

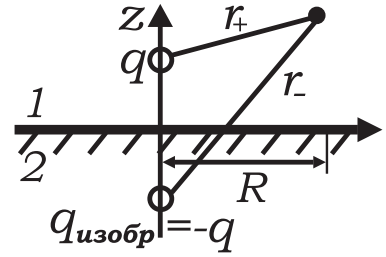
## 1. Электростатика

## Урок 8

## Метод изображений. Плоскость

1.1.

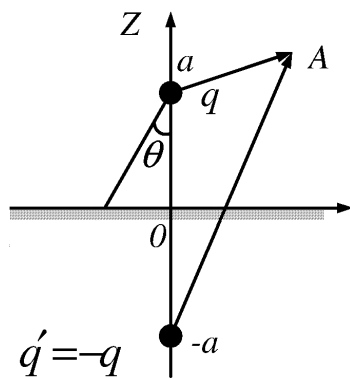
(Задача 2.22) Точечный заряд  $q$  находится в вакууме на расстоянии  $a$  от плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти потенциал, напряженность электрического поля, распределение  $\sigma$  и полный индуцированный на металле заряд, а также силу, действующую на заряд.



**Решение** В верхнем полупространстве потенциал поля, создаваемого зарядом  $q$  и индуцированными зарядами на проводнике, можно представить как потенциал поля, создаваемого зарядом  $q$  и его изображением  $q' = -q$  по другую сторону плоскости раздела на таком же расстоянии от нее. Действительно, потенциал поля точечных зарядов  $q$  и  $q'$  в какой-либо точке  $A$  над поверхностью проводника

$$\varphi = q \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad \text{при} \quad z \geq 0. \quad (1)$$

Этот потенциал обращается в нуль на поверхности проводника ( $r_+ = r_-$ ), а поэтому поверхность проводника будет эквипотенциальной поверхностью в системе зарядов  $q$  и  $(-q)$ . Функция (1) является решением уравнения Пуассона  $\Delta\varphi = -4\pi \sum q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  для верхнего полупространства  $z \geq 0$ , где  $\delta(\mathbf{r})$  – дельта функция. Это решение удовлетворяет граничным условиям  $\varphi(\mathbf{r}) = 0$  при  $z = 0$  и при  $z = \infty$ . По теореме единственности оно и есть искомое решение. В нижнем полупространстве, заполненном проводящей средой, поле равно нулю. Поэтому



$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q\mathbf{r}_+}{r_+^3} - \frac{q\mathbf{r}_-}{r_-^3} \quad \text{при} \quad z > 0, \\ \mathbf{E} &= 0 \quad \text{при} \quad z < 0. \end{aligned}$$

Индуцированные заряды притягивают заряд  $q$  с той же силой, что и фиктивный заряд  $q' = -q$ , поскольку он создает в верхнем полупространстве такое же поле, что и индуцированные заряды. Эта сила равна

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4a^2} \frac{\mathbf{z}}{z}.$$

Поверхностная плотность индуцированных зарядов найдется по формуле

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_z \Big|_{z=0} = -\frac{q}{2\pi a^2} \cos^3 \theta ,$$

где  $E_z \Big|_{z=0}$  – нормальная составляющая поля при  $z = 0$ . Проверьте, что касательная составляющая поля равна нулю при  $z = 0$ . Полный заряд, индуцированный на поверхности проводника:

$$Q = - \int_0^{\pi/2} \frac{q}{2\pi a^2} \cos^3 \theta \cdot 2\pi a^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = -q .$$

1.2. (Задача 2.24) Двугранный угол между двумя заземленными проводящими плоскостями равен  $\alpha$ . Внутри угла находится точечный заряд  $q$ . Найти электрическое поле в случаях: а)  $\alpha = 90^\circ$ ; б)  $\alpha = 60^\circ$ ; в)  $\alpha = 45^\circ$ .

**Решение** Поле внутри двугранного угла создается системой зарядов, изображенных на соответствующем рисунке.

