Семинар 21 [12.12.2022]

Метод стационарной фазы.

$$I(\lambda) = \int\limits_a^b A(x)\, e^{i\lambda S(x)} dx, \quad \lambda \to +\infty.$$

1. $S'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$:

$$I(\lambda) \sim \left. \frac{A(x)\, e^{i\lambda S(x)}}{i\lambda S'(x)} \right|_a^b + \mathcal{O}\left[\lambda^{-2}\right].$$

2. $\exists! x_0 \in (a,b)$: $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$:

$$I(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\,|S''(x_0)|}} A(x_0)\, e^{i\lambda S(x_0) + i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\left[S''(x_0)\right]}.$$

Задачи

Задача 1

Найти асимптотическое разложение интегралов Френеля

$$F_1(x) = \int\limits_x^{+\infty} \cos\left(y^2\right) dy, \quad F_2(x) = \int\limits_x^{+\infty} \sin\left(y^2\right) dy$$

при $x \to +\infty$.

Задача 2

Найти асимптотическое разложение функции Бесселя целого порядка n

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi - in\varphi} d\varphi$$

при $x \to +\infty$. Ограничиться главным вкладом.

Задача 3

Найти асимптотическое разложение функции Бесселя $J_n(n)$, где а $n \in \mathbb{N}$, при $n \to +\infty$. Ограничиться главным вкладом.

Задача 4

Найти асимптотическое разложение функции Эйри

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right] dt$$

при $x \to -\infty$. Ограничиться главным вкладом. Использовать метод стационарной фазы.

Решения

Задача 1

Введем вспомогателную функцию

$$F(x) = F_1(x) + iF_2(x) = \int\limits_x^{+\infty} e^{iy^2}\,dy,$$

тогда

$$F_1(x) = \mathrm{Re}\left[F(x)\right], \quad F_2(x) = \mathrm{Im}\left[F(x)\right].$$

Функция y^2 монотонна на интервале $(x, +\infty)$, следовательно интегрируем по частям:

$$F(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{1}{2iy}\left(e^{iy^2}\right)' dy = -\frac{e^{ix^2}}{2ix} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{1}{(2i)^2 y^3}\left(e^{iy^2}\right)' dy =$$

$$= -\frac{e^{ix^2}}{2ix} - \frac{e^{ix^2}}{(2i)^2 x^3} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{1\times 3}{(2i)^3 y^5}\left(e^{iy^2}\right)' dy =$$

$$= -\frac{e^{ix^2}}{2ix} - \frac{e^{ix^2}}{(2i)^2 x^3} - \frac{1\times 3}{(2i)^3 x^5} e^{ix^2} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{1\times 3\times 5}{(2i)^4 y^7}\left(e^{iy^2}\right)' dy.$$

Продолжая интегрирование до бесконечности получаем:

$$F(x) = -\frac{e^{ix^2}}{2ix} - \frac{e^{ix^2}}{(2i)^2 x^3} - \frac{1\times 3 e^{ix^2}}{(2i)^3 x^5} - \frac{1\times 3\times 5 e^{ix^2}}{(2i)^4 x^7} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{1\times 3\times 5\times 7}{(2i)^5 y^9}\left(e^{iy^2}\right)' dy =$$

$$= \frac{ie^{ix^2}}{2x}\left(1 + \frac{(1/2)}{i^1 x^2} + \frac{(3/2)\times(1/2)}{i^2 x^4} + \frac{(5/2)\times(3/2)\times(1/2)}{i^3 x^6} + \frac{(7/2)\times(5/2)\times(3/2)\times(1/2)}{i^4 x^8} + \ldots\right).$$

Далее, учитывая, что

$$\frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\frac{1}{2},$$

а также

$$\frac{e^{ix^2}}{i^n} = e^{ix^2 - in\pi/2} = \cos\left(x^2 - \frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(x^2 - \frac{n\pi}{2}\right),$$

получаем

$$F(x) = \frac{ie^{ix^2}}{2\sqrt{\pi}x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)}{i^n x^{2n}} =$$

$$= \frac{i}{2\sqrt{\pi}x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)}{x^{2n}}\cos\left(x^2 - \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)}{x^{2n}}\sin\left(x^2 - \frac{n\pi}{2}\right).$$

В итоге

$$F_1(x) = \mathrm{Re}\left[F(x)\right] = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)}{x^{2n+1}}\sin\left(x^2 - \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$F_1(x) = \mathrm{Re}\left[F(x)\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)}{x^{2n+1}}\cos\left(x^2 - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Можно было бы интегрировать по частям исходные функции:

$$F_1(x) = -\frac{\sin\left(x^2\right)}{2x} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{1}{2y^2}\sin\left(y^2\right)dy =$$

$$= -\frac{\sin\left(x^2\right)}{2x} + \frac{\cos\left(x^2\right)}{2^2x^3} - \int\limits_x^{+\infty} \frac{3}{2^2y^4}\cos\left(y^2\right)dy =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)}{x^{2n+1}}\sin\left(x^2 - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Аналогично можно было бы получить

$$F_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^{2n+1}}\cos\left(x^2 - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Задача 2

Имеем

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{S(\varphi)}d\varphi, \quad S(\varphi) = ix\sin\varphi - in\varphi.$$

Вычисляем производные:

$$S'(\varphi) = ix\cos\varphi - in, \quad S''(\varphi) = -ix\sin\varphi.$$

Находим стационарную точку

$$S'(\varphi_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_0 = \frac{n}{x}.$$

Учитывая, что $n/x \ll 1$, это уравнение имеет два решения на интервале интегрирования $\varphi_0 = \varphi_\pm \equiv \pm\pi/2 + \delta\varphi$, тогда

$$\mp\sin\delta\varphi = \frac{n}{x}, \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi = \mp\frac{n}{x} + \mathcal{O}\left[x^{-2}\right].$$

Таким образом

$$J_n(x) = I_+ + I_-,$$

где

$$I_+ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{S(\varphi)}d\varphi \sim \frac{e^{S(\varphi_+)}}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{\frac{(\varphi-\varphi_+)^2}{2}S''(\varphi_+)}d\varphi \sim$$

$$\sim \frac{e^{ix - i\frac{n\pi}{2}}}{2\pi}\left(1 + \mathcal{O}\left[x^{-2}\right]\right)\int\limits_0^{\pi} e^{-ix\frac{(\varphi-\varphi_+)^2}{2}}d\varphi.$$

и

$$I_- = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} e^{S(\varphi)}d\varphi \sim \frac{e^{-ix+i\frac{n\pi}{2}}}{2\pi}\left(1+\mathcal{O}\left[x^{-2}\right]\right)\int\limits_{-\pi}^{0} e^{ix\frac{(\varphi-\varphi_-)^2}{2}}d\varphi =$$

$$= \frac{e^{-ix+i\frac{n\pi}{2}}}{2\pi}\left(1+\mathcal{O}\left[x^{-2}\right]\right)\int\limits_{0}^{\pi} e^{ix\frac{(\varphi+\varphi_-)^2}{2}}d\varphi = I_+^*.$$

В итоге

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right].$$

Задача 3

Имеем

$$J_n(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inS(\varphi)}d\varphi, \quad S(\varphi) = \sin\varphi - \varphi.$$

Найдем стационарную точку:

$$S'(\varphi) = \cos\varphi - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0.$$

Вблизи нее имеем

$$S(\varphi) = -\frac{\varphi^3}{3!} + \mathcal{O}\left[\varphi^5\right].$$

Тогда

$$J_n(n) \sim \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-in\varphi^3/3!}d\varphi \sim \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-in\varphi^3/6}d\varphi = I + I^* = 2\mathrm{Re}\left[I\right],$$

где

$$I \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} e^{-in\varphi^3/6}d\varphi.$$

Сделаем замену $\varphi = re^{-i\pi/6}$, где r – новая переменная:

$$I \sim \frac{e^{-i\pi/6}}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi e^{i\pi/6}} e^{-nr^3/6}dr.$$

При $n \to +\infty$ подынтегральное выражение стремится к нулю в секторе $\arg r \in (-\pi/6, 0)$, так как в этом случае $\mathrm{Re}\left[r^3\right] > 0$. Тогда в этом пределе интеграл можно заменить интегралом по вещественной оси:

$$I \sim \frac{e^{-i\pi/6}}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} e^{-nr^3/6}dr.$$

Сделаем замену $nr^3/6 = x$ и перейдем к пределу $n \to +\infty$:

$$I \sim \frac{e^{-i\pi/6}}{\pi n}\left(\frac{n}{6}\right)^{2/3}\int\limits_{0}^{n\pi^3/6} x^{-2/3}e^{-x}dx \sim \frac{e^{-i\pi/6}}{\pi n}\left(\frac{n}{6}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

В итоге

$$J_n(n) \sim 2\mathrm{Re}\left[I\right] \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{n}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Задача 4

Сделаем замену $t = \sqrt{|x|}z$:

$$\mathrm{Ai}\left(x\right) = \frac{\sqrt{|x|}}{\pi}\mathrm{Re}I, \quad I = \int\limits_0^{+\infty} e^{i\lambda S(z)}dz, \quad \lambda = |x|^{3/2}, \quad S\left(z\right) = \frac{z^3}{3} - z.$$

Вычисляем производные

$$S'\left(z\right) = z^2 - 1, \quad S''\left(z\right) = 2z,$$

Находим стационарную точку z_0, значение функции $S\left(z\right)$ и ее второй производной в ней:

$$z_0 = 1, \quad S\left(z_0\right) = \frac{2}{3}, \quad S''\left(z_0\right) = -2.$$

Тогда по общей формуле получаем

$$I \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|S''\left(x_0\right)\right|}}e^{i\lambda S(x_0) + i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\left[S''(x_0)\right]} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{\frac{2}{3}i\lambda - i\frac{\pi}{4}}.$$

В итоге

$$\mathrm{Ai}\left(x\right) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{|x|}}}\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right).$$