1. Квазистационарные явления

Урок 26

Электромагнитная индукция

1.1. (Задача 6.35) По катушке сверхпроводящего соленоида течет постоянный ток J. Катушка совершает малые колебания по закону $\ell=\ell_0+a\cos\omega t$. При этом на зажимах ее возникает переменное напряжение. Какой амплитуды переменный ток той же частоты ω следует пропустить по катушке, чтобы на ее зажимах возникло такое же напряжение?

Решение Магнитное поле в соленоиде (в соответствие с теоремой Стокса в приближении бесконечного соленоида) определяется из соотношения

$$H\ell = \frac{4\pi}{c}NJ = \frac{4\pi}{c}nJ\ell.$$

Тогда

$$H = \frac{4\pi nJ}{c}.$$

Потокосцепление

$$\Phi = HSN = \frac{4\pi N^2 J}{c\ell}S.$$

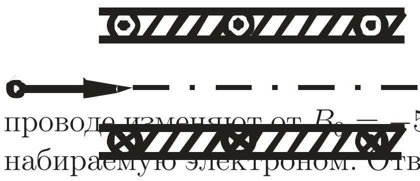
Электродвижущая сила в таком соленоиде

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{4\pi N^2 J\omega}{c^2\ell_0^2}a\sin\omega t,$$

откуда следует, что необходимо приложить ток

$$J_1 \sim \frac{Ja}{\ell_0}.$$

1.2. (Задача 6.36) В линейном индукционном ускорителе ЛИУ электроны летят вдоль оси цилиндрического магнитопровода (длина $\ell = 50$ см, внутренний радиус $r_1 = 2$ см, внешний $r_2 = 5$ см). За время $\tau = 10^{-6}$ с индукцию в магнитопроводе изменяют от $B_0 = -5$ кГс до $B_1 = +5$ кГс. Оценить максимальную энергию, набираемую электроном. Ответ выразить в электрон-вольтах (1 эВ $= 1,6\cdot 10^{-12}$ эрг).



Решение Предположим, что магнитные силовые линии представляют собой окружности внутри магнитопровода (см. рис.). ЭДС электромагнитной индукции, которая возникает вдоль оси ускорителя (или вихревое электрическое поле, другими словами)

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt},$$

где поток считается через поперечное сечение магнитопровода (например, верхняя часть заштрихованной области на рисунке). Домножив это уравнение на заряд электрона e и вспоминая определение э.д.с., получим

$$e\mathcal{E} = \int eE\mathrm{d}\ell = \int F\mathrm{d}\ell = T,$$

где T – кинетическая энергия, приобретенная электроном в ускорителе. Тогда

$$T = -\frac{e}{c}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{e}{c}\frac{\Delta B}{\tau}(r_2 - r_1)\,\ell = \frac{2.4\cdot 10^{-8}}{1.6\cdot 10^{-12}} = \frac{0.6}{0.4}\cdot 10^4 = 1.5\cdot 10^4 = 15\text{кэВ}.$$

1.3. (Задача 6.37) Горизонтальный стержень веса P и длины ℓ скользит без трения по двум вертикальным стержням, соединенным внизу конденсатором емкости C. Имеется однородное магнитное поле $\mathbf{B}$ перпендикулярное плоскости падения стержня. Найти ускорение стержня, пренебрегая электрическим сопротивлением образованной цепи (все стержни – проводящие).

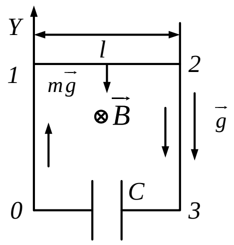
Решение Направление вектора $\mathbf{B}$ выбрано от читателя. Магнитный поток сквозь замкнутый контур 01230 будет меняться из-за изменения площади контура. Возникающая в контуре эдс индукции равна

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c}\ell B\dot{y},$$

поскольку

$$\Phi = B\ell y\,,$$

где y – координата горизонтального стержня. Начало координат выбрано на уровне конденсатора. По контуру течет ток, как показано на рисунке, так как в контуре действует эдс. При вычислении эдс мы пренебрегли магнитным полем, создаваемым этим током. По второму закону Кирхгофа сумма падений напряжений по замкнутому контуру равна сумме эдс, действующих в контуре. Поэтому падение напряжения на емкости $U_c = \mathcal{E}$. С другой стороны, $U_c = Q/C$, где Q – заряд конденсатора, а C – емкость конденсатора. Значит,



$$Q = -\frac{\ell B\dot{y}C}{c}\,. \tag{1}$$

Составим уравнение движения стержня (второй закон Ньютона). На стержень действует сила тяжести $P = m\mathbf{g}$, направленная вниз (противоположно положительному y), и сила Лоренца, направленная вверх. Поэтому

$$m\ddot{y} = -mg + \frac{JB\ell}{c},$$

где g – ускорение свободного падения; J – ток в контуре; $\ddot{y}$ – ускорение стержня. Дифференцируя уравнение (1) и учитывая, что $J = \dfrac{dQ}{dt}$, окончательно получаем

$$\ddot{y} = -\frac{g}{1 + \dfrac{\ell^2 B^2 C}{mc^2}}.$$

1.4. (Задача 6.38) Плоский контур вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле вокруг оси, лежащей в плоскости контура и перпендикулярной к полю. Индукция поля равна B. Определить эдс индукции в этом контуре. Площадь, ограниченная контуром, равна S.

Решение

$$\frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = \omega BS\sin(\omega t + \varphi_0).$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BS\omega}{c}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где φ_0 – угол между нормалью к контуру и направлением поля в начальный момент.

1.5. (Задача 6.39) Стержень ОА вращается с угловой скоростью ω вокруг точки О в плоскости, перпендикулярной к направлению однородного магнитного поля $\mathbf{H}$. Определить эдс индукции между точками О и А, если длина стержня ℓ.

Решение Линейная скорость движения элемента dr, находящегося на расстоянии r от точки вращения равна

$$v(r) = \omega r.$$

Свободные электроны, находящиеся в металле, движутся в каждой точке с такой же скоростью. На них действует сила Лоренца в направлении от центра вращения к внешнему концу, которая определяется соотношением

$$f = \frac{evH}{c}.$$

Разность потенциалов (или эдс) на элементе длины dr равна работе силы f при перемещении электрона на расстояние, деленной на заряд электрона, т. е.

$$d\mathcal{E} = \frac{f\,dx}{e},$$

а эдс на всей длине стержня

$$\mathcal{E} = \int\limits_0^\ell \frac{e\omega r H dr}{ce} = \frac{\omega}{c} H \frac{\ell^2}{2}.$$

1.6. (Задача 6.42) Круглая проволочная петля радиуса a, находящаяся в постоянном магнитном поле H_0, вращается с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, перпендикулярного $\mathbf{H}_0$. Найти силу тока в петле, тормозящий момент и среднюю мощность, которая требуется для поддержания вращения. Сопротивление петли – R, индуктивность – L.

Решение Эдс, которая возникает во вращающейся рамке, согласно закону Фарадея равна

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}H_0\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{c}H_0\pi a^2\frac{d}{dt}\cos\omega t = \frac{H_0\pi a^2\omega}{c}\sin\omega t.$$

Закон Кирхгофа для замкнутого контура (кольцо обладает активным сопротивлением R и индуктивностью L) записывается в виде

$$\mathcal{E} = \frac{L\dot{I}}{c^2} + IR,$$

или

$$\frac{L}{c^2}\dot{I} + RI = \mathcal{E} = \mathcal{E}_0\sin\omega t,$$

где

$$\mathcal{E}_0 = \frac{H_0\pi a^2\omega}{c}.$$

При решении подобных линейных дифференциальных уравнений можно для простоты заменить $\sin\omega t$ на экспоненту, потом в ответе взять мнимую часть.

$$\frac{L}{c^2}\dot{I} + RI = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Будем искать стационарное решение в виде

$$I = I_1 \cdot e^{i\omega t}.$$

Подставив это решение в исходное уравнение получим комплексную амплитуду тока

$$I_1\left(R+\frac{i\omega L}{c^2}\right)=\mathcal{E}_0,$$

или

$$I_1=\frac{\mathcal{E}_0}{R+\frac{i\omega L}{c^2}}.$$

Для нахождения действительной и мнимой частей домножим числитель и знаменатель на комплексносопряженное выражение, и тогда комплексную амплитуду тока можно представить в тригонометрической форме

$$I_1=\frac{\mathcal{E}_0\left(R-\frac{i\omega L}{c^2}\right)}{\left(R+\frac{i\omega L}{c^2}\right)\left(R-\frac{i\omega L}{c^2}\right)}=\frac{\mathcal{E}_0}{R^2+\frac{\omega^2L^2}{c^2}}\left(R-\frac{i\omega L}{c^2}\right)=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\frac{\omega^2L^2}{c^4}}}e^{i\phi},$$

где

$$\mathrm{tg}\phi=\frac{\omega L}{c^2R},$$

а, следовательно,

$$I=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\frac{\omega^2L^2}{c^4}}}e^{i\omega t-i\phi}.$$

Выделяя, как было упомянуто выше, мнимую часть, получим

$$I=\frac{\pi a^2\omega H_0}{c\sqrt{R^2+\frac{\omega^2L^2}{c^4}}}\sin\left(\omega t-\phi\right)=I_0\sin\left(\omega t-\phi\right).$$

Для вращения кольца с постоянной скоростью необходимо прикладывать момент сил, равный мгновенному значению тормозящего момента. Для вычисления момента сил, действующего на виток с током в однородном магнитном поле, рассмотрим (следуя Сивухину Д.В., Общий курс физики. Электричество, том Ш, стр.209.) плоский виток с током, лежащий в плоскости магнитного поля. Легко показать, что момент сил, действующий на виток площади S по которому течет ток I, равен

$$\mathbf{N}=\left[\mathbf{MH}\right],\quad\text{где}\quad\mathbf{M}=\frac{I}{c}\mathbf{S}.$$

Еще проще показать, что если этот виток с током перпендикулярен магнитному полю, то момент равен нулю. Поскольку при любом положении плоскости витка по отношению к магнитному полю можно разложить магнитное поле на перпендикулярную (не дающую вклада в момент) и параллельную составляющую магнитного поля, то очевидно, что приведенная выше формула справедлива при любой ориентации плоскости витка и однородного магнитного поля. Используя это выражение для нашей задачи, можно записать

$$\mathbf{N} = \frac{\pi a^2}{c} I H_0 \sin\alpha,$$

где α – угол между направлением $\mathbf{H}$ и нормалью к плоскости витка, $\alpha = \omega t$. В итоге получаем

$$\mathbf{N} = \frac{\pi a^2}{c} I_0 H_0 \left[\cos\phi - \cos(2\omega t - \phi)\right].$$

Средняя мощность, выделяемая в проводнике (джоулево тепло) определяется соотношением

$$\overline{W} = \overline{I^2 R} = \frac{1}{2} I_0^2 R.$$

1.7. (Задача 6.44) Замкнутая катушка из медного провода внесена в однородное поле $H = H_0 e^{-i\omega t}$ (частота 16 кГц), параллельное оси катушки. Площадь катушки $S = 10$ см^2, число витков $N = 10^2$, индуктивность $L = 10^{-3}$ Гн, сопротивление обмотки $R = 1$ Ом. Найти ток в обмотке и оценить средний магнитный поток через катушку, если напряженность невозмущенного поля $H_0 = 10^3$ Э.

Решение Согласно закону Фарадея, эдс в катушке определяется соотношением

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} N S \frac{dH}{dt} = \frac{1}{c} N S H_0 i\omega e^{-i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Полное сопротивление катушки

$$R_{\text{общ}} = \sqrt{R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{c^2}}.$$

Тогда полный ток в катушке

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{c} \frac{N S H_0 \omega}{\sqrt{R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{c^4}}} \sin(\omega t - \phi) = I_0 \sin(\omega t - \phi).$$

Переведем исходные данные в Гауссову систему

$$\begin{aligned}
&\omega = 2\pi\nu = 23.141.610^4 \simeq 10^5 \text{ рад/сек},\\
&L = 10^{-3} \cdot 10^9 = 10^6 \text{ см},\\
&R = 1/(9 \cdot 10^{11}) \simeq 10^{-12} \text{ сек/см}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$I_0 = \frac{10^2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^{10}\sqrt{10^{-24} + \frac{10^{10}10^{12}}{81 \cdot 10^{40}}}} \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{статкулон/сек} = 10\ A,$$

$$\overline{\Phi} = \frac{L\overline{|I|}}{c} = \frac{LI_0}{\sqrt{2}c}$$

1.8. (Задача 6.47) В бетатроне во время ускорения электрона магнитное поле непрерывно нарастает, порождая разгоняющую электрон эдс индукции, а орбита его остается неизменной. Доказать, что для ускорения электрона на орбите постоянного радиуса необходимо, чтобы полный магнитный поток Φ_2, пронизывающий орбиту, был вдвое больше потока Φ_1, который получился бы, если бы поле внутри орбиты было однородно и равно полю на орбите (бетатронное правило $2:1$).

Решение Уравнение движения (нерелятивистское) на орбите электрона описывается уравнением движения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\left[\mathbf{vB}\right].$$

Поскольку по условию задачи мы хотим получить движение по окружности постоянного радиуса, импульс равно как и скорость направлены по касательной к окружности-траектории $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = p\boldsymbol{\tau}$. Разложим вектор изменения импульса на касательную (вдоль $\boldsymbol{\tau}$)и нормальную $\mathbf{n}$ к орбите составляющие.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dP}{dt}\boldsymbol{\tau} + p\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}.$$

В курсе механики (а также математики) показывалось, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{v}{r_0}\mathbf{n},$$

где v – модуль скорости на орбите, а r_0 – радиус этой орбиты. Тогда

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dP}{dt}\boldsymbol{\tau} + m\frac{v^2}{r_0}\mathbf{n}.$$

Электрон ускоряется вихревым электрическим полем, возникающим за счет электромагнитной индукции и, используя интегральное выражение для закона электромагнитной индукции, можем записать

$$\oint E_l dl = 2\pi r_0 E = \frac{1}{c}\left|\frac{d\Phi}{dt}\right|,$$

где $\Phi = \int \mathbf{B}d\mathbf{S} = \pi r_0^2 < B >$, $< B >$ – усредненное по площади орбиты мгновенное значение магнитного поля. Таким образом, касательная проекция уравнения движения может быть записана в виде

$$\frac{dP}{dt} = eE = \frac{er_0}{2c}\frac{d}{dt} < B > .$$

Нормальная компонента уравнения движения может быть записана в виде

$$\frac{mv^2}{r_0} = \frac{evB(r_0)}{c}, \text{ откуда } mv = P = \frac{er_0B(r_0)}{c}.$$

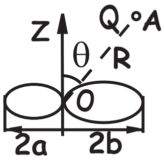
Взяв производную от полученного уравнения и приравнивая к полученному из тангенциальных компонент, получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}B(r_0) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} < B >,$$

откуда

$$B(r_0) = \frac{1}{2} < B > .$$

1.9. (Задача 6.50) В горизонтальной плоскости лежит проводник. Радиусы колец проводника, образующих «восьмерку», равны a и b. По проводнику течет ток $J = J_0 \sin \omega t$. В точке A на расстоянии R от точки самопересечения проводника расположен неподвижный заряд Q, Найти силу, действующую на этот заряд, $R \gg a, b$ и OA составляет с вертикалью OZ угол θ.



Решение Поскольку радиусы колец «восьмерки» малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, то мы можем рассматривать каждое кольцо как магнитный диполь, создающий поле в точке А. Вспомним формулу поля магнитного поля, создаваемого магнитным диполем.

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}\,(\mathbf{m}\mathbf{r})}{r^5},$$

где $\mathbf{m}$ – магнитный момент кольца площадью S с током J. $\mathbf{m} = \frac{SJ}{c}\mathbf{n}$. Считая в первом приближении, что центры обоих колец находятся в начале координат, мы получим полный магнитный момент в виде

$$\mathbf{m} = \frac{\pi(b^2 - a^2)}{c}J.$$

В силу принятого нами допущения – оба магнитных момента находятся в начале координат и направлены вдоль оси z – возникающее от изменения во времени магнитного поля вихревое электрическое поле будет иметь осевую симметрию, а силовые линии электрического поля будут окружностями, лежащими в плоскости, перпендикулярной оси z. Тогда, используя интегральную форму закона электромагнитной индукции, мы можем записать

$$E_\phi \cdot 2\pi r \sin\theta = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}d\mathbf{S}.$$

Поскольку поток вектора можно вычислять через любую поверхность, опирающуюся на заданный контур, в данном случае это удобно сделать, выбрав в качестве поверхности часть сферы с центром в начале координат и радиусом R. Тогда поток вектора $\mathbf{B}$ можно записать в виде

$$\Phi = \int \mathbf{B}d\mathbf{S} = \int B_r \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad B_r = -2\frac{m\cos\theta}{R^3}.$$

Производя элементарные вычисления, получим

$$E_\phi = -\frac{J_0\omega\pi}{c^2R^2}\left(b^2 - a^2\right)\cos\omega t\sin\theta.$$

Можно вычислить электрическое поле, используя векторный потенциал $\mathbf{A}$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

По определению векторный потенциал магнитного диполя

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R^3} = \frac{(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)\times\mathbf{R}}{R^3}.$$

Используя такое же приближение, как и выше – кольцо с током можно представить как магнитный диполь

$$\mathbf{m} = \frac{JS}{c}\mathbf{n} = \frac{\pi\left(b^2 - a^2\right)}{c}J_0\sin\omega t \cdot \mathbf{e}_z.$$

Тогда

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c}\frac{\pi\left(b^2 - a^2\right)}{c}J_0\omega\cos\omega t\frac{\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_r}{R^2},$$

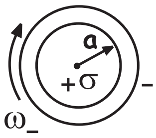
или

$$E_\phi = \frac{\pi\omega J_0\left(b^2 - a^2\right)}{c^2r^2}\sin\theta\cos\omega t.$$

Результат, конечно, совпадает с полученным ранее. Сила, действующая на заряд,

$$F_\phi = -\frac{Q\omega\pi J_0\sin\theta}{c^2R^2}\left(b^2 - a^2\right)\cos\omega t.$$

1.10. (Задача 6.55 а) Два длинных коаксиальных полых цилиндра заряжены закрепленными противоположными по знаку и равными по величине зарядами. Поверхностная плотность зарядов внутреннего цилиндра радиуса a равна $+\sigma$, масса его единицы длины равна μ. Внешний цилиндр закрутили с угловой скоростью ω_-. Найти угловую скорость ω_+ внутреннего цилиндра.



б) Твердый непроводящий диск, равномерно заряженный по поверхности, может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Вначале диск покоился. Затем было включено однородное магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\omega t}$, перпендикулярное плоскости диска. Найти движение диска, если его масса – m, а величина заряда на поверхности – q.

Решение а) Магнитное поле, создаваемое вращающимся заряженным цилиндром (в пренебрежении краевыми эффектами) направлено вдоль оси цилиндра и определяется из теоремы Стокса

$$H = \frac{4\pi}{c} j = \frac{4\pi}{c}\sigma v = \frac{4\pi}{c}\sigma\omega a.$$

Здесь j, вопреки традиции, обозначает не объемную, а линейную плотность тока. Уравнение вращения цилиндра вокруг оси под действием момента сил имеет вид

$$J\frac{d\omega_+}{dt} = \mu a^2 \frac{d\omega_+}{dt} = N = Fa = \sigma E 2\pi a a,$$

где использовалось выражение для момента инерции единицы длины цилиндра $J = \mu a^2$. Вихревое электрическое поле, которое, собственно говоря, и вращает цилиндр, определяется из закона электромагнитной индукции

$$2\pi a E = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\left[\frac{d\Phi_-}{dt} + \frac{d\Phi_+}{dt}\right].$$

Магнитные потоки через площадь внутреннего цилиндра, создаваемые вращением цилиндров, равны, соответственно,

$$\Phi_- = -\frac{4\pi^2 a^2}{c}\omega_-\sigma_+ a, \quad \Phi_+ = \frac{4\pi^2 a^2}{c}\omega_+\sigma_+ a.$$

При выводе этих формул использовался факт равенства зарядов цилиндров, который записывается в виде $\sigma_+ a = \sigma_- b$. В итоге, используя выведенные формулы, уравнение вращения переписывается в виде

$$\mu a^2 \frac{d\omega_+}{dt} = \frac{4\pi^2 a^4 \sigma^2}{c^2}\frac{d}{dt}(\omega_- - \omega_+).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\omega_+ = \frac{4\pi^2 a^2 \sigma^2}{\mu c^2} (\omega_- - \omega_+) + C_1.$$

Из условия $\omega_+ = 0$ при $\omega_- = 0$ получаем $C_1 = 0$. Тогда

$$\omega_+ = \frac{\omega_-}{1 + \mu c^2/4\pi^2 a^2 \sigma^2}.$$

б)Уравнение движения (вращения) диска записывается в виде

$$J\frac{d\Omega}{dt} = \frac{ma^2}{2}\frac{d\Omega}{dt} = N,$$

где N– суммарный момент сил, $J = \frac{ma^2}{2}$ – момент инерции диска.

$$N = \int\limits_0^a r\sigma E(r) 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int\limits_0^a E(r) r^2 dr$$

Циркуляция электрического поля определяется из интегрального выражения закона электромагнитной индукции (в пренебрежении магнитного поля, создаваемого самим вращающимся заряженным диском)

$$2\pi r E(r) = -\frac{\pi r^2}{c}\frac{dH}{dt} = -\frac{i\omega\pi r^2}{c} H_0 e^{i\omega t}.$$

Тогда уравнение движения диска запишется в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = -i\omega\frac{\pi a^2 \sigma}{2mc} H_0 e^{i\omega t}.$$

решение это уравнения имеет вид

$$\Omega = \frac{q a^2 H_0}{4cJ}\left(1 - e^{i\omega t}\right).$$