Семинар 2 [12.09.2022]

Матрицы, след матрицы, определитель матрицы. Эрмитово сопряжение матрицы, эрмитовы и унитарные матрицы. Функция от матрицы, резольвента $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$,

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(\lambda) R_\lambda(A)\, d\lambda.$$

Проекторы. Матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задачи

Задача 1 (5)

Доказать, что для произвольной матрицы A

$$\det e^A = e^{\mathrm{Tr} A}.$$

Задача 2 (20)

Найти

$$\ln \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad |x| < 1.$$

Задача 3 (4)

Пусть H – эрмитова матрица. Доказать, что $U = \exp[iH]$ – унитарна.

Задача 4 (8)

Найти проектор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

на подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Задача 5

Вывести формулу

$$\sigma_i \sigma_j = i e_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}.$$

Показать, что для всякой матрицы 2×2 коэффициенты разложения

$$A = a_0 \sigma_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_i$$

даются формулой

$$a_\mu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[A \sigma_\mu\right], \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

где σ_0 – единичная матрица. Найти общий вид проектора 2×2.

Задача 6 (20)

Найти

$$\ln \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad |x| < 1$$

при помощи матриц Паули.

Решения

Задача 1

Сначала заметим, что обе стороны равенства инвариантны относительно преобразований подобия $A' = T^{-1}AT$. Имеем

$$e^A = e^{TA'T^{-1}} = I + TA'T^{-1} + \frac{1}{2!}\left(TA'T^{-1}\right)^2 + \ldots =$$
$$= T\left(I + A' + \frac{A'^2}{2!} + \ldots\right)T^{-1} = Te^{A'}T^{-1},$$

тогда

$$\det e^A = \det\left[Te^{A'}T^{-1}\right] = \det e^{A'}.$$

А также

$$e^{\mathrm{Tr}A} = e^{\mathrm{Tr}\left[TA'T^{-1}\right]} = e^{\mathrm{Tr}A'}.$$

Таким образом мы можем выбрать базис, в котором матрица A будет иметь наиболее простой вид и доказать равенство в этом базисе. Известно, что в общем случае любая матрица приводится к жордановой нормальной форме. Докажем данное равенство для некоторой жордановой клетки

$$J = \lambda I + \tilde{J},$$

где $\tilde{J}$ – матрица, у которой над главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Поскольку любые произведения матриц λI и $\tilde{J}$ коммутируют друг с другом, с ними можно обращаться как с числами, то есть

$$e^J = e^{\lambda I + \tilde{J}} = e^{\lambda I}e^{\tilde{J}}.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что $e^{\tilde{J}}$ есть верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали. Следовательно

$$\det e^J = \det e^{\lambda I}\det e^{\tilde{J}} = \det e^{\lambda I} = \det\left[Ie^{\lambda}\right] = e^{\mathrm{Tr}J}.$$

Поскольку для матрицы, состоящей из произвольного числа жордановых клеток $A = J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots$, справедливо

$$\det e^A = \det e^{J_1}\det e^{J_2}\ldots,$$

легко показать, что искомое равенство выполняется:

$$\det e^A = \det e^{J_1}\det e^{J_2}\ldots = e^{\mathrm{Tr}J_1}e^{\mathrm{Tr}J_2}\ldots = e^{\mathrm{Tr}A}.$$

Задача 2

Для матрицы A, приводимой к диагональному виду Λ при помощи матрицы перехода T, имеем

$$f(A) = f\left(T\Lambda T^{-1}\right) = f(0)I + \frac{f'(0)}{1!}T\Lambda T^{-1} + \frac{f''(0)}{2!}\left(T\Lambda T^{-1}\right)^2 + \ldots =$$
$$= T\left(f(0)I + \frac{f'(0)}{1!}\Lambda + \frac{f''(0)}{2!}\Lambda^2 + \ldots\right)T^{-1} = Tf(\Lambda)T^{-1}.$$

Найдем диагональную форму матрицы в условии задачи. Для этого вычисляем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & x \\ x & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - x^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = 1 \pm x,$$

и собственные векторы:

$$\boldsymbol{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В итоге

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

и, следовательно, получаем

$$\ln\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ln\begin{pmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ln[1+x] & \ln[1-x] \\ \ln[1+x] & -\ln[1-x] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ln\left[1-x^2\right] & \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] \\ \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] & \ln\left[1-x^2\right] \end{pmatrix}.$$

Найдем функцию от матрицы при помощи резольвенты:

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(\lambda) R_\lambda(A)\, d\lambda, \qquad R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Вычислим $R_\lambda(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & x \\ x & 1-\lambda \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\lambda-(1+x))(\lambda-(1-x))}\begin{pmatrix} 1-\lambda & -x \\ -x & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

В итоге, учитывая, что

$$\oint\limits_C \frac{(1-\lambda)\ln\lambda}{(\lambda-(1+x))(\lambda-(1-x))} d\lambda = -\pi i \ln[1+x] - \pi i \ln[1-x],$$

$$\oint\limits_C \frac{-x\ln\lambda}{(\lambda-(1+x))(\lambda-(1-x))} d\lambda = -\pi i \ln[1+x] + \pi i \ln[1-x],$$

имеем

$$\ln\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{\ln\lambda}{(\lambda-(1+x))(\lambda-(1-x))}\begin{pmatrix} 1-\lambda & -x \\ -x & 1-\lambda \end{pmatrix} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ln\left[1-x^2\right] & \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] \\ \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] & \ln\left[1-x^2\right] \end{pmatrix}.$$

Задача 3

Действуя по определению, получаем

$$\left(e^{iH}\right)^\dagger \left(e^{iH}\right) = \left(E + \frac{iH}{1!} + \frac{(iH)^2}{2!} + \ldots\right)^\dagger \left(E + \frac{iH}{1!} + \frac{(iH)^2}{2!} + \ldots\right) =$$

$$= \left(E - i\frac{H}{1!} - \frac{H^2}{2!} + i\frac{H^3}{3!} + \frac{H^4}{4!} - i\frac{H^5}{5!} - \ldots\right)\left(E + i\frac{H}{1!} - \frac{H^2}{2!} - i\frac{H^3}{3!} + \frac{H^4}{4!} + i\frac{H^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= E + H(i-i) + H^2\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \ldots = e^{-iH}e^{iH} = E.$$

Задача 4

Проектор на подпространство, соответствующее собственному числу λ_i можно найти следующим образом. Поскольку $A\boldsymbol{h}_i = \lambda_i \boldsymbol{h}_i$ и $P_i \boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{h}_i$, то $A\boldsymbol{h}_i = \lambda_i P_i \boldsymbol{h}_i$, откуда при $\boldsymbol{h}_i \neq \boldsymbol{0}$ получаем

$$A = \sum_i P_i. \tag{1}$$

С другой стороны, по определению имеем

$$A = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \lambda R_\lambda(A)\, d\lambda = \sum_i \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_i} R_\lambda(A). \tag{2}$$

Таким образом, сравнивая (1) и (2), получаем

$$P_i = -\mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_i} R_\lambda(A).$$

Воспользуемся получившейся формулой для того, чтобы вычислить проектор матрицы в условии задачи. Легко убедиться, что собственные числа матрицы A равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e^{2\pi i/3}$, $\lambda_3 = e^{-2\pi i/3}$. Вычисляем резольвенту

$$-R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda^3 - 1} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

В итоге имеем

$$P_1 = \mathrm{Res}_{\lambda=1} \left[\frac{1}{\lambda^3 - 1} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5

Формула

$$\sigma_i \sigma_j = i e_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$$

проверяется «в лоб». Например

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_3,$$
$$\sigma_1 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2,$$

и

$$\sigma_1 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая

$$A = a_0 \sigma_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_i$$

на σ_0 и σ_j, где $j = 1, 2, 3$, справа и вычисляя след, получаем:

$$\mathrm{Tr}\left[A\sigma_0\right] = \mathrm{Tr}A = a_0\mathrm{Tr}\sigma_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i \mathrm{Tr}\sigma_i = 2a_0, \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[A\sigma_0\right],$$

$$\mathrm{Tr}\left[A\sigma_j\right] = \mathrm{Tr}\left[a_0\sigma_j\right] + \sum_{i=1}^{3} a_i \mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\right] = 2a_j, \quad \Rightarrow \quad a_j = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[A\sigma_j\right].$$

По определению проектор есть $P^2 = P$. Представим P в виде

$$P = a_0\sigma_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i,$$

тогда

$$P^2 = \left(a_0\sigma_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i\right)^2 = a_0^2\sigma_0 + 2a_0\sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i a_j \sigma_i\sigma_j =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} a_i^2\sigma_0 + 2a_0\sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i.$$

Тогда из равенства

$$\sum_{i=0}^{3} a_i^2\sigma_0 + 2a_0\sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i = a_0\sigma_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i$$

имеем

$$a_0 = \sum_{i=0}^{3} a_i^2, \quad 2a_0 a_i = a_i.$$

Решая получившуюся систему, окончательно получаем

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{n},$$

где $\boldsymbol{n}$ – некоторый единичный вектор. В итоге

$$P = \frac{1}{2}\left(\sigma_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\right).$$

Например для $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6

Раскладываем в ряд по определению

$$\ln\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \ln\left[\sigma_0 + x\sigma_1\right] = \frac{x\sigma_1}{1} - \frac{(x\sigma_1)^2}{2} + \frac{(x\sigma_1)^3}{3} - \ldots =$$

$$= \sigma_0\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} - \ldots\right) + \sigma_1\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right).$$

Заметим, что

$$\ln[1+x] = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$
$$\ln[1-x] = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

значит

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} - \ldots = \frac{1}{2}(\ln[1+x] + \ln[1-x]) = \frac{1}{2}\ln\left[1-x^2\right],$$
$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \frac{1}{2}(\ln[1+x] - \ln[1-x]) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right].$$

В итоге приходим к ответу

$$\ln\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ln\left[1-x^2\right] & \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] \\ \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] & \ln\left[1-x^2\right] \end{pmatrix}.$$