В учебниках при анализе излучения антенн используются две формулы для вычисления производной по времени от дипольного момента линейного проводника с током:

$$I.\ \dot{\mathbf{d}} = \int_0^\ell I(x)\mathbf{dx},$$
$$II.\ \dot{\mathbf{d}} = -\int_0^\ell \frac{dI}{dx}\mathbf{x}dx.$$

Эти формулы получаются в рамках разных подходов. Разберем каждый в отдельности.

Подход I.

Дипольный момент проводника вычисляется как сумма дипольных моментов всех заряженных частиц, содержащихся в объеме проводника:

$$\mathbf{d} = \sum_1^N q_i\mathbf{r}_i, \qquad \dot{\mathbf{d}} = \sum_1^N q_i\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_1^N q_i\mathbf{v}_i.$$

Сравним с выражением для тока через сечение $\mathbf{S}$ проводника в малой окрестности $dV = Sdx$ этого сечения (пусть внутри dV содержится dN заряженных частиц):

$$I = \mathbf{S}\cdot\langle\mathbf{j}\rangle = \mathbf{S}\cdot\langle nq\mathbf{v}\rangle = \mathbf{S}\langle n\rangle\frac{\sum\limits_1^{dN} q_i\mathbf{v}_i}{dN} = \frac{dN}{dV}\frac{\mathbf{S}}{dN}\sum_1^{dN} q_i\mathbf{v}_i = \frac{1}{\mathbf{dx}}\sum_1^{dN} q_i\mathbf{v}_i = \frac{\delta\dot{\mathbf{d}}}{\mathbf{dx}}.$$

Таким образом, производные от дипольного момента отрезка проводника длиной dx и всего проводника равны соответственно

$$\delta\dot{\mathbf{d}} = I(x)\mathbf{dx}, \quad \dot{\mathbf{d}} = \int_0^\ell I(x)\mathbf{dx}.$$

Формула I используется в лекциях Яковлева при выводе дипольного члена в разложении запаздывающего векторного потенциала и при расчете $\dot{\mathbf{d}}$ вибратора Герца.

Подход II.

В любой точке проводника выполняется уравнение непрерывности тока $\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt}$.

В одномерном случае $\frac{dI}{dx} = -\frac{d\varkappa}{dt}$. Тогда

$$\mathbf{d} = \int_0^\ell \varkappa\mathbf{x}dx, \quad \text{а} \quad \dot{\mathbf{d}} = \int_0^\ell \frac{d\varkappa}{dt}\mathbf{x}dx = -\int_0^\ell \frac{dI}{dx}\mathbf{x}dx.$$

Формула II используется при расчете $\dot{\mathbf{d}}$ вибратора Герца (см. Мешков, Чириков "Электромагнитное поле" ч. 2, ф-ла 128.1 на стр. 141).

Теперь рассмотрим случай постоянного тока. Тогда распределение плотности заряда в проводнике постоянно во времени и поэтому $\dot{\mathbf{d}} = 0$. Это соответствует формуле II, но находится в противоречии с формулой I. Разберемся, в чем тут дело. Во-первых, заметим, что при выводе формулы I число N частиц предполагалось неизменным в течение времени dt, которое входит в выражение $\frac{d}{dt}(\mathbf{d})$. На самом деле за это время часть зарядов пересекает края проводника и это влияет на величину $\dot{\mathbf{d}}$. Во-вторых, преобразуем формулу II:

$$\dot{\mathbf{d}} = -\int_0^\ell \frac{dI}{dx}\mathbf{x}dx = -\int_{x=0}^\ell \mathbf{x}dI(x) = -\mathbf{x}I(x)|_0^\ell + \int_0^\ell I(x)\mathbf{dx} = \int_0^\ell I(x)\mathbf{dx} - I(\ell)\boldsymbol{\ell}.$$

Видно, что формулы I и II отличаются на слагаемое, зависящее от тока на одном из концов проводника. Зависимость от тока на другом конце сюда не вошла, так как дипольный момент мы отсчитывали относительно этого конца ($x = 0$) и поэтому заряды, пересекающие эту точку, не вносят вклада ни в дипольный момент, ни в его производную.

Итак, формула II верна всегда, но менее удобна для вычисления интегралов. Ток на концах вибратора Герца равен нулю, поэтому к нему применима также и формула I, при использовании которой вычисление интегралов упрощается. Выражение для $\delta\dot{\mathbf{d}}$ элементарного отрезка полуволнового вибратора также можно записать в рамках подхода I. Отличие от подхода II может проявиться только на концах проводника. Но поскольку на концах полуволнового вибратора ток равен нулю, это отличие исчезает.