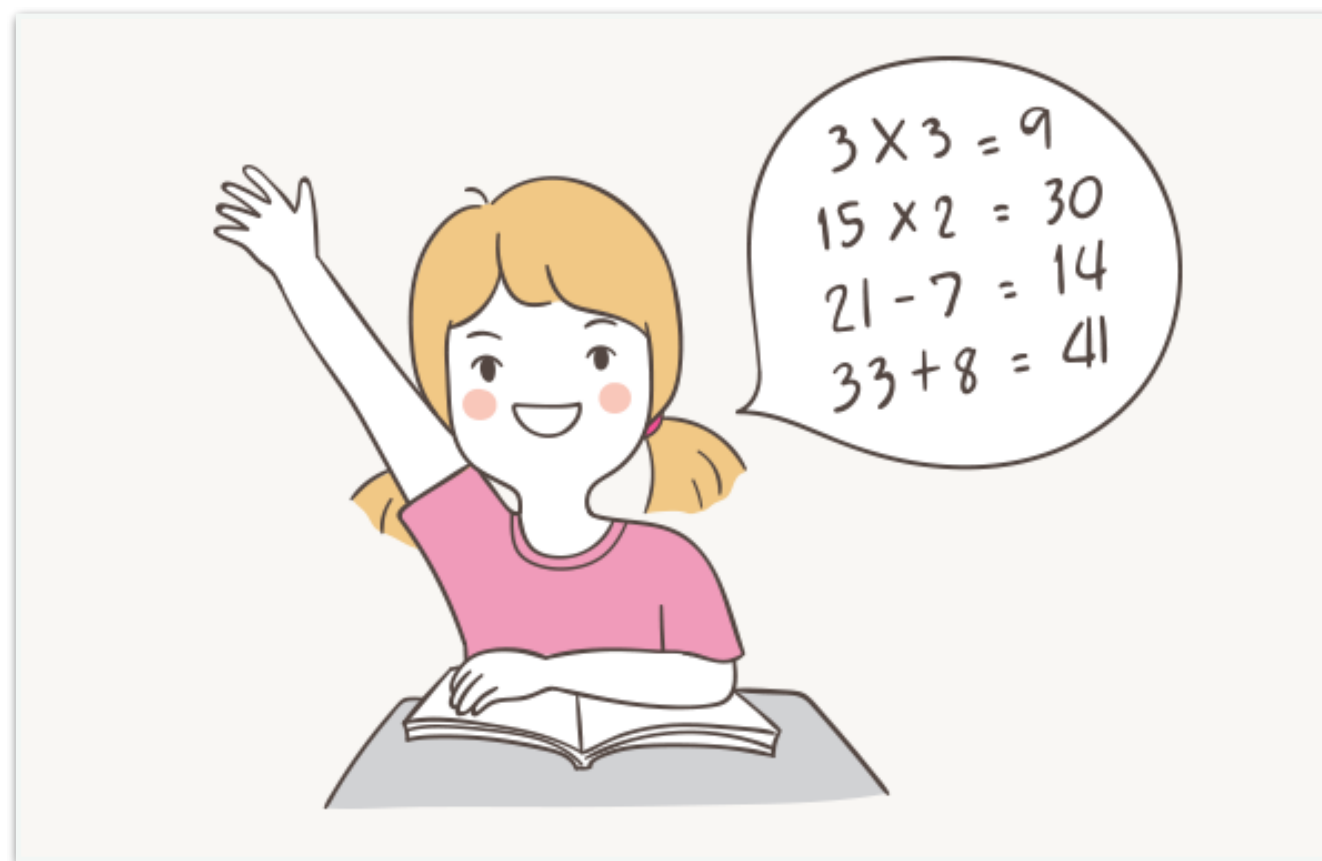


СЛУ

Системы линейных уравнений



СЛУ (СЛАУ)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases}$$

алгебраических

СЛУ (СЛАУ)

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = -5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases}$$

Правая часть

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Матрица системы

Столбец переменных

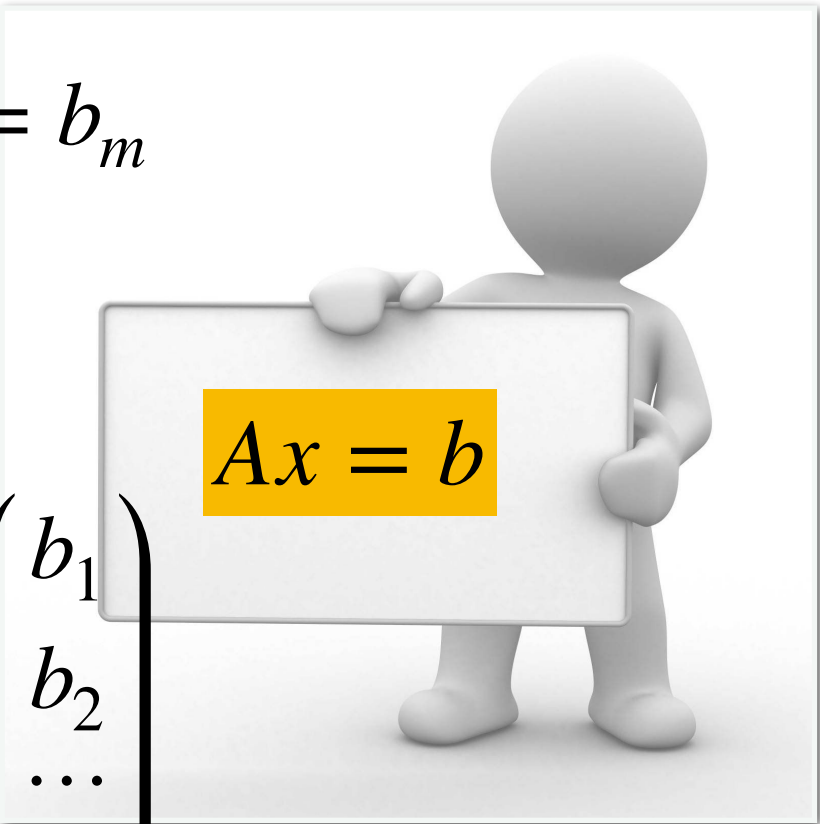
Столбец свободных членов

В общем виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$


$$Ax = b$$

Расширенная матрица

$$Ax = b \quad \longrightarrow \quad (A | b)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = -5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 & -4 & 7 \end{array} \right)$$

Пример

$$\begin{array}{lcl} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 7x_2 = 1 \end{cases} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 6 \\ 3 & 7 & | & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 = 1 \end{cases} & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & 7 & | & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_2 = -8 \end{cases} & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 4 & | & -8 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_2 = -2 \end{cases} & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = -2 \end{cases} & \longleftarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 7x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Ступенчатый вид

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & a_{23} & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & a_{34} & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{47} & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{59} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Ступенчатый вид

A hand-drawn matrix in row echelon form, enclosed in large parentheses. The matrix has 6 rows and 9 columns. The leading elements are circled in yellow: a_{11} , a_{23} , a_{34} , a_{47} , and a_{59} . The last row is circled in blue and contains all zeros.

a_{11}	*	*	*	*	*	*	*	*
0	0	a_{23}	*	*	*	*	*	*
0	0	0	a_{34}	*	*	*	*	*
0	0	0	0	0	0	a_{47}	*	*
0	0	0	0	0	0	0	0	a_{59}
0	0	0	0	0	0	0	0	0

 — ведущий элемент

Разрешённый вид

A 6x9 matrix is shown, enclosed in large parentheses. The matrix is in row echelon form. The first five rows each have a leading 1 in the first, second, third, fourth, and seventh columns respectively. The sixth row consists entirely of zeros. The leading 1s are circled in yellow. The entire zero row is circled in blue.

1	*	0	0	*	*	0	*	0
0	0	1	0	*	*	0	*	0
0	0	0	1	*	*	0	*	0
0	0	0	0	0	0	1	*	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

 — ведущий элемент

Пример

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 7x_2 = 1 \end{cases}$$



$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_2 = -8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = -2 \end{cases}$$



$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Задача 1

№ 693. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$$

Задача 1

№ 693. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$

Определённая
СЛУ



Задача 2

№ 692. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Задача 2

№ 692. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Ответ: система не имеет решений

**Несовместная
СЛУ**



Решение:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1-ую строку делим на 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 7; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 5

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{23}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{46}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{38}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2-ую строку делим на $\frac{23}{3}$

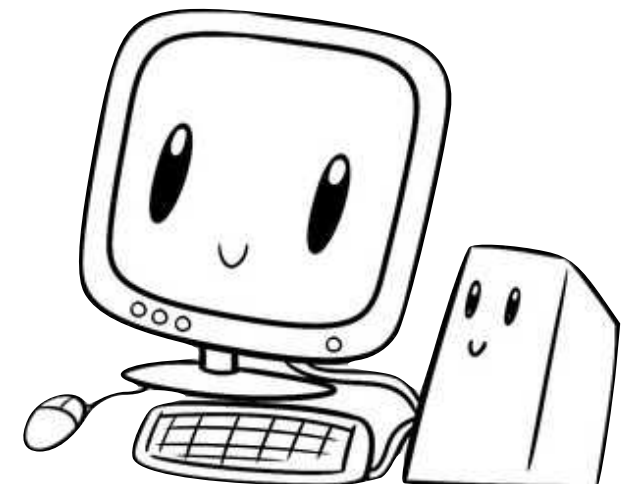
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{23} & -\frac{19}{23} & \frac{1}{23} \\ 0 & \frac{46}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{38}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

к 1 строке добавляем 2 строку, умноженную на $\frac{5}{3}$; от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на $\frac{46}{3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{23} & -\frac{1}{23} & \frac{17}{23} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{23} & -\frac{19}{23} & \frac{1}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ответ:

Система уравнений не имеет решений так как: $0 \neq -1$



Задача 3

№ 694*. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Задача 3

№ 694*. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x_1 = 6 - 15x_3 + 10x_4, \\ x_2 = -7 + 18x_3 - 12x_4, \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Неопределённая
СЛУ**



Задача 3

№ 694*. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Общее решение

Ответ:
$$\begin{cases} x_1 = 6 - 15x_3 + 10x_4, \\ x_2 = -7 + 18x_3 - 12x_4, \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Неопределённая
СЛУ



$x_1 = 6, x_2 = -7, x_3 = 0, x_4 = 0$ — частное решение

Задача 4

В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -7, \\ \lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + \lambda x_3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: $\lambda = -1$ \emptyset

$$\lambda = 1 \quad x_1 = -2 + x_3, x_2 = 5 - x_3, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \neq \pm 1 \quad x_1 = -\frac{6}{1+\lambda}, x_2 = \frac{5+7\lambda}{1+\lambda}, x_3 = -\frac{2}{1+\lambda}$$