Задание 5 (сдать до до 8 марта)

Вариант 1

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1, 2, 3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1, 3, 4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1, 1, 3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1, 0, 2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2, -1, -1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2, 1, 0]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\},$$
$$\{t + t^2, t^3, 1 - 5t - t^3, (1-t)^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2, 1, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3, 1, 2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [4, 4, -1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [-2, 5, 6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-3, 2, -2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1, -1, 0]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -6 & 8 & 3 \\ 6 & -6 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 2

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,3,4]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,3,5]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,5]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\},$$
$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,5,7]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,2,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,1,3]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,3,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [0,1,1]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -6 & 7 & 3 \\ 6 & -6 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)

Вариант 3

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,2,5]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,3,9]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [3,1,0]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,2,3]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,-1,-3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,0,-1]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\},$$
$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [3,3,5]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,3,5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,4,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,3]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;

2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)

Вариант 4

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1, 2, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1, 0, -2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1, 7, 8]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1, 2, 0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2, -2, -1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4, 3, -1]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\},$$
$$\{t + t^2, t^3, 1 - 5t - t^3, (1-t)^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2, 2, 5]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1, -1, -6]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [3, 2, 3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1, 4, 4]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1, 3, 5]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1, 4, 2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & -5 & 5 \\ 4 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 6 & -7 & 6 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 5

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2, 3, -1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3, 4, -3]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1, 2, 0]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2, 0, -1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1, 0, 3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1, 1, 1]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\},$$
$$\{t + t^2, t^3, 1 - 5t - t^3, (1-t)^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1, 2, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2, 2, -1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2, 5, 4]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2, 1, 7]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1, 2, 5]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1, 0, 3]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы
$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -6 & -5 & 3 \\ -6 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$
при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 6

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,0,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,0]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,3,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,-2,-3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [0,1,2]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\},$$
$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,3,-1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,-2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,4,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,1,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,1,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,5,-1]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle\mathbf{a}\rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle\mathbf{b}\rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & -6 \\ -6 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 7

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,5,4]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [0,1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,-2,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,5,1]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t + t^2, t^3, 1 - 5t - t^3, (1-t)^3\},$$
$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,4,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,4,4]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,0,4]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,-3,-1]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей
$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$
при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 8

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [4,0,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [4,-1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,2,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4,0,1]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\},$$
$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,5,4]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [2,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,2,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,3,-3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,2,-3]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle\mathbf{a}\rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle\mathbf{b}\rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \\ -6 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 9

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,5,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,8,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,-1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,1,3]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\},$$
$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,-1,0]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [4,-1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,1,5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,8]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,-2,5]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle\mathbf{a}\rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle\mathbf{b}\rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & -5 & 6 & 3 \\ 2 & -7 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы
$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -3 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$
при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 10

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,3,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,2,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,4,1]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\},$$
$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,5,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,8,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,3,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [3,-3,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-1,4,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,-3,-4]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle\mathbf{a}\rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle\mathbf{b}\rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 6 & -8 & -6 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)

Вариант 11

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1, 0, -1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3, 1, -1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2, 1, 1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1, 3, -1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2, 1, -1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3, 4, 0]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t + t^2, t^3, 1 - 5t - t^3, (1 - t)^3\},$$
$$\{(1 + t)^3, (1 - t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1, 2, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1, 3, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [3, 2, 2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [3, -4, 5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1, 0, 3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [0, 5, 5]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -5 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -6 \\ -3 & -8 & 6 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 12

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1, -1, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1, -1, 0]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2, -3, 3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [3, 0, 1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2, 1, 1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [5, 1, 0]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t + t^2, t^3, 1 - 5t - t^3, (1 - t)^3\},$$
$$\{(1 + t)^3, (1 - t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [-1, 0, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3, 1, -1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2, 3, 3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [3, 6, -3]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-1, -4, 7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1, -2, 5]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -6 & 5 & -6 \\ -6 & 6 & -7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)

Вариант 13

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3, 2, 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [4, 3, -1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [3, 1, 7]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1, 2, 1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1, 3, 1]^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = [0, 3, 2]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t + t^2, t^3, 1 - 5t - t^3, (1 - t)^3\},$$
$$\{(1 + t)^3, (1 - t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1, -1, 2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2, -2, 3]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [3, -2, 4]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1, 1, -5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3, 2, 1]^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = [2, -1, -4]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -6 & 2 & -6 \\ -6 & 3 & -7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 14

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,1,5]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [4,1,6]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,4,-3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,1,1]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\},$$
$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,-2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,3]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,-1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [-2,5,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,-2,4]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1,3,1]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle\mathbf{a}\rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle\mathbf{b}\rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -6 \\ -6 & 1 & 6 \\ 6 & -3 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 15

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,1,2]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [5,2,4]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,-1,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,0,1]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\},$$
$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,3,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [3,4,5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4,-1,2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle\mathbf{a}\rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle\mathbf{b}\rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -6 & -7 & -6 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.