Задание 6 (сдать до 8 апреля)

Вариант 1

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[4,3,1,2]^\top, [1,1,1,1]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,-2,5,3]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-1,1,-4]^\top, [1,0,1,-1]^\top, [2,1,2,1]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x^2 + x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 2

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,3,5,4]^\top, [0,1,2,1]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,2,2,-8]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-1,1,1]^\top, [1,-2,1,-1]^\top, [1,0,1,3]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 + x^2 + x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)

Вариант 3

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2, 4, -1, 2]^\top, [1, 3, -1, 3]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[3, 2, 6, 8]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1, 0, 1, -1]^\top, [2, -1, 2, -4]^\top, [1, -2, 1, -5]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x + 1$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)

Вариант 4

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[-3,-1,0,5]^\top, [1,2,2,-2]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[2,2,2,3]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-1,-2,1]^\top, [1,-2,-6,2]^\top, [1,1,6,-1]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от x^3+x-1 до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\times\mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 5

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1, 0, -2, 2]^\top, [-1, 3, -1, 4]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[2, 3, 1, 0]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1, 1, 2, -1]^\top, [1, 4, 2, 2]^\top, [1, 1, 2, -1]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 + x^2 - 1$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 6

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,1,2,-1]^\top, [-2,2,-5,4]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,6,2,2]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[0,1,-1,-2]^\top, [1,3,-1,-3]^\top, [2,3,1,0]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x^2 + x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 7

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,2,-1,3]^\top, [2,3,-1,-2]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,5,3,6]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[-1,1,1,1]^\top, [1,3,0,1]^\top, [1,3,0,1]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от x^3+x^2+x до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\times\mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 8

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,1,2,1]^\top, [1,2,3,1]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[1,8,3,2]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-1,1,-1]^\top, [1,1,2,-1]^\top, [2,4,5,-2]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x + 1$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 9

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[3,-1,1,-1]^\top, [2,0,-1,2]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[2,-6,5,-3]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,2,1,3]^\top, [0,-1,1,-1]^\top, [1,0,3,1]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от x^3+x-1 до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\times\mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 7 \\ -4 & 7 & 25 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 10

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,-3,2,4]^\top, [2,-4,3,5]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[2,-6,7,-5]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-1,1,2]^\top, [1,0,-1,-1]^\top, [2,-1,0,1]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 + x^2 - 1$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 11

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[4,1,-3,-2]^\top, [4,1,-4,-1]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,3,3,-1]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-2,2,-1]^\top, [1,-1,2,0]^\top, [2,-1,4,1]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x^2 + x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 12

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,-2,-1,-1]^\top, [1,3,2,2]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,-5,9,6]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-1,3,2]^\top, [0,1,-1,0]^\top, [1,3,-1,2]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от x^3+x^2+x до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -12 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)

Вариант 13

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,-1,4,-3]^\top, [1,0,1,0]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[9,-8,3,2]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,2,-1,2]^\top, [1,-3,1,1]^\top, [2,-1,0,3]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x + 1$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 14

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,2,-3,2]^\top, [2,1,-2,1]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[-1,3,3,3]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,2,-1,2]^\top, [0,5,-2,1]^\top, [2,-1,0,3]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 + x - 1$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$

Задание 6 (сдать до 8 апреля)
Вариант 15

1. Найти жорданову форму и жорданов базис для матриц

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матричную экспоненту (любым удобным способом) $\exp(tA)$ для матриц из предыдущей задачи.

3. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[4,3,-1,-1]^\top, [3,1,-2,-2]^\top\right\},$$

и ортогонализовать полученные векторы.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $[2,8,1,6]^\top$ на линейную оболочку векторов

$$\left\{[1,-1,1,1]^\top, [2,1,4,2]^\top, [1,-4,-1,1]^\top\right\}$$

5. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 + x^2 - 1$ до подпространства многочленов степени не более 2.

6. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональные дополнения к линейным оболочкам множеств:
(a) всех верхнетреугольных матриц;
(b) всех матриц с нулевым следом;
(c) всех эрмитовых матриц.

7. Оператор A на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ действует по правилу $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Найти сопряжённый оператор A^*.

8. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор евклидова пространства в ортогональный к нему.

9. Исследовать разрешимость уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью альтернативы Фредгольма:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

10*. Для $n \times n$ матрицы A с единственным собственным числом λ найти такие полиномы A_k от A и скалярные функции $f_k(t)$, что

$$\exp(tA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k f_k(t).$$