

Вариант 1

1. (Теория) Поставьте для уравнения $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ задачу Коши и задачу Гурса так, чтобы они были однозначно разрешимы в C^2 .

2. (Теория, бонусная задача) **Принцип Дюамеля.** Пусть функция $v(x, y, z, t, \tau)$ — решение задачи

$$v_{tt} = a^2 \Delta v, \quad v|_{t=\tau} = 0, \quad v_t|_{t=\tau} = f(x, y, z, \tau).$$

Покажите, что функция

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t v(x, y, z, t, \tau) d\tau$$

является решением задачи Коши для уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u$ с однородными условиями в одномерном случае.

3. Найдите поверхность, удовлетворяющую уравнению и проходящую через данную линию:

$$xu_x + yu_y = u - xy; \quad x = 2; \quad u = y^2 + 1.$$

4. Приведите уравнение к каноническому виду и определите его тип:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} + u_x - 2u_z = 0$$

5. Решите задачу Гурса:

$$xu_{xx} + (x - y)u_{xy} - yu_{yy} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=x} = x.$$

6. Решите смешанную задачу для уравнения колебания струны:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 16t^2; \quad u|_{t=0} = 6x^3; \quad u_t|_{t=0} = 0; \quad u|_{x=0} = 2t^3$$

7. Решите задачу Коши:

$$u_{tt} - \Delta u = 0; \quad u|_{t=0} = 5x^3(2y + z); \quad u_t|_{t=0} = 4xyz^2.$$

Вариант 2

1. (Теория) Поставьте для уравнения $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ задачу Коши и задачу Гурса так, чтобы они были однозначно разрешимы в C^2 .

2. **Принцип Дюамеля.** Пусть функция $v(x, y, z, t, \tau)$ — решение задачи

$$v_{tt} = a^2 \Delta v, \quad v|_{t=\tau} = 0 \quad v_t|_{t=\tau} = f(x, y, z, \tau).$$

Покажите, что функция

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t v(x, y, z, t, \tau) d\tau$$

является решением задачи Коши для уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u$ с однородными условиями в одномерном случае.

3. Найдите поверхность, удовлетворяющую уравнению и проходящую через данную линию:

$$xu_x + uu_y = y; \quad y = 2u; \quad u = x + 2y.$$

4. Приведите уравнение к каноническому виду и определите его тип:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} - 3u_y + u_z = 0$$

5. Решите задачу Гурса:

$$yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0; \quad u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=x} = 4x^4.$$

6. Решите смешанную задачу для уравнения колебания струны:

$$u_{tt} - u_{xx} = 4t; \quad u|_{t=0} = x - 1; \quad u_t|_{t=0} = 0; \quad u|_{x=0} = \frac{t^4}{2}$$

7. Решите задачу Коши:

$$u_{tt} - \Delta u = 0; \quad u|_{t=0} = x^2 y z^2; \quad u_t|_{t=0} = e^{x+2y} \sin 3z.$$