Урок 8

Резонаторы

1. (Задача 2.44.)Определить собственные электромагнитные колебания в полом $(\varepsilon = \mu = 1)$ резонаторе, имеющем форму параллелепипеда с ребрами $a \times b \times c$.

Решение Каждое собственное колебание описывается векторным потенциалом

$$\mathbf{A} : A_x = N_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z)\, e^{-i\omega t},$$

$$A_y = N_2 \sin(k_1 x) \cos(k_2 y) \sin(k_3 z)\, e^{-i\omega t},$$

$$A_z = N_3 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \cos(k_3 z)\, e^{-i\omega t},$$

где $k_i = \frac{\pi n_i}{a_i}$, $n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, ...$; $k_1 N_1 + k_2 N_2 + k_3 N_3 = 0$; $a_1, a_2, a_3 \equiv a, b, c$.

2. (Задача 2.45.)Определить минимальную частоту собственных колебаний электромагнитного поля внутри резонатора из задачи 2.44 с размерами $1 \times 10 \times 20\,\text{см}^3$.

Решение $\omega_{\min} = \frac{\pi c}{a_2 a_3}\sqrt{a_2^2 + a_3^2} \simeq 10^{10} c^{-1}$. (Стороны резонатора ($a_1 < a_2 < a_3$.)

3. (Задача 2.47.) В резонаторе, имеющем форму куба с ребром a, возбуждена основная мода колебаний, в которой отлична от нуля x-компонента электрического поля. Найти величину и направление сил, действующих на стенки резонатора, если полная энергия электромагнитного поля в резонаторе равна W.

Решение Для нахождения электромагнитного поля в пустом пространстве, ограниченном идеально проводящими стенками, достаточно решить волновое уравнение для $\mathbf{E}$

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0 \tag{1}$$

и уравнение

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0 \tag{2}$$

с граничным условием $E_\tau = 0$ на поверхности стенок. Магнитное поле находится из уравнения

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{3}$$

Выберем оси X, Y, Z по трем ребрам куба с началом в углу куба. Решением уравнений (1), (2) с граничным условием $E_\tau = 0$ будет

$$E_x = A \cos k_z x \cdot \sin k_y y \sin k_z z e^{i\omega t}.$$

В общем случае $k_x = \frac{\pi}{an_1}$, $k_y = \frac{\pi}{an_2}$, $k_z = \frac{\pi}{an_3}$, где n_1, n_2, n_3 — целые положительные числа и $\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^3)$. Поскольку в резонаторе возбуждена основная мода колебаний (колебание с наименьшей частотой), то $k_x = 0, k_y = k_z = \frac{\pi}{a}$, $\omega = c\frac{\pi}{a}\sqrt{2}$ и

$$E_x = A\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)e^{i\omega t}. \tag{4}$$

Компоненты поля $\mathbf{H}$ найдем из уравнения (3). Получим

$$H_y = i\frac{\pi}{a}\frac{c}{\omega}A\cos\frac{\pi}{a}z\cdot\sin\frac{\pi}{a}y\cdot e^{i\omega t},$$

$$H_z = -i\frac{\pi}{a}\frac{c}{\omega}A\sin\frac{\pi}{a}z\cdot\cos\frac{\pi}{a}y\cdot e^{i\omega t}.$$

В элементе объема dV находится среднее по времени количество энергии

$$dW = \frac{1}{8\pi}(\overline{E^2} + \overline{H^2})dV,$$

где

$$\overline{E^2} = \overline{E_z^2} = A^2\sin^2\frac{\pi}{a}y\cdot\sin^2\frac{\pi}{a}z\cos^2\omega t = \frac{A^2}{2}\sin^2\frac{\pi}{a}y\cdot\sin^2\frac{\pi}{a}z,$$

$$\overline{H^2} = \overline{H_y^2} + \overline{H_z^2} =$$

$$= \left(\frac{\pi cA}{a\omega}\right)^2\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{a}z\cdot\sin^2\frac{\pi}{a}y + \left(\frac{\pi cA}{a\omega}\right)^2\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{a}z\cdot\cos^2\frac{\pi}{a}y.$$

Интегрируя по всему объему резонатора, получаем

$$W = \frac{a}{8\pi}\int_0^a\int_0^a(\overline{E^2} + \overline{H^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

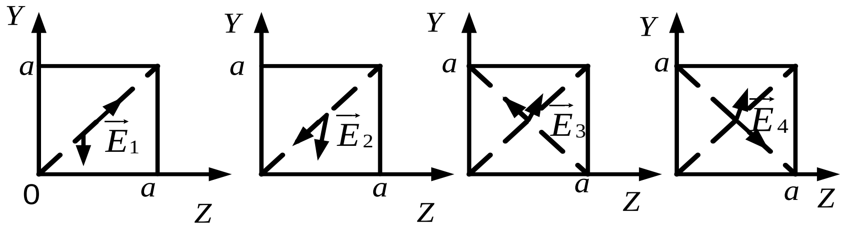
$$= \frac{a}{8\pi}\left[\frac{A^2}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi cA}{a\omega}\right)^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot 2\right] = \frac{a^3A^2}{32\pi},$$

откуда $A^2 = \frac{32\pi}{a^3}W$.

Для нахождения давления на стенки резонатора представим E_x в виде суперпозиции плоских волн

$$E_x = A\frac{e^{i\frac{\pi}{a}y} - e^{-i\frac{\pi}{a}y}}{2i}\cdot\frac{e^{i\frac{\pi}{a}z} - e^{-i\frac{\pi}{a}z}}{2i}\cdot e^{i\omega t} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4,$$

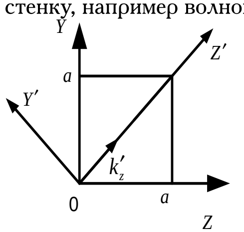
где $E_1 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}y - \frac{\pi}{a}z)}$, $E_2 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t + \frac{\pi}{a}y + \frac{\pi}{a}z)}$, $E_3 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}y + \frac{\pi}{a}z)}$, $E_4 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t + \frac{\pi}{a}y - \frac{\pi}{a}z)}$.



Волны E_1 и E_2, E_3 и E_4 распространяются во взаимно противоположных направлениях. Волновые векторы для каждой из волн лежат в плоскости $Y,\ Z$. На рисунках приведены направления распространения волн

Векторы $\mathbf{E_1},\ \mathbf{E_2},\ \mathbf{E_3},\ \mathbf{E_4}$ направлены вдоль оси X. Волны падают только на стенки, расположенные перпендикулярно оси Z и оси Y, и оказывают на них давление. Например, волны E_1 и E_4, падая на сторону $z = a$, формируют отраженные волны E_2 и E_3.

Поскольку углы падения и отражения одинаковы для всех волн, то, для того чтобы найти давление на стенку $z = a$, достаточно найти передаваемый импульс на эту стенку, например волной E_1, и результат учетверить.



Чтобы найти импульс, передаваемый волной E_1, запишем ее в новой системе координат с осью Z', направленной вдоль волнового вектора этой волны, и осью X' вдоль X. Получим

$$E_1 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}\sqrt{2}z')},$$

$$H_{y'} = \frac{A}{4}\frac{c}{\omega}k'_z e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}\sqrt{2}z')} = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - k'_z z')},$$

где $k'_z = \frac{\pi}{a}\sqrt{2}$. В направлении Z' волна движется со скоростью, равной скорости света. Импульс, переносимый в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси Z', $p_{z'} = \frac{1}{c}S_{z'}$, где $S_{z'}$ — вектор Пойнтинга, равный

$$\mathbf{S_{z'}} = \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E_1} \times \mathbf{H^*_{y'}}] = \frac{c}{8\pi}\frac{A^2}{16}.$$

На стенку $z = a$ попадает импульс, который проходит через площадь $\Delta S = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$, расположенную нормально к Z'. Но этот импульс направлен под углом 45^0 к стенке. Таким образом, нормальная составляющая импульса будет равна

$$p_z = \frac{S_{z'}}{c}\frac{a^2}{\sqrt{2}}\cos 45^0 = S_z \cdot a^2/2c.$$

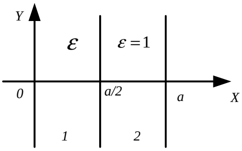
Полная сила, действующая на стенку,

$$F_z = 4p_z = \frac{A^2}{32}\frac{a^2}{8\pi} = \frac{W}{2a}.$$

Такая же сила действует на стенку $z = 0$ и стенку $y = 0$, $y = a$, т. е. $F_y = \frac{W}{2a}$. Сила $F_x = 0$, поскольку на стенки $x = 0$, $x = a$ импульс не переносится.

4. Между двумя параллельными, идеально проводящими пластинками, расстояние между которыми равно a, возбуждается стоячая электромагнитная волна. Насколько изменится минимальная частота стоячей волны, если приложить к одной из пластин слой диэлектрика толщиной $a/2$, доходящей до ее краев? Диэлектрическая проницаемость вещества слоя $\varepsilon = 4$.

Решение



Сразу можем написать (см. рисунок)

$E_{1y}(x) = E_1 \sin k_1 x$, где $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$,

$E_{2y}(x) = E_2 \sin k_2(a - x)$,

где $k_2 = \omega/c$, ω — частота, $E_x \equiv 0$. Из закона Фарадея следует, что $H_z \propto \partial E_y/\partial x$. Граничные условия выглядят как

$$E_1 \sin\frac{k_1 a}{2} = E_2 \sin\frac{k_2 a}{2},$$

$$k_1 E_1 \cos\frac{k_1 a}{2} = -k_2 E_2 \cos\frac{k_2 a}{2}$$

$$(E_{1y}|_{x=a/2} = E_{2y}|_{x=a/2},\ \ H_{1z}|_{x=a/2} = H_{2z}|_{x=a/2}).$$

Поделив первое уравнение на второе, получим

$$(1/k_1)\operatorname{tg}(k_1 a/2) = (-1/k_2)\operatorname{tg}(k_2 a/2),$$

причем $k_1/k_2 = \sqrt{\varepsilon} = 2$.

$$\operatorname{tg}(\sqrt{\varepsilon}\omega a/2c) = -\sqrt{\varepsilon}\operatorname{tg}(\omega a/2c) \ \text{ или } \ \operatorname{tg}(\omega a/2c) = -2\operatorname{tg}\frac{\omega a}{2c}.$$

Отсюда $\operatorname{tg} 2\theta = 2\operatorname{tg}\theta/(1-\operatorname{tg}^2\theta) = -2\operatorname{tg}\theta$, где $\theta = \omega a/2c$. Сократив на $2\operatorname{tg}\theta \neq 0$, получим $1 = -1 + \operatorname{tg}^2\theta$, $\operatorname{tg}^2\theta = 2$, $\theta = \omega a/2c = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \simeq 0,95$.

Минимальная частота до введения пластинки

$$\omega_{min}^{(0)} = \pi c/a = 3,14c/a$$

между пластинками укладывается половина длины волны. С пластинкой

$$\omega_{min}^{(\varepsilon)} = (2c/a)\operatorname{arctg}\sqrt{2} = 1,91c/a.$$

Таким образом, искомое изменение частоты

$$\triangle\omega = (3,14 - 1,91)c/a = 1,23c/a.$$