


Подготовка к контрольной работе

План

Темы потоковой в четверг, 20 октября, 14.30-16.05:



Прямые, плоскости, расстояния, их взаимное расположение, векторное, скалярное, смешанное произведения векторов.

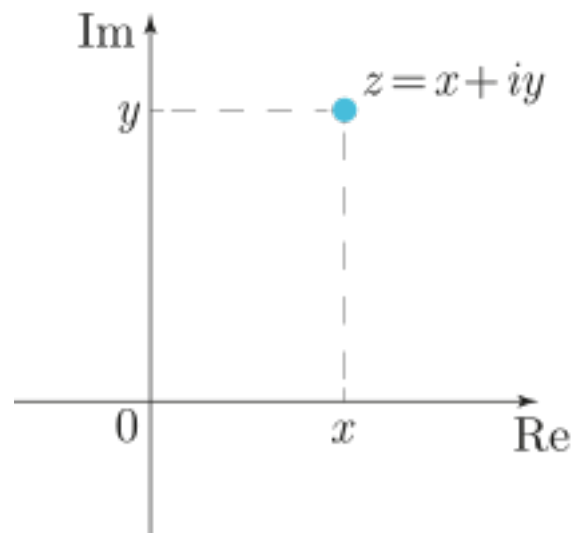
Смена системы координат, формулы замены координат.

Комплексные числа: различные формы записи, сопряжение, возведение в степень (формула Муавра), извлечение корня.

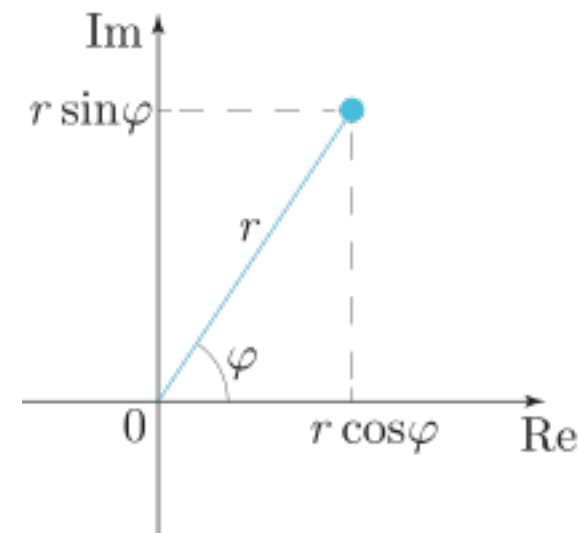
Комплексные числа

КР 2021

5. Модули комплексных чисел z_1, z_2, z_3, z_4 образуют геометрическую прогрессию, а их аргументы образуют арифметическую прогрессию, причём известно, что $z_1 = \sqrt{2}$, $z_4 = 4i$. Найти числа z_2, z_3 .



$$z = x + iy$$



$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

r — модуль z

φ — аргумент z

Комплексные числа

КР 2020

5. Пусть $n \geq 1$ – целое. Найти произведение всех корней n -й степени из комплексного числа $2i$.

Формулы Виета

Если c_1, c_2, \dots, c_n – корни многочлена

$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$, то

$$a_1 = -(c_1 + c_2 + \dots + c_n),$$

$$a_2 = c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_1 c_n + c_2 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n,$$

$$a_3 = -(c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 c_4 + \dots + c_{n-2} c_{n-1} c_n),$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} (c_1 c_2 \dots c_{n-1} + c_1 c_2 \dots c_{n-2} c_n + \dots + c_2 c_3 \dots c_n),$$

$$a_n = (-1)^n c_1 c_2 \dots c_n.$$

Комплексные числа

КР 2012

Решить уравнение

$$(z + 1)^n + (z - 1)^n = 0$$

Формула Муавра для **комплексных чисел** $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ утверждает, что

$$z^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \text{ [1]}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Аналогичная формула применима также и при вычислении корней n -й степени из ненулевого комплексного числа:

$$z^{1/n} = \left[r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k)) \right]^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Комплексные числа

КР 2012

Решить уравнение

$$(z + 1)^n + (z - 1)^n = 0$$

$$z = re^{i\varphi}$$

$$z^n = re^{in\varphi} \text{ — возведение в степень}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n - 1 \text{ — извлечение корня}$$

Комплексные числа

КР 2011

Доказать тождество, если $z, w \in \mathbb{C}$:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

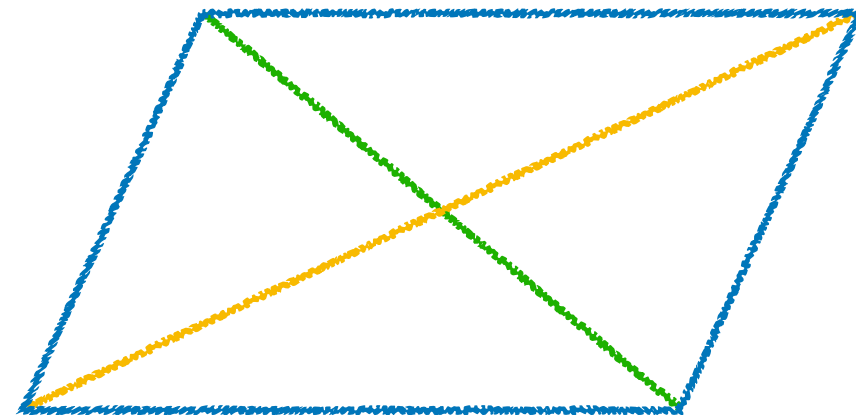
- **Тождество параллелограмма:** сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его двух смежных сторон: пусть

a — длина стороны AB ,

b — длина стороны BC ,

d_1 и d_2 — длины диагоналей; тогда

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$



План

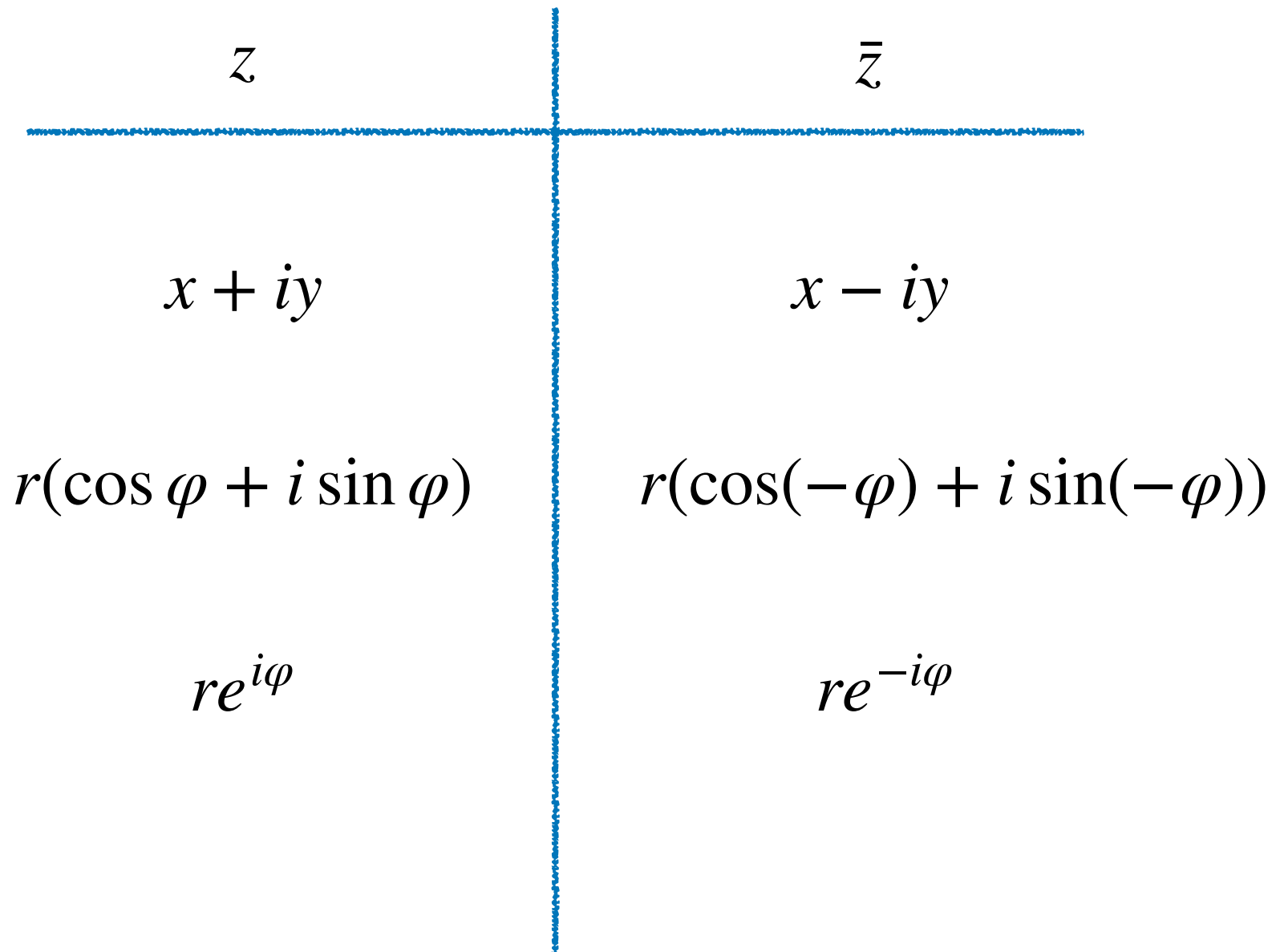
Темы потоковой в четверг, 20 октября, 14.30-16.05:

Прямые, плоскости, расстояния, их взаимное расположение, векторное, скалярное, смешанное произведения векторов.

Смена системы координат, формулы замены координат.

Комплексные числа: ~~различные формы записи,~~
~~сопряжение, возведение в степень (формула Муавра),~~
~~извлечение корня.~~

Комплексные числа



План

Темы потоковой в четверг, 20 октября, 14.30-16.05:

Прямые, плоскости, расстояния, их взаимное расположение, векторное, скалярное, смешанное произведения векторов.

Смена системы координат, формулы замены координат.

Комплексные числа: ~~различные формы записи,~~
~~сопряжённое, возведение в степень (формула Муавра),~~
~~извлечение корня.~~

Смена системы координат

КР 2021

4. Пусть $K_1 = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – система координат с правым о. н. б. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Записать матрицу перехода от K_1 к системе координат $K_2 = (O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, где \vec{v}_1 получен из \vec{e}_1 поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси \vec{e}_2 в кратчайшем направлении к вектору \vec{e}_3 , $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$ и $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Записать в системе координат K_2 уравнение плоскости, заданной в K_1 уравнением $x = 0$.

Смена базиса

«старый» базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \longrightarrow \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ «новый» базис

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

старые \swarrow \searrow новые

координаты $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$

$x = T x'$
 $x' = T^{-1} x$
обратная матрица

Смена системы координат

КР 2020

4. Дана точка A и векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$,

$$A = (-1, 0, 2), \quad \vec{v}_1 = (3, 1, -1), \quad \vec{v}_2 = (2, 2, 1), \quad \vec{v}_3 = (1, 3, -1).$$

Записать уравнение плоскости $2x - y - z + 5 = 0$ в системе координат $(A, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_2 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3))$.

Смена системы координат

«старая» с.к.

$$K_1 = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \longrightarrow K_2 = (O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$$

«новая» с.к.

Формула перехода:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

План

Темы потоковой в четверг, 20 октября, 14.30-16.05:

Прямые, плоскости, расстояния, их взаимное расположение, векторное, скалярное, смешанное произведения векторов.

~~Смена системы координат, формулы замены координат.~~

Комплексные числа: ~~различные формы записи, сопряжение, возведение в степень (формула Муавра), извлечение корня.~~

Прямые и плоскости

КР 2021

3. Даны две точки A, B и плоскость Π ,

$$A = (1, 1, 1), \quad B = (2, -1, 1),$$

$$\Pi: x + 3y + 2z - 5 = 0.$$

Установить, пересекает ли данная плоскость отрезок \overline{AB} , его продолжение за точку A или за точку B .

Прямые и плоскости

КР 2021

2. Найти значение параметра m , при котором плоскость, содержащая прямую

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3},$$

и точку $A(3, 4, 4)$, параллельна прямой $\vec{r}(t) = (t+2, 4t+3, 4t+1)$.

Прямые и плоскости

КР 2021

1. Луч света распространяется по прямой, по закону $\vec{r}(t) = (2t - 2, 3t - 4, 2t - 5)$ при $t \geq 0$, и отражается от зеркала, заданного уравнением $x + y - z - 2 = 0$. Найдите параметрическое задание прямой, по которой движется отражённый луч.

Прямые и плоскости

КР 2018

3. (10 баллов) Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$, параллельно вектору $\vec{a} = (2, -1, -2)$. Найти расстояние от точки $D(1, 2, 3)$ до этой плоскости.