, $f(\Gamma_2) \to f(\mathbf{p}_1)$; при $z \to +\infty$ величины $f(\Gamma_1) \to f(\mathbf{p}')$, $f(\Gamma_2) \to f(\mathbf{p}_1')$. В итоге

$$\mathcal{I} = \int v_{rel} d\sigma (f' f_1' - f f_1) d^3 p_2 \qquad (44)$$