Свойства решений уравнения Лапласа, потенциалы, функция Грина

“Уравнения математической физики”

Скопинцев Артур Маркович

Новосибирск, 2023

Формулы Грина

Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_x = (x_1, \ldots, x_n)$, граница которой $\partial\Omega$ принадлежит классу B_1. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — функции, принадлежащие классу $C^2(\overline{\Omega})$. Применяя формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} dx = - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j ds \,. \qquad (3.4)$$

$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, ds означает элемент площади $\partial\Omega$.

Суммируя равенства (3.4) по j от 1 до n, получаем **первую формулу Грина**

$$\int\limits_{\Omega} v \Delta u dx = - \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds. \qquad (3.5)$$

Точно так же имеем

$$\int\limits_{\Omega} u \Delta v dx = - \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds. \qquad (3.6)$$

Вычитая из равенства (3.5) равенство (3.6), получим **вторую формулу Грина**

$$\int\limits_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds. \qquad (3.7)$$

Ниже мы увидим многочисленные применения этих формул при изучении уравнения Лапласа и уравнения Пуассона.

Фундаментальное решение

Пусть

$$|x - x^0| = \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — точка пространства $\mathbb{R}_x^n$, рассматриваемая как параметр. Функция

$$E(x, x^0) = -\frac{|x - x^0|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} \quad \text{при} \quad n > 2, \tag{3.8}$$

$$E(x, x^0) = \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^0| \quad \text{при} \quad n = 2, \tag{3.9}$$

где ω_n — площадь поверхности единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}_x^n$, играет важную роль при изучении уравнения Лапласа. Положим $E(x, x^0) = \mathcal{E}(|x - x^0|)$. Легко проверить, что в области $\mathbb{R}_x^n \backslash \{x^0\}$ функция $E(x, x^0)$ является гармонической функцией, т. е.

$$\Delta E = 0, \qquad \mathbb{R}_x^n \backslash \{x^0\}. \tag{3.10}$$

Действительно, если функция $v(x)$ зависит только от $r \equiv |x - x^0|$ и удовлетворяет уравнению Лапласа при $|x - x^0| \neq 0$, то, подставляя v в уравнение (3.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Delta v = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{(n-1)}{r}\frac{dv}{dr} = 0. \tag{3.11}$$

Легко проверить, что функция $\mathcal{E}(r)$ удовлетворяет уравнению (3.11) при $|x - x^0| \neq 0$.

Определение 1. Функция $V(x, x^0)$ называется **фундаментальным решением уравнения Лапласа**, если $V(x, x^0)$ является обобщенной функцией из пространства $D'(\mathbb{R}_x^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta V = \delta(x - x^0), \tag{3.12}$$

где обобщенная функция $\delta(x)$ — функция Дирака:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \langle \delta(x - x^0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x^0).$$

Покажем, что функция $E(x, x^0)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Так как $E(x, x^0)$ — локально суммируемая функция в $\mathbb{R}_x^n$, то $E(x, x^0) \in D'(\mathbb{R}_x^n)$. Проверим, что выполнено уравнение (3.12). Пусть $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}_x^n)$. Согласно определению производной обобщенной функции

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle E, \Delta\varphi \rangle.$$

Далее, так как $E(x,x^0)$ — локально суммируемая функция в $\mathbb{R}^n_x$, то

$$\langle E,\Delta\varphi\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}E(x,x^0)\Delta\varphi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x\setminus Q^{x^0}_\varepsilon}E(x,x^0)\Delta\varphi(x)dx,$$

где $Q^{x^0}_\varepsilon$ обозначает шар радиуса ε с центром в точке $x=x^0$. Для вычисления последнего предела воспользуемся второй формулой Грина. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x\setminus Q^{x^0}_\varepsilon}E(x,x^0)\Delta\varphi(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n_x\setminus Q^{x^0}_\varepsilon}\Delta E(x,x^0)\varphi(x)dx+\int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial\nu'}-\varphi\frac{\partial E}{\partial\nu'}\right)ds, \tag{3.13}$$

где ν' — направление внутренней нормали к сфере радиуса ε с центром в точке x^0, которую мы обозначили $S^{x^0}_\varepsilon$. В силу равенства (3.10)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x\setminus Q^{x^0}_\varepsilon}\Delta E(x,x^0)\varphi(x)dx=0.$$

Покажем, что последний интеграл в равенстве (3.13) стремится к $\varphi(x^0)$ при $\varepsilon\to 0$. Имеем

$$\left|\int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon}E\frac{\partial\varphi}{\partial\nu'}ds\right|\leqslant|\mathcal{E}(\varepsilon)|\int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu'}\right|ds\leqslant|\mathcal{E}(\varepsilon)|\omega_n\varepsilon^{n-1}\max_{S^{x^0}_\varepsilon}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu'}\right|\leqslant C_1\varepsilon^{n-1}|\mathcal{E}(\varepsilon)|,$$

где постоянная C_1 не зависит от ε, так как $E(x,x^0)$ постоянна на $S^{x^0}_\varepsilon$ и равна $\mathcal{E}(\varepsilon)$, а производные φ ограничены в $\overline{\Omega}$. Очевидно, что $\mathcal{E}(\varepsilon)\varepsilon^{n-1}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon}\varphi\frac{\partial E}{\partial\nu'}ds=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon}\varphi ds=-\varphi(x^0),$$

так как $\frac{\partial E}{\partial\nu'}=-\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}$ на сфере $S^{x^0}_\varepsilon$. Поэтому предел при $\varepsilon\to 0$ левой части равенства (3.13) равен $\varphi(x^0)$. Следовательно,

$$\langle\Delta E,\varphi\rangle=\langle E,\Delta\varphi\rangle=\varphi(x^0)=\left\langle\delta(x-x^0),\varphi(x)\right\rangle.$$

Это означает, что функция $E(x,x^0)$ удовлетворяет уравнению (3.12). В случае $n=3$ функция $CE(x,x^0)$, где $C=\mathrm{const}$, является потенциалом электростатического поля, создаваемого точечным электрическим зарядом, помещенным в точку x^0. Кроме того, $CE(x,x^0)$ можно рассматривать как функцию, определяющую стационарное распределение температуры в $\mathbb{R}^3_x$ при наличии точечного источника тепла в точке x^0

Представление решений через потенциалы

Пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ через $Q_\varepsilon^{x^0}$ обозначим, как и выше, шар радиуса ε с центром в точке x^0, а через $S_\varepsilon^{x^0}$ обозначим сферу радиуса ε с центром в точке x^0. Пусть $Q_\varepsilon^{x^0} \subset \Omega$ и $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{Q}_\varepsilon^{x^0}$. Применим вторую формулу Грина (3.7) к области Ω_ε и функциям $u(x)$ и $E(x, x^0)$. Имеем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (E\Delta u - u\Delta E)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(E\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial E}{\partial \nu}\right) ds + \int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}} \left(E\frac{\partial u}{\partial \nu'} - u\frac{\partial E}{\partial \nu'}\right) ds, \tag{3.14}$$

где ν' — направление внутренней нормали к $S_\varepsilon^{x^0}$. Равенство (3.14) справедливо при любых достаточно малых ε. Первый интеграл в правой части равенства (3.14) не зависит от ε. Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ интеграл по $S_\varepsilon^{x^0}$ в правой части равенства (3.14) стремится к $u(x^0)$. Легко видеть, что

$$\left| \int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}} E\frac{\partial u}{\partial \nu'} ds \right| \leqslant |\mathcal{E}(\varepsilon)|\omega_n \varepsilon^{n-1} \max_{S_\varepsilon^{x^0}} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu'}\right| \leqslant C_1 \varepsilon^{n-1} |\mathcal{E}(\varepsilon)|,$$

где постоянная C_1 не зависит от ε, и $\varepsilon^{n-1}|\mathcal{E}(\varepsilon)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так как на $S_\varepsilon^{x^0}$

$$\frac{\partial E}{\partial \nu'} = \frac{\partial E}{\partial \nu} = -\frac{1}{\omega_n}\varepsilon^{1-n},$$

то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(- \int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}} u\frac{\partial E}{\partial \nu'} ds \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}} u\, ds = u(x^0).$$

Здесь мы применили известную теорему о среднем значении для интеграла

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}} u ds = \omega_n \varepsilon^{n-1} u(x^\varepsilon),$$

где $x^\varepsilon \in S_\varepsilon^{x^0}$, и воспользовались непрерывностью $u(x)$ в Ω. Поэтому, переходя в равенстве (3.14) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial E}{\partial \nu} - E\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds + \int\limits_{\Omega} E\Delta u dx. \tag{3.15}$$

Если $\Delta u = 0$ в Ω, то из формулы (3.15) следует, что

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial E(x, x^0)}{\partial \nu} - E(x, x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right) ds. \tag{3.16}$$

Формула (3.16) дает **представление гармонической функции** из класса $C^2(\overline{\Omega})$ в любой точке x^0 области Ω через значения $u(x)$ на $\partial\Omega$ и значения на $\partial\Omega$ ее нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. Из формулы (3.16) получим много важных следствий.

Если $\Delta u = f$ в Ω, то из формулы (3.15) имеем

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} f(x)E(x, x^0)dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial E(x, x^0)}{\partial \nu} - E(x, x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right) ds \tag{3.17}$$

для любой точки $x^0 \in \Omega$.

Потенциалы

Интеграл вида

$$u_0(x^0) = \int\limits_{\Omega} a_0(x)|x - x^0|^{2-n} dx, \quad n > 2, \tag{3.18}$$

называется **объемным потенциалом** или **ньютоновым потенциалом** с плотностью $a_0(x)$ в Ω. Интеграл вида

$$u_1(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} a_1(x)|x - x^0|^{2-n} dx, \quad n > 2, \tag{3.19}$$

называется **потенциалом простого слоя** с плотностью $a_1(x)$ на $\partial\Omega$, а интеграл вида

$$u_2(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} a_2(x) \frac{\partial |x - x^0|^{2-n}}{\partial \nu} dx, \quad n > 2, \tag{3.20}$$

называется **потенциалом двойного слоя** с плотностью $a_2(x)$ на $\partial\Omega$.

В случае $n = 2$ аналогично определятся **ньютонов**, или **логарифмический, потенциал** и потенциалы простого или двойного слоев. При этом в интегралах (3.18), (3.19), (3.20) нужно функцию $|x - x^0|^{2-n}$ заменить функцией $-\ln|x - x^0|$.

Из формулы (3.16) следует, что всякую гармоническую функцию из класса $C^2(\overline{\Omega})$ можно представить в виде суммы потенциала простого слоя и потенциала двойного слоя на $\partial\Omega$, плотности которых определяются значениями $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ и u на $\partial\Omega$.

Физический смысл потенциалов (3.18)–(3.20) при $n = 3$ и $n = 2$ подробно разъясняется в книгах [10], [12]. Как мы уже отмечали, в случае $n = 3$ напряженность электростатического поля, создаваемого точечным электрическим зарядом q, помещенным в точку x^0, при соответствующем выборе единиц измерения равна градиенту функции $q|x - x^0|^{2-n}$, называемой потенциалом данного электростатического поля. Очевидно, градиент ньютонова потенциала (3.18) определяет напряженность электростатического поля в $\mathbb{R}^n_x \backslash \overline{\Omega}$, создаваемого зарядами, помещенными в область Ω, плотность которых равна $a_0(x)$. Потенциал простого слоя (3.19) является потенциалом электростатического поля в $\mathbb{R}^n_x \backslash \partial\Omega$, создаваемого электрическими зарядами, помещенными на $\partial\Omega$ с поверхностной плотностью $a_1(x)$. Градиент потенциала двойного слоя (3.20) определяет напряженность электростатического поля, создаваемого диполями, помещенными на поверхности $\partial\Omega$ с поверхностной плотностью $a_2(x)$.

Теорема о потоке тепла

Теорема (о потоке тепла). *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в Ω из класса $C^2(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in B^1$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0. \tag{3.24}$$

Доказательство. Применим формулу Грина (3.5) для функций $u(x)$, $v(x) \equiv 1$ в области Ω. В этом случае из равенства (3.5) вытекает соотношение (3.24). □

Эта теорема имеет следующую физическую интерпретацию. Если $u(x)$ задает стационарное распределение температуры внутри однородной изотропной среды, заполняющей объем Ω, то

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

с точностью до постоянного множителя, зависящего от выбора единиц измерения, задает поток тепла через поверхность $\partial\Omega$ в сторону нормали ν. Теорема 1 утверждает, что поток тепла через границу тела при стационарном распределении температуры равен нулю.

Пусть постоянные ρ_1 и ρ_2 таковы, что $Q^{x^0}_{\rho_1}$ и $Q^{x^0}_{\rho_2}$ содержатся в Ω и $\rho_2 > \rho_1$. Тогда, применяя соотношение (3.24) к фундаментальному решению $E(x, x_0)$ и области $Q^{x^0}_{\rho_2} \backslash Q^{x^0}_{\rho_1}$, получим, что

$$\int\limits_{S^{x^0}_{\rho_1}} \frac{\partial E(x, x^0)}{\partial \nu} ds = \int\limits_{S^{x^0}_{\rho_2}} \frac{\partial E(x, x^0)}{\partial \nu} ds.$$

Это означает, что количество тепла, проходящего через любую сферу с центром в точке x^0 в направлении внешней нормали при распределении температуры в $\Omega \backslash \{x^0\}$, соответствующем функции $-E(x, x^0)$, постоянно. Поэтому точку x^0 при распределении температуры $-E(x, x^0)$ можно рассматривать как источник тепла, выделяющий количество тепла, равное

$$\int\limits_{S^{x^0}_{\rho}} \frac{\partial E}{\partial \nu} ds = 1.$$

Теоремы о среднем значении

Теорема (о среднем значении по сфере). *Пусть гармоническая в шаре $Q_R^{x^0}$ функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{Q}_R^{x^0})$. Тогда*

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{S_R^{x^0}} u\, ds. \tag{3.25}$$

Доказательство. Пусть $\rho < R$. Тогда по формуле (3.16), взяв за область Ω шар $Q_\rho^{x^0}$, получаем

$$u(x^0) = \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu} - E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds. \tag{3.26}$$

Так как на сфере $S_\rho^{x^0}$ функция $E(x,x^0) = \mathcal{E}(\rho)$, то в силу теоремы 14

$$\int\limits_{S_\rho^{x^0}} E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds = \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \mathcal{E}(\rho)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds = 0.$$

Поэтому, учитывая, что $\frac{\partial E}{\partial \nu} = \frac{\rho^{1-n}}{\omega_n}$ на сфере $S_\rho^{x^0}$, из (3.26) выводим, что

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{S_\rho^{x^0}} u\, ds. \tag{3.27}$$

Переходя к пределу в равенстве (3.27) при $\rho \to R$, в силу непрерывности функции $u(x)$ в замкнутом шаре $\overline{Q}_R^{x^0}$ получаем равенство (1.25). □

Теорема (о среднем значении по шару). *Пусть гармоническая в шаре $Q_R^{x^0}$ функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{Q}_R^{x^0})$. Тогда*

$$u(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n R^n} \int\limits_{Q_R^{x^0}} u(x) dx, \tag{3.28}$$

где $\varkappa_n$ обозначает объем шара радиуса 1 в n-мерном пространстве $\mathbb{R}_x^n$.

Доказательство. Умножим равенство (3.27) на $\omega_n \rho^{n-1}$ и проинтегрируем его по ρ от нуля до R. Получим

$$u(x^0) \int\limits_0^R \omega_n \rho^{n-1} d\rho = \int\limits_0^R \left(\int\limits_{S_\rho^{x^0}} uds \right) d\rho. \tag{3.29}$$

Так как

$$\int\limits_0^R \omega_n \rho^{n-1} d\rho = \varkappa_n R^n, \quad \int\limits_0^R \left(\int\limits_{S_\rho^{x^0}} u\, ds \right) d\rho = \int\limits_{Q_R^{x^0}} u(x) dx,$$

то из равенства (3.29) следует утверждение теоремы. □

Теорема о среднем значении по шару допускает следующее обобщение, которое, как и теоремы 15 и 16, имеет важные приложения.

…

Теорема *Пусть $\varphi(\rho)$ — непрерывная функция на отрезке $0 \leqslant \rho \leqslant R$ и пусть*

$$A(R) \equiv \int\limits_{Q_R^{x^0}} \varphi(|x - x^0|)dx \neq 0.$$

Тогда, если $u(x)$ — гармоническая в шаре $Q_R^{x^0}$ функция из класса $C^0(Q_R^{x^0})$, то

$$u(x^0) = \frac{1}{A(R)} \int\limits_{Q_R^{x^0}} u(x)\varphi(|x - x^0|)dx. \tag{3.30}$$

Доказательство. Умножим равенство (3.27) на $\omega_n \rho^{n-1}\varphi(\rho)$ и проинтегрируем его по ρ от нуля до R. Имеем

$$u(x^0) \int\limits_0^R \varphi(\rho)\omega_n \rho^{n-1} d\rho = \int\limits_0^R \left(\int\limits_{S_\rho^{x^0}} u\varphi(\rho)ds \right) d\rho = \int\limits_{Q_R^{x^0}} u(x)\varphi(|x - x^0|)dx.$$

Из последнего равенства вытекает соотношение (3.30). □

Следствие 1. *Пусть область $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ и расстояние от любой точки Ω_ε до $\partial\Omega$ больше ε. Тогда средние функции $u^h(x)$ от гармонической в Ω функции $u(x)$ при $h < \varepsilon$ в области Ω_ε совпадают с функцией $u(x)$, т. е. при любых $h < \varepsilon$ и $x^0 \in \Omega_\varepsilon$ справедливо равенство*

$$u(x^0) = u^h(x^0) \equiv \int\limits_{Q_h^{x^0}} w_h(|x - x^0|)u(x)dx.$$

Действительно, возьмем в равенстве (3.30) за $\varphi(|x - x^0|)$ ядро усреднения $w_h(|x - x^0|)$. Согласно свойствам ядра усреднения (см. § 1.2) имеем

$$\int\limits_{Q_h^{x^0}} w_h(|x - x^0|)dx = 1.$$

Поэтому для любой точки $x^0 \in \Omega_\varepsilon$ и $h < \varepsilon$ из равенства (3.30) вытекает, что

$$u(x^0) = \int\limits_{Q_h^{x^0}} w_h(|x - x^0|)u(x)dx = u^h(x^0).$$

Пользуясь указанным выше следствием, получим теорему о бесконечной дифференцируемости гармонических функций.

Принцип максимума

Теорема *Гармоническая в Ω функция $u(x)$ имеет в каждой точке $x \in \Omega$ непрерывные производные любого порядка.*

Доказательство. Функция $u(x)$ в Ω_ε совпадает со средней функцией $u^h(x)$ при $h < \varepsilon$, а $u^h(x)$, как доказано в § 1.2, бесконечно дифференцируема в Ω_ε, а значит, и в Ω. $\square$

Утверждение теоремы 18 также легко следует из представления (3.16) гармонической функции с помощью потенциалов, так как стоящие в правой части (3.16) интегралы можно любое число раз дифференцировать под знаком интеграла по координатам точки x^0, если $x^0 \in \Omega$.

Теорема (принцип максимума). *Пусть гармоническая в области Ω функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{\Omega})$ и пусть $M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$. Если $u(x^0) = M$ и $x^0 \in \Omega$, то $u \equiv M$ в Ω.*

Доказательство. Пусть $Q_R^{x^0} \subset \Omega$. Предположим, что $u(x') \neq M$ для некоторой точки $x' \in Q_R^{x^0}$. Это означает, что в окрестности $Q_\rho^{x'}$ точки x' при некоторых $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $u(x) < u(x^0) - \varepsilon$. Тогда по теореме 16 имеем

$$u(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n R^n}\left(\int\limits_{Q_R^{x^0}\setminus Q_\rho^{x'}} u(x)dx + \int\limits_{Q_\rho^{x'}} u(x)dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varkappa_n R^n}\left[M(\varkappa_n R^n - \varkappa_n \rho^n) + (M-\varepsilon)\varkappa_n\rho^n\right]$$

и, следовательно,

$$M = u(x^0) < M - \frac{\varepsilon\rho^n}{R^n}.$$

Полученное противоречие показывает, что $u(x') = M$ в любой точке $x' \in Q_R^{x^0}$. Далее, соединим ломаной произвольную точку $\hat{x} \in \Omega$ с точкой x^0 и покроем ломаную конечным числом шаров $Q_{R_0}^{x^0}, Q_{R_1}^{x^1}, \ldots, Q_{R_N}^{x^N}$, содержащихся в Ω и таких, что $Q_{R_N}^{x^N}$ содержит точку $\hat{x}$, а $x^k \in Q_{R_{k-1}}^{x^{k-1}}$, $k = 1, \ldots, N$. По доказанному выше получаем, что $u(x) = M$ в каждом из этих шаров, а значит, $u(\hat{x}) = M$. $\square$

Теорема *Пусть гармоническая в Ω функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{\Omega})$ и пусть $m = \min\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$. Если $u(x^0) = m$ и $x^0 \in \Omega$, то $u \equiv m$ в Ω.*

Единственность решения задачи Дирихле

Теорема *Гармоническая в Ω функция $u(x)$ из класса $C^0(\overline{\Omega})$, отличная от постоянной, при любом $x \in \Omega$ удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u. \tag{3.31}$$

Следствие 2. *Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа единственно.*

Доказательство. Из теоремы 21 вытекает, что если $\Delta u = 0$ в Ω, $u \in C^0(\overline{\Omega})$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$, то $u \equiv 0$ в Ω. $\square$

Функция Грина задачи Дирихле

Пусть $u(x)$ — решение первой краевой задачи

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u\Big|_{\partial\Omega} = \psi \tag{3.38}$$

и пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in B^1$. Тогда, согласно формуле представления (3.17), имеем

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} f(x)E(x,x^0)dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial\nu} - E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu} \right) ds. \tag{3.39}$$

Пусть при любой фиксированной точке $x^0 \in \Omega$ функция $g(x,x^0)$ — гармоническая функция точки x в области Ω и пусть $g(x,x^0)$ как функция x принадлежит классу $C^2(\overline{\Omega})$. Тогда по формуле Грина (3.7) имеем

$$0 = \int\limits_{\Omega} f(x)g(x,x^0)dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial g(x,x^0)}{\partial\nu} - g(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu} \right) ds. \tag{3.40}$$

Предположим, что функция $g(x,x^0)$ при любом $x^0 \in \Omega$ удовлетворяет условию

$$g(x,x^0)\,|_{\partial\Omega} = -E(x,x^0)|_{\partial\Omega}.$$

Тогда, складывая равенства (3.39) и (3.40), получаем

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} \left(E(x,x^0) + g(x,x^0)\right) f(x)dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial\nu} + \frac{\partial g(x,x^0)}{\partial\nu} \right) u(x)ds.$$

Функцию

$$G(x,x^0) = E(x,x^0) + g(x,x^0)$$

будем называть **функцией Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа.** Легко видеть, что функция Грина $G(x,x^0)$ однозначно определяется следующими свойствами:

1. $G(x,x^0) = E(x,x^0) + g(x,x^0)$, где $g(x,x^0)$ как функция x принадлежит классу $C^2(\overline{\Omega})$ и $\Delta g = 0$ при любом параметре $x^0 \in \Omega$.

2. $G(x,x^0) = 0$ на $\partial\Omega$ при любом параметре $x^0 \in \Omega$.

Из условий 1 и 2 следует, что $\Delta g = 0$ в Ω и $g = -E$ на $\partial\Omega$. Этими условиями функция $g(x,x^0)$ определяется однозначно, так как если существуют две функции g_1 и g_2 с этими свойствами, то $\Delta(g_1 - g_2) = 0$ в Ω, $g_1 - g_2 = 0$ на $\partial\Omega$, и, согласно теореме 21, имеем $g_1 - g_2 \equiv 0$ в Ω.

Легко видеть, что если $G(x,x^0)$ при фиксированном $x^0 \in \Omega$ рассматривать как обобщенную функцию из $\mathcal{D}'(\Omega)$, то в Ω

$$\Delta G = \Delta E + \Delta g = \delta(x - x^0).$$

Таким образом, если в Ω существует решение $u(x)$ первой краевой задачи (3.38), $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, и для Ω существует функция Грина, то для любой $x^0 \in \Omega$

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,x^0)}{\partial\nu}\psi(x)ds + \int\limits_{\Omega} G(x,x^0)f(x)dx. \tag{3.41}$$

Симметрия функции Грина

Теорема (симметрия функции Грина). *Пусть* $x^1 \in \Omega$ *и* $x^0 \in \Omega$. *Тогда*

$$G(x^1, x^0) = G(x^0, x^1).$$

Доказательство. Применим формулу Грина (3.7) в области $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (Q_\varepsilon^{x^0} \cup Q_\varepsilon^{x^1})$, где ε настолько мало, что $Q_\varepsilon^{x^0} \subset \Omega$ и $Q_\varepsilon^{x^1} \subset \Omega$, к функциям $u(x) = G(x, x^1)$ и $v(x) = G(x, x^0)$. Учитывая, что $\Delta u = 0$ в Ω_ε, $\Delta v = 0$ в Ω_ε, $u = v = 0$ на $\partial\Omega$, получим

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x^1} \cup S_\varepsilon^{x^0}} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds = 0, \qquad (3.42)$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — направление внешней нормали в точках $S_\varepsilon^{x^0}$ и $S_\varepsilon^{x^1}$.

Пользуясь представлением

$$u(x) = E(x, x^1) + g(x, x^1), \quad v(x) = E(x, x^0) + g(x, x^0)$$

и устремляя ε к нулю в равенстве (3.42), получим, как и при доказательстве равенства (3.15), что

$$u(x^0) = v(x^1)$$

$\square$

Очевидно, функция $-G(x, x^0)$ задает стационарное распределение температуры внутри Ω при условии, что на границе $\partial\Omega$ температура равна нулю, а в точке x^0 находится точечный источник тепла, выделяющий количество тепла, равное 1. Функцию $-G(x, x^0)$ можно также интерпретировать как потенциал электростатического поля в Ω, которое имеет точечный заряд, помещенный в точку x^0, причем этот потенциал равен нулю на $\partial\Omega$.

Найти функцию Грина для области Ω означает найти такое распределение электрических зарядов вне Ω, чтобы эти заряды и заряд, помещенный в точку x^0, принадлежащую Ω, создавали электростатическое поле с потенциалом, равным нулю на $\partial\Omega$.

Формула (3.41) позволяет получить явную формулу для решения задачи Дирихле в области Ω в тех случаях, когда удается построить функцию Грина. Таким случаем, например, является шар в пространстве $\mathbb{R}_x^n$.

Функция Грина для шара

Итак, пусть Q_R^0 — шар радиуса R с центром в начале координат. Нужно подобрать заряд в точке x^1, лежащей вне шара Q_R^0, так, чтобы потенциал, соответствующий электростатическому полю с точечными электрическими зарядами в точках x^0 и x^1, равнялся нулю на сфере S_R^0. Оказывается, что за x^1 нужно взять точку, симметричную x^0 относительно сферы S_R^0.

Обозначим $\rho = |x^0|$, $\rho_1 = |x^1|$, $r = |x - x^0|$, $r_1 = |x - x^1|$. Точка x^1 лежит на луче, выходящем из начала координат и проходящем через точку x^0, и $\rho\rho_1 = R^2$. Проверим, что для шара Q_R^0

$$G(x, x^0) = \mathcal{E}(|x - x^0|) - \mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}|x - x^1|\right),$$

где, как и выше, $E(x, x^0) \equiv \mathcal{E}(|x - x^0|)$. Очевидно, $\mathcal{E}(\frac{\rho}{R}|x - x^1|) \equiv E(\frac{\rho}{R}x, \frac{\rho}{R}x^1)$ является гармонической функцией точки x при $x \neq x^1$. Поэтому нужно только проверить, что $G(x, x^0)\Big|_{\partial\Omega} = 0$ при любом $x_0 \in \Omega$.

Пусть точка O — начало координат и $x \in S_R^0$. Рассмотрим треугольники x^0Ox и x^1Ox, когда $x \in S_R^0$. Легко видеть, что эти треугольники подобны (см. рис. 3.1), так как они имеют общий угол x^1Ox, а стороны, образующие этот угол, пропорциональны в силу выбора точки x^1 из условия $\rho\rho_1 = R^2$

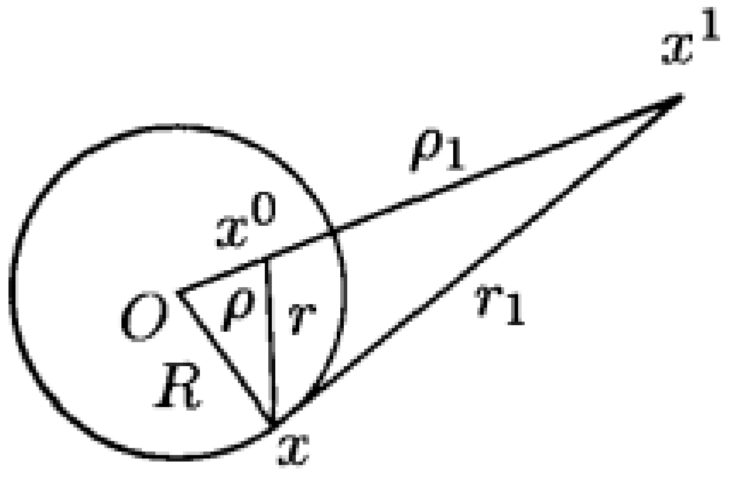

Рис. 3.1

и поэтому

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1}.$$

Из подобия указанных треугольников вытекает, что

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1} = \frac{r}{r_1}.$$

Отсюда следует, что $r = \frac{\rho}{R}r_1$, когда $x \in S_R^{x^0}$ и

$$G(x, x^0) = \mathcal{E}(r) - \mathcal{E}(\frac{\rho}{R}r_1) = 0$$

при $x \in S_R^0$.

Согласно формуле (3.41) для гармонической функции $u(x)$ из класса $C^2(\overline{Q}_R^0)$ такой, что $u = \psi$ на S_R^0, при $x \in Q_R^0$ имеем

$$u(x^0) = \int\limits_{S_R^0} \frac{\partial G(x, x^0)}{\partial \nu}\psi(x)ds. \tag{3.43}$$

Вычислим $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ при $x \in S_R^0$ и $x^0 \in Q_R^0$. Имеем

$$\left.\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu}\right|_{S_R^0} = \mathcal{E}'(|x-x^0|)\frac{\partial |x-x^0|}{\partial \nu} - \mathcal{E}'\left(\frac{\rho}{R}|x-x^1|\right)\frac{\rho}{R}\frac{\partial |x-x^1|}{\partial \nu}.$$

Так как $r = \frac{\rho}{R}r_1$ при $x \in S_R^0$, то $\mathcal{E}'(|x-x^0|) = \mathcal{E}'(\frac{\rho}{R}|x-x^1|)$ и поэтому на S_R^0

$$\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu} = \mathcal{E}'(|x-x^0|)\left[\frac{\partial |x-x^0|}{\partial \nu} - \frac{\rho}{R}\frac{\partial |x-x^1|}{\partial \nu}\right].$$

Очевидно, производная $\frac{\partial |x-x^0|}{\partial \nu}$ в точке x равна косинусу угла β_0 между направлением внешней нормали ν к S_R^0 в точке x и направлением x^0x, так как производная от $|x-x^0|$ в точке x по направлению, ортогональному к x^0x, равна нулю. Точно так же получаем, что $\frac{\partial |x-x^1|}{\partial \nu}$ равна косинусу угла β_1 между направлением внешней нормали ν к S_R^0 в точке x и направлением x^1x. Из треугольников x^0Ox и x^1Ox находим, что

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta_0,$$
$$\rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\beta_1.$$

Поэтому при $x \in S_R^0$

$$\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu} = \mathcal{E}'(r)\left[\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr} - \frac{\rho(R^2+r_1^2-\rho_1^2)}{2R^2r_1}\right].$$

Подставляя в эту формулу $r_1 = \frac{R}{\rho}r$, $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho}$, получим

$$\left.\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu}\right|_{S_R^0} = \mathcal{E}'(r)\frac{(R^2-\rho^2)}{Rr}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{E}'(r) = \frac{1}{\omega_n R}r^{1-n}$. Поэтому при $x \in S_R^0$

$$\left.\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu}\right|_{S_R^0} = \frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2-\rho^2}{r^n}.$$

Итак, формулу (3.43) можно записать в виде

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0}\frac{R^2-\rho^2}{r^n}\psi(x)ds. \qquad (3.44)$$

Интеграл Пуассона, неравенство Харнака

Обозначим через γ угол между направлениями Ox^0 и Ox. Тогда формулу (3.44) можно представить в виде

$$u(x^0) = \frac{R^2-\rho^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{1}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma)^{\frac{n}{2}}} \psi(x) ds. \qquad (3.45)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (3.45), называется **интегралом Пуассона**. Мы получили представление решения задачи Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ в } Q_R^0, \quad u\Big|_{S_R^0} = \psi \qquad (3.46)$$

через интеграл Пуассона, предполагая, что это решение $u(x)$ существует и принадлежит классу $C^2(\overline{Q}_R^0)$.

Теорема (неравенство Харнака). *Пусть гармоническая в шаре Q_R^0 функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{Q}_R^0)$ и $u(x) \geqslant 0$ в Q_R^0. Тогда для любой точки $x^0 \in Q_R^0$ справедливы неравенства:*

$$\frac{R^{n-2}(R-\rho)}{(R+\rho)^{n-1}} u(0) \leqslant u(x^0) \leqslant \frac{R^{n-2}(R+\rho)}{(R-\rho)^{n-1}} u(0), \qquad (3.49)$$

где $u(0)$ — значение $u(x)$ в центре шара Q_R^0, $\rho = |x^0|$.

Доказательство. В силу единственности решения задачи Дирихле функция $u(x)$ по доказанному выше представляется в виде интеграла Пуассона (3.44):

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{R^2-\rho^2}{r^n} \psi ds, \quad x^0 \in Q_R^0.$$

Из треугольника xOx^0 (рис. 3.1) получаем, что

$$R-\rho \leqslant r \leqslant R+\rho,$$

и, следовательно,

$$\frac{R^2-\rho^2}{(R+\rho)^n} \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{r^n} \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{(R-\rho)^n}.$$

Поэтому при $u \geqslant 0$

$$\frac{1}{\omega_n R} \frac{(R-\rho)}{(R+\rho)^{n-1}} \int\limits_{S_R^0} u\, ds \leqslant u(x^0) \leqslant \frac{1}{\omega_n R} \frac{(R+\rho)}{(R-\rho)^{n-1}} \int\limits_{S_R^0} u\, ds.$$

Применяя теорему о среднем значении по сфере, получим неравенства (3.49). $\square$