Семинар 14 [08.11.2022]

Метод Фурье.

Задачи

Задача 1

Решить граничную задачу

$$
\begin{gathered}
u_{xx} + u_{yy} = 0, \\
0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \\
u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u_y\Big|_{y=0} = Q_1, \quad u_x\big|_{x=a} = Q_2, \quad u_y\Big|_{y=b} = 0.
\end{gathered}
$$

Задача 2

Решить граничную задачу

$$
\begin{gathered}
u_{tt} = u_{xx} + \sin(\pi x)\, e^{-\gamma t}, \\
0 \le x \le 1, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.
\end{gathered}
$$

Задача 3

Решить граничную задачу

$$
\begin{gathered}
u_t = u_{xx} - \beta u + x(x-1), \\
0 \le x \le 1, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.
\end{gathered}
$$

Решения

Задача 1

Можно убедиться, что подстановка решения в виде произведения $u = X(x)Y(y)$ не позволяет удовлетворить краевой задаче в обще случае. Поэтому будем искать решение в виде суммы $u = X(x) + Y(y)$:

$$X'' + Y'' = 0, \quad \Rightarrow \quad X'' = 2\alpha, \quad Y'' = -2\alpha.$$

Имеем

$$X = \alpha x^2 + \beta_1 x + \gamma_1, \quad Y = -\alpha y^2 + \beta_2 y + \gamma_2.$$

Краевая задача

$$X'\Big|_{x=0} = 0, \quad Y'\Big|_{y=0} = Q_1, \quad X'\Big|_{x=a} = Q_2, \quad Y'\Big|_{y=b} = 0.$$

дает

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = Q_1, \quad 2\alpha a = Q_2, \quad \beta_2 = 2\alpha b.$$

В итоге

$$u = \frac{Q_2}{2a}\left(x^2 - y^2\right) + Q_1 y + u_0.$$

Причем, мы также получаем дополнительное условие $aQ_1 = bQ_2$, которое представляет из себя закон сохранения энергии.

Задача 2

Ищем частное решение в виде $u_{ч} = a\sin(\pi x)e^{-\gamma t}$, получаем

$$a = \frac{1}{\gamma^2 + \pi^2}.$$

Теперь имеем модифицированную граничную задачу на общее решение $u_{о}$:

$$u_{\text{o}tt} = u_{\text{o}xx},$$

$$0 \le x \le 1, \quad u_{\text{o}}(0,t) = u_{\text{o}}(1,t) = 0, \quad u_{\text{o}}(x,0) = -\frac{1}{\gamma^2 + \pi^2}\sin(\pi x), \quad u_{\text{o}t}(x,0) = \frac{\gamma}{\gamma^2 + \pi^2}\sin(\pi x).$$

Действуя, как на предыдущем семинаре, получаем

$$u_{\text{o}} = \frac{1}{\gamma^2 + \pi^2}\left(\frac{\gamma}{\pi}\sin(\pi t) - \cos(\pi t)\right)\sin(\pi x)$$

в итоге

$$u = \frac{1}{\gamma^2 + \pi^2}\left(\frac{\gamma}{\pi}\sin(\pi t) - \cos(\pi t) + e^{-\gamma t}\right)\sin(\pi x).$$

Замечание: можно заметить, что ответ опять выражается в виде ряда Фурье (из одного слагаемого) по x. Так получается, потому что система тригонометрических функций полна в для этой краевой задачи. Это значит, что, вообще говоря, решение таких задач можно сразу искать в виде разложения по Фурье гармоникам.

Задача 3

Указание: нужно искать решение в виде разложения в ряд Фурье

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)\sin(\pi n x) + b_n(t)\cos(\pi n x).$$