Вариант 1

1. В правой аффинной системе координат ($\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$) дан метрический тензор $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 14 \end{pmatrix}$ и заданы векторы $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, $\mathbf{v} = 3\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$. Вычислить w_3, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathbf{rot}\,\mathbf{a})_1$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (2\,v + w, u + w^2, uv)$, а координаты u, v, w связаны с декартовыми соотношениями (система координат правая) $x = (u^2 - v^2)/2$, $y = uv$, $z = w + u$.

3. В криволинейной системе системе координат (x^1, x^2, x^3) тензор T имеет координаты $T = (T_i^j) = \mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^1} + 3\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^2} + 5\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^1} + 7\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^2} + 9\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e^3}$. Выписать координаты тензора T. Найти координату $T_{1'}^{1'}$ в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода
$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \partial x^{1'}/\partial x^1 & \partial x^{1'}/\partial x^2 & \partial x^{1'}/\partial x^3 \\ \partial x^{2'}/\partial x^1 & \partial x^{2'}/\partial x^2 & \partial x^{2'}/\partial x^3 \\ \partial x^{3'}/\partial x^1 & \partial x^{3'}/\partial x^2 & \partial x^{3'}/\partial x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos x^2 & -2x^1 \sin x^2 & 0 \\ 3\sin x^2 & 3x^1 \cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Для криволинейной системы координат (u, v), связанной с декартовой соотношениями $x = u^2 - v$, $y = (u+1)v$, $u > 0$, $v > 0$, вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{2,12}$.

5. Найти компоненту $T_{11\cdot}^{\cdot\cdot 2}$ тензора $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \nabla_i S_{j\cdot}^{\cdot k}$, где $S = (S_{j\cdot}^{\cdot k}) = x^1\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^1} + 3x^1\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^2} + 3(x^1 + x^2)\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^1} + x^1x^2\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^2}$. Выписать координаты тензора S. Символы Кристоффеля:
$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2};\ \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$

Вариант 2.

1. В правой аффинной системе координат ($\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$) дан метрический тензор $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и заданы векторы $\mathbf{u} = 3\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, $\mathbf{v} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_3}$. Вычислить w_2, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathbf{rot}\,\mathbf{a})_2$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (v + w^2, 2\,u + w, uv)$, а координаты u, v, w связаны с декартовыми соотношениями (система координат правая) $x = (u^2 - v^2)/2$, $y = uv$, $z = w + v$.

3. В криволинейной системе системе координат (x^1, x^2, x^3) тензор T имеет координаты $T = (T_i^j) = 2\,\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^1} + 4\,\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^2} + 6\,\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^1} + 8\,\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^2} + 10\,\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e^3}$. Выписать координаты тензора T. Найти координату $T_{2'}^{2'}$ в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода
$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \partial x^{1'}/\partial x^1 & \partial x^{1'}/\partial x^2 & \partial x^{1'}/\partial x^3 \\ \partial x^{2'}/\partial x^1 & \partial x^{2'}/\partial x^2 & \partial x^{2'}/\partial x^3 \\ \partial x^{3'}/\partial x^1 & \partial x^{3'}/\partial x^2 & \partial x^{3'}/\partial x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos x^2 & -3x^1 \sin x^2 & 0 \\ 4\sin x^2 & 4x^1 \cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Для криволинейной системы координат (u, v), связанной с декартовой соотношениями $x = 2u^2 - v$, $y = uv$, $u > 0$, $v > 0$, вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{1,21}$.

5. Найти компоненту $T_{22\cdot}^{\cdot\cdot 1}$ тензора $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \nabla_i S_{j\cdot}^{\cdot k}$, где $S = (S_{j\cdot}^{\cdot k}) = x^2\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^1} + 2\,\cos x^2\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^2} + 3x^2\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^1} + (x^1 + 2\,x^2)\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^2}$. Выписать координаты тензора S. Символы Кристоффеля:
$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2};\ \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$