# Гл. 7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах.

## § 7.1. Линейные операторы и их общие свойства.

Всюду ниже мы подразумеваем, что символами $H$, $H_1$ и $H_2$ обозначены произвольные гильбертовы пространства, т. е. линейные пространства со скалярным произведением, полные относительно нормы, задаваемой с помощью формулы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

## Определение 7.1 (линейного оператора)

Пусть $H$ и $H_1$ — гильбертовы пространства над одним полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Линейным оператором, действующим из пространства $H$ в пространство $H_1$ называется отображение $A : H \to H_1$, удовлетворяющее условию

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

для любых чисел $\alpha$ и $\beta$ из поля $\mathbb{K}$ и любых векторов $x$ и $y$ пространства $H$.

Отметим, что если аргумент линейного оператора обозначен одной буквой, то его не заключают в скобки, т. е. вместо $A(x)$ пишут $Ax$. Так как мы в основном будем рассматривать только линейные операторы, поэтому для краткости, когда это не вызывает недоразумений, слово «линейный» будем опускать, и термин «оператор» будет обозначать линейный оператор.

## Пример 7.2 (линейных операторов)

1) Определим оператор $I : H \to H$ с помощью формулы $Ix = x$ для всех $x \in H$. Другими словами, оператор $I$ переводит каждый вектор пространства $H$ в себя. Оператор $I$ называется единичным или тождественным.
2) Зададим оператор $0 : H \to H_1$ формулой $0x = 0 \in H_1$ для всех $x \in H$. Словами можно сказать, что оператор $0$ переводит каждый вектор пространства $H$ в нулевой вектор пространства $H_1$. Оператор $0$ называется нулевым оператором. [Предостережение. Обратите внимание, что символ $0$ теперь может обозначать либо число нуль, либо нулевой вектор, либо нулевое подпространство, либо нулевой оператор.]

3) Пусть $H$ и $H_1$ — конечномерные гильбертовы пространства и $A : H \to H_1$ — линейный оператор.
Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ некоторый базис в $H$ и через $y_1, \ldots, y_m$ некоторый базис в $H_1$. Разложив произвольный вектор $x \in H$ по базису $x_1, \ldots, x_n$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

и воспользовавшись линейностью оператора $A$, получим

$$Ax = A\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A x_j.$$

Далее, каждый из векторов $Ax_j$ лежит в пространстве $H_1$ и поэтому может быть разложен по базису $y_1, \dots, y_m$:

$$Ax_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k.$$

Значит,

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Ax_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Big(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j\Big) y_k. \qquad (1)$$

Совокупность чисел $(a_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ называется матрицей оператора $A$.

Предыдущие рассуждения показывают, что если базисы пространств $H$ и $H_1$ фиксированы, то каждому оператору $A : H \to H_1$ соответствует некоторая матрица $(a_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.
Вместе с тем из формулы (1) немедленно вытекает, что если в пространствах $H$ и $H_1$ фиксированы базисы, то каждой $m \times n$ матрице $(a_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ соответствует некоторый линейный оператор $A$. Таким образом, мы заново обсудили уже известный вам из линейной алгебры факт, что операторы и матрицы находятся во взаимнооднозначном соответствии.
Наконец, перепишем формулу (1) в более привычном «матричном» виде. Для этого обозначим вектор $Ax$ пространства $H_1$ через $y$ и разложим его по базису $y_1, \dots, y_m$:

$$Ax = y = \sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k.$$

Сравнивая это выражение с формулой (1), получаем

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j) y_k.$$

Поскольку векторы $y_1, \ldots, y_m$ линейно независимы, то коэффициенты при векторе $y_k$ в левой и правой частях последней формулы должны совпадать, т. е.

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j, \quad k = 1, \ldots, m;$$

или

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

4) Если $H$ — гильбертово пространство и $S$ — его замкнутое подпространство, то, как известно, $H$ представляет собой прямую сумму $S$ и его ортогонального дополнения $S^{\perp}$, т. е. всякий вектор $x \in H$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде

$$x = y + z,$$

где $y \in S$, $z \in S^{\perp}$. Определим оператор $P : H \to H$ с помощью формулы $Px = y$. Он линеен и называется оператором ортогонального проектирования пространства $H$ на подпространство $S$.

5) В гильбертовом пространстве $L_2([a,b])$ определим оператор, сопоставляющий функции $f \in L_2([a,b])$ новую функцию $Af$, определённую с помощью формулы

$$(Af)(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)\,ds,$$

где $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ — некоторая фиксированная непрерывная функция двух переменных. Оператор $A$ называется **интегральным**. Мы исследуем его более подробно, когда будем изучать интегральные уравнения.

**Упражнение 7.3**

Проверить линейность операторов из примера 7.2.

## Предложение 7.4 (о линейной комбинации и произведении операторов)

1) *Если* $A : H \to H_1$ *и* $B : H \to H_1$ *— линейные операторы, то для любых чисел* $\alpha$ *и* $\beta$ *отображение* $\alpha A + \beta B : H \to H_1$, *заданное формулой*

$$(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx, \tag{2}$$

*является линейным оператором.*
*Если* $\beta = 0$, *то формула* (2) *определяет операцию умножения оператора* $A$ *на число* $\alpha$, *а если* $\alpha = \beta = 1$, *то — операцию сложения операторов* $A$ *и* $B$. *Легко видеть, что эти операции превращают множество всех линейных операторов, действующих из* $H$ *в* $H_1$, *в линейное пространство. При этом нулевым «вектором» будет нулевой оператор, а «вектором», противоположным «вектору»* $A$ *будет оператор* $(-A)$.

2) *Если* $A : H \to H_1$ *и* $B : H_1 \to H_2$ *— линейные операторы, то отображение* $BA$*, действующее из* $H$ *в* $H_2$*, и заданное с помощью формулы*

$$(BA)x = B(Ax),$$

*является линейным оператором и называется* ***произведением операторов*** $A$ *и* $B$*.*

**Упражнение 7.5**

Доказать предложение 7.4

## § 7.2. Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора

### Определение 7.6 (непрерывного оператора в точке)

Оператор $A : H \to H_1$ называется **непрерывным в точке** $x_0 \in H$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in H$, удовлетворяющих неравенству $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$.

### Замечание

Другими словами это же определение можно выразить так: оператор $A : H \to H_1$ непрерывен в точке $x_0$, если из $x_n \to x_0$ вытекает, что $Ax_n \to Ax_0$ при $n \to \infty$.

### Определение 7.7 (непрерывного оператора)

Оператор $A : H \to H_1$ называется **непрерывным**, если он непрерывен в каждой точке пространства $H$.

## Определение 7.8 (ограниченного множества)

Множество $X \subset H$ называется ограниченным, если оно содержится в шаре конечного радиуса, т. е. если существует положительное число $R$ такое, что для всех $x \in X$ справедливо неравенство $\|x\| < R$.

## Определение 7.9 (ограниченного оператора)

Оператор $A : H \to H_1$ называется ограниченным, если он отображает всякое ограниченное в $H$ множество во множество, ограниченное в пространстве $H_1$.

**Теорема 7.10 (об эквивалентных условиях для непрерывности линейного оператора)**

*Если $A : H \to H_1$ — линейный оператор, то следующие утверждения эквивалентны:*
1) *существует точка $x_0 \in H$, в которой оператор $A$ непрерывен;*
2) *оператор $A$ непрерывен;*
3) *оператор $A$ ограничен;*
4) *величина $\sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$ конечна.*

**Доказательство теоремы 7.10.** 1) $\Rightarrow$ 2) Допустим, что $A$ непрерывен в точке $x_0 \in H$. Выберем любой вектор $x_1 \in H$ и убедимся, что $A$ непрерывен в точке $x_1$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $A$ непрерывен в точке $x_0$, то найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in H$, удовлетворяющих неравенству $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Тогда для всех $y \in H$, удовлетворяющих неравенству $\|y - x_1\| < \delta$, мы имеем $\|(y - x_1 + x_0) - x_0\| < \delta$, а значит $\|A(y - x_1 + x_0) - Ax_0\| < \varepsilon$. Воспользовавшись линейностью оператора $A$, можем переписать последнее неравенство в виде

$$\|A(y - x_1 + x_0) - Ax_0\| = \|Ay - Ax_1 + Ax_0 - Ax_0\| = \|Ay - Ax_1\| < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|y - x_1\| < \delta$ вытекает $\|Ay - Ax_1\| < \varepsilon$. Значит оператор $A$ непрерывен в точке $x_1$, а поскольку точка $x_1$ выбрана произвольно, то оператор $A$ непрерывен.

2) $\Rightarrow$ 3) Поскольку оператор $A$ непрерывен, то он непрерывен в нуле, а значит найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in H$, удовлетворяющих неравенству $\|x\| < \delta$, справедливо неравенство $\|Ax\| < 1$. Пусть теперь $X$ — ограниченное множество в $H$, т. е. такое множество, что существует положительное число $0 < R < +\infty$ такое, что для любого вектора $x \in X$ выполняется неравенство $\|x\| < R$. Поскольку образ $AX$ множества $X$ под действием оператора $A$ состоит из векторов $y \in H_1$ таких, что существует $x \in X$, для которого выполняется равенство $y = Ax$, то для любого $y \in AX$ имеем

$$\|y\| = \|Ax\| = \left\|\frac{R}{\delta}A\left(\frac{\delta}{R}x\right)\right\| = \frac{R}{\delta}\left\|A\left(\frac{\delta}{R}x\right)\right\| \leq \frac{R}{\delta},$$

поскольку

$$\left\|\frac{\delta}{R}x\right\| < \frac{\delta}{R}R = \delta.$$

Значит, множество $AX$ содержится в шаре радиуса $R/\delta$ с центром в нуле пространства $H_1$ и поэтому ограничено.

3) $\Rightarrow$ 4) Пусть оператор $A$ ограничен. Поскольку замкнутый единичный шар $\|x\| \leq 1$ пространства $H$ ограничен, то его образ под действием оператора $A$ также ограничен, а значит — содержится в шаре некоторого конечного радиуса $R$. Поэтому для любого $x \in H$, удовлетворяющего неравенству $\|x\| \leq 1$, имеем $\|Ax\| \leq R$. Следовательно,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq R < +\infty.$$

4) $\Rightarrow$ 1) Пусть
$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq R < +\infty.$$
Зададим $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon / R > 0$. Тогда для любого $x \in H$, удовлетворяющего неравенству $\|x\| < \delta$, получаем
$$\|Ax\| = \delta \Big\| A\Big(\frac{x}{\delta}\Big) \Big\| \leq \delta \sup_{\|y\|\leq 1} \|Ay\| \leq \frac{\varepsilon}{R} R = \varepsilon.$$
Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|x\| < \delta$ следует неравенство $\|Ax\| \leq \varepsilon$. Значит оператор $A$ непрерывен в точке $0$.
Теорема доказана.

Из теоремы 7.10 следует, что величина $\sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$ тесно связана с непрерывностью оператора $A$ и поэтому заслуживает более пристального изучения.

**Лемма 7.11 (о величине $\sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$)**

*Для любого линейного оператора $A$ справедливы равенства*

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

**Доказательство леммы 7.11.**
Введём обозначения

$$\alpha = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|; \quad \beta = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad \text{и} \quad \gamma = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

и последовательно докажем цепочку неравенств $\alpha \ge \beta \ge \gamma \ge \alpha$. Отметим только, что каждая из величин $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ может равняться не только неотрицательному вещественному числу, но и плюс бесконечности.
$\alpha \ge \beta$. Это неравенство очевидно, поскольку в обеих частях неравенства супремум берётся от одной и той же величины $\|Ax\|$, но при вычислении $\alpha$ множество допустимых значений $x$ шире.

$\beta \geq \gamma$. Чтобы убедиться в справедливости этого неравенства, заметим, что для любого $x \neq 0$ мы имеем

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|Ax\| = \beta,$$

а значит, и супремум выражения $\|Ax\|/\|x\|$, вычисленный по всем $x \neq 0$, не превосходит $\beta$, т. е. справедливо неравенство $\gamma \leq \beta$, что и требовалось доказать.

$\gamma \geq \alpha$. Чтобы проверить это неравенство, заметим, что для любого $x \neq 0$ и такого, что $\|x\| \leq 1$, имеем

$$\|Ax\| \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \gamma.$$

Если же $x = 0$, то $\|Ax\| = \|0\| = 0 \leq \gamma$. Поэтому $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \gamma$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

## Замечание 7.12

Для любого линейного оператора $A$ справедливо также равенство

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\|.$$

## Определение 7.13 (нормы оператора)

Общее значение выражений

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{3}$$

называется **нормой оператора** $A$ и обозначается через $\|A\|$.

### Лемма 7.14 (о норме оператора)

*Если* $A$ *и* $B$ *— линейные операторы, а* $\lambda$ *— число, то имеют место соотношения*

1) $\|A\| \geq 0$, *причём* $\|A\| = 0$ *если и только если* $A = 0$;
2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$;
3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ *для всех* $x$;
5) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$;
6) $\big|\|A\| - \|B\|\big| \leq \|A - B\|$.

### Упражнение 7.15

Доказать лемму 7.14

## § 7.3. Сходимость операторов

**Определение 7.16 (сходимости операторов)**

Говорят, что последовательность линейных операторов $A_n : H \to H_1$ сходится к линейному оператору $A : H \to H_1$, если числовая последовательность $\|A - A_n\|$ стремится к нулю при $n \to \infty$. В этом случае пишут $A_n \to A$ при $n \to \infty$ или $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

### Предложение 7.17 (о свойствах сходящихся операторов)

1) *Если* $A_n \to A$ *и* $B_n \to B$ *при* $n \to \infty$, *то для любых чисел* $\alpha$ *и* $\beta$ *имеем* $\alpha A_n + \beta B_n \to \alpha A + \beta B$ *при* $n \to \infty$.
2) *Если* $A_n \to A$ *при* $n \to \infty$ *и каждый из операторов* $A_n$ *ограничен, то оператор* $A$ *также ограничен и числовая последовательность* $\|A_n\|$ *сходится к числу* $\|A\|$ *при* $n \to \infty$.

### Упражнение 7.18

Доказать предложение 7.17

**Теорема 7.19 (о сходимости фундаментальной последовательности операторов)**

*Если $H$ и $H_1$ — гильбертовы пространства, то всякая фундаментальная последовательность линейных непрерывных операторов $A_n : H \to H_1$ сходится.*

**Доказательство теоремы 7.19.** Поскольку последовательность $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ фундаментальна, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $n(\varepsilon)$ так, что для всех $m, n \geq n(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\|A_m - A_n\| < \varepsilon$. Последнее означает, что для всех $x \in H$ имеем

$$\|A_m x - A_n x\| \leq \varepsilon \|x\|. \tag{4}$$

Из (4) следует, что последовательность $A_1 x, A_2 x, \dots, A_n x, \dots$ векторов пространства $H_1$ фундаментальна. Значит, ввиду полноты пространства $H_1$, эта последовательность сходится к некоторому вектору из $H_1$, который мы обозначим через $Ax$: $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ для каждого $x \in H$.

Тем самым мы построили некоторое отображение $A : H \to H_1$, сопоставляющее вектору $x$ пространства $H$ вектор $Ax$ пространства $H_1$. Убедимся, что $A$ — линейный оператор и $A_n \to A$ при $n \to \infty$.
В самом деле, используя линейность операторов $A_n$ и свойства сходящихся последовательностей векторов пространства $H_1$, для любых чисел $\alpha, \beta$ и любых векторов $x, y$ пространства $H$ будем иметь

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \left[\alpha A_n x + \beta A_n y\right] =$$
$$= \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha A x + \beta A y,$$

что и доказывает линейность оператора $A$.

Далее, в неравенстве (4) перейдём к пределу при $m \to \infty$, когда $n$ фиксировано. Получим, что для всех $x \in H$ выполнено неравенство $\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon \|x\|$, а значит — $\|A - A_n\| \leq \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon$ это означает, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

## Определение 7.20 (операторного ряда)

Пусть для каждого натурального числа $n$ оператор $A_n : H \to H_1$ линеен и непрерывен. Операторным рядом называется формальное выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{5}$$

При этом частичной суммой ряда (5) называется конечная сумма $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} A_n$, а ряд (5) называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм. Сам же предел последовательности частичных сумм называется суммой исходного ряда и обозначается через $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$.

### Предложение 7.21 (о свойствах сходящихся рядов операторов)

1) *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n = B$, *то для любых чисел* $\alpha$ *и* $\beta$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n)$ *сходится и имеет в качестве суммы оператор* $\alpha A + \beta B$.

2) *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ *сходится, то операторный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *также сходится и*

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|.$$

### Упражнение 7.22

Доказать предложение 7.21

## § 7.4. Обратимость операторов. Обратный оператор. Теорема Неймана

**Определение 7.23 (обратимости оператора)**

Линейный оператор $A : H \to H_1$ называется обратимым, если для любого $y \in H_1$ уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения.

**Определение 7.24 (образа оператора, определенного на всем пространстве $H$)**

Для оператора $A : H \to H_1$ совокупность всех векторов $y \in H_1$, для каждого из которых существует вектор $x \in H$ такой, что $y = Ax$, называется образом оператора $A$ и обозначается $\operatorname{im} A$.

Ясно, что образ линейного оператора есть линейное подпространство.

## Определение 7.25 (обратного оператора)

Если оператор $A$ обратим, то каждому вектору $y \in \operatorname{im} A$ можно поставить в соответствие единственный вектор $x \in H$, являющийся решением уравнения $Ax = y$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется **обратным** к $A$ и обозначается $A^{-1}$.

## Замечание 7.26

Подчеркнем, что обратный оператор $A^{-1}$ определён, вообще говоря, не во всём пространстве $H_1$, а лишь на некотором его подпространстве $\operatorname{im} A$. Для симметрии было бы логично и первоначальный оператор $A$ считать определённым не обязательно во всем $H$, а лишь на некотором его подпространстве. Отметим, что определение линейности оператора в этом случае легко обобщается.

## Определение 7.27 (области определения оператора)

Для оператора $A$, действующего только на некоторых векторах пространства $H$ со значениями в пространстве $H_1$, совокупность всех тех векторов $x \in H$, на которые оператор $A$ действует, называется областью определения оператора $A$ и обозначается $\operatorname{dom} A$.

## Замечание 7.28

Даже для оператора $A$, имеющего область определения $\operatorname{dom} A \subset H$, которая не совпадает со всем пространством $H$, т. е. $\operatorname{dom} A \neq H$, мы будем использовать запись $A : H \to H_1$.

## Определение 7.29 (образа оператора с обл. определения $\operatorname{dom} A$)

Для оператора $A : H \to H_1$ с областью определения $\operatorname{dom} A$ совокупность всех векторов $y \in H_1$, для каждого из которых существует вектор $x \in \operatorname{dom} A$ такой, что $y = Ax$, называется образом оператора $A$ и также обозначается $\operatorname{im} A$.

## Предложение 7.30 (свойства обратного оператора)

1) $\operatorname{dom} A^{-1} = \operatorname{im} A$, $\operatorname{im} A^{-1} = \operatorname{dom} A$.
2) *Если оператор* $A : H \to H_1$ *линеен и обратим, то* $A^{-1}$ *тоже линеен.*
3) *Если каждый из операторов* $A : H \to H_1$ *и* $B : H_1 \to H_2$ *обратим, то оператор* $BA$ *обратим и* $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
4) *Если линейные операторы* $A : H \to H_1$ *и* $B : H_1 \to H$ *таковы, что* $AB = I_{H_1}$ *и* $BA = I_H$, *то оператор* $A$ *обратим и* $B = A^{-1}$.
[*Здесь символами* $I_{H_1}$ *и* $I_H$ *обозначены тождественные операторы пространств* $H_1$ *и* $H$ *соответственно*].

## Упражнение 7.31

Доказать предложение 7.30

## Теорема 7.32 (Неймана)

*Пусть* $H$ *— гильбертово пространство,* $A : H \to H$ *— линейный оператор такой, что* $\operatorname{dom} A = H$ *и* $\|A\| < 1$*. Тогда оператор* $I - A$ *обратим, причём обратный ограничен, определён во всём пространстве* $H$ *и имеет место равенство*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

*где использованы обозначения* $A^0 = I$ *— тождественный оператор и* $A^{n+1} = AA^n$*.*

**Доказательство теоремы 7.32.** Поскольку $\|A^n\| = \|AA^{n-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{n-1}\| \leq \ldots \leq \|A\|^n$ и $\|A\| < 1$, то числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\|$$

сходится. Воспользовавшись свойством 2) предложения 7.21, отсюда заключаем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \tag{6}$$

сходится и представляет собой ограничений линейный оператор, определённый во всём пространстве $H$.

Далее, для любого натурального числа $N$ мы имеем

$$(I - A)\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N}(A^n - A^{n+1}) = I - A^{N+1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $N \to \infty$ и учитывая, что $\|A^{N+1}\| \leq \|A\|^{N+1} \to 0$ при $N \to \infty$, получаем

$$(I - A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = I. \tag{7}$$

Аналогично доказывается равенство

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\Big)(I - A) = I. \tag{8}$$

На основании свойства 4) предложения 7.30, из равенств (7) и (8) вытекает, что оператор $I - A$ обратим и обратным к нему является оператор (6).
Теорема доказана.

## Замечание 7.33

Напомним, что формула

$$(1 - z)^{-1} = \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

для суммы геометрической прогрессии ранее была известна вам для действительных и комплексных чисел, для которых $|z| < 1$. Теорема Неймана показывает, что эта формула остаётся верной если в качестве аргумента взять оператор $A$ такой, что $\|A\| < 1$.

## § 7.5. Спектр оператора

С понятием спектра конечномерного оператора (или, что тоже самое — квадратной матрицы) вы знакомы по курсу линейной алгебры. Как и в упомянутом курсе мы будем считать, что всюду, где речь идёт о спектре оператора, подразумевается, что этот оператор определён в комплексном гильбертовом пространстве.

Пусть ограниченный линейный оператор $A : H \to H$ задан в (вообще говоря, бесконечномерном) комплексном гильбертовом пространстве $H$. Для фиксированных $\lambda \in \mathbb{C}$ и $y \in H$ рассмотрим уравнение

$$Ax - \lambda x = y \tag{9}$$

или

$$(A - \lambda I)x = y.$$

Ясно, что существование, единственность и прочие свойства решения уравнения (9) определяются свойствами обратного к $A - \lambda I$ оператора. В первую очередь речь идёт о существовании оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ и о его области определения. В зависимости от этих свойств, для $(A - \lambda I)^{-1}$ возможны только следующие четыре взаимоисключающие ситуации:
1) оператор $A - \lambda I$ не обратим;
2) оператор $A - \lambda I$ обратим, причём обратный оператор определён во всём пространстве $H$;
3) оператор $A - \lambda I$ обратим, но обратный оператор определен не во всём пространстве $H$, а лишь на некотором плотном в $H$ подпространстве;
4) оператор $A - \lambda I$ обратим, причём область определения обратного оператора не плотна в $H$.

**Определение 7.34 (регулярных значений, резольвенты, резольвентного множества $\rho(A)$)**

Если комплексное число $\lambda$ таково, что для него имеет место случай 2), то число $\lambda$ называется регулярным значением оператора $A$. При этом оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, определённый во всём пространстве $H$, называется резольвентой оператора $A$ и обозначается $R_\lambda(A)$. Множество всех регулярных значений оператора $A$ называется резольвентным множеством и обозначается $\rho(A)$.

Следующая теорема показывает, что резольвента автоматически является ограниченным оператором.

**Теорема 7.35 (Банаха об обратном операторе)**

*Если $B : H \to H_1$ — линейный ограниченный обратимый оператор и $\operatorname{dom} B^{-1} = H$, то обратный оператор $B^{-1}$ ограничен.*

Без доказательства.

Ограниченность резольвенты имеет принципиальное значение в самых разных вопросах, поскольку она позволяет обосновать следующее утверждение, означающее непрерывную зависимость решения уравнения (9) от правой части: если $\lambda \in \mathbb{C}$ — регулярное значение оператора $A$ и последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ векторов пространства $H$ такова, что $y_n \to y_0 \in H$ при $n \to \infty$, причём для каждого $n$ вектор $x_n$ является решением уравнения $(A - \lambda I)x = y_n$, то последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходится к некоторому вектору $x_0 \in H$, который удовлетворяет уравнению $(A - \lambda I)x = y_0$.

Доказательство основано на следующем соотношении

$$\|x_n - x_m\| = \|(A - \lambda I)^{-1} y_n - (A - \lambda I)^{-1} y_m\| = \tag{10}$$

$$= \|(A - \lambda I)^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|(A - \lambda I)^{-1}\| \cdot \|(y_n - y_m)\|. \tag{11}$$

Из него следует, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ фундаментальна, а значит — сходится. Обозначая её предел через $x_0$ и переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношении $(A - \lambda I)x_n = y_n$, получим $(A - \lambda I)x_0 = y_0$, что и требовалось.

Вернёмся к перечисленным выше ситуациям 1)–4).

**Определение 7.36 (спектра $\sigma(A)$)**

Совокупность всех комплексных чисел $\lambda$, не являющихся регулярными значениями оператора $A$, называется **спектром** оператора $A$ и обозначается через $\sigma(A)$.

Ясно, что если $\lambda \in \sigma(A)$, то с решением уравнения (9) возникают проблемы: либо оно имеет неединственное решение, либо оно разрешимо не для всякой правой части, либо нет непрерывной зависимости от правой части.

### Определение 7.37 (собственного числа, собственного вектора, точечного спектра $\sigma_p(A)$)

Если комплексное число $\lambda$ таково, что для него имеет место случай 1), то в пространстве $H$ существует ненулевой вектор $x$ такой что $(A - \lambda I)x = 0$ или, что то же самое, $Ax = \lambda x$. В таком случае число $\lambda$ называют собственным значением оператора $A$, а вектор $x$ — собственным вектором оператора $A$, отвечающим собственному значению $\lambda$. Совокупность всех собственных значений оператора $A$ называют точечным спектром оператора $A$ и обозначают через $\sigma_p(A)$.

### Определение 7.38 (непрерывного спектра $\sigma_c(A)$)

Совокупность тех комплексных чисел $\lambda$, для которых имеет место случай 3), называют непрерывным спектром оператора $A$ и обозначают через $\sigma_c(A)$.

### Определение 7.39 (остаточного спектра $\sigma_r(A)$)

Совокупность тех комплексных чисел $\lambda$, для которых имеет место случай 4), называют остаточным спектром оператора $A$ и обозначают через $\sigma_r(A)$.

### Замечание 7.40

Подчеркнём, что если $\lambda$ принадлежит непрерывному или остаточному спектру, то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ хотя и существует, но не называется резольвентой.

## Замечание 7.41

Отметим, что если пространство $H$ конечномерно, то случаи 3) и 4) невозможны. В самом деле, если $n \times n$ матрица, соответствующая оператору $A - \lambda I$ обратима, то обратная к ней матрица задаёт оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ сразу во всём пространстве. Поэтому в конечномерном пространстве спектр оператора сводится к точечному спектру, с которым вы и работали в курсе линейной алгебры.

## Замечание 7.42

К делению спектра на части (точечный, непрерывный и остаточный) следует относиться философски. Бывают физические задачи, при решении которых нет нужды, например, различать случаи 3) и 4), а бывают и такие задачи, для описания, решения которых целесообразно ещё более детализировать структуру спектра (например, разбить каждый из случаев 3) и 4) на два в зависимости от того, ограничен оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ в своей области определения или нет). Этим объясняется некоторый встречающийся в литературе разнобой в терминологии при определении частей спектра.

### Предложение (о свойствах спектра)

1) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$;
$\sigma_p(A) \cap \sigma_c(A) = \sigma_c(A) \cap \sigma_r(A) = \sigma_r(A) \cap \sigma_p(A) = \emptyset$.
2) *Спектр ограниченного оператора $A$ содержится в замкнутом круге на комплексной плоскости радиуса $\|A\|$ с центром в нуле.*
3) *Спектр ограниченного оператора $A$ есть замкнутое множество на комплексной плоскости.*

**Доказательство предложения о свойствах спектра.**
1) Доказательство очевидно.
2) Для доказательства достаточно проверить, что если $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda$ является регулярным значением оператора $A$. В самом деле, в этом случае

$$\|\frac{1}{\lambda}A\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$$

и, на основании теоремы Неймана, получаем, что оператор $A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)$ обратим, причём обратный оператор ограничен и определён во всём пространстве. Следовательно, $\lambda$ — регулярное значение.

3) Для доказательства достаточно проверить, что дополнение к спектру — резольвентное множество $\rho(A)$ открыто. Фиксируем произвольное регулярное значение $\lambda_0 \in \rho(A)$ оператора $A$. Тогда оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ определён во всём пространстве $H$ и ограничен. Подберём положительное число $\varepsilon$ так, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$. Тогда для любого комплексного числа $\lambda$, удовлетворяющего неравенству $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ будем иметь

$$(A - \lambda I)^{-1} = \big(A - \lambda_0 I - (\lambda_0 - \lambda) I\big)^{-1} = \tag{12}$$

$$= \big\{(A - \lambda_0 I)\big[I - (\lambda_0 - \lambda)(A - \lambda_0 I)^{-1}\big]\big\}^{-1} = \tag{13}$$

$$= \big[I - (\lambda_0 - \lambda)(A - \lambda_0 I)^{-1}\big]^{-1}(A - \lambda_0 I)^{-1}. \tag{14}$$

Левый оператор в последней строке этого равенства определён во всём пространстве $H$ и ограничен в силу теоремы Неймана, поскольку
$\|(\lambda_0-\lambda)(A-\lambda_0 I)^{-1}\|=|\lambda_0-\lambda|\cdot\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|\leq\varepsilon\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|<1$.
Правый оператор определён во всём пространстве $H$ и ограничен по предположению. Значит и оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определён во всём пространстве $H$ и ограничен, т. е. $\lambda$ — регулярное значение. Таким образом мы видим, что для всякого регулярного значения $\lambda_0$ существует круг положительного радиуса $\varepsilon$ с центром в $\lambda_0$, целиком содержащийся в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора $A$. Следовательно, это множество открыто.
Предложение доказано.

## § 7.6. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса. Бра- и кет-векторы

**Определение 7.43 (линейного функционала)**

Линейным функционалом в гильбертовом пространстве $H$ называется линейный оператор, отображающий $H$ в поле скаляров гильбертого постранства.

**Пример 7.44**

Наиболее важный пример линейного функционала строится следующим образом: если $x_0$ — фиксированный вектор гильбертова пространства $H$, то формула $f(x) = (x, x_0)$ задаёт линейный функционал на $H$.

### Замечание 7.45

Поскольку линейный функционал является оператором, то для него определено понятие непрерывности, нормы и справедливы все свойства операторов, установленные в предыдущих параграфах. Мы не будем их здесь повторять, а остановимся на специфических свойствах линейных функционалов.

### Определение 7.46 (ядра функционала)

Ядром линейного функционала $f$, определённого в $H$, называется совокупность всех векторов $x \in H$, для которых $f(x) = 0$. Ядро функционала $f$ обозначается через $\ker f$.

### Определение 7.47 (коразмерности подпространства)

Коразмерностью подпространства $S$ в пространстве $H$ называется размерность его ортогонального дополнения $S^{\perp}$.

**Предложение 7.48 (свойства линейных функционалов)**

1) *Если $f$ — линейный функционал в $H$, то ядро $\ker f$ является подпространством в $H$.*
2) *Если $f$ — ненулевой непрерывный функционал, то коразмерность его ядра равна единице.*
3) *Линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.*

**Упражнение 7.49**

Доказать предложение 7.48

### Определение 7.50 (сопряжённого пространства)

Множество непрерывных линейных функционалов, определённых в гильбертовом пространстве $H$, называется пространством, **сопряжённым** к $H$, и обозначается через $H^*$.

### Упражнение 7.51

Проверить, что $H^*$ является линейным пространством.

Важнейшую информацию о структуре $H^*$ даёт следующая

**Теорема 7.52 (теорема Ф. Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала)**

*Пусть $H$ — гильбертово пространство. Тогда*
1) *для всякого непрерывного линейного функционала $f$ на $H$ существует единственный вектор $x_0 \in H$ такой, что*

$$f(x) = (x, x_0) \tag{15}$$

*для всех $x \in H$, причём $\|f\| = \|x_0\|$;*
2) *если $x_0 \in H$, то формула (15) определяет линейный непрерывный функционал на $H$ такой, что $\|f\| = \|x_0\|$.*

**Доказательство теоремы 7.52.** Начнём с 2). Ввиду линейности скалярного произведения по первому аргументу, ясно, что при любом $x_0 \in H$ формула (15) определяет линейный функционал на $H$. Поскольку на основании неравенства Коши — Буняковского имеем $|f(x)| = |(x, x_0)| \leq \|x\| \cdot \|x_0\|$, то норма $f$ не превосходит $\|x_0\|$, а значит, $f$ непрерывен. Однако, $|f(x_0)| = |(x_0, x_0)| = \|x_0\|^2$ и, следовательно, $\|f\| = \|x_0\|$.

Доказательство 1) начнём с того, что убедимся в существовании нужного вектора $x_0$.
Поскольку функционал $f$ непрерывен, то его ядро $\ker f$ замкнуто и, следовательно, всё пространство $H$ представляется в виде прямой суммы ядра $\ker f$ и его ортогонального дополнения $(\ker f)^{\perp}$, т. е. $H = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}$. Последнее означает, что каждый вектор $x \in H$ может быть единственным образом представлен в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \ker f$, $x_2 \in (\ker f)^{\perp}$.

Если $f = 0$, то $\ker f = H$, $(\ker f)^{\perp} = \{0\}$ и, положив $x_0 = 0$, будем иметь $f(x) = 0 = (x, x_0)$ для всех $x \in H$.
Если $f \neq 0$, то $\ker f \neq H$, а ортогональное дополнение к ядру $(\ker f)^{\perp}$ не сводится к нулевому вектору и имеет размерность $1$. Фиксировав вектор $x_3 \in (\ker f)^{\perp}$ единичной длины видим, что для любого $x_2 \in (\ker f)^{\perp}$ найдётся число $\alpha$ такое, что $x_2 = \alpha x_3$, а значит, для любого вектора $x \in H$ найдутся вектор $x_1 \in \ker f$ и число $\alpha$ такие, что $x = x_1 + \alpha x_3$. Следовательно, для любого $x \in H$ имеем

$$f(x) = f(x_1 + \alpha x_3) = f(x_1) + \alpha f(x_3) = \alpha f(x_3) = \tag{16}$$

$$= f(x_3)(x_1, x_3) + \alpha (f(x_3) x_3, x_3) = \tag{17}$$

$$= (x_1 + \alpha x_3, \overline{f(x_3)} x_3) = (x, x_0), \tag{18}$$

где введено обозначение $x_0 = \overline{f(x_3)} x_3$. Существование вектора $x_0$ доказано.

Единственность вектора $x_0$ докажем от противного. Допустим, что нашлось два вектора $x_0$ и $\tilde{x}_0$ таких, что для всех $x \in H$ $(x, x_0) = f(x) = (x, \tilde{x}_0)$. Тогда для всех $x \in H$ имеем $(x, x_0 - \tilde{x}_0) = 0$. Полагая в последнем равенстве $x = x_0 - \tilde{x}_0$, будем иметь $(x_0 - \tilde{x}_0, x_0 - \tilde{x}_0) = \|x_0 - \tilde{x}_0\|^2 = 0$, а значит — $x_0 = \tilde{x}_0$.
Для завершения доказательства утверждения 1) остаётся заметить, что равенство $\|f\| = \|x_0\|$ для функционалов, заданных формулой (15), было нами доказано ранее.
Теорема доказана.

## Замечание 7.53

В заключение отметим, что из теоремы Рисса следует, что правило, которое сопоставляет вектору $x_0$ непрерывный линейный функционал $f$ по формуле $f(x) = (x, x_0)$, определяет линейный изоморфизм векторных пространств $H$ и $H^*$. Следовательно, $H$ и $H^*$ «с точностью до обозначений» являются одним и тем же пространством. Последнее обстоятельство становится особенно наглядным в случае, когда $H$ является вещественным пространством векторов-столбцов длины $n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $H^*$ будет пространством векторов-строк длины $n$:

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

причём результат действия функционала $y$ на вектор $x$ может быть записан с использованием умножения $n \times 1$ и $1 \times n$ матриц:

$$y(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

При этом изоморфизм пространств $H$ и $H^*$ задаётся операцией транспонирования векторов, а сами пространства $H$ и $H^*$ совпадают «с точностью до обозначений».

Ниже опишем формализм, предложенный П. А. М. Дираком в книге «Принципы квантовой механики» и прочно утвердившийся в физической литературе.

## Определение 7.54 (бра- и кет-векторов)

Прежде всего, давайте договоримся далее в этом параграфе считать, что скалярное произведение линейно не по первому аргументу, как было до сих пор, а по второму и давайте записывать скалярное произведение векторов $x$ и $y$ несколько необычным образом: $\langle x|y\rangle$ (т. е. $\langle x|y\rangle = (y, x)$). Более того, давайте формально разделим скалярное произведение $\langle x|y\rangle$ на две части:

$$\langle x|y\rangle = \{\langle x|\}\{|y\rangle\}.$$

Первая часть этого символа — $\langle x|$ называется бра-вектором, вторая — $|y\rangle$ — кет-вектором.
Название происходит от английского слова bracket — скобки.

Может показаться странным, что один и тот же вектор $y$ мы можем по собственному желанию записывать, то как бра-вектор $\langle y|$, то как кет-вектор $|y\rangle$.
Чтобы разобраться в этой ситуации, будем отождествлять произвольный вектор $y$ пространства $H$ с кет-вектором $|y\rangle$.
Тогда всякий бра-вектор $\langle x|$ с помощью формулы $f(y) = \langle x|y\rangle$ задаёт линейный непрерывный функционал на пространстве $H$.
Но и обратно, на основании теоремы Рисса, всякий непрерывный линейный функционал на $H$ может быть записан в виде скалярного произведения $\langle x|y\rangle$. Следовательно, бра-векторы можно отождествить с непрерывными функционалами на $H$, т. е. с векторами сопряжённого пространства $H^*$.

Таким образом, строго говоря, кет-векторы являются элементами пространства $H$, а бра-векторы — элементами пространства $H^*$, и отождествлять их с «обычными» векторами $x \in H$ можно только благодаря изоморфности пространств $H$ и $H^*$, установленной в теореме Рисса. Приведём два примера использования формализма бра- и кет-векторов.

## Пример 7.55 (разложение тождественного оператора)

Убедимся, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормированный базис в $H$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n\rangle\langle x_n| = I, \tag{19}$$

где $I : H \to H$ — тождественный оператор.
В самом деле, поскольку $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ образуют ортонормированный базис, то любой вектор $x \in H$ может быть разложен по нему: $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$, где $\lambda_n = (x, x_n) = \langle x_n | x\rangle$ — коэффициенты Фурье вектора $x$.

С использованием бра- и кет-обозначений это разложение может быть переписано в виде

$$|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |x_n\rangle. \tag{20}$$

Подставив выражение для коэффициентов Фурье $\lambda_n = \langle x_n | x \rangle$ в формулу (20), будем иметь

$$|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n\rangle \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n\rangle\langle x_n|x\rangle = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n\rangle\langle x_n| \right\} |x\rangle.$$

Следовательно, оператор, стоящий в фигурных скобках, переводит произвольный кет-вектор в себя, т. е. является тождественным. Равенство (19) доказано.

## Пример 7.56 (нахождение резольвенты)

Пусть $H$ — $n$-мерное гильбертово пространство, $A : H \to H$ — линейный оператор, собственные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ которого образуют ортонормированный базис в $H$. Собственное значение оператора $A$, отвечающее собственному вектору $x_j$, обозначим через $\lambda_j$, т. е. $Ax_j = \lambda_j x_j$. Решим неоднородное уравнение

$$Ax - \lambda x = y, \tag{21}$$

из которого требуется определить вектор $x \in H$, а вектор $y$ и число $\lambda$ считаются заданными, причём заранее будем предполагать, что $\lambda$ не равняется ни одному из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Разложим искомый вектор $x$ по базису $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

Используя бра- и кет-обозначения, перепишем исходное уравнение (21) и последнее равенство в виде

$$A|x\rangle - \lambda|x\rangle = |y\rangle, \tag{22}$$

и

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |x_j\rangle. \tag{23}$$

Кроме того, имеем

$$A|x\rangle = Ax = A\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j |x_j\rangle. \tag{24}$$

Подставив выражения (23) и (24) в уравнение (22), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\lambda_j - \lambda)|x_j\rangle = |y\rangle.$$

Подействовав на обе части последнего равенства бра-вектором $\langle x_k|$, воспользовавшись линейностью скалярного произведения по второму аргументу и ортонормированностью векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будем иметь

$$\langle x_k|y\rangle = \langle x_k|\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\lambda_j - \lambda)|x_j\rangle\right) = \tag{25}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\lambda_j - \lambda)\langle x_k|x_j\rangle = \alpha_k(\lambda_k - \lambda) \tag{26}$$

или $\alpha_k = \langle x_k|y\rangle/(\lambda_k - \lambda)$.

Использовав полученное таким образом выражение для $\alpha_k$, получим

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \left\{ \frac{\langle x_j|y\rangle}{\lambda_j - \lambda} \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda} \right\} |y\rangle.$$

Выражение в фигурных скобках

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda} \tag{27}$$

представляет собой линейный оператор, определённый во всём пространстве $H$ и «разрешающий» уравнение (21), т. е. это резольвента $R_\lambda(A) = (A - I)^{-1}$.

Отметим, что при сделанных выше предположениях резольвента $R_\lambda(A)$ зависит только от собственных значений и собственных векторов оператора $A$. Поэтому как только собственные векторы и собственные значения оператора $A$ известны, мы можем выписать ответ к уравнению (21) при любой правой части $y$.

**Замечание 7.57**

Выражение, аналогичное формуле (27), может быть получено и для бесконечномерных пространств (формально надо лишь заменить верхний предел суммирования $n$ на $\infty$). Именно такая ситуация имеет место при изучении задачи Штурма — Лиувилля в дифференциальных уравнениях, где выражения, аналогичное формуле (27) называется формулой Грина. Но исследование сходимости соответствующего операторного ряда выходит за пределы настоящего курса.

## § 7.7. Оператор, сопряжённый к ограниченному

### Определение 7.58 (сопряжённого оператора)

Пусть $A : H \to H_1$ — ограниченный линейный оператор и $y \in H_1$. Построим функционал $f : H \to \mathbb{C}$ с помощью формулы $f(x) = (Ax, y)$. Тогда функционал $f$ линеен (что очевидно из-за линейности оператора $A$ и линейности скалярного произведения по первому аргументу) и ограничен:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, y)|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\| \, \|x\| \, \|y\|}{\|x\|} = \|A\| \, \|y\| < +\infty.$$

Поэтому, согласно теореме Рисса, существует единственный вектор $z \in H$ такой, что для всех $x \in H$ справедливо равенство $f(x) = (x, z)$. Таким образом, возникает отображение пространства $H_1$ в пространство $H$, сопоставляющее вектору $y \in H_1$ вектор $z \in H$. Оно называется оператором, сопряжённым к $A$, и обозначается через $A^*$.

### Замечание 7.59

Более кратко предыдущее определение можно высказать так: оператор $A^*$ называется сопряжённым к ограниченному оператору $A : H \to H_1$, если равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$ выполняется для всех $x \in H$ и всех $y \in H_1$.

### Замечание 7.60

Подчеркнём, что если оператор $A$ отображает пространство $H$ в $H_1$, то сопряжённый к нему оператор $A^*$ отображает $H_1$ в $H$, т. е. «действует навстречу».

## Пример 7.61 (сопряжённый оператор в конечномерном пространстве)

Пусть $H$ и $H_1$ — конечномерные гильбертовы пространства и $A : H \to H_1$ — линейный оператор.
Фиксируем некоторый ортонормированный базис $x_1, x_2, \dots, x_n$ в $H$ и некоторый ортонормированный базис $y_1, y_2, \dots, y_m$ в $H_1$.
Мы знаем, что каждому из операторов $A$ и $A^*$ соответствует матрица $(a_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ и $(a^*_{qp})_{\substack{q=1,\dots,n\\ p=1,\dots,m}}$ в том смысле, что если

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \qquad \text{и} \qquad y = \sum_{p=1}^{m} \mu_p y_p,$$

то

$$Ax = \sum_{k=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \right) y_k \qquad \text{и} \qquad A^* y = \sum_{q=1}^{n} \left( \sum_{p=1}^{m} a^*_{qp} \mu_p \right) x_q.$$

Чтобы найти связь между коэффициентами матриц $(a_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ и $(a^*_{qp})_{\substack{q=1,\dots,n\\ p=1,\dots,m}}$, преобразуем равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$, воспользовавшись ортонормированностью базисов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_m$:

$$\begin{array}{ccccc} (Ax, y) & = & \left(\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j\right)y_k, \sum\limits_{p=1}^{m}\mu_p y_p\right) & = & \sum\limits_{k=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j\right)\overline{\mu_k} \\ \| & & & & \\ (x, A^*y) & = & \left(\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_j, \sum\limits_{q=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{m} a^*_{qk}\mu_k\right)x_q\right) & = & \sum\limits_{j=1}^{n}\overline{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} a^*_{jk}\mu_k\right)}\lambda_j. \end{array}$$

Другими словами, мы видим, что для любых наборов чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ должно выполняться равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} - \overline{a^*_{jk}}) \lambda_j \overline{\mu_k} = 0. \tag{28}$$

Отсюда вытекает, что для любой пары индексов $j, k$, справедливо равенство

$$a_{kj} = \overline{a^*_{jk}}. \tag{29}$$

В самом деле, если для каких-то индексов $j_0$ и $k_0$ равенство (29) не выполнено, то в качестве набора $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ возьмём такой, в котором все числа равны $0$, за исключением $\lambda_{j_0}$, которое положим равным $1$. Аналогично, все числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ положим равными $0$, за исключением $\mu_{k_0}$, которое положим равным $1$. Тогда левая часть равенства (28) будет равна $a_{k_0 j_0} - \overline{a^*_{j_0 k_0}} \neq 0$ и равенство (28) не будет выполняться. Полученное противоречие доказывает (29).

Формула (29) означает, что если матрица оператора $A$ задана относительно ортонормированных базисов в $H$ и $H_1$, то сопряжённо-транспонированная к ней матрица будет являться матрицей сопряжённого оператора $A^*$. Это правило вам известно из курса линейной алгебры.

## Предложение 7.62 (свойства сопряжённого оператора)

*Пусть* $H, H_1$ *и* $H_2$ *— гильбертовы пространства,* $A : H \to H_1$ *и* $B : H \to H_1$ *— ограниченные линейные операторы,* $\alpha$ *и* $\beta$ *— комплексные числа.*

1) $A^*$ *является линейным ограниченным оператором, причём* $\|A^*\| = \|A\|$.

2) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$.

3) $(A^*)^* = A$.

4) *Если* $I : H \to H$ *— тождественный оператор, то* $I^* = I$.

При доказательств свойств сопряжённого оператора удобно опираться на следующую лемму:

**Лемма 7.63 (о равенстве векторов)**

*Если векторы $x$ и $y$ гильбертова пространства $H$ таковы, что для любого $z \in H$ выполняется равенство $(x, z) = (y, z)$, то $x = y$.*

**Упражнение 7.64**

Доказать лемму 7.63 и предложение 7.62.

## Замечание 7.65

Обратим внимание на то, что ограниченные линейные операторы можно рассматривать как обобщение комплексных чисел, поскольку числу $\alpha$ можно сопоставить оператор $\alpha I$ ($I$ — тождественный оператор), норма которого, очевидно равна модулю числа $\alpha$. С этой точки зрения операция нахождения оператора, сопряжённого данному, является обобщением операции нахождения комплексного числа, сопряжённого данному. Вышеприведённые свойства операторов являются обобщением хорошо известных свойств комплексных чисел. Например, свойство 1) означает, что модуль числа, сопряжённого к данному равен модулю исходного числа; свойство 3) — что число, сопряжённое к сопряжённому, равно исходному; свойство 4) — что число единица является вещественным.

Чтобы подчеркнуть указанную аналогию, во многих книгах и статьях, написанных физиками для физиков, операцию комплексного сопряжения для комплексных чисел обозначают не чертой, а звездочкой. Тогда, например, свойство 2) записывается более симметрично: $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha^* A^* + \beta^* B^*$. Но мы не будем пользоваться этим соглашением.

## § 7.8. Применение сопряжённого оператора при нахождении спектра

При нахождении спектра оператора наибольшие сложности возникают при попытке выяснить, принадлежит ли данное число $\lambda$ остаточному или непрерывному спектру. Здесь нередко оказывается полезной следующая

**Lemma 7.66 (о связи остаточного спектра оператора с точечным спектром сопряженного оператора)**

*Пусть $A : H \to H$ — линейный ограниченный оператор и комплексное число $\lambda$ не является его собственным значением. Тогда $\lambda$ принадлежит остаточному спектру оператора $A$ если и только если число $\overline{\lambda}$ является собственным значением оператора $A^*$, т. е. $\lambda \in \sigma_r(A) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.*

**Доказательство леммы 7.66.** Допустим, что $\lambda \in \sigma_r(A)$. Это означает, что область определения оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ не плотна в $H$. Значит, образ оператора $A - \lambda I$ не плотен в $H$. Следовательно, и замыкание образа оператора $A - \lambda I$ не плотно в $H$. Обозначим его через $S$ и выберем ненулевой вектор $y$ из $S^\perp$. Тогда для любого $x \in H$ вектор $(A - \lambda I)x$ будет содержаться в $S$ и мы сможем записать

$$0 = ((A - \lambda I)x, y) = (x, (A - \lambda I)^* y).$$

Поскольку последнее равенство справедливо для всех $x \in H$, то $(A - \lambda I)^* y = 0$, что может быть переписано в виде $(A^* - \overline{\lambda} I^*)y = 0$ или $A^* y = \overline{\lambda} y$. Значит, уравнение $A^* z = \overline{\lambda} z$ имеет ненулевое решение $z = y$. Следовательно, $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Переходя к доказательству обратного утверждения, допустим, что $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, т. е. что уравнение $A^* z = \overline{\lambda} z$ имеет ненулевое решение $z = y$. Тогда $(A - \lambda I)^* y = 0$ и поэтому для любого $x \in H$

$$0 = (x, (A - \lambda I)^* y) = ((A - \lambda I)x, y).$$

Следовательно, образ оператора $A - \lambda I$ содержится в подпространстве $S$, ортогональном вектору $y$. Поскольку $\lambda$ не является собственным значением оператора $A$, то оператор $A - \lambda I$ обратим, кроме того, область определения оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ совпадает с образом оператора $A - \lambda I$ и поэтому содержится в $S$.

С другой стороны, для любого вектора $z \in S$ мы имеем

$$\|y-z\|^2=(y-z,y-z)=(y,y)-(z,y)-(y,z)+(z,z)=\|y\|^2+\|z\|^2\geq\|y\|^2,$$

а значит с помощью векторов $z$, лежащих в подпространстве $S$ нельзя сколь угодно близко приблизиться к вектору $y$. Это означает, что $S$ не плотно в $H$. Но тогда и область определения оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ не плотна в $H$, и, следовательно, $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Лемма доказана.

## § 7.9. Ограниченные самосопряжённые операторы

**Определение 7.67 (самосопряжённого оператора)**

Ограниченный линейный оператор $A : H \to H$ называется **самосопряжённым**, если его сопряжённый совпадает с $A$, т. е. если $A^* = A$.

**Замечание 7.68**

Другими словами, $A$ называется самосопряжённым, если равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$ выполняется для всех $x, y \in H$.

**Теорема 7.69 (о точечном спектре самосопряжённого оператора)**

*Все собственные значения ограниченного самосопряжённого линейного оператора вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой.*

**Доказательство теоеремы 7.69.** Пусть комплексное число $\lambda$ является собственным значением самосопряжённого ограниченного оператора $A : H \to H$. Это означает, что найдётся вектор $x \in H$, такой, что $Ax - \lambda x = 0$ и $\|x\| = 1$. Тогда

$$\lambda = \lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x) = \overline{\lambda},$$

откуда следует, что $\lambda$ — вещественное число.
Теперь допустим, что $\lambda$ и $\mu$ — различные собственные значения оператора $A$, т. е. $\lambda \neq \mu$.

Соответствующие им собственные векторы обозначим через $x$ и $y$: $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Умножим первое из этих равенств скалярно на $y$, второе — на $x$ и вычтем одно из другого:

$$
\begin{array}{rl}
 & (Ax, y) = \lambda(x, y) \\
- & \\
 & (x, Ay) = \mu(x, y) \\
\hline
\end{array}
$$

$$(Ax, y) - (x, Ay) = (\lambda - \mu)(x, y).$$

Здесь мы учли, что $\mu \in \mathbb{R}$. Левая часть последнего равенства равна нулю, т. к. $A$ — самосопряжённый оператор. В правой же части сомножитель $\lambda - \mu$ не равен нулю по предположению. Значит $(x, y) = 0$, т. е. $x \perp y$.

Теорема доказана.

**Теорема 7.70 (о норме самосопряжённого оператора)**

*Если* $A : H \to H$ *— линейный, самосопряжённый, ограниченный оператор, то*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Ax, x)|.$$

**Доказательство теоремы 7.70.** Введём обозначение

$$\alpha = \sup_{\|x\| \le 1} |(Ax, x)|.$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, можем записать $|(Ax, x)| \le \|Ax\| \cdot \|x\| \le \|A\| \cdot \|x\|^2$, откуда вытекает, что

$$\alpha = \sup_{\|x\| \le 1} |(Ax, x)| \le \|A\|,$$

т. е. $\alpha \le \|A\|$.

Чтобы доказать противоположное неравенство $\alpha \geq \|A\|$, установим предварительно тождество

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 4\,\mathrm{Re}(Ax, y), \qquad (30)$$

справедливое для всех векторов $x, y \in H$. Оно вытекает из следующих вычислений

$$\begin{gathered}(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = \\ = [(Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y)] - \\ -[(Ax, x) - (Ax, y) - (Ay, x) + (Ay, y)] = \\ = 2[(Ax, y) + (y, Ax)] = 2[(Ax, y) + \overline{(Ax, y)}] = 4\,\mathrm{Re}(Ax, y).\end{gathered}$$

Воспользовавшись равенством (30), будем иметь

$$4\operatorname{Re}(Ax,y) \le |(A(x+y),x+y)| + |(A(x-y),x-y)| =$$

$$= \|x+y\|^2 \left| \left( A\frac{x+y}{\|x+y\|}, \frac{x+y}{\|x+y\|} \right) \right| + \|x-y\|^2 \left| \left( A\frac{x-y}{\|x-y\|}, \frac{x-y}{\|x-y\|} \right) \right|$$

В правой части последнего выражения стоят два члена вида $|(Az,z)|$, где $\|z\| = 1$. Значит, каждый из этих членов не превосходят $\alpha$. Воспользовавшись этим обстоятельством и применяя равенство параллелограмма, можем продолжить начатое вычисление:

$$4\operatorname{Re}(Ax,y) \le \alpha\left[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right] = 2\alpha\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]. \quad (31)$$

Предположим, что вектор $x \in H$ выбран так, что $Ax \neq 0$. Подставим в формулу (31) $y = \frac{\|x\|}{\|Ax\|} Ax$:

$$4 \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \|Ax\|^2 \leq 2\alpha[\|x\|^2 + \|x\|^2].$$

Значит, $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$ для всех $x \in H$ таких, что $Ax \neq 0$. Если же $Ax = 0$, то неравенство $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$ выполняется тривиальным образом.
Окончательно мы получаем, что величина $\|Ax\| / \|x\|$ не превосходит $\alpha$ для всех $x \in H$, $x \neq 0$. Следовательно,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha.$$

Теорема доказана.

**Определение 7.71 (инвариантным подпространством линейного оператора)**

Подпространство $S$ гильбертова пространства $H$ называется **инвариантным подпространством** линейного оператора $A : H \to H$, если для любого $x \in S$ мы имеем $Ax \in S$.

**Теорема 7.72 (об инвариантном подпространстве самосопряжённого оператора)**

*Если $A : H \to H$ — линейный, самосопряжённый, ограниченный оператор и $S$ — его инвариантное подпространство, то $S^{\perp}$ также является инвариантным подпространством оператора $A$.*

**Доказательство теоремы 7.72.** Нужно проверить, что для любого $x \in S^{\perp}$ вектор $Ax$ лежит в $S^{\perp}$. Для этого достаточно убедиться, что равенство $(Ax, y) = 0$ выполняется для всех $x \in S^{\perp}$ и всех $y \in S$. Ввиду самосопряжённости оператора $A$, последнее равенство может быть переписано в виде $(x, Ay) = 0$. Теперь ясно, что оно действительно имеет место для всех $x \in S^{\perp}$ и всех $y \in S$, поскольку в силу инвариантности $S$: для любого $y \in S$ вектор $Ay$ снова лежит в $S$, а значит, перпендикулярен любому вектору $x$ из $S^{\perp}$. Теорема доказана.

## § 7.10. Компактные множества и компактные операторы

**Определение 7.73**

Множество $X$, содержащееся в гильбертовом пространстве $H$, будем называть **компактным**, если из любой его бесконечной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору из $X$.

Обсудим наиболее употребительные свойства компактных множеств.

### Предложение 7.74

1) *Если* $H$ *— конечномерное гильбертово пространство, то множество* $X \subset H$ *компактно тогда и только тогда, когда* $X$ *замкнуто и ограничено.*
2) *Если множество* $X \subset H$ *компактно, то* $X$ *замкнуто и ограничено.*
3) *Если замкнутый единичный шар в гильбертовом пространстве* $H$ *компактен, то* $H$ *конечномерно.*
4) *Если* $A : H \to H_1$ *— ограниченный линейный оператор и* $X \subset H$ *компактно, то множество* $AX$*, лежащее в пространстве* $H_1$*, также компактно.*

**Замечание**

Свойство 2) показывает, что «половина» свойства 1) имеет место не только в конечномерных, но и в бесконечномерных пространствах. А свойство 3) показывает, что «вторая половина» свойства 1) в бесконечномерных пространствах неверна.

**Доказательство предложения 7.74.**

1) Это утверждение называемое обычно теоремой Лебега, известно вам для случая $H = \mathbb{R}^n$ из курса математического анализа и здесь доказываться не будет. В общем случае достаточно заметить, что всякое конечномерное пространство $H$ изоморфно $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

2) Достаточно проверить, что если множество незамкнуто или неограничено, то оно не может быть компактным. Пусть множество $X$ не замкнуто. Тогда найдётся последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек множества $X$, которая сходится к некоторой точке $x_0$ пространства $H$, не лежащей в $X$. Убедимся, что именно из этой последовательности нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке из $X$. В самом деле, если бы такая подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ нашлась, то она имела бы два несовпадающих предела: в качестве одного — некоторую точку $\tilde{x}_0$ из $X$, и в качестве другого — точку $x_0$, не лежащую в $X$ (ведь, очевидно, любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и исходная последовательность). Пришли к противоречию с единственностью предела. Значит, множествл $X$ не компактно.

Пусть теперь множество $X$ не ограничено. Это значит, что для любого числа $R$ найдётся вектор $x$ из $X$ такой, что $\|x\| > R$. Построим последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек множества $X$ следующим образом: выберем $x_1 \in X$ так чтобы $\|x_1\| > 1$ и, если точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уже построены, то выберем точку $x_{n+1} \in X$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|x_{n+1}\| > \|x_n\| + 1$. Из построенной последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, т. к. никакая её подпоследовательность не является фундаментальной, поскольку, как следует из вычисления

$$\|x_n - x_m\| \geq \big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| =$$
$$= \Big|\big(\|x_n\| - \|x_{n-1}\|\big) + \big(\|x_{n-1}\| - \|x_{n-2}\|\big) + \ldots + \big(\|x_{m+1}\| - \|x_m\|\big)\Big| \geq$$
$$\geq 1 + 1 + \ldots + 1 = n - m > 1,$$

расстояние между любыми несовпадающими ($n > m$) точками этой последовательности не может быть сделано меньше единицы. Значит множество $X$ не компактно.

3) Допустим, что пространство $H$ бесконечномерно. Фиксируем в $H$ счётный ортонормированный набор векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, который можно получить из счётного линейно независимого набора, существующего в силу определения бесконечномерного пространства, методом ортогонализации Грама — Шмидта. Как и при доказательстве свойства 2), убедимся, что из последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, лежащей в единичном замкнутом шаре, нельзя выделить фундаментальной и, тем самым, сходящейся подпоследовательности:

$$\|x_m - x_m\|^2 = (x_n - x_m, x_n - x_m) =$$
$$= (x_n, x_n) - (x_n, x_m) - (x_m, x_n) + (x_m, x_m) = 1 - 0 - 0 + 1 = 2.$$

Последнее противоречит предположению о компактности единичного замкнутого шара.

4) Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ — последовательность точек множества $AX$. Согласно определению образа множества $X$ под действием оператора $A$, это означает, что для каждого номера $n$ найдётся точка $x_n$ из множества $X$ такая, что $Ax_n = y_n$. [Обратите внимание, что точек $x \in X$, обладающих свойством $Ax = y_n$ может быть несколько; через $x_n$ мы обозначили какую-то одну (любую) из них]. Тем самым мы построили последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек множества $X$, а поскольку множество $X$ компактно, то из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x_0$ множества $X$, т. е. $x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$. Но тогда точки $y_{n_k} = Ax_{n_k}$ образуют подпоследовательность последовательности $y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_k}, \ldots$, сходящуюся к точке $Ax_0$, содержащейся в $AX$:

$$\|y_{n_k} - Ax_0\| = \|Ax_{n_k} - Ax_0\| = \|A(x_{n_k} - x_0)\| \leq \|A\| \cdot \|x_{n_k} - x_0\| \to 0$$

при $k \to \infty$. Значит, множество $AX$ компактно.
Предложение доказано.

## Определение 7.75

Линейный оператор $A : H \to H_1$ называется **компактным**, если для любого ограниченного множества $X \subset H$ замыкание множества $AX$, содержащегося в $H_1$, компактно.

## Замечание 7.76

Другими словами, оператор $A$ компактен, если из любой ограниченной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ пространства $H$ можно выделить подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, которую оператор $A$ переведёт в сходящуюся (неважно к какому вектору пространства $H_1$) последовательность $Ax_{n_1}, Ax_{n_2}, \ldots, Ax_{n_k}, \ldots$.

Приведём простейшие свойства компактных операторов.

## Предложение 7.77

1) *Если* $A : H \to H_1$ *и* $B : H \to H_1$ *— компактные операторы, то для любых чисел* $\alpha$ *и* $\beta$ *оператор* $\alpha A + \beta B$ *также компактен.*
2) *Если оператор* $A : H \to H_1$ *компактен, то он ограничен.*
3) *Пусть* $A : H \to H_1$ *— линейный оператор и* $\dim H_1 < +\infty$. *Для того, чтобы оператор* $A$ *был компактен необходимо и достаточно, чтобы оператор* $A$ *был ограничен.*
4) *Для того, чтобы тождественный оператор* $I : H \to H$ *был компактным, необходимо и достаточно, чтобы* $\dim H_1 < +\infty$.
5) *Пусть оператор* $A : H \to H_1$ *компактен, а операторы* $B : H_1 \to H_2$ *и* $C : H_3 \to H$ *ограничены. Тогда операторы* $BA$ *и* $AC$ *компактны.*
6) *Если* $\dim H_1 = +\infty$, *а оператор* $A : H \to H$ *компактен и обратим, то обратный оператор* $A^{-1}$ *не может быть ограниченным.*

**Доказательство предложения 7.77.**

1) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — произвольная ограниченная последовательность векторов пространства $H$.

Поскольку оператор $A$ компактен, а последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ограничена, то из неё можно выделить такую подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, которую оператор $A$ переводит в сходящуюся последовательность $Ax_{n_1}, Ax_{n_2}, \ldots, Ax_{n_k}, \ldots$.

Теперь воспользуемся тем, что оператор $B$ компактен, а последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ ограничена (ведь все ее точки содержатся в том же шаре, в котором содержатся все точки последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$). Значит из последовательности $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \ldots, x_{n_{k_l}}, \ldots$, которую оператор $B$ переведёт в сходящуюся последовательность $Bx_{n_{k_1}}, Bx_{n_{k_2}}, \ldots, Bx_{n_{k_l}}, \ldots$.

Таким образом, из произвольной ограниченной последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ мы выделили подпоследовательность $x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \dots, x_{n_{k_l}}, \dots$, которую оба оператора $A$ и $B$ переводят в сходящиеся последовательности. Следовательно, и оператор $\alpha A + \beta B$ переведёт её в сходящуюся последовательность $\alpha A x_{n_{k_1}} + \beta B x_{n_{k_1}}, \alpha A x_{n_{k_2}} + \beta B x_{n_{k_2}}, \dots, \alpha A x_{n_{k_l}} + \beta B x_{n_{k_l}}, \dots$. Тем самым компактность оператора $\alpha A + \beta B$ доказана.

2) Фиксируем произвольное ограниченное множество $X$ в пространстве $H$. Поскольку оператор $A$ компактен, то замыкание множества $AX$ компактно. Но всякое компактное множество ограничено, а значит, замыкание множества $AX$ ограничено, т. е. содержится в шаре некоторого конечного радиуса в пространстве $H_1$. Воспользовавшись тем, что любое множество содержится в своём замыкании, заключаем, что $AX$ содержится в том же шаре и поэтому ограничено. Значит, оператор $A$ переводит любое ограниченное множество $X$ в ограниченное $AX$, т. е. оператор $A$ ограничен.

3) Необходимость вытекает из свойства 2). Чтобы доказать достаточность, фиксируем ограниченное множество $X$ в пространстве $H$. Поскольку $A$ — ограниченный оператор, то множество $AX$ ограничено в $H_1$. Но, как легко убедиться, замыкание ограниченного множества является ограниченным множеством. Поэтому замыкание множества $AX$ ограничено в $H_1$. Воспользовавшись предположением $\dim H_1 < +\infty$ и теоремой Лебега (свойство 1) предложения 7.74) заключаем, что замыкание множества $AX$ компактно. Тем самым, оператор $A$ переводит ограниченное множество в такое, замыкание которое компактно. Поэтому оператор $A$ компактен.

4) Достаточность вытекает из свойства 3). Необходимость будет установлена, если мы убедимся, что если $\dim H_1 = +\infty$, то тождественный оператор $I$ не компактен. Для этого обозначим через $X$ единичный замкнутый шар в $H$, т. е. $X = \{x \in H | \|x\| \leq 1\}$. Очевидно, $X$ является ограниченным замкнутым множеством, образ которого $IX$ совпадает с $X$. На основании допущения $\dim H_1 = +\infty$ и свойства 3) предложения 7.74 заключаем, что $IX$ не компактно. Значит из допущения $\dim H_1 = +\infty$ вытекает существование ограниченного множества $X$, замыкание образа $IX$ которого не компактно. Следовательно, если $\dim H_1 = +\infty$, то тождественный оператор $I$ не компактен, что и требовалось доказать.

5) Поскольку оператор $A$ компактен, то из всякой ограниченной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек пространства $H$ можно выделить такую подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ которую оператор $A$ переведёт в сходящуюся последовательность $Ax_{n_1}, Ax_{n_2}, \ldots, Ax_{n_k}, \ldots$. Но ограниченный оператор переводит сходящуюся последовательность в сходящуюся. Поэтому последовательность $B(Ax_{n_1}), B(Ax_{n_2}), \ldots, B(Ax_{n_k}), \ldots$ сходится. Таким образом мы видим, что из всякой ограниченной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ можно выделить такую подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, которую оператор $BA$ переведёт в сходящуюся. Значит $BA$ компактен.

С другой стороны, поскольку оператор $C$ ограничен, то он переведёт любую ограниченную последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ в ограниченную $Cy_1, Cy_2, \ldots, Cy_n, \ldots$. Поскольку оператор $A$ компактен, то из последовательности $Cy_1, Cy_2, \ldots, Cy_n, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $Cy_{n_1}, Cy_{n_2}, \ldots, Cy_{n_k}, \ldots$, которую оператор $A$ переведёт в сходящуюся последовательность $A(Cy_{n_1}), A(Cy_{n_2}), \ldots, A(Cy_{n_k}), \ldots$. Значит, из любой ограниченной последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_k}, \ldots$, которую оператор $AC$ переведёт в сходящуюся последовательность. Следовательно, $AC$ компактен.

6) Доказательство будем вести от противного. Предположим, что $A^{-1}$ ограничен. Тогда, согласно свойству 5), из равенства $AA^{-1} = I$ вытекает, что тождественный оператор $I$ компактен. В силу свойства 4) это влечёт $\dim H_1 < +\infty$, что противоречит условию $\dim H_1 = +\infty$. Полученное противоречие означает, что $A^{-1}$ не может быть ограниченным.
Предложение доказано.

## Определение 7.78

Ограниченный линейный оператор $A : H \to H_1$ с $\dim \operatorname{im} A < +\infty$ называется конечномерным оператором.

Опираясь на свойство 3) предложения 7.77, легко получить следующее следствие.

## Следствие 7.79

*Любой конечномерный оператор компактен.*

**Теорема 7.80 (о пределе последовательности компактных операторов)**

*Пусть* $H$ *и* $H_1$ *— гильбертовы пространства и* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *— последовательность компактных линейных операторов, отображающих* $H$ *в* $H_1$*, причём* $A_n \to A$ *при* $n \to \infty$*. Тогда* $A$ *— компактный оператор.*

**Доказательство теоремы 7.80.** Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — ограниченная последовательность векторов пространства $H$. Компактность оператора $A$ будет установлена, если мы убедимся, что из последовательности $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n, \dots$ векторов пространства $H_1$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Поскольку оператор $A_1$ компактен, а последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ограничена, то из последовательности $A_1x_1, A_1x_2, \dots, A_1x_n, \dots$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначим через $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots$ подпоследовательность последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ такую, что последовательность $A_1x_1^{(1)}, A_1x_2^{(1)}, \dots, A_1x_n^{(1)}, \dots$ сходится.

Последовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots$ содержится в шаре того же радиуса, что и последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ и, следовательно, ограничена. Кроме того, оператор $A_2$ компактен. Поэтому из последовательности $A_2x_1^{(1)}, A_2x_2^{(1)}, \dots, A_2x_n^{(1)}, \dots$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначим через $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots$ подпоследовательность последовательности $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots$ (а, значит, и последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$) такую, что последовательность $A_2x_1^{(2)}, A_2x_2^{(2)}, \dots, A_2x_n^{(2)}, \dots$ сходится.

Если последовательность $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots$ уже построена, то, рассуждая аналогично предыдущему, выберем из неё подпоследовательность $x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \dots, x_n^{(m+1)}, \dots$ так, чтобы последовательность $A_{m+1}x_1^{(m+1)}, A_{m+1}x_2^{(m+1)}, \dots, A_{m+1}x_n^{(m+1)}, \dots$ сходилась.

Расположим построенные последовательности в виде бесконечной таблицы

$$\begin{array}{ccccc}
x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \dots, & x_n^{(1)}, & \dots \\
x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \dots, & x_n^{(2)}, & \dots \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & \dots, & x_n^{(m)}, & \dots \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill}
\end{array}$$

и рассмотрим диагональную последовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots$. Из способа её построения следует, что она является подпоследовательностью последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Кроме того, для любого номера $k = 1, 2, \dots,$ «хвост» $x_k^{(k)}, x_{k+1}^{(k+1)}, x_{k+2}^{(k+2)}, \dots$ диагональной последовательности является подпоследовательностью $k$-ой строки таблицы, а $k$-ю строку таблицы оператор $A_k$ переводит в сходящуюся последовательность. Поэтому каждый из операторов $A_k$ переводит диагональную последовательность в сходящуюся.

Убедимся, что оператор $A$ переводит диагональную последовательность в сходящуюся. Так как пространство $H_1$ полно, то достаточно доказать, что последовательность $Ax_1^{(1)}, Ax_2^{(2)}, \ldots, Ax_n^{(n)}, \ldots$ фундаментальна.
Наше рассуждение будет основано на следующем соотношении

$$\begin{gathered} \|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| = \\ = \|(Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}) + (A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}) + (A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)})\| \leq \\ \leq \|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\| + \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| + \|A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\| \leq \\ \leq \|A - A_k\| \cdot \|x_n^{(n)}\| + \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| + \|A - A_k\| \cdot \|x_m^{(m)}\| \end{gathered} \tag{32}$$

справедливом для любых номеров $n, m$ и $k$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и будем считать, что для всех номеров $n$ выполняется неравенство $\|x_n\| \leq R$.

Выберем число $k$ так, чтобы $\|A - A_k\| \le \varepsilon/(3R)$. Это можно сделать, поскольку $A_n \to A$, а значит $\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Для такого номера $k$ первый и последний члены в правой части формулы (32) не превосходят $\varepsilon/3$.

Теперь выберем число $n_0$ такое, чтобы для всех $m, n \ge n_0$ выполнялось неравенство $\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| \le \varepsilon/3$, т. е. чтобы средний член в правой части формулы (32) не превосходил $\varepsilon/3$.

Таким образом, в силу (32), мы для любого $\varepsilon > 0$ нашли число $n_0$ такое, что для всех $m, n \ge n_0$ выполняется неравенство

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $Ax_1^{(1)}, Ax_2^{(2)}, \dots, Ax_n^{(n)}, \dots$ фундаментальна, а отсюда, как уже было сказано выше, вытекает компактность оператора $A$.

Теорема доказана.

Приведём пример компактного оператора, образ которого бесконечномерен.

## Пример 7.81

Пусть оператор $A : l_2 \to l_2$ задан формулой

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \dots, \frac{1}{2^n}x_n, \dots\right).$$

Легко понять, что его образ не содержится ни в каком конечномерном подпространстве. Убедимся, что оператор $A$ компактен.

Для этого при каждом $n$ зададим оператор $A_n : l_2 \to l_2$ по формуле

$$A_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \dots, \frac{1}{2^n}x_n, 0, 0, 0, \dots\right).$$

Очевидно, оператор $A_n$ линеен и непрерывен, а его образ имеет размерность $n < \infty$.

Следовательно, $A_n$ является конечномерным оператором и в силу следствия 7.79 компактным. Кроме того,

$$\|A_n - A\|^2 = \sup_{\|x\|\le 1} \|A_n x - Ax\|^2$$

$$= \sup_{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x|^2 \le 1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} |x_k|^2 \le \frac{1}{3 \cdot 2^{2n}} \to 0$$

при $n \to \infty$, а значит $A_n \to A$. Следовательно, оператор $A$ компактен.

**Теорема 7.82 (о дискретности точечного спектра компактного оператора)**

*Если $H$ — гильбертово пространство и $A : H \to H$ — компактный оператор, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся лишь конечное число линейно независимых собственных векторов оператора $A$, отвечающих собственным значениям, модуль которых больше $\varepsilon$.*

**Доказательство теоремы 7.82** будем вести от противного, т. е. предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ нашлась (бесконечная) последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ линейно независимых собственных векторов оператора $A$, отвечающих собственным значениям, модуль которых больше $\varepsilon$, т. е. $Ax_n = \lambda_n x_n$, $|\lambda_n| > \varepsilon$.

Применим к этой последовательности процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Результат обозначим через $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$. Утверждается, что 1) последовательность $y_1/\lambda_1, y_2/\lambda_2, \dots, y_n/\lambda_n, \dots$ ограничена; и 2) из последовательности $A(y_1/\lambda_1), A(y_2/\lambda_2), \dots, A(y_n/\lambda_n), \dots$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Эти два свойства противоречат компактности оператора $A$ и, тем самым, для завершения доказательства теоремы только их и нужно доказать.

Свойство 1) очевидным образом вытекает из соотношений $\|y_n\| = 1$ и $|\lambda_n| > \varepsilon$:

$$\left\| \frac{y_n}{\lambda_n} \right\| = \frac{\|y_n\|}{|\lambda_n|} < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Для доказательства свойства 2) заметим, что вектор $y_n$ лежит в линейной оболочке векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а значит, найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Поэтому

$$A\frac{y_n}{\lambda_n} = A\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_n} \lambda_k x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{\alpha_k}{\lambda_n}\lambda_k - \alpha_k\Big) x_k = y_n + z_n,$$

где использовано обозначение $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_n}\lambda_k - \alpha_k\right) x_k$.

Из последнего выражения видно, что вектор $z_n$ лежит в линейной оболочке векторов $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, а значит — и в линейной оболочке векторов $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Тогда для любых номеров $m$ и $n$, связанных соотношением $n > m$, имеем

$$\left\|A\frac{y_n}{\lambda_n} - A\frac{y_m}{\lambda_m}\right\| = \|y_n + z_n - y_m - z_m\|^2 =$$
$$= (y_n + z_n - y_m - z_m, y_n + z_n - y_m - z_m) =$$
$$= (y_n, y_n) + (z_n - y_m - z_m, z_n - y_m - z_m),$$

поскольку вектор $z_n - y_m - z_m$ лежит в линейной оболочке векторов $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ и поэтому ортогонален вектору $y_n$. Но $(y_n, y_n) = \|y\|^2 = 1$, а $(z_n - y_m - z_m, z_n - y_m - z_m) = \|z_n - y_m - z_m\|^2 \geq 0$. Следовательно, $\left\|A\frac{y_n}{\lambda_n} - A\frac{y_m}{\lambda_m}\right\| \geq 1$ для любых $n > m$. Это показывает, что из последовательности $A(y_1/\lambda_1), A(y_2/\lambda_2), \dots, A(y_n/\lambda_n), \dots$ нельзя выделить фундаментальной подпоследовательности, а значит нельзя выделить и сходящейся. Свойство 2) установлено.
Теорема доказана.

Укажем наиболее важные следствия доказанной теоремы, непосредственно из неё вытекающие:

## Следствие 7.83

1) *Если оператор* $A$ *компактен, то любому его ненулевому собственному значению* $\lambda$ *отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных векторов.* [*Отметим, что как и в линейной алгебре это число называется* *кратностью* *собственного значения* $\lambda$.]
2) *Если оператор* $A$ *компактен, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует лишь конечное число его собственных значений, удовлетворяющих неравенству* $|\lambda| \geq \varepsilon$.
3) *Собственные значения компактного оператора можно перенумеровать в порядке невозрастания модулей с учётом их кратностей, т. е. можно записать* $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \ldots \geq 0$, *где каждое ненулевое значение* $\lambda_n$ *встречается столько раз, какова его кратность.*

**Теорема 7.84 (о непустоте точечного спектра компактного самосопряжённого оператора)**

*Пусть $H$ — гильбертово пространство, размерность которого не равна нулю, и оператор $A : H \to H$ компактен, самосопряжён и отличен от нулевого оператора. Тогда существует собственный вектор оператора $A$, отвечающий ненулевому собственному значению.*

**Доказательство теоремы 7.84.** Поскольку оператор $A$ самосопряжён и отличен от нулевого, то его норма не равна нулю и может быть найдена по формуле (см. теорему 7.70):

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

По определению точной верхней границы, для любого номера $n \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_n \in H$ такой, что $\|x_n\| = 1$ и $\|A\| - 1/n \leq |(Ax_n, x_n)| \leq \|A\|$.
Введём обозначения $\lambda_n = (Ax_n, x_n)$, $y_n = Ax_n - \lambda_n x_n$.
Решающим моментом в данном доказательстве будет то, что $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Если иметь это ввиду, то становится ясно, что мы ввели обозначения так, чтобы $x_n$ стремились к собственному вектору, а $\lambda_n$ — к собственному значению оператора $A$ (хотя сами $\lambda_n$ собственными значениями и не являются).

Убедимся, что $y_n \to 0$ при $n \to \infty$:

$$0 \le \|y_n\|^2 = (y_n, y_n) = (Ax_n - \lambda_n x_n, Ax_n - \lambda_n x_n) =$$
$$= (Ax_n, Ax_n) - \lambda_n(x_n, Ax_n) - \overline{\lambda_n}(Ax_n, x_n) + |\lambda_n|^2(x_n, x_n) \le$$
$$\le \|A\|^2 - |\lambda_n|^2 \le \|A\|^2 - \left(\|A\| - \frac{1}{n}\right)^2 = 2\frac{1}{n}\|A\| - \frac{1}{n^2} \to 0.$$

[В ходе последнего вычисления мы использовали соотношения $(Ax_n, Ax_n) = \|Ax_n\|^2 \le \|A\|^2 \cdot \|x_n\|^2 = \|A\|^2$, $(x_n, Ax_n) = \overline{\lambda_n}$, $(Ax_n, x_n) = \lambda_n$, $(x_n, x_n) = 1$.]

Перепишем определение $y_n$ в виде

$$x_n = \frac{Ax_n - y_n}{\lambda_n}.$$

С одной стороны, последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ограничена, а оператор $A$ компактен. Поэтому найдётся подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ такая, что последовательность $Ax_{n_1}, Ax_{n_2}, \dots, Ax_{n_k}, \dots$ сходится.

С другой стороны, последовательность комплексных чисел $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \ldots, \lambda_{n_k}, \ldots$ ограничена, а значит из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\lambda_{n_{k_1}}, \lambda_{n_{k_2}}, \ldots, \lambda_{n_{k_l}}, \ldots$ причём $|\lambda_{n_{k_l}}| \to \|A\| \neq 0$ при $l \to \infty$. Поэтому в формуле

$$x_{n_{k_l}} = \frac{Ax_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}}{\lambda_{n_{k_l}}} \tag{33}$$

правая часть имеет предел при $l \to \infty$. Значит и левая часть имеет предел, т. е. в $H$ существует вектор $x_0$ такой, что $x_{n_{k_l}} \to x_0$ при $l \to \infty$. При этом $x_0 \neq 0$, поскольку $\|x_n\| = 1$ для любого $n$, а следовательно, $\|x_0\| = 1$.

Переходя к пределу при $l \to \infty$ в формуле (33), мы получим

$$x_0 = \frac{Ax_0}{\lambda_0}$$

или $Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Тем самым мы нашли собственный вектор $x_0$ оператора $A$, отвечающий ненулевому собственному значению $\lambda_0$ (ведь $|\lambda_0| = \|A\| \neq 0$).
Теорема доказана.

### Теорема 7.85 (Гильберта — Шмидта)

*Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство ненулевой размерности и $A : H \to H$ — компактный самосопряжённый оператор. Тогда в $H$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $A$.*

**Доказательство теоремы 7.85.** Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ конечную или бесконечную последовательность, состоящую из ортонормированных собственных векторов оператора $A$. Этот набор будем называть максимальным, если любой собственный вектор оператора $A$ является линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Далее через $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ будем обозначать именно максимальный набор ортонормированных собственных векторов оператора $A$.
Система $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ содержит хотя бы один вектор, поскольку если $A \neq 0$, то существование хотя бы одного собственного вектора вытекает из предыдущей теоремы 7.84. Если же $A = 0$, то любой вектор $x \in H$ является собственным вектором оператора $A$, отвечающим нулевому собственному значению: $Ax = 0 = 0 \cdot x$.

Система $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ действительно может быть выбрана ортонормированной, поскольку если какие-либо два входящие в неё вектора отвечают разным собственным значениям оператора $A$, то они взаимноортогональны автоматически в силу теоремы 7.69 о точечном спектре самосопряжённого оператора. Если же некоторое количество векторов $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ системы $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ отвечает одному и тому же собственному значению $\lambda$, то любой вектор из линейной оболочки векторов $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ также является собственным вектором оператора $A$, отвечающим собственному значению $\lambda$. Поэтому, применив к последовательности $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ процесс ортогонализации Грама — Шмидта, мы получим ортонормированную последовательность собственных векторов которую и «вставим» в последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ вместо векторов $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$.

В свою очередь не вызывает сомнения возможность выбрать систему $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ максимальной. Если на каком-то шаге наша система оказалась не максимальной, то добавим к ней ортогональный ко всем её векторам собственный вектор оператора $A$. Ясно, что действуя таким образом мы в конце концов получим максимальную систему, причём натуральных чисел хватит для нумерации ведь в сепарабельном гильбертовом пространстве никакая ортонормированная система не может содержать более чем счётное множество векторов.

Обозначим через $M$ замыкание линейной оболочки построенной выше системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.
Докажем, что $M = H$. Предположим противное, что $M \neq H$.
Как и всякое гильбертово пространство, $H$ может быть представлено в виде прямой суммы своего замкнутого подпространства $M$ и его ортогонального дополнения $M^\perp$, т. е. $H = M \oplus M^\perp$.

В силу нашего допущения о том, что $M \neq H$, $M^{\perp}$ содержит не только нулевой вектор и поэтому его размерность не равна нулю. Кроме того, $M$, очевидно, является инвариантным подпространством оператора $A$. Поскольку $A$ самосопряжён, то, согласно теореме 7.72 об инвариантном подпространстве, $M^{\perp}$ также является инвариантым подпространством оператора $A$. Поэтому сужение $A_0$ оператора $A$ на подпространство $M^{\perp}$ переводит его в $M^{\perp}$, т. е. $A_0 : M^{\perp} \to M^{\perp}$.
Наконец, воспользуемся такими очевидными свойствами:
а) любое замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства само является гильбертовым пространством;
б) сужение компактного оператора на произвольное замкнутое подпространство является компактным оператором; в) сужение ограниченного самосопряжённого оператора на произвольное подпространство является ограниченным самосопряжённым оператором.

Из этих свойств следует, что $A_0 : M^\perp \to M^\perp$ является компактным самосопряжённым оператором, отображающим гильбертово пространство $M^\perp$ в себя. На основании предыдущей теоремы 7.84 заключаем, что оператора $A_0$ имеет собственный вектор, т. е. существует вектор $x \in M^\perp$, $x \neq 0$ такой, что $A_0 x = \lambda x$. Но тогда $x$ является собственным вектором оператора $A$, ортогональным всем векторам системы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Последнее противоречит максимальности системы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Значит, случай $M \neq H$ невозможен. Тем самым, $M = H$. Следовательноа, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормированный базис в $H$.
Теорема доказана.