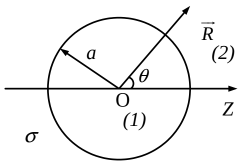
Урок 16

Закон сохранения заряда. Закон Ома

1. (Задача 3.24) В бесконечной среде с проводимостью σ, где шел ток с плотностью $\mathbf{j}_0$, всюду одинаковой, возникла сферическая полость радиуса R (внутри полости $\sigma = 0$). Найти результирующее распределение токов $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.

Решение



Распределение постоянных токов в проводящей среде описывается уравнением $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{R}) = 0$, где $\mathbf{j}(\mathbf{R})$– объемная плотность тока. Так как $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ и $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, то для распределения потенциала получается уравнение

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями на поверхности сферической полости:

$$\varphi_1(a)=\varphi_2(a);\ j_{1R}\Big|_{R=a} = j_{2R}\Big|_{R=a} \text{ или } \sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\Big|_{R=a} = \sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\Big|_{R=a}. \tag{2}$$

Уравнение (1) и граничные условия (2) аналогичны таковым для электрической задачи: диэлектрический шар с проницаемостью ε_1 погружен в неограниченный диэлектрик с проницаемостью ε_2, если ε_1 заменить на σ_1, а ε_2 на σ_2. Поэтому, использовав решение задачи 2.8а и положив $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma$, получим для распределения потенциала и напряженности электрического поля следующие выражения:

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{3}{2}E_0 z & \text{при } R \leqslant a, \\ -E_0 z - \dfrac{(\mathbf{E}_0\mathbf{R})a^3}{2R^3} & \text{при } R \geqslant a, \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{3}{2}\mathbf{E}_0 & \text{при } R < a, \\ \mathbf{E}_0 + \dfrac{a^3\,\mathbf{E}_0}{2R^3} - \dfrac{3a^3(\mathbf{E}_0\mathbf{R})\mathbf{R}}{2R^5} & \text{при } R > a, \end{cases}$$

где $\mathbf{E}_0 = \mathbf{j}_0/\sigma$ – напряженность электрическога поля вдали от полости. Поскольку $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, то распределение тока

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \mathbf{j}_0\left(1 + \dfrac{a^3}{2R^3}\right) - \dfrac{3a^3\,(\mathbf{j}_0\mathbf{R})\mathbf{R}}{2R^5} & \text{при } R > a, \\ 0 & \text{при } R < a. \end{cases}$$

2. (Задача 3.25) В закипевшем жидком металлическом теплоносителе образовались сферические пузырьки почти непроводящего пара в количестве n штук в единице объема. Радиусы их практически одинаковы и равны a. Проводимость жидкого металла до образования пузырьков была σ_0. Найти усредненную проводимость σ закипевшего теплоносителя, пренебрегая влиянием пузырьков друг на друга ($na^3 \ll 1$).

Решение Если в среде образовались мелкие пузырьки, то можно рассматривать поле, усредненное по объемам, большим по сравнению с масштабами неоднородностей. По отношению к такому среднему полю смесь жидкого теплоносителя и пузырьков непроводящего пара является однородной и может характеризоваться некоторой средней проводимостью. Если $\overline{\mathbf{j}}$ и $\overline{\mathbf{E}}$ – усредненные по объему плотность тока и напряженность электрического поля, то

$$\overline{\mathbf{j}} = \sigma\overline{\mathbf{E}}\,, \tag{1}$$

где σ и есть некоторая усредненная эффективная проводимость закипевшего теплоносителя. Вычислим среднее значение от $\mathbf{j}-\sigma_0\mathbf{E}$, по большому объему V. С одной стороны,

$$\frac{1}{V}\int\limits_V (\mathbf{j}-\sigma_0\mathbf{E})\,dv = \overline{\mathbf{j}} - \sigma_0\overline{\mathbf{E}}\,. \tag{2}$$

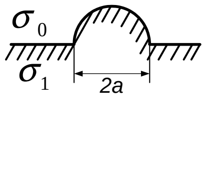
С другой стороны, подынтегральное выражение отлично от нуля только внутри объемов пузырьков и с учетом того, что $\mathbf{j}=0$ внутри каждого пузырька, получаем

$$\frac{1}{V}\int\limits_V (\mathbf{j}-\sigma_0\mathbf{E})\,dv = -2\pi n a^3\sigma_0\overline{\mathbf{E}}\,. \tag{3}$$

Здесь использовано, что внутри сфер поле равно (см. 3.24) $3\overline{\mathbf{E}}/2$, т. е. что пузырьки находятся во внешнем поле, равном среднему. Приравнивая правые части формул (2) и (3) с учетом уравнения (1), окончательно получаем

$$\sigma = \sigma_0(1-2\pi n a^3) \qquad \text{при} \qquad na^3 \ll 1\,.$$

3. (Задача 3.27) Пространство между двумя плоскими электродами заполнено проводящей средой проводимости σ_0. Нижний электрод очень толстый, проводимость его металла равна $\sigma_1 \to \infty$. На этом электроде имеется очень небольшой полусферический выступ радиуса a. Из верхнего электрода в нижний идет ток, имеющий около этого электрода практически постоянную плотность тока $\mathbf{j}_0$. Найти величину тока J, идущего через выступ.



Решение Поскольку ток постоянный, то основное уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0.$$

Для постоянной проводимости это уравнение, используя дифференциальный закон Ома можно переписать в виде

$$\sigma \operatorname{div}\mathbf{E} = 0.$$

Поскольку задача стационарна, то электрическое поле можно определить как градиент потенциала $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\psi$. Тогда основное уравнение для тока можно переписать в виде

$$\triangle\psi = 0.$$

Пусть система координат определена так, что ось z направлена от центра выступа к бесконечно удаленному (верхнему) электроду. Тогда, при $z \to \infty$ ток имеет вид

$$\mathbf{j} = -j_0\mathbf{e}_z,$$

и, следовательно, потенциал при $z \to \infty$ стремится к выражению

$$\psi(z \to \infty) = \frac{j_0}{\sigma_0}z, \ \text{ для } z > 0.$$

На нижнем электроде потенциал равен нулю как при $z = 0$, так и на самом выступе. Будем искать решение уравнения Лапласа для потенциала в виде, похожем на решение для шара во внешнем однородном поле

$$\psi = \frac{j_0}{\sigma_0}r\cos\theta + \frac{\mathbf{pr}}{r^3}.$$

Граничное условие на бесконечности ($z \to \infty$) удовлетворяется, условие на нижней плоскости – тоже. Для того, чтобы удовлетворить всем условиям, положим $\psi(r = a) = 0$, тогда

$$p = -\frac{j_0}{\sigma_0}a^3, \ \ \psi = \frac{j_0}{\sigma_0}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

Полный ток, который втекает в нижний электрод через выступ, запишется в виде

$$J = -\int \mathbf{j} \quad \mathrm{d}\mathbf{S} = \sigma_0\int\frac{\partial\psi}{\partial r}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

где интеграл берется по верхней половине полусферы. Откуда получаем

$$J = -3\pi a^2 j_0.$$

Отрицательный знак связан с тем, что ток втекает в полусферу. Если не считать проводимость нижнего электрода бесконечной (что соответствует потенциалу $\psi = 0$, то задача становится математически подобной задаче о диэлектрическом шаре в диэлектрической среде и однородном электрическом поле. (Это предлагается в качестве самостоятельного упражнения). Тогда решение имеет вид

$$J = -\frac{3\pi a^2 \sigma_1}{\sigma_1 + 2\sigma_0} j_0 \simeq -3\pi a^2 j_0, \text{ при } \sigma_0/\sigma_1 \to 0.$$

4. Сплошной бесконечно длинный цилиндр радиуса a с проводимостью σ_1 находится в однородном проводнике с проводимостью σ_2. Внутри цилиндра действует стороннее однородное поле $\mathbf{E}_{\text{стр}}$, направленное перпендикулярно оси цилиндра. Найти распределение тока во всем пространстве.

Решение Поскольку ни во внутреннем цилиндре ни в окружающем пространстве нет источников тока, то для обеих областей справедливы уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{j_1} = 0, \ \ \operatorname{div} \mathbf{j_2} = 0.$$

Дифференциальный закон Ома в обоих областях запишем в виде

$$\mathbf{j_1} = \sigma_1 \left(\mathbf{E_1} + \mathbf{E}_{\text{стр}} \right), \ \ \mathbf{j_2} = \sigma_2 \mathbf{E_2}, \ \ \mathbf{E}_{\text{стр}} = E_0 \mathbf{e_x}.$$

Поля $\mathbf{E_1}$ и $\mathbf{E_2}$ – потенциальны и, поэтому, введя потенциалы этих полей $\mathbf{E_1} = -\nabla\psi_1$, $\mathbf{E_2} = -\nabla\psi_2$, получим уравнения для потенциалов

$$\triangle\psi_1 = 0, \ \ \triangle\psi_2 = 0.$$

Граничные условия имеют обычный вид. Внутри цилиндра потенциал ограничен $\psi_1 < \infty$. На бесконечности потенциал убывает, т. е. $\psi_2 \to 0$ при $r \to \infty$. Поскольку задача стационарная и заряды нигде не накапливаются, то на границе раздела Γ $\mathbf{j_{1n}}_{|\Gamma} = \mathbf{j_{2n}}_{|\Gamma}$. Откуда получаем граничное условие для потенциалов

$$\sigma_1 \left(\mathbf{E_{1n}} + \mathbf{E}_{\text{стр}\mathbf{n}} \right)_{|\Gamma} = \sigma_2 \mathbf{E_{2n}}_{|\Gamma}.$$

Предположим, что потенциал внутри и снаружи имеет вид $\psi_{1,2} = R_{1,2}(r)\cos\theta$, где θ – угол между осью x и радиус-вектором. Тогда, решая радиальную часть уравнения Лапласа и учитывая ограниченность решения для потенциала внутри цилиндра и стремление снаружи к нулю, получим решение в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -E_1 r \cos\theta, \\ \psi_2 &= \frac{A}{r}\cos\theta. \end{aligned}$$

Используя граничное условие $\psi_1 = \psi_2$ на поверхности цилиндра, получим

$$-E_1 a = \frac{A}{a}.$$

Используя это соотношение и подставляя решение во второе граничное условие на поверхности цилиндра, получим

$$-\sigma_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \sigma_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \sigma_1 E_0 \cos\theta.$$

Сокращая на $\cos\theta$ и решая полученное уравнение, получим

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & \frac{\sigma_1 a^2}{\sigma_1+\sigma_2} E_{\text{стр}}, \\ E_1 & = & -\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2} E_{\text{стр}}. \end{array} \right.$$

Тогда распределение плотности тока во всем пространстве можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{j_1} & = & \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} \mathbf{E}_{\text{стр}}, \\ \mathbf{j_2} & = & -\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} a^2 \nabla \frac{\mathbf{E}_{\text{стр}} \mathbf{r}}{r^2}. \end{array} \right.$$

Вычисляя градиент, получим

$$\mathbf{j_2} = -\frac{\sigma_1 \sigma_2 a^2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left\{ \frac{\mathbf{E}_{\text{стр}}}{r^2} - 2 \frac{(\mathbf{E}_{\text{стр}} \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r} \right\}.$$