КНФ

Содержание

КНФ

Определение:

Простой дизъюнкцией (англ. *inclusive disjunction*) или **дизъюнктом** (англ. *disjunct*) называется дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Простая дизъюнкция

- **полная**, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно один раз;
- **монотонная**, если она не содержит отрицаний переменных.

Определение:

Конъюнктивная нормальная форма, КНФ (англ. *conjunctive normal form, CNF*) — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид конъюнкции нескольких простых дизъюнктов.

Пример КНФ: $f(x,y,z) = (x \lor y) \land (y \lor \neg z)$

СКНФ

Определение:

Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ (англ. *perfect conjunctive normal form, PCNF*) — это такая КНФ, которая удовлетворяет условиям:

- в ней нет одинаковых простых дизъюнкций
- каждая простая дизъюнкция полная

Пример СКНФ: $f(x,y,z) = (x \lor \neg y \lor z) \land (x \lor y \lor \neg z)$

Теорема:

Для любой булевой функции $f(\vec{x})$, не равной тождественной единице, существует СКНФ, ее задающая.

Доказательство:

$\triangleright$

Поскольку инверсия функции $\neg f(\vec{x})$ равна единице на тех наборах, на которых $f(\vec{x})$ равна нулю, то СДНФ для $\neg f(\vec{x})$ можно записать следующим образом: $\neg f(\vec{x}) = \bigvee\limits_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n}) = 0} (x_1^{\sigma_1} \land x_2^{\sigma_2} \land \ldots \land x_n^{\sigma_n})$, где σ_i обозначает наличие или отсутствие отрицание при x_i

Найдём инверсию левой и правой части выражения: $f(\vec{x}) = \neg(\bigvee\limits_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n}) = 0} (x_1^{\sigma_1} \land x_2^{\sigma_2} \land \ldots \land x_n^{\sigma_n}))$

Применяя дважды к полученному в правой части выражению правило де Моргана, получаем: $f(\vec{x}) = \bigwedge\limits_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n}) = 0} (\neg x_1^{\sigma_1} \lor \neg x_2^{\sigma_2} \lor \ldots \lor \neg x_n^{\sigma_n})$

Последнее выражение и является СКНФ. Так как СКНФ получена из СДНФ, которая может быть посторена для любой функции, не равной тождественному нулю, то теорема доказана.

$\triangleleft$

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 0.

2. Для каждого отмеченного набора записываем дизъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

Пример построения СКНФ для медианы

Построение СКНФ для медианы от трех аргументов

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 0.

x	y	z	$\langle x, y, z \rangle$
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	1	1	1
1	**0**	**0**	**0**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу : если значение некоторой переменной есть 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.

x	y	z	$\langle x, y, z \rangle$	
0	**0**	**0**	**0**	$(x \lor y \lor z)$
0	**0**	**1**	**0**	$(x \lor y \lor \neg z)$
0	**1**	**0**	**0**	$(x \lor \neg y \lor z)$
0	1	1	1	
1	**0**	**0**	**0**	$(\neg x \lor y \lor z)$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

$\langle x, y, z\rangle = (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$

Построение СКНФ для медианы от пяти аргументов

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\rangle$	
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5)$
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5)$
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5)$
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5)$
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$
0	0	1	1	1	1	
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5)$
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$
0	1	0	1	1	1	
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	$(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5)$
0	1	1	0	1	1	
0	1	1	1	0	1	
0	1	1	1	1	1	
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5)$
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$
1	0	0	1	1	1	
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5)$
1	0	1	0	1	1	
1	0	1	1	0	1	
1	0	1	1	1	1	
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$
1	1	0	0	1	1	
1	1	0	1	0	1	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	0	0	1	
1	1	1	0	1	1	
1	1	1	1	0	1	
1	1	1	1	1	1	

$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\rangle = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge$
$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) \wedge$
$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge$
$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee$

Примеры СКНФ для некоторых функций

Стрелка Пирса: $x \downarrow y = (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

Исключающее или: $x \oplus y \oplus z = (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee z)$

См. также

- Специальные формы КНФ
- ДНФ

Источники информации

- Википедия — СКНФ (http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%9A%D0%9D%D0%A4)
- Е.Л Рабкин, Ю.Б. Фарфоровская — Дискретная математика (http://dvo.sut.ru/libr/himath/w163rabk/index.htm)
