Лекция 21

продолжение лекции 20...

Равновесное число фотонов в моде $\{\vec{k},\lambda\}$

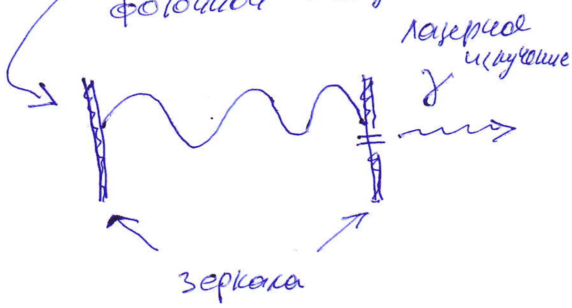
$$n_{\vec{k},\lambda} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}} - 1}$$

← этот результат получил Планк. С него началась квантовая механика, была введена постоянная $\hbar$!

Принцип работы лазера

Вернёмся к уравнению баланса для выделенной $\{\vec{k},\lambda\}$ фотонной моды

$$\frac{dn}{dt} = \dot{\omega}_0 \left[(n+1) N_{ex} - n N_{gr} \right]$$



В равновесии $N_{ex} < N_{gr}$

$$\frac{N_{ex}}{N_{gr}} = \frac{e^{-E_{ex}/k_B T}}{e^{-E_{gr}/k_B T}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} < 1$$

"Внешним образом" создаётся инверсная заселённость ← "накачка", когда $N_{ex} > N_{gr}$. Для этого нужно подводить энергию извне (включить, например, наш лазер в розетку). При этом происходят переходы между ex-атомами → gr-атомы с испусканием фотона и устанавливается большая (существенно превышающая равновесную) концентрация фотонов в выделенной моде: $n \gg n_{равнов.}$, $n \gg 1$.

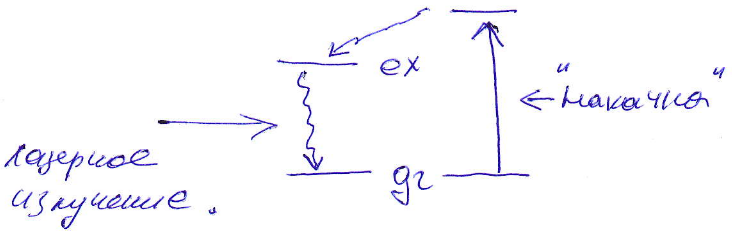
Действительно, при $n \gg 1$

$$\frac{dn}{dt} = \dot{\omega}_0 (N_{ex}-N_{gr})\cdot n \quad \Rightarrow \quad n(t) = n_0 e^{+(\dot{\omega}_0 (N_{ex}-N_{gr}))\cdot t}$$

↑ экспоненциальный рост фотонов в выделенной моде. ~~Эффект~~ индуцированного излучения.

Концентрация же фотонов в других, невыделенных модах не растет по экспоненциальн. закону.

Обычно схема работы лазера включает 3 уровня



Электрическое Дипольное излучение

Рассматриваем спонтанное излучение — $n_{\vec{k},\lambda} = 0$.

$V_{fi} \sim \vec{p}_{fi} = \langle f | \hat{\vec{p}} | i \rangle$. Для дальнейшего расчета удобно представить оператор импульса $\hat{\vec{p}} = m\frac{d\hat{\vec{r}}}{dt}$ и воспользоваться формулой $\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}]$, где $\hat{H}$ — гамильтониан.

$$\Rightarrow \vec{p}_{fi} = \frac{im}{\hbar}\langle f | \hat{H}\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}\hat{H} | i \rangle = \underbrace{\frac{im}{\hbar}(E_f - E_i)}_{= im\omega_{fi}} \underbrace{\langle f | \vec{r} | i \rangle}_{\equiv \vec{r}_{fi}}$$

вспомним, что $E_i = E_f + \hbar\omega_k$

$$\Rightarrow \omega_{fi} = -\omega_k = -\omega_{if}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{fi} = -e\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k V}}(i\omega_{fi})\cdot(\vec{r}_{fi}\cdot\vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})}$$

← матричный элемент дипольного излучения.

Если эксперимент не регистрирует поляризацию излученного фотона, необходимо по ней произвести суммирование.

$$\sum_\lambda |V_{fi}|^2 = \frac{2\pi\hbar e^2\omega_{fi}^2}{\omega_k V}\sum_\lambda \left|\left(\vec r_{fi}\cdot \vec e^{\,*}_{\vec k,\lambda}\right)\right|^2$$

Вычислим

$$\sum_\lambda \left(\vec r_{fi}\cdot\vec e^{\,*}_{\vec k,\lambda}\right)\left(\vec r^{\,*}_{fi}\cdot \vec e_{\vec k,\lambda}\right) = (r_{fi})_i (r^*_{fi})_j \sum_\lambda \left(e^*_{\vec k,\lambda}\right)_i \left(e_{\vec k,\lambda}\right)_j =$$

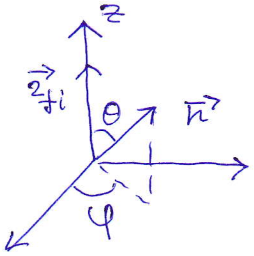
(воспользуемся формулой суммир. по поляризациям)

$$= (r_{fi})_i (r^*_{fi})_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = |\vec r_{fi}|^2 - \left|(\vec r_{fi}\cdot\vec n)\right|^2 =$$

$$= \left|[\vec r_{fi}\times\vec n]\right|^2.$$

где $\vec n \equiv \frac{\vec k}{|\vec k|}$ — единичный вектор в направл. вылета фотона.

Выберем ось z вдоль вектора $\vec r_{fi}$



Тогда

$$\left|[\vec r_{fi}\times\vec n]\right|^2 = |\vec r_{fi}|^2 \sin^2\theta$$

Итог для вероятности излучения в единицу времени

$$d\dot w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\,\delta(E_f-E_i+\hbar\omega_k)\,\frac{2\pi\hbar e^2\omega_{if}^2}{\omega_k \cancel{V}}\,|\vec r_{fi}|^2\sin^2\theta\,\frac{d^3k\,\cancel{V}}{(2\pi)^3}$$

$$\left(d^3k = k^2dk\,d\Omega = \frac{\omega_k^2\, d\omega_k}{c^3}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right)$$

$$d\dot w_{fi} = \frac{e^2\omega_{if}^3}{\hbar c^3}|\vec r_{fi}|^2\sin^3\theta\, d\theta \xrightarrow[\text{по }\theta]{\text{интеграл}} \boxed{\dot w_{fi} = \frac{4}{3}\frac{e^2\omega_{if}^3}{\hbar c^3}|\vec r_{fi}|^2}$$

Вероятность (в ед. времени) электрического дипольного излучения. E1 переход

Время жизни / ширина уровня

Рассмотрим вероятность остаться в начальном состоянии по прошествии времени – t

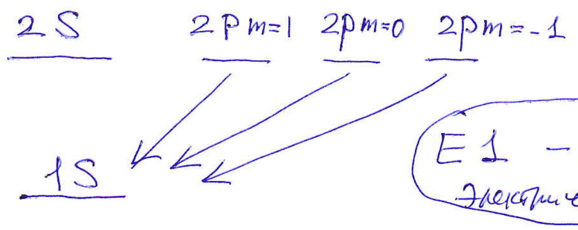
$$w_i(t) = 1 - \sum_f w_{fi}(t)$$ ← дифференцируем это соотношение по времени

$$\dot{w}_i = -\left(\sum_f \dot{w}_{fi}\right) \Rightarrow w_i(t) = 1 \cdot e^{-t/\tau_i}$$

где $\tau_i \equiv \dfrac{1}{\sum_f \dot{w}_{fi}}$ – время жизни уровня – i.

Ширина уровня $\Gamma_i = \dfrac{\hbar}{\tau_i} = \hbar\left(\sum_f \dot{w}_{fi}\right)$.

Пример: $2p \to 1s$ переход в атоме водорода



E1 – переходы
Электрически-дипольные переходы

Переход $2S \to 1S$ запрещен по чётности

$P = (-1)^l$

$$\langle 200 | \hat{\vec{r}} | 100 \rangle = 0$$

При пространств. инверсии

$\psi_{200} \to +\psi_{200}$

$\psi_{100} \to +\psi_{100}$

$\hat{\vec{r}} \to -\hat{\vec{r}}$

$$\langle 21m | \hat{\vec{r}} | 100 \rangle \neq 0 \Rightarrow$$ E1 переходы разрешены.

Нам необходимо определить

$$\langle 2,1,m|(\hat{x},\hat{y},\hat{z})|1,0,0\rangle = \int_0^\infty R_{21}(r) R_{10}(r) r^3 dr \cdot$$

$$\cdot \int d\Omega\, Y^*_{1,m}(\theta,\varphi)\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right) Y_{00}(\theta,\varphi)$$

1) $\int_0^\infty R_{21} R_{10} r^3 dr = \dfrac{2^8 a_B}{3^4\sqrt{6}}$ $\leftarrow$ проверить, используя $R_{10} = \dfrac{2e^{-r/a_B}}{a_B^{3/2}}$; $R_{21} = \dfrac{1}{\sqrt{24 a_B^3}}\left(\dfrac{r}{a_B}\right) e^{-r/(2a_B)}$

2) $Y_{00} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$ $\quad Y_{11} = \sqrt{\dfrac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi}$ $\quad Y_{1-1} = -\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{-i\varphi}$

$$Y_{10} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

Тогда

$$\frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi = \frac{(Y_{11} - Y_{1-1})}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$$

$$\frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi = \frac{(Y_{11} + Y_{1-1})}{i\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$$

$$\frac{z}{r} = \cos\theta = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_{10}$$

и для интеграла

$$\int d\Omega\, Y^*_{1m}\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\delta_{m,1}-\delta_{m,-1}}{\sqrt{2}}, \frac{\delta_{m,1}+\delta_{m,-1}}{i\sqrt{2}}, -\delta_{m,0}\right)$$

и $\left[\vec{r}_{fi}\times\vec{n}\right]$, где $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$$\vec{r}_{fi} = \frac{2^8 a_B}{3^5\sqrt{2}}\left(\delta_{m,1}\frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} - \delta_{m,-1}\frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} - \delta_{m,0}\vec{e}_z\right)$$

$$\left|\left[\vec{r}_{fi}\times\vec{n}\right]\right|^2 = \frac{2^{15}a_B^2}{3^{10}}\left[\left|n_z\frac{(\delta_{m,1}+\delta_{m,-1})}{i\sqrt{2}} + n_y\right|^2 + \left|n_x - \frac{(\delta_{m,1}-\delta_{m,-1})}{\sqrt{2}}n_z\right|^2 + \left|n_y\frac{(\delta_{m,1}-\delta_{m,-1})}{\sqrt{2}} - n_x\frac{(\delta_{m,1}+\delta_{m,-1})}{i\sqrt{2}}\right|^2\right]$$

$m = 1, -1 \qquad \left|\vec{z}_{f,i} \times \vec{n}\right|^2 = \frac{2^{15} a_B^2}{3^{10}} \frac{1+n_z^2}{2}$

$m = 0 \qquad \left|\vec{z}_{f,i} \times \vec{n}\right|^2 = \frac{2^{15} a_B^2}{3^{10}} \left(n_x^2 + n_y^2\right)$

$$\frac{d\overset{\circ}{\omega}(2p_{\pm 1} \to 1S)}{d\Omega} = \frac{2^{13} e^2 \omega_{if}^3 a_B^2}{3^{10} \pi \hbar c^3} \left(1 + \cos^2\theta\right)$$

$$\frac{d\overset{\circ}{\omega}(2p_0 \to 1S)}{d\Omega} = \frac{2^{14} e^2 \omega_{if}^3 a_B^2}{3^{10} \pi \hbar c^3} \sin^2\theta$$

Если атом водорода в начальном состоянии $2p_m$ не "поляризован" — все проекции $m = \pm 1, 0$ — равновероятны, необходимо усреднить по m

$$\frac{d\overset{\circ}{\omega}}{d\Omega}(2p \to 1S) = \frac{1}{3} \sum_{m=1,0,-1} \frac{d\overset{\circ}{\omega}(2p_m \to 1S)}{d\Omega} = \frac{2^{15} e^2 \omega_{if}^3 a_B^2}{3^{11} \pi \hbar c^3}$$

после усреднения по m получим изотропное распределение вылетающих фотонов — что очень естественно, поскольку отсутствует выделенное направление в пространстве.

Интегрируя по телесному углу $\int d\Omega \to 4\pi$

получим $\qquad \frac{1}{\tau_{2p \to 1S}} = \frac{2^{17} e^2 \omega_{if}^3 a_B^2}{3^{11} \hbar c^3}$

$\omega_{if} = \frac{E_0}{\hbar}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}\frac{E_0}{\hbar}; \quad E_0 = Ry = \frac{e^2}{2a_B}$

$$\frac{1}{\tau_{2p \to 1S}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^8 \frac{Ry}{\hbar} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3$$

$$\Gamma_{2p \to 1S} = \frac{\hbar}{\tau_{2p \to 1S}} = Ry \cdot \alpha^3 \cdot 2\left(\frac{2}{3}\right)^8; \text{ где } \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$\tau_{2p \to 1S} \approx 1.5 \cdot 10^{-9}$ секунд.