НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

М. В. Коробков

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конспект лекций

Новосибирск
2010

Оглавление

1 Уравнения первого порядка **1**

§1 Формулировка основ теории 1

§2 Простейшие типы уравнений первого порядка 5

§2.1 Уравнения с разделяющимися переменными 5

§2.2 Однородные уравнения 10

§2.3 Линейные уравнения 10

§2.4 Уравнения в полных дифференциалах. 10

§3 Доказательство теоремы Пикара 12

2 Системы дифференциальных уравнений **16**

§1 Основные понятия 16

§2 Теоремы о поведении непродолжаемых решений 17

§2.1 Теорема о покидании компакта 17

§2.2 Теоремы о поведении решения в вертикальной полосе . . 20

§3 Уравнения высших порядков. Сведение к системе. 22

§4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. . . 23

3 Общая теория линейных систем **25**

§1 Системы из n уравнений первого порядка 25

§1.1 Основные свойства решений 25

§1.2 Фундаментальные матрицы и их свойства 27

§1.3 Метод вариации произвольных постоянных 30

§2 Линейное уравнение n-го порядка 30

§3 Комплексные линейные системы, сведение к действительным системам. 33

4 Линейные системы с постоянными коэффициентами **34**

§1 Линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами 34

§1.1 Построение ФСР 34

§1.2 Решение линейных д.у. с неоднородностью в форме квазиполинома . . . 36
§2 Линейные системы д.у. с постоянными коэффициентами 37
§2.1 Построение ФСР . . . 37
§2.2 Матричная экспоненты и ее использование для построения решений однородных и неоднородных линейных систем . . . 38
§3 Малые колебания систем . . . 39
§3.1 Вынужденные колебания . . . 41
§4 Периодические решения д.у. . . . 42
§5 Нахождение периодических решений д.у. с помощью рядов Фурье 43

5 Зависимость решений от начальных данных и параметров 46
§1 Класс гладкости решения соответствующий гладкости правой части системы . . . 46
§2 Непрерывная зависимость решений системы от начальных данных и параметров . . . 47
§3 Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам . . . 49
§4 Метод малого параметра для отыскания периодических решений дифференциальных уравнений . . . 52
§5 Элементы аналитической теории дифференциальных уравнений 54
§5.1 Уравнения с регулярной особой точкой . . . 58

Литература 60

Глава 1

Уравнения первого порядка

Автор благодарен доц. Волокитину Е.П. за помощь при подготовке настоящей рукописи.

§1 Формулировка основ теории

Пусть D — подмножество $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на множестве D. Вначале мы будем рассматривать дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x, y). \tag{1.1}$$

Такие уравнения называют *разрешенными относительно производной*. Конечно, бывают дифференциальные уравнения и другого вида, не разрешенные относительно производной, например, $G(x, y, y') = 0$. Но мы такими уравнениями пока заниматься не будем.

Символом $\langle a, b\rangle$, где $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ и $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, обозначается промежуток на вещественной прямой, который может содержать свои концы. Таким образом, $\langle a, b\rangle$ представляет собой одно из четырех множеств: (a, b) (открытый интервал), $[a, b]$ (замкнутый отрезок), $[a, b)$ или $(a, b]$ (полуоткрытые интервалы).

Определение 1.1.1. Функция $y = \varphi(x)$, заданная на промежутке $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, называется решением уравнения (1.1), если
(i) $\forall x \in \langle a, b\rangle \quad \exists \varphi'(x) \in \mathbb{R}$;
(ii) $\forall x \in \langle a, b\rangle \quad (x, \varphi(x)) \in D$;
(iii) $\forall x \in \langle a, b\rangle \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

***Замечание* 1.1.2.** В точках a, b, если они принадлежат рассматриваемому промежутку, требуется существование соответствующих односторонних производных функции φ, для которых и проверяется тождество в (iii).

***Пример* 1.1.3.** $y' = y - x^2$, $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = y - x^2$, это линейное уравнение, легко найти общее решение $y = Ce^x + x^2 + 2x + 2$, где C — произвольная константа;

$y' = \frac{y}{x}\big(e^{\frac{y}{x}} + 1\big)$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$, это однородное уравнение, легко найти его общее решение, проходящее через точку (x_0, y_0): $\ln \frac{x}{x_0} = \int\limits_{\frac{y_0}{x_0}}^{\frac{y}{x}} ue^{-u}\, du$;

$y' = x - y^2$, $D = \mathbb{R}^2$, это уравнение Рикатти, оно не интегрируемо в квадратурах, т.е. нет решения, которое выражается через интегралы от элементарных функций.

Процесс нахождения решений уравнения (1.1) называют *интегрированием дифференциального уравнения* (1.1). Кривая в D, являющаяся графиком некоторого решения дифференциального уравнения (1.1), называется *интегральной кривой* уравнения (1.1). Решить уравнение (1.1) означает найти все его решения.

Из приведенных примеров видно, что решений дифференциального уравнения может быть бесконечно много. Чтобы из бесконечной совокупности получить одно решение, нужно задать некоторые дополнительные (начальные, граничные) условия. Кроме того, далеко не всегда решение даже простого д.у. выражается формулой через элементарные функции: зачастую решение непредставимо даже в виде интегралов от элементарных функций. В этой связи особую остроту получают вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от исходных данных решений дифференциального уравнения при заданных дополнительных условиях.

Прежде чем формулировать соответствующие теоремы, рассмотрим геометрическую интерпретацию д.у. С этой целью каждой точке $(x, y) \in D$ сопоставим прямую, проходящую через (x, y) и параллельную вектору $(1, f(x, y))$. Такое сопоставление будем называть *полем направлений*, соответствующим уравнению (1.1). Из определения решения уравнения (1.1) и геометрического смысла производной следует, что кривая в D является интегральной кривой уравнения (1.1) в том и только том случае, когда она гладкая и касательная в каждой ее точке совпадает со значением поля направлений в этой точке. Таким образом, в каждой точке $(x, y) \in D$ угол α наклона касательной к интегральной кривой д.у. (1.1) определяется из соотношения $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$.

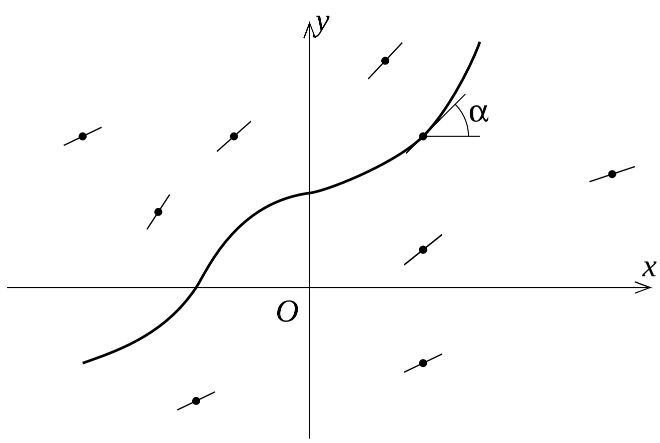

Рис. 1.

Итак, задача интегрирования д.у. (1.1) геометрически эквивалентна нахождению всех гладких кривых в D, направление касательных к которым в каждой точке D совпадает со значением поля направлений в данной точке. Этот факт лежит в основе приближенного построения интегральных кривых. При этом построении удобно использовать так называемые изоклины. *Изоклиной* поля направлений д.у. (1.1) называется множество точек $(x, y) \in D$, в которых направления поля имеют одинаковый угловой коэффициент k. Отсюда ясно, что изоклина задается уравнением $f(x, y) = k$.

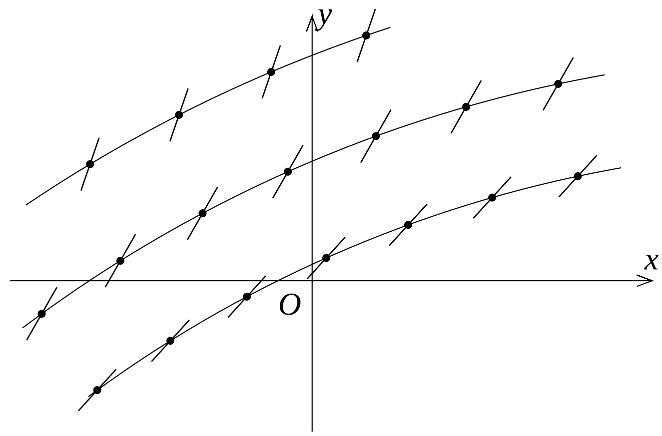

Рис. 2.

***Пример* 1.1.4.** $y' = y + x$. Изоклина, соответствующая наклону k, задается уравнением $y = k - x$. Совокупность изоклин представляет в данном случае семейство параллельных прямых.

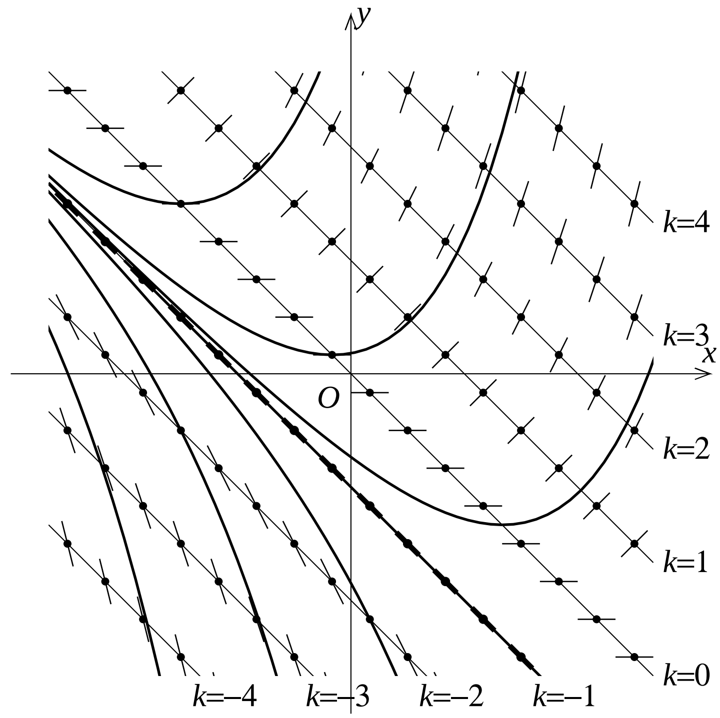

Рис. 3.

Для формулировки теорем существования и единственности нам понадобятся некоторые уточняющие понятия. Запись $\varphi(x), \langle a, b\rangle \in$ (1.1) будет означать, что функция $\varphi(x)$ задана на промежутке $\langle a, b\rangle$ и является решением дифференциального уравнения (1.1).

Определение 1.1.5. Будем говорить, что решение $\psi(x), \langle c, d\rangle \in$(1.1) продолжает решение $\varphi(x), \langle a, b\rangle \in$(1.1), если

(i) $\langle a,b\rangle \subsetneqq \langle c,d\rangle$;
(ii) $\forall x \in \langle a,b\rangle \quad \varphi(x)=\psi(x)$.

Определение 1.1.6. Решение $\varphi(x), \langle a,b\rangle \in$(1.1) называется *непродолжаемым*, если не существует ни одного продолжающего его решения $\psi(x), \langle c,d\rangle \in$(1.1).

***Пример* 1.1.7.** Рассмотрим уравнение $y' = \frac{y}{y-x^2}$, тогда $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y^2\}$. Тогда $y(x) \equiv 0$, $(-\infty, 0)$ и $y(x) \equiv 0$, $(0,+\infty)$ представляют собой два непродолжаемых решения. С другой стороны, решение $y(x) \equiv 0$, $(-\infty,-1)$ является продолжаемым, а $y(x) \equiv 0$, $(-\infty,+\infty)$ вообще не является решением рассматриваемого д.у.

Лемма 1.1.8. *Любое решение д.у. (1.1) можно достроить до непродолжаемого. Более точно, для любого продолжаемого решения $\varphi(x), \langle a,b\rangle \in$(1.1) существует непродолжаемое решение $\psi(x), \langle c,d\rangle \in$(1.1), которое продолжает $\varphi(x)$.*

Доказательство сформулированной леммы легко проводится с помощью известной леммы Цорна о максимальном элементе (на экзамене спрашиваться не будет).

Определение 1.1.9. Пусть $(x_0,y_0) \in D$. Задачей Коши с начальными данными (x_0,y_0) для уравнения (1.1) называется задача нахождения решения $y(x)$ для уравнения (1.1), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$. Соответствующая функция $y(x)$ называется решением задачи Коши (x_0,y_0).

На геометрическом языке, задача Коши с начальными данными (x_0,y_0) для уравнения (1.1) заключается в отыскании интегральной кривой для уравнения (1.1), проходящей через точку (x_0,y_0).

Напомним, что символом $C(D)$ обозначается множество всех вещественнозначных непрерывных функций, заданных на множестве D. Теперь все готово, чтобы сформулировать базовые теоремы теории о.д.у.

Теорема 1.1.10 (Теорема Пеано). *Пусть D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^2$, и пусть $f \in C(D)$. Тогда для любой точки $(x_0,y_0) \in D$ выполнены следующие утверждения:*

(I) существует хотя бы одно непродолжаемое решение задачи Коши (x_0,y_0), определенное на открытом интервале;

(II) всякое непродолжаемое решение задачи Коши (x_0,y_0) определено на открытом интервале.

***Упражнение* 1.1.11.** Покажите, что каждое из условий в Теореме 1.1.10 не являются необходимыми, т.е. заключение Теоремы 1.1.10 может выполняться и при нарушении этих условий.

***Упражнение* 1.1.12.** Покажите, что каждое из условий в Теореме 1.1.10 является существенным, т.е. при опускании этих условий заключение Теоремы 1.1.10, вообще говоря, может не выполняться.

Теорема 1.1.13 (Теорема Пикара). *Пусть D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^2$, $f \in C(D)$ и пусть $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$. Тогда для любой точки $(x_0,y_0) \in D$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши (x_0,y_0), определенное на открытом интервале $(\alpha(x_0,y_0), \omega(x_0,y_0))$, и продолжающее любое другое решение этой задачи Коши.*

На геометрическом языке это означает, что через каждую точку множества D проходит единственная интегральная кривая.

Доказательство теоремы Пикара (основанное на использовании теоремы Банаха о неподвижной точке) будет изложено позднее. Доказательство теоремы Пеано основано на весьма эффектном использовании теоремы Шаудера о неподвижной точке, однако в настоящем курсе лекций оно не проходится и не будет спрашиваться на экзамене.

§2 Простейшие типы уравнений первого порядка

§2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

A. Рассмотрим простейшее уравнение

$$y' = f(x), \tag{1.2}$$

где $f \in C((a,b))$. Ясно, что D является вертикальной полосой, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a,b)\}$, а изоклинами являются вертикальные линии в D. Легко проверяется, что наше уравнение удовлетворяет условиям теоремы Пикара, кроме того, если $y(x)$ — решение, то $y(x) + C$, $C = \text{const}$ — тоже решение. Геометрически это означает, что если мы сдвинем интегральную линию вверх или вниз, то получим снова интегральную линию.

Выведем теперь формулу для решения задачи Коши. Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in D$. Зададим функцию $y(x)$ на интервале (a,b) по формуле $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$. Легко проверяется, что эта функция является непродолжаемым решением задачи Коши (x_0, y_0), а других решений по теореме Пикара не существует. Отсюда следует, в частности, что все интегральные линии получаются параллельным переносом вверх и вниз одной из интегральных линий.

Формулу общего решения можно записать также в виде: $y(x) = F(x) + C$, где $C = \text{const}$, а $F(x)$ — некоторая (произвольно выбранная) первообразная к функции f.

B. Рассмотрим простейшее уравнение

$$y' = g(y), \tag{1.3}$$

где $g \in C((c,d))$. Ясно, что D является горизонтальной полосой, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in (c,d)\}$, а изоклинами являются горизонтальные линии в D. Легко проверяется, что если $y(x)$ — решение, то $y(x + C)$, $C = \text{const}$ — тоже решение. Геометрически это означает, что если мы сдвинем интегральную линию параллельным переносом влево или вправо, то получим снова интегральную линию.

Для того, чтобы наше уравнение удовлетворяло условиям теоремы Пикара, необходимо наложить дополнительное требование $g \in C^1((c,d))$, в противном случае единственности решений З.К. может и не быть. Забегая вперед, отметим, что интегральные кривые могут пересекаться только в точках, где $g(y) = 0$.

Чтобы получить формулу для решений З.К. (x_0, y_0), нужно рассмотреть два разных случая.

B1. $g(y_0) = 0$. Решение З.К. (x_0, y_0) задается формулой $y(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$.

B2. $g(y_0) \neq 0$. Тогда

$$\exists (c_1, d_1) \ni y_0 \quad g(y) \neq 0 \ \text{ при } y \in (c_1, d_1). \tag{1.4}$$

Рассмотрим функцию $G(y)=\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dt}{g(t)}$, заданную на интервале (c_1,d_1). Поскольку ее производная на указанном интервале сохраняет знак, эта функция будет строго монотонна, и обратная функция G^{-1} будет определена и непрерывно дифференцируема на интервале $(a,b)=G((c_1,d_1))$. Положим

$$y(x)=G^{-1}(x-x_0). \tag{1.5}$$

Ясно, что $y(x_0)=G^{-1}(0)=y_0$. По классической формуле анализа имеем $y'(x)=\frac{1}{G'(y)}=g(y)$, т.е. функция $y(x)=G^{-1}(x-x_0)$ представляет собой решение З.К. (x_0,y_0).

Хотя наше уравнение может и не быть пикаровским, других решений этой З.К. в полосе $y\in(c_1,d_1)$ не существует. В самом деле, пусть $y_1(x)$ — другое решение этой З.К. По определению решения $y_1'(x)=\frac{1}{g(y_1(x))}$. Тогда по формуле производной суперпозиции

$$[G(y_1(x))]'=\frac{y_1'(x)}{g(y_1(x))}=1,$$

следовательно, $G(y_1(x))=x+C$. Подставляя данные З.К. $y_1(x_0)=y_0$, имеем, что $G(y_1(x))=x-x_0$, поэтому решение y_1 совпадает с решением $y(x)$, определенным формулой (1.5). Эту формулу можно записать в более привлекательном виде

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dt}{g(t)}=x-x_0. \tag{1.6}$$

Все интегральные линии в рассматриваемой горизонтальной полосе $y\in(c_1,d_1)$ получаются из построенного только что решения сдвигом влево и вправо.

B3. Общий случай. Комбинация B1-B2

Если функция $g(y)$ не принадлежит классу C^1, то наклонные интегральные линии могут «прилипать» к горизонтальным интегральным линиям.

***Пример* 1.2.1.** Рассмотрим уравнение $y'=2\sqrt{|y|}$, тогда $D=\mathbb{R}^2$. Решением этого уравнения будет функция $y(x)\equiv 0$, $x\in\mathbb{R}$, а также функции $y(x)=(x-x_0)|x-x_0|$.

C. Уравнение $y'=f(\alpha x+\beta y+\gamma)$, где $\alpha,\beta,\gamma=\mathrm{const}$, сводится к предыдущему заменой $z(x)=\alpha x+\beta y+\gamma$. В самом деле,

$$z'(x)=\alpha+\beta y'(x)=\alpha+\beta f(\alpha x+\beta y+\gamma)=\alpha+\beta f(z).$$

D. Уравнение

$$y'=f(x)g(y), \tag{1.7}$$

где $f\in C((a,b))$, $g\in C((c,d))$. Ясно, что D является прямоугольником, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(a,b),\ y\in(c,d)\}$.

Для того, чтобы наше уравнение удовлетворяло условиям теоремы Пикара, необходимо наложить дополнительное требование $g\in C^1((c,d))$, в противном случае единственности решений З.К. может и не быть. Забегая вперед, отметим, что интегральные кривые могут пересекаться только в точках, где $g(y)=0$.

Чтобы получить формулу для решений З.К. (x_0,y_0), нужно рассмотреть два разных случая.

D1. $g(y_0)=0$. Решение З.К. (x_0,y_0) задается формулой $y(x)\equiv 0$, $x\in\mathbb{R}$.

D2. $g(y_0) \neq 0$. Тогда

$$\exists (c_1, d_1) \ni y_0 \quad g(y) \neq 0 \text{ при } y \in (c_1, d_1). \tag{1.8}$$

По аналогии с предыдущими выкладками, можно показать, что решение $y(x)$ задачи Коши (x_0, y_0) при $y \in (c_1, d_1)$ задается формулой

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau)\, d\tau. \tag{1.9}$$

Эту формулу легко «вывести», если записать уравнение (1.7) в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \tag{1.10}$$

затем «умножить» обе части на $\frac{dx}{g(y)}$, и проинтегрировать полученное равенство.

E. Уравнение с разделяющимися переменными в симметричной форме:

$$M(x)N(y)\, dx + P(x)Q(y)\, dy = 0. \tag{1.11}$$

где $M(x), P(x) \in C((a,b))$, $N(y), Q(y) \in C((c,d))$. Ясно, что D является прямоугольником, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a,b),\ y \in (c,d)\}$. В подобласти, где $P(x)Q(y) \neq 0$, это уравнение сводится к рассмотренному выше типу $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{M(x)N(y)}{P(x)Q(y)}$. Аналогично, в подобласти, где $M(x)N(y) \neq 0$, наше уравнение можно переписать в виде $\frac{dx}{dy} = x'_y = -\frac{P(x)Q(y)}{M(x)N(y)}$. Однако эти приемы не отличаются изяществом и вводят неоправданную ассиметрию. Гораздо лучше попытаться рассмотреть уравнение в исходной форме, но прежде чем пытаться его решить, нам следует придать точный смысл понятию решения этого уравнения.

Мы будем отталкиваться от геометрической интерпретации решения.

Определение 1.2.2. Будем говорить, что на множестве $D \subset \mathbb{R}^2$ задано *поле направлений*, если каждой точке множества D сопоставлена одна или несколько прямых, проходящих через эту точку.

Уравнение

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0. \tag{1.12}$$

порождает следующее поле направлений: каждой точке $(x,y) \in D$ сопоставляется множество проходящих через эту точку прямых, параллельных вектору (α, β), $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, со свойством $P(x,y)\alpha + Q(x,y)\beta = 0$. Отметим, что если $P(x,y) = Q(x,y) = 0$, то любая прямая, проходящая через данную точку, принадлежит полю направлений уравнения (1.11). Такие точки называются *особыми точками поля направлений*собая точка.

Определение 1.2.3. Рассмотрим функции $x = x(s)$, $y = y(s)$, заданные на промежутку $\langle a, b\rangle$. Будем говорить, что эти функции образуют *гладкую параметризованную кривую*, если $x(s), y(s) \in C^1(\langle a,b\rangle)$, и $x'^2(s) + y'^2(s) \neq 0$ для любого $s \in \langle a, b\rangle$.

Определение 1.2.4. Пусть на множестве $D \subset \mathbb{R}^2$ задано некоторое поле направлений. Гладкая параметризованная кривая $\langle a,b\rangle \ni s \mapsto (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$ называется *интегральной линией* данного поля направлений, если для любого $s \in \langle a,b\rangle$ касательный вектор $(x'(s), y'(s))$ параллелен направлению поля в точке $(x(s), y(s))$. (Другими словами, касательная к нашей кривой в точке $(x(s), y(s))$ является значением (или одним из значений) поля направлений в этой точке.)

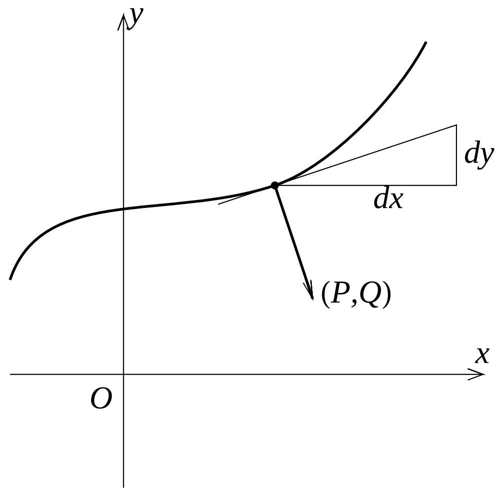

Рис. 4.

Окончательно получаем, что гладкая параметризованная кривая $(x(s), y(s))$ является интегральной линией поля направлений уравнения (1.12) в том и только том случае, если

$$P(x(s), y(s))x'(s) + Q(x(s), y(s))y'(s) \equiv 0. \tag{1.13}$$

Такие линии будем сокращенно называть интегральными линиями уравнения (1.12).

***Пример* 1.2.5.** Рассмотрим уравнение

$$x\,dx + y\,dy = 0. \tag{1.14}$$

Направление поля в каждой точке перпендикулярно радиус-вектору этой точки. Точка $(0, 0)$ — особая. Интегральные линии представляют собой окружности $x^2 + y^2 = C^2$. Их можно параметризовать, например, следующим образом: $x(s) = C\cos s$, $y(s) = C\sin s$. Через точку $(0, 0)$ не проходит ни одной интегральной линии.

***Пример* 1.2.6.** Рассмотрим уравнение

$$y\,dx - x\,dy = 0. \tag{1.15}$$

Направление поля в каждой точке параллельно радиус-вектору этой точки. Точка $(0, 0)$ — особая. Интегральные линии представляют собой прямые линии, проходящие через $(0, 0)$, $\frac{y}{x} = C$ или $x = 0$. Эти линии можно параметризовать следующим образом: $x(s) = C_1 s$, $y(s) = C_2 s$. Через точку $(0, 0)$ проходит бесконечно много интегральных линий.

Лемма 1.2.7. *Рассмотрим уравнение (1.12) с $P, Q \in C^1(D)$, D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что*

$$Q(x, y) \neq 0 \ \text{ в } D. \tag{1.16}$$

Тогда гладкая параметризованная кривая $(x(s), y(s))$, $\langle a, b\rangle$ является интегральной линией уравнения (1.12) в том и только том случае, когда она представляет собой график C^1-гладкой функции $y = \varphi(x)$, являющейся решением уравнения

$$y'_x = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{1.17}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть гладкая параметризованная кривая $(x(s), y(s))$, $\langle a, b\rangle$ является интегральной линией уравнения (1.12). Тогда

$$\forall s \in \langle a, b\rangle \quad x_s'(s) \neq 0. \tag{1.18}$$

В самом деле, если бы $x_s'(s_0) = 0$, то из формул (1.13), (1.16) следовало бы, что $y_s'(s_0) = 0$, а это противоречит определению гладкой кривой.

Из только что доказанной формулы (1.18) вытекает, что отображение $\langle a, b\rangle \ni s \mapsto x(s)$ строго монотонно, поэтому существует обратное к нему отображение $s(x)$, определенное на некотором промежутке $\langle c, d\rangle$. Из той же формулы (1.18) вытекает, что $s(x) \in C^1(\langle c, d\rangle)$, причем $s_x'(x) \equiv \frac{1}{x_s'(s)}$. Положим $\varphi(x) = y(s(x))$. Тогда $\varphi'(x) = \frac{y_s'(s)}{x_s'(s)} = -\frac{P(x(s),y(s))}{Q(x(s),y(s))}$, где в последнем равенстве мы воспользовались формулой (1.13).

$\Leftarrow$ Доказательство проводится аналогично. $\square$

Теорема 1.2.8. *Рассмотрим уравнение (1.12) с $P, Q \in C^1(D)$, D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что соответствующее поле направлений не имеет особых точек. Тогда через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит единственная (с точностью до параметризации) непродолжаемая интегральная линия уравнения (1.12), заданная на некотором открытом интервале и продолжающая любую другую интегральную линию данного поля направлений, проходящую через (x_0, y_0).*

Доказательство Теоремы 1.2.8 проводится использованием теоремы Пикара и Леммы 1.2.7. Оно не будет спрашиваться на экзамене. $\square$

Теорема 1.2.9. *Рассмотрим уравнение*

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0. \tag{1.19}$$

с $M(x), P(x) \in C((a, b))$, $N(y)$, $Q(y) \in C((c, d))$, и пусть $(x_0, y_0) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b),\ y \in (c, d)\}$. Тогда справедливы следующие утверждения

(i) Если $P(x_0) = 0$, то отрезок горизонтальной прямой $x \equiv x_0$, лежащий в области D, является интегральной линией уравнения (1.19).

(ii) Если $N(y_0) = 0$, то отрезок вертикальной прямой $y \equiv y_0$, лежащий в области D, является интегральной линией уравнения (1.19).

(iii) Если в области D $P(x) \neq 0 \neq N(y)$, то эта для каждой точки (x, y) интегральной линии, проходящей через (x_0, y_0), справедливо тождество

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{Q(t)}{N(t)}\,dt + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{M(\tau)}{P(\tau)}\,d\tau = 0. \tag{1.20}$$

(iv) Если выполнены предположения (iii), и, кроме того, поле направлений (1.19) не имеет особых точек, то существует единственная (с точностью по параметризации) непродолжаемая интегральная линия уравнения (1.19), заданная на некотором открытом интервале и продолжающая любую другую интегральную линию, проходящую через (x_0, y_0).

Доказательство Теоремы 1.2.9 легко проводится использованием соответствующих определений (в духе пунктов А–В) и оставляется читателю в качестве полезного упражнения. $\square$

Следующий далее материал этого пункта можно опустить при первом чтении. Он предназначен тем, кто желает понять точный смысл слов "единственная с точностью до параметризации непродолжаемая интегральная линия"в сформулированных выше теоремах. Нам понадобится еще несколько определений.

Определение 1.2.10. Две гладкие параметризованные кривые $(x(s), y(s))$, $\langle a, b\rangle$ и $(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$, $\langle c, d\rangle$ называются *эквивалентными*, если существует взаимнооднозначное отображение $\varphi : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$, $\varphi \in C^1(\langle a, b\rangle)$, $\varphi^{-1} \in C^1(\langle c, d\rangle)$, такое, что $x(s) = \tilde{x}(\varphi(s))$ и $y(s) = \tilde{y}(\varphi(s))$ для всех $s \in \langle a, b\rangle$.

Введенное отношение в самом деле удовлетворяет всем аксиомам отношения эквивалентности, т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Фактически в математике гладкой кривой называется класс эквивалентности гладких параметризованных кривых по этому отношению. Другими словами, гладкие параметризованные кривые, эквивалентные в смысле Определения 1.2.10, отождествляются, или про них говорят еще, что они суть две параметризации одной и той же гладкой кривой. Такое отождествление оправдывает

Лемма 1.2.11. *Если две гладкие параметризованные кривые эквивалентны, и одна из них является интегральной линией некоторого поля направлений, то другая также является интегральной линией того же поля направлений.*

Данная лемма моментально вытекает из соответствующих определений.

Определение 1.2.12. Говорят, что *гладкая кривая* γ_2 *продолжает гладкую кривую* γ_1, если существует параметризации $(x_1(s), y_1(s))$, $\langle a_1, b_1\rangle$ кривой γ_1 и $(x_2(s), y_2(s))$, $\langle a_2, b_2\rangle$ кривой γ_2 такие, что $\langle a_1, b_1\rangle \subsetneqq \langle a_2, b_2\rangle$ и $x_1(s) = x_2(s), y_1(s) = y_2(s)$ для всех $s \in \langle a_1, b_1\rangle$.

Определение 1.2.13. Интегральная линия поля направлений называется *непродолжаемой*, если не существует продолжающей ее интегральной линии того же поля.

Лемма 1.2.14. *Если интегральная линия некоторого поля направлений не является непродолжаемой, то ее можно продолжить до непродолжаемой интегральной линии того же поля.*

Доказательство данной леммы проводится применением известной Леммы Цорна из теории множеств; мы его опускаем.

§2.2 Однородные уравнения

§2.3 Линейные уравнения

A. Однородные и неоднородные линейные уравнения
B. Уравнение Бернулли.
C. Уравнение Рикатти.

Этот материал стандартно излагается практически во всех учебниках (см., например, [7], [6]), он подробно проходится на семинарах, поэтому в данном конспекте лекций мы его опускаем (хотя он будет спрашиваться на экзаменах!).

§2.4 Уравнения в полных дифференциалах.

Определение 1.2.15. Пусть на открытом непустом множестве $D \subset \mathbb{R}^2$ задано уравнение

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0, \tag{1.21}$$

где $P, Q \in C(D)$. Говорят, что это уравнение является *уравнением в полных дифференциалах*, если существует функция $U(x, y) \in C^1(D)$ такая, что

$$U_x(x, y)\left(= \frac{\partial U}{\partial x}(x, y)\right) = P(x, y), \quad U_y(x, y)\left(= \frac{\partial U}{\partial y}(x, y)\right) = Q(x, y) \tag{1.22}$$

для всех $(x, y) \in D$. В этом случае функцию U называют *потенциалом* поля направлений (1.21).

Уравнения интегральных линий в этом случае записываются особенно просто.

Теорема 1.2.16. *Пусть дано уравнение в полных дифференциалах (1.21). Тогда для каждой его интегральной линии $(x(s), y(s))$, $\langle a, b\rangle$ справедливо тождество*

$$U(x(s), y(s)) \equiv \text{const} \quad \text{на } \langle a, b\rangle. \tag{1.23}$$

Обратно, если для гладкой линии $(x(s), y(s))$, $\langle a, b\rangle$ справедливо тождество (1.23), то эта линия является интегральной линией уравнения (1.21).

Доказательство Теоремы 1.2.16. $\Rightarrow$ Пусть $(x(s), y(s))$, $\langle a, b\rangle$ является интегральной линией уравнения (1.21). Тогда $P(x(s), y(s))\dot{x}(s) + Q(x(s), y(s))\dot{y}(s) = 0$. Вспоминая определения потенциала, мы можем преобразовать это равенство следующим образом $U_x(x, y)\dot{x}(s) + U_y(x, y)\dot{y}(s) = 0$. Это, в свою очередь, эквивалентно тождеству $\frac{dU(x(s),y(s))}{ds} = 0$, откуда получаем искомое свойство (1.23).

$\Leftarrow$ Пусть гладкая линия $(x(s), y(s))$, $\langle a, b\rangle$ обладает свойством (1.23). Тогда

$$0 = \frac{dU(x(s), y(s))}{ds} = U_x(x, y)\dot{x}(s) + U_y(x, y)\dot{y}(s) = P(x, y)\dot{x}(s) + Q(x, y)\dot{y}(s).$$

Следовательно, эти линия является интегральной линией уравнения (1.21). $\square$

Конечно, далеко не всякое уравнение является полем направлений в полных дифференциалах.

Определение 1.2.17. Пусть $P, Q \in C^1(D)$, D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^2$. Выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ называется *дифференциальной формой первого порядка*. Эта форма называется *точной*, если уравнение (1.21) в полных дифференциалах. Эта форма называется *замкнутой*, если справедливо тождество

$$\forall (x, y) \in D \quad P_y(x, y) = Q_x(x, y). \tag{1.24}$$

Теорема 1.2.18. *Пусть задана дифференциальная форма $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ с $P, Q \in C^1(D)$, где D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^2$. Тогда, если эта форма точная, то она замкнутая. Если же D является односвязной областью, т.е. D представляет собой открытое связное множество, такое, что любую замкнутую кривую, лежащую в D, можно стянуть в точку, принадлежащую D, то верен и обратный факт: всякая замкнутая 1-форма на D является точной.*

Доказательство Теоремы 1.2.18. В одну сторону эта теорема следует из равенства смешанных производных у дважды дифференцируемой функции. В другую сторону она следует из классической леммы Пуанкаре. $\square$

***Пример* 1.2.19.** Рассмотрим 1-форму

$$\frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy \tag{1.25}$$

Здесь $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Легко видеть, что эта форма замкнутая, но не точная. Если же сделать разрез, превращающий D в односвязную область, т.е. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 0,\, x \geq 0\}$, то тогда рассмотренная форма является точной, в качестве потенциала можно взять величину угловой координаты точки (x, y), сосчитанной в системе полярных координатах (напомним, что эта величина равна $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ при $y > 0, x > 0$).

Определение 1.2.20. *Интегралом поля направлений* называется непостоянная функция $F(x, y)$ такая, что $F = \mathrm{const}$ на любой интегральной линии этого поля.

А. Автомодельный интегрирующий множитель для однородного поля направлений.

В. Уравнение Дарбу.

Указанные темы, хотя и не вошли пока в настоящий электронный конспект, подробно обсуждались на лекциях и семинарах и будут спрашиваться на экзамене.

§3 Доказательство теоремы Пикара

Пусть, как и прежде, задано уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1.26}$$

где $f \in C(D)$, D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^2$.

Сейчас мы опишем один приём, который играет важнейшую роль при изучении дифференциальных уравнений: сведение дифференциального уравнения к интегральному. Хотя, на первый взгляд, интегральное уравнение выглядит даже сложнее дифференциального, теоремы существования и единственности решения для него нередко доказываются проще. Это связано с тем, что соответствующий интегральный оператор, в отличие от исходного дифференциального оператора, обладает важными свойствами непрерывности и компактности.

Зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in D$. Рассмотрим *отображение Пикара*, которое каждой непрерывной функции $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, график которой лежит в D, сопоставляет функцию $\Pi\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$\Pi\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt. \tag{1.27}$$

Теорема 1.3.1. *Непрерывная функция $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, график которой лежит в D, является решением задачи Коши (x_0, y_0) для уравнения (1.26) тогда и только тогда, когда φ является неподвижной точкой отображения Π, т.е. $\Pi\varphi = \varphi$, или, более развернуто,*

$$\forall x \in \langle a, b\rangle \quad \Pi\varphi(x) = \varphi(x). \tag{1.28}$$

Доказательство Теоремы 1.3.1. Вполне очевидно. □

Определение 1.3.2. Пусть (Y, d) — метрическое пространство (здесь символом $d(x, y)$ обозначается расстояние между элементами $x, y \in Y$). Отображение $\Phi : Y \to Y$ называется *сжимающим*, если найдется константа $c \in (0, 1)$ такая, что

$$\forall x, y \in Y \quad d(\Phi(x), \Phi(y)) \le c\, d(x, y). \tag{1.29}$$

Теорема 1.3.3 (теорема Банаха о неподвижной точке). *Пусть (Y, d) — полное метрическое пространство, и $\Phi : Y \to Y$ — сжимающее отображение. Тогда существует единственная точка $y_* \in Y$, для которой справедливо равенство*

$$\Phi(y_*) = y_*. \tag{1.30}$$

Доказательство Теоремы 1.3.3. Возьмем произвольно $y_0 \in Y$ и зададим последовательность $y_n \in Y$, используя рекуррентное соотношение $y_{n+1} = \Phi(y_n)$. Использованием определения сжимающего отображения и элементарных оценок частичных сумм геометрической прогрессии легко проверяется, что эта последовательность является фундаментальной в смысле Коши. В самом деле, по индукции $d(y_n, y_{n+1}) \leq c^n d(y_0, y_1)$, откуда, применяя неравенство треугольника, получаем

$$d(y_n, y_{n+k}) \leq d(y_n, y_{n+1})+d(y_{n+1}, y_{n+2})+\cdots+d(y_{n+k-1}, y_{n+k}) \leq c^n d(y_0, y_1)(1+c+\cdots+c^{k-1}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(y_0, y_1). \tag{1.31}$$

Поэтому, ввиду полноты пространства Y, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, обозначим этот предел символом y_*. Вследствие непрерывности отображения Φ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(y_n) = \Phi(y_*). \tag{1.32}$$

С другой стороны, из определения последовательности y_n получаем

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} y_n = y_*. \tag{1.33}$$

Из последних двух равенств вытекает искомое соотношение (1.30).

Докажем единственность точки y_*. Предположим, что существуют две различные точки $y_{*1}, y_{*2} \in Y$ со свойствами $\Phi(y_{*1}) = y_{*1}$, $\Phi(y_{*2}) = y_{*2}$. Тогда $d(\Phi(y_{*1}), \Phi(y_{*2})) = d(y_{*1}, y_{*2}) > 0$. С другой стороны, в силу определения сжимающего отображения $d(\Phi(y_{*1}), \Phi(y_{*2})) \leq c\, d(y_{*1}, y_{*2})$ для некоторого $c \in (0, 1)$. Получили очевидное противоречие, которое завершает доказательство Теоремы (1.3.3). □

***Замечание* 1.3.4.** Из оценок (1.31) вытекает оценка $d(y_n, y_*) \leq \frac{c^n}{1-c} d(y_0, y_1)$.

Чтобы применить приведенную выше теорему Банаха о неподвижной точке, нам нужно аккуратно описать полное метрическое пространство, в котором действует отображение Пикара П.

Зафиксируем произвольно точку $(x_0, y_0) \in D$. Поскольку D есть открытое множество, то найдутся числа $\alpha, \beta > 0$ такие, что замкнутый прямоугольник $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq \alpha,\ |y - y_0| \leq \beta\}$ лежит в D. Обозначим $M = \sup\limits_{(x,y)\in P} |f(x, y)|$, $h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$. (Напомним, что по теореме Вейерштрасса всякая непрерывная функция принимает на компактном множестве свое наибольшее и наименьшее значение, поэтому $M < \infty$.) Пусть промежуток $[a, b] \subset [x_0 - h, x_0 + h]$ содержит точку x_0. Обозначим через X множество всех непрерывных функций $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(x_0) = y_0$ и график φ лежит в P.

Лемма 1.3.5. *Если функция φ является решением З.К. (x_0, y_0), определенным на отрезке $[a, b]$ (здесь x_0, y_0, a, b удовлетворяют сформулированным выше ограничениям), то оно принадлежит пространству X.*

Доказательство Леммы 1.3.5 проводится использованием соответствующих определений и следующей оценки, вытекающей из теоремы Лагранжа о среднем значении: если график решения φ на отрезке между точками x_0 и $x_0 + \Delta$ лежит в P и $|\Delta| < h$, то

$$|\varphi(x_0) - \varphi(x_0 + \Delta)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |\Delta| = |f(\xi, \varphi(\xi))| \cdot |\Delta| \leq M|\Delta| < \beta.$$

□

Лемма 1.3.6. *Если $\varphi \in X$, то $\Pi\varphi \in X$. Далее, функция $\Pi\varphi$ является C^1-гладкой, причем*

$$\forall x, y \in [a, b] \quad |\Pi\varphi(x) - \Pi\varphi(y)| \leq M|x - y|. \tag{1.34}$$

Доказательство Леммы 1.3.6 легко проводится использованием соответствующих определений и теоремы Лагранжа о среднем значении. □

Как известно из анализа, введенное выше множество X представляет собой полное метрическое пространство относительно равномерной метрики $d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$. Чтобы оператор Π был сжимающим, необходимо воспользоваться дополнительным условием, которое фигурирует в теореме Пикара. А именно, ниже будем предполагать, что, помимо сформулированных выше условий, выполнено также условие

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \in C(D). \tag{1.35}$$

Тогда обозначим $M_1 = \sup\limits_{(x,y) \in P} \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$. Ниже будем предполагать также, что промежуток $[a, b]$, который фигурировал в определении пространства X, удовлетворяет дополнительному условию

$$[a, b] \subset [x_0 - \frac{1}{2M_1}, x_0 + \frac{1}{2M_1}]. \tag{1.36}$$

Лемма 1.3.7. *При сформулированных выше условиях оператор Π является сжимающим в пространстве X.*

Доказательство Леммы 1.3.7 легко проводится использованием соответствующих определений и теоремы Лагранжа о среднем значении. □

Промежуточный итог наших исследований подводит следующая

Теорема 1.3.8 (локальная теорема существования и единственности задачи Коши). *Пусть выполнены предположения теоремы Пикара. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ найдется число h_0 такое, что для любого промежутка $[a, b] \subset [x_0 - h_0, x_0 + h_0]$, $x_0 \in [a, b]$, существует единственное решение З.К. (x_0, y_0), определенное на $[a, b]$.*

Доказательство Теоремы 1.3.8. Возьмем произвольно точку $(x_0, y_0) \in D$ и зафиксируем ее. В качестве h_0 выберем

$$h_0 = \min(h, \frac{1}{2M_1}) = \min(\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{2M_1}) \tag{1.37}$$

(входящую в формулу (1.37) величины определяются так, как указано выше).

Согласно Теореме 1.3.1 и Леммам 1.3.5, 1.3.6 отображение φ является решением З.К. (x_0, y_0), определенным на отрезке $[a, b]$, в том и только том случае, когда оно является неподвижной точкой отображения Пикара $\Pi : X \to X$. Но по теореме Банаха 1.3.3 отображение $\Pi : X \to X$ имеет в точности одну неподвижную точку. Отсюда прямо следует искомое утверждение Теоремы 1.3.8. □

***Замечание* 1.3.9.** Доказательство теоремы Банаха дает конструктивный способ отыскания решения З.К. (x_0, y_0). В самом деле, нужно взять последовательность заданных на $[a, b]$ функций $y_0(x) \equiv y_0$, $y_{n+1}(x) = \Pi y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt$. В силу предыдущих выкладок, такая последовательность будет сходиться в равномерной норме к искомому решению $y(x)$ З.К. (x_0, y_0) на отрезке $[a, b]$, если выполнено включение $[a, b] \subset [x_0 - h_0, x_0 + h_0]$. Из замечания 1.3.4 вытекает оценка $\sup\limits_{x \in [a,b]} |y_n(x) - y(x)| \leq \frac{\beta}{2^{n-1}}$. Чуть более тонкими рассуждениями можно доказать, что на самом деле указанная сходимость имеет место и на более широком интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$, причем справедлива оценка $\sup\limits_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |y_n(x) - y(x)| \leq M \frac{M_1^n h^{n+1}}{(n+1)!} e^{M_1 h}$.

Лемма 1.3.10. *Пусть выполнены предположения теоремы Пикара,* $(x_0, y_0) \in D$ *и* y_1, y_2 *— два решения З.К.* (x_0, y_0), *определенные на промежутках* $\langle a_1, b_1 \rangle$, $\langle a_2, b_2 \rangle$ *соответственно. Тогда* $y_1(x) \equiv y_2(x)$ *на* $\langle a_1, b_1 \rangle \cap \langle a_2, b_2 \rangle$.

Лемма 1.3.11. *Пусть выполнены предположения теоремы Пикара,* $(x_0, y_0) \in D$ *и* y_1, y_2 *— два решения З.К.* (x_0, y_0), *определенные на промежутках* $\langle a_1, b_1 \rangle$, $\langle a_2, b_2 \rangle$ *соответственно. Предположим, что* $\langle a_2, b_2 \rangle \not\subseteq \langle a_1, b_1 \rangle$. *Тогда решение* y_1 *можно продолжить.*

Доказательство теоремы Пикара (см. Теорему 1.1.13). Пусть выполнены условия теоремы Пикара. Возьмем произвольно точку $(x_0, y_0) \in D$ и зафиксируем ее. По теореме 1.3.8 (локальной теореме существования и единственности задачи Коши) существует хотя бы одно решение З.К. (x_0, y_0). Тогда по лемме 1.1.8 существует непродолжаемое решение y_1 данной З.К., определенное на промежутке $\langle a_1, b_1 \rangle$. Пусть $y_2(x)$ — любое другое решение той же З.К., определенное на $\langle a_2, b_2 \rangle$. Тогда по леммам 1.3.10–1.3.11 имеем, что $\langle a_2, b_2 \rangle \subset \langle a_1, b_1 \rangle$ и $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на $\langle a_2, b_2 \rangle$. Другими словами, либо решения y_1, y_2 совпадают, либо y_1 продолжает y_2. Отсюда сразу же вытекает, что существует единственное непродолжаемое решение З.К. (x_0, y_0), продолжающее любое другое решение этой З.К. Осталось доказать только, что интервал $\langle a_1, b_1 \rangle$ открытый. Допустим, напротив, что $b_1 \in \langle a_1, b_1 \rangle$. Обозначим $\xi = y_1(b_1)$. Тогда по сказанному выше, $y_1(x)$ является непродолжаемым решение З.К. (b_1, ξ), продолжающим любое другое решение этой З.К. Однако, $y_1(x)$, определенное только левее b_1, не может продолжать решение З.К. (b_1, ξ), определенное в окрестности точки b_1 (существование такого решения гарантируется Теоремой 1.3.8). Получили противоречие, которое завершает доказательство теоремы Пикара. □

Глава 2

Системы дифференциальных уравнений

§1 Основные понятия

В дальнейшем, как и принято, символом $\dot{y}$ обозначается производная по t функции $y = y(t)$.

В этой главе мы будем рассматривать системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{2.1}$$

Такая система называется *нормальной системой из n уравнений 1-го порядка*. Ее удобно записывать в векторной форме:

$$\dot{X} = F(t, X), \tag{2.2}$$

где $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, X) \\ \vdots \\ f_n(t, X) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Область определения функции F мы будем обозначать через D. Ясно, что $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Определение решения вводится по аналогии с одномерным случаем.

Определение 2.1.1. Функция $\varphi : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ называется решением уравнения (2.2), если

(i) $\forall t \in \langle a, b \rangle \quad \exists \varphi'(t) \in \mathbb{R}$;
(ii) $\forall t \in \langle a, b \rangle \quad (t, \varphi(t)) \in D$;
(iii) $\forall t \in \langle a, b \rangle \quad \varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$.

График решения уравнения (2.2) называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Также по аналогии с одномерным случаем вводится понятие задачи Коши.

Определение 2.1.2. Пусть $(\tau, \xi) \in D$, где $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Задачей Коши с начальными данными (τ, ξ) для уравнения (2.2) называется задача нахождения решения $X(t)$ уравнения (2.2), удовлетворяющего начальным условиям

$$X(\tau) = \xi. \tag{2.3}$$

Соответствующая функция $X(t)$ называется решением задачи Коши (τ, ξ).

На геометрическом языке, задача Коши с начальными данными (τ, ξ) для уравнения (2.2) заключается в отыскании интегральной кривой для уравнения (2.2), проходящей через точку (τ, ξ).

Напомним, что символом $C(D, \mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех непрерывных функций, заданных на множестве D со значениями в $\mathbb{R}^n$. Теперь все готово, чтобы сформулировать базовые теоремы теории о.д.у. для систем.

Теорема 2.1.3 (Теорема Пеано для систем). *Пусть D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $F \in C(D, \mathbb{R}^n)$. Тогда для любой точки $(\tau, \xi) \in D$ выполнены следующие утверждения:*

(I) существует хотя бы одно непродолжаемое решение задачи Коши (τ, ξ), определенное на открытом интервале;

(II) всякое непродолжаемое решение задачи Коши (τ, ξ) определено на открытом интервале.

Теорема 2.1.4 (Теорема Пикара для систем). *Пусть D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, $F \in C(D, \mathbb{R}^n)$ и пусть $\forall j = 1, \ldots, n$ $\exists \frac{\partial F}{\partial x_j} \in C(D, \mathbb{R}^n)$. Тогда для любой точки $(\tau, \xi) \in D$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши (τ, ξ), определенное на открытом интервале $(\alpha(\tau, \xi), \omega(\tau, \xi))$, и продолжающее любое другое решение этой задачи Коши.*

Доказательство теорем Пеано и Пикара для систем опускается и не будет спрашиваться на экзамене. Отметим только, что оно вполне аналогично доказательству соответствующих теорем для уравнений 1-го порядка. $\square$

§2 Теоремы о поведении непродолжаемых решений

§2.1 Теорема о покидании компакта

Для вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ символом $|X|$ обозначается, как и принято, гильбертова норма $|X| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Нам понадобится

Лемма 2.2.1. *Пусть D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, $F \in C(D, \mathbb{R}^n)$, и пусть $(\tau, \xi) \in D$. Возьмем произвольный прямоугольник $P = \{(t, X) \in \mathbb{R}^{n+1} \; : \; |t - \tau| \le a, \; |X - \xi| \le b$, где величины $a, b > 0$ выбраны так, чтобы выполнялось включение $P \subset D$. Обозначим $M = \sup\limits_{(t,X) \in P} |F(t, X)|$, $h = \min(a, \frac{b}{M})$. . Тогда для любого непродолжаемого решения $X(t)$ З.К. (2.2)–(2.3), определенного на интервале (α, ω), справедлива оценка $\min(\tau - \alpha, \omega - \tau) > h$.*

Доказательство Леммы 2.2.1. Нам понадобится следующее следствие из теоремы Лагранжа о среднем значении: для всякой дифференцируемой функции $X : (\alpha, \omega) \to \mathbb{R}^n$

$$\forall [t_1, t_2] \subset (\alpha, \omega) \quad |X(t_2) - X(t_1)| \le |t_2 - t_1| \sup_{t \in (t_1, t_2)} |\dot{X}(t)|. \tag{2.4}$$

Пусть выполнены все условия доказываемой леммы. Будем доказывать от противного. Предположим, для определенности, что

$$\omega - \tau \le h. \tag{2.5}$$

Докажем сначала, что

$$\forall t \in [\tau, \omega) \quad (t, X(t)) \in P. \tag{2.6}$$

Предположим противное, тогда обозначим $\Delta = \sup\{s \,:\, \forall t \in [\tau, \tau + s] \quad (t, X(t)) \in P\}$. Поскольку мы предположили, что утверждение (2.6) не выполнено, то

$$\Delta < \omega \quad \text{и} \quad |X(\tau + \Delta) - \xi| = |X(\tau + \Delta) - X(\tau)| = b. \tag{2.7}$$

Соединяя вместе формулы (2.5), (2.7), (2.4) и учитывая определение M, Δ получаем, что

$$b = |X(\tau + \Delta) - \xi| \le M\Delta < M\omega \le Mh \le b.$$

Полученное противоречие завершает доказательство формулы (2.6). Далее, используя эту только что доказанную формулу вместе с (2.4), нетрудно вывести, что $\exists \lim\limits_{t\to\omega-0} X(t)$. Обозначим этот предел через X_ω. В силу замкнутости прямоугольника P, $(\omega, X_\omega) \in P$. Поэтому $\exists \lim\limits_{t\to\omega-0} \dot{X}(t) = \lim\limits_{t\to\omega-0} F(t, X(t)) = F(\omega, X_\omega)$. Рассмотрим новую функцию $X_1 : (\alpha, \omega] \to \mathbb{R}^n$, заданную по правилу

$$X_1(t) = \begin{cases} X(t), & t \in (\alpha, \omega); \\ X_\omega, & t = \omega. \end{cases}$$

Стандартными средствами математического анализа нетрудно убедиться, что эта функция является решением уравнения (2.2). По построению решение $X_1(t)$ продолжает решение $X(t)$, что противоречит исходному предположению о непродолжаемости $X(t)$. Лемма 2.2.1 доказана. □

Напомним, что множество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Известны следующие свойство компактных множеств:

(K1) Любая непрерывная функция, определенная на компактном множестве, достигает на нем своего максимального и минимального значения (Теорема Вейерштрасса).

(K2) Если множество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, а множество $E \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, причем $K \cap E = \emptyset$, то $\inf\limits_{X_1 \in K,\ X_2 \in E} |X_1 - X_2| > 0$.

Теорема 2.2.2 (Теорема о покидании компакта). *Пусть D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, $F \in C(D, \mathbb{R}^n)$, и пусть $X(t)$ есть непродолжаемое решение уравнения (2.2), определенное на интервале (α, ω). Тогда для любого компакта $\Gamma \subset D$ найдутся числа $r_-, r_+ \in (\alpha, \omega)$ такие, что $r_- < r_+$ и*

$$\forall t \in (\alpha, r_-) \cup (r_+, \omega) \quad (t, X(t)) \notin \Gamma. \tag{2.8}$$

Доказательство Теоремы 2.2.2. Достаточно доказать только утверждение, относящееся к r_+, остальное делается по аналогии. Если $\omega = +\infty$, то доказывать, собственно говоря, нечего: в качестве r_+ можно взять $\max\{\alpha + 1, \sup\limits_{(t,X)\in\Gamma} t\}$ (см. рис. 5). Предположим теперь, что $\omega \in \mathbb{R}$ (см. рис. 6). В силу компактности множества $\Gamma \subset D$ и свойства (K2) (в нашей ситуации роль множеств K и E из свойства (K2) играют Γ и $\mathbb{R}^{n+1} \setminus D$ соответственно) существует пара чисел $a, b > 0$ такие, что

$$\forall (\tau, \xi) \in \Gamma \quad P_{a,b}^{(\tau,\xi)} := \{(t, X) \,:\, |t - \tau| \le a,\ |X - \xi| \le b\} \subset D.$$

Легко проверяется, что множество $\Gamma_1 = \bigcup\limits_{(\tau,\xi)\in\Gamma} P_{a,b}^{(\tau,\xi)}$ также является компактным, причем $\Gamma_1 \subset D$. Отсюда вытекает конечность величины $M = \sup\limits_{(t,X)\in\Gamma_1} |F(t,X)|$. Обозначим $h = \min(a, \frac{b}{M})$. Теперь возьмем в качестве r_+ любую точку из (α,ω), удовлетворяющую оценке $\omega - r_+ < h$. Утверждается, что такое значение r_+ удовлетворяет утверждению доказываемой теоремы. Предположим противное, тогда $\exists \tau \in (r_+,\omega)$ такое, что $(\tau,\xi) \in \Gamma$, где через ξ мы обозначили $X(\tau)$. Тогда рассматриваемое решение $X(t)$ является непродолжаемым решением З.К. (2.2)–(2.3). По Лемме 2.2.1, примененной к прямоугольнику $P = P_{a,b}^{(\tau,\xi)}$, справедлива оценка $\omega - \tau > h$, что противоречит выбору r_+. Теорема 2.2.2 доказана. $\square$

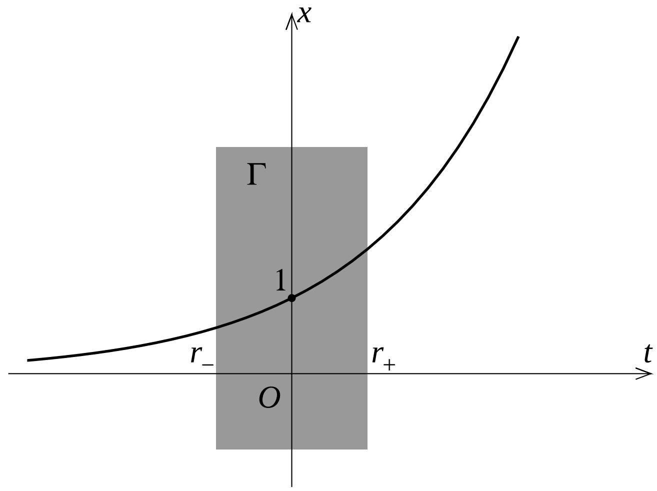

Рис. 5.
$\dot{x}{=}x, x(0){=}1, x = e^t, D{=}\mathbb{R}^2, \alpha = -\infty, \omega = +\infty$.

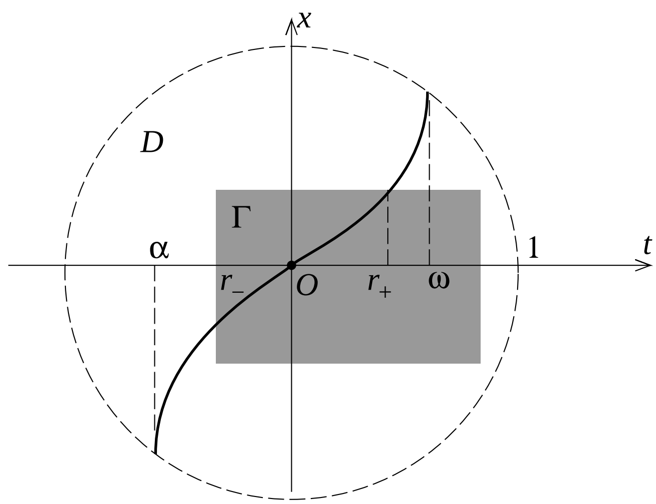

Рис. 6.
$\dot{x}{=}1/\sqrt{1-t^2-x^2}, x(0){=}0, D = \{(t,y) : t^2+x^2 < 1\}$.

Доказанная теорема имеет многочисленные приложения. Укажем одно из них.

§2.2 Теоремы о поведении решения в вертикальной полосе

Теорема 2.2.3. *Пусть $D = (a,b)\times\mathbb{R}^n$, где $\emptyset \neq (a,b) \subset \mathbb{R}$. Предположим, что $F \in C(D,\mathbb{R}^n)$, и пусть $X(t)$ есть непродолжаемое решение уравнения (2.2), определенное на интервале (α,ω). Тогда для левого конца α выполнено по крайней мере одно из следующих двух утверждений:*

1α) $\alpha = a$;

2α) $\lim\limits_{t\to\alpha+0} |X(t)| = +\infty$.

Аналогично, для правого конца ω выполнено по крайней мере одно из следующих двух утверждений:

1ω) $\omega = b$;

2ω) $\lim\limits_{t\to\omega-0} |X(t)| = +\infty$.

Доказательство Теоремы 2.2.3. Достаточно доказать только утверждение про ω, остальное делается по аналогии. Если $\omega = b$, то доказывать, собственно говоря, нечего (см. рис. 7). Предположим теперь, что $\omega \in (a,b)$. Возьмем произвольно $\tau \in (\alpha,\omega)$. Для натурального числа k положим $\Gamma_k = \{(t,X)\ :\ t\in[\tau,\omega],\ |X|\le k\}$ (см. рис. 8). Очевидно, что Γ_k есть компактное множество, лежащее в D. Поэтому по Теореме 2.2.2 найдется число $r_k \in (\tau,\omega)$ такое, что

$$\forall t\in(r_k,\omega) \quad (t,X(t))\notin\Gamma_k. \tag{2.9}$$

По построению компакта Γ_k, соотношение $(t,X(t))\notin\Gamma_k$ возможно только при выполнении одного из следующих двух условий: $t\notin[\tau,\omega]$ или $|X(t)|>k$. Первое условие заведомо не выполнено при $t\in(r_k,\omega)$. Поэтому соотношение (2.9) можно переписать в виде

$$\forall t\in(r_k,\omega) \quad |X(t)|>k. \tag{2.10}$$

Отсюда ввиду произвольности выбора натурального числа k следует искомое равенство $\lim\limits_{t\to\omega-0}|X(t)| = \infty$. Теорема 2.2.3 доказана. □

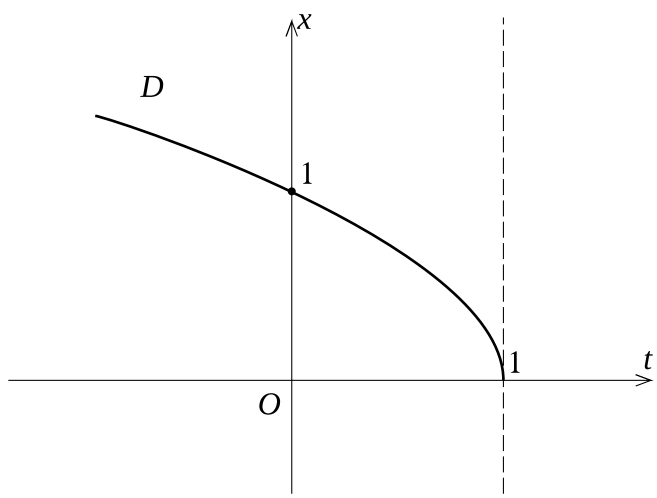

Рис. 7.
$\dot{x}=x/(2(t-1)), x(0)=1, x=\sqrt{1-t}, D=\{(t,x): t<1\}, a=-\infty, b=1, \alpha=-\infty, \omega=1$.

Более наглядную форму Теорема 2.2.3 принимает на плоскости (т.е. при $n=1$). Сначала напомним одно определение. Говорят, что график функции $g:(\alpha,\omega)\to\mathbb{R}$ с $\omega\in\mathbb{R}$

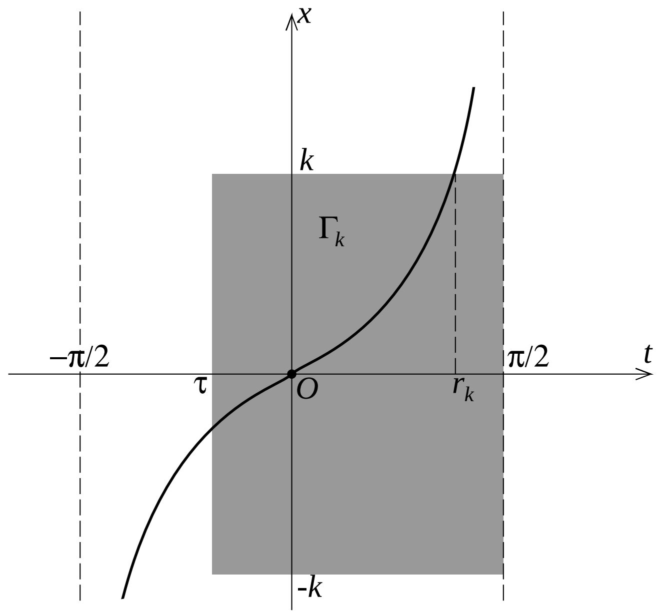

Рис. 8.
$\dot{x}=1+x^2, x(0)=0, x=\mathrm{tg}t, D=\mathbb{R}^2, a=-\infty, b=+\infty, \alpha=-\pi/2, \omega=\pi/2$.

имеет *вертикальную асимптоту* при $t \to \omega - 0$, если $\lim\limits_{t\to\omega-0} g(t) = +\infty$ или $\lim\limits_{t\to\omega-0} g(t) = -\infty$. Аналогично дается определение вертикальной асимптоты при $t \to \alpha$.

Следствие 2.2.4. *Пусть $D = (a,b)\times\mathbb{R}$, где $\emptyset \neq (a,b) \subset \mathbb{R}$. Предположим, что $f \in C(D)$, и пусть $x(t)$ есть непродолжаемое решение уравнения $\dot{x} = f(t,x)$, определенное на интервале (α,ω). Тогда выполнено по крайней мере одно из следующих двух утверждений:*

1) $\omega = b$;

2) график функции $x(t)$ имеет вертикальную асимптоту при $t \to \omega - 0$.

Аналогичная альтернатива имеет место для левого конца α.

Доказательство Следствия 2.2.4 предоставляется читателю в качестве легкого упражнения. □

В связи с Теоремой 2.2.3 возникает естественный вопрос: как узнать, какая же именно из альтернатив имеет место в том или ином случае? Частичный ответ на этот вопрос содержится в сформулированном ниже результате.

Теорема 2.2.5 (Теорема Уинтнера). *Пусть $D = (a,b) \times \mathbb{R}^n$, где $\emptyset \neq (a,b) \subset \mathbb{R}$, и $F \in C(D,\mathbb{R}^n)$. Предположим, что найдется число $R > 0$ и непрерывные функции $N : (a,b) \to (0,+\infty)$, $L : (R,+\infty) \to (0,+\infty)$ такие, что*

$$\int\limits_R^{+\infty} \frac{du}{L(u)} = +\infty, \tag{2.11}$$

$$|F(t,X)| \leq N(t)L(|X|) \quad \text{при } t \in (a,b),\ X \in \mathbb{R}^n,\ |X| > R. \tag{2.12}$$

Тогда всякое непродолжаемое решение уравнения (2.2) определено на интервале (a,b).

Доказательство Теоремы 2.2.5 опускается и не будет спрашиваться на экзамене. Отметим только, что оно основано на сравнении решений системы (2.2) с линейными уравнениями 1-го порядка. □

***Пример* 2.2.6.** Рассмотрим уравнение $\dot{x} = x[\ln(x^2+1)]\,\mathrm{arctg}(tx)$. Здесь $D = \mathbb{R}^2$, $a = -\infty$, $b = +\infty$. Непосредственными вычислениями проверяется, что функции $N(t) \equiv \pi$, $L(x) = \frac{x^2+1}{2x}\ln(x^2+1)$ удовлетворяют условиям (2.11)–(2.12) с $R = 1$. Поэтому всякое непродолжаемое решение указанного уравнения определено на всем $\mathbb{R}$.

***Упражнение* 2.2.7.** Покажите, что непродолжаемое решение Задачи Коши $x(0) = \alpha$ для уравнения $\dot{x} = x[\ln(x^2+1)]^2\,\mathrm{arctg}(tx)$ определено на всем $\mathbb{R}$ в том и только том случае, когда $\alpha \le 0$ (см. рис. 9).

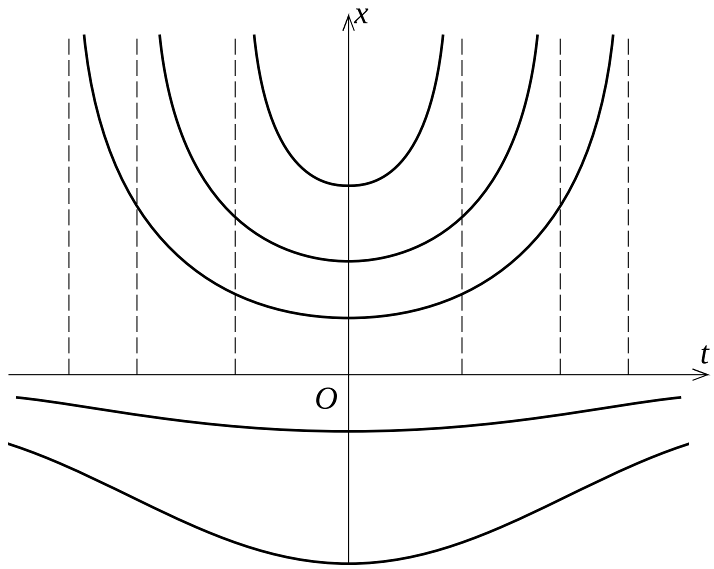

Рис. 9.

§3 Уравнения высших порядков. Сведение к системе.

В этом разделе мы коснемся уравнений вида

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2.13}$$

которые называются *уравнениями n-го порядка, разрешенными относительно старшей производной*. Будем предполагать далее, что $f \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Определение решения дается по аналогии со сказанным выше. Укажем только, как правильно поставить задачу Коши в настоящем случае.

Определение 2.3.1. Пусть $(\tau, \xi) \in D$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Задачей Коши (τ, ξ) для уравнения (2.13) называется задача нахождения решения $y(t)$ уравнения (2.13), удовлетворяющего начальным условиям $y(\tau) = \xi_1$, $y'(\tau) = \xi_2$, …, $y^{(n-1)}(\tau) = \xi_n$.

Оказывается, что уравнение (2.13) можно свести к нормальной системе из n уравнений первого порядка, рассмотренной ранее. А именно, рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2, \\ y_2'(t) = y_3, \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) = y_n, \\ y_n'(t) = f(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \tag{2.14}$$

Теорема 2.3.2. *Пусть функция $y(t) \in C^n((a,b))$ есть решение З.К. $(\tau, \xi) \in D$ для уравнения (2.13), тогда вектор-функция $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ с компонентами*

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \ \dots, \ y_n(t) = y^{(n-1)}(t) \tag{2.15}$$

является решением З.К. (τ, ξ) для системы (2.14). Обратно, пусть вектор-функция $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ является решением З.К. $(\tau, \xi) \in D$ для системы (2.14). Тогда функция $y(t) = y_1(t)$ является решением З.К. (τ, ξ) для уравнения (2.13), причем справедливы формулы (2.15).

Доказательство Теоремы 2.3.2 предоставляется читателю в качестве легкого упражнения. □

***Упражнение* 2.3.3.** Используя Теорему 2.3.2, сформулируйте теоремы Пеано и Пикара для уравнений n-го порядка по аналогии с теоремами 2.1.3–2.1.4 для систем.

§4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

Уравнение n-го порядка в общем случае имеет вид

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.16}$$

т.е. это уравнение, не разрешенное относительно старшей производной. Мы будем считать, что функция F задана на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, причем будем предполагать, что F достаточно регулярна (степень этой регулярности, т.е. гладкости, будет определяться из контекста).

I. F не зависит от y. Тогда можно очевидным образом понизить порядок этого уравнения, взяв за неизвестную функцию $z(x) = y'(x)$.

Для примера, решим уравнение $y^{(n)} = f(x)$, $f(x) \in C((a,b))$. Рассмотрим З.К. (τ, ξ), т.е. задачу нахождения решения данного уравнения с начальными условиями $y(\tau) = \xi_0$, $y'(\tau) = \xi_1, \dots, y^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1}$. Решение этой З.К. дается формулой

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{\tau}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\, dt + \xi_{n-1} \frac{(x-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \xi_0. \tag{2.17}$$

***Упражнение* 2.4.1.** Докажите справедливость формулы (2.17).

II. F не зависит от x. Тогда делаем замену $y' = z(y)$. Конечно, чтобы такую замену делать, необходимо, чтобы в рассматриваемой области x однозначно и гладко выражался через y. (В частности, при этом можно потерять решения $y = \mathrm{const}$.) Тогда $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = z'_y z$. И т.д.

III. F однородна по переменным, связанным с y, т.е. существует число δ такое, что $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^\delta F(x, y, \dots, y^{(n)})$ для любого $t > 0$ при условии, что соответствующие точки в левой и правой частях последнего равенства принадлежат области определения функции F. При этом делаем естественное предположение, что для каждой точки $(x, y_0, \dots, y_n) \in D$ справедливо включение $\{(x, ty_0, \dots, ty_n) \mid t > 0\} \subset D$. Тогда, если $\delta \neq 0$ и $(x, 0, \dots, 0) \in D$ при $x \in (a, b)$, то $y(x) \equiv 0$ является решением на (a, b). Если же $y(x) \neq 0$, то делаем замену $y'(x) = y(x)z(x)$. Докажем, что для любого $k = 0, \dots, n$ отношение $\frac{y^{(k)}}{y}$ является полиномом $P_k(z, z', \dots, z^{(k-1)})$. При $k = 0, 1$ доказывать нечего. Далее по индукции. Окончательно для $y > 0$ получаем

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \Leftrightarrow F(x, y \cdot 1, y \cdot z, \dots, y \cdot P_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^\delta F(x, 1, z, \dots, P_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0 \Leftrightarrow F(x, 1, z, \dots, P_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

IV. F является обобщенно-однородной функцией в следующем смысле. Существует числа δ, α такие, что $F(tx, t^\alpha y, t^{\alpha-1} y', \dots, t^{\alpha-n} y^{(n)}) = t^\delta F(x, y, \dots, y^{(n)})$ для любого $t > 0$ при условии, что соответствующие точки в левой и правой частях последнего равенства принадлежат области определения функции F. При этом делаем естественное предположение, что для каждой точки $(x, y_0, \dots, y_n) \in D$ справедливо включение $\{(tx, t^\alpha y_0, \dots, t^{\alpha-n} y_n) \mid t > 0\} \subset D$. Тогда делаем замены $x = e^t$, $y = ue^{\alpha t}$. Отметим, в частности, что в принятых нами обозначениях $u = \frac{y}{x^\alpha}$. Докажем, что для любого $k = 0, \dots, n$ произведение $x^k u_x^{(k)}$ является полиномом $P_k(u, u'_t, \dots, u_t^{(k)})$. Доказательство проводится по индукции.

$$x^{k+1} u_x^{(k+1)} = x^{k+1} \frac{du_x^{(k)}}{dt} \frac{dt}{dx} = x^k \frac{d\frac{P_k(u, u'_t, \dots, u_t^{(k)})}{e^{kt}}}{dt} = P_{k+1}(u, u'_t, \dots, u_t^{(k+1)}).$$

Теперь по формуле Ньютона-Лейбница имеем, что для любого $m = 0, \dots, n$ справедливо тождество

$$x^{m-\alpha} y^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+k+1) x^k u^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} C_{\alpha,k,m} P_k(u, u'_t, \dots, u_t^{(k)}) = \tilde{P}_m(u, u'_t, \dots, u_t^{(m)}). \tag{2.18}$$

Окончательно для $x > 0$ получаем

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \Leftrightarrow F(x \cdot 1, x^\alpha \cdot u, x^{\alpha-1} \cdot \frac{y'}{x^{\alpha-1}}, \dots, x^{\alpha-n} \cdot \frac{y^{(n)}}{x^{\alpha-n}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^\delta F(1, u, \tilde{P}_1(u, u'_t), \dots, \tilde{P}_n(u, u'_t, \dots, u_t^{(m)})) = 0 \Leftrightarrow \tilde{F}(u, u'_t, \dots, u_t^{(n)}) = 0,$$

а порядок последнего уравнения, как мы знаем, можно понизить на 1.

Глава 3

Общая теория линейных систем

§1 Системы из n уравнений первого порядка

Мы приступаем к рассмотрению линейных систем д.у. вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t); \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $a_{ij}, f_j \in C((a,b))$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Сокращенно эту систему д.у. можно записать в виде

$$\dot{X} = A(t)X + F(t), \tag{3.2}$$

где $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, и $A : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ представляет собой матричнозначную функцию, т.е. $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$.

§1.1 Основные свойства решений

Поскольку система (3.1) представляет собой частный случай системы (2.1), к ней применимы теорема Пикара, которая в данном случае формулируется следующим образом.

Теорема 3.1.1. *Пусть функции $A : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $F : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ непрерывны. Тогда справедливы следующие два утверждения.*

(I) для любой точки $\tau \in (a,b)$ и произвольного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует единственное непродолжаемое решение З.К. (τ, ξ) для уравнения (3.2).

(II) все непродолжаемые решения уравнения (3.2) определены на интервале (a,b).

Доказательство Теоремы 3.1.1. Утверждение (I) есть прямое следствие Теоремы Пикара для систем, а утверждение (II) легко выводится из Теоремы Уинтнера. В самом деле, зададим функции $N : (a,b) \to (0,+\infty)$, $L : (1,+\infty) \to (0,+\infty)$ следующим образом: $L(u) = u$, $\quad N(t) = \|A(t)\| + |F(t)|$, где символом $\|A\|$ обозначена гильбертова норма матрицы A, т.е. $\|A\| = \big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Напомним, что для этой нормы справедливо условие согласованности: $\forall X \in \mathbb{R}^n\ |AX| \le \|A\| \cdot |X|$. По построению,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{du}{L(u)} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{du}{u} = +\infty, \tag{3.3}$$

$$|A(t)X + F(t)| \le |A(t)X| + |F(t)| \le \|A(t)\| \cdot |X| + |F(t)| \le \big(\|A(t)\| + |F(t)|\big)|X| = N(t)L(|X|) \tag{3.4}$$

при $t \in (a,b)$, $X \in \mathbb{R}^n$, $|X| > 1$. Налицо выполнение всех условий Теоремы Уинтнера с $R = 1$. Отсюда следует утверждение (II) доказываемой теоремы. □

Ниже в данной главе мы всегда будем предполагать, что выполнены условия Теоремы 3.1.1, т.е. что функции $A : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $F : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ непрерывны. Далее, если в тексте пойдет речь о решении уравнения (3.2), то будем предполагать, что решение это непродолжаемо, т.е. оно определено на всем интервале (a,b).

Теорема 3.1.2 (Принцип суперпозиции). *Пусть $X_1(t)$, $X_2(t)$ суть произвольные решения уравнений $\dot X = A(t)X + F_1(t)$, $\dot X = A(t)X + F_2(t)$ соответственно. Тогда для всякой пары констант λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ функция $X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)$ является решением уравнения (3.2) с $F(t) = \lambda_1 F_1(t) + \lambda_2 F_2(t)$.*

Доказательство Теоремы 3.1.2 предоставляется читателю в качестве легкого упражнения. □

Наряду с уравнением (3.2) мы будем рассматривать однородное линейное уравнение

$$\dot X = A(t)X, \tag{3.5}$$

которое является частным случаем уравнения (3.2), когда $F(t) \equiv 0$. Из принципа суперпозиции немедленно вытекает

Следствие 3.1.3. *(I) Пусть $X_1(t), X_2(t)$ — два решения неоднородного уравнения (3.2). Тогда их разность $X(t) = X_1(t) - X_2(t)$ является решением однородного уравнения (3.5).*

(II) Пусть $X_1(t)$ — решение неоднородного уравнения (3.2), а $X_2(t)$ — решение однородного уравнения (3.5). Тогда функция $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$ представляет собой решение неоднородного уравнения (3.2).

Отсюда, в свою очередь, получаем

Следствие 3.1.4. *Общее решение неоднородного линейного уравнения (3.2) представляет собой сумму частного решения этого уравнения с общим решением соответствующего однородного уравнения (3.5).*

Изучим сначала, как устроено общее решение однородного уравнения. Из принципа суперпозиции непосредственно вытекает

Теорема 3.1.5. *Пусть $X_1(t)$, $X_2(t)$ — два произвольных решения уравнения (3.5). Тогда для всякой пары констант λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ функция $X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)$ также является решением уравнения (3.5).*

Таким образом, совокупность решений однородного уравнения (3.5) представляет собой линейное пространство, обозначим его $\mathcal{L}$. Какова же его размерность? Чтобы ответить на этот вопрос, введем следующее обозначение. Для точки $\tau \in (a,b)$ и вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $X(t,\tau,\xi)$ решение задачи Коши (τ,ξ) для уравнения (3.5). Иногда его обозначают $X(\cdot,\tau,\xi)$, чтобы показать, что в данной ситуации параметры τ,ξ, в отличие от переменной t, фиксированы.

Теорема 3.1.6. *Возьмем произвольно точку $\tau \in (a,b)$ и зафиксируем ее. Определим отображение $S : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}$ по следующему правилу: $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad S(\xi) = X(\cdot,\tau,\xi)$. Тогда S является линейным взаимнооднозначным отображением (т.е изоморфизмом) пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{L}$.*

Доказательство Теоремы 3.1.6. Линейность отображения S вытекает из следующего легко проверяемого факта: если $X_1(t)$ является решением[1] З.К. (τ,ξ_1) (т.е. $X_1(t) = S(\xi_1)$), а $X_2(t)$ является решением З.К. (τ,ξ_2) (т.е. $X_2(t) = S(\xi_2)$), то для всякой пары констант λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ функция $X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)$ также является решением З.К. $(\tau, \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2)$ (т.е. $X(t) = S(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2)$).

Взаимнооднозначность отображения S выводится из следующего факта: если $X(t) \equiv 0$ является решением З.К. (τ,ξ), то $\xi = X(\tau) = 0$. $\square$

Следствие 3.1.7. *Размерность пространства $\mathcal{L}$ равна n.*

Как и во всяком n-мерном пространстве, в пространстве $\mathcal{L}$ существует базис, состоящий из n независимых решений $X_1(t)$,…,$X_n(t)$. Всякий такой базис называется *фундаментальной системой решений (ФСР)*. Вследствие известных фактов из линейной алгебры, для каждой ФСР $X_1(t)$,…, $X_n(t)$ общее решение уравнения (3.5) выражается по формуле:

$$X(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t), \tag{3.6}$$

где $C_1,\ldots,C_n$ — произвольные вещественные константы.

Теорема 3.1.6 открывает простой путь построения ФСР. А именно, нужно взять произвольный набор векторов ξ^1,…,$\xi^n \in \mathbb{R}^n$, образующих базис пространства $\mathbb{R}^n$, и произвольную точку $\tau \in (a,b)$, и тогда в качестве ФСР можно взять $X_1(t) = X(t,\tau,\xi^1)$, …, $X_n(t) = X(t,\tau,\xi^n)$.

§1.2 Фундаментальные матрицы и их свойства

Для набора из n решений $X_1(t)$,…, $X_n(t)$ уравнения (3.5) рассмотрим $n \times n$-матрицу $\Phi(t) = \big(X_1(t)|X_2(t)|\ldots|X_n(t)\big)$, j-й столбец которой совпадает с решением $X_j(t)$. Такого типа матрица называется *матрицей Вронского*, а ее определитель называется *определителем Вронского*, или, сокращенно, *вронскианом*. Из того факта, что все столбцы матрицы Вронского $\Phi(t)$ суть решения уравнения (3.5), нетрудно вывести, что

$$\forall t \in (a,b) \quad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t). \tag{3.7}$$

Имеет место следующая элегантная формула.

[1] В ходе настоящего доказательства под решениями З.К. имеются в виду решения З.К. для уравнения (3.5).

Теорема 3.1.8 (Формула Остроградского-Лиувилля). *Пусть $X_1(t),\ldots,\ X_n(t)$ суть решения уравнения (3.5), а $\Phi(t)$ — соответствующая матрица Вронского. Обозначим $W(t) = \det\Phi(t)$, и пусть τ — произвольная точка интервала (a,b). Тогда справедлива формула*

$$\forall t \in (a,b) \quad W(t) = W(\tau)e^{\int\limits_\tau^t \operatorname{tr} A(s)\,ds}, \tag{3.8}$$

где символом $\operatorname{tr} A(s)$ обозначен след (сумма диагональных элементов) матрицы $A(s)$, т.е. $\operatorname{tr} A(s) = a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)$

Доказательство Теоремы 3.1.8. Легко проверяется, что искомая формула (3.8) эквивалентна следующему тождеству

$$\forall t \in (a,b) \quad \dot W(t) = W(t)\operatorname{tr} A(t). \tag{3.9}$$

Занумеруем компоненты вектор-функций $X_j(t)$ из условия доказываемой теоремы следующим образом: $X_j(t) = \begin{pmatrix} x_{1j}(t) \\ \vdots \\ x_{nj}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. При такой нумерации $x_{ij}(t)$ будет совпадает с элементом матрицы $\Phi(t)$, стоящем на i-й строке и в j-м столбце. Поскольку по условию $X_j(t)$ суть решения уравнения (3.5), т.е. $\dot X_j(t) = A(t)X_j(t)$, справедливо тождество

$$\dot x_{ij}(t) \equiv \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}(t). \tag{3.10}$$

Согласно обычному правилу для вычисления производной от определителя,

$$\dot W(t) = \begin{vmatrix} \dot x_{11}(t) & \ldots & \dot x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ \dot x_{21}(t) & \ldots & \dot x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot x_{n1}(t) & \ldots & \dot x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \tag{3.11}$$

Вычислим первое из этих n слагаемых, используя формулу (3.10):

$$\begin{vmatrix} \dot x_{11}(t) & \ldots & \dot x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^n a_{1k}(t)x_{k1}(t) & \ldots & \sum\limits_{k=1}^n a_{1k}(t)x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} a_{1k}(t)x_{k1}(t) & \ldots & a_{1k}(t)x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{1k}(t) \begin{vmatrix} x_{k1}(t) & \ldots & x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

(При выводе предпоследнего равенства мы воспользовались известным свойством разложения определителя по строке.) В последней сумме все определители при $k \neq 1$ зануляются, т.к. в соответствующих матрицах 1-я и k-я строки совпадают. Окончательно получаем

$$\begin{vmatrix} \dot x_{11}(t) & \ldots & \dot x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t) \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t)W(t).$$

Аналогично доказывается, что

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dot{x}_{21}(t) & \dots & \dot{x}_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{22}(t)W(t).$$

В итоге формула (3.11) принимает вид

$$\dot{W}(t) = a_{11}(t)W(t) + a_{22}(t)W(t) + \dots + a_{nn}(t)W(t) = W(t)\,\mathrm{tr}\,A(t),$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 3.1.9. *Пусть $X_1(t), \dots, X_n(t)$ суть решения уравнения (3.5), $\Phi(t)$ — соответствующая матрица Вронского, и $W(t) = \det\Phi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
(i) $\exists \tau \in (a, b) \quad W(\tau) \neq 0$;
(ii) $\forall t \in (a, b) \quad W(t) \neq 0$;
(iii) решения $X_1(t), \dots, X_n(t)$ образуют ФСР.

Доказательство Теоремы 3.1.9.
(i)⇔(ii) немедленно вытекает из формулы Остроградского-Лиувилля.
(i)⇔(iii). Зафиксируем $\tau \in (a, b)$. Обозначим $\xi^j = X_j(\tau)$. Поскольку ξ^j представляют собой строки матрицы $\Phi(\tau)$, то

$$W(\tau) \neq 0 \Leftrightarrow \text{ вектора } \xi_j,\ j = 1, \dots, n \text{ линейно независимы.} \tag{3.12}$$

Нетрудно видеть, что $X_j = S(\xi^j)$ в обозначениях Теоремы об изоморфизме 3.1.6. Поскольку изоморфизм линейных пространств переводит независимые вектора в независимые, то получаем эквивалентность

$$\text{вектора } \xi_j,\ j = 1, \dots, n \text{ линейно независимы } \Leftrightarrow \text{ решения } X_j(t),\ j = 1, \dots, n \text{ линейно независимы.} \tag{3.13}$$

Формулы (3.12)–(3.13) приводят к искомому заключению

$$W(\tau) \neq 0 \Leftrightarrow \text{ решения } X_j(t),\ j = 1, \dots, n \text{ образуют ФСР.}$$

□

Матрица Вронского $\Phi(t) = \big(X_1(t)|X_2(t)|\dots|X_n(t)\big)$, удовлетворяющая условиям (i)–(iii) только что доказанной теоремы 3.1.9, называется *фундаментальной*. С помощью такой матрицы можно компактно записать формулы общего решения уравнения (3.5):

$$X(t) = \Phi(t)C, \tag{3.14}$$

где $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ есть вектор, образованный произвольными постоянными C_j. В самом деле, легко видеть, что формула (3.14) с учетом правил матричного умножения эквивалентна выписанной ранее формуле (3.6).

Теорема 3.1.10. *Пусть $\Phi : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Psi : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ суть матричнозначные функции. Предположим, что $\Phi(t)$ есть фундаментальная матрица для уравнения (3.5).*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) $\Psi(t)$ также есть фундаментальная матрица для уравнения (3.5);

(ii) найдется постоянная матрица $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с $\det B \neq 0$ такая, что $\Psi(t) = \Phi(t)B$ для всех $t \in (a,b)$.

Доказательство Теоремы 3.1.10 предоставляется читателю в качестве легкого упражнения по применению формулы (3.14) и Теоремы 3.1.9. □

§1.3 Метод вариации произвольных постоянных

Пусть $\Phi(t) = \big(X_1(t)|X_2(t)|\dots|X_n(t)\big)$ есть фундаментальная матрица для однородного уравнения (3.5). И пусть теперь поставлена задача найти частное решение неоднородного уравнения (3.2) (тогда по Следствию 3.1.4 можно будет найти и общее решение (3.2)). Будем искать частное решение $\tilde{X}(t)$ уравнения (3.2) в виде:

$$\tilde{X}(t) = \Phi(t)C(t). \tag{3.15}$$

Тогда имеем

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \dot{\Phi}(t)C(t) + \Phi(t)\dot{C}(t) = A(t)\Phi(t)C(t) + \Phi(t)\dot{C}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + \Phi(t)\dot{C}(t) \tag{3.16}$$

(в приведенной цепочке равенств мы воспользовались в середине формулой (3.7)). Мы видим, что вектор-функция $\tilde{X}(t)$ будет являться решением уравнения (3.2) в том и только том случае, когда

$$\Phi(t)\dot{C}(t) = F(t). \tag{3.17}$$

Отсюда получаем условие окончательную формулу для коэффициентов $C(t)$:

$$C(t) = \int\limits_{\tau}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)\,ds, \tag{3.18}$$

где τ есть произвольная (фиксированная) точка интервала (a,b).

§2 Линейное уравнение n-го порядка

Уравнение

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y + f(t), \tag{3.19}$$

где $f, a_j \in C((a,b))$, $j = 1,\dots,n$, представляет собой линейное неоднородное уравнение n-го порядка, а

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y \tag{3.20}$$

есть его однородный вариант.

Ясно, что область D в данном случае представляет собой «вертикальную полосу», т.е. $D = (a,b) \times \mathbb{R}^n$.

Как мы уже знаем, эти уравнения можно свести к нормальной системе из n уравнений первого порядка. Оказывается, что эта система в рассматриваемом случае также будет линейной. А именно, формула (2.14) для данного случая принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ \dot{y}_n = a_0(t)y_1(t) + a_1(t)y_2 + \dots + a_{n-1}(t)y_n + f(t). \end{cases} \tag{3.21}$$

Ясно, что эту систему можно переписать в сокращенном виде:

$$\dot{Y} = A(t)Y + F(t), \tag{3.22}$$

где $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, и $A : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ представляет собой матричнозначную функцию следующего вида: $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$.

Теорема 2.3.2 для данного случая принимает следующую форму:

Теорема 3.2.1. *Пусть функция $y(t) \in C^n((a,b))$ есть решение З.К. $(\tau, \xi) \in D$ для уравнения (3.19), тогда вектор-функция $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ с компонентами*

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \ \dots, \ y_n(t) = y^{(n-1)}(t) \tag{3.23}$$

является решением З.К. (τ, ξ) для системы (3.22). Обратно, пусть вектор-функция $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ является решением З.К. $(\tau, \xi) \in D$ для системы (3.22). Тогда функция $y(t) = y_1(t)$ является решением З.К. (τ, ξ) для уравнения (3.19), причем справедливы формулы (3.23).

Теорема 3.2.2. *Для однородного случая $f(t) \equiv 0$ указанное выше соответствие между решениями уравнения (3.20) и системы*

$$\dot{Y} = A(t)Y, \tag{3.24}$$

является линейным взаимнооднозначным отображением (изоморфизмом).

Таким образом, все теоремы, установленные ранее для линейных систем, можно (с очевидными изменениями) переписать для случая линейных уравнений n-го порядка. В частности, совокупность решений однородного уравнения (3.20) представляет собой линейное пространство размерности n.

Для набора из n-решений $y_1(t),\ldots,\ y_n(t)$ уравнения (3.20) матрица Вронского принимает вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Поскольку след матрицы A в системе (3.22) равен $a_{n-1}(t)$, из соответствующих результатах о линейных системах получаем справедливость следующих теорем.

Теорема 3.2.3. *Пусть $y_1(t),\ldots,\ y_n(t)$ суть решения уравнения (3.20), а $\Phi(t)$ — соответствующая матрица Вронского. Обозначим $W(t) = \det\Phi(t)$, и пусть τ — произвольная точка интервала (a,b). Тогда справедлива формула*

$$\forall t \in (a,b) \quad W(t) = W(\tau)e^{\int\limits_\tau^t a_{n-1}(s)\,ds}. \tag{3.26}$$

Отметим, что формула (3.26) эквивалентна следующему тождеству

$$\forall t \in (a,b) \quad \dot W(t) = a_{n-1}(t)W(t). \tag{3.27}$$

Теорема 3.2.4. *Пусть $y_1(t),\ldots, y_n(t)$ суть решения уравнения (3.20), $\Phi(t)$ — соответствующая матрица Вронского, и $W(t) = \det\Phi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\exists t \in (a,b) \quad W(t) \neq 0$;

(ii) $\forall t \in (a,b) \quad W(t) \neq 0$;

(iii) решения $y_1(t),\ldots,\ y_n(t)$ образуют ФСР.

Как и в случае систем, если удалось построить ФСР $y_1(t),\ldots,\ y_n(t)$ для однородного уравнения (3.20), то можно найти частное решение $\tilde y(t)$ неоднородного уравнения (3.19) методом неопределенных коэффициентов в виде

$$\tilde y(t) = C_1(t)y_1(t) + \cdots + C_n(t)y_n(t). \tag{3.28}$$

При этом коэффициенты $C_1,\ldots,C_n$ в силу формулы (3.17) находятся из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

§3 Комплексные линейные системы, сведение к действительным системам.

Здесь мы будем рассматривать системы линейных д.у. вида

$$\dot{Z} = C(t)Z + F(t), \tag{3.30}$$

где $Z = Z(t) = X(t) + iY(t) \in \mathbb{C}^n$, $F(t) = F_1(t) + iF_2(t) \in \mathbb{C}^n$, $C(t) = A(t) + iB(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $X(t), Y(t), F_1(t), F_2(t)$ суть функции со значениями в $\mathbb{R}^n$, и $A(t), B(t)$ — со значениями в $\mathbb{R}^{n\times n}$. Будем по аналогии со сказанным выше предполагать, что $F \in C((a,b),\mathbb{C}^n)$, $C \in C((a,b),\mathbb{C}^{n\times n})$.

Выделим в правой части равенства (3.30) вещественную и мнимую части:

$$C(t)Z = \big(A(t) + iB(t)\big)(X + iY) = \big(A(t)X - B(t)Y\big) + i\big(A(t)Y + B(t)X\big).$$

Поэтому комплексная система (3.30) из n уравнений эквивалентна следующей вещественной системе из $2n$ уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X - B(t)Y + F_1(t); \\ \dot{Y} = A(t)Y + B(t)X + F_2(t). \end{cases} \tag{3.31}$$

Что представляет собой матрица этой системы? Обозначим через U вещественный вектор $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда система (3.31) эквивалентна вещественной системе системе из $2n$ уравнений

$$\dot{U} = D(t)U + G(t), \tag{3.32}$$

где $G(t) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, $D(t) = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t) \\ B(t) & A(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

Рассмотрим важный частный случай, когда система (3.30) однородна (т.е. $F(t) \equiv 0$), ее коэффициенты (элементы матрицы $C(t)$) вещественны (т.е. $B(t) \equiv 0$), а сама неизвестная функция $Z(t)$ может быть комплекснозначна. Тогда исходная система (3.30) имеет вид

$$\dot{Z} = A(t)Z, \tag{3.33}$$

а равносильная ей система (3.31) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X; \\ \dot{Y} = A(t)Y. \end{cases} \tag{3.34}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.3.1. *Пусть $A : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ есть непрерывная функция. Тогда комплекснозначная функция $Z : (a,b) \to \mathbb{C}^n$ является решением системы (3.33) в том и только том случае, когда вещественная и мнимая части функции $Z(t)$ суть решения той же системы.*

Глава 4

Линейные системы с постоянными коэффициентами

§1 Линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

§1.1 Построение ФСР

В этом параграфе мы будем рассматривать уравнение

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y + f(t), \tag{4.1}$$

с постоянными коэффициентами $a_j \in \mathbb{C}$. При этом мы считаем, что неизвестная функция y (зависящая от переменной t) может быть комплекснозначной. Согласно результатам предыдущей главы, первым и самым важным этапом в изучении этого уравнения является построение ФСР для соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y. \tag{4.2}$$

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор

$$Ly = y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - ... - a_1 y' - a_0 y.$$

(Это означает, что оператор L определен на пространстве $C^n(\mathbb{R})$ и сопоставляет каждой функции y этого пространства функцию, стоящую в правой части последнего равенства.) Тогда уравнение (4.2) можно кратко записать в виде

$$Ly = 0. \tag{4.3}$$

Соответствующий полином

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^n - ... - a_1\lambda - a_0$$

называется *характеристическим полиномом* оператора L. Если мы обозначим через D оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$, то получаем простое соотношение

$$Ly = P(D)y. \tag{4.4}$$

Используя основную теорему алгебры, это тождество можно переписать в следующем виде:

$$Ly = P(D)y = (D - \lambda_1)\dots(D - \lambda_n)y, \tag{4.5}$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ суть корни многочлена P с учетом кратности. Отметим, что рассматриваемые нами дифференциальные многочлены допускают естественные алгебраические операции: их можно умножать на число, складывать и перемножать, причем последние две операции коммутативные. А именно, если даны два дифференциальных многочлена $L_1 = P_1(D)$, $L_2 = P_2(D)$, то результатом их перемножения является оператор $L = L_1 L_2$, который действует на функции y по правилу: $Ly = L_1(L_2(y))$. Нетрудно проверить, что $L_1L_2 = L_2L_1$, причем $L = P(D)$, где $P(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda)$.

Следующая лемма будет нашим основным инструментом при изучении указанных уравнений. (Здесь и ниже мы будем считать, что функция y дифференцируема столько раз, сколько нужно.)

Лемма 4.1.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in C^n(\mathbb{R})$. Тогда*

$$P(D)\big[e^{\lambda t}y(t)\big] = e^{\lambda t}P(D+\lambda)y(t). \tag{4.6}$$

Доказательство. Сначала докажем эту лемму для случая, когда $P(D) = D^k$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$D^k\big[e^{\lambda t}y(t)\big] = \sum_{l=0}^{k} C_k^l\big[e^{\lambda t}\big]^{(l)}y^{(k-l)}(t) = e^{\lambda t}\sum_{l=0}^{k} C_k^l\lambda^l D^{k-l}y(t) = e^{\lambda t}(D+\lambda)^k y(t),$$

(отметим, что на последнем шаге мы использовали формулу бинома Ньютона), что совпадает с искомой формулой (4.6). Поскольку в общем случае дифференциальный полином $P(D)$ разлагается в сумму $P(D) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k D^k$, доказательство Леммы 4.1.1 окончено. $\square$

Лемма 4.1.2. *Пусть L — дифференциальный многочлен рассмотренного выше типа, и P — его характеристический полином, а λ — характеристический корень этого полинома кратности k. Тогда функции $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, ..., $t^{k-1}e^{\lambda t}$ суть решения уравнения $Ly = 0$.*

Доказательство.

Пусть выполнены предположения леммы. Тогда $P(D) = P_1(D)(D-\lambda)^k$. Следовательно, $P(D+\lambda) = P_1(D+\lambda)D^k$. Тогда для всякого $j = 0, 1, \dots, k-1$ по формуле сдвига (4.6) получаем

$$P(D)\big[e^{\lambda t}t^j\big] = e^{\lambda t}P(D+\lambda)t^j = e^{\lambda t}P_1(D+\lambda)D^k t^j = 0,$$

что и требовалось доказать.$\square$

Лемма 4.1.3. *Пусть L — дифференциальный многочлен рассмотренного выше типа, P — его характеристический полином. Предположим, что для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ существует точка $t_0 \in \mathbb{R}$, такая, что*

$$\forall j = 0,\dots,k-1 \quad P(D)\big[e^{\lambda t}t^j\big]|_{t=t_0} = 0. \tag{4.7}$$

Тогда λ есть корень полинома P кратности k.

Доказательство. Обозначим $\omega_j(t) = P(D)\big[e^{\lambda t}t^j\big]$. По условиям доказываемой леммы выполнены равенства

$$\forall j = 0, \ldots, k-1 \quad \omega_j(t_0) = 0. \tag{4.8}$$

Согласно Лемме 4.1.1 справедлива формула

$$\omega_j(t) = e^{\lambda t} P(D+\lambda)t^j. \tag{4.9}$$

Пусть $P(D+\lambda) = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots + b_n D^n$. Нетрудно вычислить, что $\omega_0(t_0) = e^{\lambda t_0} b_0$. Учитывая (4.8), получаем, что $b_0 = 0$. Далее будем действовать по индукции. Предположим, что $b_0 = b_1 = \cdots = b_{r-1} = 0$, $r \le k-2$. Тогда

$$\omega_r(t) = e^{\lambda t}(b_r + \cdots + b_n D^{n-r})D^r t^r = r! e^{\lambda t} b_r.$$

Тогда из условий леммы вытекает, что $b_r = 0$. Окончательно получаем, что $b_0 = b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0$, следовательно, λ есть корень кратности k полинома P. $\square$

Теорема 4.1.4. *Пусть L — дифференциальный многочлен с постоянными коэффициентами, P — его характеристический полином, имеющий корни λ_1, …, λ_m кратности $k_1, \ldots, k_m$ соответственно. Тогда совокупность функций $e^{\lambda_\nu t}t^j$, $\nu = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, k_\nu - 1$, образует ФСР для уравнения (4.3).*

Доказательство. То, что каждая из этих функций, определенная на $\mathbb{R}$, является непродолжаемым решением уравнения (4.3), мгновенно вытекает из Леммы 4.1.2. По основной теореме алгебры, количество этих решений совпадает с n — порядком уравнения (4.3), или, что то же самое, степенью полинома P. Осталось доказать только, что эти решения независимы. Предположим противное. Обозначим указанные решения символами $y_1, \ldots, y_n$. Тогда соответствующая матрица Вронского $\Phi(t)$, определяема по формуле (3.25), является вырожденной для всех значений $t \in \mathbb{R}$. В частности, строки матрицы $\Phi(0)$ линейно зависимы. Это означает, что найдутся числа $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$, не все равные нули и такие, что $b_0 y_j(0) + \cdots + b_{n-1} y_j^{(n-1)}(0) = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\tilde{L}$ оператор $b_0 + \cdots + b_{n-1}D^{n-1}$, а через $\tilde{P}$ — его характеристический полином. Из построения и из Леммы 4.1.3 вытекает, что λ_ν является корнем кратности k_ν для полинома $\tilde{P}$. Но этот полином имеет степень не больше $n-1$, противоречие. $\square$

§1.2 Решение линейных д.у. с неоднородностью в форме квазиполинома

Теперь мы можем перейти к изучению неоднородных уравнений. Их решение всегда можно найти с помощью описанного выше метода вариации произвольных постоянных (см. формулы (3.28)–(3.29)). Однако в важном случае квазиполиномиальной неоднородности (т.е. когда функция f в уравнении (4.1) имеет вид $f = P_m(t)e^{\gamma t}$, где $P_m(t)$ есть полином порядка m), нахождение частного решения может быть существенно облегчено.

Для числа $\gamma \in \mathbb{C}$ обозначим $\mathcal{L}_{\gamma,m} = \{P_m(t)e^{\gamma t} \,:\, P_m$ есть полином степени $\le m\}$. Ясно, что $\mathcal{L}_{\gamma,m}$ есть линейное пространство размерности $m+1$.

Теорема 4.1.5. *Пусть L — дифференциальный многочлен с постоянными коэффициентами, P — его характеристический полином. Тогда если $\gamma \in \mathbb{C}$ не является корнем P, то $L : \mathcal{L}_{\gamma,m} \to \mathcal{L}_{\gamma,m}$ представляет собой линейное взаимнооднозначное отображение (автоморфизм) пространства $\mathcal{L}_{\gamma,m}$ на себя.*

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется, что если $y \in \mathcal{L}_{\gamma,m}$, то $Ly \in \mathcal{L}_{\gamma,m}$. Линейность оператора L сомнений не вызывает. Осталось проверить только взаимнооднозначность. Поскольку $L : \mathcal{L}_{\gamma,m} \to \mathcal{L}_{\gamma,m}$ есть линейное отображение конечномерных пространств одинаковой размерности, для доказательства взаимнооднозначности достаточно проверить, что ядро $\ker L|_{\mathcal{L}_{\gamma,m}} = \{y \in \mathcal{L}_{\gamma,m} : Ly = 0\}$ является нулевым. В самом деле, если $y = P_m(t)e^{\gamma t} \in \ker L$, то по формуле сдвига $Ly = e^{\gamma t}P(D+\gamma)P_m(t) = 0$. Следовательно,

$$P(D+\gamma)P_m(t) = 0. \tag{4.10}$$

Запишем разложение $P(D+\gamma) = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots + b_n D^n$. Поскольку γ не есть корень полинома P, то $b_0 \neq 0$. Отсюда, вычисляя коэффициент при старшей степени t в левой части равенства (4.10), получаем, что $P_m \equiv 0$, что и требовалось доказать. □

Обозначим теперь $\mathcal{L}^k_{\gamma,m} = \{t^k P_m(t)e^{\gamma t} : P_m$ есть полином степени $\leq m\}$. Ясно, что $\mathcal{L}^k_{\gamma,m}$ также есть линейное пространство размерности $m+1$.

Теорема 4.1.6. *Пусть L — дифференциальный многочлен с постоянными коэффициентами, P — его характеристический полином, и $\gamma \in \mathbb{C}$ есть корень P кратности k. $L : \mathcal{L}^k_{\gamma,m} \to \mathcal{L}_{\gamma,m}$ представляет собой линейное взаимнооднозначное отображение (изоморофизм).*

Доказательство. Ввиду условия на γ имеет место представление $P(D+\gamma) = P_1(D)D^k$, где $P(D) = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots + b_{n-k}D^{n-k}$, $b_0 \neq 0$. Тогда для $y = t^k P_m(t)e^{\gamma t} \in \mathcal{L}^k_{\gamma,m}$ по формуле сдвига получаем

$$Ly = e^{\gamma t}P(D+\gamma)[t^k P_m(t)] = e^{\gamma t}P_1(D)D^k[t^k P_m(t)].$$

Отсюда легко выводится, что $Ly \in \mathcal{L}_{\gamma,m}$ для всякого $y \in \mathcal{L}^k_{\gamma,m}$, и что $\ker L|_{\mathcal{L}^k_{\gamma,m}} = \{0\}$. Последнее обстоятельство, с учетом того, что $L : \mathcal{L}^k_{\gamma,m} \to \mathcal{L}_{\gamma,m}$ есть линейное отображение конечномерных пространств одинаковой размерности, гарантирует взаимнооднозначность $L : \mathcal{L}^k_{\gamma,m} \to \mathcal{L}_{\gamma,m}$. □

Доказанные теоремы открывают путь построения решения в виде квазиполинома соответствующего вида методом неопределенных коэффициентов. Практическая реализация этого метода была подробно изложена на семинарах.

§2 Линейные системы д.у. с постоянными коэффициентами

§2.1 Построение ФСР

Мы приступаем к рассмотрению линейных систем д.у. вида

$$\dot{X} = AX + F(t), \tag{4.11}$$

где $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, $F \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, и $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ есть постоянная $n \times n$ матрица, $A \in C^{n \times n}$.

Определение 4.2.1. Говорят, что вектора $H_1, \dots, H_m \in \mathbb{C}^n$ образуют *жорданову цепочку для собственного числа* $\lambda \in \mathbb{C}$ *матрицы* A, если справедливы соотношения: $H_1 \neq 0$, $AH_1 = \lambda H_1$, $AH_k = \lambda H_k + H_{k-1}$ при $k = 1, \dots, m$.

Упражнение **4.2.2.** Докажите, что вектора $H_1, \dots, H_m$, образующие жорданову цепочку, линейно независимы.

Определение 4.2.3. Базис пространства $\mathbb{C}^n$ называется *жордановым базисом для матрицы* A, если он состоит из жордановых цепочек матрицы A.

Теорема 4.2.4 (Теорема Жордана). *Для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ существует жорданов базис. При этом количество векторов этого базиса, входящих во все цепочки для с.ч. λ, совпадает с кратностью λ.*

Доказательство Теоремы Жордана проводится в курсе алгебры и не будет спрашиваться на экзамене. □

Теорема 4.2.5. *Пусть вектора $H_1, \dots, H_m \in \mathbb{C}^n$ образуют жорданову цепочку для с.ч. λ матрицы A. Тогда функции*

$$\begin{aligned}
&X_1(t) = H_1 e^{\lambda t},\\
&X_2(t) = (tH_1 + H_2)e^{\lambda t},\\
&X_3(t) = \left(\tfrac{t^2}{2}H_1 + tH_2 + H_3\right)e^{\lambda t},\\
&\vdots\\
&X_m(t)\left(\tfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}H_1 + \dots + tH_{m-1} + H_m\right)e^{\lambda t}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

суть независимые решения системы

$$\dot{X} = AX. \tag{4.13}$$

Доказательство предоставляется студентам в качестве легкого упражнения. □

Теоремы 4.2.5–4.2.4 очевидным образом позволяют построить ФСР для уравнения (4.13).

§2.2 Матричная экспоненты и ее использование для построения решений однородных и неоднородных линейных систем

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ есть постоянная $n \times n$ матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Напомним определение матричной экспоненты:

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots \tag{4.14}$$

Нетрудно доказать, что ряд в последней формуле сходится абсолютно (поэлементно), так что данное определение вполне корректно.

Теорема 4.2.6 (Свойства матричной экспоненты). *(i) λ есть с.ч. матрицы A кратности k $\Leftrightarrow$ e^{λ} есть с.ч. матрицы e^A кратности k;*

(ii) $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A} \neq 0$;

(iii) $e^{A+B} = e^A e^B$, *если* $AB = BA$;

(iv) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$;

(v) $\left(e^{tA}\right)'_t = Ae^{tA}$.

Доказательство этих свойств проводится в курсе алгебры. Отметим, что (ii) легко выводится из (i), а (iv) непосредственно вытекает из (iii). □

Из свойства (v) и определения матричной экспоненты немедленно вытекает

Теорема 4.2.7. *Для всякой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ функция $\Phi(t) = e^{At}$ представляет собой фундаментальную матрицу системы*

$$\dot{X} = AX, \tag{4.15}$$

удовлетворяющую начальным условиям

$$\Phi(0) = E. \tag{4.16}$$

Указанное в последней теореме свойство можно было принять за одно из эквивалентных определений матричной экспоненты. А именно, можно построить (например, с помощью Теоремы 4.2.5) произвольную фундаментальную матрицу $\Psi(t)$ для уравнения (4.15), тогда будет справедливо тождество $e^{tA} = \Psi(t)[\Psi(0)]^{-1}$ (см. в этой связи Теорему 3.1.10). Матрицу e^{tA} можно вычислить и непосредственно с использованием жордановой формы матрицы A; такого рода вычисления проводились на семинарских занятиях.

С помощью матричной экспоненты можно придать более изящный вид формуле для решения неоднородного уравнения.

Теорема 4.2.8. *Для всякой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и отображения $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ решение $X(t)$ задачи Коши $(0, \xi)$ для уравнения*

$$\dot{X} = AX + F(t) \tag{4.17}$$

дается формулой

$$X(t) = e^{tA}\left(\xi + \int\limits_0^t e^{-sA} F(s)\, ds\right) \tag{4.18}$$

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из Теорем 4.2.7, формул (3.15), (3.18) и того простого факта (вытекающего из свойства (iv) матричной экспоненты), что $\left(e^{sA}\right)^{-1} = e^{-sA}$. □

§3 Малые колебания систем со многими степенями свободы

Уравнения малых колебаний имеют вид

$$B\ddot{X} + AX = 0, \tag{4.19}$$

где $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ суть постоянные симметричные $n \times n$ матрицы, причем $B > 0$. Последнее означает, что

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad X^T B X \geq 0; \tag{4.20}$$

$$X^T B X = 0 \Leftrightarrow X = 0, \tag{4.21}$$

где символом X^T обозначается транспонирование матрицы X (в рассматриваемом случае это будет вектор-строка, т.к. X является вектор-столбцом). Отметим, что из условия $B > 0$ следует, в частности, что

$$\det B > 0. \tag{4.22}$$

Определение 4.3.1. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным числом системы (4.19), если

$$\det(A - \lambda B) = 0. \tag{4.23}$$

Соответственно, вектор $H \in \mathbb{C}^n$ называется собственным вектором системы (4.19), если $H \neq 0$ и $AH = \lambda BH$.

Теорема 4.3.2. *При указанных выше условиях на матрицы A, B все собственные числа системы (4.19) вещественны и существует базис пространства $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов системы (4.19).*

Доказательство проводится в курсе алгебры и не будет спрашиваться на экзамене. □

Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — базис пространства $\mathbb{R}^n$ из Теоремы 4.3.2. Это означает, в частности, что вектора H_j линейно независимы и что $\forall j = 1, \ldots, n$ $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}$ такое, что

$$AH_j = \lambda_j BH_j. \tag{4.24}$$

Неизвестную функцию $X(t)$ из системы (4.19) можно однозначно разложить по указанному базису:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t) H_j. \tag{4.25}$$

Такое разложение позволяет расщепить систему (4.19) на n независимых скалярных уравнений на функции $y_j(t)$. Справедлива

Теорема 4.3.3. *Вектор-функция $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ является решением системы (4.19) тогда и только тогда, когда функции $y_j(t)$ из разложения (4.25) являются решениями системы*

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \lambda_1 y_1 = 0; \\ \vdots \\ \ddot{y}_n + \lambda_n y_n = 0. \end{cases} \tag{4.26}$$

Доказательство. Подставляя разложение (4.25) в систему (4.19) и учитывая (4.24), получаем цепочку равенств:

$$B\ddot{X}(t) + AX(t) = B\sum_{j=1}^{n} \ddot{y}_j(t) H_j + B\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j(t) H_j = B\sum_{j=1}^{n} (\ddot{y}_j(t) + \lambda_j y_j(t)) H_j = 0. \tag{4.27}$$

Поскольку матрица B невырождена и вектора H_j линейно независимы, последнее равенство эквивалентно системе (4.26). □

§3.1 Вынужденные колебания

В случае вынужденных колебаний правая часть системы (4.19) меняется:

$$B\ddot{X} + AX = F(t), \tag{4.28}$$

где $F \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Поскольку матрица B невырождена и вектора H_j образуют базис, то вектора BH_j также образуют базис, и вектор-функцию $F(t)$ можно однозначно разложить по указанному базису

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) BH_j = B \sum_{j=1}^{n} f_j(t) H_j. \tag{4.29}$$

Справедлива

Теорема 4.3.4. *Вектор-функция $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ является решением системы (4.28) тогда и только тогда, когда функции $y_j(t)$ из разложения (4.25) являются решениями системы*

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \lambda_1 y_1 = f_1(t); \\ \vdots \\ \ddot{y}_n + \lambda_n y_n = f_n(t). \end{cases} \tag{4.30}$$

Доказательство. Проводится по аналогии с доказательством Теоремы 4.3.4 и предоставляется читателю в качестве легкого упражнения. □

Разложение по указанному базису может быть значительно облегчено, если воспользоваться следующими фактами из линейной алгебры. Зададим билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle_B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $\langle X, Y \rangle_B = X^T BY$, где $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Ввиду сделанных предположений форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 4.3.5. Говорят, что вектора $X, Y \in \mathbb{R}^n$ *B-ортогональны*, если $\langle X, Y \rangle_B = 0$.

***Упражнение* 4.3.6.** Покажите, что если вектора H_1, H_2 суть собственные вектора системы (4.19), соответствующие разным собственным числам, то они B-ортогональны.

Определение 4.3.7. Базис пространства $\mathbb{R}^n$ называется *B-ортогональным*, если входящие в него вектора попарно B-ортогональны.

Теорема 4.3.8. *Базис из Теоремы 4.3.2 можно выбрать B-ортогональным.*

Доказательство проводится использованием Теоремы 4.3.2 и упражнения 4.3.6 методом ортогонализации Грамма-Шмидта; оно также предоставляется читателю в качестве упражнения. □

***Упражнение* 4.3.9.** Докажите, что в случае, когда базисные вектора H_j являются B-ортогональными, коэффициенты $y_j(t)$ и $f_j(t)$ из разложений (4.25) и (4.29) вычисляются по формулам

$$y_j(t) = \frac{\langle X(t), H_j \rangle_B}{\langle H_j, H_j \rangle_B}, \quad f_j(t) = \frac{\langle F(t), H_j \rangle}{\langle H_j, H_j \rangle_B},$$

где символом $\langle X, Y \rangle$ обозначается обычное скалярное произведение $\langle X, Y \rangle = X^T Y$.

§4 Периодические решения д.у.

Рассмотрим уже встречавшуюся систему нормальную систему n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{X} = F(t, X), \tag{4.31}$$

где $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F \in C(D, \mathbb{R}^n)$, и $\forall j = 1, \ldots, n$ $\exists \frac{\partial F}{\partial x_j} \in C(D, \mathbb{R}^n)$, где D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$. В этом параграфе мы будем предполагать также, что функция $F(t, X)$ является T-периодической по t с $T > 0$, т.е. $\forall (t, X) \in D$ $(t + T, X) \in D$ и $F(t, X) = F(t + T, X)$.

Теорема 4.4.1. *При указанных условиях непродолжаемое решение $X(t)$ уравнения (4.31), определенное на интервале (α, ω), будет T-периодическим в том и только том случае, когда*

$$0, T \in (\alpha, \omega), \tag{4.32}$$

и

$$X(0) = X(T). \tag{4.33}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Очевидно, докажем в обратную сторону.

$\Leftarrow$ Пусть непродолжаемое решение $X(t)$ удовлетворяет требованиям (4.32)–(4.33). Обозначим

$$\xi = X(0) = X(T). \tag{4.34}$$

Рассмотрим функцию $\tilde{X}(t)$, определенную на интервале $(\alpha - T, \omega - T)$ по правилу $\tilde{X}(t) := X(t + T)$. Вследствие T-периодичности F введенная функция $\tilde{X}(t)$ также будет непродолжаемым решением уравнения (4.31). Далее, в силу (4.34) функции $X(t)$, $\tilde{X}(t)$ суть непродолжаемые решения одной и той же задачи Коши $(0, \xi)$ для уравнения (4.31), определенные на интервалах (α, ω) и $(\alpha - T, \omega - T)$ соответственно. По теореме Пикара 2.1.4 эти решения должны совпадать. Следовательно $(\alpha, \omega) = (\alpha - T, \omega - T) = (-\infty, +\infty)$, и $X(t) = \tilde{X}(t) = X(t + T)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, что означает T-периодичность решения $X(t)$. $\square$

Теорема 4.4.2. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ есть T-периодическая матричнозначная функция, где $T > 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентным:*

(i) Для любой T-периодической функции $F \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ существует единственное T-периодическое решение системы

$$\dot{X} = A(t)X + F(t); \tag{4.35}$$

(ii) Выполнена формула

$$\det(\Phi(T) - \Phi(0)) \neq 0, \tag{4.36}$$

где $\Phi(t)$ есть произвольная фундаментальная матрица системы $\dot{X} = A(t)X$.

Доказательство. По Теореме 3.1.1 все непродолжаемые решения уравнения (4.35) определены на всем $\mathbb{R}$. Используя метод вариации произвольных постоянных (см. формулу (3.18)), мы можем записать общее решение уравнения (4.35) в виде

$$X(t) = \Phi(t)C + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)F(s)\, ds, \tag{4.37}$$

где $C \in \mathbb{R}^n$ есть произвольный вектор. Тогда

$$X(T) - X(0) = [\Phi(T) - \Phi(0)]C + \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) F(s)\, ds, \tag{4.38}$$

Из последней формулы очевидно, что уравнение $X(0) = X(T)$ однозначно разрешимо в том и только том случае, когда выполнено условие (4.36). Остается воспользоваться установленной ранее Теоремой 4.4.1. □

Следствие 4.4.3. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ есть постоянная матрица. Тогда следующие утверждения эквивалентным:*

(i) Для любой T-периодической функции $F \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ существует единственное T-периодическое решение системы

$$\dot{X} = AX + F(t); \tag{4.39}$$

(ii) Для любого собственного числа λ матрицы A справедливо неравенство

$$e^{\lambda T} \neq 1. \tag{4.40}$$

Доказательство. В качестве фундаментальной матрицы для уравнения $\dot{X} = AX$ возьмем $\Phi(t) = e^{tA}$. В силу свойства (i) матричной экспоненты (см. Теорему 4.2.6) формулы (4.40) и (4.36) эквивалентны. Остается воспользоваться установленной ранее Теоремой 4.4.2. □

§5 Нахождение периодических решений д.у. с помощью рядов Фурье

Рассмотрим простейшее уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \tag{4.41}$$

где $\omega \geq 0$ есть некоторая константа, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть непрерывная 2π-периодическая функция. Рассмотрим разложение этой функции в ряд Фурье.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{4.42}$$

где коэффициенты a_k, b_k определяются по известным формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt\, dt; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt\, dt. \tag{4.43}$$

***Замечание* 4.5.1.** Известно, что если функция f является C^1-гладкой, то ряд (4.42) сходится равномерно к функции f. В общем случае, когда функция $f(t)$ лишь непрерывна, ряд (4.42) может расходится в некоторых точках, однако он обязательно сходится к f в L_2-норме и почти всюду (в смысле меры Лебега).

Лемма 4.5.2. *Пусть $x(t)$ — 2π периодическое решение уравнения (4.42). Тогда коэффициенты $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ ряда Фурье $x(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt)$ удовлетворяют условиям*

$$\tilde{a}_k(\omega^2 - k^2) = a_k, \quad \tilde{b}_k(\omega^2 - k^2) = b_k. \tag{4.44}$$

Доказательство. Подставляя тождество (4.41) в формулы (4.43), имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t))\cos kt\,dt = \omega^2\tilde{a}_k + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos kt\,d\dot{x}(t) = \omega^2\tilde{a}_k - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\dot{x}(t)\,d\cos kt =$$
$$\omega^2\tilde{a}_k + \frac{k}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin kt\,dx(t) = \omega^2\tilde{a}_k - \frac{k}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}x(t)\,d\sin kt = \omega^2\tilde{a}_k - \frac{k^2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}x(t)\cos kt\,dt = (\omega^2 - k^2)\tilde{a}_k \tag{4.45}$$

Выше мы несколько раз воспользовались формулой интегрирования по частям с учетом 2π-периодичности функции $x(t)$. Вычисления для b_k проводятся аналогично. □

Следствие 4.5.3 (Нерезонансный случай). *Если ω не есть целое число, то для любой 2π периодической функции $f \in C(\mathbb{R})$ существует единственное 2π-периодическое решение $x(t)$ уравнения (4.41), представимое равномерно сходящимся рядом Фурье $x(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt)$, коэффициенты которого вычисляются по формулам*

$$\tilde{a}_k = \frac{a_k}{\omega^2 - k^2}, \quad \tilde{b}_k = \frac{b_k}{\omega^2 - k^2}. \tag{4.46}$$

Доказательство. Существование и единственность периодического решения вытекает из из Следствия 4.4.3. Формулы для коэффициентов Фурье (4.46) вытекают из (4.44). Равномерная сходимость ряда Фурье следует из C^2-гладкости решения $x(t)$ и из Замечания 4.5.1. □

Следствие 4.5.4 (Резонансный случай). *Пусть $\omega = m$ есть натуральное число, а $f \in C(\mathbb{R})$ есть 2π-периодическая функция. Тогда*

(i) если $a_m \neq 0$ или $b_m \neq 0$, то не существует 2π-периодического решения $x(t)$ уравнения (4.41);

(ii) если $a_m = b_m = 0$, то всякое непродолжаемое решение $x(t)$ уравнения (4.41) будет 2π-периодическим и представимым равномерно сходящимся рядом Фурье $x(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt)$, коэффициенты которого вычисляются по формулам (4.46) при $k \neq m$, а при $k = m$ в качестве $\tilde{a}_m, \tilde{b}_m$ можно взять любые числа.

Доказательство. Пункт (i) вытекает из формул (4.44). Докажем пункт (ii). Пусть $a_m = b_m = 0$, т.е.

$$0 = \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos mt\,dt = \int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin mt\,dt. \tag{4.47}$$

В качестве базиса решений однородного уравнения $\ddot{x} + m^2 x = 0$ возьмем функции $\cos mt$ и $\sin mt$, тогда соответствующая фундаментальная матрица Вронского имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos mt & \sin mt \\ -m\sin mt & m\cos mt. \end{pmatrix}$$

Обратная матрица будет иметь сходный вид

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} m\cos mt & -\sin mt \\ m\sin mt & \cos mt. \end{pmatrix}$$

Прямым вычислением с учетом (4.47) получаем тождества $\Phi(2\pi)-\Phi(0) = 0 = \int\limits_0^{2\pi} \Phi^{-1}(s)F(s)\,ds$, где $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$. Отсюда по формуле (4.38) для всякого решения $x(t)$ уравнения (4.41) вытекает справедливость равенства $X(T) - X(0) = 0$, где $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$. Из последнего предложения в силу Теоремы 4.4.1 заключаем, что всякое непродолжаемое решение уравнения (4.41) будет 2π-периодическим. Остальные утверждения в пункте (ii) доказываемой теоремы легко следуют из Леммы 4.5.2 и Замечания 4.5.1. □

***Упражнение* 4.5.5.** Найти критерий существования и формулы для 2π-периодических решений уравнения (4.41) при $m = 0$.

Глава 5

Зависимость решений от начальных данных и параметров

§1 Класс гладкости решения соответствующий гладкости правой части системы

Рассмотрим уже встречавшуюся нормальную систему n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{X} = F(t, X), \tag{5.1}$$

где $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, X) \\ \vdots \\ f_n(t, X) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Область определения функции F мы будем обозначать через D. Ясно, что $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 5.1.1. *Пусть D — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $F \in C^k(D, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Тогда всякое решение $X(t)$ системы (5.1) принадлежит классу гладкости C^{k+1}.*

Доказательство. Чтобы не загромождать изложение, мы будем рассматривать случай $n = 1$, тогда система (5.1) превращается в уравнение

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{5.2}$$

Возьмем произвольное решение $\varphi(t)$ этого уравнения, определенное на (α, ω), тогда на этом интервале справедливо тождество

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)). \tag{5.3}$$

Таким образом, C^1-гладкость функции φ следует из самого определения решения.

Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Поскольку все функции, входящие в правую часть тождества (5.3), являются C^1-гладкими, то и левая часть будет C^1-гладкой. Это означает, что функция $\varphi(t)$ является C^2-гладкой. Тем самым искомое утверждение Теоремы 5.1.1 для случая $k = 1$ доказано.

Перейдем теперь к случаю $k = 2$. Дифференцируя обе части тождества (5.3), получаем

$$\ddot{\varphi}(t) = f_t(t, \varphi(t)) + f_x(t, \varphi(t))\dot{\varphi}(t). \tag{5.4}$$

Вследствие разобранного только что случая $k = 1$ функция φ является C^2-гладкой. Но тогда правая часть последнего тождества будет C^1-гладкой функцией, как композиция C^1-гладких функций. Следовательно, $\ddot{\varphi}(t)$ есть C^1-гладкая функция, а значит, сама функция φ принадлежит классу гладкости C^3, что и требовалось доказать.

Доказательство для $k > 2$ проводится аналогично. $\square$

§2 Непрерывная зависимость решений системы от начальных данных и параметров

Рассмотрим зависящую от параметра систему д.у. в нормальной форме

$$\dot{X} = F(t, X, \mu), \tag{5.5}$$

где $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F(t, X, \mu) = \begin{pmatrix} f_1(t, X, \mu) \\ \vdots \\ f_n(t, X, \mu) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$. Будем предполагать, что $F \in C(D, \mathbb{R}^n)$, где D — открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m+1}$, причем $\forall j = 1, \ldots, n$ $\exists \frac{\partial F}{\partial x_j} \in C(D, \mathbb{R}^n)$. Тогда по теореме Пикара $\forall (\tau, \xi, \mu) \in D$ существует единственное непродолжаемое решение $X(t)$ задачи Коши

$$X(\tau) = \xi \tag{5.6}$$

для системы (5.5) при данном μ, определенное на некотором открытом интервале. Будем обозначать это непродолжаемое решение символом $X(t, \tau, \xi, \mu)$.

Теорема 5.2.1. *Областью определения отображения $X(t, \tau, \xi, \mu)$ является некоторое открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m+2}$, причем это отображение непрерывно на Ω по совокупности переменных.*

Мы не будем проводить доказательство сформулированной теоремы в полном объеме, а проверим только ее локальный вариант.

Зафиксируем $(\tau, \xi, \lambda) \in D$. Решение З.К. (5.5)–(5.6) будем обозначать через $X(t, \mu)$. Пусть параметры $a, b, r > 0$ таковы, что прямоугольник $P = \{(t, X, \mu) \ : \ |t - \tau| \le a, \ |X - \xi| \le b, \ |\mu - \lambda| \le r\}$ содержится в D. Обозначим $M = \sup\limits_P |F|$, $h = \min(a, \frac{b}{M})$. Через P_1 обозначим прямоугольник $P_1 = \{(t, \mu) \ : \ |t - \tau| \le h, \ |\mu - \lambda| \le r\}$.

Теорема 5.2.2. *При перечисленных выше условиях функция $X(t, \mu)$ определена и непрерывна на P_1 (по совокупности переменных).*

Положим $L = \sup\limits_{(t,X,\mu)\in P} \left\| \frac{\partial F(t,X,\mu)}{\partial X} \right\|$, где символом $\frac{\partial F(t,X,\mu)}{\partial X}$ обозначена $n \times n$ матрица с элементами $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, сосчитанная в точке (t, X, μ). Для доказательства Теоремы 5.2.2 нам понадобится следующая

Лемма 5.2.3. *Для любой пары точек $(t, X_1, \mu), (t, X_2, \mu) \in P$ справедлива оценка*

$$|F(t, X_1, \mu) - F(t, X_2, \mu)| \le L|X_1 - X_2|. \tag{5.7}$$

Доказательство этой леммы проводится в курсе математического анализа. □

Доказательство Теоремы 5.2.2. Фактически, нам придется частично повторить доказательство Теоремы Пикара. Поскольку соответствующие выкладки уже обсуждались, мы не будем их приводить во всех подробностях, чтобы не загромождать изложение излишними повторами.

Зададим последовательность функций $X_k : P_1 \to \mathbb{R}^n$ по следующему рекуррентному правилу. Положим $X_0(t,\mu) \equiv \xi$,

$$X_{k+1}(t,\mu) = \xi + \int\limits_{\tau}^{t} F(s, X_k(s,\mu), \mu), \mu)\, ds. \tag{5.8}$$

По индукции легко проверяется (действуя, как и при доказательстве формулы (2.6)), что

$$\forall k\, \forall (t,\mu) \in P_1 \quad (t, X_k(t,\mu), \mu) \in P. \tag{5.9}$$

Докажем по индукции, что для всех k справедлива оценка

$$|X_{k+1}(t,\mu) - X_k(t,\mu)| \le M \frac{L^k |t-\tau|^{k+1}}{(k+1)!} \tag{5.10}$$

для всех $(t,\mu) \in P_1$. При $k = 0$ это легко следует из определений функций X_0, X_1 и аналога формулы Лагранжа (2.6). Допустим, что доказываемая формула для $k-1$, т.е.

$$\forall (s,\mu) \in P_1 \quad |X_k(s,\mu) - X_k(s,\mu)| \le M \frac{L^{k-1}|s-\tau|^k}{k!}. \tag{5.11}$$

Тогда из формулы (5.8) и Леммы 5.2.3 получаем, что

$$|X_{k+1}(t,\mu) - X_k(t,\mu)| = \left| \int\limits_{\tau}^{t} \big[F(s, X_k(s,\mu), \mu), \mu) - F(s, X_{k-1}(s,\mu), \mu), \mu) \big]\, ds \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{\tau}^{t} L |X_k(s,\mu) - X_{k-1}(s,\mu)|\, ds \right| \le \left| \int\limits_{\tau}^{t} LM \frac{L^{k-1}|s-\tau|^k}{k!}\, ds \right| = M \frac{L^k |t-\tau|^{k+1}}{(k+1)!},$$

что дает требуемую оценку (5.10). Таким образом,

$$\sup_{(t,\mu)\in P_1} |X_{k+1}(t,\mu) - X_k(t,\mu)| \le M \frac{L^k h^{k+1}}{(k+1)!} \tag{5.12}$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M \frac{L^k h^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L}\big(e^{Lh} - 1\big)$ сходится абсолютно, то последовательность $X_k(t,\mu)$ по признаку Вейерштрасса равномерно на P_1 сходится к некоторой функции $X(t,\mu)$. Так как все члены последовательности $X_k(t,\mu)$ суть непрерывные (по совокупности переменных) функции на P_1, то и предельная функция $X(t,\mu)$ будет непрерывной на P_1. Переходя к пределу в тождестве (5.8), получаем, что

$$X(t,\mu) = \xi + \int\limits_{\tau}^{t} F(s, X(s,\mu), \mu), \mu)\, ds. \tag{5.13}$$

Последнее означает, что функция $X(t,\mu)$ является решением З.К. (5.5)–(5.6). Теорема 5.2.2 полностью доказана. □

§3 Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам

Пусть дано зависящее от параметра уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \tag{5.14}$$

где $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(D)$, D — открытое множество в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $(\tau, \xi, \lambda) \in D$. Для уравнения (5.14) рассмотрим З.К. с начальными данными

$$x(\tau) = \xi. \tag{5.15}$$

Непродолжаемое решение этой З.К. будем обозначать через $x(t, \mu)$. Пусть параметры $a, b, r > 0$ таковы, что прямоугольник $P = \{(t, x, \mu) \ : \ |t-\tau| \le a, \ |x-\xi| \le b, \ |\mu-\lambda| \le r\}$ содержится в D. Обозначим $M = \sup\limits_P |f|$, $h = \min(a, \frac{b}{M})$. Через P_1 обозначим прямоугольник $P_1 = \{(t, \mu) \ : \ |t-\tau| \le h, \ |\mu-\lambda| \le r\}$.

Теорема 5.3.1. *При перечисленных выше условиях функция $x(t, \mu)$ определена и непрерывна на P_1 (по совокупности переменных). Более того,*

(I) Частная производная $\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}$ существует и непрерывна в P_1;

(II) Существует непрерывная в P_1 смешанная частная производная $\frac{\partial^2 x(t,\mu)}{\partial t \partial \mu} = \frac{\partial^2 x(t,\mu)}{\partial \mu \partial t}$;

(III) Частная производная $z = \frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}$ является решением задачи Коши для линейной системы уравнений в вариациях

$$\dot{z} = \left[\frac{\partial f(t, x(t,\mu), \mu)}{\partial x}\right] z + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x(t,\mu), \mu), \tag{5.16}$$

$$z(\tau) = 0. \tag{5.17}$$

Доказательство Теоремы 5.3.1.

Существование решения $x(t, \mu)$ и его непрерывность в некоторой (достаточно малой) окрестности прямоугольника P_1 вытекает из Теоремы 5.2.2. Осталось проверить пункты (I)–(III).

Обозначим

$$\Delta_\mu x(t, \mu) = x(t, \mu + \Delta\mu) - x(t, \mu). \tag{5.18}$$

Поскольку $x(t, \mu)$ есть решение соответствующей З.К., справедливы тождества

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_\mu x(t, \mu) \equiv f\big(t, x(t, \mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu\big) - f\big(t, x(t,\mu), \mu\big), \tag{5.19}$$

$$\Delta_\mu x(\tau, \mu) = 0. \tag{5.20}$$

Обозначим правую часть равенства (5.19) символом $\Delta_\mu f(t, x, \mu)$, и применим к ней так называемое тождество Адамара:

$$\Delta_\mu f(t, x, \mu) = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial s} f\big(t, sx(t, \mu+\Delta\mu) + (1-s)x(t,\mu), \mu + s\Delta\mu\big) ds =$$

$$F_1(t, \mu, \Delta\mu)\Delta_\mu x(t, \mu) + F_2(t, \mu, \Delta\mu)\Delta\mu. \tag{5.21}$$

Здесь

$$F_1(t,\mu,\Delta\mu)=\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, sx(t,\mu+\Delta\mu)+(1-s)x(t,\mu),\mu+s\Delta\mu\big)ds. \tag{5.22}$$

$$F_2(t,\mu,\Delta\mu)=\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mu}\big(t, sx(t,\mu+\Delta\mu)+(1-s)x(t,\mu),\mu+s\Delta\mu\big)ds. \tag{5.23}$$

Произведя деление на $\Delta\mu$ в формуле (5.21), получаем с учетом (5.19) следующее соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Delta_\mu x(t,\mu)}{\Delta\mu}\right)=F_1(t,\mu,\Delta\mu)\left(\frac{\Delta_\mu x(t,\mu)}{\Delta\mu}\right)+F_2(t,\mu,\Delta\mu). \tag{5.24}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot z = F_1(t,\mu,\Delta\mu)z+F_2(t,\mu,\Delta\mu) \tag{5.25}$$

с задачей Коши

$$z(\tau)=0. \tag{5.26}$$

Обращаем внимание, что уравнение (5.25) не имеет особенностей при $\Delta\mu=0$, в отличие от соотношения (5.24) !

Отметим, что уравнение (5.25) является линейным относительно неизвестной функции z, причем задающие это уравнение функции, равно как и их частные производные по z, непрерывно зависят от параметров $\mu,\Delta\mu$. Поэтому из пункта (II) Теоремы 3.1.1 и результатов предыдущего параграфа следует, что $\forall\mu,\Delta\mu$ таких, что $|\mu-\lambda|\le r$, $|\Delta_\mu|\le\delta_1$, где $\delta_1>0$ есть некоторый (достаточно малый) фиксированный параметр, существует единственное решение З.К. (5.25)–(5.26) $z(t,\mu,\Delta\mu)$, которое определено при $|t-\tau|\le h$ и непрерывно по совокупности переменных. В силу единственности указанного решения имеем $z(t,\mu,\Delta\mu)=\frac{\Delta_\mu x(t,\mu)}{\Delta\mu}$ при $\Delta\mu\neq 0$. Вследствие результатов предыдущего параграфа

$$\frac{\Delta_\mu x(t,\mu)}{\Delta\mu}\rightrightarrows z(t,\mu,0), \tag{5.27}$$

где $z(t,\mu,0)$ есть решение З.К.

$$\dot z=\frac{\partial}{\partial x}f\big(t,x(t,\mu),\mu\big)z+\frac{\partial}{\partial\mu}f\big(t,x(t,\mu),\mu\big) \tag{5.28}$$

$$z(\tau)=0, \tag{5.29}$$

которая получается, если в (5.25)–(5.26) положить $\Delta\mu=0$. По классическому определению частной производной получаем, что $z(t,\mu,0)=\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial\mu}$. Поскольку рассматриваемые функции $z(t,\mu,0)$, $x(t,\mu)$ суть решения соответствующих дифференциальных уравнений, имеем, что существуют непрерывные (по совокупности переменных) частные производные $\frac{\partial^2 x(t,\mu)}{\partial t\partial\mu}$, $\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial t}$, $\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial\mu}$. Отсюда и из классической теоремы математического анализа вытекает существование смешанной производной $\frac{\partial^2 x(t,\mu)}{\partial\mu\partial t}$ и равенство $\frac{\partial^2 x(t,\mu)}{\partial\mu\partial t}=\frac{\partial^2 x(t,\mu)}{\partial t\partial\mu}$. $\square$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot X = F(t,X,\mu), \tag{5.30}$$

где, как и в начале прошлого параграфа, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $F \in C(D, \mathbb{R}^n)$, D — открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m+1}$, причем $\forall j = 1, \dots, n \ \exists \frac{\partial F}{\partial x_j} \in C(D, \mathbb{R}^n)$.

Зададим для этого уравнения задачу Коши следующим образом:

$$X(\tau) = G(\mu), \tag{5.31}$$

где точка τ фиксирована, вектор-функция G задана и непрерывна на некотором открытом множестве $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$, причем $\forall \mu \in \Omega_1 \quad (\tau, G(\mu), \mu) \in D$. Тогда для всякого $\mu \in \Omega_1$ по Теореме Пикара существует единственное непродолжаемое решение $X = X(t, \mu)$ З.К. (5.30)–(5.31).

Теорема 5.3.2. *Областью определения отображения $X(t, \mu)$ является некоторое открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$, причем это отображение непрерывно на Ω по совокупности переменных. Предположим далее, что у отображений F, G существуют и непрерывны все частные производные по переменным x_i, $i = 1, \dots, n$, и μ_j, $j = 1, \dots, m$ до порядка $k \geq 1$ включительно. Тогда*

(I) У отображение $X(t, \mu)$ существуют и непрерывны все частные производные по переменным μ_j до порядка k включительно;

(II) Все частные производные из пункта (I) имеют частную производную по t, и все соответствующие смешанные частные производные перестановочны.

(III) $\forall j = 1, \dots, m$ частная производная $Z_j = \frac{\partial X(t,\mu)}{\partial \mu_j}$ является решением задачи Коши для линейной системы уравнений в вариациях

$$\dot{Z}_j = \left[\frac{\partial F(t, X(t, \mu), \mu)}{\partial X} \right] Z_j + \frac{\partial F}{\partial \mu_j}(t, X(t, \mu), \mu), \tag{5.32}$$

$$Z_j(\tau) = \frac{\partial G}{\partial \mu_j}(\mu), \tag{5.33}$$

где символом $\frac{\partial F(t,X(t,\mu),\mu)}{\partial X}$ обозначена $n \times n$ матрица с элементами $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, сосчитанная в точке $(t, X(t, \mu), \mu)$.

(IV) Если отображения F, G суть аналитические функции относительно переменных X, μ, то $X(t, \mu)$ есть также аналитическая функция относительно μ.

Мы не будем воспроизводить доказательство Теоремы 5.3.2. Доказательство пунктов (I)–(III) базируется на тех же идеях, что и доказательство Теоремы 5.3.1, но с большим количеством технических деталей.

Когда $m = 1$ (т.е. уравнение зависит только от одного параметра) и $0 \in \Omega_1$, то в условиях теоремы 5.3.2 при малых μ имеет место разложение в ряд Тейлора

$$X(t, \mu) = X_0(t) + \mu X_1(t) + \dots + \mu^k X_k(t) + r_k(t, \mu), \tag{5.34}$$

где остаточный член имеет порядок малости $r_k(t, \mu) = o(\mu_k)$ локально равномерно по t. Если же вдобавок выполнены условия пункта (IV), то $X(t, \mu)$ при достаточно малых μ допускает разложение в степенной ряд

$$X(t, \mu) = X_0(t) + \mu X_1(t) + \dots + \mu^j X_j(t) + \dots \tag{5.35}$$

В обоих формулах (5.34)–(5.35) функции $X_j(t)$ определяются по обычной формуле для рядов Тэйлора: $X_j(t) = \frac{\partial^j X(t,\mu)}{\partial \mu^j}$.

§4 Метод малого параметра для отыскания периодических решений дифференциальных уравнений

Лемма 5.4.1. *Пусть дано уравнение*

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \tag{5.36}$$

где $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \in C(D)$, D *— открытое множество в* $\mathbb{R}^3$. *Предположим, что функция* f *является* T*-периодичной по* t, *и пусть* $x(t)$ *— непродолжаемое решение уравнения (5.36), определенное на интервале* $(\alpha, \omega) \ni 0, T$. *Тогда, для периодичности* $\varphi(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$x(0) = x(T), \tag{5.37}$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(T), \tag{5.38}$$

Эта лемма прямо вытекает из Теоремы 4.4.1.

Пусть теперь дано зависящее от параметра уравнение

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \mu), \tag{5.39}$$

где $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(D)$, D — открытое множество в $\mathbb{R}^4$.

Предположим, что функция f является T-периодичной по t. И пусть при $\mu = 0$ существует T-периодическое решение $\varphi(t)$ уравнения (5.39), которое мы обозначим через $\varphi(t)$. Тогда для достаточно малых β_1, β_2, μ по теореме Пикара существует единственное непродолжаемое решение $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ уравнения (5.39), удовлетворяющее начальным условиям З.К.

$$x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \varphi(0) + \beta_1, \tag{5.40}$$

$$\dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \dot{\varphi}(0) + \beta_2. \tag{5.41}$$

и определенное на некотором интервале $\big(\alpha(\beta_1, \beta_2, \mu), \omega(\beta_1, \beta_2, \mu)\big)$.

Зададим функции $\Phi_1(\beta_1, \beta_1, \mu)$, $\Phi_2(\beta_1, \beta_1, \mu)$ по правилу

$$\Phi_1(\beta_1, \beta_1, \mu) = x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) - x(T, \beta_1, \beta_2, \mu), \tag{5.42}$$

$$\Phi_2(\beta_1, \beta_1, \mu) = \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) - \dot{x}(T, \beta_1, \beta_2, \mu). \tag{5.43}$$

По Лемме 5.4.1 решение $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ будет являться периодической функцией в том и только том случае, когда

$$\Phi_1(\beta_1, \beta_1, \mu) = \Phi_2(\beta_1, \beta_1, \mu) = 0. \tag{5.44}$$

Теорема 5.4.2. *Пусть при указанных выше условиях якобиан*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta_2} \end{pmatrix} \Bigg|_{\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0} \neq 0 \tag{5.45}$$

Тогда $\exists \delta > 0$ *такое, что для любого* μ, *удовлетворяющего условию*

$$|\mu| < \delta \tag{5.46}$$

существует единственное T-периодическое решение $x(t,\mu)$ уравнения (5.39), удовлетворяющее оценкам

$$|x(0,\mu)-\varphi(0)|+|\dot{x}(0,\mu)-\dot{\varphi}(0)|<\delta. \tag{5.47}$$

Более того,

$$x(t,\mu)\rightrightarrows\varphi(t) \quad \textit{при } \mu\to 0. \tag{5.48}$$

Доказательство Теоремы 5.4.2. Пусть выполнены все предположения Теоремы 5.4.2. По Теореме 5.3.2 отображение $\Phi(\beta_1,\beta_2,\mu)$ является C^1-гладким по совокупности переменных при достаточно малых значениях параметров. Отсюда по Теореме о неявной функции (известной из курса мат. анализа), примененной к $\Phi(\beta_1,\beta_2,\mu)$, найдется $\delta>0$ такое, что для любого μ, удовлетворяющего (5.46), существует единственная пара чисел $\beta_1=\beta_1(\mu),\beta_2=\beta_2(\mu))$ таких, что $|\beta_1|+|\beta_2|<\delta$ и выполнены тождества (5.44). Решение $x(t,\beta_1,\beta_2,\mu)$ и будет искомым. Из той же теоремы о неявной функции вытекает, что $\beta_1(\mu)\to 0,\beta_2(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$. Это влечет выполнение (5.48). □

Применим доказанную теорему к простейшей ситуации линейного порождающего уравнения в нерезонансном случае:

$$\ddot{x}-a^2x=f(t)+\mu g(t,x,\dot{x},\mu), \tag{5.49}$$

где число $a\in\mathbb{R}$ не целое, $f\in C(\mathbb{R})$, $g,\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\in C(\mathbb{R}^4)$, правая часть есть 2π периодическая функция по t.

Теорема 5.4.3. *При выполнении указанных выше условий существует единственное периодическое решение $\varphi(t)$ уравнения (5.49) при $\mu=0$. Далее, найдется $\delta>0$ такое, что для любого μ, удовлетворяющего условию (5.46) существует единственное 2π-периодическое решение $x(t,\mu)$ уравнения (5.49), удовлетворяющее оценке (5.47) и для которого имеет место сходимость (5.48).*

Доказательство Теоремы 5.4.3. Пусть выполнены все предположения Теоремы 5.4.3. В силу Следствия 4.4.3 при $\mu=0$ существует единственное 2π-периодическое решение уравнения (5.49), обозначим его $\varphi(t)$. Таким образом, мы попадаем в ситуацию, описанную Теоремой 5.4.2 с $T=2\pi$. Для окончания доказательства Теоремы 5.4.3 осталось только проверить невырожденность якобиана (5.45). При $\mu=0$ общее решение уравнения (5.49) с начальными данными $x(0)=\varphi(0)+\beta_1$, $\dot{x}(0)=\varphi(0)+\beta_2$ записывается в виде

$$x(t,\beta_1,\beta_2,0)=\varphi(t)+\beta_1\cos at+\frac{\beta_2}{a}\sin at. \tag{5.50}$$

Тогда

$$\Phi_1(\beta_1,\beta_1,0)=x(0,\beta_1,\beta_2,0)-x(2\pi,\beta_1,\beta_2,0)=\beta_1(1-\cos 2\pi a)-\frac{\beta_2}{a}\sin 2\pi a, \tag{5.51}$$

$$\Phi_2(\beta_1,\beta_1,0)=\dot{x}(0,\beta_1,\beta_2,0)-\dot{x}(2\pi,\beta_1,\beta_2,0)=a\beta_1\sin 2\pi a+\beta_2(1-\cos 2\pi a). \tag{5.52}$$

Отсюда прямым вычислением получаем, что

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_2}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta_2}\end{pmatrix}\Bigg|_{\mu=0}=(1-\cos 2\pi a)^2+(\sin 2\pi a)^2\neq 0, \tag{5.53}$$

т.к. a не целое. □

§5 Элементы аналитической теории дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальном виде

$$\dot{X} = F(t, X), \tag{5.54}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $F \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R}^n)$, D — открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m+1}$. Здесь и в дальнейшем символом $\mathcal{A}(D, \mathbb{R}^m)$ обозначается пространство аналитических функций на множестве D со значениями в $\mathbb{R}^m$; если же $m = 1$, то это пространство обозначается просто $\mathcal{A}(D)$. Напомним, что функция называется аналитической, если она в окрестности каждой точки области определения представима в виде сходящегося степенного ряда. В применении к нашей ситуации это означает, что для любой точки $(\tau, \xi) = (\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in D$ существует $R = R(F, \tau, \xi) > 0$ такое, что

$$F(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_0 + \cdots + k_n = k} \frac{F_{k_0 \ldots k_n}}{k_0! \ldots k_n!} (t - \tau)^{k_0} (x_1 - \xi_1)^{k_1} \ldots (x_n - \xi_n)^{k_n}, \tag{5.55}$$

где $F_{k_0 \ldots k_n} = \frac{\partial^k F}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}(\tau, \xi)$, причем ряд сходится абсолютно для всех $(t, X) \in \mathbb{C}^{n+1}$ таких, что $\max(|t - \tau|, |X - \xi|) < R$. Таким образом, заданная на открытом множестве функция является аналитической в том и только том случае, когда она бесконечно гладкая и для каждой точки ее области определения ряд Тейлора этой функции с центром в данной точке сходится в некоторой ее окрестности к самой функции.

Теорема 5.5.1. *При выполнении указанных выше условий на функцию F для каждой точки $(\tau, \xi) \in D$ решение $X(t)$ задачи Коши (τ, ξ) для уравнения (5.54) является аналитической функцией по t. При этом ряд Тейлора функции $X(t)$ с центром в точке τ имеет радиус сходимости $r > \min(a, \frac{a}{M})$, где a есть произвольное число из интервала $a \in (0, R(F, \tau, \xi))$, и $M = \sup\limits_{\max(|t-\tau|, |X-\xi|) \leq a} |F(t, X)|$, где $\sup$ вычисляется по $t \in \mathbb{C}$, $X \in \mathbb{C}^n$.*

Таким образом, решение $X(t)$ задачи Коши (τ, ξ) может быть записано в виде ряда Тэйлора

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k}{k!} (t - \tau)^k, \tag{5.56}$$

где $X_k = \frac{d^k X}{dt^k}(\tau)$, и ряд сходится абсолютно при $|t - \tau| < r$. Производные X_k легко вычисляются использованием тождества $\dot{X}(t) = F(t, X(t))$. В самом деле, $X_0 = \xi$ вследствие начальных условий З.К., $X_1 = F(\tau, \xi)$, $X_2 = \frac{\partial F}{\partial t}(\tau, \xi) + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(\tau, \xi)\right] X_1$ и т.д. Более того, величина остаточного члена в ряде Тейлора для $X(t)$ также может быть оценена использованием свойств функции F, подробнее см. об этом [1, § 18].

Мы не будем приводить полное доказательство Теоремы (5.5.1), а рассмотрим более подробно случай линейных уравнений, где аналитическая теория приобретает особенно элегантную форму. Рассмотрим сначала линейную систему в общем виде

$$\dot{X} = A(t)X + F(t), \tag{5.57}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, и $A : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ представляет собой матричнозначную функцию, т.е. $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$. Ниже мы будем предпологать, что $A \in \mathcal{A}((a,b), \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathcal{A}((a,b), \mathbb{R}^n)$, где (a,b) — некоторый интервал из $\mathbb{R}$.

Теорема 5.5.2. *При выполнении указанных выше условий для каждой точки $(\tau, \xi) \in (a,b) \times \mathbb{R}^n$ справедливо включение $X(t) \in \mathcal{A}((a,b))$, где символом $X(t)$ обозначено непродолжаемое решение задачи Коши (τ, ξ) для уравнения (5.57). При этом ряд Тейлора функции $X(t)$ с центром в точке τ имеет радиус сходимости $r \geq \min(R(A,\tau), R(F,\tau))$, где символами $R(A,\tau), R(F,\tau)$ обозначены радиусы сходимости рядов Тейлора с центром в точке τ функций A, F соответственно.*

Доказательство этой теоремы мы приведем в одном частном, но очень важном случае: для уравнений вида

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t), \tag{5.58}$$

где неизвестная функция y вещественнозначна, $a(t), b(t), c(t), f(t)$ суть аналитические функции, заданные на некотором интервале из $\mathbb{R}$.

Теорема 5.5.3. *Пусть ряды Тейлора для функций a, b, c, f с центром в точке τ сходятся при $|t-\tau| \leq R$, причем*

$$a(t) \neq 0 \quad \text{при } |t-\tau| \leq R. \tag{5.59}$$

Тогда для любого $\xi \in \mathbb{R}^2$ существует аналитическое решение З.К. (τ, ξ) для уравнения (5.58), ряд Тейлора которого сходится при $|t-\tau| < R$.

Доказательство Теоремы 5.5.3. Рассмотрим разложение функций a, b, c, d, f в ряды Тэйлора

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(t-\tau)^n; \quad b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}(t-\tau)^n; \tag{5.60}$$

$$c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(t-\tau)^n; \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!}(t-\tau)^n. \tag{5.61}$$

Ясно, что здесь $a_n = a^{(n)}(\tau)$ и т.д.

Будем искать неизвестную функцию Y в виде

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{n!}(t-\tau)^n. \tag{5.62}$$

Здесь $y_n = y^{(n)}(\tau)$. Коэффициенты y_n можно легко найти, пользуясь формулой Лейбница для подсчета высших производных:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

С помощью этой формулы, дифференцируя n раз тождество (5.58), получаем

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (a_k y_{n+2-k} + b_k y_{n+1-k} + c_k y_{n-k}) = f_n. \tag{5.63}$$

Перепишем последнюю формулу в следующем виде, выделив в ней слагаемое, содержащее самый старший коэффициент y_{n+2}:

$$a_0 y_{n+2} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a_k y_{n+2-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (b_k y_{n+1-k} + c_k y_{n-k}) = f_n. \tag{5.64}$$

Поскольку $a_0 = a(\tau) \neq 0$ в силу условий доказываемой теоремы, очевидно, что поставив любую задачу Коши в точке τ, т.е. задав значения y_0, y_1, можно с помощью формул (5.64) однозначно найти все остальные коэффициенты y_n. Осталось доказать только, что формально полученный степенной ряд сходится при $|t - \tau| < R$.

Заменяя t на новую независимую переменную $\frac{t-\tau}{R}$, мы можем считать, не умаляя общности, что $\tau = 0$ и $R = 1$. Кроме того, разделив уравнение (5.58) на $a(t)$ (такую возможность нам предоставляет условие (5.59)), мы можем ограничиться рассмотрением уравнений вида

$$y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t), \tag{5.65}$$

Далее доказательство будет проводиться по классическому методу мажорант, придуманному Коши. А именно, уравнение (5.65) будет заменяться уравнением, решения которого можно найти в виде функций $y = \frac{1}{(1-t)^r}$. Для этих функций известна сходимость их рядов Тэйлора при $|t| < 1$, нужно только позаботиться, чтобы ряды Тэйлора для решений исходного уравнения (5.65) мажорировались указанными рядами, сходимость которых уже известна.

Далее нам необходимо отдельно рассмотреть два случая: однородный и неоднородный.

Однородный случай $(f = 0)$. Тогда наше уравнение принимает форму

$$y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0. \tag{5.66}$$

Поскольку в силу сделанных предположений ряды Тэйлора функций $b(t)$, $c(t)$ сходятся при $|t| \leq 1$, то существуют константы $B > 0, C > 0$ такие, что

$$\frac{|b_n|}{n!} \leq B; \quad \frac{|c_n|}{n!} \leq C.$$

Нам понадобятся следующие функции

$$\frac{B}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} B t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n!} t^n$$

и

$$\frac{C}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C(n+1) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_n}{n!} t^n,$$

где

$$|b_n| \leq Bn! = \bar{b}_n \quad \text{и} \quad |c_n| \leq C(n+1)! = \bar{c}_n. \tag{5.67}$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Коши-Эйлера

$$Y''(t) - \frac{B}{1-t}Y'(t) - \frac{C}{(1-t)^2}Y(t) = 0, \quad Y(0) = \bar{y}_0, \quad Y'(0) = \bar{y}_1. \tag{5.68}$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$Y(t) = C_1(1-t)^{-r_1} + C_2(1-t)^{-r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{y}_n}{n!}t^n, \tag{5.69}$$

где r_1, r_2 суть корни уравнения $r(r+1) - Br - C = 0$, которое получается, если подставить функцию $Y = (1-t)^{-r}$ в уравнение (5.68). Легко видеть, что указанные корни вещественны, $r_1 < 0 < r_2$, и они вычисляются по формуле

$$2r_{1,2} = (B-1) \pm \sqrt{(B-1)^2 + 4C}.$$

Используя начальные условия в (5.68), можно однозначно определить константы C_1, C_2 в (5.69) так, чтобы получить решение задачи (5.68).

Рекуррентные соотношения (5.64) для уравнения (5.68) записываются в виде

$$\bar{y}_{n+2} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k(\bar{b}_k\bar{y}_{n+1-k} + \bar{c}_k\bar{y}_{n-k}) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.70}$$

Отсюда вытекает, что если $y_0, y_1 \geq 0$, то $\bar{y}_n \geq 0$ при всех n.

Чтобы получить два независимых (базисных) решения уравнения (5.66), нужно взять З.К. $(y_0, y_1) = (1, 0)$ и $(y_0, y_1) = (0, 1)$, и в каждом из этих случаев взять те же самые начальные значения $(\bar{y}_0, \bar{y}_1)$. Поскольку ряд в (5.69) сходится при $|t| < 1$, то нам осталось доказать, что

$$|y_n| \leq \bar{y}_n \tag{5.71}$$

для всех n. По сделанным предположениям это имеет место для $n = 0, 1$. Далее действуем по индукции. Допустим, что указанная оценка справедлива для индексов $0, 1, 2, \ldots, n+1$.

$$|y_{n+2}| = \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k(b_k y_{n+1-k} + c_k y_{n-k})\right| \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k(\bar{b}_k\bar{y}_{n+1-k} + \bar{c}_k\bar{y}_{n-k}) = \bar{y}_{n+2}. \tag{5.72}$$

Итак, оценка (5.71) доказана, а значит, доказан и сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{n!}t^n$ при $|t| < 1$.

Неоднородный случай. Здесь достаточно доказать сходимость только для одного частного решения уравнения (5.65), в силу принципа суперпозиции.

Поскольку в силу сделанных предположений ряды Тэйлора функций $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ сходятся при $|t| \leq 1$, то существуют константы $B > 0, C > 0, F > 0$ такие, что

$$\frac{|b_n|}{n!} \leq B; \quad \frac{|c_n|}{n!} \leq C; \quad \frac{|f_n|}{n!} \leq F.$$

Положим $r = \frac{(B-1)+\sqrt{(B-1)^2+4(C+F)}}{2}$. Отметим, что $r > 0$ и $r(r+1) - Br - C = F$. Тогда мы имеем оценки

$$|b_n| \leq Bn! = \bar{b}_n, \quad |c_n| \leq C(n+1)! = \bar{c}_n, |f_n| \leq F(n+r+1)(n+r)\ldots(r+2) = \bar{f}_n.$$

Прямым вычислением проверяется, что функция

$$Y(t) = \frac{1}{(1-t)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{y}_n}{n!} t^n$$

является решением уравнения

$$Y''(t) - \frac{B}{1-t} Y'(t) - \frac{C}{(1-t)^2} Y(t) = \frac{F}{(1-t)^{-r-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{f}_n}{n!} t^n.$$

Тогда коэффициента ряда Тейлора функции Y удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$0 \le \bar{y}_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\bar{b}_k \bar{y}_{n+1-k} + \bar{c}_k \bar{y}_{n-k}) + \bar{f}_n.$$

Рассмотрим З.К. $y_0 = 1 = \bar{y}_0$ и $y_1 = r = \bar{y}_1$ для исходного уравнения (5.65). Как и в предыдущем пункте, по индукции доказывается, что коэффициенты y_n, посчитанные по формуле (5.64), удовлетворяют оценке $|y_n| \le \bar{y}_n$, а значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{n!} t^n$ сходится при $|t| < 1$.

Теорема 5.5.3 полностью доказана. Попутно были выведены удобные формулы для расчета решения, которые можно применить и для оценки остаточного члена в ряде Тейлора. $\square$

§5.1 Уравнения с регулярной особой точкой

Рассмотрим уравнение

$$t^2 y''(t) + t p(t) y'(t) + q(t) y(t) = 0, \tag{5.73}$$

где $p(t), q(t)$ суть аналитические функции, ряды Тейлора которых

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} t^n; \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{n!} t^n. \tag{5.74}$$

сходятся при $|t| \le R$.

Это решение не удовлетворяет условию невырожденности (5.59) в окрестности точки 0, поэтому оно требует особого подхода. Будем искать решение в виде

$$y(t) = |t|^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{n!} t^n = |t|^r \tilde{y}(t), \tag{5.75}$$

где r — некоторое вещественное число, точное значение которого мы укажем ниже. Подставляя эту функцию в (5.73) и произведя деление на $|t|^r$, получаем уравнение

$$t^2 \tilde{y}''(t) + t \tilde{p}(t) \tilde{y}' + \tilde{q}(t) \tilde{y} = 0, \tag{5.76}$$

где

$$\tilde{p}(t) = p(t) + 2r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{p}_n}{n!} t^n, \quad \tilde{q}(t) = q(t) + r p(t) + r(r-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{q}_n}{n!} t^n. \tag{5.77}$$

Выберем r так, чтобы

$$\tilde{q}_0 = q_0 + rp_0 + r(r-1) = 0. \tag{5.78}$$

Из двух корней уравнения (5.78) возьмем в качестве r корень с наибольшей вещественной частью. Тогда по теореме Виета

$$\mathrm{Re}(p_0 - 1 + 2r) \geq 0. \tag{5.79}$$

Дифференцируя уравнение (5.76) n раз в точке 0, получаем рекуррентные соотношения

$$n(n-1)y_n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k k\tilde{p}_{k-1}y_{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \tilde{q}_k y_{n-k} = 0. \tag{5.80}$$

В частности, коэффициент при y_n (самом старшем) определяется по формуле

$$n(n-1) + n\tilde{p}_0 = n^2 + n(\tilde{p}_0 - 1) = n^2 + n(p_0 - 1 + 2r). \tag{5.81}$$

В силу формулы (5.79) вещественная часть этого коэффициента не меньше n^2, так что рекуррентные соотношения (5.80) в самом деле позволяют однозначно найти все коэффициенты y_n по заданному y_0. Можно доказать, что ряд Тейлора $\tilde{y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{n!} t^n$ сходится при $|t| < R$.

Рекуррентные формулы (5.80) можно значительно упростить. Представим функции $\tilde{y}(t)$, $\tilde{p}(t)$, $\tilde{q}(t)$ в виде

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n t^n, \quad \tilde{p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n t^n, \quad \tilde{q}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Q}_n t^n, \tag{5.82}$$

где $Y_n = \frac{y_n}{n!}$ и т.д. Тогда несложными выкладками проверяется, что соотношения (5.80) эквивалентны рекуррентным формулам

$$\big[n(n-1) + n\tilde{P}_0\big]Y_n + \sum_{k=0}^{n-1} \big[k\tilde{P}_{n-k} + \tilde{Q}_{n-k}\big]Y_k = 0. \tag{5.83}$$

Литература

[1] *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

[2] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[3] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[4] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.

[5] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.

[6] *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.

[7] *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

[8] Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. / Под ред. В. К. Романко – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.