Семинар 3. *(9 сентября 2024 г.)*

## Классификация квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка. Приведение к каноническому виду при $n = 2$

1. *Определение и классификация УЧП 2 порядка*

Уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)u_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1,\ldots,x_n)u_{x_k} + a(x_1,\ldots,x_n)u = f(x), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x)$, $a_k(x)$, $a(x)$, $f(x)$ — вещественнозначные функции, $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(x)| \neq 0$, $u(x) \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, называется *квазилинейным уравнением в частных производных второго порядка*. Всё, что содержит вторые производные, называется старшей частью.

Пусть $A(x) = (a_{ij}(x))$ — симметрическая матрица размера $(n \times n)$. Зафиксируем точку $x_0 \in G$, в этой точке матрица $A(x_0)$ становится постоянной. Пусть

$n_+$ — количество положительных собственных значений матрицы $A(x_0)$;

$n_-$ — количество отрицательных собственных значений матрицы $A(x_0)$;

$n_0$ — количество нулевых собственных значений матрицы $A(x_0)$.

**Определение 1.** *Уравнение* (1) *называется* $\begin{cases} \textit{гиперболическим} \\ \textit{эллиптическим} \\ \textit{параболическим} \end{cases}$ *в точке* $x_0$*, если* $\begin{cases} \textit{все с. зн., кроме одного, имеют один и тот же знак}; \\ \textit{все с. зн. одного знака}; \\ \textit{есть хотя бы одно нулевое с. зн.}, \end{cases}$ *т.е.*

$$\begin{cases} n_- = 1,\ n_+ = n-1 \,\textit{или}\, n_+ = 1,\ n_- = n-1; \\ n_+ = n \,\textit{или}\, n_- = n; \\ n_0 > 0. \end{cases}$$

**Определение 2.** *Уравнение* (1) *называется* $\begin{cases} \text{гиперболическим} \\ \text{эллиптическим} \\ \text{параболическим} \end{cases}$ *в области* $G$*, если оно* $\begin{cases} \text{гиперболическое} \\ \text{эллиптическое} \\ \text{параболическое} \end{cases}$ *в каждой точке этой области.*

В общем случае привести матрицу к каноническому виду — значит с помощью невырожденной замены $y = \varphi(x)$ перейти к уравнению

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y_1, \dots, y_n)u_{y_i y_j} + \tilde{F}(y, u, \nabla u) = 0, \tag{2}$$

в котором матрица старшей части имеет вид

$$\tilde{A}(x_0) = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & D & 0 \end{pmatrix},$$

где $B$, $C$ и $D$ — диагональные матрицы размера $(n_+ \times n_+)$, $(n_- \times n_-)$ и $(n_0 \times n_0)$ соответственно

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Приведение к каноническому виду УЧП 2 порядка с переменными коэффициентами при* $n = 2$

   Запишем уравнение (1) в случае двух независимых переменных

$$a(x_1, x_2)u_{x_1x_1} + 2b(x_1, x_2)u_{x_1x_2} + c(x_1, x_2)u_{x_2x_2} + F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0. \tag{3}$$

Далее будем работать с переменной матрицей $A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix}$ во всей области $G \subset \mathbb{R}^2$, где тип уравнения сохраняется.

Вычислим характеристический полином матрицы $A(x)$:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a(x) + c(x))\lambda + (a(x)c(x) - b^2(x)) = 0.$$

Свободный член $a(x)c(x) - b^2(x)$ равен произведению двух корней $\lambda_1\lambda_2$. Согласно определениям 1 и 2, уравнение (3) будет $\begin{cases} \text{гиперболическим} \\ \text{эллиптическим} \\ \text{параболическим,} \end{cases}$

если $\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = a(x)c(x) - b^2(x) < 0; \\ \lambda_1\lambda_2 = a(x)c(x) - b^2(x) > 0; \\ \lambda_1\lambda_2 = a(x)c(x) - b^2(x) = 0. \end{cases}$

**Теорема 1.** *Пусть $a(x)$, $b(x)$, $c(x) \in C^2(G)$, а уравнение* (3) *является гиперболическим/эллиптическим/параболическим в области $G$. Тогда для любой точки $x_0 \in G$ существует такая окрестность $W$, что в $W$ существует невырожденная замена $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, приводящая уравнение* (3) *к виду*

$$\text{Г:} \quad u_{y_1y_1} - u_{y_2y_2} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, u_{y_2}) = 0, \tag{4}$$

$$\text{или} \quad u_{y_1y_2} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, u_{y_2}) = 0; \tag{5}$$

$$\text{Э:} \quad u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, u_{y_2}) = 0; \tag{6}$$

$$\text{П:} \quad u_{y_1y_1} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, u_{y_2}) = 0. \tag{7}$$

**Определение 3.** *Кривая $\gamma$, заданная уравнением $\gamma : \varphi(x) = const$, называется характеристикой уравнения* (3)*, если вектор нормали $\nabla\varphi = (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2})$ удовлетворяет характеристическому уравнению*

$$a(x)(\varphi_{x_1})^2 + 2b(x)\varphi_{x_1}\varphi_{x_2} + c(x)(\varphi_{x_2})^2 = 0. \tag{8}$$

Замену $y = \varphi(x)$ можно получить, найдя характеристики уравнения (3). Обозначим $k = \dfrac{\varphi_{x_1}}{\varphi_{x_2}}$ и поделим уравнение (8) на $(\varphi_{x_2})^2$:

$$a(x)(\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_{x_2}})^2 + 2b(x)\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_{x_2}} + c(x) = a(x)k^2 + 2b(x)k + c(x) = 0.$$

Дискриминант равен $d(x) = 4(b^2(x) - a(x)c(x))$ *Это выражение для определения типа уравнения, взятое со знаком минус.*

**Случай 1. Гиперболический тип.** Если $d(x) > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных вещественных корня

$$k_{1,2} = \frac{-b(x) \pm \sqrt{b^2(x) - a(x)c(x)}}{a(x)}.$$

Вспомним, что $k = \dfrac{\varphi_{x_1}}{\varphi_{x_2}}$, отсюда получим два УЧП первого порядка для определения характеристик:

$$\varphi_{x_1} - k_1\varphi_{x_2} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{x_1} - k_2\varphi_{x_2} = 0.$$

Первые интегралы (*см. Семинар 1*) нам дадут два семейства характеристик $\varphi_1(x_1, x_2) = C_1$, $\varphi_2(x_1, x_2) = C_2$.

Взяв в качестве замены $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$, $y_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$, приведем уравнение (3) к виду (5), из которого можно получить вид (4) заменой $y_1 = \xi + \eta$, $y_2 = \xi - \eta$.

**Случай 2. Эллиптический тип.** Если $d(x) < 0$, то квадратное уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Найдем комплексные "характеристики" из уравнений

$$\varphi_{x_1} - k_1\varphi_{x_2} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{x_1} - k_2\varphi_{x_2} = 0.$$

На самом деле, достаточно даже решить одно из этих уравнений. Тогда $\varphi_{1,2}(x) = \xi(x) \pm \eta(x)i = C_{1,2}$. В качестве замены, приводящей к каноническому виду, можно взять вещественную и мнимую часть, т.е. $y_1 = \xi$, $y_2 = \eta$. В итоге из уравнения (3) получим уравнение (6).

*Замечание.* У эллиптического уравнения вещественных характеристик нет!

**Случай 3. Параболический тип.** Если $d(x) = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень кратности два $k_1 = k_2 = k$. Решив уравнение $\varphi_{x_1} - k\varphi_{x_2} = 0$, мы получим только одно семейство характеристик $\varphi(x) = C$. Тогда в качестве замены можно взять $y_1 = \psi(x_1, x_2)$, $y_2 = \varphi(x_1, x_2)$, где $\psi(x_1, x_2)$ — любая функция, независимая с $\varphi(x_1, x_2)$. Такая замена приведет исходное уравнение (3) к виду (7). Обратите внимание на то, что в старшей части остается только производная $u_{y_1y_1}$, где $y_1 = \psi(x)$.

Итак, чтобы привести уравнение к каноническому виду, нужно:
1) записать характеристическое уравнение, вычислить $d(x)$, определить тип уравнения,
2) решить квадратное уравнение для $k = \dfrac{\varphi_{x_1}}{\varphi_{x_2}}$,
3) найти семейства характеристик (вещественные различные, комплексные или вещественные совпадающие),
4) ввести замену переменных исходя из типа уравнения,
5) пересчитать производные, подставить их в уравнение.
Переобозначим переменные для краткости: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = \xi$, $y_2 = \eta$. Чтобы записать уравнение в новых переменных, необходимо вычислить производные сложной функции, т.к. $u(x,y) = \tilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y))$. Далее для удобства волну будем опускать, поскольку функция одна и та же.
Формулы для производных
$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x;$
$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y;$
$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx};$
$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot (\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \cdot (\eta_y)^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy};$
$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x\xi_y + u_{\xi\eta} \cdot (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}.$

3. *Разбор некоторых задач из задачника В. С. Владимирова*

**№2.11 (3)** Определить тип и привести к каноническуому виду уравнение

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0.$$

*Решение.* В данном случае $a(x,y) = x^2$, $b(x,y) = xy$, $c(x,y) = -3y^2$.
Запишем характеристическое уравнение:

$$a(x,y)(\varphi_x)^2 + 2b(x,y)\varphi_x\varphi_y + c(x,y)(\varphi_y)^2 = x^2(\varphi_x)^2 + 2xy\varphi_x\varphi_y - 3y^2(\varphi_y)^2 = 0,$$

при $k = \dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$

$$x^2k^2 + 2xyk - 3y^2 = 0.$$

Вычислим дискриминант и определим тип уравнения:

$$d(x,y)/4 = x^2y^2 + 3x^2y^2 = 4x^2y^2 > 0 \Rightarrow \quad \text{гиперболический тип.}$$

Решим квадратное уравнение

$$k_{1,2} = \frac{-xy \pm 2xy}{x^2} \Rightarrow k_1 = \frac{y}{x}, \quad k_2 = -\frac{3y}{x}.$$

По определению $k$

$$k = \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \Leftrightarrow \varphi_x - k\varphi_y = 0.$$

Найдем семейства характеристик:

$$\varphi_x - k_1\varphi_y = \varphi_x - \frac{y}{x}\varphi_y = 0.$$

Первый интеграл получим из уравнения $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{xdy}{-y}$, он равен $xy = C_1$.

$$\varphi_x - k_2\varphi_y = \varphi_x + \frac{3y}{x}\varphi_y = 0.$$

Первый интеграл получим из уравнения $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{xdy}{3y}$, он равен $\dfrac{x^3}{y} = C_2$.
Итак, имеем два различных семейства характеристик $\varphi_1(x,y) = xy = C_1$, $\varphi_2(x,y) = \dfrac{x^3}{y} = C_2$. Отсюда замена, приводящая уравнение к каноническому виду $u_{xy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$, имеет вид

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{x^3}{y}.$$

Вычислив первые и вторые производные по формулам, придем к уравнению

$$4\xi u_{\xi\eta} - 3u_\eta = 0.$$