Изоморфизмы упорядоченных множеств

Определение:

Два частично упорядоченных множества A и B называются **изоморфными** (англ. *isomorphic*), если между ними существует **изоморфизм** (англ. *isomorphism*) — взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок.
Более формально, $\exists$ биекция $f: A \to B : \forall\, a_1, a_2 \in A : a_1 \leqslant a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \leqslant f(a_2)$

Определение:

Взаимно однозначное отображение частично упорядоченного множества в себя, являющееся изоморфизмом, называют **автоморфизмом** (англ.*automorphism*).

Содержание

Изоморфизм конечных множеств

Теорема (1):

Конечные линейно упорядоченные множества из одинакового числа элементов изоморфны.

Доказательство:

$\triangleright$

Конечное линейно упорядоченное множество всегда имеет наименьший элемент. Возьмём любой элемент x_1. Если он не наименьший, возьмём любой меньший него x_2. Если и он не наименьший, ещё меньший — и так далее. Получим убывающую последовательность $x_1 > x_2 > \ldots$, которая рано или поздно должна оборваться, так как множество конечное. Присвоим наименьшему элементу номер 1. Из оставшихся снова выберем наименьший элемент и присвоим ему номер 2. Будем повторять эту операцию, пока в множестве не останется непомеченных элементов. Таким образом, мы доказали, что любое такое множество из n элементов изоморфно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$. Значит, между двумя конечными линейно упорядоченными множествами из одинакового числа элементов можно построить биекцию.

$\triangleleft$

Изоморфизм счетных множеств

Теорема (2):

Любые два счётных плотных[1] линейно упорядоченных множества без наибольшего и наименьшего элементов изоморфны.

Доказательство:

▷

Пусть A и B — данные множества. Будем строить соответствие пошагово. Пусть мы сделали некоторое соответствие для подмножеств $A_n \subset A$ и $B_n \subset B$ из n элементов. Возьмем любой элемент одного из множеств (для определенности A), который не вошел в A_n. Посмотрим, в каком отношении он находится со всеми элементами из A_n. Он оказался либо наибольшим элементом, либо наименьшим элементом, либо стоящим между некоторыми элементами a_i и a_{i+1}. Найдем элемент в B, находящийся в таком же отношении со всеми элементами B_n. Мы можем это сделать, так как B — плотное множество без наибольшего и наименьшего элементов. Будем считать эти два элемента эквивалентными. Тогда, мы научились получать из соответствия для n элементов соответствие для $n+1$ элемента. Чтобы в пределе получить соответствие для всех элементов, воспользуемся счетностью множеств. Пронумеруем все элементы и на каждом четном шаге будем выбирать еще не взятый элемент из множества A с наименьшим номером, а на нечетном — из B.

◁

Примеры

- Любые равные конечные подмножества натуральных чисел изоморфны по теореме 1.
- Множество рациональных чисел некоторого интервала (a, b) и множество $\mathbb{Q}$ изоморфны по теореме 2.
- Тождественное отображение всегда является автоморфизмом.
- Не существует автоморфизма упорядоченного множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, отличного от тождественного. Для $\mathbb{Z}$ это утверждение уже, очевидно, неверно.
- Для неотрицательных вещественных чисел операция извлечения корня является автоморфизмом.

См. также

- Отношение порядка

Примечания

1. Линейно упорядоченное множество называют плотным, если в нём нет соседних элементов (то есть между любыми двумя есть третий).

Источники информации

- Н. К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. 4-е изд., доп., М: МЦНМО, 2012 (http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part1-2.pdf)
- Wikipedia — Частично упорядоченные множества
- Wikipedia — Линейно упорядоченное множество

- Эта страница последний раз была отредактирована 4 сентября 2022 в 19:44.