НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. С. Романов.

Записки лектора по

ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Новосибирск – 2007

КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ

§1. Комплексные числа.

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y), при этом действительные числа x и y называются соответственно *действительной и мнимой частью* комплексного числа z и обозначаются $x = \text{Re } z$ и $y = \text{Im } z$.

Понятие равенства и арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом:

1. Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

2. *Суммой* двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

3. *Произведением* двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Для комплексных чисел специального вида $z = (x, 0)$ сумма и произведение оказываются числами такого же вида

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \qquad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

при этом сами арифметические операции однозначно определяются суммой и произведением действительных частей комплексных чисел $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$. Поэтому комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествляют с действительными числами, полагая $(x, 0) = x$.

Комплексное число $(0, 1)$ называют *мнимой единицей* и обозначают символом i. Найдем квадрат мнимой единицы

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Всякое комплексное число можно записать в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Такая форма записи называется *алгебраической формой* комплексного числа. Комплексные числа вида iy называют *чисто мнимыми.* Только число 0, т.е. комплексное число $(0, 0)$, является одновременно действительным и чисто мнимым.

Если для арифметических операций воспользоваться алгебраической формой комплексных чисел, то получим

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $x + iy$ и обозначается $\overline{z}$:

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Легко проверить,что

$$\overline{\overline{z}} = z; \ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2; \ \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2.$$

Действительное число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$, т.е. $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. При этом $|z| = |\overline{z}|$ и $z\overline{z} = |z|^2$. Для любого комплексного числа

$$0 \le |\text{ Re } z| \le |z|, \quad 0 \le |\text{ Im } z| \le |z|, \quad 0 \le |z| \le |\text{ Re } z| + |\text{ Im } z|,$$

причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Непосредственной проверкой легко установить, что арифметические операции на множестве комплексных чисел обладают свойствами:

1. *Коммутативности:*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

2. *Ассоциативности:*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3. *Дистрибутивности:*

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

При этом числа нуль и единица на множестве комплексных чисел обладают стандартными свойствами:

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z,$$

для любого комплексного числа z.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ имеет противоположное, обозначаемое символом $-z$, такое, что $z + (-z) = 0$. Очевидно, что $-z = -x - iy$. Операция *вычитания* определяется равенством $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Всякое комплексное число $z \neq 0$ имеет обратное z^{-1} такое, что $zz^{-1} = 1$. Используя последнее равенство, получаем

$$z^{-1} = \frac{|z|^2 z^{-1}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}\, z\, z^{-1}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Операция *деления* на комплексное число $z \neq 0$ определяется равенством

$$\frac{z_1}{z} = z_1 z^{-1} = z_1 \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Таким образом множество комплексных чисел является числовым полем, которое принято обозначать символом C.

§2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Пусть на плоскости R^2 задана декартова система координат. По определению комплексное число является упорядоченной парой действительных чисел. Поэтому естественное сопоставление комплексному числу $z = x + iy$ точки плоскости с координатами (x, y) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости R^2. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* и обозначается символом C. Поскольку действительные числа отображаются в точки оси абсцисс, а чисто мнимые в точки оси ординат, то на комплексной плоскости C ось абсцисс принято называть *действительной осью,* а ось ординат – *мнимой осью.*

Комплексное число $z = x + iy$ также удобно изображать вектором с началом в точке $(0, 0)$ и концом в точке (x, y), при этом для обозначения вектора принято использовать тот же символ, которым обозначено соответствующее комплексное число. Таким образом символ z будет далее одновременно использоваться для обозначения комплексного числа, точки комплексной плоскости и соответствующего вектора. Из определения операции сложения следует, что сумма двух комплексных чисел $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ изображается вектором, построенным по стандартному правилу сложения векторов $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ на плоскости. Легко видеть, что длина вектора z на комплексной плоскости C равна $|z|$ – модулю комплексного числа z, а расстояние между точками z_1 и z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т.е. $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, при этом для произвольных комплексных чисел z_1 и z_2 выполняются стандартные *неравенства треугольника*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{и} \quad \Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|.$$

Действительно, если $z_1 + z_2 \neq 0$, то

$$1 = \frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2} = \operatorname{Re} \frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2} = \operatorname{Re} \frac{z_1}{z_1 + z_2} + \operatorname{Re} \frac{z_2}{z_1 + z_2} \leq$$

$$\left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right| = \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 + z_2|},$$

откуда получаем

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Поскольку расстояние между точками комплексной плоскости совпадает с расстоянием между соответствующими точками плоскости R^2, то на комплексной плоскости C определения, зависящие только от метрики, такие как определения внутренней и предельной точек, ограниченных, открытых, замкнутых, компактных множеств и т.д., совпадают с соответствующими определениями для плоскости R^2.

При этом на комплексной плоскости формальная запись хорошо знакомых множеств иногда имеет не совсем привычный вид.

Пример 1. Множество точек $z \in C$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < r$, является *кругом* с центром в точке z_0 радиуса r и далее будет обозначаться символом $B(z_0, r)$.

Пример 2. Множество точек $z \in C$, удовлетворяющих уравнению $|z+1|+|z-i| = 3$, является эллипсом с фокусами в точках $z = -1$ и $z = i$.

Напомним некоторые топологические понятия и элементарные утверждения, касающиеся множеств на плоскости, которые будут использоваться далее.

Точка z_0 называется *внутренней точкой* множества $U \subset C$, если существует такое $r > 0$, что круг $B(z_0, r) \subset U$. Множество $U \subset C$ называется *открытым,* если каждая точка данного множества является его внутренней точкой. *Окрестностью* точки $z_0 \in C$ называется всякое открытое множество, содержащее точку z_0, при этом круг $B(z_0, \varepsilon)$ принято называть *ε-окрестностью* точки z_0. Если U окрестность точки z_0, то множество $\dot{U} = U \setminus \{z_0\}$ будем называть *проколотой окрестностью* точки z_0.

Точка z_0 называется *изолированной точкой* множества $E \subset C$, если существует такое $r > 0$, что пересечение круга $B(z_0, r)$ и множества E состоит из единственной точки z_0.

Точка $z_0 \in C$ называется *предельной точкой* множества $F \subset C$, если при любом $r > 0$ круг $B(z_0, r)$ содержит бесконечно много точек множества F. Множество $F \subset C$ называется *замкнутым,* если оно содержит все свои предельные точки.

Точка $z_0 \in C$ называется *граничной точкой* множества $E \subset C$, если при любом $r > 0$ круг $B(z_0, r)$ содержит как точки самого множества E так и точки его дополнения, т.е. множества $C \setminus E$. Совокупность всех граничных точек множества E называется его *границей* и обозначается символом ∂E. Для любого множества $E \subset C$ его граница ∂E является замкнутым множеством.

Множество $\overline{E} = E \cup \partial E$ называется *замыканием* множества E. Очевидно, замыкание является замкнутым множеством.

Непосредственно из определений вытекают следующие свойства открытых и замкнутых множеств:

1. множество $U \subset C$ является открытым тогда и только тогда, когда его дополнение $F = C \setminus U$ является замкнутым множеством;
2. объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством;
3. пересечение любого семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством;
4. пересечение конечного семейства открытых множеств является открытым множеством;
5. объединение конечного семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством;
6. пустое множество и вся комплексная плоскость одновременно являются и открытыми и замкнутыми.

Множество E называется *связным,* если не существует двух открытых множеств U_1 и U_2, удовлетворяющих условиям
$$E \subset U_1 \cup U_2,\ E \cap U_1 \neq \emptyset,\ E \cap U_2 \neq \emptyset,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Это определение связности в случае непустого открытого множества D равносильно тому, что любые две точки множества D можно соединить ломаной, целиком лежащей в данном множестве.

Компонентой множества E называется любое его максимальное связное подмножество.

Областью будем называть всякое открытое связное множество. Число компонент границы данной области называется *порядком связности* этой области. Далее мы будем рассматривать только области с конечным порядком связности, иными словами *конечносвязные* области.

Множество $E \subset C$ называется *ограниченным,* если существует такой круг $B(0, R),\ R < \infty$, что $E \subset B(0, R)$, т.е. $|z| < R$ для любого $z \in E$. Всякое бесконечное ограниченное множество имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую комплексной плоскости.

Конечная или бесконечная система Σ открытых множеств называется *открытым покрытием* множества E, если каждая точка $z \in E$ принадлежит по крайней мере одному множеству системы Σ, т.е. $E \subset \bigcup\limits_{U \in \Sigma} U$.

Множество $K \subset C$ называется *компактным,* если из любого открытого покрытия Σ множества K можно выбрать конечное подпокрытие, т.е. существует такой конечный набор открытых множеств $U_k \in \Sigma,\ k = 1, \ldots, n$, что $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$.

Очевидно, что точка является компактным множеством. Всякое множество, состоящее из конечного числа точек тоже будет компактным. Проверка топологического определения компактности в общем случае может оказаться весьма трудоемким занятием, однако на комплексной плоскости существует довольно простой и удобный критерий компактности: для компактности множества $K \subset C$ необходимо и достаточно, чтобы множество K было ограниченным и замкнутым.

Хотя комплексная плоскость C, как множество точек, совпадает с плоскостью R^2, их следует различать, поскольку на комплексной плоскости определена операция умножения, ставящая в соответствие двум векторам z_1 и z_2 из C вектор $z_1 z_2$, вновь принадлежащий комплексной плоскости, а на действительной плоскости R^2 такой операции нет.

§3. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

Положение комплексного числа $z = x + iy$ на комплексной плоскости C можно однозначно определить полярными координатами r и φ точки $(x, y) \in R^2$. При этом $r = |z|$, а угол φ между положительным направлением действительной оси и вектором z называют *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = \mathrm{Arg}\ z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется.

Всякое комплексное число $z \neq 0$ может быть записано в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

называемом *тригонометрической формой* комплексного числа. При этом для комплексного числа $z = x + iy$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{1}$$

В силу периодичности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, система уравнений (1) имеет бесконечно много решений и, следовательно, аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определяется неоднозначно. Пусть $\arg\, z = \varphi_0$ такое решение системы (1) , что $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, тогда

$$\mathrm{Arg}\; z = \arg\; z + 2\pi n,$$

где n – произвольное целое число.

Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_1(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

тогда, согласно определению арифметических операций на множестве комплексных чисел, получаем

$$z_1 z_2 = r_1 r_2([\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2] + i[\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2]) =$$

$$r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Таким образом при произведении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\,(z_1) + \mathrm{Arg}\,(z_2).$$

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)^n.$$

Отсюда при $r = 1$ получаем формулу Муавра[1]

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Приравнивая в формуле Муавра соответственно действительные и мнимые части выражений, получаемых слева и справа, легко найти формулы для синусов и косинусов кратных дуг.

Если мы стандартным образом определим значение $w = \sqrt[n]{z}$ условием: $w^n = z$, то мы получим n различных решений

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\arg\; z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg\; z + 2\pi k}{n}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

при этом точки w_k имеют одинаковый модуль и расположены в вершинах правильного n-угольника.

§4. Последовательности комплексных чисел.

Поскольку расстояние на комплексной плоскости совпадает с расстоянием на действительной плоскости R^2, то определение предела последовательности комплексных чисел и его основные свойства являются следствием соответствующих утверждений для последовательности точек плоскости R^2.

Определение. Комплексное число a называется пределом последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$

При этом используется стандартные обозначения

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

либо

$$z_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Иными словами число $a \in C$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0.$$

[1] Муавр Абрахам де (1667-1754)– английский математик, член Лондонского королевского общества, Парижской и Берлинской академий наук, основные исследования связаны со степенными рядами.

Последовательность, имеющая предел $a \in C$, называется *сходящейся.*

Всякой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$. Из оценок

$$|\operatorname{Re} z| \le |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \le |z|, \quad |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

следует, что для существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a = \alpha + i\beta$ необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

Теперь несложно показать, что для последовательностей комплексных чисел выполняются следующие свойства: пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b$, тогда

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = a + b$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n w_n) = ab$,
3. если $b \ne 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}$.

Также верны такие классические утверждения о пределах, как критерий Коши[1] и принцип Больцано-Вейерштрасса[2].

Критерий Коши. Для того, чтобы последовательность $\{z_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ и $m > n_0$ выполнялось неравенство $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Принцип Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Для доказательства этих утверждений достаточно заметить, что они верны для действительных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

С другой стороны, всякой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ можно сопоставить две последовательности действительных чисел $\{r_n\}$ и $\{\varphi_n\}$, где $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, то, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то из неравенства $||z_n| - |z_0|| \le |z_n - z_0|$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$, при этом нельзя в общем случае утверждать, что последовательность $\{\varphi_n = \operatorname{Arg} z_n\}$ сходится, поскольку аргумент комплексного числа определяется неоднозначно.

Пример 1. Пусть $z_n = 1 + i\frac{(-1)^n}{n}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$. Если выбирать $\varphi_n = \arg z_n$ так, что $0 \le \varphi_n < 2\pi$, то последовательность $\{\varphi_n\}$ расходится, поскольку $|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \ge \pi$.

Однако выполняется следующее свойство:

Лемма. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \ne 0, \quad z_n \ne 0$ и $\arg a = \alpha$. Тогда существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$, что $\varphi_n = \operatorname{Arg} z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \alpha$.

Доказательство. Выберем $\varphi_n = \operatorname{Arg} z_n$ так, чтобы выполнялись неравенства $\alpha - \pi \le \varphi_n < \alpha + \pi$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что круг $|z - a| < \delta$ лежит внутри угла $\alpha - \varepsilon < \operatorname{Arg} z < \alpha + \varepsilon$. Поскольку $z_n \to a$, то существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ точки z_n лежат в круге $|z - a| < \delta$ и поэтому $\alpha - \varepsilon < \varphi_n < \alpha + \varepsilon$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \alpha$.

§5. Показательная форма комплексных чисел.

По аналогии с действительным случаем определим функцию e^z равенством

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

и покажем существование предела при любом $z \in C$.

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{n/2} = \left(1 + \frac{2x}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)^{n/2}.$$

[1] Коши Огюст Луи(1789-1857)– французский математик, член Парижской академии наук, иностранный почетный член Петербургской академии наук, основные исследования посвящены математическому анализу и математической физике, является одним из создателей теории функций комплексного переменного.

[2] Больцано Бернард (1781-1848)– чешский математик, философ, теолог, изучал логические основы математического анализа.

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815-1897)– немецкий математик, иностранный почетный член Петербургской академии наук, основные исследования посвящены математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии.

и, следовательно,
$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = e^x.$$

При достаточно больших значениях n точка $\left(1+\frac{z}{n}\right)$ лежит в правой полуплоскости, поэтому будем считать, что $\operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right)$ равен арктангенсу отношения мнимой части к действительной и лежит в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{y/n}{1+x/n} = y.$$

Следовательно
$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\ z} = e^x, \quad \operatorname{Arg}\ e^z = \operatorname{Im} z = y$$

и
$$e^z = e^{x+iy} = |e^z|(\cos(\operatorname{Arg}\ e^z) + i\sin(\operatorname{Arg}\ e^z)) = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Таким образом введенная нами функция на действительной оси (т.е. при $y=0$) совпадает с обычной экспонентой действительного переменного, а при $x=0$ получаем формулу Эйлера[1]

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y,$$

и, в частности, полезное равенство $e^{2\pi ik}=1$ для любого целого числа k.

Из тригонометрической формы легко получить *показательную форму* записи комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} = |z|e^{i\ \operatorname{Arg}\ z}.$$

Для функции e^z выполняются стандартные свойства показательной функции действительного переменного, к примеру,
$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2},$$

однако в комплексной области экспонента оказывается периодической функцией с чисто мнимым периодом равным $2\pi i$
$$e^{z+2\pi ik} = e^z\cdot e^{2\pi ik} = e^z\cdot 1 = e^z.$$

Определяя стандартным образом логарифм комплексного числа $w = \operatorname{Ln}\ z$ условием: $e^w = z$, мы получим бесконечно много решений

$$w_k = \ln|z| + i(\arg\ z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Пусть $a, b\in C$ и $a\neq 0$, положим по определению

$$a^b = e^{b\operatorname{Ln}\ a} = e^{b(\ln|a| + i(\arg\ a + 2\pi k))}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

В общем случае при возведении комплексного числа в произвольную комплексную степень мы будем получать бесконечную серию ответов.

Из формулы Эйлера следует, что

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Учитывая эти соотношения, тригонометрические функции комплексного переменного определим равенствами
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}; \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Определяя стандартным образом $w = \operatorname{Arcsin}\ z$ (арксинус комплексного числа z) условием: $\sin w = z$, мы получим бесконечно много решений

$$\operatorname{Arcsin}\ z = -i\operatorname{Ln}\ i(z + \sqrt{z^2-1}).$$

Аналогичным образом определяются функции $\operatorname{Arccos}\ z$, $\operatorname{Arctg}\ z$, $\operatorname{Arcctg}\ z$.

[1]Эйлер Леонард (1707-1783)– математик, механик и физик, член Петербургской, Берлинской, Парижской академий, член Лондонского королевского общества. С 1727 по 1741 и с 1766 до конца жизни работал в Петербургской академии наук. Круг интересов Эйлера включал в себя все отделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию музыки, теорию машин, баллистику, морскую науку, страховое дело, ... Эйлер первым начал систематическое изучение функций комплексного переменного и применение мнимых величин к вычислению интегралов.

Определяя гиперболические функции равенствами

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z},$$

легко заметить, что на комплексной плоскости тригонометрические и и гиперболические функции образуют один и тот же класс функций, поскольку выражаются одни через другие

$$\cos z = \operatorname{ch} iz; \ \sin iz = i \operatorname{sh} z; \ \ldots$$

Введенные нами функции комплексного аргумента $\sin z$ и $\cos z$ на действительной оси совпадают с обычными тригонометрическими функциями $\sin x$ и $\cos x$ действительного аргумента, будут 2π – периодическими, но перестают быть ограниченными – на комплексной плоскости функции $\sin z$ и $\cos z$ принимают сколь угодно большие по модулю значения.

§6. Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка.

Еще одну геометрическую интерпретацию множества комплексных чисел, предложенную Риманом[1], можно получить, если точкам комплексной плоскости C сопоставить их сферические образы.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство с координатами (ξ, η, θ) и совместим комплексную плоскость C с плоскостью $O\xi\eta$ так, чтобы действительная ось совпала с осью $O\xi$, мнимая ось с осью $O\eta$, и положительные направления на соответствующих осях совпадали.

Обозначим через S сферу с центром в точке $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ радиуса $\frac{1}{2}$, имеющую уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 + (\theta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \text{ или } \xi^2 + \eta^2 = \theta(1 - \theta), \tag{2}$$

а точку $(0, 0, 1)$ назовем *полюсом* сферы S и обозначим символом P. Соединим отрезком точку $z \in C$ с полюсом P, при этом отрезок пересечет сферу S в единственной точке $M(\xi, \eta, \theta)$. Точка M называется *стереографической проекцией* точки $z \in C$ на сферу S.

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками комплексной плоскости C и точками сферы S с выколотым полюсом P.

В силу колинеарности точек $P(0, 0, 1)$, $\ M(\xi, \eta, \theta)$ и $z(x, y, 0)$ имеем

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1 - \theta}{1},$$

$$x = \frac{\xi}{1 - \theta}, \ y = \frac{\eta}{1 - \theta}, \ z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \theta}. \tag{3}$$

Поскольку

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \theta)^2},$$

то из уравнения сферы (2) получаем

$$|z|^2 = \frac{\theta}{1 - \theta}. \tag{4}$$

Выражая из равенства (4) значение θ и подставляя его в равенства (3), находим

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \ \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \ \theta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \tag{5}$$

Формулы (5) называют формулами стереографической проекции.

Стереографическая проекция обладает замечательным *круговым свойством:* всякая окружность или прямая на комплексной плоскости C отображается стереографической проекцией в окружность на сфере S, и обратно, прообразом всякой окружности на сфере S является либо окружность либо прямая на плоскости C.

Действительно, уравнение произвольной окружности на плоскости C имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \tag{6}$$

где A, B, C, D – действительные числа, удовлетворяющие условиям $A > 0, B^2 + C^2 > 4AD$. При $A = 0$ и $B^2 + C^2 > 0$ уравнение (6) определяет прямую на плоскости C.

---

[1]Риман Георг Фридрих Бернхард (1826-1866)– немецкий математик. Основные работы посвящены математическому анализу, теории функций комплексного переменного и геометрии. Основоположник геометрического направления в теории аналитических функций.

Чтобы найти соответствующую линию на сфере, заменим в уравнении (6) переменные x и y их выражениями через ξ, η, θ по формулам (3) и получим

$$B\xi + C\eta + (A - D)\theta + D = 0. \tag{7}$$

Следовательно стереографической проекцией линии, определяемой уравнением (6), является окружность, получаемая в результате пересечения сферы S и плоскости, определяемой уравнением (7).

Поскольку всякая плоскость, пересекающая сферу S, задается уравнением (7) при некоторых коэффициентах, удовлетворяющих условиям $A \geq 0, B^2 + C^2 > 4AD$, то очевидно, что прообразом произвольной окружности на сфере S является либо окружность либо прямая на комплексной плоскости C, определяемая уравнением (6).

Так как при $A = 0$ плоскость (7) проходит через полюс P, то при стереографической проекции прямая, лежащая на комплексной плоскости, отображается в окружность, проходящую через полюс сферы S, и обратно.

При неограниченном удалении точки z от нуля в произвольном направлении (вдоль произвольной прямой) образ этой точки на сфере всегда будет стремиться к полюсу P. Добавим к комплексной плоскости C *идеальный объект,* называемый *бесконечно удаленной точкой* и обозначаемый символом ∞. Далее комплексную плоскость с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой будем называть *расширенной комплексной плоскостью* и обозначать символом $\overline{C}$, т.е. $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$.

Если мы доопределим стереографическую проекцию, полагая полюс P образом бесконечно удаленной точки, то получим взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью $\overline{C}$ и сферой S.

Стандартной окрестностью полюса P на сфере является "шапочка", т.е. часть сферы S, расположенная выше некоторой плоскости $\theta = a,\ 0 < a < 1$. Стандартной окрестностью бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости является прообраз стандартной окрестности полюса P при стереографической проекции, т.е. множество $U = \{|z| > r > 0\}$ – внешность круга с центром в нуле. При таком определении стереографическая проекция будет непрерывна и в бесконечно удаленной точке. При этом отображение всей расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ на сферу S будет гомеоморфизмом. Сферу S, на которой изображены комплексные числа, называют *сферой Римана.*

Естественным образом определяется сходимость последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ к бесконечно удаленной точке: $z_n \to \infty$, если для любой окрестности бесконечно удаленной точки U найдется такой номер n_0, что при $n > n_0$ точки z_n принадлежат окрестности U. Это определение эквивалентно тому, что $|z_n| \to +\infty$.

Расширенная комплексная плоскость $\overline{C}$ является компактным множеством. Это легко проверить непосредственно по определению компактности множества, т.е. показать, что из любого открытого покрытия комплексной плоскости $\overline{C}$ можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть Σ – произвольное открытое покрытие расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$, открытое множество $U_0 \in \Sigma$ и содержит бесконечно удаленную точку. Множество $K = \overline{C} \setminus U_0$ является компактным, поскольку оно ограничено и замкнуто. Согласно определению компактности, существует такой конечный набор открытых множеств $U_k \in \Sigma,\ k = 1, \ldots, n$, что $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$. Следовательно, вся расширенная комплексная плоскость $\overline{C}$ покрывается конечным набором открытых множеств $U_0, U_1, \ldots, U_n$.

На расширенной комплексной плоскости всякое замкнутое множество будет компактным. Добавление к комплексной плоскости бесконечно удаленной точки называют *одноточечной компактификацией*, а саму расширенную комплексную плоскость $\overline{C}$ иногда называют *компактифицированной комплексной плоскостью.*

Помимо кругового свойства стереографическая проекция обладает еще одним замечательным свойством - *консерватизмом углов.* Это означает, что угол между любыми гладкими кривыми на комплексной плоскости равен углу между образами этих кривых, лежащими на сфере S.

В силу симметрии достаточно показать выполнение этого свойства в произвольной точке лежащей на действительной прямой, т.е. в точке $z = a + i0$. Пусть γ_1 и γ_2 – гладкие кривые, пересекающиеся в точке $z = a + i0$. Если $z_k = z_k(s) = x_k(s) + iy_k(s),\ k = 1, 2$ натуральные параметризации данных кривых (т.е. в качестве параметра выбрана длина дуги), то косинус угла между кривыми γ_1 и γ_2 в точке $z = a + i0$ равен скалярному произведению касательных векторов, т.е.

$$\cos\alpha = \dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{y}_1\dot{y}_2.$$

Кривые Γ_1 и Γ_2, являющиеся образами кривых γ_1 и γ_2 при стереографической проекции, лежат на сфере S, пересекаются в точке $M(\frac{a}{1+a^2}; 0; \frac{a^2}{1+a^2})$ и имеют параметризации

$$\xi_k = \frac{x_k(s)}{1 + x_k^2(s) + y_k^2(s)};\quad \eta_k = \frac{y_k(s)}{1 + x_k^2(s) + y_k^2(s)};\quad \theta_k = \frac{x_k^2(s) + y_k^2(s)}{1 + x_k^2(s) + y_k^2(s)}.$$

Несложно найти касательные векторы к кривым Γ_k в точке M и их нормы

$$\bar{\tau}_k = \frac{1}{(1+a^2)^2}\Big(\dot{x}_k((1-a^2); \dot{y}_k((1+a^2); 2a\dot{x}_k\Big), \quad ||\bar{\tau}_k|| = \frac{1}{1+a^2}.$$

Теперь легко находится косинус угла между кривыми Γ_1 и Γ_2 в точке M

$$\cos\beta = \frac{\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2}{||\bar{\tau}_1||||\bar{\tau}_2||} = \frac{1}{(1+a^2)^2}\Big(\dot{x}_1\dot{x}_2[(1-a^2)^2+4a^2] + \dot{y}_1\dot{y}_2(1+a^2)^2\Big) =$$

$$\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{y}_1\dot{y}_2 = \cos\alpha.$$

Из этого равенства следует сохранение углов при стереографической проекции.

Историческая справка.

Впервые мнимые величины, как корни квадратные из отрицательных чисел, появились в труде Кардано[1] "Великое искусство, или Об алгебраических правилах"(1545), который счел их бесполезными, негодными к употреблению, приводящими к бессмысленным результатам. "...Второй вид ложного решения уравнения заключается в корне из $m:$ (1). Я приведу пример. Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые по перемножению дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5, умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножению, скажем 40, - как я объяснял это тебе в главе о действиях в 4-й книге; тогда останется $m:15$ (2); если взять от этого R (3) и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части будут: $5p:Rm:15$ и $5m:Rm:15$ (4)..."

Примечания. *Обозначения, используемые Кардано, соответствуют XVI веку и весьма непривычны современному читателю:*

1. *Символом* $m:$ *Кардано обозначает отрицательные числа;*
2. $m:15 = -15$;
3. *$R-$ символ квадратного корня;*
4. $5p:Rm:15 = 5 + i\sqrt{15}$ *и* $5m:Rm:15 = 5 - i\sqrt{15}$.

Важность мнимых величин в теории алгебраических уравнений впервые осознал болонский инженер и математик Бомбелли [2]. В отличие от Кардано, который рассматривал мнимые числа как курьез и не дал им никакого применения, Бомбелли объяснил с их помощью так называемый "неприводимый случай", встречающийся при решении кубических уравнений. Именно это обстоятельство прежде всего привлекло внимание алгебраистов к новой категории чисел, поразившей их воображение.

В своем трактате "Алгебра"(1572) Бомбелли вводит мнимые числа формально через определение правил действий над ними. "...Я нашел другой род связанных кубических корней, значительно отличающийся от других, возникающий при решении уравнений вида куб равен корням и числу (5); ...разность квадрата половины числа и куба трети корней (6)[по извлечении квадратного корня] не может быть названа ни положительной, ни отрицательной, поэтому я буду называть ее *плюс от минуса* (più di meno), когда она должна прибавляться, а в тех случаях, когда она должна отниматься, я буду назвать ее *минус от минуса* (meno di meno) (7); ...корни этого рода покажутся многим скорее софистическими, чем имеющими действительное значение; такого мнения держался я до тех пор, пока не нашел доказательства на линиях."

Правила Бомбелли.

Плюс на плюс от минуса дает плюс от минуса.
Минус на плюс от минуса дает минус от минуса.
Плюс на минус от минуса дает минус от минуса.
Минус на минус от минуса дает плюс от минуса.
Плюс от минуса на плюс от минуса дает минус.
Плюс от минуса на минус от минуса дает плюс.
Минус от минуса на минус от минуса дает минус.
Минус от минуса на плюс от минуса дает плюс.

Примечания.

5. *То есть* $x^3 = px + q$;
6. $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$;
7. *Написание перед числом* **più di meno** *и* **meno di meno** *эквивалентно умножению числа на* $+i$ *и* $-i$ *соответственно.*

[1]Кардано Джероламо (1501-1576)– итальянский математик, философ и врач. С именем Кардано связывают формулу решения в радикалах неполного кубического уравнения. Занимался вопросами передачи движения, теорией рычагов (карданная передача, карданный подвес ...)

[2]Бомбелли Раффаэле (1530-1572)– итальянский математик и инженер, первым сформулировал простейшие правила действий над комплексными числами и применил их к исследованию кубических уравнений.

В XVII веке алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной и даже загадочной и мистической. Еще Декарт[1] в своей "Геометрии"говорил, что эти величины никак нельзя себе представить, почему и назвал их "мнимыми", т.е. воображаемыми (по латыни – *radices imaginariae*). Ньютон[2] не включал мнимые величины в понятие числа, а Лейбницу[3] принадлежит фраза: "Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием."

Несмотря на многочисленные важные применения комплексных чисел, почти все математики XVII–XVIII веков рассматривали их как полезные фикции, лишенные самостоятельного реального смысла, и, если это оказывалось возможным, охотно отказывались от их употребления. Только Валлису[4] пришла мысль смотреть на мнимую величину $\sqrt{-bc}$ как на среднюю пропорциональную между положительной и отрицательной величинами. Он попытался также в "Алгебре"(1685) дать различные геометрические толкования чисто мнимых и комплексных величин, которые хотя и не вполне ему удались, но все же послужили основой для последующих интерпретаций.

Задача о выражении корней степени n из данного числа была решена в работах Муавра и Котеса[5]. Обозначение $\sqrt{-1}$ символом i впервые встречается в статье Эйлера (1777). Он же высказал в 1751 мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. Даламбер[6] и Эйлер в своих вычислениях неоднократно переходили от чисел $a + b\sqrt{-1}$ к точкам с координатами a, b и обратно, но они считали мнимые числа лишь удобными знаками. Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними было предложено в работах Весселя[7] (1799) и Аргана[8] (1806). Однако действительное признание и широкую известность геометрическая интерпретация комплексных чисел получает после выхода в свет мемуара Гаусса[9] "Теория биквадратных вычетов"(1831). Причиной этого признания послужило не столько преклонение перед авторитетом Гаусса, сколько то обстоятельство, что он перенес на комплексные числа понятие "целости"и получил с их помощью существенно новые результаты для обычных целых чисел. С этого времени комплексные числа становятся полноправным математическим объектом, а сам термин *комплексное число,* введенный ранее Карно[10], входит в обиход.

Чисто арифметическая теория комплексных чисел как упорядоченных пар действительных чисел была построена Гамильтоном[11] (1837). Ему же принадлежит важное пространственное обобщение комплексных чисел – кватернионы. Вообще, в конце XIX века было доказано, что всякое расширение понятия числа за пределы поля комплексных чисел возможно только в случае отказа от каких-либо привычных свойств операций над числами.

---

[1]Декарт Рене (1596-1650)– французский философ и математик, заложил основы аналитической геометрии, ввел многие современные алгебраические обозначения, высказал закон сохранения количества движения, дал понятие импульса силы.

[2]Ньютон Исаак (1643-1727) - английский физик и математик, создавший теоретические основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление, изобретатель зеркального телескопа, автор важнейших экспериментальных работ по оптике ...

[3]Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)– немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед, член Лондонского королевского общества, член Парижской академии наук. В математике важнейшей заслугой Лейбница является разработка (наряду с Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления. В физике развивал учение об относительности пространства, времени и движения. Ввел меру движения "живую силу"(кинетическую энергию) – произведение массы тела на квадрат скорости, открыл закон сохранения кинетической энергии, высказал идею о превращении одних видов энергии в другие ...

[4]Валлис Джон (1616-1703)– английский математик, один из основателей Лондонского королевского общества, его основной труд "Арифметика бесконечного"(1655) сыграл важную роль в предыстории интегрального исчисления.

[5]Котес Роджер (1682-1716)– английский математик, член Лондонского королевского общества. Получил различные формулы дифференциального и интегрального исчисления, дифференциальной геометрии, теории ошибок.

[6]Даламбер Жан Лерон (1717-1783)- французский математик и философ, иностранный почетный член Петербургской академии наук, член Парижской, Французской и других академий. Основные математические труды относятся к теории дифференциальных уравнений, впервые сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений движения произвольных материальных систем – *принцип Даламбера.* При решении встречающегося в гидродинамике уравнения с частными производными впервые применил функции комплексного переменного.

[7]Вессель Каспар (1745-1818)– датский математик. Автор труда "Об аналитическом представлении направлений,"в котором впервые дано геометрическое представление комплексных чисел. В течение столетия сочинение Весселя оставалось неизвестным, и его результаты переоткрывались вновь.

[8]Арган Жан Робер (1768-1822)– швейцарский математик, дал геометрическую интерпретацию комплексных чисел на плоскости, ввел термин "модуль комплексного числа".

[9]Гаусс Карл Фридрих (1777-1855)– немецкий математик, иностранный почетный член Петербургской академии наук. Работы Гаусса оказали большое влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории тяготения, классической теории электричества и магнетизма, геодезии, целых отраслей теоретической астрономии.

[10]Карно Лазар Никола Маргерит (1753-1823)– французский математик, государственный и военный деятель, член Парижской академии наук. Научные результаты Карно относятся к анализу, геометрии и прикладной механике. Предпринял попытку обосновать правильность результатов исчисления бесконечно малых.

[11]Гамильтон Уильям Роуан (1805-1865)– ирландский математик и астроном, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук, член Ирландской королевской академии наук. Дал точное формальное изложение теории комплексных чисел и построил своеобразную систему чисел, так называемых *кватернионов.* В механике Гамильтон применил вариационный метод, так называемый принцип наименьшего действия.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ
Комплексная плоскость

1.1. Найти действительные и мнимые части, модули и аргументы комплексных чисел:

$$a)\ z_1 = \frac{1-i}{1+i};\quad b)\ z_2 = (1+i\sqrt{3})^6;\quad c)\ z_3 = \frac{(1+i)^8}{(1+i\sqrt{3})^3}.$$

1.2. Вычислить

$$a)\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6;\quad b)\ \frac{(1-i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^{16}};\quad c)\ \left(\frac{a+ib}{b-ia}\right)^{11}.$$

1.3. Решить уравнение $\bar{z} = z^{n-1}$ $\quad (n$ – целое число).

1.4. Доказать тождества

$$a)\ |z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2);$$
$$b)\ |1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).$$

1.5. Доказать неравенства

$$a)\ \frac{|z-|z||}{|z|} < \arg z,\quad \operatorname{Im} z > 0;$$
$$b)\ |z_1+z_2| \geq \frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|.$$

1.6. Пусть $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Доказать, что точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника.

1.7. Даны три вершины параллелограмма z_1, z_2, z_3. Найти четвертую вершину z_4, противоположную вершине z_2.

1.8. При каком условии три попарно различные точки точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой?

1.9. Какие множества точек комплексной плоскости описываются следующими условиями:

$$a)\ |z-2|+|z+i| = 5;\ b)\ |z-2|-|z+2| > 3;\ c)\ \operatorname{Re} z^2 = M;\ d)\ \operatorname{Im} z^2 = M \quad (M \in R);\ e)\ \left|\frac{z-2}{z-1}\right| = 2.$$

1.10. Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек линии

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = a \quad (a > 0).$$

1.11. Найти образы точек $a)\ z = 1,\ b)\ z = i,\ c)\ z = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ при стереграфической проекции.

1.12. При каком условии стереографическими проекциями точек z_1 и z_2 являются диаметрально противоположные точки сферы Римана?

1.13. При каком преобразовании сферы Римана образ точки z переходит в образ точки $\frac{1}{z}$?

1.14. Что соответствует на сфере Римана семейству параллельных прямых на комплексной плоскости?

1.15. Найти длину хорды, соединяющей стереографические проекции точек z_1 и z_2. Рассмотреть случай, когда одна из точек бесконечно удаленной точкой.

1.16. Доказать, что поле комплексных чисел изоморфно множеству матриц вида

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

со стандартными операциями сложения и умножения матриц.

1.17. Найти все значения выражений

$$1)\ \sqrt[5]{1};\quad 2)\ \sqrt[4]{-1};\quad 3)\ \sqrt[7]{-4+3i};\quad 4)\ \mathrm{Ln}(-1);\quad 5)\ \mathrm{Ln}(1+i\sqrt{3});$$

$$6)\ 1^{\sqrt{2}};\quad 7)\ 2^{i};\quad 8)\ i^{i};\quad 9)\ \mathrm{Arccos}\,2;\quad 10)\ \mathrm{Arctg}(1+2i).$$

1.18. Найти суммы:

$$a)\ 1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx;$$

$$b)\ \sin x+\sin 2x+\ldots\sin nx;$$

$$c)\ \cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x;$$

$$d)\ \sin x+\sin 3x+\ldots\sin(2n-1)x.$$

1.19. Найти все значения z, для которых

$$a)\ |\operatorname{tg} z|=1;\quad b)\ |\operatorname{th} z|=1.$$

1.20. Доказать следующие равенства (для корней берутся все их значения):

$$a)\ \mathrm{Arccos}\ z=-i\,\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1});$$

$$b)\ \mathrm{Arcsin}\ z=-i\,\mathrm{Ln}\ i(z+\sqrt{z^2-1});$$

$$c)\ \mathrm{Arctg}\ z=\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\ \frac{z-i}{z+i}.$$

1.21. Найти все корни уравнения $\sin z+\cos z=5$.

1.22. Найти множества точек комплексной плоскости, на которых функция $\cos z$ принимает: a) действительные значения, b) чисто мнимые значения.

1.23. Пусть сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$, при этом $\mathrm{Re}\ c_n \geq 0$. Доказать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c|_n^2$.

1.24. Пусть $z \neq 0$. Найти все предельные точки множества

$$E=\{n(\sqrt[n]{z}-1)\mid n=1,2,3,\ldots\}.$$

1.25. Доказать, что при любых комплексных значениях величин

$$z_1, z_2, \ldots, z_n,\quad w_1, w_2, \ldots, w_n$$

выполняется неравенство

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\cdot w_k\Big|^2 \leq \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2$$

(неравенство Коши-Буняковского-Шварца.)

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§1. Непрерывные функции комплексного переменного.

Пусть $D \subset C$ – область и точка $z_0 \in D$.

Определение. Число $\lambda \in C$ называется пределом функции $f : D \to C$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $0 < |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

При этом используется стандартная запись

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda.$$

Всякая функция $f : D \to C$ может быть записана в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y), v(x, y)$ – действительнозначные функции и $z = x + iy$. При этом функция u называется действительной частью функции f и обозначается $u = Re\, f$, функция v называется мнимой частью функции f и обозначается $v = Im\, f$.

Для существования предела функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda = a + ib$$

необходимо и достаточно одновременное существование пределов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0)

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = a, \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = b.$$

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Иными словами, функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $|z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Из свойств предела функции следует, что непрерывность $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, как функции комплексного переменного z, эквивалентна одновременной непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0), как функций двух действительных переменных.

Если функции $f : D \to C$ сопоставить отображение $F : D \subset R^2 \to R^2$, полагая $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, то очевидно, что существование предела и непрерывность функции комплексного переменного $f(z)$ эквивалентны соответственно существованию предела и непрерывности отображения $F(x, y)$. Поэтому для непрерывных функций комплексного переменного верны все свойства непрерывных отображений из R^2 в R^2, известные из действительного анализа.

Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

равномерно сходится к функции $f(z)$ на множестве $E \subset C$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ и всех $z \in E$ выполняется неравенство

$$|f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Для равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

на множестве $E \subset C$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$, $m \in N$ и всех $z \in E$ выполнялось неравенство

$$|\sum_{k=n}^{n+m} f_k(z)| < \varepsilon.$$

Удобное достаточное условие равномерной сходимости дает *признак Вейерштрасса:* Если $|f_k(z)| \le a_k$ для всех $z \in E$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

равномерно сходится на множестве E.

Если функции $f_k(z)$ непрерывны, то сумма равномерно сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

является непрерывной функцией.

§2. Дифференцирование функций комплексного переменного.

Пусть $D \subset C$ – область и точка $z_0 \in D$.

Определение. Функция $f : D \to C$ называется дифференцируемой в точке z_0, если существует такое число $\lambda \in C$, что

$$f(z) - f(z_0) = \lambda(z - z_0) + o(z - z_0) \quad \text{при} \quad z \to z_0. \tag{1}$$

Если функция $f : D \to C$ дифференцируема в точке z_0, то соответствующее число λ называется производной функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается стандартным образом $f'(z_0)$.

В равенстве (1) символ $o(z - z_0)$ понимается в стандартном смысле

$$\lim_{z \to z_0} \frac{o(z - z_0)}{z - z_0} = 0,$$

следовательно $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$ при $\Delta z \to 0$.

Равенство (1) эквивалентно существованию конечного предела

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{2}$$

Практически дословное повторение доказательств из одномерного действительного анализа позволяет получить стандартные правила нахождения производной:

1.$(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$;

2.$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$;

3.$(f/g)'(z) = (f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z))(g(z))^{-2}$;

4.$(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot (g'(z))$.

В отличие от непрерывности дифференцируемость функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в смысле комплексного переменного не сводится к дифференцируемости ее действительной и мнимой частей как функций двух действительных переменных.

Пример. Рассмотрим функцию $f(z) = ax + iby$, у которой действительная часть $Re\, f(z) = ax$ и мнимая часть $Im\, f(z) = by$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Если выбрать приращение аргумента вдоль прямой параллельной действительной оси, то $\Delta z = \Delta x$ и

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a,$$

если же выбрать приращение аргумента вдоль прямой параллельной мнимой оси, то $\Delta z = i\Delta y$ и

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{ib\Delta y}{i\Delta y} = b.$$

Таким образом для дифференцируемости функции $f(z) = ax + iby$ в смысле комплексного переменного гладкости ее действительной и мнимой частей оказывается *недостаточно,* и данная функция будет дифференцируемой только при $a = b$, т.е. в случае, когда $f(z) = az$!

Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в смысле комплексного переменного дает следующая теорема.

Теорема. Для дифференцируемости в смысле комплексного переменного функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ должны быть дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух действительных переменных;

2. частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x_0,y_0) должны быть связаны *условиями Коши-Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Необходимость. Пусть функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ в смысле комплексного переменного и ее производная $f'(z_0) = \lambda = A + iB$.

Непосредственно из определения следует, что

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \lambda\Delta z + o(\Delta z) = (A+iB)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z) =$$

$$(A\Delta x - B\Delta y) + i(B\Delta x + A\Delta y) + o_1(\Delta z) + io_2(\Delta z). \tag{1}$$

Выделяя в равенстве (1) действительную и мнимую части, получаем

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + o_1(\Delta z) \tag{2}$$

и

$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + o_2(\Delta z). \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) следует дифференцируемость функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ как функций двух действительных переменных, при этом

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy = Adx - Bdy$$

и

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = Bdx + Ady.$$

Следовательно

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad B = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

и условия Коши-Римана выполняются.

Достаточность. Из дифференцируемости функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ как функций двух действительных переменных и условий Коши-Римана следует выполнение равенств (2) и (3). Умножая равенство (3) на мнимую единицу i и складывая с равенством (2), получаем равенство (1), которое и означает дифференцируемость функции f в смысле комплексного переменного.

Замечание. Значение производной $f'(z_0) = A + iB$, а из доказательства теоремы следует, что

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad B = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Поэтому для вычисления производной мы можем использовать различные линейные комбинации частных производных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$f'(z_0) = A + iB = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \ldots$$

Определение. Функция $f : D \to C$ называется *аналитической в области* $D \subset C$, если она дифференцируема в каждой точке области D, и ее производная является непрерывной в области D функцией.

Определение. Функция f называется *аналитической в точке* $z_0 \in C$, если существует **окрестность** точки z_0, в которой функция f является аналитической.

Таким образом, говоря об аналитичности функции в точке, мы заранее предполагаем, что функция определена не только в данной точке, но определена и является аналитической в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Функция f называется *аналитической на множестве* $E \subset C$, если она является аналитической в каждой точке множества E.

К примеру, если функция является аналитической в замкнутом шаре $\overline{B(a,r)}$, то она является аналитической и в некотором открытом множестве, содержащем данный замкнутый шар, и следовательно является аналитической и в некотором открытом шаре $B(a, r+\varepsilon) \supset \overline{B(a,r)}$.

Замечание. Вообще говоря, в определении аналитичности функции в области требование непрерывности производной является излишним, т.к. оно является следствием дифференцируемости функции во всех точках области. Однако доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Замечание. В математике принято называть аналитическими функции, представимые сходящимися степенными рядами. Данное нами определение аналитических функций комплексного переменного вполне согласуется с общим подходом, т.к. далее будет показано, что всякая аналитическая в области функция комплексного переменного в некоторой окрестности произвольной точки области представима степенным рядом.

§3. Геометрический смысл производной.

Пусть функция $f = u + iv$ является аналитической в окрестности U точки $z_0 \in C$ и $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим связанное с функцией f отображение $F : U \to R^2$, определяемое по правилу $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Найдем матрицу Якоби отображения F и, используя условия Коши-Римана, преобразуем ее к специальному виду

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{*}}\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{1}{\sqrt{*}}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{*}}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{\sqrt{*}}\frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} =$$

$$|f'(z_0)| \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $* = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ и $\varphi = arg f'(z_0)$.

Таким образом отображение, осуществляемое дифференциалом функции f (дифференциалом отображения F) в точке z_0, сводится к растяжению с коэффициентом $|f'(z_0)|$ и повороту на угол $\varphi = arg f'(z_0)$.

Пусть γ_1 и γ_2 - гладкие кривые, проходящие через точку z_0, а $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$, - касательные векторы к кривым γ_1 и γ_2 в точке z_0 соответственно.

Тогда векторы $\bar{h}_1 = J\bar{\tau}_1$ и $\bar{h}_2 = J\bar{\tau}_2$ будут касательными к кривым $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ и $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$ в точке $w_0 = f(z_0)$ соответственно. При этом

$$|\bar{h}_1| = |f'(z_0)||\bar{\tau}_1|, \qquad |\bar{h}_2| = |f'(z_0)||\bar{\tau}_2|.$$

Таким образом при отображении аналитической функцией f в точке z_0 ($f'(z_0) \neq 0$) коэффициент растяжения не зависит от направления и равен $|f'(z_0)|$. Это свойство обычно называют *постоянством растяжения по всем направлениям.*

Пусть ψ_1 и ψ_2 - соответственно углы между векторами $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ и положительным направлением действительной оси, а θ_1 и θ_2 - соответственно углы между векторами $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ и положительным направлением действительной оси. Поскольку $\theta_1 = \psi_1 + \varphi$ и $\theta_2 = \psi_2 + \varphi$, то $\theta_2 - \theta_1 = \psi_2 - \psi_1$. Следовательно угол между кривыми Γ_1 и Γ_2 (угол между касательными векторами) в точке w_0 равен углу между кривыми γ_1 и γ_2 в точке z_0. Таким образом при отображении аналитической функцией f угол между произвольными гладкими кривыми в точке z_0 ($f'(z_0) \neq 0$) равен углу между образами данных кривых в точке $w_0 = f(z_0)$. Это свойство обычно называют *консерватизмом углов.*

Определение. Отображение f области $D \subset C$ на область $D' \subset C$ называют *конформным,* если отображение $f : D \to D'$

1. является взаимно однозначным;

и в каждой точке $z \in D$ обладает свойствами:

2. постоянства растяжения по всем направлениям;

3. консерватизма углов.

Если функция f является аналитической в области $D \subset C$ и $f'(z) \neq 0$ всюду в области D, то в каждой точке $z \in D$ функция f обладает свойствами постоянства растяжения по всем направлениям и консерватизма углов. Однако отличие производной от нуля в общем случае не гарантирует взаимную однозначность отображения во все области.

Пример. Рассмотрим кольцо $D = \{z \in C \mid 1 < |z| < 2\}$ и $f(z) = z^2$. Функция $w = f(z) = z^2$ отображает кольцо D на кольцо $D' = \{w \in C \mid 1 < |w| < 4\}$, при этом $f'(z) = 2z$ и, следовательно, $f'(z) \neq 0$ всюду в кольце D. Однако отображение не будет взаимно однозначным во всем кольце D, поскольку с каждой точкой $z \in D$ точка $-z$ также принадлежит кольцу D и при этом $f(-z) = (-z)^2 = z^2 = f(z)$.

В рассмотренной в примере ситуации отображение не будет взаимно однозначным во всем кольце D, но будет *локально* взаимно однозначным, т.е. будет взаимно однозначным в некоторой окрестности каждой точки кольца D.

Теорема.(*Об обратной функции.*) Пусть функция f является аналитической в точке $z_0 \in C$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда существуют такие окрестности U_0 точки z_0 и V_0 точки $w_0 = f(z_0)$, что отображение $f : U_0 \to V_0$ является конформным. При этом существует обратная функция $f^{-1} : V_0 \to U_0$, которая является аналитической в окрестности V_0.

Доказательство. Напомним, что аналитичность функции f в точке z_0 означает, что функция f определена и является аналитической в некоторой окрестности точки z_0.

Рассмотрим отображение $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, координатные функции которого непрерывно дифференцируемы в окрестности точки z_0. Найдем якобиан отображения F в точке z_0

$$detJ(F) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ & \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

По теореме многомерного действительного анализа об обратном отображении существуют такие окрестности U точки z_0 и V точки w_0, что отображение $F : U \to V$ является взаимно однозначным, существует обратное отображение $F^{-1} : V \to U$, и координатные функции обратного отображения $x = x(u,v), y = y(u,v)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности V. В силу непрерывности производной $f'(z)$ существует такая окрестность $U_0 \subset U$, что $f'(z) \neq 0$ при $z \in U_0$. Следовательно функция f взаимно однозначно отображает окрестность U_0 на окрестность $V_0 = f(U_0)$ и обладает в U_0 свойствами постоянства растяжения по всем направлениям и консерватизма углов, т.е. отображение $f : U_0 \to V_0$ является конформным.

В силу дифференцируемости координатных функций обратного отображения $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$ для доказательства аналитичности обратной функции $f^{-1} : V_0 \to U_0$ достаточно показать выполнение условий Коши-Римана.

Матрица Якоби обратного отображения является обратной матрицей к матрице Якоби прямого отображения, поэтому

$$J(F^{-1}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ & \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = (J(F))^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\left(|f'(z_0)| \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ & \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \right)^{-1} = |f'(z_0)|^{-1} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ & \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u},$$

т.е. выполняются условия Коши-Римана для обратной функции, и значит функция f^{-1} является аналитической в окрестности V_0.

Таким образом в достаточно малой окрестности каждой точки, в которой производная отлична от нуля, отображение осуществляемое аналитической функцией является конформным.

Комментарий.

С одной стороны, требование аналитичности функции является довольно жестким условием, которое позволяет получить для таких отображений целый ряд дополнительных свойств, которыми в общем случае не обладают произвольные гладкие отображения плоских областей.

С другой стороны, полезно иметь в виду следующий замечательный факт, доказательство которого, к сожалению, выходит за рамки нашего курса

Теорема Римана. Для произвольных односвязных областей $D, D' \subset C$, границы которых состоят более чем из одной точки, существует конформное отображение области D на область D'.

Таким образом класс аналитических функций на плоскости оказывается достаточно "широким", и при этом сами функции обладают весьма "регулярными"свойствами, что позволяет получить множество различных, иногда неожиданных, приложений теории аналитических функций как в математике так и в физике.

§4. Сопряженные гармонические функции.

Определение. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x,y)$ называется гармонической в области $D \subset C$, если

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

всюду в области D.

Далее будет доказано, что аналитическая в области функция, а следовательно и ее действительная и мнимая части, будут бесконечно дифференцируемы. А пока воспользуемся этим фактом.

Пусть функция $f = u + iv$ является аналитической в области D, тогда для нее выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое равенство по переменной x, второе равенство по переменной y и складывая, получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. функция u является гармонической в области D. Аналогично доказывается гармоничность функции v.

Определение. Гармонические в области D функции называются *сопряженными*, если они связаны условиями Коши-Римана.

Теорема. Для аналитичности функции $f = u + iv$ в области D необходимо и достаточно, чтобы ее действительная часть u и мнимая часть v были сопряженными гармоническими функциями.

Необходимость условий теоремы уже показана, а достаточность следует из того, что гармонические функции дифференцируемы (как функции двух действительных переменных), и их сопряженность влечет выполнение условий Коши-Римана.

Несложно показать, что в односвязной области по данной гармонической функции сопряженная ей гармоническая функция восстанавливается однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

Действительно, пусть функция u является гармонической в односвязной области $D \subset C$. Рассмотрим дифференциальную форму первой степени

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

В силу гармоничности функции u, внешний дифференциал формы

$$d\omega = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy \equiv 0$$

всюду в области D.

Следовательно форма ω является замкнутой, а по теореме Пуанкаре[1] является и точной в односвязной области D. Первообразная точной формы ω может быть записана в виде криволинейного интеграла, значение которого не зависит от пути интегрирования,

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Для производных построенной таким образом функции v выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta v = 0,$$

т.е. функция v действительно является сопряженной гармонической функцией к функции u. Единственность сопряженной функции следует из того, что согласно условиям Коши-Римана дифференциал всякой функции сопряженной к функции u должен совпадать с формой ω, а первообразная формы первой степени восстанавливается однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

§5. Плоскопараллельные поля.

Рассмотрим установившееся плоскопараллельное течение жидкости, т.е. векторы скорости $\vec{V}$ не зависит от времени и одинаковы во всех точках, лежащих на перпендикуляре к некоторой плоскости, которую мы и примем за комплексную плоскость C. Данное течение полностью описывается плоским векторным полем

$$\vec{V} = V_1(x, y) + iV_2(x, y)$$

в комплексной плоскости C.

[1] Пуанкаре Жюль Анри (1854-1912)– французский математик и астроном, член Парижской академии наук, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук. Большой цикл работ Пуанкаре относится к качественной теории дифференциальных уравнений, для функций многих комплексных переменных он построил теорию интегралов, аналогичных интегралу Коши, им получены важные результаты по топологии, математической физике и небесной механике. С именем Пункаре связывают новый взгляд на задачи математики, когда наряду с количественными соотношениями большое значение придается и фактам, имеющим качественный характер.

Будем предполагать, что гладкое поле $\vec{V}$ в односвязной области $D \subset C$ является одновременно потенциальным и соленоидальным.

Из потенциальности поля $\vec{V}$ следует существование потенциала поля скоростей, т.е. такой функции u, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = V_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = V_2, \tag{1}$$

или, в векторной записи $grad\, u = \vec{V}$.

Из соленоидальности поля $\vec{V}$ следует, что

$$div\, \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0.$$

Поэтому дифференциальная форма $\omega = -V_2\, dx + V_1\, dy$ является замкнутой, а по теореме Пуанкаре она является и точной в односвязной области D. Следовательно у формы ω существует первообразная, т.е. такая функция v, что

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -V_2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = V_1, \tag{2}$$

при этом градиент функции v оказывается ортогональным полю скоростей $\vec{V}$.

Поскольку градиент функции ортогонален ее линии уровня, то касательные к линии $v(x,y) = const$ будут параллельны полю скоростей $\vec{V}$, следовательно линия $v(x,y) = const$ является линией тока, т.е. траекторией движения частиц жидкости. Поэтому функцию v называют ***функцией тока.***

Пусть $\gamma \subset D$– ориентированная гладкая кривая с началом в точке a и концом в точке b, $\vec{n}$– единичная нормаль к кривой γ, согласованная с ее ориентацией. Тогда поток векторного поля $\vec{V}$ через кривую γ можно найти по формуле

$$\int_\gamma (\vec{V}, \vec{n}) ds = \int_a^b -V_2\, dx + V_1\, dy = \int_a^b dv = v(b) - v(a). \tag{3}$$

Область, заключенную между двумя линиями тока, называют *трубкой тока.* Из равенства (3) следует, что поток через любое сечение трубки тока одинаков.

Рассмотрим функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, называемую *комплексным потенциалом* векторного поля $\vec{V}$. Поскольку функции u и v гладкие, а из равенств (1) и (2) следует, что они удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = V_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = V_2,$$

то функция $f(z)$ будет аналитической в области D.

Обратно, всякую аналитическую в области D функцию $f = u + iv$ можно рассматривать как комплексный потенциал поля $\vec{V} = grad\, u$, потенциального и соленоидального в области D, которое можно трактовать поле скоростей некоторого потока жидкости.

Пример. Найдем линии тока бесконечно глубокого течения жидкости над плоским дном, обтекающего препятствие высотой h перпендикулярное дну.

Это плоскопараллельное течение полностью описывается плоским векторным полем в расположенной в верхней полуплоскости области D, граница ∂D которой состоит из действительной оси и отрезка $[0, ih]$ мнимой оси.

Найдем комплексный потенциал $f = u + iv$ этого течения. Поскольку граница области D должна быть линией тока, то примем ее за линию $v(x,y) = 0$, и будем считать, что $v(x,y) > 0$ всюду в области D. Тогда задача сводится к отысканию конформного отображения области D на верхнюю полуплоскость.

Одно из таких отображений можно найти довольно просто. Отображение $t = z^2 + h^2$ преобразует область D во всю комплексную плоскость с разрезом вдоль полуоси $Re\, t \geq 0$, $Im\, t = 0$. Отображение обратное к возведению в квадрат

$$w = \sqrt{t} = \sqrt{|t|} = e^{i\frac{arg\, t}{2}},$$

однозначно определенное при $0 < arg\, t < 2\pi$, отображает плоскость с разрезом на верхнюю полуплоскость. Отображение вида

$$f(z) = u + iv = \sqrt{z^2 + h^2}$$

будет удовлетворять нашим требованиям.

Выделяя в равенстве $(u + iv)^2 = (x + iy)^2 + h^2$ действительную и мнимую части, для линии тока $v(x,y) = \lambda$ получаем уравнение

$$y = \lambda \sqrt{1 + \frac{h^2}{x^2 + \lambda^2}}.$$

Когда λ близко к нулю линия тока близка к границе области D и имеет ярко выраженный максимум в точке $x = 0$. При больших значениях λ линии тока будут близки к прямым $y = \lambda$.

Описываемое данным комплексным потенциалом течение имеет на бесконечности скорость

$$V = \lim_{\substack{z \to \infty \\ Im\, z > 0}} |grad\, u| = \lim_{\substack{z \to \infty \\ Im\, z > 0}} |f'(z)| = \lim_{z \to \infty} \frac{|z|}{\sqrt{|z|^2 + h^2}} = 1.$$

Функции комплексного переменного

2.1. Для отображения $w = \frac{1}{z}$ найти образы линий $a)$ $x = C$; $b)$ $\operatorname{Arg} z = \alpha$; $c)$ $|z-1| = 1$.

2.2. Для отображения $w = z + \frac{1}{z}$ найти образ окружности $|z| = R$.

2.3. Для отображения $w = e^z$ найти образы линий $a)$ $x = C$; $b)$ $y = C$; $c)$ $y = x$.

2.4. Найти постоянные a, b, c, при которых функция $f(z) = (1+ib)x + (a+ic)y$ будет аналитической.

2.5. Найти области, в которых функция $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ будет аналитической.

2.6 Пусть $f(z) = u + iv = R\,e^{i\theta}$. Доказать, что если одна из функций $u,\ v,\ R,\ \theta$ тождественно равна постоянной, то и функция $f(z)$ является постоянной.

2.7. Пусть $z = \rho\,e^{i\varphi}$ и $f(z) = u(\rho,\varphi) + iv(\rho,\varphi)$. Записать условия Коши-Римана в полярных координатах.

2.8. Пусть функция u является гармонической. Для каких функций f функция $f(u)$ будет тоже гармонической?

2.9. Пусть функция $f(z)$ является аналитической. Будут ли гармоническими функции $|f(z)|$, $\ln|f(z)|$?

2.10. Найти аналитические функции $f(z) = u + iv$ по заданной действительной или мнимой части:
a) $u = x^2 - y^2 + x$;
b) $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$;
c) $v = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$;
d) $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$.

2.11. Найти аналитические функции $f(z) = Re^{i\theta}$ по заданным модулю или аргументу функции:
a) $R = (x^2+y^2)e^x$;
b) $R = e^{\rho^2\cos 2\varphi}$;
c) $\theta = xy$;
d) $\theta = \varphi + \rho\sin\varphi$.

2.12. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при отображении $w = z^2 + 2z$?

2.13. Пусть $D \subset C$– область, функция $f(z)$ является аналитической в области D, $\gamma \subset D$– произвольная кусочно-гладкая кривая и $\gamma^* = f(\gamma)$. Показать, что для длины образа кривой γ справедлива формула

$$l(\gamma^*) = \int\limits_{\gamma} |f'(z)|\,|d\,z|.$$

2.14. Найти длину спирали, на которую с помощью функции e^z отображается отрезок

$$I = \{y = x,\ 0 \le x \le 2\pi\}.$$

2.15. Пусть $D \subset C$– область, функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на область $D^* \subset C$. Показать, что для площади образа справедлива формула

$$S(D^*) = \iint\limits_{D} |f'(z)|^2\,d\,x\,d\,y.$$

2.16. найти площадь области, на которую с помощью функции e^z отображается прямоугольник

$$P = \{1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}.$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

§1. Дробно-линейные функции.

Дробно-линейной называется функция вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

где $a, b, c, d \in C,\ ad - bc \neq 0$.

Ограничение на коэффициенты связано с тем, что при $ad - bc = 0$ функция будет постоянной. При $c = 0$ обязательно $d \neq 0$ и функция (1) имеет вид

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

т.е. является *линейной.*

Далее мы будем предполагать, что $c \neq 0$. Изменения в доказательствах (реально упрощающие рассуждения) для случая $c = 0$ всякий раз будут вполне очевидны, и, естественно, что свойства верные для дробно-линейных функций общего вида будут верны и для линейных функций.

Значения функции (1) при $c \neq 0$ однозначно определены всюду за исключением двух особых точек $z = -d/c$ и $z = \infty$ (при $c = 0$ функция определена для всех $z \in C$). Доопределим функцию в особых точках, полагая $w(-d/c) = \infty,\ w(\infty) = a/c$ (в случае $c = 0$ достаточно положить $w(\infty) = \infty$, при этом из всех функций вида (1) только линейные функции будут отображать бесконечно удаленную точку в бесконечно удаленную точку). Доопределенная таким образом дробно-линейная функция будет взаимно однозначно и непрерывно отображать всю расширенную комплексную плоскость $\overline{C}$ на себя. Действительно, для линейной функции утверждение очевидно, а при $c \neq 0$ каждому значению $w \neq a/c, \infty$ однозначно соответствует значение аргумента

$$z = \frac{dw-b}{a-cw}. \tag{2}$$

При этом точкам $w = a/c$ и $w = \infty$ однозначно соответствуют точки $z = -d/c$ и $z = \infty$. Непрерывность функции в точках, не являющихся особыми, очевидна, а в особых точках проверяется непосредственно по определению

$$\lim_{z\to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \quad \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

Из равенства (2) следует, что функция обратная к дробно-линейной также будет дробно-линейной. Несложно проверить, что композиция двух дробно-линейных функций вновь будет дробно-линейной функцией. Дробно-линейные функции образуют ассоциативную группу отображений расширенной комплексной плоскости на себя, и единицей в этой группе будет являться тождественное отображение.

Проверить свойство *ассоциативности* и показать, что композиция двух дробно-линейных функций в общем случае не обладает свойством *коммутативности!*

Деля в равенстве (1) числитель и знаменатель на c, легко видеть, что дробно-линейная функция однозначно определяется тремя комплексными коэффициентами. Можно предположить, что для нахождения дробно-линейной функции достаточно знать ее значения в трех различных точках.

Теорема. Для произвольных трех различных точек $z_1, z_2, z_3 \in C$ и произвольных трех различных точек $w_1, w_2, w_3 \in C$ существует единственное дробно-линейное отображение L такое, что $L(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, 3$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные дробно-линейные отображения L_1 и L_2, переводящие соответственно точки z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 в точки $t_1 = 0, t_2 = \infty, t_3 = 1$:

$$L_1(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \quad L_2(w) = \frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}.$$

Из формул видно, что $L_1(z_k) = L_2(w_k) = t_k$. Отображение

$$L = L_2^{-1} \circ L_1,$$

которое в явном виде находится из равенства

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \tag{3}$$

и является искомым. Действительно, оно является дробно-линейным и преобразует точки z_k в точки w_k.

Докажем единственность этого отображения. Пусть λ - какое-либо дробно-линейное отображение, удовлетворяющее условиям $\lambda(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, 3$. Рассмотрим дробно-линейное отображение $h = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$.

Поскольку $h(\infty)=\infty$, то h является линейной функцией, и следовательно $h(t)=at+b$. Из условия $h(0)=0$ получаем, что $b=0$, а из условия $h(1)=1$ получаем, что $a=1$. Таким образом, $h(t)=t$, и отображение $h=L_2\circ\lambda\circ L_1^{-1}=E$ является тождественным. Следовательно $\lambda=L_2^{-1}\circ L_1=L$.

Замечание. Выражение

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

называют *ангармоническим отношением* четырех точек. Равенство (3) означает инвариантность ангармонического отношения при дробно-линейном отображении.

Замечание. Каждая из точек z_k и w_k входит в равенство (3) дважды - в числителе и знаменателе. Несложно проверить, что равенство сохраняется и в том случае, когда какая-либо из точек z_k и соответственно из точек w_k является бесконечно удаленной: нужно только множители, в которых появляется бесконечно удаленная точка заменить на единицу. Например, когда $z_3=w_1=\infty$, равенство (3) принимает вид

$$\frac{1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{1}{1}.$$

Таким образом, теорема остается верной и для точек расширенной комплексной плоскости.

Производная дробно-линейной функции (1)

$$w'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

однозначно определена и отлична от нуля во всех точках $z\in C\setminus\{-d/c\}$. Следовательно дробно-линейная функция конформно отображает $C\setminus\{-d/c\}$ на $C\setminus\{a/c\}$. Можно показать, что и в особых точках $z=-d/c$ и $z=\infty$ углы сохраняются, но для этого нужно вначале определить понятие угла между кривыми в бесконечно удаленной точке.

Пусть гладкие кривые γ_1 и γ_2 таковы, что их образы при стереографической проекции проходят через полюс P и имеют в полюсе касательные. Углом между кривыми γ_1 и γ_2 в бесконечно удаленной точке $z=\infty$ называют угол между образами данных кривых при отображении комплексной плоскости

$$z\to\frac{1}{z}=t$$

в точке $t=0$. Это определение кажется несколько нелогичным - более естественным было бы положить угол в бесконечно удаленной точке между кривыми γ_1 и γ_2 равным углу между образами данных кривых на сфере Римана в полюсе P. Однако, с одной стороны, с таким определением не слишком удобно работать, с другой стороны, угол между кривыми на сфере Римана в полюсе P будет просто равен углу, получаемому при нашем определении. Равенство углов является следствием того, что при стереографической проекции инверсии комплексной плоскости $z\to 1/z$ соответствует поворот сферы вокруг диаметра, параллельного действительной оси, на угол π.

Покажем сохранение углов в точке $z=-d/c$. Пусть гладкие кривые γ_1 и γ_2 пересекаются в точке $z=-d/c$, тогда их образы при дробно-линейном отображении (1) кривые Γ_1 и Γ_2 проходят через бесконечно удаленную точку $w=\infty$. По определению угол между кривыми Γ_1 и Γ_2 в точке $w=\infty$ равен углу в точке $t=0$ между кривыми Γ_1^* и Γ_2^*, являющимися образами кривых Γ_1 и Γ_2 при отображении $t=1/w$. Но

$$t=\frac{cz+d}{az+b},$$

и, следовательно, кривые Γ_1^* и Γ_2^* можно рассматривать как образы исходных кривых γ_1 и γ_2 при этом отображении. Поскольку производная

$$t'=\frac{bc-ad}{(az+b)^2}$$

в точке $z=-d/c$ существует и отлична от нуля, то угол между кривыми Γ_1^* и Γ_2^* в точке $t=0$ равен углу между кривыми γ_1 и γ_2 в точке $z=-d/c$.

Для доказательства сохранения углов в точке $z=\infty$ достаточно повторить то же рассуждение для обратного отображения в точке $w=a/c$.

Таким образом дробно-линейная функция обладает свойством консерватизма углов во всех точках расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$.

Дробно-линейные функции обладают *круговым свойством:* всякая окружность или прямая на комплексной плоскости дробно-линейной функцией отображается в окружность либо в прямую.

Для линейных функций это свойство очевидно, поскольку такие отображения сводятся композиции подобия, поворота и сдвига. Если $c\neq 0$, то функцию (1) можно записать в виде

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c(cz+d)}=A+\frac{B}{z+C}$$

и представить как композицию трех отображений $w = L_3 \circ L_2 \circ L_1(z)$, где

$$L_1 : z \to z + C, \qquad L_2 : z \to \frac{1}{z}, \qquad L_3 : z \to A + Bz.$$

Очевидно, что отображения L_1 и L_3 обладают круговым свойством, остается доказать это свойство для отображения L_2.

Уравнение произвольной окружности или прямой на комплексной плоскости может быть записано в виде

$$Ez\overline{z} + Fz + \overline{F}\overline{z} + G = 0.$$

При отображении $w = 1/z$ оно преобразуется в уравнение

$$E + F\overline{w} + \overline{F}w + Gw\overline{w} = 0,$$

которое вновь является уравнением либо окружности либо прямой. При этом вырождения в точку или пустое множество быть не может в силу взаимной однозначности отображения.

Таким образом произвольная дробно-линейная функция обладает круговым свойством.

Определение. Точки z и z^* называются ***симметричными*** относительно окружности $\Gamma \subset C$, если они лежат на одном луче с вершиной в центре окружности и произведение их расстояний до центра окружности равно квадрату радиуса окружности Γ.

Если центр окружности находится в точке z_0 и ее радиус равен R, то $arg(z - z_0) = arg(z^* - z_0)$, $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$ и

$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}.$$

Нам будет удобно пользоваться следующим характеристическим свойством симметричных точек:

(*) Для того чтобы точки z и z^* были симметричными относительно окружности Γ, необходимо и достаточно, чтобы любая окружность или прямая, проходящая через них, была ортогональна окружности Γ.

Пусть Γ – окружность радиуса R с центром в точке z_0. Если точки z и z^* симметричны относительно окружности Γ, то они лежат на луче ортогональном окружности Γ и $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$. При этом для произвольной окружности γ, проходящей через точки z и z^*, квадрат касательной к окружности γ из точки z_0 равен произведению секущей $|z^* - z_0|$ на ее внешнюю часть $|z - z_0|$, т.е. квадрат касательной равен R^2. Это означает, что касательная к окружности γ совпадает с радиусом окружности Γ, и, следовательно, окружности Γ и γ взаимно ортогональны.

При доказательстве достаточности можно заметить, что точки z и z^* лежат на прямой, ортогональной окружности Γ, и, следовательно, проходящей через центр окружности. Всякая окружность γ, проходящая через точки z и z^*, будет ортогональной окружности Γ. Поэтому радиус, проведенный из точки z_0 в точку пересечения окружностей, является касательной к окружности γ. По той же теореме о касательной и секущей получаем, что $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$, откуда и следует симметричность точек z и z^*.

Условие (*) является более универсальным чем данное нами определение симметричности, поскольку оно оказывается необходимым и достаточным и для хорошо известной из школьного курса геометрии симметричности точек относительно прямой.

Вообще, в комплексном анализе часто оказывается удобным считать прямую “окружностью бесконечного радиуса”, поскольку при стереографической проекции и окружности и прямые, лежащие на комплексной плоскости, отображаются в окружности на сфере Римана. Далее, чтобы отметить тот факт, что данное множество точек комплексной плоскости является **либо** окружностью **либо** прямой, мы будем писать *“окружность”*.

“Окружностями”, проходящими через бесконечно удаленную точку и точку $z_0 \in C$, являются только произвольные прямые, проходящие через точку z_0. Все эти прямые будут ортогональны окружности Γ с центром в точке z_0. Поэтому бесконечно удаленная точка $z^* = \infty$ будет симметричной относительно окружности Γ точке z_0 – центру окружности.

Теорема. При дробно-линейном отображении L точки z и z^*, симметричные относительно *“окружности”* Γ, отображаются в точки w и w^*, симметричные относительно *“окружности”* $L(\Gamma)$ – образа *“окружности”* Γ.

Из кругового свойства следует, что дробно-линейное отображение L устанавливает взаимно однозначное соответствие между семейством всех *“окружностей”*, проходящих через точки z и z^*, и семейством всех *“окружностей”*, проходящих через точки w и w^*. Всякая *“окружность”* γ, проходящая через точки z и z^*, ортогональна *“окружности”* Γ. Используя свойство консерватизма углов, получаем,что *“окружность”* $L(\gamma)$, проходящая через точки w и w^*, ортогональна *“окружности”* $L(\Gamma)$, из чего и следует симметричность точек w и w^*.

Пример.(Отображение верхней полуплоскости на единичный круг.)

Найдем общий вид дробно-линейного отображения верхней полуплоскости $\{Im\, z > 0\}$ на единичный круг $\{|z| < 1.\}$ Пусть точка $a,\ Im\, a > 0$ отображается в центр круга $w = 0$. Тогда точка $\overline{a}$, симметричная точке a относительно действительной оси, отображается в бесконечно удаленную точку $w = \infty$, симметричную точке $w = 0$ относительно единичной окружности $\{|z| = 1.\}$ По точкам, которые отображаются в нуль и бесконечность дробно-линейная функция находится однозначно с точностью до постоянного множителя:

$$w = \lambda \frac{z-a}{z-\overline{a}}.$$

Действительная ось отображается в единичную окружность, и, в частности,

$$|w(0)| = |\lambda| \frac{|a|}{|\overline{a}|} = |\lambda| = 1.$$

Следовательно $\lambda = e^{i\theta}$, а искомое отображение имеет вид

$$w = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\overline{a}},$$

где a – произвольная точка верхней полуплоскости, и θ – произвольное действительное число.

§2. Степенная функция.

Степенная функция

$$w = z^n, \tag{1}$$

где $n > 1$ – натуральное число, является аналитической во всей комплексной плоскости C.

Ее производная $w' = nz^{n-1} \neq 0$ при $z \neq 0$, и, следовательно, отображение (1) является конформным в окрестности каждой точки области $C \setminus \{0\}$. Используя показательную форму записи комплексных чисел $z = re^{i\varphi}$, получаем

$$w = r^n e^{in\varphi}.$$

Из последнего равенства видно, в точке $z = 0$ отображение не будет конформным, т.к. в нуле все углы увеличиваются в n раз.

Являясь взаимно однозначным в окрестности каждой точки $z \neq 0$, отображение (1) не будет взаимно однозначным во всей области $C \setminus \{0\}$, поскольку различные точки $z_1 = re^{i\varphi}$ и $z_2 = re^{i(\varphi + 2\pi/n)}$ отображаются в одну точку

$$w(z_2) = r^n e^{in\varphi} e^{i2\pi} = r^n e^{in\varphi} = w(z_1).$$

Найдем области однозначности степенной функции (1). Пусть $z_1^n = z_2^n$, тогда $|z_1|^n = |z_2|^n$ и, следовательно, $|z_1| = |z_2|$. Из условия $arg(z_1^n) = arg(z_2^n)$ следует, что $|arg(z_1) - arg(z_2)| = \frac{2\pi k}{n}$ при некотором $0 \leq k \leq n-1$. Таким образом область, в которой степенная функция (1) является взаимно однозначной, не должна содержать точек, у которых модули равны, а разность аргументов кратна $\frac{2\pi}{n}$.

Примерами таких областей являются секторы

$$D_k = \{z \in C \mid 0 < |z|,\ \frac{2\pi k}{n} < arg\, z < \frac{2\pi(k+1)}{n}\}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Несложно заметить, что функция $w = z^n$ отображает каждый из секторов D_k на одну и ту же область E_0 – на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль неотрицательной части действительной оси.

Таким образом всякой точке $w \in E_0$ соответствуют ровно n прообразов – по одному в каждой области D_k. Следовательно, если мы стандартным образом определим значение $t = \sqrt[n]{w}$ условием: $t^n = w$, то мы получим n решений

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i \frac{arg\, w + 2\pi k}{n}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

При стандартном определении понятия функции, вообще говоря, обратное соответствие

$$\sqrt[n]{w} : E_0 \to C$$

функцией не является, поскольку одной точке $w \in E_0$ ставится в соответствие множество различных точек $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$.

В данном случае мы должны говорить либо о "многозначной функции" либо о наборе однозначных функций $\{f_k : E_0 \to D_k\}$, каждая из которых осуществляет конформное отображение области E_0 на область D_k. Функции f_k называют *ветвями* многозначной функции $z = \sqrt[n]{w}$. Далее говоря о значениях многозначной функции, мы всякий раз должны знать – с какой конкретно однозначной ветвью функции мы имеет дело в данном случае.

В нашем определении ветвей функции $z = \sqrt[n]{w}$ имеется существенный недостаток – ни одна из ветвей не определена на положительной действительной полуоси. При этом ни одну из ветвей нельзя продолжить на положительную действительную полуось так, чтобы получаемая функция была аналитической во все комплексной плоскости C. К примеру, доопределяя ветвь f_0 по непрерывности изнутри области в точке $w = 1$, с одной стороны, при стремлении w к точке $w_0 = 1$ "сверху" получаем

$$\lim_{w \to 1+i0} f_0(w) = 1,$$

с другой стороны, при стремлении w к точке $w_0 = 1$ "снизу" получаем

$$\lim_{w \to 1-i0} f_0(w) = e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Таким образом функцию f_0 нельзя доопределить на положительной полуоси даже с сохранением непрерывности, не говоря уже об аналитичности.

Однако области однозначности степенной функции (1), а следовательно и ветви функции $z = \sqrt[n]{w}$ можно выбирать множеством различных способов. К примеру, функция $w = z^n$ будет взаимно однозначной в каждом из секторов

$$D_k^* = \{z \in C \mid 0 < |z|,\ \frac{-\pi + 2\pi k}{n} < arg\, z < \frac{\pi + 2\pi(k+1)}{n}\},\quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Степенная функция (1) отображает каждый из секторов D_k^* на одну и ту же область E_0^* – на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Ветви $\{f_k^* : E_0^* \to D_k^*\}$ будут определены на положительной действительной полуоси, но не будут определены на отрицательной действительной полуоси.

Можно выделить ветви, которые будут определены на действительной оси, но не определены на мнимой полуоси, и т.д. Отметим, что при всей неоднозначности выделения однозначных ветвей, если две различные ветви g и h определены в точке w_0, и $g(w_0) = h(w_0)$, то существует окрестность точки w_0, в которой $g(w) = h(w)$, хотя в других точках значения этих ветвей могут быть различными. К примеру, $f_0(w) = f_0^*(w)$ в верхней полуплоскости, но $f_0(w) \neq f_0^*(w)$ в нижней полуплоскости.

§3. Римановы поверхности.

Неоднозначность выделения ветвей многозначной функции создает определенные трудности, которых удается избежать, если считать, что областью значений функции $w = z^n$ является не комплексная плоскость C, а специальным образом устроенное множество S, называемое *римановой поверхностью*, такое, что отображение $F : \overline{C} \to S$, определяемое функцией $w = z^n$, является **взаимно однозначным.** Тогда риманову поверхность S можно считать естественной областью определения для функции $z = \sqrt[n]{w}$, которая будет взаимно однозначно отображать S на всю расширенную комплексную плоскость $\overline{C}$.

Вначале продемонстрируем на примере построение соответствующего множества для многозначной функции одной действительной переменной.

Пример 1. Функция

$$y = f(x) = \frac{x}{|1 - x^2|}$$

определена на всей действительной прямой за исключением точек $x = \pm 1$. Рассмотрим интервалы $U_1 = (-\infty, -1), U_2 = (-1, 1), U_3 = (1, +\infty)$ на оси OX. Рассмотрим еще интервалы $I_1 = (-\infty, 0) = (a_1, b_1), I_2 = (-\infty, +\infty) = (a_2, b_2), I_3 = (0, +\infty) = (a_3, b_3)$ на оси OY. Производная функции $f(x)$ не меняет знак на каждом из интервалов U_k, т.е. функции $f(x)$ является монотонной на каждом из интервалов U_k, и отображения $f : U_k \to I_k$ являются взаимно однозначными. Однако всякому действительному значению $y \neq 0$ соответствуют два различных значения x_1 и x_2 таких, что $f(x_1) = f(x_2) = y$, следовательно, обратное соответствие $f^{-1} : R \to R$ будет многозначной функцией. Чтобы избавиться от неоднозначности нам в качестве области значений функции f нужно построить такое множество L, чтобы различным точкам x_1 и x_2 на оси OX соответствовали различные точки множества L. Этого можно добиться, если считать, что значения функции лежат не на одной действительной прямой, а на нескольких различных экземплярах действительной прямой.

Пусть l_1, l_2, l_3– **три!** различных экземпляра действительной прямой параллельных оси OY, расположенные на плоскости так, что прямые l_1 и l_3 лежат с одной стороны от прямой l_2. Будем считать, что начала координат действительных прямых l_k ортогонально проектируются в начало координат оси OY. Рассмотрим ортогональные проекции π_k интервалов I_k, лежащих на оси OY, на соответствующую прямую l_k и обозначим $I_k^* = \pi_k(I_k) \subset l_k$. Определим функцию $\tilde{f}$ условием $\tilde{f}(x) = \pi_k(f(x)), x \in U_k$, тогда образом интервала U_k при отображении $\tilde{f}$ будет интервал $I_k^* = (a_k^*, b_k^*) \subset l_k$.

Отождествим точки a_1^* и a_2^* и результат склейки обозначим через α, отождествим точки b_2^* и b_3^* и результат их склейки обозначим через β, результат склейки точек a_3^* и b_1^* обозначим через γ. Множество

$$L = \{\alpha\} \cup \{\beta\} \cup \{\gamma\} \cup (\bigcup_{k=1}^{3} I_k^*)$$

будет искомым.

Компактифицируем ось OX одной бесконечно удаленной точкой ∞, отождествляя с ней $+\infty$ и $-\infty$, и расширенную прямую обозначим через $\overline{R}$. Доопределим функцию $\tilde{f}$ по непрерывности, полагая $\tilde{f}(-1) = \alpha$, $\tilde{f}(1) = \beta$, $\tilde{f}(\infty) = \gamma$. Тогда отображение $\tilde{f} : \overline{R} \to L$ будет взаимно однозначным и, следовательно, существует обратное отображение $\tilde{f}^{-1} : L \to \overline{R}$, являющееся взаимно однозначным.

Вообще говоря, функции f и $\tilde{f}$ различны, т.к. у них различные множества значений, однако значения $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$, как действительные числа на соответствующих экземплярах действительной прямой, равны между собой. Поэтому можно считать, что естественным множеством значений функции

$$f(x) = \frac{x}{|1 - x^2|}$$

является множество L, и говоря о функциях f и f^{-1} мы будем иметь в виду функции $\tilde{f} : \overline{R} \to L$ и $\tilde{f}^{-1} : L \to \overline{R}$.

Замечание. В данном примере интервалы I_1 и I_3, лежащие на оси OY, не пересекаются, и мы могли считать, что соответствующие им интервалы I_1^* и I_3^* лежат на одной прямой. Тогда в качестве множества L мы получили бы две параллельные прямые склеенные в $+\infty$ и $-\infty$.

Пример 2. Построение соответствующей римановой поверхности S для неоднолистной аналитической функции проиллюстрируем на примере функции $z = \sqrt[3]{w}$.

Рассмотрим **три!** экземпляра комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной действительной полуоси, расположенные один над другим. Обозначим нижний лист - E_0, средний - E_1, верхний - E_2, и будем считать, что функция $w = z^3$ отображает области однозначности D_k каждую на свой экземпляр плоскости с разрезом, т.е. $w : D_k \to E_k$. Тогда при переходе аргумента z из области D_0 в область D_1 через луч $arg\, z = 2\pi/3$ в образе с листа E_0 мы должны попасть на лист E_1. Поэтому нижний край разреза листа E_0 склеим с верхним краем разреза листа E_1. При переходе аргумента z из области D_1 в область D_2 через луч $arg\, z = 4\pi/3$ в образе с листа E_1 мы должны попасть на лист E_2. Поэтому нижний край разреза листа E_1 склеим с верхним краем разреза листа E_2. При переходе аргумента z из области D_2 в область D_0 через луч $arg\, z = 0$ в образе с листа E_2 мы должны попасть на лист E_0. Поэтому нижний край разреза листа E_2 склеим с верхним краем разреза листа E_0.

Последнюю склейку без самопересечения реально в трехмерном пространстве произвести нельзя, однако мы условимся различать точки, получаемые на линии самопересечения. Построенная таким образом трехлистная поверхность называется *римановой поверхностью* функции $z = \sqrt[3]{w}$, будем обозначать эту поверхность символом S.

Точкам $w = 0$ и $w = \infty$ расширенной комплексной плоскости на римановой поверхности S соответствуют две точки склейки, одновременно принадлежащие всем листам E_k. А произвольной точке $w \in C \setminus \{0\}$ соответствуют три различные точки, лежащие на различных листах римановой поверхности S.

По построению функция $w = z^3$ взаимно однозначно и непрерывно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{C}$ на риманову поверхность S, а обратная к ней функция $z = \sqrt[3]{w}$ является однозначно определенной, как функция из S в $\overline{C}$.

Расположим риманову поверхность S над расширенной комплексной плоскостью $\overline{C}$ так, чтобы линии склейки поверхности S ортогонально проектировались на положительную действительную ось плоскости $\overline{C}$. В точки $w = 0$ и $w = \infty$ расширенной комплексной плоскости проектируются точки склейки, одновременно принадлежащие всем листам E_k. В точку $w \in C \setminus \{0\}$ проектируются три различные точки римановой поверхности S, которые будем обозначать символами w_1^*, w_2^*, w_3^* соответственно. Далее символом w^* будем обозначать точки римановой поверхности.

Всякой достаточно малой окрестности U точки $w \in C \setminus \{0\}$ (не содержащей нуля), на римановой поверхности S будут соответствовать три непересекающиеся окрестности U_k точек w_k^* соответственно, каждая из которых однозначно проектируется на окрестность U. А на окрестность V точки $w = 0$ проектируется связное множество, расположенное одновременно на всех трех листах поверхности S. Аналогичная ситуация и в другой точке склейки всех трех листов поверхности S – в точке $w = \infty$.

При этом строение отображения $z = \sqrt[3]{w^*}$ в окрестности точек римановой поверхности, соответствующих $w = 0, \infty$, и в окрестности точек, соответствующих $w \in C \setminus \{0\}$, будет различным.

Пусть $w_0 \in C \setminus \{0\}$ и t – произвольная точка из достаточно малой окрестности точки w_0. Рассмотрим произвольный замкнутый контур γ с началом и концом в точке t, содержащий точку w_0 внутри себя, но не содержащий нулевую точку и не проходящий через нее. Ограниченную контуром γ окрестность w_0 точки обозначим через $U \subset C$. Пусть $t^* \in S$ - одна из точек римановой поверхности, соответствующих точке

t. В точке t^* определено значение функции $z = \sqrt[3]{w^*}$, которое обозначим через $f^*(t^*)$. При однократном обходе точки w_0 вдоль контура γ на комплексной плоскости в качестве непрерывного образа контура γ на римановой поверхности S мы получим замкнутый контур γ^*, начинающийся и заканчивающийся в точке t^* и ограничивающий окрестность $U^* \subset S$. Предполагая, что значения интересующей нас функции меняются непрерывным образом, мы получаем, что при однократном обходе контура γ значения функции $z = \sqrt[3]{w^*}$ в начальной и конечной точке будут совпадать и равны $f^*(t^*)$. Учитывая произвол в выборе соответствующего контура и начальной точки, мы убеждаемся, что в окрестности $U^* \subset S$ точки w_0^* на римановой поверхности определена однозначная функция $z = f^*(w^*)$, а в окрестности $U \subset C$ точки w_0 на комплексной плоскости определена однозначная функция $z = f(w) = f^*(w^*)$, являющаяся ветвью функции $z = \sqrt[3]{w}$.

Точки комплексной плоскости, в окрестности которых можно выделить однозначную ветвь, называют точками *однозначного характера.*

Рассмотрим теперь произвольный замкнутый контур γ с началом и концом в точке t, содержащий точку $w = 0$ внутри себя и ограничивающий окрестность $U \subset C$. Точке t на римановой поверхности S соответствуют три точки t_0^*, t_1^*, t_2^*, лежащие на разных листах поверхности S, а значения функции $z = \sqrt[3]{w^*}$ в этих точках будут совпадать со значениями соответствующих ветвей в точке t, т.е. $\sqrt[3]{t_k^*} = f_k(t)$.

Посмотрим, что происходит со значениями функции $z = \sqrt[3]{w}$ при обходе точки $w = 0$. При однократном обходе контура γ на комплексной плоскости в качестве непрерывного образа контура γ на римановой поверхности S мы получим незамкнутую кривую с началом в точке t_0^* и концом в точке t_1^*, а значение функции $z = \sqrt[3]{w^*}$ будет непрерывным образом изменяться от значения $f_0(t)$ в начале обхода к значению $f_1(t)$ в конце обхода, при этом $f_1(t) \neq f_0(t)$! Таким образом мы не можем выделить никакой непрерывной **однозначной** ветви в окрестности точки $w = 0$.

Если в любой окрестности точки w_0 комплексной плоскости найдется замкнутый контур, при обходе точки вдоль которого происходит переход от одной ветви многозначной функции к другой ветви, то такая точка w_0 называется точкой *ветвления.*

Таким образом точка комплексной плоскости $w = 0$ является точкой ветвления функции $z = \sqrt[3]{w}$. Несложно заметить, что обход вокруг нуля одновременно является и обходом вокруг бесконечно удаленной точки, и следовательно точка $w = \infty$ тоже является точкой ветвления.

При однократном обходе нуля происходит переход от ветви f_0 к ветви f_1, при повторном обходе переход от ветви f_1 к ветви f_2, при третьем обходе от ветви f_2 мы вновь вернемся к ветви f_0. Точки ветвления, при многократном обходе которых вдоль замкнутого контура происходит возвращение к исходной ветви функции, называют точками ветвления *конечного порядка,* а наименьшее количество обходов, необходимое для возврата, называют *порядком ветвления.* Точки ветвления, при обходе которых вдоль замкнутого контура в одном направлении всегда происходит переход к новым ветвям функции, называют *логарифмическими точками ветвления.*

Для функции $z = \sqrt[3]{w}$ точки $w = 0$ и $w = \infty$ являются точками ветвления третьего порядка, и ни в какой их окрестности нельзя выделить однозначную ветвь, а точки $w \in C \setminus \{0\}$ являются точками однозначного характера, и в окрестности каждой такой точки можно выделить три однозначных ветви.

Несложно построить n-листную риманову поверхность для функции $z = \sqrt[n]{w}$ и заметить, что точки $w = 0$ и $w = \infty$ в данном случае будут точками ветвления порядка n.

Аналогичным образом риманова поверхность может быть построена и в более общей ситуации.

Пусть $w = f(z)$– неоднолистная функция в области $D \subset C_z$ и $E = f(D) \subset C_w$. Тогда обратное соответствие $f^{-1} : E \to D$ будет многозначной функцией. Построим риманову поверхность для функции $z = f^{-1}(w)$. Разобьем разрезами область D на подобласти однолистности функции $f(z)$. Область D представима в виде

$$D = (\bigcup_k D_k) \cup (\bigcup_{k,m} \gamma_{k,m}),$$

где $\gamma_{k,m} = \gamma_{m,k}$– общая часть границ областей D_k и D_m (множество $\gamma_{k,m}$ может быть и пустым), функция f является однолистной в каждой области D_k, и $D_k \cap D_m = \emptyset$ при $k \neq m$. Обозначим $E_k = f(D_k)$ и $\Gamma_{k,m} = f(\gamma_{k,m})$, при этом, в силу неоднолистности функции f, возможно, что $E_k \cap E_m \neq \emptyset$ и $\Gamma_{k,m} \cap \Gamma_{s,l} \neq \emptyset$, хотя $D_k \cap D_m = \emptyset$ и $\gamma_{k,m} \cap \gamma_{s,l} = \emptyset$ (пример степенной функции!).

Рассмотрим семейство плоскостей Σ_k, параллельных комплексной плоскости C_w. Обозначим через E_k^* ортогональную проекцию множества E_k на плоскость Σ_k, а через $\Gamma_{k,m}^*$ ортогональную проекцию множества $\Gamma_{k,m}$ на плоскость Σ_k. Тогда каждое множество E_k^* расположено на своем экземпляре комплексной плоскости - на плоскости Σ_k. Множество $\Gamma_{k,m}^* \subset \Sigma_k$, множество $\Gamma_{m,k}^* \subset \Sigma_m$, при этом множества $\Gamma_{k,m}^*$ и $\Gamma_{m,k}^*$ ортогонально проектируются на одно множество $\Gamma_{k,m} = \Gamma_{m,k} \subset C_w$.

Отождествим соответствующие точки множеств $\Gamma_{k,m}^*$ и $\Gamma_{m,k}^*$, а результат склейки обозначим через $\tilde{\Gamma}_{k,m}$. Лежащее в трехмерном пространстве множество

$$S = (\bigcup_k E_k^*) \cup (\bigcup_{k,m} \tilde{\gamma}_{k,m})$$

будет римановой поверхностью для функции $z = f^{-1}(w)$.

Замечание. Зная строение римановой поверхности S функции f, достаточно просто ответить на вопрос:"В каких областях комплексной плоскости можно выделить однозначные ветви функции f?"Пусть область $D \subset C$ и D^*– часть римановой поверхности, состоящая из всех точек, проектирующихся в область D. Если множество D^* содержит связное открытое подмножество поверхности S, которое однозначно проектируется **на** область D, то в области D можно выделить однозначную ветвь функции f.

Если же всякое связное открытое подмножество S, проекция которого совпадает с областью D, содержит хотя бы две различные точки проектирующиеся в одну точку области D, то в области D нельзя выделить однозначную ветвь функции f.

§4. Показательная функция.

По аналогии с действительным случаем *показательная функция* e^z уже была определена как предел соответствующей последовательности
$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

При этом была получена формула
$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Действительная и мнимая части показательной функции $u(x,y) = Re\, e^z = e^x\cos y$ и $v(x,y) = Im\, e^z = e^x \sin y$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, и при этом выполняются условия Коши-Римана
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x\sin y.$$

Следовательно показательная функция является аналитической во всей комплексной плоскости, и ее производная может быть найдена при дифференцировании по любому направлению, в частности,
$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z \neq 0.$$

Поскольку производная всюду отлична от нуля, то в окрестности каждой точки отображение, осуществляемое показательной функцией, будет конформным. Однако это отображение не будет взаимно однозначным во всей комплексной плоскости, т.к. к примеру, для точек z и $z_1 = z + i2\pi k$ получаем
$$e^{z_1} = e^{z+i2\pi k} = e^z e^{i2\pi k} = e^z\cdot 1 = e^z.$$

Найдем области однозначности показательной функции. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ и $e^{z_1} = e^{z_2}$. Из равенства модулей получаем
$$e^{x_1} = |e^{z_1}| = |e^{z_2}| = e^{x_2},$$
следовательно $x_2 = x_1$. Но тогда
$$e^{iy_2} = e^{iy_1}, \quad e^{iy_2}\cdot e^{-iy_1} = e^{i(y_2-y_1)} = 1 = e^{i2\pi k},$$
т.е. $y_2 - y_1 = 2\pi k$.

Таким образом, область однозначности показательной функции не должна содержать различных точек, у которых действительные части равны, а мнимые отличаются на слагаемое, кратное 2π. Примером таких областей могут служить полосы, параллельные действительной оси,
$$D_k = \{z \in C \mid 2\pi k < Im\, z < 2\pi(k+1)\}, \quad k \in Z.$$

Поскольку показательная функция отображает прямую $Im\, z = \alpha$, параллельную действительной оси, в луч, выходящий из нуля под углом α к положительному направлению действительной оси, то образом всякой полосы D_k будет одна и та же область E_0 – вся комплексная плоскость с разрезом вдоль неотрицательной части действительной оси.

Таким образом всякой точке $w \in E_0$ соответствует бесконечно много прообразов – по одному в каждой области D_k. Следовательно, если мы стандартным образом определим обратное соответствие $t = Ln\, w$ условием: $e^t = w$, то мы получим бесконечно много решений, которые находятся из равенств:
$$|w| = e^{Re\, t}, \quad Arg\, w = Im\, t, \quad t = \ln|w| + iArg\, w.$$

Обозначая через $\ln w$ ветвь логарифма, принимающую значения в области D_0, т.е. $\ln w = \ln|w| + i arg\, w$, для остальных ветвей логарифма получим: $f_k(w) = \ln w + i2\pi k$ или $Ln\, w = \ln|w| + i(arg\, w + 2\pi k),\ k \in Z$.

Для построения римановой поверхности логарифмической функции нужно рассмотреть бесконечно много расположенных один над другим экземпляров области E_0 и считать, что показательная функция отображает полосу D_K на свой экземпляр плоскости с разрезом – E_k. Склейка листов производится также как и ранее для корней: нижний край разреза листа E_k склеивается с верхним краем разреза листа E_{k+1}. Поскольку показательная функция не принимает значений $w = 0$ и $w = \infty$, то будем считать, что нуль и бесконечно удаленная точка не принадлежат римановой поверхности. Над каждой точкой $w \in C \setminus \{0\}$ на римановой поверхности расположено бесконечно много точек, соответствующих различным однозначным ветвям логарифмической функции. При обходе нуля (бесконечно удаленной точки) в одном направлении мы каждый раз будем переходить к новой ветви функции, т.е. точки $w = 0$ и $w = \infty$ являются точками ветвления логарифмического типа.

§5. Тригонометрические и гиперболические функции.

Используя формулу Эйлера, согласно которой при всех действительных значениях x выполняется равенство

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

получаем

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Если заменить в последних формулах действительную переменную x комплексным переменным z, то мы получим аналитические во всей комплексной плоскости C функции

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

которые совпадают на действительной оси со стандартными тригонометрическими функциями действительного аргумента.

Непосредственно из определения следует, что для синуса и косинуса комплексного переменного сохраняются многие стандартные свойства тригонометрических функций. Так, обе функции будут 2π-периодическими, косинус является четной функцией, а синус - нечетной. Сохраняются стандартные формулы дифференцирования

$$(\sin z)' = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \cos z, \quad (\cos z)' = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z.$$

Сохраняются также основное тригонометрическое тождество, формулы приведения

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin(z + \pi/2) = \cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z,$$

формулы для синуса и косинуса суммы и разности аргументов и т.д.

Гиперболические функции на комплексной плоскости определяются стандартными формулами

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

и для них выполняется стандартное тождество

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

На комплексной плоскости тригонометрические и гиперболические функции выражаются одни через другие

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz,$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \sin z = -i \operatorname{sh} iz.$$

Из этих формул можно заметить, что на комплексной плоскости тригонометрические функции приобретают и некоторые новые свойства, которых ранее не было на действительной прямой. Так, на комплексной плоскости синус и косинус, несмотря на выполнение основного тригонометрического тождества, перестают быть ограниченными функциями. К примеру,

$$\cos(0 + iy) = \operatorname{ch} y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \to +\infty$$

при $|y| \to \infty$.

§6. Однозначные ветви многозначных функций. Примеры.

Рассмотрим многозначную в области D функцию $f(z)$ и обозначим через $[f]_z$ множество всех значений функции $f(z)$ в точке $z \in D$.

Будем говорить, что функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви в области D, если существует однозначная аналитическая в области D функция $h(z)$ такая, что значение $h(z) \in [f]_z$ при любом $z \in D$.

Будем говорить, что функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви в окрестности точки $z_0 \in D$, если она допускает выделение однозначной аналитической ветви в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ точки z_0.

Замечание. В последнем определении значение однозначной аналитической ветви $h(z)$, вообще говоря, может может быть не определено в самой точке z_0.

Замечание. Из того, что функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви в окрестности каждой точки $z \in D$, в общем случае, **не следует**, что функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви во всей области D.

Если известно строение римановой поверхности многозначной функции $f(z)$, то вопрос о возможности выделения однозначных ветвей в окрестности фиксированной точки решается довольно просто. К сожалению, построение соответствующей римановой поверхности в общем случае само по себе является непростой задачей. Однако вопрос о возможности выделения однозначных ветвей в окрестности фиксированной точки может быть решен и без построения римановой поверхности.

Пусть многозначная функция $f(z)$ допускает выделение однозначной аналитической ветви $h(z)$ в проколотой окрестности $\dot{U}$ точки z_0. Рассмотрим произвольный замкнутый контур $\gamma \subset \dot{U}$. Поскольку ветвь $h(z)$ является однозначно определенной непрерывной функцией, то при обходе контура γ ее значения будут меняться непрерывным образом и при полном однократном обходе контура значения функции $h(z)$ в начальной и конечной точках обхода должны совпадать.

Проверка этого свойства позволяет дать ответ на вопрос о возможности выделения однозначных ветвей многозначной функции в окрестности фиксированной точки.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt{z^2}$. Мы уже знаем, что в точке $t \neq 0, \infty$ функция $\sqrt{t}$ принимает два различных значения: $\sqrt{|t|}e^{i\frac{arg\,t}{2}}$ и $-\sqrt{|t|}e^{i\frac{arg\,t}{2}}$. Если $z \neq 0, \infty$ и $t = z^2$, то либо $arg\,t = 2arg\,z$ либо $arg\,t = 2arg\,z - 2\pi$. Поэтому функция $f(z) = \sqrt{z^2}$ принимает в точке z два различных значения: $w_1 = |z|e^{iarg\,z} = z$ и $w_2 = -|z|e^{iarg\,z} = -z$.

Однозначные аналитические функции $h_1(z) = z$ и $h_2(z) = -z$ являются ветвями многозначной функции $f(z) = \sqrt{z^2}$ в окрестности произвольной точки $z_0 \in \overline{C}$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$. Мы уже знаем, что функция $\sqrt{t}$ допускает выделение двух однозначных аналитических ветвей $f_1(t)$ и $f_2(t)$ в окрестности произвольной точки $t \neq 0, \infty$. Поэтому функция $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ допускает выделение двух однозначных аналитических ветвей $f_1(z^2-1)$ и $f_2(z^2 - 1)$ в окрестности произвольной точки $z \neq \pm 1, \infty$.

Если функция $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ допускает выделение однозначной аналитической ветви $h(z)$ в окрестности $\dot{U}$ точки $z_0 = 1$, то при обходе произвольного замкнутого контура $\gamma \subset \dot{U}$ значение функции $h(z)$ должно меняться непрерывным образом, и приращение функции $h(z)$ при полном обходе контура γ должно быть равным нулю.

В качестве контура $\gamma \subset \dot{U}$ выберем произвольную окружность $|z - 1| = r$, где $r < 1$. Рассмотрим две функции $g_1(z) = z + 1$ и $g_2(z) = z - 1$. При обходе точкой z контура γ, точка $t_1 = g_1(z)$ совершает обход окружности $|t - 2| = r$, не содержащей внутри себя нулевой точки, т.е. приращение аргумента функции $g_1(z)$ при полном обходе контура γ равно нулю. При обходе точкой z контура γ против часовой стрелки, точка $t_2 = g_2(z)$ совершает полный обход окружности $|t| = r$, поэтому приращение аргумента функции $g_2(z)$ при полном обходе контура γ равно 2π. Таким образом приращение аргумента функции $t = z^2 - 1 = g_1(z) \cdot g_2(z)$ при полном обходе контура γ равно 2π.

В произвольной точке $z \in \gamma$ функция $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ принимает два различных значения

$$w_k(z) = \sqrt{|z^2 - 1|}e^{i\frac{arg\,(z^2-1)+2\pi k}{2}},$$

где $k = 0, 1$.

В фиксированной точке $a \in \gamma$ значение функции $h(z)$ должно совпадать с одним из значений $w_k(a)$. Изменяясь непрерывным образом при обходе контура γ значение функции $h(z)$ в конечной точке обхода b, совпадающей с точкой a, должно быть равно

$$h(b) = \sqrt{|a^2 - 1|}e^{i\frac{arg\,(a^2-1)+2\pi k+2\pi}{2}} = -h(a),$$

т.е. приращение функции $h(z)$ при полном обходе контура γ отлично от нуля.

Это означает, что в окрестности точки $z_0 = 1$ **нельзя выделить однозначную аналитическую ветвь** многозначной функции $f(z)$. Аналогичным образом показывается, что и в окрестности точки $z_0 = -1$ нельзя выделить однозначную аналитическую ветвь многозначной функции $f(z)$.

Посмотрим как выглядит ситуация в окрестности бесконечно удаленной точки.

В качестве окрестности $\dot{U}$ точки $z = \infty$ рассмотрим внешность круга, т.е. множество $\dot{U} = C \setminus \overline{B(0,R)}$, где $R > 1$. Пусть a– произвольная точка окрестности $\dot{U}$, $\gamma \subset \dot{U}$– произвольный простой замкнутый контур, проходящий через точку a. Если контур γ не содержит внутри себя точку $z = 0$, то приращения аргумента функций $g_1(z) = z + 1$ и $g_2(z) = z - 1$ при полном обходе контура γ равны нулю. Если контур γ содержит внутри себя точку $z = 0$, то при полном обходе контура γ, при котором ограниченная область, содержащая точку $z = 0$, остается слева, приращения аргумента функций $g_1(z)$ и $g_2(z)$ равны 2π. Следовательно, приращение аргумента функции $t = z^2 - 1 = g_1(z) \cdot g_2(z)$ при полном обходе контура γ либо равно нулю либо равно 4π.

Положим, что значение функции $h(z)$ в точке a совпадает с одним из значений $w_k(a)$, а в произвольной точке $z \in \gamma$ мы единственным образом можем выбрать значение $h(z) \in [f]_z$ так, чтобы функция $h(z)$ изменялась непрерывным образом при обходе контура γ, начинающемся в точке a. Тогда для значения функции $h(z)$ в конечной точке обхода b, совпадающей с точкой a, получим

$$h(b) = \sqrt{|a^2 - 1|} e^{i \frac{arg\,(a^2-1) + 2\pi k + 2\pi m}{2}} = h(a) e^{i\pi m} = h(a),$$

где m, в зависимости от выбора контура γ, либо равно нулю либо равно 2.

Поскольку приращение функции $h(z)$ при полном обходе замкнутого контура получается равным нулю, то в силу произвольности выбора начальной точки a и контура γ, это означает, что в окрестности $\dot{U}$ можно задать такую однозначную непрерывную функцию $h(z)$, что $h(z) \in [f]_z$ при любом $z \in \dot{U}$. Несложно заметить, что значение функции $h(z)$ в произвольной точке $z \in \dot{U}$ однозначно определяется выбором одного из двух возможных значений в начальной точке $a \in \dot{U}$, следовательно в окрестности $\dot{U}$ можно выделить две **непрерывные** однозначные ветви $h_1(z)$ и $h_2(z)$ функции $f(z)$. Осталось проверить, что функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$ являются аналитическими. Однако, мы уже знаем, что в окрестности произвольной точки $z \in \dot{U}$ функция $f(z)$ допускает выделение двух однозначных **аналитических** ветвей $f_1(z)$ и $f_2(z)$, которые, в силу непрерывности, в окрестности точки $z \in \dot{U}$ будут совпадать соответственно с функциями $h_1(z)$ и $h_2(z)$, т.е. функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$ являются однозначными аналитическими ветвями функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Таким образом функция $f(z)$ допускает выделение однозначных аналитических ветвей в окрестности произвольной точки $z \in \overline{C}$, за исключением точек $z = \pm 1$.

Пример 3. Рассмотрим вопрос о возможности выделения однозначных ветвей функций

$$a) f_1(z) = \ln \frac{1-z}{1+z}, \qquad b) f_2(z) = \ln \frac{1-z}{(1+z)(2+z)}$$

в окрестности бесконечно удаленной точки.

а) В качестве окрестности $\dot{U}$ точки $z = \infty$ рассмотрим внешность круга, т.е. множество $\dot{U} = C \setminus \overline{B(0,R)}$, где $R > 4$. Дробно-линейная функция $t = \frac{1-z}{1+z}$ взаимно однозначно отображает окрестность $\dot{U}$ на круг K с выколотой точкой $t_0 = -1$. Оценим расстояние от произвольной точки $t \in K$ до точки t_0

$$|t - t_0| = \Big|\frac{1-z}{1+z} + 1\Big| = \Big|\frac{2}{1+z}\Big| < \frac{2}{R-1} < \frac{2}{3} < 1.$$

Таким образом круг K целиком лежит в левой полуплоскости, и функция $\ln t$ допускает в круге K выделение бесконечного числа однозначных аналитических ветвей

$$h_k(t) = \ln|t| + i(arg\,t + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Следовательно функции

$$h_k\Big(\frac{1-z}{1+z}\Big),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

будут однозначными аналитическими ветвями функции $f_1(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

b) В качестве контура γ выберем произвольную окружность $|z| = R$, где $R > 2$. При полном обходе точкой z контура γ против часовой стрелки приращения аргумента всех трех функций $g_1(z) = 1 - z,\ g_2(z) = 1 + z,\ g_3(z) = 2 + z$ будут равны 2π. Следовательно приращение аргумента функции $t = \dfrac{1-z}{(1+z)(2+z)}$ будет равно -2π.

В произвольной точке $z \in \gamma$ функция $f_2(z)$ принимает бесконечно много различных значений

$$w_k(z) == \ln\Big|\frac{1-z}{(1+z)(2+z)}\Big| + i(arg\Big(\frac{1-z}{(1+z)(2+z)}\Big) + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Если в окрестности бесконечно удаленной точки существует однозначная аналитическая ветвь $h(z)$ многозначной функции $f_2(z)$, то при обходе произвольного замкнутого контура значение функции $h(z)$

должно меняться непрерывным образом, и при полном обходе контура приращение функции $h(z)$ должно быть равным нулю. В фиксированной точке $a \in \gamma$ значение функции $h(z)$ должно совпадать с одним из значений $w_k(a)$. Изменяясь непрерывным образом при обходе контура γ значение функции $h(z)$ в конечной точке обхода b, совпадающей с точкой a, должно быть равно

$$w_k(b) = \ln\left|\frac{1-a}{(1+a)(2+a)}\right| + i(arg\left(\frac{1-a}{(1+a)(2+a)}\right) + 2\pi k - 2\pi) = w_k(a) - 2\pi i.$$

т.е. приращение функции $h(z)$ при полном обходе контура γ отлично от нуля.

Это означает, что в окрестности точки $z_0 = \infty$ нельзя выделить однозначную аналитическую ветвь многозначной функции $f_2(z)$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Элементарные аналитические функции

3.1. Найти линейное преобразование с неподвижной точкой $1+2i$, переводящее точку i в точку $-i$.

3.2. Найти образ квадранта $K=\{z\in C \mid \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0\}$ при отображении $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

3.3. Найти образ полукруга $B^{+}=\{z\in C \mid\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$ при отображении $w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$.

3.4. Найти образ полосы $P=\{z\in C \mid\ 0<\operatorname{Re} z<1\}$ при отображении: $a)$ $w=\dfrac{z-1}{z}$; $b)$ $w=\dfrac{z-1}{z-2}$.

3.5. Найти общий вид дробно-линейного отображения полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ с выкинутым кругом $|z-\frac{d}{2}|\le\frac{d}{2}$ на вертикальную полосу $0<\operatorname{Re} w<1$.

3.6. Найти дробно-линейное отображение, переводящее точки $-1,\ i,\ 1+i$ соответственно в точки $0,\ 2i,\ 1-i$.

3.7. Найти дробно-линейное отображение, переводящее точки $-1,\ \infty,\ i$ соответственно в точки $\infty,\ i,\ 1$.

3.8. Найти точку, симметричную точке $z=2+i$ относительно окружности $|z-i|=3$.

3.9. Найти симметричный образ относительно единичной окружности $|z|=1$ следующих линий: a) $y=2$; b) $|z-1|=1$.

3.10. Найти общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

3.11. Найти такое дробно-линейное отображение круга $|z|<2$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$, что $w(0)=1$ и $\arg w'(0)=\frac{\pi}{2}$.

3.12. Найти такое дробно-линейное отображение круга $|z-4i|<2$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>\operatorname{Re} w$, что центр круга отображается в точку $w=-4$ а точка окружности $z_0=2i$ отображается в начало координат.

3.13. Найти образ множества

$$E=\{z\in C \mid\ |\operatorname{Arg} z|<\frac{\pi}{8},\ z\notin[0,1]\}$$

при отображении $w=z^8$.

3.14. Найти образ верхнего полукруга

$$B^{+}=\{z\in C \mid\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$$

при отображении ветвью функции $w=z^{\frac{3}{2}}$, для которой $w\Big(\dfrac{i}{2}\Big)=\dfrac{1-i}{4}$.

3.15. Найти какое-либо конформное отображение области

$$D=\{z\in C \mid\ \operatorname{Im} z>0,\ z\notin(0,ih],\ h>0\}$$

на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

3.16. Найти какое-либо конформное отображение верхнего полукруга

$$B^{+}=\{z\in C \mid\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$$

на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$.

3.17. Найти какое-либо конформное отображение "луночки", образованной окружностью C_1, проходящей через точки $i,\ -i,\ 1-\sqrt{2}$, и окружностью C_2, проходящей через точки $i,\ -i,\ \sqrt{2}-1$, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

3.18. Найти какое-либо конформное отображение плоскости с разрезом по отрезку $[-1,1]$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

3.19. Доказать, что многозначные функции $f(z) = \ln^2 z$ и $g(z) = z^z$ допускают выделение однозначных ветвей во всей комплексной плоскости с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$.

3.20. Проверить возможность выделения однозначных ветвей многозначной функции $f(z) = \sqrt[3]{1-z^2}$ в области D, представляющей собой всю комплексную плоскость с разрезами по лучам $(-\infty,-1]$ и $[1,\infty)$.

3.21. Допускает ли многозначная функция $f(z) = \sqrt[n]{1-z^n}$ выделение однозначных ветвей в окрестности точки $z = 0$.

3.22. Допускает ли многозначная функция $f(z) = \sqrt{z^2(z^2-1}$ выделение однозначных ветвей в окрестности точки $z = 1$.

3.23. Допускает ли многозначная функция $f(z) = \operatorname{Ln}\dfrac{2z-i}{z+1}$ выделение однозначных ветвей в окрестности точки $z = \infty$.

3.24. Пусть $D \subset C$– односвязная область, не содержащая точку $z = 0$, но содержащая точку $z = 1$. Выяснить, сколько различных аналитических ветвей $\varphi(z)$ в области D, удовлетворяющих указанным условиям, допускают следующие многозначные функции:

$$a)\ w = (z-1)\operatorname{Ln} z,\quad \varphi(1) = 0;\qquad b)\ w = z^z,\quad \varphi(1) = 1;\qquad c)\ w = z^{iz},\quad \varphi(1) = 1.$$

3.25. Пусть $\varphi(z)$– однозначная аналитическая ветвь многозначной функции $w = \operatorname{Ln}(z+i)$ в области D, удовлетворяющая условию $\varphi(1-i) = 0$. Найти значение $\varphi(-1-i)$ в случаях, когда область D :

a) Вся комплексная плоскость C с разрезом по лучу $(-i\infty, -i]$;

b) Вся комплексная плоскость C с разрезом по лучу $[-i, +i\infty)$.

3.26. Построить риманову поверхность для функции $w = \operatorname{Arcsin} z$.

3.27. Построить риманову поверхность для функции $w = \sqrt{z^2-1}$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§1. Понятие интеграла.

Пусть $\gamma \subset C$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, $z = z(t)$ – ее кусочно-гладкая параметризация, т.е. кусочно-гладкое отображение $z(t) : [a, b] \subset R \to \gamma \subset C, \quad z'(t) \neq 0$.

Определение. Интеграл от непрерывной функции $f : \gamma \to C$ вдоль кривой γ определяется равенством

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,dt, \tag{1}$$

в котором правая часть понимается как линейная комбинация интегралов от действительной и мнимой частей.

Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда равенство (1) можно записать в виде:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,dt = \int\limits_{a}^{b} (ux' - vy')\,dt + i\int\limits_{a}^{b} (vx' + uy')\,dt =$$

$$\int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy. \tag{2}$$

Таким образом нахождение интеграла от функции комплексного переменного может быть сведено к вычислению соответствующих криволинейных интегралов или интегралов от дифференциальных форм первой степени. Из действительного анализа известно, что непрерывность функций u и v является достаточным условием существования криволинейных интегралов в равенстве (2). Поэтому для непрерывной функции $f = u + iv$ интеграл по кусочно-гладкой кривой всегда существует.

Покажем, что значение интеграла не зависит от выбора параметризации кривой γ. Пусть $z_1(\tau) : [\alpha, \beta] \to \gamma$ – другая кусочно-гладкая параметризация кривой γ. Тогда существует монотонно возрастающая кусочно-гладкая функция $t(\tau) : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ такая, что $z_1(\tau) = z[t(\tau)]$ для всех $\tau \in [\alpha, \beta]$. Поскольку $z'(t)\,dt = z'[t(\tau)]t'(\tau)\,d\tau = z_1{}'(\tau))\,d\tau$, то применяя известную из действительного анализа теорему о замене переменной в интеграле отдельно к действительной и мнимой частям в равенстве (2), получаем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[z_1(\tau)]z_1{}'(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом независимо от выбора кусочно-гладкой параметризации значение интеграла получается одним и тем же.

Пример. Вычислим интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n\,d\,z,$$

считая, что n– целое число, а окружность ориентирована против хода часовой стрелки.

Воспользовавшись параметризацией окружности

$$z = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad d\,z = iRe^{i\varphi}d\,\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

преобразуем интеграл к виду

$$I_n = \frac{1}{2\pi}R^{n+1}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)}d\,\varphi.$$

При $n = -1$ получаем

$$I_{-1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\,\varphi = 1.$$

При $n \neq -1$ получаем

$$I_n = \frac{1}{2\pi i(n+1)}R^{n+1}e^{i\varphi(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i(n+1)}R^{n+1}(e^{i2\pi(n+1)} - 1) = 0.$$

Несмотря на свою простоту, данный пример будет играть существенную роль в последующих вычислениях и доказательствах, поэтому полезно помнить, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{d\,z}{z-z_0}=1$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^n\,d\,z=0,\quad n\neq -1.$$

Свойства интеграла. Укажем основные свойства интеграла от функций комплексного переменного, которыми мы будем пользоваться далее.

Непосредственным следствием определения являются следующие свойства интеграла.

1. Линейность. Для любых непрерывных на кусочно-гладкой кривой γ функций f и g и произвольных комплексных постоянных α и β выполняется равенство

$$\int\limits_{\gamma}(\alpha f+\beta g)d\,z=\alpha\int\limits_{\gamma}f d\,z+\beta\int\limits_{\gamma}g d\,z.$$

2. Аддитивность. Пусть γ – кусочно-гладкая кривая с началом в точке a и концом в точке b. Для точки $c\in\gamma$ обозначим через γ_1 дугу кривой γ, начинающуюся в точке a и заканчивающуюся в точке c, а через γ_2 дугу кривой γ, начинающуюся в точке c и заканчивающуюся в точке b. Тогда для всякой непрерывной на кривой γ функции f

$$\int\limits_{\gamma}f d\,z=\int\limits_{\gamma_1}f d\,z+\int\limits_{\gamma_2}f d\,z.$$

Пока свойством аддитивности мы можем пользоваться только в случае, когда конец кривой γ_1 совпадает с началом кривой γ_2. В общем случае, объединение двух произвольных кривых, вообще говоря, кривой не является, но хотелось бы иметь понятие интеграла и свойство аддитивности и в этой ситуации. Поэтому прямо *по определению* для произвольных ориентированных кусочно-гладких кривых γ_1 и γ_2 положим

$$\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2}f d\,z=\int\limits_{\gamma_1}f d\,z+\int\limits_{\gamma_2}f d\,z.$$

3. Зависимость от ориентации. Обозначим через γ^- кривую, совпадающую, как множество точек, с кривой γ, но имеющую противоположную ориентацию. Тогда для всякой непрерывной на кривой γ функции f

$$\int\limits_{\gamma^-}f d\,z=-\int\limits_{\gamma}f d\,z.$$

4. Оценка интеграла. Для всякой непрерывной на кривой γ функции f выполняются неравенства

$$\Big|\int\limits_{\gamma}f d\,z\Big|\leq\int\limits_{\gamma}|f|\,|d\,z|\leq M\cdot l,$$

где $|d\,z|=\sqrt{dx^2+dy^2}$ – элемент длины кривой γ, l– длина кривой γ, а M– максимум модуля функции f на кривой γ.

Доказательство. Обозначим через I значение интеграла от функции f по кривой γ и воспользуемся показательной формой записи комплексных чисел: $I=|I|e^{i\alpha}$. Тогда

$$|I|=\int\limits_{\gamma}e^{-i\alpha}f(z)d\,z=\int\limits_{a}^{b}e^{-i\alpha}f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Поскольку последний интеграл является действительным числом, то

$$|I|=\int\limits_{a}^{b}Re(e^{-i\alpha}f(z(t))z'(t))\,dt\leq\int\limits_{a}^{b}|f(z(t))|\,|z'(t))|\,dt=$$

$$\int\limits_{\gamma} |f|\,|d\,z| \leq M \cdot l.$$

5. Почленное интегрирование функционального ряда. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ из непрерывных на кусочно-гладкой кривой γ функций равномерно на γ на сходится к функции $f(z)$, тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_k(z)d\,z.$$

Доказательство. Как сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций, функция $f(z)$ будет непрерывной и интегрируемой на γ.

Обозначим через l длину кривой γ. В силу равномерной сходимости ряда, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что при любом $n > n_0$ оценка $|f(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)| < \varepsilon \cdot l^{-1}$ выполняется одновременно для всех точек $z \in \gamma$. Поэтому

$$\Big|\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma} f_k(z)d\,z\Big| \leq \int\limits_{\gamma} \Big|f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\Big| |d\,z| < \varepsilon \cdot l^{-1} \cdot l = \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_k(z)d\,z.$$

§2. Интегральная теорема Коши.

Теорема. Пусть $D \subset C$– односвязная область, а функция f является аналитической в D. Тогда для любого простого кусочно-гладкого замкнутого контура $\gamma \subset D$

$$\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z = 0.$$

Доказательство. Обозначим через D^* область, ограниченную контуром γ. Поскольку $\overline{D^*} \subset D$, то действительная и мнимая части функции $f = u + iv$ являются гладкими в окрестности $\overline{D^*}$, и мы можем воспользоваться формулой Грина для интегралов от дифференциальных форм первой степени

$$\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z = \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy = \iint\limits_{D^*} \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big) dx\,dy + i\iint\limits_{D^*} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) dx\,dy = 0.$$

Равенство нулю двойных интегралов является следствием условий Коши-Римана.

Далее мы реально будем пользоваться следующим обобщением только что доказанного результата, которое и будем называть *интегральной теоремой Коши.*

Интегральная теорема Коши. Пусть $D \subset C$– ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ, функция f является аналитической в области D и непрерывной в $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)d\,z = 0.$$

Идея доказательства интегральной теоремы Коши довольно проста – интеграл по границе можно с любой точностью аппроксимировать интегралами по замкнутым кусочно-гладким контурам γ, которые целиком лежат внутри области D. Поскольку уже доказано, что интегралы по всем таким контурам γ будут равны нулю, то, естественно, и интеграл по границе тоже будет равен нулю.

К сожалению, строгое доказательство возможности такой аппроксимации, являясь в общем-то несложным, занимает слишком большой объем и выходит за рамки нашего курса. Однако, всякий желающий может найти различные варианты доказательства интегральной теоремы Коши практически в любом учебнике по теории функций комплексного переменного.

Односвязность области не является необходимым условием в интегральной теореме Коши — теорема верна и для многосвязных областей. Следует только отметить одно важное дополнительное требование к границе области: поскольку интеграл зависит от ориентации кривой, то то ориентации различных компонент границы должны быть согласованы между собой.

Пусть $D \subset C$– ограниченная n-связная область с кусочно-гладкой границей Γ, состоящей из связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$. При этом компоненты $\Gamma_k, k = 1, \ldots, n-1$, расположены внутри замкнутого контура Γ_0 и каждая во внешности остальных компонент границы. Будем говорить, что граница Γ ориентирована в *положительном направлении*, если при обходе границы точки области D, примыкающие к границе, всегда остаются слева. Противоположное направление обхода задает *отрицательную* ориентацию границы. Границу области, на которой задана либо положительная либо отрицательная ориентация, будем называть *ориентированной* границей.

Замечание. Пусть Γ — ориентированная граница области $D \subset C$. Если компонента границы Γ_k содержит такую дугу γ, что точки области D расположены с обеих сторон от γ, то задание ориентации на границе означает, что точки множества, составляющие дугу γ, проходятся дважды в противоположных направлениях. Обычно такую дугу γ называют разрезом в области D.

Интегральная теорема Коши. Пусть $D \subset C$– ограниченная конечносвязная область с кусочно-гладкой ориентированной границей Γ, функция f является аналитической в области D и непрерывной в $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z) d\, z = 0.$$

Доказательство. Пусть $D \subset C$– ограниченная n-связная область с кусочно-гладкой границей Γ, состоящей из связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$. Проведем непересекающиеся гладкие разрезы $\gamma_k, k = 1, \ldots, n-1$, соединяющие компоненту границы Γ_0 с компонентой Γ_k соответственно. Тогда область $D^* = D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \gamma_k$ будет односвязной, и для нее интегральная теорема Коши верна. Исходная ориентация границы области D естественным образом определяет ориентацию разрезов γ_k, проходимых дважды, и которые следует понимать как объединение двух различных кривых γ_k^+ и γ_k^-, совпадающих как множества точек комплексной плоскости, но имеющих противоположные ориентации.

Пусть Γ^* — ориентированная граница односвязной области D^*, тогда $\Gamma^* = \Gamma \cup \Big(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \gamma_k^+\Big) \cup \Big(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \gamma_k^-\Big)$.

Учитывая аддитивность интеграла и равенство

$$\int\limits_{\gamma^+} f(z)\, dz + \int\limits_{\gamma^-} f(z)\, dz = 0,$$

получаем

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\Gamma_k^+} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\Gamma_k^-} f(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma^*} f(z)\, dz = 0.$$

Замечание. В отличие от односвязности условие ограниченности области в интегральной теореме Коши является существенным. К примеру, интеграл от аналитической функции $f(z) \equiv 1$ по границе верхней верхней полуплоскости (т.е. по действительной прямой) отличен от нуля. Однако при выполнении дополнительных требований на поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки аналог интегральной теоремы Коши может быть получен подходящим предельным переходом и для неограниченных областей.

§3. Интегральная формула Коши.

Получаемая в следующей теореме формула позволяет выразить значения аналитической функции во внутренних точках области через интеграл по границе области.

Интегральная формула Коши. Пусть $D \subset C$– ограниченная конечносвязная область с ориентированной в положительном направлении кусочно-гладкой границей Γ, функция f является аналитической в области D и непрерывной в $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда для произвольной точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t) d\, t}{t - z}.$$

Доказательство. Пусть точка $z \in D$ и $d = dist(z, \Gamma)$. Поскольку функция f непрерывна в точке z, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из выполнения неравенства $|t - z| < \delta$ следует выполнение неравенства $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$.

Пусть $r < \min(d, \delta)$. Рассмотрим круг $B(z, r)$, ориентированную против хода часовой стрелки окружность $C_r = \{t \in C \mid |t - z| = r\}$ и обозначим через C_r^- окружность с противоположной ориентацией.

Функция $\dfrac{f(t)}{t-z}$ является аналитической по переменной t в области $D^* = D \setminus \overline{B(z,r)}$, и по интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{\partial D^*} \frac{f(t)dt}{t-z} = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t-z} + \int\limits_{C_r^-} \frac{f(t)dt}{t-z} = 0$$

или

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t-z} = \int\limits_{C_r} \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Учитывая,что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{dt}{t-z} = 1,$$

получаем

$$\Big|f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t-z}\Big| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{f(z)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{f(t)dt}{t-z}\Big| \le$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_r} \frac{|f(z)-f(t)|\,|dt|}{|t-z|} \le \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}2\pi r = \varepsilon.$$

Из произвольности выбора числа ε следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Замечание. Если выполнены условия теоремы и $z \in C \setminus \overline{D}$, то функция $\dfrac{f(t)}{t-z}$ оказывается аналитической по переменной t в области D и, учитывая интегральную теорему Коши, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t-z} = \begin{cases} f(z); & z \in D \\ 0; & z \in C \setminus \overline{D} \end{cases}$$

Интеграл в левой части формулы по границе области, в которой функция f является аналитической, обычно называют *интегралом Коши.*

§4. Интегралы типа Коши.

Пусть $\Gamma \subset C$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, f – определенная на кривой Γ непрерывная функция. Для любой точки $z \in C \setminus \Gamma$ функция $\dfrac{f(t)}{t-z}$ непрерывна по переменной t на кривой Γ. Поэтому существует интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{1}$$

называемый *интегралом типа Коши* и являющийся однозначной функцией переменного z.

Теорема. Пусть $\Gamma \subset C$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, функция f непрерывна на Γ. Тогда интеграл типа Коши, определяемый равенством (1), является аналитической функцией в области $C \setminus \Gamma$. Более того, функция $F(z)$ бесконечно дифференцируема и при этом

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, ...$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции и проверим вначале верность утверждения теоремы при $n = 1$.

Фиксируем произвольную точку $z \in C \setminus \Gamma$, и пусть $2d = dist(z, \Gamma)$, а $|\Delta z| < d$. Тогда для любого $t \in \Gamma$ выполняются неравенства $|t - z| > d$ и $|t - z - \Delta z| > d$.

Оценим разность

$$\Big|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}\Big| =$$

$$\frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_{\Gamma} \frac{\Delta z f(t)\,dt}{(t-z)^2(t-z-\Delta z)}\Big| \le \frac{|\Delta z| LM}{2\pi d^3},$$

где L – длина кривой Γ, а M – максимум модуля функции $f(t)$ на кривой Γ.

Таким образом
$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}.$$

Считая результат доказанным при $n = k-1$, получим
$$\left| \frac{F^{(k-1)}(z+\Delta z) - F^{(k-1)}(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{k+1}} \right| =$$
$$\frac{(k-1)!}{2\pi} \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{\sum\limits_{l=0}^{k-1} C_k^l (t-z)^{l+1} (\Delta z)^{k-l} - k \sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l (t-z)^l (\Delta z)^{k-l}}{(t-z)^{k+1}(t-z-\Delta z)^k} f(t)\,dt \right| =$$
$$\frac{(k-1)!}{2\pi} \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{\Delta z P_k(t-z, \Delta z)}{(t-z)^{k+1}(t-z-\Delta z)^k} f(t)\,dt \right| \le \frac{|\Delta z|(k-1)! L M Q_k}{2\pi d^{2k+1},}$$
где $P_k(t-z, \Delta z)$ – полином, $|P_k(t-z,\Delta z)| \le Q_k$ и постоянная Q_k зависит лишь от k и d.

Таким образом
$$F^{(k)}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F^{(k-1)}(z+\Delta z) - F^{(k-1)}(z)}{\Delta z} = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{k+1}},$$
что и завершает доказательство теоремы.

Дифференцируемость интегралов типа Коши позволяет получить важное следствие: аналитическая в области D функция $f(z)$ является бесконечно дифференцируемой в в каждой точке области D.

Действительно, пусть точка z_0 – произвольная точка области D и $r < dist(z_0, \partial D)$. Тогда в круге $B(z_0, r)$ функция $f(z)$ представима интегралом Коши
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$
и, следовательно, является бесконечно дифференцируемой.

§5. Первообразная. Теорема Мореры.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $D \subset C, \gamma \subset D$ – кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $z_0, z \in D$. Согласно интегральной теореме Коши интеграл
$$\int\limits_{\gamma} f(t)\,dt$$
не зависит от выбора кривой γ, а зависит лишь от начальной и конечной точки пути интегрирования. Таким образом в области D можно определить однозначную функцию, полагая
$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt.$$

Несложно получить и обратное утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в односвязной области D и для любой точки $z \in D$ ее интеграл
$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt \qquad z_0 \in D \tag{1}$$
не зависит от пути интегрирования. Тогда функция $F(z)$ является аналитической в области D и
$$F'(z) = f(z).$$

Доказательство. Пусть отрезок $[z, z+\Delta z] \subset D$. Поскольку интеграл не зависит от пути интегрирования, то
$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)\,dt = \int\limits_{[z,z+\Delta z]} f(t)\,dt \qquad (2).$$

Далее будем считать, что в формуле (2) интегрирование происходит по отрезку $[z, z+\Delta z]$.

В силу непрерывности функции $f(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$ для всех точек t, удовлетворяющих неравенству $|t - z| < \delta$. Пусть $|\Delta z| < \delta$, тогда,

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} (f(t) - f(z))\,d\,t\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\,\varepsilon\,|\Delta z| = \varepsilon.$$

Из полученной оценки непосредственно следует, что

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Определение. Аналитическая в области D функция $F(z)$ называется первообразной функции $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$.

Из теоремы следует, что формула (1) определяет одну из первообразных функции $f(z)$. Найдем общий вид первообразных. Пусть $\Phi'(z) = f(z)$ и $\Phi(z) - F(z) = H(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда функция $H(z)$ является аналитической и $H'(z) \equiv 0$. Таким образом

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

т.е. $H(z) \equiv C$, где C – некоторая постоянная. Следовательно

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,d\,t + C.$$

Полагая в этой формуле $z = z_0$, получаем $C = \Phi(z_0)$. Таким образом для функций комплексного переменного верна привычная формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,d\,t = \Phi(z) - \Phi(z_0),$$

где $\Phi(z)$ – произвольная первообразная функции $f(z)$.

Следующее утверждение является обратным к интегральной теореме Коши.

Теорема Мореры. Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset C$ и вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset D$

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,d\,z = 0,$$

то функция $f(z)$ является аналитической в области D.

Из условий теоремы следует, что интеграл функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования. Согласно теореме 1 соответствующая функция $F(z)$ будет аналитической в области D. Поскольку $F'(z) = f(z)$, то функция $f(z)$, как производная аналитической функции, в свою очередь будет аналитической.

§6. Принцип максимума модуля аналитической функции.

Теорема. (Теорема о среднем.) Если функция $f(z)$ является аналитической в круге $B(z_0, r)$ и непрерывной в замкнутом круге $\overline{B(z_0, r)}$, то ее значение в центре круга равно среднему значению функции на граничной окружности, т.е.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|t-z_0|=r} f(t)dl = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi.$$

Доказательство. Используя интегральную формулу Коши и делая замену переменной $t = z_0 + re^{i\varphi}$, получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)d\,t}{t - z_0} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|t-z_0|=r} f(t)dl.$$

Теорема.(Принцип максимума модуля аналитической функции.)

Пусть $D \subset C-$ область, отличная от постоянной функция f является аналитической в области D и $M = \sup\limits_{z \in D} |f(z)|$. Тогда $|f(z)| < M$ для произвольной точки $z \in D$. Иными словами, модуль отличной от постоянной аналитической функции не может достигать своего максимума ни в одной внутренней точке области.

Доказательство. Если $M = +\infty$, то утверждение теоремы очевидно, т.к. функция $f(z)$ является аналитической и, следовательно, конечной во всей области D.

Пусть $M < +\infty$. Доказывать будем от противного: предположим, что существует такая точка z_0, что $|f(z_0)| = M$, и покажем, что в этом случае функция $f(z)$ является постоянной во всей области D.

Выбирая $r < dist(z_0, \partial D)$, используя теорему о среднем и определение числа M, получаем

$$M = |f(z_0)| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi\Big| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|d\varphi \leq \frac{1}{2\pi}M2\pi = M,$$

следовательно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|d\varphi = M.$$

Поскольку функция $f(z)$ непрерывна и $|f(z)| \leq M$, то последнее равенство возможно лишь при $|f(z_0 + re^{i\varphi})| = M$ для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$. Таким образом $|f(z)| \equiv M$ на окружности $|z - z_0| = r$. Так как $r < dist(z_0, \partial D)$ выбиралось произвольно, то $|f(z)| \equiv M$ в любом замкнутом круге $\overline{B(z_0, R)} \subset D$.

Пусть z^* – произвольная точка области D. Покажем, что $|f(z^*)| = M$. Соединим точки z^* и z_0 кривой $\gamma \subset D$. Учитывая, что расстояние от кривой γ до границы области положительно, фиксируем положительное $r < dist(\gamma, \partial D)$. Тогда для всякого $z \in \gamma$ замкнутый круг $\overline{B(z, r)} \subset D$.

Если $|z^* - z_0| \leq r$, то по уже доказанному $|f(z^*)| = M$.

Пусть $|z^* - z_0| \geq r$. Так как длина кривой γ конечна, то ее можно разбить на конечное число последовательных дуг точками $z_1, z_2, \ldots, z_n = z^*$, такими, что $|z_{k+1} - z_k| \leq r$. Поскольку $z_1 \in \overline{B(z_0, r)}$, то по уже доказанному $|f(z_1)| = M$. Повторяя для точки z_1 рассуждения, аналогичные ранее использованным для точки z_0, получаем $|f(z)| \equiv M$ в круге $\overline{B(z_1, r)}$. Поскольку $z_2 \in \overline{B(z_0, r)}$, то $|f(z_2)| = M$. Продолжая процесс, мы за конечное число шагов дойдем до точки $z_n = z^*$ и получим $|f(z^*)| = M$.

Поскольку точка z^* выбиралась произвольным образом, то модуль функции является постоянным во всей области D. Осталось показать, что и сама функция является постоянной.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда $u^2 + v^2 \equiv M^2$. Следовательно

$$0 = \Delta(u^2 + v^2) = 2u\Delta u + 2v\Delta v + 2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2\Big] =$$

$$2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2\Big]$$

Последнее равенство является следствием гармоничности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в области D. Таким образом все частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

и следовательно $f(z) \equiv const$ в области D. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. Пусть $D \subset C-$ область, отличная от постоянной функция f является аналитической в области D и $m = \inf\limits_{z \in D} |f(z)|$. Если $f(z) \neq 0$ в области D, то $|f(z)| > m$ для произвольной точки $z \in D$.

Доказательство. Поскольку $f(z) \neq 0$, то функция $g(z) = 1/f(z)$ будет аналитической в области D и

$$\sup_{z \in D} |g(z)| = \frac{1}{\inf\limits_{z \in D} |f(z)|} = \frac{1}{m}.$$

Остается воспользоваться принципом максимума модуля для функции $g(z)$.

Следствие 2. Пусть $D \subset C-$ ограниченная область. Если отличная от постоянной функция f является аналитической в области D, непрерывной в $\overline{D}$ и $f(z) \neq 0$ в области D, то модуль функции достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области.

Доказательство. Поскольку $\overline{D}$ является компактным множеством, то по теореме Вейерштрасса непрерывная функция $|f(z)|$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения в $\overline{D}$. При этом по принципу максимума модуля и следствию 1 эти значения не могут достигаться во внутренних точках области D.

§7. Интегральная формула Пуассона.

Пусть функция $u(x, y)$ является гармонической в круге $B(0, R) \subset C$ и непрерывной в замкнутом круге $\overline{B(0, R)}$. Если $v(x, y)$ – гармоническая функция сопряженная $u(x, y)$, то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ будет аналитической, и для произвольной точки $z = re^{i\theta}$, лежащей в круге $B(0, R)$, согласно интегральной формуле Коши выполняется равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{f(t)dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} d\varphi. \tag{1}$$

Рассмотрим точку z^* симметричную точке z относительно окружности $|z| = R$

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z}} = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}.$$

Поскольку точка z^* лежит вне круга $B(0, R)$, то функция $\dfrac{f(t)}{t - z^*}$ является аналитической в круге $B(0, R)$, и

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{f(t)dt}{t - z^*} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} d\varphi = 0. \tag{2}$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получаем

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \Big(\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} \Big) d\varphi =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi.$$

Выделяя в последнем равенстве справа и слева действительную часть, получаем формулу

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi, \tag{3}$$

называемую *интегральной формулой Пуассона.* Формула Пуассона позволяет найти значения гармонической функции внутри круга через ее значения на границе круга.

Наиболее простой вид формула (3) принимает при $z = 0$

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) d\varphi,$$

т.е. *значение гармонической функции в центре круга равно ее среднему значению на граничной окружности.*

При $R = 1$ и $|z| < 1$ формула (3) может быть записана в виде

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} u(e^{i\varphi}) d\varphi. \tag{4}$$

Поскольку функция $v(z) \equiv 1$ является гармонической, то применяя к ней интегральную формулу Пуассона, получаем полезное тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \ \equiv 1, \qquad |z| < 1. \tag{5}$$

§8. Задача Дирихле для гармонических функций в круге.

Задача Дирихле: *найти гармоническую в круге* $|z-a|<R$ *функцию* $u(z)$, *непрерывную в замкнутом круге* $|z-a|\le R$ *и совпадающую с заданной непрерывной функцией* $h(t)$ *на граничной окружности* $|t-a|=R$.

Вначале рассмотрим случай, когда $R=1$, $a=0$ и $h(e^{i\varphi})$ – непрерывная функция на единичной окружности.

Если предположить существование функции $u(z)$, являющейся решением задачи Дирихле, то согласно формуле (4) предыдущего параграфа

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}h(e^{i\varphi})d\varphi,\qquad |z|<1. \tag{1}$$

Из этого равенства сразу следует единственность решения задачи Дирихле.

Осталось показать, что функция $u(z)$, определяемая равенством (1), действительно является решением задачи Дирихле.

Заметим, что функция

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}=Re\,\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}$$

при $|z|<1$ является гармонической, как действительная часть аналитической функции. При $|z|<1$ в равенстве (1) можно дифференцировать под знаком интеграла

$$\Delta u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Delta\Big(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\Big)h(e^{i\varphi})d\varphi=0.$$

Следовательно функция $u(z)$, определяемая равенством (1), является гармонической в единичном круге.

Осталось показать, что для любой точки z_0, лежащей на единичной окружности,

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ |z|<1}} u(z)=h(z_0).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Поскольку функция $h(t)$ является непрерывной, то существует такое $\delta>0$, что $|h(t)-h(z_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $|t-z_0|<\delta$. Пусть $\Omega_1=\{\varphi\in[0,2\pi]\ |\ |e^{i\varphi}-z_0|<\delta\}$ и $\Omega_2=[0,2\pi]\setminus\Omega_1$. Тогда $|h(e^{i\varphi})-h(z_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ для любого $\varphi\in\Omega_1$, и при $|z-z_0|<\frac{\delta}{2}$ для любого $\varphi\in\Omega_2$ выполняется неравенство $|e^{i\varphi}-z|>\frac{\delta}{2}$.

Используя тождество (5) предыдущего параграфа, получаем

$$|u(z)-h(z_0)|=\Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}h(e^{i\varphi})d\varphi\ -\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}h(z_0)\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\Big|\le$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}|h(e^{i\varphi})-h(z_0)|d\varphi=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_1}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}|h(e^{i\varphi})-h(z_0)|d\varphi\ +\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_2}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}|h(e^{i\varphi})-h(z_0)|d\varphi=I_1\ +\ I_2.$$

Оценим полученные интегралы

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_1}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}|h(e^{i\varphi})-h(z_0)|d\varphi\le\ \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку функция $h(t)$ непрерывна на окружности, то она ограничена, т.е. $|h(t)|\le M<\infty$. Выбирая z достаточно близким к z_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$1-|z|^2<\frac{\varepsilon\delta^2}{16M},$$

получаем

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_2} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}|h(e^{i\varphi})-h(z_0)|d\,\varphi \le \frac{1}{2\pi}\ 2\pi\ 2M\ \left(\frac{2}{\delta}\right)^2\ (1-|z|^2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно $|u(z)-h(z_0)| < \varepsilon$ для всех z достаточно близких к z_0, т.е.

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ |z|<1}} u(z) = h(z_0).$$

Таким образом функция $u(z)$, определяемая равенством (1), действительно является решением задачи Дирихле для единичного круга.

Если функция $h(t)$ непрерывна на окружности $|t-a| = R$, то функция $h^*(\tau) = h(a+R\tau)$ будет непрерывной на единичной окружности. Рассмотрим точку $z = a + re^{i\theta}, 0 \le r < R$, и положим $w = \dfrac{z-a}{R}$. Тогда $|w| < 1$ и согласно формуле (1) функция

$$v(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|w|^2}{|e^{i\varphi}-w|^2} h^*(e^{i\varphi})d\,\varphi,$$

является решением задачи Дирихле для единичного круга с граничными значениями $h^*(\tau)$.

При линейной замене переменной свойство функции быть гармонической сохраняется, поэтому функция

$$u(z) = v\Big(\frac{z-a}{R}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|\dfrac{z-a}{R}|^2}{|e^{i\varphi}-\dfrac{z-a}{R}|^2} h^*(e^{i\varphi})d\,\varphi =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\ h(a+Re^{i\varphi})d\,\varphi$$

является решением задачи Дирихле для круга радиуса R с центром в точке a.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Интегрирование функций комплексного переменного

4.1. Пусть γ– простой замкнутый контур, ограничивающий область площади S. Доказать, что

$$a)\ \int\limits_{\gamma} x\,d\,z = iS; \quad b)\ \int\limits_{\gamma} y\,d\,z = -S; \quad c)\ \int\limits_{\gamma} \overline{z}\,d\,z = 2iS.$$

4.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} |z|\,\overline{z}\,d\,z$, где γ– простой замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $[-1, 1]$.

4.3. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-a|=R} (z-a)^n\,d\,z$ (n – целое число).

4.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{C^+} (z-a)^n\,d\,z$, где C^+– верхняя полуокружность $|z-a| = R$ (n – целое число).

4.5. Пусть путь γ начинается в точке $a = 1$, заканчивается в точке $b = re^{i\varphi}$ и совершает k полных обходов вокруг начала координат. Показать, что

$$\int\limits_{\gamma} \frac{d\,z}{z} = \ln r + i\varphi + 2\pi ik.$$

4.6. Пусть C – произвольный простой замкнутый контур, не проходящий через точку a, и (n – целое число). Показать, что

$$\int\limits_{C} (z-a)^n d\,z = \begin{cases} 0, & n \neq -1; \\ 2\pi i, & n = -1,\ a - \text{ внутри } C; \\ 0, & n = -1,\ a - \text{ вне } C. \end{cases}$$

4.7. Пусть путь γ начинается в точке $a = 0$, заканчивается в точке $b = 1$ и не проходит через точки $\pm\, i$. Показать, что

$$\int\limits_{\gamma} \frac{d\,z}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где k – целое число.

4.8. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в круге $B(z_0, r)$ и $|f(z)| \leq M < \infty$. Доказать, что для любых точек $a, b \in B(z_0, r)$ и произвольного контура $\gamma \subset B(z_0, r)$, начинающегося в точке a и заканчивающегося в точке b, выполняется оценка

$$\Big|\int\limits_{\gamma} f(z)\,d\,z\Big| \leq M\,|b-a|.$$

4.9. Интегрируя функцию $f(z) = e^{-z^2}$ по границе прямоугольника

$$P = \{z \in C \mid\ |\operatorname{Re} z| \leq R,\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq b\},$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\cos 2bx\,d\,x.$$

4.10. Интегрируя функцию $f(z) = e^{i\,z^2}$ по границе сектора

$$S = \{z \in C \mid\ 0 \leq |z| \leq R,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\},$$

вычислить интеграл Френеля

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{i\,x^2}\,d\,x.$$

4.11. Вычислить интеграл
$$\int\limits_{|z-i|=r} \frac{d\,z}{z^2+9},$$
если: $a)$ $r=1$; $b)$ $r=3$; $c)$ $r=5$.
4.12. Вычислить интеграл
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,d\,z}{z^2+a^2},$$
где γ – простой замкнутый контур, содержащий внутри себя круг $|z|\le a$.

4.13. Вычислить интеграл
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{z\,e^z\,d\,z}{(z-a)^3},$$
если точка a лежит внутри простого замкнутого контура γ.

4.14. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной простым замкнутым контуром γ, содержащим внутри себя начало координат. Доказать, что при любом выборе ветви функции $\operatorname{Ln} z$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f'(z)\,\operatorname{Ln} z\,d\,z = f(z_0)-f(0),$$
где $z_0\in\gamma$– начальная точка интегрирования.

4.15. Пусть функция $f(z)$ является аналитической при $|z|\ge 1$ и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$, $A\in C$. Найти значение интеграла
$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_1} \frac{f(t)\,d\,t}{t-z},$$
где S_1– единичная окружность, ориентированная в положительном направлении, и $z\notin S_1$.

4.16. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z|<R$ и непрерывной в замкнутом круге $|z|\le R$. Доказать неравенство
$$\Big|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\Big| \le \frac{M\,R}{(R-|z|)^{n+1}} \quad (|z|<R,\quad n\in N),$$
где $M=\max\limits_{|z|=R}|f(z)|$.

4.17. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z-a|<R$ и непрерывной в замкнутом круге $|z-a|\le R$. Доказать формулу
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a+R\,e^{i\varphi})\,d\,\varphi = f(a),$$
носящую название *теоремы о среднем.*

4.18. Пусть функция $f(z)$ отлична от постоянной и является аналитической во всей комплексной плоскости C. Доказать, что внутри всякой простой замкнутой линии уровня модуля функции $f(z)$ (т.е. линии $|f(z)|=const$) найдется хотя бы нуль этой функции.

4.19. Доказать *лемму Шварца*: если в круге $|z|\le 1$ функция $f(z)$ является аналитической, $f(0)=0$ и $|f(z)|\le 1$, то во всем круге $|f(z)|\le|z|$.

При этом, если хотя бы в одной внутренней точке круга $|f(z)|=|z|$, то $f(z)=e^{i\theta}\,z$, где θ– действительное число.

Указание. Рассмотреть функцию $\dfrac{f(z)}{z}$ и применить принцип максимума модуля.

РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§1. Теоремы Вейерштрасса.

Первая теорема Вейерштрасса. Пусть функции $f_n(z)$ являются аналитическими в области $D \subset C$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на всяком компактном подмножестве $K \subset D$ к функции $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ – аналитическая в области D, ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, т.е.

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

и ряд из производных сходится равномерно на всяком компактном подмножестве $K \subset D$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$, $d = dist(z_0, \partial D)$. При $0 < r < d$ замкнутый круг $\overline{B(z_0, r)}$ лежит в области D, согласно условию ряд сходится равномерно на $\overline{B(z_0, r)}$ и, следовательно, функция $f(z)$ будет непрерывной в круге $\overline{B(z_0, r)}$, как сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Рассматривая произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур $\gamma \subset B(z_0, r)$, используя возможность почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда и применяя к аналитическим функциям $f_n(z)$ интегральную теорему Коши, получаем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)dz = 0.$$

Поскольку функция $f(z)$ непрерывна и ее интеграл по любому замкнутому контуру $\gamma \subset B(z_0, r)$ равен нулю, то по теореме Мореры функция $f(z)$ является аналитической в круге $B(z_0, r)$. В силу произвольности выбора точки z_0 функция $f(z)$ будет аналитической и во всей области D.

Используя интегральную формулу Коши и возможность почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда, для произвольной точки $z \in B(z_0, r)$ получаем

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(t)dt}{(t-z)^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(t)}{(t-z)^{k+1}} dt =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f_n(t)dt}{(t-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z),$$

где C_r – окружность с центром в точке z_0 радиуса r, ориентированная в положительном направлении.

Осталось показать равномерную сходимость ряда из производных. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на окружности C_r, то согласно критерию Коши существует такой номер n_0, что при $n > n_0$ для любого $t \in C_r$

$$\Big|\sum_{m=n}^{\infty} f_m(t)\Big| < \varepsilon.$$

Пусть $z \in B(z_0, r/2)$, тогда $|t - z| > r/2$ для любого $t \in C_r$.

Следовательно

$$\Big|\sum_{m=n}^{\infty} f_m^{(k)}(t)\Big| \le \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{C_r} \frac{\Big|\sum\limits_{m=n}^{\infty} f_n(t)\Big|}{|t-z|^{k+1}} |dt| \le \frac{k!}{2\pi} \frac{\varepsilon\, 2\pi\, r\, 2^{k+1}}{r^{k+1}} = M\,\varepsilon,$$

т.е. ряд из производных сходится равномерно в круге $B(z_0, r/2)$.

Пусть $K \subset D$ – произвольное компактное подмножество. По доказанному, для всякой точки $z \in K$ существует круг $B(z, r_z)$, в котором ряд сходится равномерно. Круги $B(z, r_z)$ образуют открытое покрытие компакта K и из него можно выбрать конечное подпокрытие кругами, на которых ряд сходится равномерно, а следовательно ряд из производных сходится равномерно и на всем компакте K.

Замечание. Такой простой теоремы о дифференцируемости суммы ряда в действительном анализе нет. На действительной прямой равномерно сходящийся ряд из гладких функций, вообще говоря, нельзя почленно дифференцировать, для этого требуется более жесткое условие – должен равномерно сходиться ряд из производных. С аналитическими функциями ситуация существенно иная, и это различие объясняется тем, что, используя интегральную теорему Коши, мы можем свести дифференцирование к интегрированию.

Вторая теорема Вейерштрасса. Пусть $D \subset C$ – ограниченная область, функции $f_n(z)$ являются аналитическими в области D и непрерывными в $\overline{D} = D \cup \partial D$. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на границе области, то он равномерно сходится во всей $\overline{D}$.

Доказательство. Согласно критерию Коши равномерной сходимости ряда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что при $n, m > n_0$ для любого $t \in \partial D$

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} f_k(t)\Big| < \varepsilon.$$

Конечная сумма аналитических функций является аналитической функцией, и по принципу максимума модуля получаем для произвольного $z \in \overline{D}$

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} f_k(z)\Big| \le \max_{t\in\partial D}\Big|\sum_{k=n}^{m} f_k(t)\Big| < \varepsilon.$$

Таким образом ряд сходится равномерно во всей $\overline{D}$.

§2. Степенные ряды.

Степенным рядом называют функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, где коэффициенты c_n являются комплексными числами.

Заменой $t = z - z_0$ степенной ряд сводится к виду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, поэтому далее мы будем предполагать, что $z_0 = 0$, т.е. рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{1}$$

Очевидно, что всякий степенной ряд (1) сходится при $z = 0$. Пусть ряд (1) сходится в точке $z_0 \neq 0$. В силу необходимого признака сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. Следовательно $|c_n z_0^n| \le M < \infty$. Пусть $0 < r < |z_0|$ и $|z| \le r$, тогда

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n|\Big|\frac{z}{z_0}\Big|^n \le Mq^n,$$

где $q = \frac{r}{|z_0|} < 1$.

Поскольку степенной ряд мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, то ряд (1) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \le r$. Таким образом мы приходим к следующему утверждению:

Первая теорема Абеля. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

1. сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в круге $|z| < |z_0|$ и сходится равномерно во всяком круге $|z| \le r < |z_0|$;
2. расходится в точке z^*, то он расходится при любом $|z| > |z^*|$.

Первая часть теоремы уже доказана, а вторая является непосредственным следствием первой.

Из теоремы Абеля следует, что для всякого степенного ряда существует такое $R \in [0, +\infty]$, называемое *радиусом сходимости,* что ряд сходится в круге $|z| < R$ называемом *кругом сходимости* и расходится при $|z| > R$ (при $R = 0$ ряд сходится только в точке $z = 0$, при $R = +\infty$ ряд сходится во всей комплексной плоскости). Для доказательства рассмотрим все круги с центром в нуле, в которых ряд сходится. Тогда радиус сходимости R равен точной верхней грани радиусов таких кругов. Действительно, с одной стороны, из выбора значения R следует, что ряд сходится в круге $|z| < R$, с другой стороны, если ряд сходится в некоторой точке z^*, то $R \ge |z^*|$, т.е. ряд расходится при $|z| > R$.

Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формуле Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Положим $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$, тогда для произвольного $z \in C$ получим, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n z^n|} = L|z|$. Если $|z| > R = \frac{1}{L}$, то $L|z| > 1$ и, следовательно, для бесконечного множества номеров n выполняется неравенство $|c_n z^n| > 1$. Это означает, что при выбранном значении z степенной ряд (1) расходится, поскольку не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Если же $|z| < R$, то $L|z| < 1$ и, начиная с некоторого номера n_0, выполняются неравенства $\sqrt[n]{|c_n z^n|} < q < 1$ и $|c_n z^n| < q^n$. Поскольку степенной ряд (1) мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, то ряд сходится при данном значении z.

Пусть R– радиус сходимости степенного ряда (1). Согласно первой теореме Абеля ряд равномерно сходится во всяком замкнутом круге $\overline{B(0,r)}$ при $r < R$, следовательно ряд равномерно сходится на всяком компактном множестве K, лежащем в круге сходимости $B(0,R)$. Таким образом степенной ряд можно почленно интегрировать вдоль любой кусочно-гладкой кривой, лежащей внутри круга сходимости. Поскольку каждое слагаемое $c_n z^n$ является аналитической функцией, то согласно первой теореме Вейерштрасса *сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости.* Внутри круга сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать, при этом радиус сходимости ряда из производных совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

Пусть радиус сходимости степенного ряда (1) конечен и отличен от нуля, т.е. $0 < R < +\infty$. В общем случае мы можем лишь утверждать, что ряд сходится в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$, при этом в точках граничной окружности круга сходимости ряд может как сходиться так и расходиться.

Пример. Все три ряда

$$1.\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

имеют радиус сходимости равный единице. При этом первый ряд на единичной окружности расходится всюду, второй ряд сходится во всех точках единичной окружности кроме единственной точки $z = 1$, третий ряд сходится на единичной окружности всюду.

Таким образом вопрос о сходимости степенного ряда в граничных точках круга сходимости требует дополнительного исследования. Однако, если известно, что степенной ряд сходится в граничной точке z_0, то сумма ряда является непрерывной функцией вдоль радиуса в точке z_0.

Вторая теорема Абеля. Пусть $R \in (0, +\infty)$ – радиус сходимости степенного ряда (1), который сходится в точке $z_0 = Re^{i\varphi_0}$. Тогда сумма степенного ряда $S(z)$ является непрерывной функцией вдоль радиуса в точке z_0, т.е.

$$\lim_{r \to R-0} S(re^{i\varphi_0}) = S(z_0).$$

Доказательство. Вначале несколько упростим формулировку теоремы. Делая замену $z = tz_0,\ a_0 = c_0 - S(z_0),\ a_n = c_n z_0^n, n = 1, 2, \ldots$, получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \ + S(z_0),$$

в котором ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ имеет радиус сходимости равный единице, ряд сходится при $t = 1$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0$.

Тем самым мы приходим к эквивалентной формулировке второй теоремы Абеля, которую и будем доказывать:

пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится к* **нулю,** *тогда*

$$\lim_{r \to 1-0} S(r) = \lim_{r \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = 0.$$

Пусть $0 < r < 1$, тогда $\frac{1}{1-r} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$. Поскольку ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходятся абсолютно, их можно перемножать и

$$\frac{S(r)}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n,$$

где $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 0$, то $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно существует такой номер m, что при $n > m$ выполняются неравенства $|b_n| < \varepsilon/2$. Обозначим через $M = \sum\limits_{n=0}^{m} |b_k|$ и выберем r так, чтобы выполнялось неравенство $(1-r)M < \varepsilon/2$.

Тогда получаем

$$|S(r)| = (1-r)\Big|\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n\Big| \le (1-r)\sum_{n=0}^{m} |b_n| r^n + (1-r)\sum_{n=m+1}^{\infty} |b_n| r^n \le$$

$$(1-r)M + \frac{\varepsilon}{2}(1-r)\sum_{n=m+1}^{\infty} r^n \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-r)\frac{r^{m+1}}{1-r} \le \varepsilon.$$

Таким образом

$$\lim_{r\to 1-0} S(r) = 0,$$

и теорема доказана.

§3. Ряд Тейлора.

Мы уже знаем, что сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости, а теперь покажем, что всякая аналитическая функция локально представима степенным рядом.

Теорема Тейлора. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $D \subset C$, тогда в окрестности произвольной точки $z_0 \in D$ она представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

где $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, при этом радиус сходимости степенного ряда не меньше чем расстояние от точки z_0 до границы области D.

Доказательство. Пусть $d = dist(z_0, \partial D$. Фиксируем произвольное $r < d$ и обозначим через C_r окружность $|t - z_0| = r$. Согласно интегральной формуле Коши для произвольной точки z круга $|z - z_0| < r$ выполняется равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Преобразуем это равенство к требуемому нам виду

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(t)dt}{t-z_0+z_0-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(t)dt}{(t-z_0)\Big(1-\frac{z-z_0}{t-z_0}\Big)}. \tag{1}$$

Поскольку при фиксированном $z \in B(z_0, r)$ выполняется оценка

$$\frac{|z-z_0|}{|t-z_0|} = q < 1,$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{t-z_0}\Big)^n = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}$$

сходится равномерно по переменной t на окружности C_r и его можно почленно интегрировать.

Следовательно, из равенства (1) получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{t-z_0}\Big)^n\frac{f(t)dt}{t-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{2}$$

где для коэффициентов c_n, согласно интегральной формуле Коши, имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Степенной ряд (2) сходится во всяком круге $B(z_0, r)$ при $r < d$, следовательно радиус сходимости ряда не меньше чем расстояние от точки z_0 до границы области D.

§4. Теорема единственности.

Теорема. Пусть $D \subset C$ – область, множество $E \subset D$ и имеет предельную точку $z_0 \in D$, функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в области D и $f(z) = g(z)$ для всех $z \in E$. Тогда $f(z) = g(z)$ всюду в области D.

Доказательство. Множество E содержит последовательность точек $\{z_n\}$, сходящуюся к точке $z_0 \in D$. При этом

$$f(z_n) = g(z_n), \quad n \in N.$$

По теореме Тейлора в круге $B(z_0, r)$ при $r < dist(z_0, \partial D)$ функции $f(z)$ и $g(z)$ представимы степенными рядами

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

Начиная с некоторого номера, все точки z_n лежат в круге $B(z_0, r)$, следовательно

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^k = f(z_n) = g(z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^k = g(z_n).$$

Переходя в равенстве к пределу, получаем $a_0 = b_0$. Учитывая это, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^{k-1},$$

переходя к пределу в котором, получаем $a_1 = b_1$.

Продолжая этот процесс, получаем $a_k = b_k$ для всех номеров $k \in N$. Следовательно $f(z) = g(z)$ всюду в круге $B(z_0, r)$.

Пусть z^*– произвольная точка области D. Соединим точку z_0 с точкой z^* непрерывной кривой γ, лежащей в области D. Фиксируем положительное ρ меньшее, чем расстояние от кривой γ до границы в области D.

Передвигая центр круга $B(z, \rho)$ вдоль кривой γ от точки z_0 до точки z^* и повторяя приведенное ранее рассуждение, получим $f(z^*) = g(z^*)$. Поскольку z^*– произвольная точка области D, то $f(z) = g(z)$ всюду в области D.

§5. Ряд Лорана.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = S_1(z) + S_2(z). \qquad (1)$$

Пусть радиус сходимости ряда

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

равен R. Тогда функция $S_1(z)$ будет аналитической в круге $B(z_0, R)$.

Делая во втором ряде замену переменной $t = \dfrac{1}{z - z_0}$, получим обычный степенной ряд по переменной t

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n.$$

Пусть радиус сходимости этого ряда равен ρ, тогда его сумма (как функция переменной t) будет аналитической функцией в круге $|t| < \rho$, и следовательно функция $S_2(z)$ будет аналитической при $|z - z_0| > r$.

Если $r < R$, то функция

$$f(z) = S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

будет аналитической в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Верно и обратное утверждение – всякая аналитическая в кольце функция представима рядом вида (1).

Теорема. (Лоран) Аналитическая в кольце $K = \{r < |z - z_0| < R\}$ функция $f(z)$ в каждой точке $z \in K$ представима в виде ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(t)\,dt}{(t - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а C_ρ – окружность $|t-z_0|=\rho,\ r<\rho<R$.

Доказательство. Пусть $z\in K$, и рассмотрим кольцо $K_1=\{r_1<|z-z_0|<R_1\}$, где $r<r_1,\ R_1<R$. Согласно интегральной формуле Коши для произвольной точки $z\in K_1$ выполняется равенство

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}}\frac{f(t)dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(t)dt}{t-z}=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}}\frac{f(t)dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(t)dt}{(z-z_0)\Big(1-\dfrac{t-z_0}{z-z_0}\Big)}.$$

Для первого интеграла из доказательства теоремы Тейлора мы уже знаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}}\frac{f(t)dt}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{2}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots$$

Поскольку при фиксированном $z\in K_1$ и произвольном $t\in C_{r_1}$ выполняется оценка

$$\frac{|t-z_0|}{|z-z_0|}=q<1,$$

то ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{t-z_0}{z-z_0}\Big)^m=\frac{1}{1-\dfrac{t-z_0}{z-z_0}}$$

сходится равномерно по переменной t на окружности C_{r_1} и его можно почленно интегрировать.

Следовательно, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(t)dt}{(z-z_0)\Big(1-\dfrac{t-z_0}{z-z_0}\Big)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{t-z_0}{z-z_0}\Big)^m\frac{f(t)dt}{z-z_0}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{-m-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}f(t)(t-z_0)^m dt=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(z-z_0)^{-m-1},$$

где

$$c_m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{-m}}.$$

Полагая $-m-1=n$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(t)dt}{(z-z_0)\Big(1-\dfrac{t-z_0}{z-z_0}\Big)}=\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{3}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}},\quad n=-1,-2,\ldots$$

Складывая формулы (2), (3) и учитывая независимость интегралов, определяющих коэффициенты ряда, от выбора окружности $C_\rho,\ r<\rho<R$, получаем требуемый результат.

Замечание. Получаемый в теореме ряд называют рядом Лорана. При этом ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

и

$$\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-z_0)^n$$

называют соответственно *правильной* и *главной* частью ряда Лорана.

Замечание. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. существует такое $R<\infty$, что функция $f(z)$ является аналитической при $R<|z|<\infty$.

Тогда функция $f\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$ является аналитической в кольце $0<|z|<\dfrac{1}{R}$ и допускает разложение в ряд Лорана в окрестности точки $t=0$

$$f\Big(\frac{1}{t}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} t^{-n}.$$

Делая замену переменной $t=\frac{1}{z}$ и полагая $c_n=b_{-n}$, получаем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^{n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

При этом в окрестности бесконечно удаленной точки правильной частью ряда Лорана называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{-n},$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

называется главной частью ряда Лорана.

Замечание. В фиксированном кольце $r<|z-z_0|<R$ аналитическая функция $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана единственным образом.

В самом деле, пусть

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \tag{4}$$

и $r<\rho<R$.

Поскольку ряды сходятся равномерно на окружности $C_\rho=\{|z-z_0|<\rho\}$ и

$$\int\limits_{C_\rho} (z-z_0)^k d\,z=0$$

при $k\neq -1$, то умножая (4) на $(z-z_0)^{-m-1}$ и интегрируя по окружности C_ρ получаем

$$2\pi i\,a_m=a_m\int\limits_{C_\rho}\frac{d\,z}{z-z_0}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\int\limits_{C_\rho}(z-z_0)^{n-m-1}d\,z=\int\limits_{C_\rho} f(z)(z-z_0)^{-m-1}d\,z=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\int\limits_{C_\rho}(z-z_0)^{n-m-1}d\,z=b_m\int\limits_{C_\rho}\frac{d\,z}{z-z_0}=2\pi i\,b_m,$$

т.е. $a_m=b_m$ при всех целых значениях m.

Замечание. Ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, когда $c_n=0$ при $n=-1,-2,\ldots$

Отметим еще взаимосвязь рядов Лорана с рядами Фурье. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $1-\varepsilon<|z|<1+\varepsilon$, тогда в этом кольце она представима рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f(t)d\,t}{t^{n+1}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(e^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\,\varphi.$$

Положим $h(t) = f(e^{it})$, тогда для точек $z = e^{it}$ единичной окружности получаем

$$h(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{int} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n\, e^{int} + c_{-n}\, e^{-int}) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt \;+\; b_n \sin nt),$$

где $a_0 = 2c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Следовательно

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\,\varphi, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(\varphi) \cos n\varphi\, d\,\varphi,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(\varphi) \sin n\varphi\, d\,\varphi.$$

Таким образом, на единичной окружности ряд Лорана для функции $f(z)$ является рядом Фурье для функции $h(t) = f(e^{it})$.

§6. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $K = \{r < |z - z_0| < R\}$. Обозначим $M(\rho) = \max\limits_{z \in C_\rho} |f(z)|$. Тогда для коэффициентов ряда Лорана имеем

$$|c_n| = \Big| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(t) d\,t}{(t - z_0)^{n+1}} \Big| \le \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\rho M(\rho)}{\rho^{n+1}} = \frac{M(\rho)}{\rho^n}. \tag{1}$$

Соотношения (1) называют неравенствами Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Непосредственным следствием неравенств Коши является

Теорема Лиувилля. Если аналитическая во всей комплексной плоскости функция $f(z)$ ограничена, то она является постоянной.

Доказательство. Пусть $|f(z)| \le M_0 < \infty$ для всех $z \in C$. Поскольку $f(z)$ аналитическая во всей комплексной плоскости, то она представима рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Согласно неравенствам Коши

$$|c_n| \le \frac{M_0}{\rho^n},$$

откуда при $\rho \to \infty$ получаем, что $c_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$

Следовательно $f(z) = c_0 = const$.

§7. Изолированные особые точки аналитической функции.

Определение. Точка $z_0 \in \overline{C}$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность точки z_0, в которой функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением самой точки z_0 (в точке z_0 функция может быть и вообще не определена).

В зависимости от поведения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 различают следующие три типа изолированных особых точек.

Определение. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется

1) *устранимой особой точкой,* если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует и конечен;

2) *полюсом,* если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;

3) *существенно особой точкой,* если функция $f(z)$ не имеет предела в точке z_0.

Пример. Для функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z - 1)}$$

точка $z = 0$ является устранимой, точка $z = 1$ является полюсом, а точка $z = \infty$ является существенно особой точкой.

Строение ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0 существенным образом зависит от типа особой точки. Без ограничения общности можно считать, что изолированная особая точка z_0 является конечной, т.к. к этой же ситуации заменой переменной $t = \frac{1}{z}$ сводится случай $z_0 = \infty$.

Теорема 1. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была устранимой особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержал главной части.

Доказательство. Необходимость. Пусть $z_0 \in C$– устранимая особая точка функции $f(z)$, тогда существует

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty.$$

Следовательно функция $f(z)$ является аналитической и ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки z_0, т.е. $|f(z)| \le M < \infty$ при $0 < |z - z_0| < r$.

В силу неравенств Коши для коэффициентов ряда Лорана

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

при всех $0 < \rho < r$.

Устремляя ρ к нулю, получаем $c_n = 0$ при $n = -1, -2, \ldots$, т.е. главная часть ряда Лорана в окрестности точки z_0 тождественно равна нулю.

Достаточность. Если ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержит главной части, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

в некотором кольце $0 < |z - z_0| < r$. Однако степенной ряд (1) сходится во всем круге $|z - z_0| < r$, следовательно существует $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$, т.е. точка z_0 является устранимой особой точкой.

Замечание. Продолжив по непрерывности функцию $f(z)$ в точку z_0 ($f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$), мы получим функцию аналитическую во всем круге $|z - z_0| < r$, представимую в нем рядом (1) и не имеющую особенности в точке z_0. Это и объясняет происхождение термина – *устранимая особая точка*.

Теорема 2. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки z_0 содержала лишь конечное число слагаемых.

Доказательство. Необходимость. Пусть $z_0 \in C$ является полюсом функции $f(z)$, тогда $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Следовательно в некотором кольце $K = \{0 < |z - z_0| < r\}$ функция $f(z)$ является аналитической и $|f(z)| > 1$. Тогда функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ является аналитической в кольце K и точка z_0 является устранимой особой точкой функции $g(z)$, т.к. $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$.

Полагая $g(z_0) = 0$, получим аналитическую в круге $|z - z_0| < r$ функцию, представимую степенным рядом

$$g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n = (z - z_0)^m h(z), \tag{2}$$

где $m \ge 1, a_m \neq 0$, а функция $h(z)$ является аналитической как сумма сходящегося степенного ряда.

Поскольку $h(z_0) = a_m \neq 0$, то в некоторой окрестности точки z_0 функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{h(z)}$ является аналитической и представима степенным рядом

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

где $b_0 == \dfrac{1}{a_m}$.

Отсюда получаем

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k =$$

$$\frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{3}$$

где $c_n = b_{n+m}$.

Следовательно главная часть ряда Лорана содержит не более чем m отличных от нуля слагаемых.

Достаточность. Пусть разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{4}$$

где $c_{-m} \neq 0$.

Положим $H(z) = (z-z_0)^m f(z)$. Тогда $\lim\limits_{z\to z_0} H(z) = c_{-m} \neq 0$, и в некотором кольце $0 < |z-z_0| < r$ выполняется оценка $|H(z)| > \frac{|c_{-m}|}{2}$.

Поэтому в достаточно малой окрестности точки z_0

$$|f(z)| = \frac{|H(z)|}{|z-z_0|^m} > \frac{|c_{-m}|}{2|z-z_0|^m}.$$

Следовательно $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, и точка z_0 является полюсом функции $f(z)$.

Замечание. В случае, когда разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид (4), точка z_0 называется *полюсом порядка* m. При $m = 1$ точку z_0 принято называть *простым полюсом.*

Порядок полюса во многих случаях играет весьма существенную роль, поэтому полезно знать различные приемы, позволяющие установить порядок полюса, не используя явный вид разложения функции в ряд Лорана.

Из равенства (3) непосредственно следует, что точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где $\varphi(z)$– аналитическая функция и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Определение. Точка z_0 называется *нулем порядка* m аналитической в точке z_0 функции $g(z)$, если $g(z_0) = g'(z_0) = \ldots = g^{(m-1)}(z_0) = 0$, $g^{(m)}(z_0) \neq 0$. Это эквивалентно тому, что функция $g(z)$ в окрестности точки z_0 представима в виде

$$g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^m h(z),$$

где $h(z)$– аналитическая функция и $h(z_0) \neq 0$.

Из равенств (2) и (3) следует, что точка z_0 является нулем порядка m функции $g(z)$ тогда и только тогда, когда точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z) = \frac{1}{g(z)}$.

Найти производные функции $\frac{1}{f(z)}$, как правило, значительно проще чем получить разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана.

Теорема 3. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки z_0 содержала бесконечное количество слагаемых.

Доказательство следует из теорем 1 и 2.

§8. Поведение аналитической функции в окрестности существенно особой точки.

Пусть точка z_0– существенно особая точка аналитической функции $f(z)$. Тогда существует кольцо $K_r = \{0 < |z-z_0| < r\}$, в котором

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = f_1(z-z_0) + f_2\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big).$$

Покажем, что существует такая последовательность точек $z_k \to z_0$, что $f(z_k) \to \infty$.

Поскольку ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = f_2\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big)$$

сходится в кольце K_r, то, делая замену переменной $t = \dfrac{1}{z - z_0}$, мы получим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n = f_2(t),$$

который заведомо сходится при $\frac{1}{r} < |t| < \infty$ и, следовательно, этот степенной ряд сходится во всей комплексной плоскости к аналитической функции $f_2(t)$. Согласно теореме Лиувилля аналитическая во всей комплексной плоскости, отличная от постоянной функция $f_2(t)$ не может быть ограниченной, т.е. существует такая последовательность точек $t_k \to \infty$, что $f_2(t_k) \to \infty$. Полагая $z_k = z_0 + \dfrac{1}{t_k}$, получаем

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_0, \quad \lim_{k\to\infty} f_1(z_k - z_0) = c_0 \in C, \quad \lim_{k\to\infty} f_2\Big(\frac{1}{z_k - z_0}\Big) = \infty,$$

следовательно

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \infty.$$

Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса. Пусть точка z_0 является существенно особой точкой аналитической функции $f(z)$, тогда для любого значения $\lambda \in \overline{C}$ существует такая последовательность точек $z_k \to z_0$, что

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lambda.$$

Доказательство. Если существует такая последовательность точек $z_k \to z_0$, что $f(z_k) = \lambda$, то, очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lambda.$$

В противном случае существует проколотая окрестность $\dot{U}$ точки z_0, в которой $f(z) \neq \lambda$. Тогда функция

$$H(z) = \frac{1}{f(z) - \lambda}$$

является аналитической в проколотой окрестности $\dot{U}$, а точка z_0 для нее является существенно особой. По ранее доказанному, существует такая последовательность точек $z_k \to z_0$, что

$$\lim_{k\to\infty} H(z_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{f(z_k) - \lambda} = \infty,$$

следовательно

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lambda,$$

что и требовалось доказать.

Множеством неопределенности функции $f(z)$ в точке z_0 называется совокупность всех ее предельных значений в точке z_0. Множество неопределенности функции $f(z)$ в устранимой особой точке состоит из одной конечной точки $\lambda \in C$, в полюсе из одной бесконечно удаленной точки, а в существенно особой точке множество неопределенности функции совпадает со всей расширенной комплексной плоскостью $\overline{C}$.

§9. Целые и мероморфные функции.

Определение. *Целой* называется функция, аналитическая во всей комплексной плоскости C, т.е. не имеющая конечных особых точек.

Точка $z = \infty$ является единственной изолированной точкой целой функции $f(z)$. Если бесконечно удаленная точка является устранимой, то по теореме Лиувилля целая функция $f(z) \equiv const$. Если бесконечно удаленная точка является полюсом порядка m, то главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$ является многочленом степени m : $P_m(z) = c_1 z + \ldots + c_m z^m$, $c_m \neq 0$. Функция $h(z) = f(z) - P_m(z)$ является целой, а бесконечно удаленная точка для нее является устранимой, следовательно $h(z) = f(z) - P_m(z) \equiv c_0 = const$. Таким образом функция $f(z)$ является многочленом степени m.

Целые функции, для которых бесконечно удаленная точка является существенно особой, называются *целыми трансцендентными функциями* (таковы, к примеру, функции $e^z, \sin z, \cos z, \ldots$).

Определение. Функция, аналитическая на комплексной плоскости C всюду, кроме полюсов, называется *мероморфной.*

Стандартным примером мероморфных функций являются рациональные функции: $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$. В зависимости от соотношения степеней многочленов, стоящих в числителе и знаменателе рациональной функции, бесконечно удаленная точка для функции $R(z)$ будет либо устранимой точкой либо полюсом. Верно и обратное утверждение.

Теорема. Если для мероморфной функции $f(z)$ бесконечно удаленная точка является устранимой точкой или полюсом, то функция $f(z)$ является рациональной.

Доказательство. Поскольку бесконечно удаленная точка является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то все остальные полюсы лежат в некотором круге $B(0, R)$, $R < \infty$. Следовательно число полюсов функции $f(z)$ конечно, т.к. иначе существовала бы предельная точка полюсов, которая является неизолированной особой точкой функции $f(z)$, а не полюсом.

Обозначим через $a_1, \ldots, a_N$ полюсы функции $f(z)$ в конечных точках комплексной плоскости C, через

$$g_k(z) = \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - a_k} + \ldots + \frac{c_{-m_k}^{(k)}}{(z - a_k)^{m_k}}$$

главную часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности полюса a_k, а через

$$P(z) = c_1 z + \ldots + c_m z^m$$

главную часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки (если $z = \infty$ является устранимой особой точкой, то $P(z) = 0$).

Функция

$$h(z) = f(z) - P(z) - \sum_{k=1}^{N} g_k(z)$$

является целой, бесконечно удаленная точка для нее является устранимой, следовательно функция $h(z)$ ограничена и по теореме Лиувилля является постоянной, т.е. $h(z) \equiv c_0$.

Таким образом функция

$$f(z) = c_0 + P(z) + \sum_{k=1}^{N} g_k(z) \tag{1}$$

является рациональной.

Замечание. Из формулы (1) следует возможность разложения произвольной рациональной функции на целую часть и простейшие дроби.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Ряды аналитических функций

5.1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, z^{-2n}$ равномерно сходится при $|z| \geq 1$.

5.2. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n!}$ является аналитической функцией во всей комплексной плоскости C.

5.3. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, \sin nz$ является аналитической функцией при $|\operatorname{Im} z| < 1$.

5.4. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{1}{z+n}$ является аналитической функцией при $z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$

5.5. Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^k\, z^n;\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\, z^n;\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n;\quad d)\ \sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n\, z^n;\quad e)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, \cos(in).$$

5.6. Просуммировать при $|z| < 1$ следующие ряды:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n;\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n};\quad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1};\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}.$$

5.7. Исследовать поведение степенного ряда на границе круга сходимости:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n;\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2};\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, z^n.$$

5.8. Пользуясь 2-й теоремой Абеля найти сумму ряда:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \qquad (0 < |\varphi| \leq \pi)$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} \qquad (0 < \varphi < 2\pi)$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} \qquad (0 < \varphi < \pi)$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n\varphi}{n} \qquad (-\pi < \varphi < \pi)$.

5.9. Опираясь на разложение $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, справедливое при $|z| < 1$, доказать формулы:

a) $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, z^n \qquad (|z| < 1)$;

b) $\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, (n+1)\, z^{2n} \qquad (|z| < 1)$.

5.10. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ и найти радиус сходимости ряда:

$$a)\ f(z) = \operatorname{ch} z;\quad b)\ f(z) = \frac{2z-5}{z^2-5z+6};\quad c)\ f(z) = \ln(z^2 - 3z + 2);\quad d)\ f(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

5.11. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ и найти радиус сходимости ряда:

$$a)\ f(z) = \cos(2 + 2z - z^2);\qquad b)\ f(z) = \sqrt[3]{z}\ \ \left(\sqrt[3]{1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).$$

5.12. Найти аналитическое решение уравнения

$$(1-z^2)\, w'' - 4z\, w' - 2w = 0,$$

удовлетворяющее условиям $w(0) = 0,\ \ w'(0) = 1$.

5.13. Существует ли аналитическая в точке $z = 0$ функция, удовлетворяющая при $n \in N$ условию:

a) $f\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = f\Big(-\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n^2}$;
b) $f\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = f\Big(-\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n^3}$.

5.14. Пусть разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в круге $|z| < R$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n.$$

a) Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\, r^{2n} \quad (0 < r < R);$$

b) Пусть $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Доказать, что коэффициенты c_n удовлетворяют неравенствам Коши

$$|c_n| \le \frac{M(r)}{r^n} \quad (0 < r < R);$$

c) Доказать, что если хотя бы одно из неравенств Коши обращается в равенство, т.е. $|c_k| = M(r)/r^k$, то функция $f(z)$ имеет вид $f(z) = c_k\, z^k$.

5.15. Найти множества точек z, в которых сходятся следующие ряды Лорана

$$a)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 5^{-|n|}\, z^n; \qquad b)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{1+2^n}.$$

5.16. Выянить, допускает ли разложение в ряд Лорана функция
a) $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ в окрестности точки $z = 0$; b) $f(z) = \dfrac{z^2}{\cos z - 2}$ в окрестности точки $z = \infty$.

5.17. Разложить данную функцию в ряд Лорана в окрестности указанных точек и определить область, в которой разложение имеет место:
a) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точек $z = 0,\ z = 1,\ z = \infty$;
b) $f(z) = z\, e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точек $z = 0,\ z = \infty$;
c) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z-1}$ в окрестности точки $z = 1$;
d) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ в окрестности точек $z = 0,\ z = \infty$;
e) $f(z) = \sin\dfrac{z}{1-z}$ в окрестности точки $z = 1$.

5.18. Разложить в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 2$ функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2\,(z+2)}$.

5.19. Найти главную часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности указанной точки:
a) $f(z) = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$ в окрестности точки $z = 2k\pi i$;
b) $f(z) = \dfrac{z-1}{\sin^2 z}$ в окрестности $z = 0$;
c) $f(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z^2+b^2}$ в окрестности точки $z = \infty$.

5.20. Используя взаимосвязь рядов Лорана с рядами Фурье, разложить следующие функции в ряд Фурье:

$$a)\ h(\varphi) = \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2},\quad -1 < a < 1; \quad b)\ h(\varphi) = \frac{1-a^2}{1 - 2a\cos\varphi + a^2},\quad 0 < a < 1;$$

$$c)\ h(\varphi) = \ln(1 - 2a\cos\varphi + a^2),\quad 0 < a < 1; \quad d)\ h(\varphi) = \ln\Big|\sin\frac{\varphi}{2}\Big|.$$

5.21. Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, являющаяся аналитической в кольце $r \le |z| \le R$, однолистно отображает это кольцо на некоторое множество D. Доказать, что площадь S этого множества может быть найдена по формуле

$$S = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,|c_n|^2\,(R^{2n} - r^{2n}).$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

§1. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке.

Пусть $z_0 \in C$ – изолированная особая точка функции $f(z)$, т.е. существует такое $r > 0$, что функция $f(z)$ является аналитической в кольце $K = \{0 < |z - z_0| < r\}$.

Рассмотрим два замкнутых контура $\gamma_1, \gamma_2 \subset K$, содержащих точку z_0 внутри себя. Тогда существует такое $\rho > 0$, что окружность $C_\rho = \{|z - z_0| = \rho\}$ будет находиться одновременно внутри контуров γ_1 и γ_2. Поскольку функция $f(z)$ является аналитической в кольце K, то по интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{C_\rho^-} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz + \int\limits_{C_\rho^-} f(z)dz = 0.$$

Откуда получаем

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz \; = \; \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Таким образом значение интеграла не зависит от выбора замкнутого контура, содержащего изолированную особую точку z_0 внутри себя.

Определение. *Вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in C$ называется величина

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} f(z)dz,$$

где интеграл берется по произвольной ориентированной в положительном направлении достаточно малой окружности с центром в точке z_0.

Из формул для нахождения коэффициентов ряда Лорана следует, что

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} f(z)\,dz \; = \; c_{-1},$$

т.е. вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in C$ равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0.

Из этого непосредственно следует, что вычет в устранимой особой точке $z_0 \in C$ равен нулю.

Довольно просто находится вычет и в полюсе произвольного порядка. Пусть точка $z_0 \in C$ является полюсом порядка m функции $f(z)$, тогда в окрестности точки z_0

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

и несложно видеть, что

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \; \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z - z_0)^m.] \tag{1}$$

Если точка $z_0 \in C$ является простым полюсом и $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0,\ \psi(z_0) = 0$, а $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Действительно, согласно формуле (1)

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0} f(z)\,(z - z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)\,(z - z_0)}{\psi(z) - \psi(z_0)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Для нахождения вычета в существенно особой точке $z_0 \in C$ обычно приходится непосредственно находить коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции в окрестности точки z_0.

Из определения вычета видно, что это понятие должно быть тесно связано с вычислением интегралов.

Основная теорема теории вычетов. Пусть $D \subset C$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ, ориентированной в положительном направлении. Функция $f(z)$ является непрерывной в $\overline{D}$ и аналитической в области D, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих в области D. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz \; = \; 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство. Выберем достаточно малое $r > 0$так, чтобы замкнутые круги $\overline{B(z_k, r)}$ лежали в области D и не пересекались между собой. Обозначим черезC_k^+ окружность $|z - z_k| = r$. Функция $f(z)$ является аналитической в области

$$D^* = D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B(z_k, r)}$$

и непрерывной в ее замыкании. Согласно интегральной теореме Коши интеграл функции $f(z)$ по ориентированной границе области D^* равен нулю, т.е.

$$\int_{\partial D^*} f(z)dz \ = \int_{\Gamma} f(z)dz \ + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k^-} f(z)dz \ = 0.$$

Следовательно

$$\int_{\Gamma} f(z)dz \ = \ \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k^+} f(z)dz \ = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Это простое утверждение имеет довольно много различных приложений поскольку позволяет свести вычисление интеграла к к существенно более простой процедуре нахождения вычетов.

Пусть бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, т.е. существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является аналитической при $|z| > R$.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ называется величина

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^-} f(z)dz,$$

где интеграл берется по ориентированной в отрицательном направлении окружности $|z| = \rho, \ \rho > R$.

Если известно разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, то

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \ -c_{-1}.$$

При этом следует отметить, что даже в случае, когда бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой, вычет в ней может быть отличен от нуля. В качестве простейшего примера можно рассмотреть функцию $f(z) = \frac{1}{z}$, для которой $z = \infty$ является устранимой особой точкой, но $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \ -1$.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости C, за исключением конечного числа особых точек, тогда сумма вычетов во всех особых точках (включая вычет в бесконечно удаленной точке) равна нулю.

Доказательство. Выберем достаточно большое значение $R < \infty$ так, чтобы все конечные особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежали в круге $|z| < R$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^-} f(z)dz = 0.$$

В случае, когда конечных изолированных особых точек достаточно много, вместо вычисления суммы вычетов во всех конечных особых точках часто бывает проще найти вычет в одной единственной бесконечно удаленной точке.

Пример. Вычислить интеграл

$$I \ = \int_{|z|=2} f(z)\, dz = \int_{|z|=2} \frac{2z^7 - z^6 + 3z^4 + z - 5}{z^8 - 1}\, dz.$$

Функции $f(z)$ имеет восемь простых полюсов $z_k = e^{\frac{i\pi k}{4}}, \ k = 0, 1, \ldots, 7$, лежащих в круге $|z| < 2$, и по основной тереме теории вычетов

$$I \ = \ 2\pi i \sum_{k=0}^{7} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \ = \ -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Поскольку в окрестности бесконечно удаленной точки

$$f(z)=\frac{2z^7-z^6+3z^4+z-5}{z^8}\cdot\frac{1}{(1-z^{-8})}=\Big(\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^4}+\frac{1}{z^7}-\frac{5}{z^8}\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{8k}}=\frac{2}{z}+\sum_{m=2}^{\infty}c_m\frac{1}{z^m},$$

то $c_{-1}=2$, $\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=-2$, следовательно $I\,=\,4\pi i$.

§2. Вычисление рационально-тригонометрических интегралов.

Рассмотрим интеграл

$$I\;=\int\limits_0^{2\pi}R(\sin\varphi,\cos\varphi)\,d\,\varphi,$$

где $R(\xi,\eta)$ – рациональная функция, не имеющая полюсов на окружности $\xi^2+\eta^2=1$.

Сделаем замену переменной $z=e^{i\varphi}$, тогда

$$d\,\varphi=-i\,\frac{d\,z}{z},\quad \sin\varphi=\frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big),\quad \cos\varphi=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big).$$

Следовательно

$$I\;=-i\int\limits_{|z|=1}R\Big(\;\frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big),\;\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)\Big)\,\frac{d\,z}{z}=\int\limits_{|z|=1}R_1(z)\,d\,z=2\pi i\sum\;\operatorname*{Res}_{\substack{z=z_k\\|z_k|<1}}\;R_1(z).$$

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I\;=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\,\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2},\qquad 0<|a|<1.$$

Делая замену переменной $z=e^{i\varphi}$, получаем

$$I\;=\int\limits_{|z|=1}\frac{i\,d\,z}{az^2-(a^2+1)z+a}.$$

Уравнение $az^2-(a^2+1)z+a=0$ имеет два корня $z_1=a$ и $z_2=\dfrac{1}{a}$, из которых в круге $|z|<1$ лежит лишь точка $z_1=a$, являющаяся простым полюсом. Вычет в простом полюсе находится довольно просто

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\Big(\frac{i}{[az^2-(a^2+1)z+a]\,'}\Big)_{z=a}=\frac{i}{a^2-1}.$$

Таким образом

$$I\;=\;2\pi i\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\frac{2\pi}{1-a^2}.$$

§3. Вычисление рациональных интегралов.

Рассмотрим интеграл

$$I\;=\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)\,d\,x,\tag{1}$$

где $R(x)$ – рациональная функция.

Пусть $R(z)$ – соответствующая рациональная функция комплексного переменного. Если $R(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ многочлены степени n и m соответственно, то для сходимости интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы функция $R(z)$ не имела полюсов на действительной оси и для степеней многочленов выполнялось неравенство $m-n\geq 2$. Это означает, что $R(z)=O(z^{-2})$ при $z\to\infty$.

Поскольку рациональная функция на комплексной плоскости C может иметь лишь конечное количество полюсов, то можно выбрать такое значение $0<\rho<\infty$, что все конечные особые точки функции $R(z)$ будут лежать в круге $|z|<\rho$.

Рассмотрим ориентированный в положительном направлении замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-\rho,\rho]$ действительной оси и верхней полуокружности $C_\rho = \{|z| = \rho, \quad \operatorname{Im} z \geq 0\}$. По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} R(x)\,dx + \int\limits_{C_\rho} R(z)dz = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k>0}} R(z). \tag{2}$$

Поскольку при $\rho \to \infty$

$$\Big|\int\limits_{C_\rho} R(z)dz\Big| \leq C\rho^{-2}2\pi\rho \to 0,$$

то переходя к пределу в равенстве (2), получаем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k>0}} R(z).$$

В случае, когда особых точек оказывается довольно много, чтобы не искать сумму большого количества вычетов можно вычисление интеграла свести к интегрированию по границе сектора, содержащего всего одну особую точку.

Пример. Вычислим интеграл

$$I_n = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}, \qquad n \geq 1.$$

Функция

$$R(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$$

имеет $2n$ особых точек.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру Γ_R, состоящему из отрезка действительной оси $L = [0,R]$, дуги окружности $C_R = \{z = Re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}\}$ и отрезка $l = \{z = re^{i\pi/n}, \quad 0 \leq r \leq R.\}$

Внутри контура Γ_R функция $R(x)$ имеет один единственный простой полюс $z_0 = e^{i\pi/(2n)}$. Вычет в точке z_0 равен

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} R(z) = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}} = \frac{z_0}{2nz_0^{2n}} = -\frac{z_0}{2n}.$$

По теореме о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma_R} R(z)\,dz = \int\limits_{L} R(z)\,dz + \int\limits_{C_R} R(z)\,dz + \int\limits_{l} R(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} R(z). \tag{3}$$

Поскольку $|R(z)| \sim \dfrac{1}{|z|^{2n}}$ при $z \to \infty$, то

$$\int\limits_{C_R} R(z)\,dz \;\to\; 0, \qquad (R \to 0).$$

Интеграл по отрезку l сводится к интегралу по отрезку L

$$\int\limits_{l} R(z)\,dz = \int\limits_{R}^{0} R(re^{i\pi/n})\,e^{i\pi/n}dr = -e^{i\pi/n}\int\limits_{0}^{R} \frac{dr}{1+r^{2n}}.$$

Переходя к пределу в равенстве (3), получаем

$$I_n - e^{i\pi/n}I_n = -\frac{\pi i}{n}e^{i\pi/(2n)},$$

откуда

$$I_n = \frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

§4. Преобразование Фурье рациональной функции.

Интеграл вида
$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, R(x)\, d\, x \tag{1}$$
представляет собой преобразование Фурье рациональной функции $R(x)$.

Для нахождения таких интегралов нам понадобится следующее утверждение

Лемма (Жордан). Пусть $\alpha > 0$ и выполнены следующие условия

1) функция $f(z)$ непрерывна в секторе $S = \{\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| > R_0 > 0\}$;

2) $M(R) = \max\limits_{z \in C_R} |f(z)| \to 0$ при $R \to \infty$,

где C_R – верхняя полуокружность, т.е. $C_R = \{\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| = R.\}$

Тогда
$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\, f(z)\, d\, z = 0.$$

Доказательство. Пусть $z \in C_R$, тогда $z = Re^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ d\, z = iRe^{i\varphi} d\, \varphi$,
$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)}| = e^{-\alpha R\sin\varphi}.$$

В силу выпуклости функции $\sin\varphi$ на отрезке $[0, \pi/2]$ выполняется неравенство
$$\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\ \varphi.$$

Теперь несложно получить требуемую оценку для интеграла
$$\Big|\int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\, f(z)\, d\, z\Big| \leq RM(R) \int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\varphi}\, d\, \varphi = 2RM(R) \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\varphi}\, d\, \varphi \leq$$
$$2RM(R) \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\alpha}{\pi}\varphi}\, d\, \varphi \leq M(R)\frac{\pi}{\alpha}(1 - e^{-\alpha R}) \leq \frac{\pi}{\alpha} M(R) \to 0 \qquad (R \to \infty).$$

Теперь мы можем получить формулу для вычисления интеграла Фурье (1) при $\alpha > 0$. Рассмотрим ориентированный в положительном направлении замкнутый контур Γ_R, состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и верхней полуокружности $C_R = \{|z| = R,\ \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Выберем такое значение $0 < R < \infty$, чтобы все конечные особые точки функции $R(z)$ лежали в круге $|z| < R$.

По основной теореме теории вычетов
$$\int\limits_{-R}^{R} e^{i\alpha x}\, R(x)\, d\, x + \int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\, R(z) d\, z = 2\pi i \sum_{\substack{z = z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res}\ (e^{i\alpha z}\, R(z)). \tag{2}$$

Для сходимости интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы функция $R(z)$ не имела полюсов на действительной оси и $R(x) \to 0$ при $x \to \infty$, т.е. $R(x) \sim Cx^{-k}$ при $x \to \infty$ и $k \geq 1$. Это означает, что $R(z) \sim Cz^{-k}$ при $z \to \infty$ и $k \geq 1$, т.е. $M(R) = \max\limits_{z \in C_R} |R(z)| \to 0$ при $R \to \infty$.

Согласно лемме Жордана при $R \to \infty$
$$\int\limits_{C_R} e^{i\alpha x}\, R(z) d\, z \to 0.$$

Переходя к пределу в равенстве (2), получаем
$$I\ =\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, R(x)\, d\, x = 2\pi i \sum_{\substack{z = z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res}\ (e^{i\alpha z}\, R(z)).$$

Замечание. При $\alpha < 0$ заменяя контур Γ_R на симметричный ему относительно действительной оси контур Γ_R^-, получим формулу

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,d\,x = -2\pi i \sum \underset{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k<0}}{\operatorname{Res}} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right).$$

§5. Интегралы со степенным весом.

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} R(x)\,d\,x, \tag{1}$$

где α – нецелое действительное число, а $R(x)$ – рациональная функция.

Без ограничения общности можно считать, что $R(0) \neq 0$ и $R(0) \neq \infty$, поскольку иначе $R(x) = x^m R_1(x)$, $R_1(0) \neq 0$, $R_1(0) \neq \infty$ и $x^{\alpha-1} R(x) = x^{\beta-1} R_1(x)$. Поскольку $R(z)$ – рациональная функция, то при $z \to \infty$ выполняется оценка $R(z) \sim Cz^{-k}$, где k – целое число.

Для сходимости интеграла необходимо:

1) чтобы функция $R(x)$ не имела полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;

2) $\alpha > 0$, поскольку $x^{\alpha-1} R(x) \sim x^{\alpha-1} R(0)$, при $x \to +0$;

3) $\alpha < k$, поскольку $x^{\alpha-1} R(x) \sim Cx^{\alpha-k-1}$, при $x \to +\infty$.

Продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость, при этом следует учесть, что функция $z^{\alpha-1}$ является многозначной. Пусть D – плоскость с разрезом $[0, +\infty]$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, т.е. $h(x + i0) = x^{\alpha-1}$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x - i0) = x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)} = x^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha}$.

Пусть все конечные особые точки рациональной функции $R(z)$ лежат в кольце $r < |z| < R$. Рассмотрим ориентированный замкнутый контур $\Gamma_{r,R}$, состоящий из окружностей $C_r = \{|z| = r\}$, $C_R = \{|z| = R\}$ и отрезков $[r, R]$, $[R, r]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза.

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} h(z) R(z)\,d\,z = \int\limits_{r}^{R} x^{\alpha-1} R(x)\,d\,x + \int\limits_{C_R} h(z) R(z)\,d\,z + e^{i2\pi\alpha} \int\limits_{R}^{r} x^{\alpha-1} R(x)\,d\,x + \int\limits_{C_r^-} h(z) R(z)\,d\,z =$$

$$2\pi i \sum \underset{z=z_k}{\operatorname{Res}} (h(z) R(z)). \tag{2}$$

Из условий 2) и 3) следует, что

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} h(z) R(z)\,d\,z = 0,$$

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{C_r^-} h(z) R(z)\,d\,z = 0.$$

Переходя в равенстве (2) к пределу при $r \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$I - e^{i2\pi\alpha} I = 2\pi i \sum \underset{z=z_k}{\operatorname{Res}} (h(z) R(z))$$

или

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum \underset{z=z_k}{\operatorname{Res}} (h(z) R(z)).$$

Замечание. Достаточно часто встречающиеся интегралы вида

$$\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} R(x)\,d\,x$$

при помощи замены переменной $y = \dfrac{x}{1-x}$ сводятся к интегралам со степенным весом вида (1).

§6. Интегралы с логарифмическим весом.

Рассмотрим интеграл вида

$$I_m = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx, \tag{1}$$

где α – действительное число, $m \in N$, а $R(x)$ – рациональная функция.

Как и в предыдущем параграфе будем считать, что $R(0) \neq 0$ и $R(0) \neq \infty$, и $R(z) \sim Cz^{-k}$ при $z \to \infty$.

Условия сходимости интеграла (1) оказываются такими же как и для интегралов со степенным весом в §5:

1) функция $R(x)$ должна не иметь полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;

2) $0 < \alpha < k$.

Продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость. Пусть D – плоскость с разрезом $[0, +\infty]$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, т.е. $h(x+i0) = x^{\alpha-1}$, и однозначную ветвь функции $\ln z$, принимающую действительные значения на верхнем берегу разреза, т.е. $\ln(x+i0) = \ln x$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x-i0) = x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}$, $\ln(x-i0) = \ln x + 2\pi i$.

Пусть все конечные особые точки рациональной функции $R(z)$ лежат в кольце $r < |z| < R$. Рассмотрим ориентированный замкнутый контур $\Gamma_{r,R}$, состоящий из окружностей $C_r = \{|z| = r\}$, $C_R = \{|z| = R\}$ и отрезков $[r, R]$, $[R, r]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза.

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} h(z)(\ln z)^m R(z)\,dz = \int\limits_r^R x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx + \int\limits_{C_R} h(z)(\ln z)^m R(z)\,dz +$$

$$e^{i2\pi\alpha}\int\limits_R^r x^{\alpha-1}(\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,dx + \int\limits_{C_r^-} h(z)(\ln z)^m R(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)(\ln z)^m R(z)). \tag{2}$$

Из условия 2) следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} h(z)(\ln z)^m R(z)\,dz = 0,$$

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{C_r^-} h(z)(\ln z)^m R(z)\,dz = 0.$$

Переходя в равенстве (2) к пределу при $r \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx - e^{i2\pi\alpha}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)(\ln z)^m R(z)). \tag{3}$$

Возможны два различных случая.

1. **Число α является нецелым.** В этом случае множитель $e^{i2\pi\alpha}$ перед вторым интегралом в формуле (3) отличен от единицы. Наиболее простой вид формула (3) имеет при $m = 1$

$$(1 - e^{i2\pi\alpha})I_1 - 2\pi i\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}R(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\ln z\, R(z)). \tag{4}$$

Если ввести обозначение

$$J = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}R(x)\,dx,$$

и выделить в формуле (4) действительную и мнимую части, то мы получим линейную систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_1 I_1 + a_2 J = A \\ b_1 I_1 + b_2 J = B, \end{cases}$$

из которой можно найти значение интеграла I_1. Зная значение I_1, по формуле (3) можно последовательно найти значение интегралов $I_2,\ I_3,\ \ldots\ I_m$.

2. **Число α является целым.** В этом случае мы имеем интеграл вида

$$I_m = \int\limits_0^\infty (\ln x)^m R(x)\, d\, x,$$

формула (3) принимает вид

$$\int\limits_0^\infty (\ln x)^m R(x)\, d\, x - \int\limits_0^\infty (\ln x + 2\pi i)^m R(x)\, d\, x = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k} (\ln z)^m R(z) \qquad (5)$$

и не позволяет найти интеграл I_m.

Для нахождения интеграла I_m в формуле (5) в качестве подынтегральной функции следует взять функцию $(\ln z)^{m+1} R(z)$.

Если рациональная функция функция $R(x)$ является четной, то для вычисления интеграла I_m можно использовать контур $\gamma_{r,R}$, состоящий из отрезков действительной оси $[-R,-r]$, $[r,R]$ и верхних полуокружностей C_r^+, C_R^+.

§7. Принцип аргумента.

Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Теорема. Пусть $D \subset C$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ, ориентированной в положительном направлении. Функция $f(z)$ является аналитической в $\overline{D}$ за исключением конечного числа полюсов $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и $f(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} d\, z = N - P,$$

где N– количество нулей, а P– количество полюсов функции $f(z)$ в области D с учетом их кратности.

Доказательство. Заметим вначале, что функция $f(z)$ может иметь в области D лишь конечное число нулей. Предположим противное, т.е. пусть существует такая последовательность точек $\{z_n\} \subset D$, что $f(z_n) = 0$ при всех $n \in N$. Поскольку область $\underline{D}$, то эта последовательность имеет предельную точку $z_0 \in \overline{D}$, и по теореме единственности $f(z) \equiv 0$ в $\overline{D}$, что противоречит условию теоремы.

Особыми точками функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ являются полюсы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и нули $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функции $f(z)$. По основной теореме теории вычетов

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} d\, z = \sum \operatorname*{Res}_{z=a_i} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum \operatorname*{Res}_{z=b_j} \frac{f'(z)}{f(z)}. \qquad (1)$$

Пусть a_i нуль порядка k, тогда в окрестности точки a_i

$$f(z) = \sum_{s=k}^\infty c_s (z-a_i)^s = (z-a_i)^k \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$– аналитическая функция и $\varphi(a_i) = c_k \neq 0$. Тогда

$$f'(z) = k(z-a_i)^{k-1} \varphi(z) + (z-a_i)^k \varphi'(z)$$

и

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a_i} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Следовательно

$$\operatorname*{Res}_{z=a_i} \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname*{Res}_{z=a_i} \frac{k}{z-a_i} + \operatorname*{Res}_{z=a_i} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = k + 0 = k. \qquad (2)$$

Пусть b_j полюс порядка l, тогда в окрестности точки b_j

$$f(z) = \sum_{s=-l}^\infty c_s (z-b_j)^s = \frac{\psi(z)}{(z-b_j)^l},$$

где $\psi(z)$– аналитическая функция и $\psi(b_j) = c_{-l} \neq 0$. Тогда

$$f'(z) = -l\frac{\psi(z)}{(z-b_j)^{l+1}} + \frac{\psi'(z)}{(z-b_j)^l}$$

и

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-l}{z-b_j} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Следовательно

$$\operatorname*{Res}_{z=b_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname*{Res}_{z=b_j} \frac{-l}{z-b_j} + \operatorname*{Res}_{z=b_j} \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = -l + 0 = -l. \tag{3}$$

Суммируя вычеты во всех нулях и полюсах функции $f(z)$ и учитывая равенства (2) и (3), получаем утверждение теоремы.

Теорема. *(Принцип аргумента.)* При выполнении условий предыдущей теоремы

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_\Gamma(\operatorname{Arg} f(z)),$$

где $\Delta_\Gamma(\operatorname{Arg} f(z))$– приращение аргумента функции $f(z)$ при однократном обходе контура Γ в положительном направлении.

Доказательство. Поскольку функция $f(z)$ является аналитической в $\overline{D}$ за исключением конечного числа полюсов и имеет конечное число нулей, то можно выбрать такие замкнутые контуры $\gamma_1 \subset D$ и γ_2, содержащий граничный контур Γ внутри себя, что функция $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ будет аналитической в кольцевой области K, заключенной между контурами γ_1 и γ_2. Проводя разрез, соединяющий контуры γ_1 и γ_2 мы получим из кольцевой области K односвязную область D^*, в которой функция $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ будет аналитической.

Покажем, что в области D^* можно выделить *однозначную* ветвь функции $\operatorname{Ln} f(z)$. Пусть точка $z_0 \in D^*$, поскольку $w_0 = f(z_0) \neq 0$, то в окрестности точки w_0 можно выделить бесконечно много однозначных ветвей функции $\operatorname{Ln} w$. Фиксируем одно из возможных значений $a_0 = \ln f(z_0)$, т.е. $e^{a_0} = f(z_0)$. Аналитическая в односвязной области D^* функция $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ имеет первообразную, которую мы обозначим через $\Phi(z)$. Заметим, что функция $f(z)e^{-\Phi(z)}$ является постоянной в области D^*, поскольку

$$\Big(f(z)e^{-\Phi(z)}\Big)' = f'(z)e^{-\Phi(z)} - f(z)e^{-\Phi(z)}\frac{f'(z)}{f(z)} \equiv 0.$$

Следовательно

$$f(z)e^{-\Phi(z)} = f(z_0)e^{-\Phi(z_0)}$$

или

$$f(z) = f(z_0)e^{\Phi(z)-\Phi(z_0)} = e^{\Phi(z)-\Phi(z_0)+a_0}.$$

Ветвь функции $\operatorname{Ln} f(z)$, определяемая равенством

$$\ln f(z) = \Phi(z) - \Phi(z_0) + a_0 \tag{4}$$

является однозначной, поскольку однозначной является правая часть равенства (4). При этом

$$d\,(\ln f(z)) = d\,(\Phi(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}d\,z.$$

Используя результат предыдущей теоремы, получаем

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}d\,z = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma d\,(\ln f(z)) = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\Gamma(\ln f(z)) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}[\Delta_\Gamma(\ln|f(z)|) + i\Delta_\Gamma(\operatorname{Arg} f(z))] = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_\Gamma(\operatorname{Arg} f(z)),$$

поскольку $\Delta_\Gamma(\ln|f(z)|) = 0$.

§8. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

Теорема Руше. Пусть $D \subset C$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ. Функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими $\overline{D}$ и $|f(z)| > |g(z)|$ при всех $z \in \Gamma$. Тогда функции $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей с учетом их кратности.

Доказательство. В силу неравенства $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$ функция $f(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$. Обозначим через N_f и N_{f+g} количество нулей функций $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ в области D соответственно. Поскольку функции не имеют полюсов, то по принципу аргумента

$$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_\Gamma(\mathrm{Arg}(f(z) + g(z))) = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_\Gamma(\mathrm{Arg}\, f(z)\Big(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Big)) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\ \Delta_\Gamma(\mathrm{Arg}\, f(z)) + \frac{1}{2\pi}\ \Delta_\Gamma(\mathrm{Arg}\Big(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Big)) = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_\Gamma(\mathrm{Arg}\, f(z)) = N_f.$$

Поскольку $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, то при обходе точкой z замкнутого граничного контура Γ точка $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ совершает обход замкнутого контура, не содержащего внутри себя точку $w = 0$. Следовательно

$$\Delta_\Gamma(\mathrm{Arg}\Big(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Big)) = 0.$$

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен степени n имеет на комплексной плоскости C ровно n корней с учетом их кратности.

Доказательство. Пусть $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$, где $a_n \neq 0$. Положим $f(z) = a_n z^n$ и $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$.

Поскольку

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty,$$

то существует такое значение R_0, что при всех $|z| > R_0$ выполняется неравенство $|f(z)| > |g(z)|$.

Согласно теореме Руше, это означает что во всяком круге $B(0, R)$ при $R > R_0$ (а следовательно и во всей комплексной плоскости C) функции $f(z)$ и $P_n(z) = f(z) + g(z)$ имеют одинаковое количество нулей с учетом их кратности.

Очевидно, что точка $z = 0$ является нулем порядка n для функции $f(z) = a_n z^n$. Это и завершает доказательство теоремы.

§9. Обращение степенных рядов.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. По теореме об обратной функции существуют такие окрестности U точки z_0 и V точки $w_0 = S(z_0)$, что отображение $f : U \to V$ будет взаимно однозначным, а обратная функция $f^{-1} : V \to U$ будет аналитической в окрестности V. Следовательно функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 и функция $f^{-1}(w)$ в окрестности точки w_0 представимы степенными рядами:

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^n \tag{1}$$

и

$$z = f^{-1}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, (w - w_0)^k. \tag{2}$$

Нас будет интересовать вопрос о взаимосвязи коэффициентов a_n в формуле (1) с коэффициентами b_k в формуле (2).

Рассмотрим круг $\overline{B(w_0, r)} \subset V$, его граничную окружность обозначим через S_r, и пусть $D = f^{-1}(B(z_0, r))$, $\gamma = f^{-1}(S_r) = \partial D$. Тогда для любого $w \in B(z_0, r)D$ существует единственное значение $z \in D$, что $w = f(z)$. Используя интегральную формулу Коши и замену переменной $\xi = f(t)$, для произвольной точки $w \in D$ получаем

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r \gamma} \frac{f^{-1}(\xi)\, d\xi}{\xi - w} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{t\, f'(t)\, dt}{f(t) - w}. \tag{3}$$

При этом

$$\frac{1}{f(t) - w} = \frac{1}{f(t) - w_0}\ \frac{1}{1 - \dfrac{w - w_0}{f(t) - w_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - w_0)^k}{(f(t) - w_0)^{k+1}}. \tag{4}$$

Ряд (4) сходится равномерно по t на контуре γ, поскольку $|w-w_0|<r$, а $|f(t)-w_0|=r$ при $t\in\gamma$. Подставляя в формулу (3) разложение (4) и интегрируя, получаем

$$z=f^{-1}(w)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(w-w_0)^k,$$

где

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{t\,f'(t)\,d\,t}{(f(t)-w_0)^{k+1}}. \tag{5}$$

Поскольку контур γ является замкнутым, функция $\dfrac{t}{(f(t)-w_0)^k}$ является однозначной и

$$d\Big(\frac{t}{(f(t)-w_0)^k}\Big)=\frac{d\,t}{(f(t)-w_0)^k}\ -\ \frac{k\,t\,f'(t)\,d\,t}{(f(t)-w_0)^{k+1}},$$

то из формулы (5) при $n\geq 1$ получаем

$$b_k=\frac{1}{2\pi ik}\int\limits_{\gamma}\frac{d\,t}{(f(t)-w_0)^k}. \tag{6}$$

Подынтегральная функция в формуле (6) имеет внутри контура γ единственную особую точку $t=z_0$, являющуюся полюсом порядка k. Находя вычет подынтегральной функции, получаем

$$b_k=\frac{1}{k!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{d\,z^{k-1}}\Big[\frac{(z-z_0)^n}{(f(t)-w_0)^k}\Big],\qquad k=1,2,\ldots \tag{7}$$

Ряд (2), коэффициенты которого находятся по формулам (7), называют рядом Бурмана – Лагранжа.

Учитывая, что $a_1=f'(z_0)\neq 0$, из формул (7) легко находятся явные выражения для первых коэффициентов ряда (2) через коэффициенты ряда (1):

$$b_0=z_0,\quad b_1=\frac{1}{a_1},\quad b_2=-\frac{a_2}{a_1^3},\quad b_3=\frac{1}{a_1^3}\Big[2\Big(\frac{a_2}{a_1}\Big)^2-\frac{a_3}{a_1}\Big].$$

Пример. Для трансцендентного уравнения $w=z\,e^{-az}$ найти разложение в ряд решения $z=z(w)$ в окрестности точки $w=0$.

Поскольку значению $w=0$ соответствует единственное решение $z=0$, то по формулам (7)

$$b_k=\frac{1}{k!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{k-1}}{d\,z^{k-1}}\ e^{akz}=\frac{(ak)^{k-1}}{k!},$$

следовательно

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ak)^{k-1}}{k!}\,w^k.$$

§10. Аналитическая зависимость интеграла от параметра.

В курсе математического анализа доказывается теорема о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра. В следующей теореме доказывается аналогичное утверждение для аналитических функций комплексного переменного.

Теорема. Рассмотрим область $D\subset C$, промежуток $\Delta\subset R$ и функцию $f(z,t):D\times\Delta\to C$. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $f(z,t)$ является непрерывной при всех $(z,t)\in D\times\Delta\to C$;

2) при всяком $t\in\Delta$ функция $f(z,t)$ является аналитической по переменной z в области D;

3) существует интегрируемая мажоранта, т.е. $|f(z,t)|\leq\varphi(t)$ при всех $z\in D$, и

$$\int\limits_{\Delta}\varphi(t)\,d\,t<\infty.$$

Тогда функция

$$F(z)=\int\limits_{\Delta}f(z,t)\,d\,t$$

является аналитической в области D и

$$F'(z) = \int\limits_{\Delta} \frac{\partial}{\partial z} f(z,t)\,dt.$$

Доказательство. Поскольку аналитичность - это локальное свойство, то достаточно показать, что функция $F(z)$ будет аналитической в окрестности произвольной точки области D. Для доказательства этого факта воспользуемся теоремой Мореры.

Из условий 1, 3 и теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, (доказанной в курсе математического анализа) непосредственно следует, что действительная и мнимая части функции $F(z)$ будут непрерывными, т.е. функция $F(z)$ является непрерывной в области D.

Пусть точка $z_0 \in D$ и $r < dist(z_0, \partial D)$.) Рассмотрим круг $B(z_0, r) \subset D$ и произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур $\gamma \subset B(z_0, r)$.

Меняя порядок интегрирования (возможность этого следует из свойства 3) и учитывая, что согласно свойству 2 и интегральной теореме Коши при фиксированном значении $t \in \Delta$

$$\int\limits_{\gamma} f(z,t)\,dz = 0,$$

получаем

$$\int\limits_{\gamma} F(z)\,dz = \int\limits_{\gamma}\Big(\int\limits_{\Delta} f(z,t)\,dt\Big)\,dz = \int\limits_{\Delta}\Big(\int\limits_{\gamma} f(z,t)\,dz\Big)\,dt = 0.$$

По теореме Мореры функция $F(z)$ будет аналитической в круге $B(z_0, r)$, и в силу произвольности выбора точки z_0 функция $F(z)$ будет аналитической во всей области D.

Поскольку функция $F(z)$ является аналитической, то ее производная в круге $B(z_0, r)$ может быть выражена через интегральную формулу Коши

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{F(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{1}{(\xi - z)^2}\Big(\int\limits_{\Delta} f(\xi,t)\,dt\Big)\,d\xi =$$

$$\int\limits_{\Delta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi,t)\,d\xi}{(\xi - z)^2}\Big)\,dt = \int\limits_{\Delta} \frac{\partial}{\partial z} f(z,t)\,dt.$$

Теорема доказана.

§11. Аналитическое продолжение гамма-функции.

Определение. Рассмотрим область $D \subset C$ и множество $E \subset D$. Аналитическая в области D функция $F(z)$ называется *аналитическим продолжением* функции $f : E \to C$ в область D, если $F(z) = f(z)$ для всех $z \in E$.

Конечно же не всякая функция $f : E \to C$ допускает аналитическое продолжение. Если же множество E имеет предельную точку, принадлежащую области D, и аналитическое продолжение существует, то оно единственно. Это следует из теоремы единственности для аналитических функций.

Введенные нами аналитические функции комплексного переменного e^z, $\sin z$, $\cos z \ldots$ на комплексной плоскости обладают некоторыми непривычными свойствами (показательная функция e^z оказывается периодической, а тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ оказываются неограниченными), однако именно эти функции являются единственно возможными аналитическими продолжениями функций действительного переменного e^x, $\sin x$, $\cos x \ldots$ с действительной прямой в комплексную плоскость.

Теперь рассмотрим более сложный вопрос об аналитическом продолжении гамма-функции. При действительных значениях $x > 0$ гамма-функция определяется равенством

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1}\, e^{-t} dt.$$

Формально заменяя действительную переменную x комплексным переменным z, получаем

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} t^{z-1}\, e^{-t} dt, \tag{1}$$

где $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$. Остается проверить – при каких значениях $z \in C$ интеграл в правой части формулы (1) определяет аналитическую функцию.

Пусть
$$\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty t^{z-1}\,e^{-t}d\,t=\int\limits_0^1 t^{z-1}\,e^{-t}d\,t+\int\limits_1^\infty t^{z-1}\,e^{-t}d\,t=f_1(z)+f_2(z).$$

Рассмотрим вначале функцию $f_1(z)$. Пусть $t\in[0,1]$ и $\operatorname{Re} z>\alpha>0$, тогда $|t^{z-1}e^{-t}|\le|e^{(z-1)\ln t}|=e^{(x-1)\ln t}=t^{x-1}<t^{\alpha-1}$ и
$$\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}\,d\,t<\infty.$$

Таким образом при $0<t\le 1$ и $\operatorname{Re} z>\alpha$:
1. функция $t^{z-1}\,e^{-t}$ является непрерывной;
2. при фиксированном значении t функция $t^{z-1}\,e^{-t}$ является аналитической по переменной z;
3. функция $t^{z-1}\,e^{-t}$ имеет интегрируемую мажоранту.

По теореме об аналитической зависимости интеграла от параметра функция $f_1(z)$ будет аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} z>\alpha$. В силу произвольности выбора $\alpha>0$ функция $f_1(z)$ будет аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$.

Теперь рассмотрим функцию $f_2(z)$. При $t\ge 1$ и $\operatorname{Re} z<\beta<\infty$ выполняется оценка $|t^{z-1}e^{-t}|<t^{\beta-1}e^{-t}$ и
$$\int\limits_1^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,d\,t<\infty.$$

По теореме об аналитической зависимости интеграла от параметра функция $f_2(z)$ будет аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} z<\beta$. В силу произвольности выбора $\beta<\infty$ функция $f_2(z)$ будет аналитической во всей комплексной плоскости C.

Таким образом функция $\Gamma(z)=f_1(z)+f_2(z)$, будет аналитической в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$. Следовательно формула (1) задает аналитическое продолжение гамма-функции с действительной полуоси в правую полуплоскость. При $\operatorname{Re} z\le 0$ интеграл в формуле (1) перестает сходится и для аналитического продолжения в левую полуплоскость приходится использовать другой подход.

При действительных $x>0$ выполняется равенство
$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$
В силу теоремы единственности при $\operatorname{Re} z>0$ будет выполняться равенство
$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$
или
$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}. \tag{2}$$

Заметим, что правая часть равенства (2) определена при $\operatorname{Re} z>-1,\ z\ne 0$. Тем самым формула (2) задает аналитическое продолжение гамма-функции из правой полуплоскости в область $D_1=\{\operatorname{Re} z>-1,\ z\ne 0\}$. При этом теперь правая часть равенства (2) определена при $\operatorname{Re} z>-2,\ z\ne 0,-1$, и тем самым по формуле (2) мы получаем аналитическое продолжение гамма-функции из области D_1 в область $D_2=\{\operatorname{Re} z>-1,\ z\ne 0,-1\}$. Продолжая этот процесс мы в итоге получим аналитическое продолжение гамма-функции в область $D=C\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$

Аналитическое продолжение гамма-функции может быть построено и другим методом. Заметим, что в разложении
$$\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty t^{z-1}\,e^{-t}d\,t=\int\limits_0^1 t^{z-1}\,e^{-t}d\,t+\int\limits_1^\infty t^{z-1}\,e^{-t}d\,t=f_1(z)+f_2(z)$$
функция $f_2(z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости C, а функция $f_1(z)$ является аналитической в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$. Поэтому достаточно аналитически продолжить в левую полуплоскость функцию $f_1(z)$.

Представим функцию $f_1(z)$ в виде суммы функционального ряда. Для функции e^{-t} ряд Тейлора
$$e^{-t}=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\,t^n$$
сходится равномерно при $0\le t\le 1$. Если ряд умножить на функцию t^{z-1}, где $\operatorname{Re} z\ge 1$, то полученный ряд также будет равномерно сходиться при $0\le t\le 1$, и его можно почленно интегрировать. Таким образом

при $\mathrm{Re}\, z \geq 1$ получаем

$$f_1(z) = \int\limits_0^1 t^{z-1}\, e^{-t} dt = \int\limits_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^n dt =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^1 t^{z-1+n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\; \frac{1}{z+n}. \tag{3}$$

В последнем ряде формулы (3) слагаемые являются аналитическими функциями во всей комплексной плоскости, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \ldots$ Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$, последовательность кругов $B_n = B(-n, \varepsilon)$ и множество $D_\varepsilon = C \setminus \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n$.

Для любого $z \in D_\varepsilon$ при всех $n = 0, -1, -2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\Big|\frac{(-1)^n}{n!}\; \frac{1}{z+n}\Big| \leq \frac{1}{n!}\; \frac{1}{\varepsilon}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{1}{\varepsilon}$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\; \frac{1}{z+n}$ сходится равномерно на множестве D_ε. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ ряд из аналитических функций $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\; \frac{1}{z+n}$ сходится равномерно на всяком компактном подмножестве области $D = C\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$, и по теореме Вейерштрасса сумма ряда будет аналитической в области D функцией, совпадающей с функцией $f_1(z)$ при $\mathrm{Re}\, z \geq 1$.

Таким образом формула

$$\Gamma(z) = \int\limits_1^{\infty} t^{z-1}\, e^{-t} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\; \frac{1}{z+n} \tag{4}$$

задает аналитическое продолжение гамма-функции с действительной полуоси $x > 0$ во всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа изолированных особых точек $z = 0, -1, -2, \ldots,$ являющихся полюсами первого порядка. Из формулы (4) непосредственно следует, что вычет гамма-функции $\Gamma(z)$ в полюсе $z = -n$ равен $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ $(n = 0, -1, -2, \ldots)$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Элементы теории вычетов

6.1. Доказать следующее утверждение: для того, чтобы точка $z_0 \in D$ являлась нулем порядка k аналитической в области D функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка k для функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

6.2. Найти все особые точки функции $f(z)$ и выяснить их тип особенности:

$$a)\ f(z) = \frac{z^5}{(1-z)^2};\ \ b)\ f(z) = \frac{e^z}{1+z^2};\ \ c)\ f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z};\ \ d)\ f(z) = \frac{1}{z^3(2-\cos z)};$$

$$e)\ f(z) = e^{\frac{z}{1-z}};\ \ f)\ f(z) = \sin\frac{1}{1-z};\ \ g)\ f(z) = \sin(e^z);\ \ h)\ f(z) = e^{-z}\cos\frac{1}{z}.$$

6.3. Пусть функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \varphi\Big(\frac{1}{z}\Big)$, где функция $\varphi(t)$ является аналитической в точке $t = 0$. Доказать, что

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\,\varphi'(0).$$

6.4. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют в точке $z = \infty$ полюсы порядков n и m соответственно. Доказать, что функция $F(z) = f(g(z))$ имеет в точке $z = \infty$ полюс и найти его порядок.

6.5. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках:

$$a)\ f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5};\quad b)\ f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3};\quad c)\ f(z) = \frac{e^z}{z^2\,(z^2+9)};\quad d)\ f(z) = \operatorname{ctg} z;$$

$$e)\ f(z) = z^3\cos\frac{1}{z-2};\quad f)\ f(z) = \sin\frac{z}{z+1};\quad g)\ f(z) = z^n e^{\frac{a}{z}};\quad h)\ f(z) = \frac{1}{z-1}\,\sin\frac{1}{z}.$$

6.6. Найти вычеты для каждой из однозначных ветвей соответствующей многозначной функции:

$$a)\ \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z+3}{4\pi i - \ln(1+z)};\quad b)\ \operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z}{2+\sqrt{5-z}}.$$

6.7. Вычислить интегралы, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении:

$$a)\ \int\limits_{|z|^2=2\operatorname{Re} z}\frac{d\,z}{1+z^4};\quad b)\ \int\limits_{|z|=1}\frac{z^3\,d\,z}{1+2z^4};\quad c)\ \int\limits_{|z|=1}\frac{e^z\,d\,z}{z^2(z^2-9)};$$

$$d)\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} z^n\,e^{\frac{2}{z}}\,d\,z,\ \ n\in N;\quad e)\ \int\limits_{|z|=2}\frac{d\,z}{z^3(z^{10}-2)};\quad f)\ \int\limits_{|z|=5}\frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}\,d\,z.$$

6.8. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{d\,z}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$$

по ориентированной против хода часовой стрелки параболе $\Gamma = \{z \in C \mid\ \operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2\}$.

6.9. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^z\,d\,z}{\cos z},$$

где Γ – ориентированная против хода часовой стрелки граница полуполосы

$$P = \{z \in C \mid\ \operatorname{Re} z < 0,\ -a < \operatorname{Im} z < a,\ a > 0\}.$$

6.10. Вычислить следующие рационально–тригонометрические интегралы:

$$a)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{d\,\varphi}{a+\cos\varphi}\ \ (a>1);\qquad b)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{d\,\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\ \ (|a|<1);$$

$$c)\ \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\,\cos(n\varphi-\sin\varphi)\,d\,\varphi\quad (n\in N);\qquad d)\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\varphi\,d\,\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\quad (|a|<1,\ n\in N);$$

$$e)\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+2\cos\varphi)^n}{5+4\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\,\varphi\quad (\ n\in N);\qquad f)\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{\cos^2\varphi-\cos^2\alpha}{\sin\varphi-\sin\alpha}\Big)^n e^{in\varphi}\,d\,\varphi\quad (0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ n\in N).$$

6.11. Вычислить следующие рациональные интегралы:

$$a)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{x^2\,d\,x}{(x^2+a^2)^2}\quad (a>0);\qquad b)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{d\,x}{(x^2+1)^n}\quad (n\in N);\qquad c)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{d\,x}{1+x^n}\quad (n\ge 2);\qquad d)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{x^n\,d\,x}{1+x^{2n}}\quad (n\ge 2);$$

$$e)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,x}{x^2-2ix-2};\qquad f)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}\,d\,x;\qquad g)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,d\,x}{(x^2+a^2)^3}\quad (a>0);\qquad h)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^6\,d\,x}{(x^4+a^4)^2}\quad (a>0).$$

6.12. Вычислить следующие интегралы:

$$a)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,d\,x}{x^2-2ix-2};\qquad b)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}\,d\,x}{x^4+8x^2+16};\qquad c)\ \int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{az}\,d\,z}{(z^2-1)^2}\quad (a>0);\qquad d)\ \int\limits_{2i-\infty}^{2i+\infty}\frac{z\sin az}{z^2+1}\,d\,z\quad (a>0);$$

$$e)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\,\sin x\,d\,x}{x^4+5x^2+4};\qquad f)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\cos x\,d\,x}{x^2-2x+10};\qquad g)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{x\,\sin ax\,d\,x}{x^2+b^2}\quad (a>0,\ b>0);\qquad h)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{x\,\sin x\,d\,x}{(x^2+a^2)^3}\quad (a>0).$$

6.13. Вычислить следующие интегралы:

$$a)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{d\,x}{x^p\,(1+x)}\quad (0<p<1);\qquad b)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{x^p\,d\,x}{1+x^2}\quad (-1<p<1);\qquad c)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}\,d\,x}{(1+x^2)^2};\qquad d)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{d\,x}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}};$$

$$e)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}\,d\,x}{(1+\sqrt{x})^3}\quad (0<\alpha<\frac{3}{2});\qquad f)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{x^p\,d\,x}{x^2+2x\cos\alpha+1}\quad (-1<p<1,\ 0<\alpha<\pi).$$

6.14. Пусть $R(x)$ – рациональная функция, не имеющая полюсов при $0\le x\le 1$ и удовлетворяющая условиям

$$R(x)=O(x^{-n})\ \ (x\to 0);\quad R(x)=O((1-x)^m)\ \ (x\to 1),$$

где n и m – целые числа $(n<m)$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1\Big(\frac{x}{1-x}\Big)^{\alpha-1}R(x)\,d\,x=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\Big(\sum\operatorname*{Res}_{z=z_k}h(z)\,R(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty}h(z)\,R(z)\Big),$$

где $n<\alpha<m$, $h(z)$ – ветвь функции $\Big(\frac{z}{1-z}\Big)^{\alpha-1}$, принимающая положительные значения при $z=x+i0,\ 0<x<1$, а сумма вычетов берется по всем полюсам z_k функции $R(z)$.

6.15. Вычислить следующие интегралы:

$$a)\ \int\limits_0^1\frac{\sqrt{x(1-x)}}{(1+x)^3}\,d\,x;\qquad b)\ \int\limits_0^1\frac{d\,x}{(2-x)\sqrt[3]{x(1-x)^2}};\qquad c)\ \int\limits_1^2\frac{\sqrt{(x-1)(2-x)}}{x+2}\,d\,x.$$

6.16. Вычислить следующие интегралы:

$$a)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{\ln x\ d\,x}{(x+1)\sqrt{x}};\qquad b)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{\ln x\ d\,x}{(x^2+1)\sqrt{x}};\qquad c)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{\ln x\ d\,x}{x^2+a^2}\quad (a>0);$$

$$d)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{\ln^2 x\ d\,x}{x^2+a^2}\quad (a>0);\qquad e)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{\ln x\ d\,x}{(x+1)^2\sqrt{x}};\qquad f)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{x\,e^{\frac{x}{2}}\ d\,x}{e^{2x}+1}.$$

6.17. Сколько корней имеет уравнение

$$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$$

в круге $|z| < 1$?

6.18. Сколько корней имеет уравнение

$$z^8 + 2z^5 - 7z^3 + z^2 + 1 = 0$$

в кольце $1 < |z| < 2$?

6.19. Сколько корней имеет уравнение

$$e^z - 4z^7 + 1 = 0$$

в круге $|z| < 1$?

6.20. Сколько корней имеет уравнение

$$z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$$

в верхней полуплоскости и в первом квадранте?

Литература.

1. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

2. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970.

3. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. М.: Наука, 1968.

4. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968.

5. Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., Бежанов К.А. . Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1972.

6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

7. Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С. Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГУ, 1992.

8. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1,2. М.: Наука, 1967.

8. Привалов В. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.

10. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

11. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1976.

ОТВЕТЫ

1. Комплексная плоскость

1.1. $a)$ $\mathrm{Re}\, z_1 = 0, \mathrm{Im}\, z_1 = -1, |z_1| = 1, \mathrm{Arg}\, z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; b)$ $\mathrm{Re}\, z_2 = 64, \mathrm{Im}\, z_2 = 0, |z_2| = 64, \mathrm{Arg}\, z_2 = 2\pi k; c)$ $\mathrm{Re}\, z_3 = -2, \mathrm{Im}\, z_3 = 0, |z_2| = 2, \mathrm{Arg}\, z_2 = \pi + 2\pi k.$

1.2. $a) -1;\ \ b)\ 16;\ \ c) -i.$

1.3. a) если $n < 0$, то $z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $k = 0, \ldots, |n| - 1$; b) если $n = 0$, то $|z| = 1$; c) если $n = 1$, то $z = 1$; d) если $n = 2$, то $z \in R$; e) если $n > 2$, то $z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $k = 0, \ldots, n - 1$.

1.7. $z_4 = z_1 + z_3 - z_2.$

1.8. $\dfrac{z_3 - z_1}{z_1 - z_1} \in R.$

1.9. a) Эллипс с фокусами в точках $z = 2$ и $z = -i$. b) Внутренность левой ветви гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 2$. c) Семейство гипербол $x^2 - y^2 = M$. d) Семейство гипербол $xy = \dfrac{M}{2}$.
e) Окружность $(x - \frac{2}{3})^2 + y^2 = \frac{4}{9}$.

1.10. $|z|_{max} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4} + a), \quad |z|_{min} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4} - a).$

1.11. $a)\ \left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right);\ b)\ \left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right);\ c)\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{1}{2}\right).$

1.12. $z_1\bar{z}_2 = -1.$

1.13. При повороте сферы на 180° вокруг диаметра, параллельного действительной оси.

1.14. Семейство окружностей, касающихся друг друга в полюсе. Окружности, проходящей через начало координат, соответствует меридиан (окружность радиуса $\dfrac{1}{2}$), а окружности отстоящей от начала координат на расстояние d – окружность, лежащая в плоскости, накланенной на угол $\mathrm{arctg}\, d$ к плоскости меридиана.

1.15. $d(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}};\ d(z, \infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$

1.17.

$$1)\ e^{i\frac{2\pi k}{5}},\ k = 0, \ldots, 4;\quad 2)\ e^{i\frac{\pi(k+1)}{4}},\ k = 0, \ldots, 3;\quad 3)\ \sqrt[7]{5}e^{i\frac{(2k+1)\pi - \mathrm{arctg}(3/4)}{7}},\ k = 0, \ldots, 7;$$

$$4)\ (2k + 1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots;\quad 5)\ \ln 2 + i\frac{\pi}{3} + 2i\pi k,\ k = 0, \pm 1, \ldots;\quad 6)\ e^{i2k\pi\sqrt{2}},\ k = 0, \pm 1, \ldots;$$

$$7)\ e^{2k\pi + i\ln 2},\ k = 0, \pm 1, \ldots;\quad 8)\ e^{-\frac{\pi}{2}}e^{2\pi k},\ k = 0, \pm 1, \ldots;\quad 9)\ 2k\pi \pm i\ln(2 + \sqrt{3}),\ k = 0, \pm 1, \ldots;$$

$$10)\ \frac{1}{2}\Big[\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + (2k + 1)\pi\Big] + \frac{i}{4}\ln 5,\ k = 0, \pm 1, \ldots$$

1.18. $a)\ \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}};\quad b)\ \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}};\quad c)\ \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x};\quad d)\ \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}.$

1.19. $a)\ \mathrm{Re}\, z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ \ b)\ \mathrm{Im}\, z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$

1.21. $z = -\frac{\pi}{4} - i\,\mathrm{Ln}\, i(5 + 2\sqrt{6}).$

1.22. $\mathrm{Im}\cos z = 0$ при $\mathrm{Re}\, z = k\pi$ или $\mathrm{Im}\, z = 0$; $\mathrm{Re}\cos z = 0$ при $\mathrm{Re}\, z = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

1.24. $\{\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z\}.$

2. Функции комплексного переменного

2.1. a) Окружность $u^2 + v^2 - \dfrac{u}{C} = 0$, при $C = 0$ – ось $u = 0$; b) луч $\mathrm{Arg}\, w = -\alpha$; c) прямая $u = \dfrac{1}{2}$.

2.2. При $R \neq 1$ получается эллипс

$$\frac{u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1,$$

а при $R=1$ получаем отрезок $v=0, \quad -2 \leq u \leq 2$.

2.3. а) Окружность $\rho=e^C$; b) луч $\theta=C$; c) спираль $\rho=e^\theta$.

2.4. При $c=1,\ b=-a;\ f(z)=(1-ai)z$.

2.5. Функция аналитическая при $0<\arg z<\frac{\pi}{4},\ \pi<\arg z<\frac{5\pi}{4}$ $(f(z)=z^2)$ и при $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{7\pi}{4}$ $(f(z)=-z^2)$.

2.7. $\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi};\ \ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial\rho}$.

2.8. $f(u)=au+b$.

2.9. Функция $|f(z)|$ не является гармонической, а функция $\ln|f(z)|$– гармоническая.

2.10. a) $f(z)=z^2+z+iC$; b) $f(z)=z^2+(5-i)z-\frac{i}{z}+iC$; c) $f(z)=\dfrac{1}{2z}+iz^2+3i+C$; d) $f(z)=2i\ln z-(2-i)z+C, \quad (C\in R)$.

2.11. a) $f(z)=e^{i\alpha}z^2e^z$; b) $f(z)=e^{i\alpha}e^{z^2}$; c) $f(z)=Ae^{\frac{z^2}{2}}$; d) $f(z)=Aze^z, \quad (\alpha\in R,\ A>0$.

2.12. Сжатие при $|z+1|<\dfrac{1}{2}$, растяжение при $|z+1|>\dfrac{1}{2}$.

2.14. $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$.

2.16. $2e^2(e^2-1)$.

3. Элементарные аналитические функции

3.1. $w=(2+i)z+1-3i$.

3.2. Полукруг $B^-=\{w\in C\mid\ |w|<1,\ \operatorname{Im}w<0.\}$

3.3. Область, содержащая точку $w=0$ и ограниченная дугами окружностей $|w|=1$ и $|w-\frac{5i}{4}|=\frac{3}{4}$.

3.4. a) Область, ограниченная прямой $\operatorname{Re}w=1$ и окружностью $|w-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$; b) область, ограниченная касающимися окружностями $|w-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ и $|w-\frac{3}{4}|=\frac{1}{4}$.

3.5. $w=\frac{d}{z}+hi$ или $w=-\frac{d}{z}+1+hi$, где $h\in R$.

3.6. $w=-\dfrac{2i(z+1)}{4z-1-5i}$.

3.7. $w=-\dfrac{iz+2+i)}{z+1}$.

3.8. $z^*=\dfrac{9}{2}+i$.

3.9. a) окружность $|z-\frac{i}{4}|=\frac{1}{4}$; b) прямая $x=\frac{1}{2}$.

3.10. $w=i\dfrac{az+b}{cz+d}$, где a,b,c,d – действительные числа и $ad-bc<0$.

3.11. $w=-\dfrac{z-2i}{z+2i}$.

3.12. $w=-4\dfrac{iz+2}{z-2-4i}$.

3.13. $w\notin(-\infty,1]$.

3.14. $E = \{w \in C \mid \ |w| < 1, \ -\pi < \operatorname{Arg} w < \frac{\pi}{2}$.

3.15. $w = \sqrt{z^2 + h^2}$.

3.16. $w = -i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

3.17. $w = i\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2$.

3.18. $w = \sqrt{\dfrac{z+1}{1-z}}$.

3.20. Допускает выделение однозначных ветвей.

3.21. Допускает выделение однозначных ветвей.

3.22. Не допускает выделение однозначных ветвей.

3.23. Допускает выделение однозначных ветвей.

3.24. a) Бесконечное множество. b) Бесконечное множество. c) Одну.

3.25. a) πi; b) $-\pi i$.

4. Интегрирование функций комплексного переменного

4.2. πi.

4.3. 0 при $n \neq -1$; $2\pi i$ при $n = -1$.

4.4. $\dfrac{R^{n+1}}{n+1}[(-1)^{n+1} - 1]$ при $n \neq -1$; πi при $n = -1$.

4.9. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2}$.

4.10. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

4.11. $a)$ 0; $b)$ $\frac{\pi}{3}$; $c)$ 0.

4.12. $\dfrac{\sin a}{a}$.

4.13. $e^a\left(1 + \frac{a}{2}\right)$.

4.15.

$$I = \begin{cases} A - f(z), & |z| > 1; \\ A, & |z| < 1. \end{cases}$$

5. Ряды аналитических функций

5.5. $a)$ 1; $b)$ 2; $c)$ e; $d)$ $\frac{1}{4}$; $e)$ $\frac{1}{e}$.

5.6. $a)$ $\dfrac{z}{(1-z)^2}$; $b)$ $-\ln(1-z)$; $c)$ $\frac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z}$; $d)$ $\ln(1+z)$.

5.7. a) Расходится во всех точках границы; b) Сходится во всех точках границы, кроме точки $z = 1$; c) Сходится во всех точках границы; d) Сходится во всех точках границы, кроме точки $z = -1$.

5.8. $a)$ $S(\varphi) = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|$; $b)$ $S(\varphi) = \dfrac{\pi - \varphi}{2}$; $c)$ $S(\varphi) = \frac{\pi}{4}$; $d)$ $S(\varphi) = \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)$.

5.10. $a)$ $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$; $b)$ $f(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]z^n$, $R = 2$; $c)$ $f(z) = \ln 2 - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\dfrac{z^n}{n}$, $R = 1$; $d)$ $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}$, $R = \infty$.

5.11 $a)$ $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\left(3 - \dfrac{n\pi}{2}\right)}{n!}(z-1)^{2n}$;

b) $f(z)=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big(1+\frac{1}{3}(z-1)+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2\cdot5\cdots(3n-4)}{3^n\,n!}(z-1)^n\Big)$.

5.12. $w=\dfrac{z}{1-z^2}$.

5.13. a) Существует $(f(z)=z^2)$; b) не существует.

5.15. a) $\frac{1}{5}<|z|<5$; b) $1<|z|<2$.

5.16. a) допускает, т.к. особая точка $z=0$ является изолированной; b) не допускает, т.к. особая точка $z=\infty$ не является изолированной.

5.17. a) $f(z)=\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ при $|z|<1$, $f(z)=-\dfrac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ при $0<|z-1|<1$, $f(z)=-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ при $0<|z-1|<1$.

b) $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{1}\dfrac{z^n}{(1-n)!}$ при $0<|z|<\infty$.

c) $f(z)=(z-1)+2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\dfrac{(-1)^{n-1}(4n^2+2n-1)}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n-1}}+\dfrac{2\,(-1)^n}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n}}\Big]$ при $0<|z-1|<\infty$.

d) $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,z^n$, где $c_n=c_{-n}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!\,(n+k)!}$.

e) $f(z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin\Big(1+\frac{n\pi}{2}\Big)\dfrac{1}{n!(z-1)^n}$ при $0<|z-1|<\infty$.

5.18. $f(z)=-\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{3n+4}{9}\,z^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{9\cdot2^{n+1}}\,z^n$.

5.19. a) $\dfrac{2}{z-2k\pi i}$; b) $-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}$; c) z^2.

5.20. a) $h(\varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos n\varphi$; b) $h(\varphi)=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\cos n\varphi$; c) $h(\varphi)=-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n}\cos n\varphi$; d) $h(\varphi)=-\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cos n\varphi$.

6. Элементы теории вычетов

6.2. a) $z=1$ – полюс 2-го порядка, $z=\infty$ – полюс 3-го порядка; b) $z=\pm i$ – простые полюсы, $z=\infty$ – существенно особая точка; c) $z=0$ – устранимая особая точка, $z=2k\pi i$ – простые полюсы $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$, $z=\infty$ – неизолированная особая точка; d) $z=0$ – полюс 3-го порядка, $z=2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$ – простые полюсы $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $z=\infty$ – неизолированная особая точка; e) $z=1$ – существенно особая точка, $z=\infty$ – устранимая особая точка; f) $z=1$ – существенно особая точка, $z=\infty$ – устранимая особая точка; g) $z=\infty$ – существенно особая точка; h) $z=0$ – существенно особая точка, $z=\infty$ – существенно особая точка.

6.5. a) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}f(z)=1$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=1}f(z)=\operatorname*{Res}\limits_{z=-1}f(z)=-\frac{1}{2}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=0$; b) $\operatorname*{Res}\limits_{z=-1}f(z)=2\sin 2$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=-2\sin 2$; c) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}f(z)=\frac{1}{9}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=3i}f(z)=\frac{i}{54}e^{3i}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=-3i}f(z)=-\frac{i}{54}e^{-3i}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=\frac{1}{27}(\sin3-3)$; d) $\operatorname*{Res}\limits_{z=k\pi}f(z)=(-1)^k$, $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $z=\infty$ – неизолированная особая точка; e) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=2}f(z)=\frac{143}{24}$; f) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=-1}f(z)=\cos 1$; g) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$; h) $\operatorname*{Res}\limits_{z=1}f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=0}f(z)=\sin 1$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=0$.

6.6. a) -3, когда $\ln 1=4\pi i$, и 0 для остальных ветвей; b) 4, когда $\sqrt{4}=-2$, и 0, когда $\sqrt{4}=2$.

6.7. a) $-\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$; b) πi; c) $-\dfrac{2\pi i}{9}$; d) $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$; e) 0; f) 0.

6.8. $-\frac{\pi i}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

6.9. $\Big(2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\Big)^{-1}$.

6.10. a) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; b) $\dfrac{2\pi}{1-a^2}$; c) $\dfrac{2\pi}{n!}$; d) $2\pi\,\dfrac{a^n}{1-a^2}$; e) $\dfrac{2\pi i}{3}\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n$; f) $\dfrac{\pi\,i^n}{2^{n-1}}$.

6.11. a) $\frac{\pi}{4a}$; b) $\frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$; c) $\frac{\pi}{n}\,\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$; d) $\frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$; e) 0; f) $\frac{4\pi}{3}$; g) $\frac{\pi}{16a^3}$; h) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{16a}$.

6.12. a) $-\frac{2\pi}{e}\sin 1$; b) $\frac{3\pi e^{-2}}{16}$; c) $\frac{\pi i\,(1+a)\,e^{-a}}{2}$; d) $\pi\,\mathrm{ch}\,a$; e) $\frac{\pi}{3}\,e^{-2}(4-e)$;
f) $\pi e^{-3}\Big(\frac{1}{3}\cos 1-\sin 1\Big)$; g) $\frac{\pi}{2}\,e^{-ab}$; h) $\frac{\pi}{4a}\,e^{-a}$.

6.13. a) $\frac{\pi}{\sin p\pi}$; b) $\frac{\pi}{2\cos\dfrac{p\pi}{2}}$; c) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$; d) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,2^{-\frac{4}{3}}$; e) $\frac{2\pi\,(\alpha-1)\,(2\alpha-1)}{\sin 2\pi\alpha}$; f) $\frac{\pi}{\sin p\pi}\,\frac{\sin p\alpha}{\sin\alpha}$.

6.15. a) $\pi\,\frac{\sqrt{2}}{16}$; b) $2\pi\,\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$; c) $\pi\left(3\frac{1}{2}-\sqrt{12}\right)$.

6.16. a) 0; b) $-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$; c) $\frac{\pi\ln a}{2a}$; d) $\frac{\pi}{2a}\left(\ln^2 a+\frac{\pi^2}{4}\right)$; e) $-\pi$; f) $-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$.

6.17. Четыре корня.

6.18. Пять корней.

6.19. Семь корней.

6.20. Два корня в верхней полуплоскости, в первом квадранте корней нет.