Занятие 5

Теоремы существования и единственности

На предыдущих занятиях мы рассмотрели методы интегрирования некоторых видов дифференциальных уравнений первого порядка. Однако проинтегрировать уравнение «в квадратурах», то есть записать решение в виде интегралов от элементарных функций, удается далеко не всегда. Тем не менее, хотелось бы иметь ответ на вопрос: каковы условия, при которых через точку $(x_0; y_0)$ проходит единственная интегральная кривая уравнения $y' = f(x; y)$? Сформулируем одну из таких теорем.

Теорема Пикара. Пусть функция $f(x; y)$ определена и непрерывна в области $G : |x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, и частная производная $f'_y(x; y)$ ограничена в G. Тогда задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x; y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

имеет единственное решение. Это решение определено по крайней мере на отрезке $|x - x_0| \leqslant h$, где $h = \min\{a; \frac{b}{M}\}$, а M — любое число такое, что $|f(x; y)| \leqslant M$ в области G.

Подчеркнем, что теорема Пикара носит локальный характер, то есть ничего не говорит об области существования непродолжаемого решения. Также важно понимать, что теорема дает нам *достаточные* условия существования и единственности решения задачи Коши. Эти условия можно немного ослабить, но, как правило, чем слабее условия, тем сложнее проверить их выполнение.

Иногда физики пренебрежительно относятся к теоремам существования, отдавая предпочтение численным методам решения. Однако при численном решении дифференциального уравнения теоремы существования и единственности не только не утрачивают своей актуальности, но приобретают еще большую значимость. Ведь, обращаясь к численным алгоритмам, вы должны иметь гарантии того, что решение действительно существует.

Кроме того, доказательство теоремы Пикара содержит в себе алгоритм приближенного построения решения с возможностью оценить точность этого приближения. Основная идея доказательства заключается в том, что задача (5.1) эквивалентна решению интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau; y(\tau))\, d\tau,$$

которое решается методом последовательных приближений:

$$y^{[0]}(x) = y_0, \quad y^{[k+1]}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau; y^{[k]}(\tau))\, d\tau. \tag{5.2}$$

Последовательность функций $y^{[k]}(x)$ равномерно сходится к решению задачи (5.1) на отрезке $|x - x_0| \leqslant h$.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Все условия теоремы Пикара, очевидно, выполнены, и задача имеет единственное решение. Однако, при всей простоте условия, это решение невозможно выписать в квадратурах.

Рассмотрим область $G : |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1$. Очевидно, в этой области $|f(x; y)| \leqslant 2$. Поэтому $h = \min\{1; \frac{1}{2}\} = 0,5$, и по теореме Пикара искомое решение задачи Коши существует и единственно на отрезке $|x| \leqslant 0,5$.

Построим несколько приближений по формулам (5.2)

$$y^{[0]}(x) \equiv 0, \quad y^{[1]}(x) = \int\limits_0^x \tau^2\, d\tau = \frac{x^3}{3},$$

$$y^{[2]}(x) = \int\limits_0^x (\tau^2 + \frac{\tau^6}{9})\, d\tau = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}. \quad \square$$

Теперь обратимся к системам дифференциальных уравнений. Обозначим через $\vec{y}(x)$ вектор-функцию с компонентами $y_i(x)$, $i = 1, ..., n$. Систему уравнений $y_i{}' = f_i(x; y_1, ..., y_n)$, $i = 1, ..., n$, будем записывать кратко в векторной форме

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x; \vec{y}). \tag{5.3}$$

Такая система дифференциальных уравнений называется *нормальной.*

Поставим для системы (5.3) задачу Коши, задав в точке x_0 значения всех функций y_i, то есть $y_i(x_0) = y_{0i}$, $i = 1, ..., n$, или $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$.

Теорема Пикара гласит, что для существования и единственности решения задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(x; \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y_0}. \end{cases} \tag{5.4}$$

достаточно непрерывности всех функций $f_i(x; y_1, ..., y_n)$ и ограниченности всех производных $\dfrac{\partial f_i(x; y_1, ..., y_n)}{\partial y_j}$, $i, j = 1, ..., n$, в области G : $|x - x_0| \leqslant a$, $|y_i - y_{0i}| \leqslant b_i$.

Посмотрим, как работает метод последовательных приближений для нормальных систем.

Пример 2. Построим приближенно решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \quad x(0) = 1 \\ \dot{y} = x^2, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

Здесь независимой переменной является t, а $\dot{x}$ и $\dot{y}$ означают производные по t.

Итерации определяются формулами

$$x^{[0]}(t) = 1, \quad x^{[k+1]}(t) = 1 + \int\limits_0^t y^{[k]}(\tau)\, d\tau,$$

$$y^{[0]}(t) = 2, \quad y^{[k+1]}(t) = 2 + \int\limits_0^t \Big(x^{[k]}(\tau)\Big)^2\, d\tau.$$

На первом шаге получаем

$$x^{[1]}(t) = 1 + \int\limits_0^t 2\, d\tau = 1 + 2t,$$

$$y^{[1]}(t) = 2 + \int\limits_0^t 1\, d\tau = 2 + t.$$

Далее,

$$x^{[2]}(t) = 1 + \int\limits_0^t (2+\tau)\, d\tau = 1 + 2t + \frac{t^2}{2},$$

$$y^{[2]}(t) = 2 + \int\limits_0^t (1+2\tau)^2\, d\tau = 2 + t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3.$$

Последовательность функций $x^{[k]}(t)$, $y^{[k]}(t)$ равномерно сходится к решению задачи Коши на отрезке $|t| \leqslant h$, где $h = \min\{a; \frac{\min b_i}{M}\}$, а M — любое число такое, что $|f_i(x;y)| \leqslant M$ для всех $i = 1, ..., n$ в области G. $\square$

Обсудим постановку задачи Коши и теорему существования и единственности решения этой задачи для дифференциального уравнения порядка n, разрешенного относительно высшей производной:

$$y^{(n)} = f(x; y; y', ..., y^{(n-1)}). \tag{5.5}$$

Отметим, что уравнение (5.5) можно свести к нормальной системе (5.4), положив $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$, ... , $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$. Тогда

$$\begin{cases} y_1{}'(x) = y_2(x) \\ y_2{}'(x) = y_3(x) \\ \vdots \\ y_n{}' = f(x; y; y', ..., y^{(n-1)}). \end{cases}$$

Вспомнив, как ставилась задача Коши для нормальной системы, мы придем к постановке задачи Коши для уравнения: найти n раз непрерывно дифференцируемую функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению (5.5) и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Если функция $f(x; y; y', ..., y^{(n-1)})$, фигурирующая в правой части уравнения (5.5), и ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(i)}}$ непрерывны и ограничены в области $G : |x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b_0$, $|y' - y_1| \leqslant b_1$, ... , $|y^{(n-1)} - y_{n-1}| \leqslant b_{n-1}$, то существует единственное решение $y(x)$, определенное на некотором отрезке $|x - x_0| \leqslant h$.

Мы не приводим здесь формулу, определяющую величину h, однако еще раз подчеркнем локальный характер этой теоремы.

Покажем, как работает метод последовательных приближений для уравнения второго порядка.

Пример 3. Построим приближенно решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + (y')^2 - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Положим $z(x) = y'(x)$ и перейдем к нормальной системе

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = 1 \\ z' = 2y - z^2, & z(0) = 0. \end{cases}$$

Итерационные формулы:

$$y^{[0]}(x) = 1, \quad y^{[k+1]}(x) = 1 + \int\limits_0^x z^{[k]}(\tau)\,d\tau,$$

$$z^{[0]}(x) = 0, \quad z^{[k+1]}(x) = \int\limits_0^x \Big(2y^{[k]}(\tau) - \big(z^{[k]}(\tau)\big)^2\Big)\,d\tau.$$

Первый шаг:

$$y^{[1]}(x) = 1, \qquad z^{[1]}(x) = \int\limits_0^x 2\,d\tau = 2x.$$

Второй шаг:

$$y^{[2]}(x) = 1 + \int\limits_0^x 2\tau\,d\tau = 1 + x^2, \qquad z^{[2]}(x) = \int\limits_0^x \Big(2 - (2\tau)^2\Big)\,d\tau = 2x - \frac{4}{3}x^3.$$

Третий шаг:

$$y^{[3]}(x) = 1 + \int\limits_0^x \left(2\tau - \frac{4}{3}\tau^3\right)d\tau = 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4.$$

и так далее. □

В некоторых случаях решение уравнения (5.5), удовлетворяющее заданным начальным условиям, можно угадать, не решая этого уравнения. При выполнении всех условий теоремы Пикара решение единственно, поэтому других решений, кроме найденного, задача Коши иметь не может.

Пример 4. Решить задачи Коши

$$\text{a)} \begin{cases} y' = \sin xy \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y'' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что в обоих случаях условия теоремы Пикара выполнены, и следовательно функции $y \equiv 0$ и $y = x$, являются решениями задач a) и b) соответственно. □

Пример 5. Допустим, некое уравнение (5.5), правая часть которого удовлетворяет условиям теоремы Пикара, имеет два решения: $y_1 = \sin x$ и $y_2 = x - \dfrac{x^3}{3!}$. Каким может быть его порядок?

Заметим, что в точке $x_0 = 0$ у функций y_1 и y_2 совпадают не только их значения, но и значения всех производных до четвертого порядка включительно. И только $y_1^{(5)}(0) = 1$, $y_2^{(5)}(0) = 0$. Следовательно, порядок уравнения должен быть не менее 6, иначе будет нарушена единственность решения. □

Рассмотрим более подробно задачу Коши для уравнения второго порядка

$$\begin{cases} y'' = f(x; y; y') \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Геометрический смысл этой задачи заключается в том, чтобы найти на плоскости xOy интегральную линию уравнения, которая проходит через точку $(x_0; y_0)$ и имеет в этой точке заданное направление касательной.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $y'' = f(x; y; y')$, в котором функция $f(x; y; y')$ является многочленом от своих аргументов. Могут ли графики двух различных решений $y = y(x)$, проходящих через точку $(x_0; y_0)$, пересекаться в этой точке? касаться друг друга в этой точке? (см. рис. 5.1)

Поскольку в данном случае выполнены условия теоремы Пикара, две интегральные кривые, проходящие через точку $(x_0; y_0)$ и имеющие в

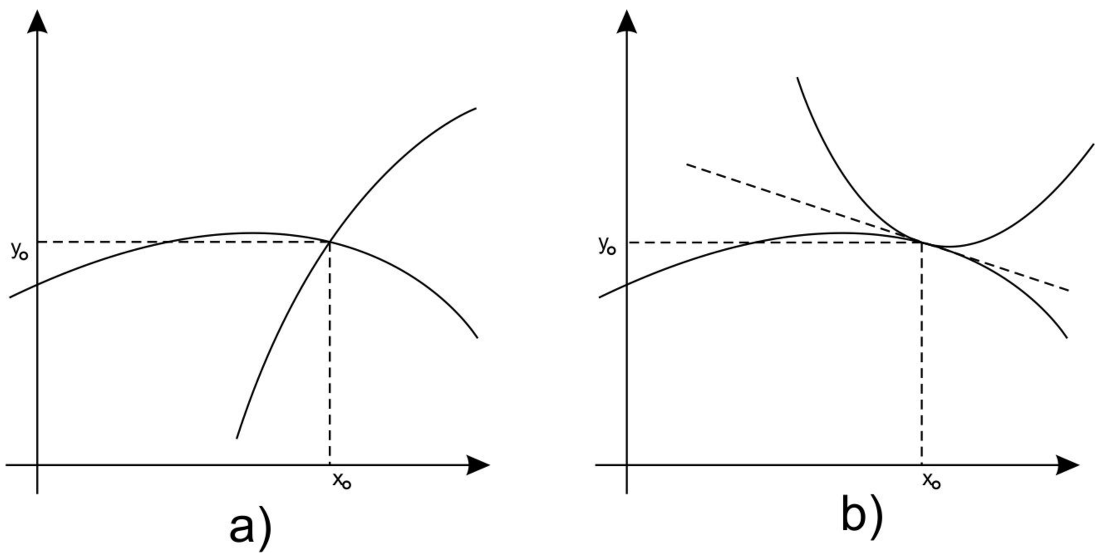

Рис. 5.1. Пересечение и касание двух решений уравнения

ней одинаковый наклон касательных, должны совпадать в силу теоремы единственности. Поэтому случай a) возможен, а случай b) — нет. $\square$

Замечание: если дифференциальное уравнение возникло при рассмотрении какой-либо задачи механики и описывает движение точки $x(t)$ по прямой, то задача Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t; x; \dot{x}) \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

состоит в том, чтобы определить закон движения точки $x(t)$, которая в начальный момент времени занимала положение x_0 и имела скорость v_0.