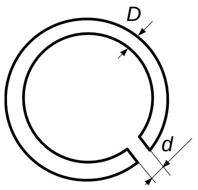
1. Магнитостатика

Урок 22

Магнитные цепи. Постоянные магниты

1.1. Определить поле в зазоре постоянного магнита, образованного из длинного намагниченного стержня, свернутого в кольца с небольшим зазором (см. рис.) Толщина намагниченного стержня D, величина зазора $d \ll L$, где L– длина магнита. Будем считать, что зазор настолько мал, что поле в нем можно считать однородным. и пренебрежем потоками рассеяния вне кольца.



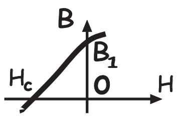
Решение Поле внутри кольца можно считать однородным. В связи с отсутствием внешних токов по теореме Стокса получим

$$\oint \mathbf{H} d\boldsymbol{\ell} = 0,$$

откуда

$$H_d d + H_L L = 0, \text{ где } L\text{– длина стержня.}$$

Используя граничные условия в зазоре можно записать $H_d = B_L$, откуда $H_L = -B_L d/L$, т. е. вспомогательное поле в теле стержня направленно в сторону, противоположную направлению B. Тогда, предположив что этот участок петли гистерезиса имеет линейный характер (см. рис.), можно записать



$$B = B_r \left(1 + \frac{H}{H_c}\right),$$

где B_r – остаточное намагничение, а H_c – коэрцитативная сила, которая всегда считается положительной. В итоге получим поле в магните и в зазоре

$$B_L = H_d = \frac{B_r}{1 + \frac{B_r d}{H_c L}}.$$

Для достаточно узкого зазора $d \ll H_c L/B_r$, поле в стержне стремится к остаточному ($B_L \to B_r$). Если же зазор велик ($d \gg H_c L/B_r$), то поле B_L определяется коэрцитативной силой:

$$B_L \approx H_c \frac{L}{d} \ll B_r.$$

1.2. Найти поле постоянного шарообразного магнита с намагниченностью $\mathbf{M}$ и магнитной проницаемостью μ.

Решение Для решения этой задачи можно воспользоваться общим решением задачи 5.9 о сфере во внешнем однородном поле с собственным магнитным моментом. Поскольку полученное там решение удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям на бесконечности, предположим, что решение в нашем случае аналогично. Поле внутри шара – однородное с неизвестным B_1. Поскольку однородно намагниченный шар (с намагниченностью $\mathbf{M}$) имеет магнитный момент $\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi a^3\mathbf{M}$, то поле вне шара

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2 = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{m}}{r^5}.$$

Граничные условия на границе шара $B_{1r} = B_{2r}$ и $H_{1\tau} = H_{2\tau}$. Тогда

$$\mu H_1 \cos\theta = -\frac{m}{a^3}(1-3)\cos\theta = 2\frac{m}{a^3}\cos\theta,$$

$$H_1 \sin\theta = -\frac{m}{a^3}\sin\theta.$$

$\mathbf{H}_{\text{внутр}} = \frac{8\pi}{\mu+2}\mathbf{M}$, $\mathbf{H}_{\text{нар}} = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{r}}{r^5}$, где $\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{\mu+2}\mathbf{M}$, $\mathbf{M}$ – намагниченность магнетика магнита.

1.3. (Задача 5.24) Найти максимальное магнитное поле шарообразного постоянного магнита радиуса $R = 10$ см, приняв в данном случае зависимость $B(H) = 4\pi B_0(1+\frac{H}{H_0})$, где поле насыщения $B_0 = 2$ Тл, а коэрцитивная сила $H_0 = 100$ Э.

Решение Поскольку намагничение в шаре постоянно, будем считать что и магнитное поле и магнитная индукция в шаре постоянны и равны $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{B}_1$ соответственно. Тогда намагниченность шара определяется соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}.$$

Полный магнитный момент шара $\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi R^3\mathbf{M}$. Магнитное поле (и равная ему индукция) вне шара определяются соотношением

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2 = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{r}}{r^5}.$$

На границе шар-вакуум должны выполняться граничные условия $B_{1n} = B_{2n}$, которые следуют из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Выбирая ось z вдоль намагниченности шара, можно это условие записать в виде

$$B_1\cos\theta = -\frac{m}{R^3}\cos\theta + \frac{3}{R^3}m\cos\theta,$$

или, сокращая на $\cos\theta$ и используя приведенное выше определение m, можно переписать это соотношение

$$B_1 = \frac{2}{R^3}m = \frac{2}{3}(B_1 - H_1).$$

Откуда $B_1 = -2H_1$. Поскольку соотношение для $B(H)$ выполняется во всех точках, мы можем записать

$$B_1 = B_0\left(1 + \frac{H_1}{H_0}\right) = B_0\left(1 - \frac{B_1}{2H_0}\right);$$

откуда окончательно получаем

$$B_1 = \frac{B_0}{1 + \frac{B_0}{2H_0}} = \frac{2\cdot 10^4}{1 + \frac{2\cdot 10^4}{200}} \approx 200\text{Гс}.$$

Поскольку на полюсе, т.е. при $\theta = 0$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{B}_1$ то это и будет максимальное поле вне магнита.

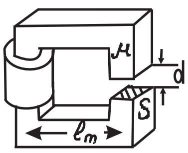
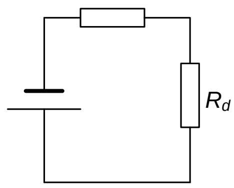


Рис. к задаче 5.19



Эквивалентная схема к задаче 5.19

1.4. (Задача 5.19) Найти поле электромагнита с узким зазором.

Решение По аналогии с законами Кирхгофа для электрических цепей основное уравнение для простой магнитной цепи имеет вид

$$\frac{4\pi I}{c} = \Phi R_\mu, \quad R_\mu = \oint \frac{\mathrm{d}x}{\mu(x)S(x)}.$$

У показанного на рисунке электромагнита «электродвижущей силой» является обмотка электромагнита, состоящая из N витков, по которому течет ток I. Тогда магнитный поток в магнитопроводе (в пренебрежении рассеянием магнитного потока в окружающую среду) записывается

$$\Phi = \frac{4\pi}{c}NI\frac{1}{R_\mu} = \frac{4\pi}{c}\frac{NI}{R_ж + R_d},$$

где $R_ж$ и R_d – магнитные сопротивления магнитопровода и зазора соответственно.

$$R_ж = \frac{L_ж}{\mu S_ж}, \quad R_d = \frac{d}{s}.$$

Тогда магнитное поле в зазоре

$$H \approx \frac{\Phi}{S} = \frac{4\pi}{c} \frac{NI}{d + \frac{L_ж S}{\mu S_ж}}.$$

При $S \sim S_ж$ и $\mu \gg 1$

$$H \approx \frac{4\pi NI}{cd}.$$