Семинар 17 [21.11.2022]

Ортогональные полиномы.

Задачи

Задача 1

Их формулы Родрига для полиномов Лежандра

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l, \quad P_l^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

получить интегральное представление Шлефи

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^l \, d\varphi.$$

Задача 2

Найти производящую функцию для полиномов Лежандра

$$F(r,x) = \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{+\infty} r^l P_l(x), & r < 1, \\ \sum\limits_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(x), & r > 1, \end{cases}$$

пользуясь интегральным представлением, полученным в предыдущей задаче.

Решения

Задача 1

Вычет в полюсе порядка $l+1$ вычисляется по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=x}\left[\frac{f(z)}{(z-x)^{l+1}}\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma(x)}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{l+1}}=\frac{1}{l!}\frac{d^l f}{dx^l}.$$

Тогда

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l=\frac{1}{2^l}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma(x)}\frac{\left(z^2-1\right)^l}{(z-x)^{l+1}}dz.$$

Сделаем замену $z=x+i\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}$, полагая, что контур $\gamma(x)$ представляет из себя окружность радиуса $\sqrt{1-x^2}$ с центром в точке x. Получаем

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{2xi\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}-\left(1-x^2\right)\left(e^{2i\varphi}+1\right)}{2i\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}}\right)^l d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^l d\varphi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^l d\varphi.$$

Задача 2

Подстановка интегрального представления дает

$$F(r,x)=\frac{1}{2\pi i}\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\oint\limits_{\gamma(x)}\left(\frac{r}{2}\frac{z^2-1}{z-x}\right)^l\frac{dz}{z-x}, & r<1,\\ \sum\limits_{l=0}^{+\infty}\oint\limits_{\gamma(x)}\left(\frac{1}{2r}\frac{z^2-1}{z-x}\right)^l\frac{dz}{r(z-x)}, & r>1.\end{cases}$$

Меняя местами суммирование и интегрирование и вычисляя сумму геометрической прогрессии, получаем

$$F(r,x)=-2\begin{cases}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma(x)}\frac{r^{-1}dz}{z^2-1-2r^{-1}(z-x)}, & r<1,\\ \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma(x)}\frac{dz}{z^2-1-2r(z-x)}, & r>1.\end{cases}$$

Сделаем замену $z=x+\sqrt{1-x^2}y$, полагая, что контур $\gamma(x)$ представляет из себя окружность радиуса $\sqrt{1-x^2}$ с центром в точке x. Тогда

$$F(r,x)=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\begin{cases}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|y|=1}\frac{r^{-1}dy}{y^2-2(1-x^2)^{-1/2}(r^{-1}-x)y-1}, & r<1,\\ \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|y|=1}\frac{dy}{y^2-2(1-x^2)^{-1/2}(r-x)y-1}, & r>1.\end{cases}$$

Таким образом, остается вычислить интеграл вида

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|y|=1}\frac{dy}{y^2-2\left(1-x^2\right)^{-1/2}(\rho-x)\,y-1},\quad \rho>1,\quad |x|<1.$$

Корни многочлена в знаменателе равны

$$y_{\pm} = \left(1-x^2\right)^{-1/2}(\rho - x) \pm \sqrt{(1-x^2)^{-1}(\rho-x)^2+1},$$

причем $|y_+||y_-| = 1$. Поскольку $|y_+| > 1$, то $|y_-| < 1$, значит интеграл равен вычету в точке y_-:

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)^{-1}(\rho-x)^2+1}}.$$

В итоге получаем

$$F(r,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}.$$