

Урок 14

Геометрическое представление зон Френеля

1. (Задача 3.134.) Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Используя геометрическое представление вкладов зон Френеля, аналогичное спирали Корню, определить какова интенсивность I за экраном в точке, для которой отверстие равно: а) 1-й зоне Френеля; б) внутренней половине 1-й зоны; в) 1-й зоне, половина которой перекрыта по диаметру; г) полутора первым зонам; д) одной трети 1-й зоны?

Решение Используя вычисления, проведенные в решении задачи 3.53, можно представить амплитуду вклада от различных зон Френеля как комплексное число, изображаемое на комплексной плоскости в виде вектора с началом в начале координат O (см. рисунок выше).

На этой плоскости они будут представляться в виде векторов, модуль которых пропорционален амплитуде самих величин, а ориентация которых (угол по отношению к горизонтальной действительной оси) будет определяться значением их фазы (показатель мнимой экспоненты; он в точности характеризует набег фазы на соответствующей части зоны). Таким образом, если разбить зону на много малых равных частей, то вклад каждой из них будет представляться векторами одинаковой длины, каждый из которых, начинаясь в конце предшествующего вектора, будет повернут относительно него на дополнительный угол, пропорциональный набегу фазы на этой части зоны. Следовательно, при разбиении зоны на неограниченное число частей концы векторов, отвечающих за вклад каждой части, будут описывать дугу окружности. Поскольку набег фаз при прохождении одной зоны в точности равен π , то вклад каждой целой зоны будет изображаться половиной дуги окружности. Таким образом, вклад первой зоны изображает вектор \vec{OM}_1 .

Аналогично, разбиение второй зоны на неограниченное число частей на рассматриваемой диаграмме описывается второй полуокружностью, начинающейся в M_1 и заканчивающейся в O . Поэтому вектор, описывающий действие второй зоны, также

будет чисто мнимым, но направленным в противоположную сторону по отношению к $\overrightarrow{OM_1}$ так что суммарное действие двух первых зон будет равно нулю. Суммарное действие n зон (если пренебречь слабой зависимостью от номера n вклада от каждой зоны), в зависимости от четности или нечетности n , будет либо нулевым, либо совпадать с действием только первой зоны. Действие же необязательно целого числа зон будет описываться вектором \overrightarrow{OM} , оканчивающимся на уже образованной первыми двумя зонами окружности с центром, лежащим на мнимой оси (см. рисунок).

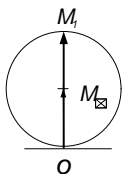
Учтем теперь медленное уменьшение вклада очередной зоны по мере роста ее номера (оно определяется как постепенным уменьшением площади зоны, так и сопровождающимся падением коэффициента наклона). На диаграмме этот процесс проявится, естественно, в постепенном уменьшении радиуса полуокружности, «отвечающей» за эту зону; так как каждая из них начинается в конце предшествующей, то конец вектора \overrightarrow{OM} будет описывать свертывающуюся спираль (см. рисунок)¹. Ясно, что центр спирали M_∞ будет совпадать с центром уже построенной окружности, определяющей действие первых двух зон. В соответствии со смыслом диаграммы вектор $\overrightarrow{OM}_\infty$ будет описывать действие полностью открытого волнового фронта.

Отсюда очевидный и уже известный со времен Френеля результат: действие небольшого нечетного числа открытых зон в 2 раза по амплитуде U и в 4 раза по интенсивности $I \propto U^2$ превышает действие открытого фронта. Рассмотрим теперь часто встречающуюся ситуацию с прохождением волнового фронта через прозрачную среду с показателем преломления $n \neq 1$. Понятно, что построение зон Френеля в этом случае будет таким же, но следует учесть дополнительный продольный набег фазы, равный $\Delta\varphi = knL$ и описываемый в выражении для волнового поля фазовым множителем $e^{i\Delta\varphi}$ (здесь L — путь, проходимый в среде; при введении графического представления зон этот множитель был несуществен и не принимался во внимание).

Геометрическое представление комплексных величин означает, что на диаграмме Френеля вектор \overrightarrow{OM} , описывающий действие какой-либо части фронта без учета продольного набега фазы, должен быть просто повернут на некоторый угол в направлении против часовой стрелки (соответствующем увеличению фазы). При равенстве набега фазы 2π вектор \overrightarrow{OM} должен остаться неизменным (т.к. $e^{2\pi} = 1$), т.е. угол его поворота также равен 2π . Следовательно, при произвольной величине продольного набега фазы соответствующий угол β поворота вектора \overrightarrow{OM} равен дробной (по модулю 2π) части этого набега фазы: $\beta = \Delta\varphi \pmod{2\pi}$.

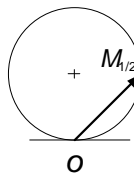
а) Решение задачи в этом случае приведено выше. Поскольку точка M_1 на

¹Далее в решениях многих задач будет использоваться это представление, не получившее, к сожалению, как, например, спираль Корню, собственного имени. Необходимость частых ссылок, требует его наличия, и нам представляется справедливым использовать в этих случаях имя диаграмма или спираль Френеля, а для охватывающей ее окружности - окружность Френеля.



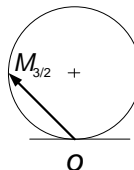
окружности Френеля, соответствующая первой зоне, лежит на верхнем конце ее вертикального диаметра (см. рисунок), так что действие отверстия, описываемое длиной вектора $\overrightarrow{OM_1}$, вдвое превышает действие полностью открытого фронта. Следовательно, $I = 4I_0$.

б) Точка $M_{1/2}$, описывающая действие половины 1-й зоны, находится, естественно, на окружности Френеля посередине между O и M_1 (см. рисунок), так что длина вектора $\overrightarrow{OM_{1/2}}$ в $\sqrt{2}$ превышает R_F , и поэтому $I = 2I_0$.

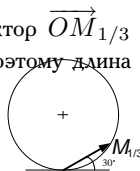


в) Из вычисления действия n -й зоны было видно, что в нем производится суммирование действия элементов зоны по азимутальному углу α (в пределах от 0 до 2π). Если же часть зоны по углу α перекрыта, то действие зоны уменьшается пропорционально. Таким образом, если первая зона перекрыта наполовину по диаметру, то ее действие уменьшится вдвое и будет описываться вектором $\frac{1}{2}\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_\infty M_1}$ т.е. станет равным действию полностью открытого фронта. Следовательно, $I = I_0$.

г) Ясно, что точка $M_{3/2}$ будучи на окружности Френеля, должна лежать посередине между точками M_1 и M_2 , описывающих действие первой и второй зон, т. е. находится на левом конце горизонтального диаметра (см. рисунок). Следовательно длина вектора $\overrightarrow{OM_{3/2}}$ в $\sqrt{2}$ превышает R_F и поэтому $I = 2I_0$.



д) Точка $M_{1/3}$ находится на окружности Френеля и вектор $\overrightarrow{OM_{1/3}}$ должен составлять с горизонтальной осью угол 30° (см. рисунок). Поэтому длина вектора $\overrightarrow{OM_{1/3}}$ будет совпадать с R_F , так что $I = I_0$.

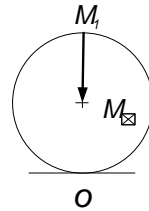


2. (Задача 3.135.) Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения 1-ю зону Френеля. а) Какова интенсивность I в точке наблюдения? Какой она стала после того как у диска удалили б) половину (по диаметру); в) половину (по диаметру) внешней половины 1-й зоны?

Решение В силу принципа Бабинне действие волнового поля в случае, когда его часть перекрыта экраном, описывается вектором, равным разности векторов $\overrightarrow{OM_\infty}$ (действие полностью открытого фронта) и \overrightarrow{OM} (действие перекрывающего экрана). Применим этот принцип.

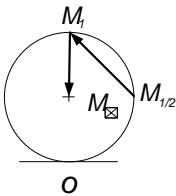
а) Ясно, что длина вектора $\overrightarrow{M_1 M_\infty}$ (см. рисунок) равна R_F , и поэтому $I = I_0$.

б) Удаление половины (по диаметру) перекрывающего диска означает открытие соответствующей части фронта (в рассматриваемом случае — половины 1-й зоны). По принципу Бабиня к вектору $\overrightarrow{M_1 M_\infty}$ из предыдущего случая следует добавить вектор, описывающий действие вновь открытой части фронта. Таковым является, как показано в решении задачи 1., вектор $\overrightarrow{M_\infty M_1}$. Следовательно, $I = 0$.



в) Как ясно из рассмотрения предыдущего случая, необходимо найти сначала действие половины (по диаметру) внешней половины 1-й зоны. На диаграмме Френеля действие половины 1-й зоны описывается вектором $\overrightarrow{OM_{1/2}}$ (см. рисунок); следовательно, вектор $\overrightarrow{M_{1/2} M_1}$ описывает действие внешней половины 1-й зоны.

Таким образом, искомому действию соответствует сумма векторов $\overrightarrow{M_1 M_\infty}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{M_{1/2} M_1}$ (множитель $1/2$ появляется потому, что внешняя половина 1-й зоны открыта наполовину). Таким образом, $I \propto \left| \overrightarrow{M_1 M_\infty} + \frac{1}{2}\overrightarrow{M_{1/2} M_1} \right|^2$. Тривиальные вычисления (конечно, с учетом угла между складываемыми векторами) дают искомый результат: $I = I_0/2$.

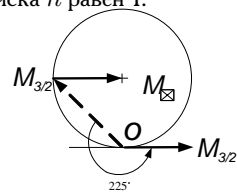


3. (Задача 3.136.) Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на прозрачный, стеклянный диск толщины h с показателем преломления n , размер которого соответствует полутора зонам Френеля для некоторой точки наблюдения. При какой минимальной толщине диска интенсивность в этой точке будет максимальной? Какова эта интенсивность?

Решение Ясно, что части волнового фронта, не занятой диском, на диаграмме Френеля соответствует вектор $\overrightarrow{M_{3/2} M_\infty}$, направленный вдоль горизонтальной оси от начальной точки $M_{3/2}$, лежащей на левом конце горизонтального диаметра окружности Френеля. В эту же точку $M_{3/2}$ «смотрит» вектор $\overrightarrow{OM_{3/2}}$, описывающий действие полутора зон в случае, если показатель преломления диска n равен 1.

Для $n > 1$ при прохождении через диск волнового фронта его фаза дополнительно возрастает на величину $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$, что означает доворот вектора $\overrightarrow{OM_{3/2}}$ на угол $\beta = \Delta\varphi \bmod 2\pi$ в направлении против часовой стрелки. Поскольку полная амплитуда в точке наблюдения определяется суммой волнового поля,

прошедшего вне и через собственно диск, то максимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор $\overrightarrow{OM_{3/2}}$ станет сонаправленным вектору $\overrightarrow{M_{3/2} M_\infty}$.

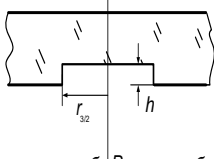


Таким образом, вектор $\vec{OM}_{3/2}$ должен быть повернут на угол $\beta = 225^\circ = 5\pi/4$ (см. рисунок). Следовательно, $h_{min} = \frac{5}{8} \frac{\lambda}{n-1}$. Легко также найти и значение максимума, т. к. длины векторов $\vec{M_{3/2}M_\infty}$ и $\vec{OM}_{3/2}$ равны соответственно R_F и $\sqrt{2}R_F$, то $I_{max} = (1 + \sqrt{2})^2 I_0 = (3 + 2\sqrt{2})I_0$.

4. (Задача 3.137.) Как изменится интенсивность в точке экрана, на который падает монохроматическая плоско поляризованная волна интенсивности I_0 , если на пути света поставить прозрачный диск, перекрывающий полторы зоны Френеля и поворачивающий плоскость поляризации света на 90° ?

Решение Поскольку свет, прошедший мимо диска (1-я «компонента»), не изменит направления своей поляризации, а свет, прошедший через него (2-я «компонента»), приобретет поперечное направление поляризации, то в точке наблюдения нужно складывать интенсивности этих компонент. Для первой из них имеем, как всегда, значение I_0 , т.к. ей на диаграмме Френеля соответствует вектор длины R_F . Поскольку для 2-й компоненты открыто полторы зоны, то ей на диаграмме соответствует вектор длины $\sqrt{2}R_F$. Поэтому ее интенсивность будет составлять $2I_0$ а, следовательно, полная интенсивность равна $3I_0$.

5. (Задача 3.138.) Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ и интенсивностью

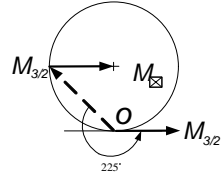


I_0 падает нормально на стеклянную пластинку с показателем преломления n . На противоположной стороне пластинки сделана выемка, соответствующая по размеру полутора зонам Френеля для некоторой точки наблюдения P (см. рисунок). При какой глубине h выемки интенсивность света в точке наблюдения будет а) максимальной; б) минимальной; в) равной интенсивности падающего света? Каковы будут интенсивности в точке наблюдения в этих случаях?

Решение Волновому фронту, проходящему через не занятую выемкой часть пластинки, на диаграмме Френеля соответствует вектор $\vec{M_{3/2}M_\infty}$, направленный вниз под углом 45° от начальной точки $M_{3/2}$, лежащей на левом конце горизонтального диаметра окружности Френеля. В эту же точку $M_{3/2}$ «смотрел» бы вектор $\vec{OM}_{3/2}$, описывающий действие полутора зон, если бы выемка в пластинке отсутствовала. Ее наличие означает для проходящего через нее света отставание по фазе по сравнению со светом, идущим через пластинку с показателем преломления $n > 1$. Величина возникшей разности фаз равна $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$, и ей соответствует поворот на диаграмме Френеля вектора $\vec{OM}_{3/2}$ на угол $\beta = \Delta\varphi \bmod 2\pi$ в направлении, соответствующем уменьшению фазы волны, т. е. по часовой стрелке. Полная амплитуда в точке наблюдения определяется, естественно, суммой волнового

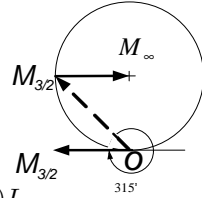
поля, прошедшего вне и через выемку. Теперь нетрудно рассмотреть интересные нас случаи.

а) Максимум интенсивности будет иметь место тогда, когда вектор $\vec{OM}_{3/2}$ станет сонаправленным вектору $\vec{M}_{3/2}M_\infty$. Таким образом, вектор $\vec{OM}_{3/2}$ должен быть повернут на угол $\beta = 135^\circ + 360^\circ m = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$ (см. рисунок). Следовательно, $h = \left(\frac{3}{8} + m\right) \frac{\lambda}{n-1}$.



Легко также найти и значение максимума, т. к. длины векторов $\vec{M}_{3/2}M_\infty$ и $\vec{OM}_{3/2}$ равны соответственно R_F и $\sqrt{2}R_F$, то $I_{max} = (1 + \sqrt{2})^2 I_0 = (3 + 2\sqrt{2})I_0$.

б) Минимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор $\vec{OM}_{3/2}$ станет противоположно направленным вектору $\vec{M}_{3/2}M_\infty$, т.е. вектор $\vec{OM}_{3/2}$ должен быть повернут на угол $\beta = 315^\circ + 360^\circ m = \frac{7\pi}{4} + 2\pi m$ (см. рисунок). Следовательно, аналогично предыдущему случаю получаем, что $h = \left(\frac{7}{8} + m\right) \frac{\lambda}{n-1}$ и $I_{min} = (1 - \sqrt{2})^2 I_0 = (3 - 2\sqrt{2})I_0$.



в) Наконец интенсивность в точке наблюдения останется равной I_0 , если вектор $\vec{OM}_{3/2}$ будет повернут на угол $\beta = 270^\circ + 360^\circ m = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$. Следовательно, $h = \left(\frac{3}{8} + m\right) \frac{\lambda}{n-1}$.