Вопросы к устному экзамену по линейной алгебре и геометрии

ФФ НГУ, летняя сессия 2023г.

Лектор – Бускин Николай Владиславович.

Список вопросов составлен по оглавлению конспекта лекций. Некоторые вопросы в билетах сформулированы иначе; некоторые сочетают части разных вопросов из этого списка, особенно в билетах на 3. На 3 требуются только черные и коричневые вопросы (только формулировки без доказательств). В билеты на 4 и на 5 входят, помимо чёрных, также синие и коричневые вопросы с доказательствами. Билеты на 5 также могут включать также красные вопросы, но их изложение предполагается с пропусками наиболее сложных мест.

1. Абстрактные линейные пространства. Линейная зависимость, независимость векторов. Ранг системы векторов. Базис пространства. Размерность линейного пространства.

2. Прямая сумма линейных подпространств. Теорема о равносильных условиях того, что сумма двух подпространств прямая. Формула Грассмана. Примеры: разложение в прямую сумму пространства матриц. Теорема о прямой сумме нескольких подпространств (формулировка).

3. Линейные отображения. Задание отображений пространств столбцов матрицами. Выбор базиса. Матрица отображения в базисах. Смена базиса и матрица перехода. Закон изменения матрицы отображения.

4.Образ, прообраз, ядро линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте. Изоморфизм. Всякое конечномерное пространство изоморфно $\mathbb{F}^n$ для некоторого целого неотрицательного n. Критерий изоморфности двух конечномерных пространств.

5. Линейные операторы. Теорема о ранге и дефекте. Геометрический смысл вырожденного отображения: прообраз $\varphi^{-1}(v)$ вектора v относительно линейного отображения$\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, как линейное многообразие в $\mathcal{U}$. Примеры линейных операторов.

6. Инвариантные подпространства. Матрица оператора в базисе, согласованном с инвариантным подпространством. Диагонализуемость оператора в терминах инвариантных подпространств.

Собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$ инвариантно относительно коммутирующего с ним оператора $\mathcal{B}$.

7. Диагонализация матрицы оператора. Собственные числа и векторы. Характеристический многочлен, независимость характеристического многочлена от базиса. Характеристические корни. Характеристический многочлен сужения оператора на инвариантное подпространство. Примеры вычислений.

8. Диагонализация матрицы оператора. Собственные и корневые подпространства. Сумма собственных подпространств – прямая. Кратности корня, связь между ними. Критерий диагонализуемости. Формулировка корневого разложения. Инвариантность собственных подпространств $\mathcal{A}$ относительно коммутирующего с ним $\mathcal{B}$.

9. Нильпотентный оператор. Жорданова форма матрицы оператора. Теорема о существовании жорданова базиса. Формула для числа жордановых клеток фиксированного размера (эти доказательства спрашиваются только на “5”).

10. Функции матриц. Функции матриц, матричная экспонента. Многочлены и ряды от матриц. Вычисление функции от матрицы через жорданову форму. Теорема Гамильтона-Кэли. Функции от диагональных матриц.

11. Интерполяционный многочлен: определение, теорема о существовании, единственности. Частные случай: многочлен Лагранжа, многочлен Ньютона (Тейлора). Вычисление функции от матрицы через интерполяционный многочлен. Пример.

12. Стандартное евклидово пространство. Ортонормированные базисы $\mathbb{R}^n$ и ортогональные матрицы. Свойства ортогональных матриц.

13. Метод ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение невырожденной матрицы. Разложение вектора по ортонормированной системе. Теорема Пифагора. Ортогональное дополнение к подпространству. Ортогональная проекция вектора на подпространство.

14. Стандартное евклидово пространство. Ортонормированные базисы $\mathbb{R}^n$ и ортогональные матрицы. Строение маломерных ортогональных матриц: 2×2 и 3×3.

15. Стандартное эрмитово пространство. Ортонормированные базисы $\mathbb{C}^n$ и унитарные матрицы. Матрица Грама системы векторов. $G(\mathcal{X})$ невырождена т. и т.т., когда $\mathcal{X}$ – линейно независима. Поиск проекции на подпространство в терминах матрицы Грама базиса подпространства. Сопряжённое линейное отображение. Существование и единственность сопряжённого, матрица сопряжённого линейного отображения в произвольных базисах.

16. Общие евклидовы и эрмитовы пространства. Стандартное скалярное произведение. Аксиомы общего скалярного/эрмитова произведения. Матрица Грама. Свойства матрицы Грама: изменение при смене базиса, положительная определённость. Неравенство Коши и углы. Неравенство треугольника. Объёмы и расстояния.

16. Сопряжённое линейное отображение. Матрица сопряжённого линейного отображения в произвольных базисах. Свойства сопряжённого оператора: сопряжённый к сопряжённому, спектр сопряжённого.

17. Сопряжённый оператор. Нормальные операторы, основные классы нормальных операторов. Формулировки спектральных теорем для эрмитовых/симметрических, косоэрмитовых/кососимметрических, унитарных/ортогональных операторов. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству $\mathcal{A}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$. Собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$ инвариантно относительно коммутирующего с ним оператора $\mathcal{B}$. Лемма: сужение сопряжённого равно сопряжённому к сужению. Спектральная теорема над $\mathbb{C}$.

18. Сопряжённый оператор. Нормальные операторы. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству $\mathcal{A}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$. Собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$ инвариантно относительно коммутирующего с ним оператора $\mathcal{B}$. Лемма: если $\mathcal{U}$ инвариантно отн. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$, то $\mathcal{A}^*|_{\mathcal{U}} = (\mathcal{A}|_{\mathcal{U}})^*$ ("сужение сопряжённого равно сопряжённому к сужению"). Спектральная теорема над $\mathbb{R}$.

19. Сопряжённый оператор. Нормальные операторы. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству $\mathcal{A}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$. Собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$ инвариантно относительно коммутирующего с ним оператора $\mathcal{B}$. Спектральная теорема над $\mathbb{R}$. Доказательство спектральной теоремы над $\mathbb{R}$ (только на "5").

20. Неотрицательные самосопряжённые операторы, их спектр. Разложение Холецкого.

21. Приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.

22. Разложения операторов и матриц. Эрмитово разложение оператора (мнимая и вещественная часть). Полярное разложение невырожденного оператора.

23. Теорема о сингулярном разложении. Сингулярные числа, базисы линейного отображения. Сингулярное разложение матрицы линейного отображения. Полярное разложение оператора в общем случае.

24. Норма оператора, теорема о свойствах нормы. Связь нормы с сингулярными числами оператора.

25. Норма оператора. Теорема о норме нормального оператора. "Контрпримеры". Сингулярные числа и углы между подпространствами.

26. Псевдообратные матрицы: решение неоднородных совместных систем. Псевдообратные матрицы с дополнительным условием для приближённого решения несовместных систем ("метод наименьших квадратов"). Построение псевдообратной матрицы с помощью сингулярного разложения.

27. Тензоры. Вводные примеры: законы изменения координат вектора, линейной формы, компонент матрицы оператора, компонент матрицы квадратичной формы, при замене базиса. Общее определение: координатное и через полилинейные функции. Базис и кобазис.

28. Тензоры. Операции над ними: линейные комбинации, умножение, свёртка, перестановка индексов. Симметрические и кососимметрические тензоры. Примеры. Тензор Леви-Чивиты. След оператора, след матрицы квадратичной формы ("свёртка по двум нижним индексам"). Базис пространства тензоров типа (p, q), эквивалентность координатного и полилинейного ("учёного") определений.