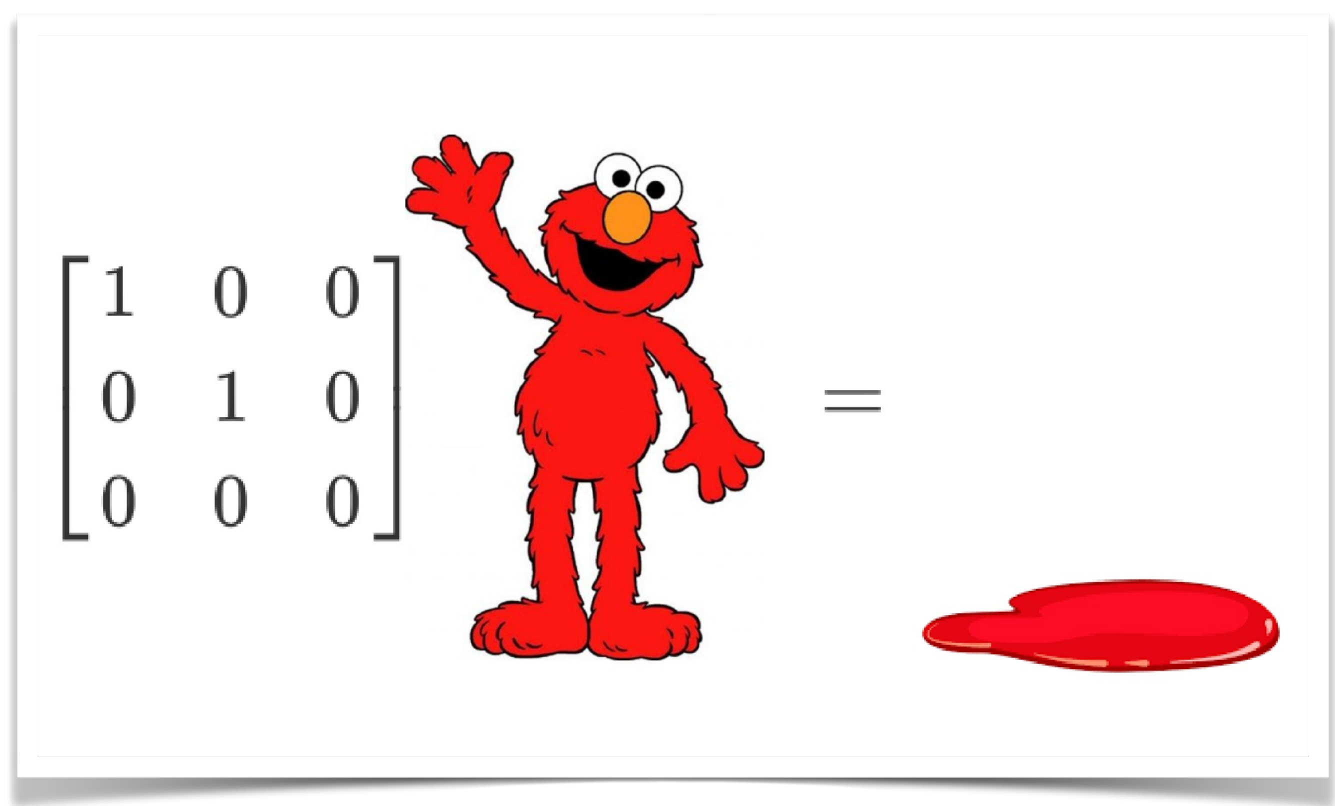
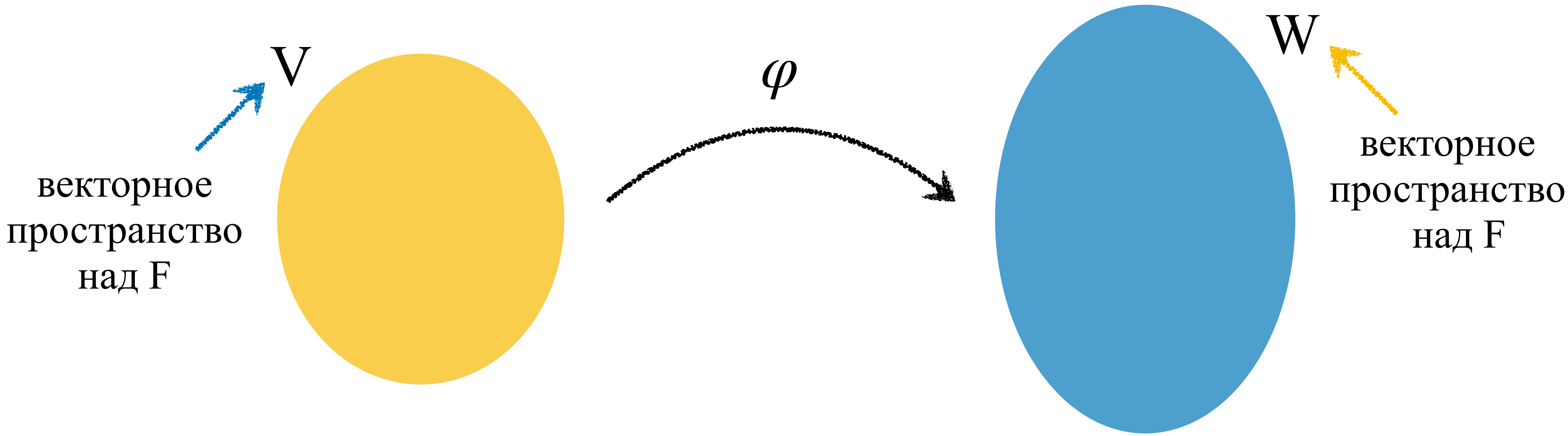
Линейные отображения



Определение



φ – линейное отображение

$$\Updownarrow$$

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ для всех $x, y \in V$ и $\alpha, \beta \in F$

Примеры

$x \in \mathbb{R}^3, \ x = (x_1, x_2, x_3)^T$

$\varphi(x) = (x_1^2,\ \ln x_2,\ x_1 x_3)^T$

Рассмотрим $x = (2,1,0)^T$, $\alpha = 3$ // $\alpha x = (6,3,0)^T$

проверим $\varphi(\alpha x) \overset{?}{=} \alpha \varphi(x)$

$(36, \ln 3, 0) \neq 3 \cdot (4, \ln 1, 0)$

$(36, \ln 3, 0) \neq (12, 3\ln 1, 0)$ $\Rightarrow$ φ не лин. отобр.

Замечание:

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) \quad \forall x, y \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) \\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \end{cases} \quad \forall x, y \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}$

Примеры

$x \in \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2, x_3)^T$

❌ $\varphi(x) = (x_1^2,\ \ln x_2,\ x_1 x_3)^T$

✅ $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2 - x_3,\ 3x_2 + x_3)^T$

✅ $\varphi(x) = (3x_1,\ 4x_2,\ 7x_3)^T$

✅ $\varphi(x) = (x_1,\ x_2,\ x_3)^T$, $\mathrm{id}(x) = x$ – тождественное отображение

❌ $\varphi(x) = (x_1 + 4,\ x_2 - 3,\ x_3 + 1)^T$

$x = (x_1, x_2, x_3)^T,\ y = (y_1, y_2, y_3)^T$

φ не лин. отобр.

$\Uparrow$

Проверим $\varphi(x+y) \overset{?}{=} \varphi(x) + \varphi(y)$

$(x_1 + y_1 + 4,\ x_2 + y_2 - 3,\ x_3 + y_3 + 1)^T \neq (x_1 + 4,\ x_2 - 3,\ x_3 + 1) + (y_1 + 4,\ y_2 - 3,\ y_3 + 1)$

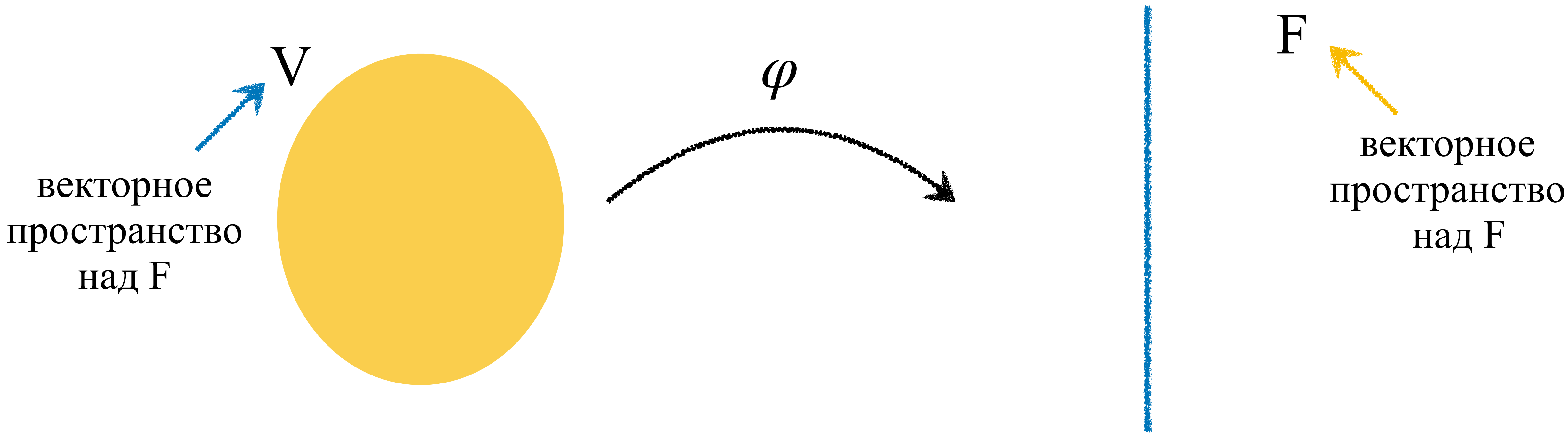
$(x_1 + y_1 + 4,\ x_2 + y_2 - 3,\ x_3 + y_3 + 1)^T \neq (x_1 + y_1 + 8,\ x_2 + y_2 - 6,\ x_3 + y_3 + 2)$

Примеры

$x \in \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2, x_3)^T$

- ✗ $\varphi(x) = (x_1^2,\ \ln x_2,\ x_1 x_3)^T$
- ✓ $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2 - x_3,\ 3x_2 + x_3)^T$
- ✓ $\varphi(x) = (3x_1,\ 4x_2,\ 7x_3)^T$
- ✓ $\varphi(x) = (x_1,\ x_2,\ x_3)^T,\ \mathrm{id}(x) = x$ – тождественное отображение
- ✗ $\varphi(x) = (x_1 + 4,\ x_2 - 3,\ x_3 + 1)^T$
- ✓ $\varphi(x) = (x_1,\ x_2,\ 0)^T$ – проектор $\boxed{P^2 = P}$
- ✓ $\varphi(x) = (0,\ 0,\ 0)^T,\ O(x) = 0$ – нулевое отображение

Линейный функционал



φ – линейное отображение

$\Updownarrow$

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \quad \text{для всех } x, y \in V \text{ и } \alpha, \beta \in F$$

Примеры

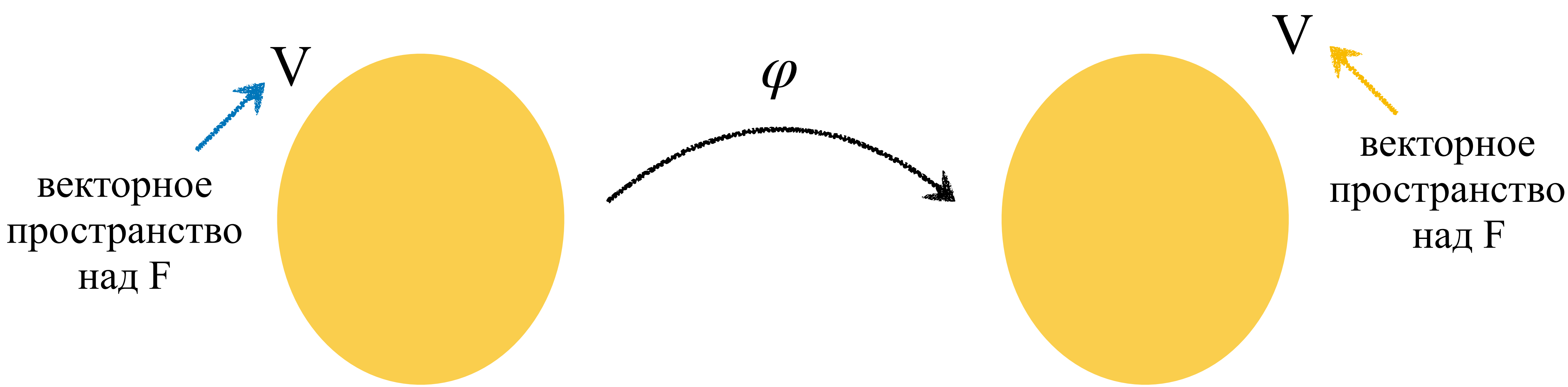
- $\varphi(x) = x \cdot a$ – скалярное произведение

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ – определённый интеграл

$$I : C[a,b] \to \mathbb{R}$$

Линейный оператор



φ – линейное отображение

$$\Updownarrow$$

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ для всех $x, y \in V$ и $\alpha, \beta \in F$

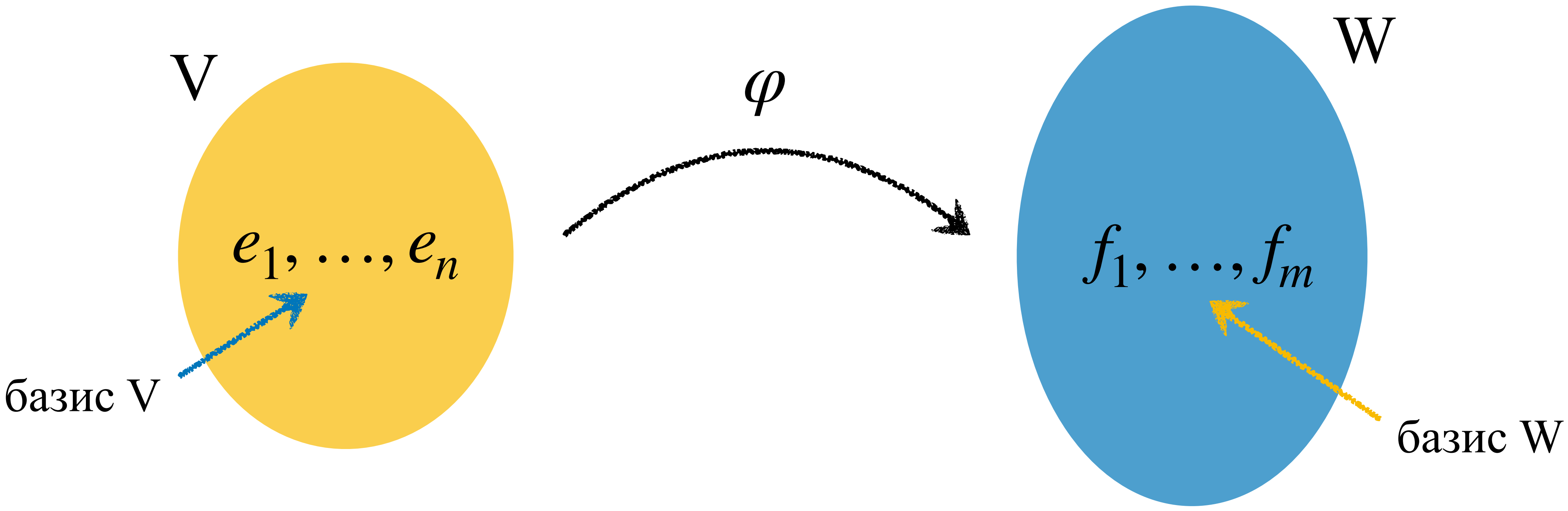
Примеры

- $O(x) = 0$ – нулевой оператор
- $\mathrm{Id}(x) = x$ (или $E(x) = x$) – тождественный оператор
- $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

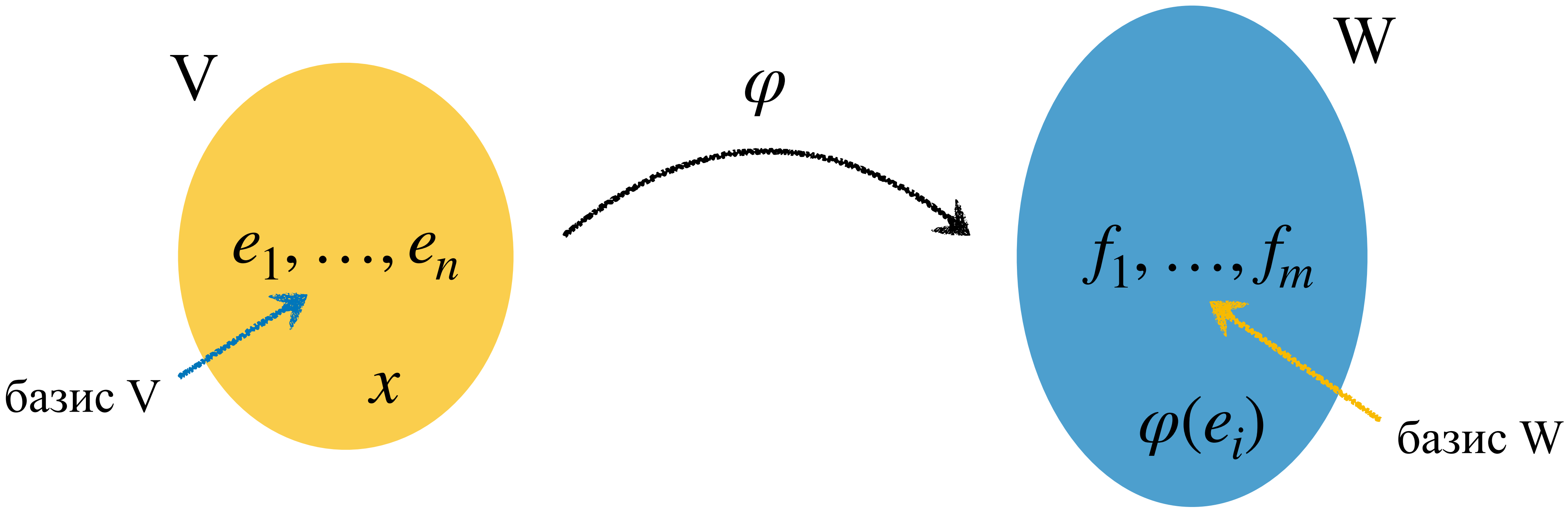
  $$\varphi(x) = \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, x_3\right)^T$$ в ОНБ – поворот на $\frac{\pi}{3}$ относительно Oz
- $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$

  $D(f) = \frac{d}{dx}f$ – оператор дифференцирования

Матрица φ



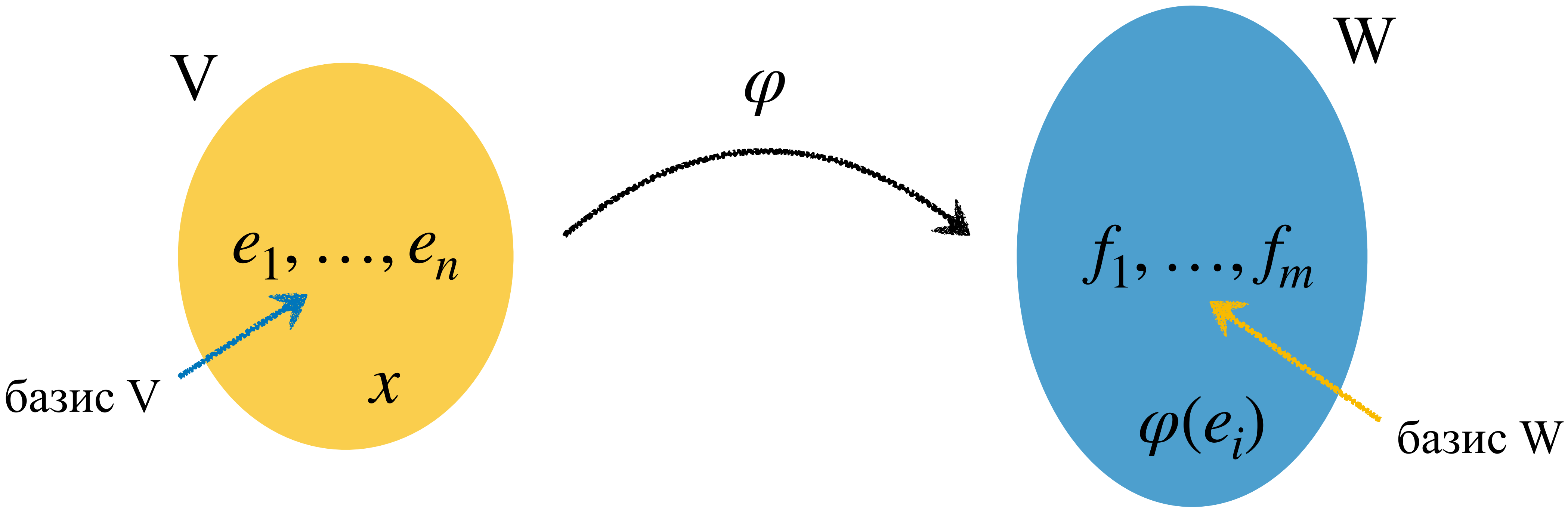
Матрица φ



$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n)$$

$$\varphi(e_1) = a_{11} f_1 + \ldots + a_{m1} f_m$$
$$\varphi(e_2) = a_{12} f_1 + \ldots + a_{m2} f_m$$
$$\ldots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n} f_1 + \ldots + a_{mn} f_m$$

Матрица φ



$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$$

$$\varphi(e_1) = a_{11}f_1 + \ldots + a_{m1}f_m = (a_{11}, \ldots, a_{m1})_f^T$$

$$\varphi(e_2) = a_{12}f_1 + \ldots + a_{m2}f_m = (a_{12}, \ldots, a_{m2})_f^T$$

$$\ldots$$

$$\varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + \ldots + a_{mn}f_m = (a_{1n}, \ldots, a_{mn})_f^T$$

Матрица φ

$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$$

$$\varphi(e_1) = a_{11}f_1 + \ldots + a_{m1}f_m = (a_{11}, \ldots, a_{m1})_f^T$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}f_1 + \ldots + a_{m2}f_m = (a_{12}, \ldots, a_{m2})_f^T$$
$$\ldots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + \ldots + a_{mn}f_m = (a_{1n}, \ldots, a_{mn})_f^T$$

Матрица φ

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n)$$

$$\varphi(e_1) = a_{11} f_1 + \ldots + a_{m1} f_m = (a_{11}, \ldots, a_{m1})_f^T$$
$$\varphi(e_2) = a_{12} f_1 + \ldots + a_{m2} f_m = (a_{12}, \ldots, a_{m2})_f^T$$
$$\ldots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n} f_1 + \ldots + a_{mn} f_m = (a_{1n}, \ldots, a_{mn})_f^T$$

Матрица φ

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$$

$$\varphi(e_1) = a_{11}f_1 + \ldots + a_{m1}f_m = (a_{11}, \ldots, a_{m1})_f^T$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}f_1 + \ldots + a_{m2}f_m = (a_{12}, \ldots, a_{m2})_f^T$$
$$\ldots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + \ldots + a_{mn}f_m = (a_{1n}, \ldots, a_{mn})_f^T$$

Матрица φ

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$$

$$\varphi(e_1) = a_{11}f_1 + \ldots + a_{m1}f_m = (a_{11}, \ldots, a_{m1})_f^T$$

$$\varphi(e_2) = a_{12}f_1 + \ldots + a_{m2}f_m = (a_{12}, \ldots, a_{m2})_f^T$$

$$\ldots$$

$$\varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + \ldots + a_{mn}f_m = (a_{1n}, \ldots, a_{mn})_f^T$$

Матрица φ

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$[\varphi] = (\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \ \dots\ \ \varphi(e_n))$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$$

$$\varphi(e_1) = a_{11}f_1 + \ldots + a_{m1}f_m = (a_{11}, \ldots, a_{m1})_f^T$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}f_1 + \ldots + a_{m2}f_m = (a_{12}, \ldots, a_{m2})_f^T$$
$$\ldots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + \ldots + a_{mn}f_m = (a_{1n}, \ldots, a_{mn})_f^T$$

Матрица φ

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$[\varphi] = (\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \ \dots\ \ \varphi(e_n))$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) =$$

Матрица φ

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$[\varphi] = (\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \ \dots\ \ \varphi(e_n))$$

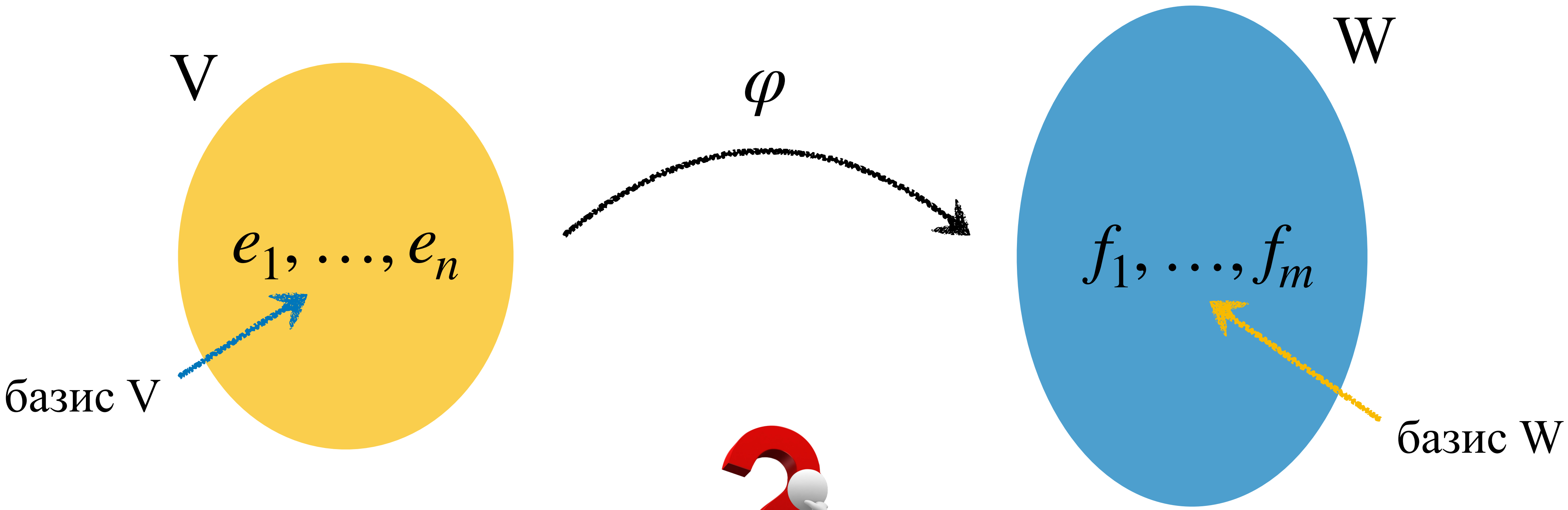
$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) =$$

$$= (\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \ \dots\ \ \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица φ

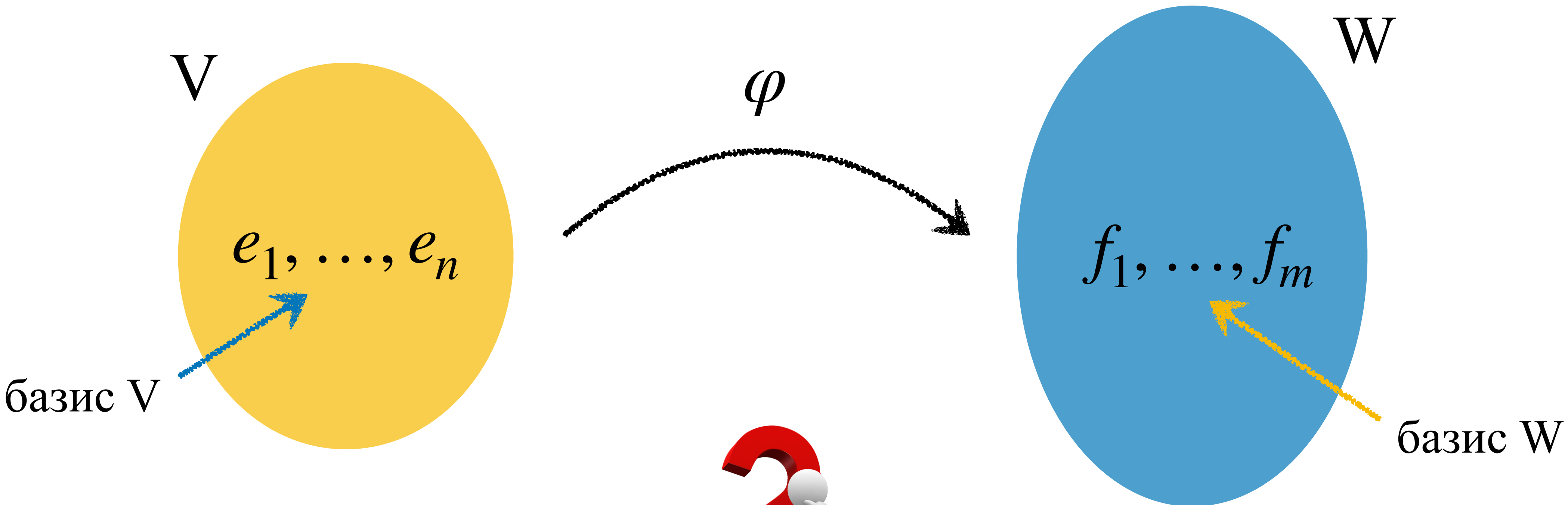
$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Контрольный вопрос



1) $[\varphi] \in M_{n \times m}$ или 2) $[\varphi] \in M_{m \times n}$

Контрольный вопрос



1) $[\varphi] \in M_{n\times m}$ или 2) $[\varphi] \in M_{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$(m \times n) \cdot n \times 1$

Задача 1

$$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2 - x_3,\ 3x_2 + x_3)^T$$

$$[\varphi] = ?$$

Задача 1

$$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2 - x_3,\ 3x_2 + x_3)^T$$

$$[\varphi] = ?$$

e_1, e_2, e_3 – базис

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0)^T \longrightarrow \varphi(e_1) = (1,\ 1,\ 0)^T$$

$$e_2 = (0,\ 1,\ 0)^T \longrightarrow \varphi(e_2) = (2,\ 1,\ 3)^T$$

$$e_3 = (0,\ 0,\ 1)^T \longrightarrow \varphi(e_3) = (0,\ -1,\ 1)^T$$

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 2

1446. $a_1 = (2,\ 0,\ 3),\quad b_1 = (1,\ 2,\ -1),$

$a_2 = (4,\ 1,\ 5),\quad b_2 = (4,\ 5,\ -2),$

$a_3 = (3,\ 1,\ 2);\quad b_3 = (1,\ -1,\ 1).$

$$\varphi(a_1) = b_1,\ \varphi(a_2) = b_2,\ \varphi(a_3) = b_3$$

$$[\varphi] = ?$$

Задача 2

1446. $\boldsymbol{a}_1 = (2,\ 0,\ 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1,\ 2,\ -1)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (4,\ \cdot 1,\ 5)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4,\ 5,\ -2)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (3,\ 1,\ 2)$; $\boldsymbol{b}_3 = (1,\ -1,\ 1)$.

$$\varphi(a_1) = b_1,\ \varphi(a_2) = b_2,\ \varphi(a_3) = b_3$$

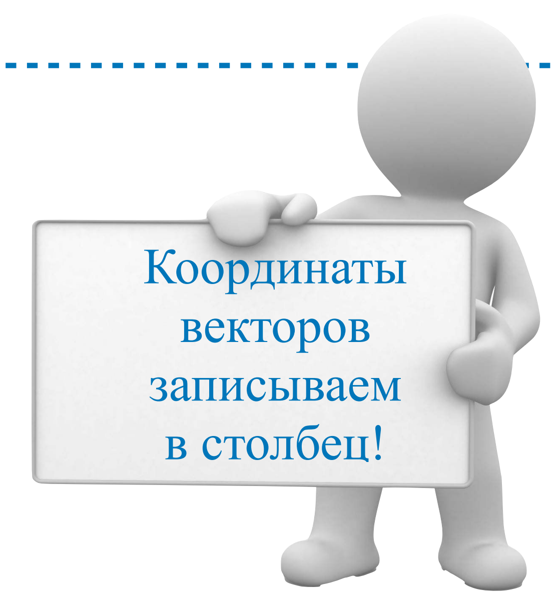
$$[\varphi] = ?$$

$$[\varphi](a_1\ a_2\ a_3) = (b_1\ b_2\ b_3)$$

Обозначим $A = (a_1\ a_2\ a_3)$, $B = (b_1\ b_2\ b_3)$

$$[\varphi]A = B$$

$$\boxed{[\varphi] = BA^{-1}}$$



$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Задача 2

1446. $a_1=(2,\ 0,\ 3)$, $b_1=(1,\ 2,\ -1)$,
$a_2=(4,\ 1,\ 5)$, $b_2=(4,\ 5,\ -2)$,
$a_3=(3,\ 1,\ 2)$; $b_3=(1,\ -1,\ 1)$.

$[\varphi]=BA^{-1}$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

det A

$-6+12-9=-3$

$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$

$=\det A$

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$14-20+6=0$ ✓

$2-8+6=0$ ✓

алгебр. дополн.
для эл-та a_{ij}

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

Задача 2

1446. $a_1 = (2,\ 0,\ 3)$, $b_1 = (1,\ 2,\ -1)$,
$a_2 = (4,\ 1,\ 5)$, $b_2 = (4,\ 5,\ -2)$,
$a_3 = (3,\ 1,\ 2)$; $b_3 = (1,\ -1,\ 1)$.

$$[\varphi] = BA^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 2

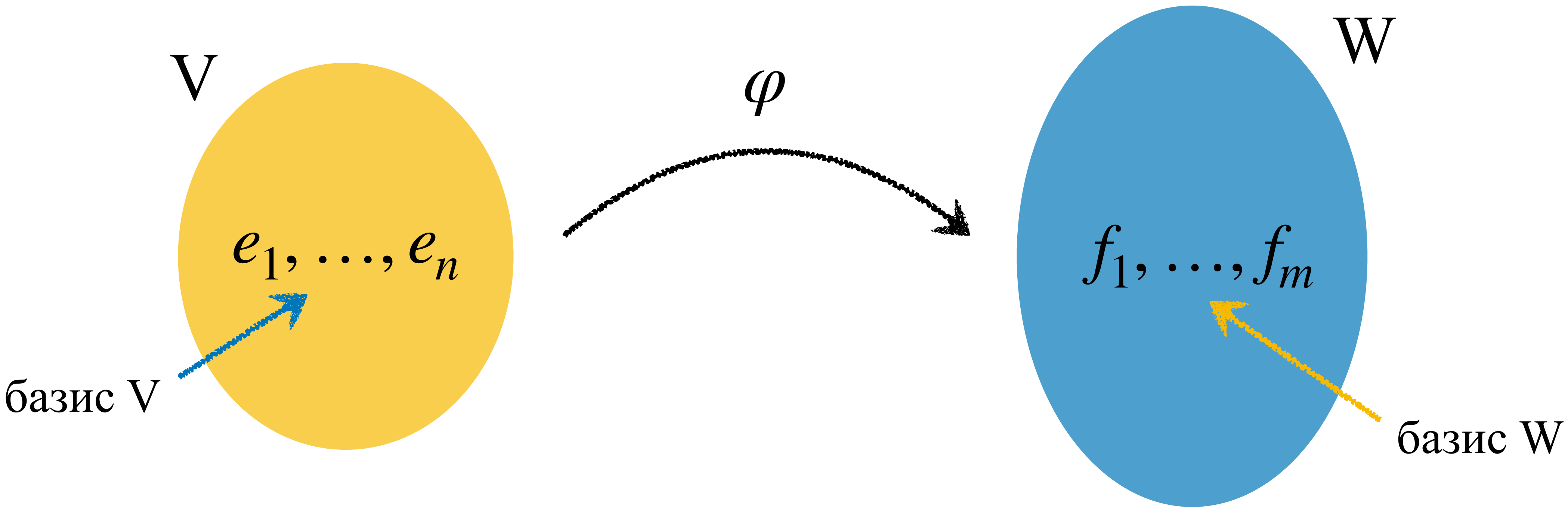
1446. $\boldsymbol{a}_1 = (2,\ 0,\ 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1,\ 2,\ -1)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (4,\ 1,\ 5)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4,\ 5,\ -2)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (3,\ 1,\ 2)$; $\boldsymbol{b}_3 = (1,\ -1,\ 1)$.

$$[\varphi] = BA^{-1}$$

$$[\varphi] = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

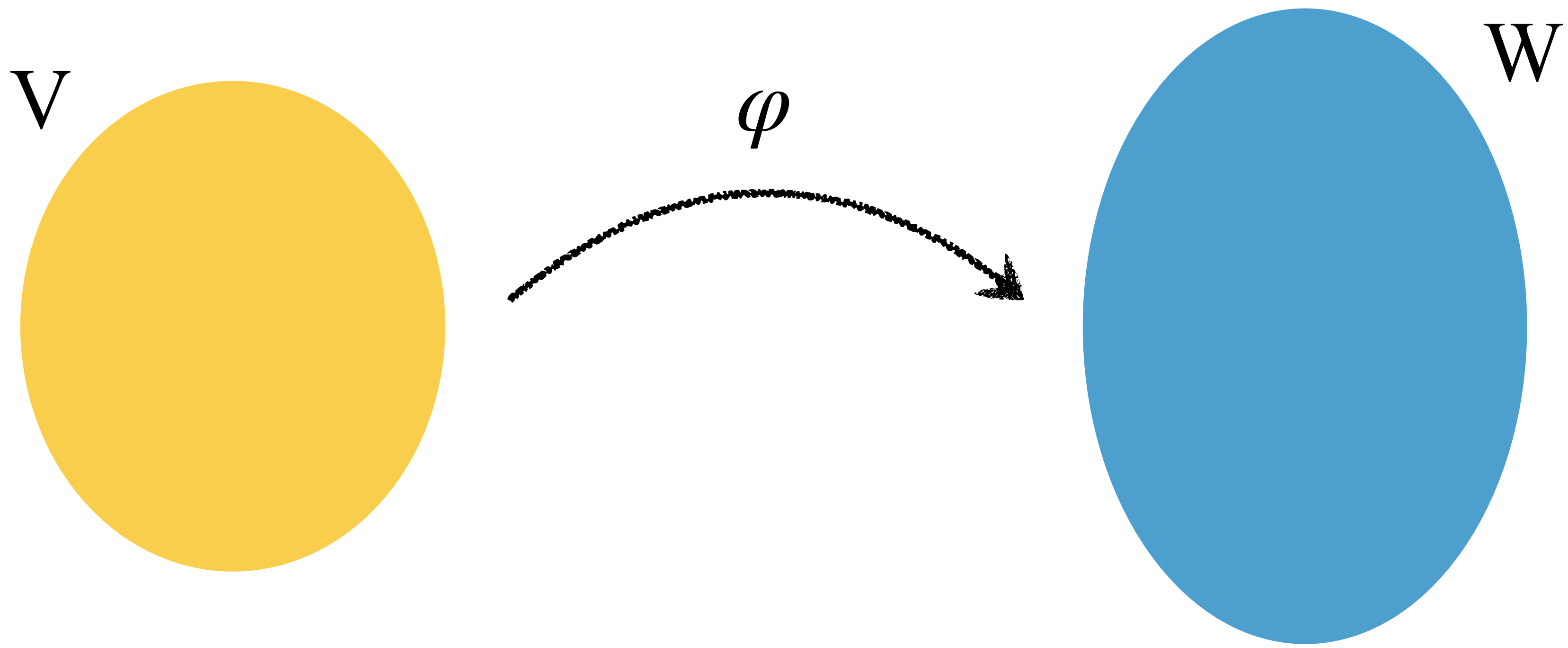
$$= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 6 & -11 & -5 \\ 12 & -13 & -10 \\ -6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица φ



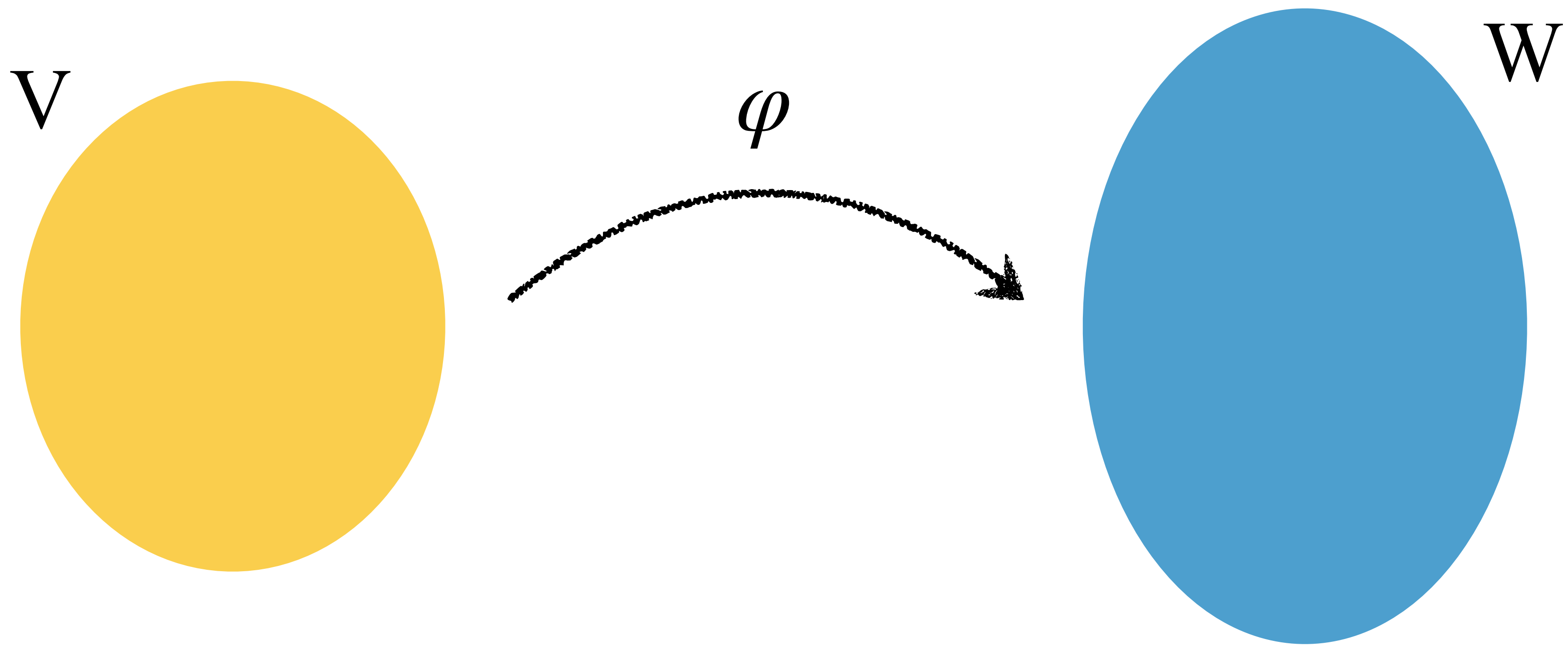
$$[\varphi]_{e,f} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Смена базиса



$e_1, \dots, e_n \xrightarrow{T} e'_1, \dots, e'_n$ $\qquad$ $f_1, \dots, f_m \xrightarrow{S} f'_1, \dots, f'_m$

Смена базиса



$$e_1, \ldots, e_n \xrightarrow{T} e'_1, \ldots, e'_n \qquad\qquad f_1, \ldots, f_m \xrightarrow{S} f'_1, \ldots, f'_m$$

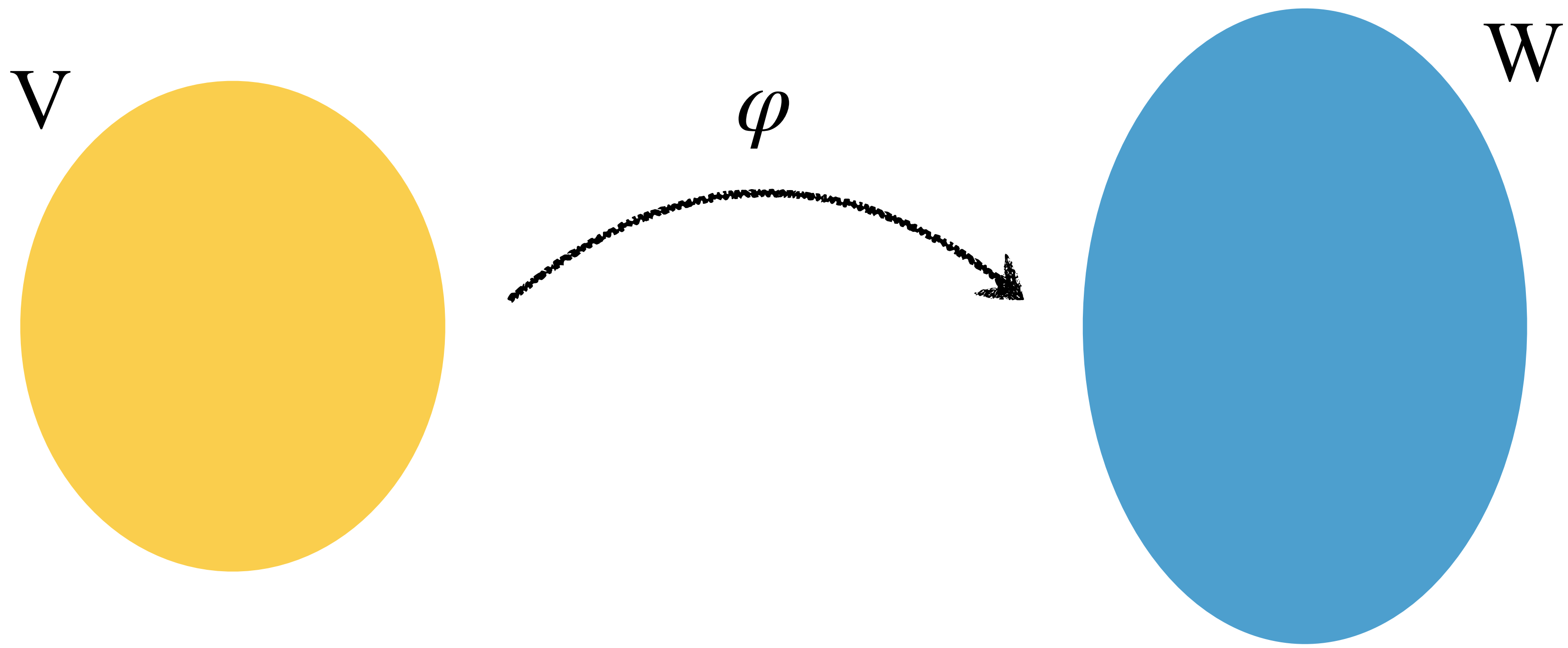
$$x = Tx' \qquad\qquad y = Sy'$$

$$[\varphi]_{e,f} x = y$$

$$[\varphi]_{e,f} Tx' = Sy'$$

$$S^{-1}[\varphi]_{e,f} Tx' = y'$$

Смена базиса



$$e_1, \ldots, e_n \xrightarrow{T} e'_1, \ldots, e'_n \qquad\qquad f_1, \ldots, f_m \xrightarrow{S} f'_1, \ldots, f'_m$$

$$x = Tx' \qquad\qquad y = Sy'$$

$$[\varphi]_{e,f} x = y$$

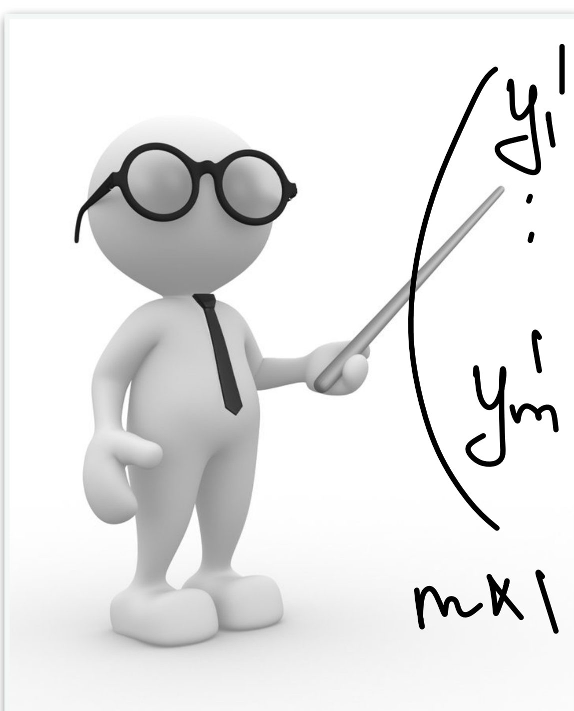
$$[\varphi]_{e,f} T x' = S y'$$

$$[\varphi]_{e',f'} \longrightarrow S^{-1}[\varphi]_{e,f}T x' = y'$$

Смена базиса

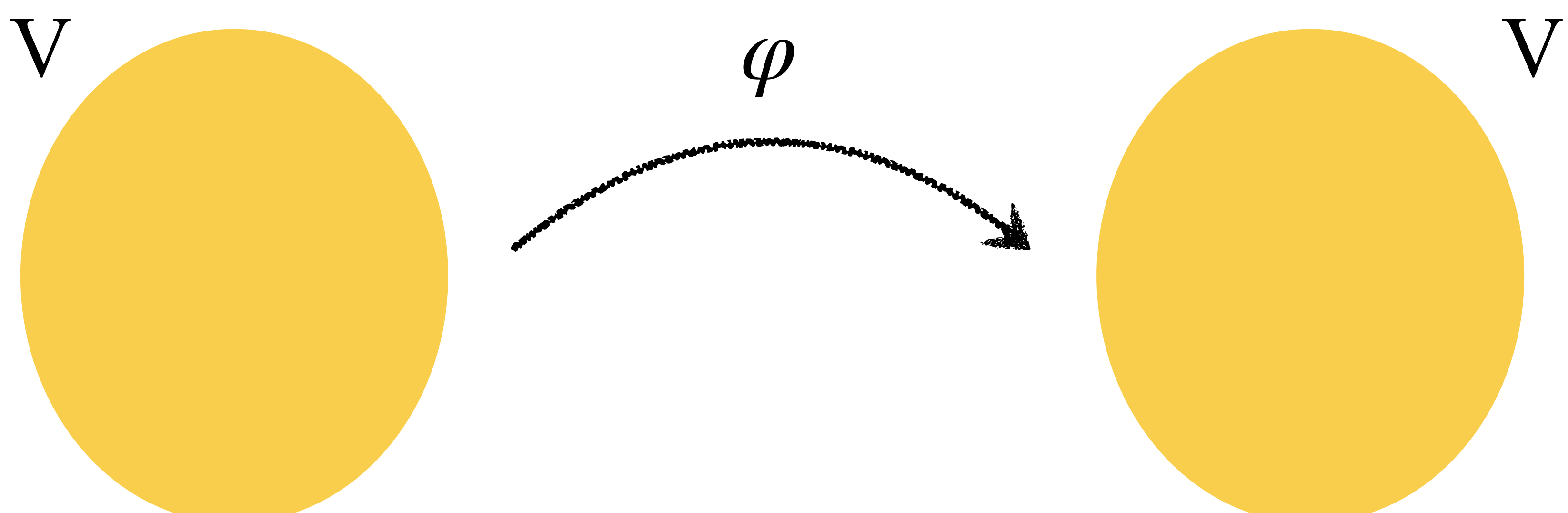
$$y' = [\varphi]_{e',f'} x'$$

$$[\varphi]_{e',f'} = \overbrace{S^{-1}[\varphi]_{e,f}T}$$



$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}}_{m\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}}_{m\times m} \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}}_{n\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1}$$

Смена базиса



$$e_1, \dots, e_n \xrightarrow{T} e_1', \dots, e_n'$$

$$x = Tx'$$

$$e_1, \dots, e_n \xrightarrow{T} e_1', \dots, e_n'$$

$$x = Tx'$$

$$[\varphi]_{e'} = T^{-1}[\varphi]_e T$$

Задача 3

1453. Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

Задача 3

1453. Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

$[\varphi]_f = ?$

План: 1) T

2) T^{-1}

3) $[\varphi]_f = T^{-1}[\varphi]_e T$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T$$

Задача 3

1453. Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$[\varphi]_f = ?$$

Найти его матрицу в базисе

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi]_f = T^{-1}[\varphi]_e T = ?$$

Задача 3

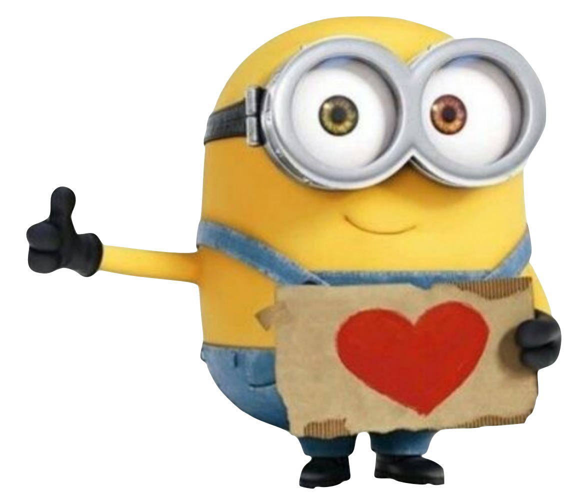
$$[\varphi]_f = T^{-1}[\varphi]_e T = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 3

$$[\varphi]_f = T^{-1}[\varphi]_e T = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Задание 5 (сдать до до 8 марта)

Вариант 1

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,3,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,-1,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,0]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\},$$
$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [4,4,-1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [-2,5,6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-3,2,-2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,-1,0]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -6 & 8 & 3 \\ 6 & -6 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.