ФСС - 2013

Лотов Константин Владимирович

Курс кажется сложным, 3 тома ЛЛ, но — только основы из них.

Осн. сложность — нужно знание предыд. курсов (эл.дин, механика)

+ сложные задачи, нужен синтез

$\Rightarrow$ работайте на семинарах, задания — вовремя

Экзамен: классич. схема, контрольных нет, допуск, задачи курсивом.

Часть I. Электродинамика сплошных сред

1.1 Ур-я Максвелла для сплошной среды

Эл. дин:
$$\operatorname{rot}\vec B = \frac{4\pi}{c}\vec j + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec E}{\partial t} \qquad (1)$$
$$\operatorname{rot}\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t} \qquad (2)$$
$$\operatorname{div}\vec E = 4\pi\rho \qquad (3)$$
$$\operatorname{div}\vec B = 0 \qquad (4)$$

(точные $\vec E, \vec B, \vec j, \rho$ в вак.)

а) В среде $\vec E, \vec B, \vec j, \rho$ — усреднённые (по мал. объёму)

б) (3), (4) не пишем, т.к. это — нач. усл. для (1), (2) в силу
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec j = 0 \qquad (5)$$

div (1): $0 = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec j + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec E$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec E - 4\pi\rho\right) = 0$$
$$\operatorname{div}\vec E = 4\pi\rho + \cancel{f(\vec r)} \to \text{нач. усл.}$$

в) есть $\vec{\mathcal D}$, нет $\vec H$ $(\vec H \equiv \vec B)$

Пусть $\vec j = \vec j_{ср} + \vec j_{стор}$, $\rho = \rho_{ср} + \rho_{стор}$

Введём некот. векторы $\vec P$ и $\vec M$: (пока не уточняем их смысл)
$$\vec j_{ср} = \frac{\partial\vec P}{\partial t} + c\operatorname{rot}\vec M, \quad \rho_{ср} = -\operatorname{div}\vec P \qquad (6)$$

(5) выполнено, 4 числа через 6 чисел; можно, неоднозначно

Неоднозн: $\left.\begin{aligned}\vec P &\to \vec P + \operatorname{rot}\vec X\\ \vec M &\to \vec M - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec X}{\partial t}\end{aligned}\right\}$ ничего не изм.

Снимается по разному в статике ($\frac{\partial}{\partial t}=0$, ЭД) и динамике ($\frac{\partial}{\partial t}\neq 0$, ФСС)

Статика ($\frac{\partial}{\partial t}\approx 0$), см. эл. дин.

$\vec P$ = дип. момент ед. объёма, поляризация среды

$\vec M$ = магн. момент ед. объёма, намагниченность

$$\operatorname{rot}\vec B = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial\vec P}{\partial t} + c\operatorname{rot}\vec M\right) + \frac{4\pi}{c}\vec j_{стор} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot}\underbrace{\left(\vec B - 4\pi\vec M\right)}_{\vec H,\ \text{напряжённость м. поля}} = \frac{4\pi}{c}\vec j_{стор} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\vec E + 4\pi\vec P\right)}_{\vec{\mathcal D},\ \text{электрич. индукция}}$$

ФСС ($\frac{\partial}{\partial t}\neq 0$): в качестве $\vec P$ и $\vec M$ нельзя брать моменты [(6) не верно]

$\Downarrow$

$\vec M \equiv 0$, $\frac{\partial\vec P}{\partial t} = \vec j_{ср}$, $\vec H \equiv \vec B$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{\mathcal D}}{\partial t} = \frac{\partial\vec E}{\partial t} + 4\pi\vec j_{ср}} \leftarrow \text{далее не пишем} \qquad (7)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec B &= \frac{4\pi}{c}\vec j_{стор} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal D}}{\partial t} &(8)\\ \operatorname{rot}\vec E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t} &(9)\end{aligned}}$$

$(\operatorname{div}\vec{\mathcal{D}} = 4\pi\rho_{\text{стор}})$

1.2 Материальное уравнение

Система (7)-(9) не полна, 12>9

Нужно ур-е для влияния поля на среду

Нужно $\vec{j}(\vec{E},\vec{B})$ или $\vec{\mathcal{D}}(\vec{E},\vec{B})$,

т.к. $\vec{B}(\vec{E})$ из (1.9), надо $\underbrace{\vec{j}(\vec{E}),\ \vec{\mathcal{D}}(\vec{E})}_{\text{мат. ур-я}}$

(следуют из микроскопич. картины, поэтому только общие ф-лы)

Самая общая завис-ть:

$$\vec{j} = \cancel{\underbrace{\vec{A}_1}_{\propto E^0}} + \underbrace{\vec{A}_2}_{\propto E^1} + \cancel{\underbrace{\vec{A}_3}_{\propto E^2}} + \ldots$$

в $\vec{j}_{\text{стор}}$. считаем малым, если $E \ll E_{\text{среды}}$ (обычно так, $\sim$ ГВ/м)

(иначе - нелин. электродинамика)

Общий вид линейной завис-ти:

$$j_\alpha(\vec{r},t) = \int E_\beta(\vec{r}',t')\underbrace{\sigma_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}',t,t')}_{\text{ядро оператора проводимости}} d\vec{r}'\,dt'$$

(зависит от всех компонент поля, в т.ч. в других местах в другое время)

Короткая запись: $\boxed{\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E}}$ ← мат. ур.

оператор проводимости

Св-ва: 1) $\sigma_{\alpha\beta} = 0,\quad t' > t$

2) $\sigma_{\alpha\beta} = 0,\quad |\vec{r}-\vec{r}'| > c(t-t')$

3) однор. среда: $\sigma_{\alpha\beta}(\vec{r}-\vec{r}', t, t')$

4) стационарная: $\sigma_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}', t-t')$

всюду далее

Аналогично $\vec{\mathcal{D}} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$ ← тоже м.ур.

оператор диэлектрич. прониц-ти

1.3 Операторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$ в Фурье-представлении

В ФСС пользуемся такой формой пр.Ф:

$$\vec{E}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \vec{E}(\vec{r},t)e^{-i\vec{k}\vec{r}+i\omega t}\,d\vec{r}\,dt$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \vec{E}(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\,d\vec{k}\,d\omega$$

(обозн. Ф.-образ той же буквой)

$$\xi = (\vec{r},t),\qquad q = (\vec{k},-\omega)$$

Мат. ур.: $\mathcal{D}_\alpha(\xi) = \int E_\beta(\xi')\,\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi-\xi')\,d\xi'$

Пр. Фурье: $\mathcal{D}_\alpha(q) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{-iq\xi}\,d\xi\ \cdot$

$$\cdot\int E_\beta(\xi')\,\varepsilon_{\alpha\beta}(\underbrace{\xi-\xi'}_{\eta})\,d\xi' =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{-iq\eta}e^{-iq\xi'}E_\beta(\xi')\,\varepsilon_{\alpha\beta}(\eta)\,d\xi'\,d\eta =$$

$$= \underbrace{\int \varepsilon_{\alpha\beta}(\eta)e^{-iq\eta}\,d\eta}_{\varepsilon_{\alpha\beta}(q)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2}\int E_\beta(\xi')e^{-iq\xi'}\,d\xi'}_{E_\beta(q)}$$

(не Ф.-образ, не хватает $(2\pi)^{-2}$)

$$\boxed{\begin{gathered}\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = \int \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau)\,e^{-i\vec{k}\vec{\rho}+i\omega\tau}\,d\vec{\rho}\,d\tau \\ \vec{\rho} = \vec{r}-\vec{r}',\qquad \tau = t-t'\end{gathered}}$$

В Фурье-предст: $\boxed{\begin{gathered}\mathcal{D}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta \\ j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}E_\beta\end{gathered}}$

(тоже мат. ур.)

тензоры диэлектрич. прониц-ти
проводимости

Из $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j}$

$$-i\omega \vec{D} = -i\omega \vec{E} + 4\pi \vec{j}$$

$$D_\alpha = E_\alpha + \frac{4\pi i}{\omega} j_\alpha$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = \delta_{\alpha\beta} E_\beta + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$$

$$\forall E_\beta \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}}$$

1 лекция, 6.09

---

2 лекция, 13.09

1.4 Дисперсионное уравнение

Есть стандартный метод определения волновых св-в среды по известному $\varepsilon_{\alpha\beta}$

Пусть $\vec{j}_{стор} = 0$ (ищем своб. волны)

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

решение – в виде плоских волн (или сделаем преобр. Фурье)

$$[\cancel{i}\vec{k} \times \vec{B}] = -\frac{\cancel{i}\omega}{c} \vec{D}, \quad [\cancel{i}\vec{k} \times \vec{E}] = \frac{\cancel{i}\omega}{c} \vec{B}$$

$$[\overset{a}{\vec{k}} \times [\overset{b}{\vec{k}} \times \overset{c}{\vec{E}}]] = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} = \overset{b\,(a\,c)}{\vec{k}(\vec{k}\vec{E})} - \overset{c\,(ab)}{\vec{E} k^2}$$

$$k_\alpha k_\beta E_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} E_\beta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = 0$$

$$\boxed{L_{\alpha\beta} E_\beta = 0}$$

$$\boxed{L_{\alpha\beta} = k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}}$$

Фиксир. оси $\Rightarrow$ матрица 3×3
система лин. ур-й

$\vec{E} \neq 0$, если $\boxed{\det L_{\alpha\beta} = 0}$

дисперс. ур. среды

$\Downarrow$

$\omega = \omega_n(\vec{k}) \in \mathbb{C}$ ← м.б. комплексными (нараст. / затух. волны)

↑ ← м.б. много решений (волн)

дисперсионное соотношение для волны

$\Downarrow$

$\vec{E}_n \neq 0$, ненулевые решения, поляризация волн

1.5 Анализ волновых свойств среды

(на примере газа осцилляторов)

Общая схема:

Пусть есть малое $\vec{E} \propto e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$

$\Downarrow$ ← ур-я движ. частиц среды (линеаризованные по ампл. возмущения)

$\vec{v}, n$

$\Downarrow$

$\vec{j}\,(\propto \vec{E}) \Rightarrow \sigma_{\alpha\beta} \Rightarrow \varepsilon_{\alpha\beta} \overset{1.4}{\Rightarrow}$ волны

Газ осцилляторов

неподв. центр, $n \ \dfrac{\text{штук}}{\text{см}^3}$

эл-н: $m \ddot{\delta \vec{r}} = -\varkappa \delta \vec{r} - e\vec{E}$ $(e > 0)$

$$-m\omega^2 \delta\vec{r} = -\varkappa \delta\vec{r} - e\vec{E}$$

$$\delta\vec{r} = \frac{e\vec{E}}{m\omega^2 - \varkappa} = \frac{e\vec{E}}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\varkappa}{m}}$ – част. осциллятора

$$\vec{v} = \frac{d\delta\vec{r}}{dt} = -i\omega \delta\vec{r} = -\frac{ie\omega\vec{E}}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

$$\vec{j} = \underbrace{-en}_{\rho}\vec{v} = \frac{ie^2 n\omega \vec{E}}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{ine^2\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \delta_{\alpha\beta}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta} =$$

$$= \left(1 - \frac{4\pi n e^2}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\right) \delta_{\alpha\beta}$$

$\omega_p = \sqrt{\dfrac{4\pi n e^2}{m}}$ – плазменная частота

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta}, \qquad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Пусть $\vec{z} \parallel \vec{k}$:

$$(k_\alpha k_\beta - k^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta})E_\beta$$

$$\begin{pmatrix} -k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

$\det L = 0$:

а) $\omega^2 = \dfrac{k^2c^2}{\varepsilon(\omega)}$, электромагнитная (при $n\to 0$, $\omega_p \to 0$, $\varepsilon \to 1$, э/м в вак.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \forall E_x \\ \forall E_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

поперечная, $\vec{E} \perp \vec{k}$, 2 поляриз.

(*) $\omega \to \omega_0$, $\varepsilon \to \infty$: резонанс, нужно усложнять модель, пока не рассм.

б) $\omega^2\varepsilon = 0$; $\omega = 0$ (пост. поле E_z)

$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_0^2$,

($\exists$ при определённой ω)

продольная, $\vec{E} \parallel \vec{k}$

потенциальная, т.к.

$\vec{B} = \frac{c}{\omega}[\vec{k}\times\vec{E}] = 0$,

$\exists \varphi$: $\vec{E} = -\nabla\varphi$

1.6 Асимптотика $\varepsilon_{\alpha\beta}$ при больших частотах

В 1.5 при $\omega \to \infty$: $\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta} \approx \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\delta_{\alpha\beta}}$ (1)

Вообще, ур-е движ. эл-на:

$m\ddot{\delta\vec{r}} = \vec{F}_{возвр} - e\vec{E}$,

$-m\omega^2\delta\vec{r} = \underbrace{\vec{F}_{возвр}} - e\vec{E}$

не завис. от ω, $\sim \delta\vec{r}$ пренебр. при $\omega \to \infty$

$\forall$ среда при $\omega \to \infty$ – как газ свободных эл-нов (т.к. ток ионов в m/M меньше)

$\Downarrow$

(1)

1.7 Частотная и пространств. дисперсия

Более мощный, чем в ЭД, математич. аппарат нужен для иссл. более сложных сред, напр. с дисперсией. Но сначала поймём, что такое среда без дисперсии.

Мат. ур-е:

$$D_\alpha(\vec{r},t) = \int \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}-\vec{r}', t-t')E_\beta(\vec{r}',t')\,d\vec{r}'dt'$$

Дисперсии нет, если

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$$

(локальный мгновенный отклик)

$$D_\alpha(\vec{r},t) = A_{\alpha\beta}E_\beta(\vec{r},t)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = \int A_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{\rho})\,\delta(\tau)e^{-i\vec{k}\vec{\rho}+i\omega\tau}\,d\vec{\rho}\,d\tau$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = A_{\alpha\beta}$, не завис. от $\vec{k},\omega$

Частотная дисперсия:

$\vec{D}(t)$ зависит от $\vec{E}(t')$, $t' < t$

$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)$

Пространственная дисп.:

$\vec{D}(\vec{r})$ зависит от $\vec{E}(\vec{r}')$, $\vec{r}' \neq \vec{r}$

$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k})$

<u>Пример:</u> среда с тепл. движением

$\uparrow\uparrow\uparrow \vec{E}$, e, $\vec{v}_T$ $\dashrightarrow \vec{\delta j}$ через Δt в $\vec{\Delta r} = \vec{v}_T \Delta t$

(1.8) Св-ва симметрии $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в изотропных и зеркально-изомерных средах

Изотр. – нет выдел. направления

З.и. – не инвариантна относ. отражения (напр. газ спиральных молекул)

Из тенз. разм-ти:

Нет простр. дисп.: $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta}$

Есть простр. дисп: $\vec{k}$ – выдел. напр.

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = A(\overset{|\vec{k}|}{k},\omega)\delta_{\alpha\beta} + B(k,\omega)k_\alpha k_\beta + C(k,\omega)e_{\alpha\beta\gamma}k_\gamma$$

или

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\perp\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \varepsilon_\parallel \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + i g e_{\alpha\beta\gamma}\frac{k_\gamma}{k} \quad \text{(общий вид)}}$$

(если затух. мало, то $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – эрмитов, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$, $\varepsilon_\perp, \varepsilon_\parallel, g \in \mathbb{R}$)

Отражение (отн. точки = по 3 осям)

$\vec{k}\uparrow \quad \downarrow -\vec{k}$ $\quad \vec{k} \to -\vec{k}$, $\delta_{\alpha\beta} \to \delta_{\alpha\beta}$

$e_{\alpha\beta\gamma} \to e_{\alpha\beta\gamma}$

Истинно изотропная: $\varepsilon_{\alpha\beta} \to \varepsilon_{\alpha\beta}$
(не меняется при отраж.)

$$\Downarrow$$

$$g \equiv 0$$

Зерк. изомерная: м.б. $g \neq 0$

2 лекция, 13.09

---

3 лекция, 20.09

(1.9) Естественная оптическая активность

Пусть
$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega,\vec{k}) = \varepsilon_\perp\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \varepsilon_\parallel \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + i g e_{\alpha\beta\gamma}\frac{k_\gamma}{k}; \quad g \neq 0$$

Найдём волны, $\vec{z} \parallel \vec{k}$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \to \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}$$

$$L_{\alpha\beta}E_\beta = \left(k_\alpha k_\beta - k^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\right)E_\beta = 0$$

$$\begin{pmatrix} -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp & i\frac{\omega^2}{c^2}g & 0 \\ -i\frac{\omega^2}{c^2}g & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

- $\omega^2\varepsilon_\parallel = 0$, $E_z \neq 0$, как в (1.5)
- $\underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k^2\right)^2}_{\mp A} - \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2}g\right)^2}_{A} = 0$

$$k_\pm^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp \pm \frac{\omega^2}{c^2}g = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_\perp \pm g)$$

2 круговые поляризации, т.к.

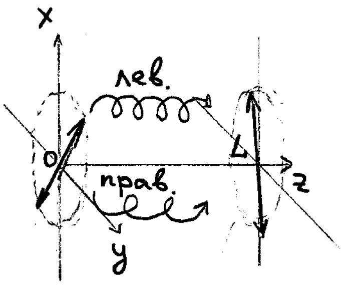
$$\begin{pmatrix} \mp A & iA & 0 \\ -iA & \mp A & 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ \mp iE_x \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

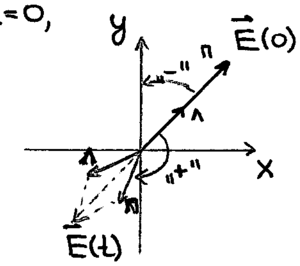
$\vec{E} \perp \vec{k}$, $E_y = \mp iE_x$ (сдвиг по фазе $\mp\frac{\pi}{2}$)

с разными фазов. и групп. скоростями (!)

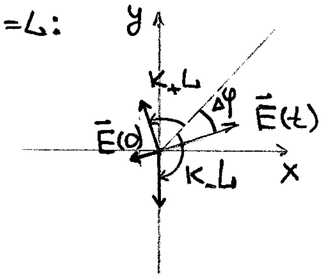
$\Downarrow$

поворот плоскости поляризации
(или ест. опт. акт.)



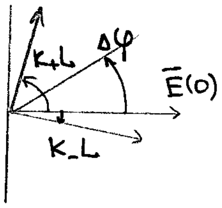


z=0: линейная поляризация



z=L: линейная, повёрнутая

$$\Delta\varphi = \frac{k_+L - k_-L}{2}$$



Если $g \ll \varepsilon_\perp$:

$$k_\pm = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_\perp \pm g} \approx \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_\perp}}{c}\left(1 \pm \frac{g}{2\varepsilon_\perp}\right)$$

$$\boxed{\Delta\varphi \approx \frac{\omega g L}{2\sqrt{\varepsilon_\perp}\, c}}$$

1.10 Одноосные кристаллы

$\exists!$ выдел. направл., $\vec{n}$, оптич. ось

Пусть нет простр. дисперсии:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\perp(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) + \varepsilon_\parallel n_\alpha n_\beta + i g e_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma$$

+ нет зерк. изомерии $\Rightarrow g = 0$
(отразим, $\vec{n} \to -\vec{n}$, $\varepsilon_{\alpha\beta} \to \varepsilon_{\alpha\beta}$)

Ищем волны: $\vec{z} \parallel \vec{n}$, $\vec{k} \in (x, z)$

$\vec{n} = (0, 0, 1)$, $\quad \vec{k} = (k_\perp, 0, k_\parallel)$.

$$\left(k_\alpha k_\beta - k^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\right) E_\beta = 0$$

$$\begin{pmatrix} k_\perp^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp & 0 & k_\perp k_\parallel \\ 0 & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp & 0 \\ k_\perp k_\parallel & 0 & k_\parallel^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel \end{pmatrix}$$

- $k^2c^2 = \omega^2\varepsilon_\perp$, $\quad E_y \neq 0$, $\quad \vec{E} \perp (\vec{k}, \vec{n})$

  обыкновенная э/м волна

- $\vec{E} \in (\vec{k}, \vec{n})$ – необыкновенная,

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k_\parallel^2\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel - k_\perp^2\right) - k_\perp^2 k_\parallel^2 = 0$$

$$\frac{\omega^4}{c^4}\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel - \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_\perp k_\perp^2 + \varepsilon_\parallel k_\parallel^2\right) = 0$$

$\left(\omega = 0 \Rightarrow [\vec{k}\times\vec{E}] = 0 \Rightarrow \text{пост. } \vec{B} = \frac{c}{\omega}[\vec{k}\times\vec{E}]\right)$

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{k_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{k_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}}$$

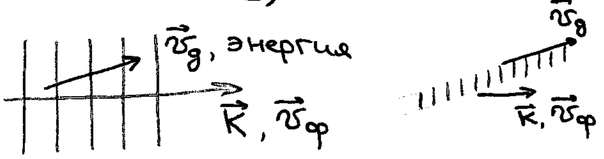
фаз. скорость $\left(\frac{\omega}{k}\right)$ зависит от направл. $\vec{k}$:

если $\vec{k} = (k\cos\theta,\ 0,\ k\sin\theta)$,

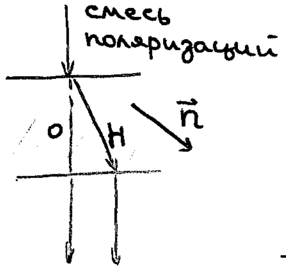
то $\displaystyle \frac{\omega}{k} = c\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_\perp}}$

групп. скорость, $\displaystyle \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} = \frac{1}{2\omega}\frac{\partial\omega^2}{\partial\vec{k}} =$

$$= \frac{c^2}{\omega}\left(\frac{\vec{k}_\perp}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\vec{k}_\parallel}{\varepsilon_\perp}\right) \nparallel \vec{k} = \vec{k}_\perp + \vec{k}_\parallel$$

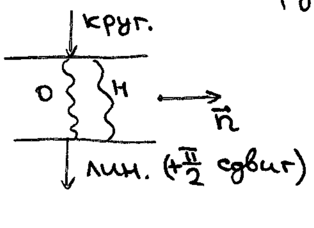


двойное лучепреломление,



преломл. луч $\notin$ плоск. падения
← (картинка 3d),

линейная $\Leftrightarrow$ кругов.



(1.11) Эффект Керра (1875, Джон Kerr)

Изотр. среда + внешнее поле $\vec{E}_0$ =

= одноосный кристалл

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega)\,\delta_{\alpha\beta}$$

$\downarrow$

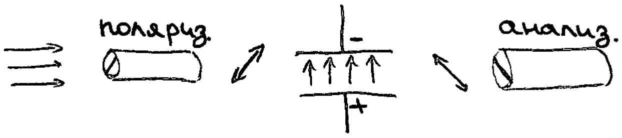
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = A(\omega, E_0)\,\delta_{\alpha\beta} + B(\omega, E_0)\,E_{0\alpha}E_{0\beta} + \cancel{C(\omega, E_0)\,e_{\alpha\beta\gamma}E_{0\gamma}}$$

$\to$ истинно изотр.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \underbrace{A}_{\varepsilon_\perp}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{E_{0\alpha}E_{0\beta}}{E_0^2}\right) + \underbrace{\left(A + BE_0^2\right)}_{\varepsilon_\parallel}\frac{E_{0\alpha}E_{0\beta}}{E_0^2}$$

$B \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_\perp \neq \varepsilon_\parallel \Rightarrow$ св-ва одноосн. крист. (э. Керра)

Ячейка Керра:



(быстрый затвор, до 10^{-12} сек)

3 лекция, 20.09

4 лекция, 27.09

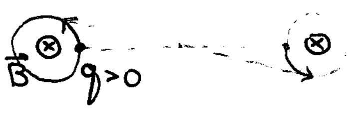
(1.12) Магнитооптические эффекты

Изотр. среда + $\vec{B}_0$,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\perp\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{B_{0\alpha}B_{0\beta}}{B_0^2}\right) + \varepsilon_\parallel\frac{B_{0\alpha}B_{0\beta}}{B_0^2} + \underbrace{ig\,e_{\alpha\beta\gamma}\frac{B_{0\gamma}}{B_0}}_{\neq 0}$$

$\neq 0$, т.к. $\vec{B}_0$ – псевдовектор, т.к. (не меняется при отраж.)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c\,[\vec{\nabla}\times\vec{E}],$$ ← меняют знак, или

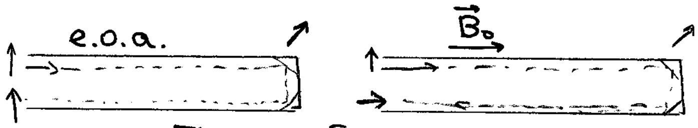


отражённая частица крутится в ту же сторону

Если $\vec{k}\parallel\vec{B}_0$: аналог ест. опт. акт. (тот же тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$)

$\Downarrow$

2 круг. поляризации с разными k, вращ. плоск-ти поляриз., но знак зависит от $\vec{k}\vec{B}_0$:



Туда – обратно

та же поляриз. — углы поворота складываются

(эффект Фарадея $\uparrow\uparrow$)

Если $\vec{k}\perp\vec{B}_0$: эфф. Коттона – Мутона

$\vec{z}\parallel\vec{B}_0$, $\vec{x}\parallel\vec{k}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp & i\frac{\omega^2}{c^2}g & 0 \\ -i\frac{\omega^2}{c^2}g & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel - k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

- $E_z \neq 0$, $\omega^2\varepsilon_\parallel = k^2c^2$

  (простая, т.к. частицы двиг. по $\vec{z}$ и не чувствуют м. поля)

- $\vec{E}\perp\vec{z}$, $\varepsilon_\perp\left(\varepsilon_\perp - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right) - g^2 = 0$

$$k^2c^2 = \omega^2\left(\varepsilon_\perp - \frac{g^2}{\varepsilon_\perp}\right)$$

аналоги обыкн. и необыкн. волн, двойное лучепреломление, лин. $\leftrightarrow$ круговая и т.д.

Если $g \ll \varepsilon_\perp$, то $E_x \ll E_y$, почти поперечная волна

1.13 Аналитические свойства диэлектрической проницаемости

Пусть $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta}$, тогда
(для тензорной - аналогично)

$$\vec{D} = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(t-t')\vec{E}(t')\,dt' \quad \text{- опред. } \varepsilon$$

$$\vec{D} = \vec{E} + \int_{-\infty}^{t} 4\pi\vec{j}(t')\,dt' \quad \text{- опред. } \vec{D}$$

$\Downarrow$

$\varepsilon(t-t')$ содержит δ-функцию

Введём $f(\tau) = \varepsilon(\tau) - \delta(\tau)$, $\tau = t - t'$ (1)
- функция отклика среды,

$$\vec{D} = \vec{E} + \int_{-\infty}^{t} f(t-t')\vec{E}(t')\,dt',$$

причём $f(\tau) \in \mathbb{R}$.

Дополним: $f(\tau) = 0$, $\tau < 0$
(чтобы расширить пределы интегр.)

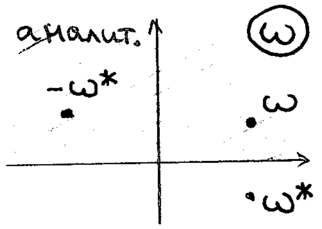
Пусть $f(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$ (в неуст. средах бывает не так)

Из (1): $\varepsilon(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}\,d\tau$

$\Downarrow$ (сделали несимм Фурье)

- $\varepsilon(\omega)$ аналитична при $\operatorname{Im}\omega > 0$ (св-ва преобр. Лапласа при $\lambda = -i\omega$)
- $\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega^*)$

  $\varepsilon^*(-\omega^*) = \varepsilon(\omega)$



- На мнимой полуоси $\varepsilon(\omega) \in \mathbb{R}$
- Если $\omega \in \mathbb{R}$, то

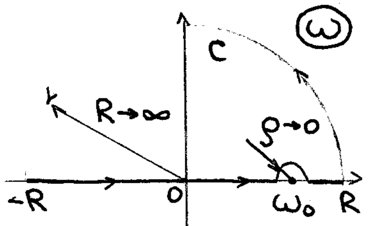
  $\operatorname{Re}\varepsilon(-\omega) = \operatorname{Re}\varepsilon(\omega)$

  $\operatorname{Im}\varepsilon(-\omega) = -\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$

1.14 Теорема Крамерса - Кронига

У аналит. функции по „Re" можно восстановить „Im", и наоборот

Пусть $\varepsilon(\omega)$ - аналит. при $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$



$$\oint_C \frac{\varepsilon(\omega)-1}{\omega-\omega_0}\,d\omega = 0$$

т.к. нет особенностей внутри

$$\int_C = \int_{-R}^{\omega_0-\rho} + \int_{\frown\rho} + \int_{\omega_0+\rho}^{R} + \int_{\frown R} = 0$$

т.к. $\varepsilon(\omega) \xrightarrow[R\to\infty]{} 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$$\frac{\varepsilon-1}{\omega-\omega_0} \longrightarrow -\frac{\omega_p^2}{\omega^3}$$

$$\int_{\frown R} \sim \pi R\cdot\frac{\omega_p^2}{R^3} \sim \frac{1}{R^2} \longrightarrow 0$$

(доказывали асимптотику при $\omega \in \mathbb{R}$, но при мнимой ω (быстрый рост поля) тоже можно пренебречь взаимод. эл-нов с другими частицами)

$$\int_{\frown\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} -\pi i \operatorname{Res}\frac{\varepsilon(\omega)-1}{\omega-\omega_0} = -\pi i\big(\varepsilon(\omega_0)-1\big)$$

$$\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega)-1}{\omega-\omega_0}\,d\omega = \pi i\big(\varepsilon(\omega_0)-1\big)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\varepsilon(\omega)-1}{\omega-\omega_0}\,d\omega &= -\pi\operatorname{Im}\varepsilon(\omega_0) \\ \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{\omega-\omega_0}\,d\omega &= \pi\big(\operatorname{Re}\varepsilon(\omega_0)-1\big) \end{aligned}}$$

ф-лы Кр. - Кр.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{\omega-\omega_0}\,d\omega = \int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{0} = \quad \omega \to -\omega$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{\omega-\omega_0}\,d\omega + \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{\omega+\omega_0}\,d\omega}_{\text{4 минуса}} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2\omega \operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}\,d\omega = \pi\left(\operatorname{Re}\varepsilon(\omega_0)-1\right)$$

$\omega_0 \to \infty$: $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega_0) - 1 \longrightarrow -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$

$$\boxed{\int_0^{\infty} 2\omega \operatorname{Im}\varepsilon(\omega)\,d\omega = \pi\omega_p^2}$$

(правило сумм)

(сред без затухания не бывает)

$\omega_0 \to 0$: $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{2}\left(\varepsilon(0)-1\right)$

т.к. $\operatorname{Im}\varepsilon(0) = 0$

<u>Пример</u>: газ осцилляторов

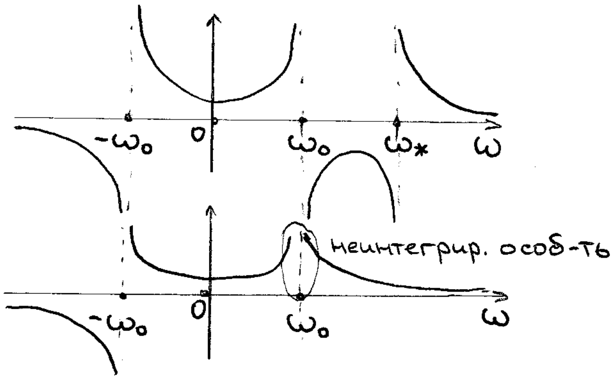
$$\operatorname{Re}\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_0^2}$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon(\omega_*) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\omega_p^2)\,d\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)(\omega-\omega_*)} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \omega_* \neq \pm\omega_0 \\ \infty, & \omega_* = \pm\omega_0 \end{cases}, \quad \text{т.к.}$$

$$\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2(\omega-\omega_*)} =$$

$$\left[\begin{array}{l} = \frac{a}{(\omega-\omega_0)} + \frac{b}{\omega+\omega_0} + \frac{c}{\omega-\omega_*}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\, d\omega = 0 \quad \forall \text{ дроби} \quad (\omega_* \neq \pm\omega_0) \\ = \frac{1}{(\omega\pm\omega_0)(\omega\mp\omega_0)^2}, \quad \int \to \infty \end{array}\right.$$



$\Downarrow$

Ищем $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega) = A\,\delta(\omega-\omega_0) - A\,\delta(\omega+\omega_0)$

д.б. нечётная ф-я

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{\omega-\omega_*}\,d\omega = \frac{A}{\omega_0-\omega_*} + \frac{A}{\omega_0+\omega_*} =$$

$$= \frac{2\omega_0 A}{\omega_0^2-\omega_*^2} = \pi\frac{(-\omega_p^2)}{\omega_*^2-\omega_0^2}$$

$\Downarrow$

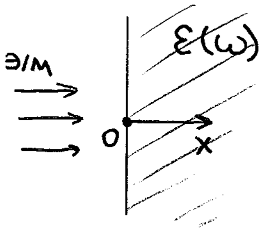
$A = \frac{\pi\omega_p^2}{2\omega_0}$, всё затухание при $\omega = \pm\omega_0$

4 лекция, 27.09

---

5 лекция, 4.10

1.15 Э/м волны в среде с частотной дисперсией

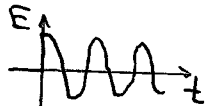


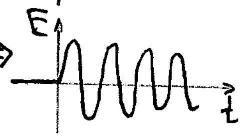
Волна при $x=0$:

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ Ae^{-i\omega_0 t - \gamma t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma \ll \omega_0, \quad A \in \mathbb{C}$$

* Вообще, $\vec{E} \backsim \operatorname{Re}\left(Ae^{-i\omega_0 t - \gamma t}\right)$,

действ. $A \Rightarrow$ 

мнимая $A \Rightarrow$ 

* Это – граничная задача, дано $\vec{E}(t)$ на границе,

$\vec{E}(t) \longrightarrow \vec{E}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$

$k(\omega) \in \mathbb{C} \rightarrow \vec{E}(x,t)$

Бывает ещё начальная задача:
дано $E(\vec r)$ везде при $t=0$

$\vec E(\vec r) \longrightarrow \vec E(\vec k)$, $\vec k \in \mathbb{R}$

$\omega(\vec k) \in \mathbb{C} \longrightarrow \vec E(\vec r,t)$

Ищем $E(x,t)$:

$$E(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty A e^{-i\omega_0 t-\gamma t}\cdot e^{i\omega t}\,dt =$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}\,(\gamma+i\omega_0-i\omega)} = \frac{iA}{\sqrt{2\pi}\,(\omega-\omega_0+i\gamma)}$$

Э/м волна: $\omega^2=\dfrac{k^2c^2}{\varepsilon(\omega)}$

$$k(\omega)=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}$$

$$\boxed{E(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)\,e^{ik(\omega)x-i\omega t}\,d\omega}$$

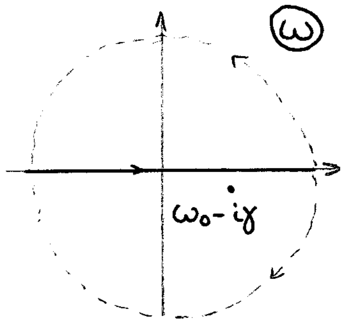
Осн. вклад – от $\omega\approx\omega_0$:

$$k(\omega)=\underbrace{k(\omega_0)}_{k_0}+\underbrace{\frac{dk}{d\omega}}_{1/v_g}(\omega-\omega_0)+\ldots$$

$$E(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{iA}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{d\omega}{(\omega-\omega_0+i\gamma)}\cdot$$

$$\cdot e^{ik_0x-i\omega_0 t}\cdot e^{i\frac{x}{v_g}(\omega-\omega_0)-i(\omega-\omega_0)t}=$$

$$=\frac{iA}{2\pi}e^{ik_0x-i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\left(\frac{x}{v_g}-t\right)(\omega-\omega_0)}}{\omega-\omega_0+i\gamma}\,d\omega$$



Замыкаем контур:

$\dfrac{x}{v_g}-t>0 \Rightarrow$ сверху

$\dfrac{x}{v_g}-t<0 \Rightarrow$ снизу

(чтобы эксп. убывала при больших $\mathrm{Im}\,\omega$)

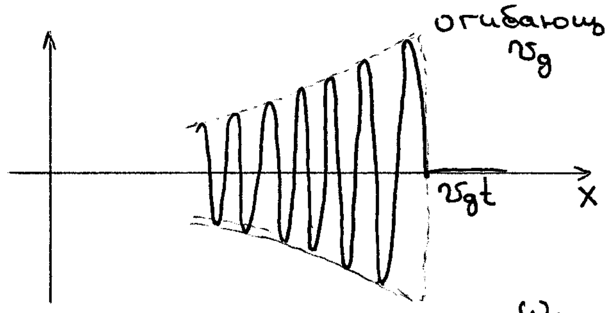
$\Downarrow$

$E=0$ при $x>v_g t$,

При $x<v_g t$:

$$E=\frac{iA}{2\pi}e^{ik_0x-i\omega_0 t}\cdot(-2\pi i)\,e^{i\left(\frac{x}{v_g}-t\right)(-i\gamma)}=$$

$$=Ae^{ik_0x-i\omega_0 t}\cdot e^{\gamma\left(\frac{x}{v_g}-t\right)}$$



„наполнение", $v_\varphi=\dfrac{\omega_0}{k_0}$

Учёт $\dfrac{d^2k}{d\omega^2}\Rightarrow$ расплывание фронта

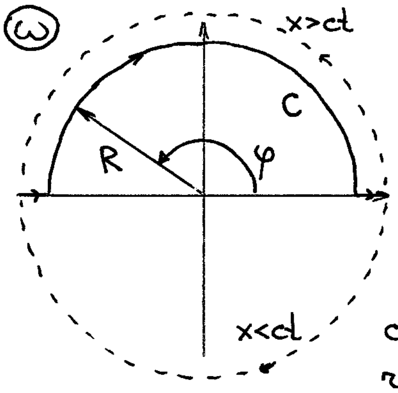
(1.16) Предвестник

Создаётся гармониками с $\omega\to\infty$, т.к. для них $\varepsilon\to1$ (как вак.)

$$E(x,t)=\frac{iA}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega-\omega_0+i\gamma}\,e^{ik(\omega)x-i\omega t}$$

если $\varepsilon(\omega)=1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$,

то $k(\omega)=\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\approx\dfrac{\omega}{c}\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$



$\varepsilon(\omega)$ – аналитич. при $\mathrm{Im}\,\omega>0$, м. показ. $\varepsilon(\omega)\neq0$

$\Downarrow$

под интегр. – ан. ф.

$\Downarrow$

сдвинем контур, чтобы $|\omega|\gg\omega_{\text{среды}}$

$$E=\frac{iA}{2\pi}\int_C\frac{d\omega}{\underbrace{\omega-\omega_0+i\gamma}_{\text{мало (но отв. за осн. импульс)}}}\,e^{i\frac{\omega x}{c}\left(1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)-i\omega t}=$$

$$=\frac{iA}{2\pi}\int_C\frac{d\omega}{\omega}\,e^{i\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)-ix\omega_p^2/2\omega c}$$

$x > ct \Rightarrow$ замык. сверху, $E = 0$

$x < ct \Rightarrow$ снизу, преобр. в окр-ть:
(т.к. $\omega = 0$ - сущ. особая)

$$\omega = Re^{i\varphi}, \quad d\omega = iRe^{i\varphi}d\varphi$$

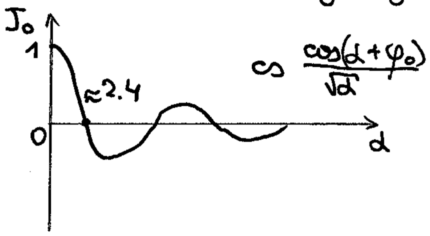
$$E = \frac{iA}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} i\,d\varphi \cdot \exp\left(\frac{iRe^{i\varphi}}{c}(x-ct) - i\frac{x\omega_p^2}{2cR}e^{-i\varphi}\right)$$

Выберем $R = \sqrt{\frac{x\omega_p^2}{2(ct-x)}}$,

$$E = \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cdot \exp\left(-i\frac{\omega_p}{c}\sqrt{2x(ct-x)}\cos\varphi\right)$$

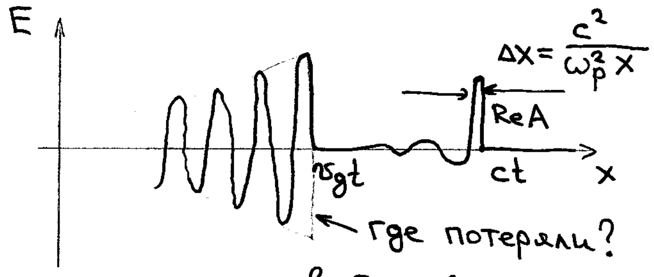
т.к. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, e^{-i\alpha\cos\varphi} = J_0(\alpha)$

Функция Бесселя



$$E(x,t) = \text{Re}\, A \cdot J_0\left(\frac{\omega_p}{c}\sqrt{2x(ct-x)}\right)$$

вспомнили, было в уме



Если осн. имп. включается плавно ($\text{Re}A = 0$, $\text{Im}A \neq 0$), то предв. нет

(1.17) Связь $\varepsilon_{\alpha\beta}$ с ε, μ, σ.

Есть два подхода. Соотнесём их.

Пусть $\varepsilon, \mu, \sigma = \text{const}$, $\varepsilon_{\alpha\beta} = ?$

$\vec{E} \sim e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$, ищем $\vec{j}$:

$$\vec{j} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + c\,\text{rot}\,\vec{M} + \sigma\vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B} - \vec{H}}{4\pi} = \frac{1 - 1/\mu}{4\pi}\vec{B} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega}[\vec{k}\times\vec{E}]$$

$$\vec{j} = -i\omega\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E} + \sigma\vec{E} + c\frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\cdot\frac{c}{\omega}\underbrace{[i\overset{a}{\vec{k}}\times[\overset{b}{\vec{k}}\times\overset{c}{\vec{E}}]]}_{i(\vec{k}(\vec{k}\vec{E}) - \vec{E}k^2)}$$

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}E_\beta$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -i\omega\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\delta_{\alpha\beta} + \sigma\delta_{\alpha\beta} + \frac{ic^2(\mu - 1)}{4\pi\mu\omega}\left(k_\alpha k_\beta - k^2\delta_{\alpha\beta}\right)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}\delta_{\alpha\beta} + \frac{(\mu - 1)c^2}{\mu\omega^2}\left(k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta\right)}$$

$\sigma \neq 0 \Rightarrow$ полюс при $\omega = 0$
$\mu \neq 0 \Rightarrow$ + простр. дисп.
} при $\omega \to 0$ удобнее э/Д

5 лекция, 4.10

6 лекция, 11.10

(1.18) Диссипация энергии волны

Тензоры $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ содержат инфо о св-вах среды и о волнах, какие в ней могут быть. В т.ч. как они затухают и сколько в них энергии

Ур-я Максв. без $\hat{\varepsilon}$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}(\vec{j}+\vec{j}_{\text{стор}}) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\cdot\vec{E} \\ &\ominus \\ &\cdot\vec{B} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\vec{E}\operatorname{rot}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{rot}\vec{E}}_{-\operatorname{div}[\vec{E}\times\vec{B}]} = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+B^2) + \left. + \frac{4\pi}{c}\vec{E}(\vec{j}+\vec{j}_{\text{стор}}) \right| \cdot\frac{c}{4\pi}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}\right)}_{\text{энергия поля}} + \operatorname{div}\underbrace{\left(\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{B}]\right)}_{\text{поток э/м энергии}} = - \underbrace{\vec{E}\vec{j}}_{\substack{\text{работа поля} \\ \text{над токами среды} \\ \text{(диссипация)}}} - \underbrace{\vec{E}\vec{j}_{\text{стор}}}_{\substack{\text{работа поля над} \\ \text{стор. токами}}}$$

Мощность диссипации: $Q = \langle \vec{E}\vec{j} \rangle$

по периоду волны

Пусть $\omega \in \mathbb{R}$ (удобнее граничная задача)

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}(q)e^{iq\xi} + \vec{E}^*(q)e^{-iq\xi}\right)$$

$$q = (\vec{k}, -\omega), \quad \xi = (\vec{r}, t)$$

(т.к. $\operatorname{Re} AB \neq \operatorname{Re} A\cdot\operatorname{Re} B$, то держать „Re" в уме опасно)

$$\vec{j} = \frac{1}{2}\left(\vec{j}(q)e^{iq\xi} + \text{к.с.}\right)$$

$$Q = \frac{1}{4}\left\langle \vec{E}\vec{j}e^{2iq\xi} + \vec{E}\vec{j}^* + \text{к.с.}\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{E}\vec{j}^* + \vec{E}^*\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(E_\alpha^*\sigma_{\alpha\beta}E_\beta + E_\beta\sigma_{\beta\alpha}^*E_\alpha^*\right) =$$

$$= \frac{1}{4}E_\alpha^*E_\beta\left(\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\alpha}^*\right)$$

$\forall$ тензор:

$$a_{\alpha\beta} = \underbrace{\frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}^*)}_{\text{эрмитов, } a^{H}_{\alpha\beta}} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}^*)}_{\text{антиэрмит., } a^{A}_{\alpha\beta}}$$

$$a^{H}_{\alpha\beta} = a^{H*}_{\beta\alpha} \qquad a^{A}_{\alpha\beta} = -a^{A*}_{\beta\alpha}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\sigma^{H}_{\alpha\beta}E_\alpha^*E_\beta}$$

$$\varepsilon^{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\delta_{\alpha\beta}} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{\alpha\beta} - \cancel{\delta^*_{\beta\alpha}} - \frac{4\pi(-i)}{\omega^*}\sigma^*_{\beta\alpha}\right)$$

$$= \frac{4\pi i}{\omega}\sigma^{H}_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{Q = -\frac{i\omega}{8\pi}\varepsilon^{A}_{\alpha\beta}E_\alpha^*E_\beta}$$

верно и для затух. волн ($\omega \notin \mathbb{R}$), но теряет строгий смысл

1.19 Энергия волны

$$\begin{pmatrix}\text{Энергия}\\\text{волны}\end{pmatrix} = \left\langle\begin{matrix}\text{Энергия}\\\text{среды}\\\text{с волной}\end{matrix}\right\rangle - \left\langle\begin{matrix}\text{энергия}\\\text{среды}\\\text{без волны}\end{matrix}\right\rangle$$

(имеет смысл при слабом затухании)

Пусть волна была и затухла (нач. зад.)

энергия волны = диссипир. энергия

Пусть $\vec{E} \propto e^{-\gamma t} \Rightarrow Q \propto e^{-2\gamma t}$

$$\frac{dW}{dt} = -Q = -Q_0e^{-2\gamma t}$$

$$W_0 = \int_0^\infty Q\,dt = \frac{Q_0}{2\gamma} \Rightarrow \boxed{W = \frac{Q}{2\gamma}}$$

Найдём γ: $\omega = \omega_0 - i\gamma$, $\gamma \ll \omega_0$

$$\Big(\underbrace{k_\alpha k_\beta - k^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{H}_{\alpha\beta}}_{L^0_{\alpha\beta}} + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{A}_{\alpha\beta}}_{\substack{\text{мала, т.к.}\\\text{затух. слабое}}}\Big)E_\beta = 0$$

Последовательные приближения:

0 порядок: $L^0_{\alpha\beta}E^0_\beta = 0$

находим $\omega_0(\vec{k})$, $\vec{E}^0$

1 порядок:

$$\left(L^0_{\alpha\beta}(\omega_0 - i\gamma) + \frac{\omega_0^2}{c^2}\,\varepsilon^A_{\alpha\beta}(\omega_0)\right)E^1_\beta = 0$$

Чтобы малые слагаемые сыграли свою роль, нужно убрать (сократить) большие:

$$\left(L^0_{\alpha\beta}(\omega_0) - i\gamma\frac{\partial L^0_{\alpha\beta}}{\partial\omega_0} + \frac{\omega_0^2}{c^2}\,\varepsilon^A_{\alpha\beta}(\omega_0)\right)E^1_\beta = 0$$

$$\downarrow$$

$$E^{0*}_\alpha \underbrace{L^0_{\alpha\beta}(\omega_0)}_{\text{эрмитов}} E^1_\beta = E^1_\beta\left(L^0_{\beta\alpha}E^0_\alpha\right)^* = 0$$

теперь можно не писать

$$\left(-i\gamma\frac{\partial L^0_{\alpha\beta}(\omega_0)}{\partial\omega_0} + \frac{\omega_0^2}{c^2}\,\varepsilon^A_{\alpha\beta}(\omega_0)\right)E^{0*}_\alpha E^1_\beta = 0$$

теперь можно не различать ω и ω_0, $L^0_{\alpha\beta}$ и $L_{\alpha\beta}$

$$\boxed{\gamma = -\frac{i\omega^2\,\varepsilon^A_{\alpha\beta}(\omega)\,E^*_\alpha E_\beta}{c^2\,\frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial\omega}\,E^*_\alpha E_\beta}}$$

$$\boxed{W = \frac{c^2}{16\pi\omega}\frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial\omega}E^*_\alpha E_\beta = \frac{1}{16\pi\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^2\varepsilon_{\alpha\beta}\right)E^*_\alpha E_\beta}$$

Пример: э/м волна в диэлектрике

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\,\delta_{\alpha\beta}$$

$$W = \frac{1}{16\pi\omega}\,\varepsilon\cdot 2\omega\,E^*_\alpha E_\alpha = \frac{\varepsilon|E|^2}{8\pi}$$

(если $\varepsilon(\omega)$, то не так)

(1.20) Импульс волны

Через имп. среды: $\dfrac{d\vec p}{dt} = \left\langle \rho\vec E + \frac{1}{c}[\vec j\times\vec B]\right\rangle$

$$\vec k, \omega: \quad \vec B = \frac{c}{\omega}[\vec k\times\vec E]$$

$$\frac{d\vec p}{dt} = \left\langle \rho\vec E + \frac{1}{\omega}[\overset{a}{\vec j}\times[\overset{b}{\vec k}\times\overset{c}{\vec E}]]\right\rangle =$$

$$= \left\langle \rho\vec E + \frac{\vec k}{\omega}(\vec j\vec E) - \vec E\frac{(\vec k\vec j)}{\omega}\right\rangle = \frac{\vec k}{\omega}Q$$

$=0$, т.к.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec j = 0 \Rightarrow -i\omega\rho + i\vec k\vec j = 0$$

Плотн. имп. волны: $\boxed{\vec{\mathcal{P}} = \dfrac{\vec k}{\omega}W}$

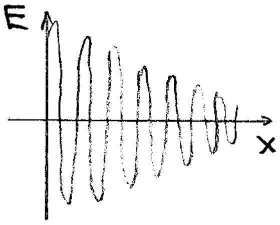
Квантовая трактовка:

в волне $N = \dfrac{W}{\hbar\omega}$ $\dfrac{\text{квантов}}{\text{см}^3}$

$$W = N\cdot\hbar\omega, \quad \vec{\mathcal{P}} = N\cdot\hbar\vec k$$

(1.21) Поток энергии волны

Теперь пусть волна затух. в пр-ве:



$$E \sim e^{ik_0x - i\omega t - \varkappa x}$$

$$k_x = k_0 + i\varkappa$$

$$\omega\in\mathbb{R}, \quad \varkappa \ll k_0$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = -Q = -Q_0e^{-2\varkappa x} \Rightarrow S_x = \frac{Q}{2\varkappa}$$

0 пор: $L^0_{\alpha\beta}(k_0)E^0_\beta = 0 \Rightarrow k_0(\omega), \vec E^0$

1 пор: $E^{0*}_\alpha\left(L^0_{\alpha\beta}(k_0) + i\varkappa\dfrac{\partial L^0_{\alpha\beta}}{\partial k_x} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^A_{\alpha\beta}\right)E^1_\beta = 0$

$$\varkappa = \frac{i\omega^2\,\varepsilon^A_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta}{c^2\,\frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial k_x}E^*_\alpha E_\beta}$$

$$S_x = -\frac{c^2}{16\pi\omega}\frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial k_x}E^*_\alpha E_\beta$$

$$\boxed{\vec S = -\frac{c^2}{16\pi\omega}\frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial\vec k}E^*_\alpha E_\beta}$$

плотность потока энергии

6 лекция, 11.10

---

7 лекция, 18.10

В пр-ве $(\vec k,\omega)$ на пов-ти $\omega(\vec k)$:

$$L_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta = 0,$$

„сместимся" на $d\vec k$:

$$\left(\frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial\vec k}d\vec k + \frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\vec k}d\vec k\right)E^*_\alpha E_\beta +$$

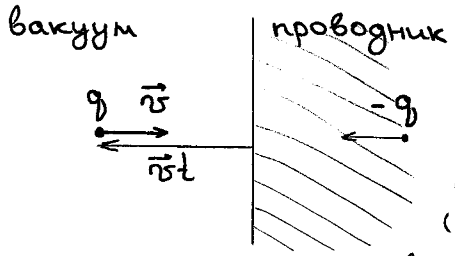
$$+ L_{\alpha\beta}\left(\cancel{\frac{\partial E^*_\alpha}{\partial\vec k}E_\beta + E^*_\alpha\frac{\partial E_\beta}{\partial\vec k}}\right)d\vec k = 0$$

0, если $L_{\alpha\beta}\approx L^H_{\alpha\beta}$ (пусть) верно $\forall\, d\vec{k} \Rightarrow \left(\frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial \vec{k}} + \frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}\right) E_\alpha^* E_\beta = 0$

$$\boxed{\vec{S} = W\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \vec{v}_g W}$$

1.22 Переходное излучение

В вак. заряж. част. излучает, если ускор-ся.
В среде м. изл. без ускорения, если среда не однородна. Рассм. на самом прост. прим:

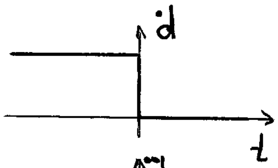


$v \ll c$
$\Downarrow$
метод изобр.
(даёт поля в левом полупр-ве)

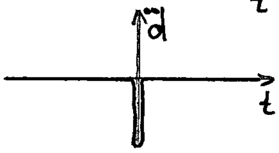
Найдём мощность дип. излучения:

Дип. момент: $\vec{d} = \begin{cases} 2q\vec{v}t, & t<0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

$\dot{\vec{d}} = \begin{cases} 2q\vec{v}, & t<0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$



$\ddot{\vec{d}} = -2q\vec{v}\,\delta(t)$



Полная мощность дип. изл. $\propto (\ddot{\vec{d}})^2$.

Возв. в квадрат обобщ. ф-ю нехорошо, поэтому найдём спектр. мощность:

$$\ddot{\vec{d}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\vec{d}}(t) e^{i\omega t}\, dt = -\frac{2q\vec{v}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2}{3}\frac{(\ddot{\vec{d}}(\omega))^2}{c^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{4q^2v^2}{3\pi c^3}$$

энергия изл. в полупр-ва   считаем $\omega > 0$

Формально $\int_0^\infty \frac{dI}{d\omega}\, d\omega = \infty$, но

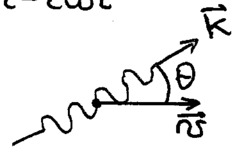
при $\omega \to \infty$ $\varepsilon(\omega) \to 1$, как вак.,
метод изобр. не работает

1.23 Черенковское излучение

(част. бежит быстрее волны)

Э/м волна: $\vec{E} \propto e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$

Частица: $\vec{r} = \vec{v}t$



Эл. сила на частицу:

$$q\vec{E}(\vec{r},t) \propto e^{i\vec{k}\vec{v}t - i\omega t} = e^{i(\vec{k}\vec{v} - \omega)t}$$

$\boxed{\omega = \vec{k}\vec{v}} \Rightarrow$ пост. эл. поле, эффективный обмен энергией

$\uparrow$
усл. Черенковского резонанса

Если $\omega = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$ и $\omega = kv\cos\theta$,

то $\cos\theta = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$;

д.б. $\cos\theta < 1 \Rightarrow$ нужно $v \approx c$,
$\varepsilon > 1$ (для э/м)

(вообще м.б. чер. изл. других волн)

Это излуч. не связано с ускор. частицы, не зав. от массы, не связ. с диссипац. Если волны нет, она возникает.

Спектральная мощность излучения

$$\vec{j}_{ст}(\vec{r},t) = q\vec{v}\,\delta(\vec{r} - \vec{v}t)$$

$$\vec{j}_{ст}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int q\vec{v}\,\delta(\vec{r}-\vec{v}t)\, e^{-i\vec{k}\vec{r}+i\omega t}\cdot d\vec{r}\,dt =$$

$$= \frac{q\vec{v}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\vec{k}\vec{v}-\omega)t}\, dt = \frac{q\vec{v}}{2\pi}\,\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega}[\vec{k}\times\vec{E}]$$

$$[\cancel{i}\vec{k}\times\vec{B}] = -\frac{\cancel{i}\omega}{c}\vec{D} + \frac{4\pi}{ci}\vec{j}_{ст}$$

$$\underbrace{[\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{E}]]}_{\vec{k}(\vec{k}\vec{E}) - k^2\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\vec{E} + \underbrace{\frac{4\pi\omega}{ic^2}\cdot\frac{q\vec{v}}{2\pi}\,\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}_{A\vec{v}}$$

$\vec{k}\cdot(\text{ур-е})$: $\quad \vec{k}\vec{E} = \dfrac{A c^2}{\omega^2\varepsilon}(\vec{k}\vec{v})$

$$\vec{E}\left(\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2} - k^2\right) = A\left(\vec{v} - \frac{c^2}{\omega^2\varepsilon}\vec{k}(\vec{k}\vec{v})\right)$$

$$\vec{E}(\vec{k},\omega) = \frac{2q\omega\,\delta(\omega-\vec{k}\vec{v})}{ic^2\left(\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}-k^2\right)}\left(\vec{v} - \frac{c^2\vec{k}(\vec{k}\vec{v})}{\omega^2\varepsilon}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \vec{E}(\vec{k},\omega)\,e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\,d\vec{k}\,d\omega$$

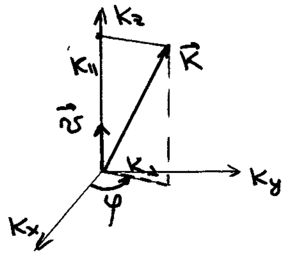
Мощность: $I = -q\vec{E}(\vec{v}t,t)\vec{v}$

ищем работу заряда над полем

$\omega = \vec{k}\vec{v}$

$$I = \frac{iq^2(-1)}{2\pi^2c^2}\int\frac{\omega\,\delta(\omega-\vec{k}\vec{v})}{k^2-\omega^2\varepsilon/c^2}\cdot \cancel{e^{i\vec{k}\vec{v}t-i\omega t}}\,\cdot$$

$$\cdot\left(v^2 - \frac{c^2\cancel{(\vec{k}\vec{v})^2}}{\cancel{\omega^2}\varepsilon}\right)d\vec{k}\,d\omega$$



$d\vec{k} = k_\perp dk_\perp dk_\parallel d\varphi$

$\Big\downarrow \int\ldots d\varphi$

$2\pi k_\perp dk_\perp dk_\parallel =$

$= \pi\, dk_\perp^2\,\dfrac{d(\vec{k}\vec{v})}{v}$

$$I = -\frac{iq^2}{2\pi c^2 v}\int\frac{\omega(v^2-c^2/\varepsilon)\cdot dk_\perp^2\,d\omega}{k_\perp^2+\omega^2/v^2-\omega^2\varepsilon/c^2}$$

описывает также „ионизационные" потери

Отделим ионизационные потери:

$\operatorname{Im}\varepsilon\to 0, \quad \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad \varepsilon''\to 0$

$$I = -\frac{iq^2}{2\pi c^2 v}\int_0^\infty dk_\perp^2\int_0^\infty d\omega\,\cdot$$

мала при $\varepsilon'\neq 0$ (пусть)

$$\cdot\sum_{\pm}\frac{(\pm\omega)(v^2-c^2/(\varepsilon'\pm \cancel{i\varepsilon''}))}{k_\perp^2+\omega^2/v^2-\omega^2(\varepsilon'\pm i\varepsilon'')/c^2}$$

(выбросили черенк. изл. прод. волн)

$$\frac{A}{B-iC} - \frac{A}{B+iC} = \frac{2iAC}{B^2-C^2}\xrightarrow[C\to 0]{} 2\pi i A\,\delta(B)$$

$$I = -\frac{iq^2}{\cancel{2\pi}c^2 v}\int_0^\infty d\omega\int_0^\infty dk_\perp^2\,\cdot$$

$$\cdot\cancel{2\pi} i\,\omega\left(v^2-\frac{c^2}{\varepsilon'}\right)\underbrace{\delta\left(k_\perp^2+\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{\omega^2\varepsilon'}{c^2}\right)}$$

даст 1, если $\dfrac{\omega^2}{v^2} - \dfrac{\omega^2\varepsilon'}{c^2} < 0$,

т.е. $v > \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ ← штрих уже можно опустить

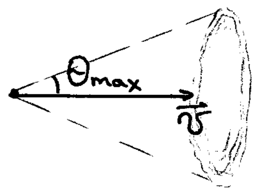
$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{q^2\omega}{c^2 v}\underbrace{\left(v^2-\frac{c^2}{\varepsilon}\right)}\cdot\begin{cases}1, & v > c/\sqrt{\varepsilon}\\ 0, & v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\end{cases}$$

$$v^2\left(1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon}\right) = v^2(1-\cos^2\theta)$$

$$\boxed{\frac{dI}{d\omega} = \frac{q^2\omega v}{c^2}\sin^2\theta}$$

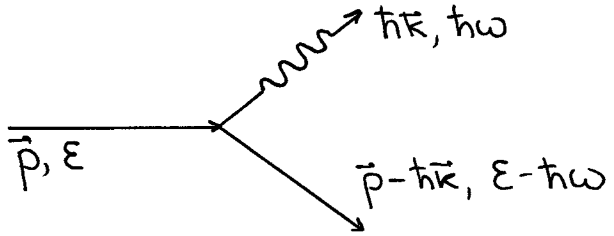
Энергия излучается полым конусом:

$$\cos\theta_{max} = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_{max}}}$$



(поперечная волна не может излучаться строго вперёд)

На квантовом „языке":



$$\omega = \frac{\Delta\varepsilon}{\hbar} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec{p}}\frac{\hbar\vec{k}}{\hbar} = \frac{\vec{p}c^2}{\varepsilon}\vec{k} = \vec{k}\vec{v}$$

$$\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow \varepsilon\,d\varepsilon = \vec{p}\,d\vec{p}\cdot c^2$$

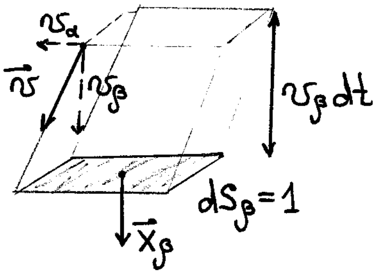
усл. резонанса $\Leftrightarrow$ зак. сохр. э-и при излуч. кванта

7 лекция, 18.10

8 лекция, 25.10

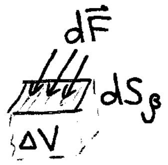
Часть II. Гидродинамика

(2.1) Уравнения идеальной жидкости



Идеальная $\Rightarrow$ нет вязкости, теплопров-ти

Жидкость – и газ тоже



Из-за $d\vec{F}$ объём ΔV приобр. импульс $d\vec{F}\cdot dt$, через ед. площади за ед. времени $d\vec{F}/dS_\beta$

характ. масшт. задачи $\gg$ масшт. усредн. $\gg$ длина своб. пробега $\gtrsim$ расст. между част.

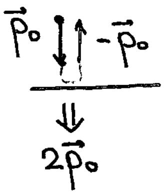
д.б. локальное термод. равн.

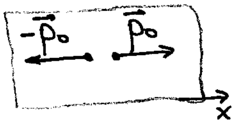
$\Downarrow$

Сост. системы: $\rho(\underbrace{\vec{r},t}), \vec{v}(\vec{r},t), p(\vec{r},t)$

Эйлеровы координаты

$\Pi_{\alpha\beta} \neq 0$ даже при $\vec{v}=0$: т.к. имп. – векторная величина





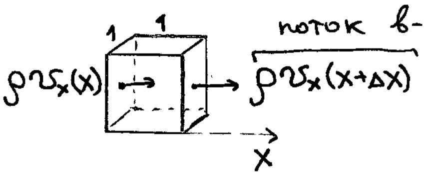
2 молекулы: $2\vec{p}_0$ по $\vec{x}$

или $-2\vec{p}_0$ по $-\vec{x}$

(одно и то же)

Ур-я: (из законов сохранения)

массы: $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0} \qquad (1)$$



$$\text{разность} = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x}\underbrace{\Delta x}_{=1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\substack{\text{изм. массы}\\ \text{ед. объёма}}} = -\underbrace{\frac{\partial \rho v_\beta}{\partial x_\beta}}_{\substack{\text{разность потоков}\\ \text{в 3 направлениях}}}$$

Вообще, (неид. жидк, тв. тело)

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + \overbrace{p_{\alpha\beta}}^{\text{тензор давления}} =$$

$$= \rho v_\alpha v_\beta - \underbrace{\pi_{\alpha\beta}}_{\text{тензор напряжений}}$$

импульса:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t}}_{\substack{\text{изм. }\alpha\text{-импульса}\\ \text{в ед. объёма}\\ \text{за ед. времени}}} = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\underbrace{\overbrace{\Pi_{\alpha\beta}}^{\substack{\text{тензор плотности}\\ \text{потока импульса}}}}_{\substack{\text{поток }\alpha\text{-импульса}\\ \text{в напр. }\beta}} + \underbrace{\rho g_\alpha + \dots}_{\text{внешние силы}}$$

Вернёмся к ур-ям:

$$\frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho v_\alpha v_\beta) - \frac{\partial(p\delta_{\alpha\beta})}{\partial x_\beta} + \rho g_\alpha$$

$$\rho\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \underbrace{v_\alpha\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_\alpha\frac{\partial \rho v_\beta}{\partial x_\beta}}_{=0,\ \text{ур-е непр.}} + \rho v_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} =$$

$$= \rho\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)}v_\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \rho g_\alpha$$

полная производная, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)$,

измен. величины в точке, кот. движ. вместе с жидк. (изм. характеристик эл-та жидк-ти):

$$\frac{dA(\vec{r}(t),t)}{dt} = \left.\frac{\partial A}{\partial \vec{r}}\right|_t\frac{d\vec{r}}{dt} + \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{\vec{r}} =$$

$$= \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial A}{\partial \vec{r}}$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \underbrace{\overset{\text{масса этой жидк.}}{\rho v_\alpha v_\beta}}_{\substack{\alpha\text{-имп. жидк-ти,}\\ \text{прошедшей через}\\ dS_\beta=1 \text{ за } dt=1}} + \underbrace{\frac{dF_\alpha}{dS_\beta}}_{\substack{\alpha\text{-сила}\\ \text{на площадку } dS_\beta}} \overset{\text{ид. жидкость}}{=} \rho v_\alpha v_\beta + p\,\delta_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{\rho \frac{d\vec v}{dt} = -\nabla p + \rho \vec g} \quad (2)$$

Ур-е Эйлера

$$\boxed{\frac{dS(p,\rho)}{dt}=0} \quad (3)$$

S – энтропия ед. массы

(т.к. теплообмена и тепловыд. нет)

Упрощения:

- Изэнтропическое течение, $S\equiv \text{const}$ (при $t=0 \Rightarrow \forall t$) $\Rightarrow p=p(\rho)$
  (где не оговорено особо, считаем так)
- Несжим. жидкость:
  $\rho = \text{const}$, $\operatorname{div}\vec v=0$, но $p\ne \text{const}$
  (имеющееся p меняет ρ пренебр. мало)

Применимость (пусть $\vec g=0$):

сравним $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, $(\vec v\nabla)\rho$, $\rho\operatorname{div}\vec v$ в (1)

если $\frac{\delta\rho}{\tau}\ll\frac{\rho v}{L}$, $\frac{v\,\delta\rho}{L}\ll\frac{\rho v}{L}$,

то $\rho\operatorname{div}\vec v \ll \frac{\rho v}{L} \Rightarrow \operatorname{div}\vec v\approx 0$

Из (2): $\rho\left(\frac1\tau+\frac vL\right)v \sim \frac{\delta p}{L}\sim\frac{\delta\rho}{L}\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S}_{}$

(скор. звука)$^2 = c_s^2$

$$\delta\rho \sim \frac{\rho L v}{c_s^2\,\tau} \ll \rho$$

д.б. «

$$\boxed{v\ll c_s}$$

2.2 Лагранжевы координаты

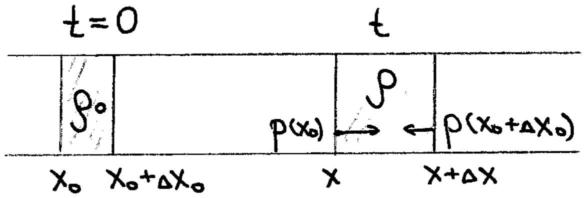
(привязка к жидк-ти, а не к пр-ву)

$\rho(\vec r_0,t)$, $p(\vec r_0,t)$, $\vec r(\vec r_0,t)$; $\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}$

↑ полож. эл-та при $t=0$

Удобны только в одномерных задачах

Одномерная задача:



Ур. непр: $\rho_0\Delta x_0=\rho\Delta x$

$$\rho(x_0,t)=\frac{\rho_0(x_0)}{\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t}$$

← В 3d здесь будет якобиан

Ур. движ: $\underbrace{\rho\Delta x}_{=\rho_0\Delta x_0}\frac{\partial^2x}{\partial t^2} = p(x_0)-p(x_0+\Delta x_0)+\rho\Delta x\, g$

$$\rho_0\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial x_0}+\rho_0 g$$

Ур. адиаб: $\frac{\partial S(p(x_0,t),\rho(x_0,t))}{\partial t}=0$

2.3 Теорема Бернулли

Пусть $\frac{\partial}{\partial t}=0$,

w – энтальпия ед. массы,

$$\frac{dw}{\partial\vec r}=T\frac{dS}{\partial\vec r}+\frac1\rho\frac{dp}{\partial\vec r}$$

$$\cancelto{0}{\frac{\partial\vec v}{\partial t}}+\underbrace{(\vec v\nabla)\vec v}_{\|}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\vec g$$

$$\nabla\frac{v^2}{2}-\vec v\times\operatorname{rot}\vec v = T\nabla S-\nabla w+\nabla(\vec g\vec r)$$

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2}+w-\vec g\vec r\right)=\underbrace{\vec v\times\operatorname{rot}\vec v}_{\perp\vec v}+\underbrace{T\nabla S}_{\perp\vec v,\ \text{т.к.}}$$

$$\frac{dS}{dt}=(\vec v\nabla)S=0$$

$$\boxed{\frac{v^2}{2}+w-\vec g\vec r=\text{const}}$$

вдоль линии тока ($\parallel\vec v$)

($S\equiv \text{const}$ не требуется)

Следствия:

а) Несж. жидк. ($\rho = \text{const}$) и $s \equiv \text{const}$:

$$dw = \frac{dp}{\rho}, \quad w = \frac{p}{\rho} + \text{const}$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \vec{g}\vec{r} = \text{const}$$

8 лекция, 25.10

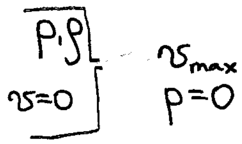
9 лекция, 1.11

б) Ид. газ: $p = A\rho^\gamma, \quad dp = \gamma A \rho^{\gamma-1} d\rho$

$$w = \int \frac{\gamma A \rho^{\gamma-1} d\rho}{\rho} = \frac{A\gamma\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} + w_0 = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} + w_0$$

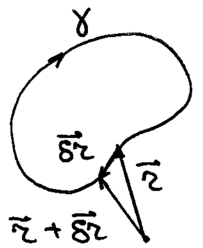
$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} - \vec{g}\vec{r} = \text{const}$$

в) Макс. скорость истечения газа в вакуум:



$$\frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} = \frac{v_{max}^2}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma p}{\rho} \Rightarrow v_{max} = c_s\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$$

2.4 Теорема Томсона



$$\Gamma = \oint_\gamma \vec{v}\,\delta\vec{r}$$

(циркуляция скорости по жидкому контуру γ)

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_\gamma \frac{d\vec{v}}{dt}\delta\vec{r} + \oint_\gamma \vec{v}\frac{d\delta\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} \overset{s\equiv\text{const}}{=} -\nabla w + \nabla(\vec{g}\vec{r})$$

$$\frac{d\delta\vec{r}}{dt} = \frac{\delta d\vec{r}}{dt} = \delta\vec{v}$$

т.к. дифференциалы соотв. приращен. независимых лагр. координат

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_\gamma \nabla(-w + \vec{g}\vec{r})\delta\vec{r} + \oint_\gamma \delta\frac{v^2}{2} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\Gamma = \text{const}$$

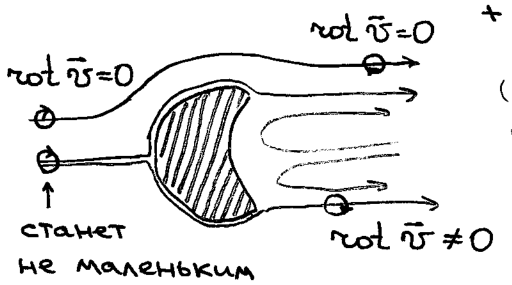
Малый контур:

$$\oint \vec{v}\,\delta\vec{r} = \text{rot}\,\vec{v}\cdot d\vec{S} = \text{const}$$

2.5 Потенциальное течение

$\text{rot}\,\vec{v} = 0$ при $t = 0 \Rightarrow \forall t$,

но есть исключение: тв. тело + отрыв струй (пока не обсуждаем)



Ур-я становятся простыми:

$$\text{rot}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \nabla\varphi \quad (1)$$

потенциал скорости

Если + несжимаемость:

Непр: $\text{div}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0 \quad (2)$

Эйл: $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} + \nabla\frac{v^2}{2} - \cancel{\vec{v}\times\text{rot}\,\vec{v}} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla(\vec{g}\vec{r})$$

$$\nabla\underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \vec{g}\vec{r}\right)}_{= f(t)} = 0$$

$= f(t)$, можно счит. $f(t) = \text{const}$

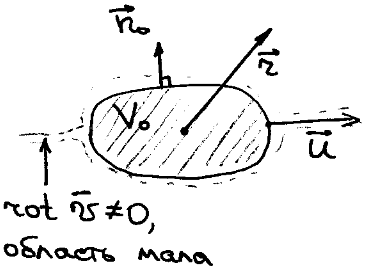
т.к. при $\varphi \to \varphi + \int f(t)\,dt$

$\vec{v}$ не меняется

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\vec{g}\vec{r}=\mathrm{const} \qquad (3)$$

Цепочка: φ из (2), $\vec{v}$ из (1),
p из (3)

2.6 Потенциальное обтекание тела



поступ. движ.
потенц. течение
Несж. жидк.
$\vec{v}\xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

Узнаем всё, что можно, без конкретизации формы

$$\Delta\varphi=0,\quad \varphi\xrightarrow[r\to\infty]{}0,\quad u_{n0}=v_{n0}=\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi=\frac{a}{r}+\vec{A}\nabla\frac{1}{r}+b_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i\partial x_k}\frac{1}{r}+\dots$$

(коэф-тов достаточно $\forall$ пов-ти)

т.к. коэф-тов много, то про движ. жидк. вблизи тела ничего сказать нельзя

$r\to\infty$: $\quad \vec{v}=\nabla\varphi\approx-\frac{a\vec{r}}{r^3}-\nabla\frac{\vec{A}\vec{r}}{r^3}=$

$\vec{n}=\vec{r}/r$

$$=-\cancel{\frac{a\vec{n}}{r^2}}+\frac{3(\vec{A}\vec{n})\vec{n}-\vec{A}}{r^3}$$

$a=0$, т.к. $V_0=\mathrm{const}$

$$\vec{v}\backsim\vec{u}\Rightarrow\vec{A}\backsim\vec{u}\Rightarrow A_i=\underline{\alpha_{ik}}\,u_k$$

конкр. вид зависит от формы тела

Энергия движ. жидк-ти:

(в шаре $R\to\infty$)

$$E=\int\limits_{V-V_0}\frac{\rho v^2}{2}dV=\frac{\rho}{2}\int\left[u^2+(\vec{v}+\vec{u})(\vec{v}-\vec{u})\right]dV=$$

$$=\frac{\rho u^2}{2}(V-V_0)+\frac{\rho}{2}\int\mathrm{div}\left[(\varphi+\vec{u}\vec{r})(\vec{v}-\vec{u})\right]dV,$$

т.к. $\mathrm{div}[\;]=$

$$=(\varphi+\vec{u}\vec{r})\underbrace{\cancel{\mathrm{div}(\vec{v}-\vec{u})}}_{0}+(\vec{v}-\vec{u})\underbrace{\nabla(\varphi+\vec{u}\vec{r})}_{\vec{v}+\vec{u}}$$

$$E=\frac{\rho u^2}{2}(V-V_0)+\frac{\rho}{2}\int\limits_{S,S_0}(\varphi+\vec{u}\vec{r})(\vec{v}-\vec{u})\,d\vec{S}$$

На пов-ти тела $(\vec{v}-\vec{u})d\vec{S}=$

$$=-v_{n0}+u_{n0}=0\Rightarrow\int\limits_{S_0}=0$$

На S: $\quad d\vec{S}=\vec{n}\cdot R^2d\Omega$

$$\varphi+\vec{u}\vec{r}=-\frac{\vec{A}\vec{r}}{r^3}+\vec{u}\vec{r}=-\frac{\vec{A}\vec{n}}{R^2}+R(\vec{u}\vec{n})$$

$$(\vec{v}-\vec{u})d\vec{S}=\left(\frac{3(\vec{A}\vec{n})\vec{n}-\vec{A}}{R^3}-\vec{u}\right)R^2\vec{n}\,d\Omega=$$

$$=\left(\frac{2(\vec{A}\vec{n})}{R}-R^2(\vec{u}\vec{n})\right)d\Omega$$

$$\int\limits_S\approx\int\left[-R^3(\vec{u}\vec{n})^2+3(\vec{A}\vec{n})(\vec{u}\vec{n})\right]d\Omega=$$

$$=\int\left[-R^3u_in_iu_kn_k+3A_in_iu_kn_k\right]d\Omega=$$

$$=\left(-R^3u_iu_k+3A_iu_k\right)\int n_in_k\,d\Omega=$$

$$=\left(-R^3u_iu_k+3A_iu_k\right)\frac{\delta_{ik}}{3}\cdot4\pi=$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left(-u^2R^3+3\vec{A}\vec{u}\right)$$

$$E=\frac{\rho u^2}{2}(\cancel{V}-V_0)+\frac{\rho}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\cancel{-u^2R^3}+3\vec{A}\vec{u}\right)=$$

$$=2\pi\rho(\vec{A}\vec{u})-\frac{\rho u^2}{2}V_0$$

$$E=\frac{1}{2}u_iu_k\underbrace{\left(4\pi\rho\alpha_{ik}-\rho V_0\delta_{ik}\right)}$$

m_{ik}, тензор присоединённых масс, симметричен (м. показать)

$$E=\frac{m_{ik}u_iu_k}{2}$$

9 лекция, 1.11

10 лекция, 8.11

Импульс

$$dE = \vec F d\vec l = \vec F \vec u\, dt = \vec u\, d\vec P$$

$\uparrow$ сила на жидк. со стор. тела

$m_{ik} = m_{ki}$

$$u_i dP_i = dE = \frac{m_{ik} u_i du_k}{2} + \frac{m_{ik} u_k du_i}{2} = $$

$$= m_{ik} u_i du_k, \quad \forall u_i \Rightarrow dP_i = m_{ik} du_k$$

$$P_i = m_{ik} u_k, \qquad \vec P = 4\pi\rho \vec A - \rho V_0 \vec u$$

Сила на тело:

$$F_{Ti} = -F_i = -\frac{dP_i}{dt} = -m_{ik}\frac{du_k}{dt}$$

$\vec u = \mathrm{const} \Rightarrow \vec F_T = 0$ (парадокс Даламбера)

$\vec u \neq \mathrm{const} \Rightarrow$ м.б. $\vec F_T \nparallel \frac{d\vec u}{dt}$

Ур-я движ. тела ($\vec g = 0$):

$$M\frac{d\vec u}{dt} = \vec f + \vec F_T$$

$$f_i = M\frac{du_i}{dt} + m_{ik}\frac{du_k}{dt} = $$

$$= \left(M\delta_{ik} + m_{ik}\right)\frac{du_k}{dt}$$

2.7 Вихревое движение жидкости

Несжим., $\mathrm{rot}\,\vec v \neq 0$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec v = 0 \\ \dfrac{\partial \vec v}{\partial t} + \nabla\dfrac{v^2}{2} - \vec v \times \mathrm{rot}\,\vec v = -\nabla\dfrac{p}{\rho} + \nabla(\vec g \vec r) \end{cases}$$

$\vec\omega = \mathrm{rot}\,\vec v$ – завихренность

вихревые линии $\parallel \vec\omega$

$$\underbrace{\frac{\partial\vec\omega}{\partial t} = \mathrm{rot}\left[\vec v\times\vec\omega\right]} = (\vec\omega\nabla)\vec v - (\vec v\nabla)\vec\omega$$

$\mathrm{div}\,\vec v = 0$

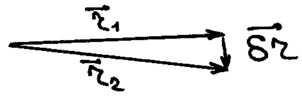
$\mathrm{div}\,\vec\omega = 0$

ур-е вмороженности ($\vec\omega$ в жидкость)

Разберёмся, откуда такое название

$$\frac{d\vec\omega}{dt} = (\vec\omega\nabla)\vec v$$

Пусть $\delta\vec r$ - эл-т жидкости:



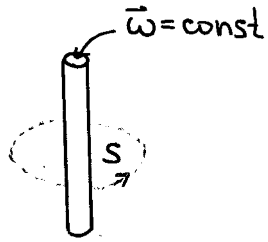
$$\frac{d\,\delta\vec r}{dt} = \frac{d(\vec r_2 - \vec r_1)}{dt} = \vec v_2 - \vec v_1 = (\delta\vec r\nabla)\vec v$$

(тот же закон изменения)

Если при $t=0$ $\vec\omega \parallel \delta\vec r$,

то $\forall t$ $\vec\omega \parallel \delta\vec r$, $|\vec\omega| \backsim |\delta\vec r|$

Примеры:



а) прямолинейный вихрь

$$\begin{cases} \vec\omega = (0, 0, \omega), & r < a \\ \vec\omega = 0, & r \geq a \end{cases}$$

$$\int_S \vec\omega\, d\vec S = \int \mathrm{rot}\,\vec v\, d\vec S = \oint \vec v\, d\vec l$$

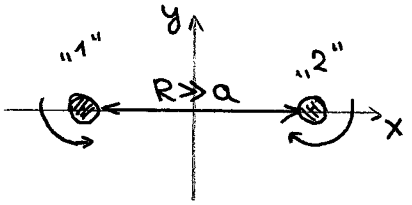
Снаружи: $\pi a^2\omega = 2\pi r v_\varphi$

$$v_\varphi = \frac{\omega a^2}{2r}$$

Внутри: $\pi r^2\omega = 2\pi r v_\varphi$, $v_\varphi = \frac{\omega r}{2}$

$$\frac{d\vec\omega}{dt} = (\underset{\parallel \vec z}{\vec\omega}\nabla)\underset{\parallel \vec z}{\vec v} = 0 \Rightarrow$$ стацион. картина

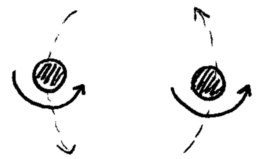
б) 2 вихря разного знака



«1» создаёт в точке «2» $v_y = \dfrac{\omega a^2}{2R}$

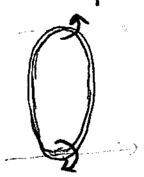
$\Rightarrow$ «1» и «2» двиг. по y с $v_y = \dfrac{\omega a^2}{2R}$

в) 2 вихря одинак. знака



$\Rightarrow$ вращение друг вокруг друга

г) вихревое кольцо



движ. как целое

(2.8) Звук

$\rho \neq \mathrm{const}$, ид. жидк.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \rho \vec{v} = 0 \\ \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} \\ \dfrac{ds}{dt} = 0 \end{cases}
\qquad
\begin{aligned} \rho &= \overset{\text{const}}{\rho_0} + \delta\rho \\ p &= p_0 + \delta p \\ s &= s_0 + \delta s \\ \vec{v} &= \underset{\text{малые возмущ.}}{\vec{v}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0\, \mathrm{div}\, \vec{v} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\cancel{(\vec{v}\nabla)\vec{v}}}_{2\text{ пор}} = -\dfrac{\nabla(\overset{\text{const}}{\cancel{p_0}} + \delta p)}{\rho_0 + \underset{2\text{ пор.}}{\cancel{\delta\rho}}} \\ \dfrac{\partial \delta s}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta s = 0 \end{cases}$$

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \delta\rho + \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \delta s} = c_s^2\, \delta\rho$$

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = -\rho_0\, \mathrm{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \mathrm{div}\, \nabla \delta p$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c_s^2\, \Delta \delta\rho = 0}$$

Решение – волны, например

$$\delta\rho \propto e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}, \qquad \omega = \pm k c_s$$

$$\Downarrow$$

$$-i\omega \vec{v} = -\frac{i\vec{k}}{\rho_0} c_s^2\, \delta\rho \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{k}}{k} c_s \frac{\delta\rho}{\rho_0}$$

(2.9) Энергия и импульс плоской звуковой волны

Энергия: $W = \left\langle \delta\left(\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right)\right\rangle \overset{\text{до 2 пор.}}{=}$

внутр. энергия ед. массы

$$= \left\langle \frac{\rho_0 v^2}{2} + \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial \rho}\right)_s \delta\rho}}_{0\text{ при усредн.}} + \left(\frac{\partial^2 \rho\varepsilon}{\partial \rho^2}\right)_s \frac{\delta\rho^2}{2} \right\rangle$$

$$d\varepsilon = T\cancel{ds} - p\,dV = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

$$\left(\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial \rho}\right)_s = \varepsilon + \rho \cdot \frac{p}{\rho^2} = \varepsilon + pV = w$$

$$dw = V\,dp = \frac{1}{\rho} c_s^2\, d\rho$$

$$\left(\frac{\partial^2 \rho\varepsilon}{\partial \rho^2}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_s^2}{\rho}$$

$$W = \left\langle \underbrace{\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c_s^2\, \delta\rho^2}{2\rho_0}}_{\text{равны}} \right\rangle = \langle \rho_0 v^2 \rangle$$

(половина энергии – в кинетич., св-во гармонич. осциллятора)

Импульс: $\vec{P} = \langle \rho \vec{v} \rangle \overset{\langle \rho_0 \vec{v}\rangle = 0}{=} \langle \delta\rho\, \vec{v} \rangle =$

$$= \left\langle \frac{\vec{k}}{k} c_s \frac{\delta\rho^2}{\rho_0} \right\rangle = \left\langle \frac{\vec{k}}{\omega} \cdot \frac{c_s^2\, \delta\rho^2}{\rho_0} \right\rangle$$

$$\vec{P} = \frac{\vec{k}}{\omega} W$$

$\Rightarrow$ зв. волну м. предст. как совокупн. квантов

Плотность потока энергии

$$\vec{S} = \vec{v}_g W = \frac{\vec{k}}{k} c_s W$$

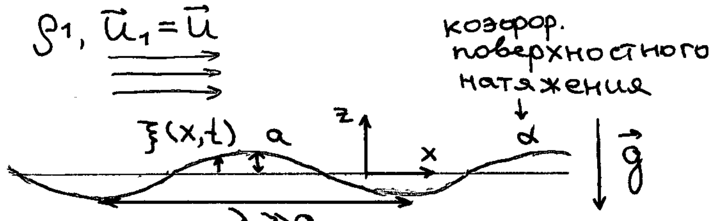
Плотность потока импульса

$$\Pi_{ik} = \frac{k_k}{k} c_s \cdot \frac{k_i}{\omega} W = \frac{k_i k_k}{k^2} W$$

10 лекция, 8.11

11 лекция, 15.11

(2.10) Волны на разделе сред.



$\lambda \gg a$

$\rho_2,\ \vec{u}_2 = 0$ $\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = 0$ (м. показать)

медл. движения $\Rightarrow \rho_i = \text{const}$

Сверху и снизу: (задача с границей)

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \vec{v} = \nabla\varphi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + gz = \text{const} \end{cases}$$

Невозм. состояние:

$$\vec{v}_i = \vec{u}_i \Rightarrow \varphi_i = \vec{u}_i \vec{r} + \cancel{\text{const}}^{\,0}$$

(не обязательно $\vec{u} \parallel \vec{x}$)

$$p_i = p_0 - \rho_i g z$$

+ возмущение:

$$\varphi_i = \vec{u}_i \vec{r} + \tilde{\varphi}_i = \vec{u}_i \vec{r} + f_i(z) e^{ikx - i\omega t},$$

т.к. по x, y, t система однородна ($k_y = 0$ выбором осей)

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = 0$$

$$f'' - k^2 f = 0$$

$$f_{1,2} = A_{1,2} e^{\mp kz}$$ (чтобы $\to 0$ при больших $|z|$)

$\Downarrow$

$$\vec{\delta v} = \nabla\tilde{\varphi}: \quad \delta v_x = ik\tilde{\varphi}, \quad \delta v_y = 0, \quad \delta v_z = \mp k\tilde{\varphi}$$

$\Downarrow$

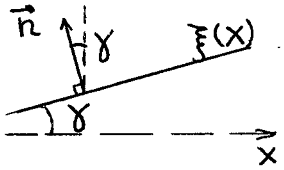
$$-i\omega\tilde{\varphi} + \frac{\cancel{u^2} + 2\vec{u}\,\vec{\delta v} + \cancel{\delta v^2}_{\text{2 пор.}}}{2} + \frac{\cancel{p} + \tilde{p}}{\rho} + \cancel{gz} = \cancel{\text{const}}$$

$$-i\omega\tilde{\varphi} + \vec{u} \cdot i\vec{k}\tilde{\varphi} + \frac{\tilde{p}}{\rho} = 0$$

$$\tilde{p} = i\rho(\omega - \vec{k}\vec{u})\tilde{\varphi}, \quad \vec{k} = (k, 0, 0)$$

Сшивка

$$\{v_n\} = 0, \quad v_n = \vec{v}\vec{n}$$



$$\vec{n} = (-\sin\gamma, 0, \cos\gamma)$$

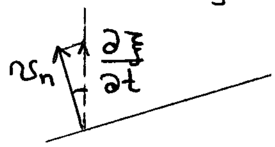
$$\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = \frac{\partial\xi}{\partial x} = ik\xi \quad \left(\sim \frac{a}{\lambda} \ll 1\right)$$

$$\vec{n} \approx (-\gamma, 0, 1) \approx (-ik\xi, 0, 1)$$

$$v_n \approx -ik\xi(u_x + \underbrace{\cancel{\delta v_x}}_{\text{2 пор.}}) + \delta v_z$$

$$-ik\xi u_x - k\tilde{\varphi}_1 = k\tilde{\varphi}_2 \qquad (1)$$

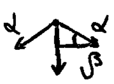
Но ввели ξ. Нужно ур-е для него:



$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{v_n}{\cos\gamma} \approx v_n$$

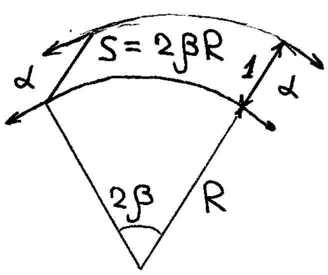
$$-i\omega\xi = k\tilde{\varphi}_2 \qquad (2)$$

$$\{p\}_{z=\xi} = \frac{\alpha}{R}$$



$$F = 2\alpha\beta$$

$$\delta p = \frac{F}{S} = \frac{\alpha}{R}$$



Но ввели R: $\frac{1}{R} \approx -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = k^2\xi$

т.к. отложили R снизу

$$p(\xi) = p_0 - \rho g\xi + i\rho(\omega - \vec{k}\vec{u})\cdot\tilde{\varphi}(0)$$

(в ряд до 1 пор. по малости)

$$-\rho_1 g\xi + i\rho_1(\omega - ku_x)\tilde{\varphi}_1 = -\rho_2 g\xi + i\rho_2\omega\tilde{\varphi}_2 - k^2\xi\alpha \quad (3)$$

Дисп. соотношение:

Из (1), (2): $\varphi_2 = -\frac{i\omega}{k}\xi$

$$\varphi_1 = \frac{i(\omega - ku_x)}{k}\xi$$

$$(\rho_2-\rho_1)g\cancel{\xi} - \frac{\rho_1(\omega-ku_x)^2}{k}\cancel{\xi} - \frac{\rho_2\omega^2}{k}\cancel{\xi} + k^2\alpha\cancel{\xi} = 0$$

$$(\rho_1+\rho_2)\omega^2 - 2\rho_1 k u_x\omega - (\rho_2-\rho_1)kg + \rho_1 k^2 u_x^2 - \alpha k^3 = 0$$

$$\omega = \frac{\rho_1 k u_x}{\rho_1+\rho_2} \pm \sqrt{\frac{\rho_1^2 k^2 u_x^2}{(\rho_1+\rho_2)^2} + \frac{(\rho_2-\rho_1)kg + \alpha k^3 - \rho_1 k^2 u_x^2}{\rho_1+\rho_2}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\rho_1 k u_x}{\rho_1+\rho_2} \pm \sqrt{\frac{(\rho_2-\rho_1)kg + \alpha k^3}{\rho_1+\rho_2} - \frac{\rho_1\rho_2 k^2 u_x^2}{(\rho_1+\rho_2)^2}}}$$

Гравитационные и капиллярные волны:

$\vec{u} = 0,\ \rho_1 \to 0:\ \omega = \pm\sqrt{kg + \frac{\alpha k^3}{\rho_2}}$

$k \to 0,\ \lambda \to \infty:\ \omega = \sqrt{kg}$ – гравит.

$k \to \infty,\ \lambda \to 0:\ \omega = \sqrt{\frac{\alpha k^3}{g}}$ – капилл.

граница: $k_0 = \sqrt{\frac{\rho_2 g}{\alpha}}$, $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} \approx 1.7$ см (вода)

Неуст-ть Рэлея-Тейлора:

$u = 0$, $\rho_1 \neq 0$, м.б. неуст-ть ($\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$)

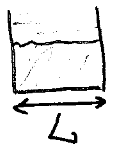
при $(\rho_2-\rho_1)kg + \alpha k^3 < 0$,

т.е. $\rho_1 > \rho_2$, $k^2 < \frac{(\rho_1-\rho_2)g}{\alpha}$

неогр. пов-ть: м.б. $\lambda \to \infty$, $k \to 0$

$\Downarrow$

неуст-ть всегда



$\Rightarrow k \gtrsim \frac{1}{L}$

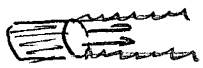
$\Downarrow$

при $L^2 \lesssim \frac{\alpha}{(\rho_1-\rho_2)g}$ тяж. жидк. м.б. над лёгкой

Неуст-ть тангенциального разрыва

$\rho_1 = \rho_2$, $\alpha = 0$, $u \neq 0$

Неуст-ть всегда: $\mathrm{Im}\,\omega = \frac{ku_x}{2}$



затопленная струя неустойчива

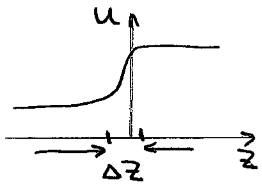
$\mathrm{Im}\,\omega \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, как так?

Размытый разрыв:

(резкий для $k < \frac{1}{\Delta z}$)

$\Downarrow$

$(\mathrm{Im}\,\omega)_{max} \sim \frac{u_x}{\Delta z}$



Ветер и волны

$u \neq 0$, $\rho_2 \gg \rho_1$

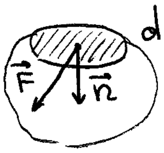
Неуст-ть при $kg + \frac{\alpha k^3}{\rho_2} - \frac{\rho_1 k^2 u_x^2}{\rho_2} < 0$

$$u_x^2 > \underbrace{\frac{g\rho_2}{\rho_1 k} + \frac{\alpha k}{\rho_1}}_{\min\ \text{при}\ k = k_0}$$

12 лекция, 22.11

(2.11) Вязкая жидкость

$$\Pi_{\alpha\beta} = -P_{\alpha\beta} = -p\,\delta_{\alpha\beta} + \underbrace{\sigma_{\alpha\beta}}_{\text{вязкий тензор напряжений}}$$



$dS = 1$

$$F_\alpha = P_{\alpha\beta} n_\beta = p n_\alpha \underbrace{- \sigma_{\alpha\beta} n_\beta}$$

„сила трения", $\sim \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$

(из молекул. физики при $L \gg \lambda_{св.пр.}$)

$$\sigma_{\alpha\beta} = A\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + B\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + C\,\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}$$

При вращ. как целого д.б. $\sigma_{\alpha\beta}=0$:

$$\vec v = [\vec r \times \vec\Omega], \quad v_\alpha = e_{\alpha ik} x_i \Omega_k$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = e_{\alpha ik}\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_\beta}}_{\delta_{i\beta}}\Omega_k = e_{\alpha\beta k}\Omega_k$$

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} = e_{\beta\alpha k}\Omega_k, \quad \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} = e_{\gamma\gamma k}\Omega_k = 0$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = (A-B)\,e_{\alpha\beta k}\Omega_k = 0$$

$$A = B, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$$

Обычно:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \eta\overbrace{\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)}^{\text{след}=0} + \zeta\,\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}$$

η — динамическая вязкость

ζ — 2-я вязкость

<u>Ур-е движ.</u> ($\vec g = 0$):

$$\rho\frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\eta\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) + \zeta\,\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right]$$

Вообще $\eta = \eta(p,\rho)$, $\zeta = \zeta(p,\rho)$

м. показать: $\eta, \zeta > 0$ (чтобы $S\uparrow$)

<u>Если</u> $\eta, \zeta = \text{const}$:

$$\boxed{\rho\frac{d\vec v}{dt} = -\nabla p + \eta\Delta\vec v + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\nabla\,\mathrm{div}\,\vec v}$$

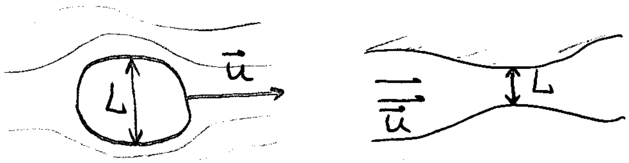
ур-е Навье-Стокса

<u>Если</u> $\rho = \text{const}$, $\mathrm{div}\,\vec v = 0$:

$$\frac{d\vec v}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \underbrace{\frac{\eta}{\rho}}_{\nu}\Delta\vec v$$

ν — кинематическая вязкость

(2.12) Закон подобия



$\rho = \text{const}$, $\nu = \text{const}$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec v = 0 & \cdot L/u \\ \frac{d\vec v}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec v & \cdot L/u^2 \end{cases}$$

Перейдём к безразм. переменным:

$$\vec r' = \frac{\vec r}{L}, \quad \vec v' = \frac{\vec v}{u}, \quad t' = \frac{tu}{L}, \quad p' = \frac{p}{\rho u^2}$$

$$\begin{cases} \mathrm{div}'\vec v' = 0 \\ \frac{\partial\vec v'}{\partial t'} + (\vec v'\nabla')\vec v' = -\nabla' p' + \frac{\nu}{uL}\Delta'\vec v' \end{cases}$$

$R = \frac{uL}{\nu}$ — число Рейнольдса

и геометрия задачи (гранусл.) определяют решение

⇓

можно масштабировать иссл. систему

Более сложная система ур-й

⇓

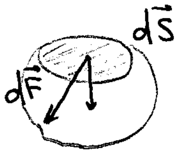
больше безразм. параметров

2.13 Уравнение теплопереноса

Баланс энергии при $\vec{g}=0$: (ур-е 1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)}_{\text{энергия ед. объёма}} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Bigg[\underbrace{v_\alpha\rho\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)}_{\text{конвект. перенос}} + \underbrace{v_\alpha p - \sigma_{\alpha\beta}v_\beta}_{\text{работа сил}} - \underbrace{\varkappa\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}}_{\text{теплопроводность}}\Bigg] + \begin{pmatrix}\text{объёмные}\\ \text{источники}\\ \text{тепла}\end{pmatrix}$$

пусть их нет



Работа сил в ед. времени:

$$A = \int d\vec{F}\cdot\vec{v} = \int v_\beta\, dF_\beta = \int v_\beta P_{\beta\alpha}\, dS_\alpha =$$

$$= \int \underbrace{v_\beta\left(p\,\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\right) dS_\alpha}$$

такая энергия прошла через $d\vec{S}$

(1) + ур-е непр. + ур-е движения:

$$\boxed{\rho T\frac{ds}{dt} = \sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \operatorname{div}(\varkappa\nabla T)}$$

ур-е теплопереноса

нагрев ед. объёма — вязкая диссипация — теплоперенос

Как получилось?

Ид. жидк-ть: (1) $\Rightarrow$ $\underbrace{\rho T\frac{ds}{dt}}=0$

слагаемые без $\sigma_{\alpha\beta}$, $\varkappa$ соберутся

Отследим $\sigma_{\alpha\beta}$, $\varkappa$:

при преобразовании $\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{v^2}{2}\right)$:

$$\rho v_\alpha\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = v_\alpha\left(\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+\ldots\right)$$

Справа в (1):

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sigma_{\alpha\beta}v_\beta\right)}_{\alpha\leftrightarrow\beta} - v_\alpha\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}$$

Если $v\ll c_s$, $\operatorname{div}\vec{v}=0$,

δp, δT малы, $\eta, \varkappa = \text{const}$,

то

$$\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\left[\eta\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right)+0\right] \overset{\alpha\leftrightarrow\beta}{=} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\cdot\eta\cdot\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right) \underset{\text{возьмём полусумму}}{=}$$

$$= \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2$$

$$\rho T\frac{ds}{dt} = \rho\frac{dQ}{dt} = \rho\, c_p\frac{dT}{dt}$$

c_p — теплоёмкость ед. массы (при нагревании жидк. почти свободно расширяется)

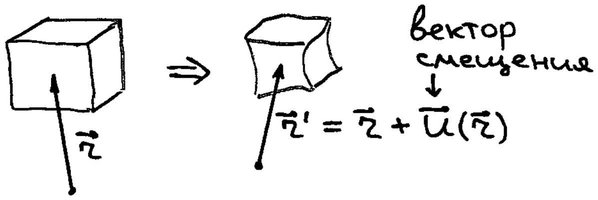
$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{\varkappa}{\rho c_p}}_{\chi}\Delta T + \frac{\eta}{2\rho c_p}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2}$$

χ, коэф. температуропроводности

12 лекция, 22.11

Часть III. Теория упругости

3.1 Тензор деформации



Деформация — неодинак. смещение различных точек

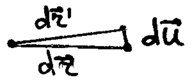
$$dl^2 = dx_\alpha dx_\alpha \Rightarrow (dl')^2 = dx'_\alpha dx'_\alpha$$

$$(dl')^2 = \left(dx_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta\right)^2 =$$

$$= dx_\alpha dx_\alpha + dx_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta dx_\alpha}_{\alpha \leftrightarrow \beta} + \underbrace{\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma} dx_\gamma}$$

пренебр. при малых деформациях $\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \ll 1\right)$



$$(dl')^2 = dl^2 + 2u_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

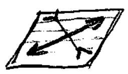
$$\boxed{u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)}$$ — тензор деформ.

$u_{\alpha\beta} = u_{\beta\alpha} \Rightarrow$ гл. оси ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$(dl')^2 = (1 + 2u_{11}) d\xi_1^2 + (1 + 2u_{22}) d\xi_2^2 + (1 + 2u_{33}) d\xi_3^2$$

$$d\xi'_i = \sqrt{1 + 2u_{ii}}\, d\xi_i = (1 + u_{ii}) d\xi_i$$

$\forall$ деформация = сжатие или растяж. по 3 осям



$$dV' = d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = (1 + u_{11} + u_{22} + u_{33}) dV$$

Относ. изменение объёма:

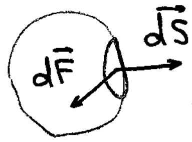
$$\frac{dV' - dV}{dV} = u_{\alpha\alpha} = \operatorname{div} \vec{u} \quad (\forall \text{ осей})$$

$$u_{\alpha\beta} = \underbrace{\left(u_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}\right)} + \underbrace{\frac{1}{3} u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}}$$

$\forall$ деформ. = сдвиг + всестор. сжатие

3.2 Тензор напряжений

$$dF_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} dS_\beta$$



$$F_\alpha = \oint_S \sigma_{\alpha\beta} dS_\beta = \int_V \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV$$

(упругую силу м. рассм. как объёмную)

Равновесие: $\boxed{\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \underbrace{\rho g_\alpha}_{\text{внешняя объёмная сила}} = 0}$

Гр. усл.: $p_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} n_\beta$ ← внешняя нормаль

сила на ед. площади

М. показать: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$

3.3 Закон Гука

Малые деформ: $\sigma_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma\delta}$

Изотр. среда:

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = a\, \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + b\, \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + c\, \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = a\, \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma\gamma} + (b + c) u_{\alpha\beta}$$

Обычно:

$$\boxed{\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3} \delta_{\alpha\beta}\right) + K u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}}$$

μ — модуль сдвига; K — модуль всестороннего сжатия

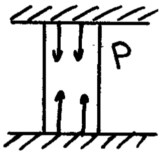
$$\sigma_{\gamma\gamma} = 3K u_{\gamma\gamma}$$

$$\boxed{u_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\gamma\gamma}}{9K}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\sigma_{\gamma\gamma}}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)}$$

(3.4) Простые деформации

Есть только $\sigma_{zz} \neq 0$, остальные $\sigma_{ik} = 0$.

Напр: $\sigma_{zz} = P = \sigma_{\alpha\alpha}$



$$u_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{9K} + \frac{\sigma_{zz}}{3\mu} \equiv \frac{\sigma_{zz}}{E}$$ ← модуль Юнга

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma_{zz}}{9K} - \frac{\sigma_{zz}}{6\mu} \equiv -\sigma u_{zz}$$

↑ коэф-т Пуассона

$u_{ik} = 0, \quad i \neq k$

$$\boxed{E = \frac{9K\mu}{\mu + 3K}}$$

$$\sigma = -\frac{2\mu - 3K}{18K\mu}E = \boxed{\frac{3K - 2\mu}{2(\mu + 3K)} = \sigma}$$

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}}$$

$$\frac{1}{3K} = \frac{1}{E} - \frac{2\sigma}{E} \Rightarrow \boxed{K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}}$$

$\mu, K \geq 0$ (см. далее)

⇓

$E \geq 0, \quad \frac{1}{2} \geq \sigma \geq -1$, обычно $\sigma > 0$

Жидкость: $\mu = 0$, $K > 0$, $E = 0$, $\sigma = \frac{1}{2}$

(3.5) Энергия деформации

$$\delta A = \oint \underbrace{dF_\alpha}_{\text{сила на эл-т пов-ти}} \cdot \underbrace{\delta u_\alpha}_{\text{смещение}} = \oint \delta u_\alpha \sigma_{\alpha\beta} dS_\beta =$$

← по пов-ти тела

↑ работа при деформ. тела

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\delta u_\alpha \sigma_{\alpha\beta})\, dV =$$

$$= \int \delta u_\alpha \underbrace{\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}}_{} dV + \int \sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} dV =$$

$= 0$, если деформ. медленная, $\vec{g} = 0$

$$= \int \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{2}\left(\frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta u_\beta}{\partial x_\alpha}\right) dV =$$

$$= \int \sigma_{\alpha\beta}\, \delta u_{\alpha\beta}\, dV$$

$$\sigma_{\alpha\beta}\,\delta u_{\alpha\beta} = \left[2\mu\left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3}\delta_{\alpha\beta}\right) + K u_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right]\cdot \delta\left[\left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3}\delta_{\alpha\beta}\right) + \frac{u_{\gamma\gamma}}{3}\delta_{\alpha\beta}\right]$$

$$= \delta \underbrace{\left[\mu\left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{\gamma\gamma}^2\right]}_{F_{деф}}$$

Изм. внутр. энергии ед. объёма:

$$\delta \mathcal{E} = T\,\delta S + \delta F_{деф}$$

Своб. энергия: $F = \mathcal{E} - TS$

$$\delta F = -S\,dT + \delta F_{деф}.$$

⇓

$$\boxed{F_{деф} = \mu\left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{\gamma\gamma}^2}$$

– свободная энергия деформации при $T = \text{const}$

Мин. в отсутствии деф. ⇒ $\mu, K \geq 0$

13 лекция, 29.11

---

14 лекция, 30.11

(3.6) Звук в твёрдом теле

$$\rho\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} =$$

↖ частная, т.к. $\vec{u}(\vec{r}, t)$ – лагр. перем.

$$= \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[2\mu\left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3}\delta_{\alpha\beta}\right) + K u_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right]$$

$$\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta u_\alpha + \frac{1}{2}\nabla_\alpha \operatorname{div}\vec{u}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{u} + \mu \nabla \operatorname{div} \vec{u} + \left(K - \frac{2\mu}{3}\right) \nabla \operatorname{div} \vec{u} = \mu \Delta \vec{u} + \left(K + \frac{\mu}{3}\right) \nabla \operatorname{div} \vec{u} \quad (1)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t, \qquad \operatorname{rot} \vec{u}_l = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u}_t = 0$$

div (1):

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \vec{u}_l = \mu \Delta \operatorname{div} \vec{u}_l + \left(K + \frac{\mu}{3}\right) \Delta \operatorname{div} \vec{u}_l$$

$$\operatorname{div} \left\{ \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - \left(K + \frac{4\mu}{3}\right) \Delta \vec{u}_l \right\} = 0$$

$$\operatorname{rot} \{\} = 0 \Rightarrow \{\} = \text{const}$$

при $\vec{u}_l = 0$ д.б. $\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \{\} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = c_l^2 \Delta \vec{u}_l, \qquad c_l^2 = \frac{1}{\rho}\left(K + \frac{4\mu}{3}\right)}$$

продольная скорость звука

Плоск. волна: $\operatorname{rot} \vec{u}_l \Leftrightarrow \vec{k} \times \vec{u}_l = 0$

$\vec{u}_l \parallel \vec{k}$

rot (1):

$$\rho \frac{\partial^2 \operatorname{rot} \vec{u}_t}{\partial t^2} = \mu \Delta \operatorname{rot} \vec{u}_t$$

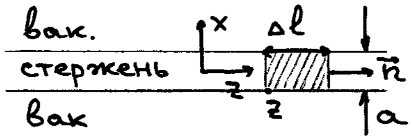
$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = c_t^2 \Delta \vec{u}_t, \qquad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}}$$

поперечная скорость звука

$\operatorname{div} \vec{u}_t \Leftrightarrow \vec{k}\vec{u}_t = 0 \Rightarrow \vec{u}_t \perp \vec{k}$

$\mu, K \geq 0 \Rightarrow c_l > c_t$

3.7 Продольные колебания стержней



прод. волна: $\lambda \gg a$

$\Downarrow$

прост. деф. $\sigma_{zz} \neq 0$

$$u_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E},$$

$$u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$$

сечение

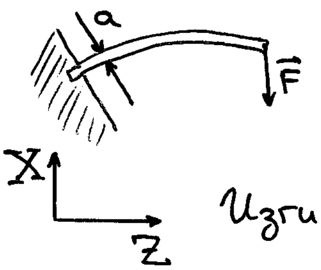
$$\rho S \Delta l \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \left(\sigma_{zz}(z + \Delta l) - \sigma_{zz}(z)\right) S$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = E \frac{\partial u_{zz}}{\partial z} = E \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}$$

скор. звука $= \sqrt{\frac{E}{\rho}} \leq c_l$

стержень расширяется при продольном сжатии $\Rightarrow$ возвр. сила меньше

3.8 Изгиб стержней



Тонкий стержень: $a \ll \lambda$ – характ. масшт. изгиба

Изгиб $X(Z)$ задан

Найдём возникающие деформации и силы.

Деформацию м. считать простой, т.к. в равнов. $\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0$

$$z: \quad \underbrace{\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}}_{\sim \max(\sigma_{zx}, \sigma_{zy})/a} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}}_{\sim \sigma_{zz}/\lambda} = 0$$

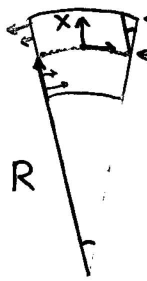
$$\sigma_{zx}, \sigma_{zy} \lesssim \frac{a}{\lambda} \sigma_{zz} \ll \sigma_{zz}$$

$$x:\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\sigma_{xx},\ \sigma_{xy} \lesssim \frac{a}{\lambda}\sigma_{xz} \ll \sigma_{zz}$$

($\sigma_{\alpha\beta} \approx const$ не м.б. из-за гр. усл.)

Напряжения и нейтр. линия



$\leftarrow \Delta l + dl$

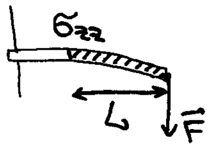
$\leftarrow$ нейтр. линия (дл. $\Delta l = const$), отсчит. x от неё:

$$\frac{\Delta l}{R} = \frac{dl}{x}$$

$$u_{zz} = \frac{dl}{\Delta l} = \frac{x}{R};\quad \sigma_{zz} = E\frac{x}{R}$$

Где нейтр. линия?

Равновесие куска:



$$\sum y\text{-момент} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$FL - \underbrace{\int x\cdot\sigma_{zz}\,dS}_{\sim \sigma_{zz}\cdot a^3} = 0$$

$\sigma_{zz}\cdot a^2 \sim F\frac{L}{a} \gg F \Rightarrow$ упругие силы велики

$\sum z$-силы $=0$: $\int \sigma_{zz}\,dS = 0$

(силой $\vec F$ пренебрегли)

$$\Downarrow$$
$$\int x\,dS = 0,\quad \int y\,dS = 0$$
$$\Downarrow$$

Нейтр. линия проходит через центр тяжести сечения.

$$\frac{1}{R} = -X''(Z)$$

$$\sigma_{zz} = -ExX'' \underbrace{- EyY''}_{\text{если 3d деформация}}$$

Момент упругих сил: $\vec M = [\vec r \times \vec f]$

$$M_x = \int_S y\sigma_{zz}\,dS = -EI_{xy}X'' - EI_{yy}Y''$$

$$I_{\alpha\beta} = \int_S x_\alpha x_\beta\,dS$$ – "момент инерции" сечения

$$M_y = -\int x\sigma_{zz}\,dS = EI_{xx}X'' + EI_{xy}Y''$$

В главных осях сечения:

$$M_x = -EI_{yy}Y'',\quad M_y = EI_{xx}X''$$

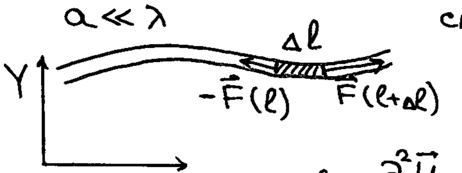

чтобы стержень лучше сопротивл. изгибу при заданной площади сечения, его „момент инерции" увеличивают

14 лекция, 30.11

---

15 лекция, 13.12

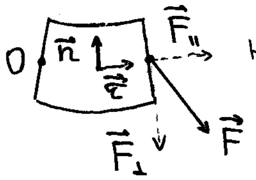
(3.9) Поперечные колебания стержней



смещ. малые, $Z \approx l$

$$\rho\Delta l\cdot S\frac{\partial^2\vec u}{\partial t^2} = \vec F(l+\Delta l) - \vec F(l)$$

$$\rho S\frac{\partial^2\vec u}{\partial t^2} = \frac{\partial\vec F}{\partial l} \quad (1)$$



Нужно выразить $\vec F$ через $\vec u$

$$\vec F = \vec F_\perp + \vec F_\parallel = \vec n\int\sigma_{yz}\,dS + \vec\tau\int\sigma_{zz}\,dS =$$
$$= \vec F_\perp + \vec\tau T \leftarrow \text{натяжение стержня}$$

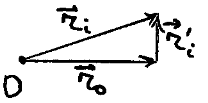
Аналогично (3.8): $\sigma_{zz}\cdot a^2 \gg T,\ F_\perp$

Равнов. по Z: $F_\parallel(l+\Delta l) = F_\parallel(l)$

$$\Downarrow$$
$$T = const$$

Момент относ. т. О: кусок движ. поступательно

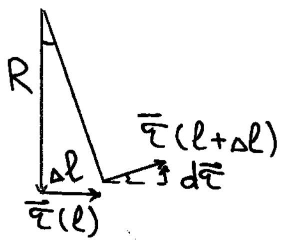
$$\underbrace{\vec M(\ell+\Delta\ell)}_{\text{момент упр. сил относ. нейтр. линии}} - \vec M(\ell) + [\vec\tau\Delta\ell \times \vec F(\ell+\Delta\ell)] = 0$$



т.к. $\sum\limits_i [\vec r_i \times \vec F_i] = [\vec r_0 \times \sum\limits_i \vec F_i] + \sum\limits_i [\vec r_i' \times \vec F_i]$

$$\frac{\partial \vec M}{\partial \ell} + [\vec\tau \times \vec F] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec M}{\partial \ell^2} + \left[\frac{\partial\vec\tau}{\partial\ell} \times \vec F\right] + \left[\vec\tau \times \frac{\partial \vec F}{\partial \ell}\right] = 0 \qquad (2)$$



$d\vec\tau \perp \vec\tau$, $d\vec\tau \parallel \vec n$

$$\frac{\Delta\ell}{R} = \frac{d\tau}{\tau}$$

$$d\tau = \frac{1}{R} = Y''$$

$$\frac{\partial\vec\tau}{\partial\ell} = \vec n Y''$$

При изгибе: $M_x = -EI_{yy}Y''$ (см. 3.8) (пусть гл. оси)

$$(2)_x: \ -EI_{yy}Y'''' + [\overset{(y)}{\vec n} Y'' \times \overset{(z)}{\vec\tau} T]_x + [\overset{(z)}{\vec\tau} \times \rho S \frac{\partial^2 \overset{(y)}{\vec u}}{\partial t^2}]_x = 0$$

$u_y = Y$:

$$\boxed{\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = TY'' - EI_{yy}Y''''}$$

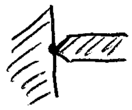
Беск. стержень: $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$, $\frac{\partial}{\partial z} = ik$

$$\rho S\omega^2 = k^2 T + k^4 EI_{yy}$$

I_{yy} мало $\Rightarrow$ $\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$

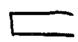
Концы: гр. условия, дискр. спектр

$Y=0$, $Y'=0$ (заделанный конец)



шарнир: $Y=0$, $Y''=0$

т.к. $\vec M = 0$

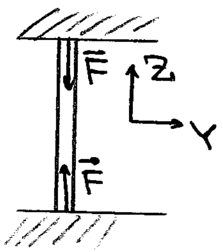


своб. конец: $Y''=0$, $Y'''=0$

т.к. $\vec F = 0$, $\frac{\partial \vec M}{\partial \ell} = 0$

Своб. конец, к кот. приложена сила — уже не своб. конец.

3.10 Устойчивость стержней (по Эйлеру)



F – мала: $Y(Z) \equiv 0$ – устойч. равновесие

$F_{кр}$, безразличное

F – велика: $Y(Z) \equiv 0$ – неустойчивое

$\Downarrow$

$\exists\, Y(Z) \not\equiv 0$: $\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0$

$\Downarrow$

$$F_{кр} Y'' + EI_{yy} Y'''' = 0 \qquad (F_{кр} = -T)$$

$$Y(Z) = a + bZ + c\sin kZ + d\cos kZ$$

$$k = \sqrt{\frac{F_{кр}}{EI_{yy}}}$$

4 гр. усл. $\Rightarrow$ решение $\neq 0$ при дискретных k

$$F_{кр} = EI_{yy} k^2_{min}$$

3.11 Кручение стержней

круглый стержень

поворот сечения:

$$\varphi(z) = \tau z$$

„угол кручения"

При беск. малом повороте: $(z \approx 0)$

$$\vec u = [\varphi \vec e_z \times \vec r]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u_x = -\varphi y = -\tau z y \\ u_y = \varphi x = \tau z x \\ u_z = 0 \end{cases}$$

$u_z = 0$ ← св-во осесимметрии, вообще $u_z = u_z(x, y)$,

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\tau z + \tau z}{2} & -\frac{\tau y}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\tau x}{2} \\ -\frac{\tau y}{2} & \frac{\tau x}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu u_{xz} = -\mu \tau y$$

$$\sigma_{yz} = \mu \tau x$$

Момент сил:

$$M_z = \int_S [\vec r \times d\vec f]_z = \int_S (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})\, dS =$$

$$df_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}\, dS_\beta = \sigma_{\alpha z}\, dS$$

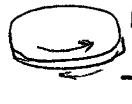
$$= \int_0^a (x^2 + y^2)\mu\tau \cdot 2\pi r\, dr =$$

$$= \mu\tau I_{zz} = \frac{\pi\mu\tau a^4}{2} = C\tau$$

C — крутильная жёсткость

$$C = \mu I_{zz} \quad \text{(при осесимметрии)}$$

Если $\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \tau(z)$, равнов. нет



$$I \frac{d\omega}{dt} = M$$

$$\underbrace{I_{zz} \cdot \rho \Delta z}_{I} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = M_z(z+\Delta z) - M_z(z) =$$

$$= \mu I_{zz}\left[\tau(z+\Delta z) - \tau(z)\right]$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} = C_t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

C_t — попер. скор. звука

(неосесимм. стержень ⇒ другая скор.)