Матрицы и операции над ними

Матрица

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\}}_{n \text{ столбцов}} m \text{ строк}$$

Прописная латинская буква

Матрица

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\} m \text{ строк}}_{n \text{ столбцов}}$$

Прописная латинская буква

$$A \in M_{m \times n}$$

Множество матриц размера m на n

Действия над матрицами

Умножение на скаляр:

$$\mu A = \mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Умножение на скаляр:

$$\mu A = \mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} \end{pmatrix}$$

Сложение матриц:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Умножение на скаляр:

$$\mu A = \mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} \end{pmatrix}$$

$$A, B \in M_{m\times n}$$
$$\Downarrow$$
$$A + B \in M_{m\times n}$$

Сложение матриц:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Умножение матриц:

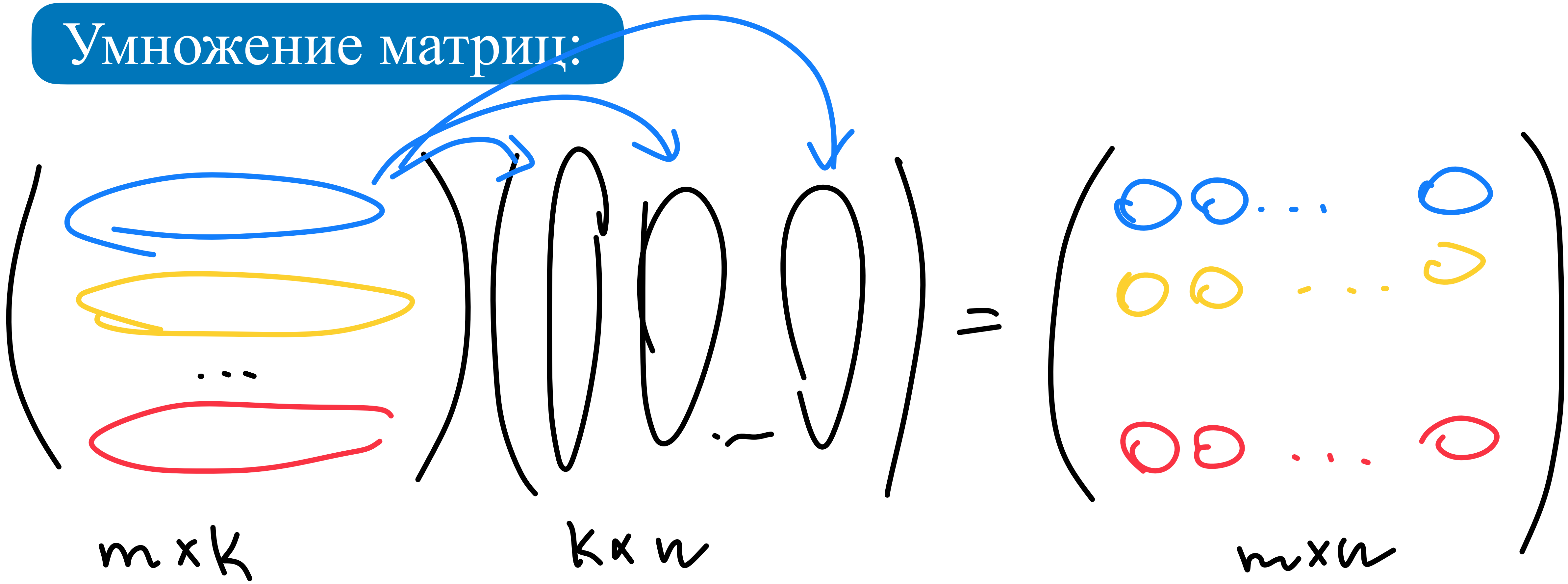
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{1\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = 2\cdot 2 + 3\cdot(-5) + (-1)\cdot(-6) =$$

$$= 4 - 15 + 6 = \underbrace{-5}_{1\times 1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

Действия над матрицами

Умножение матриц:



Пример:

$5 \times 3 \cdot 3 \times 4 = 5 \times 4$

Действия над матрицами

Умножение матриц:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{2\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{2\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

$$A, B \in M_{n\times n} \Rightarrow AB \in M_{n\times n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

Действия над матрицами

$$\left.\begin{array}{l} A \in M_{m\times k} \\ B \in M_{k\times n} \end{array}\right. \Rightarrow AB \in M_{m\times n}$$

Умножение матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Умножение матриц:

Особые матрицы

Нулевая

$A + O = A$, $O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица

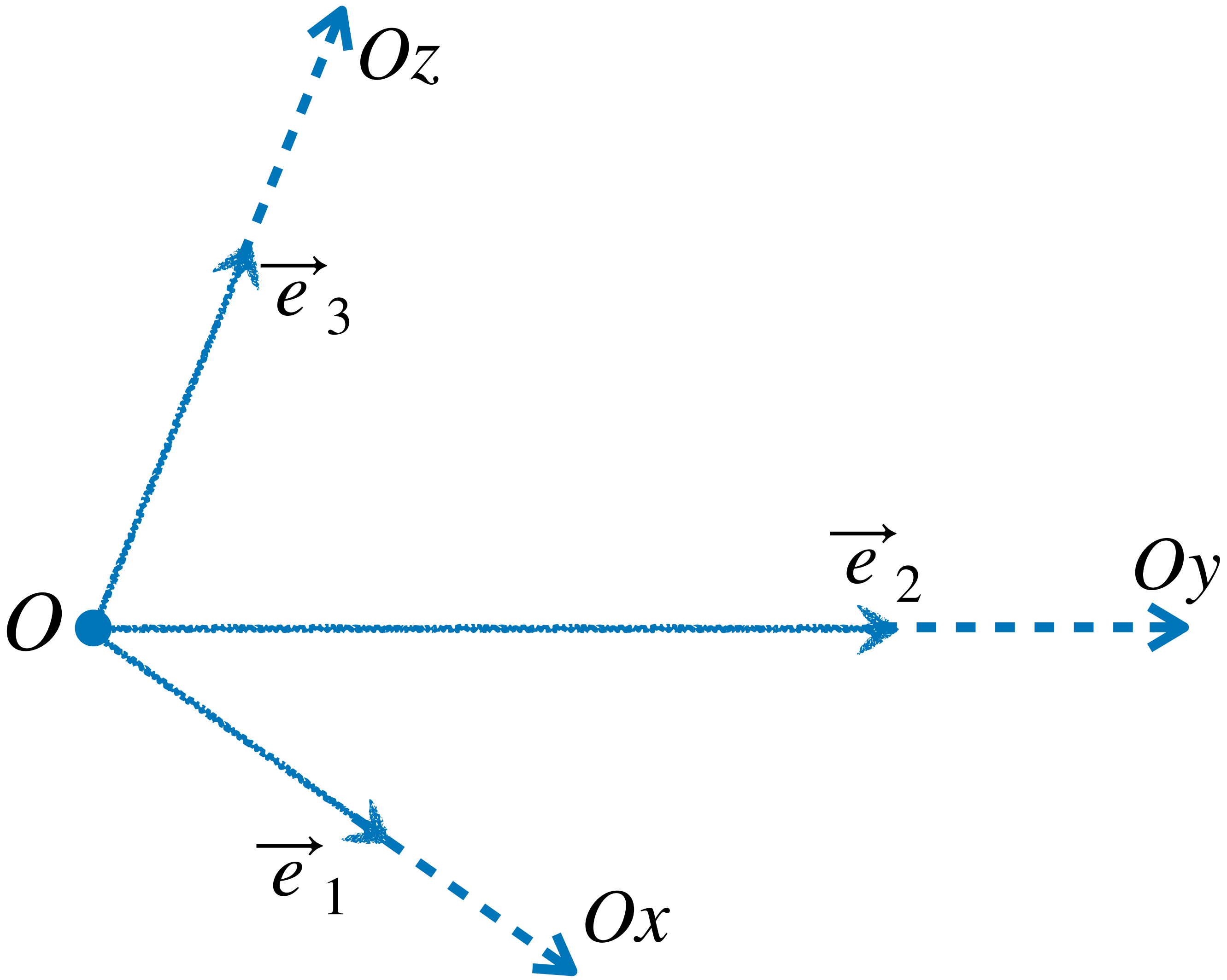
Единичная для $M_{n \times n}$

$A \cdot E = E \cdot A = A$, $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Смена системы координат

Система координат

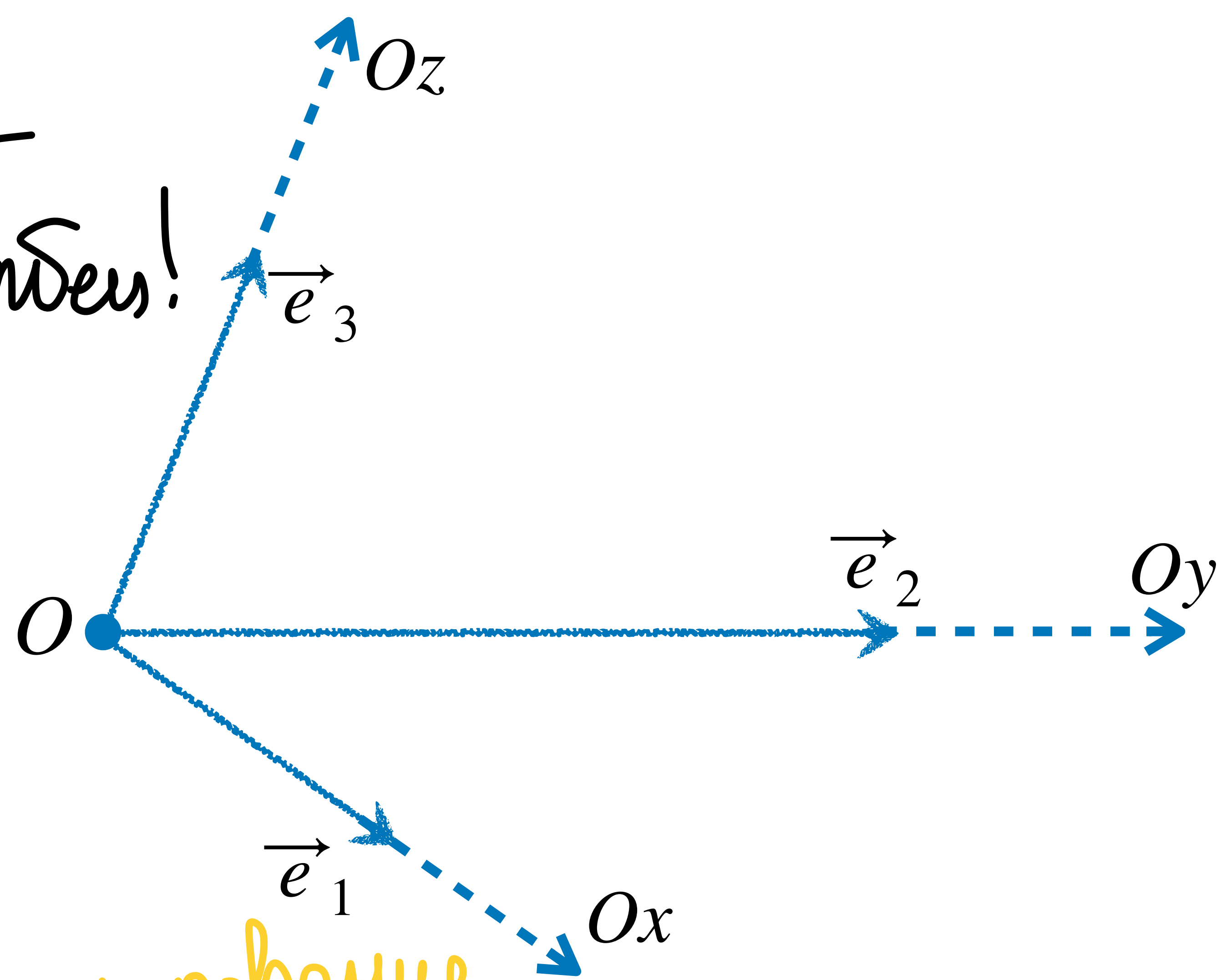
$$K = (O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$$



Система координат

$$K = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

Теперь вектор —
— это вектор-столбец!



$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ или

$= (x \ y \ z)^T$

транспонирование

Смена системы координат

«старая» с.к.

$$K_1 = (O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3) \longrightarrow K_2 = (O'; \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3)$$

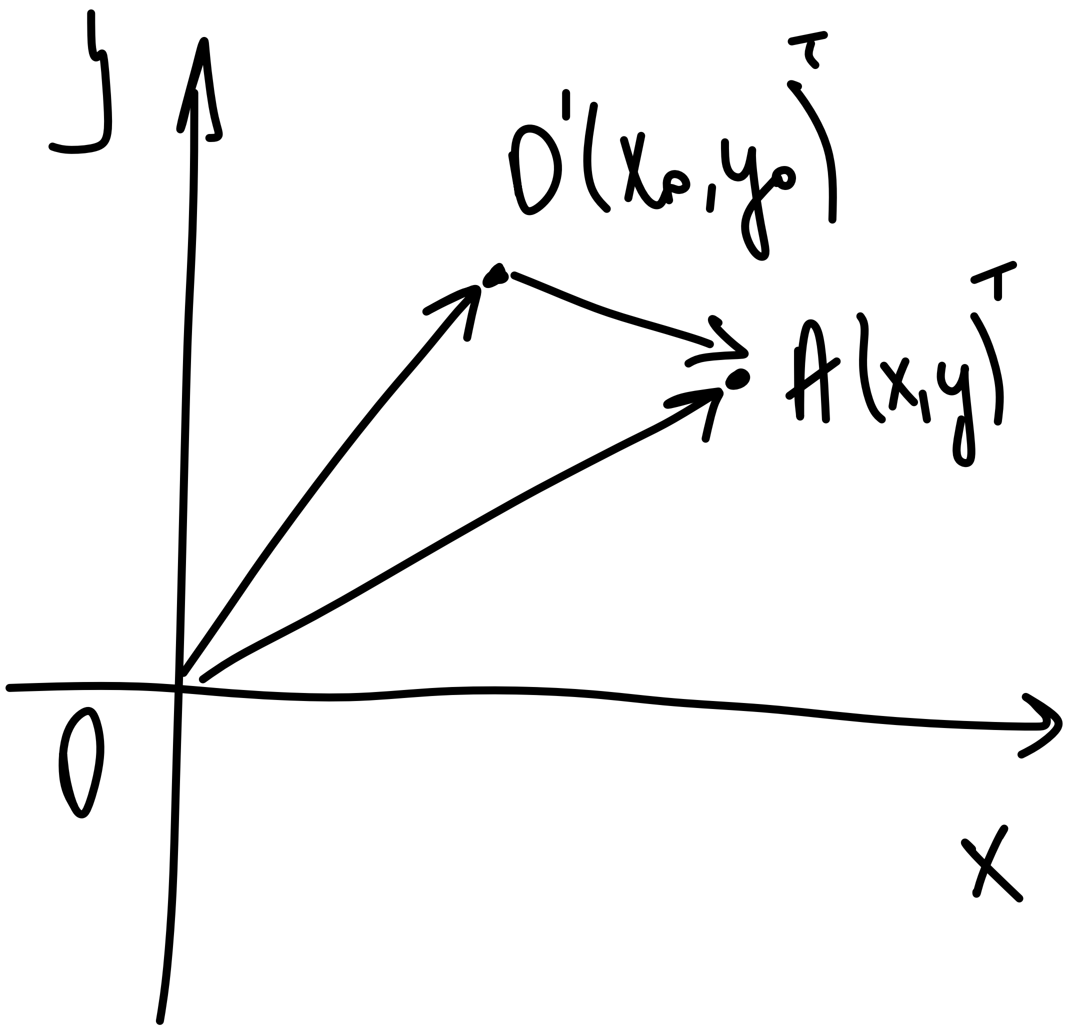
«новая» с.к.

I. $O \longrightarrow O'$

II. $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3 \longrightarrow \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3$

Смена начала системы

Сдвиг: $O \longrightarrow O'$



радиус-вектора

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

базис не меняется!

Смена начала системы

Сдвиг: $O \longrightarrow O'$

новые!

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

старые!

Смена базиса

«старый» базис

$$\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3 \longrightarrow \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3$$

«новый» базис

$$\bar{e}'_1 = t_{11}\bar{e}_1 + t_{21}\bar{e}_2 + t_{31}\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}'_2 = t_{12}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2 + t_{32}\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}'_3 = t_{13}\bar{e}_1 + t_{23}\bar{e}_2 + t_{33}\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} t_{13} \\ t_{23} \\ t_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3) = (e_1\, e_2\, e_3) \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Смена базиса

«старый» базис

$$\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3 \longrightarrow \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3$$

«новый» базис

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e}'_1 & \overrightarrow{e}'_2 & \overrightarrow{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

матрица перехода

Смена базиса

«старый» базис

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \longrightarrow \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$$

«новый» базис

$$\vec{v} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = x'\bar{e}_1' + y'\bar{e}_2' + z'\bar{e}_3' = (\bar{e}_1'\ \bar{e}_2'\ \bar{e}_3')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Т.к. разложение по базису единственно, то $\longrightarrow$

Смена базиса

«старый» базис

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \longrightarrow \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$$

«новый» базис

новые

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

старые

$$x = T x'$$

$$x' = T^{-1} x$$

обратная матрица

Смена базиса

«старый» базис

$$\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3 \longrightarrow \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3$$

«новый» базис

новые

старые

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$x = Tx'$

$x' = T^{-1}x$

координаты $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3$

обратная матрица

Смена системы координат

«старая» с.к.

$K_1 = (O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3) \longrightarrow K_2 = (O'; \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3)$

«новая» с.к.

$\overset{\text{I}}{\searrow} \quad K_{1,5} = (O'; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) \quad \overset{\text{II}}{\nearrow}$

I. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

II. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \qquad \longrightarrow$

Смена системы координат

«старая» с.к.

$$K_1 = (O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3) \longrightarrow K_2 = (O'; \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3)$$

«новая» с.к.

<u>Формула перехода:</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Задача 1

Дано: $O'(-1,3)^T$, $\bar{e}_1' = (2,3)^T$, $\bar{e}_2' = (1,1)^T$

Найти: формулу перехода $Oxy \longrightarrow O'x'y'$

Решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Задача 1

Дано: $O'(-1,3)^T$, $\bar{e}_1' = (2,3)^T$, $\bar{e}_2' = (1,1)^T$

Найти: Формулу перехода $Oxy \to O'x'y'$

Решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Найти: Координаты в $O'x'y'$ т. $A(2,-1)^T$

$$\begin{cases} x = 2x' + y' - 1 \\ y = 3x' + y' + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 2x' + y' - 1 \\ -1 = 3x' + y' + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x' + y' = 3 \\ 3x' + y' = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -7 \\ y' = 17 \end{cases}$$

Задача (КР 2019)

4. Даны точки

$$A = (2, -1, 2)^T,\ B = (5, 0, 3)^T,\ C = (3, -2, 3)^T,\ D = (5, 1, 1)^T$$

и плоскость $x - 3y - 4z + 5 = 0$. Составьте уравнение этой плоскости в новой системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

1) $\overline{AB} = (3, 1, 1)^T,\ \overline{AC} = (1, -1, 1)^T,\ \overline{AD} = (3, 2, -1)^T$

Формула перехода: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{cases} x = 3x' + y' + 3z' + 2 \\ y = x' - y' + 2z' - 1 \\ z = x' + y' - z' + 2 \end{cases}$

Подставляем в

$x - 3y - 4z + 5 = 0$

Решение

$$(3x'+y'+3z'+2)-3(x'-y'+2z'-1)-4(x'+y'-z'+2)+5=0$$

$$-4x'+z'+2=0$$

$$4x'-z'-2=0 \leftarrow \text{ответ}$$

„Второй способ" решения не писать, а то он слишком запутанный получился =)

Задача (КР 2020)

4. Дана точка A и векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$,

$$A = (-1, 0, 2),\ \vec{v}_1 = (3, 1, -1),\ \vec{v}_2 = (2, 2, 1),\ \vec{v}_3 = (1, 3, -1).$$

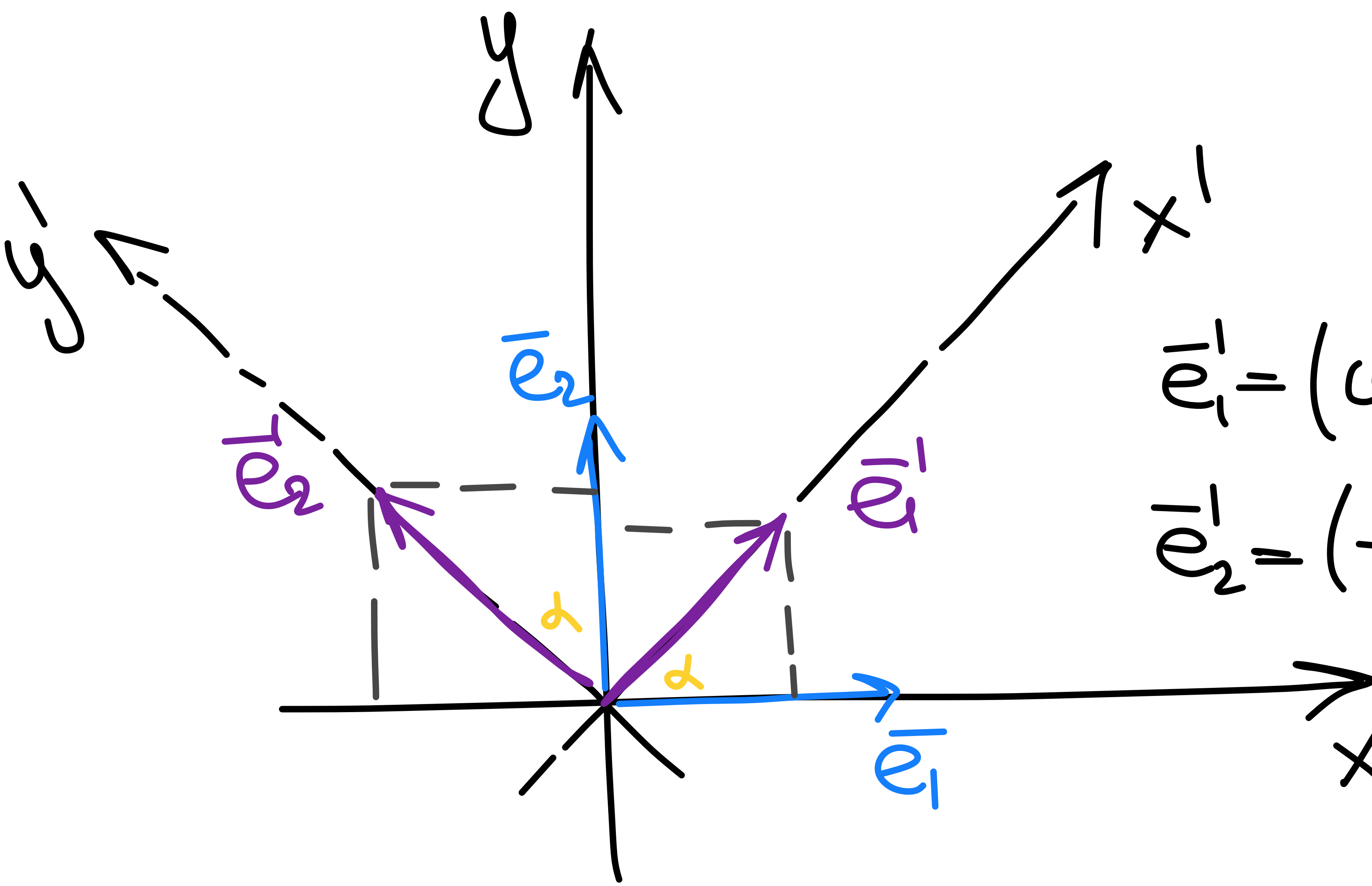
Записать уравнение плоскости $2x - y - z + 5 = 0$ в системе координат $(A, \vec{v}_1, \vec{v}_2,\ \vec{v}_2 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\,)$.

Жду ваших решений!

Замена координат

Прямоугольная с.к.

$$K_1 = (O; \overbrace{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2}^{\text{ОНБ!}}) \longrightarrow K_2 = (O; \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2)$$



$\bar{e}'_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$

$\bar{e}'_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$

$\Rightarrow$

Замена координат

Прямоугольная с.к.

$$K_1 = (O; \overbrace{\vec{e}_1, \vec{e}_2}^{\text{ОНБ!}}) \longrightarrow K_2 = (O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$$

Поворот:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$