Метод Фурье II
Уравнение Лапласа в 2D и 3D

“Уравнения математической физики”

Скопинцев Артур Маркович

Новосибирск, 2023

Задача Дирихле в кольце

Пусть требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями, L_1 и L_2, радиусов R_1 и R_2 с центром в начале координат:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2, \\ u|_{L_1} = f_1, & u|_{L_2} = f_2. \end{cases}$$

Вводя полярные координаты (ρ, φ), можно задачу Дирихле записать так:

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad R_1 < \rho < R_2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi), \\ u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi), \end{cases} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{1.1}$$

При этом граничные функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ считаем периодическими функциями периода 2π.

Для решения задачи применим метод Фурье. Будем искать решения в виде $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$. Подставив выражение $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ в уравнение (1.1), получим

$$\Phi\rho^2 R'' + \Phi\rho R' + R\Phi'' = 0.$$

Разделим теперь обе части этого уравнения на $R\Phi$, в результате чего получим

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{1.2}$$

Про это уравнение говорят, что в нем переменные *разделены*, так как левая часть уравнения зависит только от ρ, а правая — только от φ. Поскольку переменные ρ и φ не зависят друг от друга, то каждая часть уравнения (1.2) должна быть константой. Обозначим эту константу через λ. Тогда будем иметь

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda. \tag{1.3}$$

Ясно, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho, \varphi)$ должна вернуться к исходному значению, т. е. $u(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi + 2\pi)$. Отсюда $R(\rho)\Phi(\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi)$. Значит, $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, т. е. функция $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией с периодом 2π. Из уравнения $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$ следует, что $\Phi(\varphi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$ (A и B — произвольные постоянные), и в силу периодичности $\Phi(\varphi)$ должно быть выполнено равенство $\lambda = n^2$, где $n \geqslant 0$ — целое число.

В самом деле, из равенства

$$A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) = A\cos[\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi)] + B\sin[\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi)]$$

$\left(\text{обозначение: } \sin\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ следует, что $\sin(\alpha + \sqrt{\lambda}\varphi) = \sin(\alpha + \sqrt{\lambda}\varphi + 2\pi\sqrt{\lambda})$ и, значит, $\sin(\pi\sqrt{\lambda})\cos(\alpha + \sqrt{\lambda}\varphi + \pi\sqrt{\lambda}) = 0$, т. е. $\pi\sqrt{\lambda} = \pi n$, или $\lambda = n^2$, где $n \geqslant 0$ — целое число. Теперь из уравнения (1.3) получаем

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0. \tag{1.4}$$

Если $n \not\equiv 0$, то решение этого уравнения ищем в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя это выражение в уравнение (1.4) и сокращая на ρ^μ, находим

$$\mu^2 = n^2, \quad \text{или} \quad \mu = \pm n \quad (n > 0).$$

При $n=0$ уравнение (1.4) имеет два решения: 1 и $\ln\rho$. Итак, у нас есть теперь бесконечный набор функций («атомы» решения)

$$1, \quad \ln\rho, \quad \rho^n\cos(n\varphi), \quad \rho^n\sin(n\varphi), \quad \rho^{-n}\cos(n\varphi), \quad \rho^{-n}\sin(n\varphi)$$

($n=1, 2, \dots$), удовлетворяющих исходному уравнению с частными производными. Поскольку сумма этих решений также является решением, то «общее» решение уравнения Лапласа в нашем случае имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + b_0\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n\rho^n + b_n\rho^{-n})\cos(n\varphi) + (c_n\rho^n + d_n\rho^{-n})\sin(n\varphi)]. \quad (1.5)$$

Осталось найти только все коэффициенты в сумме (1.5) так, чтобы удовлетворить граничным условиям $u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi)$, $u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi)$. Полагая в формуле (1.5) $\rho = R_1$ и $\rho = R_2$, получим

$$u(R_1, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}[(a_nR_1^n + b_nR_1^{-n})\cos(n\varphi) + (c_nR_1^n + d_nR_1^{-n})\sin(n\varphi)] + a_0 + b_0\ln R_1,$$

$$u(R_2, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}[(a_nR_2^n + b_nR_2^{-n})\cos(n\varphi) + (c_nR_2^n + d_nR_2^{-n})\sin(n\varphi)] + a_0 + b_0\ln R_2.$$

Вспоминая выражения для коэффициентов Фурье тригонометрического ряда, приходим к следующим системам уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + b_0\ln R_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\,ds, \\ a_0 + b_0\ln R_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\,ds \end{cases} \quad (1.6_1)$$

(решается относительно a_0 и b_0);

$$\begin{cases} a_nR_1^n + b_nR_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\cos(ns)\,ds, \\ a_nR_2^n + b_nR_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\cos(ns)\,ds \end{cases} \quad (1.6_2)$$

(решается относительно a_n и b_n);

$$\begin{cases} c_nR_1^n + d_nR_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\sin(ns)\,ds, \\ c_nR_2^n + d_nR_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\sin(ns)\,ds \end{cases} \quad (1.6_3)$$

(решается относительно c_n и d_n).

Тем самым из этих систем уравнений находятся все неизвестные коэффициенты a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n. Теперь задача (1.1) полностью решена. Решение дается выражением (1.5), коэффициенты в котором определяются по формулам (1.6).

Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для круга

Рассмотрим два важнейших случая, когда кольцо обращается в круг и внешность круга. *Внутренняя* задача Дирихле ($R_1 = 0$, $R_2 = R$)

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leqslant \rho < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

решается точно так же, как решалась задача Дирихле для кольца, с тем отличием, что теперь необходимо отбросить те «атомы» решения, которые не ограничены при стремлении ρ к нулю:

$$\ln \rho, \quad \rho^{-n} \cos(n\varphi), \quad \rho^{-n} \sin(n\varphi), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, в качестве решения остается взять функцию

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi)\, d\varphi \qquad (n > 0),$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi)\, d\varphi. \tag{1.7}$$

Другими словами, мы просто разлагаем функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

а затем каждый член этого ряда умножаем на коэффициенты $\left(\frac{\rho}{R}\right)^n$. Например, внутренняя задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leqslant \rho < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

имеет решение

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho^2 \cos(2\varphi).$$

Внешняя задача Дирихле ($R_1 = R$, $R_2 = \infty$)

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, & R < \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

решается аналогично предыдущей, с тем отличием, что теперь необходимо отбросить те «атомы» решения, которые не ограничены при стремлении ρ к бесконечности:

$$\ln \rho, \quad \rho^n \cos(n\varphi), \quad \rho^n \sin(n\varphi), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, в качестве решения нужно взять функцию

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам (1.7). Например, внешняя задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

имеет решение

$$u(\rho, \varphi) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\rho} \sin \rho - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\rho^3} \sin(3\varphi).$$

Отметим, что ограниченное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерной неограниченной области является единственным.

Пример [1]. Найти стационарное распределение температуры в однородном секторе $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, удовлетворяющее краевым условиям $u(\rho,\,0) = u(\rho,\,\alpha) = 0$, $u(a,\,\varphi) = A\varphi$ ($A = \mathrm{const}$) (см. рис. 1.1).

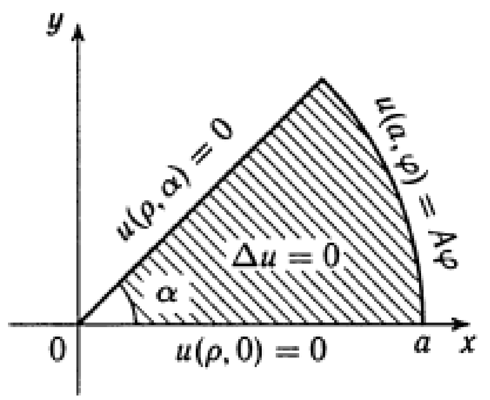


Рис. 1.1

Решение. Нахождение стационарной температуры сводится к решению задачи Дирихле

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha < 2\pi, \\ u(\rho,\,0) = u(\rho,\,a) = 0, & 0 \leqslant \rho \leqslant a, \\ u(a,\,\varphi) = A\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha. \end{cases}$$

Полагая $u(\rho,\,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ и проведя разделение переменных, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0, \qquad \Phi'' + \lambda\Phi = 0. \tag{1.8}$$

Из условий $0 = u(\rho,\,0) = R(\rho)\Phi(0)$ и $0 = u(\rho,\,\alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha)$ следует $\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$. Постоянную разделения λ определяем, решая задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, & 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Имеем $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ и $\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$, $n = 1,\,2,\,\ldots$ Функцию $R(\rho)$ ищем в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя это выражение в уравнение (1.8), найдем

$$\mu(\mu-1) + \mu - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 = 0, \qquad \text{откуда} \quad \mu = \pm\frac{n\pi}{\alpha}.$$

Учитывая ограниченность (по смыслу задачи) функции $R(\rho)$, пишем $R_n(\rho) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}$. Атомы, из которых построим решение задачи, образуются функциями

$$u_n(\rho,\,\varphi) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right), \qquad n = 1,\,2\ldots$$

Отсюда решение задачи есть

$$u(\rho,\,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right).$$

Постоянные c_n ($n = 1, 2, \ldots$) определяем из условия $u(a,\,\varphi) = A\varphi$. Имеем

$$u(a,\,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right).$$

Таким образом,

$$c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha A\varphi \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi,$$

откуда

$$c_n = \frac{2A}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^\alpha \varphi \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi = (-1)^{n+1}\frac{2\alpha A}{n\pi}.$$

Итак, решение задачи записывается в виде

$$u(\rho,\,\varphi) = \frac{2\alpha A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)\varphi}{n}.$$

Отметим, что решение имеет особенность в граничной точке $\rho = a$, $\varphi = \alpha$ из-за несогласования граничных значений.

Интеграл Пуассона (внутренняя и внешняя задачи Дирихле)

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}f(\alpha)\,d\alpha\qquad(\rho<R),$$

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^2-R^2}{\rho^2-2\rho R\cos(\varphi-\alpha)+R^2}f(\alpha)\,d\alpha\qquad(\rho>R).$$

Покажем, что эти формулы — следствие общего метода суперпозиции.

Для определенности рассмотрим внутреннюю задачу, а для внешней запишем результат по аналогии.

Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в формулу

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n[a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi)],$$

будем иметь

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n(\cos(n\varphi)\cos(n\alpha)+\sin(n\varphi)\sin(n\alpha))\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\cos(n(\varphi-\alpha))\right]d\alpha.$$

Далее, учитывая, что $\cos(n(\varphi-\alpha))=\dfrac{e^{in(\varphi-\alpha)}+e^{-in(\varphi-\alpha)}}{2}$, $q=\dfrac{\rho}{R}<1$, и используя формулу суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos(n(\varphi-\alpha))=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}q^n[e^{in(\varphi-\alpha)}+e^{-in(\varphi-\alpha)}]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}[(qe^{i(\varphi-\alpha)})^n+(qe^{-i(\varphi-\alpha)})^n]\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{qe^{i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{i(\varphi-\alpha)}}+\frac{qe^{-i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{-i(\varphi-\alpha)}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-q^2}{1-2q\cos(\varphi-\alpha)+q^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}.$$

Следовательно,

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}f(\alpha)\,d\alpha\qquad(\rho<R).$$

Преобразуем формулу Пуассона к другому виду (комплексная запись). Заметим, что

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}=\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\alpha}-z|^2}=\mathrm{Re}\,\frac{Re^{i\alpha}+z}{Re^{i\alpha}-z},$$

так как

$$\mathrm{Re}\,\frac{Re^{i\alpha}+z}{Re^{i\alpha}-z}=\mathrm{Re}\,\frac{(Re^{i\alpha}+\rho e^{i\varphi})(\overline{Re^{i\alpha}}-\overline{\rho e^{i\varphi}})}{(Re^{i\alpha}-\rho e^{i\varphi})(\overline{Re^{i\alpha}}-\overline{\rho e^{i\varphi}})}=$$

$$=\mathrm{Re}\,\frac{R^2-|z|^2+\rho R[e^{i(\varphi-\alpha)}-e^{i(\alpha-\varphi)}]}{|Re^{i\alpha}-z|^2}=\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\alpha}-z|^2}.$$

Поэтому интеграл Пуассона запишется в виде

$$u(z)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\alpha)\frac{Re^{i\alpha}+z}{Re^{i\alpha}-z}\,d\alpha.$$

Полагая в этом интеграле $\zeta=Re^{i\alpha}$, откуда $d\alpha=d\zeta/i\zeta$, получим окончательно

$$u(z)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta},\qquad |z|<R. \tag{1.9}$$

Если граничная функция $f(\zeta)$ является рациональной функцией от $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, то интеграл в формуле (1.9) вычисляется с помощью вычетов.

Пример. Решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z| < 2, \\ u|_{|z|=2} = \dfrac{2\sin\varphi}{5+3\cos\varphi}. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой (1.9). Пусть $\zeta = 2e^{i\alpha}$, тогда $\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(\frac{\zeta}{2} - \frac{2}{\zeta}\right)$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{2} + \frac{2}{\zeta}\right)$ и граничная функция примет вид

$$u(\zeta) = \frac{2\sin\alpha}{5+3\cos\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{2\zeta}}{5+\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta}{2}+\frac{2}{\zeta}\right)} = \frac{2}{i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{3\zeta^2+20\zeta+12} = \frac{2}{i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{3(\zeta+6)\left(\zeta+\frac{2}{3}\right)}.$$

Вычислим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=2} \frac{2(\zeta^2-4)(\zeta+z)}{i\cdot 3(\zeta+6)\left(\zeta+\frac{2}{3}\right)(\zeta-z)\zeta}\,d\zeta,$$

причем окружность $|z| = 2$ ориентирована против часовой стрелки. Подынтегральная функция $F(\zeta)$ в нашем случае в области $|\zeta| > 2$ имеет одну конечную особую точку $\zeta = -6$ — полюс первого порядка и устранимую особую точку $\zeta = \infty$. По теореме Коши о вычетах для расширенной комплексной плоскости

$$J = -\operatorname*{res}_{\zeta=-6} F(\zeta) - \operatorname*{res}_{\zeta=\infty} F(\zeta).$$

Находим вначале вычет в точке $\zeta = -6$:

$$\operatorname*{res}_{\zeta=-6} F(\zeta) = \frac{2}{3i}\cdot\frac{32}{\left(-\frac{16}{3}\right)}\cdot\frac{z-6}{(z+6)\cdot 6} = -\frac{4}{i}\cdot\frac{z-6}{(z+6)\cdot 6} = \frac{2}{3i}\cdot\frac{6-z}{6+z}.$$

Далее, разложим $F(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = \infty$:

$$F(\zeta) = \frac{2}{3i}\cdot\frac{\left(1-\frac{4}{\zeta^2}\right)\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)}{\left(1+\frac{6}{\zeta}\right)\left(1+\frac{2}{3\zeta}\right)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta} = \frac{2}{3i}\cdot\frac{1}{\zeta} + \ldots$$

Отсюда

$$\operatorname*{res}_{\zeta=\infty} F(\zeta) = -\frac{2}{3i}.$$

Значит,

$$J = \frac{2}{3i}\cdot\frac{z-6}{z+6} + \frac{2}{3i} = \frac{2}{3i}\cdot\frac{2z}{z+6} = \frac{4z}{3i(z+6)} =$$

$$= \frac{4}{3i}\cdot\frac{x+iy}{6+x+iy} = \frac{4}{3i}\cdot\frac{(x+iy)(6+x-iy)}{(6+x)^2+y^2},$$

откуда

$$\operatorname{Re} J = \frac{8y}{36+12x+x^2+y^2}, \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} J = \frac{8\rho\sin\varphi}{36+12\rho\cos\varphi+\rho^2}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле дается формулой

$$u(\rho,\varphi) = \frac{8\rho\sin\varphi}{36+12\rho\cos\varphi+\rho^2}.$$

Внутренняя и внешняя задачи Неймана для круга

Очевидно, что в случае круга радиуса R с центром в начале координат внешняя нормальная производная есть $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R}=\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}$. Поэтому решение внутренней задачи Неймана ищется в виде ряда

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n[a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi)],$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются из краевого условия $\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}=$ $=f(\varphi)$, т. е. имеем

$$a_n=\frac{R}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi,$$

$$b_n=\frac{R}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi,\quad n=1,2,\ldots \tag{1.10}$$

Решение внешней задачи Неймана ищется в виде ряда

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}[a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi)],$$

где коэффициенты a_n и b_n, определяемые из краевого условия $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R}=$ $=f(\varphi)$, вычисляются по тем же формулам (1.10) $\left(\text{учтем, что } \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R}=\right.$ $\left.=-\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}\right)$.

Пример. Найти установившуюся температуру внутри неограниченного цилиндра радиуса R, если на его боковой поверхности S задан тепловой поток $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\cos^3\varphi$.

Решение. Надо решить внутреннюю задачу Неймана

$$\begin{cases}\Delta u=0, & 0<\rho<R,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}=\cos^3\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi.\end{cases}$$

Прежде всего необходимо проверить выполнение условия разрешимости данной задачи Неймана, т. е. убедиться, что $\int\limits_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$ (здесь C — окружность нашего круга).

В самом деле,

$$\int\limits_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\cdot R\,d\varphi=\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi+\frac{R}{4}\int_0^{2\pi}[\cos(3\varphi)+\cos\varphi]\,d\varphi=0.$$

Далее, поскольку $\cos^3\varphi=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos(3\varphi)$, то $a_1=\frac{3}{4}R$, $a_3=\frac{1}{12}R$, а все остальные коэффициенты в ряде, дающем решение внутренней задачи Неймана, обращаются в нуль. Поэтому решение имеет вид

$$u(\rho,\varphi)=C+\frac{3\rho}{4}\cos\varphi+\frac{\rho^3}{12R^2}\cos(3\varphi),$$

где C — произвольная постоянная.

Замечание. Задача Неймана может быть решена и для кольца. Граничные условия в этом случае будут состоять в задании внешней нормальной производной:

$$-\frac{\partial u}{\partial \rho}(R_1,\varphi)=f_1(\varphi),\qquad \frac{\partial u}{\partial \rho}(R_2,\varphi)=f_2(\varphi).$$

При этом решение задачи возможно только при выполнении условия

$$R_1\int_0^{2\pi}f_1(\varphi)\,d\varphi=R_2\int_0^{2\pi}f_2(\varphi)\,d\varphi$$

и определяется с точностью до произвольной постоянной.

Уравнение Пуассона (неоднородное ур-е Лапласа)

При решении задачи Дирихле или Неймана (или смешанного типа) нужно найти какое-либо частное решение u_1 уравнения Пуассона $\Delta u = f(x, y)$ и с помощью замены $u = u_1 + v$ свести дело к решению краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$.

Пример 1 [18]. Найти решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xy$$

в круге радиуса R с центром в начале координат при условии $u(R, \varphi) = 0$.

Решение. Переходя к полярной системе координат, получаем задачу

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}\rho^4 \sin(2\varphi), & 0 \leqslant \rho < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(R, \varphi) = 0, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{1.11}$$

Будем искать частное решение в виде

$$u_1(\rho, \varphi) = w(\rho) \sin(2\varphi).$$

Подставляя функцию $u_1(\rho, \varphi)$ в уравнение (1.11) и сокращая на $\sin(2\varphi)$, придем к уравнению

$$\rho^2 w'' + \rho w' - 4w = -\frac{1}{2}\rho^4. \tag{1.12}$$

С помощью замены $\rho = e^t$ это уравнение приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$w''_{tt} - 4w = -\frac{1}{2}e^{4t}. \tag{1.13}$$

Видим, что $w(t) = -\frac{1}{24}e^{4t}$ — частное решение уравнения (1.13). Значит, $w(\rho) = -\frac{1}{24}\rho^4$ — частное решение уравнения (1.12). Таким образом, $u_1(\rho, \varphi) = -\frac{1}{24}\rho^4 \sin(2\varphi)$.

Введем функцию $v(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi) - u_1(\rho, \varphi)$. Очевидно, для определения функции $v(\rho, \varphi)$ имеем задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \rho^2 v_{\rho\rho} + \rho v_\rho + v_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < \rho < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ v(R, \varphi) = \frac{1}{24}R^4 \sin(2\varphi), & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Решение этой задачи мы уже знаем:

$$v(\rho, \varphi) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{24}R^4 \sin(2\varphi) = \frac{1}{24}\rho^2 R^2 \sin(2\varphi).$$

Итак, решение имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{24}\rho^2 (R^2 - \rho^2) \sin(2\varphi).$$

Пример 2. Найти распределение потенциала в кольце $a < \rho < b$, если внутри него находятся электрические заряды с плотностью $\gamma(x, y) = A(x^2 - y^2)$, внутренняя окружность поддерживается при потенциале 1 и напряженность электрического поля на внешней окружности равна 0.

Решение. Задача сводится к решению уравнения Пуассона $\Delta u = A(x^2 - y^2)$ в кольце $a < \rho < b$ при краевых условиях $u\big|_{\rho=a} = 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=b} = 0$. Переходя к полярным координатам, получаем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\Big) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = A\rho^2\cos(2\varphi), \quad a < \rho < b, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(a, \varphi) = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial\rho}(b, \varphi) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Решение ищем в виде $u(\rho, \varphi) = v(\rho, \varphi) + w(\rho)$, причем функция $w(\rho)$ есть решение вспомогательной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\Big) = 0, \qquad a < \rho < b, \\ w(a) = 1, \qquad w'(b) = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

а функция $v(\rho, \varphi)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\Big) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = A\rho^2\cos(2\varphi), \quad a < \rho < b, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(a, \varphi) = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial\rho}(b, \varphi) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{1.15}$$

Очевидно, что решение задачи (1.14) есть $w(\rho) = 1$. Решение задачи (1.15) ищем в виде $v(\rho, \varphi) = R(\rho)\cos(2\varphi)$. Подставляя $v(\rho, \varphi)$ в уравнение (1.15), найдем

$$\cos(2\varphi)\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R') - \frac{4}{\rho^2}R\cos(2\varphi) = A\rho^2\cos(2\varphi),$$

или, сокращая на $\cos(2\varphi)$, будем иметь уравнение

$$\rho^2 R'' + \rho R' - 4R = A\rho^4$$

с дополнительными условиями $R(a) = 0$, $R'(b) = 0$. Это уравнение подстановкой $\rho = e^t$ преобразуется к уравнению с постоянными коэффициентами

$$R''_{tt} - 4R = Ae^{4t}.$$

Его общее решение: $R(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12}Ae^{4t}$. Значит,

$$R(\rho) = C_1\rho^2 + \frac{C_2}{\rho^2} + \frac{A}{12}\rho^4.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из условий $R(a) = 0$, $R'(b) = 0$. Имеем

$$C_1 = -\frac{A(a^6 + 2b^6)}{12(a^4 + b^4)}, \qquad C_2 = \frac{Aa^4b^4(2b^2 - a^2)}{6(a^4 + b^4)}.$$

Следовательно, решение есть

$$u(\rho, \varphi) = 1 + \left[-\frac{A(a^6 + 2b^6)}{12(a^4 + b^4)}\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{Aa^4b^4(2b^2 - a^2)}{6(a^4 + b^4)} + \frac{A}{12}\rho^4\right]\cos(2\varphi).$$

Свойства функций Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in Z;$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu};$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x);$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J'_\nu(x);$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J'_\nu(x);$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x);$$

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J'_\nu(x);$$

$$\int x^{\nu+1}J_\nu(x)dx = x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x) + C;$$

$$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x) + C;$$

$$\int x^2 J_1(x)dx = -x^2 J_0(x) + 2xJ_1(x) + C;$$

$$\int x^3 J_0(x)dx = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x)J_1(x) + C;$$

$$\int xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)dx =$$

$$= \frac{\beta x J_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) - \alpha x J'_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)}{\alpha^2 - \beta^2} + C,$$

где $\alpha \neq \beta$;

$$\int xJ_\nu^2(\alpha x)dx = \frac{1}{2}\Big[x^2(J'_\nu(\alpha x))^2 +$$

$$+\left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)(J_\nu(\alpha x))^2\Big] + C;$$

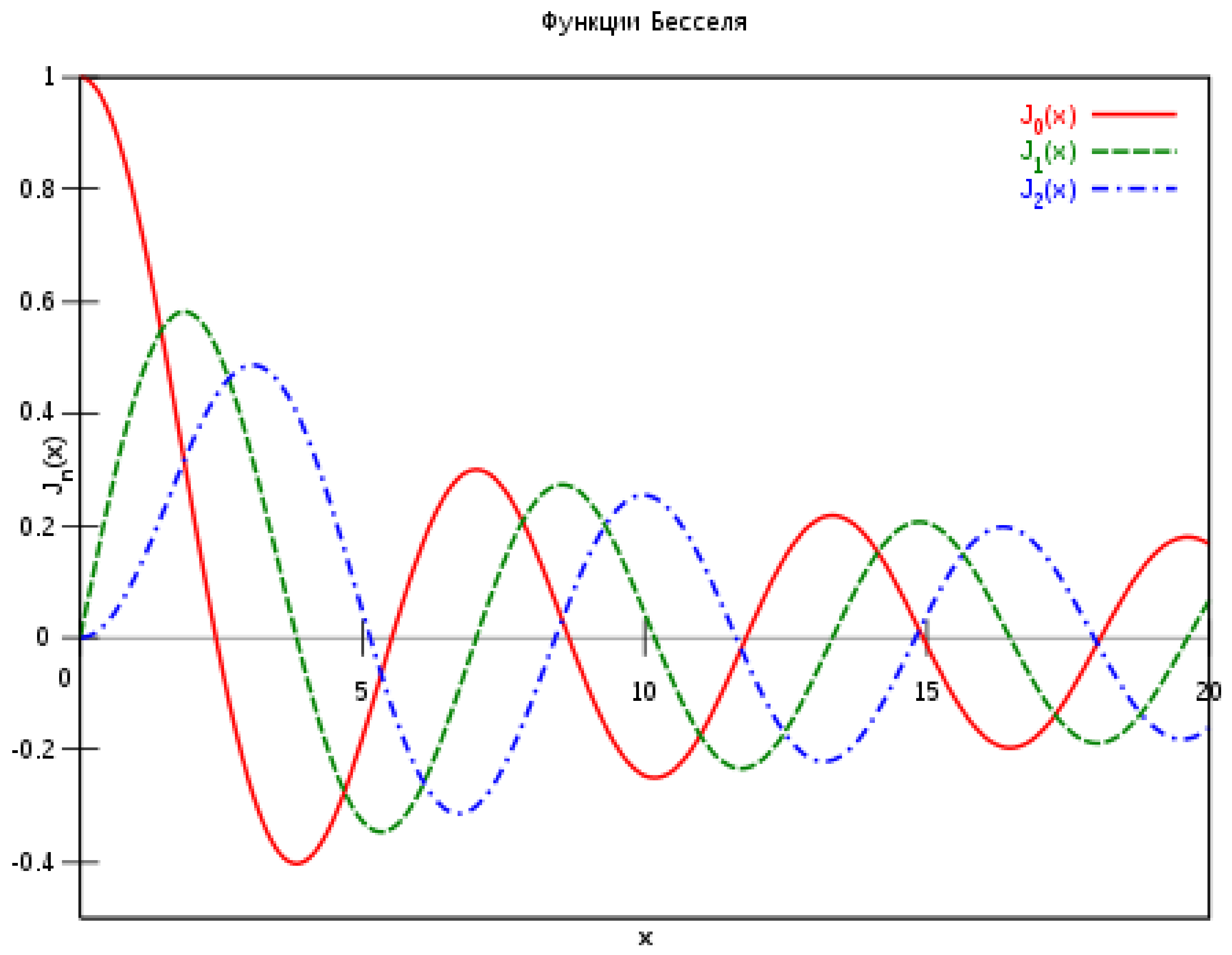
$$\int_0^{x_0} xJ_\nu\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_m x}{x_0}\right) dx = 0, \quad k \neq m;$$

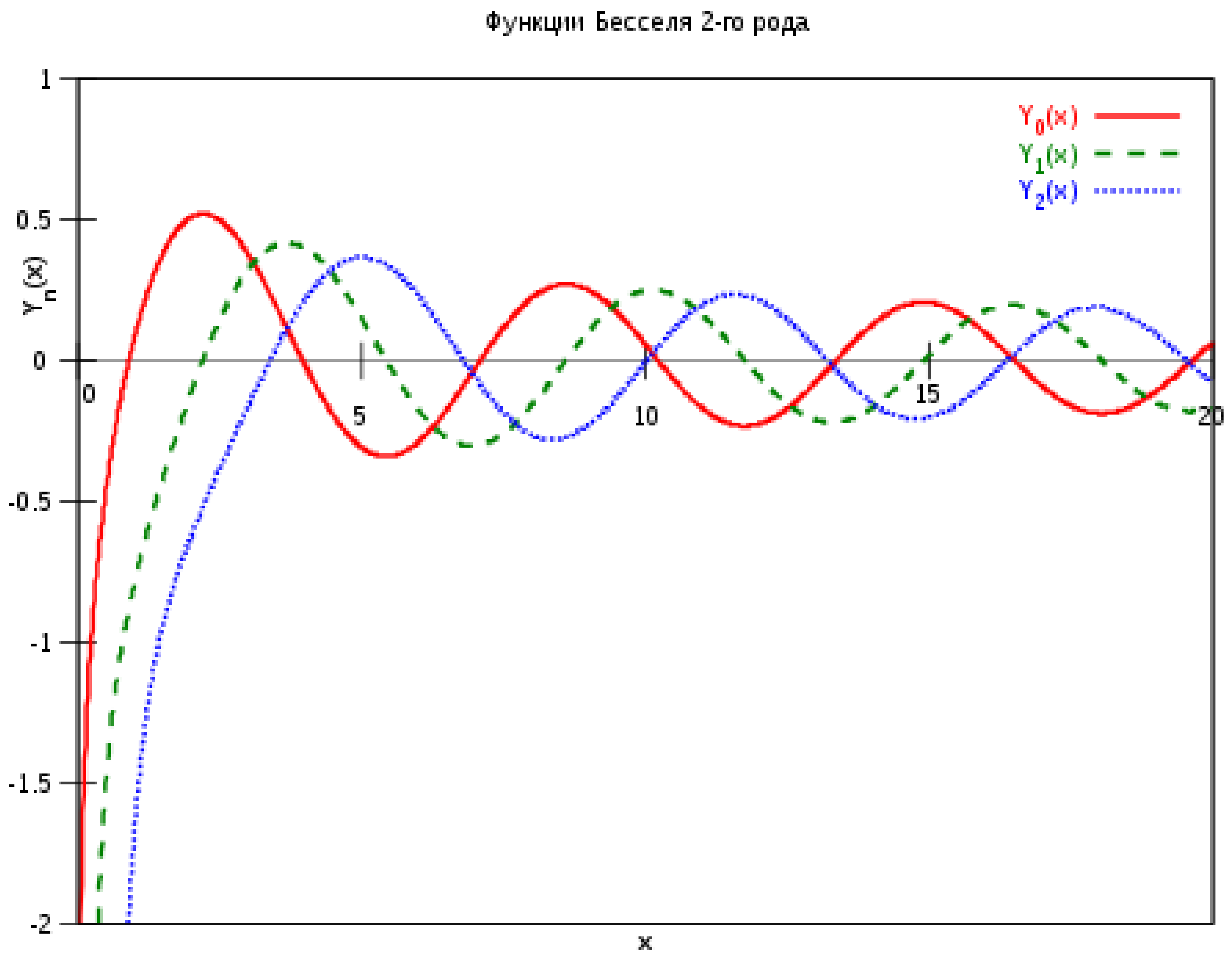
где μ_k *и* μ_m — *положительные корни уравнения*

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

[source]: http://www.unn.ru/books/met_files/bessel.pdf

Функции Бесселя





Краевые задачи для ур-я Лапласа в цилиндре

Рассмотрение этих задач требует применения специальных функций — функций Бесселя.

Сначала рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа в цилиндре.

Пример 1 [4, гл. IV, № 110]. Найти потенциал электростатического поля внутри цилиндрической коробки кругового сечения $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant l$, оба основания которой заземлены, а боковая поверхность заряжена до потенциала V_0. Определить напряженность поля на оси (рис. 1.3).

Решение. Требуется найти решение уравнения Лапласа внутри цилиндра с заданными граничными значениями:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < z < l, \\ u(\rho, 0) = u(\rho, l) = 0, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a, \\ u(a, z) = V_0, \quad 0 \leqslant z \leqslant l \end{cases}$$

(решение $u = u(\rho, z)$ и не зависит от φ, так как граничные значения на зависят от φ). Воспользуемся методом разделения переменных. Подставляя выражение $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ в уравнение Лапласа

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

получим

$$Z \cdot \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho R') + RZ'' = 0,$$

откуда, деля на RZ, будем иметь

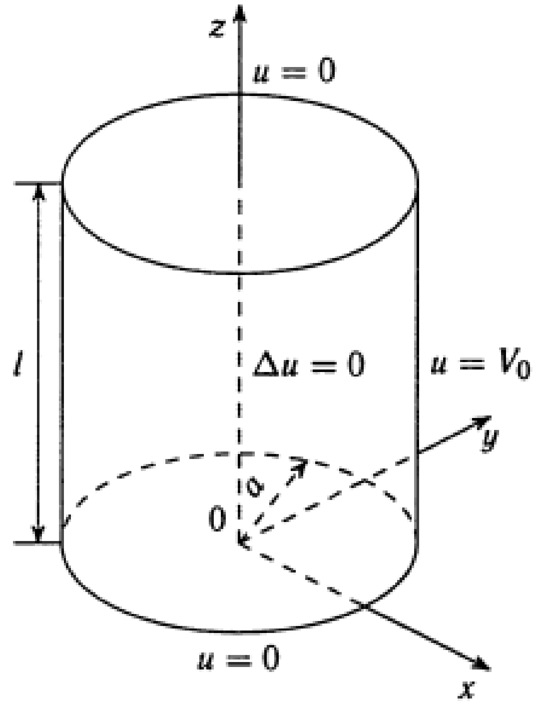


Рис. 1.3

$$\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho R')}{R} + \frac{Z''}{Z} = 0,$$

или

$$\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho R')}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda, \tag{1.20}$$

где λ — постоянная разделения. Очевидно, из физических соображений следует, что $\lambda > 0$, иначе функция $Z(z)$, а с ней и потенциал не обращались бы в нуль на верхнем и нижнем основаниях цилиндрической коробки.

Из соотношений (1.20) вытекают два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$1)\ Z'' + \lambda Z = 0; \quad 2)\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R') - \lambda R = 0.$$

Учитывая, что $Z(0) = Z(l) = 0$, получаем стандартную задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0, \quad 0 < z < l, \\ Z(0) = Z(l) = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим собственные функции $Z_n(z) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n = 1, 2\ldots$ Функцию $R(\rho)$ определяем из уравнения

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R') - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 R = 0, \tag{1.21}$$

являющегося уравнением Бесселя нулевого индекса мнимого аргумента. В самом деле, из уравнения (1.21) имеем

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \rho^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 R = 0.$$

Переходя в этом уравнении к новой независимой переменной $x = \rho\frac{n\pi}{l}$ и учитывая, что

$$R' = \frac{dR}{dx}\frac{\pi n}{l}, \qquad R'' = \frac{d^2R}{dx^2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,$$

придем к уравнению

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} - x^2 R = 0.$$

Его общее решение записывается в виде

$$R(x) = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x),$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — функции Бесселя индекса нуль мнимого аргумента соответственно первого и второго рода; C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Так как (функция Макдональда) $K_0(x) \to \infty$ при $x \to 0$, то полагаем $C_2 = 0$ (в противном случае решение задачи является неограниченным на оси цилиндра). Таким образом,

$$R_n(\rho) = C I_0\left(\frac{n\pi}{l}\rho\right).$$

«Атомами», из которых будет построено решение исходной задачи, являются функции

$$I_0\left(\frac{n\pi}{l}\rho\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Решение нашей задачи представляется рядом

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I_0\left(\frac{n\pi}{l}\rho\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right).$$

Постоянные c_n находим из граничного условия $u(a, z) = V_0$. Имеем

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I_0\left(\frac{n\pi}{l}a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right),$$

откуда

$$c_n I_0\left(\frac{n\pi}{l}a\right) = \frac{2}{l}\int_0^l V_0 \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right) dz = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi}, & n \text{ нечетное}, \\ 0, & n \text{ четное}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$u(\rho, z) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}\rho\right]}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}a\right]} \cdot \frac{\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}z\right]}{2k+1}.$$

Поле на оси цилиндра есть

$$E_z(0, z) = -\frac{\partial u}{\partial z}(0, z) = -\frac{4V_0}{l}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}z\right]}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}a\right]},$$

ибо $I_0(0) = 1$.

Пример 2 [18]. Цилиндр, радиус основания которого R и высота h, имеет температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную нулю, а температура верхнего основания есть определенная функция от ρ. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < z < h, \\ u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, h) = f(\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant R, \\ u(R, z) = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h. \end{cases}$$

Вновь полагая $u(\rho, z) = r(\rho)Z(z)$ и подставляя в уравнение Лапласа (как в предыдущем случае), получим два уравнения:

$$1)\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho r') + \lambda r = 0; \quad 2)\ Z'' - \lambda Z = 0. \tag{1.22}$$

Отметим, что здесь $\lambda > 0$ (это будет ясно из решения). Из граничного условия $u(a, z) = 0$ следует $r(R) = 0$. Уравнение (1.22) можно записать в виде

$$\rho^2 r'' + \rho r' + \lambda\rho^2 r = 0. \tag{1.23}$$

Переходя к новой независимой переменной $x = \sqrt{\lambda}\,\rho$, придем к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$x^2\frac{d^2 r}{dx^2} + x\frac{dr}{dx} + x^2 r = 0.$$

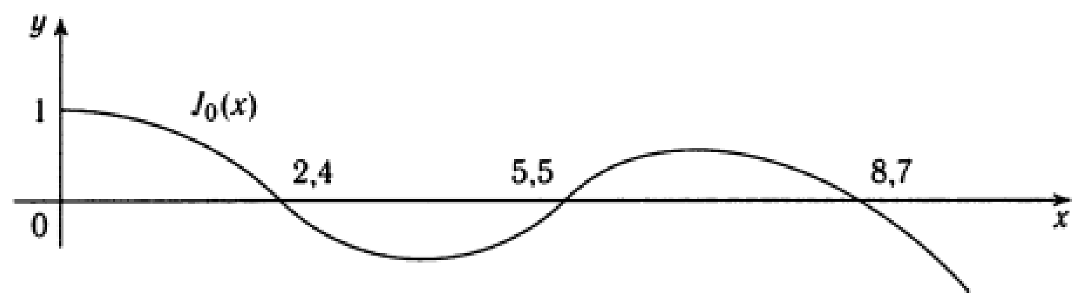


Рис. 1.4

Общее решение имеет вид

$$r(x) = C_1 J_0(x) + C_2 B_0(x),$$

где $J_0(x)$ и $B_0(x)$ — функции Бесселя порядка нуль соответственно первого и второго рода; C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Возвращаясь к старой переменной ρ, будем иметь

$$r(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}\,\rho) + C_2 B_0(\sqrt{\lambda}\,\rho).$$

Итак, в нашем случае задача Штурма—Лиувилля

$$\begin{cases} \rho^2 r'' + \rho r' + \lambda\rho^2 r = 0, & 0 < \rho < R, \\ |r(0)| < +\infty, & r(R) = 0, \end{cases}$$

приводится к решению уравнения Бесселя с указанными граничными условиями. Поскольку $B_0(\sqrt{\lambda}\,\rho) \to \infty$ при $\rho \to 0$, то $r(\rho) = CJ_0(\sqrt{\lambda}\,\rho)$ (полагаем $C_2 = 0$). Из условия $r(R) = 0$ следует $J_0(\sqrt{\lambda}\,R) = 0$. Обозначая через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ положительные корни функции Бесселя $J_0(x)$ (рис. 1.4), определяем собственные значения $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$, которым соответствуют собственные функции $J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ Далее, из уравнения $Z'' - \lambda Z = 0$ при $\lambda = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$ находим

$$Z_n(z) = A_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n}{R}z\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R}z\right),$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Из граничного условия $u(\rho, 0) = 0$ следует, что $Z(0) = 0$, т. е. $A_n = 0$. Таким образом, «атомы» решения суть функции

$$J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R}z\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Решение задачи представляется рядом

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R}z\right).$$

Постоянные B_n находим из граничного условия $u(\rho, h) = f(\rho)$. Имеем

$$u(\rho, h) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\mu_n}{R}h\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R}h\right), \quad \text{или} \quad f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\mu_n}{R}h\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R}h\right).$$

Умножая обе части полученного равенства на $\rho J_0\left(\frac{\mu_m}{R}\rho\right)$ и интегрируя результат по отрезку $[0, R]$, получим

$$\int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_m}{R}\rho\right) d\rho = B_m \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m}{R}h\right) \int_0^R \rho J_0^2\left(\frac{\mu_m}{R}\rho\right) d\rho.$$

Но

$$\int_0^R \rho J_0^2\left(\frac{\mu_m}{R}\rho\right) d\rho = \frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_m),$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. Следовательно, решение задачи имеет вид

$$u(\rho, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R}z\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R}h\right)\, J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right) d\rho.$$

Пример 3. Найти потенциал во внутренних точках заземленного цилиндра с радиусом основания R и высотой h, если в цилиндре распределены электрические заряды с плотностью $\gamma = AzJ_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right)$ $(A = \text{const})$.

Решение. Нужно найти решение уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi AzJ_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right), \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < z < h, \\ u(\rho, 0) = u(\rho, h) = 0, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant R, \\ u(R, z) = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h. \end{cases} \tag{1.24}$$

Ищем решение в виде $u(\rho, z) = J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right)f(z)$, где функция $f(z)$ подлежит определению. Подставляя функцию $u(\rho, z)$ в уравнение (1.24), получим

$$f(z)\cdot\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}\left(J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right)\right)\right] + J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right)f''(z) = -4\pi AzJ_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right). \tag{1.25}$$

Заметим теперь, что функция $J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right)$ есть собственная функция уравнения Бесселя, т. е.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right)\right] + \frac{\mu_3^2}{R^2}J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right) = 0.$$

Поэтому (1.25) дает

$$(-1)f\left(\frac{\mu_3}{R}\right)^3 J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right) + J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right)f''(z) = -4\pi AzJ_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right),$$

откуда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $f(z)$

$$f'' - \left(\frac{\mu_3}{R}\right)^2 f = -4\pi Az, \qquad 0 < z < h,$$

причем $f(0) = f(h) = 0$. Решая эту краевую задачу, находим

$$f(z) = -\frac{4\pi AR^2 h}{\mu_3^2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_3}{R}z\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_3}{R}h\right)} + \frac{4\pi AR^2}{\mu_3^2}z.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$u(\rho, z) = J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right)\cdot\frac{4\pi AR^2}{\mu_3^2}\left[h\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_3}{R}z\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_3}{R}h\right)} - z\right].$$

[приложение к задаче на сфер. с.к.]

https://github.com/ioshchepkov/physical-geodesy-courses/tree/master/spherical_harmonics

Первые многочлены Лежандра в явном виде:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$
$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x),$$
$$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12\,012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35),$$
$$P_9(x) = \frac{1}{128}(12\,155x^9 - 25\,740x^7 + 18\,018x^5 - 4620x^3 + 315x),$$
$$P_{10}(x) = \frac{1}{256}(46\,189x^{10} - 109\,395x^8 + 90\,090x^6 - 30\,030x^4 + 3465x^2 - 63)$$

Краевые задачи для ур-я Лапласа в шаре

Рассмотрение этих задач требует применения сферических и шаровых функций.

Напомним, что общее решение уравнений Лапласа имеет вид ((ρ, θ, φ) — сферические координаты):

1) $u(\rho, \theta, \varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi)$ внутри сферы радиуса a;

2) $u(\rho, \theta, \varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi)$ вне сферы радиуса a;

3) $u(\rho, \theta, \varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^{n+1}}\right) Y_n(\theta, \varphi)$ в шаровом слое.

Здесь $Y_n(\theta, \varphi) = \sum\limits_{m=0}^{n} [A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos\theta)$, где $P_n^{(m)}(x)$ — так называемые присоединенные функции Лежандра.

Пример 1. Найти решение $u(\rho, \theta, \varphi)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре при граничном условии

$$u(a, \theta, \varphi) = \sin(3\theta) \cos\varphi.$$

Решение. В сферической системе координат постановка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \\ \qquad 0 < \rho < a, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(a, \theta, \varphi) = \sin(3\theta) \cos\varphi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{1.26}$$

Полагая $u(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho) Y(\theta, \varphi)$ и подставляя это выражение в уравнение (1.26), получим

$$Y \frac{d}{d\rho}(\rho^2 R') + R\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] = 0,$$

откуда в результате деления на RY получаем

$$\frac{\frac{d}{d\rho}(\rho^2 R')}{R} + \frac{\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y} = 0,$$

или

$$\frac{\frac{d}{d\rho}(\rho^2 R')}{R} = -\frac{\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y} = \lambda,$$

где λ — постоянная разделения. Отсюда следуют два уравнения:

$$\begin{aligned} &1)\ \rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0, \\ &2)\ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0, \end{aligned} \tag{1.27}$$

причем функция $Y(\theta, \varphi)$ должна быть ограничена на всей сфере.

При этом функция $Y(\theta, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi), \\ |Y(0, \varphi)| < +\infty, \qquad |Y(\pi, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \tag{1.28}$$

Как известно, ограниченные решения уравнения (1.27), обладающие непрерывными до второго порядка производными, называются *сферическими функциями*.

Решение задачи (1.27), (1.28) для $Y(\theta, \varphi)$ также ищем методом разделения переменных, полагая $Y(\theta, \varphi) = T(\theta)\Phi(\varphi)$. Подставляя $Y(\theta, \varphi)$ в уравнение (1.27), будем иметь

$$\Phi \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, T') + \frac{1}{\sin^2\theta} T \Phi'' + \lambda T \Phi = 0,$$

откуда

$$\frac{\sin\theta\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta T')}{T}+\lambda\sin^2\theta=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu.$$

Функцию $\Phi(\varphi)$ находим, решая задачу

$$\begin{cases}\Phi''+\mu\Phi=0,\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi).\end{cases}$$

Такую задачу мы решали, рассматривая уравнение Лапласа в круге, и нашли, что $\mu=m^2$ и $\Phi_m(\varphi)=C_1\cos(m\varphi)+C_2\sin(m\varphi)$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $m=0,\ 1,\ \ldots$

Функция $T(\theta)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta T')+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)T=0 \tag{1.29}$$

и условий ограниченности при $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Вводя новую переменную $x=\cos\theta$ и учитывая, что

$$T'=\frac{dT}{dx}\frac{dx}{d\theta}=\frac{dT}{dx}(-\sin\theta),\qquad T''=\frac{d^2T}{dx^2}\sin^2\theta-\frac{dT}{dx}\cos\theta,$$

из уравнения (1.29) получим краевую задачу на собственные функции и собственные значения

$$\begin{cases}(1-x^2)\dfrac{d^2T}{dx^2}-2x\dfrac{dT}{dx}+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)T=0,\quad -1<x<1,\\ |T(-1)|<+\infty,\quad |T(+1)|<+\infty.\end{cases}$$

Собственные функции полученной задачи:

$$T_n^{(m)}(x)=P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x),$$

— присоединенные функции Лежандра. Отсюда решение уравнения (1.29) есть функция $T_n^{(m)}(\theta)=P_n^{(m)}(\cos\theta)$.

Комбинируя решения уравнения (1.29) с решением уравнения $\Phi''+$ $+\mu\Phi=0$, получим $2n+1$ сферических функций:

$$P_n(\cos\theta),\quad P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos(m\varphi),\quad P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin(m\varphi),$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots;\qquad m=1,\ 2,\ \ldots$$

Общее решение уравнения (1.27) при $\lambda=n(n+1)$ запишется в виде

$$Y_n(\theta,\ \varphi)=\sum_{m=0}^{n}[A_{nm}\cos(m\varphi)+B_{nm}\sin(m\varphi)]P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Вернемся к отысканию функции $R(\rho)$. Полагая $R(\rho)=\rho^\sigma$ и подставляя в уравнение $\rho^2R''+2\rho R'-\lambda R=0$, получим $\sigma(\sigma+1)-n(n+1)=0$, откуда $\sigma_1=n$, $\sigma_2=-(n+1)$. Следовательно, «атомами» решения являются функции

$$\rho^nP_n^{(m)}(\cos\theta)\cos(m\varphi),\qquad \rho^nP_n^{(m)}(\cos\theta)\sin(m\varphi),$$
$$\rho^{-(n+1)}P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos(m\varphi),\qquad \rho^{-(n+1)}P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin(m\varphi).$$

Но решения $\rho^{-(n+1)}P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos(m\varphi)$, $\rho^{-(n+1)}P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin(m\varphi)$ необходимо отбросить, поскольку они не ограничены при $\rho\to0$. Следовательно, в качестве решения берем ряд

$$u(\rho,\ \theta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\rho^n[A_{nm}\cos(m\varphi)+B_{nm}\sin(m\varphi)]P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Осталось подобрать постоянные A_{nm} и B_{nm} так, чтобы выполнялось граничное условие

$$u(a, \theta, \varphi) = \sin(3\theta)\cos\varphi.$$

Имеем

$$u(a, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a^n[A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi)]P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

т. е. имеет место равенство

$$\sin(3\theta)\cos\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a^n[A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi)]P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Отсюда следует, что в сумме $\sum\limits_{m=0}^{n}[\ldots]$ нужно взять лишь одно слагаемое, соответствующее $m = 1$. Таким образом, получаем

$$\sin(3\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n A_{n1} P_n^{(1)} \cos\theta.$$

Коэффициенты A_{n1} можно найти, следуя общей формуле: если

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^{(1)} \cos(\theta),$$

то

$$b_n = \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

Однако удобнее сделать это так. Имеем

$$\sin(3\theta) = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1), \qquad P_n^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)},$$

$$P_1(x) = x, \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Поэтому

$$(4\cos^2\theta - 1)\sin\theta = \sin\theta\Big[a\cdot A_{11}\cdot 1 + a^3\cdot A_{31}\cdot\frac{1}{2}(14\cos^2\theta - 3)\Big],$$

откуда следует $A_{11} = -\frac{1}{5a}$, $A_{31} = \frac{8}{15a^3}$, $A_{n1} = 0$, $n = 2, 4, 5, \ldots$ Таким образом, решение задачи имеет вид

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \left(-\frac{1}{5}\right)\frac{\rho}{a}P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi + \frac{8}{15}\left(\frac{\rho}{a}\right)^3 P_3^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi.$$

Пример 2. Найти функцию u, гармоническую внутри сферического слоя $R_1 < \rho < R_2$ и такую, что

$$u|_{\rho=R_1} = P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi,$$
$$u|_{\rho=R_2} = P_5^{(3)}(\cos\theta)\cos(3\varphi).$$

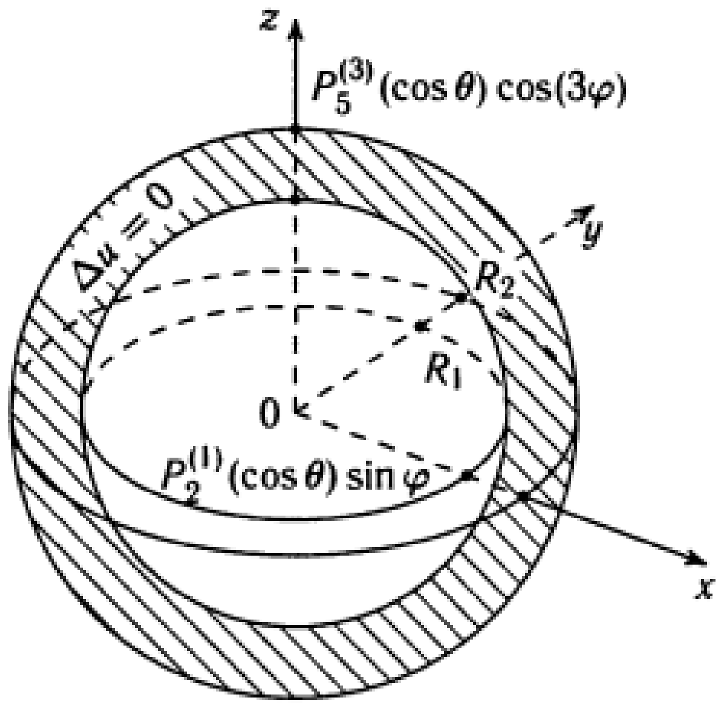


Рис. 1.5

Решение. Математическая запись задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad R_1 < \rho < R_2, \quad 0 < \theta < \pi, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 < \varphi < 2\pi, \\ u(R_1, \theta, \varphi) = P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ u(R_2, \theta, \varphi) = P_5^{(3)}(\cos\theta)\sin(3\varphi), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

(рис. 1.5).

Решение задачи записывается в виде

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(A_{nm}\rho^n + \frac{B_{nm}}{\rho^{n+1}}\right)\cos(m\varphi) + \right.$$
$$\left. + \left(C_{nm}\rho^n + \frac{D_{nm}}{\rho^{n+1}}\right)\sin(m\varphi)\right]P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

где числа A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm} подлежат определению. Из граничных условий получаем следующие системы уравнений для определения коэффициентов разложения:

$$1)\quad \begin{cases} C_{21}R_1^2 + \dfrac{D_{21}}{R_1^3} = 1, \\ A_{21}R_1^2 + \dfrac{B_{21}}{R_1^3} = 0, \\ C_{21}R_2^2 + \dfrac{D_{21}}{R_2^3} = 0, \\ A_{21}R_2^2 + \dfrac{B_{21}}{R_2^3} = 0, \end{cases} \qquad 2)\quad \begin{cases} A_{53}R_1^5 + \dfrac{B_{53}}{R_1^6} = 0, \\ C_{53}R_1^5 + \dfrac{D_{53}}{R_1^6} = 0, \\ A_{53}R_2^5 + \dfrac{B_{53}}{R_2^6} = 1, \\ C_{53}R_2^5 + \dfrac{D_{53}}{R_2^6} = 0. \end{cases}$$

Все остальные коэффициенты равны нулю. Решая записанные системы уравнений, найдем

$$A_{21} = B_{21} = 0, \qquad C_{53} = D_{53} = 0, \qquad C_{21} = -\frac{R_1^3}{R_2^2(R_2^5 - R_1^5)},$$
$$D_{21} = \frac{(R_1R_2)^3}{R_2^5 - R_1^5}, \qquad A_{53} = -\frac{R_2^6}{R_1^5(R_2^{11} - R_1^{11})}, \qquad B_{53} = \frac{(R_1R_2)^6}{R_2^{11} - R_1^{11}}.$$

Итак, гармоническая функция имеет вид

$$u(\rho,\theta,\varphi) = \left(C_{21}\rho + \frac{D_{21}}{\rho^2}\right)P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi + \left(A_{53}\rho^5 + \frac{B_{53}}{\rho^6}\right)P_5^{(3)}(\cos\theta)\cos(3\varphi).$$

Пример 3 [6, 16.25(1)]. Найти функцию u, гармоническую внутри сферического слоя $1 < \rho < 2$ и такую, что

$$\left(3u + \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)\Big|_{\rho=1} = 5\sin^2\theta\sin(2\varphi) \quad \text{и} \quad u|_{\rho=2} = -\cos\theta.$$

Решение. Математическая запись задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ \left(3u + \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)\Big|_{\rho=1} = 5\sin^2\theta\sin(2\varphi), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{\rho=2} = -\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Имеем

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(A_{nm}\rho^n + \frac{B_{nm}}{\rho^{n+1}}\right)\cos(m\varphi) + \right.$$
$$\left. + \left(C_{nm}\rho^n + \frac{D_{nm}}{\rho^{n+1}}\right)\sin(m\varphi)\right]P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Из граничных условий следует, что в этой сумме нужно взять только слагаемые, соответствующие индексам $n = 2$, $m = 2$ и $n = 1$, $m = 0$. Другими словами, решение удобно искать в виде

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \left(a\rho + \frac{b}{\rho^2}\right)\cos\theta + \left(c\rho^2 - \frac{d}{\rho^3}\right)\sin^2\theta\sin(2\varphi).$$

Используя граничные условия, получим следующие уравнения для определения коэффициентов a, b, c, d:

$$4a + b = 0, \quad 5c = 5, \quad 2a + b/4 = -1, \quad 4c - d/8 = 0.$$

Из них находим $a = -1$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 32$. Тогда решение есть

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \left(-\rho + \frac{4}{\rho^2}\right)\cos\theta + \left(\rho^2 - \frac{32}{\rho^3}\right)\sin^2\theta\sin(2\varphi).$$

Замечание 1. В общем случае при решении внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа с условием $u|_{\partial\Omega} = f(\theta, \varphi)$ (Ω — шар радиуса a с центром в начале координат, $\partial\Omega$ — его граница) имеем соотношение

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a^n [A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi)]P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} находятся по формулам

$$A_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2 a^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos(m\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

$$B_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2 a^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin(m\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

причем

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_m\,(n+m)!}{2n+1(n-m)!}, \qquad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & \text{если } m = 0, \\ 1, & \text{если } m > 0. \end{cases}$$

Замечание 2. Решение упомянутой внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в точке $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ можно представить в интегральной форме (интеграл Пуассона)

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\frac{a^2 - \rho_0^2}{(a^2 - 2a\rho_0\cos\gamma + \rho_0^2)^{3/2}}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$.