Самостоятельная работа к занятию 21

1. Найдите общее решение уравнения

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0.$$

2. Найдите общее решение уравнения

$$x^2 \ln x y'' - xy' + y = x \ln^2 x.$$

3. Решите уравнение, сделав подходящую замену $y = \rho(x) \cdot z(x)$.

$$(x^2+1)y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

4. Решите уравнение, сделав подходящую замену независимого переменного $t = \varphi(x)$.

$$y'' + y' + 4e^{-2x}y = 0.$$

5. Найдите частное решение уравнения в виде многочлена.

$$2(1-x^2)y'' + 3xy' + 3y = 0.$$

Найдите функцию $W(x)$. Какому уравнению первого порядка удовлетворяет второе частное решение? На каких интервалах определены и непрерывны оба частных решения?

Ответы и указания

1. *Указание:* подобрать решение в виде $y_1(x) = e^{ax}$. Второе решение построить, понизив порядок уравнения с помощью формулы Лиувилля. $W(x) = Cxe^{2x}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^x + C_2x^2e^x$

2. *Указание:* подобрать решение однородного уравнения в виде многочлена $y_1(x) = Ax + B$. Второе решение построить, понизив порядок уравнения с помощью формулы Лиувилля. $W(x) = C\ln x$.

Частное решение неоднородного уравнения построить методом вариации постоянных.

Ответ: $y(x) = C_1x + C_2(\ln x + 1) + x(\frac{1}{2}\ln^2 x - 1)$

3. *Указание:* $\rho(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению $z'' = 0$.

Ответ: $y(x) = \dfrac{C_1x + C_2}{x^2+1}$

4. *Указание:* замена $t = e^{-x}$ приводит к уравнению $\ddot{y} + 4y = 0$.

Ответ: $y(x) = C_1\sin(2e^{-x}) + C_2\cos(2e^{-x})$

5. $y_1 = x^3 - 2x$, $W(x) = C|x^2-1|^{3/4}$. Функция y_2 удовлетворяет уравнению $y'(x^3-2x) - y(3x^2-2) = C|x^2-1|^{3/4}$.

Обе функции определены и непрерывны на каждом из интервалов $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ $(1;+\infty)$