Излучение релятивистской частицы

Принятые обозначения:

O – начало неподвижной (и единственной в этой задаче) системы координат

P – точка наблюдения (в которой определяются $\varphi, \mathbf{A}, \mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$)

$\mathbf{r}_p$ – радиус-вектор точки наблюдения

$\mathbf{r}_e$ – радиус-вектор точечного заряда

$\mathbf{R}_e$ – радиус-вектор из точки с зарядом до точки наблюдения

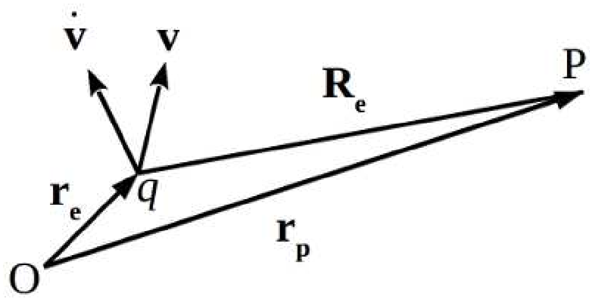
t – момент времени приема (в который определяются $\varphi, \mathbf{A}, \mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$)

t' – момент времени излучения (в который точечный заряд проходит через точку $\mathbf{r}_e$)

Дополнительно заданы:

скорость точечного заряда $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial t'}$

ускорение точечного заряда $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}$



Требуется определить $\mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}_p, t)$

Для решения задачи нам понадобятся 5 соотношений, для доказательства которых будет выделена отдельная страница:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t'}, \tag{1}$$

где $\varkappa = 1 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ (характеризует, насколько быстрее движется к приемнику сигнал по сравнению с источником). $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_e}{R_e}$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$.

$$\nabla = \nabla_1 - \frac{\mathbf{n}}{c\varkappa}\frac{\partial}{\partial t'}, \tag{2}$$

где $\nabla_1 = \sum\limits_{i=1,2,3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_{pi}}$, а ∇ - градиент, применяемый к функции переменных $\mathbf{r}_p$ и $t'(\mathbf{r}_p)$.

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial t'} = -(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \tag{3}$$

где $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}$ (не путать с $\frac{\partial}{\partial t}$).

$$\frac{\partial(\varkappa R_e)}{\partial t'} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{R_e} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + c\beta^2 \tag{4}$$

$$\nabla_1 \left(\frac{1}{\varkappa R_e}\right) = -\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\varkappa^2 R_e^2} \tag{5}$$

Вывод соотношений (1-5)

1). $t = t' + \dfrac{R_e}{c}$, где $R_e = \sqrt{\sum\limits_{i=1,2,3} (x_{pi} - x_{ei}(t'))^2}$

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}\left(t' + \frac{R_e(t')}{c}\right) = 1 + \frac{1}{2c}\cdot\frac{2\sum\limits_i (x_{pi} - x_{ei})\cdot\left(-\frac{\partial x_{ei}}{\partial t'}\right)}{\sqrt{\sum\limits_i (x_{pi} - x_{ei})^2}} = 1 - \frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c} = 1 - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}) = \varkappa$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t'}$$

2). Функция R_e зависит и от положения точки наблюдения $\mathbf{r_p}$, и от положения частицы $\mathbf{r_e}(t')$, которое в свою очередь является функцией t'. Изменение положения $\mathbf{r_p}$ ведет к изменению значения t'. То есть $t' = t'(\mathbf{r_p})$, а функция $R_e = R_e(\mathbf{r_p}, t'(\mathbf{r_p}))$. Но тогда компоненты градиента функции R_e вычисляются не как частные, а как *полные* производные по x_{pi}:

$$\frac{dR_e(\mathbf{r_p}, t'(\mathbf{r_p}))}{dx_{pi}} = \left.\frac{\partial R_e}{\partial x_{pi}}\right|_{x_{pj}, x_{pk}, t'(\mathbf{r_p})} + \left.\frac{\partial R_e}{\partial t'}\right|_{\mathbf{r_p}}\frac{\partial t'}{\partial x_{pi}}$$

Под вертикальной чертой стоят фиксированные переменные. Для градиента имеем

$$\nabla R_e = \nabla_1 R_e + \left(\left.\frac{\partial R_e}{\partial t'}\right|_{\mathbf{r_p}}\right)\nabla t'$$

где $\nabla_1 = \sum\limits_i \mathbf{e_i}\left.\frac{\partial R_e}{\partial x_i}\right|_{t'(\mathbf{r_p})}$. Различие между ∇_1 и ∇ состоит в том, что в первом случае частные производные вычисляются при фиксированном t', а во втором - нет. Теперь подействуем оператором ∇ на равенство $t = t' + \frac{R_e}{c}$ (учтем, что в соответствии с (1) $\frac{1}{c}\frac{\partial R_e}{\partial t'} = -(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})$):

$$0 = \nabla t' + \nabla_1\frac{R_e}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial R_e}{\partial t'}\nabla t' = \nabla t' + \mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\nabla t', \text{ откуда } \nabla t' = -\frac{\mathbf{n}}{\varkappa} \quad \text{и} \quad \nabla = \nabla_1 - \frac{\mathbf{n}}{c\varkappa}\frac{\partial}{\partial t'},$$

где ∇ применяется к любой функции переменных $\mathbf{r}_p$ и $t'(\mathbf{r}_p)$.

3). $\dfrac{\partial \varkappa}{\partial t'} = \dfrac{\partial}{\partial t'}(1 - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})) = -(\dot{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) \approx -(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})$

(учтено, что при $r_e \ll r_p$ слагаемым $(\dot{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})$ можно пренебречь).

4). $\dfrac{\partial(\varkappa R_e)}{\partial t'} = R_e\dfrac{\partial\varkappa}{\partial t'} + \varkappa\dfrac{\partial R_e}{\partial t'} = -R_e(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) - (1 - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}))(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) = -(\mathbf{R_e}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) + (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{v}) =$

$= -(\mathbf{R_e}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) + c\beta^2$

5). $\nabla_1\left(\dfrac{1}{\varkappa R_e}\right) = -\dfrac{1}{\varkappa^2 R_e^2}\nabla_1(\varkappa R_e) = -\dfrac{1}{\varkappa^2 R_e^2}\nabla_1\left(R_e - R_e\dfrac{(\mathbf{R_e}\cdot\boldsymbol{\beta})}{R_e}\right) = -\dfrac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\varkappa^2 R_e^2}$

Приступаем к вычислению полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Потенциалы Лиенара-Вихерта:

$$\varphi = \frac{q}{\varkappa R_e}, \quad \mathbf{A} = \frac{q}{\varkappa R_e}\boldsymbol{\beta} = \varphi\boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla_1\varphi + \frac{\mathbf{n}}{c\varkappa}\frac{\partial\varphi}{\partial t'} - \frac{1}{c\varkappa}\frac{\partial(\varphi\boldsymbol{\beta})}{\partial t'} = \frac{q}{\varkappa^2 R_e^2}(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{c\varkappa}(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\frac{\partial\varphi}{\partial t'} - \frac{\varphi}{c\varkappa}\dot{\boldsymbol{\beta}} =$$

$$= \frac{q}{\varkappa^2 R_e^2}(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{c\varkappa}(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\frac{q}{\varkappa^2 R_e^2}((\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{R_e}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) - c\beta^2) - \frac{q}{\varkappa R_e}\frac{1}{c\varkappa}\dot{\boldsymbol{\beta}}$$

Сгруппируем слагаемые, пропорциональные $\frac{1}{R_e}$ и $\frac{1}{R_e^2}$ соответственно.

$$\mathbf{E} = \frac{q}{c\varkappa^3 R_e}\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\cdot(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) - \varkappa\dot{\boldsymbol{\beta}}\} + \frac{q}{\varkappa^3 R_e^2}(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})(\varkappa + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}) - \beta^2) =$$

В фигурных скобках записана формула $\mathbf{bac}-\mathbf{cab}$ ($\mathbf{b}=\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{a}=\mathbf{n},\ \mathbf{c}=\dot{\boldsymbol{\beta}},\ \varkappa=(\mathbf{ab})$, поэтому

$$\mathbf{E} = \frac{q}{c\varkappa^3 R_e}\{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]\} + \frac{q}{\varkappa^3 R_e^2}(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}\boldsymbol{\beta} - \beta^2) = \frac{q}{c\varkappa^3 R_e}\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}] + \frac{q}{\gamma^2\varkappa^3 R_e^2}(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})$$

Электрическое поле имеет радиальную составляющую, которая при малых β переходит в кулоновское поле частицы в том ее положении, которое она занимает в момент времени t'.

Магнитное поле можно вычислить как $\nabla\times\mathbf{A}$, но проще и содержательнее по физическому смыслу записать как

$$\mathbf{H} = \mathbf{n}\times\mathbf{E} = -\frac{q}{c\varkappa^3 R_e}\mathbf{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{q}{c\varkappa^3 R_e}[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{n}](\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) - \frac{q}{\gamma^2\varkappa^3 R_e^2}\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}$$

Магнитное поле не имеет радиальной компоненты.

Слагаемые, содержащие ускорение $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, соответствуют полю излучения, которое в общем случае зависит от направлений векторов $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ и $\boldsymbol{\beta}$. В случае $\beta \ll 1$ поле излучения принимает вид дипольного излучения в волновой зоне.