МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

В. Л. Иванов

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

весенний семестр

Конспект лекций по курсу «Основы функционального анализа»

Новосибирск

2023

Оглавление

Условные обозначения

$\sqsupset$ — пусть

$\hookrightarrow$ — выполняется

$\square$ — начало доказательства

$\blacksquare$ — конец доказательства

$\rightrightarrows$ — равномерная сходимость

$:=$ — равенство по определению

$\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{F}$ — числовое поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

$i = \overline{1, n}$ — i пробегает множество $\{1, 2, \ldots, n\}$

Y^X — множество всех отображений из множества X в множество Y

$\mathbb{F}^n$ — пространство вектор–столбцов $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$, где $x_k \in \mathbb{F}$, $k = \overline{1, n}$.

$\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ — пространство последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)^{\mathrm{T}}$, где $x_k \in \mathbb{F}$, $k \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{F}^{[a,b]}$ — пространство всех $\mathbb{F}$–значных функций, определенных на отрезке $[a, b]$.

Предисловие

Данное пособие представляет собой конспект лекций по курсу «Основы функционального анализа», читаемых студентам физического факультета Новосибирского Государственного Университета на втором курсе в весеннем семестре. Ниже мы кратко охарактеризуем содержание данного курса.

Как известно, в математике *пространством* принято называть множество с заданной на нем дополнительной *структурой*, как-либо характеризующей его элементы или отношения между ними (степень близости, взаимное расположение и т.п.).

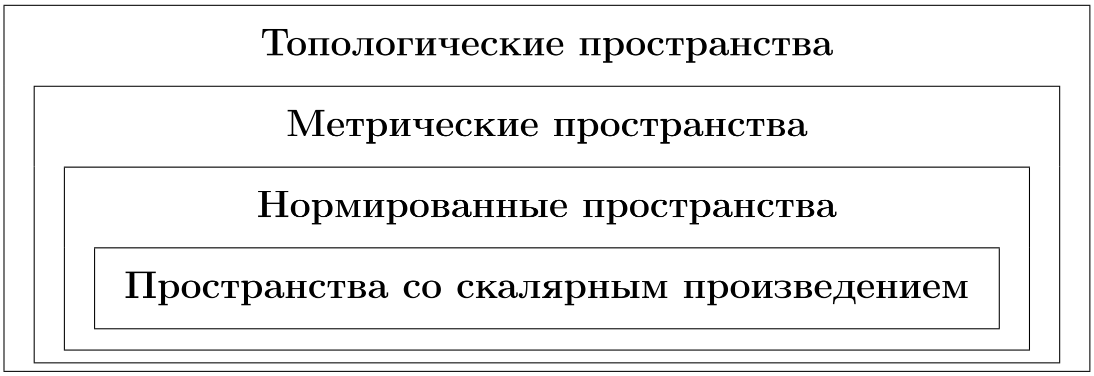
Наиболее общим классом пространств, изучаемых в курсах функционального анализа являются *топологические пространства*, в которых близость элементов определяется с помощью специальных систем окрестностей. Понятийный аппарат топологии позволяет рассматривать вопросы *сходимости* и *непрерывности* несмотря на то, что степень близости элементов топологического пространства не имеет количественного выражения. Тем не менее, поскольку физики в своей практике крайне редко имеют дело со столь общим классом пространств, как топологические, их теория останется вне рамок нашего курса.

Следующим по общности классом пространств являются *метрические пространства*, в которых структура *метрики* дает *количественную* характеристику близости двух элементов. С изучения метрических пространств и начнется наш курс.

Отметим далее, что метрика может быть введена на произвольном непустом множестве, в то время как в физических приложениях наиболее часто встречаются множества со структурой *линейного*, или *векторного* пространства. Для того чтобы характеризовать длины векторов, а также их близость линейное пространство оснащают структурой, называемой *нормой*. Нормированные пространства будут рассмотрены в нашем курсе вслед за метрическими.

Наконец, наиболее частным классом пространств, изучаемых в нашем курсе являются *линейные пространства со скалярным произведением*. Они будут находиться в центре нашего внимания в течение всего семестра ввиду их особой важности в физике вообще, и в квантовой механике в особенности. Нам предстоит не раз убедиться в том, что наличие дополнительных свойств, выгодно отличающих пространства со скалярным произведением от нормированных пространств без такового связано с понятием *ортогональности векторов*.

Приведенная ниже схема иллюстрирует иерархию перечисленных классов пространств. Любое пространство со скалярным произведением является нормированным, любое нормированное — метрическим, а любое метрическое — топологическим.



Заметим напоследок, что на протяжении данного курса студенту предстоит не раз испытать ощущение дежавю, ведь многие освещаемые здесь сюжеты уже рассматривались в курсах математического анализа и линейной алгебры. Дело, однако, в том, что в упомянутых курсах данные сюжеты рассматривались в контексте *конечномерных* пространств, тогда как в фокусе функционального анализа традиционно находятся пространства *бесконечномерные*. Богатая и сложная специфика, возникающая в бесконечномерной ситуации и является тем новым, что предстоит узнать студенту из нашего курса.

Глава 1.

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

1.1. Метрические пространства

Определение: Пусть X — произвольное непустое множество. **Метрикой** на X называется функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, $\forall\, x, y, z \in X$ удовлетворяющая условиям:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Пара $\mathbb{X} := (X, \rho)$ называется **метрическим пространством**.

Замечание: Метрика является обобщением понятия «расстояния», известного из наглядной школьной геометрии. Хотя элементы метрических пространств часто называют «точками», этими «точками» в общем случае могут являться объекты самой разной природы — последовательности, функции, операторы и др. Метрика дает количественное выражение степени «близости» или «сходства» между этими «точками».

Утверждение: Метрика всегда неотрицательна, т.е. если $\mathbb{X}$ — метрическое пространство, то для любых $x, z \in \mathbb{X}$ выполняется неравенство $\rho(x, z) \geq 0$.

$\square$ Положим в неравенстве треугольника $y = x$:

$$\rho(x, x) = 0 \leq \rho(x, z) + \rho(z, x) = 2\rho(x, z) \Rightarrow \rho(x, z) \geq 0 \quad \blacksquare$$

Утверждение: Пусть $\mathbb{X}$ — метрическое пространство, тогда для любых $x, y, z \in \mathbb{X}$ выполняется «*обратное неравенство треугольника*»:

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \le \rho(x, y)$$

□

$$\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z) \Rightarrow \rho(x, z) - \rho(y, z) \le \rho(x, y);$$
$$\rho(y, z) \le \rho(y, x) + \rho(x, z) \Rightarrow \rho(y, z) - \rho(x, z) \le \rho(x, y)$$

Объединяя оба полученных неравенства, получаем $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \le \rho(x, y)$. ■

Рассмотрим примеры метрических пространств.

Пример №1: На произвольном непустом множестве можно задать так называемую *дискретную метрику*:

$$\rho_{\mathrm{discr}}(x, y) := \begin{cases} 1, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Пример №2: В числовых множествах $X = \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ чаще всего используется привычная метрика $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример №3: В пространствах вектор-столбцов $\mathbb{F}^n$* вводятся *метрики Минковского*:

$$\rho_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}, \ 1 \le p \le +\infty^{**}$$

Наиболее часто используемыми метриками Минковского являются:

- $\rho_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, называемая иногда «метрикой городских кварталов», «манхэттэнской метрикой» или «метрикой такси».
- $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$, называемая *евклидовой метрикой.*
- $\rho_\infty(x, y) = \lim\limits_{p \to +\infty} \rho_p(x, y) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$, называемая *метрикой Чебышёва.*

Пример №4: На множестве последовательностей l_p

* Всюду далее $\mathbb{F}$ обозначает числовое поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

** Метрика Минковского не вводится для $p < 1$, поскольку в этом случае нарушается неравенство треугольника. Действительно, возьмем $x = [1, 0, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}}$, $y = [0, 1, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}}$, $z = [1, 1, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}}$. Тогда $\rho_p(x, y) = 2^{1/p}$, $\rho_p(x, z) = \rho_p(z, y) = 1$, и при $p < 1$ неравенство треугольника, очевидно, не выполняется: $\rho_p(x, y) = 2^{1/p} > \rho(x, z) + \rho(z, y) = 2$.

$$l_p := \left\{ x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty \right\}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

метрика задается формулой

$$\rho_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

Пример №5: На множестве ограниченных последовательностей l_∞

$$l_\infty := \left\{ x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \ : \ \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < +\infty \right\}$$

метрика задается формулой

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$$

Пример №6: Множество непрерывных функций $C[a, b]$ чаще всего метризуют т.н. «*супремум метрикой*», «*равномерной метрикой*» или «*метрикой Чебышёва*», определяемой формулой

$$\rho_c(f, g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Величина $\rho_c(f, g)$ равна максимальному поточечному отклонению функции f от функции g на отрезке $[a, b]$.

Пример №7: *Лебеговскими функциональными пространствами* на множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ называются пространства

$$L_p(\Omega) := \left\{ f \in \mathbb{F}^{\Omega} \ : \ \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}, \quad 1 \leq p < +\infty$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Метрика в $L_p(\Omega)$ задается формулой

$$\rho_p(f, g) := \left(\int_\Omega |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Обратите внимание, что метрика в $L_p(\Omega)$ является естественным обобщением p-метрик Минковского в $\mathbb{F}^n$ и метрик ρ_p в пространствах l_p на случай, когда «индекс» x пробегает континуальное (вообще говоря) множество Ω.

Из всех пространств $L_p(\Omega)$ наибольшее значение для приложений имеют:

- $L_1(\Omega)$ — пространство функций, интегрируемых по Лебегу на множестве Ω*;
- $L_2(\Omega)$ — пространство функций, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на множестве Ω.

Заметим, наконец, что если две функции f и $\widetilde{f}$ из $L_p(\Omega)$ отличаются лишь на множестве меры нуль (например — в одной точке), то $\rho_p(f, \widetilde{f}) = 0$. В силу первого условия в определении метрики из этого должно следовать, что f и $\widetilde{f}$ являются одним и тем же элементом пространства $L_p(\Omega)$, что, казалось бы, невозможно, ведь f и $\widetilde{f}$ не равны поточечно! Для разрешения данного противоречия в качестве элементов пространства $L_p(\Omega)$ рассматривают не отдельные функции, а целые множества — *классы эквивалентности* функций*, неразличимых по метрике ρ_p.

1.2. Сходимость и непрерывность в метрическом пространстве

Задание метрики на множестве позволяет определить понятие *сходимости*, то есть ввести важнейшую для анализа операцию *предельного перехода*.

Определение: Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho)$ — метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ называется **сходящейся в $\mathbb{X}$**, если существует $x \in \mathbb{X}$ такой, что $\rho(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Если элемент x с таким свойством существует, то его называют **пределом** последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и пишут: $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ или $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\rho} x$.

Утверждение: Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ может сходиться не более чем к одному пределу.

□ Упражнение. ■

Утверждение: Метрика является непрерывной функцией своих аргументов, т.е. если $\mathbb{X} = (X, \rho)$ — метрическое пространство, $x_n \overset{\rho}{\to} x$ и $y_n \overset{\rho}{\to} y$ при $n \to +\infty$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$ при $n \to +\infty$.

□ Упражнение. ■

Замечание: Сходимость зависит от метрики, т.е. если множество X метризовать различными метриками ρ_1 и ρ_2, то одна и та же последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ может сходиться в $\mathbb{X}_1$ («сходиться по метрике ρ_1») и расходиться в $\mathbb{X}_2$ («расходиться

* Напомним, что функция является интегрируемой по Лебегу тогда и только тогда, когда она *абсолютно* интегируема по Лебегу.

* Читатель, незнакомый с понятием «класс эквивалентности», найдет его описание в Приложении A.

по метрике ρ_2»).

В самом деле, рассмотрим, например, последовательность непрерывных функций $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ (см. Рис. 1.1). Поточечным пределом этой последовательности является разрывная функция

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

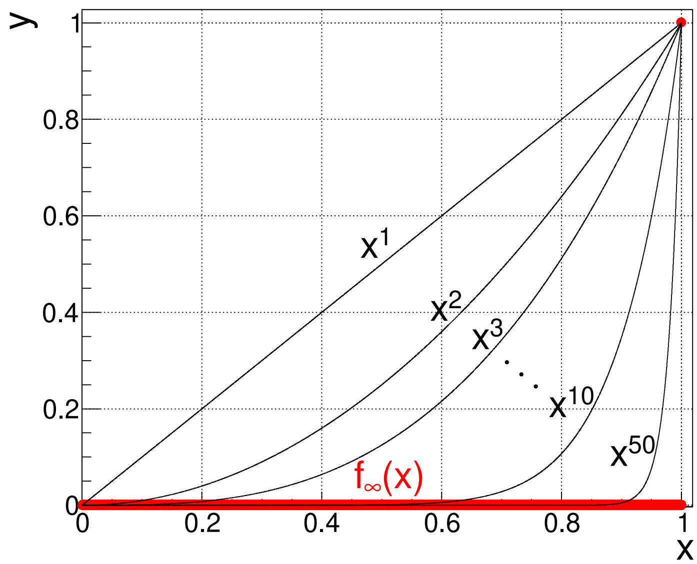


Рис. 1.1: Последовательность $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и её поточечный предел $f_\infty(x)$.

Из разрывности $f_\infty(x)$ следует, что $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ расходится по равномерной метрике ρ_c. Действительно, сходимость функциональной последовательности по равномерной метрике означает её *равномерную сходимость* к её поточечному пределу. Из курса математического анализа нам известно, что если функциональная последовательность из непрерывных функций сходится равномерно, то её предел также является непрерывной функцией. Значит, если бы последовательность $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходилась по метрике ρ_c, то она сходилась бы равномерно к своему поточечному пределу $f_\infty(x)$ и этот предел был бы непрерывной функцией. Полученное противоречие доказывает, что $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ расходится по метрике ρ_c.

С другой стороны, по интегральной метрике $\rho_1(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ последовательность $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к тождественно нулевой функции (которая, очевидно, непрерывна):

$$\rho_1(x^n, 0) = \int\limits_0^1 |x^n - 0| dx = 1/(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Итак, мы получили, что последовательность $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ расходится в пространстве $(C[0,1], \rho_c)$, но сходится пространстве $(C[0,1], \rho_1)$.

Определение: Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho_X)$ и $\mathbb{Y} = (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства. Отображение $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется **непрерывным в точке $x \in \mathbb{X}$**, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ из того, что $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\rho_X} x$ следует, что $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\rho_Y} f(x)$. Отображение f называется **непрерывным на $\mathbb{X}$**, если оно непрерывно в любой точке из $\mathbb{X}$.

1.3. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве

Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho)$ — метрическое пространство.

Определения:

Открытым шаром с центром x_0 и радиусом r называется множество

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{X} \ : \ \rho(x, x_0) < r\}$$

Замкнутым шаром с центром x_0 и радиусом r называется множество

$$B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{X} \ : \ \rho(x, x_0) \leq r\}$$

Сферой с центром x_0 и радиусом r называется множество

$$S[x_0, r] := \{x \in \mathbb{X} \ : \ \rho(x, x_0) = r\}$$

Диаметром множества $M \subset \mathbb{X}$ называется величина $\operatorname{diam} M := \sup\limits_{x,y\in M} \rho(x, y)$.

Расстоянием от точки $x \in \mathbb{X}$ до множества $M \subset \mathbb{X}$ называется величина

$$\rho(x, M) := \inf_{y\in M} \rho(x, y)$$

Определение: Множество $M \subset \mathbb{X}$ называется **ограниченным**, если оно содержится в некотором шаре (конечного радиуса). Это условие эквивалентно тому, что $\operatorname{diam} M < +\infty$.

Определение: Пусть $M \subset \mathbb{X}$. Точка $x \in \mathbb{X}$ называется:

- **Внутренней точкой M в $\mathbb{X}$**, если существует $r > 0$ такое, что $B(x,r) \subset M$.

  Множество всех внутренних точек M в $\mathbb{X}$ обозначается $\mathrm{int}_X M$.

- **Внешней точкой M в $\mathbb{X}$**, если x — внутренняя точка множества $X \setminus M$, т.е. дополнения множества M в X.

  Множество всех внешних точек M в $\mathbb{X}$ обозначается $\mathrm{ext}_X M$.

- **Граничной точкой M в $\mathbb{X}$**, если x не является ни внутренней, ни внешней точкой M, т. е. если для любого $r > 0$ одновременно выполняется $B(x,r) \cap M \neq \varnothing$ и $B(x,r) \cap (X \setminus M) \neq \varnothing$.

  Множество всех граничных точек M в $\mathbb{X}$ обозначается $\partial_X M$.

Итак, $X = \mathrm{int}_X M \,\cup\, \mathrm{ext}_X M \,\cup\, \partial_X M$, причем

$$\mathrm{int}_X M \,\cap\, \mathrm{ext}_X M = \varnothing, \quad \mathrm{int}_X M \,\cap\, \partial_X M = \varnothing, \quad \mathrm{ext}_X M \,\cap\, \partial_X M = \varnothing$$

Утверждение: Границы множества M и его дополнения $X \setminus M$ совпадают:

$$\partial_X M = \partial_X (X \setminus M)$$

□ Доказательство очевидно следует из симметрии $M \leftrightarrow X \setminus M$ в определении граничной точки множества. ■

Определение: Множество $M \subset \mathbb{X}$ называется **открытым**, если все его точки внутренние, т. е. $M = \mathrm{int}_X M$, или, равносильно, $M \cap \partial_X M = \varnothing$.

Определение: Множество $M \subset \mathbb{X}$ называется **замкнутым**, если оно содержит все свои граничные точки, т. е. $\partial_X M \subset M$, или, равносильно, $M = \mathrm{int}_X M \cup \partial_X M$.

Утверждение:

$M \subset \mathbb{X}$ открыто $\Leftrightarrow X \setminus M$ замкнуто;

$M \subset \mathbb{X}$ замкнуто $\Leftrightarrow X \setminus M$ открыто.

□ Пусть M — открыто, тогда $M \cap \partial_X M = \varnothing$. Но $\partial_X M = \partial_X (X \setminus M)$, следовательно, $M \cap \partial_X (X \setminus M) = \varnothing$. Значит, $\partial_X (X \setminus M) \subset (X \setminus M)$, то есть $(X \setminus M)$ замкнуто. ■

Определение: **Замыканием множества M в $\mathbb{X}$** называется множество

$$\mathrm{cl}_X M := M \cup \partial_X M$$

Пример: $\mathrm{cl}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, тогда как $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Утверждение: M замкнуто в $\mathbb{X} \Leftrightarrow M = \mathrm{cl}_X M$.

$\square$ Очевидно. $\blacksquare$

Утверждение: $\mathrm{cl}_X M$ и $\partial_X M$ являются замкнутыми множествами.

$\square$ Упражнение. $\blacksquare$

Замечание: Очевидно, что существуют множества, являющиеся не открытыми и не замкнутыми. Чуть менее очевидно, что существуют множества, являющиеся одновременно открытыми и замкнутыми (*открыто–замкнутыми*). Для того чтобы множество M было одновременно открытым ($M \cap \partial_X M = \varnothing$) и замкнутым ($\partial_X M \subset M$) необходимо и достаточно, чтобы его граница была пустым множеством: $\partial_X M = \varnothing$. Это возможно, например, в случае, если множество X разделено на несвязные между собой компоненты, и M является одной из этих компонент.

Примеры открыто-замкнутых множеств:

- Если $X = (0,1) \cup (2,3)$ и $M = (0,1)$, то M открыто–замкнутое.
- Если $\mathbb{X} = (\{0,1,2,3\}, \rho_{\mathrm{discr}})$ и $M = \{1\}$, то M открыто–замкнутое.
- В любом метрическом пространстве $\mathbb{X} = (X, \rho)$ всё множество X и пустое множество $\varnothing$ являются открыто–замкнутыми.

  Действительно, всё множество X является открытым, поскольку $\forall x \in \mathbb{X}$ и $\forall r > 0 \hookrightarrow B(x,r) \subset X$. Следовательно, пустое множество $\varnothing = X \setminus X$ является замкнутым.

  С другой стороны, $\varnothing$ является открытым, поскольку $\partial_X \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$. Следовательно, всё множество $X = X \setminus \varnothing$ является замкнутым.
- Если $X = [0,1)$ и $M = [0,1)$, то M открыто–замкнутое. Если же $X = \mathbb{R}$ и $M = [0,1)$, то M не открытое и не замкнутое.

Определение: Пусть $M \subset \mathbb{X}$. Точка $x \in \mathbb{X}$ называется:

- **Предельной точкой** M, если для любого $r > 0$ в шаре $B(x,r)$ содержится бесконечно много точек из M.
- **Точкой прикосновения** M, если для любого $r > 0$ в шаре $B(x,r)$ содержится хотя бы одна точка из M.
- **Изолированной точкой** M, если существует $r > 0$ такое, что в шаре $B(x,r)$ содержится только одна точка из M, а именно — сама точка x.

Упражнения: Докажите, что:

- Множество является замкнутым если и только если оно содержит все свои предельные точки.
- $\mathrm{cl}_X M$ — это множество всех точек прикосновения M в $\mathbb{X}$.
- Если множество $M \subset \mathbb{X}$ замкнуто и точка $x \notin M$, то $\rho(x, M) > 0$.

Наконец, мы готовы ввести новые для Вас понятия *всюду плотного подмножества* и *сепарабельного метрического пространства.*

Определение: Подмножество $M \subset \mathbb{X}$ называется **всюду плотным** в $\mathbb{X}$, если $\mathrm{cl}_X M = \mathbb{X}$. Пишут: $M \overset{\text{пл.}}{\subset} \mathbb{X}$.

Смысл понятия плотности подмножества $M \subset \mathbb{X}$ состоит в том, что к любому элементу пространства $\mathbb{X}$ можно «подойти» сколь угодно близко, «шагая» по элементам множества M.

Примеры всюду плотных подмножеств:

- $\mathbb{Q} \overset{\text{пл.}}{\subset} \mathbb{R}$.
- В силу теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами* множество всех многочленов на $[a, b]$ всюду плотно в пространстве $(C[a, b], \rho_c)$.
- Множество $C^\infty(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций плотно в $L_1(\mathbb{R})$: $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}) \overset{\text{пл.}}{\subset} L_1(\mathbb{R})$.
- Пространство Шварца быстро убывающих функций $S(\mathbb{R})$, а также множество бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^\infty(\mathbb{R})$ плотны в $L_2(\mathbb{R})$.

Определение: Метрическое пространство $\mathbb{X}$ называется **сепарабельным**, если в нем существует счётное** всюду плотное подмножество, т.е. $\exists\, M \subset \mathbb{X}$ — счётное: $M \overset{\text{пл.}}{\subset} \mathbb{X}$.

Говоря неформально, сепарабельность метрического пространства означает, что оно является «не очень большим», так что к любому его элементу можно «подойти» сколь угодно близко по элементам из некоторой последовательности (счетного всюду

---

* **Аппроксимационная теорема Вейерштрасса:** Пусть $f \in C[a, b]$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен p такой, что $\rho_c(f, p) < \varepsilon$.

** Напомним, что множество M называется счётным, если оно допускает взаимно-однозначное отображение (биекцию) во множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Иными словами, элементы счётного множества можно занумеровать и представить в виде последовательности.

плотного подмножества). Для физиков хорошая новость состоит в том, что возникающие в физических приложениях пространства являются, как правило, сепарабельными, т.е. «не очень большими» и потому достаточно простыми, обладающими рядом свойств, которые мы и изучим в дальнейшем.

Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств:

- $\mathbb{R}$ сепарабельно, так как $\mathbb{Q}$ счётно и $\mathbb{Q} \overset{\text{пл.}}{\subset} \mathbb{R}$;
- Можно показать, что пространства l_p и $L_p(\mathbb{R})$ при $1 \le p < +\infty$, а также пространство $(C[a,b], \rho_c)$ являются сепарабельными;
- Примером несепарабельного пространства является, как можно показать, пространство l_∞ ограниченных последовательностей.

1.4. Полнота и замкнутость метрического пространства

Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho)$ — метрическое пространство.

Определение: Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ называется **фундаментальной** (иногда — «**сходящейся в себе**»), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для любых натуральных $n, m > N(\varepsilon) \hookrightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Краткая запись: $\rho(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$.

Замечание: Из курса математического анализа нам известен критерий Коши в $\mathbb{R}^n$, согласно которому последовательность в $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна. Оказывается, в *произвольном* метрическом пространстве из сходимости по-прежнему следует фундаментальность, но из *фундаментальности, вообще говоря, не следует сходимость.*

Утверждение: Если последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ сходится в $\mathbb{X}$, то она фундаментальна. Обратное, вообще говоря, неверно.

□ Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ сходится к $x \in \mathbb{X}$, т.е. $\rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Тогда в силу неравенства треугольника имеем $\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$, т.е. последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна.

Для доказательства того, что из фундаментальности, вообще говоря, не следует сходимость достаточно привести контрпример. Возьмем любую последовательность рациональных чисел $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, сходящуюся к иррациональному числу $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Так как $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в $\mathbb{R}$, то она фундаментальна. Но $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не сходится в $\mathbb{Q}$, что и доказывает, что из фундаментальности в общем случае не следует сходимость. ■

Определение: Метрическое пространство $\mathbb{X}$ называется **полным**, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится *в нём*, т.е. для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ существует элемент $x \in \mathbb{X}$ такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Пример: Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является числовым полем, однако в анализе мы, как правило, работаем в поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Дело в том, что в отличие от поля $\mathbb{Q}$ поле $\mathbb{R}$ является полным.

Замечание: Очень часто доказать фундаментальность последовательности оказывается проще, чем её сходимость, поскольку для этого не требуется знать сам предел. Если, вдобавок, метрическое пространство является полным, то из доказанной фундаментальности будет следовать и сходимость. А значит предельный элемент будет принадлежать тому же метрическому пространству, которому принадлежат члены последовательности, и будет обладать всеми свойствами элементов этого пространства.

Замечание: Понятие *полноты* метрического пространства тесно связано с понятием его *замкнутости*. Различие этих понятий состоит в том, что

- полнота является *абсолютной* характеристикой пространства: пространство является полным или неполным *само по себе*;
- замкнутость является *относительной* характеристикой пространства: пространство может быть замкнутым или незамкнутым в зависимости от того, в каком объемлющем пространстве рассматривается замыкание.

Соотношение между полнотой и замкнутостью метрического пространства проясняет следующее утверждение.

Утверждение: Пусть $\mathbb{M} = (M, \rho)$ — подпространство метрического пространства $\mathbb{X} = (X, \rho)$. Тогда:

1) если $\mathbb{M}$ полное, то оно замкнуто в $\mathbb{X}$;

2) если $\mathbb{M}$ замкнуто в $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}$ полное, то $\mathbb{M}$ также является полным.

$\square$ **1)** Поскольку $\mathbb{M}$ — полное метрическое пространство, то любая фундаментальная последовательность в нём сходится к какому-то вектору из $\mathbb{M}$. Но так как любая *сходящаяся* последовательность является фундаментальной, то она также сходится некоторому к вектору из $\mathbb{M}$. Значит, $\mathbb{M}$ содержит все свои предельные точки, т.е. является замкнутым подпространством.

2) Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{M} \subset \mathbb{X}$ — фундаментальная последовательность. Поскольку пространство $\mathbb{X}$ полное, то $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторому элементу $x \in \mathbb{X}$. Кроме того, элемент x является точкой прикосновения множества $\mathbb{M}$. Но $\mathbb{M}$ замкнуто в $\mathbb{X}$, и потому содержит все свои точки прикосновения, включая x. Следовательно, пространство $\mathbb{M}$ является полным. ■

Пример: В силу критерия Коши в $\mathbb{R}$ пространство $\mathbb{X} = (\mathbb{R}, \rho)$, где $\rho(x, y) = |x-y|$ является полным.

Тогда по доказанному утверждению пространство $(M = [0, 1], \rho)$ также полно в силу замкнутости M.

В то же время пространство $(M = (0, 1], \rho)$ полным не является, так как, например, фундаментальная последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ сходится к $0 \notin M$.

Замечание: Мы знаем, что одно и то же множество может быть снабжено различными метриками, однако некоторые метрики могут оказаться более «естественными» для данного множества, поскольку с ними оно образует *полное метрическое пространство.*

Пример: Множество непрерывных функций $C[-1, 1]$ с равномерной метрикой $\rho_c(f, g) = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)-g(x)|$ образует полное метрическое пространство. То же самое множество не образует полного метрического пространства с интегральной метрикой $\rho_1(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|dx$.

Действительно, докажем полноту пространства $(C[-1, 1], \rho_c)$. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в $(C[-1, 1], \rho_c)$, то есть

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall\, n, m > N(\varepsilon) \text{ и } \forall x \in [-1, 1] \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (*)$$

Из $(*)$ очевидно следует, что при любом фиксированном $x \in [-1, 1]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ является фундаментальной, а в силу полноты $\mathbb{R}$ и сходящейся к некоторому пределу $f_\infty(x)$. Переходя теперь в $(*)$ к пределу при $m \to +\infty$ получим

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall\, n > N(\varepsilon) \text{ и } \forall x \in [-1, 1] \hookrightarrow |f_n(x) - f_\infty(x)| \le \varepsilon \quad (**)$$

Утверждение $(**)$ означает, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к своему поточечному пределу $f_\infty(x)$ равномерно по $x \in [-1, 1]$. Но так как равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, то $f_\infty(x) \in C[-1, 1]$, что и доказывает полноту пространства $(C[-1, 1], \rho_c)$.

Докажем теперь неполноту пространства $(C[-1,1],\rho_1)$. Для этого достаточно предъявить пример расходящейся фундаментальной последовательности в этом пространстве. Рассмотрим в качестве таковой последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x \le -1/n \\ nx, & -1/n < x < 1/n \\ 1, & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ является фундаментальной в метрике ρ_1, так как очевидно, что $\int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| dx \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$ (см. Рис. 1.2). Кроме того, поточечным пределом $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ является разрывная функция знака

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

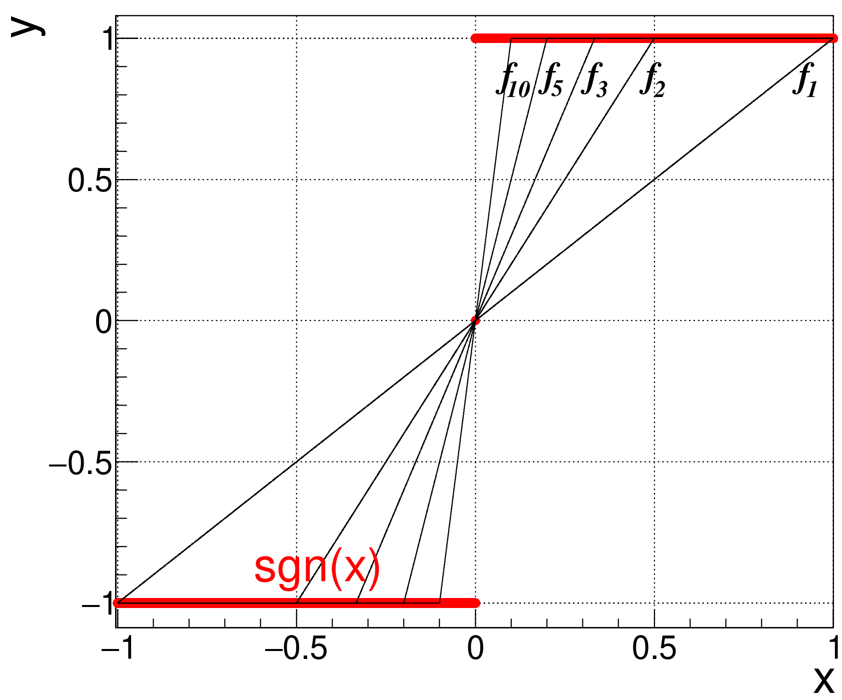


Рис. 1.2: Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и её поточечный предел $\operatorname{sgn}(x)$.

Докажем, что $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не сходится в метрике ρ_1 ни к какой функции из $C[-1,1]$. Предположим противное: пусть существует $f_\infty \in C[-1,1]$ такая, что $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\rho_1} f_\infty$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ в силу неравенства треугольника имеем

$$0 \le \rho_1(f_\infty, \mathrm{sgn}) \le \rho_1(f_\infty, f_n) + \rho_1(f_n, \mathrm{sgn}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

откуда по теореме о зажатой последовательности получаем, что $\rho_1(f_\infty, \mathrm{sgn}) = 0$, то есть $f_\infty(x) = \mathrm{sgn}(x)$ почти всюду при $x \in [-1, 1]$*.

Последнее, однако, невозможно. Действительно, по теореме о промежуточном значении непрерывной функции существует точка $x_0 \in (-1, 1)$ такая, что $f_\infty(x_0) = 0$. Кроме того, из непрерывности f_∞ следует, что $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ существует $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \hookrightarrow |f_\infty(x)| < \varepsilon$. Промежуток $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ представляет собой множество ненулевой меры, на котором функция $f_\infty(x)$ отлична от $\mathrm{sgn}(x)$*. Полученное противоречие и доказывает неполноту пространства $(C[-1, 1], \rho_1)$.

1.5. Принцип сжимающих отображений

В изучении теории метрических пространств мы достигли точки, когда имеющихся у нас знаний уже достаточно для получения полезных для приложений результатов. Одним из таких результатов является *принцип сжимающих отображений.*

Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho)$ — метрическое пространство.

Определение: Отображение $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ называется **сжимающим**, или **сжатием**, если существует число $\alpha \in (0, 1)$ такое, что для любых $x, y \in \mathbb{X}$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$.

Утверждение: Сжатие является непрерывным отображением.

□ Пусть $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ является сжатием и последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ сходится к x, т.е. $\rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Тогда $0 \le \rho(Ax_n, Ax) \le \alpha\rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, т.е. последовательность $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к Ax, а значит отображение A непрерывно. ■

Определение: Пусть дано отображение $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Точка $x \in \mathbb{X}$ называется **неподвижной точкой** отображения A, если $Ax = x$.

Теорема Ба́наха о неподвижной точке: Пусть $\mathbb{X}$ — *полное* метрическое пространство, отображение $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ является сжатием. Тогда A имеет одну и только одну неподвижную точку в $\mathbb{X}$.

□ Пусть x_0 — произвольная точка в $\mathbb{X}$. Докажем сначала, что последовательность $\{A^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в $\mathbb{X}$. В силу полноты $\mathbb{X}$ из доказанной фундаментальности будет следовать и сходимость $\{A^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$. Выберем произвольные номера

* Напомним, что про утверждение, зависящее от точки пространства с мерой говорят, что оно выполнено «почти всюду», если мера множества точек, для которых оно не выполнено равна нулю.

* За исключением, быть может, точки $x = 0$, если она принадлежит промежутку $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

$n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, тогда, пользуясь определением сжатия и многократно применяя неравенство треугольника, получаем:

$$
\begin{aligned}
0 &\le \rho(A^n x_0, A^m x_0) \le \alpha^n \rho(x_0, A^{m-n}x_0) \le \\
&\le \alpha^n \big[\rho(x_0, Ax_0) + \rho(Ax_0, A^2x_0) + \ldots + \rho(A^{m-n-1}x_0, A^{m-n}x_0)\big] \le \\
&\le \alpha^n \big[1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-n-1}\big] \rho(x_0, Ax_0) \le \\
&\le \alpha^n \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k\right] \rho(x_0, Ax_0) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \rho(x_0, Ax_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,
\end{aligned}
$$

то есть последовательность $\{A^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна и сходится в $\mathbb{X}$ к некоторому пределу, который мы обозначим x^*.

Точка $x^* \in \mathbb{X}$ является неподвижной точкой отображения A, поскольку в силу непрерывности сжатия $Ax^* = A(\lim\limits_{n\to+\infty} A^n x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} A^{n+1}x_0 = x^*$.

Докажем единственность неподвижной точки x^*. Пусть кроме x^* существует другая неподвижная точка $\widetilde{x}^* \in \mathbb{X}$, тогда

$$
\begin{gathered}
\rho(x^*, \widetilde{x}^*) = \rho(Ax^*, A\widetilde{x}^*) \le \alpha\rho(x^*, \widetilde{x}^*) \Rightarrow (1-\alpha)\rho(x^*, \widetilde{x}^*) \le 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \rho(x^*, \widetilde{x}^*) = 0 \Rightarrow \widetilde{x}^* = x^*
\end{gathered}
$$

Теорема доказана. ■

Замечание: Смысл теоремы Ба́наха о неподвижной точке можно наглядно проиллюстрировать следующим образом. Рассмотрим ограниченное множество M в метрическом пространстве $\mathbb{X}$, см. Рис. 1.3. Если $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ — сжатие, то диаметр множества $A^n(M), n \in \mathbb{N}$ (т.е. образа множества M под действием отображения A^n) допускает оценку:

$$
\operatorname{diam} A^n(M) = \sup_{x,y\in M} \rho(A^n x, A^n y) \le \alpha^n \sup_{x,y\in M} \rho(x, y) = \alpha^n \operatorname{diam} M \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,
$$

т.е. диаметры множеств $A^n(M)$ стремятся к нулю при $n \to +\infty$. Говоря неформально, множества $A^n(M)$ в пределе $n \to +\infty$ «сжимаются в точку». Эта предельная точка и является искомой неподвижной точкой отображения A.

Упражнение: Пусть в полном метрическом пространстве $\mathbb{X}$ задано отображение $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Докажите, что если некоторая итерация A^n, $n \in \mathbb{N}$ является сжатием, то само отображение A имеет, и притом единственную неподвижную точку в $\mathbb{X}$.

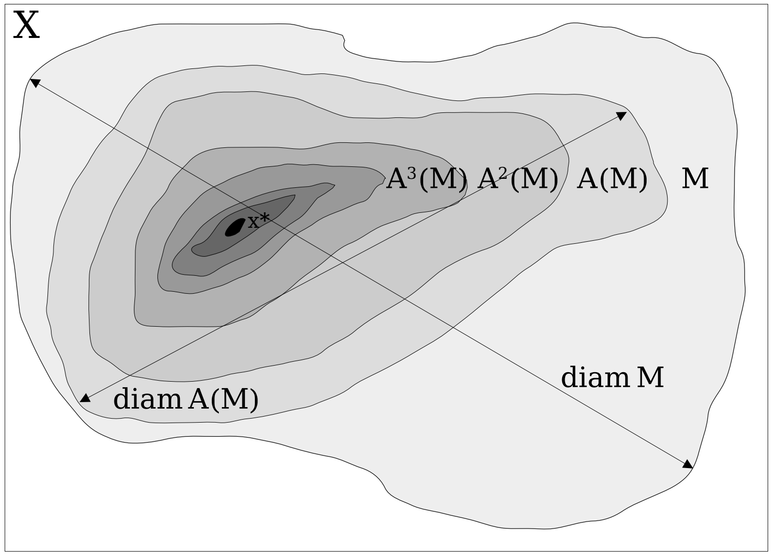


Рис. 1.3: Последовательность множеств $\{A^n(M)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ в метрическом пространстве $\mathbb{X}$, где $A:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ — сжимающее отображение.

Пример: Напомним, что функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ называется *Липшицевой с константой* α, если для любых $x_1,x_2\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(x_2)-f(x_1)|\le\alpha\,|x_2-x_1|$$

Очевидно, что если функция $f:[a,b]\to[a,b]$ является Липшицевой с константой $\alpha\in(0,1)$, то f является сжатием на отрезке $[a,b]$ и, следовательно, имеет на нем одну и только одну неподвижную точку (решение уравнения $f(x)=x$, $x\in[a,b]$).

Установить, является ли функция f Липшицевой оказывается достаточно просто, если f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). В этом случае согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях для любых $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$ существует $\xi\in(x_1,x_2)$ такое, что $|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)|\,|x_2-x_1|$, и для выполнения условия Липщица с константой $\alpha<1$ оказывается достаточно, чтобы неравенство $|f'(\xi)|\le\alpha<1$ выполнялось при любом $\xi\in(a,b)$.

В качестве иллюстрации на Рис. 1.4 приведены примеры дифференцируемых Липщицевых функций с константами $\alpha<1$. На этом же рисунке наглядно показан итерационный алгоритм приближенного нахождения неподвижной точки: возьмем произвольную точку $x_0\in[a,b]$ и начнем последовательно вычислять значения $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, $\ldots$, $x_n=f(x_{n-1})$, $\ldots$. Тогда

$$|x_n - x^*| = |f(x_{n-1}) - f(x^*)| \le \alpha |x_{n-1} - x^*| \le \ldots \le \alpha^n |x_0 - x^*| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

т.е. каждое следующее значение x_n будет всё ближе к неподвижной точке x^* и в пределе $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^*$.

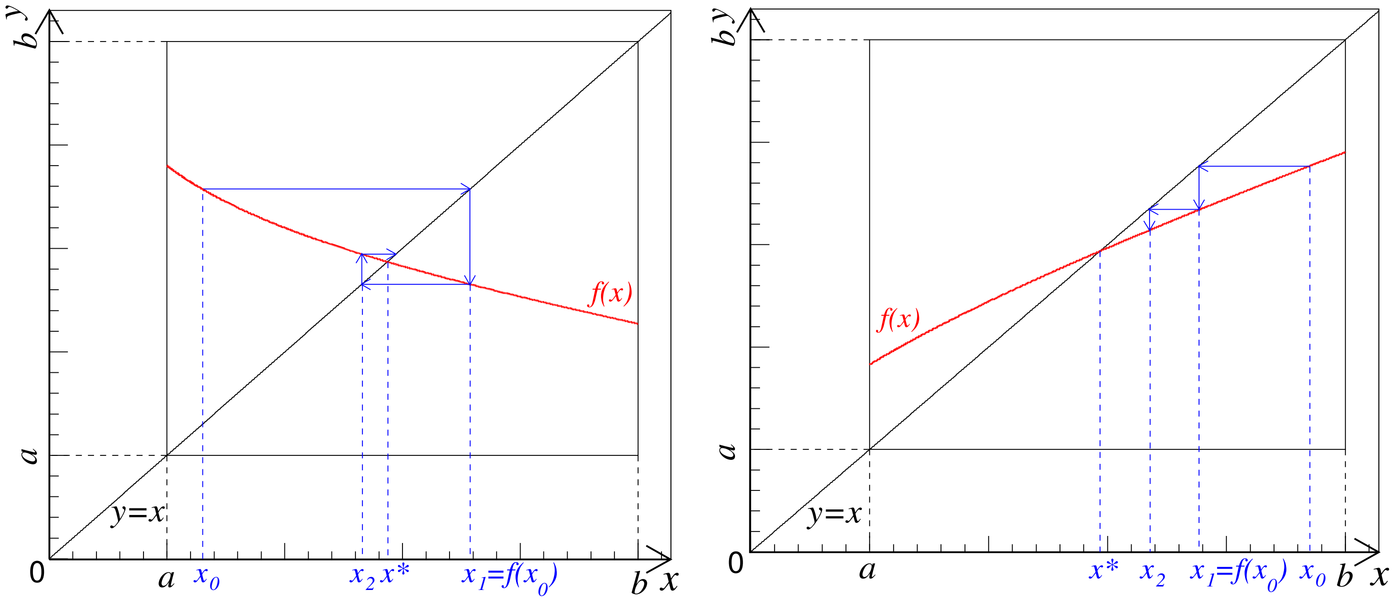


Рис. 1.4: Примеры дифференцируемых Липщицевых функций с константами $\alpha < 1$. Наглядно показан итерационный алгоритм поиска неподвижной точки отображения.

1.6. Линейные пространства

Напомним определение линейного пространства, известное Вам из курса линейной алгебры.

Определение: **Линейным пространством** $\mathbb{L}$ над полем **скаляров** $\mathbb{F}$ называется множество L, элементы которого называются **векторами**, на котором заданы операции **сложения векторов** и **умножения вектора на скаляр**, то есть

1) для любых векторов $x, y \in \mathbb{L}$ однозначно определен вектор $z \in \mathbb{L}$, называемый их **суммой** и обозначаемый $x + y$;

2) для любого вектора $x \in \mathbb{L}$ и для любого скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$ однозначно определен вектор $z \in \mathbb{L}$, называемый **произведением вектора на скаляр**, и обозначаемый αx.

Далее, для любых векторов $x, y, z \in \mathbb{L}$ и для любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ указанные операции должны удовлетворять двум группам условий. Первая группа из четырех условий определяет линейное пространство как *коммутативную (абелеву) группу по сложению векторов*:

1) сложение векторов ассоциативно: $x + (y + z) = (x + y) + z$;
2) существует элемент, нейтральный по сложению, и обозначаемый $0 \in \mathbb{L}$: $x + 0 = x$;
3) для любого вектора существует элемент, обратный по сложению: $\exists(-x) \in \mathbb{L}$: $x + (-x) = 0$;
4) сложение векторов коммутативно: $x + y = y + x$.

Вторая группа условий относится к умножению векторов на скаляры:

1) умножение на скаляр ассоциативно: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
2) умножение на единицу не изменяет вектор: $1 \cdot x = x$;
3) имеет место дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения скаляров: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
4) имеет место дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Определение: Подмножество $\mathbb{L}' \subseteq \mathbb{L}$ называется **подпространством** линейного пространства $\mathbb{L}$, если оно образует линейное пространство с теми же операциями сложения и умножения, что и в пространстве $\mathbb{L}$, т.е. для любых $x', y' \in \mathbb{L}'$ и для любого $\alpha \in \mathbb{F}$ сумма $x' + y'$ и произведение $\alpha x'$ также принадлежат $\mathbb{L}'$.

Определение: *Конечная* система векторов $\{x_k\}_{k=\overline{1,n}}$ называется **линейно независимой**, если линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ равна нулю тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Обратно, конечная система векторов $\{x_k\}_{k=\overline{1,n}}$ называется **линейно зависимой**, если существует набор скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все из которых равны нулю, такой, что $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$.

Произвольная система векторов $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A — множество индексов, называется **линейно независимой**, если любая её *конечная* подсистема линейно независима.

Определение: Линейное пространство $\mathbb{L}$ называется **n-мерным** ($n \in \mathbb{N}$), если в нём существует набор из n линейно независимых векторов, а любой набор из $n + 1$ векторов является линейно зависимым. Пишут: $\dim \mathbb{L} = n$.

Линейное пространство $\mathbb{L}$ называется **бесконечномерным**, если для любого $n \in \mathbb{N}$ в $\mathbb{L}$ существует набор из n линейно независимых векторов.

Определение: Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — некоторая система векторов в линейном пространстве $\mathbb{L}$. **Линейной оболочкой** $\langle\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\rangle$ этой системы называется множество всех *конечных* линейных комбинаций векторов из этой системы.

Замечание: Обратите внимание, что в определении линейной оболочки фигурируют именно *конечные* линейные комбинации. Бесконечные же линейные комбинации, то есть ряды $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k x_k$, вовсе лишены смысла до тех пор, пока линейное пространство не снабжено какой-либо дополнительной структурой (например, метрикой), позволяюшей определить понятие *сходимости ряда*.

Определение: Пусть $\mathbb{L}$ — линейное пространство. Линейно независимая система векторов $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathbb{L}$ называется **алгебраическим базисом** в $\mathbb{L}$, или **базисом Гамеля**, если $\langle\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\rangle = \mathbb{L}$, т.е. если каждый вектор из $\mathbb{L}$ представим в виде *конечной* линейной комбинации векторов из $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Следующую нетривиальную теорему мы примем без доказательства.

Теорема: В любом линейном пространстве существует алгебрический базис.

Замечание: Несмотря на то, что согласно предыдущей теореме базис Гамеля всегда существует, в большинстве бесконечномерных пространств его невозможно получить в явном виде. По этой причине в бесконечномерных пространствах используется другие типы базисов, к изучению которых мы перейдем в дальнейшем.

Пример: Рассмотрим пространство финитных последовательностей

$$\mathbb{F}_0^{\mathbb{N}} := \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \ : \ \exists k \in \mathbb{N}\colon x_k = 0,\ x_{k+1} = 0, \ldots\}$$

Базисом Гамеля в $\mathbb{F}_0^{\mathbb{N}}$ служит система $\{e_n = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, 0, \ldots)\}_{n\in\mathbb{N}}$, так как любая последовательность $x \in \mathbb{F}_0^{\mathbb{N}}$ представима в виде конечной линейной комбинации векторов из $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Та же система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является базисом Гамеля в пространстве *всех* последовательностей $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$. Выписать базис Гамеля в $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ в явном виде не представляется возможным.

1.7. Нормированные пространства

Определение: **Нормой** на линейном пространстве $\mathbb{L}$ называется функционал $\|\cdot\| : \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, для любых $x, y \in \mathbb{L}$ и любом $\alpha \in \mathbb{F}$ удовлетворяющий условиям:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (положительная однородность);
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство с заданной на нём нормой называется **нормированным пространством**.

По своему смыслу норма является обобщением понятия «длины вектора», знакомого Вам из курса школьной геометрии.

Утверждение: Норма всегда неотрицательна, т.е. если $\mathbb{L}$ — нормированное пространство, то $\forall\, x \in \mathbb{L} \hookrightarrow \|x\| \geq 0$.

$\square$ $0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0$. $\blacksquare$

Утверждение: Любое нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) := \|x - y\|$ (её называют *метрикой, порожденной нормой*).

$\square$ Выполнение первых двух условий в определении метрики очевидно, проверим выполнение неравенства треугольника:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y) \ \blacksquare$$

Итак, поскольку любое нормированное пространство является метрическим, то в нём определены все понятия, введенные нами ранее для метрических пространств: сходимость последовательности, непрерывность отображения, замкнутость множества, полнота и сепарабельность пространства и т. д. Всюду далее говоря о «сходимости последовательности по норме» ($x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$) мы будем подразумевать её сходимость по метрике, порожденной этой нормой.

Утверждение: Пусть $\mathbb{L}$ — нормированное пространство, тогда для любых $x, y \in \mathbb{L}$ справедливо «*обратное неравенство треугольника*»:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

$\square$ Запишем обратное неравенство треугольника для метрики, порожденной нормой:

$$\big|\|x - z\| - \|y - z\|\big| \le \|x - y\|$$

Положив $z = 0$, получим доказываемое неравенство. ■

Следствие: Норма является непрерывным функционалом, т.е. если $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to +\infty$.

□ Действительно, в силу обратного неравенства треугольника для нормы имеем:

$$0 \le \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \le \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Значит, $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to +\infty$. ■

Упражнение: Является ли норма *линейным* функционалом?

Определение: Нормированное пространство, полное относительно метрики, порожденной нормой, называют **ба́наховым пространством***.

Приведем примеры нормированных пространств.

Пример №1: Пространство вектор–столбцов $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le +\infty$, где

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \quad \text{при } p < +\infty \text{ и}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|$$

Можно показать, что данные пространства являются полными (т. е. ба́наховыми) и сеперабельными.

Пример №2: Пространства последовательностей

- $l_p = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty\}$, $1 \le p < +\infty$, с нормой $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$;
- $l_\infty = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \ : \ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty\}$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.

Можно показать, что:

- l_p, $1 \le p < +\infty$ являются полными и сеперабельными пространствами;
- l_∞ является полным, но не сепарабельным пространством.

* В честь польского математика Стефана Ба́наха (1892–1945), одного из создателей современного функционального анализа.

Пример №3: Лебеговские функциональные пространства

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \in \mathbb{F}^{\Omega} \ : \ \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}, \ 1 \le p < +\infty$$

с нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

Можно показать, что $L_p(\Omega)$ — сепарабельное ба́нахово пространство.

Пример №4: Пространство $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|f\|_c = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ также является сепарабельным ба́наховым пространством.

1.8. Неравенства Гёльдера и Минковского в пространствах $\mathbb{F}^n$, l_p и $L_p(\Omega)$

В следующих нескольких утверждениях мы докажем, что при $1 \le p < +\infty$ функционалы $\|\cdot\|_p$ из приведенных в предыдущем пункте примеров действительно определяют нормы в $\mathbb{F}^n$, l_p и $L_p(\Omega)$. Поскольку неотрицательность и положительная однородность $\|\cdot\|_p$ очевидны, мы ограничимся доказательством неравенств треугольника, которые в случае $\|\cdot\|_p$ называются *неравенствами Минковского.* Для пространств l_p и $L_p(\Omega)$ из доказанных неравенств Минковского будет следовать также и то, что они действительно являются линейными пространствами.

Лемма (неравенство Юнга):

Пусть $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $a, b \ge 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p > 1$, тогда

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$\square$ При $a = 0$ или $b = 0$ неравенство, очевидно, выполнено. Далее предполагаем $a, b \ne 0$.

Доказываемое неравенство Юнга следует из неравенства Йенсена для выпуклой вверх функции $\ln x$: для любых $x_1, x_2 > 0$ и для любых $\alpha, \beta \ge 0$ таких, что $\alpha + \beta = 1$ выполняется неравенство $\ln(\alpha x_1 + \beta x_2) \ge \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$.

Возьмем $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$, $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, тогда

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \ge \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln ab,$$

следовательно $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$. ■

Теорема (неравенство Гёльдера): Пусть $p, q \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p > 1$, тогда:

1) для любых $x, y \in \mathbb{F}^n$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \|x\|_p \|y\|_q$;
2) для любых $x \in l_p$, $y \in l_q$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k y_k| \le \|x\|_p \|y\|_q$;
3) для любых $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_q(\Omega)$ их произведение fg принадлежит пространству $L_1(\Omega)$, причем выполняется неравенство $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$.

□ Для случаев $x = 0$ или $y = 0$, $f = 0$ или $g = 0$ перечисленные неравенства, очевидно, выполнены. Далее будем предполагать $x \ne 0$, $y \ne 0$, $f \ne 0$, $g \ne 0$.

1) Положим в неравенстве Юнга $a = \dfrac{|x_k|}{\|x\|_p}$, $b = \dfrac{|y_k|}{\|y\|_q}$:

$$\frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} \le \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}$$

Просуммировав полученные неравенства по k от 1 до n, получим:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} \le \frac{1}{p} \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \|x\|_p \|y\|_q$$

2) Доказательство полностью аналогично случаю **1)** с заменой $\sum\limits_{k=1}^{n} \to \sum\limits_{k=1}^{+\infty}$.

3) Доказательство полностью аналогично случаю **1)** с заменами $a = f(x)/\|f\|_p$, $b = g(x)/\|g\|_q$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \to \int\limits_{\Omega}$. ■

Теорема (неравенство Минковского): Пусть $p \ge 1$, тогда:

1) для любых $x, y \in \mathbb{F}^n$ выполняется неравенство $\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$;
2) для любых $x, y \in l_p$ их сумма $x + y$ также принадлежит пространству l_p, причем $\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$;
3) для любых $f, g \in L_p(\Omega)$ их сумма $f + g$ также принадлежит пространству $L_p(\Omega)$, причем $\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

$\square$ При $p = 1$ перечисленные неравенства следуют из того факта, что модуль суммы не превосходит суммы модулей. Далее будет предполагать $p > 1$.

1) Оценим сверху величину $\|x+y\|_p^p$:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}$$

Применяя неравенство Гёльдера в $\mathbb{F}^n$ и учитывая, что $(p-1)q = p$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \|x\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p/q},$$

следовательно $\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x+y\|_p^{p/q}$ и, наконец, $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

2) Рассмотрим числовую последовательность $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p}$, $n \in \mathbb{N}$. Применяя к S_n неравенство Минковского в $\mathbb{F}^n$, получаем оценку

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p \quad (*)$$

Итак, последовательность $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно (нестрого) возрастает и ограничена сверху, следовательно она сходится. Переходя к пределу в неравенстве $(*)$ получаем:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

3) Докажем, что $(f+q) \in L_p(\Omega)$. Поскольку при $p > 1$ функция $|x|^p$ выпукла вниз, то для любых $\alpha, \beta \geq 0$ таких, что $\alpha+\beta = 1$ и для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство Йенсена:

$$|\alpha x_1 + \beta x_2|^p \leq \alpha \, |x_1|^p + \beta \, |x_2|^p$$

Используем последнее неравенство для $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$, $x_1 = |f|$, $x_2 = |g|$:

$$\left|\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}g\right|^p \leq \left|\frac{1}{2}\left|f\right|+\frac{1}{2}\left|g\right|\right|^p \leq \frac{1}{2}\left|f\right|^p+\frac{1}{2}\left|g\right|^p \quad \Rightarrow \left|f+g\right|^p \leq 2^{p-1}\left(\left|f\right|^p+\left|g\right|^p\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{\Omega}\left|f+g\right|^p dx \leq 2^{p-1}\left(\int\limits_{\Omega}\left|f\right|^p dx+\int\limits_{\Omega}\left|g\right|^p dx\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \|f+g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p) < +\infty \quad \Rightarrow \quad (f+g) \in L_p(\Omega)$$

Дальнейшее доказательство аналогично случаю **1)** с заменой $\sum\limits_{k=1}^{n} \to \int\limits_{\Omega}$. ■

1.9. Существование неэквивалентных норм в бесконечномерных нормированных пространствах

Определение: Нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ на линейном пространстве $\mathbb{L}$ называются **эквивалентными**, если существуют числа $m, M > 0$ такие, что для любого вектора $x \in \mathbb{L}$ выполняется двойное неравенство $m\left\|x\right\|_a \leq \left\|x\right\|_b \leq M\left\|x\right\|_a$. Пишут: $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$.

Утверждение: Эквивалентность норм — это отношение эквивалентности, т.е. выполняются следующие свойства:

1) Рефлексивность: $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_a$.

2) Симметричность: если $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$, то $\|\cdot\|_b \sim \|\cdot\|_a$.

3) Транзитивность: если $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$ и $\|\cdot\|_b \sim \|\cdot\|_c$, то $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_c$.

□ Упражнение. ■

Утверждение: Сходимости по эквивалентным нормам равносильны, а именно, если $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ — две эквивалентные нормы на линейном пространстве $\mathbb{L}$, то последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{L}$ сходится по норме $\|\cdot\|_a$ тогда и только тогда, когда она сходится по норме $\|\cdot\|_b$.

□ Упражнение. ■

Теорема: Все нормы на *конечномерном* линейном пространстве эквивалентны.

□ Пусть $\mathbb{L}$ — n–мерное линейное пространство, $n < +\infty$. Выберем произвольный базис $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$ в $\mathbb{L}$, тогда любой вектор $x \in \mathbb{L}$ представляется в виде линейной комбинации $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Шаг 1: Поскольку эквивалентность норм транзитивна, то нам достаточно доказать эквивалентность произвольной нормы $\|\cdot\|$ какой-либо одной из норм, например евклидовой норме $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$. Покажем, следовательно, что существуют числа $m, M > 0$ такие, что для любого $x \in \mathbb{L}$ выполняется двойное неравенство

$$m\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M\|x\|_2 \ (*)$$

Шаг 2: В случае $x = 0$ справедливость $(*)$ очевидна. Пусть $x \neq 0$, тогда $(*)$ равносильно двойному неравенству $m \leq \|y\| \leq M$, где вектор $y = x/\|x\|_2$ принадлежит единичной сфере $S[0,1] = \{y \in \mathbb{L} \ : \ \|y\|_2 = 1\}$ в $\mathbb{L}$. Следовательно, нам достаточно доказать выполнение условия $(*)$ не для всего пространства $\mathbb{L}$, а лишь для векторов на единичной сфере $S[0,1]$.

Шаг 3: Докажем, что функция $f(x) := \|x\|$ непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_2$, т.е. что из сходимости $x \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x_0$ следует сходимость $f(x) \equiv \|x\| \to \|x_0\| \equiv f(x_0)$.

Действительно, в силу обратного неравенства треугольника

$$\big|\|x\| - \|x_0\|\big| \leq \|x - x_0\| = \|\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{0,k})e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{0,k}|\|e_k\| \leq$$

$$\leq \|x - x_0\|_2 \cdot \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|\right]}_{C} = C\|x - x_0\|_2$$

Следовательно, если $\|x - x_0\|_2 \to 0$, то $\|x\| \to \|x_0\|$, что и требовалось доказать.

Шаг 4: Единичная сфера $S[0,1]$ является компактным множеством, поскольку она ограничена и замкнута, а пространство $\mathbb{L}$ конечномерно*. Тогда по теореме Вейерштрасса непрерывная функция $\|y\|$ достигает на компакте $S[0,1]$ своего минимума $m := \min\limits_{y \in S[0,1]} \|y\|$ и максимума $M := \max\limits_{y \in S[0,1]} \|y\|$, так что

$$\forall y \in S[0,1] \hookrightarrow m \leq \|y\| \leq M$$

Тем самым доказано существование констант m, M из условия $(*)$, а вместе с тем и сама теорема. ■

Замечание: В *бесконечномерных* линейных пространствах существуют неэквивалетные нормы.

* Позже в нашем курсе мы узнаем, что в *бесконечномерном* пространстве ограниченность и замкнутость множества **не** равносильна его компактности.

Пример №1: Рассмотрим последовательность последовательностей

$$\left\{x_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{1}{2^n}}_{2^n}, 0, 0, \ldots\Big)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset l_1 \subset l_2$$

Данная последовательность сходится к нулю (т.е. к нулевой последовательности) по норме $\|\cdot\|_2$, но не стремится к нулю по норме $\|\cdot\|_1$:

$$\|x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{n,k}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

$$\|x_n\|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_{n,k}| = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} = 1$$

Следовательно, нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ неэквивалентны в пространстве l_1.

Пример №2: Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \le x < 1/(2n) \\ 2 - 2nx, & 1/(2n) \le x < 1/n \\ 0, & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

Данная последовательность стремится к нулю по интегральной норме $\|\cdot\|_1$, но не стремится к нулю по равномерной норме $\|\cdot\|_c$:

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

$$\|f_n\|_c = 1$$

Следовательно, нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_c$ неэквивалентны на пространстве $C[0,1]$.

1.10. Существование неполных пространств и незамкнутых подпространств в бесконечномерных нормированных пространствах

Теорема: Любое *конечномерное* нормированное пространство над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ является полным (т.е. ба́наховым).

☐ Пусть $\mathbb{L}$ — n–мерное ($n < +\infty$) нормированное пространство. Зафиксируем в $\mathbb{L}$ какой-либо базис $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$. Поскольку $\mathbb{L}$ конечномерно, то все нормы на нём эквивалентны друг другу и, в частности, эквивалентны норме $\|\cdot\|_1$, с которой мы и будем работать по ходу доказательства.

Выберем в $\mathbb{L}$ произвольную фундаментальную последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, так что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших $p, q \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\|x_p - x_q\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_{p,k} - x_{q,k}| < \varepsilon$. Следовательно, для любого $k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство $|x_{p,k} - x_{q,k}| < \varepsilon$, означающее, что числовые последовательности $\{x_{p,k}\}_{p\in\mathbb{N}}$, $k = \overline{1,n}$ являются фундаментальными, а в силу полноты поля $\mathbb{F}$ и сходящимися к некоторым числам $\alpha_k \in \mathbb{F}$, $k = \overline{1,n}$.

Составим с помощью полученных чисел α_k вектор $x := \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in \mathbb{L}$ и докажем, что $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к x: этим будет доказана полнота пространства $\mathbb{L}$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших p имеем оценку:

$$\|x_p - x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_{p,k} - \alpha_k| = \sum_{k=1}^{n} \left| x_{p,k} - \lim_{q\to+\infty} x_{q,k} \right| = \lim_{q\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon,$$

что и означает, что $x_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x \in \mathbb{L}$. Теорема доказана. ■

Ранее в курсах линейной алгебры и математического анализа нам приходилось иметь дело в основном с конечномерными, а значит и полными нормированными пространствами. Однако функциональный анализ занимается главным образом изучением бесконечномерных пространств, и здесь мы сталкиваемся с новым для нас фактом:

Утверждение: *Бесконечномерное* нормированное пространство над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ может быть неполным. Кроме того, если такое неполное нормированное пространство рассматривается в качестве подпространства некоторого ба́нахова пространства, то это подпространство обязательно будет незамкнутым*.

☐ Достаточно привести примеры незамкнутых подпространств в ба́наховых пространствах.

Пример 1: Рассмотрим подпространство финитных последовательностей

$$\mathbb{F}_0^{\mathbb{N}} := \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \ : \ \exists k \in \mathbb{N}\colon x_k = 0, \, x_{k+1} = 0, \ldots\}$$

* Это следует из доказанного ранее утверждения: замкнутое подпространство в полном метрическом пространстве само является полным метрическим пространством. Стало быть, если подпространство ба́нахова пространства не является полным, то оно не может быть и замкнутым.

как подпространство ба́нахова пространства l_p, $1 \le p < +\infty$. Это подпространство всюду плотно в l_p, поскольку любую последовательность из l_p можно сколь угодно точно (по норме $\|\cdot\|_p$) приблизить финитными последовательностями. Значит, $\mathrm{cl}_{l_p}\mathbb{F}_0^{\mathbb{N}} = l_p$ и $\mathrm{cl}_{l_p}\mathbb{F}_0^{\mathbb{N}} \ne \mathbb{F}_0^{\mathbb{N}}$, что и означает незамкнутость подпространства $\mathbb{F}_0^{\mathbb{N}}$ в l_p и, следовательно, его неполноту по норме $\|\cdot\|_p$.

Пример 2: Пусть $\mathbb{P}$ — подпространство всех алгебраических многочленов в пространстве непрерывных функций с равномерной нормой $\mathbb{X} := (C[-\pi, \pi], \|\cdot\|_c)$.

В силу теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами $\mathbb{P}$ всюду плотно в $\mathbb{X}$, т.е. $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\mathbb{P} = \mathbb{X}$ и $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\mathbb{P} \ne \mathbb{P}$. Значит, подпространство $\mathbb{P}$ незамкнуто в $\mathbb{X}$ и не полно по норме $\|\cdot\|_c$. ■

1.11. Базис Шаудера

Определение: Пусть $\mathbb{L}$ — нормированное пространство. Последовательность векторов $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{L}$ называется **базисом Шаудера** в $\mathbb{L}$, если для любого $x \in \mathbb{L}$ существует *единственная* числовая последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k e_k$.

Последнее равенство означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k e_k$ сходится к x по норме пространства $\mathbb{L}$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k\| < \varepsilon$.

Пример №1: Последовательность векторов $\{e_k = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow\\k}}{1}, 0, \dots)\}_{k\in\mathbb{N}}$ является базисом Шаудера в l_p, $1 \le p < +\infty$. В самом деле, любой вектор $x = (x_1, \dots, x_k, \dots) \in l_p$ представляется (и притом — единственным образом) в виде ряда $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k e_k$, поскольку

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Пример №2: Система *Фабера–Шаудера*, первые несколько членов которой изображены на Рис. 1.5, является базисом Шаудера в пространстве $(C[0,1], \|\cdot\|_c)$. В качестве примера на Рис. 1.6 показано несколько первых частичных сумм $f^{(n)}(x)$ разложения произвольной функции $f \in C[0,1]$ по данному базису.

Упражнение: Докажите, что система мономов $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ не образует базис Шаудера в пространстве $(C[-1,1], \|\cdot\|_c)$ несмотря на то, что подпространство всех алгеб-

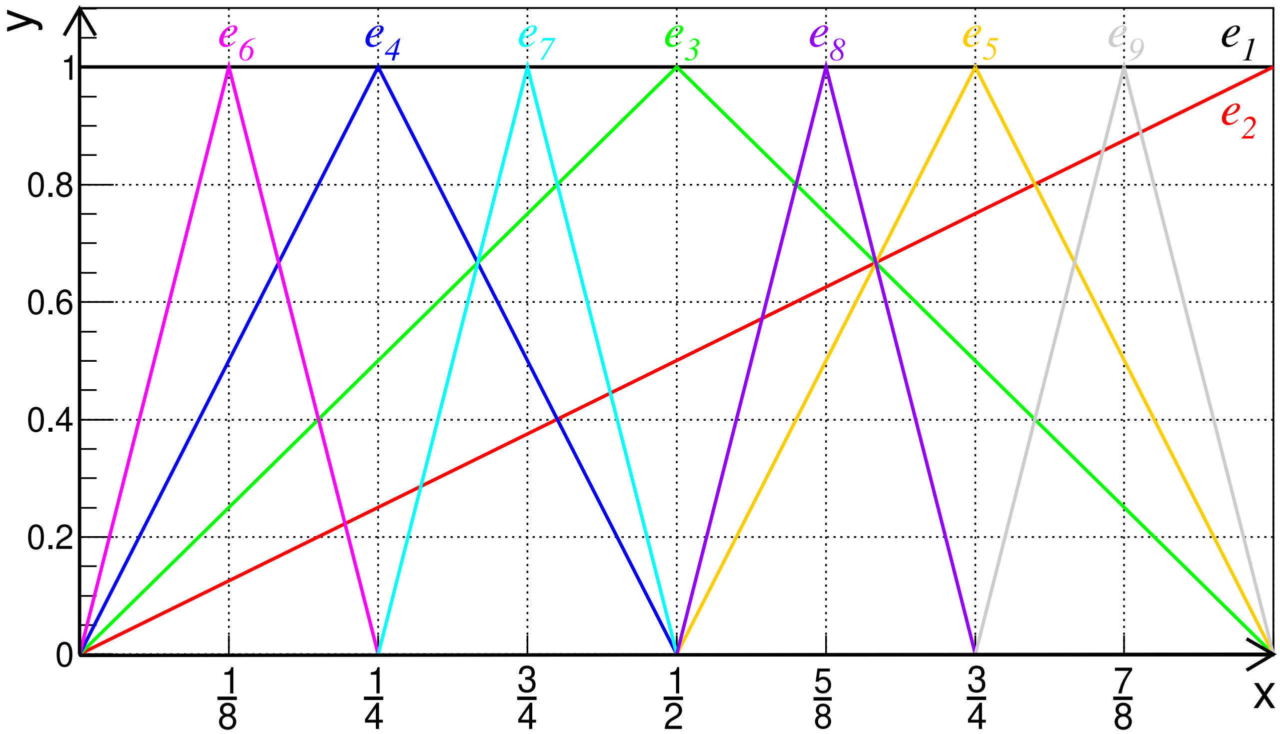


Рис. 1.5: Первые несколько элементов базиса Фабера-Шаудера $\{e_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$.

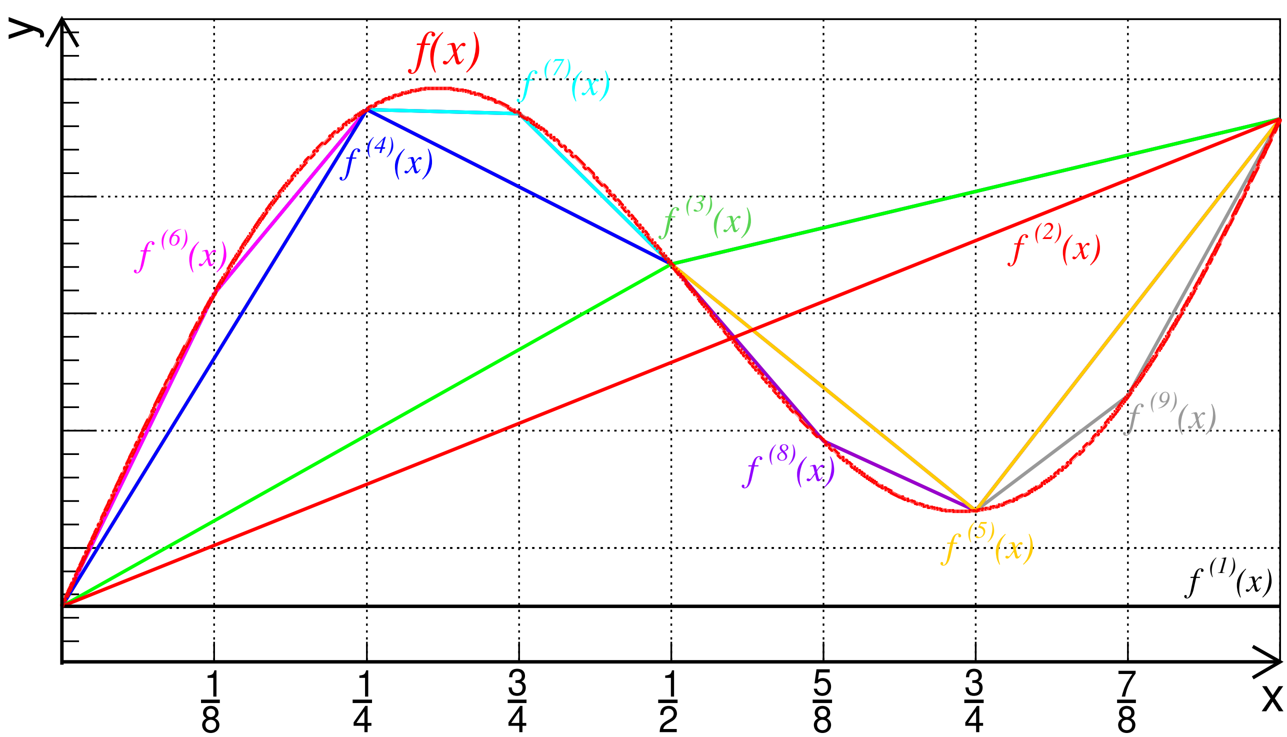


Рис. 1.6: Произвольная функция $f \in C[0,1]$ и несколько первых частичных сумм $f^{(n)}(x)$ её разложения по базису Фабера–Шаудера.

раических многочленов $\mathbb{P} = \langle\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}\rangle$ всюду плотно в этом пространстве.

Утверждение: Если в нормированном пространстве существует базис Шаудера, то это пространство сепарабельно.

$\square$ Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — базис Шаудера в нормированном пространстве $\mathbb{L}$, т.е. для любого $x \in \mathbb{L}$ существует единственная числовая последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \hookrightarrow \|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\| < \varepsilon$$

Подберем для всех $k = \overline{1, n}$ числа $q_k \in \mathbb{Q}$ (если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) или $q_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) так, чтобы выполнялись неравенства $|x_k - q_k| < \dfrac{\varepsilon}{n\|e_k\|}$. Тогда

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} q_k e_k\Big\| = \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k + \sum_{k=1}^{n} x_k e_k - \sum_{k=1}^{n} q_k e_k\Big\| \leq \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\Big\| +$$
$$+ \Big\|\sum_{k=1}^{n} (x_k - q_k) e_k\Big\| < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |x_k - q_k|\,\|e_k\| < \varepsilon + \frac{\varepsilon n}{n\|e_k\|}\|e_k\| = 2\varepsilon$$

Значит, счетное множество

$$M := \Big\{\sum_{k=1}^{n} q_k e_k : n \in \mathbb{N},\ q_k \in \mathbb{Q}\ (\mathbb{F} = \mathbb{R}) \text{ или } q_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\ (\mathbb{F} = \mathbb{C})\ \forall k = \overline{1, n}\Big\}$$

всюду плотно в $\mathbb{L}$, и потому $\mathbb{L}$ сепарабельно. $\blacksquare$

Следствие: Из доказанного утверждения и Примеров 1) и 2) следует, что пространства l_p, $1 \leq p < +\infty$ и $(C[a, b], \|\cdot\|_c)$ являются сепарабельными.

Замечание: К первой трети 20-го века базисы Шаудера были найдены для всех «классических» сепарабельных ба́наховых пространств, так что перед математиками встал вопрос: в любом ли сепарабельном ба́наховом пространстве существует базис Шаудера? Отрицательный ответ на этот вопрос дал в 1973 г. норвежский математик Пер Энфло, построив пример сепарабельного ба́нахова пространства без базиса Шаудера.

1.12. Линейные пространства со скалярным произведением

Определение: Скалярным произведением в линейном пространстве $\mathbb{L}$ над полем $\mathbb{F}$ называется функция $(\cdot, \cdot)\colon \mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{F}$, для любых $x, y, z \in \mathbb{L}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ удовлетворяющая условиям:

1) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ (линейность по первому аргументу);
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (эрмитова симметричность).

Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то пространство со скалярным произведением называют **евклидовым**. В евклидовом пространстве скалярное произведение симметрично (т.е. $(x, y) = (y, x)$) и линейно по обоим аргументам.

Если же $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то пространство со скалярным произведением называют **унитарным**. В унитарном пространстве скалярное произведение эрмитово симметрично и «*полулинейно*» по второму аргументу:

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{(\alpha(y, x) + \beta(z, x))} = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$$

Отметим, что комплексное сопряжение в условии эрмитовой симметричности необходимо для выполнения условия 1) в определении скалярного произведения:

$$(ix, ix) = i\overline{i}(x, x) = (x, x) \geq 0$$

Теорема (неравенство Коши–Буняковского–Шварца):

Пусть $\mathbb{L}$ — пространство со скалярным произведением, тогда для любых $x, y \in \mathbb{L}$ выполняется неравенство $|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда x и y пропорциональны.

$\square$ При $y = 0$ неравенство, очевидно, выполнено:

$$|(x, 0)| = |(x, x - x)| = |(x, x) - (x, x)| = 0 \leq \sqrt{(x, x)(0, 0)} = 0$$

Пусть $y \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{F}$ — произвольный скаляр, тогда

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - \lambda(y, x) - \overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{\lambda}(y, y)$$

Положив $\lambda = (x, y)/(y, y)$, получим

$$0 \leq (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)^2}(y, y),$$

следовательно $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$, что и требовалось доказать.

Наконец, как уже было установлено, при $x = 0$ или $y = 0$ неравенство обращается в равенство. В случае же $x \neq 0$ и $y \neq 0$ неравенство обращается в равенство только при $(x - \lambda y, x - \lambda y) = 0$, что равносильно пропорциональности векторов: $x = \lambda y$. $\blacksquare$

Утверждение: Величина $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ обладает свойствами нормы (она называется *нормой, порожденной скалярным произведением*).

$\square$ Неотрицательность и положительная однородность очевидны. Используя неравенство Коши–Буняковского, проверим выполнение неравенства треугольника:

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,x) + (x,y) + (y,y) = \\ &= \|x\|^2 + \overline{(x,y)} + (x,y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2 \le \\ &\le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \ \blacksquare\end{aligned}$$

Итак, пространство со скалярным произведением можно считать также и нормированным, а следовательно и метрическим пространством.

Определение: Пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы, порожденной скалярным произведением, называется **гильбертовым пространством***.

Утверждение: Скалярное произведение непрерывно по обоим аргументам, т.е. если $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} x$ и $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} y$, то $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x,y)$.

$\square$ Действительно:

$$\begin{aligned}&|(x_n,y_n) - (x,y)| = |(x_n,y_n) - (x_n,y) + (x_n,y) - (x,y)| = |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \le \\ &\le |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \le \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

так как последовательность $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена ввиду сходимости $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\blacksquare$

Определение: Пусть $\mathbb{L}$ — пространство со скалярным произведением. Векторы $x, y \in \mathbb{L}$ называются **ортогональными**, если $(x,y) = 0$. Пишут: $x \perp y$.

Если $\mathbb{L}$ — *евклидово* пространство, то величина $\varphi = \arccos\left(\dfrac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right)$ называется **углом** между векторами x и y.

Упражнение: Докажите, что сумма углов треугольника в произвольном евклидовом пространстве равна π.

Теорема Пифагора: Пусть $\mathbb{L}$ — пространство со скалярным произведением, $x, y \in \mathbb{L}$ и $x \perp y$, тогда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

$\square$ $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. $\blacksquare$

Приведем примеры гильбертовых пространств.

---

* В честь немецкого математика Давида Гильберта (1862–1943), введшего это понятие в математику в качестве обобщения евклидовых/унитарных пространств на бесконечномерный случай.

Пример №1: Пространство вектор–столбцов $\mathbb{F}^n$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$$

Пример №2: На пространстве $M_{n,m}(\mathbb{F})$ матриц размера $n \times m$ можно задать скалярное произведение Фробениуса:

$$(A, B) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{kj} \overline{B_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{kj} (\overline{B^T})_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (AB^+)_{kk} = \mathrm{Tr}(AB^+)$$

Пример №3: Пространство последовательностей l_2 со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y}_k$$

Пример №4: Лебеговское функциональное пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Пространства l_2 и $L_2(\Omega)$ играют важнейшую роль в квантовой механике, являясь пространствами состояний квантовой системы.

Читатель, возможно, уже заметил, что в приведенном списке примеров отсутствуют пространства l_p и $L_p(\Omega)$ при $p \neq 2$ и $(C[a, b], \|\cdot\|_c)$. Это не случайно: дело в том, что нормы этих пространств не порождаются никакими скалярными произведениями, что легко может быть установлено с помощью следующей теоремы.

Теорема фон Неймана–Йордана: Норма нормированного пространства $\mathbb{L}$ порождена скалярным произведением тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \mathbb{L}$ выполняется **равенство параллелограмма**:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

□ Доказательство теоремы фон Неймана–Йордана выходит за рамки основного курса, тем не менее, любопытный студент может ознакомиться с ним в Приложении Б. ■

Пример: Норма в пространстве l_p при $p \neq 2$ не порождена скалярным произведением.

Действительно, возьмем $x = (1, 0, 0, \ldots)$, $y = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, тогда

$$\|x\|_p = \|y\|_p = 1,\ \|x \pm y\|_p = (1^p + 1^p)^{1/p} = 2^{1/p}$$

и при $p \neq 2$ равенство параллелограмма, очевидно, не выполняется:

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} = 2^{1+2/p} \neq 2\|x\|_p^2 + 2\|y\|_p^2 = 4 = 2^2$$

Упражнение: Докажите, что:

1) норма пространства $(C[a, b],\ \|\cdot\|_c)$ не порождена скалярным произведением.
2) норма пространства $(L_p[a, b],\ \|\cdot\|_p)$ при $p \neq 2$ не порождена скалярным произведением.

1.13. Вектор наилучшего приближения и ортогональная проекция

Определение: Пусть $\mathbb{L}'$ — подпространство нормированного пространства $\mathbb{L}$, вектор x лежит в $\mathbb{L}$. Вектор $x' \in \mathbb{L}'$ называется **ближайшим к x вектором подпространства $\mathbb{L}'$**, если для любого $y \in \mathbb{L}'$ выполняется неравенство $\|x - x'\| \leq \|x - y\|$.

Иначе говоря, $x' \in \mathbb{L}'$ называется ближайшим к x вектором подпространства $\mathbb{L}'$, если на нем достигается расстояние от x до подпространства $\mathbb{L}'$:

$$\rho(x, x') \equiv \|x - x'\| = \inf_{y \in \mathbb{L}'} \|x - y\| \equiv \rho(x, \mathbb{L}'),$$

то есть $x' = \arg \inf\limits_{y \in \mathbb{L}'} \|x - y\|$.

Замечание: Приведем типичный пример задачи на поиск ближайшего вектора в подпространстве:

Среди всех алгебраических многочленов степени не выше n найти ближайший к функции $f(x) \in C[a, b]$ по равномерной норме $\|\cdot\|_c$ на промежутке $[a, b]$.

Данная задача относится к классу так называемых *минимаксных* задач. Смысл такого названия понятен из формальной записи решения:

$$p(x) = \arg \inf_{q \in \langle 1, x, \ldots, x^n \rangle} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - q(x)|,$$

откуда видно, что искомый многочлен $p(x)$ *минимизирует максимальное поточечное отклонение* от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Можно доказать, что решение такой задачи существует и единственно. Проблема, однако, в том, что для произвольной функции $f(x)$ это решение не может быть получено в явном виде, оно может быть найдено только приближенно!

Задача поиска ближайшего вектора в подпространстве кардинально упрощается, если рассматривать её в пространстве со скалярным произведением.

Определение: Пусть $\mathbb{L}'$ — подпространство в пространстве $\mathbb{L}$ со скалярным произведением, вектор x лежит в $\mathbb{L}$. Вектор $x' \in \mathbb{L}'$ называется **ортогональной проекцией вектора x на подпространство $\mathbb{L}'$**, если для любого $y \in \mathbb{L}' \hookrightarrow (x - x') \perp y$. Обозначение: $x' = \mathrm{Pr}_{\mathbb{L}'} x$.

Следующая теорема утверждает, что в пространстве со скалярным произведением ближайший вектор в подпространстве и ортогональная проекция на подпространство — это одно и то же.

Теорема: Пусть $\mathbb{L}'$ — подпространство в пространстве $\mathbb{L}$ со скалярным произведением, вектор x лежит в $\mathbb{L}$. Вектор $x' \in \mathbb{L}'$ является ближайшим к x вектором подпространства $\mathbb{L}'$ тогда и только тогда, когда $x' = \mathrm{Pr}_{\mathbb{L}'} x$.

□ **Необходимость:** Пусть x' — ближайший к x вектор в $\mathbb{L}'$. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \rho^2(x, x' + ty) \equiv \|x - x' - ty\|^2 = \|x - x'\|^2 - 2t\mathrm{Re}(x - x', y) + t^2\|y\|^2,$$

где $t \in \mathbb{R}$, y — произвольный вектор из $\mathbb{L}'$ (см. Рис. 1.7). Поскольку x' — ближайший к x вектор в $\mathbb{L}'$, то $f(t)$ имеет минимум при $t = 0$, а значит $f'(0) = -2\mathrm{Re}(x - x', y) = 0$. Заменив теперь всюду y на iy мы придем к тому, что и $\mathrm{Im}(x - x', y) = 0$. Итого мы получили, что для любого $y \in \mathbb{L}'$ $(x - x', y) = 0$, а это и означает, что $x' = \mathrm{Pr}_{\mathbb{L}'} x$.

Достаточность: Пусть $x' = \mathrm{Pr}_{\mathbb{L}'} x$, тогда для любого вектора $y \in \mathbb{L}'$ имеем:

$$\|x - y\|^2 = \|(x - x') + (x' - y)\|^2 = \|x - x'\|^2 + 2\mathrm{Re}(x - x', \underbrace{x' - y}_{\in \mathbb{L}'}) + \|x' - y\|^2 =$$

$$= \|x - x'\|^2 + \|x' - y\|^2 \geq \|x - x'\|^2,$$

следовательно x' — ближайший к x вектор в $\mathbb{L}'$. ■

Теорема: Пусть $\mathbb{H}'$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$. Тогда существует единственный вектор $x' \in \mathbb{H}'$, ближайший к x (а именно, $x' = \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'} x$).

□ Напомним, что гильбертовым пространством называется пространство со скалярным произведением, *полное* относительно нормы, порожденной скалярным произведением. Поскольку $\mathbb{H}'$ — замкнутое подпространство в полном пространстве $\mathbb{H}$, то $\mathbb{H}'$ также является полным, то есть гильбертовым.

Обозначим за d расстояние от вектора x до подпространства $\mathbb{H}'$ (см. Рис. 1.8):

$$d := \rho(x, \mathbb{H}') \equiv \inf_{y \in \mathbb{H}'} \|x - y\|$$

Тогда по определению точной нижней границы (inf) существует последовательность $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{H}'$ такая, что $\|x - x'_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) \hookrightarrow d^2 \le \|x - x'_n\|^2 \le d^2 + \varepsilon$$

Докажем, что последовательность $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. В силу полноты $\mathbb{H}'$ из этого будет следовать, что $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторому вектору из $\mathbb{H}'$. Запишем равенство параллелограмма для «параллелограмма» со сторонами $x - x'_m$, $x - x'_n$ и диагоналями $x'_m - x'_n$ и $2x - x'_n - x'_m$, изображенного на Рис. 1.8:

$$\|x'_m - x'_n\|^2 + \|2x - x'_n - x'_m\|^2 = 2\|x - x'_m\|^2 + 2\|x - x'_n\|^2$$

Тогда, поскольку $\|x - x'_{m,n}\|^2 \le d^2 + \varepsilon$ и $\|2x - x'_n - x'_m\|^2 = 4\|x - (x'_n + x'_m)/2\|^2 \ge d^2$, получаем оценку

$$\|x'_m - x'_n\|^2 = 2\|x - x'_m\|^2 + 2\|x - x'_n\|^2 - \|2x - x'_n - x'_m\|^2 \le 4\varepsilon$$

Значит, последовательность $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна и сходится к некоторому вектору $x' = \lim\limits_{n\to+\infty} x'_n \in \mathbb{H}'$. Докажем, что вектор x' и есть ближайший к x вектор из $\mathbb{H}'$. Так как $\|x - x'_n\| = \sqrt{(x - x'_n, x - x'_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d$, то в силу непрерывности скалярного произведения получаем $\|x - x'\| = d$, что и означает, что x' — ближайший к x вектор из $\mathbb{H}'$ (т.е. $x' = \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}x$).

Докажем единственность ближайшего вектора. Предположим противное: пусть существует другой вектор $\widetilde{x}'$, ближайший к x в $\mathbb{H}'$, тогда в силу равенства параллелограмма имеем:

$$\|x' - \widetilde{x}'\|^2 = 2\|x - x'\|^2 + 2\|x - \widetilde{x}'\|^2 - \|2x - x' - \widetilde{x}'\|^2 \le 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,$$

следовательно $\widetilde{x}' = x'$. Теорема доказана. ■

Замечание: Как мы уже знаем, конечномерное подпространство $\mathbb{H}'$ гильбертова пространства $\mathbb{H}$ обязательно замкнуто. Следовательно, в нём всегда существует, и притом единственный, ближайший вектор (ортогональная проекция) к вектору $x \in \mathbb{H}$.

Замечание: Если $\mathbb{L}'$ — *незамкнутое* подпространство гильбертова пространства $\mathbb{H}$, то для вектора $x \in \mathbb{H}$ ближайшего элемента в $\mathbb{L}'$ может не существовать.

Пример: Пусть $\mathbb{H} = L_2[-\pi, \pi]$, $\mathbb{L}' = C^1[-\pi, \pi]$ — подпространство непрерывно

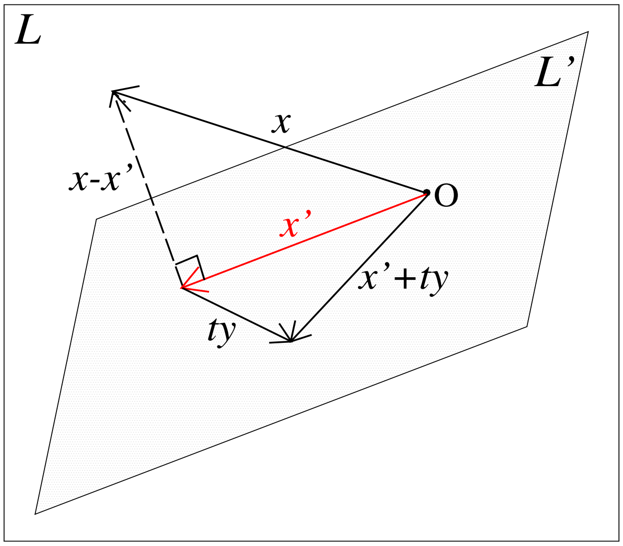


Рис. 1.7: Вектор x из $\mathbb{L}$, ближайший к нему вектор x' из $\mathbb{L}'$ и произвольный вектор ty из $\mathbb{L}'$.

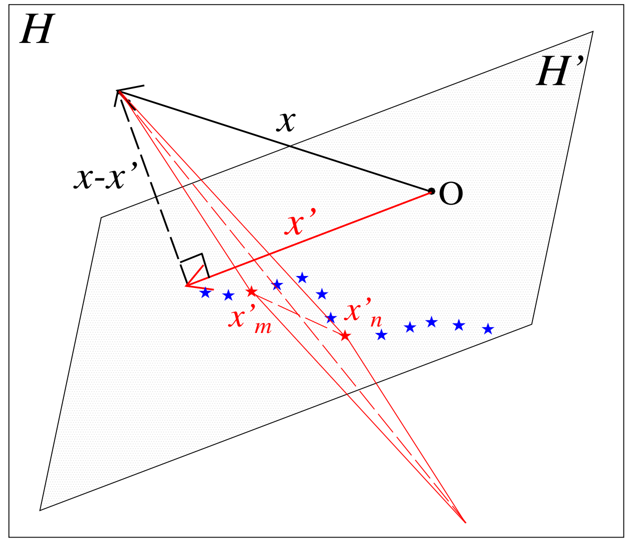


Рис. 1.8: Вектор x из $\mathbb{H}$ и фундаментальная последовательность $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{H}'$.

дифференцируемых функций в $\mathbb{H}$*. Легко проверить, что $\mathbb{L}'$ незамкнуто в $\mathbb{H}$**. Покажем, что для функции $\operatorname{sgn} x \in \mathbb{H}$ не существует ближайшего элемента в $\mathbb{L}'$, т.е. $\nexists\, Pr_{\mathbb{L}'} \operatorname{sgn} x$.

От противного, пусть существует $f(x) = Pr_{\mathbb{L}'} \operatorname{sgn} x \in C^1[-\pi,\pi]$. Тогда для любой функции $g \in \mathbb{L}'$ имеем $(\operatorname{sgn} x - f(x), g(x)) = 0$. Возьмем $g(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$:

$$(\operatorname{sgn} x - f(x), \sin nx) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \cdot \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx\, dx$$

Следовательно, функции $\operatorname{sgn} x$ и $f(x)$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье b_n, $n \in \mathbb{N}$, а также одинаковые коэффициенты Фурье a_n, все равные нулю в силу нечётности $\operatorname{sgn} x$. Значит, при $x \in (-\pi,\pi)$ ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ сходится одновременно к разрывной функции $(\operatorname{sgn}(x-0)+\operatorname{sgn}(x+0))/2 \equiv \operatorname{sgn} x$ и к непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, то есть $\forall x \in (-\pi,\pi)$ $f(x) = \operatorname{sgn} x$, что невозможно. Следовательно, проекция $Pr_{\mathbb{L}'} \operatorname{sgn} x$ не существует.

* Подразумевается, что функции из $C^1[-\pi,\pi]$ имеют конечные односторонние производные на концах отрезка $[-\pi,\pi]$.

** Достаточно рассмотреть последовательность функций $\{\operatorname{arctg}(nx)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1[-\pi,\pi]$, сходящуюся поточечно к разрывной функции $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x$ и не сходящуюся ни к какой непрерывно дифференцируемой функции по норме в $L_2[-\pi,\pi]$.

1.14. Ортогональное дополнение к множеству

Определение: Пусть $\mathbb{L}$ — пространство со скалярным произведением. **Ортогональным дополнением к множеству** $M \subset \mathbb{L}$ называется множество

$$M^{\perp} = \{x \in \mathbb{L} \ : \ \forall y \in M \hookrightarrow x \perp y\}$$

Утверждение: Пусть $\mathbb{L}$ — пространство со скалярным произведением, $M \subset \mathbb{L}$. Тогда $M^{\perp}$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathbb{L}$.

□ Докажем, что $M^{\perp}$ — линейное подпространство в $\mathbb{L}$. Возьмем произвольные $x_1, x_2 \in M^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, тогда для любого вектора $y \in M$ имеем

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y) = 0 \ \Rightarrow \ (\alpha x_1 + \beta x_2) \in M^{\perp},$$

следовательно $M^{\perp}$ — линейное подпространство в $\mathbb{L}$.

Докажем теперь, что подпространство $M^{\perp}$ замкнуто. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M^{\perp}$ сходится к некоторому вектору $x \in \mathbb{L}$. Тогда для любого вектора $y \in M$ в силу непрерывности скалярного произведения имеем:

$$0 = \lim_{n \to +\infty} (x_n, y) = (\lim_{n \to +\infty} x_n, y) = (x, y),$$

следовательно $x \in M^{\perp}$ и потому $M^{\perp}$ замкнуто. ■

Определение: Говорят, что линейное пространство $\mathbb{L}$ является **прямой суммой** своих подпространств $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, если для любого вектора $x \in \mathbb{L}$ существуют *единственные* вектора $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ такие, что $x = u + v$. Пишут: $\mathbb{L} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$.

Теорема: Пусть $\mathbb{H}'$ — замкнутое подпространство гильбертового пространства $\mathbb{H}$. Тогда $\mathbb{H} = \mathbb{H}' \oplus (\mathbb{H}')^{\perp}$.

□ Возьмем произвольный вектор $x \in \mathbb{H}$. Поскольку $\mathbb{H}'$ замкнуто, то существует ортогональная проекция $x' := \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'} x \in \mathbb{H}'$. При этом вектор $x'' := x - x'$ принадлежит ортогональному дополнению $(\mathbb{H}')^{\perp}$. Итак, мы нашли вектора $x' \in \mathbb{H}'$ и $x'' \in (\mathbb{H}')^{\perp}$ такие, что $x = x' + x''$, осталось доказать их единственность.

От противного: пусть нашлись другие вектора $\widetilde{x}' \in \mathbb{H}'$ и $\widetilde{x}'' \in (\mathbb{H}')^{\perp}$ такие, что $x = \widetilde{x}' + \widetilde{x}''$. Тогда

$$x = x' + x'' = \widetilde{x}' + \widetilde{x}'' \ \Rightarrow \ x' - \widetilde{x}' = \widetilde{x}'' - x''$$

Но так как $(x' - \widetilde{x}') \in \mathbb{H}'$ и $(\widetilde{x}'' - x'') \in (\mathbb{H}')^{\perp}$, то $(x' - \widetilde{x}') \in \mathbb{H}' \cap (\mathbb{H}')^{\perp} = \{0\}$ и $(\widetilde{x}'' - x'') \in \mathbb{H}' \cap (\mathbb{H}')^{\perp} = \{0\}$. Следовательно, $\widetilde{x}' = x'$ и $\widetilde{x}'' = x''$. ■

Утверждение: Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, $M \subset \mathbb{H}$. Тогда $(M^\perp)^\perp = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\langle M\rangle$ и, как следствие, $\mathbb{H} = M^\perp \overset{\perp}{\oplus} (M^\perp)^\perp = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\langle M\rangle \overset{\perp}{\oplus} M^\perp$*.

$\square$ Обозначим за $\mathbb{L}$ линейную оболочку множества M: $\mathbb{L} := \langle M\rangle$.

Шаг 1: Докажем, что $\mathbb{L}^\perp = M^\perp$.

Пусть $x \in \mathbb{L}^\perp$, тогда для любого $y \in \mathbb{L} \hookrightarrow (x, y) = 0$. Поскольку M — подмножество $\mathbb{L}$, то для любого $z \in M$ также имеем $(x, z) = 0$. Значит, $x \in \mathbb{M}^\perp$ и $\mathbb{L}^\perp \subset \mathbb{M}^\perp$.

Пусть теперь $x \in M^\perp$, т.е. для любого $y \in M \hookrightarrow (x, y) = 0$. Так как $\mathbb{L} = \langle M\rangle$, то любой вектор $z \in \mathbb{L}$ представим в виде конечной линейной комбинации векторов из M, т.е. существуют $y_1, \dots, y_n \in M$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ такие, что $z = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$. Тогда

$$(x, z) = (x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k (x, y_k) = 0,$$

следовательно $x \in \mathbb{L}^\perp$ и $M^\perp \subset \mathbb{L}^\perp$.

Итак, имеют место включения $\mathbb{L}^\perp \subset M^\perp$ и $M^\perp \subset \mathbb{L}^\perp$, следовательно $\mathbb{L}^\perp = M^\perp$.

Шаг 2: Докажем, что $\mathbb{L}^\perp = (\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L})^\perp$.

Пусть $x \in \mathbb{L}^\perp$, т.е. для любого $y \in \mathbb{L} \hookrightarrow (x, y) = 0$. Возьмем произвольный вектор $z \in \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L}$ и сходящуюся к нему последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{L}$. В силу непрерывности скалярного произведения имеем:

$$(x, z) = (x, \lim_{n\to+\infty} y_n) = \lim_{n\to+\infty} (x, y_n) = 0,$$

следовательно $x \in (\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L})^\perp$ и $\mathbb{L}^\perp \subset (\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L})^\perp$.

Пусть теперь $x \in (\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L})^\perp$, т.е. для любого $y \in \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L} \hookrightarrow (x, y) = 0$. Тогда, поскольку $\mathbb{L} \subset \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L}$, то для любого $z \in \mathbb{L}$ тем более имеем $(x, z) = 0$. Стало быть, $x \in \mathbb{L}^\perp$ и $(\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L})^\perp \subset \mathbb{L}^\perp$.

Итак, $\mathbb{L}^\perp \subset (\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L})^\perp$ и $(\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L})^\perp \subset \mathbb{L}^\perp$, следовательно $\mathbb{L}^\perp = (\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\,\mathbb{L})^\perp$.

Шаг 3: Поскольку $M^\perp$ — замкнутое подпространство в $\mathbb{H}$, то

$$\mathbb{H} = (M^\perp)^\perp \overset{\perp}{\oplus} M^\perp \quad (*)$$

С другой стороны, поскольку подпространство $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\mathbb{L}$ замкнуто в $\mathbb{H}$, то

* Значком $\overset{\perp}{\oplus}$ обозначают прямую сумму ортогональных подпространств.

$$\mathbb{H} = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\, \mathbb{L} \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\, \mathbb{L})^{\perp} \overset{\text{Шаг 2}}{=} \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\, \mathbb{L} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{L}^{\perp} \overset{\text{Шаг 1}}{=} \mathrm{cl}_{\mathbb{H}} \langle M \rangle \overset{\perp}{\oplus} M^{\perp} \quad (**)$$

Легко доказать, что если $\mathbb{H} = \mathbb{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{V}_1 = \mathbb{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{V}_2$, то $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2$. Используя этот факт и сопоставляя выражения $(*)$ и $(**)$, получаем $(M^{\perp})^{\perp} = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}} \langle M \rangle$. ■

1.15. Ортонормированные системы

Определение: Пусть $\mathbb{L}$ — пространство со скалярным произведением. Система векторов $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathbb{L}$, где A — множество индексов, называется **ортонормированной** (ОНС), если для любых $\alpha, \beta \in A$ скалярное произведение $(e_\alpha, e_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$ и $(e_\alpha, e_\beta) = 1$ при $\alpha = \beta$.

Ранее уже отмечалось, что возникающие в физических приложениях пространства являются, как правило, сепарабельными. Замечательный факт состоит в том, что в сепарабельном пространстве со скалярным произведением любая ОНС является не более чем счётной, то есть представляет собой либо конечный набор, либо последовательность векторов!

Утверждение: Пусть $\mathbb{L}$ — сепарабельное пространство со скалярным произведением, тогда любая ОНС в нем не более чем счётна.

□ Докажем предварительно вспомогательную лемму:

Если в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ существует более чем счётное множество точек $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ такое, что расстояние между любыми двумя её точками больше некоторой положительной константы, т.е. $\exists C > 0$ такое, что для любых $\alpha, \beta \in A \hookrightarrow \rho(x_\alpha, x_\beta) > C$ при $\alpha \neq \beta$, то пространство $\mathbb{X}$ не может быть сепарабельным.

Предположим противное: пусть $\mathbb{X}$ — сепарабельное метрическое пространство, т.е. существует счетное всюду плотное подмножество $M \subset \mathbb{X}$. Окружим каждый из элементов $x_\alpha \in \mathbb{X} \setminus M$ открытым шаром $B(x_\alpha, C/2)$. Очевидно, что число таких шаров более, чем счётно, и $B(x_\alpha, C/2) \cap B(x_\beta, C/2) = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. С другой стороны, так как любой элемент $x_\alpha \in \mathbb{X} \setminus M$ является предельной точкой M, то в каждом из шаров $B(x_\alpha, C/2)$ содержится бесконечно много точек из M (см. Рис. 1.9). Значит, множество M должно быть более, чем счётно. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Вернемся к доказательству утверждения. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — ОНС в сепарабельном пространстве $\mathbb{L}$ со скалярным произведением. Тогда при $\alpha \neq \beta$ имеем

$$\rho(e_\alpha, e_\beta) = \|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{(e_\alpha - e_\beta, e_\alpha - e_\beta)} = \sqrt{\|e_\alpha\|^2 + \|e_\beta\|^2} = \sqrt{2} =: C > 0$$

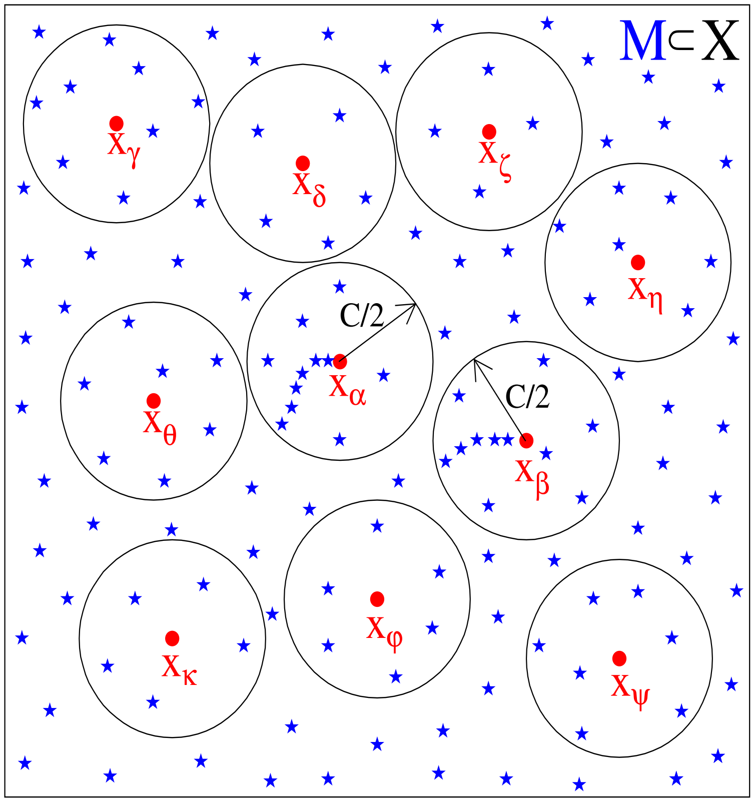


Рис. 1.9: Всюду плотное подмножество M в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ и некоторые из шаров $B(x_\alpha, C/2)$, $x_\alpha \in \mathbb{X} \setminus M$.

Если предположить, что ОНС $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ более чем счётна, то из доказанной леммы следовало бы, что $\mathbb{L}$ не может быть сепарабельным. Следовательно, ОНС $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ не более, чем счётна. ■

Теорема о проектировании на конечномерное подпространство:

Пусть $\mathbb{L}'$ — конечномерное подпространство в пространстве $\mathbb{L}$ со скалярным произведением, $\dim \mathbb{L}' = n < +\infty$, система $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ составляет ортонормированный базис (ОНБ) в $\mathbb{L}'$, x — произвольный вектор в $\mathbb{L}$. Тогда $\mathrm{Pr}_{\mathbb{L}'}\, x = \sum\limits_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$.

□ В силу (полу)линейности скалярного произведения достаточно доказать ортогональность вектора $(x - \sum\limits_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k)$ каждому из базисных векторов e_j, $j = \overline{1, n}$:

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k, e_j\right) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\delta_{kj} = (x, e_j) - (x, e_j) = 0 \quad \blacksquare$$

Следующая теорема дает алгоритм получения ОНС из любой линейно независимой системы векторов.

Теорема (процесс ортогонализации Грама–Шмидта):

Пусть $\mathbb{L}$ — пространство со скалярным произведением, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{L}$ — линейно независимая система векторов. Тогда последовательность векторов $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, вычисляемая по правилам

$$\begin{cases} \widetilde{e}_1 = x_1, & e_1 = \widetilde{e}_1/\|\widetilde{e}_1\|, \\ \widetilde{e}_2 = x_2 - \mathrm{Pr}_{\langle e_1\rangle}\, x_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1, & e_2 = \widetilde{e}_2/\|\widetilde{e}_2\|, \\ \ldots \\ \widetilde{e}_n = x_n - \mathrm{Pr}_{\langle e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\rangle}\, x_n = x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(x_n, e_k)e_k, & e_n = \widetilde{e}_n/\|\widetilde{e}_n\|, \\ \ldots \end{cases}$$

является ортонормированной системой, причем

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \langle\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}\rangle = \langle\{x_k\}_{k=\overline{1,n}}\rangle \text{ и } \langle\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \langle\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$$

□ Теорема была доказана в курсе линейной алгебры. ■

Определение: Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ОНС в пространстве $\mathbb{L}$ со скалярным произведением, $x \in \mathbb{L}$. Числа $\lambda_k := (x, e_k)$, $k \in \mathbb{N}$ называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно ОНС $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$ — его **рядом Фурье**.

Теорема (неравенство Бесселя): Пусть $\mathbb{L}$ — пространство со скалярным произведением, $x \in \mathbb{L}$, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{L}$ — ОНС, $\{\lambda_n = (x, e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — коэффициенты Фурье вектора x относительно этой ОНС. Тогда справедливо *неравенство Бесселя*:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2$$

□ Обозначим для краткости $x^{(n)}$ проекцию вектора x на линейную оболочку векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$x^{(n)} := \mathrm{Pr}_{\langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle}\, x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

Поскольку $(x - x^{(n)}) \perp x^{(n)}$, то по теореме Пифагора имеем

$$\|x\|^2 = \|x - x^{(n)}\|^2 + \|x^{(n)}\|^2 = \|x - x^{(n)}\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \quad (*)$$

Итак, последовательность $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$ монотонно нестрого возрастает и ограничена сверху, следовательно она сходится. Переходя в неравенстве $(*)$ к пределу при $n \to +\infty$, получаем искомое неравенство Бесселя: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$. ■

Следующая полезная теорема утверждает, что с помощью счётной ОНС в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ и числовой последовательности из пространства l_2 всегда можно «собрать» некоторый вектор в $\mathbb{H}$.

Теорема (Рисса–Фишера): Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ОНС в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots)$ лежит в пространстве l_2, то есть $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$. Тогда определен вектор $x := \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k \in \mathbb{H}$, причем он является единственным вектором в $\mathbb{H}$, для которого одновременно выполняются два условия:

1) коэффициенты Фурье вектора относительно ОНС $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равны λ_k для всех $k \in \mathbb{N}$;

2) норма вектора равна $\|\lambda\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2}$.

□ Рассмотрим последовательность векторов $x^{(n)} := \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Докажем, что эта последовательность фундаментальна (в силу полноты пространства $\mathbb{H}$ из фундаментальности будет следовать и её сходимость в $\mathbb{H}$):

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 \underset{n>m}{=} \|\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k e_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2 \quad (*)$$

По условию теоремы ряд $\|\lambda\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2$ сходится, поэтому последовательность его частичных сумм фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; \forall n, m > N(\varepsilon) \hookrightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2 < \varepsilon$$

Но тогда в силу $(*)$ при тех же условиях имеем $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в $\mathbb{H}$ и сходится к вектору $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k =: x \in \mathbb{H}$.

Проверим теперь, используя непрерывность и линейность скалярного произведения, что для найденного вектора x числа $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ являются его коэффициентами Фурье относительно ОНС $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$(x, e_j) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k, e_j\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k (e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \delta_{kj} = \lambda_j$$

Аналогично, используя непрерывность и линейность скалярного произведения найдем норму вектора x:

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k, x\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k (e_k, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \overline{\lambda}_k = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2$$

Допустим, наконец, что существует другой вектор $\widetilde{x} \in \mathbb{H}$ такой, что $(\widetilde{x}, e_k) = \lambda_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\|\widetilde{x}\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2$. Тогда

$$\|x - \widetilde{x}\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(x, \widetilde{x}) + \|\widetilde{x}\|^2 = 2\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k, \widetilde{x}\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \overline{\lambda}_k = 0 \ \Rightarrow\ \widetilde{x} = x \ \blacksquare$$

1.16. Полные и замкнутые ортонормированные системы. Гильбертов базис

Определение: Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ОНС в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Она называется:

- **Полной**, если ее нельзя пополнить, т.е. если не существует ненулевого вектора $x \in \mathbb{H}$ такого, что система $\{x, e_1, e_2, \ldots\}$ также является ортонормированной. Иными словами, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — полная ОНС, если её ортогональное дополнение состоит только из нулевого вектора: $(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$.
- **Гильбертовым базисом**, если любой вектор $x \in \mathbb{H}$ представляется своим рядом Фурье относительно данной ОНС: $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$, где $\lambda_k = (x, e_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

- **Замкнутой**, если для любого вектора $x \in \mathbb{H}$ выполнено **равенство Парсеваля** (**«уравнение замкнутости»**): $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2$, где $\lambda_k = (x, e_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Оказывается, что в сепарабельном гильбертовом пространстве все перечисленные понятия эквивалентны!

Теорема (критерий полноты ОНС): Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ОНС в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Линейная оболочка системы $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ плотна в $\mathbb{H}$, т.е. $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}} \langle \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle = \mathbb{H}$.

2) Система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ полна.

3) Система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является гильбертовым базисом в $\mathbb{H}$.

4) Система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ замкнута.

$\square$ План доказательства: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ **2**) : Пусть линейная оболочка системы $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ плотна в $\mathbb{H}$. Это означает, что для любого вектора $x \in \mathbb{H}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(\varepsilon)$ и вектор $x_\varepsilon := \sum\limits_{k=1}^{n(\varepsilon)} c_k(\varepsilon) e_k \in \langle \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$ такой, что $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Предположим, от противного, что система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ не полна. Значит, существует ненулевой вектор $x \in (\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}})^\perp$. Фиксируем $\varepsilon := \|x\|/2$ и подберем вектор $x_\varepsilon := \sum\limits_{k=1}^{n(\varepsilon)} c_k(\varepsilon) e_k$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon = \|x\|/2$. Тогда, учитывая, что $x \perp x_\varepsilon$ и используя неравенство Коши-Буняковского имеем:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = (x, x) = (x - x_\varepsilon + x_\varepsilon, x) = (x - x_\varepsilon, x) + (x_\varepsilon, x) = \\ = (x - x_\varepsilon, x) \leq \|x - x_\varepsilon\| \cdot \|x\| < \|x\|^2/2 \end{aligned}$$

Пришли к противоречию, значит, система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ полна.

2) $\Rightarrow$ **3**) : Пусть система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ полна, т.е. $(\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$. Возьмем произвольный вектор $x \in \mathbb{H}$, $\{\lambda_k = (x, e_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — его коэффициенты Фурье относительно ОНС $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Тогда, в силу неравенства Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$, и, следовательно, по теореме Рисса–Фишера существует вектор $y \in \mathbb{H}$ такой, что $y = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$, $\lambda_k = (y, e_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Докажем, что вектор y и вектор x — это один и тот же вектор. В самом деле, $(y-x) \perp e_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, так как $(y-x, e_k) = (y, e_k) - (x, e_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0$. Значит, $(y-x) \in (\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}})^{\perp} = \{0\}$, т.е. $x = y = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$.

Итак, мы показали, что произвольный вектор $x \in \mathbb{H}$ представляется своим рядом Фурье $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$ по ОНС $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, следовательно последняя является гильбертовым базисом в $\mathbb{H}$.

3) $\Rightarrow$ **4)** : Пусть система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является гильбертовым базисом в $\mathbb{H}$. Тогда произвольный вектор x представляется своим рядом Фурье по этой системе: $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$, $\lambda_k = (x, e_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Проверим, используя линейность и непрерывность скалярного произведения, что для вектора x выполняется равенство Парсеваля:

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k, x\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k (e_k, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \overline{\lambda}_k = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2$$

Следовательно, по определению система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является замкнутой.

4) $\Rightarrow$ **3)** : Пусть система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является замкнутой, то есть для любого вектора $x \in \mathbb{H}$ с коэффициентами Фурье $\{\lambda_k = (x, e_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ выполняется равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$. Тогда по теореме Рисса–Фишера определен вектор $y = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k \in \mathbb{H}$, $\lambda_k = (y, e_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Покажем, что вектор y и вектор x — это один и тот же вектор. Запишем равенство Парсеваля для вектора $(x-y)$:

$$\|x-y\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(x-y, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(x, e_k) - (y, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k - \lambda_k|^2 = 0$$

Следовательно, $x = y = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$, т.е. произвольный вектор x представляется своим рядом Фурье по ОНС $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, что и означает, что эта ОНС является гильбертовым базисом в $\mathbb{H}$.

3) $\Rightarrow$ **2)** : Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — гильбертов базис в $\mathbb{H}$, тогда любой вектор $x \in \mathbb{H}$ представляется своим рядом Фурье $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$, $\lambda_k = (x, e_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Возьмем произвольный вектор x из ортогонального дополнения $(\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}})^\perp$, тогда $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (x, e_k) e_k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 0 \cdot e_k = 0$. Следовательно, $(\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$, т.е. система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ полна.

2) $\Rightarrow$ **1**) : Пусть система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ полна, т.е. $(\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$. Тогда

$$\mathbb{H} = (\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}})^\perp \overset{\perp}{\oplus} ((\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}})^\perp)^\perp = \{0\} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\langle\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\langle\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle,$$

то есть линейная оболочка системы $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ плотна в $\mathbb{H}$.

Теорема доказана. ■

Приведем примеры полных ортонормированных систем.

Пример №1: Система $\{e_n = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\downarrow\\ n}}{1}, 0, \ldots)\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна в сепарабельном гильбертовом пространстве l_2. В самом деле, если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$ и $x \in (\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})^\perp$, то $(x, e_n) = x_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Значит, $x = 0$ и $(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})^\perp = \{0\}$, т.е. система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна.

Пример №2: В сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ системы

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{и} \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

являются полными ОНС. Их полнота следует из уже известного Вам *равенства Ляпунова*, которое, как легко показать, является для этих ОНС уравнением замкнутости (равенством Парсеваля).

Пример №3: Определим функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1/2 \\ -1, & 1/2 \le x < 1 \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1, \end{cases}$$

называемую *вейвлетом Хаара*, и для всех $n, k \in \mathbb{Z}$ построим функции

$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\, \psi(2^n x - k),$$

являющиеся сжатыми/растянутыми и сдвинутыми копиями функции $\psi(x) = \psi_{0,0}(x)$ (см. Рис. 1.10). Исходную функцию ψ называют также называют «*материнским вейвлетом*», а ее сжатые/растянутые и сдвинутые копии — «*дочерними вейвлетами*». Можно доказать, что:

- система $\{1, \psi_{n,k}(x)\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ является полной ОНС в $L_2(\mathbb{R})$;
- система $\{1, \psi_{n,k}(x)\}_{n,k\in\mathbb{Z},\, n\geq 0,\, 0\leq k<2^n}$ является полной ОНС в $L_2[0,1]$.

В качестве примера на Рис. 1.11 для произвольно взятой функции $f\in L_2[0,1]$ показано несколько первых частичных сумм $f^{(n)}(x) = (f,1)\cdot 1 + \sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{2^m-1}(f,\psi_{m,k})\psi_{m,k}(x)$ её разложения по базису из вейвлетов Хаара.

Мы привели здесь лишь простейший пример вейвлета, подробное же изучение теории и различных видов вейвлетов выходит за рамки нашего курса. Укажем лишь, что вейвлеты часто применяются для анализа нестационарных сигналов, спектральный состав которых существенно зависит от времени или от пространственных координат. В отличие от базисных функций, используемых при разложении периодического сигнала в тригонометрический ряд Фурье, вейвлеты (в некотором смысле) *локализованы* во времени или пространстве, что позволяет изучать спектральный состав не всего сигнала целиком, а каждого его участника в отдельности.

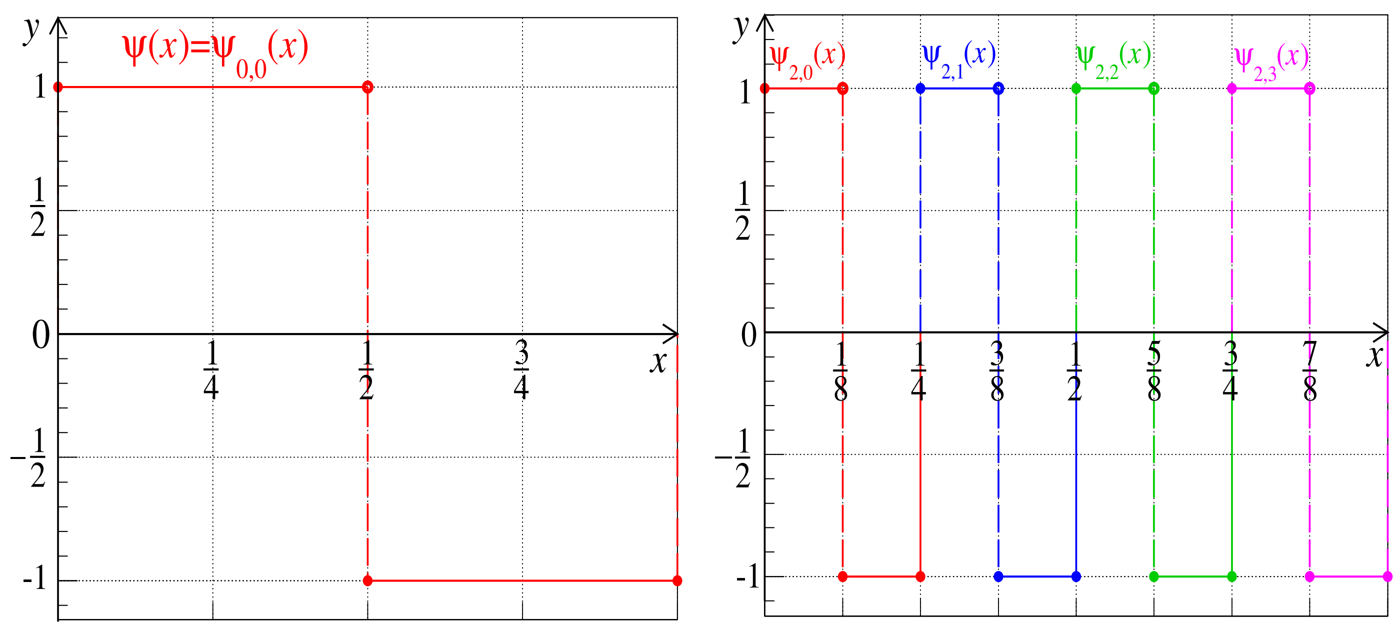


Рис. 1.10: «Материнский вейвлет» Хаара $\psi(x)$ (слева) и «дочерние вейвлеты» $\psi_{2,k}(x)$, $k=\overline{0,3}$ (справа).

Теорема о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве: В любом бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве существует гильбертов базис, состоящий из счетного числа векторов.

$\square$ Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счётное всюду плотное подмножество в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, т.е. $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{H}$. Вычеркнем из списка $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

вектор x_k, если $x_k \in \langle x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\rangle$, $k \geq 2$. Затем перенумеруем оставшиеся в списке вектора и получим последовательность линейно независимых векторов $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, причем $\langle\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \langle\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$ и $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\langle\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\langle\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle \supset \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{H}$, т.е. $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\langle\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \mathbb{H}$.

Далее, ортогонализовав последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ с помощью процесса Грама–Шмидта получим ОНС $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, причем $\langle\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \langle\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$ и $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\langle\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \mathbb{H}$, т.е. линейная оболочка ОНС $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ всюду плотна в $\mathbb{H}$. Значит, по критерию полноты ОНС построенная система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является гильбертовым базисом в $\mathbb{H}$. ■

Определение: Пространства $\mathbb{L}_1$ и $\mathbb{L}_2$ со скалярным произведением называются **изоморфными** (пишут: $\mathbb{L}_1 \cong \mathbb{L}_2$), если существует биекция $\varphi : \mathbb{L}_1 \leftrightarrow \mathbb{L}_2$, сохраняющая линейные операции и скалярное произведение, то есть для любых $x_1, y_1 \in \mathbb{L}_1$, $x_2, y_2 \in \mathbb{L}_2$ и для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x_1 + \beta y_1) &= \alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(y_1), & (x_1, y_1)_{\mathbb{L}_1} &= (\varphi(x_1), \varphi(y_1))_{\mathbb{L}_2}\,; \\ \varphi^{-1}(\alpha x_2 + \beta y_2) &= \alpha\varphi^{-1}(x_2) + \beta\varphi^{-1}(y_2), & (x_2, y_2)_{\mathbb{L}_2} &= \left(\varphi^{-1}(x_2), \varphi^{-1}(y_2)\right)_{\mathbb{L}_1} \end{aligned}$$

Замечание: Изоморфизм пространств со скалярным произведением — это отношение эквивалентности, так как для любых пространств $\mathbb{L}_{1,2,3}$ со скалярным произведением очевидно выполнены свойства рефлексивности ($\mathbb{L}_1 \cong \mathbb{L}_1$), симметричности ($\mathbb{L}_1 \cong \mathbb{L}_2 \Rightarrow \mathbb{L}_2 \cong \mathbb{L}_1$) и транзитивности ($\mathbb{L}_1 \cong \mathbb{L}_2$ и $\mathbb{L}_2 \cong \mathbb{L}_3 \Rightarrow \mathbb{L}_1 \cong \mathbb{L}_3$).

Изоморфные пространства со скалярным произведением можно «не различать», считая их различными реализациями (представлениями) одного и того же пространства. Следующая теорема утверждает, что существенно различных (т.е. неизоморфных друг другу) бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств совсем немного: ровно по одному на каждое числовое поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Теорема: Все *бесконечномерные* сепарабельные гильбертовы пространства *над одним и тем же числовым полем* изоморфны друг другу.

□ В силу транзитивности изоморфизма достаточно доказать изоморфность произвольного сепарабельного гильбертова пространства $\mathbb{H}$ какому-либо одному сепарабельному гильбертовому пространству, например — пространству l_2.

Поскольку $\mathbb{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, в нем существует гильбертов базис $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, так что любой вектор $x \in \mathbb{H}$ представляется рядом Фурье: $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k$, $\lambda_k = (x, e_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{H} \to l_2$ по правилу: $\forall x \in \mathbb{H} \hookrightarrow \varphi(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in l_2$. Линейность φ очевидна; покажем, что φ

сохраняет скалярное произведение. Возьмем $y \in \mathbb{H}$, $y = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu_k e_k$, $\mu_k = (y, e_k)$, тогда

$$(x, y)_{\mathbb{H}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k, y \right)_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k (e_k, y)_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \overline{\mu}_k = (\varphi(x), \varphi(y))_{l_2},$$

что и требовалось доказать.

Обратное отображение $\varphi^{-1} : l_2 \to \mathbb{H}$ построим с помощью теоремы Рисса–Фишера:

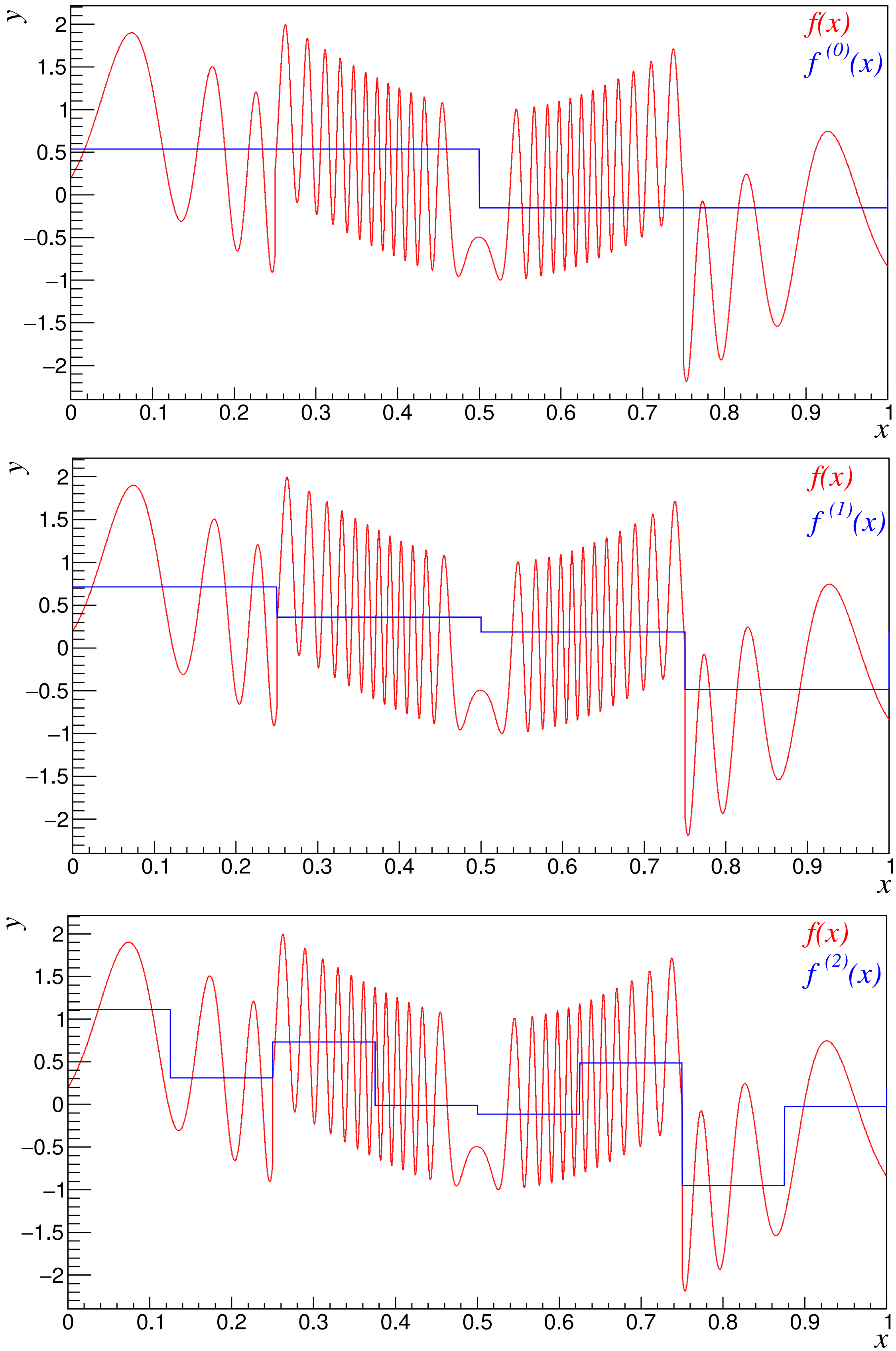
$$\varphi^{-1}\left((\lambda_1, \lambda_2, \ldots)\right) := \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k =: x \in \mathbb{H}, \quad \lambda_k = (x, e_k)$$

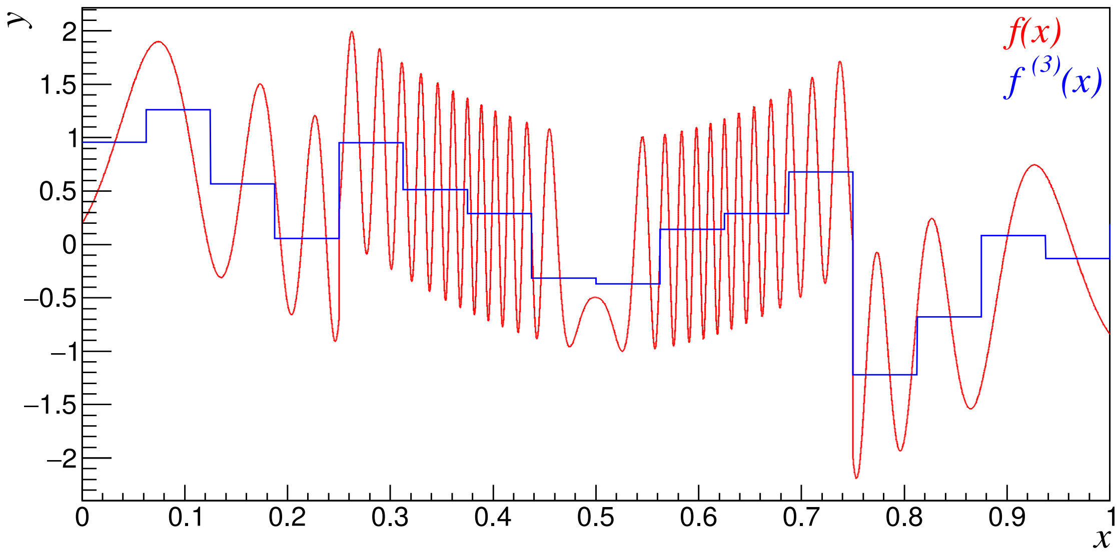
Линейность φ^{-1} и сохранение им скалярного произведения очевидны. ■

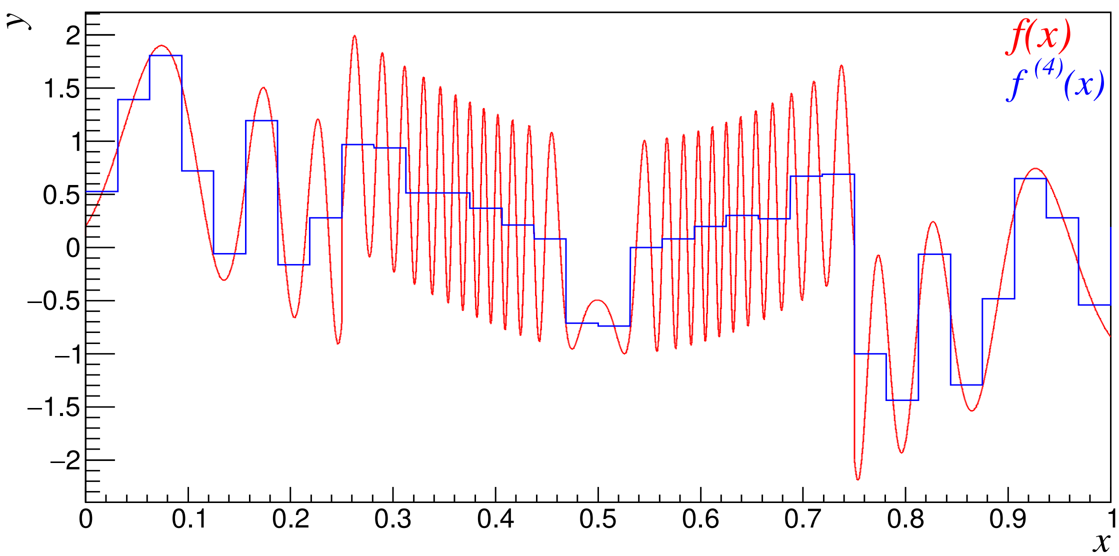
Замечание: Из курса линейной алгебры нам известно, что любое n–мерное $(n < +\infty)$ линейное пространство $\mathbb{L}$ над полем $\mathbb{F}$ изоморфно пространству вектор-столбцов $\mathbb{F}^n$. Этот изоморфизм устанавливается выбором базиса, а именно, если $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$ — произвольный базис в $\mathbb{L}$, то любой вектор $x \in \mathbb{L}$ однозначно представляется в виде разложения по этому базису: $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. В таком случае вектору x можно сопоставить вектор-столбец $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{F}^n$, составленный из его координат относительно базиса $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$.

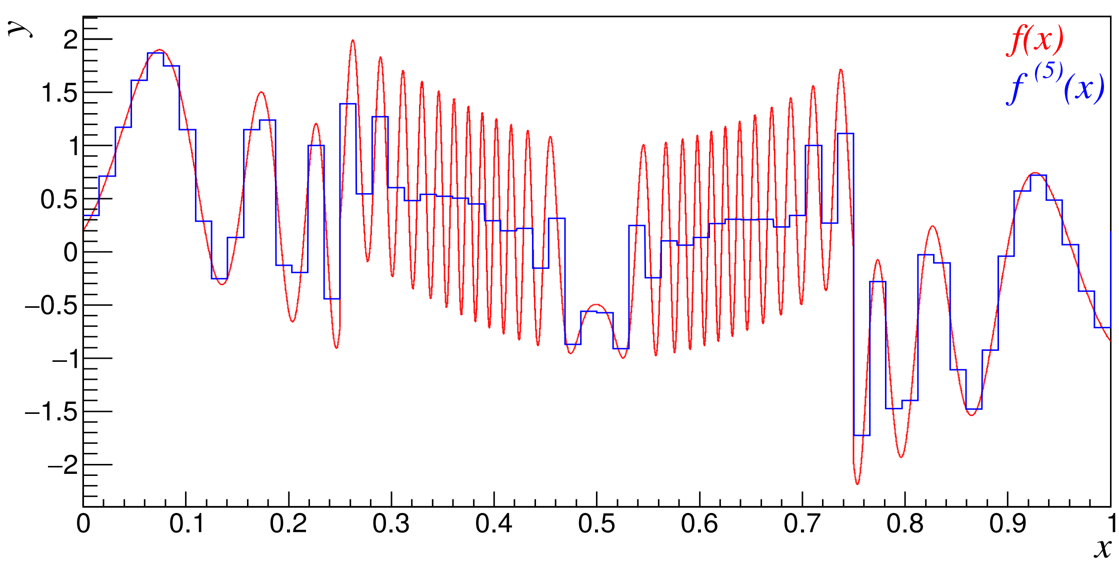
Изоморфизм произвольного бесконечномерного сепарабельного гильбертового пространства $\mathbb{H}$ пространству последовательностей l_2 имеет смысл, аналогичный описанному конечномерному случаю: при фиксированном гильбертовом базисе $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{H}$ каждому вектору $x \in \mathbb{H}$ можно сопоставить последовательность $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in l_2$ его «координат» — коэффициентов Фурье относительно данного базиса.

Замечание: В начале XX века существовали и развивались параллельно две версии квантовой механики: *матричная механика Гейзенберга* и *квантовая механика Шрёдингера*. В матричной механике состояния квантовой системы описываются последовательностями из $l_2(\mathbb{C})$, а в волновой механике — «волновыми функциями» из $L_2(\mathbb{R}^3)$. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств устанавливает эквивалентность этих двух формализмов.


y
x
f(x)
f^(0)(x)
f(x)
f^(1)(x)
f(x)
f^(2)(x)


y
x
f(x)
f (3)(x)


y
x
f(x)
f (4)(x)


y
x
f(x)
f (5)(x)

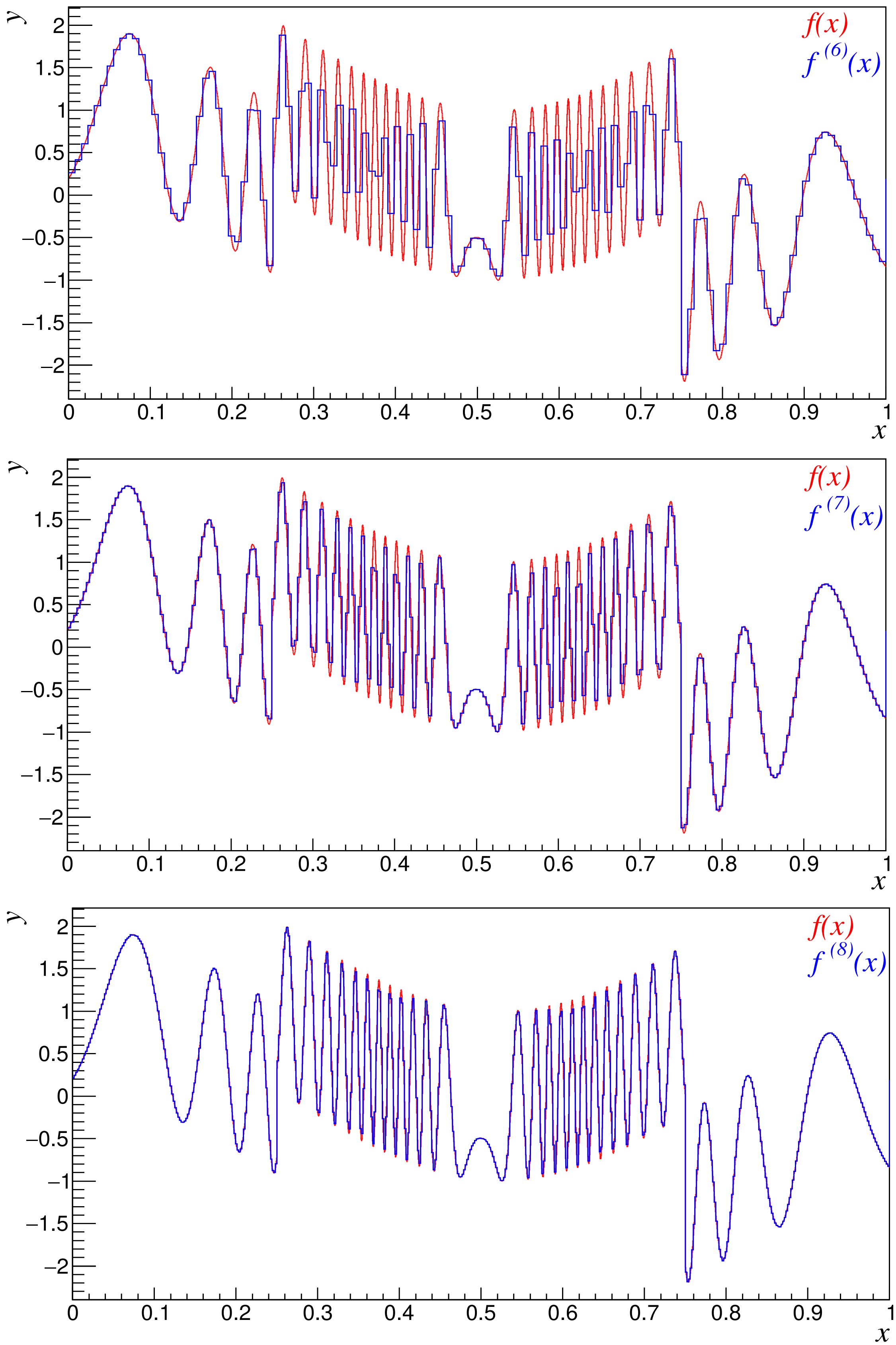


Рис. 1.11: Произвольная функция $f \in L_2[0,1]$ и несколько первых частичных сумм $f^{(n)}(x) = (f,1)\cdot 1 + \sum\limits_{m=0}^{n} \sum\limits_{k=0}^{2^m-1} (f, \psi_{m,k})\psi_{m,k}(x)$ её разложения по вейвлетам Хаара.

Глава 2.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

2.1. Система ортогональных многочленов в весовом лебеговском пространстве

Определение: Функция $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется **весовой функцией**, или **весом**, если:

1) $w(x) \geq 0$ при $x \in (a, b)$, причем $w(x) > 0$ почти всюду на (a, b);

2) если интервал (a, b) конечный, то $\int\limits_a^b w(x)dx < +\infty$;

3) если интервал (a, b) бесконечный, то $\forall n \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \int\limits_a^b x^{2n} w(x)dx < +\infty$.

Определение: Пусть $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ — весовая функция. **Весовым лебеговским пространством** $L_2^w(a, b)$ называется линейное пространство

$$L_2^w(a, b) := \left\{ f \in \mathbb{R}^{(a,b)} \ : \ \int\limits_a^b f^2(x)w(x)dx < +\infty \right\}$$

со скалярным произведением $(f, g)_w := \int\limits_a^b f(x)g(x)w(x)dx$

Теорема: Пространство $L_2^w(a, b)$ является гильбертовым, т.е. оно полно по норме, порожденной скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_w$.

□ Без доказательства. ■

Определение: Последовательность алгебраических многочленов $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ называется последовательностью **ортогональных многочленов в** $L_2^w(a, b)$, если для всех $n, m \in \mathbb{N}_0$ $\deg q_n = n$, $(q_n, q_m)_w = 0$ при $n \neq m$ и $\|q_n\|_w^2 \neq 0$.

Замечание: Пусть $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность ортогональных многочленов в $L_2^w(a,b)$, тогда для любой последовательности ненулевых действительных чисел $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ многочлены $\{\widetilde{q}_n := \alpha_n q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ также будут попарно ортогональными.

Выбор определенной последовательности $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ называется **стандартизацией** ортогональных многочленов. Обычно выбирают стандартизацию, при которой формулы, выражающие свойства данной последовательности ортогональных многочленов имеют наиболее простой вид. Как правило, мы будем использовать только те стандартизации, при которых коэффициент при старшей степени многочлена q_n положителен.

2.2. Общие свойства ортогональных многочленов

Теорема (общие свойства ортогональных многочленов):

1) Ортогональные многочлены $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ существуют в любом весовом лебеговском пространстве $L_2^w(a,b)$.

2) Любой многочлен p_n степени n представляется в виде линейной комбинации ортогональных многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_n$, т.е. существуют числа $f_0, f_1, \ldots, f_n$ такие, что $p_n = \sum\limits_{j=0}^{n} f_j q_j$.

3) Для любого $n \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \langle 1, x, \ldots, x^n \rangle = \langle q_0, q_1, \ldots, q_n \rangle$.

4) Последовательность ортогональных многочленов в $L_2^w(a,b)$ единственна с точностью до стандартизации.

5) Если p_n — многочлен степени $n < m$, то $(p_n, q_m)_w = 0$.

6) Для любой системы ортогональных многочленов с нормировкой $\|q_n\|_w = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ справедлива *трехчленная рекуррентная формула*:

$$xq_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x),$$

где $q_n(x) := a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

7) Пусть вес $w : (-a, a) \to \mathbb{R}$ является чётной функцией, тогда для любого $n \in \mathbb{N}_0$ $\hookrightarrow q_n(-x) = (-1)^n q_n(x)$ и, в частности, ортогональные многочлены чётных степеней являются чётными функциями, а нечётных степеней — нечётными функциями:

$$q_{2n}(-x) = q_{2n}(x), \quad q_{2n+1}(-x) = -q_{2n+1}(x)$$

$\square$ **1)** Последовательность ортогональных многочленов $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ может быть получена из последовательности мономов $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ с помощью процесса ортогонализации Грама–Шмидта в $L_2^w(a,b)$.

2) Проведем доказательство по индукции.

База индукции: пусть $n=0$, тогда $p_0 = f_0 q_0$, где $f_0 = p_0/q_0$.

Шаг индукции: пусть утверждение верно для $n=k$, докажем его для $n=k+1$:

$$p_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j x^j = a_{k+1}x^{k+1} + \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$$

В силу предположения индукции сумму $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ можно переписать как $\sum\limits_{j=0}^{k} b_j q_j(x)$ для некоторых чисел $b_0,\ldots,b_k$, т.е. $p_{k+1}(x) = a_{k+1}x^{k+1} + \sum\limits_{j=0}^{k} b_j q_j(x)$.

Далее, если $q_{k+1}(x) := c_{k+1}x^{k+1} + r_k(x)$, где r_k — многочлен степени не выше k, то $x^{k+1} = q_{k+1}(x)/c_{k+1} - r_k(x)/c_{k+1}$, поэтому

$$p_{k+1}(x) = \frac{a_{k+1}}{c_{k+1}} q_{k+1}(x) - \frac{a_{k+1}}{c_{k+1}} r_k(x) + \sum_{j=0}^{k} b_j q_j(x)$$

Снова пользуясь предположением индукции представим многочлен r_k в виде суммы $\sum\limits_{j=0}^{k} d_j q_j(x)$:

$$p_{k+1}(x) = \frac{a_{k+1}}{c_{k+1}} q_{k+1}(x) - \frac{a_{k+1}}{c_{k+1}} \sum_{j=0}^{k} d_j q_j(x) + \sum_{j=0}^{k} b_j q_j(x) =: \sum_{j=0}^{k+1} f_j q_j(x)$$

Тем самым утверждение полностью доказано.

3) Пусть $p \in \langle 1, x, \ldots, x^n\rangle$, тогда $\deg p \le n$ и в силу свойства 2 существуют числа $f_0, f_1, \ldots, f_n$ такие, что $p = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k q_k$. Следовательно, $p \in \langle q_0, q_1, \ldots, q_n\rangle$ и $\langle 1, x, \ldots, x^n\rangle \subset \langle q_0, q_1, \ldots, q_n\rangle$.

Обратно, пусть $p \in \langle q_0, q_1, \dots, q_n \rangle$, т.е. существуют числа $f_0, f_1, \dots, f_n$ такие, что $p = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k q_k$. Поскольку для всех $k = \overline{0,n}$ $q_k(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} b_{k,j} x^j$ для некоторых чисел $b_{k,0}, b_{k,1}, \dots, b_{k,k}$, то

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} f_k b_{k,j} x^j =: \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

Следовательно, $p \in \langle 1, x, \dots, x^n \rangle$ и $\langle q_0, q_1, \dots, q_n \rangle \subset \langle 1, x, \dots, x^n \rangle$.

Объединяя два доказанных включения, получаем $\langle 1, x, \dots, x^n \rangle = \langle q_0, q_1, \dots, q_n \rangle$.

4) Пусть $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ и $\{\widetilde{q}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ — две последовательности ортогональных многочленов в $L_2^w(a,b)$. Докажем по индукции, что эти последовательности совпадают с точностью до стандартизации, т.е. что для любого $n \in \mathbb{N}_0$ существует ненулевое число $\alpha_n \in \mathbb{R}$ такое, что $\widetilde{q}_n = \alpha_n q_n$.

База индукции: пусть $n = 0$, тогда q_0 и $\widetilde{q}_0$ — ненулевые постоянные. Значит $\widetilde{q}_0 = \alpha_0 q_0$ для $\alpha_0 = \widetilde{q}_0 / q_0$.

Шаг индукции: Предположим, что утверждение доказано для $n = k$, докажем его для $n = k+1$. Рассмотрим $(k+2)$–мерное гильбертово пространство

$$\mathbb{H} := \langle 1, x, \dots, x^k, x^{k+1} \rangle = \langle q_0, q_1, \dots, q_k, q_{k+1} \rangle$$

со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_w$. Очевидно, что $\mathbb{H} = \langle q_0, \dots, q_k \rangle \oplus \langle q_0, \dots, q_k \rangle^\perp$, следовательно

$$\dim \mathbb{H} = k+2 = \dim \langle q_0, \dots, q_k \rangle + \dim \langle q_0, \dots, q_k \rangle^\perp = k+1 + \dim \langle q_0, \dots, q_k \rangle^\perp,$$

и потому $\dim \langle q_0, \dots, q_k \rangle^\perp = 1$.

С другой стороны $q_{k+1}, \widetilde{q}_{k+1} \in \langle q_0, \dots, q_k \rangle^\perp$, поэтому $\langle q_0, \dots, q_k \rangle^\perp = \langle q_{k+1} \rangle = \langle \widetilde{q}_{k+1} \rangle$. Значит, существует число $\alpha_{k+1} \neq 0$ такое, что $\widetilde{q}_{k+1} = \alpha_{k+1} q_{k+1}$, что и требовалось доказать.

5) Пусть p_n — многочлен степени $n < m$, тогда по свойству 2 $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k q_k$ и

$$(p_n, q_m)_w = \int\limits_a^b p_n(x) q_m(x) w(x) dx = \sum_{k=0}^{n} f_k \int\limits_a^b q_k(x) q_m(x) w(x) dx = \sum_{k=0}^{n} f_k \delta_{km} = 0,$$

так как $k \leq n < m$.

6) Пусть $q_n(x) := a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. В силу свойства 2 имеем

$$xq_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k}\, q_k(x), \text{ где } c_{n,k} = (xq_n, q_k)_w$$

Далее, в силу свойства 5 $c_{n,k} = 0$ при $k > n+1$. Кроме того, для любых k и n

$$c_{n,k} = (xq_n, q_k)_w = (q_n, xq_k)_w = (xq_k, q_n)_w = c_{k,n},$$

и потому $c_{n,k} = c_{k,n} = 0$ для всех $k < n-1$. Значит, отличными от нуля могут быть только коэффициенты $c_{n,n-1}$, $c_{n,n}$ и $c_{n,n+1}$, т.е.

$$xq_n(x) = c_{n,n+1}\, q_{n+1}(x) + c_{n,n}\, q_n(x) + c_{n,n-1}\, q_{n-1}(x),$$

или

$$\begin{gathered} x\left(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots\right) = c_{n,n+1}\left(a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + \ldots\right) + \\ + c_{n,n}\left(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots\right) + c_{n,n-1}\left(a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots\right) \end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при x^{n+1}, получаем

$$a_n = c_{n,n+1} a_{n+1} \quad \Rightarrow \quad c_{n,n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Далее приравняем коэффициенты при x^n:

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_{n+1} + c_{n,n} a_n \quad \Rightarrow \quad c_{n,n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

Наконец, $c_{n,n-1} = c_{n-1,n} = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. Тем самым трехчленная рекуррентная формула доказана.

7) Пусть вес $w : (-a, a) \to \mathbb{R}$ является чётной функцией. Обозначим $\widetilde{q}_n(x) := (-1)^n q_n(-x)$, тогда

$$(\widetilde{q}_n, \widetilde{q}_m)_w = \int_{-a}^{a} (-1)^n q_n(-x)(-1)^m q_m(-x) w(x) dx = [x \to -y] =$$

$$= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} q_n(y) q_m(y) w(y) dy = (-1)^{n+m} \delta_{nm} \|q_n\|_w^2 = \delta_{nm} \|q_n\|_w^2,$$

причем $\|\widetilde{q}_n\|_w^2 = \|q_n\|_w^2$. Следовательно, $\{\widetilde{q}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — это последовательность ортогональных многочленов в $L_2^w(-a,a)$. Поскольку по свойству 4 такая последовательность единственна с точностью до стандартизации, то для любого $n \in \mathbb{N}_0$ существует ненулевое число α_n такое, что

$$\widetilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x) = \alpha_n q_n(x)$$

Но тогда $\|\widetilde{q}_n\|_w^2 = \|q_n\|_w^2 = |\alpha_n|^2 \|q_n\|_w^2$, следовательно $\alpha_n = \pm 1$. Покажем, что на самом деле $\alpha_n = 1$. Пусть $q_n(x) := a_n x^n + \ldots$, тогда

$$\widetilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x) = (-1)^n (a_n(-x)^n + \ldots) = a_n x^n + \ldots = \alpha_n q_n(x) = \alpha_n a_n x^n + \ldots$$

Значит, $\alpha_n = 1$ и $q_n(-x) = (-1)^n q_n(x)$. ■

2.3. Свойства нулей ортогональных многочленов

Всюду далее мы будем использовать стандартизацию ортогональных многочленов, при которой коэффициент при старшей степени x положителен.

Определение: Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Точка $x_0 \in (a,b)$ называется **точкой перемены знака** f, если $f(x_0) = 0$ и существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ числа $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют противоположные знаки, т.е. $f(x_1)f(x_2) < 0$.

Теорема (свойства нулей ортогональных многочленов):

Пусть $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность ортогональных многочленов в $L_2^w(a,b)$, тогда:

1) для любого $n \in \mathbb{N}_0$ все нули многочлена q_n вещественные, простые (т.е. имеют кратность 1) и лежат в промежутке (a,b). Кроме того, $q_n(b) > 0$ и $(-1)^n q_n(a) > 0$;

2) для любого $n \in \mathbb{N}_0$ у многочленов q_n и q_{n+1} нет общих корней;

3) если x_0 — корень многочлена q_n, то q_{n-1} и q_{n+1} имеют в точке x_0 противоположные знаки, т.е. $q_n(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; q_{n-1}(x_0)q_{n+1}(x_0) < 0$;

4) для любого $n \in \mathbb{N}$ нули многочленов q_n и q_{n+1} *перемежаются* (см. Рис. 2.1). Это означает, что если для всех $k \in \mathbb{N}$ числа $x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \ldots < x_k^{(k)}$ являются корнями многочлена q_k, то

$$a < x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)} < b$$

□ **1)** Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m$ — все точки перемены знака многочлена q_n, лежащие в промежутке (a,b). Очевидно, что $m \le n$; мы же хотим доказать, что $m = n$.

Докажем сначала, что хотя бы одна точка перемены знака q_n действительно лежит в промежутке (a, b), т.е. что $m \geq 1$. Будем рассуждать от противного: пусть $m = 0$, тогда многочлен q_n не меняет знака на (a, b), т.е. либо почти всюду положителен, либо почти всюду отрицателен на (a, b). В таком случае, так как вес w также почти всюду положителен на (a, b) q_n не может быть ортогонален q_0:

$$(q_n, q_0)_w = \int\limits_a^b q_n(x) q_0 w(x) dx = q_0 \int\limits_a^b q_n(x) w(x) dx \neq 0$$

Полученное противоречие доказывает, что $m \geq 1$.

Построим теперь вспомогательный многочлен $p_m(x) := (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$. Вновь рассуждая от противного, предположим, что $m < n$. Тогда, с одной стороны, по свойству 5) из предыдущего пункта $(p_m, q_n)_w = 0$. С другой же стороны можно заметить, что произведение $p_m\, q_n$ не меняет знака на (a, b), поэтому

$$(p_m, q_n)_w = \int\limits_a^b p_m(x)\, q_n(x) w(x) dx \neq 0$$

Пришли к противоречию, следовательно $m = n$. Тем самым доказано, что все корни многочлена q_n простые и лежат в промежутке (a, b). С учетом положительности коэффициента при старшей степени x в q_n неравенства $q_n(b) > 0$ и $(-1)^n q_n(a) > 0$ теперь являются очевидными.

2) Предположим противное: пусть $x_0 \in (a, b)$ — общий корень q_n и q_{n+1}. Запишем в точке x_0 трехчленную рекуррентную формулу:

$$\cancelto{0}{x q_n(x_0)} = \cancelto{0}{\frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0)} + \cancelto{0}{\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x_0)} + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

Следовательно, $q_{n-1}(x_0) = 0$ и x_0 — общий корень q_{n-1} и q_n. Повторяя вышеприведенное рассуждение n раз придем к тому, что x_0 — корень q_0, а значит q_0 равен нулю тождественно. Но это невозможно, поскольку $\|q_0\|_w^2 = 1 \neq 0$. Пришли к противоречию, следовательно q_n и q_{n+1} не имеют общих корней.

3) Пусть x_0 — корень многочлена q_n, запишем трехчленную рекуррентную формулу в точке x_0:

$$\cancelto{0}{x q_n(x_0)} = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0) + \cancelto{0}{\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x_0)} + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q_{n+1}(x_0) = -\underbrace{\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2}}_{>0} q_{n-1}(x_0),$$

то есть $q_{n-1}(x_0)$ и $q_{n+1}(x_0)$ имеют разные знаки, что и требовалось доказать.

4) Будем рассуждать по индукции.

База индукции: Пусть $q_1(x_1^{(1)}) = 0$, тогда в силу свойства 3)

$$\underbrace{q_0(x_1^{(1)})}_{>0} q_2(x_1^{(1)}) < 0 \quad \Rightarrow \quad q_2(x_1^{(1)}) < 0$$

Однако $q_2(b) > 0$ и $(-1)^2 q_2(a) > 0$, следовательно $q_2(x)$ меняет знак в некоторых точках $x_1^{(2)} \in (a, x_1^{(1)})$ и $x_2^{(2)} \in (x_1^{(1)}, b)$. Значит, нули многочленов q_1 и q_2 перемежаются, база индукции доказана.

Шаг индукции: предположим, что утверждение уже доказано для всех q_k при $k = \overline{1, n}$, докажем его для q_{n+1}. Рассмотрим интервал $(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)})$, где $1 \le m \le n-1$. В силу свойства 3 имеем

$$q_{n-1}(x_m^{(n)})\, q_{n+1}(x_m^{(n)}) < 0 \ \text{ и } \ q_{n-1}(x_{m+1}^{(n)})\, q_{n+1}(x_{m+1}^{(n)}) < 0,$$

поэтому

$$\left[q_{n-1}(x_m^{(n)})\, q_{n-1}(x_{m+1}^{(n)})\right] \cdot \left[q_{n+1}(x_m^{(n)})\, q_{n+1}(x_{m+1}^{(n)})\right] > 0$$

По предположению индукции в промежутке $(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)})$ лежит ровно один корень многочлена q_{n-1}, а именно — $x_m^{(n-1)}$. Следовательно,

$$q_{n-1}(x_m^{(n)})\, q_{n-1}(x_{m+1}^{(n)}) < 0 \ \text{ и } \ q_{n+1}(x_m^{(n)})\, q_{n+1}(x_{m+1}^{(n)}) < 0$$

Значит, в интервале $(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)})$ лежит хотя бы один корень многочлена q_{n+1} (или нечетное их количество), и потому всего на интервале $(x_1^{(n)}, x_n^{(n)})$ лежит не менее $(n-1)$ корней q_{n+1}. Кроме того, так как

$$q_n(x_n^{(n)}) = 0, \ \ q_{n-1}(x_n^{(n)}) > 0 \ \text{ и } \ q_{n-1}(x_n^{(n)})\, q_{n+1}(x_n^{(n)}) < 0$$

то $q_{n+1}(x_n^{(n)}) < 0$, а поскольку $q_{n+1}(b) > 0$, то q_{n+1} имеет хотя бы один корень в интервале $(x_n^{(n)}, b)$ (или нечетное их количество). Аналогично доказывается, что q_{n+1} имеет хотя бы один корень в промежутке $(a, x_1^{(n)})$.

Поскольку всего q_{n+1} имеет ровно $(n+1)$ корней на промежутке (a,b), то на каждом из промежутков $(a, x_1^{(n)})$, $(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)})$, $1 \le m \le n-1$, $(x_n^{(n)}, b)$ находится ровно один корень q_{n+1}, а это и означает, что корни многочленов q_n и q_{n+1} перемежаются. ■

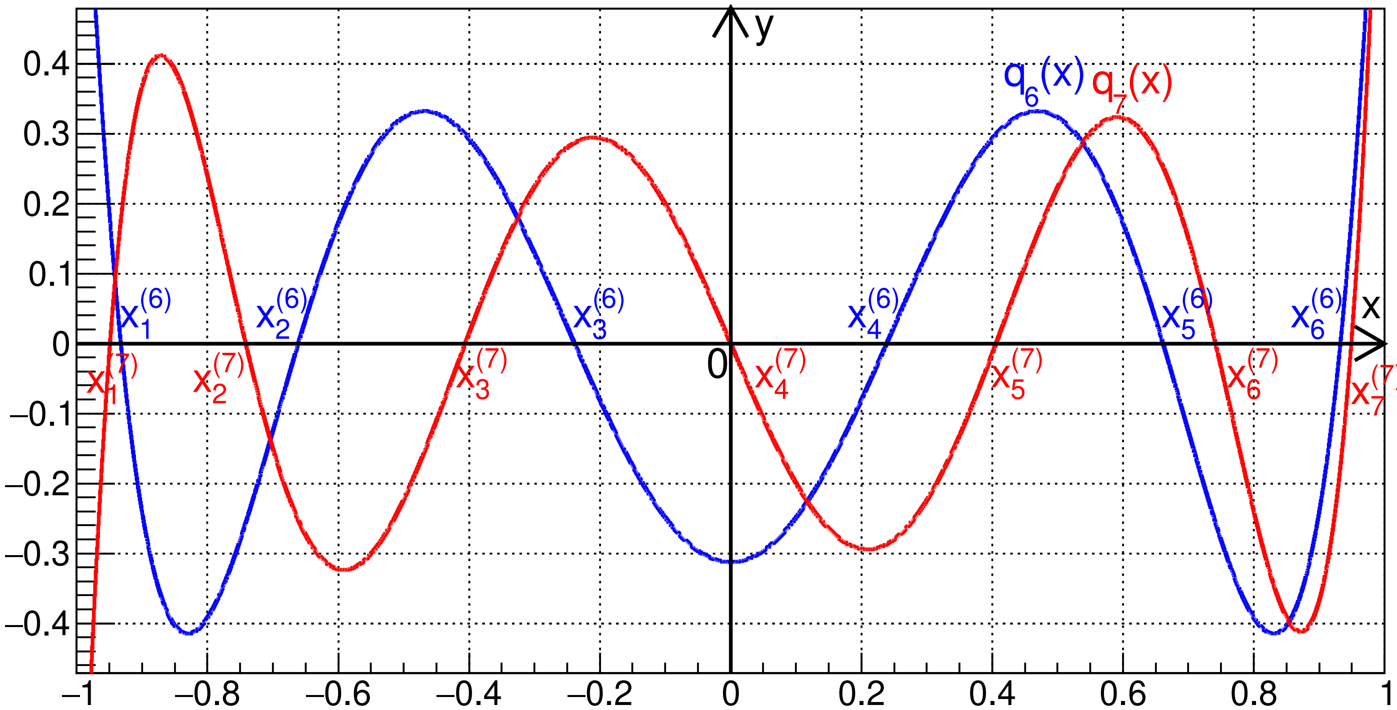


Рис. 2.1: Ортогональные многочлены q_6 и q_7 на промежутке $[-1,1]$ и их перемежающиеся корни.

2.4. Классические ортогональные многочлены

Среди бесконечного многообразия ортогональных многочленов особое значение для приложений имеют так называемые *классические ортогональные многочлены*, полная классификация которых приведена Таблице 2.1. Следующая теорема говорит о математическом основании выделения перечисленных в таблице многочленов в общую категорию «классических».

Теорема: Функция $w(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ с точностью до линейной замены переменных является весовой функцией какого–либо из классических ортогональных многочленов тогда и только тогда, когда она удовлетворяет *дифференциальному уравнению Пирсона*:

$$(\ln w(x))' \equiv \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{A(x)}{B(x)},$$

где $A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$, $B(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ для некоторых констант $\alpha_{0,1}, \beta_{0,1,2} \in \mathbb{R}$, причем должны выполняться граничные условия

$$\lim_{x\to a+} w(x)B(x) = \lim_{x\to b-} w(x)B(x) = 0$$

□ Без доказательства. ■

Перечислим также без доказательства некоторые из специальных свойств классических ортогональных многочленов.

Теорема (специальные свойства классических ортогональных многочленов):

1) Для классического ортогонального многочлена q_n, $n \in \mathbb{N}_0$ справедлива **формула Родрига**:

$$q_n(x) = \frac{c_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\Big[w(x)B^n(x)\Big],$$

где c_n — некоторые константы, задающие стандартизацию.

2) Для любого $m \in \mathbb{N}$ многочлены $\left\{\dfrac{d^m}{dx^m}q_{m+n}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ также образуют последовательность классических ортогональных многочленов на том же промежутке но, вообще говоря, с другим весом.

3) У всех классических ортогональных многочленов существует *выражающаяся через элементарные функции* **производящая функция**

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n q_n(x) t^n,$$

где c_n — некоторые постоянные, задающие стандартизацию.

4) Классический ортогональный многочлен q_n, $n \in \mathbb{N}_0$ является одним из решений дифференциального уравнения второго порядка:

$$B(x)y''(x) + (A(x) + B'(x))\, y'(x) - n\,(\alpha_1 + (n+1)\beta_2)\, y(x) = 0$$

□ Без доказательства. ■

В рамках данного лекционного курса мы ограничимся подробным рассмотрением перечисленных свойств на примере многочленов Лежандра, однако производимые при этом выкладки могут быть воспроизведены (с соответствующими изменениями) и для других типов классических ортогональных многочленов.

№	**Название**	**Обозначение**	**Интервал**	**Вес**
1	Многочлены Якóби	$P_n(x;\alpha,\beta)$	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha,\beta>-1$
1.1	Многочлены Лежандра	$P_n(x)$	$(-1,1)$	1
1.2	Многочлены Чебышёва 1-го рода	$T_n(x)$	$(-1,1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
1.3	Многочлены Чебышёва 2-го рода	$U_n(x)$	$(-1,1)$	$\sqrt{1-x^2}$
1.4	Ультрасферические многочлены Гегенбауэра	$C_n(x;\lambda)$	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda>-1/2$
2	Многочлены Эрмита	$H_n(x)$	$(-\infty,+\infty)$	e^{-x^2}
3	Многочлены Лагéрра	$L_n^\alpha(x)$	$(0,+\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$, $\alpha>-1$

Таблица 2.1: Классификация классических ортогональных многочленов.

2.5. Многочлены Лежандра: формула Родрига и соотношение ортогональности

Проверим сначала, что весовая функция $w(x)=1$, $x\in(-1,1)$ многочленов Лежандра действительно удовлетворяет уравнению Пирсона с граничными условиями для некоторых чисел $\alpha_{0,1}$ и $\beta_{0,1,2}$:

$$\frac{w'(x)}{w(x)}=0\stackrel{?}{=}\frac{\alpha_0+\alpha_1 x}{\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2}$$

Очевидно, что для выполнения последнего равенства необходимо положить $\alpha_0=\alpha_1=0$. Для определения констант $\beta_{0,1,2}$ запишем граничные условия:

$$\lim_{x\to-1+} w(x)B(x) = \lim_{x\to-1+}(\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2) = \beta_0-\beta_1+\beta_2 = 0,$$
$$\lim_{x\to1-} w(x)B(x) = \lim_{x\to1-}(\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2) = \beta_0+\beta_1+\beta_2 = 0,$$

откуда следует, что $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -\beta_0$. В качестве значения β_0 можно взять любое ненулевое число; мы выберем $\beta_0 = -1$ и, соответственно, $\beta_2 = 1$.

При найденных значениях $\alpha_{0,1}$ и $\beta_{0,1,2}$ имеем

$$A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x = 0, \quad B(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 = x^2 - 1,$$

следовательно формула Родрига для многочленов Лежандра имеет вид

$$P_n(x) = \frac{c_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\Big[w(x)B^n(x)\Big] = c_n\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x^2-1)^n\Big]$$

Для многочленов Лежандра принято выбирать стандартизацию, при которой $P_n(1) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$:

$$P_n(1) = 1 = c_n\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x-1)^n(x+1)^n\Big]\Big|_{x=1} = c_n\Big[(x+1)^n\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n\Big]\Big|_{x=1} =$$
$$= c_n 2^n n! \quad\Rightarrow\quad c_n = \frac{1}{2^n n!}$$

Итак, окончательно формула Родрига для многочленов Лежандра принимает вид:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x^2-1)^n\Big]$$

Совершенно очевидно, что определяемая данной формулой функция $P_n(x)$ является многочленом степени n. Если вдобавок к этому мы докажем, что при $n \neq m$ многочлены P_n и P_m ортогональны с весом $w(x) = 1$ на промежутке $(-1, 1)$, то, поскольку ортогональные многочлены определяются весом и промежутком ортогональности однозначно, тем самым будет доказано, что функции $P_n(x)$ действительно являются многочленами Лежандра. Возьмем для определенности $m \geq n$, тогда

$$(P_n, P_m) = \underbrace{\frac{1}{2^n\, 2^m\, n!\, m!}}_{C_{n,m}}\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]\cdot\left[\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\right]dx$$

Проинтегрируем подынтегральное выражение по частям и заметим, что внеинтегральное слагаемое равно нулю:

$$(P_n, P_m) = C_{n,m}\left[\left\{\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m\right]\cdot\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]\right\}\Bigg|_{-1}^{1} \to 0 \; -\right.$$
$$\left. - \int_{-1}^{1}\left[\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n\right]\cdot\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m\right]dx\right]$$

Повторяя интегрирование по частям еще $m-1$ раз и учитывая равенство нулю всех возникающих внеинтегральных слагаемых, получаем:

$$(P_n, P_m) = C_{n,m}(-1)^m \int_{-1}^{1}\left[\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^m dx \quad (*)$$

Отсюда видно, что при $m > n$ $(P_n, P_m) = 0$, поскольку в этом случае

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left[(x^2-1)^n\right] = 0$$

Случай $m < n$ рассматривается аналогично. Итак, мы доказали, что многочлены $P_n(x)$, определяемые вышеприведенной формулой Родрига, действительно являются многочленами Лежандра. В качестве иллюстрации на Рисунке 2.2 приведены первые семь из них.

Положив теперь в $(*)$ $m = n$, найдем норму многочленов Лежандра:

$$\|P_n\|^2 = C_{n,n}(-1)^n \int_{-1}^{1}\left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^n dx =$$

$$= C_{n,n}(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = 2\,C_{n,n}(2n)!\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx =$$

$$= \left[x^2 = t, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}\right] = C_{n,n}(2n)!\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^n dt = C_{n,n}(2n)!\,B(1/2, n+1) =$$

$$= C_{n,n}(2n)!\,\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} = \frac{1}{2^{2n}(n!)^{\cancel{2}}}(2n)!\frac{\cancel{\Gamma(1/2)n!}}{(n+1/2)(n-1/2)\ldots(1/2)\cancel{\Gamma(1/2)}} =$$

$$= \frac{(2n)!\,2^{n+1}}{2^{2n}\,n!\,(2n+1)!!} = \frac{(2n)!!\,2}{2^n\,n!\,(2n+1)} = \frac{\cancel{2^n n!}\,2}{\cancel{2^n n!}(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}$$

Итого, в краткой форме результаты наших вычислений записываются в виде т.н. **соотношения ортогональности** для многочленов Лежандра:

$$(P_n, P_m) = \|P_n\|^2 \, \delta_{nm}, \text{ где } \|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

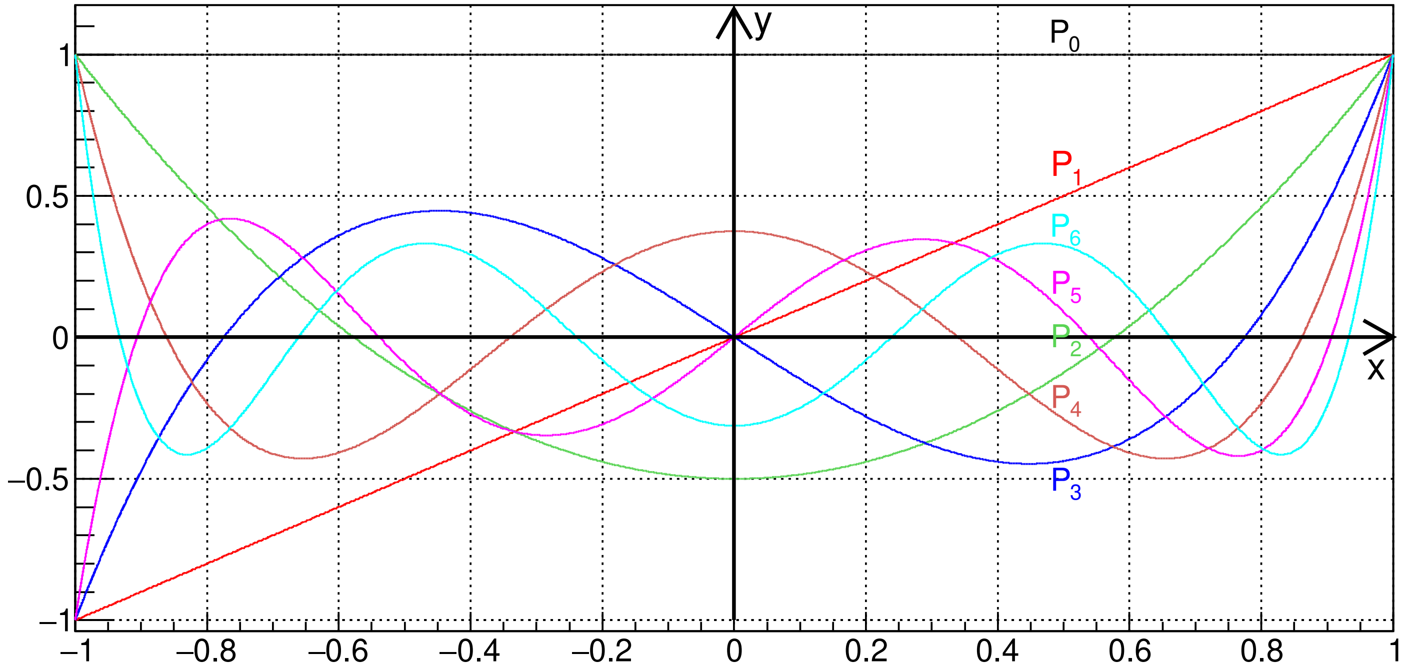


Рис. 2.2: Многочлены Лежандра $P_0, P_1, \ldots, P_6$ со стандартизацией $P_n(1) = 1$.

2.6. Многочлены Лежандра: производящая функция, интегральные представления и трехчленная рекуррентная формула

Теорема: Производящая функция многочленов Лежандра имеет вид

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n, \quad |x| \leq 1$$

□ Выведем формулу для производящей функции многочленов Лежандра исходя из уже известной нам формулы Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]$$

Производная n–го порядка, фигурирующая в даннной формуле, невольно вызывает ассоциации с формулой для вычета в полюсе $(n+1)$–го порядка. В самом деле, пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс $(n+1)$–го порядка функции $f(z)$, т.е.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^{n+1}},$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая в окрестности z_0 функция и $\varphi(z_0) \neq 0$. Окружим точку z_0 положительно ориентированным контуром γ^+ (см. Рис. 2.3) так, чтобы функция $\varphi(z)$ оставалась аналитичной в односвязной области, содержащей этот контур. Тогда

$$\oint\limits_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{2\pi i}{n!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^n}{dz^n}\Big[(z-z_0)^{n+1} f(z)\Big],$$

Положив теперь в этой формуле $z_0 = x \in (-1,1)$ и $\varphi(z) = (z^2-1)^n$, получим

$$\oint\limits_{\gamma^+} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \lim_{z\to x} \frac{d^n}{dz^n}\Big[(z^2-1)^n\Big] = \frac{2\pi i}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x^2-1)^n\Big]$$

Подставляя полученное выражение производной n–го порядка через интеграл в формулу Родрига, получим т.н. **интегральное представление Шлефли** многочленов Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^+} \frac{(z^2-1)^n}{2^n (z-x)^{n+1}} dz$$

Подставим интегральное представление Шлефли в производящую функцию:

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \oint\limits_{\gamma^+} \frac{dz}{z-x} \left[\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)}\right]^n$$

В полученном выражении *при достаточно малых* t знаки суммы ряда и интеграла можно поменять местами, поскольку при достаточно малом t ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z-x} \left[\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)}\right]^n \quad (*)$$

сходится равномерно на γ^+. Действительно, если t достаточно мало, то существует число $q \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $z \in \gamma^+$

$$0 < \left|\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)}\right| \leq q < 1,$$

так что ряд $(*)$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\dfrac{1}{\rho(x,\gamma^+)} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ и, стало быть, сходится равномерно в силу мажорантного признака Вейерштрасса.

Итак, меняя местами знаки суммы и интеграла при достаточно малом t мы получаем под знаком интеграла сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$g(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma^+} \frac{dz}{z-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)}\right]^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma^+} \frac{dz}{z-x}\frac{1}{1-\dfrac{(z^2-1)t}{2(z-x)}} = -\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\gamma^+}\frac{dz}{tz^2-2z+2x-t}$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле имеет два простых полюса $z_\pm = \left(1 \pm \sqrt{1-2xt+t^2}\right)/t$, причем $\lim\limits_{t\to 0} z_+ = \infty$ и $\lim\limits_{t\to 0} z_- = x$, поэтому при достаточно малом t полюс z_- находится внутри контура γ^+ (см. Рис. 2.4), а полюс z_+ — вне этого контура и потому не дает вклада в интеграл. Следовательно,

$$g(x,t) = \frac{1}{\pi i\, t}\oint\limits_{\gamma^+}\frac{1}{z_+-z_-}\left[\frac{1}{z-z_-} - \cancelto{0}{\frac{1}{z-z_+}}\right]dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\sqrt{1-2xt+t^2}}\oint\limits_{\gamma^+}\frac{dz}{z-z_-} = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

Теорема доказана. ■

Утверждение: Для многочленов Лежандра справедливо **интегральное представление Лапласа**:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n d\theta$$

□ Выберем в качестве контура γ^+ в интегральном представлении Шлефли окружность $z = x + i\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Тогда

$$dz = -\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}d\theta,$$

$$z^2-1 = (x^2-1) + 2ix\sqrt{1-x^2}e^{i\theta} - (1-x^2)e^{2i\theta} = 2i\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta),$$

$$\frac{z^2-1}{2(z-x)} = \frac{2i\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)}{2i\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}} = x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta$$

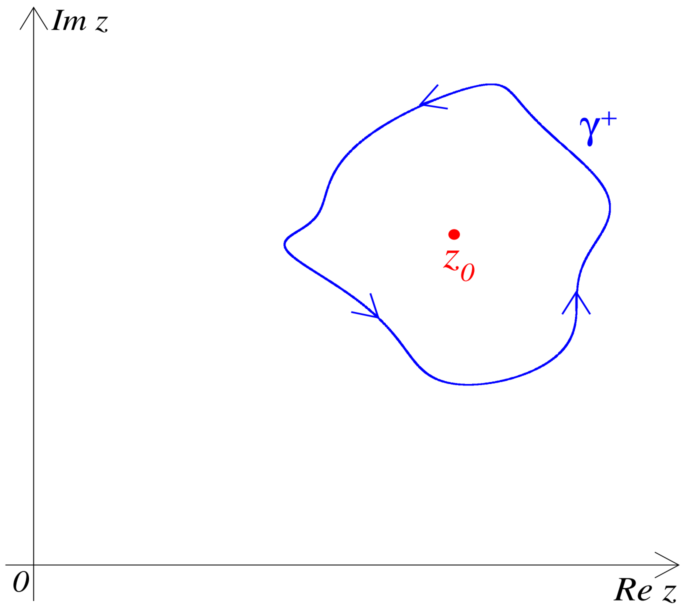


Рис. 2.3: Положительно ориентированный контур интегрирования γ^+ вокруг полюса $(n+1)$–го порядка функции $f(z)$.

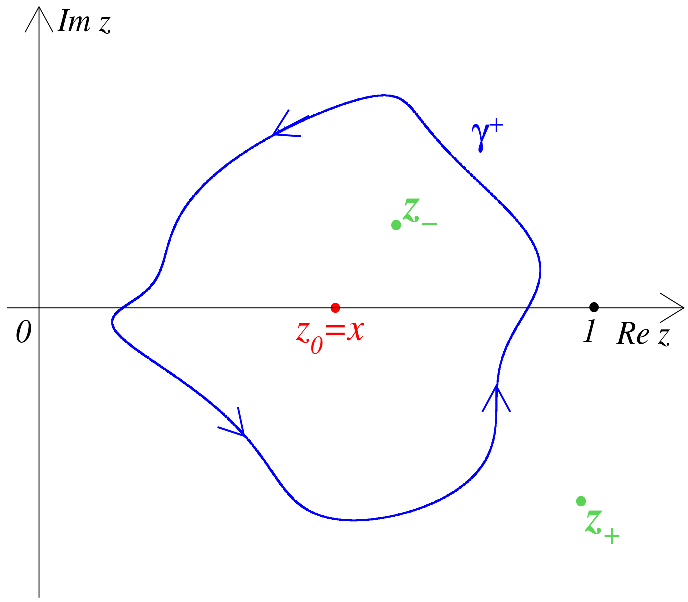


Рис. 2.4: Положительно ориентированный контур интегрирования γ^+ вокруг точки $z_0 = x$ и полюса $z_\pm$ подынтегральной функции.

Подставляя эти результаты в представление Шлефли, получаем искомое представление Лапласа:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma^+}\frac{dz}{z-x}\left[\frac{z^2-1}{z-x}\right]^n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{-\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}d\theta}{i\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n d\theta \quad \blacksquare$$

Замечание: Зачастую в приложениях требуется получить разложение той или иной функции в ряд по классическим ортогональным многочленам. Для некоторых функций при получении такого разложения удается воспользоваться их сходством с производящей функцией (для которой это разложение известно по определению). Напомним в этой связи уже изучавшийся Вами в курсе электродинамики пример разложения функции в ряд по многочленам Лежандра.

Пример (мультипольное разложение кулонова потенциала):

Найдем электрический потенциал потенциал φ, создаваемый в точке наблюдения $\vec{R}$ зарядом, распределенным с плотностью $\rho(\vec{r})$ в объеме V. Обозначая $r := |\vec{r}|$,

$R := |\vec{R}|$, $\theta := \angle(\vec{r}, \vec{R})$ и предполагая $r < R$ для всех $\vec{r} \in V$, получим

$$\varphi(\vec{R}) = \iiint\limits_V \frac{\rho(\vec{r})dV}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \iiint\limits_V \frac{\rho(\vec{r})dV}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}} =$$

$$= \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{+\infty} \iiint\limits_V \rho(\vec{r})\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)dV = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{R^{n+1}},$$

где

$$\sigma_0 = \iiint\limits_V \rho(\vec{r})dV \text{ — полный заряд,}$$

$$\sigma_1 = \iiint\limits_V \rho(\vec{r})r\cos\theta dV \text{ — дипольный момент,}$$

$$\sigma_2 = \iiint\limits_V \rho(\vec{r})r^2\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}dV \text{ — квадрупольный момент}$$

Утверждение: Трехчленная рекуррентная формула для многочленов Лежандра имеет вид

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

☐ Продифференцируем производящую функцию многочленов Лежандра по переменной t и воспользуемся тем фактом, что сходящийся степенной ряд можно дифференцировать почленно в круге сходимости:

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \frac{2(x-t)}{2(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)}g(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(x)t^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x-t)\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(x)t^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} P_{n-1}(x)t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2x\sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n$$

Перенося все слагаемые в правую часть равенства и приравнивая нулю коэффициент при t^n, получаем:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

2.7. Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение

Из перечисленных ранее свойств классических ортогональных многочленов нам известно, что каждый из них является одним из решений диффренциального уравнения второго порядка

$$B(x)y''(x) + \left(A(x) + B'(x)\right)y'(x) - n\left(\alpha_1 + (n+1)\beta_2\right)y(x) = 0$$

Очень часто в физических приложениях классические ортогональные многочлены появляются как раз в связи с решением подобных дифференциальных уравнений. Поскольку для многочленов Лежандра $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = -1$, $A(x) = 0$, $B(x) = x^2 - 1$, то соответствующее им **дифференциальное уравнение Лежандра** имеет вид

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Проверим прямой подстановкой, что многочлены Лежандра действительно удовлетворяют данному уравнению.

Утверждение: Для всех $n \in \mathbb{N}_0$ многочлен Лежандра $P_n(x)$ является одним из решений дифференциального уравнения Лежандра $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$.

□ Обозначим для краткости $y_n := (x^2 - 1)^n$, тогда формула Родрига примет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] = \frac{1}{2^n n!}y_n^{(n)}$$

и нам остается доказать, что уравнению Лежандра удовлетворяет $y_n^{(n)}$. Имеем:

$$y_n^{(1)} = \left((x^2-1)^n\right)' = 2nx(x^2-1)^{n-1} = \frac{2nx}{(x^2-1)}y_n \quad \Rightarrow \quad (1-x^2)y_n^{(1)} + 2nxy_n = 0$$

Продифференцируем последнее уравнение еще раз:

$$\left((1-x^2)y_n^{(1)} + 2nxy_n\right)' = -2xy_n^{(1)} + (1-x^2)y_n^{(2)} + 2ny_n + 2nxy_n^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_n^{(2)} + 2(n-1)xy_n^{(1)} + 2ny_n = 0$$

Наконец, используя формулу Лейбница продифференцируем последнее уравнение n раз:

$$\left((1-x^2)y_n^{(2)}\right)^{(n)} + 2(n-1)\left(xy_n^{(1)}\right)^{(n)} + 2ny_n^{(n)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\cancel{n}\,2} C_n^k (1-x^2)^{(k)} y_n^{(n+2-k)} + 2(n-1)\sum_{k=0}^{\cancel{n}\,1} C_n^k x^{(k)} y_n^{(n+1-k)} + 2ny_n^{(n)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[(1-x^2)y_n^{(n+2)} + n(-2x)y_n^{(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2}(-2)y_n^{(n)}\right] +$$

$$+2(n-1)\left[xy_n^{(n+1)} + ny_n^{(n)}\right] + 2ny_n^{(n)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_n^{(n+2)} - 2xy_n^{(n+1)} + \left(-n^2 + n + 2n^2 - 2n + 2n\right) y_n^{(n)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)\left(y_n^{(n)}\right)'' - 2x\left(y_n^{(n)}\right)' + n(n+1)y_n^{(n)} = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание: С помощью дифференциального уравнения Лежандра легко (и методически полезно) заново установить факт ортогональности многочленов Лежандра. Для этого запишем уравнения Лежандра для многочленов P_n и P_m

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0,$$
$$(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0,$$

и умножим первое уравнение на P_m, а второе — на P_n, а затем вычтем второе уравнение из первого:

$$\left[\left((1-x^2)P_n'\right)' P_m - \left((1-x^2)P_m'\right)' P_n\right] + (n^2 + n - m^2 - m)P_nP_m = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left[(1-x^2)(P_n'P_m - P_m'P_n)\right]' + (n-m)(n+m+1)P_nP_m = 0$$

Далее проинтегрируем получившееся уравнение в пределах от -1 до 1:

$$\int\limits_{-1}^{1}\left[(1-x^2)(P_n'P_m - P_m'P_n)\right]' dx + (n-m)(n+m+1)\int\limits_{-1}^{1} P_nP_m dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cancelto{0}{\left[(1-x^2)(P_n'P_m - P_m'P_n)\right]\Big|_{-1}^{1}} + (n-m)(n+m+1)(P_n, P_m) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (n-m)(P_n, P_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad (P_n, P_m) = 0 \text{ при } n \neq m$$

Пример: Рассмотрим *задачу Дирихле* в шаре радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^3$:

Найти гармоническую функцию $u : B(0,R) \to \mathbb{R}$, $\Delta u = 0$, *удовлетворяющую граничным условиям* $u\big|_{\partial B(0,R)} = f(\theta, \varphi)$.

Запишем условия задачи в сферической системе координат:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$

Будем решать написанное выше дифференциальное уравнение Лапласа методом разделения переменных («методом Фурье»), для чего сначала попробуем найти решение в виде функции с разделившимися переменными $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$:

$$\left(r^2 R'(r)\right)' \Theta(\theta)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\, \Theta'(\theta)\right)' R(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\sin^2\theta}\Phi''(\varphi)R(r)\Theta(\theta) = 0,$$

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2 R'(r)\right)' + \frac{1}{\sin\theta\, \Theta(\theta)}\left(\sin\theta\, \Theta'(\theta)\right)' + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

Поскольку переменные r, θ и φ независимы, из последнего равенства следует, что

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2 R'(r)\right)' = \lambda = \mathrm{const},$$

$$\frac{\cos\theta\, \Theta'(\theta) + \sin\theta\, \Theta''(\theta)}{\sin\theta\, \Theta(\theta)} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda$$

Аналогично, в силу независимости переменных θ и φ имеем

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \alpha = \mathrm{const},$$

причем в силу 2π–периодичности функции Φ константа α должна быть равна $-m^2$ для некоторого целого числа m, так что $\Phi(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi$. Далее:

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Theta''(\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta'(\theta) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0 \quad (*)$$

Как будет показано в курсе методов математической физики, решение данного уравнения выражается через т.н. *присоединенные многочлены Лежандра*

$$P_n^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}, \quad \lambda = n(n+1),$$

здесь же мы ограничимся случаем азимутально–симметричных граничных условий $f(\theta, \cancel{\varphi}) \to f(\theta)$, для которых $\Phi(\varphi) = \mathrm{const}$ и $m = 0$. В этом случае уравнение $(*)$ принимает вид

$$\Theta''(\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta'(\theta) + \lambda\,\Theta(\theta) = 0$$

Произведем замену переменной $x = \cos\theta$ и переобозначим неизвестную функцию $\Theta(\theta) = \Theta(\arccos x) =: y(x)$. Тогда

$$\Theta'(\theta) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\, y' = -\sqrt{1-x^2}\, y',$$

$$\Theta''(\theta) = \frac{d}{dx}\Big(\Theta'(\theta)\Big)\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{dx}\Big(-\sqrt{1-x^2}\, y'\Big)\cdot\Big(-\sqrt{1-x^2}\Big) =$$

$$= \left(\sqrt{1-x^2}\, y'' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, y'\right)\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)\, y'' - x\, y'$$

Подставляя эти результаты в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$(1-x^2)\, y'' - x\, y' + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(-\sqrt{1-x^2}y') + \lambda y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Можно показать, что полученное уравнение имеет ограниченное решение (в виде многочленов Лежандра) только при $\lambda = n(n+1)$. В таком случае уравнение на радиальную функцию принимает вид

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2 R'(r)\right)' = n(n+1) \quad \Rightarrow \quad r^2 R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R(r) = 0$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $R(r) = r^\alpha$:

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+2r\alpha r^{\alpha-1}-n(n+1)r^\alpha=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \alpha(\alpha+1)-n(n+1)=0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha-n)(\alpha+n+1)=0$$

Следовательно, решение радиального уравнения имеет вид

$$R(r)=Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}},$$

но так как функция $1/r^{n+1}$ неограничена при $r\to 0$, необходимо положить $B=0$.

Итого, мы получили серию решений с разделившимися переменными

$$u_n(r,\theta)=R_n(r)\Theta_n(\theta)=A_n r^n P_n(\cos\theta), \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

и в силу линейности уравнения Лапласа общее решение записывается в виде ряда

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta),$$

коэффициенты A_n которого необходимо определить из граничных условий

$$u(R,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n R^n P_n(\cos\theta)=f(\theta)$$

Умножим последнее уравнение скалярно на $P_m(\cos\theta)$ и проинтегрируем по $d(\cos\theta)$:

$$\int\limits_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} f(\theta)P_m(\cos\theta)d(\cos\theta)=A_m R^m\|P_m\|^2=A_m R^m\frac{2}{2m+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_m=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{R^m}\int\limits_0^\pi f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

Итак, мы нашли решение задачи Дирихле в шаре с аксиально–симметричными граничными условиями:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^\pi f(\varphi)P_m(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

2.8. Разложение функций в ряд Фурье по многочленам Лежандра

Теорема: Последовательность многочленов Лежандра $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\|P_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ образует гильбертов базис пространства $L_2[-1,1]$.

□ Очевидно, что последовательность многочленов Лежандра $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ может быть получена из последовательности мономов $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ с помощью процесса ортогонализации Грама–Шмидта в $L_2[-1,1]$, причем $\langle\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\rangle = \langle\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\rangle$.

Докажем, что подпространство всех алгебраических многочленов $\langle\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\rangle$ всюду плотно в $L_2[-1,1]$. Поскольку $\langle\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\rangle = \langle\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\rangle$, то из этого будет следовать, что линейная оболочка последовательности многочленов Лежандра также всюду плотна в $L_2[-1,1]$, а значит в силу критерия полноты ортонормированной системы она образует гильбертов базис этого пространства.

Будем опираться на два уже известных нам факта:

- во-первых, из свойств лебеговских функциональных пространств мы знаем, что подпространство бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty[-1,1]$ всюду плотно в $L_2[-1,1]$:
$$\forall f \in L_2[-1,1] \text{ и } \forall \varepsilon > 0\ \exists f_\varepsilon \in C^\infty[-1,1]\colon \|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon;$$
- во-вторых, теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами утверждает, что подпространство всех алгебраических многочленов $\langle\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\rangle$ всюду плотно в пространстве $(C[-1,1], \|\cdot\|_c)$:
$$\forall f \in C[-1,1] \text{ и } \forall \varepsilon > 0\ \ \exists p_\varepsilon \in \langle\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\rangle\colon \|f - p_\varepsilon\|_c = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$$

Заметим, что имеет место изображенная на Рисунке 2.5 цепочка включений
$$\langle\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\rangle \subset C^\infty[-1,1] \subset C[-1,1] \subset L_2[-1,1]$$

Взяв теперь произвольную функцию $f \in L_2[-1,1]$ и произвольное $\varepsilon > 0$ мы получаем, что
$$\exists f_\varepsilon \in C^\infty[-1,1] \subset C[-1,1] : \|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon \text{ и}$$
$$\exists p_\varepsilon \in \langle\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\rangle : \|f_\varepsilon - p_\varepsilon\|_c < \varepsilon,$$

так что
$$\|f - p_\varepsilon\|_2 \le \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|f_\varepsilon - p_\varepsilon\|_2 < \varepsilon + \left(\int_{-1}^{1} |f_\varepsilon(x) - p_\varepsilon(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \le$$

$$\leq \varepsilon + \left(\int_{-1}^{1} \max_{x\in[-1,1]} |f_\varepsilon(x) - p_\varepsilon(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \varepsilon(1+\sqrt{2})$$

Тем самым мы доказали, что линейная оболочка $\langle \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \rangle = \langle \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \rangle$ всюду плотна в $L_2[-1,1]$, а значит многочлены Лежандра $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ образуют гильбертов базис этого пространства. ■

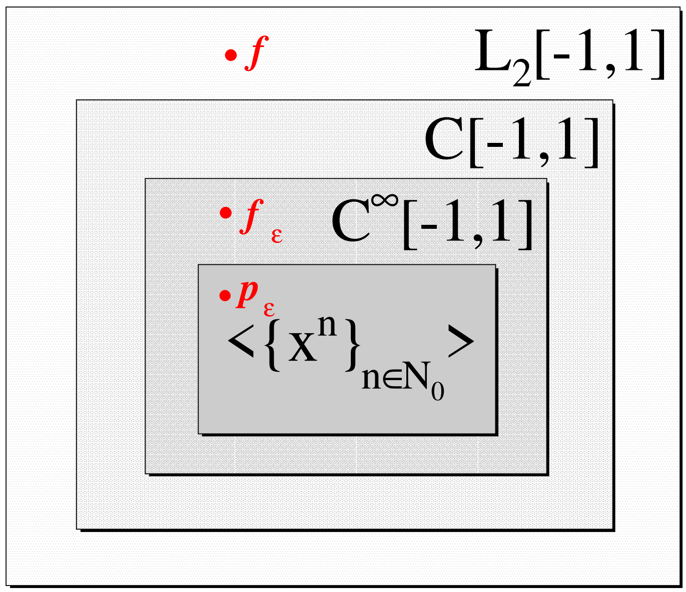


Рис. 2.5: Цепочка включений $\langle \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \rangle \subset C^\infty[-1,1] \subset C[-1,1] \subset L_2[-1,1]$.

Замечание: Для *произвольной* функции $f \in L_2[-1,1]$ предыдущая теорема гарантирует, что её ряд Фурье по многочленам Лежандра

$$f \overset{L_2}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n P_n, \quad \text{где } \lambda_n = \frac{(f,P_n)}{(P_n,P_n)} = \frac{1}{\|P_n\|^2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

сходится к самой функции f *по норме пространства* $L_2[-1,1]$.

Если же функция f обладает дополнительными «хорошими» свойствами (например, является гладкой), то может иметь место не только сходимость ряда Фурье по норме, но и его поточечная или даже равномерная сходимость к функции f.

Теорема (о поточечной сходимости ряда Фурье по многочленам Лежандра): Пусть $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ — кусочно–гладкая функция, тогда в каждой точке $x \in (-1,1)$ её ряд Фурье по многочленам Лежандра сходится к полусумме её левого и правого пределов:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n P_n(x), \text{ где } \lambda_n = \frac{(f,P_n)}{(P_n,P_n)}$$

□ Без доказательства. ■

Пример: Найдем разложение функции знака $\operatorname{sgn}(x)$ в ряд Фурье по многочленам Лежандра, стандартизованным условием $P_n(1) = 1$.

Заметим прежде всего, что поскольку весовая функция многочленов Лежандра $w(x) = 1$ является чётной и промежуток ортогональности $(-1,1)$ симметричен относительно нуля, то $P_{2n}(-x) = P_{2n}(x)$ и $P_{2n+1}(-x) = -P_{2n+1}(x)$. Следовательно, нечётная функция $\operatorname{sgn}(x)$ разлагается в ряд Фурье только по многочленам Лежандра $P_{2n+1}(x)$ с нечётными степенями, соответствующие коэффициенты Фурье равны

$$\lambda_{2n+1} = \frac{(\operatorname{sgn}, P_{2n+1})}{(P_{2n+1}, P_{2n+1})} = \frac{4n+3}{2} \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x) P_{2n+1}(x) dx = (4n+3) \int_{0}^{1} P_{2n+1}(x) dx \quad (*)$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся (без доказательства) известным свойством многочленов Лежандра:

$$(2k+1)P_k(x) = P'_{k+1}(x) - P'_{k-1}(x),\ k \in \mathbb{N}$$

Для $k = 2n+1$ имеем $P_{2n+1}(x) = \dfrac{1}{4n+3}\left(P'_{2n+2}(x) - P'_{2n}(x)\right)$. Подставляя это выражение в интеграл $(*)$ и учитывая принятую нами стандартизацию $P_k(1) = 1,\ k \in \mathbb{N}_0$, получаем

$$\lambda_{2n+1} = \int_{0}^{1} \left(P'_{2n+2}(x) - P'_{2n}(x)\right) dx = \left(P_{2n+2}(x) - P_{2n}(x)\right)\Big|_0^1 = P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)$$

Наконец, значения многочленов Лежандра P_{2n} в нуле нетрудно найти из разложения производящей функции в ряд Тейлора при $x = 0$:

$$g(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\, t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{2n}(0)\, t^{2n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

На Рисунке 2.6 показаны некоторые из частичных сумм $s^{(2N+1)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda_{2n+1} P_{2n+1}(x)$ полученного разложения функции $\operatorname{sgn}(x)$ в ряд Фурье по многочленам Лежандра. Видно, что при больших n в точке разрыва функции $\operatorname{sgn}(x)$ наблюдается скачок частичных сумм ряда Фурье (явление Гиббса).

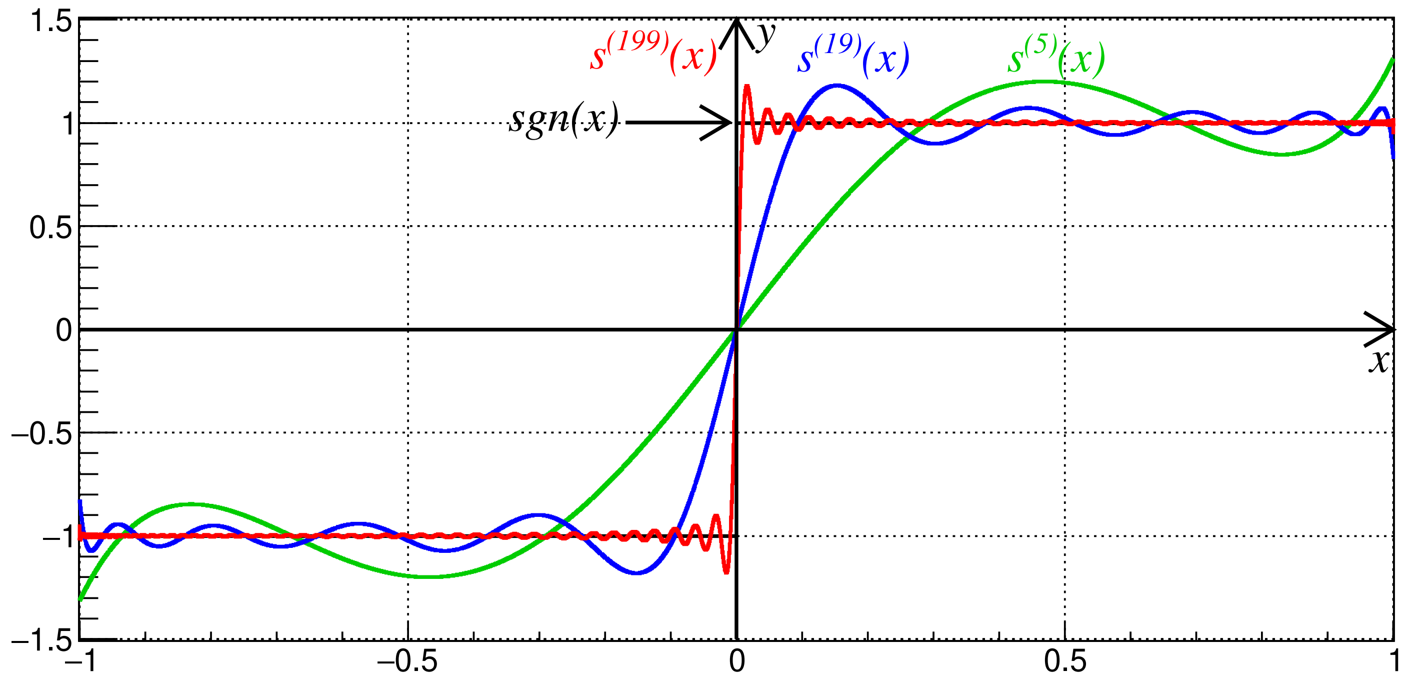


Рис. 2.6: Частичные суммы $s^{(2N+1)}(x)$ разложения функции $\operatorname{sgn}(x)$ в ряд Фурье по многочленам Лежандра.

Замечание: Зачастую в физической литературе факт полноты (базисности) ортогональной системы функций выражают в виде т.н. **соотношения полноты**.

В качестве примера приведем **нестрогий** вывод соотношения полноты для многочленов Лежандра. Пусть $f \in L_2[-1,1]$, тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} P_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^{1} f(y) P_n(y) dy \right] P_n(x) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(y) \right] f(y) dy$$

С другой же стороны $f(x) = (\delta(x-y), f(y))$, где символ δ означает дельта–функцию Дирака. Сравнивая приведенные представления для функции $f(x)$ мы можем записать соотношение полноты для многочленов Лежандра:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(y) = \delta(x-y), \quad x, y \in [-1, 1]$$

Пример: Положив в соотношении полноты для многочленов Лежандра $y = 0$ и замечая, что $P_{2n+1}(0) = 0$, получим разложение дельта–функции $\delta(x)$ в ряд по многочленам Лежандра:

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n+1}{2} P_{2n}(x) P_{2n}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n (4n+1)(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}}_{\lambda_{2n}} P_{2n}(x)$$

На Рисунке 2.7 показаны некоторые из частичных сумм $s^{(2N)}(x) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_{2n} P_{2n}(x)$ полученного разложения.

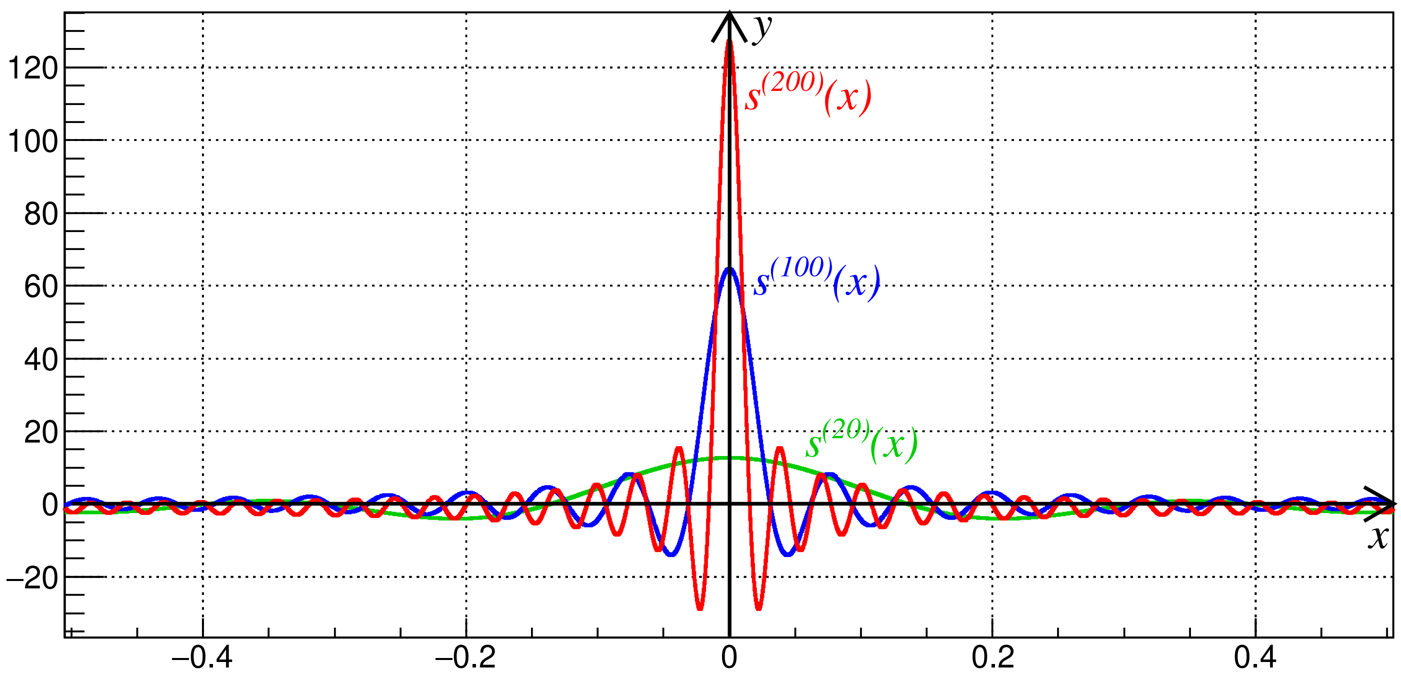


Рис. 2.7: Частичные суммы $s^{(2N)}(x)$ разложения дельта–функции $\delta(x)$ в ряд Фурье по многочленам Лежандра.

Глава 3.

ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

3.1. Линейные операторы

Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ — линейные пространства над полем $\mathbb{F}$.

Определение: Отображение $A\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, заданное на линейном подпространстве $\mathrm{Dom}A \subset \mathbb{X}$ называется **линейным оператором**, если для любых $x_{1,2} \in \mathrm{Dom}A$ и любых $\alpha_{1,2} \in \mathbb{F}$ выполняется равенство $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$.

Подпространство $\mathrm{Dom}A$, на котором задан оператор A, называется его **областью определения**. Всюду далее, если не оговорено противное, мы будем предполагать $\mathrm{Dom}A = \mathbb{X}$.

Для линейных операторов вместо записи $A(x)$ принято писать Ax.

Образом оператора A называется множество $\mathrm{Im}A := \{y \in \mathbb{Y} : \exists\, x \in \mathrm{Dom}A : y = Ax\}$.

Ядром оператора A называется множество $\mathrm{Ker}A := \{x \in \mathrm{Dom}A : \ Ax = 0\}$.

Множество всех линейных операторов из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$ над полем $\mathbb{F}$ обозначается $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. В случае $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ используется обозначение $\mathcal{L}(\mathbb{X})$.

Утверждение:

1) $\mathrm{Im}A$ является линейным подпространством в $\mathbb{Y}$.

2) $\mathrm{Ker}A$ является линейным подпространством в $\mathbb{X}$.

□ Упражнение. ■

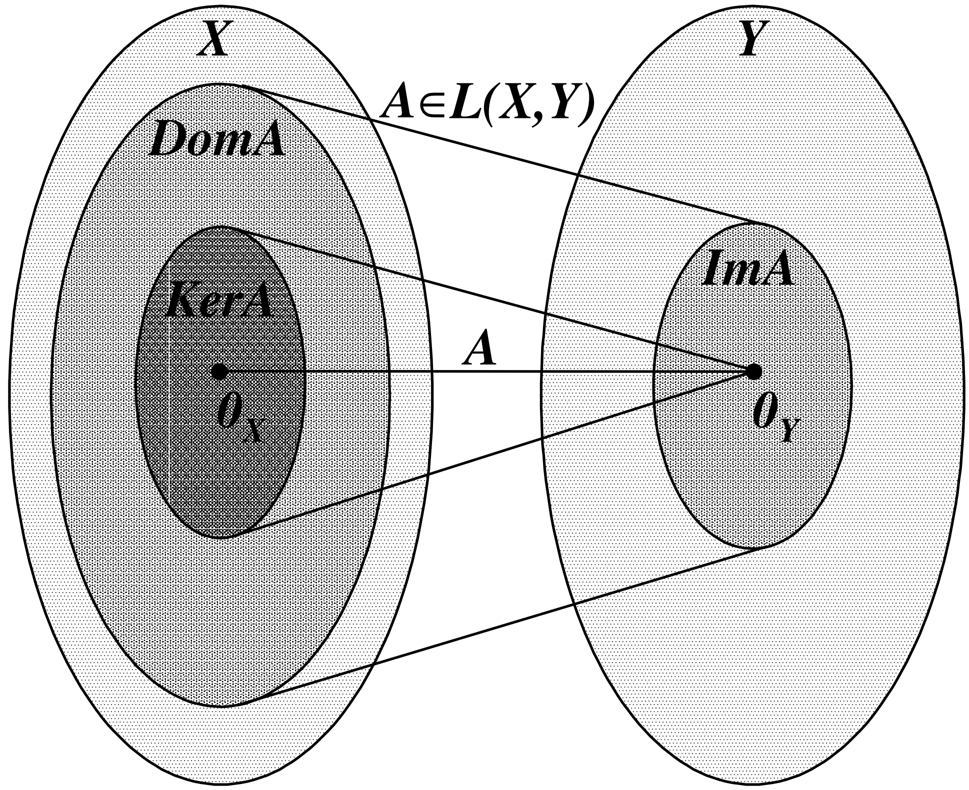


Рис. 3.1: Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, его область определения Dom$A$, ядро Ker$A$ и образ ImA.

Замечание: На множестве $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ естественно ввести структуру линейного пространства, определив операции сложения операторов и умножения оператора на скаляр по следующим очевидным правилам:

- для любых $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ определим оператор $C \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, называемый их суммой, и обозначаемый $(A + B)$, действующий на любой вектор $x \in \mathbb{X}$ по правилу $(A + B)x := Ax + Bx$.

- для любого $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и любого скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$ определим оператор $B \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, называемый произведением оператора на скаляр, и обозначаемый αA, действующий на любой вектор $x \in \mathbb{X}$ по правилу $(\alpha A)x := \alpha(Ax)$.

Итак, всюду далее мы будем считать множество $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ линейным пространством.

Утверждение: Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$, тогда композиция операторов $B \circ A$ является линейным оператором из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Z}$, т.е. $B \circ A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$.

Композиция операторов B и A также называется их **произведением** и обозначается BA.

$\square$ Для любых $x_{1,2} \in \mathbb{X}$ и любых $\alpha_{1,2} \in \mathbb{F}$ имеем:

$$BA(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \equiv B(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = B(\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2) =$$
$$= \alpha_1 B(Ax_1) + \alpha_2 B(Ax_2) \equiv \alpha_1 BA(x_1) + \alpha_2 BA(x_2) \blacksquare$$

Приведем простейшие примеры линейных операторов.

Пример №1: Нулевой оператор $O \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ переводит любой вектор $x \in \mathbb{X}$ в нулевой вектор пространства $\mathbb{Y}$: $Ox = 0_{\mathbb{Y}}$.

Пример №2: Единичный, или *тождественный* оператор $I \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ оставляет неизменным любой вектор $x \in \mathbb{X}$: $Ix = x$.

Пример №3: Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ называется *конечномерным*, если $\dim \mathbb{X} < +\infty$ и $\dim \mathbb{Y} < +\infty$. Из курса линейной алгебры нам известно, что выбор пары базисов $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$ в $\mathbb{X}$ и $\{f_j\}_{j=\overline{1,m}}$ в $\mathbb{Y}$ устанавливает изоморфизм $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cong M_{m,n}(\mathbb{F})$ между пространством конечномерных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и пространством $M_{m,n}(\mathbb{F})$ матриц размера $m \times n$.

Действительно, рассмотрим конечномерный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и произвольный вектор $x \in \mathbb{X}$. Так как $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$ — базис в $\mathbb{X}$, то существуют числа $\{x_k\}_{k=\overline{1,n}} \subset \mathbb{F}$ такие, что $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. Тогда

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, Ae_k$$

Далее, поскольку для всех $k = \overline{1,n}$ векторы Ae_k лежат в $\mathbb{Y}$ и $\{f_j\}_{j=\overline{1,m}}$ — базис в $\mathbb{Y}$, то существуют числа $\{A_{jk}\}_{j=\overline{1,m}} \subset \mathbb{F}$ такие, что $Ae_k = \sum\limits_{j=1}^{m} A_{jk} f_j$. Тогда

$$Ax = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k\right] f_j \quad (*)$$

С другой стороны, так как $Ax \in \mathbb{Y}$, то существуют числа $\{y_j\}_{j=\overline{1,m}} \subset \mathbb{F}$ такие, что

$$Ax = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j \quad (**)$$

Сравнивая теперь разложения $(*)$ и $(**)$ вектора Ax по базису $\{f_j\}_{j=\overline{1,m}}$ получаем равенства $y_j = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{jk}x_k \;\; \forall j = \overline{1,m}$, или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}\in M_{m,n}(\mathbb{F})} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Матрица $\mathcal{A} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ в последнем равенстве и является искомой матрицей оператора A в паре базисов $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$ в $\mathbb{X}$ и $\{f_j\}_{j=\overline{1,m}}$ в $\mathbb{Y}$. Очевидно, что в столбцах этой матрицы записаны коэффициенты разложения образов Ae_k базисных векторов начального пространства $\mathbb{X}$ по базису конечного пространства $\mathbb{Y}$.

Пример №4: Пусть $\mathbb{H}'$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Тогда, как мы уже знаем, $\mathbb{H}$ распадается в прямую сумму $\mathbb{H}'$ и его ортогонального дополнения: $\mathbb{H} = \mathbb{H}' \oplus (\mathbb{H}')^{\perp}$. По определению прямой суммы это означает, что для любого вектора $x \in \mathbb{H}$ существуют единственные вектора $y \in \mathbb{H}'$ и $z \in (\mathbb{H}')^{\perp}$ такие, что $x = y + z$. Таким образом, мы можем определить *оператор ортогонального проектирования* на $\mathbb{H}'$ правилом $\mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}x = y$.

Очевидно, что $\mathrm{Dom}\,\mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'} = \mathbb{H}$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'} = \mathbb{H}'$, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'} = (\mathbb{H}')^{\perp}$, $\mathrm{Pr}^2_{\mathbb{H}'} = \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}$. Кроме того, оператор $(I - \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'})$ представляет собой ортогональный проектор на подпространство $(\mathbb{H}')^{\perp}$, т.е. $I = \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'} + \mathrm{Pr}_{(\mathbb{H}')^{\perp}}$.

Пример №5: *Оператор дифференцирования* $\mathcal{D} : C^1(a,b) \to C(a,b)$ задается правилом $\mathcal{D}f = df/dx \quad \forall f \in C^1(a,b)$.

Пример №6: С помощью непрерывной на квадрате $[a,b]\times[a,b]$ функции $K(t,s)$ можно определить *интегральный оператор* $A : C[a,b] \to C[a,b]$, действующий на произвольную функцию $f \in C[a,b]$ по правилу

$$(Af)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)f(s)ds$$

Очевидно, что подобное действие интегрального оператора на функцию можно рассматривать в качестве непрерывного аналога умножения матрицы на вектор.

3.2. Непрерывность и ограниченность линейного оператора

Пусть теперь $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ — линейные *нормированные* пространства.

Определение: Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ называется **непрерывным в**

точке $x_0 \in \mathbb{X}$, если из сходимости $x \xrightarrow{\mathbb{X}} x_0$ следует сходимость $Ax \xrightarrow{\mathbb{Y}} Ax_0$.

Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ называется **непрерывным**, если он непрерывен во всех точках пространства $\mathbb{X}$.

Утверждение: Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{X}$*.

□ **Необходимость:** Очевидно.

Достаточность: Пусть оператор A непрерывен в точке $x_0 \in \mathbb{X}$, т.е. из сходимости $x \xrightarrow{\mathbb{X}} x_0$ следует сходимость $Ax \xrightarrow{\mathbb{Y}} Ax_0$. Выберем произвольную точку $x_1 \in \mathbb{X}$ и предположим, что $x \xrightarrow{\mathbb{X}} x_1$. Тогда $(x - x_1 + x_0) \xrightarrow{\mathbb{X}} x_0$ и потому $A(x - x_1 + x_0) \xrightarrow{\mathbb{Y}} Ax_0$, что равносильно сходимости $(Ax - Ax_1 + \cancel{Ax_0}) \xrightarrow{\mathbb{Y}} \cancel{Ax_0}$ или $Ax \xrightarrow{\mathbb{Y}} Ax_1$. Значит, оператор A непрерывен в произвольной точке $x_1 \in \mathbb{X}$, а значит и во всем пространстве $\mathbb{X}$. ■

Определение: Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ называется **ограниченным**, если он отображает любое ограниченное в $\mathbb{X}$ множество во множество, ограниченное в $\mathbb{Y}$, т.е. если

$$\forall M \subset \mathbb{X} : \sup_{x \in M} \|x\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in M} \|Ax\| < +\infty$$

Множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$ обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$**. В случае $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ используют обозначение $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.

Утверждение: $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ образует линейное подпространство в пространстве всех линейных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

□ Возьмем произвольные ограниченные операторы $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и числа $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, и докажем, что оператор $(\alpha A + \beta B)$ также является ограниченным. В самом деле, для любого ограниченного множества $M \subset \mathbb{X}$

$$\sup_{x \in M} \|(\alpha A + \beta B)x\| \le |\alpha| \sup_{x \in M} \|Ax\| + |\beta| \sup_{x \in M} \|Bx\| < +\infty,$$

следовательно множество $(\alpha A + \beta B)(M)$ ограничено в $\mathbb{Y}$, что и доказывает ограниченность оператора $(\alpha A + \beta B)$. ■

Приведенное выше определение определение ограниченного оператора хорошо объясняет смысл, вкладываемый в это понятие, однако в практическом отношении оно весьма неудобно, поскольку требует проверки указанного в определении условия для

* Как правило, удобнее всего проверять непрерывность линейного оператора в точке $x_0 = 0$.
** От слова *bounded* — *ограниченный*.

всех ограниченных множеств в $\mathbb{X}$. На деле же оказывается, что достаточно проверить это условие лишь для одного достаточно «репрезентативного» множества — шара единичного радиуса с центром в нуле, т.е. для $B[0;1] \subset \mathbb{X}$.

Утверждение: Для того чтобы линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ был ограниченным необходимо и достаточно, чтобы он отображал единичный замкнутый шар с центром в нуле $B[0;1] \subset \mathbb{X}$ в ограниченное множество в $\mathbb{Y}$, т.е.

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| < +\infty$$

$\square$ **Необходимость:** Единичный шар $B[0;1] \subset \mathbb{X}$ является ограниченным множеством, следовательно ограниченный оператор A отображает его в ограниченное множество в $\mathbb{Y}$.

Достаточность: Пусть оператор A отображает единичный шар $B[0;1] \subset \mathbb{X}$ в ограниченное множество в $\mathbb{Y}$, т.е. $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| < +\infty$. Рассмотрим произвольное ограниченное множество $M \subset \mathbb{X}$, $M \ne \{0\}$, и обозначим $R := \sup\limits_{x \in M} \|x\| < +\infty$. Тогда для любого $x \in M$ вектор x/R лежит в единичном шаре $B[0;1]$ и потому

$$\sup_{x \in M} \|Ax\| = R \cdot \sup_{x \in M} \|A(x/R)\| \le R \cdot \sup_{\|y\| \le 1} \|Ay\| < +\infty,$$

следовательно, оператор A является ограниченным. $\blacksquare$

Итак, мы только что доказали, что ограниченность оператора A равносильна конечности величины $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$. Эта величина имеет специальное название — *норма линейного оператора*.

Определение: Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, величина

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\{\, c \in \mathbb{R} : \ \|Ax\| \le c\|x\|, \ x \in \mathbb{X}\,\}$$

называется **нормой оператора A**, **подчиненной** нормам пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$.

Упражнение: Докажите, что все приведенные в определении формулы для нахождения $\|A\|$ эквивалентны.

Замечание: Говоря неформально, норма линейного оператора представляет собой наибольший (в смысле точной верхней границы) коэффициент растяжения $\|Ax\|/\|x\|$ векторов под действием данного оператора. Если наибольший коэффициент растяжения конечен, то оператор ограничен. Если же оператор неограничен, то он обладает свойством неограниченно «растягивать» векторы (неограниченно увеличивать их норму). Эти интуитивные соображения наводят на мысль о тесной связи понятий ограниченности и непрерывности линейного оператора (эта связь будет установлена нами ниже).

Значение операторной нормы, однако, вовсе не исчерпывается вопросом об ограниченности оператора. Например, в приложениях очень часто возникает задача приближения одного оператора A другим, более простым и удобным оператором B. Например, речь может идти о приближении бесконечномерного оператора конечномерным, или о его приближении частичными суммами операторного ряда. Для того чтобы судить о точности такого приближения необходимо уметь вычислять норму разности операторов $\|A-B\|$.

Теорема (свойства нормы линейного оператора): Пусть $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Норма линейного оператора обладает следующими свойствами:

1) Норма оператора действительно является *нормой*, т.е. она обладает всеми свойствами нормы:
   - Неотрицательность: $\|A\| \geq 0$, причем $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = O$.
   - Положительная однородность: $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$.
   - Неравенство треугольника: $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
2) Для всех $x \in \mathbb{X}$ выполнено неравенство $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.
3) Субмультипликативность: $\|CA\| \leq \|C\|\|A\|$*.

□ **1)** Неотрицательность очевидна.

Положительная однородность: $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\lambda|\,\|Ax\| = |\lambda|\,\|A\|$.

Неравенство треугольника:

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) = \|A\| + \|B\|$$

2) Для $x = 0$ неравенство обращается в равенство. Пусть $x \neq 0$, тогда

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|,$$

* Отметим, что в случае $A, C \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ из субмультипликативности вытекает, что и $CA \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, т.е. операция умножения операторов не выводит за пределы пространства ограниченных операторов. Это означает, что $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ образует не просто линейное пространство, но и *нормированную операторную алгебру*.

следовательно $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$, что и требовалось доказать.

3) $\|CA\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|C(Ax)\| \le \sup\limits_{\|x\|=1} \|C\|\|Ax\| = \|C\|\|A\|$. ■

Теорема (об эквивалентности ограниченности и непрерывности линейного оператора): Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.

□ **Необходимость:** Пусть оператор A ограничен и $x \overset{\mathbb{X}}{\to} x_0 \in \mathbb{X}$. Тогда

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \le \|A\|\|x - x_0\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad Ax \overset{\mathbb{Y}}{\to} Ax_0,$$

следовательно оператор A непрерывен.

Достаточность: Будем рассуждать от противного: предположим, что оператор A непрерывен, но не является ограниченным. В таком случае не является ограниченным и множество $A(B[0;1])$, а значит существует последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B[0;1]$ такая, что $\|Ax_n\| \ge n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Построим на основе $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходящуюся к нулю последовательность $\{x'_n = x_n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$. В силу непрерывности оператора A в нуле из сходимости $x'_n \overset{\mathbb{X}}{\to} 0$ должна вытекать сходимость $Ax'_n \overset{\mathbb{Y}}{\to} 0$, однако это невозможно, поскольку $\|Ax'_n\| = \|Ax_n/n\| = \|Ax_n\|/n \ge n/n = 1$. Полученное противоречие доказывает, что оператор A является ограниченным. ■

Утверждение: Ядро $\mathrm{Ker}A$ любого ограниченного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является замкнутым подпространством в $\mathbb{X}$.

□ Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Ker}A$, сходящуюся к некоторому вектору $x \in \mathbb{X}$. Тогда в силу непрерывности оператора A имеем

$$Ax = A\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{Ax_n}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathrm{Ker}A,$$

следовательно подпространство $\mathrm{Ker}A$ замкнуто. ■

Заметим, что понятие нормы линейного оператора ранее уже изучалось Вами в курсе линейной алгебры, однако вопрос об ограниченности линейного оператора в этом курсе не возникал. Дело в том, что в рамках курса линейной алгебры рассматриваются лишь конечномерные линейные операторы, которые, как показывает следующее утверждение, всегда являются ограниченными.

Утверждение: Любой линейный оператор, действующий на конечномерном нормированном пространстве, является ограниченным:

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}),\ \dim \mathbb{X} < +\infty \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$$

$\square$ Поскольку пространство $\mathbb{X}$ конечномерно, все нормы на нём эквивалентны. В частности, произвольная норма $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_1$, а значит существует число M такое, что для всех $x \in \mathbb{X}$ выполнено неравенство $\|x\|_1 \le M\|x\|_{\mathbb{X}}$.

Выберем теперь в пространстве $\mathbb{X}$ какой-либо базис $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$, тогда для произвольного $x \in \mathbb{X}$ имеем разложение $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ и

$$\|Ax\| = \|\sum_{k=1}^{n} x_k A e_k\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|Ae_k\| \le \underbrace{\max_{k=\overline{1,n}} \|Ae_k\|}_{C} \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right] = C\|x\|_1 \le CM\|x\|_{\mathbb{X}}$$

Следовательно, $\|A\| \le CM < +\infty$, т.е. оператор A является ограниченным. $\blacksquare$

Замечание (способ нахождения нормы оператора):

Как правило, норму ограниченного оператора находят (либо оценивают сверху) путем оценки нормы $\|Ax\|$ сверху для произвольного вектора $x \in \mathbb{X}$:

$$\|Ax\| \le \ldots \textit{применяются различные неравенства для оценки сверху} \ldots \le C\|x\|$$

Если получена оценка $\|Ax\| \le C\|x\|$, то можно утверждать, что $\|A\| \le C$. Более того, если использованные для оценки неравенства не слишком грубые, то зачастую норма оператора A оказывается в точности равна C, и тогда это равенство можно попробовать доказать следующими способами:

- предъявить, если возможно, вектор $x^* \in \mathbb{X}$ такой, что $\|Ax^*\| = C\|x^*\|$;
- предъявить последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ такую, что $\|Ax_n\|/\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} C$.

Для доказательства же неограниченности оператора A достаточно предъявить последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ такую, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| = 1$, но $\|Ax_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Пример №1: Найдём норму оператора $A \in \mathcal{B}(L_2[0,1])$, действующего по правилу

$$(Ax)(t) = \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца получаем оценку:

$$\|Ax\|^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds \right|^2 dt = \left[\int_0^1 e^{2t} dt \right] \cdot \left| (x(s), e^{-s}) \right|^2 \leq$$
$$\leq \frac{e^2-1}{2} \|e^{-s}\|^2 \|x\|^2 \; = \; \frac{e^2-1}{2} \cdot \frac{1-e^{-2}}{2} \|x\|^2 \; = \underbrace{\operatorname{sh}^2 1}_{C^2} \|x\|^2$$

Поскольку использованное неравенство Коши–Буняковского–Шварца обращается в равенство при $x^*(s) = e^{-s}$, то полученная оценка $\|Ax\|^2 \leq C^2 \|x\|^2$ является точной (т.е. неулучшаемой), а значит $\|A\| = C = \operatorname{sh} 1$.

Пример №2: Найдём норму оператора $A \in \mathcal{B}(L_2[0,1])$, действующего по правилу

$$(Ax)(t) = a(t)x(t),$$

где $a(t)$ — фиксированная непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция.

Имеем следующую оценку:

$$\|Ax\|^2 = \int_0^1 |a(t)x(t)|^2 \, dt \leq \underbrace{\left(\max_{t \in [0,1]} |a(t)| \right)^2}_{C^2} \int_0^1 |x(t)|^2 \, dt = C^2 \|x\|^2$$

Для произвольной функции $a(t) \in C[0,1]$ полученное неравенство не обращается, вообще говоря, в равенство для какой-либо конкретной функции $x = x^* \in L_2[0,1]$. Попробуем, следовательно, построить последовательность функций $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_2[0,1]$ так, чтобы имела место сходимость $\|Ax_n\|/\|x_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} C$.

Пусть $t^* \in [0,1]$ — точка (возможно, не единственная), в которой непрерывная функция $|a(t)|$ достигает своего максимума на отрезке $[0,1]$, см. Рисунок 3.2. Будем предполагать, что t^* не является одной из концевых точек отрезка $[0,1]$ (в случае $t^* = 0$ или 1 задача решается аналогично, но со специальными оговорками). Возьмем последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in B\,[\,t^*, 1/n\,] := [\,t^* - 1/n,\, t^* + 1/n\,]\,, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

тогда в силу интегральной теоремы о среднем для любого $n \in \mathbb{N}$ достаточно большого, чтобы отрезок $B\,[\,t^*, 1/n\,]$ целиком содержался в промежутке $[0,1]$ будет существовать точка $t_n \in B\,[\,t^*, 1/n\,]$ такая, что

$$\|Ax_n\|^2 = \int\limits_{B[\,t^*,1/n\,]} |a(t)x_n(t)|^2\,dt = |a(t_n)|^2 \int\limits_{B[\,t^*,1/n\,]} |x_n(t)|^2\,dt = |a(t_n)|^2\,\|x_n\|_2^2,$$

поэтому

$$\|Ax_n\|/\|x_n\| = |a(t_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |a(t^*)| = \max_{t\in[0,1]} |a(t)| = C$$

Следовательно, $\|A\| = C = \max\limits_{t\in[0,1]} |a(t)|$.

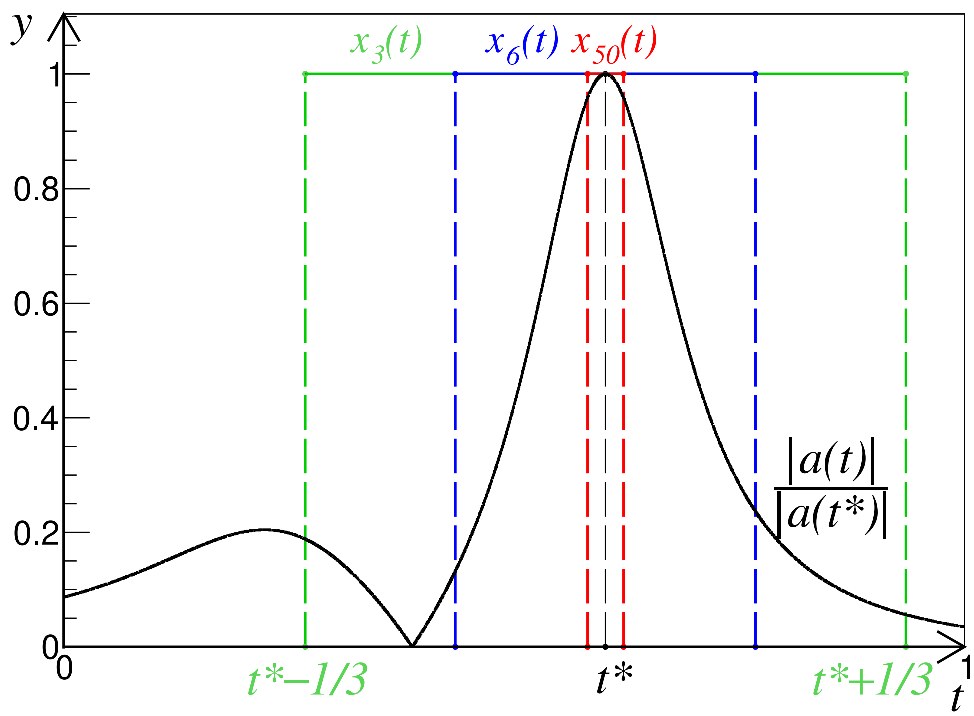


Рис. 3.2: Непрерывная функция $\dfrac{|a(t)|}{|a(t^*)|}$ и некоторые из функций $\{x_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$, являющихся характеристическими функциями отрезков $[\,t^* - 1/n,\ t^* + 1/n\,]$.

Пример №3: Докажем, что оператор $A : L_2[0,1] \cap C^1[0,1] \to L_2[0,1]$, действующий по правилу $(Ax)(t) = x'(t)$ является неограниченным.

Действительно, для последовательности функций $\{x_n(t) = \sqrt{2n+1}\,t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеем

$$\|x_n\|^2 = \int\limits_0^1 (2n+1)\,t^{2n}dt = \frac{2n+1}{2n+1} = 1,$$

в то время как

$$\|Ax_n\|^2 = \int\limits_0^1 (2n+1)\left(nt^{n-1}\right)^2 dt = \frac{(2n+1)n^2}{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

то есть оператор A действительно неограничен (разрывен).

3.3. Сходимость операторных последовательностей и рядов

Очевидно, что введение дополнительной структуры — операторной нормы — превращает пространство ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ в *нормированное пространство*, что дает возможность рассматривать вопросы сходимости *операторных последовательностей* и *рядов*.

Определение: Говорят, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ **сходится** к оператору $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, если $\|A_n - A\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Теорема (свойства сходящихся операторных последовательностей):

Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательности линейных операторов из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, тогда:

1) Если $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ и $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$, то $\alpha A_n + \beta B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha A + \beta B$.

2) Предел последовательности ограниченных операторов также является ограниченным оператором, а именно, если $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$, то $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, причем $\|A\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|A_n\| < +\infty$.

□ **1)** $\|(\alpha A_n + \beta B_n) - (\alpha A + \beta B)\| \le |\alpha|\,\|A_n - A\| + |\beta|\,\|B_n - B\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Так как $\|A - A_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, то существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\|A - A_{n_0}\| < 1$. Тогда

$$\|A\| = \|(A - A_{n_0}) + A_{n_0}\| \le \|A - A_{n_0}\| + \|A_{n_0}\| < 1 + \|A_{n_0}\| < +\infty,$$

то есть оператор A является ограниченным. Более того, его норма равна пределу норм операторов A_n, что прямо вытекает из обратного неравенства треугольника:

$$\big|\|A_n\| - \|A\|\big| \le \|A_n - A\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \blacksquare$$

Теорема (о полноте пространства ограниченных операторов):

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — нормированные пространства, причем $\mathbb{Y}$ является ба́наховым (т.е. полным относительно $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$). Тогда пространство ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ также является ба́наховым (т.е. полным относительно операторной нормы).

□ Возьмем произвольную *фундаментальную* последовательность ограниченных операторов $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Докажем, что эта последовательность сходится, и притом обязательно к *ограниченному* оператору — этим и будет доказана полнота пространства $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Фундаментальность $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ означает, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)\colon \forall\, m, n > N(\varepsilon)\ \hookrightarrow\ \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

Тогда для любого вектора $x \in \mathbb{X}$ имеем оценку

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\| \quad (*),$$

откуда следует, что последовательность векторов $\{A_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в $\mathbb{Y}$. Но поскольку по условию пространство $\mathbb{Y}$ является полным, любая фундаментальная последовательность в нём сходится, т.е. существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n x \in \mathbb{Y}$.

Обозначим за A отображение, ставящее в соответствие вектору $x \in \mathbb{X}$ вектор $A(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} A_n x \in \mathbb{Y}$. Следующая тривиальная выкладка показывает, что A является линейным оператором:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \equiv \lim_{n\to+\infty} A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \lim_{n\to+\infty} A_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n\to+\infty} A_n x_2 \equiv$$
$$\equiv \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$$

Докажем, наконец, что оператор A является пределом последовательности $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Переходя в $(*)$ к пределу при $m \to +\infty$, получим неравенство $\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon\|x\|$, а значит $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$ и $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ в силу произвольности ε . Кроме того, будучи пределом последовательности ограниченных операторов A также является ограниченным. ■

Определение: Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. **Операторным рядом** называется формальное выражение $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, а **частичной суммой** этого ряда — конечная сумма $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} A_n$. Операторный ряд называется **сходящимся**, если существует предел его частичных сумм $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N$, называемый **суммой операторного ряда**.

Теорема (свойства сходимости операторных рядов):

Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательности ограниченных операторов из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Тогда:

1) Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = A$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} B_n = B$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha A + \beta B$.

2) Справедлив следующий *признак сходимости операторного ряда*: Если пространство $\mathbb{Y}$ ба́нахово и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\|A_n\|$ сходится, то операторный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ также сходится и притом к ограниченному оператору, норма которого допускает оценку $\|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\| \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\|A_n\| < +\infty$.

□ **1)** Упражнение.

2) Так как по условию числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\|A_n\|$ сходится, последовательность его частичных сумм фундаментальна, т.е.

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon):\ \forall\, m > n > N(\varepsilon) \hookrightarrow \sum_{k=n+1}^{m}\|A_k\| < \varepsilon$$

Рассмотрим последовательность $\left\{S_N := \sum\limits_{k=1}^{N} A_k\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ частичных сумм операторного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Эта последовательность является фундаментальной в $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, поскольку для любых $m > n > N(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} A_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m}\|A_k\| < \varepsilon$$

Поскольку по условию пространство $\mathbb{Y}$ ба́нахово, то по доказанной выше теореме пространство ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ также является ба́наховым. Значит фундаментальная последовательность $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, а с ней и сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ сходятся в $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Более того, норма суммы этого ряда допускает оценку

$$\|\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\| = \|\lim_{N\to+\infty} S_N\| = [\textit{св-во 2) операторных посл-тей}] = \lim_{N\to+\infty}\|S_N\| \leq$$

$$\leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \|A_n\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \|A_n\| < +\infty \blacksquare$$

3.4. Обратный оператор

В многочисленных приложениях нередко возникают т.н. *обратные задачи*, заключающиеся в восстановлении ненаблюдаемых параметров x некоторой системы по наблюдаемым данным y. Если связь между x и y имеет вид линейного операторного уравнения $Ax = y$, то решение обратной задачи записывается в виде $x = A^{-1}y$, где A^{-1} — *обратный оператор*. В этом пункте мы изучим вопрос о существовании обратного оператора, а также его простейшие свойства.

Напомним некоторые базовые понятия, относящиеся к вопросу об обратимости отображения.

Определение: Пусть X, Y — непустые множества, $A : X \to Y$ — отображение.

- A называется **инъективным**, если для любых $x_{1,2} \in X$ из того, что $A(x_1) = A(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$, или, эквивалентно, из того что $x_1 \neq x_2$ следует, что $A(x_1) \neq A(x_2)$.

  Иными словами, инъективное отображение переводит различные элементы множества X в различные же элементы множества Y, так что у каждого элемента $y \in Y$ может быть *не более одного* (т.е. 0 либо 1) прообраза в X, т.е. элемента $x \in X$ такого, что $y = A(x)$.

- A называется **сюръективным**, если образ множества X под действием отображения A покрывает всё множество Y, т.е. $A(X) = Y$.

  Иначе говоря, при сюръективном отображении у любого элемента $y \in Y$ существует *хотя бы один* прообраз в X.

- A называется **биективным**, или **взаимно–однозначным**, если оно одновременно и инъективно, и сюръективно.

  Другими словами, при биективном отображении у любого элемента $y \in Y$ существует *один и только один* прообраз в X.

Определение: Пусть X, Y — непустые множества, $A : X \to Y$ — отображение.

- Отображение $A_l^{-1}\colon Y \to X$ называется **левым обратным** к A, если $A_l^{-1} \circ A = I_X$, где $I_X : X \to X$ обозначает тождественное отображение X в себя.
- Отображение $A_r^{-1}\colon Y \to X$ называется **правым обратным** к A, если $A \circ A_r^{-1} = I_Y$, где $I_Y : Y \to Y$ обозначает тождественное отображение Y в себя.

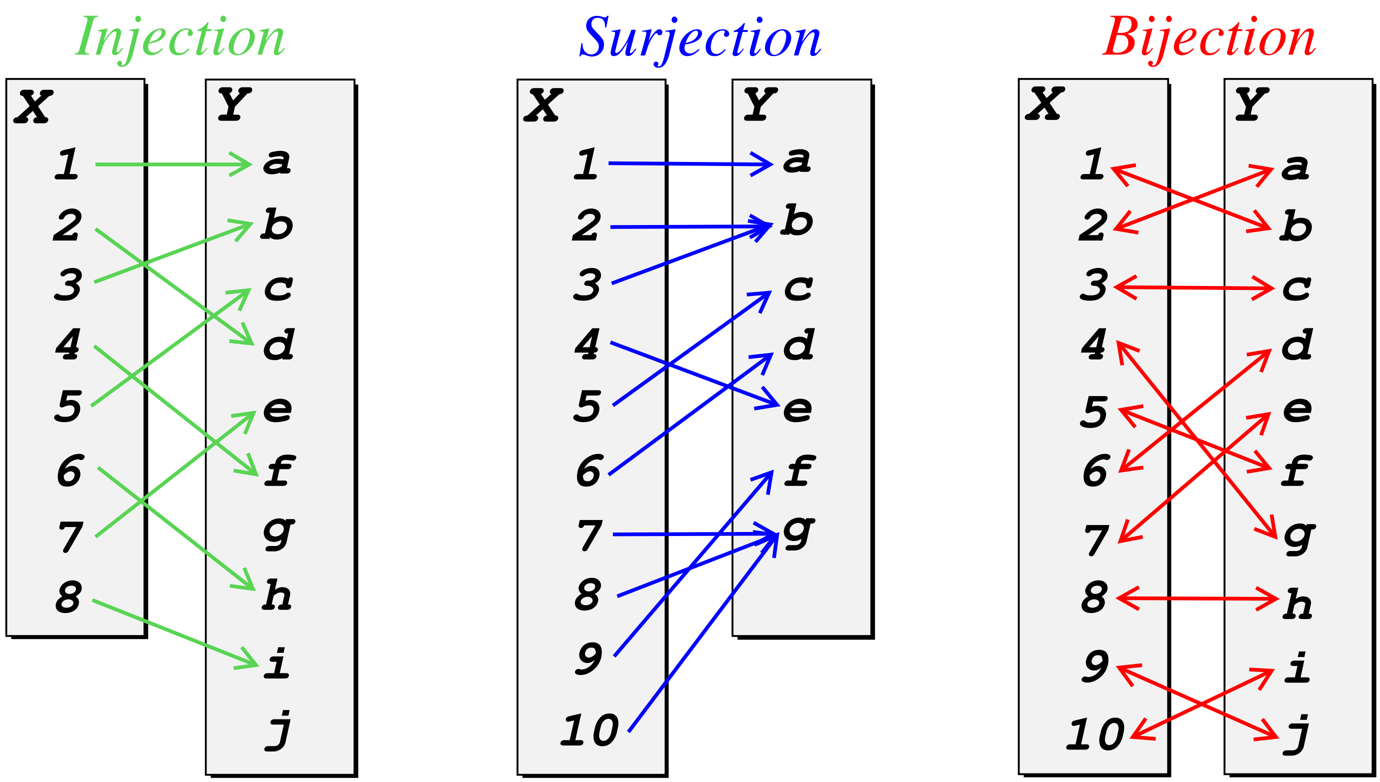


Рис. 3.3: Инъективное, сюръективное и биективное отображения.

- Отображение $A^{-1}\colon Y \to X$ называется **обратным** к A, если оно является одновременно левым и правым обратным по отношению к A.

Утверждение: Пусть X, Y — непустые множества, $A : X \to Y$ — отображение.

1) A_l^{-1} существует тогда и только тогда, когда A инъективно.

2) A_r^{-1} существует тогда и только тогда, когда A сюръективно.

3) A^{-1} существует тогда и только тогда, когда A биективно.

☐ **1)** Пусть A_l^{-1} существует, т.е. $A_l^{-1} \circ A = I_X$. Докажем, что A инъективно. Предположим, что $x_{1,2} \in X$ таковы, что $A(x_1) = A(x_2) = y \in Y$. Тогда с одной стороны $A_l^{-1} \circ A(x_{1,2}) = I_X(x_{1,2}) = x_{1,2}$, а с другой стороны $A_l^{-1} \circ A(x_{1,2}) = A_l^{-1}(y)$. Следовательно, $x_1 = x_2 = A_l^{-1}(y)$, т.е. A инъективно.

Обратно, предположим, что A инъективно, т.е. у любого $y \in A(X) \subset Y$ существует единственный прообраз $x \in X$: $y = A(x)$. Тогда можно определить левое обратное отображение $A_l^{-1} : Y \to X$ правилом: если $y \in A(X)$, то $A_l^{-1}(y) := x$; если же $y \notin A(X)$, то в качестве $A_l^{-1}(y)$ выберем произвольный элемент множества X.

2) Пусть A_r^{-1} существует, т.е. $A \circ A_r^{-1} = I_Y$. Докажем, что A сюръективен, т.е. что $A(X) = Y$. Действительно, так как $A_r^{-1}(Y) \subset X$, то $A(A_r^{-1}(Y)) = I_Y(Y) = Y \subset A(X)$. С другой же стороны $A(X) \subset Y$. Значит, $A(X) = Y$, т.е. A сюръективен.

Обратно, пусть A сюръективен, тогда у любого элемента $y \in Y$ существует непустой прообраз в X, т.е. множество $X_y \subset X$: $A(X_y) = \{y\}$. Выберем из X_y какой-нибудь один элемент $x \in X_y$. Тогда правое обратное отображение $A_l^{-1} : Y \to X$ можно задать правилом: $A_r^{-1}(y) = x$.

3) Очевидно следует из 1) и 2). ■

Рассмотрим теперь введенные выше понятия применительно к *линейным операторам*. Пусть далее в этом пункте $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — линейные пространства.

Определение: Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ называется **обратимым**, если он инъективен. Иными словами, A называется обратимым, если для любого $y \in \mathrm{Im}A$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение.

Утверждение: Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ обратим тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}A = \{0\}$.

□ Пусть оператор A обратим, т.е. инъективен. Последнее означает, что для любых $x_{1,2} \in \mathbb{X} = \mathrm{Dom}A$ из того, что $Ax_1 = Ax_2$ следует, что $x_1 = x_2$. Обозначим за $0_\mathbb{X}$ нулевой вектор пространства $\mathbb{X}$. Тогда для вектора $x \in \mathrm{Ker}A$ имеем $Ax = 0_\mathbb{Y} = A0_\mathbb{X}$, следовательно $x = 0_\mathbb{X}$, а значит $\mathrm{Ker}A = \{0\}$.

Обратно, предположим, что $\mathrm{Ker}A = \{0\}$ и $x_{1,2} \in \mathbb{X}$ таковы, что $Ax_1 = Ax_2$. Тогда $A(x_1 - x_2) = 0$, а значит $(x_1 - x_2) \in \mathrm{Ker}A = \{0\}$ и $x_1 = x_2$, т.е. A инъективен. ■

Итак, обратимость линейного оператора A по определению означает его инъективность или, равносильно, существование левого обратного A_l^{-1}, или же равенство нулю его ядра $\mathrm{Ker}A = \{0\}$. Если же $\mathrm{Ker}A \neq \{0\}$, то для любого $y \in \mathrm{Im}A$ уравнение $Ax = y$ по–прежнему имеет решение, однако оно является не единственным, а определенным с точностью до произвольного вектора из ядра $\mathrm{Ker}A$.

Что же касается сюръективности оператора A, равносильной существованию правого обратного A_r^{-1}, то она, очевидно, означает равенство $\mathrm{Im}A = \mathbb{Y}$. Если оператор A не сюръективен, то на его основе можно построить сюръективный оператор $\widetilde{A} : \mathbb{X} \to \mathrm{Im}A$ такой, что для любого $x \in \mathbb{X} \hookrightarrow \widetilde{A}x = Ax$. Если вдобавок A инъективен, то получившийся оператор $\widetilde{A}$ является биективным и для него существует обратный оператор $\widetilde{A}^{-1}$.

Определение: Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является обратимым. Оператор $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to \mathbb{X} = \operatorname{Dom} A$ такой, что $AA^{-1} = I_{\operatorname{Im} A}$ и $A^{-1}A = I_{\operatorname{Dom} A}$ называется **оператором, обратным к A**.

Теорема (свойства обратного оператора):

1) Если $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ обратим, то A^{-1} является линейным оператором.
2) Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и $B \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ обратимы, тогда BA тоже обратим и $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
3) Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ обратим, тогда A^{-1} также обратим и $(A^{-1})^{-1} = A$ (инволютивность обращения).

□ **1)** Пусть $y_{1,2} \in \operatorname{Im} A$, $\alpha_{1,2} \in \mathbb{F}$. В силу обратимости A существуют единственные $x_{1,2} \in \mathbb{X}$ такие, что $Ax_{1,2} = y_{1,2}$. Тогда

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = A^{-1}(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2,$$

т.е. A^{-1} линеен.

2) Обратимость операторов A и B означает, что $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\operatorname{Ker} B = \{0\}$. Тогда очевидно, что и $\operatorname{Ker} BA = \{0\}$, т.е. оператор BA также обратим. Далее имеем

$$A^{-1}\underbrace{B^{-1}B}_{I_{\mathbb{Y}}}A = \underbrace{A^{-1}A}_{I_{\mathbb{X}}} = I_{\mathbb{X}} \quad \text{и} \quad B\underbrace{AA^{-1}}_{I_{\mathbb{Y}}}B^{-1} = \underbrace{BB^{-1}}_{I_{\mathbb{Z}}} = I_{\mathbb{Z}},$$

то есть оператор $A^{-1}B^{-1}$ является одновременно левым и правым обратным для BA, а значит $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$.

3) По определению обратного оператора имеем $AA^{-1} = I_{\operatorname{Im} A}$ и $A^{-1}A = I_{\operatorname{Dom} A}$. Это означает, что оператор A служит для оператора A^{-1} одновременно левым и правым обратным, и следовательно $A = (A^{-1})^{-1}$. ■

Обратимся к вопросу об ограниченности обратного оператора.

Теорема (критерий ограниченности обратного оператора):

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — нормированные пространства. Для линейного оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ существует ограниченный обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} A, \mathbb{X})$ тогда и только тогда, когда оператор A *ограничен снизу*, т.е. существует число $m > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{X}$ выполнено неравенство $\|Ax\| \geq m\|x\|$. Более того, в этом случае справедлива оценка $\|A^{-1}\| \leq 1/m$.

□ **Необходимость:** Пусть A^{-1} существует и ограничен на ImA. Это означает, что $\|A^{-1}\| < +\infty$ и для любого вектора $y \in \mathrm{Im}A$ справедлива оценка $\|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\|\|y\|$. Поскольку для $y \in \mathrm{Im}A$ всегда существует единственный прообраз $x = A^{-1}y \in \mathbb{X}$, то данную оценку можно переписать как $\|x\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\|$ или $\|Ax\| \geq \|x\|/\|A^{-1}\|$, а значит оператор A ограничен снизу.

Достаточность: Пусть оператор A ограничен снизу, т.е. существует число $m > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{X}$ выполнено неравенство $\|Ax\| \geq m\|x\|$. Докажем сначала, что A обратим. Возьмем вектор $x \in \mathrm{Ker}A$, т.е. $Ax = 0$. Тогда $\|Ax\| = 0 \geq m\|x\|$, а значит $x = 0$, $\mathrm{Ker}A = \{0\}$ и оператор A обратим.

Положив теперь $x = A^{-1}y$ получим оценку $\|AA^{-1}y\| = \|y\| \geq m\|A^{-1}y\|$, т.е. $\|A^{-1}y\| \leq \|y\|/m$. Следовательно, оператор A^{-1} ограничен и $\|A^{-1}\| \leq 1/m$. ■

Замечание: Интуитивно причина ограниченности A^{-1} в случае ограниченности оператора A снизу совершенно понятна. Дело в том, что образ единичной сферы $A(S[0,1])$ для ограниченного снизу оператора *отделен от нуля*, ведь для любого $x \in S[0,1] \hookrightarrow \|Ax\| \geq m > 0$. Значит, для возвращения $A(S[0,1])$ обратно в $S[0,1]$ оператору A^{-1} не требуются неограниченно большие «коэффициенты растяжения».

Если же оператор A не ограничен снизу, т.е. если для любого числа $m > 0$ найдется вектор $x \in \mathbb{X}$ такой, что $\|Ax\| < m\|x\|$, то обратный оператор A^{-1} может существовать, но обязательно будет неограниченным. Причина этого в том, что неограниченный снизу оператор A способен отображать далекие по норме пространства $\mathbb{X}$ векторы x и x_0 в близкие по норме пространства $\mathbb{Y}$ векторы $y = Ax$ и $y_0 = Ax_0$. В таком случае обратный оператор должен быть способен выдавать неограниченно большие «коэффициенты растяжения», т.е. быть неограниченным. С точки зрения обратной задачи $x = A^{-1}y$ это будет означать *неустойчивость* решения x по отношению к малым изменениям правой части y.

Пример: Рассмотрим интегральный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$, где $\mathbb{X} = (C[0,2\pi], \|\cdot\|_c)$, действующий по правилу $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$.

Легко проверить, что оператор A является ограниченным:

$$\|Ax\|_c = \max_{t\in[0,2\pi]} \left| \int\limits_0^t x(s)ds \right| \;\leq\; \int\limits_0^{2\pi} \max_{s\in[0,2\pi]} |x(s)|\, ds \;\leq\; 2\pi\|x\|_c,$$

то есть $\|A\| \leq 2\pi$.

Также очевидно, что образом оператора A является подпространство непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в точке 0:

$$\mathrm{Im}A = \{y \in C^1[0,2\pi] : y(0) = 0\} \subset \mathbb{X}$$

Далее, подпространство $\mathrm{Im}A$ служит областью определения для обратного оператора $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathrm{Im}A, \mathbb{X})$, действующего по правилу $(A^{-1}y)(t) = y'(t)$. Покажем, что оператор A^{-1} является неограниченным. Рассмотрим последовательность функций $\{y_n(t) = \sin(nt)/n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда $\{x_n(t) := (A^{-1}y_n)(t) = \cos(nt)\}_{n\in\mathbb{N}}$, следовательно

$$\frac{\|A^{-1}y_n\|_c}{\|y_n\|_c} = \frac{\|\cos(nt)\|_c}{\|\sin(nt)/n\|_c} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

т.е. A^{-1} действительно неограничен. Предыдущее вычисление можно трактовать и как доказательство того факта, что оператор A неограничен снизу, поскольку $\|x_n = \cos(nt)\|_c = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, тогда как $\|(Ax_n)(t) = \sin(nt)/n\|_c \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Определение: Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ — нормированные пространства. Линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, имеющий ограниченный обратный, определенный на всем пространстве $\mathbb{Y}$ называют **непрерывно обратимым**.

Теорема Неймана: Пусть $\mathbb{X}$ — ба́нахово пространство, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\|A\| < 1$. Тогда оператор $(I - A)$ непрерывно обратим, т.е. обратный к нему оператор $(I-A)^{-1}$ существует, определен на всем пространстве $\mathbb{X}$ и ограничен. Кроме того, обратный оператор представляется в виде *ряда Неймана* $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$, где $A^0 := I$, а для его нормы справедлива оценка $\|(I - A)^{-1}\| \le 1/(1 - \|A\|)$.

$\square$ Докажем обратимость оператора $(I - A)$. Пусть $x \in \mathrm{Ker}(I - A)$, тогда

$$(I - A)x = x - Ax = 0 \quad\Rightarrow\quad x = Ax \quad\Rightarrow\quad \|x\| = \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \quad\Rightarrow$$

$$\|x\|\,(1 - \|A\|) \le 0 \quad\Rightarrow\quad \|x\| = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Ker}(I - A) = \{0\},$$

следовательно $(I - A)$ обратим.

Далее, операторный ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$ сходится, поскольку сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\|A^n\|$:

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} A^n\| \le \sum_{n=0}^{+\infty}\|A^n\| \le \sum_{n=0}^{+\infty}\|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|} < +\infty$$

Далее докажем, что оператор $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$ является левым обратным для $(I - A)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n(I-A) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} A^n(I-A) = \lim_{N\to+\infty} \left[\sum_{n=0}^{N} A^n - \sum_{n=1}^{N+1} A^n\right] = I - A^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} I,$$

поскольку $\|A^{N+1}\| \le \|A\|^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Аналогично доказывается, что $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$ — правый обратный для $(I-A)$.

Таким образом, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n = (I-A)^{-1}$ и $\mathrm{Dom}(I-A)^{-1} = \mathrm{Dom}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n\right) = \mathbb{X}$. ■

Следующая теорема является одной из важнейших в функциональном анализе, однако её доказательство мы опустим.

Теорема Ба́наха об обратном операторе:

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — *ба́наховы* пространства и ограниченный оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ с областью определения $\mathrm{Dom}A = \mathbb{X}$ является биективным. Тогда оператор A непрерывно обратим, т.е. обратный к нему оператор A^{-1} существует, *ограничен* и определен на всем пространстве $\mathbb{Y}$.

□ Без доказательства. ■

Определение: Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ — нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Задача решения уравнения $Ax = y$ называется *корректной по Адамару*, если её решение существует, единственно и *устойчиво*, т.е. решение $x = A^{-1}y$ непрерывно зависит от y.

Замечание: Рассмотрим задачу решения уравнения $Ax = y$ с ограниченным обратимым оператором $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Будем считать y *точным* значением наблюдаемых данных, а x — соответствующим *точным решением.* Предположим, что известна верхняя оценка ε относительной ошибки измерения наблюдаемых данных, так что для любого фактического измерения $\widetilde{y}$ выполнено неравенство

$$\frac{\|\widetilde{y} - y\|}{\|y\|} \le \varepsilon$$

Оценим сверху относительную ошибку решения $\widetilde{x}$:

$$\|\widetilde{x} - x\| = \|A^{-1}(\widetilde{y} - y)\| \le \|A^{-1}\|\|\widetilde{y} - y\| = \|A^{-1}\|\frac{\|\widetilde{y} - y\|}{\|y\|}\|y\| \le$$

$$\le \|A^{-1}\|\varepsilon\|y\| = \|A^{-1}\|\varepsilon\|Ax\| \le \underbrace{\|A^{-1}\|\|A\|}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}\varepsilon\|x\| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|\widetilde{x}-x\|}{\|x\|} \leq \mathcal{K}(A)\varepsilon, \quad \text{где} \quad \mathcal{K}(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$$

Величина $\mathcal{K}(A)$ называется *числом обусловленности* (*condition number*) оператора A, она характеризует максимальный «коэффициент усиления» относительной ошибки наблюдаемых данных под действием обратного оператора A^{-1}. Отметим, что $\mathcal{K}(A) \geq 1$ для любого оператора A, ведь $\mathcal{K}(A) = \|A^{-1}\|\|A\| \geq \|A^{-1}A\| = \|I\| = 1$.

Если число $\mathcal{K}(A)$ невелико, то задачу $Ax = y$ принято называть *хорошо обусловленной.* В этом случае решение x этой задачи является устойчивым по отношению к малым отклонениям в наблюдаемых данных. Если же $\mathcal{K}(A) \gg 1$, то задача называется *плохо обусловленной* (*ill-conditioned*). Наконец, если $\mathcal{K}(A) = +\infty$, т.е. если обратный оператор A^{-1} неограничен, то малые отклонения в наблюдаемых данных могут приводить к решениям, сколь угодно далеким от истинных параметров системы. Иными словами, в случае $\mathcal{K}(A) = +\infty$ решение обратной задачи *неустойчиво* и сама эта задача является *некорректной.* Для работы с некорректными задачами разработаны специальные методы *регуляризации*, однако их рассмотрение выходит за рамки нашего курса.

3.5. Спектр ограниченного оператора

В различных приложениях часто возникают операторные уравнения вида

$$(A - \lambda I)x = y,$$

где A — линейный оператор и λ — комплексный параметр. Исследуем разрешимость этого уравнения относительно x в зависимости от λ.

Определение: Пусть $\mathbb{X}$ — ба́нахово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ — ограниченный оператор.

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется **регулярным значением** оператора A, если оператор $(A - \lambda I)$ биективен. Множество всех регулярных значений оператора A называется его **резольвентным множеством** $\rho(A)$

Спектром оператора A называется множество $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Замечание: Если $\lambda \in \rho(A)$, то оператор $(A - \lambda I)$ ограничен и биективен. Значит, согласно теореме ба́наха об обратном операторе $(A - \lambda I)$ непрерывно обратим, то есть для него существует ограниченный обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, определенный на всем пространстве $\mathbb{X}$.

Определение: *Операторнозначная функция* $R(\lambda; A) := (A - \lambda I)^{-1}$ комплексного переменного λ, заданная на резольвентном множестве $\rho(A)$ называется **резольвентой**

оператора A.

Очевидно, что при $\lambda \in \rho(A)$ операторное уравнение $(A-\lambda I)x = y$ имеет, и притом единственное решение $x = R(\lambda; A)y$ для любой правой части $y \in \mathbb{X}$, причем это решение зависит от y непрерывно в силу ограниченности $R(\lambda; A)$.

Обратимся теперь к изучению спектра оператора A. Напомним, что для конечномерных операторов, изучавшихся в курсе линейной алгебры, спектры представляли собой конечные наборы их собственных значений с учетом кратности. Спектры же интересующих нас бесконечномерных операторов устроены заметно сложнее.

Определение: Пусть $\mathbb{X}$ — ба́нахово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ — ограниченный оператор и $\lambda \in \sigma(A)$, то есть оператор $(A - \lambda I)$ *не биективен*, тогда

1) λ называется точкой **точечного спектра** $\sigma_p(A)$ оператора A, или его **собственным значением**, если оператор $(A - \lambda I)$ не инъективен (т.е. необратим).

   Как мы уже знаем, необратимость оператора $(A - \lambda I)$ равносильна условию $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Подпространство $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ называется **собственным подпространством**, отвечающим собственному значению $\lambda \in \sigma_p(A)$, а его размерность — **кратностью** данного собственного значения. Кроме того, любой ненулевой вектор $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ (т.е. $(A - \lambda I)x = 0$ или $Ax = \lambda x$) называется **собственным вектором** оператора A, отвечающим собственному значению λ.

2) λ называется точкой **непрерывного спектра** $\sigma_c(A)$ оператора A, если $(A-\lambda I)$ инъективен, но не сюръективен, т.е. $\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq \mathbb{X}$, однако образ $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ всюду плотен в $\mathbb{X}$, т.е. $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\mathrm{Im}(A - \lambda I) = \mathbb{X}$.

   Итак, в случае $\lambda \in \sigma_c(A)$ оператор $(A-\lambda I)$ обратим, но не на всем пространстве $\mathbb{X}$, а на всюду плотном подпространстве $\mathrm{Im}(A - \lambda I) \equiv \mathrm{Dom}(A - \lambda I)^{-1}$.

3) λ называется точкой **остаточного спектра** $\sigma_r(A)$ оператора A, если $(A - \lambda I)$ инъективен, но не сюръективен, причем образ $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ не плотен в $\mathbb{X}$, т.е. $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq \mathbb{X}$.

   Иначе говоря, в случае $\lambda \in \sigma_r(A)$ оператор $(A-\lambda I)$ также является обратимым, однако область определения обратного оператора не плотна в $\mathbb{X}$.

Итак, спектр ограниченного оператора представляется в виде объединения трех непересекающихся частей:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Замечание: Существуют и другие классификации точек спектра ограниченного оператора.

Определение: **Спектральным радиусом** оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ называется величина $r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

Теорема (свойства спектра ограниченного оператора):

Пусть $\mathbb{X}$ — ба́нахово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ — ограниченный оператор со спектром $\sigma(A)$, тогда:

1) $\sigma(A)$ является *замкнутым* множеством в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

2) $\sigma(A)$ является *ограниченным* множеством, целиком содержащимся в круге $B\left[0; \|A\|\right]$ радиуса $\|A\|$ с центром в нуле.

   Другими словами, спектральный радиус ограниченного оператора не превосходит нормы этого оператора: $r(A) \le \|A\| < +\infty$, см. Рис. 3.4.

3) $\sigma(A)$ *непуст.*

4) Справедлива формула Гельфанда–Бёрлинга $r(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

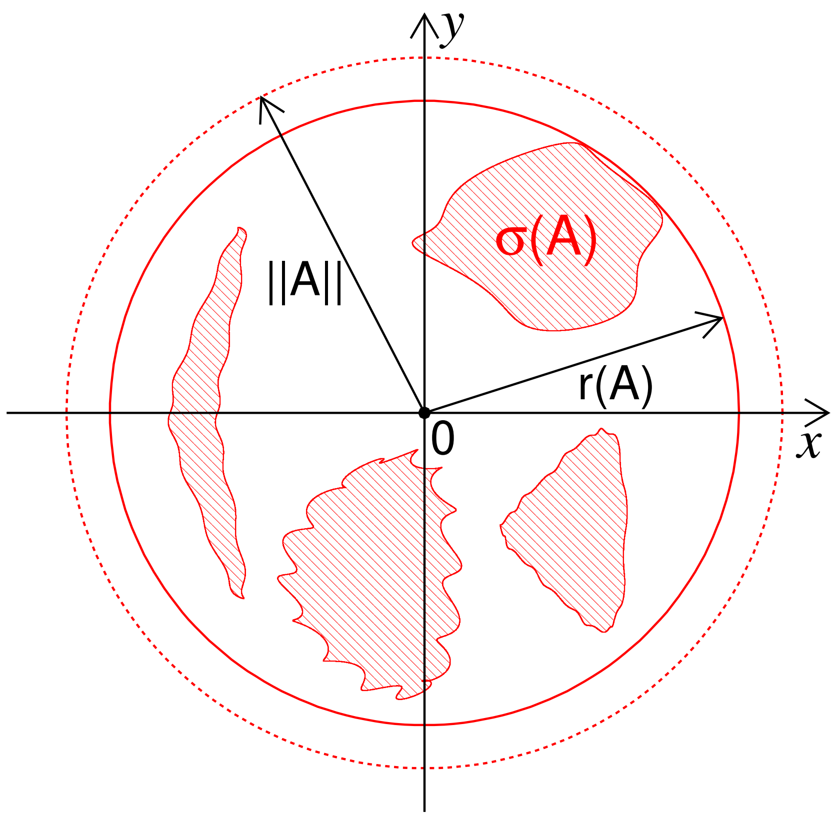


Рис. 3.4: Возможный вид спектра $\sigma(A)$ ограниченного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$.

□ **1)** Вместо доказательства замкнутости $\sigma(A)$ докажем равносильное утверждение об открытости резольвентного множества $\rho(A)$.

Напомним, что по определению множество $\rho(A)$ будет называться открытым, если для любой его точки $\lambda_0 \in \rho(A)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что круг $B(\lambda_0; \varepsilon)$ также содержится в $\rho(A)$. Иными словами, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ такого, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ должна существовать резольвента $R(\lambda; A)$.

Возьмем произвольные $\lambda_0 \in \rho(A)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, тогда

$$(A - \lambda I) = (A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I = \big[A - \lambda_0 I\big] \cdot \big[I - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0; A)\big] \quad (*)$$

Далее, согласно теореме Неймана при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon := 1/\|R(\lambda_0; A)\|$ оператор $\big[I - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0; A)\big]$ будет иметь ограниченный обратный, определенный на всем пространстве $\mathbb{X}$. Следовательно, при том же условии на λ оператор $(A - \lambda I)$ также будет непрерывно обратим, т.е. будет существовать резольвента

$$R(\lambda; A) = \big[I - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0; A)\big]^{-1} \cdot R(\lambda_0; A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R^{n+1}(\lambda_0; A) \quad (*)$$

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{\|R(\lambda_0; A)\|}{1 - |\lambda - \lambda_0| \, \|R(\lambda_0; A)\|} < +\infty$$

Тем самым мы доказали открытость резольвентного множества $\rho(A)$.

Заметим, что тот факт, что резольвента представляется степенным рядом $(*)$ в окрестности любой точки $\lambda_0 \in \rho(A)$ означает, что она является *аналитической операторнозначной функцией* в $\rho(A)$, причем для её производной n–го порядка справедлива формула

$$R^{(n)}(\lambda_0; A) = n! R^{n+1}(\lambda_0; A)$$

2) Вместо доказательства того, что спектр $\sigma(A)$ содержится в круге $B[0; \|A\|]$ докажем, что любая точка вне этого круга лежит в резольвентном множестве $\rho(A)$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| > \|A\|$. Поскольку $(A - \lambda I) = \big[-\lambda I\big] \cdot \big[I - A/\lambda\big]$, то для существования резольвенты $R(\lambda; A)$ достаточно, чтобы оператор $\big[I - A/\lambda\big]$ был непрерывно обратим. Однако это очевидно так в силу теоремы Неймана, применимость которой в данном случае несомненна, ибо $\|A/\lambda\| < 1$. Итак, мы доказали существование резольвенты

$$R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\big[I - A/\lambda\big]^{-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}, \quad |\lambda| > \|A\|,$$

так что $\lambda \in \rho(A)$, что и требовалось доказать. Отметим, что последний ряд также называют *рядом Неймана для резольвенты*.

3) Будем рассуждать от противного: пусть $\sigma(A) = \varnothing$ и $\rho(A) = \mathbb{C}$. В таком случае резольвента $R(\lambda; A)$ является *целой* (т.е. аналитической во всей комплексной плоскости) операторнозначной функцией. Можно показать, что для целой операторнозначной функции справедлив аналог теоремы Лиувилля, известной Вам из курса теории функций комплексного переменного: *целая операторнозначная функция, ограниченная во всей комлексной плоскости, является постоянной.* Таким образом, $R(\lambda; A) = C \cdot I$ для некоторой константы $C \in \mathbb{C}$. Более того, эта константа равна нулю, поскольку при $|\lambda| > \|A\|$

$$\|R(\lambda; A)\| = |C| = \frac{1}{|\lambda|}\,\|(I - A/\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \|A\|/|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

Итак, из предположения $\sigma(A) = \varnothing$ вытекает, что резольвента ограниченного оператора обязана быть нулевым оператором, что противоречит её биективности. Следовательно, $\sigma(A) \neq \varnothing$.

4) Без доказательства. ■

Пример: Найдем спектр оператора умножения на независимую переменную в пространстве $L_2[0,1]$, т.е. оператора $A \in \mathcal{L}(L_2[0,1])$, действующего на произвольную функцию $x \in L_2[0,1]$ по правилу $(Ax)(t) = tx(t)$.

Прежде всего проверим, что оператор A является ограниченным:

$$\|Ax\|^2 = \int\limits_0^1 |tx(t)|^2\,dt \leq \int\limits_0^1 |x(t)|^2 dt = \|x\|^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq 1^{*}$$

Итак, $\|A\| \leq 1$, а значит спектр оператора целиком содержится в замкнутом шаре $B[0;1]$ единичного радиуса с центром в нуле.

Найдем точечный спектр оператора A. Напомним, что $\lambda \in \sigma_p(A)$, если существует ненулевое решение уравнения $(A - \lambda I)x = 0$. В нашем случае это уравнение принимает вид $(t - \lambda)x(t) = 0$, так что $x(t)$ должно быть равно нулю всюду за исключением, быть может, точки $t = \lambda$ (если $\lambda \in [0,1]$), в которой значение $x(t)$ может быть произвольным. Таким образом, функция $x(t)$ должна быть равна нулю почти всюду на отрезке $[0,1]$, а значит в пространстве $L_2[0,1]$ она совпадает с тождественно нулевой

---

* Более того, согласно Примеру 2 из пункта «Непрерывность и ограниченность линейного оператора» $\|A\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |t| = 1$.

функцией: $x \overset{L_2}{=} 0$. Следовательно, при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение $(A - \lambda I)x = 0$ имеет только нулевое решение, и потому точечный спектр оператора A пуст: $\sigma_p(A) = \varnothing$.

Итак, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $(A - \lambda I)$ является обратимым. Чтобы найти обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, необходимо решить уравнение $(A - \lambda I)x = y$ относительно x:

$$(t-\lambda)x(t) \ \overset{L_2}{=} \ y(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) \ \overset{L_2}{=} \ (A-\lambda I)^{-1}y(t) \ \overset{L_2}{=} \ \frac{y(t)}{t-\lambda}$$

Исследуем теперь область определения $(A - \lambda I)^{-1}$, то есть множество всех функций $y \in L_2[0,1]$, при которых функция $x(t) = y(t)/(t-\lambda)$ также лежит в $L_2[0,1]$.

Пусть число $\lambda \in \mathbb{C}$ не принадлежит *замкнутому* отрезку $[0,1]$, тогда расстояние от λ до этого отрезка положительно:

$$d := \rho\left(\lambda, [0,1]\right) \equiv \inf_{t\in[0,1]} |\lambda - t| > 0$$

В таком случае для любой функции $y \in L_2[0,1]$

$$\|x\|^2 = \int\limits_0^1 \left|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2 dt \le \frac{1}{d^2}\int\limits_0^1 |y(t)|^2 dt = \frac{\|y\|^2}{d^2} < +\infty,$$

следовательно при любом $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$ обратный оператор является ограниченным, причем $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \le 1/d$, и определенным на всем пространстве $L_2[0,1]$, так что такое λ является регулярным значением оператора A.

Пусть теперь $\lambda \in [0,1]$, тогда область определения обратного оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ не совпадает со всем $L_2[0,1]$, поскольку, например, для функции $y(t) \equiv 1$

$$\int\limits_0^1 \left|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2 dt = \int\limits_0^1 \frac{1}{(t-\lambda)^2} dt = +\infty$$

Итак, весь отрезок $[0,1]$ лежит в спектре оператора A, и нам осталось установить, какой из частей спектра — непрерывному или остаточному — принадлежат его точки. Введем в рассмотрение линейное подпространство $\mathcal{D}_\lambda \subset L_2[0,1]$ функций, равных нулю в некоторой окрестности (своей для каждой функции) точки $t = \lambda \in [0,1]$. Иными словами, если $y \in \mathcal{D}_\lambda$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $y(t) \equiv 0$ при $|t - \lambda| < \delta$.

Следующая оценка показывает, что для любой функции $y \in \mathcal{D}_\lambda$ соответствующая ей функция $x(t) = (A - \lambda I)^{-1} y(t)$ лежит в пространстве $L_2[0,1]$:

$$\|x\|^2 = \int\limits_0^1 \left| \frac{y(t)}{t - \lambda} \right|^2 dt \leq \frac{1}{\delta^2} \int\limits_0^1 |y(t)|^2 dt = \frac{\|y\|^2}{\delta^2} < +\infty,$$

а значит подпространство $\mathcal{D}_\lambda$ содержится в области определения обратного оператора $(A - \lambda I)^{-1}$.

Покажем, наконец, что подпространство $\mathcal{D}_\lambda$ всюду плотно в $L_2[0,1]$, что означает, что для любой функции $y \in L_2[0,1]$ должна существовать последовательность функций $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_\lambda$, сходящаяся к y по L_2–норме. Это действительно так, ведь в качестве такой последовательности можно взять, например, функции

$$y_n(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } t \in [0,1] \text{ и } |t - \lambda| \geq 1/n \\ 0, & \text{если } t \in [0,1] \text{ и } |t - \lambda| < 1/n \end{cases}$$

Таким образом, подпространство $\mathcal{D}_\lambda$, а вместе с ним и область определения обратного оператора $\mathrm{Dom}(A - \lambda I)^{-1}$ всюду плотны в $L_2[0,1]$, т.е. любое число $\lambda \in [0,1]$ лежит в непрерывном спектре оператора A.

Итак, мы получили следующие результаты для спектра оператора умножения на независимую переменную в $L_2[0,1]$:

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus [0,1], \quad \sigma_p(A) = \varnothing, \quad \sigma_c(A) = [0,1], \quad \sigma_r(A) = \varnothing$$

3.6. Линейные непрерывные функционалы в гильбертовом пространстве

Определение: Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$. **Линейным функционалом** называется линейный оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{F}$.

Сопряженным пространством $\mathbb{H}^*$ называется пространство всех *непрерывных* линейных функционалов на $\mathbb{H}$, т.е. $\mathbb{H}^* := \mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{F})$.

Утверждение: Пусть f — линейный функционал на гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, тогда:

1) Если f непрерывен, т.е. $f \in \mathbb{H}^*$, то его ядро $\mathrm{Ker} f$ замкнуто в $\mathbb{H}$.

2) Если ядро $\mathrm{Ker} f$ замкнуто в $\mathbb{H}$ и $f \not\equiv 0$, то *коразмерность* ядра $\dim(\mathrm{Ker} f)^\perp = 1$, то есть существует ненулевой вектор $x_f \in \mathbb{H}$ такой, что $(\mathrm{Ker} f)^\perp = \langle x_f \rangle$.

3) Если ядро $\mathrm{Ker} f$ замкнуто в $\mathbb{H}$, то f непрерывен, т.е. $f \in \mathbb{H}^*$.

Суммируя сказанное в утверждениях 1) и 2) получаем, что линейный функционал является непрерывным тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто:

$$f \in \mathbb{H}^* \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker} f \text{ замкнуто в } \mathbb{H}$$

☐ **1)** Данное утверждение является частным случаем ранее доказанного утверждения о замкнутости ядра любого ограниченного линейного оператора.

2) Пусть $\mathrm{Ker} f$ замкнуто и $f \not\equiv 0$, то есть $\mathrm{Ker} f$ не совпадает со всем $\mathbb{H}$. Тогда $\mathbb{H} = \mathrm{Ker} f \oplus (\mathrm{Ker} f)^\perp$, причем $(\mathrm{Ker} f)^\perp \neq \{0\}$. Выберем произвольный ненулевой вектор $x_f \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$ и покажем, что $(\mathrm{Ker} f)^\perp = \langle x_f \rangle$.

Действительно, пусть y — другой ненулевой вектор из $(\mathrm{Ker} f)^\perp$. Тогда вектор $z = \left(x_f - \dfrac{f(x_f)}{f(y)} y \right)$ также принадлежит $(\mathrm{Ker} f)^\perp$, а с другой стороны

$$f(z) = f(x_f) - \frac{f(x_f)}{\cancel{f(y)}} \cancel{f(y)} = 0 \quad \Rightarrow \quad z \in \mathrm{Ker} f,$$

то есть $z \in \mathrm{Ker} f \cap (\mathrm{Ker} f)^\perp = \{0\}$, а значит $y = \dfrac{f(y)}{f(x_f)} x_f \in \langle x_f \rangle$ Таким образом мы доказали, что $(\mathrm{Ker} f)^\perp = \langle x_f \rangle$ и $\dim(\mathrm{Ker} f)^\perp = 1$.

3) Пусть снова $\mathrm{Ker} f$ является замкнутым подпространством в $\mathbb{H}$. Если $f \equiv 0$, то функционал f, очевидно, является непрерывным. Если же $f \not\equiv 0$, то согласно утверждению 2) существует вектор $x_f \in \mathbb{H}$ такой, что $(\mathrm{Ker} f)^\perp = \langle x_f \rangle$, так что

$$\mathbb{H} = \mathrm{Ker} f \oplus (\mathrm{Ker} f)^\perp = \mathrm{Ker} f \oplus \langle x_f \rangle \quad (*)$$

Докажем непрерывность функционала f в нуле, для чего рассмотрим произвольную сходящуюся к нулю последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{H}$ и покажем, что числовая последовательность $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ также стремится к нулю. В силу $(*)$ для любого номера n существует единственный вектор $y_n \in \mathrm{Ker} f$ и число α_n такие, что $x_n = y_n + \alpha_n x_f$. Поскольку согласно теореме Пифагора $\|x_n\|^2 = \|y_n\|^2 + |\alpha_n|^2 \|x_f\|^2$, то из сходимости $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ следуют сходимости $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Таким образом

$$f(x_n) = \cancelto{0}{f(y_n)} + \alpha_n f(x_f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то есть функционал f непрерывен в нуле, а значит и во всем пространстве $\mathbb{H}$. ■

Теорема (Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве):

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, тогда для любого линейного непрерывного функционала $f \in \mathbb{H}^*$ существует единственный вектор $x_f \in \mathbb{H}$ такой, что для любого вектора $x \in \mathbb{H}$ выполнено равенство $f(x) = (x, x_f)$, причем $\|f\| = \|x_f\|$.

□ Пусть $f \in \mathbb{H}^*$. Если $f \equiv 0$, то можно взять $x_f = 0$. Если же $f \not\equiv 0$, то существует вектор $x_0 \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$ такой, что $(\mathrm{Ker} f)^\perp = \langle x_0 \rangle$.

Далее, поскольку $\mathbb{H} = \mathrm{Ker} f \oplus \langle x_0 \rangle$, то для любого вектора $x \in \mathbb{H}$ существует единственный вектор $y \in \mathrm{Ker} f$ и число α такие, что $x = y + \alpha x_0$. Тогда

$$(x, x_0) = \cancelto{0}{(y, x_0)} + \alpha (x_0, x_0) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{(x, x_0)}{(x_0, x_0)},$$

поэтому

$$f(x) = \cancelto{0}{f(y)} + \alpha f(x_0) = \frac{(x, x_0)}{(x_0, x_0)} f(x_0) = \left(x, \frac{\overline{f(x_0)}}{(x_0, x_0)} x_0 \right) =: (x, x_f),$$

где мы положили $x_f := \dfrac{\overline{f(x_0)}}{(x_0, x_0)} x_0$.

Итак, нам удалось найти вектор $x_f \in \mathbb{H}$ такой, что любого $x \in \mathbb{H}$ выполнено равенство $f(x) = (x, x_f)$. Докажем теперь, что вектор x_f — единственный с таким свойством. Пусть существует другой вектор $\widetilde{x}_f \in \mathbb{H}$ такой, что $f(x) = (x, \widetilde{x}_f)$ для всех $x \in \mathbb{H}$. Тогда

$$\|x_f - \widetilde{x}_f\|^2 = \underbrace{(x_f, x_f)}_{f(x_f)} - \underbrace{(x_f, \widetilde{x}_f)}_{f(x_f)} - \underbrace{(\widetilde{x}_f, x_f)}_{f(\widetilde{x}_f)} + \underbrace{(\widetilde{x}_f, \widetilde{x}_f)}_{f(\widetilde{x}_f)} = 0,$$

следовательно $\widetilde{x}_f = x_f$, а значит вектор x_f действительно единственный.

Докажем, наконец, что $\|f\| = \|x_f\|$:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_f)| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \|x_f\| = \|x_f\|,$$

однако поскольку использованное здесь неравенство Коши–Буняковского–Шварца обращается в равенство при $x = x_f / \|x_f\|$, то $\|f\| = \|x_f\|$. Теорема доказана. ■

Пример: Рассмотрим в качестве гильбертова пространства $\mathbb{H}$ пространство вектор–столбцов $\mathbb{R}^n$. Согласно теореме Рисса любому функционалу $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ можно сопоставить единственный вектор–столбец $x_f = [f_1, \dots, f_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ такой, что равенство $f(x) = (x, x_f)$ будет выполняться для всех $x = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$.

С другой же стороны, принимая во внимание правило матричного умножения мы можем отождествить сопряженное пространство $(\mathbb{R}^n)^*$ с пространством *вектор–строк* длины n. Применительно к функционалу f это означает, что его можно отождествить с вектор–строкой $x_f^\top = [f_1, \dots, f_n]$, так что

$$f(x) = (x, x_f) = x_f^\top \cdot x = \big[f_1, \dots, f_n\big] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} f_k\, x_k$$

Замечание (о геометрическом смысле линейного непрерывного функционала):

Пусть $\mathbb{L}$ — линейное подпространство коразмерности 1 в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. **Гиперплоскостью**, параллельной подпространству $\mathbb{L}$ называется множество векторов M, получающееся из $\mathbb{L}$ параллельным переносом (сдвигом) на какой-либо вектор $x_0 \in \mathbb{H}$:

$$M = \mathbb{L} + x_0 = \{\, x + x_0,\; x \in \mathbb{L} \,\}$$

Используя этот язык мы можем теперь сказать, что ядро $\mathrm{Ker} f$ ненулевого линейного непрерывного функционала $f \in \mathbb{H}^*$ является проходящей через точку 0 гиперплоскостью в $\mathbb{H}$. Произвольная же параллельная $\mathrm{Ker} f$ гиперплоскость $M = \mathrm{Ker} f + x_0$ представляет собой *поверхность уровня* $f(x_0)$ функционала f:

$$M = \mathrm{Ker} f + x_0 = \{\, x \in \mathbb{H} : f(x) = f(x_0) \,\}$$

Далее, согласно теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве для любого $f \in \mathbb{H}^*$ существует единственный вектор $x_f \in \mathbb{H}$ такой, что $f(x) = (x, x_f)$ для любого $x \in \mathbb{H}$. Поскольку $\langle x_f \rangle = (\mathrm{Ker} f)^\perp$, то вектор x_f имеет смысл *нормали* к гиперплоскостям $M = \mathrm{Ker} f + x_0$, см. Рис. 3.5.

Найдем, наконец, расстояние d от точки 0 до гиперплоскости уровня 1:

$$1 = f\left(d\, \frac{x_f}{\|x_f\|}\right) = d\, \frac{f(x_f)}{\|x_f\|} = d\, \frac{(x_f, x_f)}{\|x_f\|} = d\, \|x_f\| = d\, \|f\| \quad \Rightarrow \quad d = 1/\|f\|$$

Таким образом норма функционала f имеет смысл обратного расстояния от точки 0 до гиперплоскости уровня 1. Соответственно, чем больше норма функционала, тем «плотнее» или «чаще» расположены его поверхности уровня*.

* Отметим, что наглядная интерпретация функционалов, или *ковекторов*, а также ковекторных

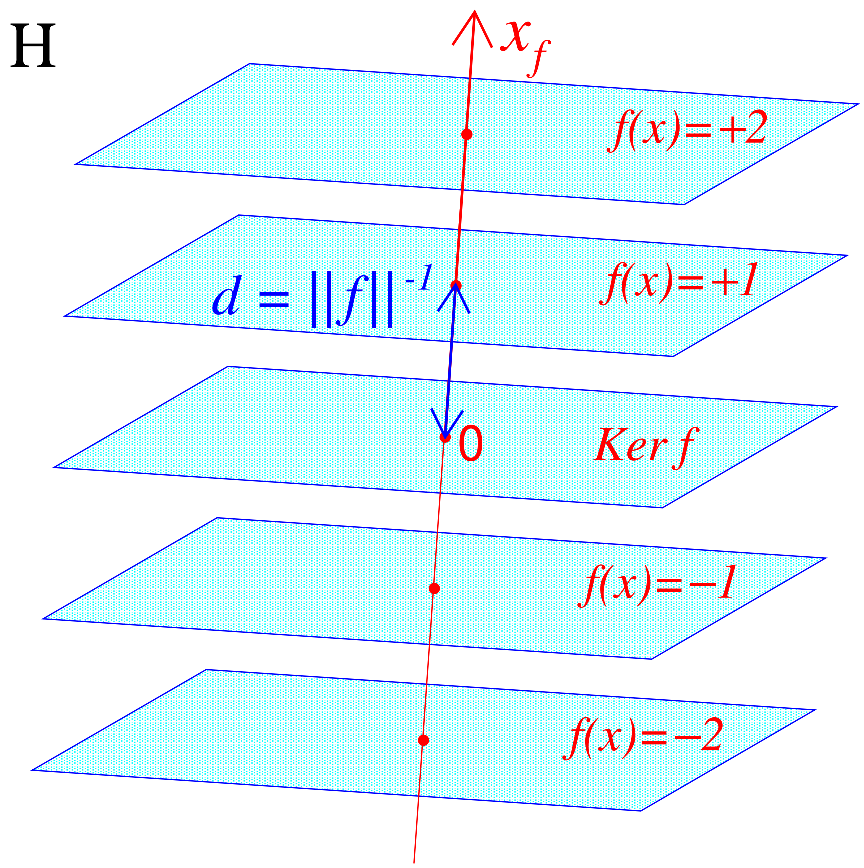


Рис. 3.5: Семейство гиперплоскостей — поверхностей уровня функционала $f \in \mathbb{H}^*$.

3.7. Формализм бра- и кет- векторов

Всюду в данном пункте мы будем считать скалярное произведение линейным по *второму аргументу*, то есть

$$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1(x, y_1) + \alpha_2(x, y_2), \text{ но } (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \overline{\alpha}_1(x_1, y) + \overline{\alpha}_2(x_2, y)$$

Британский физик П.А.М. Дирак предложил способ записи скалярного произведения, прочно утвердившийся в квантовой механике:

$$(x, y) = \langle x|y\rangle = \underbrace{\{\langle x|\} \cdot \{|y\rangle\}}_{\mathrm{bra-c-ket}}$$

В этой записи

- $|y\rangle$ называется **кет–вектором**. Кет–векторы являются «обычными» векторами, то есть элементами гильбертова пространства $\mathbb{H}$.

полей как семейств поверхностей уровня нередко применяется в физике, см., например, классический трёхтомник «Гравитация» Ч. Мизнера, К. Торна и Дж. Уилера.

- $\langle x|$ называется **бра–вектором**, и представляет собой *функционал* $f \in \mathbb{H}^*$, порожденный вектором $x \in \mathbb{H}$ в соответствии с теоремой Рисса: $f(y) = (x, y)$ для всех $y \in \mathbb{H}$.

Отметим, что помимо записи $\langle x|y\rangle$, означающей скалярное или, как принято писать в англоязычной литературе — *внутреннее произведение*, возможно также *внешнее произведение* бра- и кет- векторов $|x\rangle\langle y|$. Следующие несколько примеров демонстрируют, как такое внешнее произведение можно использовать при записи различных линейных операторов.

Пример 1 (оператор проектирования на направление):

Пусть заданы векторы $x, y \in \mathbb{H}$, причем $(y, x) = 1$, и оператор $\mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y} \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, действующий на произвольный вектор $z \in \mathbb{H}$ по правилу

$$\mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}\, z := (y, z)\, x$$

Этот оператор представляет собой *проектор* на линейную оболочку $\langle x\rangle$ вдоль подпространства $\{y\}^{\perp}$, ибо

- $\operatorname{Im} \mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y} = \langle x\rangle$;
- для любого вектора $w \in \{y\}^{\perp}$ имеем
$$\mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}\,(z + w) = (y, z + w)x = (y, z)\, x = \mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}\, z;$$
- выполнено свойство идемпотентности $\mathcal{P}^2_{\langle x\rangle,\, y} = \mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}$:
$$\mathcal{P}^2_{\langle x\rangle,\, y} z = \mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}\,((y, z)\, x) = (y, (y, z)\, x)x = (y, z)\underbrace{(y, x)}_{=1}x = (y, z)\, x = \mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}\, z$$

Запишем теперь действие $\mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}$ на вектор z на языке бра- и кет- векторов:

$$\mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}\, z = \langle y|z\rangle|x\rangle = |x\rangle\langle y|z\rangle = \underbrace{\{|x\rangle\langle y|\}}_{\mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}}|z\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y} = |x\rangle\langle y|$$

Таким образом, при условии $\langle y|x\rangle = 1$ внешнее произведение $|x\rangle\langle y|$ обозначает оператор проектирования на направление x вдоль ортогонального дополнения к вектору y[*]. В новых обозначениях идемпотентность $\mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y}$ проверяется особенно изящно:

---

[*] Если же $\langle y|x\rangle \neq 1$ и $\langle y|x\rangle \neq 0$, то, очевидно, $\mathcal{P}_{\langle x\rangle,\, y} = \dfrac{|x\rangle\langle y|}{\langle y|x\rangle}$.

$$\mathcal{P}^2_{\langle x\rangle,\,y} = \{|x\rangle\langle y|\}\{|x\rangle\langle y|\} = |x\rangle\underbrace{\langle y|x\rangle}_{=1}\langle y| = |x\rangle\langle y| = \mathcal{P}_{\langle x\rangle,\,y}$$

Пусть теперь $y = x$ и $\|x\| = 1$, тогда оператор

$$\mathrm{Pr}_{\langle x\rangle} := \mathcal{P}_{\langle x\rangle,\,x} = |x\rangle\langle x|$$

представляет собой *ортогональный проектор* на направление x.

Пример 2 (разложение тождественного оператора по проекторам):

Пусть $\mathbb{H}$ — конечномерное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{x_k\}_{k=\overline{1,n}}$. Тогда, используя сокращенные обозначения $|k\rangle := |x_k\rangle$ и $\langle k| := \langle x_k|$ для любого вектора $x \in \mathbb{H}$ мы можем написать

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle k|x\rangle|k\rangle = \sum_{k=1}^{n}|k\rangle\langle k|x\rangle = \underbrace{\left\{\sum_{k=1}^{n}|k\rangle\langle k|\right\}}_{I}|x\rangle = I|x\rangle$$

Итак, мы получили разложение тождественного оператора I по ортогональным проекторам на направления, задаваемые базисными векторами:

$$I = \sum_{k=1}^{n}|k\rangle\langle k|$$

Заметим также, что данное разложение можно рассматривать в качестве «соотношения полноты» для системы $\{x_k\}_{k=\overline{1,n}}$.

Пример 3 (матричный элемент конечномерного оператора):

Пусть $\mathbb{H}_{1,2}$ — конечномерные гильбертовы пространства. Тогда, как мы хорошо знаем, выбор пары базисов $\{e_k\}_{k=\overline{1,n}}$ в $\mathbb{H}_1$ и $\{f_j\}_{j=\overline{1,m}}$ в $\mathbb{H}_2$ позволяет сопоставить каждому оператору $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ матрицу $\mathcal{A} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ этого оператора в данной паре базисов. Если, кроме того, выбранные базисы являются ортонормированными, то проектору $|f_j\rangle\langle e_k|$ соответствует *матричная единица* E_{jk}

$$E_{jk} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Далее, произвольный оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ может быть записан через свои *матричные элементы* $\mathcal{A}_{jk} = \langle f_j|A|e_k\rangle$ и проекторы $|f_j\rangle\langle e_k|$ следующим образом:

$$A = I_{\mathbb{H}_2} A I_{\mathbb{H}_1} = \left\{ \sum_{j=1}^{m} |f_j\rangle\langle f_j| \right\} A \left\{ \sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle\langle e_k| \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |f_j\rangle \underbrace{\langle f_j|A|e_k\rangle}_{\mathcal{A}_{jk}} \langle e_k| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_{jk} |f_j\rangle\langle e_k|$$

Пусть, наконец, $\{h_j\}_{j=\overline{1,l}}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}_3$. Рассмотрим еще один оператор $B \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_3)$ и найдем матричный элемент произведения операторов B и A:

$$(\mathcal{B}\mathcal{A})_{jk} = \langle h_j|BA|e_k\rangle = \langle h_j|BI_{\mathbb{H}_2}A|e_k\rangle = \langle h_j|B \left\{ \sum_{i=0}^{m} |f_i\rangle\langle f_i| \right\} A|e_k\rangle = \sum_{i=0}^{m} \mathcal{B}_{ji}\mathcal{A}_{ik},$$

в полном соответствии с правилом умножения матриц.

Пример 4 (сингулярное разложение):

Рассмотрим матрицу $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ ранга r и её сингулярное разложение $A = U\Sigma V^{+}$*, где

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}_{m\times n} \quad U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{bmatrix}_{m\times m} \quad V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}_{n\times n}$$

суть матрица сингулярных чисел и матрицы левых и правых сингулярных векторов, соответственно. В терминах бра- и кет- векторов сингулярное разложение записывается так:

$$A = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k |u_k\rangle\langle v_k|$$

Пример 5 (резольвента симметричной матрицы):

Используя формализм бра- и кет-векторов найдем резольвенту $R(\lambda; A)$ эрмитово симметричной матрицы $A \in M_{n,n}(\mathbb{F})$, т.е. $A^{+} = \overline{A}^{\top} = A$. Поскольку A симметрична,

* Символом $^{+}$ мы будем обозначать эрмитово сопряжение матрицы.

в пространстве вектор–столбцов $\mathbb{F}^n$ существует ортонормированный базис $\{|k\rangle\}_{k=\overline{1,n}}$ из её собственных векторов, отвечающих собственнным значениям $\{\lambda_k\}_{k=\overline{1,n}}$*. Тогда для любого вектора $x \in \mathbb{F}^n$ имеем разложение по базису

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |x_k\rangle$$

Далее, рассмотрим уравнение $(A - \lambda I)|x\rangle = |y\rangle$ при $\lambda \in \rho(A)$. Учитывая, что $A|x_k\rangle = \lambda_k |x_k\rangle$ мы можем написать, что

$$(A - \lambda I)|x\rangle = (A - \lambda I) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |x_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (A|x_k\rangle - \lambda |x_k\rangle) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_k - \lambda)|x_k\rangle,$$

$$|y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k|y\rangle |x_k\rangle$$

Поскольку $(A - \lambda I)|x\rangle = |y\rangle$ и разложение вектора по базису единственно, то для всех $k = \overline{1, n}$ имеем

$$\alpha_k (\lambda_k - \lambda) = \langle x_k|y\rangle \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = \frac{\langle x_k|y\rangle}{\lambda_k - \lambda}$$

Стало быть,

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x_k|y\rangle}{\lambda_k - \lambda} |x_k\rangle = \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k\rangle\langle x_k|}{\lambda_k - \lambda} \right\}}_{R(\lambda; A)} |y\rangle \quad \Rightarrow \quad R(\lambda; A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k\rangle\langle x_k|}{\lambda_k - \lambda}$$

3.8. Сопряженный оператор

Пусть $\mathbb{H}_{1,2,3}$ — гильбертовы пространства.

Определение: Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ — ограниченный оператор. Оператор $A^*\colon \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_1$ называется **сопряженным к A**, если для любых $x_1 \in \mathbb{H}_1$ и $x_2 \in \mathbb{H}_2$ выполняется равенство $(Ax_1, x_2) = (x_1, A^* x_2)$.

Пример: Найдем оператор, сопряженный к оператору $A \in \mathcal{B}(L_2(0,1))$, действующего на любую функцию $x \in L_2(0,1)$ по правилу:

* В этом списке собственное значение λ_k повторяется столько раз, какова его кратность.

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$(Ax, y) = \int_0^1 \left[\int_0^t x(s)ds\right]\overline{y(t)}dt = \int_0^1 x(s)\,\overline{\left[\int_s^1 y(t)dt\right]}ds = (x, A^*y),$$

так что $(A^*y)(s) = \int\limits_s^1 y(t)dt$ для любой функции $y \in L_2(0,1)$.

Теорема (свойства сопряженного оператора):

Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ — ограниченные линейные операторы. Тогда:

1) сопряженный оператор A^* существует и является линейным ограниченным оператором, т.е. $A^* \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_1)$;
2) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполняется равенство $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$;
3) сопряжение *инволютивно*: $(A^*)^* = A$;
4) $\|A^*\| = \|A\|$;
5) если $C \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_3)$, то $(CA)^* = A^*C^*$;
6) справедливы следующие соотношения:
   - $\mathrm{Ker}A = (\mathrm{Im}A^*)^\perp$ и $\mathrm{Ker}A^* = (\mathrm{Im}A)^\perp$;
   - $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}_1}\mathrm{Im}A^*$ и $(\mathrm{Ker}A^*)^\perp = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}_2}\mathrm{Im}A$;
7) если оператор A непрерывно обратим, т.е. если обратный оператор A^{-1} существует, ограничен и определен на всем пространстве $\mathbb{H}_2$, то A^* также непрерывно обратим, причем $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

□ **1)** Зафиксируем произвольный вектор $x_2 \in \mathbb{H}_2$ и рассмотрим линейный функционал $f\colon \mathbb{H}_1 \to \mathbb{F}$, действующий на произвольный вектор $x_1 \in \mathbb{H}_1$ по правилу $f(x_1) := (Ax_1, x_2)$. Этот функционал непрерывен, так как

$$\|f\| = \sup_{\|x_1\|=1} |f(x_1)| = \sup_{\|x_1\|=1} |(Ax_1, x_2)| \le \sup_{\|x_1\|=1} \|Ax_1\|\|x_2\| \le$$

$$\le \sup_{\|x_1\|=1} \|A\|\|x_1\|\|x_2\| = \|A\|\|x_2\| < +\infty$$

Итак, $f \in \mathbb{H}_1^*$, а значит в силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует вектор $x_f \in \mathbb{H}_1$ такой, что $f(x_1) = (Ax_1, x_2) = (x_1, x_f)$ для любого вектора $x_1 \in \mathbb{H}_1$. Отображение $A^* : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_1$, сопоставляющее произвольному вектору $x_2 \in \mathbb{H}_2$ соответствующий вектор $x_f \in \mathbb{H}_1$ и является искомым сопряженным оператором. Тем самым существование A^* доказано.

В дальнейших рассуждениях мы часто будем использовать следующий простой факт: если $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство и $x, y \in \mathbb{H}$ таковы, что для любого $z \in \mathbb{H}$ выполнено равенство $(x, z) = (y, z)$, то $x = y$. В самом деле, возьмем $z = x - y$, тогда

$$0 = (x, z) - (y, z) = (x - y, z) = \|x - y\|^2 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Опираясь на этот факт мы можем доказать линейность оператора A^*. Действительно, для произвольного вектора $x \in \mathbb{H}_1$ и любых $y, z \in \mathbb{H}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ имеем

$$(x, A^*(\alpha y + \beta z)) = (Ax, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(Ax, y) + \overline{\beta}(Ax, z) =$$
$$= (Ax, \alpha y) + (Ax, \beta z) = (x, \alpha A^* y + \beta A^* z),$$

а значит в силу произвольности x

$$A^*(\alpha y + \beta z) = \alpha A^* y + \beta A^* y,$$

то есть оператор A^* линеен.

Докажем, наконец, ограниченность A^*:

$$\|A^* x_2\|^2 = (A^* x_2, A^* x_2) = (AA^* x_2, x_2) \leq \|AA^* x_2\| \|x_2\| \leq \|A\| \|A^* x_2\| \|x_2\| \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \|A^* x_2\| \leq \|A\| \|x_2\| \quad \Rightarrow \quad \|A^*\| \leq \|A\| < +\infty$$

2) Для любых векторов $x \in \mathbb{H}_1$ и $y \in \mathbb{H}_2$ имеем:

$$(x, (\alpha A + \beta B)^* y) = ((\alpha A + \beta B)x, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) = (x, (\overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*) y) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (\alpha A + \beta B)^* y = (\overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*) y \quad \Rightarrow \quad (\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$$

3) Для любых векторов $x \in \mathbb{H}_1$ и $y \in \mathbb{H}_2$ имеем:

$$((A^*)^* x, y) = \overline{(y, (A^*)^* x)} = \overline{(A^* y, x)} = (x, A^* y) = (Ax, y) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (A^*)^* x = Ax \quad \Rightarrow \quad (A^*)^* = A$$

4) В доказательстве пункта 1) нами была получена оценка нормы сопряженного оператора сверху: $\|A^*\| \le \|A\|$. Подставляя в это неравенство A^* вместо A получим обратную оценку $\|(A^*)^*\| = \|A\| \le \|A^*\|$. Следовательно, $\|A^*\| = \|A\|$.

5) Для любых $x \in \mathbb{H}_1$ и $z \in \mathbb{H}_3$ имеем:

$$(x, (CA)^* z) = (CAx, z) = (Ax, C^* z) = (x, A^* C^* z) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (CA)^* z = A^* C^* z \quad \Rightarrow \quad (CA)^* = A^* C^*$$

6) Докажем, что $\mathrm{Ker} A = (\mathrm{Im} A^*)^\perp$.

Пусть $x \in \mathrm{Ker} A$, тогда для любого вектора $y \in \mathbb{H}_2$

$$0 = (\underbrace{Ax}_{=0}, y) = (x, \underbrace{A^* y}_{\in \mathrm{Im} A^*}) \quad \Rightarrow \quad x \in (\mathrm{Im} A^*)^\perp \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker} A \subset (\mathrm{Im} A^*)^\perp$$

Если же $x \in (\mathrm{Im} A^*)^\perp$, то для любого вектора $y \in \mathbb{H}_2$

$$0 = (x, \underbrace{A^* y}_{\in \mathrm{Im} A^*}) = (\underbrace{Ax}_{=0}, y) \quad \Rightarrow \quad x \in \mathrm{Ker} A \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{Im} A^*)^\perp \subset \mathrm{Ker} A$$

Из доказанных прямого и обратного включений следует, что $\mathrm{Ker} A = (\mathrm{Im} A^*)^\perp$. Кроме того, приравнивая ортогональные дополнения к обеим частям этого равенства, получаем

$$(\mathrm{Ker} A)^\perp = ((\mathrm{Im} A^*)^\perp)^\perp = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}_1} \mathrm{Im} A^*$$

7) Докажем сначала, что A^* обратим, т.е. что $\mathrm{Ker} A^* = \{0\}$. Действительно, согласно свойству 6) $\mathrm{Ker} A^* = (\mathrm{Im} A)^\perp$. Но оператор A непрерывно обратим, следовательно $\mathrm{Im} A = \mathbb{H}_2$ и $\mathrm{Ker} A^* = (\mathbb{H}_2)^\perp = \{0\}$, что и требовалось доказать.

Убедившись в существовании $(A^*)^{-1}$ мы можем проверить, что он совпадает с оператором $(A^{-1})^*$. Это действительно так, поскольку $(A^{-1})^*$ служит для оператора A^* левым и правым обратным:

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I_{\mathbb{H}_1} \;\; \text{и} \;\; (A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = I_{\mathbb{H}_2} \quad \Rightarrow \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Наконец, ограниченность $(A^*)^{-1}$ и его определенность на всем $\mathbb{H}_1$ следует из того факта, что эти условия выполнены для равного ему оператора $(A^{-1})^*$. ■

Теорема (о связи спектров A и A^*):

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, тогда:

1) $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$;
2) $\sigma_r(A) \subset \overline{\sigma_p(A^*)}$;
3) $(\sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)) \supset \overline{\sigma_p(A^*)}$;
4) $\sigma_c(A) = \overline{\sigma_c(A^*)}$.

Перечисленные утверждения наглядно иллюстрируются Рисунком 3.6.

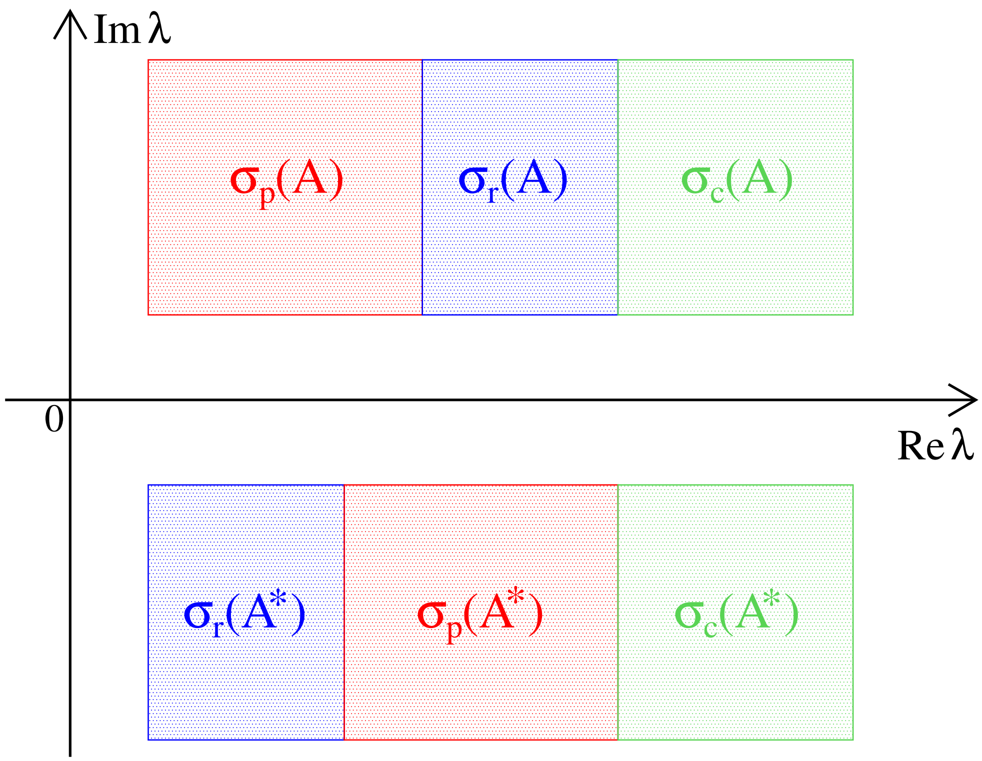


Рис. 3.6: Связь спектров A и A^*.

☐ **1)** Докажем эквивалентное равенство $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)}$ для резольвентных множеств. Пусть $\lambda \in \rho(A)$, то есть существует резольвента $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$. Тогда в силу свойства 6) сопряженный оператор $(A - \lambda I)^*$ является непрерывно обратимым, т.е. существует $((A - \lambda I)^*)^{-1} = (A^* - \overline{\lambda} I)^{-1} = R(\overline{\lambda}, A^*)$, а значит $\overline{\lambda} \in \rho(A^*)$ и $\rho(A) \subset \overline{\rho(A^*)}$. Заменив теперь в этом включении A на A^*, получим $\rho(A^*) \subset \overline{\rho((A^*)^*)} = \overline{\rho(A)}$. Следовательно, $\rho(A) = \overline{\rho(A^*)}$.

2) Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$, тогда $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\, \mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq \mathbb{H}$. Заметим, что согласно свойству 6) $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}} \mathrm{Im}(A - \lambda I) = (\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^*)^{\perp}$, поэтому $(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^*)^{\perp} \neq \mathbb{H}$ и $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^* =$

$\mathrm{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I) \neq \{0\}$. Но это и означает, что $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

3) Пусть $\lambda \in \overline{\sigma_p(A^*)}$, тогда $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^* = (\mathrm{Im}(A - \lambda I))^{\perp} \neq \{0\}$. Следовательно, $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq \mathbb{H}$, что означает, что $\lambda \notin \sigma_c(A)$ и $\lambda \in \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$.

4) Пусть $\lambda \in \sigma_c(A)$, тогда $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*) = \sigma_p(A^*) \cup \sigma_c(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$. Если предположить, что $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, то из пункта 3) будет следовать, что $\lambda \in \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$. Если же предположить, что $\overline{\lambda} \in \sigma_r(A^*)$, то из пункта 2) будет следовать, что $\lambda \in \sigma_p(A)$. Полученные противоречия доказывают, что $\overline{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$ и $\sigma_c(A) \subset \overline{\sigma_c(A^*)}$. Обратное включение доказывается из прямого заменой A на A^*. ■

Замечание: Важный практический вывод из предыдущей теоремы состоит в том, что для нахождения остаточного спектра $\sigma_r(A)$ достаточно найти точечные спектры операторов A и A^*, поскольку

$$\sigma_r(A) = \overline{\sigma_p(A^*)} \setminus \sigma_p(A)$$

Пример: Найдем спектры операторов левого и правого сдвигов, действующих на любую последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$ по правилам:

$$S_l(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$
$$S_r(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

Заметим прежде всего, что оператор S_l является сопряженным к S_r, так как для любых $x, y \in l_2$

$$(S_r\, x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (S_r x)_n\, \overline{y}_n = \sum_{n=2}^{+\infty} x_{n-1}\, \overline{y}_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\, \overline{y}_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\, \overline{(S_l\, y)_n} = (x, S_l\, y) = (x, S_r^*\, y)$$

Итак, $S_r^* = S_l$, а значит спектры данных операторов рационально изучать совместно.

Найдем теперь норму оператора S_r, а вместе ней и норму S_l, ведь $\|S_l\| = \|S_r^*\| = \|S_r\|$:

$$\|S_r\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|S_r x\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|x\|^2 = 1$$

Значит, спектры $\sigma(S_r)$ и $\sigma(S_l)$ целиком содержатся в замкнутом круге единичного радиуса с центром в нуле, см. Рисунок 3.7.

Далее найдем точечные спектры операторов S_l и S_r. Пусть $\lambda \in \sigma_p(S_r)$, тогда существует ненулевая последовательность $x \in l_2$ такая, что

$$S_r x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad (0, x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 0 = \lambda x_1, \quad x_1 = \lambda x_2, \quad x_2 = \lambda x_3, \ \ldots$$

Если $\lambda = 0$, то из последней цепочки равенств следует, что $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и т.д., то есть все компоненты последовательности x равны нулю, а значит она не может являться собственным вектором оператора S_r. Тот же результат получается, если $\lambda \neq 0$. Итак, точечный спектр оператора S_r пуст: $\sigma_p(S_r) = \varnothing$.

Пусть теперь $\lambda \in \sigma_p(S_l)$, тогда существует ненулевая последовательность $x \in l_2$ такая, что

$$S_l x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad (x_2, x_3, x_4, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = \lambda x_1, \quad x_3 = \lambda x_2, \quad x_4 = \lambda x_3, \ \ldots \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = \lambda x_1, \quad x_3 = \lambda^2 x_1, \quad x_4 = \lambda^3 x_1, \ \ldots, \ x_{n+1} = \lambda^n x_n, \ \ldots \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x = x_1(\,1,\, \lambda,\, \lambda^2, \ldots,\, \lambda^n, \ldots)$$

Нам осталось определить, при каких λ полученная последовательность x лежит в пространстве l_2:

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^{2n} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda| < 1$$

Таким образом, точечный спектр оператора S_l — это множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, то есть внутренность круга единичного радиуса с центром в нуле.

Найдя точечные спектры S_r и S_l, мы можем найти и остаточный спектр S_r:

$$\sigma_r(S_r) = \overline{\sigma_p(S_r^*)} \setminus \sigma_p(S_r) = \overline{\sigma_p(S_l)} \setminus \varnothing = \overline{B(0;1)} = B(0;1)$$

Таким образом, точечный спектр оператора S_r пуст, а остаточный совпадает с внутренностью круга единичного радиуса с центром в нуле. Поскольку же спектр ограниченного оператора является замкнутым множеством, то и граница этого круга также обязана лежать в спектре S_r, а именно — в непрерывном спектре $\sigma_c(S_r)$.

Наконец, так как $\sigma_c(S_r) = \overline{\sigma_c(S_r^*)} = \overline{\sigma_c(S_l)}$, то непрерывный спектр оператора S_l также совпадает с границей $|\lambda| = 1$ единичного круга.

Итак, мы получили следующие результаты для спектров операторов левого и правого сдвигов в l_2:

$$\sigma(S_l) = B[0;1], \quad \sigma_p(S_l) = B(0;1), \quad \sigma_c(S_r) = S[0;1], \quad \sigma_r(S_r) = \varnothing,$$

$$\sigma(S_r) = B[0;1], \quad \sigma_p(S_r) = \varnothing, \quad \sigma_c(S_r) = S[0;1], \quad \sigma_r(S_r) = B(0;1)$$

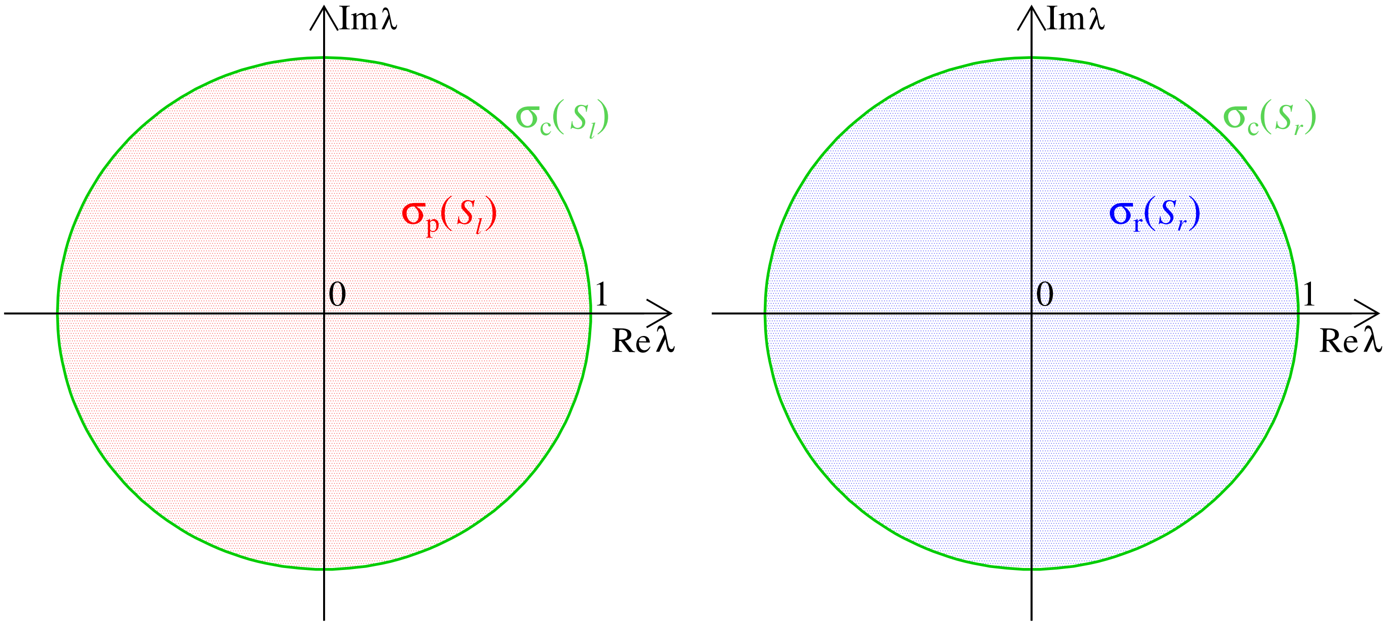


Рис. 3.7: Спектры операторов левого и правого сдвигов в l_2.

Определение: Линейный ограниченный оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ называется **нормальным**, если он коммутирует со своим сопряженным, т.е. если

$$[A, A^*] = AA^* - A^*A = 0$$

В частности, нормальными являются:

- **самосопряженные операторы**, для которых $A^* = A$;
- **унитарные операторы**, для которых $A^* = A^{-1}$.

Самосопряженные и унитарные операторы очень часто встречаются в физических приложениях, и одним из приятных свойств таких операторов является отсутствие у них остаточного спектра.

Утверждение: Остаточный спектр ограниченного нормального оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ пуст: $\sigma_r(A) = \varnothing$.

□ Будем рассуждать от противного: пусть $\sigma_r(A) \neq \varnothing$, тогда возьмем произвольное $\lambda \in \sigma_r(A)$ и заметим, что $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, а значит существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{H}$ такой, что $(A^* - \overline{\lambda}I)x = 0$. В таком случае

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 = ((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) = (x, (A^* - \overline{\lambda}I)(A - \lambda I)x) =$$

$$= (x, (A^*A - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I)x) = [A^*A = AA^*] = (x, (AA^* - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I)x) =$$

$$= (x, (A - \lambda I)\underbrace{(A^* - \overline{\lambda}I)x}_{=0}) = 0,$$

следовательно $(A - \lambda I)x = 0$, то есть λ является собственным значением A, что невозможно, так как по предположению $\lambda \in \sigma_r(A)$. Следовательно, $\sigma_r(A) = \varnothing$. ■

3.9. Самосопряжённый оператор

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$.

Теорема (о норме самосопряженного оператора):

Для нормы линейного ограниченного самосопряженного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ справедлива формула $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

□ Докажем сначала, что $\sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leq \|A\|$:

$$\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|\|x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\|\|x\|^2 = \|A\|$$

Для доказательства обратного неравенства $\sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \geq \|A\|$ рассмотрим следующее выражение:

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) =$$

$$= \cancel{(Ax, x)} + (Ax, y) + (Ay, x) + \cancel{(Ay, y)} - \cancel{(Ax, x)} + (Ax, y) + (Ay, x) - \cancel{(Ay, y)} =$$

$$= 2(Ax, y) + 2(Ay, x) = [A^* = A] = 2(Ax, y) + 2(y, Ax) =$$

$$= 2(Ax, y) + \overline{2(Ax, y)} = 4\mathrm{Re}(Ax, y)$$

Итак, мы получили равенство $4\mathrm{Re}(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)$, а теперь оценим сверху модуль данной величины:

$$|4\mathrm{Re}(Ax, y)| \leq |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| \leq$$

$$\leq \sup_{\|z\|=1} |(Az, z)| \cdot \left[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right] = 2 \sup_{\|z\|=1} |(Az, z)| \cdot \left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$$

Возьмем теперь $x \neq 0$ и $y = \dfrac{\|x\|}{\|Ax\|}Ax$, тогда $\|y\| = \|x\|$ и

$$4\left|\mathrm{Re}\left(Ax, \frac{\|x\|}{\|Ax\|}Ax\right)\right| \le 2\sup_{\|z\|=1}|(Az,z)|\cdot 2\|x\|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \|x\|\|Ax\| \le \sup_{\|z\|=1}|(Az,z)|\cdot\|x\|^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup_{\|z\|=1}|(Az,z)| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup_{\|z\|=1}|(Az,z)|$$

Теорема доказана. ■

Следствие: Для любого оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ справедливы равенства

$$\|A\| = \|A^*\| = \sqrt{\|A^*A\|} = \sqrt{\|AA^*\|}$$

□ Заметим, что оператор A^*A является самосопряженным, так как $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$. Следовательно, по теореме о норме самосопряженного оператора

$$\|A^*A\| = \sup_{\|x\|=1}|(A^*Ax,x)| = \sup_{\|x\|=1}|(Ax,Ax)| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|^2 = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 \;■$$

Теорема: Спектральный радиус ограниченного самосопряженного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ равен его норме: $r(A) = \|A\|$.

□ Как было доказано в предыдущем утверждении, для произвольного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ справедливо равенство $\|AA^*\| = \|A\|^2$. Для самосопряженного же оператора A это равенство принимает вид $\|A^2\| = \|A\|^2$. Более того, нетрудно доказать по индукции, что для самосопряженного оператора A при любом номере $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n} \quad (*)$$

База индукции — случай $n = 1$ — уже доказана. Предположим теперь, что равенство $(*)$ справедливо для $n = k-1$, докажем его для $n = k$:

$$\|A^{2^k}\| = \|(A^{2^{k-1}})^2\| = [\textit{база индукции}] = \|A^{2^{k-1}}\|^2 =$$

$$= [\textit{предположение индукции}] = \left(\|A\|^{2^{k-1}}\right)^2 = \|A\|^{2^k},$$

что и требовалось доказать.

Наконец, пользуясь формулой Гельфанда–Бёрлинга и равенством $(*)$ найдем спектральный радиус оператора A:

$$r(A) = \lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \lim_{n\to+\infty} \|A\|^{2^n/2^n} = \|A\| \quad \blacksquare$$

Теорема (о действительности спектра самосопряженного оператора):

Спектр ограниченного самосопряженного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ состоит только из действительных чисел: $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

$\square$ Заметим прежде всего, что так как самосопряженный оператор является нормальным, то его остаточный спектр пуст. Стало быть, нам остается проверить, что $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$ и $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$

Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, тогда существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{H}$ такой, что $Ax = \lambda x$. В таком случае

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2 = (x, A^* x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x) = \overline{\lambda}\|x\|^2,$$

следовательно $\lambda = \overline{\lambda}$, а значит $\lambda \in \mathbb{R}$.

Далее, для доказательства того факта, что $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$ нам потребуется следующее вспомогательное утверждение:

Если оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ ограничен снизу, т.е. если существует число $m > 0$ такое, что для любого вектора $x \in \mathbb{H}$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geq m\|x\|$, то его образ $\mathrm{Im}A$ *является замкнутым подпространством в* $\mathbb{H}$.

Действительно, рассмотрим произвольную последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Im}A$, сходящуюся к некоторому вектору $y \in \mathbb{H}$. Докажем, что на самом деле $y \in \mathrm{Im}A$, что и будет означать замкнутость $\mathrm{Im}A$.

Заметим, что у каждого $y_n \in \mathrm{Im}A$ существует единственный прообраз $x_n \in \mathbb{H}$, так что $Ax_n = y_n$. Кроме того, так как последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, то она является фундаментальной, а значит

$$\|y_p - y_q\| = \|A(x_p - x_q)\| \geq m\|x_p - x_q\| \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда следует, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ также является фундаментальной, а в силу полноты $\mathbb{H}$ и сходящейся к некоторому вектору $x \in \mathbb{H}$.

Итак, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, а значит в силу непрерывности оператора A имеет место сходимость $Ax_n = y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Ax$. Однако по условию $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходилась к вектору y, поэтому в силу единственности предела получаем, что $y = Ax$, то есть $y \in \mathrm{Im}A$.

Вернемся к доказательству теоремы. Предположим, от противного, что существует $\lambda \in \sigma_c(A)$ не лежащий на действительной оси. Обозначим для краткости $\alpha = \mathrm{Re}\lambda$

и $\beta = \mathrm{Im}\lambda \neq 0$. Покажем, что в таком случае оператор $(A - \lambda I)$ ограничен снизу:

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 = ((A - \alpha I - i\beta I)x, (A - \alpha I - i\beta I)x) =$$

$$= \|(A - \alpha I)x\|^2 - ((A - \alpha I)x, i\beta x) - (i\beta x, (A - \alpha I)x) + \beta^2\|x\|^2 =$$

$$= \|(A - \alpha I)x\|^2 + i((A - \alpha I)x, \beta x) - i(\beta x, (A - \alpha I)x) + \beta^2\|x\|^2 =$$

$$= \|(A - \alpha I)x\|^2 + \cancel{i((A - \alpha I)x, \beta x)} - \cancel{i((A - \alpha I)x, \beta x)} + \beta^2\|x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2$$

Итак, оператор $(A - \lambda I)$ ограничен снизу, следовательно его образ $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ замкнут в $\mathbb{H}$. Однако для $\lambda \in \sigma_c(A)$ образ $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ не может быть замкнут, поскольку в этом случае по определению $\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}\mathrm{Im}(A - \lambda I) = \mathbb{H}$. Полученное противоречие доказывает, что $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$ ■

Замечание: Можно доказать, что спектр $\sigma(A)$ самосопряженного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ целиком содержится в отрезке $[m, M] \subset \mathbb{R}$, где $m = \inf\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$ и $M = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$, причем $m, M \in \sigma(A)$.

Следующие две теоремы ранее уже изучались Вами в курсе линейной алгебры, однако ввиду их важности мы повторим их здесь еще раз.

Теорема (об ортогональности собственных подпространств самосопряженного оператора):

Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ — самосопряженный оператор, тогда собственные векторы, отвечающие различным собственным значениииям A, ортогональны друг другу.

□ Пусть $x, y \in \mathbb{H}$ — собственные векторы оператора A, отвечающие его различным собственным значениям $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, то есть $Ax = \lambda x$ и $Ay = \mu y$. Тогда

$$(Ax, y) = \lambda(x, y) \quad \text{и} \quad (x, Ay) = \mu(x, y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (Ax, y) - (x, Ay) = (Ax, y) - (Ax, y) = 0 = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(x, y) \quad \Rightarrow \quad (x, y) = 0,$$

то есть векторы x и y ортогональны, что и требовалось доказать. ■

Теорема (об инвариантном подпространстве самосопряженного оператора):

Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ — самосопряженный оператор и S — его инвариантное подпространство, т.е. $A(S) \subset S$. Тогда ортогональное дополнение $S^\perp$ к этому подпространству также образует инвариантное подпространство оператора A.

□ Действительно, для любых векторов $x \in S$ и $y \in S^{\perp}$ имеем

$$(\underbrace{Ax}_{\in S}, y) = 0 = (x, A^*y) = (x, Ay),$$

откуда следует, что вектор Ay ортогонален подпространству S, то есть $Ay \in S^{\perp}$. Но это и означает, что подпространство $S^{\perp}$ инвариантно под действием оператора A. ■

Пример: Докажем, что оператор $\mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'} \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ ортогонального проектирования на замкнутое подпространство $\mathbb{H}'$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ является самосопряженным. Действительно, для любых векторов $x, y \in \mathbb{H}$ имеем

$$(\,\mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}x,\, y\,) = (\,\mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}x,\, \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}y \,+\, \mathrm{Pr}_{(\mathbb{H}')^{\perp}}y\,) = (\,\mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}x,\, \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}y\,) =$$

$$= (\,\mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}x \,+\, \mathrm{Pr}_{(\mathbb{H}')^{\perp}}x,\, \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}y\,) = (\,x,\, \mathrm{Pr}_{\mathbb{H}'}y\,) = (\,x,\, \mathrm{Pr}^*_{\mathbb{H}'}y\,)$$

3.10. Компактные множества

Мы переходим к изучению специального вида ограниченных операторов, называемого *компактными операторами*. Эти операторы были выделены в отдельный класс в начале XX-го века, и важной областью их применения является теория *линейных интегральных уравнений*, основы которой мы изложим в завершающей части нашего курса. Среди бесконечномерных операторов именно компактные операторы наиболее близки к конечномерным операторам по своим свойствам, в том числе и по структуре своего спектра. Однако, прежде чем переходить непосредственно к операторам нам необходимо узнать некоторые сведения о компактных множествах в бесконечномерных нормированных пространствах.

Определение: Множество M в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ называется **компактным**, или **компактом**, если из *любого* его открытого покрытия $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{U}_{\alpha} \supset M$ можно выбрать конечное подпокрытие $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\alpha_i} \supset M$, $n < +\infty$.

Пример: Интервал $(0,1)$ не компактен, поскольку из его открытого покрытия $\bigcup\limits_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = (0,1)$ нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Аналогично луч $(0,+\infty)$ не компактен, поскольку из его открытого покрытия $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (0,n) = (0,+\infty)$ нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Замечание: Определение компактности множества в терминах открытых покрытий принято использовать в более широком, чем метрические, классе пространств — в топологических пространствах. В случае же метрического пространства оно равносильно так называемой **секвенциальной компактности**:

Определение: Множество M в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ называется **компактным**, если из любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящуюся к некоторому элементу $x \in M$ этого множества.

Множество M в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ называется **предкомпактным**, если его замыкание $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}}M$ является компактом.

Замечание: Для множества M в *конечномерном* нормированном пространстве $\mathbb{X}$ справедлив следующий *критерий компактности*:

- M является компактным тогда и только тогда, когда оно *ограничено* и *замкнуто*.
- M является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно *ограничено*.

□ Без доказательства. ■

Оказывается, что в *бесконечномерном* пространстве данный критерий компактности не работает!

Утверждение: Пусть $\mathbb{X}$ — бесконечномерное нормированное пространство.

1) Если множество $M \subset \mathbb{X}$ компактно, то оно ограничено и замкнуто.
2) Если множество $M \subset \mathbb{X}$ ограничено и замкнуто, то оно необязательно компактно.

□ **1)** Предположим противное: пусть множество M компактно, но является либо неограниченным, либо незамкнутым.

Пусть M неограниченно. Выберем элемент $x_1 \in M$ такой, что $\|x_1\| > 1$. Далее для любого $n \geq 2$ выберем элемент $x_n \in M$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|x_n\| > \|x_{n-1}\| + 1$. Тогда для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ в силу обратного неравенства треугольника имеем:

$$\|x_n - x_m\| \geq \big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| = \big|\|x_n\| - \|x_{n-1}\| + \|x_{n-1}\| - \ldots - \|x_m\|\big| \geq n - m > 1$$

Итак, расстояние между любыми двумя элементами последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ больше единицы, а значит никакая подпоследовательность данной последовательности не может быть фундаментальной, а тем более сходящейся. Пришли к противоречию с компактностью множества M.

Пусть теперь M незамкнуто, тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, сходящаяся к элементу $x \notin M$. Следовательно, и любая её подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ также сходится к $x \notin M$, а значит, в силу единственности предела она не может сходиться ни к какому элементу множества M. Вновь пришли к противоречию с компактностью множества M.

2) Для доказательства достаточно привести пример ограниченного и замкнутого множества, не являющегося компактным.

Рассмотрим замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле ($B[0;1]$) в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Докажем, что $B[0;1]$ не компактен. Пусть последовательность $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B[0;1]$ является ортонормированной, тогда расстояние между любыми двумя её элементами одинаково и равно $\sqrt{2}$:

$$\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 - \cancelto{0}{2\mathrm{Re}(e_n, e_m)} + \|e_m\|^2 = 2$$

Значит, из последовательности $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нельзя выделить фундаментальной, а тем более сходящейся подпоследовательности. Следовательно, замкнутый шар $B[0;1]$ не является компактом. ■

Замечание: Можно доказать, что $B[0;1]$ не является компактом не только в гильбертовом, но и в произвольном бесконечномерном нормированном пространстве.

3.11. Компактные операторы

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ – ба́наховы пространства.

Определение: Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ называется **компактным**, если он отображает любое ограниченное множество $M \subset \mathbb{X}$ в предкомпактное множество $A(M) \subset \mathbb{Y}$[*].

Эквивалентная формулировка в терминах последовательностей: оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ называется **компактным**, если из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, которую этот оператор отображает в сходящуюся последовательность $\{Ax_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Y}$.

Множество всех компактных операторов, действующих из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$ обозначается $\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. В случае $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ используется обозначение $\mathcal{K}(\mathbb{X})$.

Приведем простейшие примеры компактных операторов.

Пример 1: Если пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ *конечномерные*, то любой конечномерный

[*] Как и в случае определения ограниченного оператора достаточно убедиться, что предкомпактным является образ $A(B[0,1])$ замкнутого шара единичного радиуса с центром в нуле.

оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является компактным, т.е. $A \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$**.

Действительно, так как $\mathbb{X}$ конечномерно, то оператор A ограничен. Значит, A отображает любое ограниченное множество $M \subset \mathbb{X}$ в ограниченное множество $A(M) \subset \mathbb{Y}$. Однако пространство $\mathbb{Y}$ конечномерно, следовательно ограниченность множества $A(M)$ равносильна его предкомпактности. Стало быть, оператор A компактен.

Пример 2: Если пространство $\mathbb{Y}$ конечномерно и оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ограничен, то он является компактным.

Доказательство уже было проведено в Примере 1.

Напомним, что *рангом* оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ называется размерность его образа: $\mathrm{rank} A = \dim \mathrm{Im} A$.

Пример 3: *Ограниченный оператор конечного ранга* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{rank} A < +\infty$, является компактным.

Действительно, так как оператор A ограничен, то он отображает любое ограниченное множество $M \subset \mathbb{X}$ в ограниченное множество $A(M) \subset \mathrm{Im} A \subset \mathbb{Y}$. Но так как $\mathrm{rank} A = \dim \mathrm{Im} A < +\infty$, то из ограниченности $A(M)$ следует его предкомпактность. Значит, оператор A компактен, $A \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Для подпространства ограниченных операторов конечного ранга в $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ используется обозначение $\mathcal{F}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Пример 3 показывает, что $\mathcal{F}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Теорема (свойства компактных операторов):

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ — бáнаховы пространства.

1) Пусть $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ — компактные операторы, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, тогда оператор $(\alpha A + \beta B)$ также является компактным.

2) Любой компактный оператор $A \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является ограниченным, т.е. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

   Таким образом, множество компактных операторов $\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ образует линейное подпространство в пространстве ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

3) Произведение компактного и ограниченного операторов является компактным оператором:

$$A \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{V}) \quad \Rightarrow \quad BA \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{V}),$$

$$A \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}),\ C \in \mathcal{B}(\mathbb{W}, \mathbb{X}) \quad \Rightarrow \quad AC \in \mathcal{K}(\mathbb{W}, \mathbb{Y})$$

** Таким образом, все конечномерные операторы, изучавшиеся Вами в курсе линейной алгебры являлись компактными.

4) Тождественный оператор $I \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ является компактным только в *конечномерном* пространстве:

$$I \in \mathcal{K}(\mathbb{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathbb{X} < +\infty$$

5) Пусть пространство $\mathbb{X}$ *бесконечномерно* и $A \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$ — обратимый компактный оператор, тогда обратный оператор A^{-1} не может быть ограниченным:

$$\dim \mathbb{X} = +\infty, \quad A \in \mathcal{K}(\mathbb{X}), \quad \mathrm{KerA} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \notin \mathcal{B}(\mathbb{X})$$

6) Предел последовательности компактных операторов также является компактным оператором:

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \quad A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$$

Таким образом, $\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является *замкнутым* подпространством в $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

□ **1)** Поскольку оператор A компактен, то из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, которую этот оператор отобразит в сходящуюся последовательность $\{Ax_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Y}$.

Далее, поскольку оператор B компактен, то из ограниченной последовательности $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$, которую этот оператор переведет в сходящуюся последовательность $\{Bx_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Y}$.

Итак, мы показали, что из произвольной ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$, которую оператор $(\alpha A + \beta B)$ отобразит в сходящуюся последовательность $\{\alpha Ax_{n_{k_j}} + \beta Bx_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Y}$. Следовательно, оператор $(\alpha A + \beta B)$ компактен.

2) Так как оператор A компактен, он отображает любое ограниченое множество $M \subset \mathbb{X}$ в предкомпактное, а значит и ограниченное множество $A(M) \subset \mathbb{Y}$. Следовательно, оператор A ограничен.

3) Докажем, что оператор $BA \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{V})$ является компактным. Поскольку оператор A компактен, то из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, которую этот оператор отобразит в сходящуюся последовательность $\{Ax_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Y}$. Далее, поскольку оператор B ограничен, то он непрерывен, следовательно последовательность $\{BAx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{V}$ также является сходящейся. Значит, оператор BA компактен.

Теперь докажем компактность оператора $AC \in \mathcal{B}(\mathbb{W}, \mathbb{Y})$. Так как оператор C ограничен, он отображает любую ограниченную последовательность $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{W}$

в ограниченную последовательность $\{Cw_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$. Далее, поскольку оператор A компактен, то из ограниченной последовательности $\{Cw_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ можно выделить подпоследовательность $\{Cw_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, которую оператор A отображает в сходящуюся последовательность $\{ACw_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Y}$. Значит, оператор AC компактен.

4) Если пространство $\mathbb{X}$ конечномерно, то тождественный оператор $I \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ является конечномерным и, следовательно, компактным.

Предположим теперь, что пространство $\mathbb{X}$ бесконечномерно и тождественный оператор $I \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ является компактным. Тогда I должен отображать ограниченное множество $B[0;1]$ (замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле) в предкомпактное множество. Однако $I(B[0;1]) = B[0;1]$, а шар $B[0;1]$ в бесконечномерном пространстве не является предкомпактным множеством. Значит, тождественный оператор в бесконечномерном пространстве не является компактным.

5) Пусть пространство $\mathbb{X}$ бесконечномерно, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ компактен и обратим. Докажем, что в этом случае обратный оператор A^{-1} не может быть ограниченным. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, тогда по свойству 3) тождественный оператор $I = AA^{-1}$ должен быть компактным, что невозможно в силу бесконечномерности пространства $\mathbb{X}$. Значит, обратный оператор A^{-1} обязан быть неограниченным.

6) Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$. Покажем, что из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, которую оператор A отображает в сходящуюся последовательность $\{Ax_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Y}$ — этим и будет доказана компактность оператора A.

Итак, поскольку оператор A_1 компактен, то из ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, которую этот оператор отобразит в сходящуюся последовательность $\{A_1 x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Далее, в силу компактности оператора A_2 из последовательности $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, которую этот оператор отобразит в сходящуюся последовательность $\{A_2 x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Рассуждая аналогичным образом для каждого следующего оператора из последовательности $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ получим бесконечную цепочку подпоследовательностей

$$\begin{aligned}
\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} &= \{{\color{red}x_1^{(1)}}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots\} \\
\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}} &= \{x_1^{(2)}, {\color{red}x_2^{(2)}}, x_3^{(2)}, \ldots\} \\
\{x_n^{(3)}\}_{n\in\mathbb{N}} &= \{x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, {\color{red}x_3^{(3)}}, \ldots\}
\end{aligned}$$

. . . .

из «диагональных» элементов которой мы и построим искомую последовательность $\{x_n^* := x_n^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Докажем, наконец, что последовательность $\{Ax_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится. Поскольку пространство $\mathbb{X}$ ба́нахово (т.е. полное), то для этого достаточно доказать фундаментальность данной последовательности. Имеем:

$$\|Ax_n^* - Ax_m^*\| = \|(Ax_n^* - A_kx_n^*) + (A_kx_n^* - A_kx_m^*) + (A_kx_m^* - Ax_m^*)\| \leq$$
$$\leq \|(A - A_k)x_n^*\| + \|A_kx_n^* - A_kx_m^*\| + \|(A_k - A)x_m^*\| \leq$$
$$\leq \|A - A_k\|(\|x_n^*\| + \|x_m^*\|) + \|A_kx_n^* - A_kx_m^*\|$$

Заметим теперь, что поскольку последовательность $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена, то существует число $R > 0$ такое, что $\|x_n^*\| \leq R$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Далее, так как $\|A - A_k\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ и для достаточно больших k будет выполнено неравенство $\|A - A_k\| \leq \varepsilon/(3R)$.

Наконец, так как при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{A_kx_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, то она является фундаментальной, а значит при достаточно больших n и m выполнена оценка $\|A_kx_n^* - A_kx_m^*\| \leq \varepsilon/3$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n, m и k получаем оценку

$$\|Ax_n^* - Ax_m^*\| \leq 2\varepsilon R/(3R) + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

что и означает, что последовательность $\{Ax_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ является фундаментальной, а значит и сходящейся в $\mathbb{X}$. Тем самым компактность оператора A доказана. ∎

Замечание: Оказывается, что в *сепарабельном гильбертовом пространстве* существует эквивалентное, но более удобное в приложениях определение компактного оператора. Заметим однако, что как показал в 1973 г. норвежский математик Пер Энфло, это эквивалентное определение не имеет, вообще говоря, места в произвольном сепарабельном ба́наховом пространстве.

Теорема (эквивалентное определение компактного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве):

Пусть $\mathbb{H}_{1,2}$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ является компактным тогда и только тогда, когда существует *сходящаяся к нему* *последовательность ограниченных операторов конечного ранга*, т.е. последовательность $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$, $\operatorname{rank}(A_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ такая, что $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

Иными словами, пространство компактных операторов $\mathcal{K}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ совпадает с замыканием подпространства ограниченных операторов конечного ранга $\mathcal{F}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$:

$$\mathcal{K}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2) = \operatorname{cl}_{\mathcal{B}(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)} \mathcal{F}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$$

□ **Достаточность:** Пусть существует последовательность $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ ограниченных операторов конечного ранга, сходящаяся к оператору A. Согласно Примеру 3 каждый из операторов A_n является компактным, а значит в силу свойства 6) оператор A, будучи пределом последовательности компактных операторов A_n, также является компактным.

Необходимость: Так как $\mathbb{H}_{1,2}$ — сепарабельные гильбертовы пространства, то в них существуют гильбертовы базисы, которые мы обозначим $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, соответственно.

Тогда любой вектор $|x\rangle \in \mathbb{H}_1$ представляется своим рядом Фурье

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle e_k|x\rangle |e_k\rangle,$$

а действие оператора A на этот вектор может быть записано в виде

$$A|x\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle f_j|A|x\rangle |f_j\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle f_j|A| \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \langle e_k|x\rangle |e_k\rangle \right\} |f_j\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} |f_j\rangle\langle f_j|A| \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |e_k\rangle\langle e_k|x\rangle \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |f_j\rangle \underbrace{\langle f_j|A|e_k\rangle}_{\mathcal{A}_{jk}} \langle e_k| \right\} |x\rangle =$$

$$= \underbrace{\left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}_{jk} |f_j\rangle\langle e_k| \right\}}_{A} |x\rangle,$$

где $\mathcal{A}_{jk} \equiv \langle f_j|A|e_k\rangle$ — матричный элемент оператора A в выбранной паре базисов.

Определим далее операторы P_n и Q_n ортогонального проектирования на линейные оболочки $\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ и $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$

$$P_n := \Pr_{\langle e_1,\dots,e_n\rangle} = \sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle\langle e_k|, \qquad Q_n := \Pr_{\langle f_1,\dots,f_n\rangle} = \sum_{j=1}^{n} |f_j\rangle\langle f_j|,$$

а также операторы $\widetilde{P}_n$ и $\widetilde{Q}_n$ ортогонального проектирования на линейные оболочки $\langle e_{n+1}, e_{n+2}, \dots\rangle$ и $\langle f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\rangle$

$$\widetilde{P}_n := I - P_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |e_k\rangle\langle e_k|, \qquad \widetilde{Q}_n := I - Q_n = \sum_{j=n+1}^{+\infty} |f_j\rangle\langle f_j|$$

Заметим теперь, что (бесконечная) матрица $\mathcal{A}$ оператора A в выбранной паре базисов состоит четырех блоков

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} Q_nAP_n & Q_nA\widetilde{P}_n \\ \widetilde{Q}_nAP_n & \widetilde{Q}_nA\widetilde{P}_n \end{bmatrix},$$

соответствующих операторам Q_nAP_n, $Q_nA\widetilde{P}_n$, $\widetilde{Q}_nAP_n$ и $\widetilde{Q}_nA\widetilde{P}_n$. Докажем, что последовательность ограниченных операторов конечного ранга n

$$A_n := Q_nAP_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_{jk}|f_j\rangle\langle e_k|$$

сходится к оператору A, т.е. что $\|A - A_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Будем рассуждать от противного: пусть $\|A-A_n\| \not\to 0$ при $n \to +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется подпоследовательность операторов $\{A_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\|A-A_{n_j}\| \geq \varepsilon$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Для краткости перейдем к подпоследовательности A_{n_j}, т.е. вместо индекса n_j будем использовать прежний индекс n.

Итак, $\|A - A_n\| \geq \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает в том числе, что найдется последовательность векторов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\|x_n\| = 1$, но $\|(A - A_n)x_n\| \geq \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Заметим теперь, что поскольку оператор A компактен, то из ограниченной последовательности $\{P_nx_n\}_{j\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{P_{n_j}x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, которую этот оператор отобразит в сходящуюся последовательность

$$AP_{n_j}x_{n_j} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \mathbb{H}_2$$

Далее, аналогично из ограниченной последовательности $\{P_{n_j}x_{n_j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{\widetilde{P}_{n_{j_k}} x_{n_{j_k}}\}_{l\in\mathbb{N}}$, которую оператор A отобразит в сходящуюся последовательность

$$A\widetilde{P}_{n_{j_k}} x_{n_{j_k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z \in \mathbb{H}_2$$

Для краткости далее перейдем всюду к подпоследовательности $x_{n_{j_k}}$, т.е. вместо индекса n_{j_k} будем использовать прежний индекс n. В этих обозначаниях $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является ограниченной последовательностью такой, что

$$AP_n x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \mathbb{H}_2 \quad \text{и} \quad A\widetilde{P}_n x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z \in \mathbb{H}_2$$

Докажем, что $z = 0$. Действительно, пользуясь тем, что ортогональный проектор $\widetilde{P}_n$ является самосопряженным оператором, т.е. $\widetilde{P}_n^* = \widetilde{P}_n$, получаем

$$\|z\|^2 = (\lim_{n\to+\infty} A\widetilde{P}_n x_n, z) = \lim_{n\to+\infty} (A\widetilde{P}_n x_n, z) = \lim_{n\to+\infty} (x_n, \widetilde{P}_n A^* z) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\|x_n\|}_{=1} \|\widetilde{P}_n A^* z\| = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|\langle e_k | A^* z\rangle\right|^2 \right)^{1/2} = 0$$

Далее, имеем соотношение

$$A - A_n = A - Q_n A P_n = (A - AP_n) + (AP_n - Q_n A P_n) = A\widetilde{P}_n + \widetilde{Q}_n A P_n,$$

поэтому

$$\lim_{n\to+\infty} \|(A - A_n)x_n\| \leq \cancel{\lim_{n\to+\infty} \|A\widetilde{P}_n x_n\|} + \lim_{n\to+\infty} \|\widetilde{Q}_n A P_n x_n\| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \|\widetilde{Q}_n A P_n x_n - \widetilde{Q}_n y + \widetilde{Q}_n y\| \leq \lim_{n\to+\infty} \|\widetilde{Q}_n (AP_n x_n - y)\| + \lim_{n\to+\infty} \|\widetilde{Q}_n y\| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\|\widetilde{Q}_n\|}_{=1} \|AP_n x_n - y\| + \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{+\infty} \left|\langle f_j | y\rangle\right|^2 \right)^{1/2} = 0$$

Следовательно, для достаточно больших n должно выполняться неравенство $\|(A - A_n)x_n\| < \varepsilon$. Пришли к противоречию с исходным предположением. Значит $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$, что и требовалось доказать. ■

Замечание: Доказанная теорема дает интуитивное понимание компактного оператора в гильбертовом пространстве как оператора, бесконечномерная часть которого «мала», так что сам оператор допускает конечномерные приближения любой точности. В силу этого можно сказать, что класс компактных операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах наиболее близок по свойствам к конечномерным операторам, в чем мы еще больше убедимся при изучении свойств спектров компактных операторов.

Пример 1: Как мы уже знаем, тождественный оператор $I \in \mathcal{B}(l_2)$ не является компактным, так как $\dim l_2 = +\infty$.

Пример 2: Оператор правого сдвига $S_r \in \mathcal{B}(l_2)$ не является компактным, поскольку из ограниченной последовательности

$$\{e_n = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, 0, \ldots)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset l_2$$

нельзя выделить подпоследовательность, которую оператор S_r отобразит в фундаметнальную, а тем более в сходящуюся последовательность:

$$\|S_r e_j - S_r e_k\| = \|e_{j+1} - e_{k+1}\| = \sqrt{2} \ \text{ при } \ j \neq k$$

Аналогично доказывается, что оператор левого сдвига $S_l \in \mathcal{B}(l_2)$ не является компактным.

Отметим также, что причину некомпактности операторов I, S_r и S_l нетрудно понять, если заметить, что они не допускают конечномерных приближений: норма их бесконечномерной части всегда равна единице и не стремится к нулю.

Пример 3: Исследуем на компактность оператор $A \in \mathcal{B}(l_2)$, действующий на любую последовательность $x \in l_2$ по правилу

$$Ax = \left(\frac{x_1}{2^1}, \frac{x_2}{2^2}, \ldots, \frac{x_n}{2^n}, \ldots\right)$$

Зададим последовательность ограниченных операторов конечного ранга $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(l_2)$ правилом

$$A_n x = \left(\frac{x_1}{2^1}, \frac{x_2}{2^2}, \ldots, \frac{x_n}{2^n}, 0, 0, \ldots\right)$$

Очевидно, что $A_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} A$, ведь

$$\|A - A_n\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|(A - A_n)x\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} |x_k|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{2n+2}} \sup_{\|x\|=1} \|x\|^2 = \frac{1}{2^{2n+2}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

следовательно оператор A компактен.

Отметим также, что обратный оператор к A действует по правилу

$$A^{-1}x = (2^1 x_1, 2^2 x_2, \ldots, 2^n x_n, \ldots)$$

и является неограниченным, как и предсказывает свойство 5).

Качественно причина, по которой оператор, обратный к компактному в бесконечномерном гильбертовом пространстве обязан быть неограниченным, состоит в следующем: поскольку бесконечномерная часть компактного оператора A является «малой», то в обратном операторе A^{-1} эта же бесконечномерная часть должна быть неограниченно большой по операторной норме.

3.12. Спектр компактного оператора

Для изучения свойств спектра компактного оператора нам потребуется следующее утверждение, которое мы примем без доказательства.

Лемма: Пусть $A \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ — компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, тогда если оператор $(I - A)$ инъективен, то он биективен*.

□ Без доказательства. ■

Теорема (свойства спектра компактного оператора):

Пусть $\mathbb{H}$ — *бесконечномерное* гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ — компактный оператор, тогда:

1) точка $\lambda = 0$ лежит в спектре оператора A;
2) любая отличная от нуля точка спектра оператора A является его собственным значением конечной кратности:
$$\lambda \neq 0 \ \text{ и } \ \lambda \in \sigma(A) \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \sigma_p(A) \ \text{ и } \ \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < +\infty;$$
3) для любого $\varepsilon > 0$ оператор A имеет лишь конечное число собственных значений λ таких, что $|\lambda| > \varepsilon$.

Перечисленные свойства иллюстрируются Рисунками 3.8–3.9. Отметим, что из свойства 3) следует *дискретность точечного спектра* компактного оператора, означающая, что множество его ненулевых собственных значений состоит из изолированных точек, которые, следовательно, можно занумеровать в порядке невозрастания модулей

* Это утверждение является частью т.н. *альтернативы Фредгольма*, см., например, «Элементы Теории Функций и Функционального Анализа», А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, стр. 468—470.

$$\|A\| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots,$$

причем если последовательность λ_n бесконечна, то она сходится к нулю: $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Таким образом, спектр компактного оператора не может иметь предельных точек, отличных от точки 0.

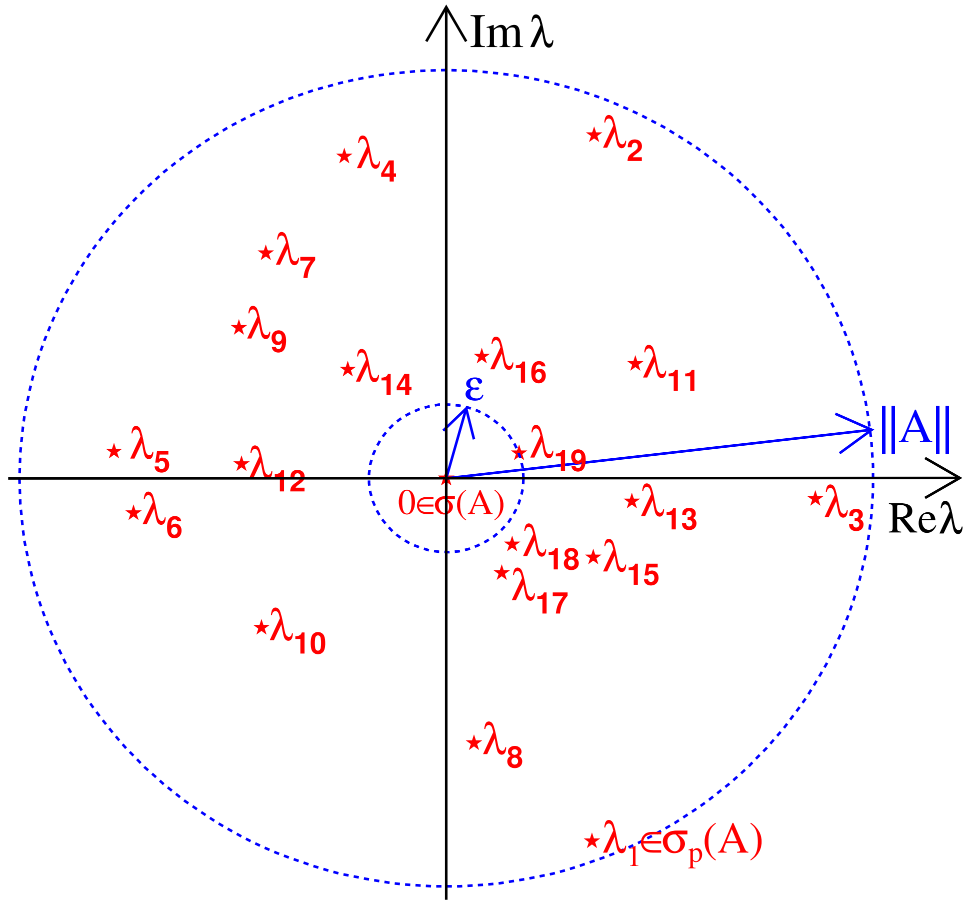


Рис. 3.8: Возможный вид спектра компактного оператора $A \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ в бесконечномерном пространстве $\mathbb{H}$.

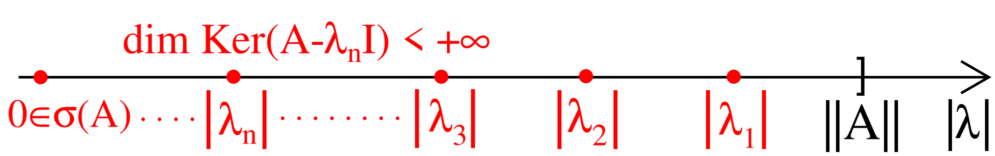


Рис. 3.9: Точки спектра компактного оператора $A \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ в бесконечномерном пространстве $\mathbb{H}$, занумерованные в порядке невозрастания модуля.

□ **1)** Будем рассуждать от противного: пусть точка 0 лежит не в спектре, а в резольвентном множестве $\rho(A)$. Тогда существует резольвента $R(0; A)$, являющаяся, как известно, ограниченным оператором. Однако $R(0; A) = (A - 0I)^{-1} = A^{-1}$, следовательно обратный оператор A^{-1} существует и ограничен, что невозможно, ибо оператор A компактен и пространство $\mathbb{H}$ бесконечномерно.

2) Пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda \in \sigma(A)$, тогда оператор $(A - \lambda I) = -\lambda(I - A/\lambda)$ не биективен, а значит, согласно лемме, и не инъективен. Следовательно, λ является собственным значением оператора A.

Докажем, что кратность λ, то есть размерность собственного подпространства $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ обязательно конечна. Действительно, для произвольного вектора $x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ имеем

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad (A/\lambda)\, x = Ix,$$

то есть сужение оператора A/λ на инвариантное подпространство $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ является тождественным оператором:

$$(A/\lambda)\big|_{\operatorname{Ker}(A-\lambda I)} = I_{\operatorname{Ker}(A-\lambda I)}$$

Легко показать, однако, что сужение компактного оператора A/λ на инвариантное подпространство также является компактным оператором. Таким образом тождественный опертор $I_{\operatorname{Ker}(A-\lambda I)}$ должен быть компактным, что возможно только при $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < +\infty$, что и требовалось доказать.

3) Будем рассуждать от противного: пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ нашлась бесконечная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ линейно независимых собственных векторов оператора A, так что

$$Ax_n = \lambda_n x_n, \quad |\lambda_n| > \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Применяя к последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ процедуру Грама–Шмидта получим ортонормированную последовательность $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ собственных векторов оператора A. Заметим, что последовательность $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена, а значит из неё можно выделить подпоследовательность $\{e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, отображаемую компактным оператором A в сходящуюся последовательность $\{Ae_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. С другой же стороны для любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|Ae_{n_k} - Ae_{n_l}\|^2 = \|\lambda_{n_k} e_{n_k} - \lambda_{n_l} e_{n_l}\|^2 = |\lambda_{n_k}|^2 \underbrace{\|e_{n_k}\|^2}_{=1} + |\lambda_{n_l}|^2 \underbrace{\|e_{n_l}\|^2}_{=1} = |\lambda_{n_k}|^2 + |\lambda_{n_l}|^2 > 2\varepsilon^2,$$

а значит последовательность $\{Ae_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ не является фундаментальной и тем более сходящейся. Полученное противоречие и доказывает утверждение свойства 3). ■

Теорема (о непустоте точечного спектра компактного самосопряженного оператора): Пусть A — ненулевой компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ над полем $\mathbb{C}$, тогда A имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение:

$$A \in \mathcal{K}(\mathbb{H}), \quad A \not\equiv O, \quad A^* = A \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \sigma_p(A), \ \lambda \neq 0$$

□ Заметим, что поскольку оператор A ненулевой, то его норма положительна, а поскольку он является самосопряженным, то его спектральный радиус $r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ равен его норме и также является положительным. Значит, спектр $\sigma(A)$ содержит хотя бы одно ненулевое число. Однако оператор A компактен, поэтому это ненулевое число обязано быть его собственным значением. Теорема доказана. ■

Из курса линейной алгебры нам хорошо известно, что матрица любого конечномерного самосопряженного оператора диагонализуется в ортонормированном базисе из его собственных векторов. Следующая же важная теорема обобщает данное утверждение на бесконечномерный случай.

Теорема (Гильберта–Шмидта о существовании ортонормированного базиса из собственных векторов компактного самосопряженного оператора):

Пусть $A \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ — компактный самосопряженный оператор в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ над полем $\mathbb{C}$. Тогда в $\mathbb{H}$ существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.

□ Заметим прежде всего, что ядро $\mathrm{Ker} A$ является замкнутым подпространством в $\mathbb{H}$, так как оператор A ограничен. Следовательно, пространство $\mathbb{H}$ представляется в виде прямой суммы ядра $\mathrm{Ker} A$ и его ортогонального дополнения $(\mathrm{Ker} A)^\perp$: $\mathbb{H} = \mathrm{Ker} A \oplus (\mathrm{Ker} A)^\perp$.

Отметим далее очевидный факт, что $\mathrm{Ker} A$ является инвариантным подпространством оператора A. Но так как оператор A является самосопряженным, то $(\mathrm{Ker} A)^\perp$ также является его инвариантным подпространством. Следовательно, мы можем рассмотреть сужения $A\big|_{\mathrm{Ker} A}$ и $A\big|_{(\mathrm{Ker} A)^\perp}$ оператора A на эти подпространства. Отметим также легко проверяемый факт, что сужение компактного самосопряженного оператора на инвариантное подпространство также является компактным самосопряженным оператором.

Предположим, не ограничивая общности дальнейшего рассуждения, что $\mathrm{Ker} A \neq \{0\}$. Заметим, что в силу замкнутости $\mathrm{Ker} A$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ оно также является сепарабельным гильбертовым пространством. Следовательно, мы всегда можем выбрать в $\mathrm{Ker} A$ конечный либо бесконечный гильбертов базис $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$. Очевидно, что все элементы этого базиса являются собственными векторами оператора A, отвечающими собственному значению 0.

Далее предположим, что $(\mathrm{Ker}A)^\perp \neq \{0\}$ и рассмотрим сужение $A_1 := A\big|_{(\mathrm{Ker}A)^\perp}$. Согласно теореме о непустоте точечного спектра компактного самосопряженного оператора A_1 имеет ненулевое собственное значение λ_1 такое, что $|\lambda_1| = \|A_1\| = \|A\|$. Обозначим e_1 собственный вектор единичной длины, отвечающий собственному значению λ_1. Так как подпространство $\langle e_1 \rangle$ инвариантно под действием самосопряженного оператора A_1, то и его ортогональное дополнение $\mathbb{H}_1 := \langle e_1 \rangle^\perp$ до пространства $(\mathrm{Ker}A)^\perp$ также инвариантно относительно A_1. Следовательно, мы можем определить сужение $A_2 := A_1\big|_{\mathbb{H}_1}$ оператора A_1 на подпространство $\mathbb{H}_1$, также являющееся компактным самосопряженным оператором.

Далее рассуждаем по индукции. Пусть для некоторого номера $j \geq 2$ уже построен компактный самосопряженный оператор $A_j := A_1\big|_{\mathbb{H}_{j-1}} \neq O$. Тогда по теореме о непустоте точечного спектра компактного самосопряженного оператора A_j имеет ненулевое собственное значение λ_j такое, что $|\lambda_j| = \|A_j\| \leq |\lambda_{j-1}| = \|A_{j-1}\| \leq \ldots \leq |\lambda_1| = \|A\|$. Обозначим e_j собственный вектор единичной длины, отвечающий собственному значению λ_j. Так как подпространство $\langle e_1, e_2, \ldots, e_j \rangle$ инвариантно под действием самосопряженного оператора A_1, то и его ортогональное дополнение $\mathbb{H}_j := \langle e_1, e_2, \ldots, e_j \rangle^\perp$ до пространства $(\mathrm{Ker}A)^\perp$ также инвариантно относительно A_1. Следовательно, мы можем определить сужение $A_{j+1} := A_1\big|_{\mathbb{H}_j}$ оператора A_1 на подпространство $\mathbb{H}_j$, также являющееся компактным самосопряженным оператором.

Продолжая описанный процесс до бесконечности, либо до момента, когда очередное подпространство $\mathbb{H}_j$ окажется нулевым мы получим бесконечную либо конечную ортонормированную систему $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ собственных векторов оператора A. Заметим, что эта система полна в $(\mathrm{Ker}A)^\perp$, ведь в противном случае мы определили бы сужение оператора A_1 на инвариантное подпространство $\langle e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \rangle^\perp$, а затем по описанной выше процедуре нашли бы еще один собственный вектор оператора A и пополнили им систему $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$.

Наконец, объединяя базисы $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ подпространств $\mathrm{Ker}A$ и $(\mathrm{Ker}A)^\perp$ получим искомый гильбертов базис пространства $\mathbb{H}$. $\blacksquare$

Глава 4.

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтéрра

Интегральное уравнение — это уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. В нашем курсе мы ограничимся рассмотрением *линейных* интегральных уравнений, важнейшими классами которых являются:

- **Уравнение Фредгольма 1-го рода:** $\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$
- **Уравнение Фредгольма 2-го рода:** $\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$
- **Уравнение Вольтéрра 1-го рода:** $\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$
- **Уравнение Вольтéрра 2-го рода:** $\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$

В приведенных уравнениях:

- x — неизвестная функция, которую требуется найти, решив уравнение;
- $f(t)$ – известная функция, называемая также «*неоднородностью*» уравнения;
- $K(t,s) : [a,b]^2 \equiv [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ — известная функция, называемая **ядром интегрального оператора***.

* Не следует путать это понятие с ядром Ker линейного оператора.

Замечание: Очевидно, что уравнения Вольте́рра являются частными случаями уравнений Фредгольма, ведь

$$\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds = \int\limits_a^b \widetilde{K}(t,s)x(s)ds, \quad \text{где} \quad \widetilde{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & a \le s \le t \\ 0, & t < s \le b \end{cases}$$

Тем не менее, благодаря специальному «нижнетреугольному» виду ядра $\widetilde{K}(t,s)$ решения уравнений Вольте́рра обладают рядом свойств, отсутствующих, вообще говоря, у решений уравнений Фредгольма.

Пример: Покажем, что задача Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)x(t) = f(t), \quad \text{где} \quad p_1, \ldots, p_n, f \in C[a,b] \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \end{cases}$$

может быть сведена к интегральному уравнению Вольте́рра 2-го рода.

Начнем с того, что сведем исходную задачу Коши к задаче с нулевыми начальными условиями применив следующую подстановку:

$$x(t) := y(t) + x_0 + x_1\frac{t}{1!} + x_2\frac{t^2}{2!} + \ldots + x_{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Тогда задача Коши для функции $y(t)$ примет вид

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + p_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)y(t) = g(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(0) = 0, \end{cases}$$

где $g(t)$ — изменившаяся правая часть дифференциального уравнения.

Сделаем теперь замену $y^{(n)}(t) =: z(t)$, позволяющую избавиться от производных всех порядков от $y(t)$:

$$\begin{cases} y^{(n-1)}(t) = \int\limits_0^t y^{(n)}(s)ds = \int\limits_0^t z(s)ds \\ y^{(n-2)}(t) = \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^u z(s)ds\right] du = \int\limits_0^t \left[\int\limits_s^t z(s)du\right] ds = \int\limits_0^t \frac{(t-s)}{1!} z(s)ds \\ y^{(n-3)}(t) = \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^u \frac{(u-s)}{1!} z(s)ds\right] du = \int\limits_0^t \left[\int\limits_s^t \frac{(u-s)}{1!} z(s)du\right] ds = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^2}{2!} z(s)ds \\ \dots \\ y(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} z(s)ds \end{cases}$$

Подставляя теперь эти результаты в дифференциальное уравнение, получаем эквивалентное исходной задаче Коши интегральное уравнение Вольтéрра 2-го рода:

$$z(t) + \int\limits_0^t K(t,s)z(s)ds = g(t), \text{ где } K(t,s) := p_1(t) + p_2(t)\frac{(t-s)}{1!} + \ldots + p_n(t)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$$

4.2. Интегральный оператор Гильберта–Шмидта

Определение: **Интегральным оператором Гильберта–Шмидта** называется оператор, сопоставляющий каждой функции $x \in L_2[a,b]$ функцию

$$y(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds, \text{ где } K \in L_2[a,b]^2, \text{ т.е. } \|K\|_2^2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dtds < +\infty$$

Иными словами, интегральный оператор Гильберта–Шмидта — это «обычный» линейный интегральный оператор, но с дополнительным требованием квадратичной интегрируемости его ядра $K(t,s)$.

Пусть A — интегральный оператор Гильберта–Шмидта, тогда интегральные уравнения Фредгольма и Вольтéрра с этим оператором могут быть записаны в виде:

- $Ax + f = 0$ — уравнение Фредгольма/Вольтéрра 1-го рода;
- $Ax + f = x$ — уравнение Фредгольма/Вольтéрра 2-го рода.

Очевидно, что многие свойства решений этих уравнений следуют из свойств оператора Гильберта–Шмидта, ключевым из которых является его *компактность*.

Теорема (о компактности оператора Гильберта–Шмидта):

Пусть A — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с ядром $K(t,s)$, действующий на пространстве $L_2[a,b]$. Тогда A является компактным оператором, отображающим $L_2[a,b]$ в себя, т.е. $A \in \mathcal{K}(L_2[a,b])$, а для его нормы справедлива оценка

$$\|A\| \leq \|K\|_2 = \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 \, dtds\right)^{1/2} < +\infty$$

□ Докажем прежде всего, что оператор A отображает пространство $L_2[a,b]$ в себя, то есть что для любой функции $x \in L_2[a,b]$ её образ $(Ax)(t)$ под действием оператора A также лежит в $L_2[a,b]$. Действительно, используя неравенство Коши–Буняковского получаем оценку

$$\|Ax\|^2 = \int\limits_a^b \left|\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds\right|^2 dt \leq \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b |K(t,s)|^2 ds\right] \cdot \left[\int\limits_a^b |x(s)|^2 ds\right] dt =$$

$$= \left[\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 \, dsdt\right] \cdot \|x\|^2 = \|K\|_2^2 \cdot \|x\|^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad Ax \in L_2[a,b],$$

откуда также следует оценка для нормы оператора A:

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 \leq \|K\|_2^2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 \, dsdt < +\infty$$

Докажем теперь, что A — компактный оператор. Так как $L_2[a,b]$ является сепарабельным гильбертовым пространством, в нем всегда можно выбрать некоторый гильбертов базис $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Покажем, что система фукций $\{e_n(t)\overline{e_m(s)}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ составляет гильбертов базис в пространстве $L_2[a,b]^2$. Действительно, эта система ортонормирована, так как

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b \left[e_n(t)\overline{e_m(s)}\right] \cdot \overline{\left[e_k(t)\overline{e_j(s)}\right]} dtds = \left[\int\limits_a^b e_n(t)\overline{e_k(t)}dt\right] \cdot \left[\int\limits_a^b e_j(s)\overline{e_m(s)}ds\right] = \delta_{nk}\delta_{jm}$$

Покажем, что система $\{e_n(t)\overline{e_m(s)}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ полна, т.е. что $\{e_n(t)\overline{e_m(s)}\}^{\perp}_{n,m\in\mathbb{N}} = \{0\}$. Пусть $f(t,s) \in L_2[a,b]^2$ и $f \in \{e_n(t)\overline{e_m(s)}\}^{\perp}_{n,m\in\mathbb{N}}$, то есть для любых $n,m \in \mathbb{N}$

$$0 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b f(t,s)\overline{e_n(t)\overline{e_m(s)}}dtds = \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b f(t,s)\overline{e_n(t)}dt\right] e_m(s)ds = \Big((f(t,s), e_n(t)), \overline{e_m(s)}\Big)$$

Поскольку система $\{e_m(s)\}_{m\in\mathbb{N}}$ полна, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$(f(t,s), e_n(t)) \in \{\overline{e_m(s)}\}^{\perp}_{m\in\mathbb{N}} = \{0\},$$

то есть $(f(t,s), e_n(t)) = 0$ для почти всех $s \in [a,b]$. Далее, поскольку система $\{e_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна, то

$$f(t,s) \in \{e_n(t)\}^{\perp}_{n\in\mathbb{N}} = \{0\},$$

то есть $f(t,s) = 0$ для почти всех $(t,s) \in [a,b]^2$. Стало быть

$$f \in \{e_n(t)\overline{e_m(s)}\}^{\perp}_{n,m\in\mathbb{N}} = \{0\},$$

то есть система $\{e_n(t)\overline{e_m(s)}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ полна в $L_2[a,b]^2$.

Пользуясь теперь доказанной базисностью системы $\{e_n(t)\overline{e_m(s)}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ в $L_2[a,b]^2$ разложим по ней в ряд Фурье ядро $K(t,s)$:

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} \lambda_{mn} e_n(t)\overline{e_m(s)} \quad (*)$$

Далее, определим последовательность интегральных операторов $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, действующих на любую функцию $x \in L_2[a,b]$ по правилу

$$(A_N x)(t) := \int\limits_a^b K_N(t,s)x(s)ds, \quad \text{где} \quad K_N(t,s) := \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_{mn} e_n(t)\overline{e_m(s)}$$

Отметим, что функции $K_N(t,s)$ являются частичными суммами ряда Фурье $(*)$, сходящегося к функции $K(t,s)$, так что

$$\|K - K_N\|_2^2 \equiv \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s) - K_N(t,s)|^2 \, dtds \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Покажем, что последовательность $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ является последовательностью ограниченных операторов конечного ранга, сходящейся к оператору A. Тем самым в силу эквивалентного опеределения компактного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве будет доказана компактность оператора A.

Действительно, операторы A_N ограничены, поскольку

$$\|A_N\|^2 \leq \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K_N(t,s)|^2 \, dtds = \ [\textit{упражнение}] \ = \sum_{n,m=1}^{N} |\lambda_{mn}|^2 < +\infty$$

Далее, ранги операторов A_N конечны, так как

$$(A_N x)(t) = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\left[\int\limits_a^b \sum_{m=1}^{N} \lambda_{mn} \overline{e_m(s)} x(s) ds \right]}_{c_n} e_n(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n(t) \in \langle e_1, e_2, \ldots, e_N \rangle \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{rank} A_N = \dim \mathrm{Im} A_N \leq N < +\infty$$

Наконец, последовательность операторов A_N сходится к оператору A, поскольку

$$\|A - A_N\|^2 \leq \|K - K_N\|_2^2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \blacksquare$$

Теорема (об операторе, сопряженном к интегральному оператору Гильберта–Шмидта):

Пусть $A \in \mathcal{K}(L_2[a,b])$ — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с ядром $K(t,s)$, тогда сопряженный к нему оператор A^* также является интегральным оператором Гильберта–Шмидта, а его ядро равно $\overline{K(s,t)}$.

□ Пусть $x, y \in L_2[a,b]$, тогда

$$(Ax, y) = \int\limits_a^b (Ax)(t)\overline{y(t)} dt = \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b K(t,s) x(s) ds \right] \overline{y(t)} dt =$$

$$= \int\limits_a^b x(s) \overline{\left[\int\limits_a^b \overline{K(t,s)} y(t) dt \right]} ds = [\, t \leftrightarrow s \,] = \int\limits_a^b x(t) \overline{\left[\int\limits_a^b \overline{K(s,t)} y(s) ds \right]} dt =$$

$$= \int_a^b x(t)\overline{(A^*y)(t)}dt = (x, A^*y), \quad \text{где} \quad (A^*y)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)ds$$

Законность изменения порядка интегрирования в приведенной цепочке равенств следует из теоремы Фубини*. Действительно, с помощью неравенства Коши–Буняковского в пространстве $L_2[a,b]^2$ легко убедиться в существовании двойного интеграла от функции $|K(t,s)x(s)\overline{y(t)}|$:

$$\int_a^b\int_a^b \left|K(t,s)x(s)\overline{y(t)}\right| dtds \leq \left[\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dtds\right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b\int_a^b |x(s)\overline{y(t)}|^2 dtds\right]^{1/2} =$$
$$= \|K\|_2 \|x\| \|y\| < +\infty \quad \blacksquare$$

Определение: Ядро $K(t,s) \in L_2[a,b]^2$ интегрального оператора Гильберта–Шмидта называется **симметричным**, если $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$ для всех $(t,s) \in [a,b]^2$.

Ясно, что симметричное ядро определяет самосопряженный оператор Гильберта–Шмидта.

4.3. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Определение: Ядро $K(t,s)$ интегрального оператора Гильберта–Шмидта называется **вырожденным**, если оно представимо в виде

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)Q_j(s),$$

где $P_j, Q_j \in L_2[a,b]$ для всех $j = \overline{1,n}$, причем функции $\{P_j\}_{j=\overline{1,n}}$ являются *линейно независимыми*.

Замечание: Если функции $\{Q_j\}_{j=\overline{1,n}}$ в приведенном определении являются линейно зависимыми, то полезно выразить их через линейно независимый набор $\{\widetilde{Q}_j\}_{j=\overline{1,m}}$, $m < n$, получив для ядра интегрального оператора представление

* **Теорема Фубини:** Пусть функция $f(x,y) \in \mathbb{R}^{[a,b]^2}$ интегрируема по двум переменным на квадрате $[a,b]^2$, тогда повторные интегралы существуют и равны двойному

$$\int_a^b\int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_a^b f(x,y)dy\right] dx,$$

причем внутренние однократные интегралы существуют для почти всех $y \in [a,b]$ и $x \in [a,b]$.

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{P}_j(t)\widetilde{Q}_j(s)$$

с линейно независимыми наборами функций $\{\widetilde{P}_j\}_{j=\overline{1,m}}$ и $\{\widetilde{Q_j}\}_{j=\overline{1,m}}$. Например:

$$K(t,s) = ts + 2t^2s + 3t^3s + 4t^4s^2 + 5t^5s^2 + 6t^6s^2 = (t + 2t^2 + 3t^3)s + (4t^4 + 5t^5 + 6t^6)s^2$$

Покажем, что решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)Q_j(s) \quad (*)$$

сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Действительно, подставляя в интегральное уравнение явный вид ядра, получаем

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\int_a^b Q_j(s)x(s)ds\right]}_{q_j} P_j(t) + f(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t) \quad (**)$$

Далее, чтобы найти коэффициенты $\{q_j\}_{j=\overline{1,n}}$, подставим вид решения $(**)$ обратно в интегральное уравнение $(*)$:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + \cancel{f(t)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_a^b Q_j(s) \left\{\sum_{k=1}^{n} q_k P_k(s) + f(s)\right\} ds\right] P_j(t) + \cancel{f(t)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} q_k \underbrace{\int_a^b Q_j(s)P_k(s)ds}_{a_{jk}} + \underbrace{\int_a^b Q_j(s)f(s)ds}_{b_j}\right] P_j(t) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k + b_j\right] P_j(t)$$

Поскольку функции $\{P_j\}_{j=\overline{1,n}}$ линейно независимы, коэффициенты перед каждой из них в левой и правой частях последнего равенства одинаковы:

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k + b_j, \ j = \overline{1, n}$$

Итак, мы получили систему линейных алгебраических уравнений на коэффициенты $\{q_j\}_{j=\overline{1,n}}$, определяющие решение $x(t)$ исходного интегрального уравнения.

Замечание: Не стоит недооценивать важность рассмотренного частного случая интегрального уравнения с вырожденным ядром: если ядро интегрального интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода не является вырожденным, то его можно, вообще говоря, приблизить частичной суммой рядов Фурье или Тейлора, тем самым сведя (с некоторой точностью) задачу к уравнению с вырожденным ядром.

4.4. Альтернатива Фредгольма

С теоремой, называемой *альтернативой Фредгольма* Вам уже доводилось сталкиваться в курсе линейной алгебры, где она применялась для исследования разрешимости систем линейных алгебраических уравнений. Тем не менее, навеянное конечномерной алгеброй впечатление об этой теореме как о достаточно простом факте является обманчивым. Во–первых, в бесконечномерных пространствах соответствующая теорема доказывается существенно сложнее*. Во–вторых, в общем случае она формулируется не для любых операторов, а для операторов вида $(I - A)$, где A — компактный оператор*.

Далее для краткости будем использовать обозначение $B := I - A$.

Лемма: Пусть $B = I - A$, где $A \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ — компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, тогда справедливы следующие утверждения:

1) подпространства $\mathrm{Im}B$ и $\mathrm{Im}B^*$ замкнуты в $\mathbb{H}$;
2) $\dim \mathrm{Ker}B = \dim \mathrm{Ker}B^* < +\infty$.

□ Без доказательства. ■

Замечание: Напомним, для любого ограниченного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ справедливы соотношения $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}_1}\mathrm{Im}A^*$ и $(\mathrm{Ker}A^*)^\perp = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}_2}\mathrm{Im}A$, откуда следует, что пространства $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ представляются в виде прямых сумм

---

* См., например, «Элементы Теории Функций и Функционального Анализа», А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, стр. 467—472.

* Заметим, что в силу компактности тождественного оператора I в конечномерном пространстве все изучавшиеся в курсе линейной алгебры конечномерные операторы также приводятся к виду $I - A$ с компактным оператором A.

$$\mathbb{H}_1 = \mathrm{Ker} A \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{cl}_{\mathbb{H}_1} \mathrm{Im} A^* \quad \text{и} \quad \mathbb{H}_2 = \mathrm{Ker} A^* \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{cl}_{\mathbb{H}_2} \mathrm{Im} A$$

Пусть теперь $B = I - A$, где $A \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$, тогда согласно лемме подпространства $\mathrm{Im}B$ и $\mathrm{Im}B^*$ замкнуты в $\mathbb{H}$, а значит приведенные выше разложения принимают вид

$$\mathbb{H} = \mathrm{Ker}B \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}B^* \quad \text{и} \quad \mathbb{H} = \mathrm{Ker}B^* \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}B$$

Теорема (альтернатива Фредгольма):

Пусть $B = I - A$, где $A \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ — компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Тогда имеет место одно из двух:

1) либо операторы B и B^* инъективны, то есть $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}B^* = \{0\}$, и сюръективны, то есть $\mathrm{Im}B = \mathrm{Im}B^* = \mathbb{H}$, а значит B и B^* биективны;

2) либо операторы B и B^* не инъективны, причем $0 < \dim \mathrm{Ker}B = \dim \mathrm{Ker}B^* < +\infty$, и не сюръективны, причем $\mathrm{Im}B = (\mathrm{Ker}B^*)^\perp \neq \mathbb{H}$ и $\mathrm{Im}B^* = (\mathrm{Ker}B)^\perp \neq \mathbb{H}$.

□ Доказательство очевидно следует из леммы и замечания к ней. ■

Замечание: Альтернатива Фредгольма часто используется при исследовании разрешимости интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. А именно, рассмотрим следующие уравнения с интегральным оператором Гильберта–Шмидта A:

- **(н)**: неоднородное уравнение $(I - A)x = f$;
- **(о)**: однородное уравнение $(I - A)x = 0$;
- **(сн)**: сопряженное неоднородное уравнение $(I - A^*)y = g$;
- **(со)**: сопряженное однородное уравнение $(I - A^*)y = 0$.

Применительно к вопросу о разрешимости неоднородного уравнения **(н)** альтернатива Фредгольма утверждает, что имеет место одна из двух ситуаций:

1) либо уравнения **(о)** и **(со)** имеют только нулевые решения, и тогда уравнения **(н)** и **(сн)** имеют единственные решения для любых правых частей f и g;

2) либо уравнения **(о)** и **(со)** имеют по $n < +\infty$ линейно независимых решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно, и тогда уравнение **(н)** разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть f ортогональна каждому из решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения **(со)**. Аналогично уравнение **(сн)** разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть g ортогональна каждому из решений

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнения **(о)**. Наконец, очевидно, что если уравнение **(н)** разрешимо, то общим видом его решения является сумма частного решения уравнения **(н)** $x_{\text{ч.н.}}$ и общего решения уравнения **(о)** $x_{\text{о.о.}} = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$, где числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ произвольны.

4.5. Уравнения с малым параметром: метод последовательных приближений

Пусть A — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с ядром $K(t,s) \in L_2[a,b]^2$. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с параметром $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mu \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$$

или в операторной форме

$$(I - \mu A)x = f \quad (*)$$

Согласно теореме Неймана выполнение условия $|\mu| < 1/\|A\|$ гарантирует непрерывную обратимость оператора $(I - \mu A)$, причем обратный оператор в этом случае представляется рядом Неймана:

$$(I-\mu A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^n A^n, \;\text{ где }\; A^0 \equiv I$$

Следовательно, при достаточно малом μ, а именно при $|\mu| < 1/\|A\|$ мы можем записать решение уравнения $(*)$ следующим образом:

$$x = (I-\mu A)^{-1}f = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^n A^n f = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n, \;\text{ где } x_0 := f \text{ и } x_n := \mu A x_{n-1} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad (**)$$

Способ решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода путем последовательного нахождения членов ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ по формулам $(**)$ называется **методом последовательных приближений**.

Для дальнейшего продвижения в изучении метода последовательных приближений нам необходимо понять природу операторов вида A^n, входящих в формулы $(**)$, в чем нам поможет следующая лемма.

Лемма (о произведении интегральных операторов Гильберта–Шмидта):

Пусть A и B — интегральные операторы Гильберта–Шмидта с ядрами K и Q из $L_2[a,b]^2$, соответственно. Тогда произведение AB также является интегральным оператором Гильберта–Шмидта с ядром

$$R(t,s) = \int\limits_a^b K(t,r)Q(r,s)dr \ \in L_2[a,b]^2,$$

причем $\|R\|_2 \leq \|K\|_2 \|Q\|_2 < +\infty$.

$\square$ Действительно,

$$(ABx)(t) = A((Bx)(s))(t) = \int\limits_a^b K(t,s)(Bx)(s)ds = \int\limits_a^b K(t,s)\left[\int\limits_a^b Q(s,u)x(u)du\right] ds =$$

$$= \int\limits_a^b \underbrace{\left[\int\limits_a^b K(t,s)Q(s,u)ds\right]}_{R(t,u)} x(u)du = \int\limits_a^b R(t,u)x(u)du \quad (***)$$

Законность изменения порядка интегрирования в приведенной цепочке равенств следует из теоремы Фубини. Действительно, с помощью неравенства Коши–Буняковского в пространстве $L_2[a,b]^2$ легко убедиться в существовании двойного интеграла от функции $|K(t,s)Q(s,u)x(u)|$ для почти всех $t \in [a,b]$:

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)Q(s,u)x(u)|\, dsdu \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)x(u)|^2 dsdu\right]^{1/2} \cdot \left[\int\limits_a^b\int\limits_a^b |Q(s,u)|^2 dsdu\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\int\limits_a^b |K(t,s)|^2 ds\right]^{1/2} \cdot \|x\| \|Q\|_2,$$

где $\int\limits_a^b |K(t,s)|^2 ds < +\infty$ для почти всех $t \in [a,b]$, поскольку

$$\|K\|_2^2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dt ds = \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b |K(t,s)|^2 ds \right] dt < +\infty$$

Итак, мы доказали законность изменения порядка интегрирования в цепочке равенств $(***)$ для почти всех $t \in [a,b]$, поэтому и равенство

$$(ABx)(t) = \int\limits_a^b R(t,u)x(u)du$$

справедливо для почти всех $t \in [a,b]$, а значит оно справедливо и в смысле нормы пространства $L_2[a,b]$.

Наконец, оператор AB является оператором Гильберта–Шмидта, поскольку его ядро $R(t,s)$ лежит в пространстве $L_2[a,b]^2$. В самом деле, в силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|R(t,s)|^2 = \left| \int\limits_a^b K(t,u)Q(u,s)du \right|^2 \le \left[\int\limits_a^b |K(t,u)|^2 du \right] \cdot \left[\int\limits_a^b |Q(u,s)|^2 du \right],$$

следовательно

$$\|R\|_2^2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |R(t,s)|^2 dt ds \le \underbrace{\left[\int\limits_a^b |K(t,u)|^2 dt du \right]}_{\|K\|_2^2} \cdot \underbrace{\left[\int\limits_a^b |Q(u,s)|^2 du ds \right]}_{\|Q\|_2^2} < +\infty \quad \blacksquare$$

Теорема (о повтором ядре интегрального оператора Гильберта–Шмидта):

Пусть A — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с ядром $K(t,s) \in L_2[a,b]^2$, тогда для любого $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$ оператор A^n также является интегральным оператором Гильберта–Шмидта, а его ядро $K_n(t,s)$ может быть найдено по рекуррентной формуле

$$K_n(t,s) = \int\limits_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)dr,$$

причем $\|A^n\| \le \|K_n\|_2 \le \|K\|_2^n$.

Ядра $K_n(t,s)$ операторов A^n называются также **повторными ядрами** оператора A.

□ Доказательство очевидным образом следует из леммы. ■

Замечание: Если все повторные ядра K_n найдены, то решение $(**)$ интегрального уравнения $(*)$ можно записать в следующем виде:

$$x(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^n (A^n f)(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b \mu^n K_n(t,s) f(s) ds =$$

$$= f(t) + \int_a^b \underbrace{\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^n K_n(t,s) \right]}_{R(t,s;\mu)} f(s) ds = f(t) + \int_a^b R(t,s;\mu) f(s) ds,$$

где функция $R(t,s;\mu) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^n K_n(t,s)$ называется **резольвентным ядром**.

4.6. Интегральные уравнения с симметричными ядрами

В двух предыдущих пунктах мы убедились, что многие свойства решений уравнений с интегральным оператором Гильберта–Шмидта могут быть изучены и сформулированы в рамках теории компактных операторов в гильбертовых пространствах. В то же время в теории интегральных уравнений исторически сложилась собственная терминология, несколько отличающаяся от принятой в теории операторов.

Определение: Пусть $A \in \mathcal{K}(L_2[a,b])$ — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с ядром $K(t,s)$. Ненулевая функция $x \in L_2[a,b]$ называется **собственной функцией интегрального уравнения**, или **собственной функцией ядра** $K(t,s)$, отвечающей **характеристическому значению** $\mu \in \mathbb{C}$, если $x = \mu A x$.

Из приведенного определения ясно, что никакое характеристическое значение интегрального уравнения не может быть равно нулю. Кроме того, каждому ненулевому собственному значению λ интегрального оператора A соответствует характеристическое значение $\mu = 1/\lambda$, тогда как собственному значению $\lambda = 0$ никакое характеристическое значение в соответствие не ставится.

Далее, так как интегральный оператор Гильберта–Шмидта является компактным, то его точечный спектр дискретен. На языке теории интегральных уравнений этот факт формулируется следующим образом: характеристические значения интегрального уравнения с интегральным оператором Гильберта–Шмидта с ядром K можно занумеровать в порядке *неубывания* модулей $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots \geq |\mu_n| \geq \ldots$, причем каждому характеристическому значению отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных функций ядра K.

Определение: Говорят, что функция $f \in L_2[a,b]$ **представима через ядро** $K \in L_2[a,b]^2$, если существует функция $g \in L_2[a,b]$ такая, что

$$f(t) = \int_a^b K(t,s)g(s)ds$$

Иными словами, функция f представима через ядро $K \in L_2[a,b]^2$, если она лежит в *образе* интегрального оператора Гильберта–Шмидта, порожденного этим ядром.

Теорема (Гильберта–Шмидта для интегрального оператора Гильберта–Шмидта с симметричным ядром):

Пусть $A \in \mathcal{K}(L_2[a,b])$ — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с симметричным ядром K, тогда любая представимая через ядро функция $f \in L_2[a,b]$ может быть разложена в ряд (или в конечную сумму)

$$f = \sum_n \lambda_n x_n,$$

где $\{x_n\}$ суть конечная или бесконечная ортонормированная система из собственных функций ядра K, а числа $\{\lambda_n\}$ — коэффициенты Фурье функции f относительно данной системы.

$\square$ Из доказательства «обычной» теоремы Гильберта–Шмидта мы знаем, что в ортогональном дополнении к ядру $(\mathrm{Ker}A)^\perp$ можно выбрать ортонормированный базис $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ из собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям оператора A. Поскольку же $A^* = A$ и $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{cl}_{L_2[a,b]}\mathrm{Im}A$, то любую представимую через ядро функцию $f \in \mathrm{Im}A$ можно разложить в ряд Фурье (или в конечную сумму) по этому базису. $\blacksquare$

Рассмотрим теперь интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$x = \mu A x + f \quad (*),$$

где A — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с симметричным ядром K. Поскольку оператор A является компактным и самосопряженным, то представимая через ядро функция $x - f = \mu A x \in \mathrm{Im}A$ может быть разложена в ряд Фурье (или в конечную сумму) по ортонормированной системе $\{x_n\}$ собственных функций ядра K:

$$x - f = \sum_n \lambda_n x_n \quad \Rightarrow \quad x = f + \sum_n \lambda_n x_n \quad (**)$$

Итак, мы получили вид решения $(**)$ с точностью до неизвестных констант $\{\lambda_n\}$. Чтобы найти эти константы, подставим вид решения $(**)$ обратно в уравнение $(*)$ и учтем, что $Ax_n = x_n/\mu_n$:

$$\cancel{f} + \sum_n \lambda_n x_n = \mu A \left[f + \sum_n \lambda_n x_n \right] + \cancel{f} \quad \Rightarrow \quad \sum_n \lambda_n x_n = \mu A f + \sum_n \lambda_n \frac{\mu}{\mu_n} x_n$$

Далее, разложим представимую через ядро функцию $Af \in \mathrm{Im} A$ по системе $\{x_n\}$:

$$Af = \sum_n (Af, x_n) x_n = [A^* = A] = \sum_n (f, Ax_n) x_n = \sum_n \frac{(f, x_n)}{\mu_n} x_n$$

Подставляя данное разложение Af обратно в уравнение, получаем

$$\sum_n \lambda_n x_n = \sum_n \frac{\mu}{\mu_n} (f, x_n) x_n + \sum_n \lambda_n \frac{\mu}{\mu_n} x_n \quad \Rightarrow \quad \sum_n \frac{\lambda_n(\mu_n - \mu) - \mu(f, x_n)}{\mu_n} x_n = 0$$

Поскольку система функций $\{x_n\}$ линейно независима, то из последнего равенства следует равенство нулю коэффициентов при каждом из x_n:

$$\lambda_n(\mu_n - \mu) - \mu(f, x_n) = 0 \quad (***)$$

Дальнейший ход решения зависит от того, совпадает ли параметр μ с одним из характеристических значений μ_n.

В случае, если $\mu \neq \mu_n$ для всех n из уравнений $(***)$ находятся все коэффициенты λ_n, а вместе с ними и решение x интегрального уравнения $(*)$:

$$\lambda_n = \frac{\mu}{\mu_n - \mu} (f, x_n) \quad \Rightarrow \quad x = f + \sum_n \frac{\mu}{\mu_n - \mu} (f, x_n) x_n.$$

Пусть теперь параметр μ совпадает с одним из характеристических чисел μ_m. Выделим из набора $\{x_n\}$ собственные функции $\{x_{m_j}\}_{j=\overline{1,k}}$, $k = \dim \mathrm{Ker}(I - \mu_m A)$, отвечающие характеристическому значению μ_m, и запишем уравнение $(***)$ для $n = m_j$:

$$\lambda_{m_j} \underbrace{(\mu_m - \mu)}_{=0} - \mu(f, x_{m_j}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (f, x_{m_j}) = 0,\ j = \overline{1, k}$$

Таким образом уравнения $(***)$, а вместе с ними и само интегральное уравнение $(*)$ являются разрешимыми в том и только в том случае, если функция f ортогональна решениям $\{x_{m_j}\}_{j=\overline{1,k}}$ однородного уравнения $(I - \mu_m A)x = 0$ (совпадающего с сопряженным однородным уравнением в силу того, что $A^* = A$). Этот результат, конечно, дословно повторяет утверждение альтернативы Фредгольма.

Предположим теперь, что указанное условие разрешимости выполнено, т.е. что $(f, x_{m_j}) = 0$ для всех $j = \overline{1, k}$. Тогда из уравнений $(***)$ следует, что коэффициенты λ_{m_j} могут быть произвольными, а значит решение интегрального уравнения восстанавливается с точностью до произвольного вектора из ядра $\mathrm{Ker}(I - \mu_m A)$:

$$x = f + \sum_{\substack{n \neq m_j \\ j=\overline{1,k}}} \frac{\mu}{\mu_n - \mu}(f, x_n)x_n + \underbrace{\sum_{j=\overline{1,k}} \lambda_{m_j} x_{m_j}}_{\in \mathrm{Ker}(I - \mu_m A)}$$

Теорема (о разложении повторных ядер интегрального оператора Гильберта–Шмидта по собственным функциям ядра):

Пусть A — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с симметричным ядром $K(t, s) \in L_2[a, b]^2$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ортонормированный базис в $L_2[a, b]$ из его собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ ядро K_n оператора A^n представляется рядом Фурье

$$K_n(t, s) \overset{L_2}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^n x_j(t) \overline{x_j(s)}$$

Данное разложение называют также *билинейной формулой.*

□ Ранее в доказательстве теоремы о компактности интегрального оператора Гильберта–Шмидта мы установили, что система функций $\{x_j(t)\overline{x_k(s)}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ составляет гильбертов базис в $L_2[a, b]^2$. Так как любое повторное ядро K_n лежит в пространстве $L_2[a, b]^2$, оно может быть разложено в ряд Фурье по данному базису:

$$K_n(t, s) \overset{L_2}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{jk} x_j(t) \overline{x_k(s)}$$

Вычислим теперь коэффициенты Фурье λ_{jk}:

$$\lambda_{jk} = \big(K_n, x_j\overline{x_k}\big) = \int\limits_a^b\int\limits_a^b K_n(t,s)\overline{x_j(t)\overline{x_k(s)}}dtds = \int\limits_a^b\left[\int\limits_a^b K_n(t,s)x_k(s)ds\right]\overline{x_j(t)}dt =$$

$$= \int\limits_a^b (A^n x_k)(t)\overline{x_j(t)}dt = \lambda_k^n\int\limits_a^b x_k(t)\overline{x_j(t)}dt = \lambda_k^n\delta_{kj},$$

где δ_{kj} означает символ Кронекера. Подставляя найденные коэффициенты λ_{jk} в ряд Фурье окончательно получаем

$$K_n(t,s) \overset{L_2}{=} \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^n\delta_{kj}x_j(t)\overline{x_k(s)} = \sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j^n x_j(t)\overline{x_j(s)} \quad \blacksquare$$

Замечание: В билинейной формуле можно ограничиться суммированием только по тем j, для которых $\lambda_j \neq 0$. Для каждого такого j функция x_j является собственной функцией ядра K, отвечающей характеристическому значению $\mu_j = 1/\lambda_j$. Следовательно, билинейная формула может быть переписана в виде

$$K_n(t,s) \overset{L_2}{=} \sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j^n},$$

где индекс j пробегает конечное или бесконечное число значений в зависимости от конечности или бесконечности ранга оператора A (размерности $\mathrm{Im}A$).

4.7. Существование и единственность решения интегрального уравнения Вольтéрра 2-го рода

Лемма (обобщение теоремы Неймана):

Пусть $\mathbb{X}$ — бáнахово пространство, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ — ограниченный линейный оператор со спектральным радиусом $r(A) < 1$. Тогда оператор $(I - A)$ непрерывно обратим, т.е. обратный к нему оператор $(I-A)^{-1}$ существует, ограничен и определен на всем пространстве $\mathbb{X}$, причем $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$.

$\square$ Напомним, что достаточным условием сходимости операторного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$ является сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\|A^n\|$. Поскольку по условию

$$r(A) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|} < 1,$$

то существует число $q < 1$ и номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\sqrt[n]{\|A^n\|} \leq q < 1$ для всех $n \geq N$. Тогда числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|A^n\|$ сходится, поскольку

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|A^n\| = \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n\| + \sum_{n=N}^{+\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n\| + \sum_{n=N}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n\| + \frac{q^N}{1-q} < +\infty,$$

а значит сходится и операторный ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$. Докажем, что сумма этого ряда является левым обратным оператором для $(I - A)$. Действительно,

$$\sum_{k=0}^{n} A^k (I - A) = I - A^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

так как для $n \geq N$ выполняется оценка $\|A^{n+1}\| \leq q^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Аналогично доказывается, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$ является правым обратным оператором к $(I - A)$. Итак,

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}) \ \blacksquare$$

Теорема: Пусть $K(t,s) \in L_2[a,b]^2$, тогда для любого параметра $\mu \in \mathbb{C}$ и для любой функции $f \in L_2[a,b]$ интегральное уравнение Вольте́рра 2-го рода

$$x(t) = \mu \int_a^t K(t,s) x(s) ds + f(t)$$

имеет единственное решение $x \in L_2[a,b]$.

$\square$ Мы ограничимся доказательством в случае ограниченного ядра:

$$|K(t,s)| \leq M \ \text{ для всех } \ (t,s) \in [a,b]^2$$

Обозначим A интегральный оператор Гильберта–Шмидта, порожденный ядром $K(t,s)$, тогда для любой функции $x \in L_2[a,b]$ используя неравенство Коши–Буняковского получаем оценку

$$|(Ax)(t)|^2 = \left| \int_a^t K(t,s) x(s) ds \right|^2 \leq \left[\int_a^t |K(t,s)|^2 ds \right] \cdot \left[\int_a^t |x(s)|^2 ds \right] \leq (t-a) M^2 \|x\|^2$$

Аналогично

$$|(A^2x)(t)|^2 = |(A(A(x))(t)|^2 \le \left[\int\limits_a^t |K(t,s)|^2 ds\right] \cdot \left[\int\limits_a^t |Ax(s)|^2 ds\right] \le$$

$$\le (t-a)M^2 \left[\int\limits_a^t (s-a)M^2\|x\|^2 ds\right] = \frac{(t-a)^3}{2} M^4 \|x\|^2$$

Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ получена оценка

$$|(A^n x)(t)|^2 \le \frac{(t-a)^{2n+1}}{(2n)!!} M^{2n} \|x\|^2 \quad (*),$$

тогда

$$|(A^{n+1}x)(t)|^2 = |(A(A^n(x))(t)|^2 \le \left[\int\limits_a^t |K(t,s)|^2 ds\right] \cdot \left[\int\limits_a^t |A^n x(s)|^2 ds\right] \le$$

$$\le (t-a)M^2 \left[\int\limits_a^t \frac{(s-a)^{2n+1}}{(2n)!!} M^{2n}\|x\|^2 ds\right] = \frac{(t-a)^{2n+3}}{(2n+2)!!} M^{2n+2}\|x\|^2$$

Таким образом, оценка $(*)$ справедлива для любого номера $n \in \mathbb{N}$, и мы можем воспользоваться ей для оценки нормы оператора A^n:

$$\|A^n x\|^2 = \int\limits_a^b |(A^n x)(t)|^2 \, dt \le \int\limits_a^b \frac{(t-a)^{2n+1}}{(2n)!!} M^{2n}\|x\|^2 dt = \frac{(b-a)^{2n+2}}{(2n+2)!!} M^{2n}\|x\|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \|A^n\| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{\sqrt{(2n+2)!!}} M^n$$

Следовательно,

$$\|(\mu A)^n\| \le (b-a) \frac{\big(\mu(b-a)M\big)^n}{\sqrt{(2n+2)!!}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

а значит существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для некоторого числа $q < 1$ выполняется неравенство $\|(\mu A)^N\| \le q < 1$, гарантирующее, что спектральный радиус оператора μA меньше единицы:

$$r(\mu A) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|(\mu A)^n\|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[Nn]{\|(\mu A)^{Nn}\|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[Nn]{\left\|\left((\mu A)^N\right)^n\right\|} \le$$
$$\le \lim_{n\to+\infty} \sqrt[Nn]{\|(\mu A)^N\|^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[N]{\|(\mu A)^N\|} = \sqrt[N]{\|(\mu A)^N\|} \le \sqrt[N]{q} < 1$$

Итак, $r(\mu A) < 1$, поэтому согласно лемме оператор $(I - \mu A)$ непрерывно обратим и решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода находится методом последовательных приближений:

$$x = (I - \mu A)^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^n A^n f \in L_2[a, b] \quad \blacksquare$$

Приложение A.

Отношение эквивалентности

Определение: **Бинарным отношением** на множестве X называется любое непустое подмножество $R \subset X \times X$.

Тот факт, что между элементами $x, y \in X$ имеет место бинарное отношение R, т.е. что $(x, y) \in R$, записывают так: $x\,R\,y$.

Определение: **Отношением эквивалентности** на множестве X называется заданное на нем бинарное отношение $\sim$, для любых $x, y, z \in X$ удовлетворяющее условиям:

1) рефлексивность: $x \sim x$;
2) симметричность: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
3) транзитивность: $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Если $x \sim y$, то x и y называются **эквивалентными**.

Наконец, для любого $x \in X$ определено множество $[x] := \{y \in X \ : \ y \sim x\} \subset X$, называемое **классом эквивалентности, порожденным элементом** x.

Утверждение:

1) Класс эквивалентности определяется однозначно любым своим представителем, т.е. если $x \sim y$, то $[x] = [y]$.
2) Классы эквивалентности, порожденные неэквивалентными элементами, не пересекаются, т.е. если $x \nsim y$, то $[x] \cap [y] = \varnothing$.

$\square$ **1)** Действительно, в силу транзитивности отношения эквивалентности имеем:

$$[x] = \{z \in X \ : \ z \sim x\} = \{z \in X \ : \ z \sim x \sim y\} = \{z \in X \ : \ z \sim y\} = [y]$$

2) Предположим противное: $[x] \cap [y] \neq \varnothing$. Тогда существует элемент $z \in [x] \cap [y]$, т.е. $z \sim x$ и $z \sim y$. Но тогда по транзитивности имеем $x \sim y$, что противоречит условию утверждения. ■

Теорема о разбиении множества на непересекающиеся классы эквивалентности:

Непустое множество X с отношением эквивалентности представляется в виде объединения непересекающихся классов эквивалентности.

□ Очевидно, что $X \equiv \bigcup\limits_{x \in X} \{x\} = \bigcup\limits_{x \in X} [x]$. Вычеркнув из последнего объединения повторяющиеся классы эквивалентности получим разбиение множества X на непересекающиеся классы эквивалентности. ■

Приложение Б.

Теорема фон Неймана–Йордана

Теорема фон Неймана–Йордана: Норма нормированного пространства $\mathbb{L}$ порождена скалярным произведением тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \mathbb{L}$ выполняется **равенство параллелограмма**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$\square$ Для общности проведем доказательство в случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Необходимость: Пусть $\mathbb{L}$ — пространство со скалярным произведением. Проверим, что для нормы, порожденной скалярным произведением выполнено равенство параллелограмма:

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y, x \pm y) = (x,x) \pm 2\mathrm{Re}(x,y) + (y,y) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Достаточность: Пусть $\mathbb{L}$ — нормированное пространство и для любых $x, y \in \mathbb{L}$ выполнено равенство параллелограмма. Докажем, что в этом случае можно построить функцию $s : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющую всем свойствам скалярного произведения, причем для любого $x \in \mathbb{L}$ выполняется равенство $\|x\| = \sqrt{s(x,x)}$. Очевидно, что функцию с такими свойствами можно принять за скалярное произведение в $\mathbb{L}$, порождающее норму этого пространства.

Для начала предположим, что норма в $\mathbb{L}$ порождена скалярным произведением, и получим явное выражение для скалярного произведения через норму. В действительности существует бесконечное количество подобных выражений, и все они называются **поляризационными тождествами**. Начнем с уже известного нам соотношения

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2\mathrm{Re}(x,y) + (y,y),$$

откуда, обозначая $\mathrm{Re}(x,y)$ за $f(x,y)$, получаем:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big]$$

Аналогично

$$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,iy) + \|iy\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(-i(x,y)) + \|y\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(-i\mathrm{Re}(x,y) + \mathrm{Im}(x,y)) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Im}(x,y) + \|y\|^2,$$

откуда, обозначая $\mathrm{Im}(x,y)$ за $g(x,y)$, получаем:

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big]$$

Поскольку $g(x,y) \equiv f(x,iy)$, искомое поляризационное тождество имеет вид

$$(x,y) = f(x,y) + if(x,iy), \text{ где } f(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big]$$

Докажем теперь, что функция $s(x,y) := f(x,y) + if(x,iy)$ обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Действительно, первое свойство скалярного произведения выполнено, т.к.

$$s(x,x) = \frac{1}{2}\Big[\|x+x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2\Big] + \frac{i}{2}\Big[\|x+ix\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2\Big] =$$
$$= \|x\|^2 + \frac{i}{2}\Big[|1+i|^2 - 1^2 - 1^2\Big]\|x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0$$

Проверим эрмитову симметричность, т.е. выполнение равенства $s(x,y) = \overline{s(y,x)}$ или $f(x,y) + ig(x,y) = f(y,x) - ig(y,x)$. Последнее эквивалентно двум равенствам $f(x,y) = f(y,x)$ и $g(x,y) = -g(y,x)$, первое из которых очевидно, а второе легко проверяется с использованием равенства параллелограмма:

$$g(x,y) + g(y,x) = \frac{1}{2}\Big[\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big] + \frac{1}{2}\Big[\|y+ix\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|iy\|^2\Big] = 0$$

Наиболее трудоемкой частью доказательства является проверка линейности $s(x,y)$ по первому аргументу. Докажем, в первую очередь, что $s(x+y,z) = s(x,z) + s(y,z)$, для чего достаточно проверить, что $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$:

$$2\left(f(x+y,z)-f(x,z)-f(y,z)\right)=$$
$$=\left[\|x+y+z\|^2-\|x+y\|^2-\|z\|^2\right]-\left[\|x+z\|^2-\|x\|^2-\|z\|^2\right]-\left[\|y+z\|^2-\|y\|^2-\|z\|^2\right]=$$
$$=\left[\|x+y+z\|^2+\|x\|^2\right]+\left[\|y\|^2+\|z\|^2\right]-\left[\|x+y\|^2+\|x+z\|^2\right]-\|y+z\|^2$$

Применяя к выражениям в квадратных скобках равенство параллелограмма, получаем

$$2\left(f(x+y,z)-f(x,z)-f(y,z)\right)=\frac{1}{2}\Big[\|2x+y+z\|^2+\|y+z\|^2\Big]+$$
$$+\frac{1}{2}\Big[\|y+z\|^2+\|y-z\|^2\Big]-\frac{1}{2}\Big[\|2x+y+z\|^2+\|y-z\|^2\Big]-\|y+z\|^2\equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, осталось доказать, что для любого $\alpha\in\mathbb{F}$ выполняется равенство

$$f(\alpha x,y)=\alpha f(x,y)\ (*)$$

Пусть сначала $\alpha\in\mathbb{Q}$, т.е. $\alpha=\dfrac{m}{n}$, где $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$. Заметим прежде всего, что

$$f\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{1}{n}f(x,y),$$

поскольку в силу уже доказанного свойства функции f имеем

$$f(x,y)=f\left(\frac{n}{n}x,y\right)=f\Big(\underbrace{\frac{1}{n}x+\ldots+\frac{1}{n}x}_{n\ \text{слагаемых}},y\Big)=nf\left(\frac{1}{n}x,y\right)$$

Далее, $f(-x,y)=-f(x,y)$, поскольку в силу равенства параллелограмма

$$f(-x,y)=\frac{1}{2}\left[\|-x+y\|^2-\|-x\|^2-\|y\|^2\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\|-x+y\|^2+\|x+y\|^2-\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right]=\frac{1}{2}\left[\|x\|^2+\|y\|^2-\|x+y\|^2\right]=-f(x,y)$$

Теперь мы можем доказать свойство $(*)$ для рационального $\alpha=\dfrac{m}{n}$:

$$f\left(\frac{m}{n}x,y\right)=\operatorname{sgn}(m)f\left(\frac{|m|}{n}x,y\right)=\operatorname{sgn}(m)|m|f\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{m}{n}f(x,y)$$

Далее, для $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ условие $(*)$ легко доказать, предположив, что функция $f(x, y)$ непрерывна по первому аргументу. Поскольку всегда существует последовательность рациональных чисел $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, сходящаяся к α, то

$$f(\alpha x, y) = f(\lim_{k \to +\infty} \alpha_k x, y) = \lim_{k \to +\infty} f(\alpha_k x, y) = \lim_{k \to +\infty} \alpha_k f(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Докажем теперь, используя обратное неравенство треугольника, непрерывность $f(x, y)$ по первому аргументу, а именно что $f(x, y) \to f(x_0, y)$ при $x \overset{\|\cdot\|}{\to} x_0$:

$$\begin{aligned}
&2|f(x,y) - f(x_0,y)| = \Big|\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|x_0+y\|^2 + \|x_0\|^2 + \|y\|^2\Big| \leq \\
&\leq \Big|\|x+y\|^2 - \|x_0+y\|^2\Big| + \Big|\|x\|^2 - \|x_0\|^2\Big| = \\
&= \Big|\|x+y\| - \|x_0+y\|\Big| \cdot \Big[\|x+y\| + \|x_0+y\|\Big] + \Big|\|x\| - \|x_0\|\Big| \cdot \Big[\|x\| + \|x_0\|\Big] \leq \\
&\leq \|x+y-x_0-y\| \cdot \Big[\|x+y\| + \|x_0+y\|\Big] + \|x-x_0\| \cdot \Big[\|x\| + \|x_0\|\Big] = \\
&= \|x-x_0\| \cdot \Big[\|x+y\| + \|x_0+y\| + \|x\| + \|x_0\|\Big] \to 0 \text{ при } x \overset{\|\cdot\|}{\to} x_0
\end{aligned}$$

Наконец, в случае $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ достаточно доказать, что $s(ix, y) = is(x, y)$, т.е. $f(ix, y) + ig(ix, y) = i(f(x, y) + ig(x, y))$. Действительно, используя равенство параллелограмма, получаем:

$$\begin{aligned}
&2(f(ix,y) + ig(ix,y)) = \left[\|ix+y\|^2 - \|ix\|^2 - \|y\|^2\right] + i\left[\|ix+iy\|^2 - \|ix\|^2 - \|iy\|^2\right] = \\
&= \left[\|x-iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] + i\underbrace{\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right]}_{2f(x,y)} = \\
&= \left[\|x-iy\|^2 + \|x+iy\|^2 - \|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] + 2if(x,y) = \\
&= \left[2\|x\|^2 + 2\|iy\|^2 - \|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] + 2if(x,y) = \\
&= -\underbrace{\left[\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|iy\|^2\right]}_{2g(x,y)} + 2if(x,y) = 2i(f(x,y) + ig(x,y))
\end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Литература

[1] Александров В.А. Геометрия пространств со скалярным произведением. НГУ, 1995.

[2] Александров В.А. Ортогональные многочлены. НГУ, 1993.

[3] Александров В.А. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах. НГУ, 1996.

[4] Александров В.А., Колесников Е.В. Интегральные уравнения. НГУ, 1993.

[5] Подвигин И.В. Гильбертово пространство в примерах и задачах. НГУ, 2012.

[6] Абашеева Н.Л. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах. НГУ, 2007.

[7] Треногин В.А. Функциональный анализ, Москва «Физматлит», 2016.

[8] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, Москва «Наука», 1989.

[9] Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика, Москва «Физматлит», 2000.

[10] Пугачев В.С. Лекции по функциональному анализу, Москва, издательство МАИ, 1996.

[11] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены, Москва «Наука», 1976.

[12] Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения, Москва «Физматлит», 2002.

[13] Трикоми Ф. Интегральные уравнения, Москва «Издательство иностранной литературы», 1960.