Теория игр в топологии

Содержание

Пополнение метрического пространства

Пусть (X, d) есть метрическое пространство,

$$\mathfrak{F}(X) = \{(x_n)_n \in X^\omega \ : (x_n)_n \text{ есть фундаментальная последовательность}\}$$

есть множество фундаментальных последовательностей X.
Введем на $\mathfrak{F}(X)$ отношение:

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n$$

если

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.

Предложение 1.

Для $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathfrak{F}(X)$ *существует предел*

$$\tilde{d}((x_n)_n, (y_n)_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Если $(x_n)_n \sim (x'_n)_n$ *и* $(y_n)_n \sim (y'_n)_n$, *то*

$$\tilde{d}((x_n)_n, (y_n)_n) = \tilde{d}((x'_n)_n, (y'_n)_n).$$

Множество

$$[(x_n)_n] = \{(x'_n)_n \in \mathfrak{F}(X) \,:\, (x_n)_n \sim (x'_n)_n\}$$

есть класс эквивалентности, содержащий $(x_n)_n$. Положим

$$\widehat{X} = \{[\xi] \,:\, \xi \in \mathfrak{F}(X)\}.$$

Для $\xi, \zeta \in \mathfrak{F}(X)$ положим

$$\hat{d}([\xi], [\zeta]) = \tilde{d}(\xi, \zeta).$$

Предложение 2.

Функция $\hat{d} : \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{R}$ корректна определена, $\hat{d}$ является полной метрикой.

Для $x \in X$ обозначим через $s(x)$ стационарную последовательность $(x_n)_n$, у которой $x_n = x$ для всех n.

Предложение 3.

Отображение

$$i : X \to \widehat{X} : x \mapsto [s(x)].$$

является изометрическим вложением метрического пространства (X, d) в полное метрическое пространство $(\widehat{X}, \hat{d})$, то есть $\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Кроме того, $i(X) \subset \widehat{X} \subset \overline{i(X)}$.

Обычно отождествляют X и $i(X)$, тогда $(\widehat{X}, \hat{d})$ является полным метрическим расширением (X, d), $\overline{X} = \widehat{X}$, которое называется *пополнением метрического пространства X по метрике d*.

Предложение 4.

Пусть (X, d) *полное метрическое пространство,*
$G = \bigcap_n U_n \subset X$, *где* U_n *открыто в* X,

$$f_n(x) = d(x, X \setminus U_n) = \inf\{d(x, y) \, : \, y \in X \setminus U_n\}$$

для $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \in X$,

$$\rho_n(x, y) = \min\left\{1, \left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f_n(y)}\right|\right\},$$

$$\rho(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x, y).$$

для $x, y \in G$. *Тогда метрика* ρ *полна и задает туже топологию на* G *что и метрика* d

Предложение 5.

G_δ подмножество полного метрическое пространство метризуемо полной метрикой.

Предложение 6.

Если $Y \subset X \subset \overline{Y}$ и Y метризуемо полной метрикой, то Y множество типа G_δ в X.

Предложение 7.

Если $Y \subset X$, Y метризуемо полной метрикой и X метризуемо, то Y множество типа G_δ в X.

Пространство X называется *абсолютной* G_δ, если для любого расширения Y, $X \subset Y \subset \overline{X}$, множество X множеством типа G_δ в Y.
Из предложений 3, 5 и 6 вытекает

Предложение 8.

Метризуемое пространство X метризуемо полной метрикой если и только если X является абсолютной G_δ.

Theorem 1.1.

Пусть X есть метризуемое пространство, $M \subset X$. Игра $BM(X, M)$ α-благоприятна если и только если существует открытое непустое $U \subset X$ и абсолютное G_δ подмножество $G \subset M$, так что $G \subset U \subset \overline{G}$.

Детерминированность игры Банаха-Мазура

Множество $M \subset X$ называется *детерминированным*, если игра Банаха-Мазура $BN(X, M)$ детерминированна, то есть либо у α есть выигрышная стратегия либо у β есть выигрышная стратегия.

Предложение 9.

Если X является полным метрическим пространством без изолированных точек, $M \subset X$. Если M является детерминированным множеством, то либо в M либо в $X \setminus M$ есть подмножество G типа G_δ без изолированных точек.

Предложение 10.

Если X является полным метрическим пространством без изолированных точек то X содержит $Y \subset X$, гомеоморфное канторову множеству $\mathbb{C}$.

Множество Берштейна

Множество $M \subset X$ называется *множеством Берштейна*, если $P \cap M \neq \varnothing$ и $P \setminus M \neq \varnothing$ для любого несчетного замнутого нигде не плотного множества $P \subset X$. Дополнение $X \setminus M$ до множества Берштейна M также является множеством Берштейна.

Предложение 11.

Существует множество Берштейна $M \subset X = \mathbb{I} = [0,1]$.

Для любого $Y \subset \mathbb{I}$, гомеоморфное канторову множеству $\mathbb{C}$, Y замкнуто и нигде не плотно в $\mathbb{I}$. Следовательно, $Y \cap M \neq \varnothing$ и $Y \setminus M \neq \varnothing$ для множества Берштейна M.

Предложение 12.

Множество Берштейна $M \subset \mathbb{I}$ *не является детерминироанным множеством.*

Пространство Бэра

Пусть X множество.
Метрическое пространство $B(X) = (X^\omega, d)$ называется пространством Бэра, где

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ \frac{1}{n+1} & n = \min\{m : x_m \neq y_m\} \end{cases}$$

где $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in X^\omega$.
Положим

$$X^{<\omega} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n,$$

где $X^0 = \{\varnothing\}$.

Пусть $x = (x_k)_k \in X^m$, $y = (y_k)_k \in X^l$, $n \leq m < \omega$, $l < \omega$. Положим

$$x\big|_n = (x_0, x_1, ...x_{n-1}),$$
$$x^\frown y = (x_0, x_1, ...x_m, y_0, y_1, ...y_l)$$

Введем порядок на $X^{<\omega}$,

$$x \prec y$$

если и только если $l \leq m$ и $y = x\big|_l$.

Положим $U(X,x) = \{z \in B(X) : x \succ z\} = \{z \in X^{\omega} : x = z|_m\}$ для $x \in X^{<\omega}$.

Предложение 13.

Множества вида $U(X,x)$, $x \in X^{<\omega}$ образуют базу в $B(X)$.

Предложение 14.

$(B(X), d)$ является полным метрическим пространством.

Предложение 15.

Отображение

$$f : B(\{0,1\}) \to \mathbb{C} \subset [0,1] : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto 2 \cdot (x_0 x_1 \ldots)_3$$

гомеоморфно отображает $B(\{0,1\})$ *на канторово множество* $\mathbb{C}$.

Предложение 16.

Пусть $\mathbb{P}_+ = \mathbb{P} \cap (0, +\infty)$. *Отображение*

$$f : B(\mathbb{N}) \to \mathbb{P}_+ : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto [x_0; x_1, x_2, x_3, \cdots] =$$

$$= x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \ldots}}}$$

гомеоморфно отображает $B(\mathbb{N})$ *на положительные иррациональные числа* $\mathbb{P}_+$.

Ориентированный граф

Пусть X множество. Любое *отношение* $R \subset X \times X$ можно трактовать как *ориентированный граф*. Пара $(x, y) \in R$ можно воспринимать как *дугу* от *вершины* x к вершине y. Множество всех подмножеств множества X обозначим через 2^X. Отношению R соответствует отображение $X \to 2^X$: $R(x) = \{y \in X \ : \ (x, y) \in R\}$. Вершина x называется *терминальной* (концевой узел, лист) если $R(x) = \varnothing$.