

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра общей физики

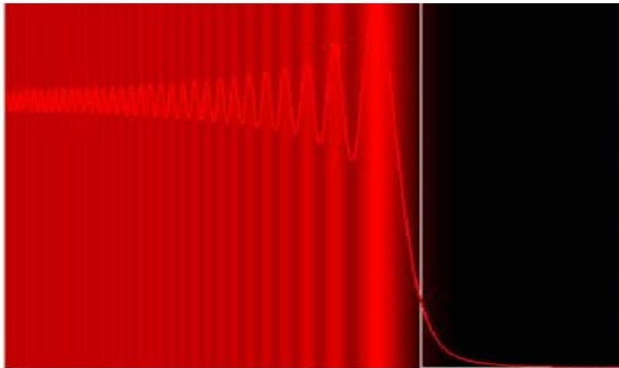
ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Сборник лабораторных работ по физической оптике

Часть I

Учебное пособие

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук А. М. Ражева



Новосибирск
2009

УДК 535.4(075)
ББК В 343.4я73-1
Д 501

Дифракция света. Сб. лаб. работ по физической оптике: учеб. пособие / А. М. Ражев, В. Ф. Климкин, В. В. Кубарев, Г. А. Поздняков; под ред. А. М. Ражева; Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009. Ч. 1. 107 с.

ISBN 978-5-94356-858-9

Учебное пособие посвящено изучению явления дифракции света. Содержание пособия и его уровень рассчитаны на то, чтобы дать студентам базу, достаточную для их будущей научной работы. В пособии кратко изложена теория дифракции света и описаны дифракционные эффекты в различных средах и условиях. Представлено описание шести лабораторных работ, составляющих первую часть лабораторного практикума по физической оптике. Перечислены некоторые применения явления дифракции. Пособие знакомит студентов с физическими основами явления дифракции света, а также с устройствами получения дифракционных картин и методами их обработки.

Предназначено для студентов второго курса физического факультета, факультета естественных наук и геолого-геофизического факультета НГУ, а также для преподавателей практикума по физической оптике.

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

ISBN 978-5-94356-858-9

© Новосибирский государственный
университет, 2009

© А. М. Ражев, В. Ф. Климкин,
В. В. Кубарев, Г. А. Поздняков, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Дифракция света	4
Теория дифракции света	7
Лабораторная работа 1.1. Изучение дифракции Фраунгофера. Принцип Бабиня	26
Лабораторная работа 1.2. Дифракция Френеля и Фраунгофера	36
Теория дифракции света на ультразвуковых волнах	43
Лабораторная работа 1.3. Дифракция света на ультразвуковых волнах в жидкости	58
Лабораторная работа 1.4. Дифракция света на ультразвуковых волнах в кристалле	64
Лабораторная работа 1.5. Дифракция и фильтрация изображения в когерентном свете	72
Лабораторная работа 1.6. Дифракционные оптические элементы	91

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Явления интерференции света служат убедительным доказательством волновой природы световых процессов. Однако в этом случае с волновой точки зрения должен объясняться и фундаментальный, хорошо подтвержденный закон *прямолинейного распространения света*.

Волновые представления были развиты Гюйгенсом в 1690 г. и основывались на том, что свет по аналогии со звуком представляет собой волны, распространяющиеся в особой среде – эфире, заполняющем собой промежутки между частицами любого вещества. С этой точки зрения колебательное движение частиц эфира передается не только той частице, которая лежит на «пути» светового луча, т. е. на прямой, соединяющей источник света L (рис. 1) с рассматриваемой точкой A , но и всем частицам, примыкающим к A , т. е. световая волна распространяется из A во все стороны, как если бы точка A служила источником света.

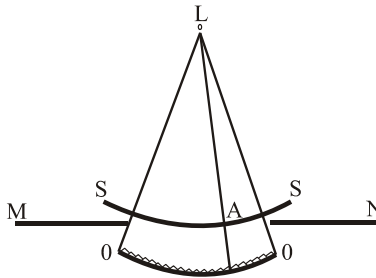


Рис. 1. Принцип Гюйгенса: L – источник света; SS – вспомогательная поверхность; OO – огибающая вторичных волн, исходящих из SS

Поверхность, огибающая эти вторичные волны, представляет собой поверхность волнового фронта. Огибающая OO (жирная дуга) – часть шаровой поверхности с центром в L , ограниченной конусом, ведущим к краям круглого отверстия в экране MN . Принцип Гюйгенса позволил разъяснить вопросы отражения и преломления света, но вопрос о прямолинейном распространении света решен не был, так как не был связан с явлениями отступления от прямолинейности, т. е. явлениями дифракции. Френель дополнил принцип Гюйгенса идеей интерференции волн. Благодаря этому

огibaющая поверхность элементарных волн, введенная Гюйгенсом чисто формально, приобрела физическое содержание как поверхность, где благодаря взаимной интерференции элементарных волн результирующая волна имеет заметную интенсивность. Модифицированный принцип Гюйгенса – Френеля является основным принципом волновой оптики и позволяет решать задачи о дифракции света.

Под дифракцией света следует понимать любое отклонение лучей от прямолинейного распространения, если только причиной этого отклонения не являются обычные законы геометрической оптики – отражение или преломление. Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновение света в область геометрической тени. На изображение, получаемое в любом оптическом приборе, всегда влияют дифракционные явления, так как пучки лучей, проходящие оптические элементы прибора, ограничены конечными размерами этих элементов. Дифракционные явления определяют одну из важнейших характеристик оптического прибора – его разрешающую способность. При распространении световых пучков дифракция происходит всегда, однако волновые свойства света наиболее отчетливо проявляются при определенном соотношении между размером препятствий d , расстоянием z_0 до точки наблюдения и длиной волны λ .

При распространении электромагнитной волны в однородной среде геометрическая форма фронта волны не испытывает изменения. Если же волна распространяется в неоднородной среде, в которой могут находиться области с резким изменением показателя преломления или непрозрачные препятствия, то её фронт искажается и происходит перераспределение интенсивности света в пространстве. В таких условиях возникает явление, получившее название дифракции. Под дифракцией понимается любое отклонение света от прямолинейного распространения, если только оно не может быть объяснено как отражение или преломление.

Дифракция наблюдается всегда, когда изменение амплитуды или фазы волны неодинаково по всей поверхности волнового фронта.

Первая теория дифракции света, правильно количественно описывавшая явление, предложена французским физиком Френелем. В основе теории лежит принцип Гюйгенса – Френеля.

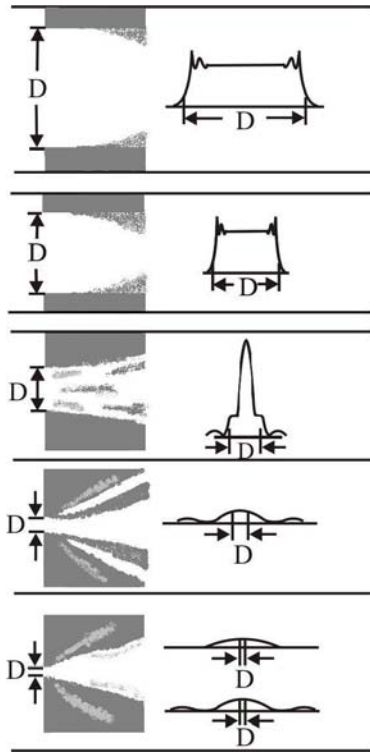


Рис. 2. Изменения картины распределения света за щелью в зависимости от ширины щели

Следует отметить, что отдельные пространственные гармоники (плоские волны) не ограничены в пространстве и, строго говоря, не могут разделиться на любом конечном расстоянии от щели. В реальном эксперименте, однако, всегда приходится иметь дело с волновыми пучками, которые можно считать плоскими волнами только более или менее приближенно. В данном случае для измерения пространственного распределения дифрагировавшего света необходимо иметь фотоприемник с размером a , много

меньшим характерного масштаба дифракционной картины $\alpha \propto Z\lambda/D$. Для наблюдателя, установившего такой приемник в зоне Фраунгофера, щель оказывается неотличимой от бесконечно тонкой, а выходящее из нее излучение воспринимается как плоская волна. Ситуация здесь та же, что при спектральных измерениях во временной области: анализатор спектра выделяет всегда не отдельные составляющие непрерывного спектра, а некоторую его часть, содержащую бесконечное спектральных компонент.

Возвращаясь к общему описанию прошедшего через щель излучения, нужно отметить, что в зоне геометрической оптики распределение освещенности в целом соответствует отпечатку объекта (в нашем примере щели), однако вблизи краев щели наблюдаются дифракционные явления. Эти искажения также называются дифракцией Френеля и занимают область шириной порядка зоны Френеля $\Delta x \geq \sqrt{Z_0 \lambda}$, что можно понять из соображений размерности. Для щели бесконечной ширины, т. е. в случае дифракции на полуплоскости, при отсутствии конечного масштаба задачи, на всех расстояниях $\lambda \ll Z_0 < \infty$ вблизи края геометрической тени наблюдается дифракция Френеля, а зона дифракции Фраунгофера отсутствует. Изменения картины распределения света за щелью, в зависимости от ширины щели, приведены на рис. 2. На рисунке можно видеть постепенно увеличивающееся искажение изображения щели и переход к дифракции Френеля, а затем к дифракции Фраунгофера. Продольный размер на рисунке для удобства взят нереально малым.

ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ СВЕТА

Область дифракции Френеля и Фраунгофера

Предположим, что параллельный пучок света (плоская монохроматическая волна) проходит через узкую щель шириной d в бесконечном непрозрачном экране (рис. 3).

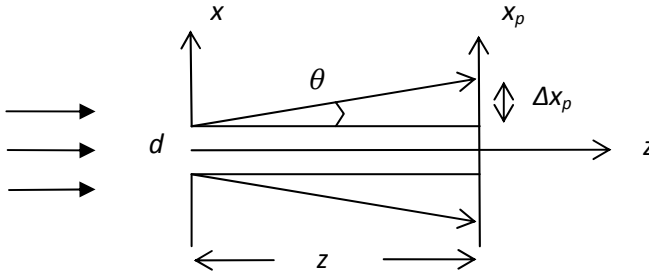


Рис. 3. Прохождение плоской волны через щель в непрозрачном экране

По законам геометрической оптики на любом расстоянии z_0 от экрана в плоскости наблюдения должно наблюдаться изображение щели шириной d . В действительности же вследствие соотношения неопределенностей и из-за пространственного ограничения ширины пучка вдоль оси x возникает угловой разброс прошедшего пучка по поперечным волновым числам:

$$\Delta k_x \cdot d = 2\pi. \quad (1)$$

Отсюда следует, что пучок за экраном становится расходящимся с характерным углом θ (в приближении малых углов)

$$\theta \approx \frac{\Delta k_x}{k} = \frac{\lambda}{d}, \quad (2)$$

где λ – длина волны света. Расхождение прошедшего через щель пучка приводит к искажению картины изображения, следующей из геометрической оптики. Причем эти искажения возрастают по мере удаления плоскости наблюдения от щели. Такое явление, вызванное волновой природой света, называется дифракцией. Пройдя расстояние z , пучок расширяется симметрично на величину

$$\Delta x_p \approx z \frac{\lambda}{d}. \quad (3)$$

Если плоскость наблюдения находится очень близко к щели, так что

$$\Delta x_p \ll d \text{ и } z \ll \frac{d^2}{\lambda}, \quad (4)$$

то освещенность в плоскости наблюдения практически постоянна в пределах геометрического изображения щели d и равна нулю во всех остальных точках. Следует отметить, что вблизи краев щели наблюдаются светлые и темные дифракционные полосы, однако они занимают малую область по сравнению с размером изображения щели. Можно говорить, что свет распространяется прямолинейно (приближение геометрической оптики).

При удалении плоскости наблюдения от щели на расстояния, при которых

$$\Delta x_p \leq d \text{ и } z \leq \frac{d^2}{\lambda}, \quad (5)$$

на изображении щели будут видны светлые и темные дифракционные полосы, хотя ее геометрическое изображение еще узнаваемо. Эта область (ближняя зона) называется областью *дифракции Френеля*. Говорят, что в этом случае наблюдается дифракционное изображение предмета (щели) [1].

При больших расстояниях от плоскости наблюдения до щели, таких, что

$$\Delta x_p \ll d \text{ и } z \gg \frac{d^2}{\lambda}, \quad (6)$$

отмечаются значительные искажения изображения щели и характерный размер освещенности в плоскости наблюдения (дифракционной картины) намного превышает размер самой щели. При этом геометрическое изображение щели становится уже неузнаваемым. Эта область (дальняя зона) называется областью *дифракции Фраунгофера*. Говорят, что в этом случае наблюдается дифракционное изображение источника света [1].

Таким образом, вид дифракционной картины определяется тремя параметрами: размером предмета (щели), расстоянием z до плоскости наблюдения и длиной волны света λ . Например, при ширине щели $d = 200$ мкм и $\lambda = 6328$ Å (гелий-неоновый лазер) приближение геометрической оптики будет справедливо, если

$z = 6,4$ см. При расстояниях $z \leq 6,4$ см будет наблюдаться дифракция Френеля, а при $z \gg 6,4$ см – дифракция Фраунгофера.

В качестве примера на рис. 4 приведено изменение распределения интенсивности света при увеличении расстояния от плоскости наблюдения до щели при ширине щели $d = 200$ мкм [2].

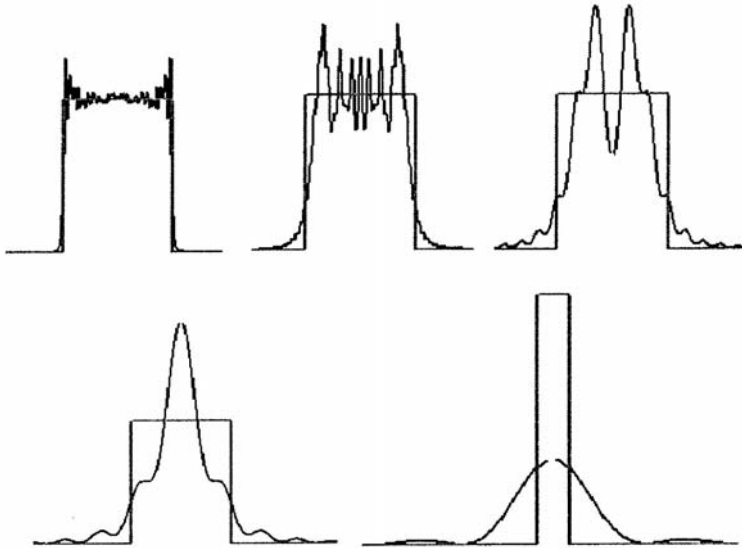


Рис. 4. Распределение интенсивности света за щелью при увеличении расстояния до плоскости наблюдения (увеличение расстояния – слева направо)

Распределения сверху соответствуют дифракции Френеля. Левое распределение близко к приближению геометрической оптики. Внизу показан переход от дифракции Френеля к дифракции Фраунгофера. Прямоугольное распределение интенсивности соответствует геометрической оптике.

Принцип Гюйгенса – Френеля. Дифракционный интеграл Френеля – Кирхгофа

Гюйгенс предложил феноменологическую картину распространения волн. В соответствии с его принципом каждую точку волнового фронта можно рассматривать как бесконечно малый источник новых волн с центром в этой точке. Элементарные сферические волны, создаваемые этими источниками, называются вторичными волнами. Волновой фронт в последующий момент времени представляет собой линию, огибающую эти вторичные волны. Френель дополнил принцип Гюйгенса утверждением, что вторичные волны когерентны и могут интерферировать между собой. Это сочетание принципа Гюйгенса с предположением Френеля об интерференции вторичных волн называется принципом Гюйгенса – Френеля. Таким образом, при анализе распространения волн необходимо учитывать их амплитуду и фазу.

Пусть плоская монохроматическая скалярная волна $E_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ (удовлетворяет скалярному волновому уравнению) падает по нормали на отверстие произвольной формы в бесконечном непрозрачном экране (рис. 5).

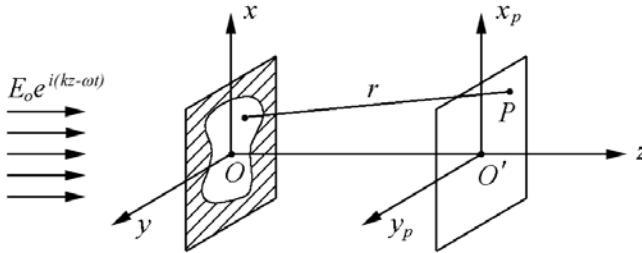


Рис. 5. Схема наблюдения дифракции света на отверстии в плоском непрозрачном экране

Это так называемое приближение скалярной теории дифракции. Поэтому при сложении электрических полей можно не следить за направлениями их векторов напряженности и суммировать скалярно. В соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля поле в точке P плоскости наблюдения можно представить в виде

суперпозиции сферических волн, приходящих от бесконечно малых элементов площади $ds = dx \cdot dy$ отверстия в экране

$$E(P) = AE_0 \exp(-i\omega t) \iint_S \frac{1}{r} \exp(ikr) dx dy, \quad (7)$$

где $E(P)$ – напряженность электрического поля в точке P , A – коэффициент пропорциональности, S – площадь отверстия. Множитель $(1/r) \exp(ikr)$ учитывает изменение амплитуды и фазы волны при прохождении оптического пути r .

Упрощение формулы (7) производится в предположении малых углов (так называемое параксиальное приближение), когда все поперечные размеры малы по сравнению с продольными размерами. В этом случае для расстояния r получим (разлагая в ряд и ограничиваясь членами второго порядка):

$$r = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + z^2} \approx z + \frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{2z}. \quad (8)$$

Коэффициент пропорциональности A находится приравниванием поля в точке P , вычисленного по формуле (7) (принимая для r приближение (8)) при устремлении размеров отверстия в экране к бесконечности, полю падающей плоской волны. Для коэффициента A получается выражение $A = k/2\pi i$ [3]. Множитель $1/r$ в подынтегральном выражении (7) можно приближенно заменить на $1/z$. Таким образом, поле в точке P описывается соотношением

$$E(P) = \frac{k}{2\pi i z} E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \iint_S \exp\left[\frac{ik[(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2]}{2z}\right] dx dy. \quad (9)$$

Полученное выражение называется интегралом Френеля – Кирхгофа и представляет собой решение задачи о дифракции электромагнитной волны (плоской) на отверстии в непрозрачном экране [3–5]. Следует отметить, что оно содержит множитель $1/i \equiv \exp(-i\pi/2)$, соответствующий сдвигу фазы вторичных волн относительно фазы падающей реальной волны на $\pi/2$.

Дифракция Френеля

Приближение (9) называется приближением Френеля (ближняя зона) и представляет собой разложение по расходящимся сферическим волнам. Дифракция света, рассматриваемая в этом приближении, носит название дифракции Френеля.

Дифракция на полуплоскости

В случае непрозрачного экрана с прямолинейным краем (полуплоскость; занимает область $x < 0$, $z = 0$, см. рис. 5) интеграл Френеля – Кирхгофа принимает вид

$$E(P) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{ik(x - x_p)^2}{2z}\right] dx. \quad (10)$$

Следует отметить, что ввиду бесконечного масштаба задачи практически на всех расстояниях от экрана вблизи края геометрической тени наблюдается дифракция Френеля, а область дифракции Фраунгофера отсутствует. Отметим также, что множитель $\frac{k}{2\pi iz}$ в выражении (9) заменен множителем $\sqrt{\frac{k}{2\pi iz}}$, что связано с переходом от разложения по сферическим волнам к разложению по цилиндрическим волнам (одномерный случай) [3]. Вводя безразмерные переменные

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(x - x_p) \text{ и } w = -\sqrt{\frac{k}{\pi z}}x_p = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}x_p, \quad (11)$$

соотношение (10) можно представить в виде

$$E(P) = \frac{E_0}{\sqrt{2i}} \exp[i(kz - \omega t)] \int_w^{\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha. \quad (12)$$

Таким образом, решение задачи сводится к так называемым *интегралам Френеля*

$$C(w) = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha^2\right)d\alpha, \quad S(w) = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha^2\right)d\alpha, \quad (13)$$

значения которых находятся численными методами. Имеются таблицы этих интегралов, например, в работе [6]. Заметим, что

$$\begin{aligned} C(0) &= S(0) = 0 \\ C(-w) &= -C(w) \text{ и } S(-w) = -S(w), \\ C(\pm\infty) &= S(\pm\infty) = \pm 1/2. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая выражения (13) и (14), для поля в точке наблюдения P можно записать

$$E(P) = \frac{E_0}{\sqrt{2i}} \exp[i(kz - \omega t)] \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(w) \right] + i \left[\frac{1}{2} - S(w) \right] \right\} \quad (15)$$

Из соотношения (15) видно, что поле в точке P дифракционной картины определяется разностью двух комплексных векторов

$$OO^+ = 1/2 + i 1/2 \text{ и } OW = \int_0^w \exp\left(i \frac{\pi}{2}\alpha^2\right)d\alpha = C(w) + iS(w).$$

Переменная w принимает все возможные значения, и точка $W(w)$ описывает кривую, которая называется *спиралью Корню* (клотоида, рис. 6) [1]. Она проходит через начало координат и антисимметрична относительно обеих осей. Обе ветви кривой приближаются асимптотически к точкам O^+ и O^- . Прямая линия O^+O^- составляет с осями координат угол $\pi/4$, что следует из последнего равенства соотношений (14). Значение w равно длине дуги кривой, измеренной от начала координат. Как следует из графика, поле в точке P дифракционной картины определяется расстоянием от точки W спирали Корню до асимптотической точки $O^+(+1/2, +1/2)$.

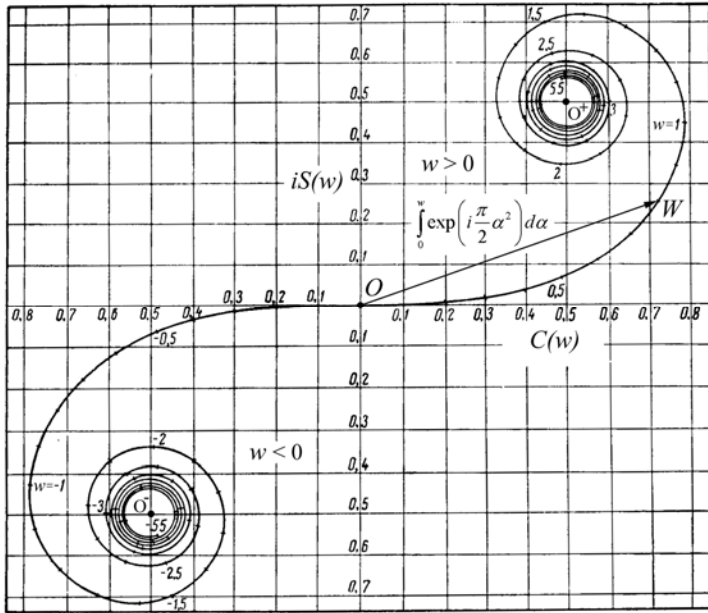


Рис. 6. Спираль Корню

Интенсивность в точке P пропорциональна $|E(P)|^2$ и с точностью до постоянного множителя равна

$$I(P) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(w) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(w) \right]^2 \right\}. \quad (16)$$

Таким образом, если точка наблюдения находится в освещенной области ($x_p > 0$, $w < 0$), конец комплексного вектора движется по левой ветви спирали. Интенсивность осциллирует с амплитудой, уменьшающейся по мере увеличения смещения точки x_p от края геометрической тени, и асимптотически приближается к I_0 . Например, интенсивность в точках наблюдения x_{p1} и x_{p2} (рис. 7, б) определяется квадратом расстояний CO^+ и DO^+ соответственно (рис. 7, а). На границе тени ($x_p = 0$, $w = 0$) имеем $I = \frac{1}{4} I_0$. В области геометрической тени ($x_p < 0$, $w > 0$) конец комплексного вектора движется по правой ветви спирали (например, AO^+ на рис. 7, а). Следовательно, интенсивность монотонно уменьшается до нуля (см. рис. 7, б).

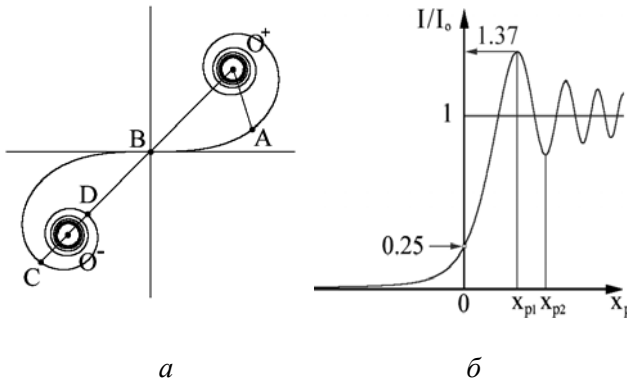


Рис. 7. Анализ распределения интенсивности при дифракции Френеля на прямолинейном крае (полуплоскости) с помощью спирали Корню

Отметим, что величина $\sqrt{\lambda z}$ в (11) характеризует масштаб дифракционной картины. Оказывается, она определяет размер так называемых зон Френеля [3, 4]. Первый максимум (см. рис. 7, б) возникает при смещении точки наблюдения примерно на ширину первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda z}$. Следовательно, дифракционная картина в плоскости xOz (рис. 3) представляется системой полос, изогнутых по параболическому закону $x_p \sim \sqrt{n\lambda z} \left(z \sim \frac{1}{n\lambda} x_p^2 \right)$. Она приведена на рис. 6, а. Нечетным значениям n соответствуют светлые полосы, четным n – темные. Кривые 1–4 являются приближениями при нечетных значениях n . Можно заметить некоторое несовпадение этих кривых с положением светлых полос [2].

Дифракция на щели

В случае щели шириной d нижний и верхний пределы в интеграле Френеля – Кирхгофа (10) принимают значения соответственно $-d/2$ и $+d/2$, а пределы интегрирования (12) записываются в виде

$$w_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{d}{2} + x_p \right), \quad w_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{d}{2} - x_p \right). \quad (17)$$

Выражение для интенсивности в точке P дифракционной картины можно представить следующим образом:

$$I(P) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ [C(w_2) - C(w_1)]^2 + [S(w_2) - S(w_1)]^2 \right\}. \quad (18)$$

Из соотношений (17) и (18) видно, что интенсивность в точке с координатой x_p определяется квадратом расстояния между двумя точками на спирали Корню с координатами $C(w_1)$, $S(w_1)$ и $C(w_2)$, $S(w_2)$. Например, если точка наблюдения P находится на оси z ($x_p = 0$, рис. 5), положение этих двух точек симметрично относительно начала координат. При изменении расстояния z от щели (или ширины щели d) в точке P наблюдаются осцилляции интенсивности с изменяющейся амплитудой. В этом случае максимумы и минимумы интенсивности приближенно соответствуют точкам пересечения спирали Корню и прямой, проходящей через фокусы спирали.

Обозначим через φ угол между касательной к кривой в произвольной точке спирали Корню и осью $C(w)$. Для максимумов интенсивности угол φ равен [4]

$$\varphi_m(\max) = \left[\frac{3}{4} + 2(m-1) \right] \pi, \quad (19)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$ – номер максимума. Для минимумов

$$\varphi_n(\min) = \left[\frac{7}{4} + 2(n-1) \right] \pi, \quad (20)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ – номер минимума.

С другой стороны, учитывая интегралы Френеля (13), для угла φ можно записать (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{dS(w)}{dC(w)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} w^2) dw}{\cos(\frac{\pi}{2} w^2) dw} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} w^2), \text{ т. е.} \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} w^2. \end{aligned} \quad (21)$$

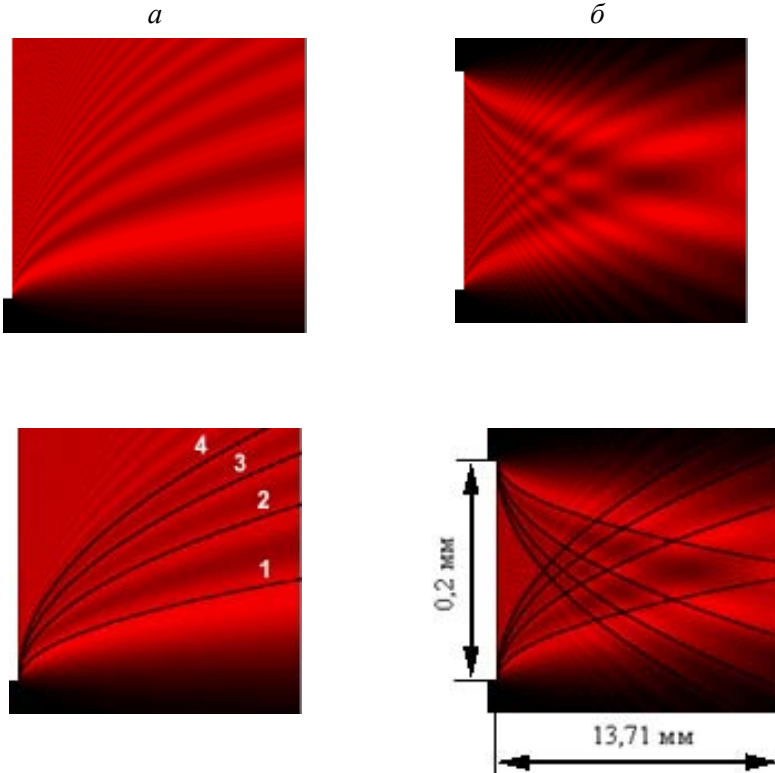


Рис. 8. Картина полос при дифракции Френеля: *a* – для прямолинейного края (выступает); *б* – для щели. Длина волны света $\lambda = 0,6328$ мкм. Кривые заданы формулами: $1 - x_p = \sqrt{\lambda z}$; $2 - x_p = \sqrt{3\lambda z}$; $3 - x_p = \sqrt{5\lambda z}$; $4 - x_p = \sqrt{7\lambda z}$ [2]

В начале координат ($w = 0$) касательная к кривой совпадает с осью $C(w)$. С увеличением параметра w угол φ монотонно возрастает.

Из соотношений (17) следует, что для точек на оси ($x_p = 0$) $w = \sqrt{2/\lambda z}(d/2)$. С учетом этого и формул (19–21) для расстояний z от плоскости наблюдения до щели (d постоянно), на которых будут наблюдаться максимумы и минимумы интенсивности (на оси), получим:

$$z_m(\max) = \frac{d^2}{\lambda[3 + 8(m-1)]}, \quad (22)$$

$$z_n(\min) = \frac{d^2}{\lambda[7 + 8(n-1)]}. \quad (23)$$

Дифракционные картины от каждого из непрозрачных краев щели будут накладываться друг на друга (рис. 8). Светлые и темные области находятся на пересечении парабол, построенных от каждого края по аналогии с прямолинейным краем (рис. 8, б). Так как в освещенной области амплитуда осцилляций интенсивности при дифракции на прямолинейном крае стремится к нулю (рис. 7, б), то при увеличении размеров щели (z постоянно) действие каждого из экранов можно рассматривать независимо. Наконец, отметим, что координаты полос пропорциональны $\sim \sqrt{\lambda}$, в отличие от дифракции Фраунгофера на щели, где эта зависимость линейна $\sim \lambda$ [3].

Дифракция Фраунгофера

Раскрывая квадратичные члены в показателе экспоненты интеграла Френеля – Кирхгофа (9), получим:

$$E(P) = \frac{k}{2\pi iz} E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \exp\left[\frac{ik(x_p^2 + y_p^2)}{2z}\right] \times \\ \times \iint_s \exp\left[-\frac{ik(xx_p + yy_p)}{2z}\right] \exp\left[-\frac{ik(xx_p + yy_p)}{z}\right] dx dy. \quad (24)$$

Если размеры отверстия в экране достаточно малы по сравнению с расстоянием до плоскости наблюдения z , так что

$$\frac{k(x^2 + y^2)}{2z} \ll 1, \text{ то } \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z}\right] \rightarrow 1. \quad (25)$$

Тогда выражение (24) принимает вид

$$E(P) = \frac{k}{2\pi iz} E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \exp\left[\frac{ik(x_p^2 + y_p^2)}{2z}\right] \times \quad (26)$$

$$\times \iint_S \exp\left[-\frac{ik(xx_p + yy_p)}{z}\right] dx dy.$$

Следует отметить, что условие (25) физически соответствует приближению так называемой дальней зоны (6). Так как точки наблюдения P расположены достаточно близко к оси z (размеры области наблюдения малы по сравнению с расстоянием до экрана с отверстием), то приходящие в эти точки вторичные волны можно считать плоскими. Тогда выражение (26) можно рассматривать как результат сложения плоских волн, распространяющихся в различных направлениях.

Отметим также, что в выражении (26) интегрирование по площади отверстия S можно заменить интегрированием по всей площади бесконечного экрана (от $-\infty$ до $+\infty$), так как, согласно приближению Кирхгофа, поле на непрозрачных частях экрана равно нулю. Тогда с точностью до множителей, стоящих перед интегралом (не оказывают влияния на распределение интенсивности в дифракционной картине), распределение поля в плоскости наблюдения представляет собой интегральное преобразование Фурье с волновыми числами (пространственными частотами)

$$k_x = \frac{kx_p}{z} \text{ и } k_y = \frac{ky_p}{z} \quad (27)$$

распределения поля в плоскости экрана с отверстием [3].

Приближение (26) называется приближением Фраунгофера (дальняя зона) и представляет собой разложение по плоским волнам. Дифракция света, рассматриваемая в этом приближении, носит название дифракции Фраунгофера.

С точки зрения практики дифракцию Фраунгофера можно наблюдать как в области, удовлетворяющей условию (25), так и в фокальной плоскости собирающего объектива, установленного позади экрана с отверстием на пути дифрагировавших лучей [4].

Есть также ограничение, состоящее в том, что на отверстие должна падать плоская волна.

Дифракция на щели

Считаем, что начало координат (см. рис. 5) расположено в центре щели шириной d (ориентирована параллельно оси y). Тогда согласно приближению Фраунгофера (26) для амплитуды поля в точке P плоскости наблюдения получим:

$$E(P) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \exp\left(\frac{ikx_p^2}{2z}\right) \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left(-\frac{ikxx_p}{z}\right) dx \quad (28)$$

Напомним о замене множителя в формуле (28) для отверстия в виде щели (одномерный случай). Производя интегрирование, найдем

$$E(P) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} E_0 d \exp[i(kz - \omega t)] \exp\left(\frac{ikx_p^2}{2z}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (29)$$

где $\alpha = kdx_p/2z \approx kd\theta/2$ ($\theta \approx x_p/z$ – угол дифракции).

Для интенсивности света в точке P получим

$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2, \quad (30)$$

где $I_0 = E_0^2 kd^2 / 2\pi z$. Анализ выражения (30) показывает, что интенсивность максимальна и равна I_0 в центре дифракционной картины, поскольку $\sin \alpha / \alpha \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow 0$ ($x_p = 0$ или $\theta = 0$). Когда $\sin \alpha = 0$, т. е. когда величина $\alpha = n\pi$, где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, интенсивность $I(P)$ обращается в нуль. Отсюда находим, что условие дифракционных минимумов имеет вид

$$\frac{dx_p}{z} = n\lambda \quad \text{или} \quad d\theta = n\lambda. \quad (31)$$

Между минимумами расположены побочные максимумы, соответствующие максимуму множителя $(\sin \alpha / \alpha)^2$, т. е. условию

$\frac{d}{d\alpha}(\frac{\sin \alpha}{\alpha}) = 0$ или $\alpha = \text{tg} \alpha$. Действительные решения последнего уравнения имеют вид: $\alpha = 0; \pm 1,43\pi; \pm 2,459\pi; \pm 3,471\pi$ и т. д. [4]. Таким образом, побочные максимумы наблюдаются при углах дифракции:

$$\theta_1 = \pm 1,43\lambda / d, \quad \theta_2 = \pm 2,46\lambda / d, \quad \theta_3 = \pm 3,47\lambda / d.$$

Следует отметить, что отношение интенсивностей первых трех побочных максимумов к интенсивности главного максимума I_0 составляет 0,047; 0,017; 0,008. Таким образом, интенсивность быстро уменьшается по мере удаления от центра дифракционной картины. Этим объясняется, почему обычно наблюдаются только несколько первых побочных максимумов.

С точки зрения применения преобразования Фурье при анализе дифракции света на щели амплитуда дифрагировавшей волны (28) или (29) в пространстве волновых чисел k_x ($k_x = k\theta \approx kx_p/z$) представляет собой Фурье-образ прямоугольного импульса амплитудой E_0 и шириной d в x -пространстве.

Ширина главного максимума определяется условием $d\theta = \pm \lambda$. Поэтому при уменьшении ширины щели d (длина волны λ постоянна) будет возрастать его ширина и расстояние между побочными максимумами. Таким образом, чем уже щель, тем шире дифракционное распределение. Иными словами, чем уже импульс в x -пространстве (чем уже световой пучок), тем шире область в пространстве волновых чисел k_x , необходимая для его описания.

Дифракция на двух щелях

Проведенное выше рассмотрение легко обобщить на случай двух одинаковых щелей шириной d с интервалом D между ними (рис. 9).

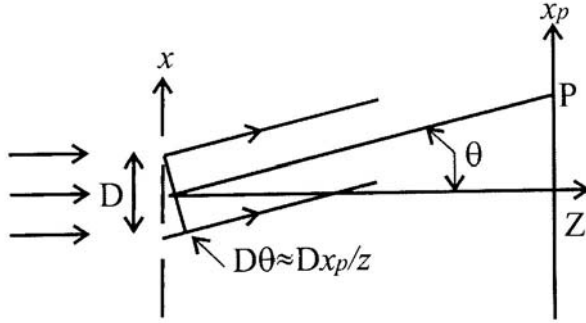


Рис. 9. Дифракция Фраунгофера на двух одинаковых щелях

Предположим, что амплитуда поля в точке P плоскости наблюдения от первой (нижней) щели $E_1(P)$ описывается выражением (29). Тогда для амплитуды поля в этой же точке от второй (верхней) щели можно записать

$$E_2(P) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} E_0 d \exp[i(kz - \omega t)] \exp\left(\frac{ikx_p^2}{2z}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \exp(-ikD\theta) \quad (32)$$

Последний экспоненциальный множитель в выражении (32) обусловлен изменением фазы второй волны в точке наблюдения P по сравнению с фазой первой волны. При суммировании этих параллельных волн (в дальней зоне) амплитуда поля в точке P равна

$$\begin{aligned} E(P) = E_1(P) + E_2(P) &= \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} E_0 d \exp[i(kz - \omega t)] \times \\ &\times \exp\left(\frac{ikx_p^2}{2z}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \exp\left(-\frac{ikD\theta}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{kD\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Интенсивность в точке P плоскости наблюдения дается формулой ($I(P) \propto |E(P)|^2$):

$$I(P) = 4I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{kD\theta}{2} \right). \quad (34)$$

Напомним, что $\alpha = kdx_p/2z \approx kd\theta/2$ ($\theta \approx x_p/z$ – угол дифракции), а I_0 – максимальная интенсивность в картине дифракции на одной щели.

Выражение (34) представляет собой произведение двух функций, одна из которых $I_0(\sin \alpha/\alpha)^2$ соответствует дифракционному распределению от одной щели, а вторая $4\cos^2(kD\theta/2)$ обусловлена интерференцией волн от двух щелей.

Анализ дифракционного множителя проведен ранее. Анализ интерференционного множителя показывает, что интенсивность $I(P) = 4I_0$ (главные максимумы), когда $\cos(kD\theta/2) = 1$, т. е. когда разность хода

$$D\theta = D \frac{x_p}{z} = 0, \pm\lambda, \pm2\lambda, \dots, m\lambda, \quad (35)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – так называемый порядок интерференционной полосы. Интенсивность $I(P) = 0$, когда $\cos(kD\theta/2) = 0$, т. е. когда разность хода

$$D\theta = D \frac{x_p}{z} = \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \dots, \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad (36)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, интерференционная картина представляет собой ряд чередующихся светлых и темных полос, параллельных направлению щелей. Центральная светлая полоса в точке $x_p = 0$ имеет нулевой порядок $m = 0$.

Дифракционное распределение, имеющее огибающую $(\sin \alpha/\alpha)^2$, изменяет интенсивность интерференционного распределения. При фиксированной длине волны λ интенсивность главных максимумов уменьшается с увеличением порядка m как

$$I_m = 4I_0 \left[\frac{\sin(m\pi d/D)}{m\pi d/D} \right]^2.$$

При некотором значении угла θ положение дифракционного минимума, определяемое условием (31), совпадает с положением

интерференционного максимума, определяемого условием (35), и соответствующий порядок интерференции исчезает. Отношение $D/d = m/n$ определяет теряемые порядки интерференции m для различных значений минимумов n .

В качестве примера на рис. 10 приведены картины дифракции Фраунгофера и распределения интенсивности при различном числе щелей.

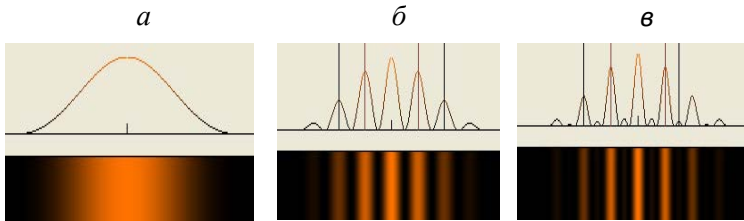


Рис. 10. Картины дифракции Фраунгофера (внизу) и соответствующие распределения интенсивности света (вверху): *а* – для одиночной щели (побочные максимумы не видны), *б* – двух щелей и *в* – трех щелей

Следует отметить, что коэффициент 4 в распределении интенсивности (34) обусловлен величиной N^2 (квадрат числа щелей), что связано с когерентностью волн от каждой из щелей.

Литература

1. Дитчберн Р. Физическая оптика. М.: Наука, 1965.
2. Климкин В. Ф., Санкин Г. Н. Лекционная демонстрация дифракции Френеля на щели и полуплоскости // Изв. вузов. Физика. 2005. № 5. С. 10–18.
3. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. Ч. 2.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.1

ИЗУЧЕНИЕ ДИФРАКЦИИ ФРАУНГОФЕРА.
ПРИНЦИП БАБИНЕ

Цель работы: изучение явления дифракции Фраунгофера в параллельных лучах. Проверка выполнения принципа Бабинне для различных объектов.

Внимание! *Прежде чем приступить к выполнению лабораторной работы 1.1, студент должен изучить теорию дифракции света, которая изложена в начале данного сборника, а также принцип Бабинне, описанный ниже.*

Рассмотрим важную для практики дифракцию на взаимодополнительных экранах (экраны, у которых прозрачные области одного соответствуют непрозрачным областям другого). Рассмотрим невозмущенную экранами световую волну (например, лазерный пучок), имеющую в плоскости наблюдения поперечное распределение U_0 . Поместив на пути волны первый взаимодополнительный экран, мы будем иметь в плоскости наблюдения поле U_1 . Заменяв экран на второй взаимодополнительный, мы получим в той же плоскости поле U_2 . Из принципа Гюйгенса – Френеля следует, что все три поля связаны соотношением $U_0 = U_1 + U_2$, так как сумма открытых частей взаимодополнительных экранов эквивалентна полностью открытой невозмущенной волне U_0 . Это равенство называется принципом, или теоремой, Бабинне [1].

Соответственно, $U_1 = U_0 - U_2$. В частности, в тех местах экрана, где невозмущенное поле отсутствует ($U_0 = 0$) $U_1 = -U_2$, а дифракционные интенсивности от взаимодополнительных экранов равны $I_1 = I_2$. Принцип Бабинне позволяет уменьшить вдвое практические дифракционные расчеты. Кроме этого, на его основе построен, например, метод элементарного расчета дифракционных потерь в устойчивых лазерных резонаторах [2].

Рассмотрим бесконечный экран с отверстиями произвольной формы, расположенный в плоскости (x, y) , с функцией пропускания поля волны $t(x, y)$. Для определенности мы будем рассматривать в дальнейшем напряженность электрического поля E электромагнитной волны, хотя все формулы останутся справедливыми и для напряженности магнитного поля H волны.

В общем случае рассмотрим в плоскости x, y бесконечный экран с отверстием произвольной формы. В отверстие помещен плоский объект (транспарант) с функцией пропускания $t(x, y)$ амплитуды электромагнитной волны. Для определенности мы будем рассматривать в дальнейшем напряженность электрического поля E электромагнитной волны, хотя все формулы останутся справедливыми и для напряженности магнитного поля H волны [1].

Если на транспарант падает плоская волна $E_0 \cdot e^{i(KZ - \omega t)}$, то распределение амплитуды волны равно

$$E(x, y) = E_0 t(x, y). \quad (37)$$

Поле дифрагировавшей на транспаранте волны $E_0(x_p, y_p)$ на расстоянии z_0 в плоскости P выражается через $E_0(x, y)$ с помощью интеграла Френеля – Кирхгофа (10). В зоне Фраунгофера интеграл Френеля – Кирхгофа имеет вид

$$\begin{aligned} E(x_p, y_p) &\propto \exp(ikz_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) \exp\left[\frac{ik}{z_0}(x_p x + y_p y)\right] dx dy = \\ &= E_0 \exp(ikz_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) \exp\left[\frac{ik}{z_0}(x_p x + y_p y)\right] dx dy = \\ &= E_0 \exp(ikz_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) \exp\left[i(k_x x + k_y y)\right] dx dy \end{aligned} \quad (38)$$

где $k_x = kx_p/z_0$, $k_y = ky_p/z_0$.

Из соотношения (38) видно, что напряженность поля волны в зоне Фраунгофера связана преобразованием Фурье с напряженностью поля в плоскости транспаранта. Величины k_x , k_y часто называют пространственными частотами по аналогии с частотами преобразования Фурье во временной области.

Одиночная щель

Примем выражение (38) к определению картины дифракции от одиночной щели шириной D . Распределение амплитуды электромагнитной волны в плоскости щели показано на рис. 11, *a*. Пространственный спектр такой функции координат легко вычисляется:

$$E(k_x) = E_0 \int_{-d/2}^{d/2} e^{iK_x x} dx = E_0 d \frac{\sin k_x d/2}{k_x d/2} \quad (39)$$

Подставив значения пространственной частоты $K_x = Kx_p/Z_0$ и возведя в квадрат выражение (39), находим распределение освещенности в зоне Фраунгофера:

$$I(x_p) \sim E_0^2 d^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2, \text{ где } u = \frac{\pi x_p d}{\lambda z_0}. \quad (40)$$

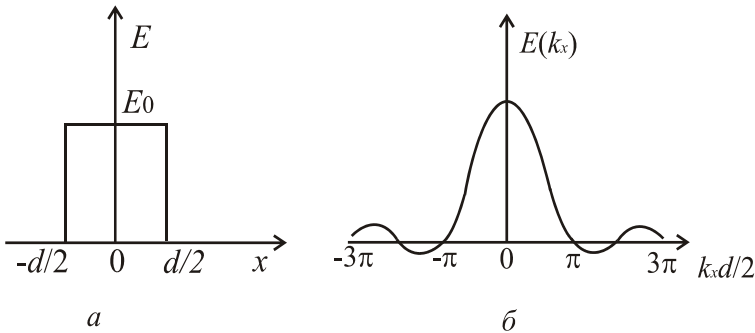


Рис. 11. Распределение амплитуды электромагнитной волны: *a* – в плоскости щели, *б* – в зоне дифракции Фраунгофера

Круглое отверстие диаметром D

Функция пропускания транспаранта здесь зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и диаметра отверстия d :

$$t(r) = \text{circ}(r^2/d), \quad (41)$$

где

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

Круговая симметрия задачи позволяет перейти от двумерного преобразования Фурье к преобразованию Фурье – Бесселя, зависящему только от r [2]. Распределение интенсивности в плоскости регистрации также обладает круговой симметрией:

$$I(r_p) \sim \left[\frac{2J_1(kdr_p/2)}{kdr_p/2} \right]^2. \quad (42)$$

Здесь J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка $r_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$. В таблице приведены значения экстремумов функции $\Phi(x) = 2 \left[\frac{J_1(\pi x)}{\pi x} \right]^2$, определяющей положения светлых и темных колец в дифракционной картине.

x	0	1,220	1,635	2,233	2,679	3,238	3,699
Φ	1	0	0,0175	0	0,0042	0	0,0016
max или min	max	min	max	min	max	min	max

Из таблицы следует, что радиус первого темного круга в картине дифракции Фраунгофера от круглого отверстия:

$$\Delta r_p = 1,22 \lambda z_0 / d. \quad (43)$$

Дифракционная решетка. Эффект Тальбо

Рассмотрим бесконечную одномерную решетку с функцией пропускания вида

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x-md}{a}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (44)$$

где $\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 0,5 \\ 0, & |x| > 0,5 \end{cases}$.

На рис. 12 приведена зависимость $t(x)$. Периодическую функцию $t(x)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$t(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nk_x x), \quad (45)$$

где пространственная частота k_x связана с периодом решетки $k_x = 2\pi/d$. Коэффициенты разложения α_0 , α_n определяются обычным образом. Если на решетку падает плоская волна $E_0 e^{i(kz - \omega t)}$, то сразу за решеткой зависящая от пространственных координат амплитуда волны имеет вид

$$E(x) = E_0 \alpha_0 e^{ikz} + E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n e^{i(kz + nk_x x)} + \alpha_n e^{i(kz - nk_x x)} \right]. \quad (46)$$

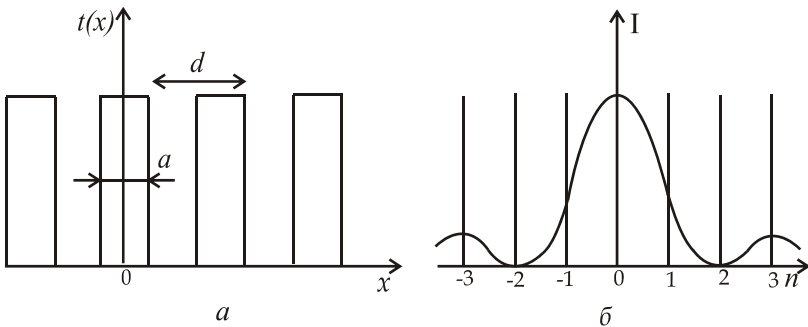


Рис. 12. Функция пропускания одномерной решетки (а) и распределение интенсивности дифракционных порядков в зоне Фраунгофера (б) при $d/a = 2$

Первый член представляет собой ослабленную исходную плоскую волну, а под знаком суммы содержится совокупность плоских волн, распространяющихся под углами

$$\theta_n = \pm nk_n/k = \pm n\lambda/d, \quad n = 1, 2, 3... \quad (47)$$

к направлению первоначальной волны. В зоне Фраунгофера эти волны образуют максимумы освещенности с интенсивностью $\sim (E_0\alpha_n)^2$, симметрично расположенные относительно центрального максимума на расстояниях $x_{pn} = \theta_n Z_0$ (рис. 12, б).

Тесно связанным с дифракционной решеткой, а в общем случае с дифракцией на периодических структурах является так называемый эффект Тальбо (Talbot, 1836).

Он был обнаружен экспериментально как периодическое повторение порядка цветов (самовоспроизведение) в отражении белого света от дифракционной решетки на определенных расстояниях от нее. Позже Рэлей осознал это явление в наиболее общем виде и дал ему теоретическое объяснение, суть которого состоит в следующем. Распределение поля (46), которое непосредственно за экраном имеет вид контрастных светлых и темных полос, будет точно таким же на расстояниях, кратных так называемой длине Тальбо L_T , на которой набегают разность фаз между соседними угловыми модами, равная 2π (разность длин λ). Нетрудно подсчитать величину L_T , так как разность фаз между соседними угловыми модами (плоскими волнами) возникает из-за их разного наклона, для малых углов имеем:

$$L_T [1 - \cos(\lambda/d)] = L_T \lambda^2 / 2d^2 = \lambda;$$

$$L_T = 2d^2 / \lambda.$$

Таким образом, контрастная периодическая картина интенсивности поля, наблюдаемая непосредственно за решеткой, будет самовоспроизводиться через расстояния L_T . Это свойство дифракции на периодических структурах находит практическое применение в оптических резонаторах современных многоканальных лазеров. В этих резонаторах для уменьшения потерь зеркала располагаются на расстояниях $L_T/2$ от торцов

активных элементов в виде периодической матрицы. Заметим, что этот эффект допускает обобщение на гораздо более широкий круг явлений, если иметь в виду различные возможные разложения исходного поля по каким-либо наборам мод. Периодическое самовоспроизведение поля наблюдается в волноводах, где исходное поле разлагается по волноводным модам, или на выходе из волновода, где поле может быть представлено в виде суммы гауссовых мод свободного пространства.

В заключение следует отметить, что на расстояниях, равных $(m + 1/2)L_T$, также будет наблюдаться самовоспроизведение картины интенсивности за решеткой, но в этих плоскостях распределение будет сдвинуто на половину периода $d/2$.

Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки показана на рис. 13.

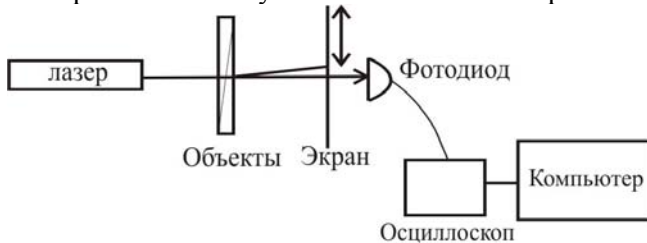


Рис. 13. Схема экспериментальной установки

В пучок излучения гелий-неонового лазера могут вводиться закрепленные во вращающейся турели транспаранты. Пространственные распределения интенсивности дифрагированного света можно наблюдать на экране либо регистрировать с помощью перемещающегося фотодиода. Сигнал с фотодиода подается на микроамперметр.

В работе необходимо выполнить ряд заданий, перечисленных ниже. Отдельное внимание уделить экспериментальному исследованию выполнения принципа Бабине для объектов различного рода. Можно также непосредственно наблюдать эффект Тальбо.

В лабораторной работе требуется проверить выполнение правила Бабиня при сравнении картин дифракции на круглом отверстии и на непрозрачном круглом объекте. Монохроматический, хорошо коллимированный и пространственно когерентный световой пучок, излучаемый лазером, дает возможность непосредственно наблюдать дифракцию света на круглых частицах. Однако если поместить в световой пучок одну частицу, то наблюдение дифракционной картины затрудняется из-за светового фона, создаваемого недифрагировавшей частью светового пучка. Для увеличения контраста интерференционной картины на пути светового пучка располагается множество хаотически расположенных одинаковых частиц. Так как интерференция между пучками, исходящими от разных частиц, отсутствует (в силу равной вероятности значений фаз дифрагировавших по каждому направлению волн), то будут складываться только интенсивности световых пучков, рассеянных разными частицами. Таким образом, дифракционная картина от частиц усилится по интенсивности в N раз по сравнению с дифракционной картиной от одной частицы без изменения своей структуры. На пути лазерного пучка размещается подставка с закрепленной на ней стеклянной пластинкой, покрытой частицами ликоподия (споры растения плауна), представляющими собой шарики одинакового размера. С внешней стороны ликопидий закрыт второй стеклянной пластинкой. На экране видна система концентрических темных и светлых колец, окружающих светлый круг.

Задание

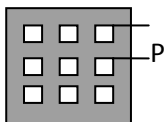
1. Юстировкой лазера и коллиматора (если используется расширенный пучок света) добиться четкой дифракционной картины от всех объектов.
2. Наблюдать на экране дифракцию от каждого объекта и, проводя необходимые измерения с помощью линейки или миллиметровой бумаги, определить вид объектов (транспарантов) и их характерные размеры. Оценить погрешности измерений.
3. Для одинарной щели установить ее ширину, удобную для измерения фотоэлектрическим датчиком соответствующей

дифракционной картины, и сравнить показания датчика с теоретическим распределением.

4. Дополнительное задание. Измерить фотоэлектрическим способом относительную интенсивность дифракционных максимумов для решетки и оценить относительную ширину прозрачных и непрозрачных участков решетки.

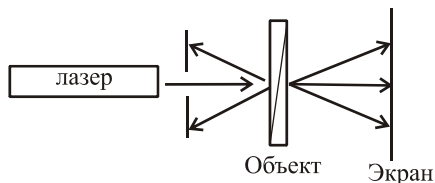
5. При помощи щели, используя принцип Бабиня, измерить толщину нити.

6. Для двумерной решетки вида у которой непрозрачные участки являются зеркально отражающими:



а) определить период решетки P ;

б) наблюдая дифракцию в проходящем и отраженном свете по схеме



убедиться в точном соблюдении принципа Бабиня для двумерного случая.

7. При помощи наклонного к лазерному пучку экрана (для увеличения размеров дифракционной картины) найти расстояния Тальбо для трех решеток, на которых наблюдается самовоспроизведение картин интенсивности, наблюдаемых непосредственно за решетками. Сравнить эти расстояния с теоретическими значениями. Для этого необходимо измерить периоды решеток при помощи микроскопа.

Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
2. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970.
3. Дифракция света: методические указания к лабораторным работам по физической оптике. Новосибирск: НГУ, 1990.
4. Кандидов В. П. Лазерные решетки // Соросовский образовательный журнал. 1999, № 12. С. 68–75.
5. Кубарев В. В. Принцип Бабинне и дифракционные потери в лазерных резонаторах // Квантовая электроника. 2000. Вып 30, № 9. С. 824–826.
6. Кубарев В. В. Оптимальные лазерные резонаторы с полым круглым волноводом // Квантовая электроника. 1999. Вып 27, № 3. С. 241–245.
7. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.2

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ И ФРАУНГОФЕРА

Цель работы: изучение явления дифракции Френеля и Фраунгофера на различных объектах. Определение длины волны света, ширины одиночной щели и расстояния между двумя щелями.

Внимание! *Прежде чем приступить к выполнению лабораторной работы 1.2, студент должен изучить теорию дифракции света, которая изложена в начале данного сборника.*

Порядок выполнения лабораторной работы

Оптическая схема экспериментальной установки представлена на рис. 14

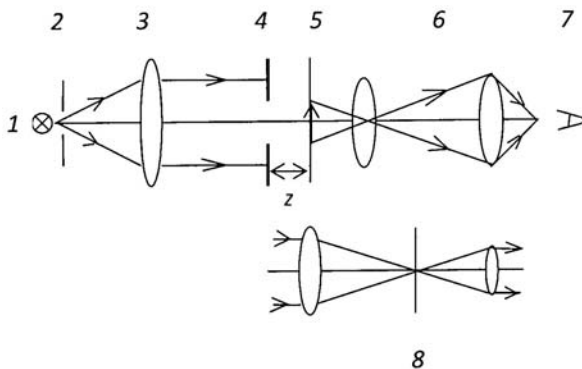


Рис. 14. Оптическая схема экспериментальной установки: 1 – лабораторный источник света; 2 – узкая щель; 3 – линза; 4 – дифракционный объект (одиночная или двойная щель); 5 – плоскость наблюдения; 6 – микроскоп; 7 – наблюдатель; 8 – зрительная труба

В работе используется лабораторный источник света (ЛИС) 1. Он включает в себя пять излучателей: 4 светодиода – белый (БД), красный (КД), зеленый (ЗД), синий (СД) и полупроводниковый лазер с длиной волны излучения $\lambda = 0,655$ мкм (ЛД). На ЛИС подается напряжение 5 вольт от блока питания (БП). Выбор необходимого излучателя осуществляется включением соответствующего тумблера Π_1 – Π_5 на корпусе прибора.

Регулировка положения выбранного излучателя относительно оптической оси установки производится с помощью специальных винтов PB_1 и PB_2 .

Принципиальная электрическая схема лабораторного источника света и его внешний вид показаны на рис. 15.

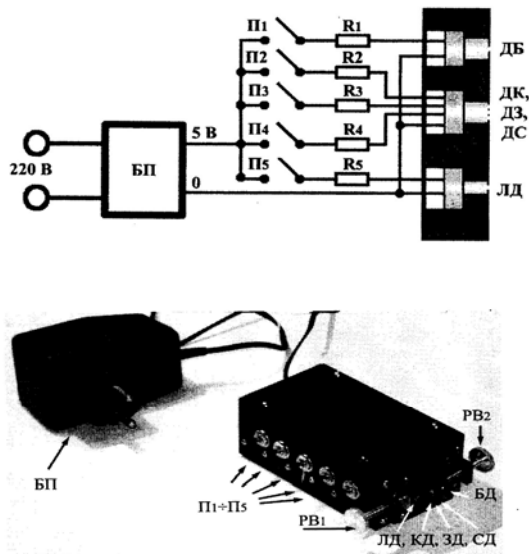


Рис. 15. Принципиальная электрическая схема и внешний вид лабораторного источника света

Щель 2 служит для уменьшения поперечного размера источников света в горизонтальном направлении. Свет от излучателей преобразуется в параллельный пучок (плоская волна) с помощью линзы 3 и падает на одиночную щель с плавно регулируемой шириной (или двойную щель) 4. Дифракционные объекты 4 закреплены в оправе револьверного типа, установленной на специальном юстировочном столике. Микрометрическая подача обеспечивает его плавное перемещение в плоскости, перпендикулярной направлению распространения светового пучка. Верхняя часть установки на рис. 9 соответствует схеме наблюдения дифракции Френеля. Наблюдение дифракционной картины в плоскости 5 осуществляется визуально с помощью микроскопа 6.

Микроскоп содержит короткофокусный объектив и окуляр, которые установлены в тубусе. Окуляр дает увеличенное мнимое изображение дифракционной картины. Расстояние от плоскости щели до плоскости наблюдения дифракционной картины z варьируется в пределах от 0 до 20 мм (для ширины щели 0,01–0,5 мм). Изучение дифракции Френеля на непрозрачном экране с прямолинейным краем проводится на краю широкой щели.

При наблюдении дифракции Фраунгофера за дифракционными объектами вместо микроскопа **б** устанавливается зрительная труба **8**, включающая в себя длиннофокусный объектив и окуляр. Увеличенное действительное изображение дифракционной картины в фокальной плоскости объектива рассматривается через окуляр.

В лабораторной работе экспериментально исследуется картина дифракции Френеля на одиночной щели и полуплоскости, дифракции Фраунгофера на одиночной и двойной щелях и определяются длина волны света, ширина щели, расстояние между щелями.

Изучение дифракции Френеля

Установите лабораторный источник света на оптической скамье (оптическом рельсе) и включите его блок питания (см. рис. 15). Включите полупроводниковый лазер и выставьте его с помощью регулировочных винтов так, чтобы его пучок распространялся строго вдоль оптической оси (в горизонтальной плоскости и вдоль скамьи). На расстоянии примерно 3 см за источником света поместите щель **2** и установите ее ширину 0,1–0,2 мм. На расстоянии примерно 11 см от щели на оптической оси установите линзу **3** для получения параллельного пучка света. Линза и оправа револьверного типа с дифракционными объектами находятся на одной стойке. Введите в лазерный пучок одиночную щель **4** с плавно регулируемой шириной. Установите щель так, чтобы лазерный пучок проходил через ее центр. На расстоянии примерно 1 см от щели на оптической оси поместите микроскоп **б**.

Передвигая подвижный столик микроскопа вдоль оптической оси, добейтесь четкого изображения краев щели. Плавно отодвигая микроскоп от щели (удаляя плоскость наблюдения), проследите за уменьшением числа максимумов и минимумов интенсивности на

изображении щели и их чередованием в центре изображения. Аналогичные явления в зоне дифракции Френеля можно наблюдать также при плавном уменьшении ширины щели (положение плоскости наблюдения неизменно). Меняя ширину щели, наблюдайте дифракцию Френеля у краев широкой щели и постепенное наложение дифракционных картин при ее сужении. При дальнейшем уменьшении ширины щели проследите за плавным переходом от дифракции Френеля к дифракции Фраунгофера. Обратите внимание на различие дифракционных картин и на то, что эти приближения суть один процесс дифракции света.

По картине дифракции можно определить длину волны света по формулам (22) и (23), если известна ширина щели d . Для этого, передвигая подвижный столик микроскопа вдоль оптической оси, добейтесь снова четкого изображения краев щели. Сделайте отсчет z_0 по нониусу сбоку подвижного столика. Далее рекомендуется отодвинуть подвижный столик микроскопа так, чтобы уйти в область дифракции Фраунгофера. При этом в центре картины будет наблюдаться широкая светлая полоса (главный максимум). При плавном приближении подвижного столика к щели интенсивность этой полосы будет увеличиваться, а ее ширина – уменьшаться. При подходе к области дифракции Френеля в центре изображения щели будет наблюдаться одна светлая полоса ($m = 1$ в формуле (22)), но этот момент достаточно трудно определить точно. Лучше еще немного приблизить подвижный столик микроскопа так, чтобы в центре первый раз появилась темная полоса ($n = 1$ в формуле (23)). Сделайте отсчет $z_1^*(\min)$ по нониусу сбоку подвижного столика микроскопа. Еще немного приблизьте подвижный столик микроскопа так, чтобы в центре появилась светлая полоса ($m = 2$ в формуле (22)). Сделайте отсчет $z_2^*(\max)$ по нониусу. Опять немного приблизьте подвижный столик так, чтобы в центре появилась снова темная полоса ($n = 2$ в формуле (23)). Сделайте отсчет $z_2^*(\min)$ по нониусу и т. д. Разность отсчетов $z_m^*(\max)$, $z_n^*(\min)$ и z_0 и дает расстояния от щели до плоскости наблюдения $z_m(\max)$ и $z_n(\min)$, определяемые формулами (22) и (23).

Для измерения ширины щели микроскоп фокусируется на четкое изображение щели. В поле зрения окулярного микрометра видны две пересекающиеся линии (перекрестие). Резкость перекрестия достигается вращением держателя линзы окулярного микрометра. Определите, сколько делений микрометра укладывается на ширине щели. Для этого вращайте барабан окулярного микрометра и перемещайте перекрестие. Цена наименьшего деления окулярного микрометра 0,001 мм.

По результатам измерений для различных значений максимумов m и минимумов n вычислите длину волны излучения полупроводникового лазера по формулам (22) и (23). Определите среднее значение. Оцените погрешность измерений. Для проверки надежности измерений полученное значение сравните с известной длиной волны лазера. Аналогичные измерения проведите для остальных источников света.

Расширив максимально щель 4 (см. рис. 14), исследуйте дифракцию Френеля на краю экрана (полуплоскости). Зарисуйте распределение интенсивности на границе света и тени. Объясните полученную картину с помощью спирали Корню.

Изучение дифракции Фраунгофера

Включите полупроводниковый лазер. На оптической скамье вместо микроскопа 6 установите зрительную трубу 8 (см. рис. 14). Поверните оправу револьверного типа так, чтобы на пути лазерного пучка находилось пустое отверстие. С помощью окуляра зрительной трубы настройтесь на резкое изображение щели 2. Ширина щели не должна превышать 0,1 мм. *Внимание – большая ширина щели опасна для зрения.* Введите в лазерный пучок одиночную щель 4 с плавно регулируемой шириной. С помощью окулярного микрометра измерьте расстояние между симметрично расположенными дифракционными минимумами $\Delta x_p(n)$ для значений $n = \pm 1, \pm 2$ и т. д. (сколько возможно). Цена деления окулярного микрометра 0,01 мм. По формуле (31) вычислите ширину щели d для различных значений $\Delta x_p(n)$. Имейте в виду, что $x_p(n) = \Delta x_p(n)/2$. Расстояние z сделать равным фокусному

расстоянию объектива зрительной трубы $f = 325$ мм (дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости объектива зрительной трубы). Определите среднее значение. Оцените погрешность измерений. Аналогичные измерения проведите для остальных источников света (их длины волн определены в предыдущем задании). Определите взвешенное среднее значение ширины щели. Оцените погрешность этого результата. Сравните с прямыми измерениями ширины щели с помощью микроскопа.

Введите в лазерный пучок (вращая оправу револьверного типа) двойную щель. С помощью окулярного микрометра измерьте расстояние между симметрично расположенными главными максимумами $\Delta x_p(m)$ для значений $m = \pm 1, \pm 2 \dots$ и т. д. (сколько возможно). Главный максимум нулевого порядка (в центре картины) наиболее яркий. По формуле (35) вычислите расстояние между щелями D для различных значений $\Delta x_p(m)$ ($x_p(m) = \Delta x_p(m)/2$ и $z \equiv f = 325$ мм). Определите среднее значение. Оцените погрешность измерений. Аналогичные измерения проведите для остальных источников света (их длины волн определены ранее). Определите взвешенное среднее значение расстояния между щелями. Оцените погрешность этого результата. Сравните с прямыми измерениями расстояния между щелями с помощью микроскопа.

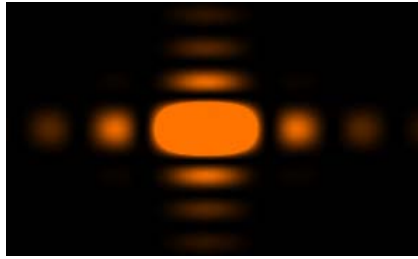
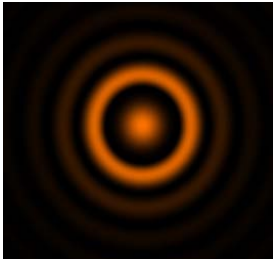
Контрольные вопросы

1. В чем заключается физическая сущность принципа Гюйгенса – Френеля?
2. Каковы условия применимости приближения Френеля?
3. Объясните изменение интенсивности в центре картины дифракции Френеля на щели при изменении расстояния до плоскости наблюдения (изменении ширины щели) с помощью спирали Корню.
4. Каковы условия наблюдения дифракции Фраунгофера? Как их можно реализовать практически?

5. В каких случаях целесообразно проводить измерения размеров объектов дифракционным методом?

6. Каков качественный вид распределения интенсивности при дифракции Фраунгофера на двух щелях, если расстояние между щелями D в два раза больше ширины щелей d ?

7. Каким дифракционным объектам соответствуют приведенные ниже картины дифракции Фраунгофера (предоставлены лабораторией демонстраций кафедры общей физики НГУ)?



Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
2. Матвеев А. Н. Оптика. М.: Высш. шк., 1985.
3. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы). М.: Наука, 1969.

ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ

Введение

Фазовая дифракционная решетка практически может быть получена, в частности, модуляцией оптической толщины d тонкой плоской прозрачной пластинки периодической функцией вдоль какого-либо направления. Оптической толщиной называется интеграл вдоль линии распространения луча l от показателя преломления среды: $d = \int n(x, y, z) dl$. В случае однородной пластинки ее оптическая толщина равна произведению ее геометрической толщины на показатель преломления материала пластинки. Модулировать оптическую толщину плоской пластинки можно, например, модулируя показатель преломления посредством изменения химического состава материала пластинки. На рис. 16 показана схема взаимодействия плоского фронта световой волны 1 с тонкой плоской пластинкой 2, оптическая толщина которой $d = hn$ модулирована вдоль оси Oy по гармоническому закону $d = d_0 + d_1 \sin(2\pi y / \Lambda)$. Здесь h – толщина пластинки, n – показатель преломления, d_0 – усредненная оптическая толщина пластинки, d_1 – амплитуда модуляции оптической толщины пластинки, Λ – пространственный период модуляции. Исходная плоская волна, в которой напряженность электрического поля направлена вдоль оси Oy – $E_y(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$ – такой пластинкой преобразуется в волну:

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \varphi_0 + \varphi \sin(2\pi y / \Lambda)).$$

Амплитуда фазовой модуляции φ пропорциональна амплитуде модуляции оптической толщины пластинки d_1 , а именно $\varphi = 2\pi n_1 h / \lambda = 2\pi d_1 / \lambda$. Здесь λ – длина световой волны. Мы далее будем рассматривать случай $\varphi \ll \pi$ ¹.

¹ Как изменится дифракционная картина в случае $\varphi > 2\pi$?

На рис. 16 условно показаны: слева – модуляция оптической толщины пластинки 2 (пропорциональна серости), справа – фронт волны, прошедшей через пластинку 3.

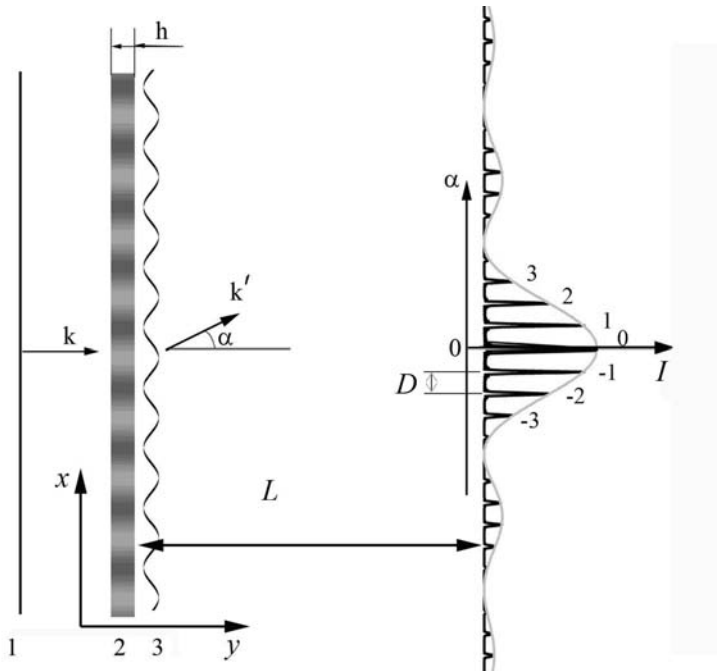


Рис. 16. Схема дифракции Фраунгофера на тонкой пластинке с модулированной по гармоническому закону оптической толщины: 1 – исходный плоский фронт; 2 – пластинка с геометрической толщиной h ; 3 – форма волнового фронта после прохождения светом пластинки; 4 – угловое распределение интенсивности света I на экране

В результате распределение интенсивности дифрагированного света в плоскости наблюдения 4 будет пропорционально квадрату произведения функций (4) и (5), как показано на рис. 16 черной кривой справа. Максимальную интенсивность имеет интерференционный максимум в нулевом порядке ($\alpha = 0$), в котором интерферируют волны с нулевой разностью хода. Боковые

максимумы возникают в результате интерференции волн с разностью хода, равной целому числу m длин волн света, называемому порядком интерференции. Порядки интерференции отсчитываются от нулевого порядка, по одну сторону от него – положительные, по другую сторону – отрицательные, как показано на рис 16. Измеряя период дифракционной картины D в фокальной плоскости, можно найти связь между периодом решетки Λ и длиной световой волны λ (при малых углах α):

$$\Lambda = \lambda f / D.$$

Оценим порядок величины Λ , при которой дифракция света видимого диапазона станет заметной. Пусть длина волны света $\lambda = 0,63$ мкм, угловая расходимость луча $\chi = 10^{-4}$ рад. Такая величина χ характерна для газовых лазеров. Дифракционная картина станет заметной, тогда когда угловое расстояние между соседними порядками будет больше угловой расходимости луча. Это условие будет выполнено при $\Lambda < \lambda / \chi = 6,3$ мм. Конечно, чтобы наблюдать дифракционную картину с узкими интерференционными порядками (изображенную на рис. 16), диаметр луча d должен быть много больше периода решетки для реализации режима многолучевой интерференции, поскольку $N \ll d / \Lambda$.

Показатель преломления среды можно изменить путем изменения плотности среды посредством сжатия или растяжения. Связь между плотностью среды и показателем преломления в изотропных средах дает, в частности, формула Лорентц – Лоренца [1–5]:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = C \rho, \quad (48)$$

где C – константа, определяемая электронной поляризуемостью вещества, ρ – плотность вещества.

Найдем связь между изменениями диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon$ в немагнитной среде ($n = \sqrt{\epsilon}$) и малыми изменениями плотности, вызванными распространением звука. Обычно в звуковой волне плотность вещества ρ колеблется с относительной амплитудой порядка $\Delta\rho / \rho \ll 10^{-4}$.

В формуле (48) заменим показатель преломления на диэлектрическую проницаемость и продифференцируем логарифм этого выражения. Получим искомую связь $\Delta\varepsilon = (\varepsilon_0 - 1)(\varepsilon_0 + 2)\Delta\rho C / 3$. Здесь ε_0 – невозмущенное значение диэлектрической постоянной.

Таким образом, распространение упругих волн сжатия в прозрачной среде сопровождается синфазным изменением показателя преломления. Период изменения показателя преломления равен длине волны.

В твердых и кристаллических телах связь между изменением параметров эллипсоида показателей преломления и деформацией существенно сложнее [6]:

$$\Delta(1/n^2)_{i,j} = \sum_{k,l} p_{i,j,k,l} e_{k,l},$$

где $e_{k,l}$ – тензор деформации в декартовых координатах, $p_{i,j,k,l}$ – упругооптический тензор (по деформации).

Согласно Бриллюэну и Мандельштамму, свет, проходя через среду, в которой распространяется звук с небольшой длиной волны, испытывает дифракцию, подобную дифракции на фазовой дифракционной решетке².

Оценим частоту ν упругой волны, распространяющуюся в воде со скоростью $a \approx 1200$ м/с, при которой можно ожидать проявления дифракции света: $\nu > a/\Lambda = 1200/6,3 \cdot 10^{-3} \approx 190$ кГц. Упругие колебания с такой частотой лежат в ультразвуковом диапазоне. Принято называть ультразвуком упругие колебания с частотой от верхней границы слышимости (≈ 20 кГц) до примерно 1 ГГц. Упругие колебания более высокой частоты называются гиперзвуком.

² В конденсированных средах – жидкостях и твердых телах, находящихся при температуре выше абсолютного нуля, всегда есть адиабатические флуктуации плотности, которые можно представить результатом интерференции упругих колебаний случайных частот, волновых векторов и фаз (*дебаевские волны*). Рассеяние света на этих колебаниях, сопровождающееся изменением его частоты, называется рассеянием Мандельштама – Бриллюэна. Этот эффект был предсказан теоретически Л. И. Мандельштамом (1918–1926) и Л. Н. Бриллюэном (Brillouin, 1922). Обнаружен в кристаллическом кварце и жидкостях Е. Ф. Гроссом в 1930 г. [7]. Эффект дифракции света на акустических колебаниях активно исследовался в 30-е годы XX века Дебаем, Раманом, Рытовым и др. [8].

Две теории дифракции света на ультразвуковых волнах

Соображения, приведенные во введении, дают лишь самые общие представления о дифракции света на упругих волнах. Процесс дифракции на акустических волнах, конечно, более сложен, чем это упрощенное представление, поскольку следует учитывать следующее:

- акустические волны порождают, вообще говоря, объемную фазовую решетку;
- акустические волны порождают нестационарную решетку, перемещающуюся в пространстве, поэтому спектр рассеянного света должен содержать компоненты, кратные частоте акустической волны;
- в случае твердых тел и кристаллов акустические волны могут быть как продольными (волны сжатия), так и поперечными (сдвиговые волны);
- показатель преломления и деформации в кристалле, вызванные упругой волной, являются тензорными величинами, которые имеют недиагональные элементы, что усложняет описание оптического взаимодействия.

Исторически существуют два принципиально различных классических подхода изучения дифракции света на когерентных упругих волнах: 1) метод дифференциальных уравнений и 2) метод интегральных уравнений. Оба метода по своему характеру дополняют друг друга; каждый метод особенно подходит для решения определенного типа задач. В тех случаях, когда подходят оба метода, они дают эквивалентные результаты. Квантовомеханический подход к решению этой задачи, основанный на рассмотрении фотон-фононных взаимодействий, в данном пособии не рассматривается.

Будем решать задачу в упрощенной постановке – без учета отражения от границ; среду, в которой распространяется упругая волна, будем считать изотропной [1, 6]. На рис. 17 показан ход лучей при оптической дифракции света на упругих волнах.

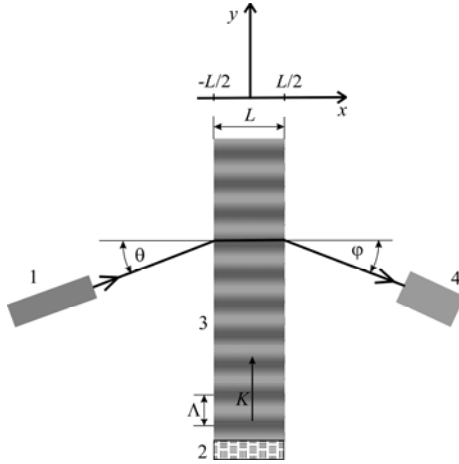


Рис. 17. Ход лучей света при оптической дифракции на упругих волнах: 1 – лазер; 2 – ультразвуковой излучатель; 3 – акустическая ячейка; 4 – фотоприемник; K – акустический волновой вектор; Λ – длина ультразвуковой волны; L – ширина ячейки; θ – угол падения; φ – угол дифракции

Метод дифференциальных уравнений основан на уравнениях Максвелла для немагнитной непроводящей среды, диэлектрическая проницаемость ε которой предполагается зависящей от координат и времени:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \cos(Ky - \Omega t), \quad (49)$$

где $K = 2\pi / \Lambda$ и Ω – угловая частота акустической волны, распространяющейся вдоль оси Oy .

Преобразуя уравнения Максвелла, получим дифференциальное уравнение для напряженности электрического поля световой волны:

$$\Delta \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon \cdot \vec{E}) = 0. \quad (50)$$

Поскольку $\vec{E} = \varepsilon \vec{E}$ и $\text{div} \vec{D} = 0$, то второй член в (50) преобразуется к виду $\text{grad}(\vec{E} \cdot \text{grad}(\ln \varepsilon))$. Этот член в $\Delta\varepsilon\lambda / \Lambda$ раз меньше первого члена в (50), и мы им пренебрегаем.

Приняв, что падающая электромагнитная волна поляризована нормально плоскости падения ($\vec{E} = (0, 0, E_z)$), и записав (50) в экспоненциальном виде, получим волновое уравнение, описывающее акустооптическое взаимодействие:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ [\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon [\exp[i(Ky - \Omega t)] - \exp[i(-Ky + \Omega t)]]] E_z \} = 0 \quad (51)$$

Решение уравнения ищем в виде суперпозиции волн, частоты которых отличаются на целое количество частот акустической волны, и y -компонента их волновых векторов так же отличается на кратное число волновых векторов акустической волны. Суммирование ведется по всем целым m , как положительным, так и отрицательным, включая $m = 0$:

$$E_z = \sum_m V_m(x) \exp \{ i[(k \sin(\theta) + mK)y + kx \cos(\theta) - (\omega + m\Omega)t] \} \quad (52)$$

На этом этапе решения задачи можно определить направления φ_m , в которых будут наблюдаться дифракционные максимумы:

$$\sin \varphi_m = \frac{k_{my}}{|k_m|} = \frac{c(k \sin \theta + mK)}{\omega + m\Omega} \approx \sin \theta + m \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad (53)$$

где k_{my} – y -компонента волнового вектора m -го порядка. При нормальном падении ($\theta = 0$) света это выражение совпадает с аналогичным выражением для углового распределения интерференционных максимумов, полученным во введении для фазовой дифракционной решетки.

Подставим это решение (52) в уравнение (51). Если амплитуда каждой дифрагированной плоской волны медленно увеличивается с расстоянием x (так, что изменение амплитуды мало на протяжении одной длины световой волны), то членами $\partial^2 V_l(x) / \partial x^2$ можно пренебречь. Кроме того, можно пренебречь членами, которые

относительно невелики, поскольку они содержат множители $\Omega/\omega \ll 1$ и $V/c \ll 1$. Группируя члены при одинаковых экспоненциальных множителях и используя подстановку $k = \omega/c$ и $K = \Omega/a$, имеем окончательные уравнения для амплитуд $V_l(x)$:

$$V'_m(x) + i\beta_m V_m(x) + \xi[V_{m+1}(x) - V_{m-1}(x)] = 0, \quad (54)$$

где $\beta_m = -Km(\sin\theta + mK/2k)/\cos\theta$, $\xi = (\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)k/(4\cos\theta)$.

Граничные условия, если пренебречь отражением света, что можно сделать при малых значениях θ , выглядят так:

$$V_0(0) = B \text{ и } V_m(0) = 0 \text{ для всех } m \neq 0.$$

Общее решение системы связанных уравнений (54) найти очень трудно. Мы рассмотрим задачу для двух конкретных предельных случаев. Во-первых, ограничившись положительными значениями m , предположим, что амплитуда упругой волны достаточно мала, что $V_{m+1} \ll V_m$ и что вначале только $V_0 \neq 0$. Уравнение для V_m можно тогда написать как:

$$V'_m(x) + i\beta_m V_m(x) + \xi V_{m-1}(x) = 0.$$

Решение этого уравнения, очевидно, выглядит следующим образом:

$$V_m(x) = -\exp(-i\beta_m x) \int_{-\infty}^x \xi V_{m-1} \exp(i\beta_m x') dx'.$$

Рассмотрим случай $m = 1$, соответствующий первому дифракционному порядку. Если амплитуда упругой волны постоянна и не равна нулю лишь в области $-L/2 < x < L/2$, тогда ξ – постоянная величина, не равная нулю только в той же области. Кроме того, поскольку $V_1 \ll V_0$, предположим, что при дифракции отклоняется пренебрежимо малая часть мощности падающего светового пучка. Таким образом, V_0 в основном постоянна по величине и амплитуда световой волны, дифрагированной в первый порядок, равна:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= -\exp(-i\beta_1 x) \xi V_0 \int_{-L/2}^{L/2} \exp(i\beta_1 x') dx' = \\ &= \xi V_0 L \exp(-i\beta_1 x) \sin(\beta_1 L/2) / (\beta_1 L/2). \end{aligned} \quad (55)$$

Так как множитель $\sin(\beta_1 L / 2) / (\beta_1 L / 2)$ велик только при $\beta_1 \approx 0$, то интенсивность дифрагированного света будет незначительной, если не выполняется условие:

$$\sin \theta = -K / 2k. \quad (56)$$

Это условие используется для определения угла брэгговской дифракции θ .

Выражение (55) определяет относительную величину интенсивности светового пучка, который отклоняется упругой волной от направления падения, т. е.

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{V_1 V_1^*}{V_0 V_0^*} = \xi^2 L^2 \frac{\sin^2(\beta_1 L / 2)}{(\beta_1 L / 2)^2}. \quad (57)$$

Максимальное значение интенсивности, дифрагированной в первый порядок, имеет место при $\theta = 0$. Из этого условия получим:

$$\left(\frac{I_1}{I_0} \right)_{\max} = \xi^2 L^2 = \left(\frac{1}{4} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{kL}{\cos \theta} \right)^2. \quad (58)$$

Известны и другие способы решения (54). Бриллюэн [9] первым решил эти уравнения. Последовательными приближениями эти уравнения решил Дэвид [10]. Вначале он нашел значение $V_0(x)$, приравняв следующие члены к нулю. Затем вычислил $V_{\pm 1}(x)$, используя значение $V_0(x)$. Этот метод вычисления интенсивностей света в дифракционных порядках хорошо работает при небольшом количестве наблюдаемых порядков.

Рассмотрим случай низких частот. В этом пределе нет необходимости предполагать, что амплитуда V_m быстро падает с ростом m . Если (54) переписать в новых переменных $\chi = 2\xi x$, то получим следующее уравнение:

$$2V'_m(\chi) + V_{m+1}(\chi) - V_{m-1}(\chi) = -i\beta_m V_m(\chi) / \xi.$$

Следуя Раману и Нату [11], положим член в правой части этого уравнения равным нулю. Результирующая система уравнений представляет собой рекуррентные соотношения, удовлетворяющие функциям Бесселя целого порядка. Если, как и выше, предположить, что только при $x = -L/2$ амплитуда $V_0 \neq 0$, а ξ постоянна и не равна нулю при $-L/2 < x < L/2$, то интенсивность волны, дифрагированной в m -й порядок, равна:

$$\frac{I_m}{I_0} = J_m^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{kL}{\cos \theta} \right). \quad (59)$$

Приближение, сделанное Раманом и Натом, т. е. $\beta_m / \xi \ll 1$:

$$\frac{\beta_m}{\xi} = 4Km \left(\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1} \cdot \left(\sin \theta + \frac{mK}{2k} \right) \ll 1 \quad (60)$$

должно выполняться при заданном значении $\Delta \varepsilon / \varepsilon_0$ в предельном случае $K \rightarrow 0$. Однако при уменьшении амплитуды упругой волны множитель $(\Delta \varepsilon / \varepsilon_0)^{-1}$ растет по величине. Поэтому можно считать, что решение уравнения (54) в функциях Бесселя наиболее применимо для дифракции света на низкочастотных упругих волнах конечной амплитуды. Дальнейшие расчеты показали, что в действительности решение Рамана – Ната в виде функций Бесселя дает завышенное значение интенсивности световых волн, дифрагированных в высшие порядки.

Кратко поясним, чем отличается метод интегральных уравнений от метода дифференциальных уравнений, использовавшийся выше.

Метод интегральных уравнений основан на том, что воздействие среды на электромагнитную волну считают эквивалентным воздействию электрических диполей, находящихся в вакууме, причем величина индуцированного в физически малом объеме (много меньше длины волны) дипольного момента пропорциональна напряженности эффективного электрического поля.

В методе интегральных уравнений предполагается, что одновременное присутствие взаимодействующих между собой звуковой и световой волн вызывает в области перекрытия волн индуцированную поляризацию электрического поля. Эта «нелинейная» индуцированная поляризация осциллирует на суммарной и разностной частотах взаимодействующих волн и представляет собой источник дифрагированного сигнала.

В основу метода положена формула, полученная при решении задачи об излучении электромагнитного поля системой осциллирующих электрических диполей. Если зависимость фазы и амплитуды плотности индуцированного дипольного момента от координат и времени описывается вектором $\vec{P}(\vec{r}, t)$, то

электрическое поле дифрагированной световой волны дается выражением:

$$\vec{E}(\vec{r}', t) = \int_v \frac{[[[\vec{P}(\vec{r}, t) \times \vec{k}'] \times \vec{k}']}{n^2} \frac{\exp(-ik'|\vec{r}' - \vec{r}|)}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV,$$

где k' – волновое число дифрагированной волны. Для ясности выражение записано со всеми переменными, значения которых характеризуют среду.

Плотность индуцированного дипольного момента на суммарной или разностной частоте двух взаимодействующих волн может быть рассчитана с помощью хорошо известного определения электрической восприимчивости $P_i = \chi_{ij} E_j$.

Дальнейшие рассуждения сопровождаются громоздкими выкладками, которые нет смысла излагать в нашем кратком описании явления дифракции света на акустических колебаниях. Заметим только, что метод интегральных уравнений имеет более прозрачный физический смысл. Общее преимущество метода интегральных уравнений заключается в том, что он позволяет рассчитать электрическое поле дифрагированного света в пределе дальнего поля по отношению к области взаимодействия световой и упругой волн.

Прежде чем перейти к практической части, поясним смысл приближений Рамана – Ната и Брэгга.

Приближение Рамана – Ната правомочно в случае низких частот (длинных акустических волн) при заданной амплитуде колебаний. Это предполагает небольшие градиенты показателя преломления вдоль направления распространения акустических волн. Фронт электромагнитной волны, распространяющейся поперек градиента показателя преломления n , разворачивается в сторону увеличения n в соответствии с законом Снелля («рефракция света»). Оценим угол поворота фронта. Пусть в акустической волне показатель преломления изменяется по гармоническому закону с амплитудой Δn . Тогда угол поворота фронта $\Delta\theta$ определяется разностью оптических путей для света, распространяющегося в сжатой и разряженной частях среды: $\Delta\theta \approx \Delta n L K \ll 1$, поскольку мы задали малую модуляцию фазы световой волны на выходе из акустооптической ячейки $\Delta n L k \ll 1$. В приближении Рамана – Ната

на выходе из акустооптической ячейки свет практически не меняет направления, так же как и в случае тонкой фазовой дифракционной решетки, описанной во введении. Поэтому это приближение еще называют приближением «тонкой решетки». Дифракционные максимумы расположены симметрично относительно нулевого порядка согласно (53).

В случае режима Брэгга, наоборот, рефракция значительна, свет отражается от градиентов показателя преломления. На рис. 18 показана диаграмма, поясняющая условия реализации режима Брэгга. Свет падает слева под углом θ к плоскости фронта акустической волны с длиной Λ и шириной L .

Для фазового согласования отраженных лучей необходимо выполнение условия $ab - ac = j\lambda$, где j – целое число. Поскольку $ab = \Lambda / \sin \theta$ и $ac = \Lambda \sin(\pi/2 - 2\theta) / \sin \theta$, то угол Брэгга ($j = 1$) определится согласно равенству $\sin \theta_B = \lambda / 2\Lambda$.

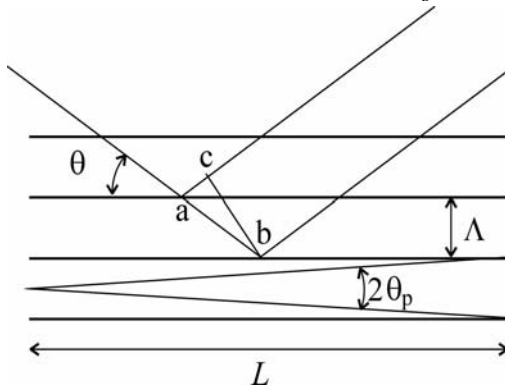


Рис. 18. К пояснению реализации условий режима Брэгга

Для того чтобы выполнялись условия режима Брэгга, отраженный свет должен пересечь большое количество периодов акустической волны. Это накладывает условие на толщину акустооптической ячейки L : $\theta_B \approx \theta_p \approx \Lambda / 2L$, или $\Lambda^2 \approx \lambda L$ (условие «толстой» решетки).

На практике вводят безразмерный параметр Q , по величине которого определяют тип режима дифракции:

$$Q = 2\pi L\lambda / \Lambda^2. \quad (61)$$

Если $Q \leq 0,3$, то осуществляется режим Рамана – Ната, если $Q \geq 4\pi$ – то режим Брэгга. Между этими значениями осуществляется переходный режим.

Примеры практического применения дифракции на ультразвуковых волнах [6]

Дифракция света на ультразвуковых волнах используется в приборах и установках, предназначенных для измерения упругих и упругооптических констант различных веществ в жидком, твердом и кристаллическом состоянии.

Например, в методе Шефера – Бергмана образец возбуждается на высоких обертонах, так что упругие волны, распространяясь по многим направлениям, образуют пространственную решетку упругих деформаций. Когда образец освещается световым пучком, получается изображение дифрагированного света, отражающее упругую симметрию кристалла и образующее картину, которую можно связать с анизотропными упругими постоянными. Большим достоинством такого метода является то, что он позволяет определить на одном образце все упругие постоянные.

Метод удобен для измерения скорости распространения звука в прозрачных веществах, модулей упругостей. Измеряя изменение интенсивности дифрагированного света вдоль распространения акустического пучка, можно определить коэффициент затухания звуковых волн, в том числе его частотную зависимость. По затуханию звуковых волн можно вычислить диссипативные характеристики среды (вязкость, теплопроводность).

По изменению спектрального состава дифрагированного света можно определить степень нелинейности модулей упругости среды. Это связано с тем, что в упруго-нелинейной среде при распространении гармонического сигнала возникают кратные и иные гармоники, наличие и интенсивность которых влияют на спектральный состав дифрагированного света.

Существуют методы визуализации акустического поля, в которых используется режим Брэгга.

Промышленно выпускаются акустооптические модуляторы света, работающие как в режиме Рамана – Ната, так и в режиме Брэгга.

Известны отклоняющие устройства, предназначенные для изменения направления распространения света, например, лазерного. Такие устройства бывают двух типов: градиентные и дифракционные. В градиентном устройстве используются низкочастотные акустические колебания, когда диаметр светового луча много меньше длины волны звука. Тогда луч отклоняется в сторону градиента показателя преломления.

В дифракционном устройстве используется явление дифракции света на ультразвуковых волнах, описанное в настоящем пособии.

Существуют и другие полезные применения эффекта дифракции света на ультразвуковых волнах.

Например, во второй половине 30-х годов XX века была разработана система проекционного телевидения. В этой системе использовалась жидкостная ячейка, в которой возбуждались упругие волны на частоте 10 МГц, модулированные по интенсивности видеосигналом. Чтобы в ячейке поместилась вся телевизионная строка, она делалась достаточно длинной и равномерно освещалась световым пучком, направленным параллельно фронту упругой волны. Недифрагированный свет отклонялся фокусировкой на светонепроницаемый экран, а дифрагированный свет, пройдя через экран, давал изображение видеосигнала.

Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
2. Бурмасов В. С., Поздняков Г. А. Лабораторная работа 2.6. Практикум по физической оптике КОФ НГУ. Новосибирск, 2006.
3. Лабораторная работа 1.2. Практикум по физической оптике КОФ НГУ. Новосибирск, 1990.
4. Лебедева В. В. Техника оптической спектроскопии. 2-е изд, перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 1986.
5. Оптические приборы: учеб. пособие / Под ред. Н. А. Маслова. Новосибирск, 2008.

6. *Физическая акустика* / Под ред. У. Мазон, Р. Терстон. М., 1974. Т. 7.
7. *Физическая энциклопедия*. 2-е изд. М., 1992. Т. 3.
8. *Рытов С. М.* Дифракция света на ультразвуке // Изв. АН СССР. 1937. Сер. физ. № 2. С. 223–236.
9. *Brillouin L.* La Diffraction de la Lumiere par des Ultrasons // Paris. Hermann et Cie. 1933. № 59. 32 P.
10. *David E.* Scattering of Light by Weak Supersonic Radiation // Phys. Z. 1937. Vol. 38. P. 587–595.
11. *Raman C. V., Nath N. S. N.* The Diffraction of Light by High Frequency sound Waves: Part. I // Proc. Indian Acad. Sci. 1935. Vol. A2. P. 406–412.
12. *Raman C. V., Nath N. S. N.* The Diffraction of Light by High Frequency sound Waves: Part/ II // Proc. Indian Acad. Sci. 1935. Vol. A2. P. 413–418.
13. *Raman C. V., Nath N. S. N.* The Diffraction of Light by High Frequency sound Waves: Part. III // Proc. Indian Acad. Sci. 1936. Vol. A3. P. 75–83.
14. *Raman C. V., Nath N. S. N.* The Diffraction of Light by High Frequency sound Waves: Part. III // Proc. Indian Acad. Sci. 1936.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.3

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ
ВОЛНАХ В ЖИДКОСТИ

Цель работы: изучение дифракции света на ультразвуковых волнах, распространяющихся в жидкости; измерение длины волны и скорости распространения ультразвуковых волн.

Внимание! *Прежде чем приступить к выполнению лабораторной работы 1.3, студент должен изучить общую теорию дифракции света, которая изложена в начале данного сборника, а также теорию дифракции света на ультразвуковых волнах.*

Оборудование: полупроводниковый лазер с длиной волны лазерного излучения 655 нм, ультразвуковая ячейка, зрительная труба с микрометрическим окуляром, цифровой осциллограф со встроенным генератором HS3, компьютер с ВЧ усилителем.

Экспериментальная установка

В работе изучается дифракция света на ультразвуковых волнах, распространяющихся перпендикулярно к его направлению. Схема установки показана на рис. 19. Полупроводниковый лазер 1 со встроенным коллиматором создает параллельный пучок света, который, проходя через ультразвуковую ячейку 2, дифрагирует на ультразвуковой волне, распространяющейся от излучателя 3 по рисунку вверх. Далее зрительная труба 6 строит в своей фокальной плоскости дифракционную картину 7 (схема) и 12 (вид). С помощью микрометрического окуляра 8 проводят измерения расстояний между дифракционными максимумами и визуально наблюдают за изменениями дифракционной картины при варьировании частоты и амплитуды ультразвуковой волны. Излучатель запитан от усилительного блока 9. Усилительный блок содержит умножитель (удвоитель) частоты и собственно усилитель мощности. На панели усилительного блока расположены разъемы для ввода сигнала с генератора *a* и для контроля выходного напряжения *б*, ручка управления напряжением смещения первого

каскада усилителя *в*. На задней панели укреплен кабель выходного сигнала (темно-серый). Цифровой осциллограф HS3 *10* подключается к одному из USB-портов компьютера. Первый канал осциллографа *I* подключен к пьезодатчику *4*, сигнал с которого пропорционален амплитуде колебаний давления в ультразвуковой волне. Второй канал *II* можно использовать для контроля напряжения, подаваемого на излучатель. Выход генератора (out) соединен с разъемом *а* усилительного блока.

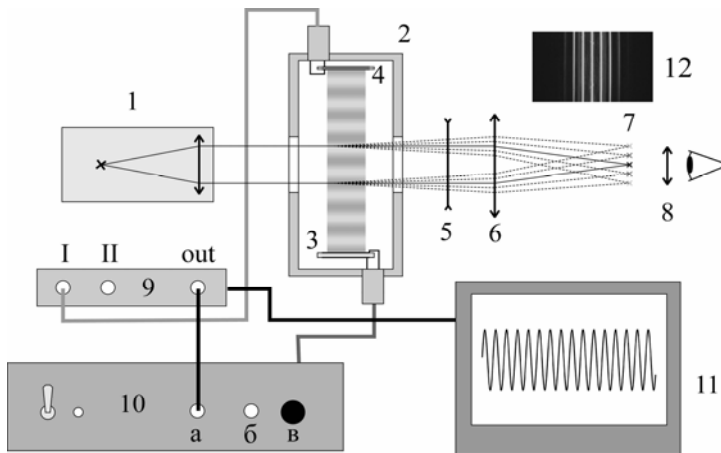


Рис. 19. Схема установки: *1* – лазер $\lambda = 655$ нм; *2* – ультразвуковая ячейка; *3* – излучатель; *4* – пьезодатчик; *5* – рассеивающая цилиндрическая линза; *6* – зрительная труба; *7*, *12* – дифракционная картина (схема и вид); *8* – окуляр-микрометр; *9* – осциллограф HS3; *10* – усилительный блок; *11* – монитор с типичным сигналом с пьезодатчика

Технические характеристики элементов установки следующие. Полупроводниковый лазер генерирует свет с длиной волны $\lambda = 655$ нм.

В качестве ультразвукового излучателя используется пьезоэлектрический диск из цирконата-титаната свинца (ЦТС) диаметром 18 мм и толщиной 0,7 мм. Плоскости диска покрыты

тонким слоем серебра так, что диск является плоским конденсатором. При подаче переменного напряжения на его обкладки толщина диска меняется пропорционально приложенному напряжению. Резонансная частота однородных колебаний толщины диска порядка 3 МГц. В процессе работы возможно возбуждение и других мод колебаний, поэтому для контроля в ячейке установлен пьезодатчик 4, по сигналу с которого можно судить о моде колебаний излучателя и интенсивности ультразвука. Датчик аналогичен излучателю, выполнен из ЦТС, имеет форму диска с диаметром 16 мм и толщиной 0,4 мм. Плоскости дисков излучателя и датчика выставлены параллельно друг другу и нормальны к оси ячейки. При выполнении работы изменением частоты, амплитуды выходного сигнала генератора и выбором напряжения смещения (вращением ручки ψ) следует добиваться сигнала с датчика, близкого по форме к гармоническому. Амплитуда сигнала с датчика пропорциональна амплитуде колебаний давления в жидкости или корню квадратному из интенсивности звука.

Фокусное расстояние зрительной трубы $f = 43,2$ см, цена деления W барабана окулярного микрометра ОМ–9 равна 0,01 мм.

При обработке результатов измерений следует обратить внимание на то, что частота сигнала, подаваемого на излучатель, в два раза выше частоты генератора. Частота удваивается в усилительном блоке для того, чтобы диапазон рабочих частот включал резонансную частоту излучателя. Верхняя частотная граница генератора прибора HS3 составляет 2 МГц, что ниже резонансной частоты излучателя (3 МГц). Наибольшая амплитуда колебаний излучателя и, соответственно, наибольшая интенсивность ультразвука и наибольшее рассеяние света будут при частоте колебаний, близких к резонансным.

На рис. 20 показан внешний вид экспериментальной установки.

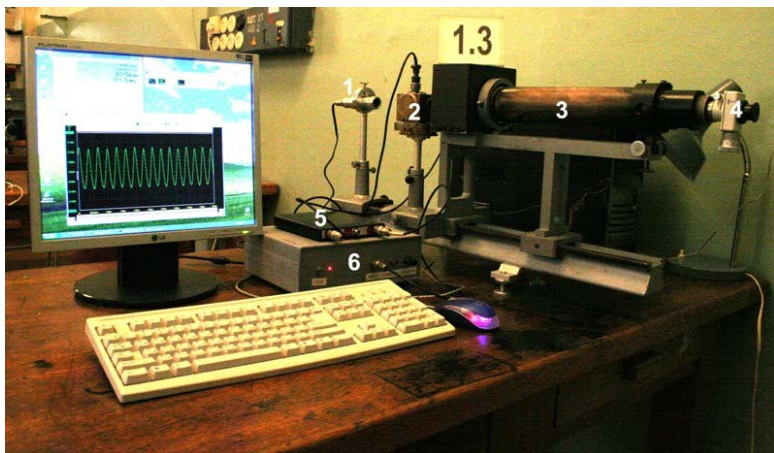


Рис. 20. Экспериментальная установка: 1 – лазер $\lambda = 655 \text{ нм}$; 2 – ультразвуковая ячейка; 3 – зрительная труба; 4 – микрометрический окуляр; 5 – осциллограф HS3; 6 – усилитель. На мониторе показан сигнал с пьезодатчика

Порядок выполнения лабораторной работы

Ознакомьтесь с описанием прибора HS3. В работе он используется как в качестве цифрового осциллографа, так и генератора синусоидальных колебаний.

Подготовить установку к измерениям, для этого требуется следующее:

1) проверить соответствие схемы электрических соединений блоков установки рис. 19;

2) запустить программу «Handyscope HS3», инициировать режимы осциллографа и генератора;

3) частоту выборок установить максимальной, чувствительность – автоматической («Авто»), вход – «закрытый» (вид сигнала – переменное напряжение);

4) установить частоту генератора около 1,5 МГц, форму сигнала – синусоидальную, амплитуду порядка 2 В;

5) включить генератор, для этого надо «кликнуть» по изображению выключателя на его панели в правом нижнем углу;

6) включить лазер;

7) убедиться, что в центре поля наблюдения в окуляре появилась вертикальная линия. В противном случае произвести юстировку оптической схемы;

8) включить усилитель. Осциллограф должен показать наличие сигнала с пьезодатчика. В окуляре должны появиться интерференционные порядки ± 1 , ± 2 и т. д., расположенные эквидистантно и симметрично относительно яркого максимума нулевого порядка, наблюдавшегося в п. 7. Вращая ячейку вокруг вертикальной оси, добиться наибольшего количества интерференционных порядков и симметричности картины.

Выполнить следующие задания.

1. Изменяя частоту генерации ν и амплитуду выходного напряжения генератора, наблюдать за изменениями картины дифракции. Составить таблицу зависимости количества наблюдаемых порядков от амплитуды сигнала с датчика. Амплитуду сигнала с датчика измерять с помощью курсоров при остановленной развертке («запомнить» сигнал).

2. Установить режим работы ячейки, при котором наблюдается максимальное количество дифракционных порядков. Вращая ячейку вокруг вертикальной оси, наблюдать за изменением картины. Составить таблицу зависимости количества наблюдаемых порядков от угла поворота ячейки.

3. Определить скорость распространения звука. Для этого проделать следующее:

а) установить режим работы ячейки, при котором наблюдается максимальное количество дифракционных порядков;

б) окулярным микрометром измерить расстояния между симметричными парами дифракционных максимумов (между порядками $+m$ и $-m$);

в) убедиться в линейной зависимости расстояния между порядками от номера порядка. Вычислить среднее расстояние D (см. рис. 3) между порядками по формуле $D = W / 2m$, где W – цена деления микрометра, I – количество делений микрометра;

г) вычислить среднюю длину волны ультразвука Λ по формуле $\Lambda = \lambda f / D$;

д) вычислить среднюю скорость распространения ультразвуковых волн в жидкости $a = \Lambda 2\nu$, где ν – частота, на

которую настроен генератор. Определить погрешность измерения скорости;

е) проделать измерения по пунктам а–е для других значений v и сравнить результаты.

Скорость распространения звука в спирте, которым заполнена ячейка, равна 1170 м/с. Если Ваш результат отличается более чем на три доверительных интервала, опыт следует повторить.

Контрольные вопросы

1. Изменится ли дифракционная картина, если в ячейке возникнет стоячая волна? Если да, то как изменится?
2. Какой режим дифракции света на ультразвуковых волнах реализуется в опыте?
3. Почему при повороте ячейки количество наблюдаемых порядков уменьшается?
4. Для чего установлена цилиндрическая линза 5 на рис. 18?

Данная установка после некоторой доработки позволяет проделать курсовую работу по теме «Исследование спектра света, рассеянного на ультразвуковой волне в жидкости».

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.4

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ В КРИСТАЛЛЕ

Цель работы: наблюдение дифракции света на ультразвуковых волнах в твердом теле в режимах Рамана – Ната и Брэгга.

Внимание! *Прежде чем приступить к выполнению лабораторной работы 1.4, студент должен изучить общую теорию дифракции света, которая изложена в начале данного сборника, а также теорию дифракции света на ультразвуковых волнах.*

Оборудование: He-Ne-лазер с длиной волны лазерного излучения 633 нм, акустооптический модулятор МЛ-201, оптический столик, экран, ВЧ генератор Г4-143, компьютер с цифровым осциллографом HS3, перемещаемый фотоприемник.

Описание экспериментальной установки

Схема установки для наблюдения дифракции света на ультразвуковых волнах, распространяющихся в стекле, показана на рис. 21.

He-Ne-лазер 1 установлен на оптическом столике, который позволяет регулировать положение лазера, а именно перемещать его поперек оптической оси вперед и назад и поворачивать вокруг вертикальной оси. Ультразвуковой акустооптический модулятор 3 типа МЛ-201 установлен на другом оптическом столике и может поворачиваться на небольшие углы как вокруг вертикальной оси вращением барабана с делениями для измерения угла поворота, так и вокруг горизонтальной оси с помощью упорного винта, установленного в нижней пластине столика в ее передней части.

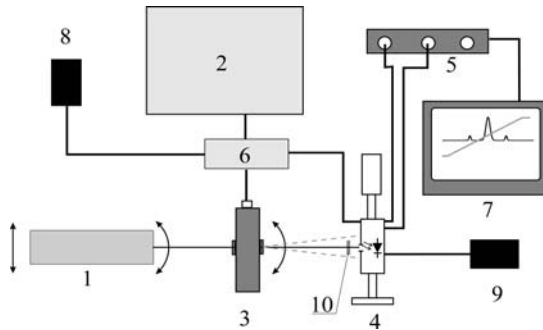


Рис. 21. Схема установки: 1 – He-Ne-лазер $\lambda = 633$ нм; 2 – генератор Г4-143; 3 – акустооптический модулятор; 4 – фотоприемник на столике с аналоговым отсчетом координаты; 5 – осциллограф HS3; 6 – усилитель мощности; 7 – монитор с примерными сигналами с фотоприемника и с датчика положения; 8, 9 – блоки питания; 10 – нейтральный фильтр для ослабления прошедшего света

Фотография модулятора со снятой крышкой 4 приведена на рис. 22. Активным элементом является звуковод 1 в виде призмы из оптического стекла марки ТФ7 с просветленными передней и задней гранями. Длина призмы $L = 25$ мм, ширина $D = 15$ мм, высота $h = 6$ мм. Акустические волны в призме возбуждаются приваренным к ней диффузионной сваркой пьезоэлектрическим преобразователем из ниобата лития (на фотографии не виден) при подаче на него переменного напряжения. Модулятор имеет разъем 2 для подачи напряжения высокой частоты и согласующие элементы 3.

Высокочастотный генератор 2 (рис. 23) типа Г4-143 имеет частотный диапазон от 25 до 400 МГц, разделенный на четыре поддиапазона. Частота сигнала указана на шкале соответствующего поддиапазона. Выходная мощность генератора может иметь величину вплоть до 1 Вт. Сигнал с генератора усиливается высокочастотным усилителем 6.

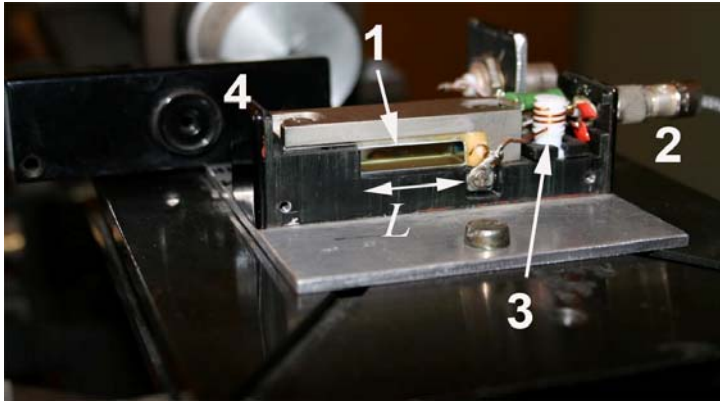


Рис. 22. Модулятор МЛ-201: 1 – звуковод; 2 – входной разъем; 3 – согласующие элементы; 4 – крышка модулятора; L – длина звуковода

Дифракционная картина регистрируется с использованием экрана, который устанавливается на рельсе перед фотоприемником 4. Измерение пространственного распределения интенсивности дифрагированного и прошедшего света проводится с помощью фотоприемника путем перемещения его поперек оптической оси в горизонтальной плоскости. Координата фотоприемника пропорциональна напряжению на датчике положения. В качестве датчика положения используется многооборотный переменный резистор, соединенный с винтом механизма перемещения фотоприемника. На резистор подается постоянное напряжение, а с его бегунка снимается напряжение, пропорциональное углу поворота оси резистора. Сигналы с фотоприемника и датчика положения регистрируются с помощью цифрового осциллографа 5 типа HS3, работающего в режиме самописца. На мониторе 7 схематично показаны эти сигналы. Интенсивность дифрагированного света на 2–3 порядка меньше интенсивности падающего света, поэтому перед фотоприемником установлен двухступенчатый нейтральный фильтр 10, вторая ступень которого ослабляет прошедший свет в 233 раза, что делает амплитуды соответствующих откликов фотодатчика соизмеримыми. Первая

ступень фильтра ослабляет свет в 15,3 раза. Фильтр склеен из двух полосок стекла типа HC9.

Высокочастотный усилитель мощности и фотоприемник с датчиком его положения питаются от отдельных блоков 8 и 9 с выходным напряжением 24 и 12 В соответственно.

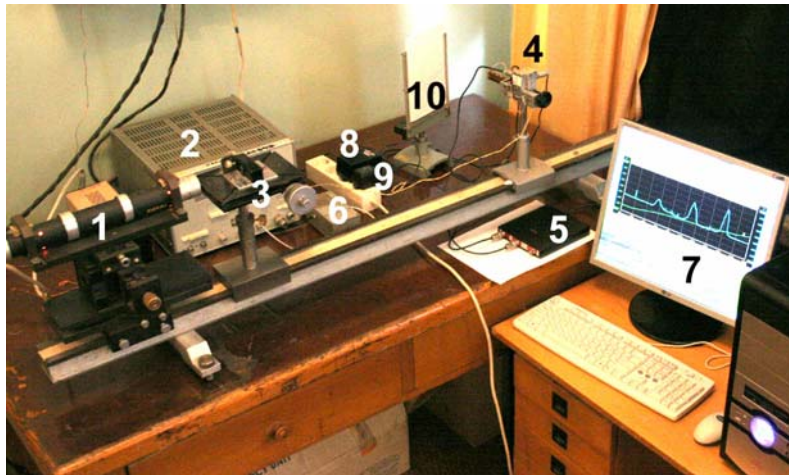


Рис. 23. Вид установки: 1 – He-Ne-лазер, 2 – генератор Г4-143; 3 – акустооптический модулятор на оптическом столике; 4 – фотоприемник на подвижке с аналоговым отсчетом координаты; 5 – осциллограф HS3; 6 – усилитель мощности; 7 – монитор с примерными сигналами с фотоприемника и с датчика положения; 8, 9 – блоки питания; 10 – экран для качественного наблюдения дифракции

Порядок выполнения лабораторной работы

Ознакомьтесь с описанием прибора HS3. В работе он используется в режиме двухканального самописца. Настройка самописца перед измерениями заключается в выборе частоты дискретизации и размера реализации (количества элементов в массиве данных), выборе чувствительности каналов и установке формата записи данных в файл. Частоту дискретизации и размер реализации следует установить такими, чтобы время сканирования дифракционной картины соответствовало времени измерений. Формат записи рекомендуется выбрать текстовым, так как в этом случае результаты могут быть загружены в любую программу для

дальнейшей обработки³. Чувствительность канала, регистрирующего положение датчика, следует установить равной 2 В. Чувствительность канала для регистрации сигнала с фотодатчика установить равной 0,8 или 0,4 В. Регистрация сигналов инициируется нажатием кнопки «Пуск», после чего плавным вращением винта перемещения фотодатчика сканируется дифракционная картина.

Получаемые в процессе работы файлы следует записывать во временную папку для последующей обработки. Рекомендуется использовать возможность записи комментариев в поле самописца, в которых следует отражать условия проведения соответствующих измерений.

Перед началом работы необходимо убедиться в соответствии соединений схеме, изображенной на рис. 21.

Выполните следующие действия:

1. Включите лазер и установите экран перед фотоприемником.
2. Убедитесь в том, что луч лазера проходит через центр входного отверстия модулятора и падает нормально на грань звукопровода, т. е. отраженный от нее свет попадает в выходное окно лазера. Луч на экране должен давать круглое пятно.
3. В случае необходимости настройте схему, используя винты перемещения столика, на котором установлен лазер и винты перемещения столика с модулятором.
4. Включите генератор Г4-143 и блок питания 8 усилителя 6 в сетевую розетку.
5. Установите частоту в диапазоне 30–40 МГц, добиваясь локального максимума амплитуды выходного сигнала с помощью стрелочного прибора, расположенного внизу на панели генератора.

³ Тип файла записи данных устанавливается в пункте меню «Файл» → «Тип файла данных» → «Двоичный» или «ASCII». Следует установить галочку напротив «ASCII». Если данные были уже записаны в другой кодировке, последнюю кодировку можно изменить. Для этого надо восстановить эти данные, используя пункт меню «Прочитать сигнал с диска...». В результате на экране появится соответствующий сигнал. Затем, изменив тип файла, записать данные снова.

6. На экране должны появиться пятна дифрагированного света вправо и влево от пятна прошедшего луча. Регулируя наклон столика модулятора и поворачивая его вокруг вертикальной оси, добиться максимальной интенсивности дифрагированного света и симметричности картины. На рис. 23 показан типичный вид дифракционной картины, которая должна наблюдаться после выполнения указанных выше рекомендаций.

7. Запустить программу «Handyscope HS3», инициировать режим самописца.

8. Частоту выборок рекомендуется установить 0,02 с, размер реализации – 1000, чувствительности каналов – как рекомендовано в начале описания работы.

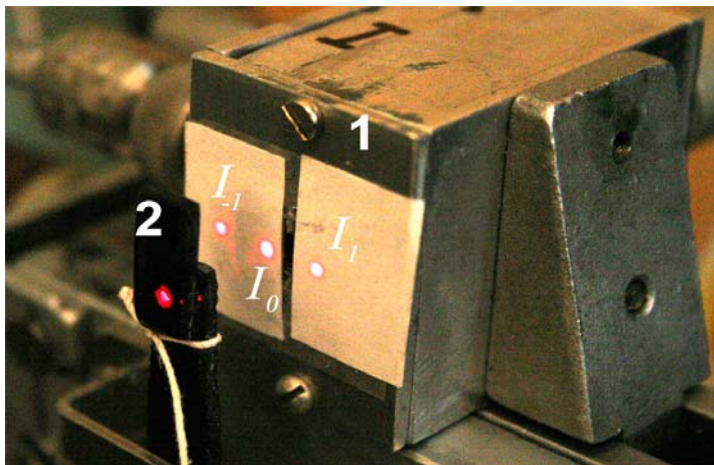


Рис. 24. Вид дифракционной картины в режиме Рамана – Ната: 1 – корпус фотоприемника; 2 – двухступенчатый нейтральный фильтр. Свет проходит через вторую ступень: I_0 – ослабленный недифрагированный луч; I_1 , I_{-1} – первые дифракционные порядки (отрицательный и положительный)

9. Включите блок питания фотоприемника 9 в сетевую розетку и проведите пробную регистрацию сигналов с перемещением фотоприемника на известное расстояние L . На экране монитора появится наклонная линия сигнала с датчика положения, как показано на рис. 24. Измеряя разность между минимальным и

максимальным значениями напряжения ΔU с датчика положения, вычислить переходной коэффициент β для вычисления координаты фотоприемника по сигналу с датчика положения $\beta = L / \Delta U$.

После этого можно приступить к выполнению заданий.

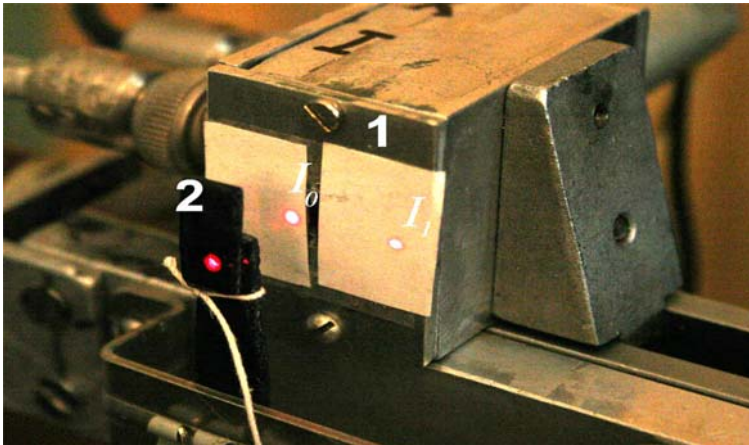


Рис. 25. Дифракция света в режиме Брэгга: 1 – корпус фотоприемника; 2 – двухступенчатый нейтральный фильтр. Свет проходит через вторую ступень: I_0 – ослабленный недифрагированный луч; I_1 – дифрагированный луч

Контрольные вопросы

1. Изменяя частоту генератора ν от переходной к режиму Брэгга до 240 МГц и углы поворота модулятора вокруг вертикальной оси, наблюдать за изменениями дифракционной картины на экране. Обратит внимание на последовательное появление двух брэгговских бликов по одну сторону от прошедшего луча. Записать несколько (3–5) значений частоты, при которых наблюдаются наиболее яркие дифракционные максимумы.

2. Убрать экран и для выбранных значений частот произвести регистрацию распределения интенсивности света.

3. Построить зависимости угла между дифракционными максимумами (первого и отдельно второго) и прошедшим лучом от

частоты. Сравнить с теоретическим значением угла Брэгга для этих частот.

4. Существует ли верхний предел диапазона частот акустических колебаний, когда возможен режим Брэгга? Если да, то чему он равен для данной установки? Показатель преломления стекла ТФ7 принять равным 1,5.

5. Почему при повороте ячейки, работающей в режиме Рамана – Ната, изменяется дифракционная картина, а количество порядков уменьшается?

6. Как изменяется дифракционная картина при повороте ячейки вокруг вертикальной оси в переходном режиме?

7. В каком режиме работает ячейка 3 на рис. 23 (центральный максимум соответствует недифрагированному лучу)?

8. Объяснить последовательное появление двух бликов в режиме Брэгга при повороте модулятора вокруг вертикальной оси.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.5

ДИФРАКЦИЯ И ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ
В КОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ

Цель работы: изучение явления дифракции когерентного света с использованием простейших дифракционных оптических элементов (ДОО), представляющих собой одномерные или двумерные аксиально-симметричные решетки. Наблюдение преобразования световой волны с использованием метода Фурье-оптики, измерение некоторых характеристик ДОО.

Наиболее распространённый вид извлечения информации об исследуемых объектах посредством анализа (обработки) их изображений – фильтрация изображений, средствами которой решаются задачи улучшения качества размытых и зашумлённых изображений, визуализации структуры фазовых объектов и т. д. Устройства, используемые для этих целей, называются оптическими процессорами пространственно-частотной фильтрации [1, 2]. Здесь для краткости мы будем называть их просто оптическими процессорами (ОП). Определяющей составной частью ОП являются линзы. Они используются не только для формирования и передачи изображения объекта, но и для разложения в пространственный спектр Фурье обрабатываемого изображения. Такое разложение становится возможным, если для освещения используется когерентное излучение.

Оптические процессоры

В оптических процессорах плоское изображение объекта на его входе (транспарант) с помощью линзовой системы преобразуется в изображение на выходе. Отличие процессора от оптической системы передачи изображения состоит в том, что в промежутке между входным и выходным изображениями формируется пространственный Фурье-спектр функции пропускания транспаранта. На спектр можно воздействовать с помощью фильтра и таким образом изменять изображение транспаранта на выходе процессора. Без фильтрации оптическая система процессора может быть легко рассчитана по формулам геометрической оптики. Более

сложным является вопрос формирования спектра Фурье, его локализация и определение масштаба преобразования. Некоторые аспекты этого вопроса разобраны в приложении для физиков, помещённом в конце данного раздела. Здесь приводятся только основные результаты. Общая схема устройства для получения пространственного преобразования Фурье с помощью линзы Фурье-процессора приведена на рис. 26.

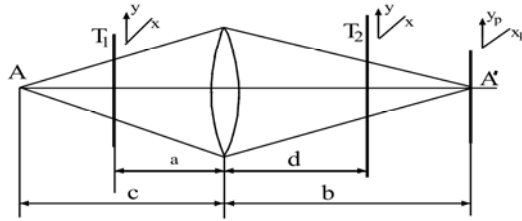


Рис. 26. Оптическая схема Фурье-процессора

Излучение точечного монохроматического источника света А, расположенного на оси АА' на расстоянии c от линзы, фокусируется с её помощью в точке А'. Длины отрезков c и b связаны формулой тонкой линзы: $c^{-1} + b^{-1} = f^{-1}$, где f – фокусное расстояние линзы. Транспарант может находиться либо в положении T_1 , либо в положении T_2 . В любом случае Фурье-спектр функции пропускания транспаранта формируется в плоскости Р, перпендикулярной оси системы и проходящей через точку А'. При этом от положения транспаранта будет зависеть масштаб преобразования Фурье. Координаты x_p, y_p в плоскости Р оказываются связанными с пространственными частотами ν_x, ν_y в положении транспаранта T_1 соотношениями

$$x_p = \frac{\nu_x \cdot \lambda f (c - a)}{c - f}, \quad y_p = \frac{\nu_y \cdot \lambda f (c - a)}{c - f}, \quad (62)$$

и в положении T_2 соотношениями

$$x_p = \nu_x \lambda (b - d), \quad y_p = \nu_y \lambda (b - d). \quad (63)$$

Пространственные частоты, имеющие размерность обратной длины, названы по аналогии с частотами для преобразования Фурье

во временной области. Более мелким деталям на транспаранте соответствуют большие пространственные частоты. Характерную ширину спектра $\Delta\nu_x$ для объекта с размером x_0 можно оценить из соотношения неопределённости: $\Delta\nu_x x_0 \sim I$. Как известно, спектр Фурье одиночного объекта непрерывен, а спектр периодической структуры – дискретен, причём его компоненты кратны основной частоте $\nu_0 = 1/D_0$, где D_0 – период структуры транспаранта. Эти и другие свойства преобразования Фурье подробно описаны в работах [3, 4].

Рассмотрим амплитудную гармоническую решётку.

Пусть функция пропускания транспаранта имеет только одну пространственную гармонику ν_y :

$$t(y) = t_0 + t_1 \cos 2\pi\nu_y y. \quad (64)$$

Если амплитуда плоской волны $a_0 e^{ikz}$ перед транспарантом равна a_0 , то амплитуда a_1 сразу за транспарантом определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1(y) &= a_0 t(y) = a_0 t_0 + a_0 t_1 \cos 2\pi\nu_y y = \\ &= a_0 t_0 + \frac{1}{2} a_0 t_1 \exp(2\pi i \nu_y y) + \frac{1}{2} a_0 t_1 \exp(-2\pi i \nu_y y). \end{aligned} \quad (65)$$

Укажем физический смысл каждого члена выражения (65). Первый член соответствует плоской волне с амплитудой $a_0 t_0$, распространяющейся в первоначальном направлении. Два других члена

$$\frac{1}{2} a_0 t_1 \exp\left[-2\pi i \left(\frac{z}{\lambda} - \nu_y \cdot y\right)\right] \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} a_0 t_1 \exp\left[-2\pi i \left(\frac{z}{\lambda} + \nu_y \cdot y\right)\right]$$

описывают две плоские волны, возникшие в результате дифракции на решётке. Направления распространения этих волн составляют углы $\theta = \pm \nu_y \lambda$ с осью z . Схема дифракции плоской волны на гармонической решётке приведена на рис. 27.

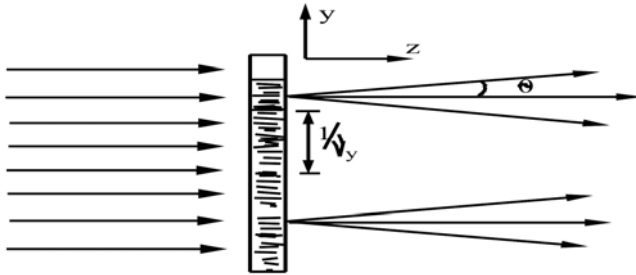


Рис. 27. Дифракция плоской волны на гармонической решётке

Функция пропускания амплитудной решетки с прямоугольным профилем штриха $t(x)$ показана на рис. 28.

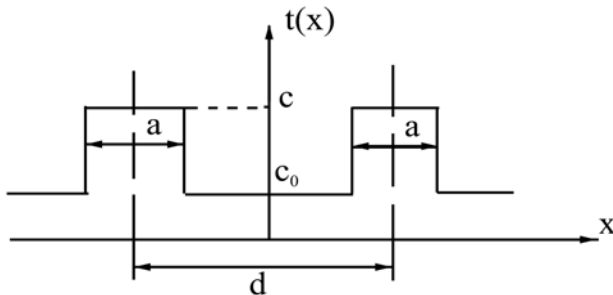


Рис. 28. Функция пропускания решётки с прямоугольным профилем штриха

Проведём разложение $t(x)$ в ряд Фурье:

$$t(x) = t_0 + \sum_1^{\infty} t_n \cos 2\pi n \nu_x \cdot x. \quad (66)$$

Амплитуды гармоник находятся по известным формулам:

$$t_0 = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} t(x) dx$$

$$t_n = \frac{2}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} t(x) \cos(2\pi n v_x x) dx,$$
(67)

где $v_x = 1/d$. В результате получим следующие величины интенсивностей компонент пространственного спектра:

$$t_0^2 = \left[c_0 + \frac{a}{d} (c - c_0) \right]^2$$

$$t_n^2 = 4 \frac{(c - c_0)^2}{\pi^2 n^2} \sin^2 \left[\left(\frac{d - a}{d} \right) \pi n \right].$$
(68)

Из формулы (68) следует, что для амплитудной решётки всегда существует нулевой порядок, а интенсивность дифрагированного света максимальна при ширине штриха, равной половине периода решётки $a = d/2$. При этом отсутствуют чётные порядки дифракции. Интенсивности гармоник убывают пропорционально квадрату их номеров. Изображение одномерной амплитудной решётки и её спектр, формирующийся в плоскости Р, показаны на рис. 29.

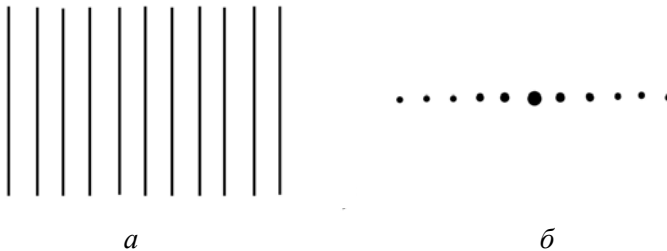


Рис. 29. Одномерная амплитудная решётка (*a*) и её пространственный спектр (*б*) в виде дифракционной картины в плоскости Р

Существуют и другие варианты схем оптических процессоров. Простые ОП могут быть однолинзовыми и двухлинзовыми. Оптическая схема однолинзового процессора при освещении

транспаранта расходящейся (или плоской) волной показана на рис. 30. Оптическая схема ОП при освещении транспаранта сходящейся сферической волной показана на рис. 31. Пространственный Фурье-спектр функции пропускания транспаранта формируется в плоскости фильтра, проходящей либо через точку A_1 – изображения точечного источника света A (см. рис. 30), либо через точку B на оси, в которую сходится сферическая волна, освещающая транспарант (см. рис. 31). Изображение транспаранта строится в плоскости P по законам геометрической оптики. Обработка изображения производится с помощью пространственного фильтра, находящегося в плоскости фильтрации.

Рассмотренный однолинзовый процессор на рис. 26 осуществляет преобразование Фурье в плоскости фильтрации с искажающим фазовым множителем (см. приложение для физиков). Это обстоятельство несущественно, если представляет интерес только Фурье-спектр амплитуд, для случая использования как амплитудного фильтра.

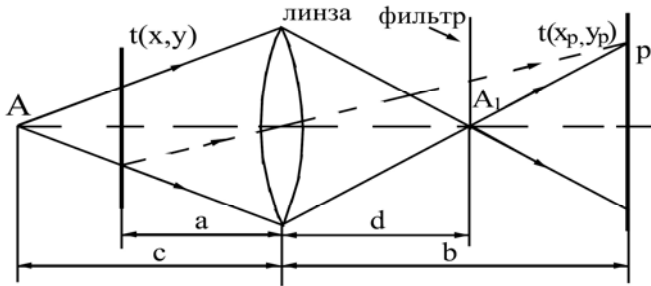


Рис. 30. Схема однолинзового процессора при освещении транспаранта $t(x,y)$ расходящейся сферической волной. При $c = \infty$ $d = f$ – освещение плоской волной

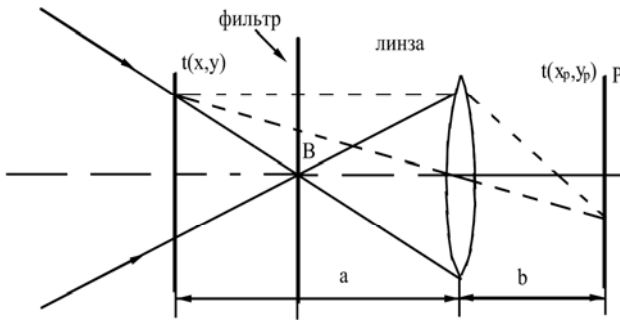


Рис. 31. Схема однолинзового процессора при освещении транспаранта $t(x, y)$ сходящейся сферической волной

Если необходимо осуществить точное преобразование Фурье без фазового искажения, то нужно использовать двухлинзовые процессоры. Оптическая схема одного из них показана на рис. 32.

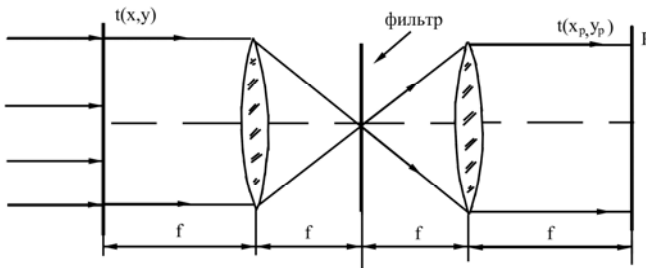


Рис. 32. Схема двухлинзового процессора для точного преобразования Фурье

Рассмотрим обработку изображений с помощью простейших фильтров.

Фильтр низких частот.

В одномерном случае фильтром низких частот может служить щель в Фурье-плоскости, в двумерном случае – отверстие малого размера.

В качестве одного из примеров использования низкочастотной фильтрации могут быть эксперименты Аббе (1873 г.) и Портера

(1906 г.) – первые опыты по пространственной фильтрации изображений [1, 3]. Используем транспарант в виде двумерной амплитудной решётки с прямоугольным профилем штриха (рис. 33, *а*). В плоскости фильтрации формируется пространственный двумерный спектр решётки в виде дифракционной картины в плоскости Р, показанной на рис. 33, *б*.

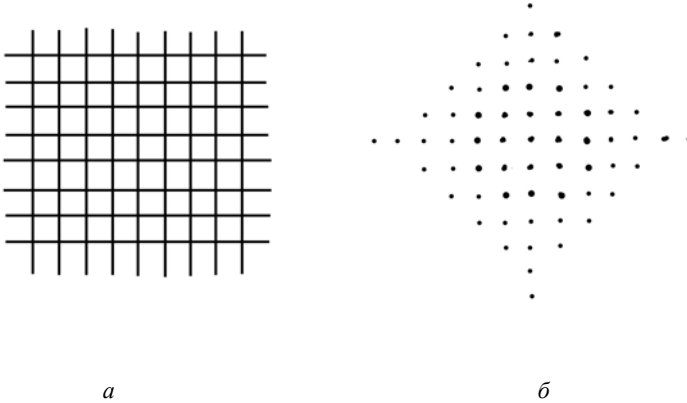


Рис. 33. Двумерная решетка (*а*) и ее пространственный спектр (*б*)

Если с помощью щели выделить только часть спектра, соответствующую одномерной решётке (см. рис. 29, *а*), то в плоскости Р на выходе процессора получится изображение одномерной решётки (см. рис. 29, *б*). Важно отметить, что в этих условиях направление штрихов в изображении, перпендикулярном оси щели, зависит только от наклона оси щели, но не от направления штрихов в исходном транспаранте.

Вторым примером использования низкочастотного фильтра может служить метод исправления помех малого размера на изображении с крупными деталями. Мелкими помехами могут быть царапины, точки, «снег» на изображении или периодическая структура самого транспаранта, как в случае типографского способа его изготовления. Поскольку в этих случаях пространственный спектр шумов лежит в высокочастотной области, низкочастотный фильтр оказывается эффективным для их подавления, как показано на рис. 34.

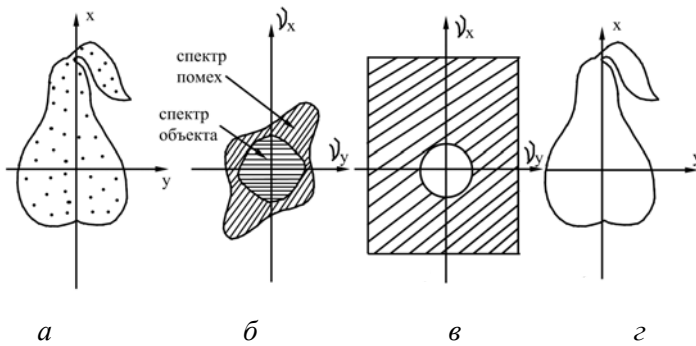


Рис. 34. Отстройка от «снега» с помощью низкочастотного фильтра: *а* – объект с помехой, *б* – спектр объекта с помехой, *в* – низкочастотный фильтр, *г* – отфильтрованное изображение объекта

Фильтр высоких частот.

В качестве фильтра высоких частот можно использовать так называемый режекторный фильтр. Этот фильтр задерживает низкие пространственные частоты и пропускает высокие. Рассмотрим некоторые примеры использования такого фильтра.

Одним из них является визуализация фазовых объектов. Для этой цели используем фазовый транспарант, т. е. транспарант, изменяющий только фазу проходящей сквозь него световой волны, представляет собой прозрачную пластину, на которой имеются оптические неоднородности. Такие неоднородности, искажающие волновой фронт проходящего света, могут вызываться изменениями либо в толщине пластины, либо в величине показателя преломления материала, связанными, например, с механическими напряжениями. В изображении транспаранта фазовые неоднородности практически незаметны, однако они приводят к появлению в пространственном спектре транспаранта высокочастотных «крыльев». Функция пропускания транспаранта задаётся в этом случае комплексной функцией, Фурье-образ которой, вообще говоря, комплексный. В этой работе нас интересуют только интенсивности, т. е. модули спектральных компонент спектра. Протяжённость спектра и интенсивность его составляющих зависят от размера и количества неоднородностей, а также от величины фазовых сдвигов на них.

Режекторный фильтр, задерживая низкочастотную часть спектра, связанную с дифракцией на апертуре транспаранта, пропускает высокочастотную часть, обязанную наличию сравнительно мелких фазовых деталей. В результате в плоскости Р мы увидим чёткие светлые изображения фазовых неоднородностей на тёмном фоне.

Оконтуривание объектов.

Рассмотрим амплитудный транспарант с изображениями примерно одного размера, но отличающихся друг от друга степенью резкости границ, и сравним их пространственные спектры (см. рис. 34).

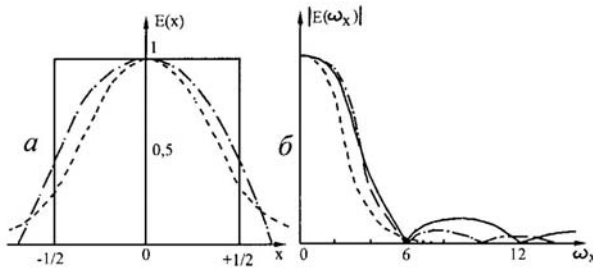


Рис. 35. Амплитудные функции пропускания транспарантов $E(x)$ (а) и их пространственные спектры (б)

Из рис. 35 видно, что для объектов с более резкой границей пространственный спектр шире. Этот факт следует из соотношения неопределённости: $\Delta x \cdot \Delta \nu_x = 1$, где Δx – характерный пространственный размер (граница изображения), а $\Delta \nu_x$ – ширина пространственного спектра. Принимая во внимание эти рассуждения, можно заключить, что использование режекторного фильтра достаточной ширины для объекта с резкими краями позволит сохранить только высокочастотные составляющие спектра. В результате этого на выходе процессора освещёнными кажутся только контуры объекта.

Экспериментальная установка

Внешний вид экспериментальной установки показан на рис. 36.

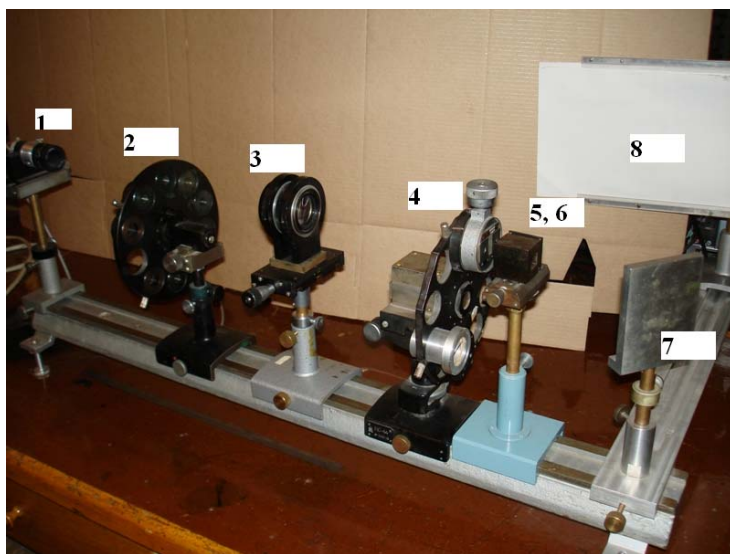


Рис. 36. Внешний вид экспериментальной установки для изучения дифракции света и фильтрации изображений в когерентном свете: 1 – полупроводниковый лазер – с телескопом; 2 – револьверный диск с транспарантами; 3 – объектив; 4 – револьверный диск с фильтрами; 5, 6 – делитель пучка с объективом; 7 – поворотное зеркало; 8 – экраны 1 и 2

Оптическая схема устройства для изучения дифракции света и фильтрации изображений показана на рис. 37.

Порядок выполнения лабораторной работы

Данная лабораторная работа выполняется только в схеме с освещением транспаранта параллельным пучком лазерного излучения, поэтому не допускается никакой настройки оптической системы. Все оптические элементы в своих оправах расставлены на оптической скамье на строго определенных расстояниях и по центру лазерного пучка в соответствии со схемой на рис. 37.

этой плоскости располагается револьверный диск 4, в котором установлены фильтры в виде щели или нити. Для удобства наблюдения пространственных спектров плоскость фильтрации с увеличением отображается на экране 1, с помощью светоделителя 5 и линзы Л₄. Изображение транспаранта с использованием поворотного зеркала 6 и линзы Л₅ проецируется в плоскость Р на экране 2.

С помощью перемещения светоделителя 5, жёстко соединённого с объективом Л₄, получают чёткое изображение краёв щели на экране. Выделение нужного участка пространственного спектра достигается изменением полосы пропускания низкочастотного фильтра и перемещением фильтров 4 перпендикулярно оптической оси.

Задания

1. Данная лабораторная работа выполняется по одной схеме, показанной на рис. 37, в параллельном лазерном пучке с равномерным освещением транспаранта.
2. Используя в револьверном диске 2 в качестве транспарантов одномерные и двумерные решетки, провести эксперименты по фильтрации изображений, рассмотренные в работе.
3. Используя в револьверном диске 2 в качестве транспаранта маски с надписью «ОПТИКА», получить на экране 2 изображение оконтуренных букв этого слова.

Контрольные вопросы

1. Каковы ограничения на когерентность источника света в процессоре обработки изображений?
2. Предложите эксперименты с оптическими процессорами обработки изображений.

ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ФИЗИКОВ

Оптическое преобразование Фурье с помощью линз

Для изучения работы различных устройств, осуществляющих оптическое преобразование Фурье (Фурье-процессоров), необходимо знать два основных соотношения:

1) преобразование Френеля, связывающее напряжённости поля электромагнитной волны в двух плоскостях, разделённых слоем свободного пространства (рис. 38) [3]:

$$\vec{E}(x_p, y_p, z) \approx \frac{1}{i\lambda z} \exp(ikz) \int \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(x, y) \exp \left[\left(\frac{K}{2z} \right) (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \right] dx dy; \quad (\text{П.1})$$

2) функцию пропускания тонкой линзы [3]:

$$F(x_l, y_l) = \exp \left[iK(x_l^2 + y_l^2)/2f \right], \quad (\text{П.2})$$

где f – фокусное расстояние линзы, x_l, y_l – координаты в плоскости линзы.

Выражение (П.2) определяет изменение фазы электромагнитной волны после прохождения линзы. Рассмотрим сначала простейший случай: плоская электромагнитная волна единичной амплитуды освещает тонкий транспарант с функцией пропускания $t(x, y)$ (рис. 39).

Световое поле перед линзой $E(x_l, y_l)$ связано с полем на транспаранте соотношением (П.1) при $z = a$. Поле сразу за линзой $E'(x_l, y_l)$ находим, используя соотношение (П.2):

$$E_l(x_l, y_l) = E(x_l, y_l) F(x_l, y_l) = \frac{1}{i\lambda a} e^{-ika} \int \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) \exp \left\{ ik \left[\frac{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}{2a} \right] \frac{x_l^2 + y_l^2}{2f} \right\} dx_l dy_l. \quad (\text{П.3})$$

Для получения светового поля в плоскости Р нужно E_l снова подставить в (П.1) при $z = b$:

$$E_p(x_p, y_p) = \frac{1}{i\lambda b} \int_{-\infty}^{+\infty} \int E(x, y) \exp\left\{\frac{ik}{2b}[(x_l - x_p)^2 + (y_l - y_p)^2]\right\} dx_l dy_l \quad (\text{П.4})$$

Выполняя интегрирование по x_l, y_l , получим:

$$E_e(x_p, y_p) = -\frac{s}{i\lambda ab} \exp\left[-\frac{k}{2b}\left(1 - \frac{s}{b}\right)(x^2 + y^2)\right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int t(x, y) \exp\left\{-i\frac{k}{2}\left[\left(1 - \frac{s}{a}\right)\frac{x^2 + y^2}{a} - \frac{2s}{ab}(x_p x + y_p y)\right]\right\} dx dy. \quad (\text{П.5})$$

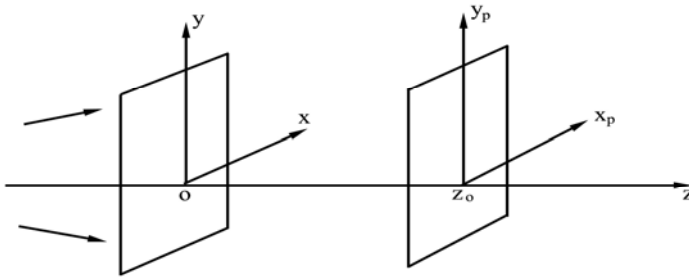


Рис. 38. Схема поясняющая формулу (П.1) для преобразования Фурье

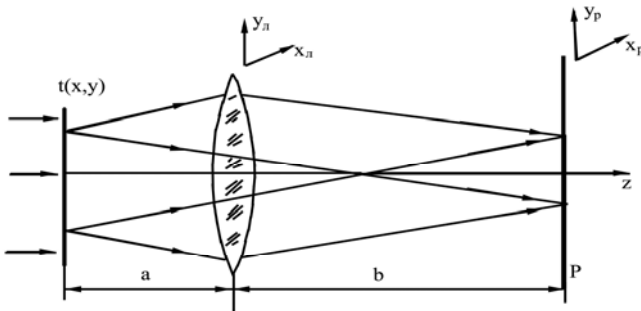


Рис. 39. Схема простейшего Фурье-процессора

Можно заметить, что интеграл в (П.6) представляет собой Фурье-преобразование функции пропускания транспаранта. Квадратичный фазовый множитель, стоящий перед интегралом, описывает параболическое искривление волнового фронта в Фурье-

плоскости. В ряде случаев, например при чисто амплитудной фильтрации, когда фильтр воздействует только на амплитуду волны, наличие фазового множителя не существенно. Если же в Фурье-плоскости необходимо иметь точное преобразование без фазовых искажений, то применяют компенсацию, помещая в Фурье-плоскости линзу, или выбирают расстояния от транспаранта до линзы равным фокусному расстоянию ($a = f$) ((П.6)).

Пусть теперь транспарант помещён на расстоянии d за линзой и, следовательно, освещается сферической сходящейся волной (рис. 31). Сразу за транспарантом поле сходящейся в точку А сферической волны представляется так:

$$E(x, y) = E_0 / (f - d) \exp \left[-i \frac{k}{z(f - d)} (x^2 + y^2) \right] \cdot t(x, y) \quad (\text{П.7})$$

Изменение поля в результате прохождения участка свободного пространства длины $(f - d)$ опять определяется преобразованием Френеля (П.1). В результате подстановки (П.7) в (П.1) получаем преобразование Фурье-функции пропускания транспаранта:

$$E(x_p, y_p) = \frac{F_0}{f - d} \exp i k (f - d) \exp \left[i \frac{k}{2(f - d)} (x_p^2 + y_p^2) \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int t(x, y) \exp \left[-i \left(\frac{kx_p}{f - d} x + \frac{ky_p}{f - d} y \right) \right] dx dy. \quad (\text{П.8})$$

Из выражения (П.8) видно, что пространственные частоты преобразования Фурье задаются выражениями

$$\nu_x = \frac{xp}{\lambda(f - d)} \quad \text{и} \quad \nu_y = \frac{yp}{\lambda(f - d)} \quad (\text{П.9})$$

и уменьшаются с удалением транспаранта от точки фокусировки сходящейся волны.

Следует заметить, что для тонкой линзы с фокусным расстоянием f свет фокусируется на расстоянии f только в том случае, если на линзу падает плоская волна, т. е. точечный источник света находится на бесконечности. Если точечный источник находится на конечном расстоянии C , то расстояние от линзы до точки фокусировки даётся формулой тонкой линзы: $c^{-1} + b^{-1} = f^{-1}$. При этом в формулах (П.7) и (П.8) $(f - d)$ заменяется на $(b - c)$.

Рассмотрим теперь вариант выполнения преобразования Фурье при освещении транспаранта расходящейся сферической волной (рис. 40).

Непосредственно за транспарантом распределение светового поля имеет вид

$$E(x, y) = \frac{E_0}{c-a} \exp \left[-\frac{ik}{2(c-a)}(x^2 + y^2) \right] t(x, y). \quad (\text{П.11})$$

Подставив выражение (П.2) вместо $t(x, y)$ в формулу (П.5), получим:

$$\begin{aligned} E(x_p, y_p) = & \frac{E_0 s}{i \lambda a b} (c-a) \exp \left[-i \frac{k}{2b} \left(1 - \frac{s}{b} \right) (x_p^2 + y_p^2) \right] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int t(x, y) \exp \left\{ -\frac{ik}{2} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{s}{a^2} + \frac{1}{c-a} \right) (x^2 + y^2) - \frac{2s}{ad} (zx_p + yy_p) \right] \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

где $S^{-1} = a^{-1} + b^{-1} - f^{-1}$.

Если расстояния c и b связаны между собой формулой тонкой линзы (т. е. в точке A' находится изображение точечного источника A), то

$$\begin{aligned} E(x_p, y_p) = & \frac{u_0(c-f)}{i \lambda f(c-a)^2} \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{(f-a)(c-f)}{f^2(c-a)} (x_p^2 + y_p^2) \right] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int t(x, y) \exp \left[-ik \frac{c-f}{f(c-a)} (xx_p + yy_p) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Отсюда видно, что при освещении транспаранта сферической волной от точечного источника Фурье-образ $t(x, y)$ определяется формулой (62).

Задания

1. Собрать схему с транспарантами, освещаемыми параллельным пучком света (рис. 37). Объектив ЛЗ при этом не используется. Простым методом контроля параллельности пучка света является неизменность его размеров после телескопа 1. (При проведении контроля свет проходит через пустое отверстие в диске 2 с

транспарантами.) Затем устанавливается объектив 3, как это описано в предыдущем разделе. Вводится в пучок света транспарант и проверяется, что передвижение транспаранта 2 вдоль рельса между 1 и 3 не меняет фокусировки Фурье-спектров на экране 8. При таком передвижении транспарантов остаётся неизменным масштаб спектра, т. е. расстояние на экране 8 между порядками дифракции, имеющими вид ярких точек. Передвижение стойки с транспарантами влияет только на фокусировку изображения самих транспарантов на экране 8, или на дополнительном экране именно с целью фокусировки изображения транспарантов при их смене следует слегка передвинуть стойку.

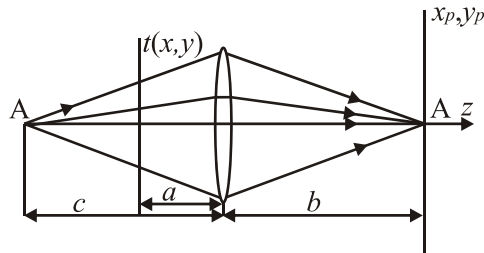


Рис. 40. Схема Фурье-процессора с освещением транспаранта расходящейся сферической волной

2. Последовательно устанавливая различные транспаранты (решётки) и получая их спектры, выполнить следующие задания.

2.1. Измерить расстояние между порядками дифракции (x_p, y_p) и, зная фокусное расстояние объектива 3 $f = 18$ см, определить периоды решёток по формулам $T_x = f \frac{\lambda}{x_p}$, $T_y = f \frac{\lambda}{y_p}$. Для

измерения расстояний x_p, y_p использовать щель с ценой 1 деления микровинта 10 мкм. Последовательно закрывая порядки дифракции ножами щели, записывать разницу показаний микровинта. Иметь в виду, что закрытое положение щели может не соответствовать нулю шкалы микровинта, поэтому удобнее использовать разницу показаний.

2.2. Провести качественное сопоставление распределения интенсивностей разных порядков дифракции со структурами транспарантов.

2.3. На двумерном транспаранте, дающем наиболее яркое изображение, провести опыт по фильтрации изображения. Для этого открыть щель на ширину, достаточную для пропускания одного, самого яркого ряда из двумерного спектра транспаранта. Убедиться, что отфильтрованное таким образом изображение двумерной решётки превратилось в одномерное. Открывая щель, следить, как меняется изображение транспаранта по мере увеличения числа прошедших через щель порядков дифракции.

Литература

1. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970.
2. Майоров С. А., Очин Е. Ф., Романов Ю. Ф. Оптические аналоговые вычислительные машины. Л.: Энергоиздат, 1983.
3. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле, Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. Ч. 1.
4. Харкевич А. А. Спектры и анализ. М.: Физматгиз, 1962.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.6

ДИФРАКЦИОННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Цель работы: знакомство с простейшими оптическими элементами, основанными на явлении дифракции света, изучение явления дифракции когерентного света с использованием простейших дифракционных оптических элементов (ДОЭ), представляющих собой одномерные или двумерные аксиально-симметричные решетки.

Теоретические основы дифракционной оптики

Простейшими примерами ДОЭ, которые будут изучаться в лабораторной работе 1.6, являются линейная дифракционная решетка, аксикон, зонная пластинка (ЗП) Френеля и киноформная линза. Ниже даются теоретические основы перечисленных ДОЭ.

Линейная дифракционная решетка

Линейная дифракционная решетка состоит из штрихов в виде прямых линий. Расстояние между штрихами постоянно и равно периоду решетки d . Если на решетку падает узкий монохроматический пучок, получается последовательный ряд пучков, причем угловое расстояние между осями пучков равно λ/d . Таким образом, дифракционная решетка выполняет роль делителя пучка.

Основная особенность любых ДОЭ, отличающая их от рефракционных элементов, – это разделение падающей волны на множество дифрагированных волн (порядков дифракции). Обычно полезным (или рабочим) является лишь один из порядков дифракции. Поэтому вводится такая характеристика ДОЭ, как дифракционная эффективность, которая выражается в виде отношения количества энергии в рабочем порядке дифракции к энергии света, содержащейся в падающем пучке.

В данной работе линейная (или одномерная) решетка представляет собой стеклянную тонкую плоскопараллельную пластину, на одной из поверхностей которой по всей площади

нанесены параллельные штрихи так, что функция пропускания (отношение амплитуды световой волны, прошедшей сквозь решетку, к амплитуде падающей на решетку плоской световой волны) зависит лишь от одной координаты:

$$t(x) = t(x + dm), \quad (69)$$

где d – период решетки, $m = 0, 1, 2, \dots$

Периодическую функцию $t(x)$ можно разложить в комплексный ряд Фурье

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{ik_x x m}, \quad (70)$$

$$\text{где } k_x = \frac{2\pi}{d}, \quad A_m = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} t(x) e^{ik_x x m} dx.$$

При падении на решетку плоской волны $E(z) = E_0 l^{ikz}$ распределение поля сразу за решеткой будет иметь вид:

$$E'(z, x) = t(x)E(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{i(kz + k_x x m)} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \left(z + \frac{\lambda}{d} x m \right)} \quad (71)$$

Видно, что каждое слагаемое в ряде (71) соответствует плоской волне, распространяющейся под углом $\theta_m = m \lambda / d$ к оси z .

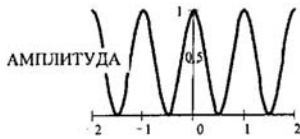
Амплитуды A_m этих волн соответствуют амплитудам гармоник разложения Фурье функции пропускания решетки. Интенсивность света в каждой волне пропорциональна квадрату модуля амплитуды. Если сразу за решеткой поместить тонкую линзу с фокусным расстоянием F , то каждая плоская волна, соответствующая порядку дифракции m , сфокусируется в пятно малого размера радиусом $a = \frac{\lambda}{D} F$ ($D \gg d$, где D – диаметр пучка в

выходном зрачке линзы) на расстоянии $l_m = \frac{\lambda}{d} m F$ от оси системы.

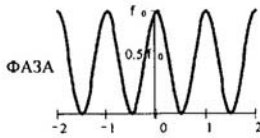
Непосредственно на оси будет сфокусирован нулевой порядок – часть света, прошедшая решетку и не испытавшая дифракции.

ФУНКЦИЯ ПРОПУСКАНИЯ РЕШЕТОК

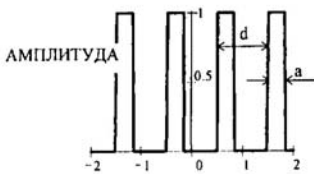
Амплитудная гармоническая решетка
 $t(x) = 1 + \cos(2\pi x/d)$



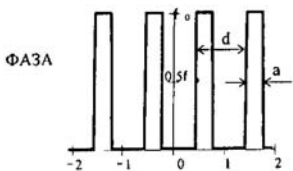
Фазовая гармоническая решетка
 $t(x) = \exp(2\pi i f_0 \cos(2\pi x/d))$, $f_0 = 0.4$



Амплитудная ступенчатая
 (бинарная) решетка
 $t(x) = 1$, $dn < x < a + dn$
 $t(x) = 0$, $a + dn < x < d(n+1)$, $a = .3$, $d = 1$



Фазовая ступенчатая
 (бинарная) решетка
 $t(x) = \exp(2\pi i f_0 u(x))$, $u(x) = 1$, $dn < x < a + dn$
 $u(x) = 0$, $a + dn < x < d(n+1)$, $a = .3$, $d = 1$, $f_0 = .4$



СПЕКТРЫ ФУРЬЕ

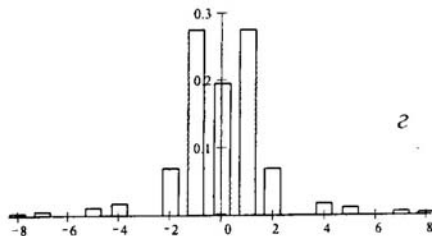
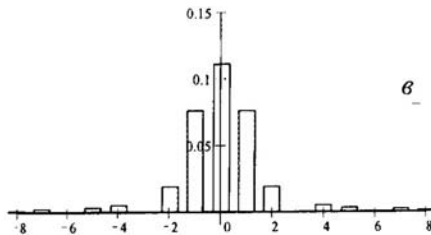
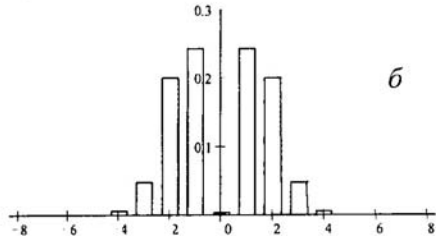
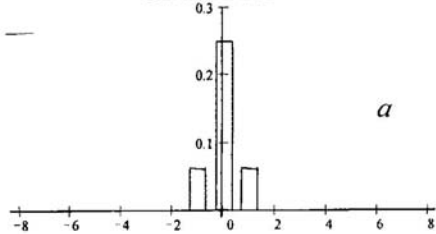


Рис. 41. Схемы дифракционных решеток и соответствующие им распределения интенсивностей порядков дифракции в Фурье-плоскости

На рис. 41 приведены функции пропускания и распределения интенсивностей для некоторых амплитудных ($a, в$) и фазовых решеток ($б, з$).

Рассмотрим вопрос о симметрии в распределении интенсивностей по порядкам дифракции с одинаковым номером m , но разными знаками. В разделе «Дифракция света» [4] показано, что исходя из свойств преобразования Фурье спектр амплитудных решеток всегда симметричен.

На рис. 42 показан внешний вид дифракционной картины на экране в фокусе линзы после прохождения света He-Ne-лазера с длиной волны 633 нм через линейную дифракционную решетку.



Рис. 42. Внешний вид дифракционной картины на экране в фокусе линзы после прохождения света He-Ne-лазера с длиной волны 633 нм через линейную дифракционную решетку

Кроме амплитудных дифракционных решеток существуют фазовые решетки. При прохождении света через фазовую решетку распределение интенсивностей может быть несимметричным и может возникнуть необходимость в асимметрии профиля каждого отдельного штриха.

На практике наиболее часто встречается фазовая дифракционная решетка с треугольным профилем штриха. Этот тип ДОЭ наиболее распространен и широко используется в спектральных приборах, так как его дифракционная эффективность близка к 100 %.

Идеальная решетка с пилообразным профилем штриха придает первоначальной плоской волне $E_0 e^{ikz}$ дополнительный фазовый сдвиг, линейно зависящий от координаты \tilde{d} , нормальной к штрихам решетки

$$E'(x, z) = E_0 e^{ik[z + x(n-1)\alpha]}, \quad (72)$$

т. е. отклоняет плоскую волну на угол $\theta_{np} \approx (n-1)\alpha$ (здесь n – показатель преломления материала решетки и предполагается, что углы $\theta_{np}, \alpha \ll 1$). Для того, чтобы этот угол θ_{np} , являющийся также и углом преломления света в стеклянной призме с углом α , совпал с m порядком дифракции света на решетке, необходимо выполнение условия [2]:

$$\theta_{дифр.} = \frac{m\lambda}{d} = \theta_{np} = (n-1)\alpha. \quad (73)$$

Отсюда следует, что порядок m – единственный порядок, в котором для идеальной решетки сосредоточено около 100 % падающей интенсивности света. Это, в частности, следует из выражения распределения интенсивностей в фокальной плоскости линзы, расположенной сразу за решеткой, имеющего вид

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\text{Sin} u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\text{Sin} N\delta}{\text{Sin} \delta} \right)^2,$$

где

$$u = \pi \frac{d}{\lambda} (\theta + (n-1)\alpha), \quad \delta = \pi \frac{d}{\lambda} \theta \quad (74)$$

для любого другого порядка $m \pm l$, где l – целое число, $u_{m \pm l} = \pm \pi l$ и $I(\theta) = 0$ при $l \neq 0$, т. е. интенсивность света в порядках $m \pm l$ при $l \neq 0$ равна нулю.

Аксикон – круговая решетка

Рассмотренная выше линейная решетка и ее спектр были одномерными. Простейшим примером двумерного ДОО является круговая (или кольцевая) дифракционная решетка с постоянным шагом. Штрихи такой решетки представляют собой концентрические окружности, разделенные одинаковым расстоянием $Dr = d$. Распределение освещенности в зоне дифракции Фраунгофера представляет собой тоже эквидистантные концентрические окружности (рис. 43).

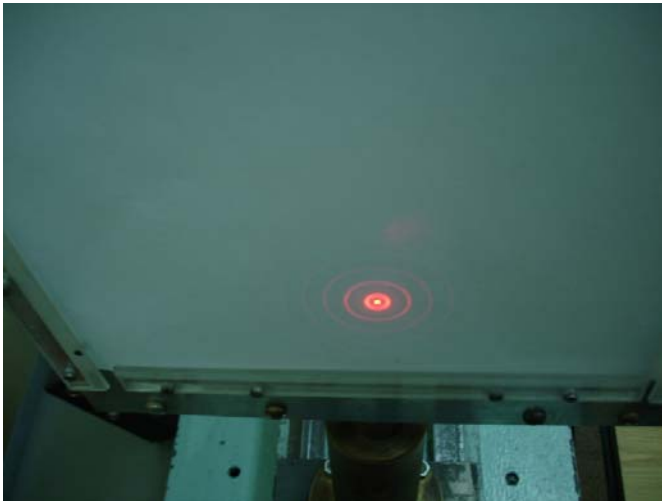


Рис. 43. Внешний вид дифракционной картины на экране в фокусе линзы после прохождения света He-Ne-лазера с длиной волны 633 нм через аксикон

Прохождение параллельного пучка лазерного излучения через аксикон показано на рис. 44.

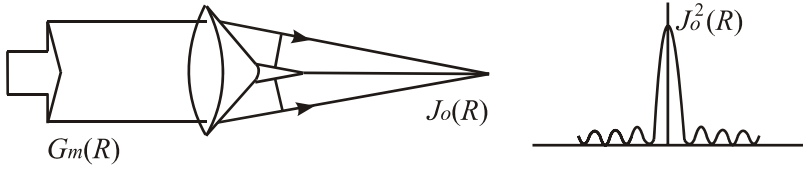


Рис. 44. Прохождение параллельного пучка лазерного излучения через аксикон

Функцию пропускания кольцевой решетки в полярных координатах можно считать одномерной:

$$t(r) = t(r + dm). \quad (75)$$

Разлагая поле падающей плоской волны, модулированное функцией пропускания (75), в ряд Фурье, аналогично случаю с линейной решеткой, получим:

$$E(r, z) = E_0 \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m e^{ikz + k_r m r}, \quad (76)$$

где

$$k_r = \frac{2\pi}{d}, \quad A_m = \frac{1}{d} \int_{r_0}^{r_0+d} t(r) e^{ik_r m r} dz.$$

Можно увидеть сходство этих выражений с выражениями, полученными для линейной решетки. Но в данном случае гармоники имеют осевую симметрию и представляют собой конические сходящиеся и расходящиеся волны:

$$E(z, r) = A_m \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} \left(z + \frac{r}{d} \lambda m\right)\right), \quad (77)$$

распространяющиеся под углами $\theta_m = \frac{\lambda}{d} m$ к оси. Эти волны фокусируются в фокальной плоскости, стоящей сразу за решеткой линзы, и образуют серию равноотстоящих concentric колец.

Расстояние между кольцами равно $\Delta r = \frac{\lambda}{d} F$, где F – фокусное расстояние линзы. Интересной особенностью кольцевой решетки является то, что в силу аксиальной симметрии порядки дифракции, отличающиеся только знаком, попадают в одно место и образуют одно кольцо в зоне Фраунгофера (Фурье-плоскости, совпадающей в нашем случае с фокальной плоскостью линзы).

Уместно отметить также, что гармоники Фурье разложения могут иметь сильно различающиеся амплитуды в зависимости от вида функции пропускания. В частности, для решетки со ступенчатым профилем при ширине штриха, равным половине периода ($a = d/2$), отсутствуют все четные порядки дифракции.

Аналогом круговой решетки в традиционных оптических элементах служит коническая линза, представляющая собой фигуру, полученную при вращении треугольника или призмы вокруг оси, лежащей либо в плоскости основания (собирающая линза), либо при вершине призмы (рассеивающая линза). Отражательным аналогом круговой решетки является коническое зеркало.

Зонная пластинка

Зонная пластинка Френеля представляет собой набор чередующихся прозрачных и непрозрачных колец. Метод расчета радиусов колец ЗП следует из принципа Гюйгенса – Френеля и подробно описан в [1]. Радиусы колец пропорциональны квадратному корню из целых чисел и в случае плоской монохроматической падающей волны

$$r_m = \sqrt{m\lambda F}, \quad (78)$$

где m – целое число, F – расстояние от ЗП до плоскости, где наблюдается максимум интенсивности, наиболее удаленный от ЗП. На небольших участках экрана, там, где отрезки круговых зон можно заменить отрезками прямых, ЗП можно рассматривать как линейную дифракционную решетку. Отсюда немедленно следует наличие многих дифрагированных пучков (рис. 45). Выбор радиусов колец согласно (69) приводит к тому, что период дифракционной структуры ЗП является переменным и пучки,

дифрагированные различными участками, образуют в совокупности сферические волны. Пучки $+1$ порядка дифракции сходятся в расчетной плоскости на расстоянии F , пучки $+2m+1$ порядка дифракции сходятся в расчетной плоскости на расстоянии $F/(2m+1)$, четные порядки дифракции отсутствуют. Таким образом, ЗП Френеля не только разделяет падающий пучок, но и фокусирует порядки дифракции, преобразуя падающую плоскую волну в набор сферических волн.

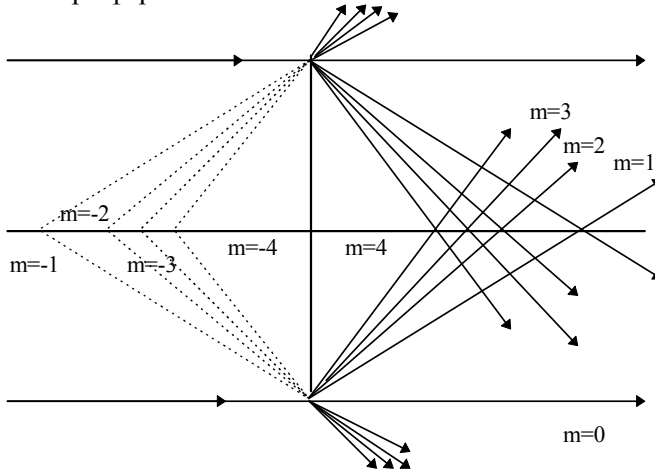


Рис. 45. Ход лучей при дифракции плоской волны на зонной пластинке Френеля

Если для круговой решетки выполнить условие постоянства площади штрихов, то необходимо отказаться от постоянства d , которое нужно будет уменьшать: $d \propto R^{-1}$. Классическим примером такого типа ДОЭ является рассматриваемая в этом разделе зонная пластинка Френеля. Как и для всякой решетки, для зонной пластинки характерно наличие множества порядков дифракции. Зонная пластинка разлагает падающую плоскую волну на сферические волны. Чтобы показать это, запишем функцию пропускания зонной пластинки в виде

$$t(r^2) = t(r^2 + d^2 m) = t(v + d^2 m), \quad (79)$$

где $v = r^2$, $|m| = 0, 1, 2, \dots$, а d представляет собой начальный шаг решетки, равный радиусу первых двух центральных зон. Периодическую функцию пропускания $t(v)$ также можно разложить в ряд Фурье:

$$t(v) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{imbv}, \quad b = \frac{2\pi}{d^2}, \quad A_m = \frac{1}{d^2} \int_0^{d^2} t(v) e^{-imbv} dv. \quad (80)$$

Функция пропускания зонной пластинки принимает вид

$$t(r^2) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{\frac{2\pi i m r^2}{d^2}}. \quad (81)$$

Каждый член ряда (81) имеет вид функции пропускания тонкой линзы [4, 5] с фокусным расстоянием $F_m = \frac{d^2}{2lm} = \frac{r_1}{lm}$, где $r_1 = \frac{d}{\sqrt{2}}$ – радиус первой зоны Френеля.

Таким образом, функция пропускания зонной пластины представляет собой сумму функций пропускания тонких линз, либо собирающих свет в точки с координатами $\frac{F}{m}$ справа от решетки,

либо рассеивающих его из симметрично расположенных слева от ДОО точек. Следовательно, зонная пластинка разлагает исходную плоскую волну на сферические волны, сходящиеся в точки на оси z или расходящиеся из точек на оси с координатами (фокусными расстояниями) $z = F \cong \frac{r_1^2}{\lambda m}$, где r_1 – радиус первой зоны Френеля.

Амплитуда каждой из создаваемых таким образом сферических волн определяется соответствующим коэффициентом A_m ряда (80).

Киноформная линза

Зонные пластинки, как и другие ДОЭ, бывают амплитудными и фазовыми. Если с зонной пластинкой Вуда можно сопоставить фазовую периодическую решетку с прямоугольным профилем штриха, то аналогом решетки с пилообразным профилем здесь будет так называемая киноформная линза, которая, по сути дела, является ДОЭ с профилем штриха, близким к параболическому (рис. 46).

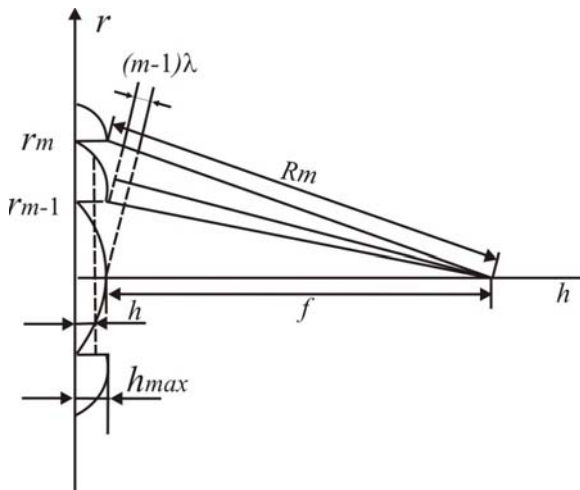


Рис. 46. Построение фазового профиля киноформной линзы

Рассмотрим построение зон такой киноформной линзы. Если F – главное фокусное расстояние, то расстояние R_m от фокуса до внешней границы каждой зоны, при условии равенства путей всех лучей в пределах зоны и изменения скачком на длину волны λ на границе зон, равно

$$R_m = \sqrt{r_m^2 + F^2} = F + \lambda m.$$

Отсюда точное выражение для радиуса зон имеет вид

$$r_m = \sqrt{2F\lambda m + m^2\lambda^2}.$$

Рассмотрим построение фазового профиля киноформной линзы в предположении, что на линзу падает плоская световая волна. Для этого, приравнивая оптические пути лучей (см. рис. 46), проходящих через зону и по ее внутреннему краю, составим тождество для лучей, фокусирующихся m -й зоной:

$$r^2 = [F + (h_{\max} - h)n + (m-1)\lambda]^2 - [F + (h_{\max} - h)]^2,$$

где $z_{m-1} \leq r \leq r_m$, h и n – толщина и показатель преломления материала.

Получим уравнение фазового профиля, полагая $h_{\max} = \lambda / (n-1)$ и пренебрегая членами высшего порядка, малыми по сравнению с $m^2\lambda^2$:

$$h(r) = \frac{2mlF + m^2l^2 - r^2}{2F(n-1)} = \frac{r_m^2 - r^2}{2F(n-1)}.$$

Согласно критерию Рэлея, искажения формы волнового фронта, меньшие чем $\lambda/4$, не приводят к ухудшению качества изображения, откуда легко показать, что фазовый профиль периода киноформной линзы может быть линейным началом со второй зоны. При этом обеспечивается пространственное разрешение киноформных линз, близкое к дифракционному пределу, определяемому их апертурой.

Для линейного пилообразного профиля фазовую задержку можно представить как $h_{lin}(n-1) = \frac{(r_m - r)l}{r_m - r_{m-1}}$.

Следует отметить, что для киноформной линзы радиус первой зоны в $\sqrt{2}$ раз больше, чем для зонной пластинки, поскольку разность путей от краев двух соседних зон здесь λ , а не $\lambda/2$, как для зонной пластинки. Точно так же для линейной решетки с прямоугольным профилем, показанной на рис. 41, z , ширина штриха вдвое меньше периода решетки. Необходимо указать также, что

линейный и тем более параболический профиль решетки технически трудно изготовить. По этой причине такие профили часто приближенно воспроизводят с помощью ступенчатых функций [6], как это сделано для случая киноформной линзы. Наличие в дифракционной картине, создаваемой киноформной линзой, кроме основного максимума, еще достаточно заметных «паразитных» порядков связано как раз с таким приближенным соответствием профиля реальной киноформной линзы параболическому.

Порядок выполнения лабораторной работы

Внешний вид экспериментальной установки показан на рис. 47.

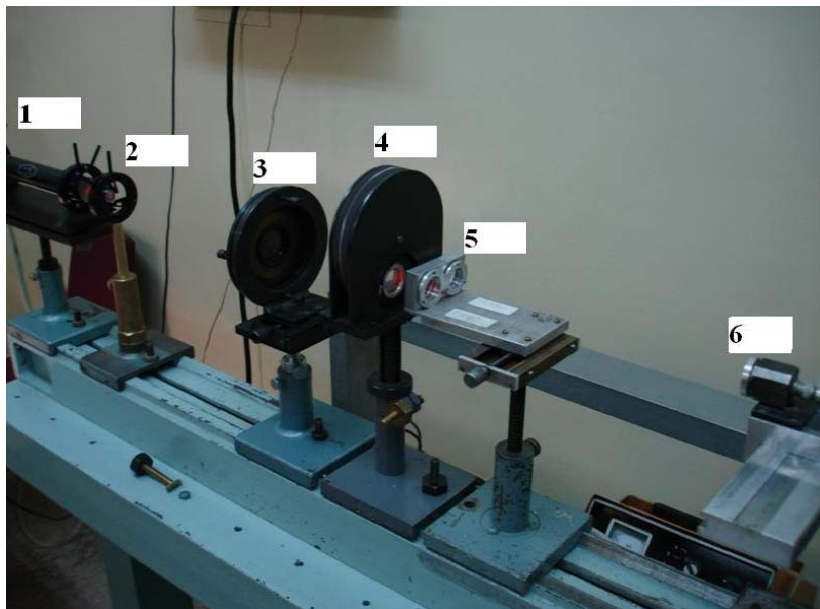


Рис. 47. Внешний вид экспериментальной установки для изучения дифракционных оптических элементов: 1 – He-Ne-лазер; 2 – микрообъектив; 3 – объектив; 4 – револьверный диск с ДОО; 5 – фокусирующая линза; 6 – фотодиод с диафрагмой

Оптическая схема установки приведена на рис. 48.

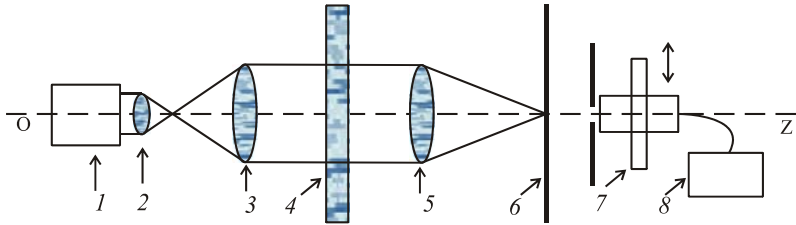


Рис. 48. Оптическая схема установки

Экспериментальная установка для изучения ДОЭ представляет собой оптическую скамью, на которой расположены элементы в соответствии с оптической схемой, показанной на рис. 48. Все элементы обозначены в следующем порядке: 1 – He-Ne-лазер с длиной волны 633 нм (излучатель с источником питания); 2 – микрообъектив, закрепленный в оправе на отдельной стойке; 3 – объектив с диафрагмой и возможностью линейного перемещения поперек лазерного луча в горизонтальной и вертикальной плоскостях, а также вдоль оптической скамьи; 4 – револьверный диск с ДОЭ с такими же возможностями перемещения, как и объектива 3; 5 – объектив, формирующий изображение дифракционной картины на экране 6 для линейной решетки и аксикона, а также при измерении фокусных расстояний для зонной пластинки и киноформной линзы (в этом случае линза 5 удаляется); 7 – фотодиод с диафрагмой для измерений периодов решеток и распределения интенсивностей по порядкам дифракции; 8 – источник питания фотодиода.

He-Ne-лазер закреплен на стойке и допускает перемещение корпуса излучателя по вертикали, а также по углу в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Перед началом работы лазер установлен на заданной высоте строго параллельно оси оптической скамьи. Остальные элементы установлены на оптической оси лазера на заданных расстояниях. При выполнении лабораторной работы изменять положение лазера, а также элементов 2, 3, 4 не допускается.

В револьверном диске 4 допускается только смена окон, содержащих или не содержащих ДОЭ. При выполнении работы необходимо использовать только элементы 5, 6, 7 для получения изображений решеток и измерения фокусных расстояний зонной пластинки и киноформной линзы. Если оптическая система, показанная на рис. 48, по каким-то причинам расстроена, то необходимо обратиться к преподавателю или инженеру лаборатории.

Исходное положение: He-Ne-лазер выключен, все элементы расположены на оптической скамье.

При включении источника питания He-Ne-лазер 1 испускает красный луч с длиной волны 0,63 мкм диаметром 1–2 мм.

Излучение лазера посредством телескопа, образованного линзами 2 и 3, преобразуется в параллельный пучок и расширяется до диаметра около 20 мм. Если телескоп настроен правильно, то этот размер пучка сохраняется на протяжении всей оптической скамьи, а сам пучок распространяется параллельно ей.

Поворотом револьверного диска 4 можно вводить в световой пучок ДОЭ: линейную решетку, круговую решетку (аксикон), зонную пластинку Френеля и киноформную линзу. Для периодических решеток в фокальной плоскости линзы 5 (Фурье-плоскости) могут быть получены пространственные Фурье-спектры и с помощью фотодиода, перемещающегося в Фурье-плоскости, измерено распределение интенсивности излучения по различным порядкам дифракции. Линзу 5 с $F = 300$ мм при проведении измерений необходимо размещать возможно ближе к револьверному диску с ДОЭ и диафрагмировать объектив 2 с помощью встроенной в него диафрагмы (почему?). Для линейной решетки и аксикона с использованием фотодиода с диафрагмой надо измерить интенсивность нулевого порядка, а также первого и других порядков (см. рис. 42–43). Для зонной пластинки и киноформной линзы распределение интенсивности в положительных порядках и расстояния между ними определяются без линзы 5 с $F = 300$ мм, а вторая линза 5 с $F = 90$ мм используется для фокусировки нескольких расходящихся волн, соответствующих порядкам дифракции с $m < 0$.

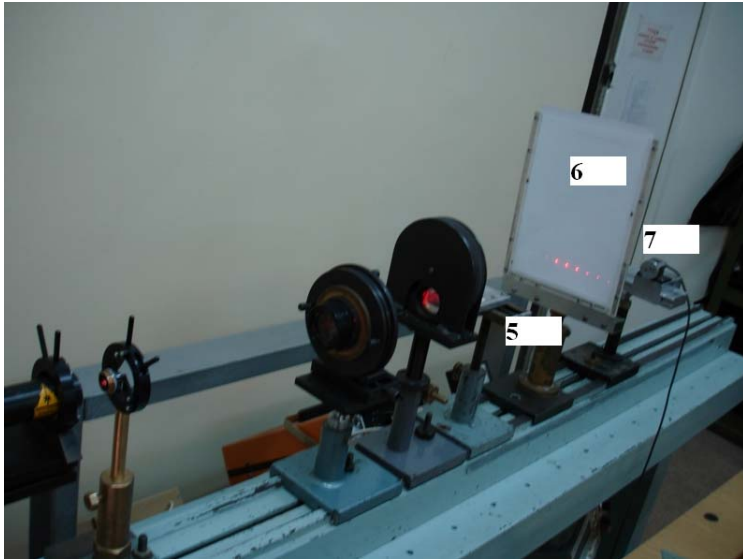


Рис. 49. Внешний вид экспериментальной установки для изучения линейной решетки и аксикона. В схеме установлены линза 5 с $F = 300$ мм и экран 6 для определения местонахождения вертикальной плоскости, в которой будут проводиться измерения с помощью фотодиода 7

Задания

1. Идентифицировать все дифракционные оптические элементы, аксикон, линейную решетку, линзу, зонные пластинки.

2. Измерить расстояние между порядками для всех ДОЭ, определить характерные пространственные размеры ДОЭ (период для периодических решеток или ширину средних зон для непериодических круговых решеток).

3. Определить дифракционную эффективность ДОЭ, симметрию интенсивности света, дифрагированного в отрицательные и положительные порядки $\frac{I + m}{I - m} \sim \left(\frac{Am}{A - m} \right)^2 = ?$ Сделать заключение о типе пространственной модуляции волнового фронта, произведённой каждым ДОЭ, – амплитудная или фазовая.

Контрольные вопросы

1. Какие ДОО дают наиболее высокую дифракционную эффективность?
2. Как будет выглядеть профиль киноформной отрицательной цилиндрической линзы?
3. Как для аксикона по дифракционной картине можно убедиться в несимметричности формы штриха?

Литература

1. *Бутиков Е. И.* Оптика. М.: Высш. шк. 1986.
2. *Гудмен Дж.* Введение в Фурье-оптику. М.: Наука, 1973.
3. *Корольков В. П., Коронкевич В. П., Михальцова И. А. и др.* Киноформы: технологии, новые элементы и оптические системы // Автометрия. 1989. № 3. С. 95–102; Автометрия. 1989. № 4. С. 47–52.
4. *Ландсберг Г. С.* Оптика. М.: Наука, 1976.
5. *Мешков И. Н., Чириков Б. В.* Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука, 1987. Ч. 2.
6. *Сивухин Д. В.* Оптика. М.: Наука, 1985.