# *Лекция 3*

**Методы расчета электрических цепей**:

Метод контурных токов, графы.

Метод узловых потенциалов.

Матричный метод расчета электрических цепей.

***Свойства линейных электрических цепей:***

*Теорема наложения и теорема компенсации,*

*Теорема об эквивалентном источнике,*

*Обратимость (Взаимность) пассивных цепей,*

# Методы расчета электрических цепей

- ***Система уравнений для любой электрической цепи позволяющий определить все токи и напряжения получается в соответствии с 1 и 2 законами Кирхгоффа.***
- Если электрическая цепь состоит из ***Р*** ребер и ***У*** узлов, то система будет содержать Р уравнений, из которых ***У-1*** уравнений записывается по 1 закону Кирхгоффа, а остальные **Р-У+1** по второму закону Кирхгоффа.
- Однако, не все уравнения в этой системе независимы! Уравнения для узлов дают нам зависимость для **У-1** токов и, таким образом независимыми остаются **К=Р-У+1** уравнений для **К** независимых контуров.

# Методы расчета электрических цепей

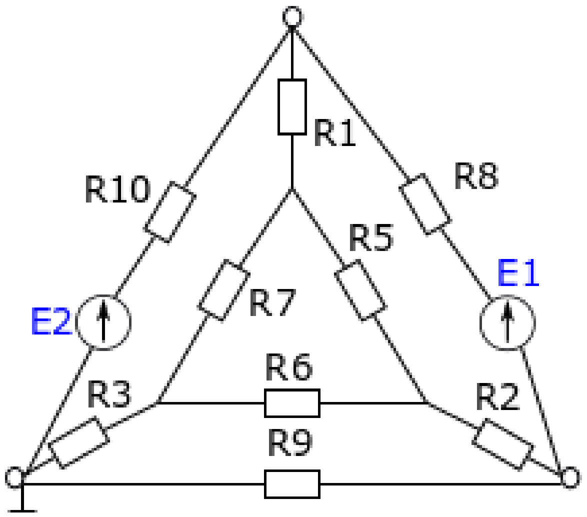
- ***Метод,*** *который основан на анализе этой системы из К уравнений, и который оперирует К независимыми «виртуальными» токами называется* ***Методом контурных токов.***
- *При этом реальный ток в каждом элементе складывается из суммы токов контуров в которые этот элемент входит.*
- ***Главный вопрос: как определить эти самые контура****? Для простых схем можно просто смотря на схему. Но если схема сложная, то это может оказаться нетривиальной задачей. Есть удобный метод, который называется* ***метод максимального дерева****, основанный на теории планарных графов.*

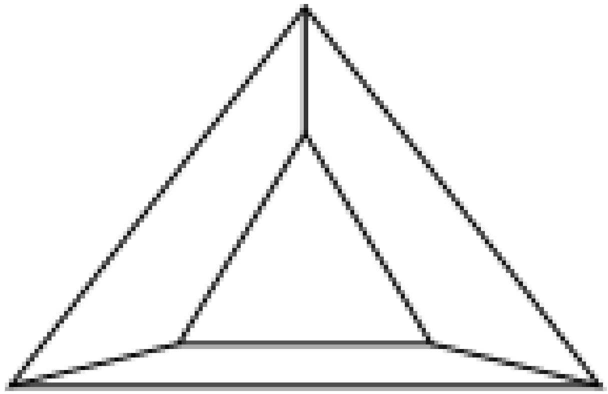
# Метод максимального дерева

- ***Преобразуем нашу схему в планарный граф – располагаем ветви на плоскости без взаимных пересечений.***
- ***Начинаем удалять ветви так, чтобы не образовывалось изолированных (не принадлежащих графу) узлов.***
- ***Получившаяся при удалении максимально возможного числа ветвей картинка называется Максимальным деревом.***
- ***Добавление любой исключенной ветви дает нам независимый контур.***

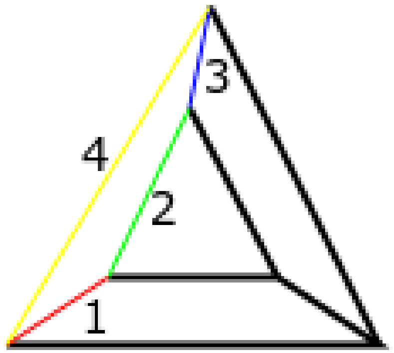
# Метод максимального дерева

- ***Пример: есть схема. Найдем максимальное дерево***

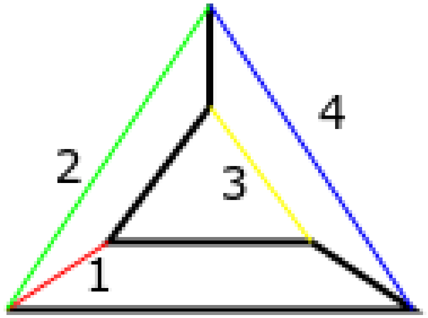


Планарный граф




Полное дерево №1



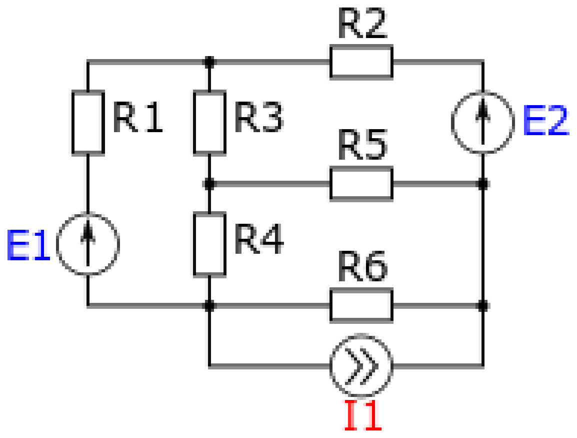

Полное дерево №2

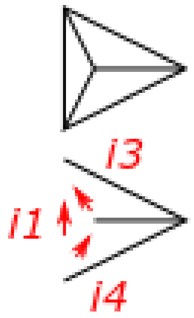
# Метод контурных токов

- *Мы получили **К** независимых контуров. Для каждого контура по 2 закону Кирхгоффа запишем уравнение используя следующие правила:*
- ***Все токи в ветвях выражаем через контурные токи. В каждом контуре необходимо выбрать направление обхода (например, по часовой стрелке).***
- ***Для каждого контура записываем уравнение по второму закону Кирхгофа:***
- ***В левой части каждого уравнения записываем сумму токов в звеньях, входящих в контур, умноженных на сопротивление соответствующего звена. Суммирование происходит с учётом знака: если ток в звене совпадает с направлением обхода контура, слагаемое записывается со знаком «плюс», в противном случае — со знаком «минус».***
- ***В правой части каждого уравнения записываем сумму ЭДС источников, а также сумму произведений токов источников на сопротивление соответствующего звена. Суммирование также происходит с учётом знака, в зависимости от совпадения или несовпадения направления источника с направлением контурного тока.***

# Метод контурных токов. Пример

- *Рассмотрим схему. Построим максимальное дерево и уравнения:*




$$\begin{cases} i1R1 + (i1 + i3)R2 + (i1 + i4)R6 = E1 - E2 - I1R6 \\ i3R3 + (i3 + i1)R2 + (i3 - i4)R5 = -E2 \\ i4R4 + (i4 - i3)R5 + (i4 + i1)R6 = -I1R6 \end{cases}$$

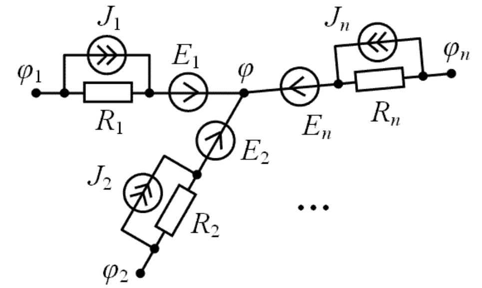
$$\begin{cases} i1(R1 + R2 + R6) + i3R2 + i4R6 = E1 - E2 - I1R6 \\ i1R2 + i3(R2 + R3 + R5) - i4R5 = -E2 \\ i1R6 - i3R5 + i4(R4 + R5 + R6) = -I1R6 \end{cases}$$

- **Это же можно записать и в матричном виде:**

$$\begin{bmatrix} R1 + R2 + R6 & R2 & R6 \\ R2 & R2 + R3 + R5 & -R5 \\ R6 & -R5 & R4 + R5 + R6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i1 \\ i3 \\ i4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E1 - E2 - I1R6 \\ -E2 \\ -I1R6 \end{pmatrix}$$

# Метод узловых потенциалов

- *Есть другой подход основанный на нахождении напряжений на узлах схемы относительно одного базисного, напряжение на котором принимается за нуль. Эти напряжения называются узловыми напряжениями.*
- ***Рассмотрим узел и примыкающие к нему звенья:***
- ***Согласно 1 закону Кирхгоффа и закону Ома имеем***

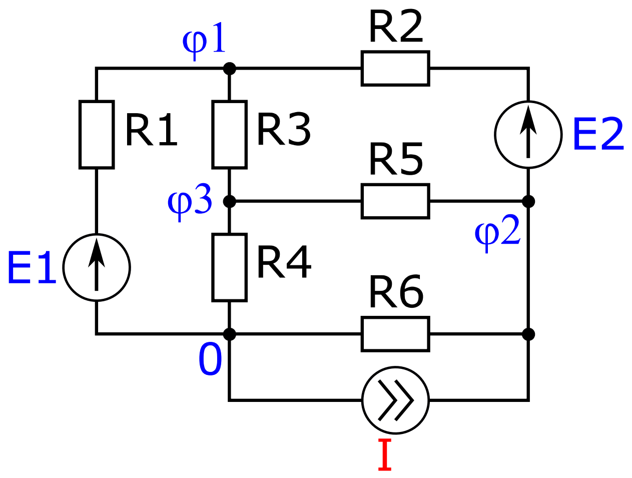



$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varphi_i-\varphi+E_i}{R_i}+J_i\right)=0 \Rightarrow \varphi\sum_{i=1}^{n}Y_i-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i Y_i=\sum_{i=1}^{n}(J_i+E_iY_i)$$

***Или*** $\sum_{i=1}^{n}(\varphi-\varphi_i)Y_i=\sum_{i=1}^{n}(J_i+E_iY_i)$ где $Y_i=\frac{1}{R_i}$

# Метод узловых потенциалов. Пример

- *Рассмотрим схему. Построим систему:*




- $$\begin{cases} \dfrac{\varphi 1}{R1} + \dfrac{\varphi 1 - \varphi 2}{R2} + \dfrac{\varphi 1 - \varphi 3}{R3} = \dfrac{E1}{R1} + \dfrac{E2}{R2} \\ \dfrac{\varphi 2 - \varphi 1}{R2} + \dfrac{\varphi 2 - \varphi 3}{R5} + \dfrac{\varphi 2}{R6} = I - \dfrac{E2}{R2} \\ \dfrac{\varphi 3}{R4} + \dfrac{\varphi 3 - \varphi 1}{R3} + \dfrac{\varphi 3 - \varphi 2}{R5} = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \varphi 1(Y1 + Y2 + Y3) - \varphi 2Y2 - \varphi 3Y3 = E1Y1 + E2Y2 \\ -\varphi 1Y2 + \varphi 2(Y2 + Y5 + Y6) - \varphi 3Y5 = I - E2Y2 \\ -\varphi 1Y3 - \varphi 2Y5 + \varphi 3(Y3 + Y4 + Y5) = 0 \end{cases}$$

- **Это же можно записать и в матричном виде:**

$$\begin{bmatrix} Y1 + Y2 + Y3 & -Y2 & -Y3 \\ -Y2 & Y2 + Y5 + Y6 & -Y5 \\ -Y3 & -Y5 & R4 + R5 + R6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi 1 \\ \varphi 2 \\ \varphi 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E1Y1 + E2Y2 \\ I - E2Y2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Решение систем линейных уравнений

- ***Как видно из 2 примеров, нам требуется решить систему линейных неоднородных уравнений . Есть 2 распространенных способа:***

1. ***Методом Крамера - через определители матрицы***
2. ***Метод Гаусса***

# Формулы Крамера

- ***Пусть у нас есть матричная запись СЛАУ***

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a11} & \boldsymbol{a12} & \boldsymbol{a13} \\ \boldsymbol{a21} & \boldsymbol{a22} & \boldsymbol{a23} \\ \boldsymbol{a31} & \boldsymbol{a32} & \boldsymbol{a33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i1} \\ \boldsymbol{i3} \\ \boldsymbol{i4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V1} \\ \boldsymbol{V2} \\ \boldsymbol{V3} \end{pmatrix}$$

***Тогда решение для i1, i2, i3 может быть найдено как:***

$$\boldsymbol{i}[\boldsymbol{n}] = \frac{\Delta[\boldsymbol{n}]}{\Delta}$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a11} & \boldsymbol{a12} & \boldsymbol{a13} \\ \boldsymbol{a21} & \boldsymbol{a22} & \boldsymbol{a23} \\ \boldsymbol{a31} & \boldsymbol{a32} & \boldsymbol{a33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta[\boldsymbol{n}] - \text{частный определитель в котором } \boldsymbol{n} - \text{тый}$$

$$\text{столбец заменен на столбец } \begin{matrix} \boldsymbol{V1} \\ \boldsymbol{V2} \\ \boldsymbol{V3} \end{matrix}$$

# Метод Гаусса

- ***Пусть у нас есть матричная запись СЛАУ***

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i1 \\ i3 \\ i4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \\ V3 \end{pmatrix}$$

***Тогда решение для i1, i2, i3 может быть найдено после серии подстановок, таких, чтобы матрица приняла треугольный вид***

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ 0 & \hat{a}22 & \hat{a}23 \\ 0 & 0 & \hat{a}33 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i1 \\ i3 \\ i4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V1 \\ \hat{V}2 \\ \hat{V}3 \end{pmatrix}$$***, где:***

$$\hat{a}2i = a2i - a1i\frac{a21}{a11}, \hat{V}2 = V2 - V1\frac{a21}{a11},$$

$$\hat{a}33 = \left(a33 - a13\frac{a31}{a11}\right) - \hat{a}23\frac{a32 - a12\frac{a31}{a11}}{\hat{a}22}, \hat{V}3 = V3 - V1\frac{a31}{a11} - \hat{V}2\frac{a32 - a12\frac{a31}{a11}}{\hat{a}22}$$

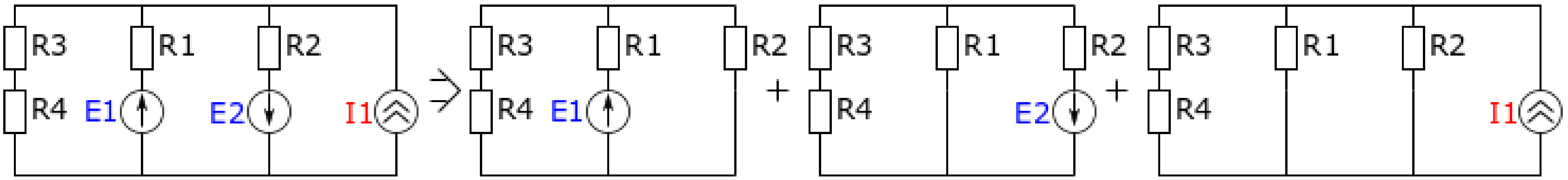
# Теорема об эквивалентном источнике

- ***Ток произвольной ветви линейной электрической цепи не изменится, если автономный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменять эквивалентным линеаризованным источником, который может быть представлен последовательной или параллельной схемой замещения.***
- ***ЭДС источника напряжения в последовательной схеме замещения равна напряжению холостого хода, а эквивалентное сопротивление равно его входному сопротивлению.***
- ***Ток идеального источника тока в параллельной схеме замещения равен току короткого замыкания автономного двухполюсника у а внутренняя проводимость — его входной проводимости***

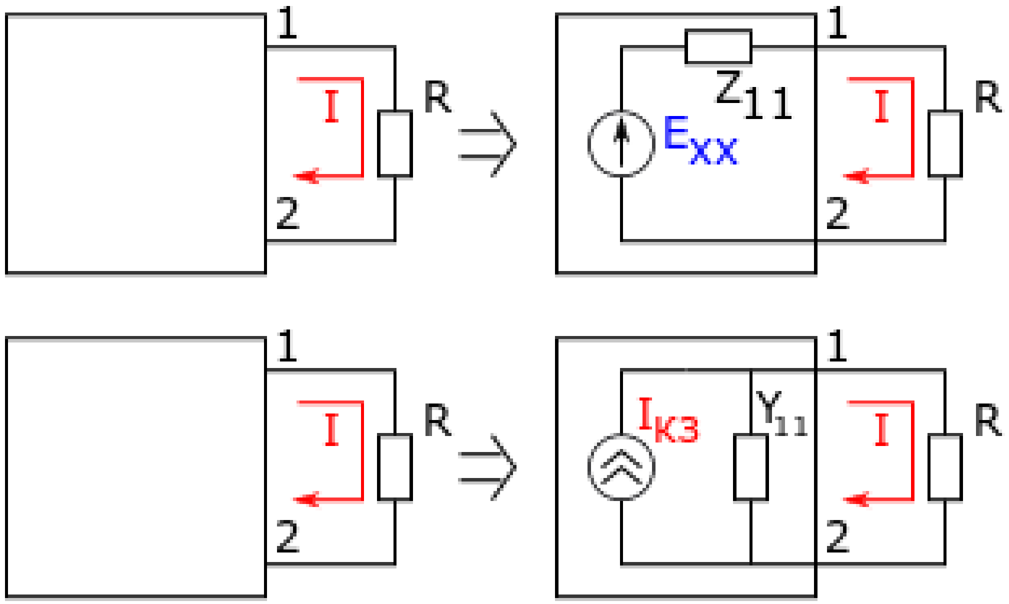
# Теорема наложения (суперпозиции)

- ***При наличии в схеме нескольких источников ЭДС ток в k – й ветви линейной электрической цепи равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждым из источников в отдельности.***

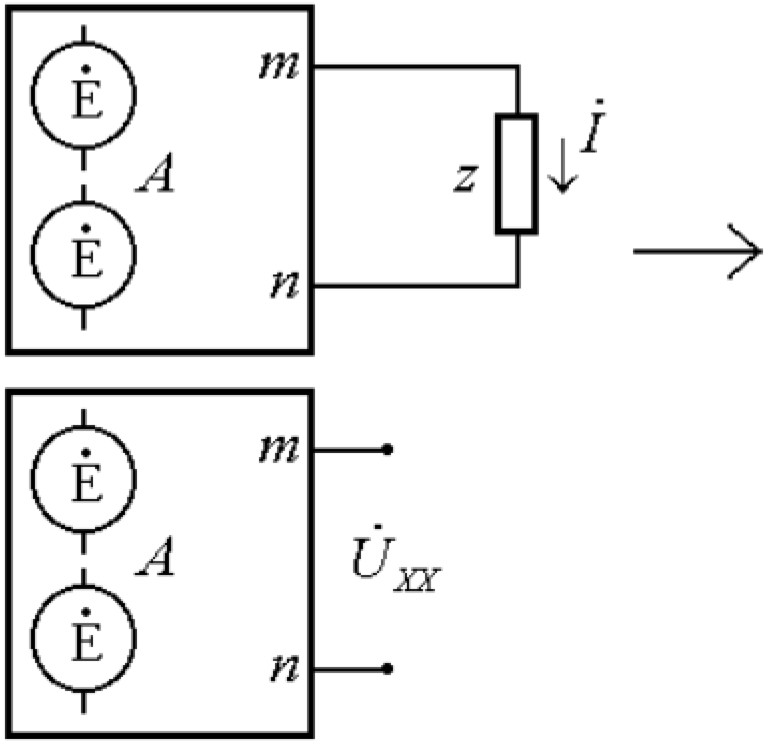
$$I_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_z},\ I_k = \sum_{i=0}^{n} E_i \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_z}$$

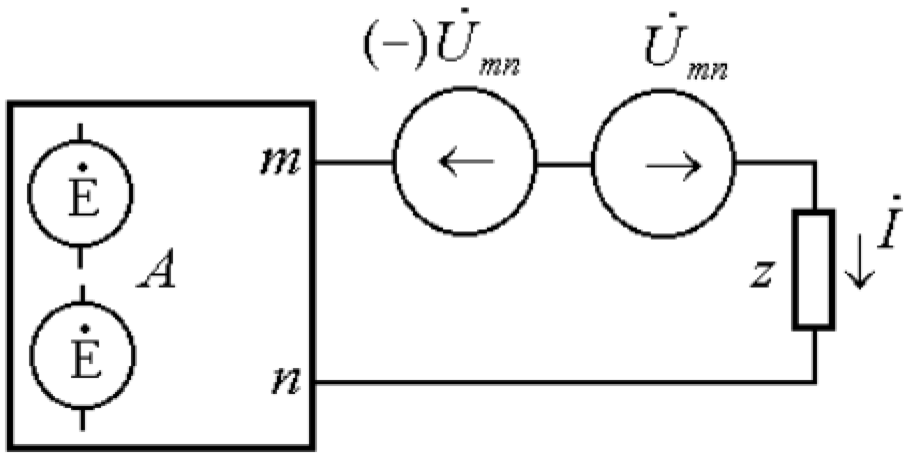


# Теорема об эквивалентном источнике



# Теорема об эквивалентном источнике



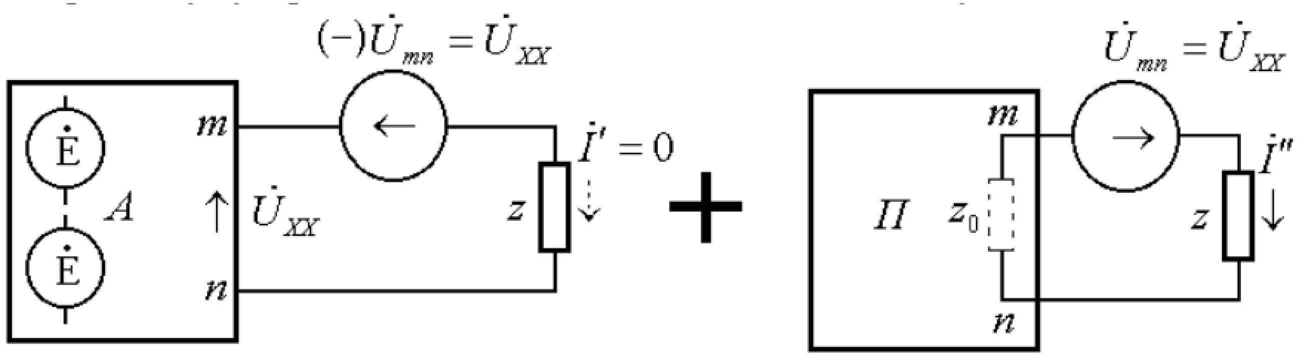




$-$ *для любых* $\dot{U}_{mn}$

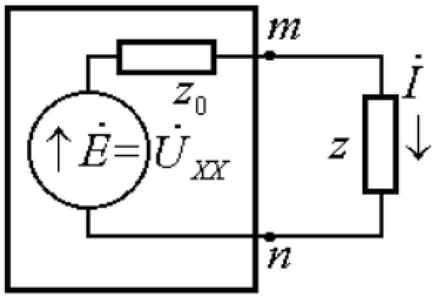
*в т.ч. для* $\dot{U}_{mn} = \dot{U}_{XX} \Rightarrow$

# Теорема об эквивалентном источнике

- Применим теорему о наложении



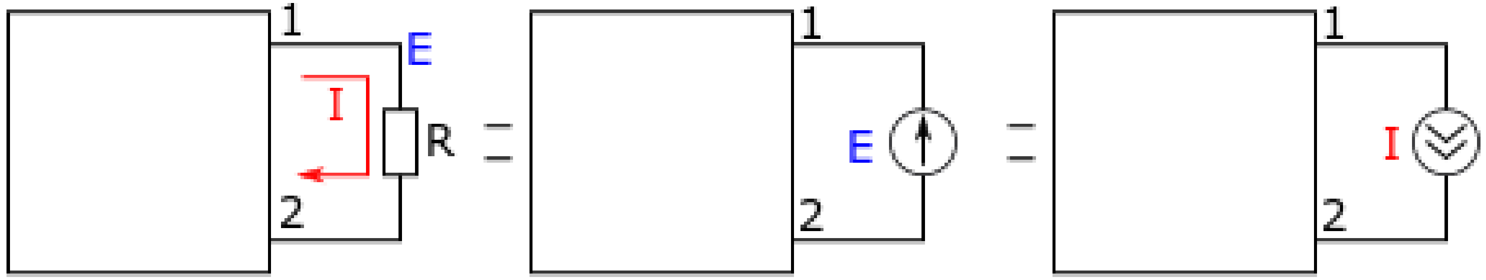

- но ток $\dot{I}' = 0 \quad \Rightarrow \dot{I}'' = \dot{I}$ - что и требовалось




т.о. $\dot{I} = \dfrac{\dot{U}_{XX}}{z_0 + z}$

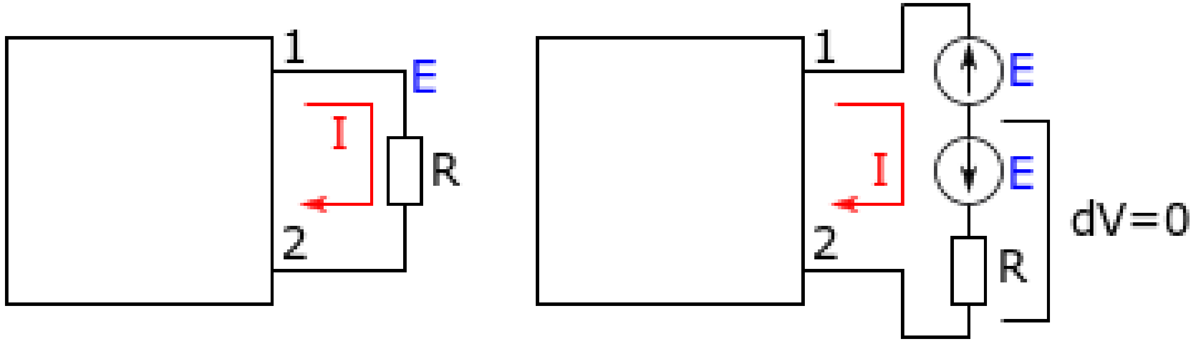
# Теорема компенсации

- ***Токи и напряжения ветвей произвольной электрической цепи не изменятся, если любую ветвь этой цепи заменить идеальным источником ЭДС, напряжение которого равно напряжению данной ветви и имеет одинаковое с ним направление, либо идеальным источником тока, ток которого равен току рассматриваемой ветви и совпадает с ним по направлению.***



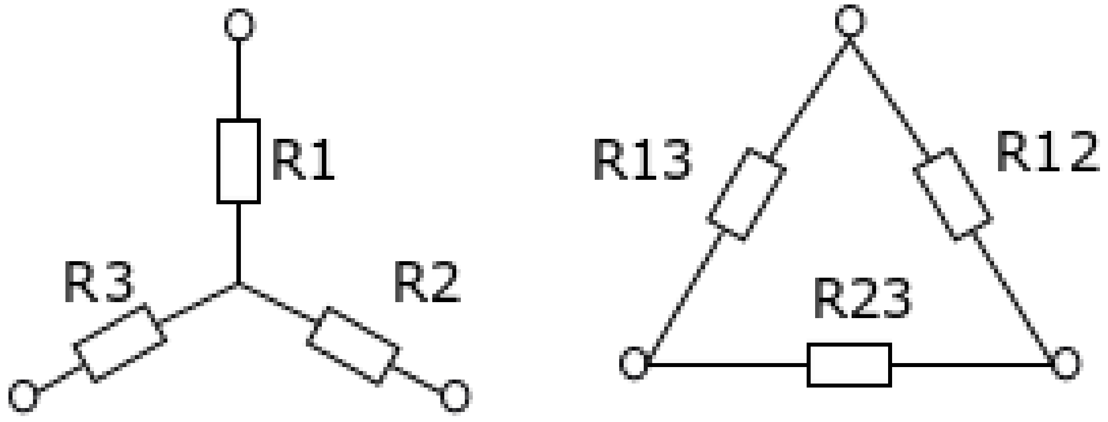
# Теорема компенсации

$$E = IR \Rightarrow E = E - E + IR = E \ - (E - IR)$$



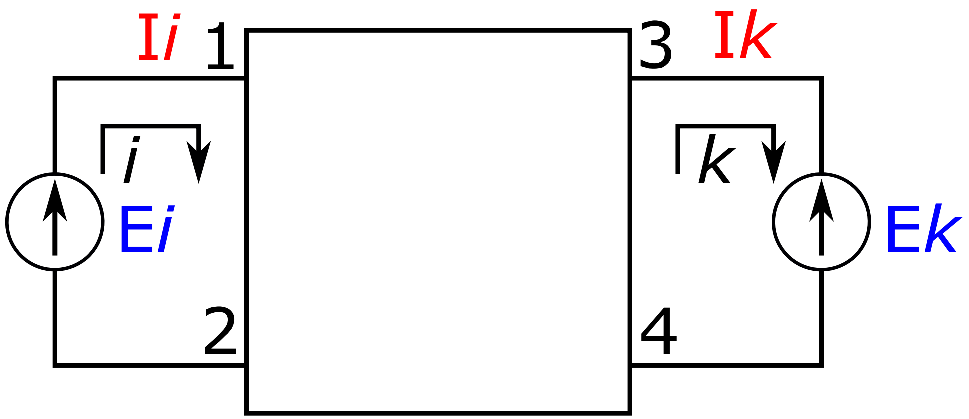
# Преобразование звезда - треугольник

- $R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$
- $R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$
- $R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$



# Четырехполюсники

- ***Если нас интересует не вся схема, а только одна ветвь, которая рассматривается как входная, и одна ветвь – рассматривающаяся как выходная, то мы можем заменить всю остальную схему черным ящиком и перейти к упрощенному представлению:***



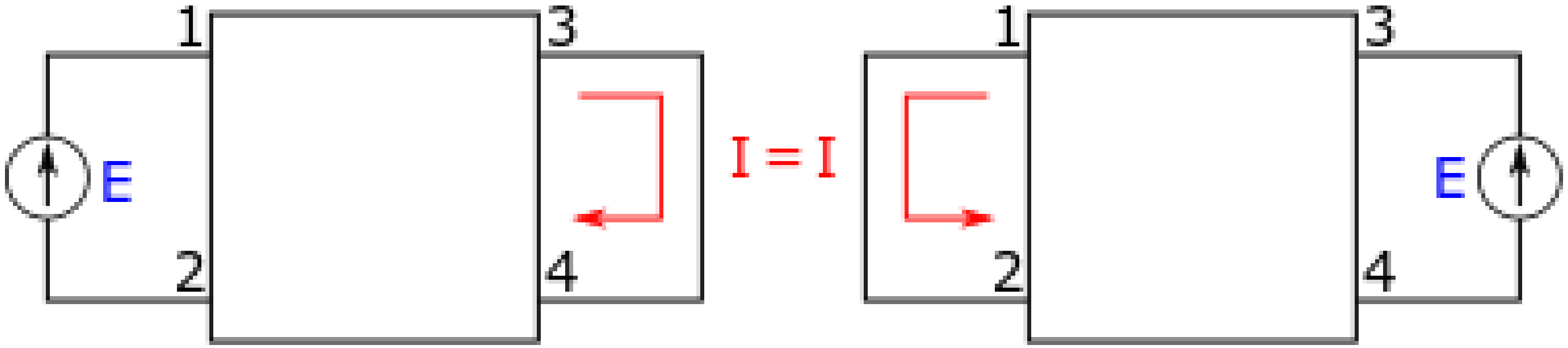
# Четырехполюсники

- ***При этом если внутри нет источников ЭДС то черный ящик называется пассивным четырехполюсником, в противном случае говорят об активном четырехполюснике.***
- ***В любом случае такую систему характеризует система из двух уравнений, которая связывает токи и напряжения I и k ветви.***

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E_k} \\ \boldsymbol{I_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{k11} & \boldsymbol{k12} \\ \boldsymbol{k21} & \boldsymbol{k22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E_i} \\ \boldsymbol{I_i} \end{pmatrix}$$

# Входные и передаточные сопротивления и проводимости. Обратимость (Взаимность) пассивных электрических цепей

- ***Если ЭДС, находящаяся в каком-либо контуре пассивной цепи вызывает в другом контуре данной цепи ток, то эта же ЭДС, перемещенная во второй контур, вызовет в первом контуре ток той же величины.***



# Входные и передаточные сопротивления и проводимости. Обратимость (Взаимность) пассивных электрических цепей

***Определим понятие входной проводимости и взаимной (передаточной) проводимости:***

*Из метода контурных токов:* $I_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_z}$, $I_k = \sum_{i=0}^{n} E_i \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_z}$

*Величина* $Y_{ii} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_z}$ *имеющая размерность проводимости называется* ***входной проводимостью контура i.***

*Величина* $Y_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_z}$ *имеющая размерность проводимости называется* ***передаточной проводимостью контуров i и k.***

*Если в схеме есть только одна ЭДС и она в контуре i, то:*

*входная проводимость – это отношение контурного тока в контуре i к ЭДС действующей в том же контуре*

*передаточная проводимость – это отношение контурного тока в контуре k к ЭДС действующей в контуре I*

***Входное (собственное) сопротивление контура i:*** $Z_{ii} = \frac{1}{Y_{ii}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{ii}}$

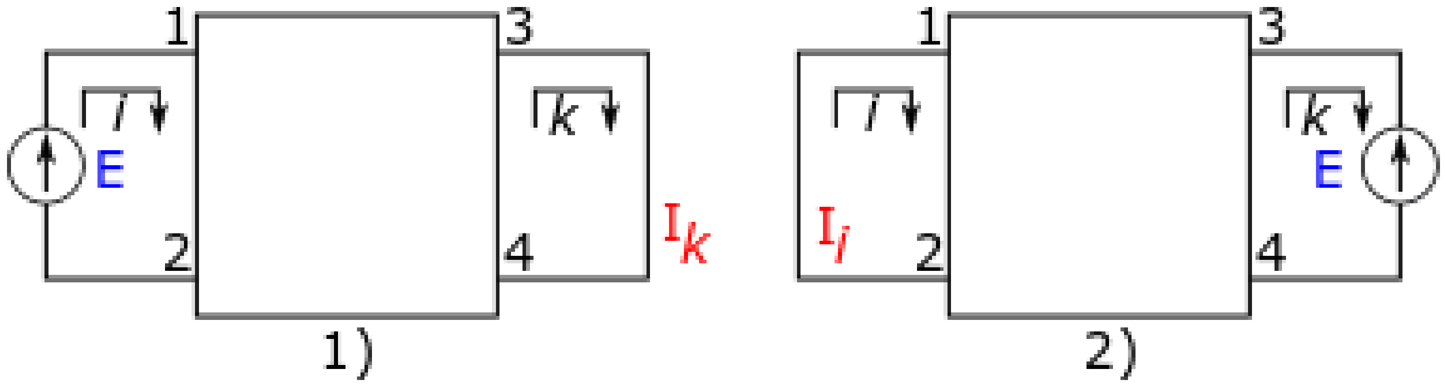
# Входные и передаточные сопротивления и проводимости. Обратимость (Взаимность) пассивных электрических цепей

***Запишем контурные токи нас интересующие:***

$$1)I_i = E\frac{\Delta_{ii}}{\Delta_z}, I_k = E\frac{\Delta_{ik}}{\Delta_z} \qquad 2)I_i = E\frac{\Delta_{ki}}{\Delta_z}, I_k = E\frac{\Delta_{kk}}{\Delta_z}$$

*Так как матрица* $\Delta_z$ *симметрична, то миноры* $\Delta_{ki}$ $\Delta_{ki}$ *равны*

*Отсюда имеем что* $I_k(1) = I_i(2)$, ч. т. д.



# Входные и передаточные сопротивления и проводимости. Обратимость (Взаимность) пассивных электрических цепей

*Аналогично, можно получить определение для источников тока:*

- ***Если источник тока, подключенный к паре узлов пассивной цепи вызывает на двух других узлах разность потенциалов E, то этот же источник тока, подключенный к этим узлам, вызовет на исходных зажимах разность потенциалов E.***