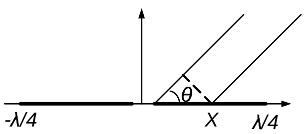
5. ИЗЛУЧЕНИЕ

Урок 19

Оценки мультипольного излучения. Антенны

5.1. (Задача 4.37.) Найти сопротивление излучения симметричного полуволнового вибратора.

Решение Рассмотрим излучатель как набор диполей, каждый из которых излучает со своей амплитудой и фазой и будем учитывать, что излучение от каждого элемента антены будет достигать конечной точки за разное время, т.е. с разными фазами. Дипольный точечный излучатель длины $\mathrm{d}x$ с указанным током создает векторный потенциал в точке r_p



$$dA(r_p,t)=\frac{\mathbf{e}_x}{cr_p}e^{-i\omega(t-r_p/c)-i\varphi(x)}I_0\cos kx\mathrm{d}x,$$

где фаза (см. рис.)

$$\varphi(x)=kx\cos\theta.$$

Тогда векторный потенциал дипольного излучения

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_p,t)=\mathbf{e}_x\frac{I_0}{cr_p}e^{-i\omega(t-r_p/c)}\int\limits_{-\lambda/4}^{\lambda/4}e^{-ikx\cos\theta}\cos kx\mathrm{d}x.$$

Для вычисления интеграла введем переменную $\xi=kx$. Тогда интеграл

$$I_{nt}=\frac{1}{2k}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-i\xi\cos\theta}\left(e^{i\xi}+e^{-i\xi}\right)d\xi=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta},$$

а векторный потенциал

$$\mathbf{A}=\mathbf{e}_x\frac{2I_0}{ckr_p}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}e^{-i\omega\left(t-\frac{r_p}{c}\right)}.$$

Магнитное поле определяется соотношением

$$\mathbf{H}=-\frac{1}{c}\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}=\frac{1}{c}(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_x)\frac{2I_0}{r_p}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}e^{-i\omega\left(t-\frac{r_p}{c}\right)}.$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}.$$

$$|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_x| = \sin\theta.$$

$$|\mathbf{H}| = \frac{2I_0}{cr_p} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

Среднее по периоду от интенсивности

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} r_p^2 \, |\mathbf{H}|^2 \left\langle \cos^2 \omega \left(t - \frac{r_p}{c} \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{c}{4\pi} r_p^2 \frac{4I_0^2}{c^2 r_p^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{I_0^2}{2\pi c} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta}{\sin\theta} \right]^2 .$$

Интенсивность аксиально-симметрична (вокруг $\mathbf{e}_x$) и имеет максимум $\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\max} = \frac{I_0^2}{2\pi c}$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ и обращается в 0 при $\theta \to 0$. Для точечного диполя

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle \sim \sin^2\theta.$$

Полный поток энергии

$$\langle I \rangle = \frac{I_0^2}{c} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos^2(\pi\xi/2)}{1-\xi^2} \mathrm{d}\xi = \frac{I_0^2}{c} \int\limits_{-1}^{1} \cos^2(\pi\xi/2) \, \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-\xi} + \frac{1}{1+\xi} \right] \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{I_0^2}{2c} \left[\int\limits_{-1}^{1} \cos^2(\pi\xi/2) \, \frac{1}{1-\xi} \mathrm{d}\xi + \int\limits_{-1}^{1} \cos^2(\pi\xi/2) \, \frac{1}{1+\xi} \mathrm{d}\xi \right] .$$

Заменяя во втором интеграле ξ на $-\xi$ и используя четность косинуса, получим

$$\langle I \rangle = \frac{I_0^2}{2c} 2 \int\limits_{-1}^{1} \cos^2(\pi\xi/2) \, \frac{1}{1-\xi} \mathrm{d}\xi = \frac{I_0^2}{2c} 2 \int\limits_{0}^{2} \cos^2(\pi/2 - \pi\eta/2) \, \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} =$$

$$= \frac{I_0^2}{2c} \int\limits_{0}^{2} 2\sin^2(\pi\eta/2) \, \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} = \frac{I_0^2}{2c} 2 \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2(\zeta/2) \, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} =$$

$$= \frac{I_0^2}{2c} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1-\cos\zeta}{\zeta} \mathrm{d}\zeta = \frac{I_0^2}{2c} \left\{ C + \ln 2\pi - C_i(2\pi) \right\} = \frac{I_0^2}{c} \cdot 1.22,$$

где $C = 0.5772$ — постоянная Эйлера, $\ln 2\pi = 1.837$, $C_i\,(2\pi) = 0.02$. Сопротивление излучения антенны равно

$$R_{\text{изл}} = \langle P_{\text{изл}} \rangle \,/\, \left\langle I^2 \right\rangle,$$

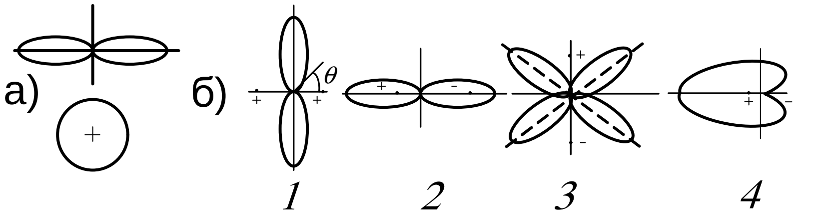
где $P_{\text{изл}}$— средняя излучаемая мощность, $\left\langle I^2 \right\rangle$ — среднеквадратичное значение тока. Тогда

$$R_{\text{изл}} = 2\,\langle I \rangle \,/ I_0^2 = \frac{2,44}{c},$$

или переходя в систему Си, $R_{\text{изл}} = \frac{2,44 \cdot 9 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^{10}} \approx 72$ Ом.

5.2. (Задача 4.38.) а) Построить полярную диаграмму направленности для излучения диполя в плоскости, проходящей через ось диполя, и в плоскости, перпендикулярной оси. б) Нарисовать качественно вид полярной диаграммы направленности для антенны, состоящей из двух полуволновых вибраторов, параллельных друг другу, если расстояние между ними: 1) $a = \frac{\lambda}{2}$, токи совпадают по фазе; 2) $a = \frac{\lambda}{2}$, токи в противофазе; 3) $a = \lambda$, токи в противофазе; 4) $a = \frac{\lambda}{4}$, токи сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$.

Решение В экваториальной плоскости $I\,(\theta) \sim \cos^2\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\pi d}{l}\cos\theta\right)$, где Δ —



сдвиг фаз между диполями, а l — расстояние между ними.

5.3. (Задача 4.41.) Найти поляризацию, угловое распределение и интенсивность излучения системы двух нерелятивистских одинаковых зарядов, вращающихся равномерно с частотой ω по круговой орбите радиуса a и остающихся при этом на противоположных концах диаметра.

Решение Электроны вращаются по круговой орбите и расположены на диаметрально противоположных концах. Очевидно, что $\mathbf{d} = 0$. Магнитный момент

$$\mathbf{M}_c = \frac{1}{2c} \sum \mathbf{r} \times e_i \mathbf{v}_i = 2\frac{e}{2c}\mathbf{e}_z \omega a^2 = \frac{\omega a^2 e}{c}\mathbf{e}_z = \text{const},$$

и, следовательно, $\dot{\mathbf{M}} = 0$. Поэтому единственное излучение в этом случае - квадрупольное.

$$x_{1,2} = \pm a \sin \omega t$$

$$y_{1,2} = \pm a \cos \omega t$$

Введя величину $\varphi = \omega t$, можно записать неравные нулю компоненты квадрупольного тензора

$$
\begin{aligned}
D_{xx} &= -2ea^2 \left\{3\sin^2\varphi - 1\right\} = -ea^2 \left\{6\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi\right\} = \\
&= -ea^2 \left\{1 - 3\cos 2\varphi\right\}, \\
D_{xy} &= D_{yx} = -2ea^2 \left\{3\sin\varphi\cos\varphi\right\} = -3ea^2 \sin 2\varphi, \\
D_{yy} &= -ea^2 \left\{1 + 3\cos 2\varphi)\right\}, \\
D_{zz} &= 2ea^2.
\end{aligned}
$$

Третьи производные от этих компонент

$$
\begin{aligned}
\dddot{D}_{xx} &= 24ea^2\omega^3 \sin 2\varphi, \\
\dddot{D}_{xy} &= 24ea^2\omega^3 \cos 2\varphi, \\
\dddot{D}_{yx} &= \dddot{D}_{xy}, \\
\dddot{D}_{yy} &= -24ea^2\omega^3 \sin 2\varphi, \\
\dddot{D}_{zz} &= 0.
\end{aligned}
$$

Третьи производные от вектора $\mathbf{D}$

$$
\begin{aligned}
\dddot{D}_x &= \dddot{D}_{xx} n_x + \dddot{D}_{xy} n_y = 24ea^2\omega^3 \left\{\sin 2\varphi n_x + \cos 2\varphi n_y\right\}, \\
\dddot{D}_y &= \dddot{D}_{xy} n_x + \dddot{D}_{yy} n_y = 24ea^2\omega^3 \left\{\cos 2\varphi n_x - \sin 2\varphi n_y\right\}, \\
\dddot{D}_z &= \dddot{D}_{zz} n_z.
\end{aligned}
$$

Магнитное поле определяется соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left[\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}\right] = \frac{\dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{6c^3 r}.$$

Используя правила векторного умножения, получим

$$
\begin{aligned}
H_x &= \frac{24ea^2\omega^3}{6cr} \left\{\cos 2\varphi n_x n_z - \sin 2\varphi n_y n_z\right\} \\
H_y &= -\frac{24ea^2\omega^3}{6cr} \left\{\sin 2\varphi n_x n_z + \cos 2\varphi n_y n_z\right\} \\
H_z &= \frac{24ea^2\omega^3}{6cr} \left\{\sin 2\varphi n_x n_y + \cos 2\varphi n_y^2 - \cos 2\varphi n_x^2 + \sin 2\varphi n_x n_y\right\} \\
&= \frac{24ea^2\omega^3}{6cr} \left\{\sin 2\varphi n_x n_y + \cos 2\varphi (n_y^2 - n_x^2)\right\}.
\end{aligned}
$$

Для определения поляризации необходимо перейти в локальную (в точке наблюдения) сферическую систему координат и определить компоненты вектора $\mathbf{H}$ или $\mathbf{E}$ в этой системе координат. В принципе это можно сделать в общем виде, используя матрицу перехода из одной системы координат в другую. Для полноты картины приведем здесь эту матрицу.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_\rho \\ H_\theta \\ H_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\alpha & \sin\theta\sin\alpha & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\alpha & \cos\theta\sin\alpha & -\sin\theta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}.$$

Используя систему координат из задачи 4.18, и замечая, что $n_x = 0, n_y = \sin\theta, n_z = cos\theta$ можно упростить полученные выше формулы, после чего использовать упрощенный вариант приведенных выше соотношений (для $alpha = \pi/2$

$$\begin{aligned} H_\rho =& H_z\cos\theta + H_y\sin\theta, \\ H_\theta =& H_y\cos\theta - H_z\sin\theta, \\ H_\alpha =& - H_x. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\mathbf{H} = -\frac{4ea^2\omega^3}{c^3 r}\left[\cos\left(2\omega t'\right)\mathbf{e}_\theta + \cos\theta\sin\left(2\omega t'\right)\mathbf{e}_\alpha\right]\sin\theta,$$

Тогда, введя ${}_0 = \frac{4ea^2\omega^3}{c^3 r}$, получим

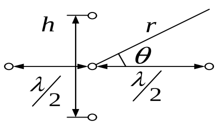
$$\left(\frac{H_\theta}{H_0\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{H_\alpha}{H_0\sin\theta\cos\theta}\right)^2 = 1,$$

откуда следует, что поляризация для $\theta \neq 0, \pi/2, \pi$ — эллиптическая.

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{cr^2}{4\pi}\overline{|\mathbf{H}|^2} = \frac{2e^2a^4\omega^6}{\pi c^5}\sin^2\theta\left(1+\cos^2\theta\right),$$

$$\overline{I} = \frac{32}{5}\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}.$$

5.4. (Задача 4.49.) Антенна из четырех полуволновых вибраторов возбуждена так, что токи в проводниках имеют одинаковые амплитуды и фазы. Найти распределение интенсивности от угла $I(\theta)$ в плоскости, ортогональной проводникам, если $h \ll$



$\frac{\lambda}{2}$.

Решение Поскольку $h \ll \lambda$, можно считать, что средние вибраторы размещены в центре на прямой, соединяющей левый и правый вибраторы. Поле, создаваемое всеми ими в месте наблюдения $E \sim e^{-i\omega t}$. Будем отсчитывать нулевую фазу от крайнего левого вибратора. Тогда

$$E_\Sigma \sim e^{-i\omega t}\left(1 + 2e^{i\psi_2 k} + e^{i\psi_1 k}\right),$$

где $\psi_2 = \frac{\lambda}{2\cos\theta}$, а $\psi_1 = \frac{\lambda}{\cos\theta}$.

$$E \sim \left(1 + 2e^{\frac{ik\lambda}{2\cos\theta}} + e^{\frac{ik\lambda}{\cos\theta}}\right) = \left(1 + e^{\frac{ik\lambda}{2\cos\theta}}\right)^2 =$$

$$= 4e^{\frac{ik\lambda}{2\cos\theta}}\left(\frac{e^{-\frac{ik\lambda}{4\cos\theta}} + e^{\frac{ik\lambda}{4\cos\theta}}}{2}\right)^2 = 4e^{\frac{i\pi}{\cos\theta}} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right).$$

Тогда распределение интенсивности

$$|E|^2 \sim \frac{dI}{d\theta} = \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right).$$

5.5. (Задача 4.51)Как изменится диаграмма направленности решетки из равноотстоящих синфазных вибраторов, расположенных и ориентированных вдоль одной прямой, если убрать каждый третий из них?

Решение Стандартное излучение (все вибраторы на месте) записывается как излучение от дифракционной решетки

$$E \sim \sum_{j=0}^{\infty} e^{ikdj\cos\theta} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{ikd\cos\theta}} = \frac{1}{e^{\frac{ikd}{2}\cos\theta}\left\{e^{-\frac{ikd}{2}\cos\theta} - e^{\frac{ikd}{2}\cos\theta}\right\}}.$$

Интенсивность

$$I \sim \left|\frac{1}{e^{\frac{ikd}{2}\cos\theta}\left\{e^{-\frac{ikd}{2}\cos\theta} - e^{\frac{ikd}{2}\cos\theta}\right\}}\right|^2 = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{kd\cos\theta}{2}\right)},$$

а максимум интенсивности направлен под углами

$$\frac{kd\cos\theta}{2} = m\pi,$$
$$\frac{\pi d\cos\theta}{\lambda} = m\pi,$$
$$d\cos\theta = m\lambda.$$

Запишем, такую же последовательность, когда каждый третий вибратор отсутствует

$$\begin{aligned}&E \sim 1 + e^{ikd\cos\theta} + e^{ikd3\cos\theta} + e^{ikd4\cos\theta} + \ldots = \\ &= \left(1 + e^{ikd\cos\theta}\right) + e^{ikd3\cos\theta}\left(1 + e^{ikd\cos\theta}\right) + \ldots = \\ &= \left(1 + e^{ikd\cos\theta}\right)\sum_{j=0}^{\infty} e^{ikd3\cos\theta} = \tfrac{1+e^{ikd\cos\theta}}{1-e^{ikd3j\cos\theta}}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$I \sim |E|^2 \sim \frac{\cos^2\frac{kd\cos\theta}{2}}{\sin^2\frac{3kd\cos\theta}{2}}.$$

Условие максимумов

$$\begin{aligned}&\tfrac{3kd\cos\theta}{2} = m\pi \\ &3d\cos\theta = m\lambda\end{aligned}$$

5.6. (Задача 4.55.) Определить поле излучения на больших расстояниях от антенны, по которой идет ток $J = J_0 e^{i(kx-\omega t)}$, $|x| \le a$.

Решение $H_\alpha = -\frac{2J_0}{cr}\sin\theta\frac{\sin[ka(1-\cos\theta)]}{1-\cos\theta}\exp\left\{-i\left(\omega t - kr\right)\right\}.$

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{J_0^2}{2\pi c}\frac{\sin^2\theta\sin^2\left[ka\left(1-\cos\theta\right)\right]}{\left(1-\cos\theta\right)^2},$$

$$\overline{I} = \frac{J_0^2}{c}\left[C - 1 + \frac{8\pi a}{\lambda} + \mathrm{sinc}\,\frac{8\pi a}{\lambda} - C_i\left(\frac{8\pi a}{\lambda}\right)\right],$$

где $C = 0,577$ — постоянная Эйлера, а $C_i(x)$ — интегральный косинус. *Указание.* Рассматривать каждый элемент антенны как диполь с моментом $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$, где q — его заряд, равный $J\left(x\right)/i\omega$ ($J(x)$ — амплитуда тока в этом элементе антенны).

5.7. (Задача 4.56.) Найти угловое распределение и полное излучение линейной антенны длиной ℓ, в которой возбуждена стоячая волна тока с узлами на концах антенны (амплитуда — J_0, число полуволн тока на длине антенны — m).

Решение Ток в антенне

$$I_z = I_0 e^{-i\omega t}\sin\frac{m\pi x}{\ell}.$$

Векторный потенциал (в дипольном приближении, см. задачу 4.37) выражается в виде интеграла

$$\mathbf{A}_z\left(\mathbf{r}_p, t\right) = \mathbf{e}_z\frac{I_0}{cr_p}e^{-i\omega\left(t-\frac{r_p}{c}\right)}\int_0^{\ell} e^{-ikx\cos\theta}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\mathrm{d}x$$

Выражение для магнитного поля можно получить, используя связь между векторным потенциалом и магнитным полем.

$$\mathbf{H} = \frac{\sin\theta \mathbf{e}_\alpha}{cr_p} i\omega \int I_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{r_p}{c}\right)} \sin\frac{m\pi x}{\ell} e^{-ikx\cos\theta} =$$

$$= \sin\theta \mathbf{e}_\alpha \frac{i\omega I_0}{cr_p} e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \int\limits_0^\ell e^{-ikx\cos\theta} \sin\frac{m\pi x}{\ell}\mathrm{d}x$$

Рассмотрим интеграл отдельно, введя переменную $\xi = kx$.

$$Int = \frac{1}{k}\int\limits_0^{k\ell} e^{-i\xi\cos\theta}\left\{e^{\frac{im\pi\xi}{k\ell}} - e^{-\frac{im\pi\xi}{k\ell}}\right\}\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{k}\int\limits_0^{k\ell} e^{-i\xi\left(\cos\theta - \frac{m\pi}{k\ell}\right)} - e^{-i\xi\left(\cos\theta + \frac{m\pi}{k\ell}\right)}\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\left.\frac{e^{-i\xi\left(\cos\theta - \frac{m\pi}{k\ell}\right)}}{\cos\theta - \frac{m\pi}{k\ell}}\right|_0^{k\ell} - \left.\frac{e^{-i\xi\left(\cos\theta + \frac{m\pi}{k\ell}\right)}}{\cos\theta + \frac{m\pi}{k\ell}}\right|_0^{k\ell}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\frac{\left[(-1)^m e^{-ik\ell\cos\theta} - 1\right]}{\cos\theta - \frac{m\pi}{k\ell}} - \frac{\left[(-1)^m e^{-ik\ell\cos\theta} - 1\right]}{\cos\theta + \frac{m\pi}{k\ell}}\right\} =$$

$$= \frac{2m\pi}{k^2\ell}\frac{\left[(-1)^m e^{-ik\ell\cos\theta} - 1\right]}{\left[\cos^2\theta - \left(\frac{m\pi}{k\ell}\right)^2\right]}.$$

$$H_\alpha = \frac{2iI_0 e^{-i(\omega t - kr_p)}}{cr_p\sin\theta} f(\theta);$$

$$f(\theta) = \begin{cases} i\sin\left(\dfrac{m\pi}{2}\cos\theta\right) & \text{при } m \text{ четном}, \\ \cos\left(\dfrac{m\pi}{2}\cos\theta\right) & \text{при } m \text{ нечетном}; \end{cases}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{J_0^2 f^2(\theta)}{2\pi c\sin^2\theta};$$

$$\overline{I} = \frac{J_0^2}{2c}\left[\ln(2\pi m) + C - C_i(2\pi m)\right],$$

где C и C_i определены в предыдущей задаче.

5.8. (Задача 4.58.) Вычислить в омах сопротивление излучения рамочной антенны, имеющей форму круглого витка радиуса a и питаемого током $J = J_0 \cos\omega t$. Длина волны $\lambda \gg a$.

Решение Магнитный момент антенны

$$m(t) = JS/c = (\pi a^2 J_0 \cos\omega t)/c = m_0 \cos\omega t.$$

Излучаемая магнитным полем мощность

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{\omega^4}{c^3} m_0^2 \cos^2\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Средняя за период мощность

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}} = \frac{m_0^2\omega^4}{3c^3} = R_{\text{изл}} \cdot \overline{J^2}.$$

Найдем средний квадрат тока $\overline{J^2}$, выраженный через $\overline{m^2}$:

$$\overline{J^2} = \frac{c^2}{S^2}\overline{m^2} = \frac{m_0^2 \cdot c^2}{2(\pi a^2)^2} = \frac{J_0^2}{2}.$$

Наконец находим сопротивление излучения:

$$R_{\text{изл}} = \frac{\overline{d\mathcal{E}/dt}}{\bar{J}^2} = \frac{m_0^2\omega^4}{3c^3},$$

$$\frac{J_0^2}{2} = \frac{m_0^2\omega^4}{3c^3} \cdot \frac{2\pi^2 a^4}{m_0^2 c^2} = \frac{2\pi^2}{3}\frac{\omega^4 a^4}{c^5}.$$

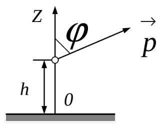
Так как $\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то

$$R_{\text{изл}} = \frac{2\pi^2}{3c}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 = \frac{2}{9 \cdot 10^9}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \text{CGSE} = 200\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \text{Ом}.$$

5.9. (Задача 4.59.) Найти диаграмму направленности излучения в вертикальной плоскости для горизонтального осциллирующего диполя, помещенного на высоте h над землей. Землю считать плоской и идеально проводящей.

Решение $I(\theta) \sim \sin^2\left(\frac{\pi h \sin\theta}{\lambda}\right)$, где θ — широта точки наблюдения.

5.10. Найти электромагнитное поле и угловое распределение излучения



электрического диполя (амплитуда — $\mathbf{p_0}$, частота — ω), находящегося на расстоянии $a/2$ от идеально проводящей плоскости ($a \ll \lambda$, вектор $\mathbf{p_0}$ параллелен плоскости).

Решение $\mathbf{H} = \frac{i\omega^3 p_0 a}{c^3 r}\left(\sin\alpha \cdot \mathbf{e}_\theta + \cos\alpha\cos\theta \cdot \mathbf{e}_\alpha\right)\cos\theta e^{i(\omega t - kr)}$. Проводящая плоскость совпадает с XY, момент диполя направлен вдоль оси X.

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^6 p_0^2 a^2}{8\pi c^5}\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\theta\right)\cos^2\theta.$$

Указание. Рассмотреть поля излучения диполя и его изображения.

5.11. (Задача 4.61.) Над проводящим полупространством находится дипольный осциллятор $\mathbf{p}$ (высота — h, угол — φ). Найти поле излучения.

Решение $\mathbf{H} = \frac{2i\omega^2 p_0}{c^2 r}\left[\sin\varphi\sin\alpha\mathbf{e}_\theta + (\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi)\sin\theta\mathbf{e}_\alpha\right]\sin(kh\cos\theta)$ (проводящая плоскость совпадает с XY, диполь лежит в плоскости ZX). При $\varphi = \pi/2$ получаем ответ предыдущей задачи. *Указание*. То же, что и в предыдущей задаче.