

Тензор электромагнитного поля в контравариантном представлении:

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

где $i=0,...,3$, $k=0,...,3$.

Контравариантные компоненты тензора электромагнитного поля при переходе из лабораторной в сопутствующую систему координат преобразуются по правилу

$$(F^{ik})' = \Lambda_m^i \Lambda_n^k F^{mn}$$

где Λ_k^i – матрица преобразования Лоренца, $i=0,...,3$, $k=0,...,3$:

$$\Lambda_m^i = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(для случая, когда сопутствующая система отсчета движется относительно лабораторной со скоростью $\beta = \frac{v}{c} \mathbf{e}_x$).

Для практических расчетов удобно представить m, n -компоненты тензора F в виде произведения m и n компонент некоторых двух 4-векторов (нахождение самих 4-векторов при этом в нашу задачу не входит):

$$F^{mn} = a^m \cdot b^n.$$

Тогда

$$(F^{ik})' = (\Lambda_m^i a^m) \cdot (\Lambda_n^k b^n).$$

Правая часть в развернутом виде представляет собой линейную комбинацию произведений вида $a^\alpha \cdot b^\beta$, которые с другой стороны суть α, β -компоненты тензора F . Коэффициенты при этих компонентах формируются из парных произведений элементов матрицы Λ и задаются однозначно. Таким образом, произвольная ik -компонента тензора F' выражается через компоненты тензора F . Например,

$$\left. \begin{aligned} H'_y &= (F^{13})' = (\Lambda_m^1 a^m) \cdot (\Lambda_n^3 b^n) \\ (a^1)' &= \Lambda_m^1 a^m = -\beta\gamma a^0 + \gamma a^1 \\ (b^3)' &= \Lambda_n^3 b^n = 1 \cdot b^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H'_y = (-\beta\gamma a^0 + \gamma a^1) b^3 = -\beta\gamma a^0 b^3 + \gamma a^1 b^3 =$$

$$= -\beta\gamma F^{03} + \gamma F^{13} = \gamma(H_y + \beta E_z).$$

Формулы преобразования полей можно записать и в векторном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + [\beta \times \mathbf{H}]), & \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}'_{\perp} - [\beta \times \mathbf{H}']) \\ \mathbf{H}'_{\parallel} &= \mathbf{H}_{\parallel}, & \mathbf{H}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{H}_{\perp} - [\beta \times \mathbf{E}]), & \mathbf{H}_{\perp} &= \gamma (\mathbf{H}'_{\perp} + [\beta \times \mathbf{E}']) \end{aligned}$$