Задача

Доказать, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left[\nabla\xi \times \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\right],$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, а $\xi = \xi(x, y, z)$.

Доказательство:

Воспользуемся тензорным представлением векторного произведения $\boldsymbol{a} \times \mathbf{b}$ как вектора $\mathbf{c}$, i-я компонента которого равна

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k,$$

где ε_{ijk} – тензор Леви-Чивиты и принято правило суммирования по повторяющимся индексам.

Тогда

$$\operatorname{rot}_i \mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]_i = \varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\frac{\partial A_k}{\partial\xi} = \left[\nabla\xi \times \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\right]_i$$

Переходя от тензорной к векторной записи, получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left[\nabla\xi \times \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\right].$$

Пример:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E_0}\,\mathrm{e}^{i((\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) - \omega t)}$$

Тогда, положив $\xi = i\left((\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) - \omega t\right)$, получим:

$$\nabla\xi = i\nabla(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = i\mathbf{k},$$

$$\tfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial\xi} = \mathbf{E_0}\tfrac{\partial e^{\xi}}{\partial\xi} = \mathbf{E_0}e^{\xi} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \left[\nabla\xi \times \tfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial\xi}\right] = i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}].$$