ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лектор — Екатерина Юрьевна Балакина

Программа курса лекций
(4-й семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экз.)

8. Вариационное исчисление

Примеры задач классического вариационного исчисления: о брахистохроне, о поверхности вращения наименьшей площади, о геодезических на сфере. Функционал и его вариация. Простейшая задача вариационного исчисления. Экстремали и экстремумы. Необходимое условие локального экстремума. Лемма Лагранжа. Уравнение Эйлера. Вариационные задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера. Решение задач о брахистохроне и о поверхности вращения наименьшей площади. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями. Вариационная задача с высшими производными. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными. Простейшая изопериметрическая задача. Достаточное условие локального экстремума.

9. Малые колебания и периодические решения

Малые колебания систем со многими степенями свободы; векторы нормальных колебаний. Ортогнальность векторов нормальных колебаний.

Периодические решения линейных систем и уравнений высокого порядка. Нахождение периодических решений с помощью рядов Фурье, резонансный и нерезонансный случаи, биение.

10. Зависимость решений от начальных данных и параметров

Класс гладкости решения, соответствующий гладкости правой части системы. Непрерывная зависимость решений системы от начальных данных и параметров. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам. Уравнения в вариациях и постановка задачи Коши для производных решения по начальным данным и по параметрам. Применение теории гладкой зависимости решений — метод малого параметра для отыскания периодических решений нелинейных уравнений. Разложение периодического решения в асимптотический ряд по малому параметру.

11. Введение в теорию устойчивости

Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, неустойчивость. Примеры. Сведение к исследованию на устойчивость нулевого решения. Общие теоремы об устойчивости линейных систем: эквивалентность устойчивости по Ляпунову ограниченности каждого решения, а асимптотической устойчивости — притяжению всех решений к нулевому решению. Устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами в терминах спектра и жордановой структуры матрицы коэффициентов. Идея метода функций Ляпунова. Производная в силу системы; примеры. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости в терминах функций Ляпунова. Теорема Четаева о неустойчивости. Квадратичная функция Ляпунова для системы $\dot{X} = AX$. Устойчивость по первому приближению положения равновесия автономной системы.

12. Фазовые траектории автономных систем

Основные свойства решений автономных систем. Фазовое пространство, траектории. Три типа траекторий автономных систем. Классификация фазовых портретов линейных систем на плоскости: седло, узел, вырожденный узел, центр, фокус. Линеаризация нелинейных систем в окрестности положения равновесия — сохранение типов грубых особых точек. Устойчивые, неустойчивые, полуустойчивые предельные циклы.

13. Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Связь первого интеграла с решением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Теорема о числе независимых первых интегралов. Применение первых интегралов для понижения порядка системы уравнений. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Квазилинейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Литература

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
5. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.

7. *Коробков М. В.* Функции Ляпунова: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2008.
8. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
9. *Александров В. А., Егоров А. А.* Вариационное исчисление: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2000.
10. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
11. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
12. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. / Под ред. В. К. Романко – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

План семинаров

Вариационное исчисление

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера.	1 семинар
2. Вариационные задачи: с несколькими функциями, несколькими независимыми переменными.	0,5 семинара
3. Изопериметрические задачи. Применение принципа Гамильтона-Остроградского.	0,5 семинара

Малые колебания и периодические решения

1. Малые колебания систем.	1 семинар
2. Периодические решения линейного уравнения; ряды Фурье.	1 семинар

Зависимость решений от начальных данных и параметров

1. Дифференцируемость по начальным данным и параметрам; уравнения в вариациях.	1 семинар
2. Метод малого параметра для периодических решений в теории нелинейных колебаний.	1 семинар

Теория устойчивости

1. Понятие устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости, неустойчивости. Исследование устойчивости путем прямого анализа решений уравнений и систем как функций начальных данных.	1 семинар
2. Устойчивость линейных систем и уравнений. Устойчивость в терминах спектра матрицы системы. Исследование устойчивости с помощью теоремы об устойчивости по первому приближению.	1 семинар
3. Исследование устойчивости и неустойчивости с помощью функций Ляпунова и Четаева, физические задачи.	2 семинар

Автономные системы

1. Линейные системы. Линеаризация положения равновесия нелинейных автономных систем. Локальный фазовый портрет в окрестности положения равновесия. Соединение в глобальный фазовый портрет с помощью изоклин.	2 семинара
2. Исследование предельных циклов.	0,5 семинара

Первые интегралы

1. Нахождение первых интегралов
   и их применение для решения автономных систем. 1,5 семинар
2. Решение линейного однородного уравнения
   в частных производных первого порядка. 1,5 семинар
3. Решение квазилинейного однородного уравнения
   в частных производных первого порядка. 0,5 семинара

Задания
по дифференциальным
уравнениям

4-й семестр

В течение семестра студент обязан сдать преподавателю в устной форме все задачи из приведённого ниже списка и выполнить две письменные контрольные работы. Не выполнившие это условие не допускаются к экзамену.

Задание 4 (сдать до 27 марта 2021 г.)

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int_1^e \left(x^2 (y')^2 + xyy' + \frac{y^2}{4} + \frac{15y\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x}} \right) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0.$$

2. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int_0^1 \left(\cos^2 y \ (y')^2 + 4 \sin y \right) dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y(1) = \pi.$$

3. Найти экстремали функционала

$$I[y,z] = \int_0^\pi \left((y')^2 - (z')^2 - 5y^2 + 4yz \right) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad z(\pi) = 0.$$

4. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int_0^1 \left(e^{2x} (y'')^2 - 2e^{2x} (y')^2 + e^{2x} y^2 - 32 e^{3x} y \right) dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 2e.$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \\ M\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0, \\ m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0, \end{cases}$$

описывающей продольные колебания молекулы CO_2.

6. Решить систему малых колебаний с возмущающей силой

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = a\cos(\gamma t), \quad \gamma^2 = \dfrac{k}{m}. \end{cases}$$

7. Найти все решения уравнений

$$\text{а) } \ddot{x} + 9x = \sin^3 t, \qquad \text{б) } \ddot{x} + 9x = \cos^2 t.$$

Существуют ли периодические решения? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

8. Найти все периодические решения уравнения

$$\ddot{x} - 4x = f(t),$$

где $f(t) = 1 - |t|$ при $|t| \le 1$, $f(t+2) \equiv f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

9. Дано уравнение $y'' + y = \sin(\omega t)$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

10. Найти производную по начальным данным $\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{y} = y\ln t + y^2 \sin t + y^3 t^3, \\ y\Big|_{t=1} = y_0. \end{cases}$$

11. Найти производную по параметру $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' - \mu\cos(t)y' + (1 - \mu\sin(t))y = \dfrac{1}{\cos(t)} + \mu^2 y^2, \\ \\ y\Big|_{t=0} = \mu, \\ \\ y'\Big|_{t=0} = 3\mu. \end{cases}$$

12. Разложить в ряд по степеням малого параметра μ (до μ^1 включительно) 2π-периодическое решение уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A\sin t + \mu x^3,$$

где ω — нецелое число.

Задание 5 (сдать до 30 апреля 2021 г.)

13. Дано уравнение

$$\dot{x} = \begin{cases} x^3 \sin(1/x), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Построив картину решений, выяснить, является ли решение $x(t) \equiv 0$ устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым.

14. Решив систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x/t - t^2 x y^2, \\ \dot{y} = -y/t, \end{cases}$$

исследовать на устойчивость ее нулевое решение.

15. Исследовать на устойчивость решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + 5z + \cos(t), & x(2) = 3, \\ \dot{y} = x - y + z + \ln(1 + t^2), & y(2) = 4, \\ \dot{z} = -3x + 2y - 4z + e^t, & z(2) = 5. \end{cases}$$

16. Исследовать на устойчивость решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + t^2 + t + 1, & x(0) = 6, \\ \dot{y} = 2e^{3t} x - y + e^{-t}. & y(0) = 7. \end{cases}$$

17. Исследовать, устойчиво ли решение $x(t) = \sin t$, $y(t) = -\cos t$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \sin t + (2 \cos t - 1) y + x^2 + y^2 + 1, \\ \dot{y} = (1 + \cos t) x - (1 + \sin t)(y + \cos t) + xy. \end{cases}$$

18. Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость в зависимости от параметра $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = e^{ax} - 1. \end{cases}$$

19. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x^5, \\ \dot{y} = -x^5 - y^5 + y^7. \end{cases}$$

Исследовать также на устойчивость нулевое решение линеаризованной системы.

Задание 6 (сдать до 29 мая 2021 г.)

20. Найти общее решение системы и построить фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y, \\ \dot{y} = 5x + 2y. \end{cases}$$

21. Найти общее решение системы и построить фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x + 5y. \end{cases}$$

22. Найти общее решение системы и построить фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + y - 1, \\ \dot{y} = -4x - y + 1. \end{cases}$$

23. Найти общее решение системы и построить фазовый портрет

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - 3, \\ \dot{y} = 5x + 2y - 7. \end{cases}$$

24. С помощью линеаризации выяснить типы положений равновесия нелинейной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x - y)y, \\ \dot{y} = 2 + x - y^2. \end{cases}$$

Для каждого положения равновесия построить локальный фазовый портрет. Найти прямолинейную траекторию исходной системы. Построить изоклины нуля и бесконечности. Используя накопленную информацию, построить глобальный фазовый портрет.

25. Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ \dot{y} = -x + ay\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right). \end{cases}$$

Имеются ли предельные циклы? Устойчивы ли они? Каков тип положения равновесия в начале координат? Построить фазовый портрет.

26. Найти первые интегралы и решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{y^2 + z^2}, \\ \dot{z} = \dfrac{z}{y^2 + z^2} \end{cases}$$

в области $\{x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Сколько существует независимых первых интегралов?

27. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (4y + 3x^4)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u = \cos y \quad \text{при} \quad x = 1. \end{cases}$$

28. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} - xz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \\ u = \sin z \quad \text{при} \quad x = y > 0, \quad z > 0. \end{cases}$$

Правила аттестации студентов по дифференциальным уравнениям

Контроль работы в семестре

(1) В течение семестра студент обязан сдать своему семинаристу в устной форме все 28 задач из приведённых выше заданий, а также задачи из п.2. Сданные задачи отмечаются в таблице.

(2) Во время семестра проводится две контрольные. Те задачи, которые решены на минус/плюс либо меньше, сдаются в устной форме своему семинаристу. Сданные задачи отмечаются в таблице.

(3) Если студент пропустил много занятий, то семинарист имеет право задать ему индивидуальные дополнительные задачи из числа тех, которые решались на пропущенных занятиях.

(4) Приём задач из п.1 и п.2 прекращается 29-го мая 2021 года.

(5) Студент, не сдавший все задачи из п.1 и п.2, сдаёт их во время экзамена, см. п. 17.

Проведение экзамена

(6) Студент, сдавший все задачи из п.1 и п.2, получает возможность отвечать на билет на экзамене.

(7) Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы.

(8) Экзаменационный билет содержит теоретический вопрос из программы курса и задачу. Список вопросов, выносимых на экзамен, выкладывается на сайт http://www.phys.nsu.ru/balakina в первые дни экзаменационной сессии.

(9) На подготовку к ответу даётся один час.

(10) При подготовке к ответу можно пользоваться только собственной головой.

(11) При подготовке к ответу запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами и подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена.

(12) Выходить из аудитории до начала ответа на билет нельзя.

(13) Для получения оценки «удовлетворительно», необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Для получения оценки «хорошо», необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Предъявить доказательства теорем, возможно с некоторыми недочётами. Для получения оценки «отлично», необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Предъявить полное со всеми выкладками доказательство теорем.

(14) По усмотрению экзаменатора могут быть заданы дополнительные вопросы и задачи.

(15) Также имеется список вопросов (выкладывается на сайт http://www.phys.nsu.ru/balakina в первые дни экзаменационной сессии), знать ответы на которые необходимо для получения положительной оценки. Это

ключевые вопросы курса, не знание ответа на которые сразу предполагает «неудовлетворительно», вне зависимости от того, насколько хорошо даны ответы на вопросы из билета.

(16) Студенты, получившие за обе контрольные пятёрки, имеют право на «плюс балл» на экзамене (исключением является повышение на пересдачах и с «неудовлетворительно»).

(17) Студент, не сдавший все задачи из п. 1 и п. 2, приходит на экзамен к 9.00, ему выдаётся список несданных задач. Студент один час письменно решает эти задачи без тетрадей и записей. Затем сдаёт написанное, сразу всё проверяется, правильно решённые задачи отмечаются в таблице, и если все задачи сданы, то берётся билет и далее как описано в пп. 6-15. Если студент за этот час не смог сдать все требуемые задачи, то он их досдаёт по этим же правилам на пересдаче.

Проведение пересдачи

(18) Пересдача проводится по тем же правилам, что и основной экзамен.

Особые ситуации

(19) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе, так и отдельному студенту.

(20) Конфликтные и спорные ситуации, возникающие между студентом и семинаристом, урегулирует лектор. Это касается и работы в семестре, и сдачи задач, и сдачи экзамена.

(21) В случае непредвиденных обстоятельств (пандемии и т.п.) правила проведения экзамена и пересдач могут поменяться.

Программу составила к.ф.-м.н. Е. Ю. Балакина