Угловое распределение интенсивности излучения релятивистской частицы

Принятые понятия и обозначения:

$\mathbf{R}_e$ – радиус-вектор точки наблюдения

$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_e}{R_e}$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_e$

θ – зенитный угол (между векторами $\mathbf{R}_e$ и осью z)

Плоскость наблюдения – плоскость, включающая векторы $\mathbf{R}_e$ и ось z

ϕ – азимутальный угол (между плоскостью наблюдения и плоскостью xz)

$\mathbf{e}_1$ – единичный вектор, лежащий в плоскости наблюдения и перпендикулярный вектору $\mathbf{n}$

$\mathbf{e}_2$ – единичный вектор, нормальный плоскости наблюдения

t' – момент времени излучения (в который заряженная частица проходит через начало координат

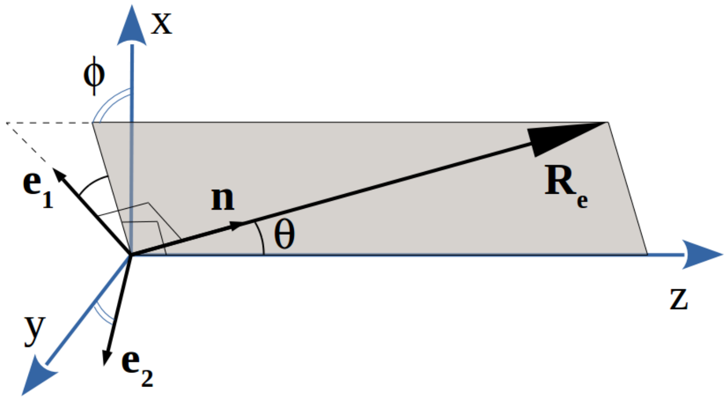
t – момент времени приема (в который в точке наблюдения определяются $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$)

$\mathbf{v}$ – скорость заряженной частицы

$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$ – безразмерная скорость

$\varkappa = 1 - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})$

$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}$ – ускорение точечного заряда



Для облегчения последующего анализа сделаем три замечания по геометрии задачи.

1. Вектор $\mathbf{e}_1$ образует с плоскостью xy угол θ.
2. Вектор $\mathbf{e}_2$ лежит в плоскости xy и образует с осью y угол ϕ.
3. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ образуют правую тройку.

Случай продольного ускорения ($\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$, $\mathbf{w}_\parallel = w_\parallel \mathbf{e}_z$)

$$\mathbf{E}_\sim = \frac{q}{c\varkappa^3 R_e}\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\mathbf{w}_\parallel]$$

Вектор в квадратных скобках равен

$$(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\mathbf{w}_\parallel = \mathbf{n}\times\mathbf{w}_\parallel - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{w}_\parallel = \mathbf{n}\times\mathbf{w}_\parallel - 0 = (w_\parallel \sin\theta)\mathbf{e}_2$$

Двойное векторное произведение дает

$$\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\mathbf{w}_\parallel] = w_\parallel\sin\theta[\mathbf{n}\times\mathbf{e}_2] = (w_\parallel\sin\theta)\mathbf{e}_1$$

Итак, электрическое поле излучения равно

$$\mathbf{E}_\sim = \frac{q}{c\varkappa^3 R_e}(w_\parallel\sin\theta)\mathbf{e}_1 = \frac{q}{c(1-\beta\cos\theta)^3 R_e}(w_\parallel\sin\theta)\mathbf{e}_1.$$

Магнитное поле излучения

$$\mathbf{H}_\sim = \mathbf{n}\times\mathbf{E}_\sim = \frac{q}{c\varkappa^3 R_e}(w_\parallel\sin\theta)\mathbf{e}_2$$

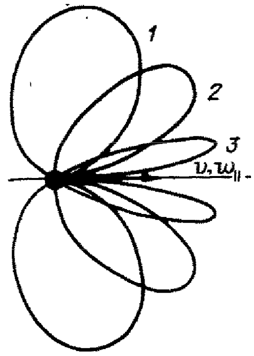
Угловое распределение интенсивности излучения

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}|E_\sim|^2 R_e^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3(1-\beta\cos\theta)^6}(w_\parallel^2\sin^2\theta).$$

Максимум интенсивности определяется условием экстремума относительно переменной $\xi = \cos\theta$:

$$\left(\frac{1-\xi^2}{(1-\beta\xi)^6}\right)' = \frac{-2\xi(1-\beta\xi)^6 - 6(1-\beta\xi)^5(-\beta)(1-\xi^2)}{(1-\beta\xi)^{12}} = \frac{-2\xi(1-\beta\xi)+6\beta(1-\xi^2)}{(1-\beta\xi)^7} = \frac{-4\beta\xi^2-2\xi+6\beta}{(1-\beta\xi)^7} = 0.$$

Получилось квадратное уравнение $2\beta\xi^2+\xi-3=0$ с решением



$$\xi=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 6\beta^2}}{4\beta}=\frac{\sqrt{1+24\beta^2}-1}{4\beta}=\cos\theta_{max}.$$

В пределе $\beta\to 1$ с учетом $\beta^2=1-\frac{1}{\gamma^2}$ и $\beta=1+(\beta-1)\approx 1-\frac{1}{2\gamma^2}$ получим:

$$\cos\theta_{max}=\sqrt{1-\sin\theta_{max}^2}\approx 1-\frac{\sin\theta_{max}^2}{2}\approx 1-\frac{\theta_{max}^2}{2}$$

$$\frac{\sqrt{1+24\beta^2}-1}{4\beta}=\frac{\sqrt{1+24-\frac{24}{\gamma^2}}-1}{4(1-\frac{1}{2\gamma^2})}=\frac{5\sqrt{1-\frac{24}{25\gamma^2}}-1}{4(1-\frac{1}{2\gamma^2})}\approx\frac{5(1-\frac{12}{25\gamma^2})-1}{4(1-\frac{1}{2\gamma^2})}\approx\frac{(4-\frac{12}{5\gamma^2})(1+\frac{1}{2\gamma^2})}{4}\approx\frac{4-\frac{12}{5\gamma^2}+\frac{4}{2\gamma^2}}{4}=1-\frac{24+20}{40\gamma^2}=1-\frac{1}{10\gamma^2},$$

откуда $\theta_{max}=\frac{1}{\sqrt{5}\gamma}$ (см. рисунок для 1: $\beta=0.1$, 2: $\beta=0.5$, 3: $\beta=0.9$).

Случай поперечного ускорения ($\mathbf{v}=v\mathbf{e}_z$, $\mathbf{w}_\perp=w_\perp\mathbf{e}_y$)

$$\mathbf{E}_\sim=\frac{q}{c\varkappa^3R_e}\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\mathbf{w}_\perp]$$

Разложим векторы скорости и ускорения на проекции вдоль $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Координаты вектора $\mathbf{e}_1$ равны $(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,-\cos\theta)$, такими же будут проекции векторов $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ на направление вектора $\mathbf{e}_1$. Аналогично определяем проекции $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ на направления $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_2$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1&=\cos\theta\cos\phi\cdot\mathbf{e}_x+\cos\theta\sin\phi\cdot\mathbf{e}_y-\sin\theta\cdot\mathbf{e}_z\\
\mathbf{e}_2&=-\sin\phi\cdot\mathbf{e}_x+\cos\phi\cdot\mathbf{e}_y+0\cdot\mathbf{e}_z\\
\mathbf{n}&=\sin\theta\cos\phi\cdot\mathbf{e}_x+\sin\theta\sin\phi\cdot\mathbf{e}_y+\cos\theta\cdot\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_y&=\cos\theta\sin\phi\cdot\mathbf{e}_1+\cos\phi\cdot\mathbf{e}_2+\sin\theta\sin\phi\cdot\mathbf{n}\\
\mathbf{e}_z&=-\sin\theta\cdot\mathbf{e}_1+0\cdot\mathbf{e}_2+\cos\theta\cdot\mathbf{n}
\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\beta&=\beta\cdot\mathbf{e}_z=\beta(\cos\theta\cdot\mathbf{n}-\sin\theta\cdot\mathbf{e}_1)\\
\mathbf{w}_\perp&=w_\perp\cdot\mathbf{e}_y=w_\perp(\cos\theta\sin\phi\cdot\mathbf{e}_1+\cos\phi\cdot\mathbf{e}_2+\sin\theta\sin\phi\cdot\mathbf{n})
\end{aligned}$$

Последовательно вычисляем

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\mathbf{w}_\perp=w_\perp(\mathbf{n}-\beta(\cos\theta\cdot\mathbf{n}-\sin\theta\cdot\mathbf{e}_1))\times(\cos\theta\sin\phi\cdot\mathbf{e}_1+\cos\phi\cdot\mathbf{e}_2+\sin\theta\sin\phi\cdot\mathbf{n})=\\
&=w\,[\mathbf{e}_1\times\mathbf{n}]\,(-\cos\theta\sin\phi+\beta\cos^2\theta\sin\phi+\beta\sin^2\theta\sin\phi)+\\
&+w\,[\mathbf{n}\times\mathbf{e}_2]\,(\cos\phi-\beta\cos\theta\cos\phi)+w_\perp\,[\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2]\,(\ldots)=\\
&=\mathbf{e}_2w_\perp(\beta-\cos\theta)\sin\phi+\mathbf{e}_1w_\perp(1-\beta\cos\theta)\cos\phi+\mathbf{n}(\ldots).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n}\times(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\mathbf{w}_\perp=[\mathbf{n}\times\mathbf{e}_2]\,w_\perp(\beta-\cos\theta)\sin\phi+[\mathbf{n}\times\mathbf{e}_1]\,w_\perp(1-\beta\cos\theta)\cos\phi+w_\perp\,[\mathbf{n}\times\mathbf{n}]\,(\ldots)=\\
&=\mathbf{e}_1w(\beta-\cos\theta)\sin\phi+\mathbf{e}_2w(1-\beta\cos\theta)\cos\phi+0.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_\sim=\frac{q}{c\varkappa^3R_e}\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\mathbf{w}_\perp]=\frac{qw_\perp}{cR_e}\cdot\frac{\mathbf{e}_1(\beta-\cos\theta)\sin\phi+\mathbf{e}_2(1-\beta\cos\theta)\cos\phi}{(1-\beta\cos\theta)^3}$$

Получим выражение для $E^2_\sim$:

$$E^2_\sim = \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{(\beta-\cos\theta)^2\sin^2\phi+(1-\beta\cos\theta)^2\cos^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^6} = \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{(\beta-\cos\theta)^2\sin^2\phi+(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta\cos\theta)^2\sin^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^6} =$$

$$= \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4} + \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{(\beta^2-2\beta\cos\theta+\cos^2\theta-1+2\beta\cos\theta-\beta^2\cos^2\theta)\sin^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^6} =$$

$$= \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4} + \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{(\beta^2+\cos^2\theta-1-\beta^2\cos^2\theta)\sin^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^6} = \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4} + \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{(\beta^2\sin^2\theta-\sin^2\theta)\sin^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^6} =$$

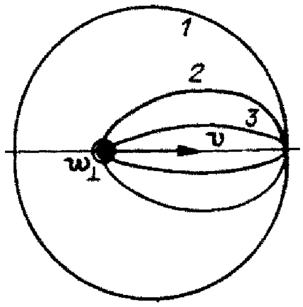
$$= \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4} + \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{(\beta^2-1)\sin^2\theta\sin^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^6} = \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4} - \left(\frac{qw_\perp}{c^2R_e}\right)^2 \cdot \frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta\sin^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^6}$$

Отсюда угловое распределение интенсивности излучения

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}|E_\sim|^2R_e^2 = \frac{(qw_\perp)^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4} - \frac{(qw_\perp)^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta\sin^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^6}$$

Максимум углового распределения лежит на направлении, для которого $\sin\theta\sin\phi = 0$ и $\cos\theta = 1$, то есть в направлении скорости β:

$$\frac{dJ}{d\Omega}_{max} = \frac{(qw_\perp)^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{1}{(1-\beta)^4}$$



Угловое распределение в плоскости xy ($\phi = 0$):

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}|E_\sim|^2R_e^2 = \frac{(qw_\perp)^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4}$$

На рисунке показан вид распределения для $\beta = 0.1$ (диаграмма 1), $\beta = 0.5$ (диаграмма 2), $\beta = 0.9$ (диаграмма 3).