

1. Квазистационарные явления

Урок 23

Условия квазистационарности:

$$\begin{aligned} 1) \ell \ll \lambda = cT = 2\pi c/\omega; \\ 2) j = \sigma E \gg j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}. \end{aligned}$$

Закон Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint B_n dS.$$

Магнитный поток:

$$\Phi = \frac{1}{c} \iint B_n dS = \frac{LJ}{c}.$$

Потокосцепление:

$$N = \int dn, \quad \Phi = N\Phi_0.$$

Энергия:

$$W = - \int J \mathcal{E} dt = \int \frac{JL}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t} dt = \frac{L}{c^2} \int J dJ = \frac{LJ^2}{2c^2} = \frac{J\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Магнитный поток сохраняется: 1) в присутствии сверхпроводника (вмораживание силовых линий); 2) при $t \ll \tau_M = \sigma \mu l^2 / c^2$.

Для квазистационарных токов справедливо правило Кирхгофа.

Дифференциальные уравнения для скин-эффекта в одномерном случае (в пренебрежении током смещения, $\varepsilon\omega \ll \sigma$):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Его решение для полубесконечного пространства

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i(\omega t - \frac{x}{\delta})},$$

где $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$ – т. н. толщина скин-слоя.

Поток электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Индуктивность. Взаимная индукция

1.1. (Задача 6.1) Линия состоит из двух коаксиальных тонких цилиндрических оболочек с радиусами $a < b$, пространство между ними заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ . Найти коэффициент самоиндукции на единицу длины линии.

Решение Магнитное поле в такой аксиально-симметричной системе имеет единственную компоненту H_α . Используя теорему Стокса, можно показать, что

$$\begin{aligned} H_\alpha &= 0 \quad \text{при } r \leq a, \\ H_\alpha &= \frac{2\pi I}{cr} \quad \text{при } a \leq r \leq b, \\ H_\alpha &= 0 \quad \text{при } r > b. \end{aligned}$$

$$B_\alpha = \mu H_\alpha$$

Тогда энергия в зазоре между коаксиальными цилиндрами, в котором поле не равно нулю, на единицу длины цилиндра равна

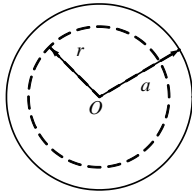
$$W = \int \frac{(\mathbf{B}\mathbf{H}) dV}{8\pi} = \frac{2\pi}{8\pi} \mu \int_a^b r dr \frac{4I^2}{c^2 r^2} = \mu \frac{I^2}{c^2} \int_a^b \frac{dr}{r} = \mu \frac{I^2}{c^2} \ln \frac{b}{a}$$

Откуда

$$\begin{aligned} W &= \frac{LI^2}{2c^2} = \mu \frac{I^2}{c^2} \ln \frac{b}{a}, \\ L &= 2\mu \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

1.2. (Задача 6.2) Вычислить внутреннюю часть самоиндукции единицы длины прямолинейного провода круглого сечения радиуса a . Магнитная проницаемость провода μ .

Решение Предположим, что по проводнику течет постоянный ток J . Он создает магнитное поле, которое можно найти, воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора \mathbf{H} :



$$\oint H_\ell d\ell = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j} d\mathbf{s}), \quad (1)$$

где \mathbf{j} – плотность тока. Ввиду аксиальной симметрии напряженность магнитного поля зависит только от расстояния до оси провода и имеет только α -ю составляющую H_α в цилиндрической системе координат.

нат (z, r, α) с осью Z по оси тока. Поэтому, взяв циркуляцию вектора \mathbf{H} по окружности радиуса $r < a$ с центром на оси провода, найдем

$$\oint H_\ell d\ell = H_\alpha \cdot 2\pi r.$$

Поскольку $j = \text{const}$, то правая часть уравнения (1)

$$\frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j} d\mathbf{s}) = \frac{4\pi}{c} j \cdot \pi r^2 = \frac{4\pi}{c} \frac{J}{a^2} r^2.$$

Окончательно находим

$$H_\alpha = \frac{2J}{ca^2} r \quad \text{при} \quad r \leq a.$$

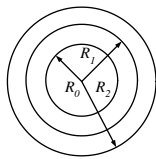
Зная распределение напряженности магнитного поля \mathbf{H} , находим энергию магнитного поля, запасенную внутри единицы длины провода. Она равна

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{B} \mathbf{H}) dv = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dv = \frac{\mu J^2}{4c^2}. \quad (2)$$

Здесь интеграл берется по объему проводника, и учтено, что $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. С другой стороны, магнитная энергия $W = LJ^2/2c^2$. Сравнивая с (2), находим $L = \mu/2$.

1.3. (Задача 6.3) Вычислить самоиндукцию единицы длины коаксиального кабеля, жила которого имеет радиус R_0 , а оболочка – внутренний радиус R_1 , наружный – R_2 . Магнитная проницаемость проводов – μ_1 , изоляции между ними – μ_2 .

Решение В коаксиальном кабеле ток течет по центральной жиле радиуса R_0 и возвращается по оболочке, внутренний и внешний радиусы которой равны R_1 и R_2 . Пусть в кабеле течет ток J . Тогда магнитное поле внутри центральной жилы равно (см. 6.2):



$$H_\alpha = \frac{2J}{cR_0^2} r \quad \text{при} \quad r \leq R_0.$$

Ввиду аксиальной симметрии проводников напряженность магнитного поля также обладает аксиальной симметрией. Применяя теорему о циркуляции вектора \mathbf{H} (см. 6.2), находим, что для:

а) $R_0 \leq r \leq R_1$

$$H_\alpha \cdot 2\pi r = 4\pi J/c,$$

откуда

$$H_\alpha = \frac{2J}{cr};$$

б) $R_1 \leq r \leq R_2$

$$H_\alpha \cdot 2\pi r = \frac{4\pi J}{c} - \frac{4\pi J}{c} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

откуда

$$H_\alpha = \frac{2J}{cr} \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{2Jr}{c(R_2^2 - R_1^2)}.$$

При $r > R_2$ $H = 0$. Энергия, запасенная в единице длины кабеля:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{B} \mathbf{H}) dv = \frac{\mu_1 J^2}{4c^2} + \frac{\mu_2}{8\pi} \int_{R_0}^{R_1} \left(\frac{2J}{cr} \right)^2 2\pi r dr + \\ &+ \frac{\mu_1}{8\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{(2J)^2}{c^2(R_2^2 - R_1^2)^2} \left(\frac{R_2^2}{r} - r \right)^2 2\pi r dr = \\ &= \frac{\mu_2 J^2}{c^2} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{\mu_1 J^2 R_2^4 \ln(R_2/R_1)}{c^2(R_2^2 - R_1^2)^2} - \frac{\mu_1 J^2 R_2^2}{2c^2(R_2^2 - R_1^2)}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. С другой стороны, $W = LJ^2/2c^2$, где L – индуктивность единицы длины кабеля. Сравнивая энергии, получаем для коэффициента самоиндукции выражение

$$L = 2\mu_2 \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{2\mu_1 R_2^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{\mu_1 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$



1.4. (Задача 6.4) Внутри металлической сферы радиуса R по диаметру проходит

тонкая проволочка радиуса $r_0 \ll R$. По ней идет ток J , далее растекающийся по сфере и снова сходящийся к проволочке. Найти:

а) магнитное поле внутри и вне сферы; б) оценить индуктивность системы.

Решение Система имеет аксиальную симметрию и отлична от нуля только H_α -компонента магнитного поля. Это поле вычисляется внутри сферы при помощи теоремы Стокса и

$$H_\alpha = \frac{2J}{cr},$$

где r —радиус в цилиндрической системе координат. Вне сферы поле очевидно равно 0. Тогда плотность энергии внутри сферы и вне проволочки

$$w = \frac{H_\alpha^2}{8\pi} = \frac{J^2}{2\pi c^2 r^2}.$$

Полная энергия магнитного поля (в пренебрежении энергии внутри проволочки) запишется в виде интеграла по объему сферы за вычетом объема проволочки

$$W = \frac{4J^2}{8\pi c^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-R}^R dz \int_{r_0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{dr}{r} = \frac{J^2}{2c^2} \int_{-R}^R dz \left[\ln \frac{R^2}{r_0^2} + \ln \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \right].$$

Можно пренебречь вторым членом в полученном интеграле, но оказывается он вычисляется точно, не говоря уже о возможности его обезразмерить и посчитать численно.

$$W = \frac{J^2}{2c^2} \left[4R \ln \frac{R}{r_0} + R \int_{-1}^1 \ln(1-x^2) dx \right].$$

Подынтегральная функция симметрична по x , поэтому интеграл в квадратных скобках равен

$$Int = \int_{-1}^1 \ln(1-x^2) dx = 2 \int_0^1 \ln(1-x^2) dx = 2 \int_0^1 [\ln(1-x) + \ln(1+x)] dx.$$

Вспоминая, что интеграл $\int \ln(x) dx$ вычисляется по частям,

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x,$$

можно записать

$$Int = -4 + 4 \ln(2) \approx -1.23.$$

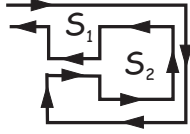
Даже если $R/r_0 \sim 10$, то очевидно, что вторым членом в выражении можно пренебречь и мы получаем

$$W = \frac{LJ^2}{2c^2} \approx \frac{J^2}{2c^2} 4R \ln \frac{R}{r_0},$$

откуда

$$L \approx 4R \ln \frac{R}{r_0}.$$

1.5. (Задача 6.5) В прямоугольный короб с поперечным сечением S_1 вложен дру-



гой прямоугольный короб сечением S_2 (длины коробов одинаковы ($\ell \gg \sqrt{S}$)) так, что их стенки параллельны. Короба разрезаны вдоль образующей и соединены последовательно (как показано на рисунке). Магнитная проницаемость всей среды равна μ . Найти индуктивность системы.

Решение Магнитное поле между 2 бесконечными пластинами, по которым ток течет вверх и вниз (как показано на рисунке) равно удвоенному полю, создаваемому одной пластиной, а снаружи от зазора между пластинами поле равно нулю. В соответствии с рисунком поле везде направлено от нас и равно по модулю

$$H = \frac{4\pi I}{c\ell},$$

где I – полный ток, текущий вдоль стенки. Магнитный поток через площадь $S_1 - S_2$ равен

$$\Phi = \mu H (S_1 - S_2) = \frac{4\pi\mu I}{c\ell} (S_1 - S_2).$$

Тогда магнитная индукция системы может быть найдена из определения

$$\Phi = \frac{LI}{c} = \frac{4\pi\mu I}{c\ell} (S_1 - S_2),$$

откуда

$$L = \frac{4\mu\pi (S_1 - S_2)}{\ell}.$$

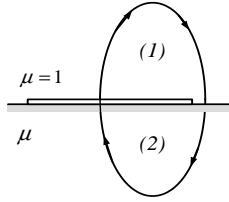
Вычисляя энергию, получим такое же значение индуктивности.

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int dV H^2 = \frac{\mu}{8\pi} H^2 (S_1 - S_2) \ell = \frac{\mu}{8\pi} \frac{16\pi^2 I^2}{c^2 \ell^2} (S_1 - S_2) \ell = \frac{LI^2}{2c^2},$$

$$L = \frac{4\pi (S_1 - S_2) \mu}{\ell}.$$

1.6. (Задача 6.6) Самоиндукция плоского контура в воздухе ($\mu = 1$) равна L . Найти самоиндукцию контура, если его положить на плоскую границу полупространства, заполненного однородным магнетиком с магнитной проницаемостью μ .

Решение Для плоского контура $\Phi = LJ/c$, где Φ – поток вектора магнитной индукции через контур; J – ток в контуре; L – индуктивность контура.



Пусть \mathbf{H}_0 – поле в отсутствие магнетика. Предположим, что при наличии магнетика поле в пустом полупространстве стало $\mathbf{H}_1 = a\mathbf{H}_0$, а в среде – $\mathbf{H}_2 = b\mathbf{H}_0$. Поле \mathbf{H}_0 перпендикулярно плоскости контура и симметрично относительно него.

Из непрерывности нормальной составляющей вектора \mathbf{B}_0 следует, что $a = \mu b$, непрерывность тангенциальной составляющей обеспечивается автоматически $H_{1\tau} = H_{2\tau}$. Возьмем циркуляцию вектора \mathbf{H}_0 в отсутствие среды по некоторой силовой линии

$$\oint (\mathbf{H}_0 d\ell) = 2 \int_{(1)} (\mathbf{H}_0 d\ell) = \frac{4\pi J}{c},$$

где $2 \int_{(1)} (\mathbf{H}_0 d\ell)$ взят по половине симметричной кривой. С другой стороны, при наличии магнетика интеграл по той же самой кривой дает

$$\begin{aligned} \frac{4\pi J}{c} &= \int_{(1)} (\mathbf{H}_1 d\ell) + \int_{(2)} (\mathbf{H}_2 d\ell) = \\ &= \mu b \int_{(1)} (\mathbf{H}_0 d\ell) + b \int_{(2)} (\mathbf{H}_0 d\ell) = b(\mu + 1) \int_{(1)} (\mathbf{H}_0 \cdot d\ell). \end{aligned}$$

Сравнивая, получаем

$$b = \frac{2}{\mu + 1}, \quad a = \frac{2\mu}{\mu + 1},$$

значит,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{2\mu}{\mu + 1} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{2}{\mu + 1} \mathbf{H}_0.$$

Поток вектора индукции через площадь контура в отсутствие магнетика равен $\Phi = \int (\mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{s})$. При наличии магнетика

$$\Phi = \int \frac{2\mu}{\mu + 1} (\mathbf{H}_0 d\mathbf{s}) = \frac{2\mu}{\mu + 1} \Phi_0,$$

а поскольку $\Phi = LJ/c$, то

$$L = \frac{2\mu}{\mu + 1} L_0.$$

1.7. (Задача 6.7) Найти коэффициент самоиндукции на единицу длины бесконечного цилиндрического соленоида с густой намоткой и с произвольной (не обязательно круговой) формой сечения. Площадь сечения – S , число витков на единицу длины – n .

Решение Поле внутри соленоида находится по теореме Стокса.

$$H\ell = \frac{4\pi NI}{c}; \quad H = \frac{4\pi}{c}nI$$

Тогда поток через поверхность, перпендикулярную оси соленоида (т. е. фактически через один виток),

$$\Phi_0 = \frac{4\pi}{c}nIS.$$

Однако, ЭДС индукции в соленоиде не равна $\dot{\Phi}_0/c$, а в N раз больше. Это связано с тем, что поток Φ_0 пересекает все N витков, так что полная ЭДС

$$\mathcal{E} = N\mathcal{E}_0,$$

где

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{\dot{\Phi}_0}{c}.$$

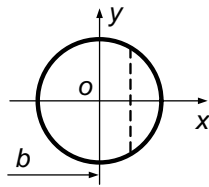
Величина $\Phi = N\Phi_0$ называется потокосцеплением и именно она входит в выражение для индуктивности $\Phi = \frac{LI}{c}$. Тогда индуктивность единицы длины соленоида

$$\frac{L}{\ell} = \frac{4\pi nNS}{\ell} = 4\pi n^2 S.$$

Аналогичную формулу мы получим, если будем использовать формулу для энергии

$$W = \frac{1}{8\pi}H^2V = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{c}nI \right)^2 \frac{1}{2}S\ell = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{4\pi N^2}{\ell^2} \frac{S\ell}{2c^2} I^2.$$

1.8. (Задача 6.9) Найти коэффициент самоиндукции тороидального соленоида.



Радиус тора – b , число витков – N , сечение тора – круг радиуса a . Определить коэффициент самоиндукции на единицу длины соленоида в предельном случае $b \rightarrow \infty$ ($N/b = \text{const}$). Решить ту же задачу для тороидального соленоида, сечении которого – прямоугольник со сторонами a, h . Как изменится самоиндукция, если равномерно распределенный ток будет течь, сохраняя то же направление, не по проводу, намотанному на тор, а прямо по поллой оболочке тора?

Решение На рисунке показана часть сечения тороидального соленоида. Из симметрии системы очевидно, что силовые линии магнитного поля будут окружности, лежащие внутри соленоида в плоскостях, параллельных главной плоскости соленоида (плоскость XZ на рисунке). Используя теорему Стокса вдоль такой круговой силовой линии получим, что величина магнитного поля на этой линии

$$H = \frac{2JN}{c(b+x)}.$$

Поток через один виток запишется в виде интеграла

$$\Phi_0 = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{2JN}{c} \int_{-a}^a \frac{dx}{b+x} 2 \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{4JN}{c} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{b+x} dx.$$

Обезразмерив переменные под интегралом, его можно привести к виду

$$Int = \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{b+x} dx = \alpha a \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+\alpha t} dt,$$

где $\alpha = \frac{a}{b}$. Сделав очевидную замену $t = \cos \psi$, интеграл можно переписать в виде

$$Int = \alpha a \int_0^\pi \frac{\sin^2 \psi}{1 + \alpha \cos \psi} d\psi.$$

Вычислить этот интеграл элементарным способом мне не удалось, но пакет «Mathematica» позволил получить следующий результат¹

$$Int = \frac{a}{\alpha} \pi \left[1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \right].$$

Тогда, используя потокосцепление, можно записать для индуктивности

$$N\Phi_0 = \frac{4JN^2}{c} \pi b \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \right] = \frac{LJ}{c}.$$

¹По моей просьбе за этот интеграл взялся В.В.Иванов. Им было приведено даже 2 способа вычисления, которые я воспроизвожу с его позволения далее, после решения этой задачи.

При $b \rightarrow \inf$ разложив полученное решение по степеням a/b и приняв во внимание, что $n = N/(2\pi b = \text{const})$, получим

$$L = 4\pi N^2 \left(b - \sqrt{b^2 - a^2} \right).$$

такой же результат получится если считать, что поле по сечению тора постоянно и равно

$$H = \frac{2JN}{cb}.$$

Если сечение тора – прямоугольник, то интеграл вычисляется легко и получается результат

$$L = 2N^2 h \ln \frac{2b + a}{2b - a}.$$

Если ток течет по оболочке тора, то L уменьшится в N^2 раз.

Вычисление интеграла Каждый интеграл, имеющий физическое происхождение, математиком воспринимается с трепетом и почтением. Например, изучение потока некоего магнитного поля через поперечное сечение тора сводится к вычислению интеграла

$$I(\beta) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+\beta t} dt,$$

который, очевидно, сходится при $|\beta| \leq 1$. Поскольку этот интеграл вызывает нетривиальный интерес у физиков, почему-то хочется сразу разложить его в ряд и побыстрее узнать ответ. Чтобы избавиться от проблем, связанных с границей круга сходимости, а также иметь возможность, если будет нужно, делить на β , заметим, что

$$I(\pm 1) = \pi \qquad I(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Словом, дело сводится к вычислению интеграла $I(\beta)$ при $0 < |\beta| < 1$.

Вспоминая о сумме бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $-\beta t$, в нашем случае по модулю не превосходящем $|\beta|$, мы приходим к замечательному разложению

$$I(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} t^n dt.$$

При нечетных n интегралы пропадают, так что

$$I(\beta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} B\left(\frac{3}{2}, n + \frac{1}{2}\right),$$

где, как хорошо известно и нам, и студентам ФФ, изучавшим анализ, а значит, знакомым с интегралами Эйлера,

$$B\left(\frac{3}{2}, n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(n + 2)} = \pi(-1)^n \frac{(1/2)(1/2-1)\dots(1/2-n)}{(n+1)!}.$$

Иными словами,

$$I(\beta) = -\frac{\pi}{\beta^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)(1/2-1)\dots(1/2-n)}{(n+1)!} (-\beta^2)^{n+1}.$$

Мы видим здесь биномиальный ряд Ньютона без начального члена. Дополняя его этим членом, мы приходим к симпатичному ответу:

$$I(\beta) = \frac{\pi}{\beta^2} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right).$$

Приятно отметить, что при $\beta = \pm 1$ эта формула дает верные значения интегралов $I(\pm 1)$, а если перейти к пределу при $\beta \rightarrow 0$, получим правильное значение для $I(0)$. В этом нет ничего удивительного, если вспомнить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, где речь идет об «интегрируемой мажоранте». Здесь такая мажоранта есть, а именно:

$$0 < \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+\beta t} \leq \frac{\sqrt{1-|t|^2}}{1-|t|} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-|t|}},$$

где $|t| < 1$ и $|\beta| \leq 1$. Это означает, в частности, что функция $I(\beta)$ непрерывна на отрезке $|\beta| \leq 1$. Таким образом, интегралы $I(\pm 1)$ и $I(0)$ можно отдельно и не считать.

Теперь, когда «магия магнетизма» уже не действует, хочется подумать и понять, почему же ряд благополучно просуммировался? Ответ ясен — изначально видно, что интеграл выражается через элементарные функции. Ясно также, что путь к нему должен быть проще. И вот, приходит в какое-то место такая мысль: а что, если поделить «столбиком» $\cos^2 \varphi$ на $1 + \beta \sin \varphi$? С остатком, разумеется. Это легко:

$$\frac{\cos^2 \varphi}{1 + \beta \sin \varphi} = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 + \beta \sin \varphi} =$$

$$= -\frac{1}{\beta} \sin \varphi + \frac{1}{\beta^2} - \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \frac{1}{1 + \beta \sin \varphi}.$$

Если, как и прежде, $|\beta| < 1$, то

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1 + \beta \sin \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

что получается хрестоматийным способом — надо объявить $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ новой переменной. Итак,

$$\begin{aligned} I(\beta) &= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1 + \beta t} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{1 + \beta \sin \varphi} d\varphi = \\ &= -\frac{1}{\beta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi + \frac{1}{\beta^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi - \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1 + \beta \sin \varphi} = \\ &= \frac{\pi}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}), \end{aligned}$$

в полном согласии с нашим прежним выводом.

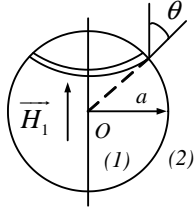
1.9. (Задача 6.10) Найти индуктивность соленоида с числом витков $N \gg 1$, намотанного тонким слоем на шарообразный сердечник радиуса a с магнитной проницаемостью μ так, что витки лежат вдоль линий $\theta = \text{const}$, а плотность намотки меняется по закону

$$n(\theta) = \frac{N}{2a} \sin \theta, \quad \left(\int_0^\pi n(\theta) a d\theta = N \right).$$

Решение Поле \mathbf{H}_2 вне соленоида — поле магнитного диполя, магнитный момент \mathbf{m} которого создается соленоидом (поверхностные токи) и индуцированным моментом шара

$$\mathbf{H}_2 = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$$

Направление вектора \mathbf{m} перпендикулярно плоскостям витков. Поле \mathbf{H}_1 внутри



шара однородно, также как для намагниченного шара (см. 5.9). Тангенциальные составляющие H_τ на поверхности шара терпят разрыв из-за поверхностных токов, нормальные составляющие вектора магнитной индукции непрерывны, поэтому

$$\frac{m}{a^3} \sin \theta + H_1 \sin \theta = \frac{4\pi JN}{c} \frac{1}{2a} \sin \theta,$$

$$\mu H_1 \cos \theta = \frac{3m \cos \theta}{a^3} - \frac{m \cos \theta}{a^3} = \frac{2m \cos \theta}{a^3}.$$

Решая систему уравнений, находим

$$H_1 = \frac{4\pi NJ}{c(\mu + 2)a}.$$

Поток вектора магнитной индукции через dn витков, расположенных под углом θ , равен

$$d\Phi = \mu H \pi a^2 \sin^2 \theta n(\theta) a d\theta.$$

Полный поток через все N витков

$$\Phi = \frac{2\pi^2 N^2 J a}{c} \frac{\mu}{\mu + 2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{8\pi^2 N^2 J a \mu}{3c(\mu + 2)}.$$

Значит,

$$L = \frac{8\pi^2}{3} \frac{\mu}{\mu + 2} N^2 a.$$

Вычисление индуктивности через энергию системы в данном случае заметно сложнее из-за трудности вычисления энергии вне соленоида:

$$\frac{LJ^2}{2c^2} = W_1 + W_2,$$

где $W_1 = \mu H_1^2 \frac{4}{3} \pi a^3$ есть энергия внутри соленоида с учетом однородности поля \mathbf{H}_1 , а энергия вне соленоида

$$W_2 = \frac{1}{8\pi} \int H_2^2 dv,$$

где

$$\mathbf{H}_2 = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}, \quad m = m_z = \frac{2\pi JNa^2}{c(\mu + 2)}.$$

1.10. (Задача 6.14) Внутри соленоида, имеющего N витков, длину ℓ и площадь сечения S_1 , вставлен коаксиально второй соленоид с тем же направлением намотки и той же длины ℓ , но иным числом витков N_2 и площадью сечения S_2 ($\ell \gg \sqrt{S_1}, \sqrt{S_2}$), края соленоидов совпадают. Обмотки соединены последовательно так, что токи в обоих соленоидах текут в одинаковых направлениях. Найти индуктивность системы: а) через энергию; б) через потокосцепление.

Решение Если по соленоидам пропустить ток J , то распределение напряженности магнитного поля будет иметь вид

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{4\pi J N_1}{c \ell} \quad \text{при} \quad R_2 \leq R \leq R_1, \\ H_2 &= \frac{4\pi J N_1}{c \ell} + \frac{4\pi J N_2}{c \ell} = \frac{4\pi J (N_1 + N_2)}{c \ell} \quad \text{при} \quad R < R_2, \\ H_3 &= 0 \quad \text{при} \quad R > R_1. \end{aligned}$$

а) Найдем магнитную энергию, запасенную в системе:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int H^2 dv = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi J}{c \ell} \right)^2 \left[(N_1 + N_2)^2 S_2 \ell + N_1^2 (S_1 - S_2) \ell \right] = \\ &= \frac{2\pi J^2}{c^2 \ell} (N_1^2 S_1 + N_2^2 S_2 + 2N_1 N_2 S_2). \end{aligned} \quad (1)$$

С другой стороны, $W = LJ^2/2c^2$, где L – индуктивность системы. Сравнивая, находим

$$L = \frac{4\pi}{\ell} (N_1^2 S_1 + N_2^2 S_2 + 2N_1 N_2 S_2). \quad (2)$$

б) Учитывая потокосцепления для внутреннего соленоида, имеем

$$\Phi_2 = \frac{4\pi J}{c \ell} (N_1 + N_2) N_2 S_2.$$

С учетом потокосцепления для внешнего соленоида получаем

$$\Phi_1 = \frac{4\pi J}{c \ell} (N_1 + N_2) N_1 S_2 + \frac{4\pi J}{c \ell} (S_1 - S_2) N_1^2 = \frac{4\pi J}{c \ell} (N_1 N_2 S_2 + N_1^2 S_1).$$

Для всей системы

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{4\pi J}{c \ell} (N_1^2 S_1 + N_2^2 S_2 + 2N_1 N_2 S_2).$$

Сравнивая с $\Phi = LJ/c$, находим для индуктивности прежний результат (2).

1.11. (Задача 6.15) На один сердечник намотаны две катушки с коэффициентами самоиндукции $L_1 = 0,5$ Гн и $L_2 = 0,7$ Гн соответственно. Чему равен коэффициент взаимоиנדукции? Рассеяния магнитного поля нет.

Решение Пусть в сердечнике поток Φ_0 . Потокосцепление в первой катушке

$$\Phi_1 = N_1 \Phi_0 = \frac{1}{c} (L_{11} I_1 + L_{12} I_2,)$$

и во второй катушке

$$\Phi_2 = N_2 \Phi_0 = \frac{1}{c} (L_{22} I_2 + L_{21} I_1.)$$

Пустим в первой катушке ток I_1 а во второй ток занулим. Тогда

$$\frac{L_{11}}{L_{21}} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Теперь пустим ток через 2 катушку, а первую разомкнем. Тогда

$$\frac{L_{12}}{L_{22}} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Разделив друг на друга два последних соотношения, получим

$$\sqrt{L_{12} L_{21}} = \sqrt{L_1 L_2},$$

и, используя соотношение $L_{12} = L_{21}$, получаем для коэффициента взаимоиנדукции

$$M = L_{12} \approx 0,6 \text{ Гн.}$$