1. Квазистационарные явления

Урок 24

Взаимная индукция

1.1. (Задача 6.17) Найти коэффициент взаимной индукции между прямым проводом и проволочным кольцом, если провод лежит в плоскости кольца.

Решение Пусть расстояние в плоскости провод-кольцо от провода до центра кольца равно b, а радиус кольца – a. Решение этой задачи очень похоже на решение задачи 6.9. Магнитный поток, создаваемый прямым проводом записывается практически так же, как магнитный поток в соленоиде. Действительно, если по прямому проводу идет ток J, то он создает вокруг себя магнитное поле $H_\varphi = \frac{2J}{cr}$, где r – расстояние от провода до точки наблюдения в плоскости провод-кольцо. Тогда поток через площадь кольца от тока по прямому проводу запишется в виде

$$\Phi = \int \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{2J}{c}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{b+x}2\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y = \frac{4J}{c}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{b+x}\mathrm{d}x.$$

Используя интеграл, посчитанный в задаче 6.9, получаем результат для коэффициента взаимной индукции

$$M = 4\pi\left(b-\sqrt{b^2-a^2}\right).$$

1.2. (Задача 6.18) Вычислить коэффициент взаимоиндукции между прямым проводом и проволочной прямоугольной рамкой $a \times b$, если провод лежит в плоскости рамки вдоль одной из ее сторон о длиной b и на расстоянии h от ближайшей стороны.

Решение См. решение задачи 6.9 и 6.17 $M = 2b\ln\left(1 + a/h\right).$

1.3. (Задача 6.22) Найти коэффициент взаимной индукции двух катушек трансформатора с Ш-образным сердечником, если зазор $d \ll a$ (см. рисунок). Справедливо ли равенство $M_{12} = M_{21}$?

Решение Для решения этой задачи можно воспользоваться аналогией между электрическими цепями и магнитными цепями. Выключим ток во второй катушке и рассмотрим эквивалентную схему, которая показана на рисунке. Расставим токи (как и при решении задач об обычных токах) и выберем для них направления. В

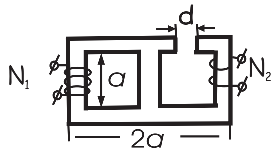
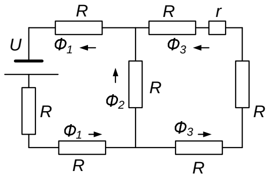


Рис. к задаче 6.22



Эквивалентная схема к задаче 6.22

соответствие с законами Кирхгофа для показанной цепи

$$\begin{cases} U = 3R\Phi_1 + R\Phi_2 \\ 0 = 3R\Phi_3 + r\Phi_3 - R\Phi_2 \\ 0 = -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим для потока через катушку 2

$$\Phi_3 = \frac{U}{15R+4r} = \frac{\frac{4\pi}{c}N_1 I_1}{15R+4r},$$

а потокосцепление через эту катушку

$$N_2\Phi_3 = \frac{L_{22}I_2 + L_{21}I_1}{c}$$

при разомкнутой второй катушке ток через нее не течет $I_2 = 0$ и, следовательно

$$\frac{L_{21}I_1}{c} = N_2\Phi_3 = \frac{\frac{4\pi}{c}N_1 N_2 I_1}{15R+4r},$$

$$L_{21} = \frac{4\pi N_1 N_2}{15R+4r}.$$

Аналогично, установив источник в цепи справа, т. е. разомкнув катушку 1 и пропустив ток I_2 по второй катушке, получим для потоков выражения

$$\Phi_2 = -\frac{3\frac{4\pi}{c}N_2 I_2}{15R+4r}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{\frac{4\pi}{c}N_2 I_2}{15R+4r}(4-3)$$

$$N_1\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2,$$

но при $I_1 = 0$

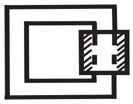
$$\frac{L_{12} I_2}{c} = \frac{\frac{4\pi}{c} N_1 N_2 I_2}{15R + 4r} = \frac{4\pi N_1 N_2}{15R + 4r},$$

откуда получаем

$$L_{12} = L_{21}.$$

Энергия и давление магнитного поля. Взаимодействие токов с полем

1.4. (Задача 5.28) Зазор магнитопровода ($\mu \gg 1$) окружен плоской шиной, по которой течет ток J. Найти давления (по величине и направлению) на поверхности шины и железа (высота зазора много меньше его ширины).



Решение Давление внутри области, окруженной шиной (в зазоре) равно

$$p = \frac{H^2}{8\pi}.$$

Направление силы определяется тем, что если ток течет по шине справа от нас, а слева на нас, то магнитное поле направлено вверх. Поскольку сила Ампера пропорциональна $\mathbf{I} \times \mathbf{H}$, то ясно, что она будет действовать наружу – раздвигать шину. По величине давление равно плотности магнитной энергии, т. е.

$$p = \frac{H^2}{8\pi}.$$

$p = \frac{(\mu-1)H^2}{8\pi}$.

1.5. (Задача 5.29) По кольцу радиуса $R = 0,1$ м идет ток $J = 1$ А. Кольцо находится в поле $H = 100$ Э, которое перпендикулярно плоскости кольца. Найти натяжение кольца в граммах.

Решение Сила, действующая со стороны магнитного поля на проводник с током определяется законом Ампера и, поскольку, $\mathbf{H} \perp \mathbf{J}$,

$$F = \frac{1}{c} J H,$$

и вектор силы направлен по радиусу наружу. Работа по увеличению радиуса под действием этой силы

$$\delta A = \int\limits_0^{2\pi} r \, d\varphi \frac{JH}{c} \delta r = 2\pi r \frac{JH}{c} \delta r.$$

Работа по растяжению окружности на длину $2\pi\delta r$ (увеличение радиуса на δr) равна

$$\delta A = 2\pi r \frac{JH}{c}\delta r = 2\pi T \delta r.$$

Таким образом

$$T = \frac{JHR}{c} = 0,1\text{г}.$$

1.6. (Задача 5.30) Бесконечный прямолинейный ток J_1 и круговой ток J_2 радиуса a лежат в одной плоскости. Расстояние от центра кругового тока до прямолинейного равно b ($b>a$). Найти силу, действующую на круговой ток.

Решение $F = \frac{4\pi J_1 J_2}{c}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$.

1.7. По бесконечному сплошному цилиндрическому проводнику радиуса R идет ток J. Найти давление на оси проводника.

Решение $p = \frac{J^2}{2\pi c^2 R^2}$.