

**Приведение к каноническому виду уравнений в частных производных
второго порядка с постоянными коэффициентами при $n > 2$**

1. *Полезные сведения из курса линейной алгебры*

Квадратичная форма с матрицей A имеет вид

$$(A\xi, \xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (1)$$

Невырожденное ($\det T \neq 0$) линейное преобразование $\xi = T\eta$ (или $\xi_i = \sum_{l=1}^n t_{il} \eta_l$) переводит квадратичную форму (1) в квадратичную форму (2)

$$(\tilde{A}\eta, \eta) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{kl} \eta_k \eta_l \quad (2)$$

$$(A\xi, \xi) = (AT\eta, T\eta) = (T^T AT\eta, \eta)$$

$$\begin{aligned} (A\xi, \xi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{l=1}^n t_{il} \eta_l \sum_{k=1}^n t_{jk} \eta_k = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} t_{il} t_{jk} \right) \eta_k \eta_l = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{kl} \eta_k \eta_l = (\tilde{A}\eta, \eta), \end{aligned}$$

где коэффициенты новой квадратичной формы вычисляются по формуле

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} t_{il} t_{jk}. \quad (3)$$

Пусть

n_+ — количество положительных собственных значений матрицы A ;

n_- — количество отрицательных собственных значений матрицы A ;

n_0 — количество нулевых собственных значений матрицы A .

Квадратичная форма (2) имеет (нормальный) канонический вид, если

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

где B , C и D — диагональные матрицы размера $(n_+ \times n_+)$, $(n_- \times n_-)$ и $(n_0 \times n_0)$ соответственно

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

или

$$(\tilde{A}\eta, \eta) = \sum_{i=1}^{n_+} \eta_i^2 - \sum_{j=n_++1}^{n_++n_-} \eta_j^2.$$

Привести квадратичную форму (1) к нормальному каноническому виду можно методом Лагранжа. Выделяя полные квадраты, мы найдем замену переменных $\eta = S\xi$, далее, чтобы получить матрицу перехода T , необходимо выразить все ξ_1, \dots, ξ_n через η_1, \dots, η_n . В итоге получим невырожденное линейное преобразование $\xi = T\eta$ (или $\xi_i = \sum_{l=1}^n t_{il}\eta_l$).

2. Определение и классификация УЧП 2 порядка

Уравнение

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^n a_k u_{x_k} + au = f(x), \quad (4)$$

где $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица размера $(n \times n)$. Пусть

n_+ — количество положительных собственных значений матрицы A ;

n_- — количество отрицательных собственных значений матрицы A ;

n_0 — количество нулевых собственных значений матрицы A .

Переформулируем классификацию уравнений для случая постоянных коэффициентов:

Определение 1. Уравнение (4) называется $\begin{cases} \text{гиперболическим} \\ \text{эллиптическим} \\ \text{параболическим} \end{cases}$ если

$$\begin{cases} n_- = 1, n_+ = n - 1 \text{ или } n_+ = 1, n_- = n - 1; \\ n_+ = n \text{ или } n_- = n; \\ n_0 > 0. \end{cases}$$

В данном случае тип уравнения сохраняется во всей области, поскольку коэффициенты постоянные. В данном случае привести уравнение (4) к каноническому виду — значит с помощью невырожденной линейной замены $y = \varphi(x)$ перейти к уравнению

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} u_{y_i y_j} + \tilde{F}(y, u, \nabla u) = 0, \quad (5)$$

в котором матрица старшей части имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

где B , C и D — диагональные матрицы размера $(n_+ \times n_+)$, $(n_- \times n_-)$ и $(n_0 \times n_0)$ соответственно

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Приведение к каноническому виду УЧП 2 порядка с постоянными коэффициентами при $n > 2$

Идея: пока что не знаем, какую замену нам нужно сделать, мы найдем ее после того, как пересчитаем коэффициенты уравнения и приведем к каноническому виду квадратичную форму с той же матрицей A .

Сделаем замену $y = \varphi(x)$ и пересчитаем производные:

$$u_{x_i} = \sum_{l=1}^n u_{y_l} \cdot (y_l)_{x_i};$$

$$u_{x_i x_j} = (u_{x_i})_{x_j} = \left(\sum_{l=1}^n u_{y_l} \cdot (y_l)_{x_i} \right)_{x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{y_l y_k} \cdot (y_l)_{x_i} \cdot (y_k)_{x_j} + \sum_{l=1}^n u_{y_l} \cdot (y_l)_{x_i x_j}$$

Подставим эти выражения в уравнение (4):

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{y_l y_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (y_l)_{x_i} \cdot (y_k)_{x_j} + \sum_{l=1}^n u_{y_l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (y_l)_{x_i x_j} + \Phi(y, u, \nabla u) = 0.$$

Обозначим

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (y_l)_{x_i} \cdot (y_k)_{x_j}, \quad (6)$$

Здесь $(y_l)_{x_i}$, $(y_k)_{x_j}$ постоянные в силу того, что матрица A постоянная. Эти коэффициенты пока не известны. Пусть $J = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$ — матрица, состоящая из частных производных $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$.

В итоге получим уравнение в каноническом виде (5)

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \tilde{a}_{kl} u_{y_l y_k} + \tilde{F}(y, u, \nabla u) = 0,$$

где \tilde{a}_{kl} — элементы матрицы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Как найти такую замену $y = \varphi(x)$, чтобы получить в старшей части диагональную матрицу \tilde{A} ?

Рассмотрим квадратичную форму вида (1) с той же матрицей A , что и у старшей части уравнения (4). Приведем ее к (нормальному) каноническому виду (2) с помощью метода Лагранжа и найдем линейную замену $\xi = T\eta$ с матрицей перехода T , где ξ и η старые и новые переменные квадратичной формы соответственно.

Посмотрим внимательно на выражение для вычисления коэффициентов квадратичной формы (3) и увидим, что это почти то же самое, что и формула для коэффициентов уравнения (6) с матрицей \tilde{A} в старшей части. *Этот факт лежит в основе метода приведения к каноническому виду и дает нам возможность связать уравнение и квадратичную форму с матрицей старшей части.*

Действительно,

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} t_{il} t_{jk} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (y_l)_{x_i} \cdot (y_k)_{x_j}$$

Здесь t_{il} , t_{jk} — элементы известной нам матрицы T . (Элементы матрицы частных производных J по-прежнему не известны, сейчас мы их найдем с помощью матрицы T !). Получается, $(y_l)_{x_i} = t_{il}$, $(y_k)_{x_j} = t_{jk}$. При этом в левой части суммирование идет по столбцам матрицы A и строкам матрицы T для j и по столбцам матрицы T и строкам матрицы A для i . В правой же части наоборот, суммирование идет по столбцам матрицы A и столбцам матрицы частных производных J для j и по строкам матрицы A и строкам матрицы частных производных J для i . Значит, $J = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) = T^T$. Поскольку замена $y = \varphi(x)$ линейная, то $y = T^T x$.

Итак, зная замену $y = T^T x$, пересчитаем производные по формулам, приведенным выше, и подставим их в уравнение. Коэффициенты старшей части нового уравнения — это элементы диагональной матрицы \tilde{A} и равны \tilde{a}_{kl} .

4. Алгоритм приведения УЧП к каноническому виду

Чтобы привести уравнение (4) к каноническому виду (5), нужно:

1) записать квадратичную форму с какими-нибудь произвольными коэффициентами ξ (они нам понадобятся только в процессе приведения квадратичной формы к каноническому виду) и той матрицей A , которая содержится в старшей части уравнения (4);

2) методом выделения полных квадратов привести квадратичную форму $(A\xi, \xi)$ к виду

$$(\tilde{A}\eta, \eta) = \sum_{i=1}^{n_+} \eta_i^2 - \sum_{j=n_++1}^{n_++n_-} \eta_j^2.$$

3) найти линейную замену $\xi = T\eta$ (на этом этапе мы закончили работать с квадратичной формой, теперь мы знаем матрицу старшей части уравнения \tilde{A} и матрицу замены T);

4) найти линейную замену для переменных уравнения $y = T^T x$;

5) выразить первые производные u_{x_i} через производные u_{y_j} , если они были в исходном уравнении (4);

6) записать полученное уравнение (5) с коэффициентами \tilde{a}_{kl} в старшей части (не равны нулю только коэффициенты при повторных производных) и подставить в младшую часть выражение для первых производных u_{x_i} через производные u_{y_j} .

Готово! Мы привели уравнение (4) к каноническому виду (5), ура!