Задача

Показать, что если $\mathbf{E}(t)$ задано в виде

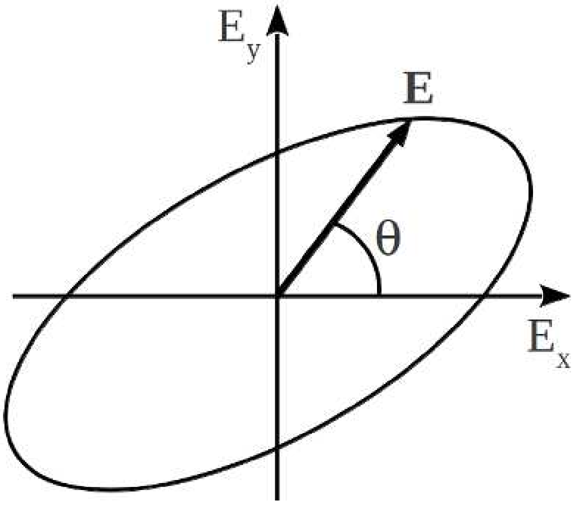
$$E_x(t) = E_{0x}\cos(\omega t),$$
$$E_y(t) = E_{0y}\cos(\omega t + \phi),$$

то случаю $\sin\phi < 0$ соответствует левая поляризация, $\sin\phi > 0$ – правая.

Решение 1:

Рассмотрим функцию

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \frac{E_y(t)}{E_x(t)} = \frac{E_{0y}\cos(\omega t + \phi)}{E_{0x}\cos(\omega t)},$$



где $\theta(t)$ – мгновенный угол, образуемый вектором $\mathbf{E}(t)$ с осью x.

Поскольку $\operatorname{tg}\theta$ является всюду возрастающей функцией своего аргумента θ, то знак скорости изменения θ со временем (определяющий направление вращения $\mathbf{E}(t)$) совпадает со знаком $\frac{d\operatorname{tg}\theta}{dt}$.

Вычислим $\frac{d\operatorname{tg}\theta}{dt}$:

$$\frac{d\operatorname{tg}\theta}{dt} = \left(\frac{E_{0y}\cos(\omega t + \phi)}{E_{0x}\cos(\omega t)}\right)'_t = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \cdot \frac{-\omega\sin(\omega t + \phi)\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\cos(\omega t + \phi)}{\cos^2(\omega t)}.$$

Заметим, что выражение в числителе содержит синус разности $\sin(\alpha - \beta)$, где $\alpha = \omega t + \phi$, $\beta = \omega t$:

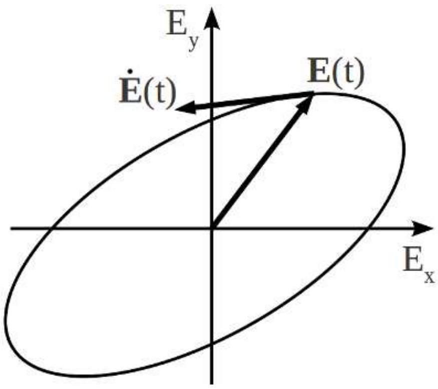
$$\sin(\omega t + \phi)\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\cos(\omega t + \phi) = \sin(\omega t + \phi - \omega t) = \sin\phi.$$

Тогда

$$\frac{d\operatorname{tg}\theta}{dt} = -\frac{E_{0y}\omega\sin(\phi)}{E_{0x}\cos^2(\omega t)}\begin{cases} < 0 \text{ (т. е. } \mathbf{E}(t) \text{ движется по ходу часовой стрелки),} & \text{если } \sin\phi > 0, \\ > 0 \text{ (т. е. } \mathbf{E}(t) \text{ движется против хода часовой стрелки),} & \text{если } \sin\phi < 0. \end{cases}$$

Решение 2 (предложено Евгенией Волчок, гр. 1235.2):

Идея решения состоит в том, что направление поляризации однозначно связано со знаком z-компоненты векторного произведения $[\mathbf{E} \times \dot{\mathbf{E}}]$. Вычислим z-компоненту (на рисунке ось z направлена на нас и представлен случай левой поляризации):



$$E_x \cdot \dot{E}_y - E_y \cdot \dot{E}_x = E_{0x}\cos(\omega t) \cdot (-E_{0y}\omega\sin(\omega t + \phi)) -$$

$$-E_{0y}\cos(\omega t + \phi) \cdot (-E_{0x}\omega\sin(\omega t)) = -E_{0x}E_{0y}\omega\sin(\omega t + \phi - \omega t) =$$

$$= -E_{0x}E_{0y}\omega\sin\phi \begin{cases} < 0 \text{ (т. е. } \mathbf{E}(t) \text{ движется по ходу часовой стрелки),} & \text{если } \sin\phi > 0, \\ > 0 \text{ (т. е. } \mathbf{E}(t) \text{ движется против хода часовой стрелки),} & \text{если } \sin\phi < 0. \end{cases}$$