

19-21 (19 – базовый уровень, 20 – повышенный уровень, 21 – высокий уровень, время – 6 + 8 + 11 мин)

Тема: Теория игр. Поиск выигрышной стратегии.

Что проверяется:

Умение анализировать алгоритм логической игры. Умение найти выигрышную стратегию игры.

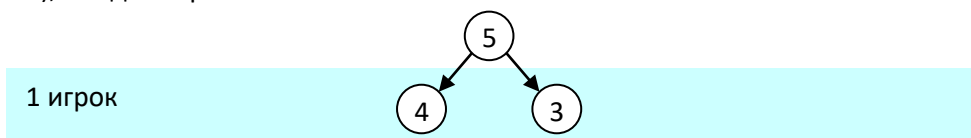
Умение построить дерево игры по заданному алгоритму и найти выигрышную стратегию.

1.5.2. Цепочки (конечные последовательности), деревья, списки, графы, матрицы (массивы), псевдослучайные последовательности.

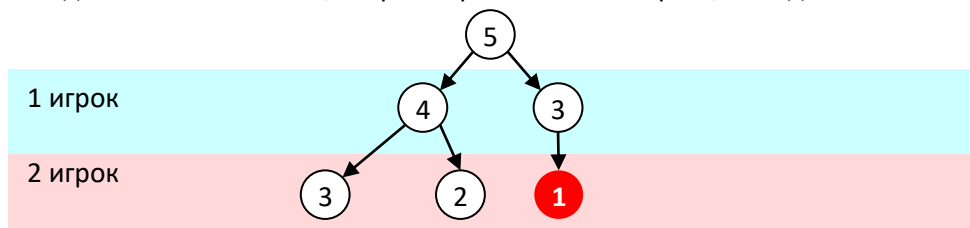
1.1.3. Умение строить информационные модели объектов, систем и процессов в виде алгоритмов.

Что нужно знать:

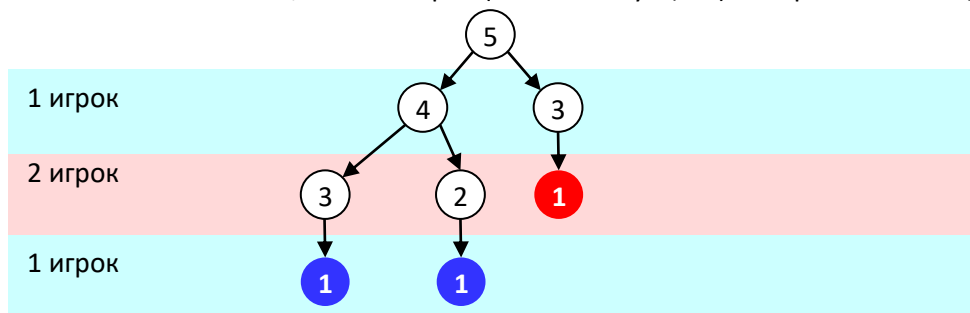
- в простых играх можно найти выигрышную стратегию, просто перебрав все возможные варианты ходов соперников
- для примера рассмотрим такую игру: сначала в кучке лежит 5 спичек; два игрока убирают спички по очереди, причем за 1 ход можно убрать 1 или 2 спички; выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 спичку
- первый игрок может убрать одну спичку (в этом случае их останется 4), или сразу 2 (останется 3), эти два варианта можно показать на схеме:



- если первый игрок оставил 4 спички, второй может своим ходом оставить 3 или 2; а если после первого хода осталось 3 спички, второй игрок может выиграть, взяв две спички и оставив одну:



- если осталось 3 или 2 спички, то 1-ый игрок (в обеих ситуациях) выигрывает своим ходом:



- построенная схема называется «деревом игры», она показывает все возможные варианты, начиная с некоторого начального положения (для того, чтобы не загромождать схему, мы не рисовали другие варианты, если из какого-то положения есть выигрышный ход)
- в любой ситуации у игрока есть два возможных хода, поэтому от каждого узла этого дерева отходят две «ветки», такое дерево называется *двоичным* (если из каждого положения есть три варианта продолжения, дерево будет *троичным*)
- проанализируем эту схему; если первый игрок своим первым ходом взял две спички, то второй сразу выигрывает; если же он взял одну спичку, то своим вторым ходом он может выиграть, независимо от хода второго игрока

- кто же выиграет при правильной игре? для этого нужно ответить на вопросы: 1) «Может ли первый игрок выиграть, независимо от действий второго?», и 2) «Может ли второй игрок выиграть, независимо от действий первого?»
- ответ на первый вопрос – «да»; действительно, убрав всего одну спичку первым ходом, 1-ый игрок всегда может выиграть на следующем ходу
- ответ на второй вопрос – «нет», потому что если первый игрок сначала убрал одну спичку, второй всегда проигрывает, если первый не ошибется
- таким образом, при правильной игре выиграет первый игрок; для этого ему достаточно первым ходом убрать всего одну спичку
- в некоторых играх, например, в рэндзю (крестики-нолики на бесконечном поле) нет выигрышной стратегии, то есть, при абсолютно правильной игре обоих противников игра бесконечна (или заканчивается ничьей); кто-то может выиграть только тогда, когда его соперник по невнимательности сделает ошибку
- полный перебор вариантов реально выполнить только для очень простых игр; например, в шахматах сделать это за приемлемое время не удастся (дерево игры очень сильно разветвляется, порождая огромное количество вариантов)
- все позиции в простых играх делятся на выигрышные и проигрышные
- **выигрышная позиция** – это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, может гарантированно выиграть при любой игре соперника, если не сделает ошибку; при этом говорят, что у него есть выигрышная стратегия – алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть
- если игрок начинает играть в **проигрышной** позиции, он обязательно проиграет, если ошибку не сделает его соперник; в этом случае говорят, что у него нет выигрышной стратегии; таким образом, общая стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом создать проигрышную позицию для соперника
- выигрышные и проигрышные позиции можно охарактеризовать так:
 - позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции – **проигрышная**;
 - позиция, из которой хотя бы один из возможных ходов ведет в проигрышную позицию – **выигрышная**, при этом стратегия игрока состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для соперника) позицию.

Пример задания:

Р-01 (демо-2022). Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит **куча камней**. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 29. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет **29** или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 28$.

Задание 19.

Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Задание 20.

Найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.
Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Задание 21

Найдите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Решение (построение таблицы).

- 1) задачи с одной кучей просто решаются с помощью таблицы (массива); будем записывать в ячейках таблицы числовую оценку позиции: положительное число N означает выигрыш за N ходов, отрицательное число $(-N)$ – проигрыш за N ходов
- 2) очевидно, что при всех $S \geq 15$ Петя выигрывает своим первым ходом, увеличив количество камней в куче вдвое; это позиции с оценкой 1 (выигрыш в один ход):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
														1	1	1

- 3) все возможные ходы из позиции 14 (это 15 и 28) ведут в позиции с оценкой 1, то есть 14 – проигрышная позиция с оценкой -1 : проигрыш за один ход (Петя, начинающий игру, может ходить любым способом, но Ваня своим первым ходом сразу сможет выиграть):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
													-1	1	1	1

- 4) гарантированный выигрыш за 2 хода возможен для тех позиций, из которых есть ход в позицию с оценкой -1 , то есть, из позиций 13 и 7; оценка этих позиций – 2:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
						2						2	-1	1	1	1

- 5) дальше определяем все позиции, откуда все ходы ведут в позиции с оценкой 1 или 2 (все они уже заполнены в таблице); определяем, что это только позиция 12 (возможные ходы – 13 с оценкой 2 и 24 с оценкой 1):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
						2					-2	2	-1	1	1	1

оценка позиции 12 равна (-2)

Решение Задания 19.

- 6) Ответ: 14 (позиция с оценкой -1).

Решение Задания 20.

- 7) Ответ: 7 и 13 (позиции с оценкой 2);

Решение Задания 21.

- 8) Ответ: 12 (позиция с оценкой -2).

Решение (программа, для ленивых).

- 1) напишем, как и в разборе задачи P00 (см. ниже), функцию, определяющую оценку позиции в виде числа:

TARGET = 29

def gameResult(S):

...

Константа TARGET обозначает количество камней, при котором игра заканчивается.

- 2) условие окончания игры (проигрыш того, кто получил такую позицию, оценка 0):

if S >= TARGET: return 0

- 3) определяем рекурсивно оценки всех возможных ходов:

nextCodes = [gameResult(S+1), gameResult(S*2)]

- 4) определяем, нет ли среди возможных ходов хода в проигрышную позицию:

- ```

negative = [c for c in nextCodes if c <= 0]
5) если среди возможных ходов есть ход в проигрышную позицию, строим положительную
 оценку позиции (она выигрышная), добавляя 1 к модулю оценки:
 if negative:
 res = -max(negative) + 1
6) иначе (если все ходы ведут в выигрышные позиции с положительной оценкой) строим
 отрицательную оценку позиции (она проигрышная):
 else:
 res = -max(nextCodes)
7) вот полная функция
TARGET = 29
def gameResult(S):
 if S >= TARGET: return 0
 # рекурсивно определяем коды всех возможных ходов
 nextCodes = [gameResult(S+1), gameResult(S*2)]
 negative = [c for c in nextCodes if c <= 0]
 if negative:
 res = -max(negative) + 1
 else:
 res = -max(nextCodes)
 return res
8) и основная программа, которая ее вызывает:
results = [(S,gameResult(S)) for S in range(1,TARGET)]
print('19:', [S for S, R in results if R == -1])
print('20:', [S for S, R in results if R == 2])
print('21:', [S for S, R in results if R == -2])
Здесь сначала определяются оценки позиции для всех возможных начальных значений S; они
сохраняются в массиве кортежей (S,оценка). Затем выбираются результаты с оценкой -1
(решение задачи 19), 2 (решение задачи 20) и -2 (решение задачи 21).

```

### Ещё пример задания:

**P-00 (демо-2021).** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее **77**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 77 или больше камней. В начальный момент в первой куче было **семь** камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 69$ .

#### Задание 19.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

В задачах такого типа «неудачным» считается такой ход Пети, после которого

- 1) он проиграет, хотя мог бы выиграть, **ИЛИ...**
- 2) он проиграет быстрее (за меньшее число ходов) чем мог бы, если бы старался затянуть игру.

#### Задание 20.

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

#### Решение Задания 19.

- 1) возможно, что есть несколько значений  $S$ , которые удовлетворяют условию; нас интересует минимальное из них;
- 2) при минимальном подходящем значении  $S$  общее количество камней в двух кучах увеличивается **максимально быстро** до значения 77 или большего;
- 3) поскольку удвоение увеличивает количества камней в куче быстрее, чем добавление одного камня, можно сделать вывод, что для минимального подходящего значения  $S$  игроки своими ходами дважды удвоили бОльшую из двух куч;
- 4) предположим, что бОльшая куча имеет 7 камней, и  $S = 7$ ; тогда наибольшее число камней, которое можно получить после одного хода каждого игрока –  $7 + 7 \cdot 2 \cdot 2 = 35$ ; так как  $35 < 77$ , игра не окончена и этот вариант не подходит; делаем вывод, что  $S > 7$
- 5) таким образом, дважды была удвоена вторая куча; условие окончания игры
 
$$7 + S \cdot 2 \cdot 2 \geq 77,$$
 откуда получаем  $S \geq 17,5$ ; это значит, что  $S_{\min} = 18$
- 6) Ответ: **18**.

#### Решение Задания 20.

- 1) Петя своим ходом должен перевести игру в такую позицию, что Ваня не может выиграть своим первым ходом, но добавление одного камня в любую кучу позволяет выиграть Пете вторым ходом
- 2) рассмотрим такие (проигрышные) позиции; при удвоении второй (бОльшей) кучи в сумме должно получаться **76 камней** (недостаточно для выигрыша):
 
$$(8, 34) \quad (10, 33) \quad (12, 32) \quad (14, 31) \quad (16, 30) \dots$$
- 3) теперь подумаем, какие из них можно получить из начальной позиции  $(7, S)$  за один ход; видно, что количество камней в первой куче изменяется, то есть Петя на первом ходу работает с первой кучей; он может получить там  $7 + 1 = 8$  камней (и у нас есть критическая позиция **(8,34)!**) или  $7 \cdot 2 = 14$  камней (для этого случая тоже есть критическая позиция **(14,31)!**)
- 4) поэтому условию задания удовлетворяют значения  $S = 31$  и  $34$ , их нужно записать в порядке возрастания
- 5) Ответ: **31 34**.

#### Решение Задания 21 (благодарю за обсуждение Д. Муфаззалова и В. Бабия).

- 1) определим свойства позиции, которую мы ищем:
  - а) это *проигрышная* позиция, то есть всех возможные ходы из нее ведут в выигрышные позиции;
  - б) из этой позиции есть ход в выигрышную позицию, из которой Ваня не может выиграть за один ход, но может гарантированно выиграть за два; это значит, что есть ход в позицию, **определённую в решении задачи 20** или равноценную ей!
- 2) для полного решения задачи построим таблицу выигрышных и проигрышных позиций; выигрышные позиции будем обозначать положительными числами, например, 2 – выигрыш в два хода; проигрышные позиции обозначаем отрицательными числами, например, «–2» – проигрыш в два хода (это значит, что при самой лучшей игре первого игрока второй выигрывает по крайней мере своим вторым ходом)

- 3) таблица будет прямоугольная, на вертикальной оси откладываем количество камней в первой куче, на горизонтальной – количество камней во второй куче:

|    | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7  |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  |
| 8  |    |    |    |    |    |    | -1 | 1  | 1  | 1  |
| 9  |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 10 |    |    |    |    |    | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 11 |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 12 |    |    |    |    | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 13 |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 14 |    |    |    | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 15 |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 16 |    |    | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 17 |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 18 |    | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |

пока в таблице расставлены единицы в позициях, которые ведут к выигрышу Пети на первом ходу и «-1» в позициях, которые ведут к выигрышу Вани на своем первом ходу (после любого первого хода Пети)

- 4) отметим числом 2 ячейки, откуда есть ходы в серые клетки с ходом «-1»:

|    | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7  |    |    |    | 2  |    |    | 2  | 1  | 1  | 1  |
| 8  |    |    | 2  |    |    | 2  | -1 | 1  | 1  | 1  |
| 9  |    |    |    |    |    | 2  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 10 |    |    |    |    | 2  | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 11 |    |    |    |    | 2  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 12 |    |    |    | 2  | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 13 |    |    |    | 2  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 14 |    |    | 2  | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 15 |    |    | 2  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 16 |    | 2  | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 17 |    | 2  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 18 | 2  | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |

в верхней строке таблицы выделены жёлтым позиции (7, 31) и (7, 34), найденные при решении предыдущего задания

- 5) докажем, что в верхней строке больше нет позиций с кодом 2; по определению из позиции с кодом 2 есть ход в позицию с кодом «-1»; во всех позициях с кодом «-1», не попавших в рассмотренную часть таблицы, в первой куче больше 14 камней, то есть, стартовав с первой кучей из 7 камней мы не можем получить такие позиции за один ход
- 6) нам нужно найти в верхней строке позиции, из которых **все ходы ведут в выигрышные позиции с кодами 1 (выигрыш за 1 ход) или 2 (выигрыш за 2 хода)**
- 7) сразу видны две таких позиции (выделены на следующем рисунке зелёным цветом):  
 (7, 30) – возможные ходы в (7, 31), (8, 30) и (14, 30) с кодом 2 и (7, 60) с кодом 1  
 (7, 33) – возможные ходы в позиции (7, 34) и (8, 33) с кодом 2, а также (14, 33) и (7, 66) с кодом 1:

|   | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7 |    |    | -2 | 2  |    | -2 | 2  | 1  | 1  | 1  |
| 8 |    |    | 2  |    |    | 2  | -1 | 1  | 1  | 1  |

|    |   |    |    |    |    |    |   |   |   |   |
|----|---|----|----|----|----|----|---|---|---|---|
| 9  |   |    |    |    |    | 2  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 |   |    |    |    | 2  | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 |   |    |    |    | 2  | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 |   |    |    | 2  | -1 | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 13 |   |    |    | 2  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 |   |    | 2  | -1 | 1  | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 |   |    | 2  | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 16 |   | 2  | -1 | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 17 |   | 2  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 18 | 2 | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 |

- 8) вроде бы все хорошо, и можно выбрать минимальное из двух найденных значений  $S$  (30), но кроме этих ячеек есть ещё кандидат на решение –  $S = 17$ , потому что ходом из позиции (7, 17) можно получить позицию (7, 34) с кодом 2
- 9) однако на самом деле позиция (7, 17) нам не подходит, докажем это, рассмотрев все возможных ходы Пети:

(8, 17) (14, 17) (7, 18) (7, 34)

здесь жёлтым фоном выделены ходы с кодом 2 – выигрышные позиции за 2 хода (из позиции (8, 17) есть ход в (8, 34) с кодом «-1»)

- 10) рассмотрим ход (14, 17); возможные ходы из него

(15, 17) (28, 17) (14, 18) (14, 34)

среди них нет ни одного хода в позицию с кодом «-1», то есть, ход Пети (14, 17) не даст Ване выиграть за 2 хода; поэтому эта позиция не подходит

- 11) Ответ: 30.

#### Решение с помощью программы (рекурсия)

- 1) напомним программу на языке Python, которая для всех значений  $S$  выдаёт код позиции (про коды позиций см. выше)

- 2) сначала поясним идею; пусть нужно определить код позиции  $(x, y)$ ; для этого мы должны предварительно определить коды позиций, куда можно попасть одним ходом из  $(x, y)$ :

$(x+1, y)$   $(2x, y)$   $(x, y+1)$   $(x, 2y)$

поскольку нужно выполнить ту же самую операцию, это будет рекурсивная функция

- 3) итак, пусть мы нашли коды четырёх возможных следующих позиций; рассмотрим несколько примеров:

- а) пусть эти коды [1, 2, 2, 3], то есть все возможные ходы ведут в выигрышные позиции, Петя проигрывает; он заинтересован в том, чтобы проиграть за максимальное число ходов (всячески оттягивая поражение), поэтому из этих кодов нужно выбрать максимальный и записать его со знаком минус, получаем код «-3», то есть Петя проиграет за 3 хода (на 3-м ходу Ваня выигрывает)

- б) пусть эти коды [1, -2, 2, -3], то есть найдены два хода в выигрышные позиции (с кодами «-2» и «-3»), и Петя может выиграть; он заинтересован в том, чтобы выиграть за наименьшее число ходов, поэтому нужно выбрать максимальное из полученных отрицательных чисел («-2»), убрать знак минус и добавить единицу (Петя добавляет новый ход); поэтому для данного случая код клетки будет равен 3

- 4) рекурсия должна заканчиваться, когда сумма  $x + y$  стала больше или равна 77; определим это значение как константу **TARGET** («цель»);

**TARGET = 77**

такую позицию (когда игра завершена) будем обозначать **кодом 0** и считать её **проигрышной**, как и позиции с отрицательным кодом



- 5) запишем первую версию функции `gameResult`, которая принимает два параметра - количество камней в первой и второй кучах:

```
def gameResult(x, y):
 if x + y >= TARGET: return 0
 # рекурсивно определяем коды всех возможных ходов
 nextCodes = [gameResult(x+1, y), gameResult(x*2, y),
 gameResult(x, y+1), gameResult(x, y*2)]
 if в nextCodes есть отрицательные или 0:
 res = -max(отрицательные или 0) + 1
 else:
 res = -max(nextCodes)
 return res
```

- 6) строки, выделенные красным цветом – это псевдокод, который нужно заменить на операторы Python; выделим из массива `nextCodes` все отрицательные числа и нули (соответствующие проигрышным позициям):

```
negative = [c for c in nextCodes if c <= 0]
```

тогда условный оператор `if в nextCodes есть отрицательные или 0`: может быть записан как

```
if negative:
 res = -max(negative) + 1
else:
 res = -max(nextCodes)
```

получается такая функция:

```
def gameResult(x, y):
 if x + y >= TARGET: return 0
 # рекурсивно определяем коды всех возможных ходов
 nextCodes = [gameResult(x+1, y), gameResult(x*2, y),
 gameResult(x, y+1), gameResult(x, y*2)]
 negative = [c for c in nextCodes if c <= 0]
 if negative:
 res = -max(negative) + 1
 else:
 res = -max(nextCodes)
 return res
```

- 7) попробуем посчитать коды для всех возможных значений  $S$  от  $69 = 77 - 7 - 1$  до 1:

```
x = 7
for S in range(TARGET-X-1, 0, -1):
 r = gameResult(X, S)
 print("{:d} {:d}".format(S, r))
```

- 8) к сожалению, обнаруживаем, что программа работает очень медленно... Дело в том, что программа много раз вычисляет значение кода для одних и тех позиций. Чтобы этого избежать, будем запоминать их в словаре `results`:

```
results = {} # (1)
def gameResult(x, y):
 if (x,y) in results: return results[(x,y)] # (2)
 if x + y >= TARGET: return 0
 nextCodes = [gameResult(x+1, y), gameResult(x*2, y),
 gameResult(x, y+1), gameResult(x, y*2)]
 negative = [c for c in nextCodes if c <= 0]
 if negative:
 res = -max(negative) + 1
```



```

else:
 res = -max(nextCodes)
results[(x,y)] = res # (3)
return res

```

- 9) добавленные строчки выделены голубым фоном; в строке (1) создаётся пустой словарь (глобальная переменная), ключом в этом словаре будет кортеж, описывающий позицию (**x**, **y**);
- 10) в строке (2) мы проверяем, нет ли в словаре кода для запрошенной позиции; если есть, то сразу возвращаем этот код
- 11) в строке (3) добавляем в словарь новый код запрошенной позиции
- 12) теперь программа отрабатывает очень быстро, и мы видим, что позиция (7, 17), которую мы хотели проверить, на самом деле выигрышная (её код 11); это значит, что ответ на вопрос задачи 21 – это 30.
- 13) Ответ: 30.

#### Решение с помощью программы (рекурсия, 2-й вариант)

- 1) введём константы: количество камней в первой куче, цель игры,  
**N1, TARGET = 7, 77**
- 2) количество камней, которые можно добавить, и коэффициент, на который можно умножить количество камней в любой куче:  
**KADD, KMUL = 1, 2**
- 3) определим вспомогательную функцию **gameOver**, которая возвращает истинное логическое значение (**True**), если игра окончена:  

```

def gameOver(n1, n2):
 return n1+n2 >= TARGET

```
- 4) определим функцию **win(n1,n2,byMove)**, которая возвращает истинное логическое значение (**True**), если в позиции (**n1,n2**) можно гарантированно выиграть не более чем за **byMove** ходов:  

```

def win(n1, n2, byMove):
 if gameOver(n1, n2): return False
 return lose(n1+KADD, n2, byMove-1) or \
 lose(n1*KMUL, n2, byMove-1) or \
 lose(n1, n2+KADD, byMove-1) or \
 lose(n1, n2*KMUL, byMove-1)

```

В первой строке проверяется условие окончания игры: если игра окончена, то тот, чья очередь ходить в этой позиции, проиграл:

```
if gameOver(n1, n2): return False
```

Игрок выигрывает в некоторой позиции не более чем за **byMove** ходов, если все его возможные ходы ведут в проигрышные (для соперника) позиции, причем при любом ходе соперник проигрывает не более чем за **byMove-1** ходов:

```

return lose(n1+KADD, n2, byMove-1) or \
 lose(n1*KMUL, n2, byMove-1) or \
 lose(n1, n2+KADD, byMove-1) or \
 lose(n1, n2*KMUL, byMove-1)

```

Здесь вызывается функция **lose(n1,n2,byMove)**, которую мы напишем далее. Она возвращает истинное логическое значение (**True**), если в позиции (**n1,n2**) игрок гарантированно проиграет не более чем за **byMove** ходов.

Обратите внимание на логическую операцию **or**: для выигрыша достаточно, чтобы **хотя бы один** ход создавал проигрышную позицию для соперника.

- 5) функция **lose** выглядит так:

```
def lose(n1, n2, byMove):
 if gameOver(n1, n2): return True
 if byMove == 0: return gameOver(n1, n2)
 return win(n1+KADD, n2, byMove) and \
 win(n1*KMUL, n2, byMove) and \
 win(n1, n2+KADD, byMove) and \
 win(n1, n2*KMUL, byMove)
```

Сначала проверяется, не закончилась ли уже игра. Если это случилось, возвращается значение **True**: тот, кто получил такую позицию, проиграл.

Если уже не осталось ходов (**byMove==0**), результат работы функции равен **False**: игра окончена, а ходов уже нет.

В общем случае проверяем возможные ходы: если все они приводят к выигрышу соперника не более чем за **byMove** ходов, то позиция проигрышная, причем проигрыш наступит не позже, чем хода с номером **byMove** (дольше сопротивляться не получится).

Обратите внимание на логическую операцию **and**: для проигрыша необходимо, чтобы **все** ходы вели в выигрышную позицию для соперника.

- 6) ответ на вопрос задания 19 строится так же, как было показано выше; для округления вверх используется функция **ceil** из модуля **math**:

```
from math import ceil
ans1 = min(ceil((TARGET-N1)/KMUL/KMUL),
 ceil(TARGET-N1*KMUL*KMUL))
```

- 7) значения **s**, при которых выполняются условия заданий 20 и 21, находятся в цикле:

```
for s in range(18, TARGET-N1+1):
 if win(N1, s, 2) and not win(N1, s, 1):
 ans2.append(s)
 if lose(N1, s, 2) and not lose(N1, s, 1):
 ans3.append(s)
```

Массив **ans2** содержит все значения **s**, при которых есть стратегия выигрыша в 2 хода, но нет стратегии гарантированного выигрыша за 1 ход; массив **ans3** содержит все значения **s**, при которых тот, кто начинает игру, проигрывает за 2 хода, но не всегда проиграет за 1 ход.

- 8) полная программа на Python:

```
N1, TARGET = 7, 77
KADD, KMUL = 1, 2
def gameOver(n1, n2):
 return n1+n2 >= TARGET

def win(n1, n2, byMove):
 if gameOver(n1, n2): return False
 return lose(n1+KADD, n2, byMove-1) or \
 lose(n1*KMUL, n2, byMove-1) or \
 lose(n1, n2+KADD, byMove-1) or \
 lose(n1, n2*KMUL, byMove-1)

def lose(n1, n2, byMove):
 if gameOver(n1, n2): return True
 if byMove == 0: return False
 return win(n1+KADD, n2, byMove) and \
 win(n1*KMUL, n2, byMove) and \
 win(n1, n2+KADD, byMove) and \
 win(n1, n2*KMUL, byMove)
```

```

from math import ceil
ans1 = min(ceil((TARGET-N1)/KMUL/KMUL) ,
 ceil(TARGET-N1*KMUL*KMUL))
ans2, ans3 = [], []
for s in range(18, TARGET-N1+1):
 if win(N1, s, 2) and not win(N1, s, 1):
 ans2.append(s)
 if lose(N1, s, 2) and not lose(N1, s, 1):
 ans3.append(s)

print("--- Ответы ---")
print("19. ", ans1)
print("20. ", sorted(ans2))
print("21. ", ans3)

```

#### Решение на языке PascalABC.NET:

- 1) в целом решение повторяет приведённое выше решение на Python
- 2) для хранения уже полученных результатов используется словарь **memory**, в котором каждой паре чисел, задающих количество камней в двух кучах (тип **tuple**) сопоставляется целое число – оценка позиции:

```

type tuple = (integer, integer);
const TARGET = 77;
var memory: Dictionary<tuple, integer>;
function gameResult(x, y: integer): integer;
begin
 if (x, y) in memory then begin
 result := memory[(x,y)];
 exit;
 end;
 if x+y >= TARGET then begin result := 0; exit; end;
 var next := | gameResult(x+1,y),
 gameResult(x,y+1),
 gameResult(2*x,y),
 gameResult(x,2*y) |;
 var negative := next.Where(x->x<=0).ToArray;
 if negative.Length > 0 then
 result := - negative.Max + 1
 else
 result := - next.Max;
 memory[(x,y)] := result;
end;

begin
 var X:= 7;
 memory := new Dictionary<tuple, integer>;
 for var s:=TARGET-X-1 downto 1 do
 Println(s, gameResult(x,s));
 end.

```

#### Решение с помощью программы (динамическое программирование, А. Сидоров)

- 1) вместо рекурсии можно применить динамическое программирование, где вместо словаря **results** используется двухмерный массив:

```

TARGET = 77
results = [[0]*2*TARGET for i in range(2*TARGET)]
for x in range(TARGET-1,0,-1):
 for y in range(TARGET-x-1,0,-1):
 nextCodes = [results[x+1][y], results[2*x][y],
 results[x][y+1], results[x][2*y]]
 negative = [c for c in nextCodes if c <= 0]
 if negative:
 results[x][y] = -max(negative) + 1
 else:
 results[x][y] = -max(nextCodes)

```

```

N1 = 7
for S in range(TARGET-N1-1,0,-1):
 print("{:d} {:d}".format(S, results[N1][S]))

```

Эта программа для каждого значения S выводит оценку позиции. Положительные значения K означают выигрыш: Петя выиграет за K ходов. Отрицательные значение (-K): Ваня гарантированно выиграет не позднее, чем своим K-м ходом.

2) Ответ: **30**.

#### Решение с помощью электронных таблиц (А. Кабанов)

- Для начала отметим комбинации камней, из которых игрок побеждает своим первым ходом. Составим таблицу, в которой по вертикали отметим камни в первой куче камней (начиная с 7), а по горизонтали – во второй куче камней (начиная с 1).

|    | A  | B | C | D | E | F | G | H | I | J  | K  | L  | M  | N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  | AA | AB | AC | AD | AE | AF | AG | AH | AI | AJ | AK | AL | AM | AN |  |  |
|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|
| 1  | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |    |  |  |
| 2  | 7  |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 3  | 8  |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 4  | 9  |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 5  | 10 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 6  | 11 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 7  | 12 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 8  | 13 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 9  | 14 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 10 | 15 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 11 | 16 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 12 | 17 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 13 | 18 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
| 14 | 19 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |

- Для каждой пары рассчитаем максимальное число камней, которое может получить игрок за один ход. Для этого необходимо большую из куч умножить на два. В ячейке B2 запишем формулу **=МАКС (2\*\$A2+B\$1 ; \$A2+2\*\$B\$1)** и заполним ей всю нашу таблицу. Далее с помощью условного форматирования пометим ячейки, в которых сумма не менее 77 (условие выигрыша).

|    | A  | B  | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  | N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  | AA | AB | AC | AD | AE | AF | AG | AH | AI | AJ | AK | AL | AM | AN |    |  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| 1  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |    |    |  |
| 2  | 7  | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 |    |  |
| 3  | 8  | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 |    |  |
| 4  | 9  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 |    |  |
| 5  | 10 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 |    |  |
| 6  | 11 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 |    |  |
| 7  | 12 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 |    |  |
| 8  | 13 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 |    |  |
| 9  | 14 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 |    |  |
| 10 | 15 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |  |
| 11 | 16 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 |  |
| 12 | 17 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 |    |  |
| 13 | 18 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 |    |  |
| 14 | 19 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 |    |    |  |
| 15 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
| 16 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
| 17 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
| 18 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
| 19 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
| 20 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
| 21 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |

#### Решение 19 задания:

- Для решения 19 задания рассмотрим две ситуации:

- а) Петя умножает вторую кучу на 2, а Ваня выигрывает первым ходом. Ход Пети имеет вид  $(7;S) \rightarrow (7;2S)$ . Ваня будет выигрывать первым ходом, если  $2S \geq 35$  (см. таблицу) или  $S \geq 18$ .
- б) Петя умножает первую кучу на 2, а Ваня выигрывает первым ходом. Ход Пети имеет вид  $(7;S) \rightarrow (14;S)$ . Ваня будет выигрывать первым ходом, если  $S \geq 32$  (см. таблицу).
- 4) Нетрудно видеть, что минимальное подходящее значение  $S$  равно 18.
- 5) Ответ: **18**.

### Решение 20 задания:

- 6) Для начала найдём проигрышные значения (при любой игре побеждает следующий игрок). Рассмотрим комбинации  $(K; S)$  из которых каждый ход вида  $(K; S+1)$   $(K+1; S)$   $(2K; S)$   $(K; 2S)$  попадает в выигрышные позиции.

|    | A  | B  | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  | N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  | AA | AB | AC | AD | AE | AF | AG | AH | AI | AJ | AK | AL | AM | AN |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |    |    |
| 2  | 7  | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 |
| 3  | 8  | 17 | 18 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 |    |
| 4  | 9  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 |    |
| 5  | 10 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 |    |
| 6  | 11 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 |    |
| 7  | 12 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 |    |
| 8  | 13 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 |    |
| 9  | 14 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 |    |
| 10 | 15 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 |    |
| 11 | 16 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 |    |
| 12 | 17 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 | 95 |    |
| 13 | 18 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 | 96 |    |
| 14 | 19 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 | 95 | 97 |    |

- 7) Петя будет гарантированно побеждать своим вторым ходом, если его первый ход попадает в отмеченные проигрышные значения.
- 8) Рассмотрим ситуации, когда победный ход Пети  $(K+1;S)$  или  $(K;S+1)$ . Отметим в таблице ячейки, из которых возможны такие ходы.

|    | A  | B  | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  | N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  | AA | AB | AC | AD | AE | AF | AG | AH | AI | AJ | AK | AL | AM |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |    |    |
| 2  | 7  | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 |
| 3  | 8  | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 |
| 4  | 9  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 |    |
| 5  | 10 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 |    |
| 6  | 11 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 |    |
| 7  | 12 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 |    |
| 8  | 13 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 |    |
| 9  | 14 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 |    |
| 10 | 15 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 |    |
| 11 | 16 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 |    |
| 12 | 17 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 | 95 |    |
| 13 | 18 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 | 96 |    |
| 14 | 19 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 | 95 | 97 |    |

- 9) Рассмотрим ситуации, когда победный ход Пети  $(2K; S)$  или  $(K;2S)$ . Выпишем все проигрышные позиции:  
 $(8;34)$   $(10;33)$   $(12;32)$   $(14;31)$   $(16;30)$   $(18;29)$  ...
- 10) Для каждой из них выпишем, позиции с вдвое меньшим числом камней в одной из куч (если такая позиция возможна):  
 $(8;34) - (8;17)$   
 $(12;32) - (12;16)$   
 $(14;31) - (7;31)$   
 $(16;30) - (8;30)$   $(16;15)$   
 $(18;29) - (9;29)$
- 11) Также отметим их на таблице (остальные по необходимости добавляются по аналогии)

|    | A  | B  | C  | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  | N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  | AA | AB | AC | AD | AE | AF | AG | AH | AI | AJ | AK | AL | AM | AN |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |    |
| 2  | 7  | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 |
| 3  | 8  | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 |
| 4  | 9  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 |
| 5  | 10 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 |
| 6  | 11 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 |
| 7  | 12 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 |
| 8  | 13 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 |
| 9  | 14 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 |
| 10 | 15 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 |
| 11 | 16 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 |
| 12 | 17 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 | 95 |
| 13 | 18 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 | 96 |
| 14 | 19 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 | 95 | 97 |

13) Ответ: 31 34.

**Решение 21 задания:**

14) Рассмотрим комбинации вида (7;S), ходы (K+1;S) и (K;S+1) из которых попадает в выигрышные позиции. По таблице видно, что это (7;33) и (7;30). Проверим их:

– Из (7;33) Петя может ходить в (7;34) (8;33) – победа Вани 2 ходом и (7;66) (14;33) – победа Вани 1 ходом.

– Из (7;30) Петя может ходить в (7;31) (8;30) (14;30) – победа Вани 2 ходом и (7;62) – победа Вани 1 ходом.

15) Оба значения подходят и наименьшее из этих значений 30.

16) Ответ: 30.

**Решение с помощью программы: имитация решения в электронных таблицах (Д. Муфаззалов)**

Если трудно разобраться в рекурсивном алгоритме или динамическом программировании, можно написать более простую программу, имитирующую решение в электронных таблицах.

1) Вместо таблицы будем использовать двумерный массив:

```
n = 69
target = 77
a = ["--" * target * 2 for i in range(target * 2)]
```

2) Найдем игровые ситуации, из которых можно выиграть за 1 ход:

```
for i in range(1, target):
 for j in range(1, target):
 if (i + j + 1 >= target or
 i * 2 + j >= target or
 i + 2 * j >= target) and i + j < target:
 a[i][j] = "V1"
```

3) Введем функцию, возвращающую множество игровых ситуаций, которые можно получить из текущей игровой ситуации:

```
def f(i, j):
 return set([a[i][j+1], a[i+1][j],
 a[i*2][j], a[i][j*2]])
```

4) Найдем игровые ситуации, из которых игрок проигрывает за один ход:

```
for i in range(1, target):
 for j in range(1, target):
 if a[i][j] == "--" and f(i, j) == {'V1'}:
 a[i][j] = "P1"
```

5) Найдем игровые ситуации, из которых игрок выигрывает за 2 хода:

```
for i in range(1, target):
 for j in range(1, target):
 if a[i][j] == "--" and ("P1" in f(i, j)):
 a[i][j] = "V2"
```

6) Найдем игровые ситуации, из которых игрок проигрывает за один или два хода:

```
for i in range(1, target):
 for j in range(1, target):
 if a[i][j] == "--" and (f(i, j) == {'V1', 'V2'}):
 a[i][j] = "P2"
```

7) Выведем результаты расчетов:

```
for i in range(n+1):
 print("%3d" % i, end=' ')
print()
for i in range(1, n):
```

```

print("%3d" % (i), end='')
for j in range(1,n):
 print("%3s" % a[i][j], end='')
print()

```

8) Ответы к заданиям можно получить рассуждениями, приведенными выше.

Полная программа:

```

n = 69
tar = 77
a = ["--" * tar * 2 for i in range(tar * 2)]
def f(i,j):
 return set([a[i][j+1], a[i+1][j], a[i*2][j], a[i][j*2]])
for i in range(1,tar):
 for j in range(1,tar):
 if (i + j + 1 >= tar or
 i * 2 + j >= tar or
 i + 2 * j >= tar) and i + j < tar:
 a[i][j] = "V1"
for i in range(1,tar):
 for j in range(1,tar):
 if a[i][j] == "--" and f(i,j) == {'V1'}:
 a[i][j] = "P1"
for i in range(1,tar):
 for j in range(1,tar):
 if a[i][j] == "--" and ("P1" in f(i,j)):
 a[i][j] = "V2"
for i in range(1,tar):
 for j in range(1,tar):
 if a[i][j] == "--" and (f(i,j) == {'V1', 'V2'}):
 a[i][j] = "P2"
for i in range(n+1):
 print("%3d" % i, end=' ')
print()
for i in range(1,n):
 print("%3d" % (i), end=' ')
 for j in range(1,n):
 print("%3s" % a[i][j], end=' ')
 print()

```





- 10) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 69. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 69 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 6 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 62$ .

Вопросы 19-21 к задаче 11 и следующим задачам следующие:

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**Задание 20.**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите два значения  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
  - у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.
- Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

- 11) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 62. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 62 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 54$ .
- 12) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 66. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 66 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 58$ .
- 13) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 68 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 60$ .
- 14) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 74. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 74 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 66$ .
- 15) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 59. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 59 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 5 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 53$ .
- 16) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество

За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить

- 26) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 79. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 79 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 69$ .
- 27) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 75. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 75 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 65$ .
- 28) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 78. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 78 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 70$ .
- 29) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 72. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 72 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 64$ .
- 30) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 62. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 62 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 54$ .
- 31) (А. Носкин) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 41 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 31$ .

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Вопросы 19-21 к задаче 32 и следующим задачам следующие:

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### Задание 21

Сколько существует значений  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 32) (А. Носкин) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 40. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 40 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 30$ .
- 33) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 53. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 53 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 43$ .
- 34) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 49. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 49 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 41$ .
- 35) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 61. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 61 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 53$ .
- 36) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 48. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 48 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 8 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 39$ .
- 37) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 61. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 61 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 50$ .
- 38) (С.А. Скопинцева) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может увеличить количество камней в куче в три раза, добавить в кучу один камень, или 3 камня, при этом после каждого хода в куче должно быть нечетное количество камней. Например, пусть в куче было 8 камней. Тогда за один ход можно получить кучу из 9 камней или из 11 камней (увеличить количество камней в три раза нельзя, т.к. после этого хода получится четное количество камней – 24). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.



Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 51.

В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 50$ .

**19.** Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**20.** Найдите два наибольших значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**21.** Определите, сколько существует значений  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим вторым ходом независимо от ходов Пети.

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

**Задание 19.**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.**

Сколько существует значений  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите два наибольших значения  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**39) (А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 25 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 24$ .

**40) (А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 33 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 32$ .

**41) (А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество

камней в куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 49$ .

- 42) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня, добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 30 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 29$ .

Вопросы 19-21 к следующим задачам:

#### Задание 19.

Найдите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

#### Задание 20.

Найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### Задание 21

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 43) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу один камень;
- б) добавить в кучу два камня;
- в) добавить в кучу три камня;
- г) увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 34 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 33$ .

- 44) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу один камень;
- б) добавить в кучу два камня;
- в) добавить в кучу три камня;
- г) увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 37. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 38 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 37$ .

- 45) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу один камень;



б) **добавить в кучу два камня;**

г) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 64. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 65 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 64$ .

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

**Задание 19.**

Найдите **минимальное значение  $S$** , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.**

Сколько существует значений  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите **минимальное и максимальное значение  $S$** , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

46) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу два камня;**

б) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 45. Если при этом в куче оказалось не более 112 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 44$ .

47) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень;**

б) **увеличить количество камней в куче в два раза;**

в) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 36. Если при этом в куче оказалось не более 60 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 35$ .

48) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень;**

б) **увеличить количество камней в куче в два раза;**

в) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 43. Если при этом в куче оказалось не более 72 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 42$ .

## Вопросы 19-21 к следующим задачам:

**Задание 19.**

Найдите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.**

Найдите **минимальное и максимальное значение  $S$** , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 49) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень **больше**, чем убирается). Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 9). За один ход из позиции (6, 9) можно получить любую из четырёх позиций: (5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5). Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 20. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 20 или меньше камней. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче –  $S$  камней,  $S > 10$ .
- 50) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень **больше**, чем убирается). Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 9). За один ход из позиции (6, 9) можно получить любую из четырёх позиций: (5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5). Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 30. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 30 или меньше камней. В начальный момент в первой куче было 18 камней, во второй куче –  $S$  камней,  $S > 12$ .
- 51) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень **больше**, чем убирается). Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 9). За один ход из позиции (6, 9) можно получить любую из четырёх позиций: (5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5). Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 32. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 32 или меньше камней. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче –  $S$  камней,  $S > 22$ .
- 52) **(Е. Джобс)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу **сто** камней или

б) увеличить количество камней в куче в **два** раза.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 110 или 20 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 1000. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 1000 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 999$ .

**Задание 19.** Сколько существует значений  $S$ , при которых Ваня выигрывает первым ходом?

**Задание 20.** Сколько существует значений  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

**Задание 21.** Назовите минимальное и максимальное значение  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом, при этом для любого значения  $u$  Вани есть возможность выиграть своим первым ходом (в случае ошибки Пети).

53) (Д. Ф. Муфаззалов, г. Уфа) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча, состоящая из  $S$  конфет. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может съесть не более пяти, но не менее одной конфеты или съесть половину конфет, если число конфет четное. Съесть можно только целое количество конфет.

Игра завершается в тот момент, когда в куче останется **менее десяти конфет**. Победителем считается игрок, который сделал последний ход.

**Задание 19.** Укажите значение  $S$ , при которых Ваня выигрывает первым ходом.

**Задание 20.** Укажите минимальное и максимальное  $S$ , при которых Петя не может выиграть первым ходом, но может выиграть вторым ходом при любом ходе Вани.

**Задание 21.** Укажите такое значение  $S$ , при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

54) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в любой куче в **четыре** раза.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 83, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 5 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 77$ .

- 55) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
  - б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.
- Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 95, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 5 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 89$ .
- 56) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
  - б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.
- Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 105, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 4 камня, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 100$ .
- 57) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
  - б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.
- Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 129, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 4 камня, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 124$ .
- 58) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
  - б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.
- Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 100, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 93$ .
- 59) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
  - б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.
- Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 108, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 101$ .
- 60) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
  - б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.
- Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 125, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 117$ .
- 61) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
  - б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 133, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 125$ .

- 62) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в любую кучу один камень или увеличить количество камней в любой куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 30, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было  $K$  камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq K \leq 29$ ,  $1 \leq S \leq 29$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.** При  $K=6$ , найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 63) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в любую кучу один камень** или **увеличить количество камней в первой куче в два раза** или **увеличить количество камней во второй куче в три раза**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 30, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было  $K \geq 1$  камней, а во второй –  $S \geq 1$  камней,  $K+S \leq 29$ . Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.** При  $S=7$ , найдите минимальное и максимальное значение  $K$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** При  $K=1$  найдите такое значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 64) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в любую кучу два камня** или **увеличить количество камней в любой куче в три раза**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 45, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было  $K \geq 1$  камней, а во второй –  $S \geq 1$  камней,  $K+S \leq 43$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.** При  $K=4$ , найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** При  $K=13$  найдите такое значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

65) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **убрать из кучи один камень** или **уменьшить количество камней в любой куче в два раза (если количество камней нечётно, то остаётся на один камень меньше, чем убирается)**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не более 18, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было  $K \geq 1$  камней, а во второй –  $S \geq 1$  камней,  $S+K \geq 19$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Известно, что из начальной позиции  $(M; M)$  Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети. При каком значении  $M$  это возможно?

**Задание 20.** При  $K=13$ , найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** При каком минимальном значении  $N$  для начальной пары  $(N; N)$  одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.







Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 80, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 8 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 71$ .

- 73) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 73, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 9 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 63$ .

- 74) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 79, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 9 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 69$ .

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

#### **Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

#### **Задание 20.**

Определите, **сколько существует** таких значений  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

#### **Задание 21**

Укажите максимальное значение  $S$ , при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть при любой игре Пети.

- 75) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 70, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 63$ .

- 76) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 81, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 73$ .

- 77) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 90, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 9 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 80$ .

- 78) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 99, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 8 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 90$ .

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Определите, два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 79) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 20. Если при этом в куче оказалось не более 30 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 17 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 19$ .

- 80) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Если при этом в куче оказалось не более 45 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 23 камня и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 24$ .

- 81) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30. Если при этом в куче оказалось не более 45 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 27 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 29$ .

- 82) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Если при этом в куче оказалось не более 70 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 40 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 49$ .

- 83) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 56. Если при этом в куче оказалось не более 80 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 45 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 55$ .

- 84) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 65. Если при этом в куче оказалось не более 100 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 55 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 64$ .

- 85) (А. Богданов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит одна куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **убрать** из кучи **половину камней**, если количество камней в куче делится на 2; иначе убрать из кучи **два камня**;
- б) **убрать** из кучи **две трети камней**, если количество камней в куче делится на 3; иначе убрать из кучи **три камня**.

Например, пусть в куче 10 камней, тогда можно убрать половину или только три камня. А если в куче 12 камней, то можно убрать половину или две трети камней. Игра завершается в тот момент, когда в куче останется ровно 1 камень. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет ровно 1 камень. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $2 \leq S \leq 37$ .

#### Задание 19.

Найдите максимальное значение  $S$ , когда Петя мог выиграть первым ходом, но ошибся, и Ваня выиграл.

#### Задание 20.

Найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

**Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Петя может выбрать, каким ходом выиграет Ваня.

- 86) **(Е. Джобс)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. У игроков есть табличка, на которой записана пара неотрицательных целых чисел. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может заменить любое число на сумму обоих чисел. Так, например, если перед ходом игрока была позиция  $(3, 5)$ , то после его хода будет позиция  $(8, 5)$  или  $(3, 8)$ . Игра завершается в тот момент, когда сумма чисел пары становится не менее 45, побеждает игрок, сделавший последний ход.

**Задание 19.**

Известно, что игра началась в позиции  $(7, S)$ , при этом Ваня одержал победу после неудачного хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Найдите значения  $S$ , при которых Петя при правильной игре гарантированно выигрывает своим вторым ходом из позиции  $(6, S)$ . В качестве ответа укажите сначала минимальное, затем максимальное значение.

**Задание 21**

Известно, что при игре из позиции  $(S, S)$  Ваня гарантированно выигрывает своим вторым ходом при любой игре Пети. Найдите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

- 87) **(А. Богданов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит три кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч 3, 13 или 23 камня. Игра завершается в тот момент, когда в сумме в кучах будет не менее 73 камней. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в кучах было  $(2, S, 2S)$  камней,  $1 \leq S \leq 23$ .

**Задание 19.**

При некотором значении  $S$  Ваня одержал победу своим первым ходом после неудачного хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Найдите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

**Задание 21**

Найдите два значения  $S$ , при которых выигрышная стратегия есть у Вани, но Петя может выбрать, каким ходом выиграет Ваня – первым или вторым.

- 88) **(А. Богданов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч 1 или 2 камня. Игра завершается в тот момент, когда в сумме в кучах будет 13 камней. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 3 камня, во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 9$ .

**Задание 19.**

Петя мог выиграть первым ходом, но сделал неудачный ход и Ваня выиграл. При каком минимальном значении  $S$  это возможно?

**Задание 20.**

Найдите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает вторым ходом при любых ходах Пети.

- 89) (**И. Осипов**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат три кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в первой куче 10 камней, во второй 7, а в третьей 4 камня; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 7, 4)$ . Тогда за один ход можно получить любую из шести позиций:  $(13, 7, 4)$ ,  $(20, 7, 4)$ ,  $(10, 10, 4)$ ,  $(10, 14, 4)$ ,  $(10, 7, 7)$ ,  $(10, 7, 8)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 71. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 71 или больше камней. В начальный момент в первой куче было семь камней, во второй куче пять камней, в третьей куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 58$ .

**Задание 19.**

При некотором значении  $S$  Ваня одержал победу своим первым ходом после неудачного хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при которых Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 90) (**А. Рогов**) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 5)$ ,  $(30, 5)$ ,  $(10, 6)$ ,  $(10, 15)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 60. Если при этом в куче оказалось не более 79 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было восемь камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 51$ .

**Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Паша не может победить своим первым ходом, но Витя побеждает своим первым ходом при любой игре Паши.

**Задание 20.**

Укажите, сколько существует значений  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

**Задание 21**

Укажите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 91) (А. Рогов) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 5)$ ,  $(20, 5)$ ,  $(10, 6)$ ,  $(10, 10)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 40. Если при этом в куче оказалось не более 49 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было четырнадцать камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 25$ .

#### Задание 19.

Укажите значение  $S$ , при котором Паша не может победить своим первым ходом, но Витя побеждает своим первым ходом при любой игре Паши.

#### Задание 20.

Укажите, сколько существует значений  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

#### Задание 21

Укажите минимальное и максимальное значения  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 92) (А. Рогов) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 5)$ ,  $(30, 5)$ ,  $(10, 6)$ ,  $(10, 15)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 91. Если при этом в куче оказалось не более 110 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было сорок камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 50$ .

#### Задание 19.

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Паша не может победить своим первым ходом, но Витя побеждает своим первым ходом при любой игре Паши.

#### Задание 20.

Укажите, сколько существует значений  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

#### Задание 21



Укажите минимальное и максимальное значения  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 93) (А. Рогов) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(12, 5)$ ,  $(30, 5)$ ,  $(10, 7)$ ,  $(10, 15)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 47. Если при этом в куче оказалось не более 59 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было пять камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 41$ .

#### Задание 19.

Укажите количество значений  $S$ , при котором Паша не может победить своим первым ходом, но Витя побеждает своим первым ходом при любой игре Паши.

#### Задание 20.

Укажите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

#### Задание 21

Укажите количество значений  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 94) (А. Рогов) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(12, 5)$ ,  $(20, 5)$ ,  $(10, 7)$ ,  $(10, 10)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 63. Если при этом в куче оказалось не более 74 камня, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было пятнадцать камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 47$ .

#### Задание 19.

Известно, что Витя победил после первого неудачного хода Паши. Назовите минимальное  $S$ , при котором это возможно.

#### Задание 20.

Укажите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:



- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

**Задание 21**

Укажите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.