Расчетная формула для *контравариантных* компонент тензора э-м поля:

$$F^{ij} = \frac{\partial A^j}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_j}, \quad i = 0, ..., 3, \; j = 0, ..., 3.$$

Видно, что тензор антисимметричен, поэтому все диагональные его компоненты равны нулю. Определим наддиагональные компоненты $F^{ij}, \; j > i$:

$$F^{01} = \tfrac{\partial A^1}{\partial x_0} - \tfrac{\partial A^0}{\partial x_1} = \tfrac{\partial A_x}{c\partial t} + \tfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x, \qquad F^{02} = \tfrac{\partial A^2}{\partial x_0} - \tfrac{\partial A^0}{\partial x_2} = \tfrac{\partial A_y}{c\partial t} + \tfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_y$$

$$F^{03} = \tfrac{\partial A^3}{\partial x_0} - \tfrac{\partial A^0}{\partial x_3} = \tfrac{\partial A_z}{c\partial t} + \tfrac{\partial \varphi}{\partial z} = -E_z, \qquad F^{12} = \tfrac{\partial A^2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial A^1}{\partial x_2} = \tfrac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \tfrac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -H_z$$

$$F^{13} = \tfrac{\partial A^3}{\partial x_1} - \tfrac{\partial A^1}{\partial x_3} = \tfrac{\partial(-A_z)}{\partial x} - \tfrac{\partial(-A_x)}{\partial z} = H_y, \quad F^{23} = \tfrac{\partial A^3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial A^2}{\partial x_3} = \tfrac{\partial(-A_z)}{\partial y} - \tfrac{\partial(-A_y)}{\partial z} = -H_x.$$

Итак,

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Расчетная формула для *ковариантных* компонент тензора э-м поля:

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$$

Тензор в ковариантном представлении также антисимметричен. Определим наддиагональные компоненты $F_{ij}, \; j > i$:

$$F_{01} = \tfrac{\partial A_1}{\partial x^0} - \tfrac{\partial A_0}{\partial x^1} = \tfrac{\partial(-A_x)}{c\partial t} - \tfrac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x, \qquad F_{02} = \tfrac{\partial A_2}{\partial x^0} - \tfrac{\partial A_0}{\partial x^2} = \tfrac{\partial(-A_y)}{c\partial t} - \tfrac{\partial \varphi}{\partial y} = E_y$$

$$F_{03} = \tfrac{\partial A_3}{\partial x^0} - \tfrac{\partial A_0}{\partial x^3} = \tfrac{\partial(-A_z)}{c\partial t} - \tfrac{\partial \varphi}{\partial z} = E_z, \qquad F_{12} = \tfrac{\partial A_2}{\partial x^1} - \tfrac{\partial A_1}{\partial x^2} = \tfrac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \tfrac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -H_z$$

$$F_{13} = \tfrac{\partial A_3}{\partial x^1} - \tfrac{\partial A_1}{\partial x^3} = \tfrac{\partial(-A_z)}{\partial x} - \tfrac{\partial(-A_x)}{\partial z} = H_y, \quad F_{23} = \tfrac{\partial A_3}{\partial x^2} - \tfrac{\partial A_2}{\partial x^3} = \tfrac{\partial(-A_z)}{\partial y} - \tfrac{\partial(-A_y)}{\partial z} = -H_x.$$

Итак,

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что ковариантные компоненты тензора э-м поля отличаются от контравариантных только знаком при компонентах электрического поля.

Теперь вычислим компоненты 4-векторов $F^{ij}u_j$ и $F_{ij}u^j$ *:

$$F^{ij}u_j = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \gamma \begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z \\ cE_x + v_y H_z - v_z H_y \\ cE_y + v_z H_x - v_x H_z \\ cE_z + v_x H_y - v_y H_x \end{pmatrix} = \gamma c \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ (\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_x \\ (\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_y \\ (\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_z \end{pmatrix}$$

$$F_{ij}u^j = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \gamma \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z \\ -cE_x - v_y H_z + v_z H_y \\ -cE_y - v_z H_x + v_x H_z \\ -cE_z - v_x H_y + v_y H_x \end{pmatrix} = \gamma c \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ -(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_x \\ -(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_y \\ -(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_z \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение 4-векторов $(F_{ij}u^j) \cdot (F^{ij}u_j)$ равно

$$\gamma^2 c^2 \{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2 - (\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])^2\}$$

Полученное выражение входит в формулу для потерь энергии и импульса на излучении в полный телесный угол.

* В ковариантном представлении легче вычислить с помощью метрического тензора:

$$F_{ij}u^j = g_{ik}(F^{kj}u_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \gamma c \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ (\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_x \\ (\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_y \\ (\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_z \end{pmatrix} = \gamma c \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ -(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_x \\ -(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_y \\ -(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])_z \end{pmatrix}$$