НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

М. В. Коробков

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конспект лекций

Новосибирск
2010

Оглавление

Глава 1

Фазовые портреты автономных систем

Автор благодарен доц. Волокитину Е.П. за помощь при подготовке настоящей рукописи.

§1 Предварительные сведения

Автономными называются системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X} = F(X), \tag{1.1}$$

где $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Такое название связано с тем обстоятельством, что правая часть системы (1.1) не зависит от переменной t, которая обычно интерпретируется как время. Пространство переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется *фазовым пространством* системы (1.1).

Область определения функции F мы будем обозначать через D. Ясно, что $D \subset \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, если не оговорено противное, что D есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $F \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$.

Лемма 1.1.1 (Основное свойство автономных систем). *Пусть $X(t)$ — решение системы (1.1), определенное на интервале (α, ω). Тогда для любого $c \in \mathbb{R}$ функция $\tilde{X}(t) = X(t+c)$ также есть решение системы (1.1), определенное на интервале $(\alpha - c, \omega - c)$. Далее, если $X(t)$ было непродолжаемым решением, то решение $\tilde{X}(t)$ также будет непродолжаемым.*

Доказательство проводится прямым вычислением.□

Из последней леммы и из теоремы Пикара немедленно вытекает

Следствие 1.1.2. *Пусть $X_1(t), X_2(t)$ — непродолжаемые решения системы (1.1), определенные на интервалах (α_1, ω_1), (α_2, ω_2) соответственно. Предположим, что существуют моменты времени $t_1 \in (\alpha_1, \omega_1)$, $t_2 \in (\alpha_2, \omega_2)$ такие, что $X_1(t_1) = X_2(t_2)$. Тогда справедливы равенства*

$$(\alpha_2, \omega_2) = (\alpha_1 - c, \omega_1 - c),$$

$$\forall t \in (\alpha_2, \omega_2) \quad X_2(t) \equiv X_1(t + c),$$

где $c = t_1 - t_2$.

Если $X(t)$ — непродолжаемое решение системы (1.1), определенное на интервале (α, ω), то множество $\{X(t) : t \in (\alpha, \omega)\}$ называется *фазовой траекторией*, или просто *траекторией*. Таким образом, фазовая траектория — это проекция интегральной кривой (т.е. графика решения) системы (1.1) на фазовое пространство.

Из Следствия 1.1.2 немедленно вытекает

Теорема 1.1.3. *Через каждую точку множества D проходит траектория, и притом только одна.*

Другими словами, траектории либо не пересекаются, либо совпадают. Траектория, проходящая через точку p, называется *траекторией точки p*.

Для неавтономных уравнений утверждение Теоремы 1.1.3 может не иметь место.

***Пример* 1.1.4.** (i) Рассмотрим сначала автономное уравнение $\dot{x} = x$. Его общее решение $x(t) = Ce^t$. Фазовое пространство $\mathbb{R}$ (ось x) разбивается на три траектории: $\mathbb{R} = \{0\} \cup (0, +\infty) \cup (-\infty, 0)$ (эти траектории соответствуют случаям, когда $C = 0,\ C > 0,\ C < 0$ соответственно).

(ii) Рассмотрим теперь неавтономное уравнение $\dot{x} = t$. Его общее решение $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + C$. Тогда проекции графиков решений на ось x представляют собой интервалы вида $[C, +\infty)$. Любые два интервала указанного типа пересекаются, поэтому аналог утверждения Теоремы 1.1.3 не имеет места.

Разбиение области D на совокупность фазовых траекторий называется *фазовым портретом* системы (1.1). На практике фазовым портретом обычно называют изображение нескольких траекторий системы, по которым можно восстановить качественное поведение всех остальных траекторий. В этой связи большую важность приобретают некоторые особые траектории, которые, так сказать, составляют скелет фазового портрета.

Постараемся выяснить, какой же вид могут иметь траектории.

Самая простейшая траектория состоит из одной точки. Это соответствует случаю постоянного решения $X(t) \equiv a$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что это имеет место в том и только том случае, когда $F(a) = 0$. Точку a в этом случае называют *положением равновесия*.

Следующий тип траекторий — замкнутые кривые. Это соответствует случаю непостоянного периодического решения, т.е. $X(t) \neq \text{const}$, и при некотором фиксированном $T > 0$ справедливо тождество $X(t + T) \equiv X(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Такие траектории называют *циклами*.

Третий тип — траектории без самопересечений, т.е. $X(t_1) \neq X(t_2)$ при любых $t_1 \neq t_2$.

Из Следствия 1.1.2 немедленно вытекает следующая

Теорема 1.1.5. *Каждая траектория системы (1.1) принадлежит в точности одному из указанных выше типов, т.е. она является либо положением равновесия, либо циклом, либо траекторией без самопересечений.*

Иногда в качестве фазового пространства естественно брать не подмножество $\mathbb{R}^n$, а некое многообразие, как показывает следующий

***Пример* 1.1.6.** Рассмотрим автономное уравнение $\dot{x} = \sin x$. Сначала будем считать, что фазовым пространством является $\mathbb{R}$. Тогда данное уравнение имеет счетное количество положений равновесия $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а остальные траектории представляют собой прямолинейные отрезки единичной длины, соединяющие соседние положения равновесия. Фазовый портрет в целом представляет собой счетное количество повторений одного и того же фрагмента.

Теперь будем считать, что фазовым пространством является единичная окружность, при этом x — угловая координата точки окружности. Тогда имеется два положения равновесия, и две траектории, их соединяющие. Фазовый портрет упрощается в сравнении с первой интерпретацией — мы избавились от бесконечного числа копий, не несущих никакой добавочной информации. В ряде случаев, например, когда рассматривается движение маятника, и в качестве x берется угловая координата маятника, указанная интерпретация представляется более естественной и с точки зрения физики.

Для точки $\xi \in D$ символом $X(t,\xi)$ обозначается непродолжаемое решение З.К. $(0,\xi)$ системы (1.1), определенное на интервале $(\alpha(\xi),\omega(\xi))$. Функцию $X(t,\xi)$ иногда называют *законом движения точки* ξ, или просто *движением точки* ξ. Мы будем неоднократно использовать следующее утверждение, которое носит технический характер.

Лемма 1.1.7. *Пусть $\xi \in D$, $t_0 \in (\alpha(\xi),\omega(\xi))$ и пусть $b = X(t_0,\xi)$. Тогда $X(t+t_0,\xi) \equiv X(t,b)$.*

Доказательство. Обозначим $X_1(t) = X(t,\xi)$, $X_2(t) = X_1(t_0+t)$. По условию, $X_1(t)$ есть непродолжаемое решение системы (1.1). Тогда по основному свойству автономных систем (см. Лемму 1.1.1) $X_2(t)$ также будет непродолжаемым решением системы (1.1) (определенным на соответствующем сдвинутом интервале). Имеем $X_2(0) = X_1(t_0) = X(t_0,\xi) = b$. Это означает, что $X_2(t)$ есть непродолжаемое решение З.К. $(0,b)$ системы (1.1), т.е., в принятых нами обозначениях, $X_2(t) \equiv X(t,b)$, что и требовалось доказать. □

§2 Теорема о выпрямлении траекторий

В прошлом параграфе было упомянуто, что при построении фазового портрета нас интересует качественное поведение траекторий. Что же понимается под термином «качественное поведение»? Другими словами, в каком случае фазовые портреты двух различных систем можно считать качественно эквивалентными? Точный ответ на этот вопрос дает следующее определение.

Определение 1.2.1. Пусть, наряду с системой (1.1), задана система

$$\dot{Y} = G(Y), \tag{1.2}$$

где $G : D_1 \to \mathbb{R}^n$ есть C^1-гладкое отображение, а D_1 — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что фазовые портреты систем (1.1), (1.2) качественно эквивалентны, если существует гомеоморфизм[1] $h : D_1 \to D$ со следующими свойствами:

(i) множество S является траекторией системы (1.1) в том и только том случае, когда множество $h(S)$ является траекторией системы (1.2);

(ii) гомеоморфизм h сохраняет «направление движения», т.е. для всякого решения $X(t)$ системы (1.1), определенного на (α,ω), найдется строго возрастающая функция $\tau : (\alpha,\omega) \to \mathbb{R}$, такая, что $h(X(t)) \equiv Y(\tau(t))$ для всех $t \in (\alpha,\omega)$, где $Y(\tau)$ — некоторое решение системы (1.2).

[1]Напомним, что отображение $h : D_1 \to D$ называется гомеоморфизмом, если оно непрерывно и существует обратное к нему отображение $h : D_1 \to D$, которое также непрерывно.

Для каждой системы существует бесконечно много других систем с качественно эквивалентными фазовыми портретами. А именно, рассмотрим замену переменных $X = h(Y)$, где $h : D_1 \to D_2$ есть C^1-гладкий диффеоморфизм[2], D_1, D_2 — области в пространстве $\mathbb{R}^n$, $D_2 \subset D$. Пусть $X(t)$ — решение системы (1.1). Определим $Y(t) = h^{-1}(X(t))$. Тогда

$$\dot{Y}(t) = \frac{d\big[h^{-1}(X(t))\big]}{dt} = [h'(Y(t))]^{-1}\dot{X}(t) = [h'(Y(t))]^{-1}F(X(t)) = [h'(Y(t))]^{-1}F(h^{-1}(Y(t))),$$

где через $h'(Y)$ обозначена матрица Якоби отображения h в точке Y (напомним, что согласно одной из теорем математического анализа матрицы $h'(Y)$ и $[h^{-1}]'(X)$ при $X = h(Y)$ являются обратными ко другу, так что справедливо равенство $[h'(Y)]^{-1} = [h^{-1}]'(X)$). Таким образом, в новых Y-переменных система (1.1) принимает вид

$$\dot{Y} = [h'(Y)]^{-1}F(h^{-1}(Y)), \tag{1.3}$$

в частности, полученная система также является автономной. Фактически, попутно мы доказали справедливость следующего утверждения.

Лемма 1.2.2. *Функция $Y(t)$ является решением уравнения (1.3) тогда и только тогда, когда функция $X(t) = h(Y(t))$ является решением уравнения (1.1). В частности, траектории системы (1.3) под действием диффеоморфизма h переходят в траектории системы (1.1).*

Тем самым фазовые портреты систем (1.3) и (1.1) (в областях D_1 и D_2 соответственно) качественно эквивалентны.

Оказывается, что фазовый портрет каждой системы в окрестности произвольной неособой (т.е. не являющейся положением равновесия) точки качественно эквивалентен множеству параллельных прямых линий.

Теорема 1.2.3. *Пусть $a \in D$ и $F(a) \neq 0$. Тогда существует открытая окрестность $\tilde{D} \subset D$ точки a, n-мерный открытый куб Q и C^1-гладкий диффеоморфизм $h : Q \to \tilde{D}$ такие, что при замене $X = h(Y)$ система уравнений (1.1) переходит в систему*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0; \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = 0; \\ \dot{y}_n = 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Доказательство. Без потери общности будем предполагать, что

$$f_n(a) \neq 0. \tag{1.5}$$

Обозначим через Q куб $(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_{n-1} - \delta, a_{n-1} + \delta) \times (-\delta, +\delta)$, где величина параметра δ будет уточнена позднее. Для точки $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Q$ символом Y_* будем обозначать «усеченную» точку $Y_* = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Рассмотрим отображение $h : Q \to \mathbb{R}^n$, которое точке $Y = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) \in Q$ сопоставляет точку $h(Y) = X(y_n, Y_*, a_n)$ (см. рис. 1 в гл. 3).

[2]Напомним, что отображение $h : D_1 \to D_2$ называется диффеоморфизмом класса гладкости C^k, если $h \in C^k(D_1, D_2)$, причем у h существует обратное отображение $h^{-1} : D_2 \to D_1$ той же гладкости $h^{-1} \in C^k(D_2, D_1)$.

По построению

$$h(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) = X(0; y_1, \dots, y_{n-1}, a_n) \equiv (y_1, \dots, y_{n-1}, a_n), \tag{1.6}$$
$$h(a_1, \dots, a_{n-1}, t) = X(t, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = X(t, a). \tag{1.7}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial h_i(Y)}{\partial y_j}|_{Y=b} = \delta_{ij} \quad \text{при } i, j = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{\partial h_i(Y)}{\partial y_n}|_{Y=b} = F(a),$$

где символом b мы обозначили точку $b = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$ Поэтому матрица Якоби $h'(b)$ (матрица из частных производных) отображения h в точке b имеет вид

$$h'(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ f_1(a) & f_2(a) & \dots & f_{n-1}(a) & f_n(a). \end{pmatrix}$$

Детерминант этой матрицы легко считается: $\det h'(b) = f_n(a) \neq 0$ (см. формулу (1.5)). Поэтому по теореме об обратной функции при достаточно малых $\delta > 0$ отображение h будет C^1-гладким диффеоморфизмом, т.е. для подобласти $\tilde{D} = h(Q)$ существует C^1-гладкое обратное отображение $h^{-1} : \tilde{D} \to Q$.

Возьмем произвольную точку $\xi \in Q$. Нас будет интересовать, как устроена траектория $Y(t, \xi)$ (последней формулой, напомним, обозначается решение З.К. $(0, \xi)$ для системы в Y-координатах (1.3)). Обозначим $c = h(\xi)$. По Лемме 1.2.2 справедливо тождество

$$h(Y(t, \xi)) = X(t, c). \tag{1.8}$$

С другой стороны, по построению имеем равенства

$$c = X(\xi_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, a_n),$$

откуда по Лемме 1.1.7

$$X(t, c) = X(t + \xi_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, a_n) = h(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n + t).$$

Сравнивая последнюю формулу с формулой (1.8), приходим к заключению, что

$$Y(t, \xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n + t \end{pmatrix},$$

а это показывает, что система уравнений для $Y(t)$ в данном случае действительно имеет искомый вид (1.4). □

Отметим, что функции $y_1(X), \dots, y_{n-1}(X)$ являются независимыми *первыми интегралами* системы (1.1), поэтому для их нахождения можно применить технику, описанную в §7.

***Пример* 1.2.4.** Найдем выпрямляющий диффеоморфизм для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \sin x_2,\ \dot{x}_2 = 1$$

в окрестности точки $a = (0,0)$. Нетрудно вычислить, что решение $X(t,\xi_1,0)$ задачи Коши

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

задается формулой

$$X(t,\xi_1,0) = \begin{pmatrix} (\xi_1 + \frac{1}{2})e^{-t} + \frac{\sin t - \cos t}{2} \\ \\ t \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$h(Y) = h(y_1,y_2) = X(y_2,y_1,0) = \begin{pmatrix} (y_1 + \frac{1}{2})e^{-y_2} + \frac{\sin y_2 - \cos y_2}{2} \\ \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь нетрудно вычислить и обратный диффеоморфизм, который задает зависимость $Y(X)$:

$$h^{-1}(X) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + e^{x_2}\big(x_1 - \frac{\sin x_2 - \cos x_2}{2}\big) \\ \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

§3 Теорема Лиувилля

Пусть D_0 есть ограниченное открытое множество, замыкание которого лежит в D. Тогда согласно одной из теорем, доказанных в первом семестре, найдется такое $\delta > 0$, что для всякого $\xi \in D_0$ справедливо включение $[-\delta,\delta] \subset (\alpha(\xi),\omega(\xi))$, т.е. решение $X(t,\xi)$ определено при $|t| < \delta$. Для $t \in [-\delta,\delta]$ обозначим через $\Phi_t(\cdot)$ отображение, которое точке $\xi \in D_0$ сопоставляет точку $\Phi_t(\xi) = X(t,\xi)$.

Семейство отображений $\Phi_t(\cdot)$ называется *фазовым потоком* системы (1.1).

Лемма 1.3.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) для всех $|t| \le \delta$ отображение $\Phi_t : D_0 \to D$ является C^1-гладким диффеоморфизмом множества D_0 на множество $D_t = \Phi_t(D_0)$;

(ii) отображение Φ_0 является тождественным;

(iii) если $s, t, s+t \in [-\delta,\delta]$, то отображение Φ_{t+s} является композицией отображений Φ_t и Φ_s, т.е. $\Phi_{t+s}(\xi) = \Phi_t(\Phi_s(\xi))$ для всех $\xi \in D_0$.

Доказательство. (i) Взаимно-однозначность $\Phi_t(\cdot)$ моментально следует из теоремы Пикара, а гладкость $\Phi_t(\cdot)$ вытекает из теоремы о гладкой зависимости решений от начальных данных.

(ii) следует непосредственно из определения;

(iii) вытекает из леммы 1.1.7. □

Следующая красивая теорема играет важную роль в изучении автономных систем.

Теорема 1.3.2 (Теорема Лиувилля). *Если справедливо тождество*

$$\forall X \in D \quad \operatorname{div} F(X) = 0, \tag{1.9}$$

то для всех $|t| \le \delta$ *отображение* $\Phi_t(\cdot)$ *сохраняет объем, т.е. для любого измеримого множества* $E \subset D_0$ *объем множества* E *совпадает с объемом множества* $\Phi_t(E)$.

Иллюстрацией к этой теореме служит рис. 2 в гл. 3.

Доказательство. Через $V(E)$ будем обозначать объем множества E. Как известно из курса математического анализа,

$$V(E) = \int_E d\xi.$$

Далее, по формуле замены переменной $\eta = \Phi_t(\xi)$ под знаком интеграла,

$$V(\Phi_t(E)) = \int_{\Phi_t(E)} d\eta = \int_E W(t,\xi)\, d\xi,$$

где через $W(t,\xi)$ обозначен якобиан (детерминант матрицы Якоби) отображения $\Phi_t(\cdot)$ в точке ξ. Для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость следующего равенства:

$$\forall t \in [-\delta,\delta]\ \forall \xi \in D_0 \quad \dot W(t,\xi) = W(t,\xi)\cdot \big[\operatorname{div} F\big](X(\tau,\xi)), \tag{1.10}$$

где, напомним, оператор дивергенции $\operatorname{div} F$ определяется как

$$\operatorname{div} F(X) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X).$$

В самом деле, поскольку в силу пункта (ii) Леммы 1.3.1 справедливо тождество $W(0,\xi) \equiv 1$, то формула (1.10) вместе с условием (1.9) дает нам, что $W(t,\xi) \equiv 1$, а отсюда, в свою очередь, непосредственно следует искомое утверждение о равенстве объемов. Итак, осталось доказать формулу (1.10)

Согласно нашим определениям и обозначениям,

$$W(t,\xi) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Согласно обычному правилу для вычисления производной от определителя,

$$\dot W(t,\xi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1(t,\xi)}{\partial t \partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial^2 x_1(t,\xi)}{\partial t \partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial^2 x_2(t,\xi)}{\partial t \partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial^2 x_2(t,\xi)}{\partial t \partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 x_n(t,\xi)}{\partial t \partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial^2 x_n(t,\xi)}{\partial t \partial \xi_n} \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

Поскольку $X(t,\xi) = \begin{pmatrix} x_1(t,\xi) \\ \vdots \\ x_n(t,\xi) \end{pmatrix}$ есть решение системы (1.1), то

$$\frac{\partial^2 x_i(t,\xi)}{\partial t \partial \xi_j} = \frac{\partial \left(\frac{\partial x_i(t,\xi)}{\partial t}\right)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f_i(X(t,\xi))}{\partial \xi_j} \equiv \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right](X(t,\xi)) \cdot \frac{\partial x_k(t,\xi)}{\partial \xi_j}. \tag{1.13}$$

Используя последнюю формулу, вычислим первое из n слагаемых в формуле (1.12):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1(t,\xi)}{\partial t\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial^2 x_1(t,\xi)}{\partial t\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right](X(t,\xi)) \cdot \frac{\partial x_k(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right](X(t,\xi)) \cdot \frac{\partial x_k(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right](X(t,\xi)) \cdot \frac{\partial x_k(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right](X(t,\xi)) \cdot \frac{\partial x_k(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right](X(t,\xi)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_k(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_k(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}.$$

(При выводе предпоследнего равенства мы воспользовались известным свойством разложения определителя по строке.) В последней сумме все определители при $k \neq 1$ зануляются, т.к. в соответствующих матрицах 1-я и k-я строки совпадают. Окончательно получаем, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1(t,\xi)}{\partial t\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial^2 x_1(t,\xi)}{\partial t\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right](X(t,\xi)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_2(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t,\xi)}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = W(t,\xi) \cdot \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right](X(t,\xi)).$$

Аналогично доказывается, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1(t,\xi)}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial^2 x_2(t,\xi)}{\partial t\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial^2 x_2(t,\xi)}{\partial t\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = W(t,\xi) \cdot \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right](X(t,\xi)).$$

В итоге формула (1.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{W}(t,\xi) = W(t,\xi) \cdot \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right](X(t,\xi)) + W(t,\xi) \cdot \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right](X(t,\xi)) + \dots + W(t,\xi) \cdot \left[\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right](X(t,\xi)), \\ = W(t,\xi) \cdot \left[\operatorname{div} F\right](X(t,\xi)), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

***Пример* 1.3.3.** Рассмотрим систему уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H(X,P)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(X,P)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.14}$$

где $H \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^{2n}$. Тогда, представив эту систему в виде (1.1), где вместо X будет стоять $2n$-вектор $\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$, имеем

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Таким образом, система уравнений Гамильтона удовлетворяет условиям теоремы Лиувилля, следовательно, фазовый объем любой области остается постоянным (при перемещении точек области по траекториям гамильтоновой системы уравнений).

§4 Фазовые портреты в окрестности положения равновесия

Изучение положений равновесия играет ключевую роль в построении фазового портрета.

Частным, но очень важным, является случай линейных систем

$$\dot{X} = AX, \tag{1.15}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ есть постоянная $n \times n$ матрица, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Далее мы ограничимся рассмотрением плоского случая ($n = 2$).

Определение 1.4.1. Нулевое положение равновесия называется *простым*, если $\det A \neq 0$.

Обозначим через λ_j, $j = 1, 2$, собственные числа матрицы A. Как известно, нулевое положение равновесия системы (1.15) может принадлежать к одному из следующих типов:

(i) Устойчивый узел при $\lambda_j < 0$, $j = 1, 2$ (см. рис. 3i в гл. 3).

(ii) Неустойчивый узел при $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2$ (см. рис. 3ii в гл. 3).

(iii) Устойчивый фокус при $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $\operatorname{Im} \lambda_j \neq 0$, $j = 1, 2$ (см. рис. 3iii в гл. 3).

(iv) Неустойчивый фокус при $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, $\operatorname{Im} \lambda_j \neq 0$, $j = 1, 2$ (см. рис. 3iv в гл. 3).

(v) Седло при $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (см. рис. 3v в гл. 3).

(vi) Центр при $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_j \neq 0$, $j = 1, 2$ (см. рис. 3vi в гл. 3).

Лемма 1.4.2. *Фазовые портреты в случаях (i) и (iii) качественно эквивалентны. Фазовые портреты в случаях (ii) и (iv) качественно эквивалентны.*

Рассмотрим теперь общий случай системы (1.1) при $n = 2$. Пусть X_* — положение равновесия этой системы, через A обозначим матрицу Якоби отображения F в точке X_*, а через λ_j как и прежде будем обозначать собственные числа матрицы A.

Теорема 1.4.3 (без доказательства). *Пусть $F \in C^2(D, \mathbb{R}^2)$. Предположим, что собственные числа λ_j удовлетворяет одному из условий (i)–(v). Тогда найдется окрестность U точки X_* такая, что фазовый портрет нелинейной системы (1.1) качественно эквивалентен фазовому портрету линейной системы (1.15) в некоторой окрестности начала координат.*

Таким образом, в случаях (i)–(v) тип положения равновесия сохраняется при линеаризации системы. Такие положения равновесия называют "грубыми".

§5 Предельные Циклы

В этом параграфе по-прежнему рассматривается плоский случай $n = 2$ системы (1.1).

Лемма 1.5.1. *Пусть дана кривая L, параметризованная C^1-гладкой функцией $\psi : I \to D \subset \mathbb{R}^2$, $\psi' \neq 0$ на $I = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Если траектория $X(t, \xi_0)$ и кривая L пересекаются в точке $X(t_0, \xi_0) = \psi(u_0) = b$ и не касаются друг друга в ней, т.е. вектора $F(b)$ и $\psi'(u_0)$ линейно независимы, то при достаточно малых $|\xi - \xi_0|$ траектория $X(t, \xi)$ и L пересекаются в точке $X(t(\xi), \xi) = \psi(u(\xi))$, где величины $t(\xi) - t_0$ и $u(\xi) - u_0$ малы, а функции $t(\xi)$ и $u(\xi)$ имеют непрерывные частные производные по компонентам вектора ξ. В частности, всякая траектория, проходящая достаточно близко от b, пересекает линию L.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$X(t, \xi) - \psi(u) = 0, \tag{1.16}$$

определяющее искомую точку пересечения, в которой переменные t, u суть функции ξ. Матрица Якоби, получающаяся при дифференцировании левой части по t, u при $t = t_0$, $u = u_0$, $\xi = \xi_0$, образована столбцами $F(b), \psi'(u_0)$ и потому невырожденна (см. условие доказываемой леммы). Отсюда по теореме о неявной функции, а также в силу теорем о гладкой зависимости решений от начальных данных, следует справедливость утверждения доказываемой леммы. □

Теорема 1.5.2. *Пусть $X = \varphi(t)$ есть предельный цикл системы (1.1) при $n = 2$, и пусть K — соответствующая замкнутая траектория. Тогда для траекторий внутри K справедливо в точности одно из двух сформулированных ниже утверждений: все внутренние траектории, начинающиеся вблизи K, наматываются на K как спирали либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$. Аналогичный факт имеет место для внешних траекторий, проходящих вблизи K.*

Описанные в теореме случаи изображены на рис. 4 в гл. 3.

Доказательство.

Возьмем какую нибудь точку b на траектории K. Тогда эта траектория соответствует периодическому решению $X(t, b)$ с наименьшим положительным периодом T. Проведем через b маленький отрезок L так, что он пересекает K только в одной точке b трансверсально. Этот отрезок L параметризуем обычным образом функцией $\psi(u)$ так, чтобы $\psi(u_0) = b$. По предположению $X(T, b) = b$. В силу леммы 1.5.1 для всякой точки $p = \psi(u) \in L$ вблизи b найдутся числа $t(u)$, $\chi(u)$, мало отличающиеся от T, u_0 и такие, что $X(t(u), p) = \psi(\chi(u)) \in L$. Очевидно, что эта точка $q = \psi(\chi(u))$ будет следующей точкой пересечения траектории, исходящей из $p = \psi(u)$, с отрезком L (см. рис. 5 в гл. 3). Поэтому $\chi(u)$ называется *функцией последования*. Вследствие все той же леммы 1.5.1 получаем, что функция последования непрерывно дифференцируема. Если повернуть время вспять, т.е. сделать замену переменной t на $-t$, то функция последования новой системы будет обратной к функции последования исходной системы. Поэтому χ^{-1} также непрерывно дифференцируема, в частности, $\chi'(u) \neq 0$. Если $p \neq b$, то геометрически очевидно, что q находится по ту же сторону от точки b, что и p (это вытекает из того, что точки p, q находятся либо одновременно вне K, либо одновременно внутри K), поэтому $\chi'(0) > 0$. Очевидно, что если $\chi(u) = u$, то траектория из точки $p = \psi(u)$ будет замкнутой. Поскольку наш цикл K предельный, ясно, что $\chi(u_0) = u_0$ и $\chi(u) \neq u$ при $u \neq u_0$ вблизи u_0.

Поэтому при достаточно малых $h > 0$ либо

$$\chi(u) - u < 0 \quad \text{при } u \in (u_0, u_0 + h), \tag{1.17}$$

либо

$$\chi(u) - u > 0 \quad \text{при } u \in (u_0, u_0 + h). \tag{1.18}$$

Аналогично, для $u < 0$ либо

$$\chi(u) - u < 0 \quad \text{при } u \in (u_0 - h, u_0), \tag{1.19}$$

либо

$$\chi(u) - u > 0 \quad \text{при } u \in (u_0 - h, u_0). \tag{1.20}$$

Рассмотрим первую возможность (1.17). Предположим также, для определенности, что точки $\psi(u)$ лежат внутри K при $u > 0$. Для произвольной точки $p = \psi(u_1)$, $u_1 \in (u_0, u_0+h)$, рассмотрим последовательность $p_i = \psi(u_i)$, определенную по правилу

$$u_{i+1} = \chi(u_i). \tag{1.21}$$

Эта последовательность, очевидно, будет убывающей, поэтому $u_i \to u_* \in [0, 1)$ при $i \to +\infty$. Переходя в равенстве (1.21) к пределу, получаем, что $u_* = \chi(u_*)$. Следовательно $u_* = 0$. Это означает, что $p_i \to \psi(0) = b \in K$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. $\square$

С помощью доказанной теоремы можно дать следующую классификацию предельных циклов. Предельный цикл называется *устойчивым*, если близлежающие траектории наматываются на него при $t \to +\infty$ как изнутри, так и снаружи (см. рис. 4a в гл. 3). Далее, предельный цикл называется *неустойчивым*, если близлежащие траектории наматываются от него при $t \to -\infty$ как изнутри, так и снаружи (см. рис. 4b в гл. 3). Наконец, в остальных случаях (когда с одной стороны траектории наматываются на цикл при $t \to +\infty$, а с другой — при $t \to -\infty$) предельный цикл называется *полуустойчивым* (см. рис. 4c в гл. 3).

Важным уточнением предлагаемой классификации является понятие *грубого предельного цикла*. Интуитивно, рассуждая по аналогии со случаем положений равновесия, предельный цикл называется грубым, если при малом изменении системы (1.1) этот цикл переходит в цикл того же типа, т.е качественно фазовый портрет в окрестности указанного цикла не меняется. Точное определение этого феномена можно дать в терминах функции последования, введенной при доказательстве Теоремы 1.5.2.

В координатной плоскости (u, v) нарисуем график функции $v = \chi(u)$ и график функции $v = u$ (см. рис. 6 в гл. 3). Пересечения этих графиков, т.е. решения уравнения $\chi(u) = u$, будут соответствовать замкнутым траекториям, т.е. циклам. Цикл будет предельным в том и только том случае, когда точка указанного пересечения изолированная.

Рассмотрим такую изолированную точку u_0 и опишем в терминах функции последования введенные выше понятия устойчивого и неустойчивого предельного цикла. Легко видеть, что

(i) предельный цикл является устойчивым $\Leftrightarrow$ справедливы формулы (1.17) и (1.20) (см. рис. 6 и рис. 4a в гл. 3);

(ii) предельный цикл является неустойчивым $\Leftrightarrow$ справедливы формулы (1.18) и (1.19) (см. рис. 7 и рис. 4b в гл. 3);

(iii) предельный цикл является полуустойчивым $\Leftrightarrow$ справедливы формулы (1.17),(1.19) или (1.18),(1.20) (см. рис. 8 и рис. 4c в гл. 3).

Прямыми вычислениями можно убедиться, что если

$$\chi'(u_0) < 1, \tag{1.22}$$

то имеет место ситуация (i), а если

$$\chi'(u_0) > 1, \tag{1.23}$$

то мы попадаем в (ii). В обоих из этих случаев цикл и называется *грубым*. В самом деле, тогда при малом (гладком) изменении системы уравнений неравенства (1.22) и (1.23) сохранятся, а потому у новой системы в этом месте будет иметься ровно один[3] предельный цикл того же типа ((i) или (ii)), что и у старой системы. Если же $\chi(0) = 1$, то даже при сколь угодно малом (гладком) изменении системы может измениться количество циклов и их тип (см. примеры функций последования на рис. 9 и соответствующие им фазовые портреты на рис. 10 в гл. 3).

§6 Предельные Множества

В данном параграфе мы по-прежнему рассматриваем систему (1.1) на плоскости. Более того, мы предполагаем, что каждая из рассматриваемых траекторий $X(t, \xi)$ удовлетворяют следующему предположению

(*) Найдется компактное множество $\Gamma \subset D$ такое, что для всех $t \in (0, \omega(\xi))$ справедливо включение $X(t, \xi) \in \Gamma$.

Отсюда по теореме о покидании компакта получаем, в частности, что $\omega(\xi) = +\infty$, т. е. все рассматриваемые в настоящем параграфе решения определены вправо до $+\infty$.

Определение 1.6.1. Пусть $\varphi(t)$ — непродолжаемое решение системы (1.1). Точка $X_* \in D$ называется ω-предельной точкой траектории φ, если существует последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что $\varphi(t_k) \to X_*$. Множество всех ω-предельных точек траектории φ называется ω-предельным множеством траектории φ и обозначается $\Omega(\varphi)$.

Лемма 1.6.2 (без доказательства). *Для каждой траектории φ множество $\Omega(\varphi)$ непусто и компактно. Далее, если $\xi \in \Omega(\varphi)$, то $\alpha(\xi) = -\infty$ и $\{X(t, \xi) : t \in (-\infty, +\infty)\} \subset \Omega(\varphi)$. Другими словами, множество $\Omega(\varphi)$ состоит из целых траекторий, т.е. вместе с каждой точкой оно целиком содержит и исходящую из этой точки траекторию.*

[3]Циклы задаются решением уравнения $\chi(u) = u$. Ясно, что при выполнении условий (1.22) или (1.23) решение указанного уравнения локально единственно.

Очевидно, что ω-предельное множество положения равновесия или цикла совпадает с самими указанными траекториями (поэтому они называются *самопредельными*).

Какие же еще бывают виды ω-предельных множеств? Ключевую роль в ответе на этот вопрос играет следующая

Теорема 1.6.3. *Пусть среди ω-предельных точек незамкнутой траектории $\varphi(t)$ есть отличные от положения равновесия. Тогда эта траектория не может содержаться в ω-предельном множестве никакой другой траектории.*

Доказательство Теоремы 1.6.3. Пусть, согласно условию теоремы, $b \in \Omega(\varphi)$, $F(b) \neq 0$. Проведем через точку b прямолинейный отрезок L трансверсально полю $F(X)$, т.е. вектор $F(X)$ не параллелен отрезку L ни в какой точке $X \in L$. Тогда все траектории будут пересекать отрезок L в одном направлении (см. рис. 11 в гл. 3).

Нашей ближайшей целью будет выяснить, что можно сказать о множестве точек пересечения траектории φ с отрезком L. А именно, мы докажем следующее утверждение:

$(*)$ Для некоторого $\tau \in (\alpha(\varphi), +\infty)$ пересечение $L \cap \varphi([\tau, +\infty))$ состоит из счетного числа точек a_i, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $a_i \to b$ при $i \to \infty$.

Из Леммы 1.5.1 вытекает, что, существует $\delta > 0$ такое, что если $|\varphi(t) - b| < \delta$, то $\varphi(t') \in L$ при некотором t', $|t' - t| < 1$. Отсюда и из определения ω-предельных точек, в свою очередь, следует, что траектория $\varphi(t)$ пересекает отрезок L бесконечное количество раз, причем в различных точках (ввиду незамкнутости траектории φ). Пусть $a_1 = \varphi(t_1)$ — какая-нибудь точке пересечения. Обозначим через $a_2 = \varphi(t_2)$ следующую точку пересечения, т.е. $a_2 \in L$, $t_2 > t_1$ и $\varphi((t_1, t_2)) \cap L = \emptyset$. По теореме Жордана о замкнутых кривых без самопересечений, кривая, являющаяся объединением участка траектории $\varphi([t_1, t_2])$ (который мы далее будем обозначать через M) и отрезка $a_1 a_2$, разбивает плоскость на две области G_1 и G_2 (см. рис. 12 в гл. 3).

Для определенности договоримся, что через G_1 мы будем обозначать ту область, в которой находятся точки $\varphi(t_1 - h)$ при малых $h > 0$. Тогда геометрически очевидно, что точки $\varphi(t_2 + h)$ при малых $h > 0$ будут лежать в области G_2. Утверждается, что весь участок траектории $\varphi((t_2, t_2 + \infty))$ целиком содержится внутри G_2. Это вытекает из того, что в момент времени t_2 траектория φ входит в область G_2, а выйти из нее она не может, т.к. $\varphi(t)$ при $t > t_2$ не пересекается с границей области G_2. В самом деле, если бы $\varphi(t) \in M$ при $t > t_2$, то у траектории φ были бы самопересечения, т.е. φ было бы периодическим решением, а это невозможно по условию доказываемой теоремы. Также невозможно пересечение $\varphi(t)$ с отрезком $a_1 a_2$ при $t > t_2$, т.к. все траектории пересекают отрезок $a_1 a_2$ в одном направлении: из G_1 в G_2. Отсюда и из Леммы 1.5.1 вытекает также, что при достаточно больших моментах времени t точка $\varphi(t)$ не может приближаться сколь угодно близко к какой-нибудь точке полуоткрытого[4] отрезка $[a_1 a_2)$. Следовательно, b лежит в замыкании области G_2 и не принадлежит полуоткрытому отрезку $[a_1 a_2)$ (т.к. по определению ω-предельного множества траектория $\varphi(t)$ приближается к b сколь угодно близко при $t \to +\infty$). Последнее, ввиду геометрически очевидных соображений, означает, что точки a_1, a_2 находятся на отрезке L по одну сторону от точки b, причем a_2 ближе к b, чем a_1.

Пусть определены точки $a_1 = \varphi(t_1), \ldots, a_i = \varphi(t_i) \in L$. Тогда обозначим через $a_{i+1} = \varphi(t_{i+1})$ следующую по времени (после a_i) точку пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком

[4]На данном первом шаге мы формально еще не исключаем возможность $b = a_2$. Эта возможность будет исключена на следующем, втором шаге, когда будет показано, что $b \notin [a_2, a_3)$.

L. Повторяя приведенные выше рассуждения, нетрудно доказать по индукции, что все a_i находятся на отрезке L по одну сторону от точки b, причем a_{i+1} ближе к b, чем a_i. Следовательно, a_i монотонно сходится к некоторой точке b' при $i \to +\infty$. Чтобы закончить доказательство утверждения $(*)$, нам осталось проверить, что

$$b' = b. \tag{1.24}$$

С этой целью покажем сначала, что

$$t_i \to +\infty \quad \text{при } i \to +\infty. \tag{1.25}$$

Если бы последняя формула была неверна, то $t_i \to t_* \in \mathbb{R}$. Тогда по определению производной

$$\frac{\varphi(t_*) - \varphi(t_i)}{t_* - t_i} \to \dot{\varphi}(t_*) = F(\varphi(t_*)) = F(b').$$

С другой стороны, разностное отношение в левой части последней формулы параллельно отрезку L, следовательно, вектор $F(b')$ также параллелен отрезку L, что противоречит выбору L.

Итак, сходимость (1.25) доказана. Значит, $\varphi([t_1, +\infty)) \cap L = \{a_1, a_2, \dots\}$, а последнее множество имеет только одну предельную точку b'. Следовательно, $L \cap \Omega(\varphi) = \{b'\}$, откуда вытекает искомое равенство (1.24). Тем самым утверждение $(*)$ также доказано. Попутно мы доказали, что

$$L \cap \Omega(\varphi) = \{b\}. \tag{1.26}$$

Теперь перейдем к окончанию доказательства Теоремы 1.6.3. Допустим, что утверждение этой теоремы неверно, т.е. $\varphi(\mathbb{R})$ содержится в ω-предельном множеством для какой-нибудь траектории $\psi(t)$, на языке формул это означает, что

$$\varphi(\mathbb{R}) \subset \Omega(\psi). \tag{1.27}$$

В частности, $a_1 \in \Omega(\psi)$. Повторяя приведенные выше рассуждения к ψ (которая теперь играет роль φ) и a_1 (которое теперь играет роль b), получаем, по аналогии с формулой (1.26), равенство

$$L \cap \Omega(\psi) = \{a_1\}. \tag{1.28}$$

Однако последняя формула с учетом (1.27) противоречит включениям $a_i = \varphi(t_i) \in \Omega(\psi)$. Полученное противоречие завершает доказательство Теоремы 1.6.3. □

Следствие 1.6.4. *Пусть среди ω-предельных точек траектории $\varphi(t)$ нет положений равновесия. Тогда $\Omega(\varphi)$ представляет собой цикл, причем либо $\varphi(\mathbb{R}) = \Omega(\varphi)$, либо $\varphi(t)$ наматывается на $\Omega(\varphi)$ как спираль.*

Следствие 1.6.5. *Для произвольной траектории $\varphi(t)$ справедливо одно из следующих трех утверждений:*

(I) $\Omega(\varphi)$ представляет собой положение равновесия;

(II) $\Omega(\varphi)$ представляет собой цикл;

(III) $\Omega(\varphi)$ представляет собой совокупность положений равновесия и траекторий (сепаратрисс), стремящихся к этим положениям равновесия как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

§7 Первые интегралы

В данном параграфе рассматривается система (1.1) без ограничений на n.

Определение 1.7.1. Пусть $D_1 \subset D$ — некоторое открытое множество. C^1-гладкая функция $u : D_1 \to \mathbb{R}$ называется *первым интегралом* системы (1.1) в D_1, если для любого решения $\varphi(t)$ системы (1.1) со значениями в D_1 справедливо тождество $u(\varphi(t)) \equiv \text{const}$.

Возникает вопрос: как понять, является ли данная конкретная функция первым интегралом, или нет? Приведенное определение малопригодно для решения указанного вопроса, особенно в случае, когда мы не знаем общего решения системы (1.1). Здесь оказывается полезным следующий простой критерий.

Теорема 1.7.2. *Функция $u \in C^1(D_1)$ является первым интегралом тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$\dot{u}_{(1.1)}(X) \equiv 0 \quad \text{для всех } X \in D_1, \tag{1.29}$$

где символом $\dot{u}_{(1.1)}$ обозначена производная функции u в силу системы (1.1) (впервые рассмотренная при изучении функций Ляпунова), вычисляемая по формуле

$$\dot{u}_{(1.1)}(X) = \langle \nabla u(X), F(X) \rangle = \frac{\partial u}{\partial x_1}(X) \cdot f_1(X) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(X) \cdot f_n(X).$$

Обращаем внимание, что формулу (1.29) можно проверить, даже не зная *ни одного* решения системы (1.1).

Доказательство. Нужно воспользоваться тем фактом (вытекающим из соответствующих определений), что для всякого решения $\varphi(t)$ системы (1.1) справедливо тождество

$$\frac{d\,u(\varphi(t))}{d\,t} \equiv \dot{u}_{(1.1)}(\varphi(t)). \tag{1.30}$$

□

Из самого определения ясно, что всякая траектория лежит на некотором множестве уровня первого интеграла. Однако даже при $n = 2$ не всякое множество уровня первого интеграла является частью траектории, как показывает следующий пример.

***Пример* 1.7.3.** Рассмотрим простейшую систему

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y, \tag{1.31}$$

Легко проверяется, что функция $u(x, y) = xy$ является первым интегралом системы (1.31) на всем $\mathbb{R}^2$. В самом деле

$$\dot{u}_{(1.31)} = y \cdot x + x \cdot (-y) = 0.$$

Рассмотрим множество уровня $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) = 0\}$. Это множество совпадает с объединением двух координатных осей. В то же время оно является объединением пяти траекторий: четырех лучей, выходящих из начала координат по координатным осям, и точки $(0, 0)$, являющейся положением равновесия системы (1.31). Таким образом, даже локально в окрестности начала координат данное множество уровня не является частью какой-либо одной траектории.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1.7.4 (без доказательства). *Пусть $n = 2$, функция $u \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (1.1) и $F \neq 0$ в D_1. Тогда для каждого связного множества уровня функции u найдется содержащая его траектория системы (1.1).*

Оказывается, понятие первого интеграла инвариантно относительно рассмотренных в §2 замен координат.

Лемма 1.7.5. *Пусть $h : D_2 \to D_1 \subset D$ есть C^1-гладкий диффеоморфизм открытых множеств D_1, D_2. Тогда функция $u(X) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (1.1) в том и только том случае, когда функция $v(Y) \in C^1(D_2)$, вычисляемая по правилу $v(Y) = u(h(Y))$, является первым интегралом системы (1.3).*

Доказательство мгновенно вытекает из Определения 1.7.1 и Леммы 1.2.2. □

Тривиальным примером первого интеграла служит функция $u = \mathrm{const}$. Ясно, что такой первый интеграл не дает никакой информации об исследуемой системе. Далее, если $u_1(X)$ есть нетривиальный первый интеграл системы (1.1), то для любой гладкой функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция $u_2(X) = g(u_1(X))$ также является первым интегралом той же системы. Однако множества уровня у обоих функций u_1, u_2 одни и те же, поэтому новый первый интеграл u_2 не дает никакой дополнительной информации о системе в сравнении с u_1. В каком же случае набор первых интегралов дает, так сказать, исчерпывающую информацию об исследуемой системе? Для ответа на этот вопрос нам понадобится следующее определение:

Определение 1.7.6. Первые интегралы $u_1, \ldots, u_k \in C^1(D_1)$ называется *независимыми*, если $\forall X \in D_1 \ \ \mathrm{rank}(\nabla u_1(X), \nabla u_2(x), \nabla u_3(X), \ldots, \nabla u_k(X)) = k$.

Лемма 1.7.7. *Введенное понятие независимости первых интегралов инвариантно относительно рассмотренных выше замен координат.*

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_k \in C^1(D_1)$ суть независимые первые интегралы системы (1.1) и $h : D_2 \to D_1$ является C^1-гладким диффеоморфизмом. Определим функции $v_i : D_2 \to D_1$, $i = 1, \ldots, k$, по правилу $v_i(Y) = u_i(h(Y))$. По Лемме 1.7.5 функции v_i суть первые интегралы системы (1.3). Осталось проверить их независимость. По правилу дифференцирования сложной функции,

$$\nabla v_i(Y) = [\nabla u_i](h(Y)) \cdot h'(Y), \tag{1.32}$$

где градиенты считаются вектор-строками, символ $\cdot$ означает обычное перемножение матриц, а через $h'(Y)$ обозначена квадратная матрица Якоби отображения h, т.е.

$$h'(Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(Y) & \ldots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n}(Y) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1}(Y) & \ldots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n}(Y) \end{pmatrix}.$$

Вследствие того факта, что h является диффеоморфизмом, его матрица Якоби невырождена:

$$\det h'(Y) \neq 0 \quad \text{для всех } Y \in D_2. \tag{1.33}$$

Далее, по предположению о независимости первых интегралов u_i вектора $\nabla u_i(X)$, $i = 1, \ldots, k$, линейно независимы. Отсюда и из формул (1.32)–(1.33) (с учетом известных фактов линейной алгебры) вытекает, что вектора $\nabla v_i(Y)$, $i = 1, \ldots, k$, линейно независимы. Тем самым Лемма 1.7.7 доказана. □

Следующие две теоремы показывают, что набор из $(n-1)$ первых интегралов образует своего рода «функцинальный базис», который дает практически полную информацию об исследуемой системе.

Теорема 1.7.8. *Пусть $a \in D$ и $F(a) \neq 0$. Тогда найдется окрестность $\tilde{D} \subset D$ точки a и набор из $(n-1)$ независимых в a первых интегралов $u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X) \in C^1(\tilde{D})$ таких, что для любого первого интеграла $u(X) \in C^1(\tilde{D})$ справедливо тождество $u(X) = f(u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X))$, где f — некоторая C^1-гладкая функция.*

Доказательство Теоремы 1.7.8. По теореме о выпрямлении траекторий существуют открытая окрестность $\tilde{D} \subset D$ точки a, n-мерный открытый куб Q и C^1-гладкий диффеоморфизм $h : Q \to \tilde{D}$ такие, что при замене $X = h(Y)$ система уравнений (1.1) переходит в систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0; \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = 0; \\ \dot{y}_n = 1. \end{cases} \tag{1.34}$$

Очевидно, что у этой системы имеются $(n-1)$ независимый первый интеграл $v_1 = y_1, \ldots, v_{n-1} = y_{n-1}$. Тогда и у исходной системы (1.1) по Лемме 1.7.7 будет $(n-1)$ независимый первый интеграл $u_1(X) = v_1(h^{-1}(X)), \ldots, u_{n-1}(X) = v_{n-1}(h^{-1}(X))$, где $X \in \tilde{D}$.

Пусть теперь $u(X)$ — произвольный первый интеграл системы (1.1) в $\tilde{D}$. Тогда $v(Y) = u(h(Y))$ — первый интеграл системы (1.34). Легко видеть, что v является функцией от $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что в данном случае условие $\dot{v}_{(1.34)}(Y) = 0$ принимает вид $\frac{\partial v}{\partial y_n} = 0$, а поскольку функция v определена в кубе Q, то последнее соотношение приводит к равенству $v(Y) = f(y_1, \ldots, y_{n-1}) = f(v_1, \ldots, v_{n-1})$, где f — некоторая C^1-гладкая функция. Используя обозначение $X = h(Y)$, получаем

$$u(X) = u(h(Y)) = v(Y) = f(v_1(Y), \ldots, v_{n-1}(Y)) = f(u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X)),$$

что и требовалось доказать. $\square$

***Упражнение* 1.7.9.** Доказать, что у линейной системы второго порядка $\dot{X} = AX$, $\det A \neq 0$, существует нетривиальный первый интеграл, определенный в окрестности начала координат, в том и только том случае, когда начало координат — центр или седло.

***Пример* 1.7.10.** Рассмотрим систему уравнений Гамильтона (1.14). Имеем

$$\dot{H} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Таким образом, H есть первый интеграл. Напомним, что в физике H обычно играет роль полной энергии, так что отмеченный здесь факт можно рассматривать как одно из проявлений закона сохранения энергии.

Теорема 1.7.11. *Пусть $u_1(X), \ldots, u_{k-1}(X) \in C^1(D)$ — набор из k независимых первых интегралов. Тогда для каждой точки $a \in D$ существует окрестность $\tilde{D} \subset D$, в которой систему (1.1) можно заменой координат свести к системе $(n-k)$-го порядка.*

Доказательство Теоремы 1.7.11. Не умаляя общности, можно считать, что $\det\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,k} \neq 0$ в точке a. Определим отображение

$$h(X) = (h_1(X), \ldots, h_n(X)) = (u_1(X), \ldots, u_k(X), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Согласно предположению, $\det h'(a) \neq 0$. Тогда найдется открытая окрестность $\tilde{D}$ точки a такая, что $h : \tilde{D} \to U$ есть C^1-гладкий диффеоморфизм, где $U = h(\tilde{D})$. Перепишем уравнения (1.1) для новой системе координат $Y = h(X)$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{u}_1 = 0; \\ \vdots \\ \dot{y}_k = \dot{u}_k = 0; \\ \dot{y}_{k+1} = \dot{x}_{k+1} = f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n); \\ \vdots \\ \dot{y}_n = \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{1.35}$$

Первые k уравнений имеют решения $y_j = C_j$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда оставшуюся часть уравнений можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_{k+1} = f_{k+1}(C_1, \ldots, C_k, y_{k+1}, \ldots, y_n); \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(C_1, \ldots, C_k, y_{k+1}, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{1.36}$$

□

***Замечание* 1.7.12.** Если в только что доказанной теореме $k = n - 1$, то полученное уравнение первого порядка (1.36) будет уравнением с разделяющимися переменными, и, следовательно, его можно решить в квадратурах,

Для нахождения первых интегралов применяется следующая методика. Система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X); \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(X); \end{cases} \tag{1.37}$$

переписывается в симметричной форме:

$$\frac{d\,x_1}{f_1} = \frac{d\,x_2}{f_2} = \cdots = \frac{d\,x_n}{f_n}. \tag{1.38}$$

Далее применяется следующее свойство: если имеют место равенства

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}, \tag{1.39}$$

то для любого набора чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ выполнено равенство

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n}. \tag{1.40}$$

***Пример* 1.7.13.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + z; \\ \dot{y} = y + z; \\ \dot{z} = x + y; \end{cases} \tag{1.41}$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{d\,x}{x+z} = \frac{d\,y}{y+z} = \frac{d\,z}{x+y}. \tag{1.42}$$

Тогда по свойству (1.40) имеем

$$\frac{d\,x - d\,z}{z-y} = \frac{d\,y - d\,z}{z-x},$$

откуда $(x-z)^2 - (z-y)^2 = (x-y)(x+y-2z) = \mathrm{const}$ — это один первый интеграл. Далее, вновь по свойству (1.40) получаем

$$\frac{d\,x + d\,y + dz}{2(x+y+z)} = \frac{d\,y - d\,x}{y-x},$$

откуда вытекает, что $\frac{x+y+z}{(y-x)^2} = \mathrm{const}$ — это другой первый интеграл.

Глава 2

Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

§1 Линейное однородное уравнение

Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка имеет вид

$$\langle a(X), \nabla u(X) \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j(X) u_{x_j} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $a_j \in C^1(D)$, где D — непустое открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, причем на протяжении всей главы предполагается, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2(X) > 0 \quad \text{для всех } X \in D \tag{2.2}$$

Символом u_{x_j} здесь и далее обозначаются соответствующие частные производные $u_{x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Функция $u \in C^1(D_1)$, $D_1 \subset D$ — открытое множество, называется *решением* уравнения (2.1), если при ее подстановки в (2.1) получается тождество. График решения уравнения (2.1) называется *интегральной поверхностью* уравнения (2.1).

Оказывается, что эти уравнения тесно связаны с рассмотренными в предыдущей главе автономными системами (чем и объясняется присутствие уравнений (2.1) в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений). А именно, наряду с (2.1) рассматривается автономная система

$$\dot{X} = a(X), \tag{2.3}$$

которая называется *характеристической системой* уравнения (2.1). Траектории этой системы называются *характеристиками* уравнения (2.1).

Сущность связи между уравнением в частных производных (2.1) и уравнением характеристик (2.3) проясняется при механической интерпретации. Изучая движение сплошной среды, мы можем описывать либо движение отдельных частиц (траекторий автономной системы (2.3)), либо значение поля в данной точке пространства-времени. Сказанное иллюстрируется простейшим примером 2.3.2 из §3.

Теорема 2.1.1. *Пусть $D_1 \subset D$ — непустое открытое множество. Тогда функция $u \in C^1(D_1)$ является решением уравнения (2.1) в том и только том случае, когда u является первым интегралом системы (2.3).*

Доказательство немедленно следует из Теоремы 1.7.2. □

Из последней теоремы, определения первых интегралов и определения характеристик вытекает

Следствие 2.1.2. *Всякое решение $u(X)$ уравнения (2.1) постоянно на характеристиках уравнения (2.1).*

Теорема 2.1.3. *Для каждой точки $a \in D$ существует ее открытая окрестность $\tilde{D} \subset D$ и набор решений $u_1, \ldots, u_{n-1} \in C^1(\tilde{D})$ уравнения (2.1) таких, что для всякого решения $u \in C^1(\tilde{D})$ уравнения (2.1) имеет место представление*

$$u(X) \equiv f(u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X)), \tag{2.4}$$

где f есть некоторая C^1-гладкая функция.

Доказательство непосредственно вытекает из Теорем 2.1.1, 1.7.8 и предположения (2.2). □

Говорят, что формула (2.4) задает *общее решение* уравнения (2.1).

§2 Задача Коши для линейного однородного уравнения

Пусть поверхность Γ в $D \subset \mathbb{R}^n$ задается соотношением $\Gamma = \{X \in D \ : \ g(X) = 0\}$, где $g(X)$ есть C^1-гладкая функция со свойством $\nabla g(X) \neq 0$ в D. Пусть, далее, $\varphi \in C^1(\Gamma)$. Зададим начальное условие

$$u|_\Gamma = \varphi. \tag{2.5}$$

Определение 2.2.1. Задачей Коши для уравнения (2.1) называется задача нахождения решения $u(X)$ уравнения (2.1), удовлетворяющего начальному условию (2.5).

Согласно Следствию 2.1.2, всякое решение $u(X)$ уравнения (2.1) постоянно на характеристиках. Поэтому, если какая-нибудь характеристика пересекает поверхность Γ несколько раз, а начальные условия в точках пересечения отличаются, то задача Коши решений не имеет. Отсюда становится понятным стремление рассмотреть ситуацию, когда каждая характеристика пересекает Γ ровно один раз. Этого всегда можно добиться локально, кроме случая характеристических точек, определение которых дается ниже.

Определение 2.2.2. Точка $M \in \Gamma$ называется *характеристической*, если $\dot{g}_{(2.3)}(M) = \langle a(M), \nabla g(M)\rangle = 0$.

Геометрический смысл: характеристика, исходящая из точки M, касается Γ в точке M.

Теорема 2.2.3. *Если точка $b \in \Gamma$ не является характеристической, то в некоторой ее окрестности $\tilde{D}$ для любой функции $\varphi \in C^1(\Gamma \cap \tilde{D})$ существует единственное решение З.К. $u_{\Gamma\cap\tilde{D}} = \varphi$ уравнения (2.1), определенное в $\tilde{D}$.*

Доказательство Теоремы 2.2.3. По теореме 1.7.8 в некоторой окрестности $\tilde{D}_1$ точки b существует $(n-1)$ независимых первых интегралов $u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X)$.

Рассмотрим отображение $h \in C^1(\tilde{D}, \mathbb{R}^n)$, определенное по правилу

$$h(X) = (h_1(X), \ldots, h_n(X)) = (u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X), g(X)).$$

Утверждается, что якобиан $\det h'(b)$ не зануляется:

$$\det h'(b) \neq 0. \tag{2.6}$$

В самом деле, первые $(n-1)$ строк соответствующей матрицы Якоби совпадают с $\nabla u_1(X)$, $\ldots$, $\nabla u_{n-1}(X)$, и они линейно независимы в силу определения независимости первых интегралов. Доказывая свойство (2.6) от противного, предположим, что якобиан все же занулился, тогда последняя строка матрицы Якоби, $\nabla g(b)$, выражается через предыдущие строки. Но все предыдущие строки $\nabla u_1(b)$,…,$\nabla u_{k-1}(b)$ ортогональны вектору $a(b)$ (в силу определения первых интегралов), поэтому и любая их линейная комбинация ортогональна вектору $a(b)$, следовательно, вектор $\nabla g(b)$ должен быть ортогонален вектору $a(b)$, что противоречит условию доказываемой теоремы (точка b не характеристическая). Свойство (2.6) доказано.

По теореме об обратной функции, существуют подобласть $\tilde{D} \subset \tilde{D}_1$ и n-мерный куб Q с центром в точке $h(b)$ такие, что $h : \tilde{D} \to Q$ представляет собой C^1-гладкий диффеоморфизм. Тогда легко видеть, что $\forall X \in \tilde{D}$ справедливы включения $(u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X), 0) \in Q$ и $h^{-1}(u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X), 0) \in \Gamma$; более того, $\forall X \in \Gamma \cap \tilde{D}$ $h^{-1}(u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X), 0) = X$. Положим теперь $u(X) = \varphi(h^{-1}(u_1(X), \ldots, u_{n-1}(X), 0))$. Тогда $u(X)$ будет первым интегралом системы (2.3) и искомым решением уравнения (2.1), удовлетворяющим начальному условию (2.5). □

***Пример* 2.2.4.** Рассмотрим уравнение

$$xu_x + (x^2 + z)u_y + (x^2 + y)u_z = 0 \tag{2.7}$$

с начальными условиями

$$u|_{x=1} = y^2 - z^2. \tag{2.8}$$

Соответствующая характеристическая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x; \\ \dot{y} = x^2 + z; \\ \dot{z} = x^2 + y; \end{cases} \tag{2.9}$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{d\,y}{x^2 + z} = \frac{d\,z}{x^2 + y}. \tag{2.10}$$

Тогда по свойству (1.40) имеем

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{d\,y - d\,z}{z - y},$$

откуда $u_1 = x(z - y)$ — первый интеграл. Далее, обозначая $w = y + z$, имеем равенство

$$\frac{d\,(y + z)}{dx} = \frac{w}{x} + 2x,$$

откуда

$$w = 2x^2 + Cx,$$

т.е. $u_2 = \frac{y+z-2x^2}{x}$ — другой первый интеграл. Теперь нам требуется вычислить $h^{-1}(u_1, u_2, 0)$, определенное выше при доказательстве Теоремы 2.2.3. Другими словами, нужно по данным значениям u_1, u_2 найти y, z такие, что $u_1(1, y, z) = u_1$, $u_2(1, y, z) = u_2$. Легко видеть, что при $x = 1$ величины y, z выражаются через u_1, u_2 следующим образом:

$$z = \frac{u_1 + u_2}{2} + 1, \quad y = \frac{u_2 - u_1}{2} + 1.$$

Таким образом, $h^{-1}(u_1, u_2, 0) = (1, \frac{u_2-u_1}{2} + 1, \frac{u_1+u_2}{2} + 1)$. Отсюда

$$u = (\frac{u_2 - u_1}{2} + 1)^2 - (\frac{u_1 + u_2}{2} + 1)^2 = -u_1(2 + u_2) = (y - z)(y + z - 2x^2 + 2x).$$

***Замечание* 2.2.5.** Если дана система

$$\langle a(X), \nabla u(X)\rangle = b(X), \tag{2.11}$$

то ее общее решение выражается по формуле $u(X) = u_0(X) + \tilde{u}(X)$, где $\tilde{u}(X)$ — общее решение уравнения (2.1).

Если поставлена З.К. (2.5) для уравнения (2.11), то ее решение выражается по формуле

$$u(\psi(t, X)) = \varphi(X) + \int\limits_0^t b(\psi(\tau, X))\, d\tau,$$

где $\psi(t, \xi)$ есть решение З.К. $(0, \xi)$ для характеристической системы (2.3). В самом деле, уравнение на характеристиках имеет вид $\dot{u}_{(2.3)}(X) = b(X)$.

§3 Квазилинейные уравнения

Квазилинейными уравнениями с частными производными первого порядка называются уравнения вида

$$\langle a(X, u), \nabla u(X)\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j(X, u) u_{x_j} = b(X, u). \tag{2.12}$$

Здесь $a_j \in C^1(D)$, где D — непустое открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, причем $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2(X, u) > 0$ для всех $(X, u) \in D$.

Соответствующая характеристическая система

$$\begin{cases} \dot{X} = a(X, u); \\ \dot{u} = b(X, u). \end{cases} \tag{2.13}$$

Траектории системы (2.13) называются *характеристиками* для уравнения (2.12).

Теорема 2.3.1 (без доказательства). *Функция $u \in C^1(\tilde{D})$ является решением уравнения (2.12) в том и только том случае, если его график «соткан» из характеристик, т.е. для каждой точки графика найдется ее окрестность Ω такая, что все характеристики, содержащиеся в Ω и пересекающие график u, целиком содержатся в графике u.*

Как уже было отмечено, сущность связи между уравнением в частных производных (2.12) и уравнением характеристик (2.13) проясняется при механической интерпретации. Изучая движение сплошной среды, мы можем описывать либо движение отдельных частиц (траекторий автономной системы (2.13)), либо значение поля в данной точке пространства-времени. Сказанное иллюстрируется следующим простейшим примером.

***Пример* 2.3.2.** Рассмотрим движение «облака частиц» без взаимодействия в одномерном пространстве. Символом t будем обозначать время, а символом x — координату частицы. Обозначим через $u(t,x)$ значение скорости частицы, находящейся в момент времени t в точке x. Пусть $x = \psi(t)$ — закон движения отдельной частицы. В принятых обозначениях $\dot{\psi}(t) = u(t,\psi(t))$. По второму закону Ньютона $0 = \ddot{\psi}(t) = \frac{u(t,\psi(t))}{dt} = u_t(t,\psi(t)) + u_x(t,\psi(t))\dot{\psi}(t) = u_t(t,\psi(t)) + u_x(t,\psi(t))u(t,\psi(t))$. В результате получаем, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет *уравнению Хопфа*

$$u_t + uu_x = 0. \tag{2.14}$$

Соответствующая характеристическая система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1; \\ \frac{dx}{d\tau} = u; \\ \frac{du}{d\tau} = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

(мы ввели новый параметр τ по следующей формальной причине: если уравнение (2.14) сравнить с общим уравнением (2.12), то станет ясно, что сейчас t играет роль переменной x_1, а x играет роль переменной x_2). Эта система легко интегрируется: решение З.К. $(0,0,x_0,u_0)$ для системы (2.15) вычисляется по формуле

$$\begin{cases} t = \tau; \\ x = u_0\tau + x_0; \\ u = u_0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Окончательно, уравнения характеристики, проходящей через точку $(0,x_0,u_0)$, записывается в виде:

$$\begin{cases} x = u_0 t + x_0; \\ u = u_0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Допустим теперь, что у нас имеется З.К. для уравнения (2.14) с начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{2.18}$$

Тогда из формулы (2.17) получаем соотношение

$$u = \varphi(x - ut), \tag{2.19}$$

которое задает решение $u(t,x)$ искомой З.К. в неявном виде.

Рассмотрим З.К. с начальным условием

$$u|_{t=0} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \tag{2.20}$$

тогда в неявном виде решение $u(t,x)$ дается формулой

$$u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x - ut). \tag{2.21}$$

Дифференцируя по x, получаем соотношения

$$u_x = \frac{u_x t - 1}{1 + (x - ut)^2}. \tag{2.22}$$

Выражая u_x из последнего равенства, имеем

$$u_x = \frac{-1}{1 + (x - ut)^2 - t}, \tag{2.23}$$

Отсюда видно, что при $t < t_* = 1$ уравнение (2.21) однозначно разрешимо. При $t \to t_* - 0$ имеет место сходимость $u_x \to -\infty$ при $x - ut = 0$. Но в этом случае вследствие (2.17) справедливо тождество $x - ut = x_0 = 0$, значит, $u = u_0 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. Окончательно получаем, что $u_x \to -\infty$ при $t \to t_* = 1$, $x \to x_* = u_* t_* = \frac{\pi}{2}$. В этой точке впервые происходит взаимодействие (столкновение) разных частиц и возникает ударная волна, так что прежняя модель теряет применимость.

Чтобы «увидеть» момент возникновения ударной волны, полезен следующий прием. График функции $u(t,x)$ на плоскости (x,u) при фиксированном t получается из графика функции $u = u(0,x) = \varphi(x)$ после применения к плоскости (x,u) следующего преобразования: $(x,u) \mapsto (x + ut, u)$ (этот диффеоморфизм есть ни что иное, как преобразование фазового потока уравнения Ньютона для частиц: плоскость (x,u) есть фазовая плоскость частицы). В момент времени $t = 1$ касательная на графике $u = u(1,x)$ становится вертикальной в точке $x = \frac{\pi}{2}$. Если применять указанный диффеоморфизм плоскости при $t > 1$, то под его действием график $u = \operatorname{arctg} x$ будет переходить в кривую с верхней волной, идущей вправо, и нижней волной, идущей влево, так что одному значению x будет соответствовать несколько значений u.

Глава 3

Рисунки

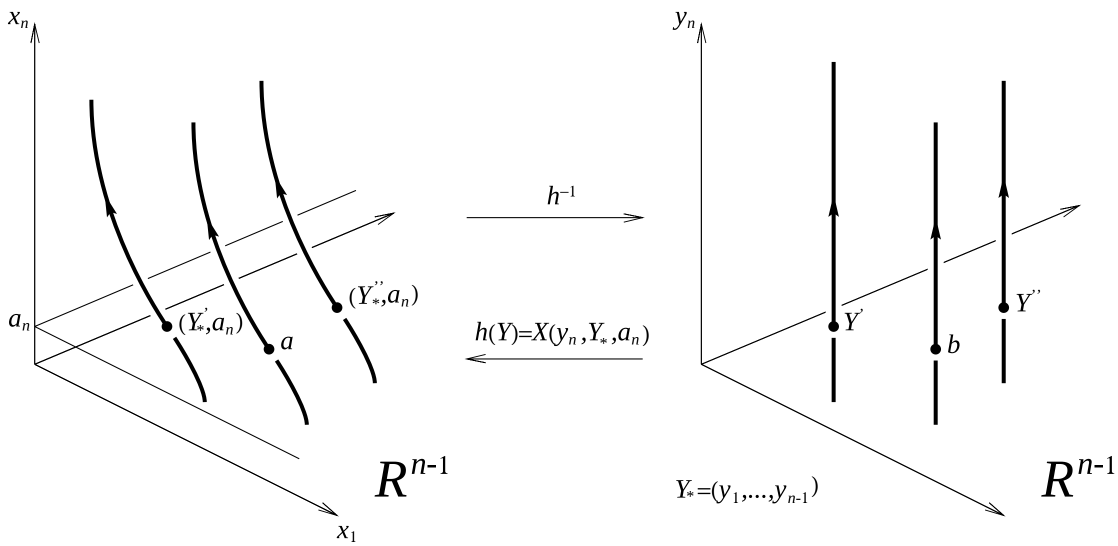


Рис. 1.
.

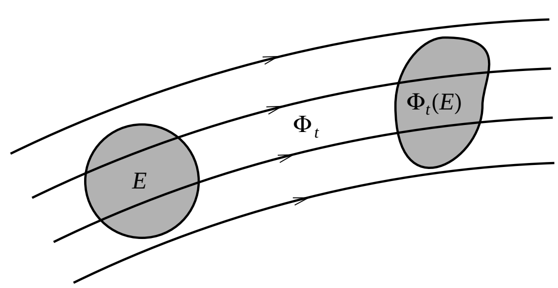
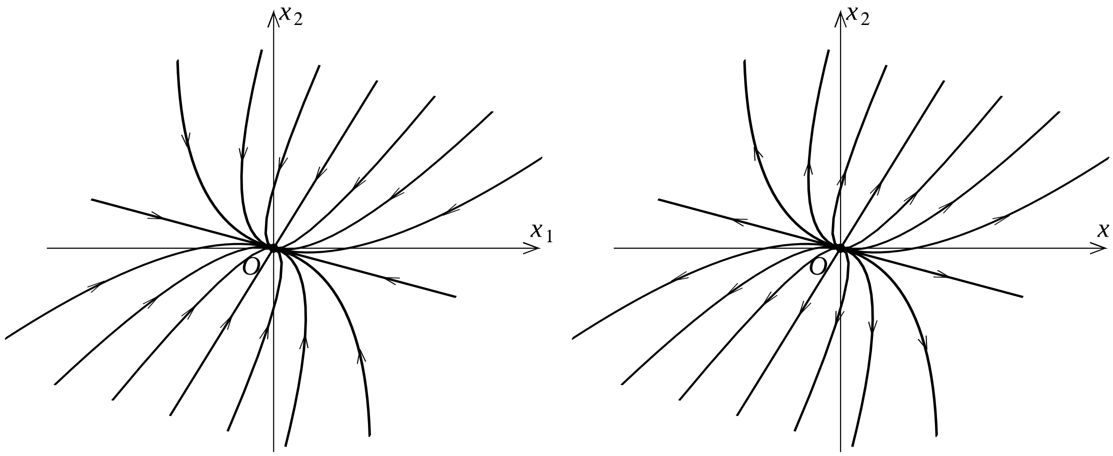


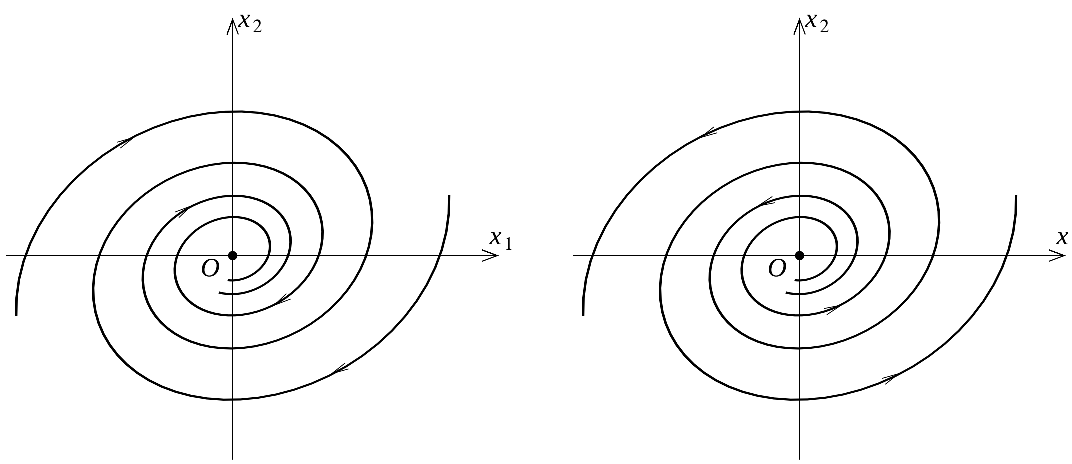
Рис. 2.
Множества E и $\Phi_t(E)$ имеют одинаковую площадь..



i ii

Рис. 3.

.



iii iv

Рис. 3.

.

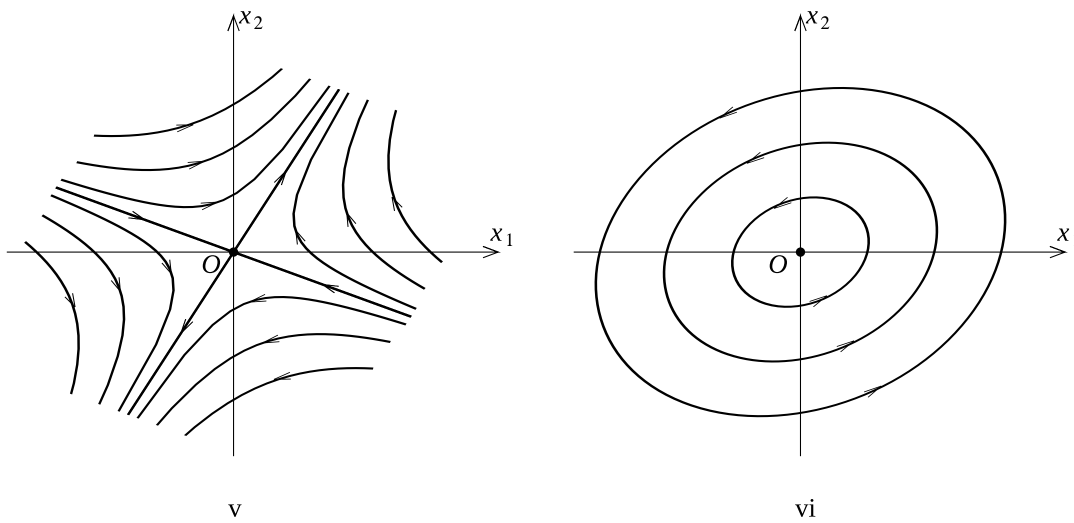


Рис. 3.

.

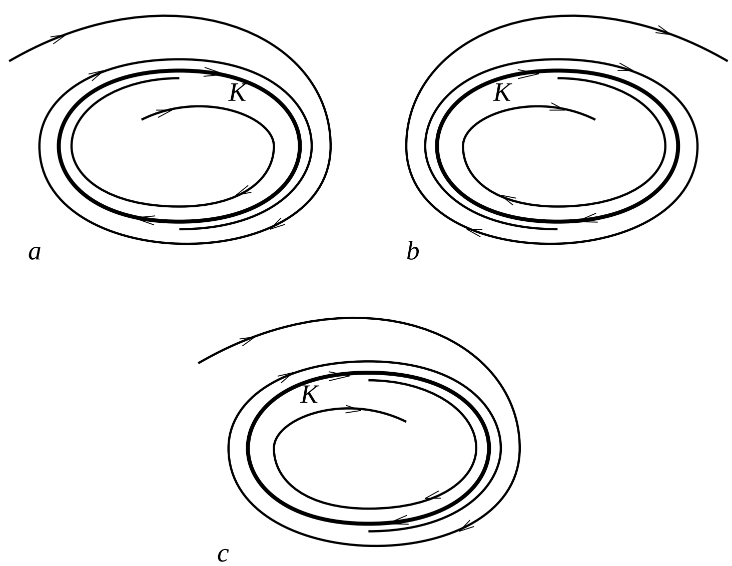


Рис. 4.

.

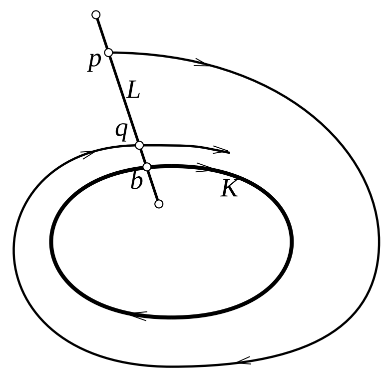


Рис. 5.

.

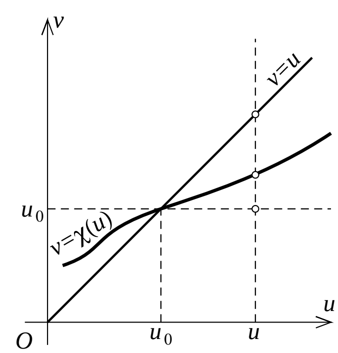


Рис. 6.

.

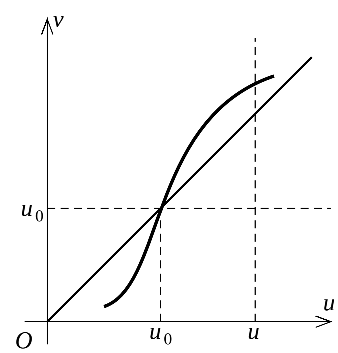


Рис. 7.

.

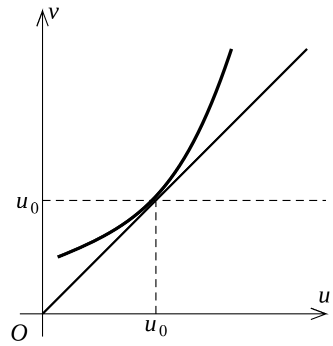


Рис. 8.
.

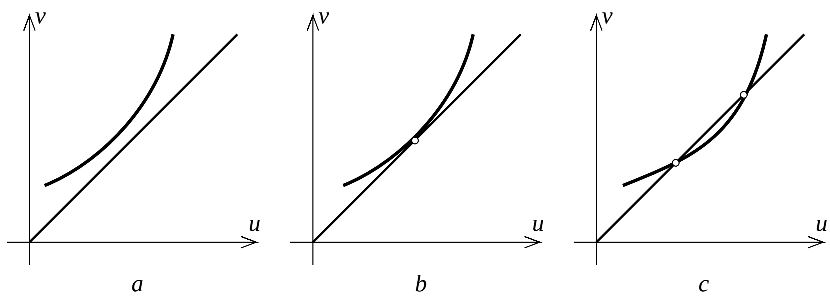


Рис. 9.
.

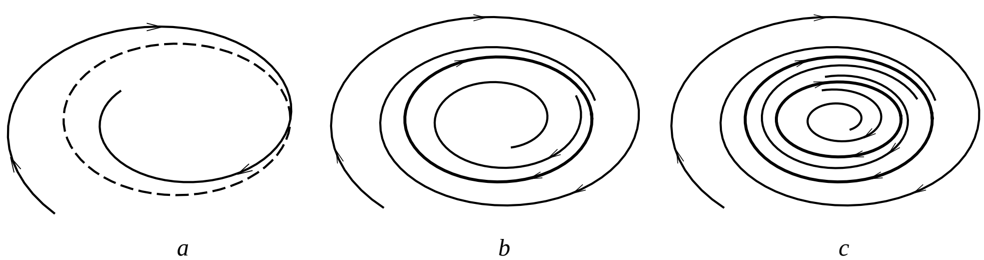


Рис. 10.
.

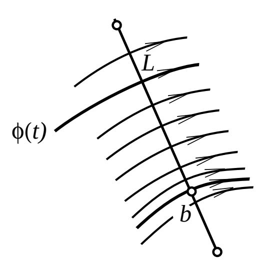


Рис. 11.
.

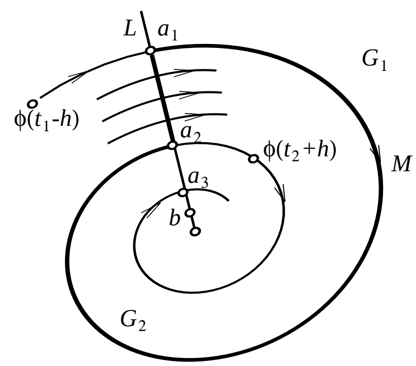


Рис. 12.

.

Литература

[1] *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

[2] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[3] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[4] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.

[5] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.

[6] *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.

[7] *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

[8] Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. / Под ред. В. К. Романко – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.