

# ФИЗИКА В НГУ

---

*В. В. Володин, М.И.Захаров, А.Н.Матвеев, Г.В.Меледин,  
А.Г.Погосов, С.Л.Синицкий, Б.И.Хазин, В.С.Черкасский*

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ 2000-2007 ГГ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет

В. В. Володин, М.И.Захаров, А.Н.Матвеев, Г.В.Меледин, А.Г.Погосов,  
С.Л.Синицкий, Б.И.Хазин, В.С.Черкасский

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ  
ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ  
ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ 2000-2007 гг**

Учебное пособие

Новосибирск  
2007

**ББК В33 я 73-4**

**УДК 537+538**

**В. В. Володин, М.И.Захаров, А.Н.Матвеев, Г.В.Меледин, А.Г.Погосов, С.Л.Синицкий, Б.И.Хазин, В.С.Черкасский** Экзаменационные и олимпиадные варианты задач по электродинамике 2000-2007гг: Учеб. пособие / Новосиб. ун-т. Новосибирск, 2007. 72 с.

Приведены варианты задач по электродинамике, предлагавшиеся на письменных экзаменах (олимпиадах) и контрольных работах студентам II курса физического факультета НГУ в 2000-2007 гг. Для большинства задач даны решения.

Предназначено для студентов-физиков при подготовке к курсовым контрольным и письменным экзаменам по электродинамике, а также для преподавателей, ведущих курс "Электродинамика".

**Печатается по решению методической комиссии физического факультета НГУ.**

#### **Рецензенты**

**проф. Б.А.Луговцов, проф. В.И.Яковлев**

Издание подготовлено в рамках выполнения инновационно-образовательной программы *«Инновационные образовательные программы и технологии, реализуемые на принципах партнерства классического университета, науки, бизнеса и государства»* национального проекта «Образование».

**© Новосибирский государственный  
университет, 2007**

# Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	6
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ .....	7
2000/2001 учебный год.....	7
Контрольная работа 1 .....	7
Экзаменационная работа 1 .....	7
Контрольная работа 2.....	8
Экзаменационная работа 2 .....	9
2001/2002 учебный год.....	10
Контрольная работа 1 .....	10
Экзаменационная работа 1 .....	11
Контрольная работа 2.....	12
Экзаменационная работа 2 .....	13
2002/2003 учебный год.....	14
Контрольная работа 1 .....	14
Экзаменационная работа 1 .....	15
Контрольная работа 2.....	16
Экзаменационная работа 2 .....	17
2003/2004 учебный год.....	18
Контрольная работа 1 .....	18
Экзаменационная работа 1 .....	18
Контрольная работа 2.....	20
Экзаменационная работа 2 .....	20
2004/2005 учебный год.....	21
Контрольная работа 1 .....	21
Экзаменационная работа 1 .....	22
Контрольная работа 2.....	23
Экзаменационная работа 2 .....	24
2005/2006 учебный год.....	25
Контрольная работа 1 .....	25
Экзаменационная работа 1 .....	26
Контрольная работа 2.....	27
Экзаменационная работа 2 .....	28
2006/2007 учебный год.....	29
Контрольная работа 1 .....	29
Экзаменационная работа 1 .....	30
Контрольная работа 2.....	31
Экзаменационная работа 2 .....	32
ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ .....	35
2000/2001 учебный год.....	35
Контрольная работа 1 .....	35
Экзаменационная работа 1 .....	37
Контрольная работа 2.....	38
Экзаменационная работа 2 .....	41
2001/2002 учебный год.....	43
Контрольная работа 1 .....	43
Экзаменационная работа 1 .....	45
Контрольная работа 2.....	47
Экзаменационная работа 2 .....	48
2002/2003 учебный год.....	49
Контрольная работа 1 .....	49

Экзаменационная работа 1 .....	50
Контрольная работа 2.....	53
Экзаменационная работа 2 .....	55
2003/2004 учебный год.....	57
Контрольная работа 1 .....	57
Экзаменационная работа 1 .....	60
Контрольная работа 2.....	61
Экзаменационная работа 2 .....	63
2004/2005 учебный год.....	65
Контрольная работа 1 .....	65
Экзаменационная работа 1 .....	67
Контрольная работа 2.....	69
Экзаменационная работа 2 .....	72
2005/2006 учебный год.....	75
Контрольная работа 1 .....	75
Экзаменационная работа 1 .....	77
Контрольная работа 2.....	79
Экзаменационная работа 2 .....	82
2006/2007 учебный год.....	85
Контрольная работа 1 .....	85
Экзаменационная работа 1 .....	87
Контрольная работа 2.....	89
Экзаменационная работа 2 .....	91

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Потребность в данном задачнике возникла в связи с введением на физическом факультете НГУ письменного экзамена, ставшего позднее и теоретическим туром студенческой олимпиады.

Задачи для вариантов отбирались на заседании всеми преподавателями, ведущими курс. Необходимые 6-7 задач выбирались из большого числа предлагаемых на конкурсной основе и оценивались в баллах в зависимости от трудности: очень легкие – 1-2 балла, очень трудные – 6-7 баллов. Границы оценок устанавливались в баллах в зависимости от набора задач в варианте.

При решении задач разрешено пользоваться любой литературой, поскольку они, как правило, оригинальные, не встречающиеся в других задачниках, некоторые – явно олимпиадного содержания.

При оценивании решения предусмотрена оценка "автомат – отлично" Дело в том, что после сдачи письменного экзамена студенты сдают устный, на котором учитываются результаты письменного экзамена. Получивший на письменном экзамене оценку "автомат — отлично" не сдает устный экзамен, а получает сразу итоговую оценку "отлично". и ставится в случае, когда студент написал работу на ступень выше "пятерки". При этом обязательным условием является получение студентом оценки "отлично" за работу в семестре.

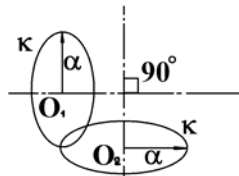
Студенты, набравшие наибольшее количество баллов, становятся призерами олимпиады. Их работы отмечаются деканатом физического факультета

# УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

2000/2001 учебный год

## Контрольная работа 1

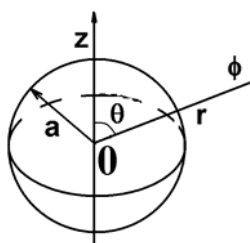
1. Два одинаковых тонких равномерно с плотностью  $\kappa$  заряженных кольца, соприкасающихся в одной точке, расположены так, что их оси симметрии пересекаются под прямым углом в точке  $A$ . Радиусы колец равны  $a$ . Найти напряженность поля  $\vec{E}$  и потенциал  $\varphi$  в точке  $A$ . (2б)



2. В верхнем полупространстве в вакууме на высоте  $h$  над диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$  висит точечный электрический диполь с дипольным моментом  $\vec{p}$ . Этот дипольный момент направлен перпендикулярно границе от нее. Найти силу, действующую на диполь. (3б)

3. В однородном внешнем электрическом поле напряженностью  $\vec{E}_0$  находится занимающий все пространство диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . В диэлектрике появилась сферическая полость радиуса  $a$ . Определить распределение плотности связанных зарядов на поверхности полости. (4б)

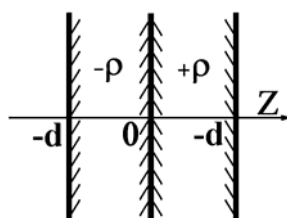
4. У равномерно заряженного зарядом  $Q$  шара радиуса  $a$  срезали по экватору тонкое кольцо с зарядом  $q \ll Q$ . Написать два первых ненулевых члена разложения в ряд потенциала  $\varphi(r, \theta)$  на больших расстояниях  $r$  ( $r \gg a$ ). (4б)



5. Сферический конденсатор заполнен однородным диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ . Если приложить напряжение к его обкладкам, то конденсатор оказывает сопротивление  $R$  при заполнении однородным проводником с проводимостью  $\sigma$  пространства между обкладками. Найти емкость конденсатора. (3б)

6. Между анодом и катодом в плоском вакуумном диоде напряжение постоянно, а катод заземлен. Пренебрегая краевыми эффектами и считая начальную скорость электронов у катода равной нулю, найти, во сколько раз быстрее электрон достигает анода в рассматриваемом режиме закона  $3/2$ , чем при отсутствии пространственного заряда, когда он движется в одиночку при тех же значениях потенциалов на электродах. (6б)

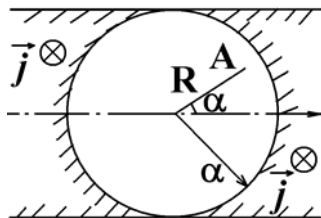
## Экзаменационная работа 1



1. Две бесконечных пластины толщиной  $d$  каждая равномерно заряжены одна с плотностью  $-\rho$ , вторая — с плотностью  $+\rho$  и расположены вплотную (см. рис.). Найти потенциал  $\varphi(z)$ . (3б)

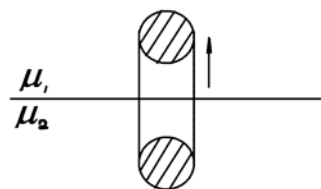
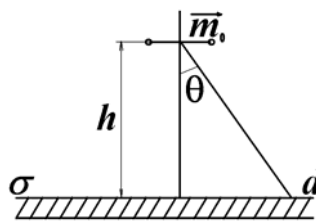
2. Полупространство с полусферическим выступом радиуса  $a$  заполнено металлом и помещено в однородное поле  $\vec{E}_0$ , перпендикулярное плоскости раздела на большем расстоянии от выступа. На вершине выступа находится еще один маленький выступ радиуса  $b \gg a$ . Найти поле  $\vec{E}_2$  на вершине малого выступа. (4б)

3. На пластине толщиной  $2a$  сделана цилиндрическая полость, касающаяся обеих плоскостей пластины. По пластине в направлении оси полости  $Z$  идет ток с постоянной плотностью  $\vec{j}$ . Найти магнитное поле в полости:  $B_\alpha(R, \alpha)$ ,  $B_R(R, \alpha)$  в точке  $A$  с координатами  $R, \alpha$ . (3б)



4. Внутри сплошного цилиндра радиуса  $b$  идет вдоль оси ток  $\vec{j}_1$ , а в цилиндрической области радиуса  $a$ , ось которой находится на расстоянии  $\ell$  ( $b < \ell < b - a$ ), идет вдоль оси ток  $\vec{j}_2$ . Найти силу  $\vec{F}$ , действующей на единицу длины малого цилиндра с током  $j_2$ . (4б)

5. На небольшом кольце, находящемся на расстоянии  $h$  от проводящего (проводимость  $\sigma$ ) тонкого (толщина  $d$ ) слоя быстро (т.е. за время  $t \ll 4\pi d^2 \sigma / c^2$ ) возбудили ток, и кольцо приобрело магнитный момент  $\vec{m}_0$ , перпендикулярный слою. Найти распределение  $I(\theta, h)$  поверхностных токов, возникших в слое к этому моменту времени. (5б)



6. Индуктивность сверхпроводящего тора (ток перпендикулярен сечению) в пустом пространстве равен  $L_0$ . Чему станет равной индуктивность  $L$  этого тора, если его поместить в пространство, заполненное двумя магнетиками с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  так, что границей между ними является плоскость, проходящая через ось симметрии тора. (6б)

## Контрольная работа 2

1. Оцените, при каком минимальном расстоянии  $d$  между щелями в опыте Юнга при использовании в качестве источника свет от Солнца, пропущенный через светофильтр, выделяющий длину волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см, функция видимости  $V=0$ . Угловой размер Солнца (отношение диаметра Солнца к расстоянию до Земли)  $\alpha = 10^{-2}$  рад. (2б).

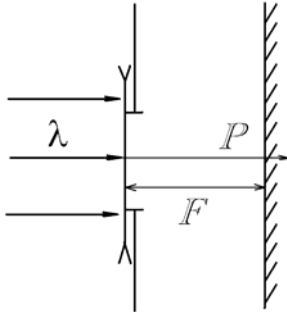
2. Плоская граница разделяет полупространства 1 и 2, заполненные средами соответственно с  $\epsilon_1, \mu_1$  и  $\epsilon_2, \mu_2$ . При  $\mu_{1,2}=1$  выражения для углов Брюстера

$\text{tg} \varphi_B = \left( \frac{\epsilon_2 \epsilon_2 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_1 \epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1} \right)$ , когда  $\vec{E}$  - в плоскости падения,



$\operatorname{tg} \varphi_B = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2} \right)$ , когда вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен плоскости падения, оказываются взаимоисключающими. Верны ли они в случае  $\mu_{1,2} \neq 1$  и  $\varepsilon_{1,2} \neq 1$ ? (4б)

3. Широкий параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda$  падает по нормали на экран с круглой диафрагмой, с помощью которой можно менять радиус отверстия. Отверстие закрывает тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием  $-F$ . Параллельно первому экрану, на расстоянии  $F$  от него, помещен второй экран. При каком минимальном радиусе диафрагмы интенсивность света в точке  $P$  пересечения оптической оси системы и второго экрана максимальна? (2б) Оцените размер светового пятна



вокруг точки  $P$ . (2б)

4. Вдоль двух идеально проводящих параллельных плоскостей, расстояние между которыми равно  $a$ , идет  $H_1$ -волна заданной амплитуды. Найти распределение поверхностных токов на плоскостях. (4б)

5. В зонной пластинке, изготовленной для длины волны  $\lambda$  и первого фокусного расстояния  $F$ , коэффициент пропускания по амплитуде каждой последующей зоны в два раза меньше чем у предыдущей. Оцените интенсивность в фокусе, если интенсивность света от первой зоны равна  $I_0$ . (5б)

6. На листе растения образовалась росинка диаметром  $d=2\text{ мм}$ . Показатель преломления воды  $n=4/3$ . Сквозь росинку рассматривают прожилки листа с расстояния наилучшего зрения  $l=25\text{ см}$ . Оцените увеличение. (5б)

## Экзаменационная работа 2

1. Между двумя плоскими параллельными экранами – некоторое расстояние  $\ell$ . В первом экране, на который падает по нормали плоская монохроматическая волна с частотой  $\omega$ , сделана щель шириной  $d \gg \lambda$  и вплотную к щели основанием к ней и с той же высотой  $d$  вставлена стеклянная призма (показатель преломления  $n$ , угол при вершине  $\alpha \ll 1$ , угол основания с экраном –  $90^\circ$ ). На втором экране наблюдаются интерференционные полосы. Найти интервал расстояний  $\Delta \ell$  при наблюдении максимального числа полос (2 б) и их ширину (1 б).

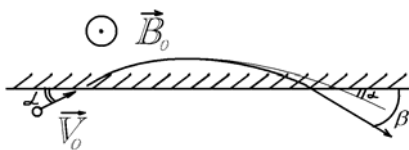
2. На прямой, перпендикулярной плоской границе раздела (плоскость  $\Sigma$ ) двух прозрачных сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , расположен монохроматический (с частотой  $\omega$ ) источник света  $S$  на расстоянии  $a$  от  $\Sigma$  в среде с  $n_1$  и точка  $P$  на расстоянии  $b$  в среде с  $n_2$ . Найти радиусы  $r_m$  зон Френеля на  $\Sigma$ . (3 б)

3. На полупространство  $z > 0$ , занятое однородной проводящей средой с проводимостью  $\sigma$  ( $\mu = 1$ ) по нормали падает волна  $E_x = E_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ . Найти комплексную амплитуду электрического поля отраженной волны  $E_1$ , считая, что токами смещения в проводящем пространстве можно пренебречь (3 б). Проверить результат при  $\sigma \rightarrow \infty$  (1 б).

4. На круглый непрозрачный диск радиуса  $R \gg \lambda$  падает по нормали плоская моно-хроматическая волна с  $k = 2\pi / \lambda$ . Найти интенсивность  $I(\theta, \theta, z)$  на оси диска. (5 б)

5. На плоскости  $XY$  заряд распределен с плотностью  $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta y)$ . Релятивистская частица массы  $m$  с зарядом  $e$  налетает на плоскость с практически постоянной скоростью  $v \sim c$ , направленную по оси  $Z$  — по нормали к плоскости  $XY$ . Найти энергию, потерянную на излучение в интервале  $-\infty < z \leq 0$ . (5 б)

6. Ультрарелятивистская частица (заряд  $e$ , масса  $m$ ) влетает в полупространство с постоянным однородным магнитным полем  $\vec{B}_0$  со скоростью  $v_0 \approx c$  ( $\vec{v}_0 \perp \vec{B}_0$ ) под малым углом  $\alpha$  к границе ( $\alpha \ll 1$ ). Поле  $\vec{B}_0$  параллельно граничной плоскости (см. рис.). Если пренебречь влиянием излучения, то частица должна вылететь из поля  $\vec{B}_0$  под углом  $\alpha$ . Из-за излучения величина угла вылета меняется и становится равной  $\beta$ . Оценить разность  $\beta - \alpha$  при условии, что  $\beta - \alpha \ll \alpha$ . (6 б)



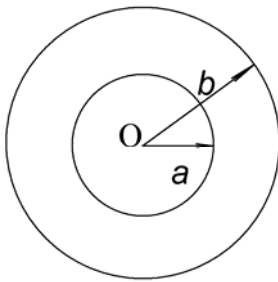
**2001/2002 учебный год**

### Контрольная работа 1

1. Два металлических шарика, один из них заряжен, другой — нет, находятся в вакууме на большом расстоянии  $l$  по сравнению с радиусами шариков  $a$  ( $l \gg a$ ). Оценить, во сколько раз изменится сила взаимодействия между ними в зависимости от отношения  $d/l$ , много меньшего единицы, если шарики соединить проводником без перемещения. (3б).

2. Нижнее полупространство ( $z \leq 0$ ) заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ , в верхнем ( $z > 0$ ) — вакуум. В вакууме висит равномерно заряженное с зарядом  $Q$  кольцо радиусом  $a$ . Плоскость кольца параллельна границе раздела, ось совпадает с осью  $Z$ . Расстояние от кольца до диэлектрика равно  $h$ . Найти два первых ненулевых члена разложения потенциала  $\varphi(r, \theta) \cong \varphi_0 + \varphi_1$  в вакууме на больших расстояниях  $r$  от точки  $r = 0$  ( $r \gg a$ ). (5б).

3. Найти емкость  $dC/dl$  на единицу длины системы двух полых металлических коаксиальных цилиндров с радиусами  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ). Внутри и снаружи цилиндров — вакуум. (2б).



4. В равномерно заряженном шаре радиуса  $a$  с зарядом  $Q$  сделали сферическую полость радиуса  $a/2$ , поверхность которой проходит через центр шара  $O$ . Найти потенциал  $\varphi(r, \theta)$  внутри этой полости, положив аддитивную постоянную равной нулю. (3б).

5. Плоский вакуумный диод подключают к плоскому конденсатору тех же размеров: высота  $h$ , площадь пластин  $S$ ,  $\varepsilon = 1$ . Первоначальное напряжение на пластине конденсатора, подсоединенной к диоду, равно  $U_0$ . На катоде и соответствующей пластине конденсатора потенциал равен нулю. Найти зависимость потенциала  $U(t)$  от времени, пренебрегая краевыми эффектами и учета электроемкость диода. (4б).

## Экзаменационная работа 1

1. Проводящий шар радиусом  $r_0$  окружен концентрической толстостенной проводящей сферой с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1 > r_0$ ). Заряд шара  $q$ , сфера не заряжена. Считая потенциал на бесконечности нулевым, найти потенциалы слоя (1б) и шара (2б).

2. По кольцу радиуса  $R$  идет ток  $J$ . На оси симметрии на расстоянии  $h$  от плоскости кольца расположен центр шарика радиуса  $a \ll R$  с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu$ . С какой силой действует на шарик магнитное поле кольца? (4б).

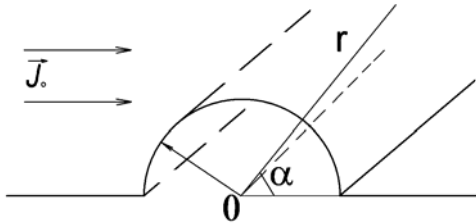
3. В полном тонкостенном сверхпроводящем цилиндре радиуса  $R$  и длины  $l \gg R$  имеется магнитное поле  $B_0$ , параллельное его оси. Цилиндр зажат между двумя параллельными жесткими плоскостями. Их сдвигают так, что расстояние между ними уменьшается с  $2R$  до  $h$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти силы, действующие на плоскости. (4б).

4. В полном сверхпроводящем цилиндре радиуса  $R$  имеется магнитное поле  $H_0$  вдоль оси цилиндра. В цилиндр вставляют другой цилиндр с магнитной проницаемостью  $\mu$  радиусом  $r < R$ . Найти магнитное поле  $B$ , возникшее в магнетике, а также поле  $H$  в полости. Длина цилиндров  $l \gg R$ . Краевыми эффектами пренебречь. (4б).

5. В плоском вакуумном диоде вторичная эмиссия от анода возникает в результате абсолютно упругого отражения части  $\alpha$  потока электронов, налетающих на анод (т.е. скорость электрона с вероятностью  $\alpha$  меняется на противоположную). Задавая параметры диода (площадь электродов  $S$ , величина зазора  $d$ , параметры электрона  $e$  и  $m$ ), найти вольтамперную

характеристику такого диода, пренебрегая краевыми эффектами и считая, что катод заземлен. (5б).

6. В верхнем полупространстве, заполненном однородным проводником с проводимостью  $\sigma$ , вырезана полуцилиндрическая выемка радиуса  $a$  (см. рис.). По проводнику идет ток. Причем вектор плотности тока вдали от выемки  $j_0$  однороден и перпендикулярен оси цилиндра, проходящей через точку  $O$ . Вне проводника — вакуум. Найти распределение потенциала в проводнике  $\varphi(r, \alpha)$  и компоненты плотности тока  $j_r(r, \alpha)$  и  $j_\alpha(r, \alpha)$ .



(5б).

7. Тонкостенная сфера с поверхностной проводимостью  $\sigma^*$  радиусом  $a$  находится в однородном переменном во времени магнитном поле  $H = H_0 e^{-i\omega t}$ . Найти магнитное поле внутри сферы и распределение поверхностного тока. Указание: искать решения для потенциала в виде  $\psi = (A_1 r + A_2/r^2) \cos \theta$ . (6б).

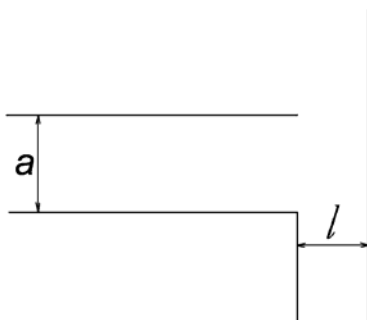
## Контрольная работа 2

1. Солнечный луч падает на плоскую границу, разделяющую области с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , под углом  $\alpha$  с нормалью, удовлетворяющему условию  $\tan \alpha = n_2/n_1$ . Какая часть интенсивности падающего света попадет во вторую среду? (3б).

2. Оцените отношение продольной длины когерентности  $l_{||}$  к поперечной  $l_{\perp}$  для солнечного диска, наблюдаемого с Земли через светофильтр, пропускающий свет длины волны  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  свет в интервале  $\Delta\lambda = 0,2 \cdot 10^{-6}$  см. Диаметр диска Солнца  $D = 1,4 \cdot 10^6$  км, расстояние между Землей и Солнцем  $\ell = 1,5 \cdot 10^8$  км. (3б)

3. На прямой  $Z$ , перпендикулярной плоской границе раздела (плоскость  $XY$ ) двух прозрачных сред с показателями  $n_1$  и  $n_2$ , расположен монохроматический (частота  $\omega$ ) источник света  $S$  на расстоянии  $a$  от  $XY$  в среде с  $n_1$  и точка  $P$  на расстоянии  $b$  в среде с  $n_2$ . Найти радиусы  $r_m$  зон Френеля на плоскости  $XY$ . (3б).

4. Между двумя параллельными проводящими плоскостями вдоль оси  $Z$  распространяется  $H_1$ -волна ( $E_z \equiv 0$ ). Длина волны  $\lambda$ , расстояние между плоскостями равно  $a$ . На расстоянии  $l$  от них расположен перпендикулярно к волноводу экран, на котором появятся при этом интерференционные полосы. Найти расстояние между ними (3б) и оценить их



ширину (2б).

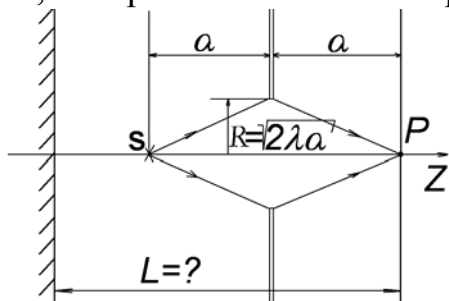
5. Найти угловое распределение  $dI(\theta)/d\theta$  для интенсивности монохроматической волны с длиной  $\lambda$  при наблюдении дифракции Фраунгофера в случае падения ее под углом  $\alpha$  с нормалью к плоскости экрана. В экране сделаны две параллельных щели шириной  $a$ , расстояние между ними равно  $b$ . (4б).

## Экзаменационная работа 2

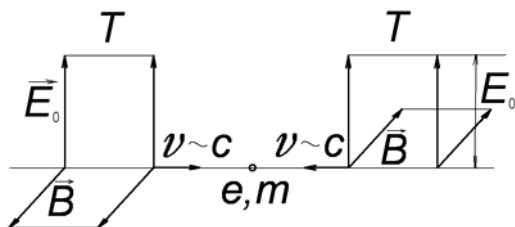
1. В плоскости имеются две одинаковые параллельные щели шириной  $a$ . На одну из щелей нанесено прозрачное покрытие, меняющее фазу падающей по нормали на щели электромагнитной волны на  $\pi$ . Длина волны  $\lambda$ , расстояние между щелями  $b$ . Найти угловое распределение интенсивности  $I(\theta)$  на большом расстоянии от плоскости со щелями. (3б).

2. На непрозрачный экран с полукруглым выступом радиусом  $r_0$ , расположенным в плоскости  $XY$ , по нормали падает плоская монохроматическая волна  $E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ . Найти амплитуду волны в точке  $P$  на оси  $Z$  с координатой  $z_p$ , если радиус выступа  $r_0 = \sqrt{3\lambda z_p}$ . (5б).

3. Точечный источник  $S$  с длиной волны  $\lambda$  расположен на оси  $Z$  в точке  $P$ , на расстоянии  $a$  от круглого отверстия в экране. Радиус отверстия  $R = \sqrt{2\lambda a}$ . Найти, на каком расстоянии  $l$  от источника надо расположить зеркало, чтобы интенсивность света в точке  $P$  была максимальной. Продольная длина когерентности излучения  $\sqrt{\lambda a} \ll l_{\parallel} \leq a$ . (4б).



4. Две плоские (плоскости параллельны) электромагнитные волны с одинаковыми длительностями  $T$  и с одинаковыми постоянными значениями электрического поля  $E_0$ , распространяются навстречу друг другу с одинаковыми скоростями  $v \sim c$ . В плоскости, где передние фронты волн встречаются, покоится электрон (заряд  $e$ , масса  $m$ ). Найти полную энергию  $\Delta E$ , излученную электроном. (4б).



5. Плоская электромагнитная волна конечной длительности с полной энергией  $W_0$  на единицу площади, перпендикулярной к направлению распространения, падает по нормали на плоское не закрепленное идеальное

зеркало с массой  $\mu$  на единицу площади ( $\frac{W_0}{\mu c^2} = \alpha \sim 1$ ) и отражается от него (световой парус). Найти скорость зеркала после окончания взаимодействия падающей волны с зеркалом. (5б).

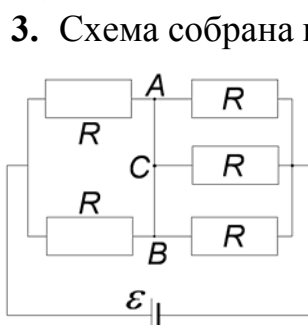
6. Два точечных синфазных диполя с одинаковыми дипольными моментами  $d_0 e^{-i\omega t}$  расположены на оси  $Z$  параллельно ей на расстоянии  $l = 10\lambda$  друг от друга. Найти: 1) усредненное по времени угловое распределение интенсивности излучения  $dI(\theta)/d\Omega$  (3б); 2) углы направлений  $\theta_m$  на максимумы излучения (2б); полное число  $N$  максимумов в диаграмме направленности (2б).

## 2002/2003 учебный год

### Контрольная работа 1

1. В однородном поле  $\vec{E}_0$  в начале координат находится точечный диполь с дипольным моментом  $\vec{P}$ , направленным по полю  $\vec{E}_0$ . Найти радиус эквипотенциальной сферы с нулевым потенциалом. (2б)

2. Нижнее полупространство заполнено металлом. Параллельно плоскости металла в вакууме висит равномерно заряженное с зарядом  $Q$  тонкое кольцо радиусом  $a$  на расстоянии  $h \ll a$  от границы. Найти поверхностную плотность  $\sigma(h)$  заряда на оси симметрии на поверхности металла. (3б)



3. Схема собрана из 5 одинаковых резисторов сопротивлением  $R = 1$  Ом и батарейки с  $\mathcal{E} = 1,5$  В. Сопротивление проводов и переключки  $ABC$  равно нулю. Найти величину и направление токов через участки  $AC$  и  $BC$  переключки. (3б)

4. В равномерно заряженном с плотностью  $\rho$  шаре ( $\varepsilon = 1$ ) радиуса  $a$  имеется сферическая полость радиусом  $a/2$ , центр которой  $O_1$  находится на расстоянии  $a/2$  от центра шара  $O_2$ . В полость далеко от ее поверхности попал диэлектрический шарик с проницаемостью  $\varepsilon$  радиусом  $b \ll a$ . Найти энергию электрического поля в этом шарике. (4б)

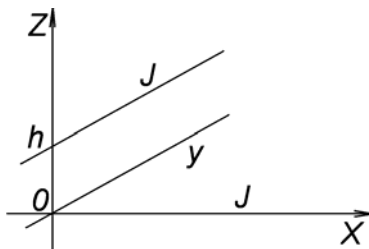
5. Диэлектрический шар с проницаемостью  $\varepsilon$  радиусом  $a$  помещен в вакууме в однородное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$ . Найти максимальное значение поверхностной плотности связанных зарядов  $\sigma_{\text{связ}}$ . (5б)

6. В плоском вакуумном диоде вторичная эмиссия от анода возникает в результате абсолютно упругого отражения части  $\alpha$  потока электронов, налетающих на анод (т. е. скорость каждого электрона с вероятностью  $\alpha$  меняется на противоположную). Задавая нужные параметры, в частности,

площадь электродов  $S$ , зазор –  $d$ ) найти вольтамперную характеристику ( $J = f(U)$ ) такого диода, пренебрегая краевыми эффектами. (4б).

## Экзаменационная работа 1

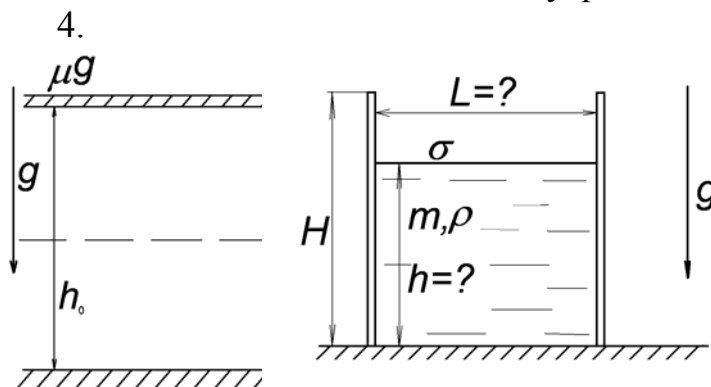
1. Ток  $J$  течет по бесконечным прямым тонким проводникам. Один



проводник расположен прямо на оси  $X$ , другой был на оси  $Y$ , но его подняли, не вынося из плоскости  $YZ$ , на высоту  $h$ . Найти максимальное и минимальное (по модулю) значения силы взаимодействия проводников на единицу длины  $dF/dl$ . (3 б)

2. В прямоугольной рамке со сторонами  $a$  и  $b$  идет переменный ток  $J = J_0 \cos \omega t$ . На большом расстоянии  $l \gg a, b$  от рамки в ее плоскости находится точечный заряд  $q$ . Найти силу, действующую на этот закрепленный заряд. (4б)

3. В короткозамкнутом прямом сверхпроводящем цилиндрическом соленоиде длины  $l \gg d$ , где  $d$  – его диаметр, и числом витков  $N \gg l$  идет ток  $J$ . Вне поля соленоида соосно с ним находится сплошной стержень из непроводящего магнитного материала с проницаемостью  $\mu$ . Размеры – длина и диаметр стержня – практически совпадают с соответствующими размерами соленоида. Стержню дали возможность втянуться без трения в соленоид. Пренебрегая краевыми эффектами, найти кинетическую энергию стержня, когда он полностью находится внутри соленоида. (4б)

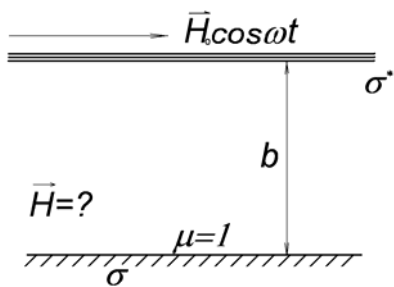


Бесконечно длинная сверхпроводящая шина ширины  $b$  удерживается на высоте  $h_0$  параллельно плоской границе сверхпроводящего полупространства в поле тяжести. (Вес шины на единицу длины –  $\mu g$ ). По

шине течет ток  $J_0$ . Шину плавно подводят к положению равновесия и отпускают. Найти равновесную высоту  $h$ , считая, что  $b \gg h, h_0$ , и пренебрегая краевыми эффектами. (4б)

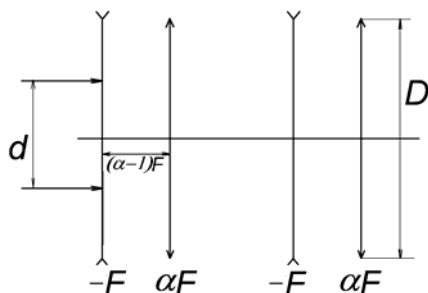
5. Между вертикальными пластинами плоского конденсатора, могущими свободно раздвигаться, находится несжимаемая жидкость с  $\varepsilon = 1$  в поле тяжести. Найти высоту уровня жидкости  $h$  в равновесном состоянии и расстояние между пластинами при этом, если жидкость из конденсатора при раздвижке не выливается. Высота пластин  $H$ , ширина  $b$ , масса жидкости  $m$ , плотность  $\rho$ . Краевыми эффектами пренебречь. Заряд или напряжение = const (5б)

6. Тонкая проводящая пленка с поверхностной плотностью  $\sigma^*$  (поверхностный ток  $i = \sigma^* E$ ) расположена на расстоянии  $b$  от проводника с проводимостью  $\sigma$ , ( $\mu = 1$ ), заполняющего полупространство. Найти магнитное поле в зазоре, если в остальной части пространства  $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos \omega t$ , где  $\vec{H}_0$  параллелен плоскости пленки. (6б)



## Контрольная работа 2

1. В паре линз – первая с фокусным расстоянием  $-F$ , а вторая – с  $\alpha F$ ,



причем расстояние между линзами  $(\alpha-1)F$ . Во сколько раз увеличит размер сечения  $D/d$  параллельного пучка света каскад из небольшого числа  $N$  таких пар линз. Размер последней линзы достаточно велик. (3б).

2. По прямоугольному волноводу сечением  $a \times b$  вдоль оси  $Z$  идет волна  $\vec{H}_{11} = \vec{H}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ .

Найти плотность токов  $\vec{j}$  и поверхностных зарядов  $\sigma$  на стенках волновода, а также групповую и фазовую скорости волны в нем. (4б)

3. Луну в полнолуние наблюдают по схеме Юнга на длине волны  $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$ , где  $\Delta\lambda \ll \lambda$ . Угловой размер Луны  $\alpha$ . Оценить максимальный размер  $d_{\min}$  между щелями и расстояние между интерференционными полосами, наблюдающимися на экране, расположенном на расстоянии  $b$  от экрана со щелями. На какой высоте  $y_{\min}$  интерференционная картина исчезает? Вместо диска луны в оценках можно рассматривать самосветящуюся полосу. (5б)

4. Из вакуума на плоскую границу с водой ( $n=4/3$ ) под углом Брюстера падает монохроматическая волна с частотой  $\omega$ , отфильтрованная из солнечного света. В воде параллельно плоской границе расположены дифракционная решетка с числом штрихов  $N$  и постоянной  $d = a + b$  и экран, на который падает, пройдя через решетку и собирающую линзу, свет. Найти угловое распределение интенсивности  $I(\theta)$  на экране, определив максимальную интенсивность  $I_0$ . (4б) Под каким углом  $\theta_{\max}$  будет наблюдаться главный максимум? (1б)

5. На экран по нормали к нему падает плоская монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda$  и амплитудой  $E_0$ . В экране сделано кольцевое отверстие с радиусами между первой и второй зоной Френеля для точки  $P$ , находящейся на оси симметрии  $Z$  на расстоянии  $a$  от экрана. Найти амплитуду волны в точке  $P$  и оценить размер пятна на втором экране, поставленном в точке  $P$  по нормали к оси  $Z$ . (4б)

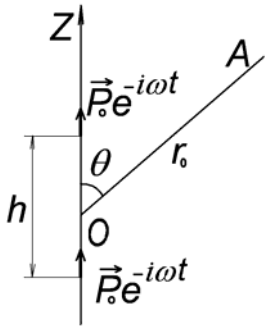


## Экзаменационная работа 2

1. Релятивистский электрон ( $e, m$ ) пролетает сквозь тонкое кольцо радиуса  $r_0$ , несущее равномерно распределенный заряд  $q$ , по его оси симметрии. Найти полную излученную энергию, малую по сравнению с начальной энергией  $\varepsilon_0$  электрона. (4б)

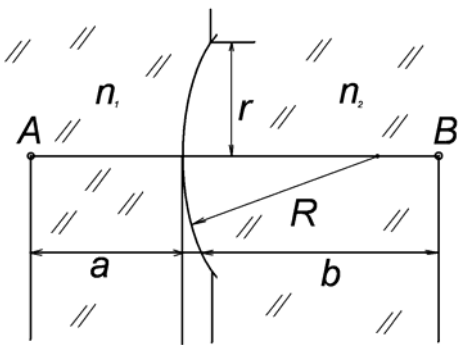
2. На сферический «конденсатор» (две непроводящие тонкостенные сферы ( $\varepsilon = 1$ ), радиусы которых  $a$  и  $b$ , с одинаковыми массами  $m$ , несущие равномерно распределенные заряды  $-q$  и  $q$  соответственно; сферы могут свободно перемещаться, но при этом не соприкасаются) падает плоская монохроматическая с частотой  $\omega$  волна. Найти полное сечение рассеяния. Скорости сфер  $v_a, v_b \ll c$ . Длина волны  $\lambda \gg b > a$ . (4б)

3. Расстояние  $h$  между двумя синфазными электрическими диполями с дипольными моментами  $\vec{p}_0 e^{-i\omega t}$  имеет порядок длины волны. Вектор  $\vec{p}_0$  направлен вдоль прямой, соединяющей два точечных диполя. Найти угловую интенсивность излучения  $\langle dI/d\Omega \rangle$ , испускаемую под углом  $\theta$  к оси  $Z$  и усредненную по времени. (4б)



4. Две прозрачные среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  разделены сферической поверхностью радиуса  $R$  и непрозрачным экраном с отверстием радиуса  $r$ . На прямой  $AB$ , проходящей через центр сферы  $O$  (оптическая ось), находится точечный монохроматический источник  $A$  с частотой  $\omega$  на расстоянии  $a$  от границы раздела. При каком  $r$  в точке  $B$ , находящейся на расстоянии  $b$  справа от границы раздела, амплитуда будет максимальной? ( $r \ll R$ ). (4б)

5. На пути плоской монохроматической волны  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$  поставлен прозрачный кольцевой диск, перекрывающий вторую зону Френеля для точки наблюдения с координатой  $Z_p$ . Толщина диска  $\Delta$ , показатель преломления —  $n$ . Найти амплитуду прошедшей волны в точке  $Z_p$ , пренебрегая отражением. При какой толщине  $\Delta$  интенсивность максимальна и чему она равна? (5б)



6. В волноводе прямоугольного сечения  $a \times b$  ( $a > b$ ) возбуждается  $H_{10}$  волна на частоте  $\omega_0$ . Потом его заполняют плазмой. Диэлектрическая проницаемость плазмы  $\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_p^2 / \omega^2)$ . Найти плазменную частоту  $\omega_p$ , если длина волны при этом в  $q$  раз больше, чем в пустом волноводе. (6б)

## Контрольная работа 1

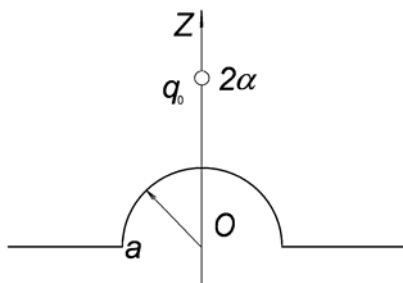
1. Внутри сферической области радиуса  $a$  заряд распределен с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 (r/a)^n, n > -2$ . На каком расстоянии  $z_0$  напряженность максимальна, и какова там ее величина. (2б)

2. Диэлектрический шар радиуса  $a$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и металлический шар создают независимо в однородном поле  $\vec{E}_0$  одинаковое искажающее дипольное поле. Найти радиус этого металлического шара. (4б)

3. В плоском вакуумном диоде с площадью электродов  $S$ , расстоянием между ними  $d$  и напряжением  $U$  найти скорость электрона (масса  $m$ , заряд  $e$ ) на расстоянии  $x$  от заземленного катода. Величина тока  $I$ , поле у катода нулевое. (3б)

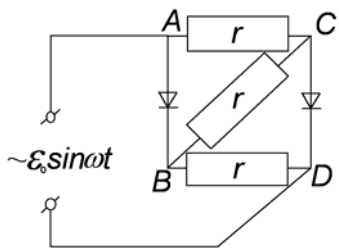
4. В пространстве с проводимостью  $\sigma$  идет ток с постоянной первоначально всюду плотностью  $\vec{j}_0$ . Внутри образовалась сферическая полость радиуса  $a$ , в которой вдали от поверхности полости в вакууме имеется небольшой шарик радиусом  $b \ll a$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Найти дипольный момент  $\vec{p}$  на шарике. (4б)

5. Нижнее полупространство заполнено металлом. В центре  $O$  граничной плоскости имеется полусферический выступ радиуса  $a$ , заполненный тем же металлом. На оси симметрии  $Z$  висит заряд  $q_0$  на расстоянии  $2a$  от точки  $O$  - центра выступа. Найти заряд  $q$  на поверхности выступа (3б) и силу  $F$ , действующую на выступ (2б).

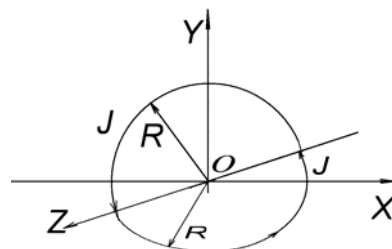


## Экзаменационная работа 1

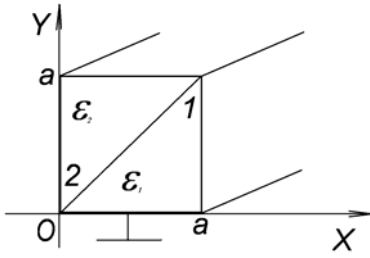
1. Изображенная схема состоит из двух «идеальных» диодов  $D_1$  и  $D_2$  и трех резисторов с сопротивлением  $r$  каждый и подключена к источнику переменной ЭДС  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ . Найти среднее значение тока. 3б



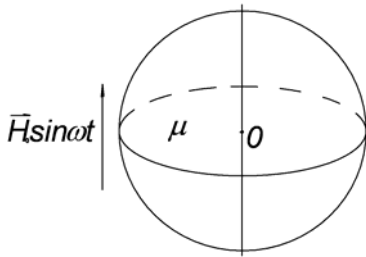
2. По круговому кольцу радиуса  $R$ , согнутому под углом  $90^\circ$  по диаметру, в вакууме течет постоянный ток  $I$ . Найти магнитное поле в точке с радиус-вектором  $\vec{r}(0, 0, z_0)$ , где  $z_0 \gg R$ . 3б



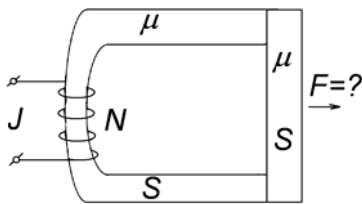
3. Пространство внутри заземленной металлической трубы квадратного сечения  $a \times a$  заполнено диэлектриками с проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , соприкасающимися по диагональной плоскости, как на рисунке. Граница раздела заряжена с поверхностной плотностью свободного заряда  $\sigma_0$ . Найти распределение потенциала  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  внутри трубы. Указание: в области 1 решение искать в виде  $\varphi_1(x, y) = c_1(x - a) \cdot y$ . 4б



4. Однородное магнитное поле медленно меняется по закону  $H(t) = H_0 \sin \omega t$ . Во сколько раз изменится ЭДС в витке, надетом по экватору на шар с магнитной проницаемостью  $\mu$ , по сравнению с тем же витком в вакууме? Поле  $\vec{H}$  перпендикулярно плоскости витка. Во что переходит это отношение при очень большом значении  $\mu$ . (3+1)б

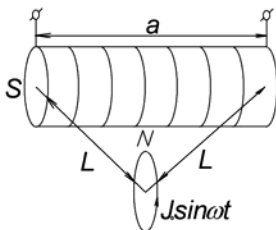


5. На U-образный магнитный сердечник квадратного сечения  $S = a \times a = 1 \times 1 \text{ см}^2$  намотано  $N = 100$  витков провода. К сердечнику приставили брусок, как показано на рисунке. По проводу пропущен ток  $I = 1 \text{ А}$ . Найти, с какой силой  $F$  надо потянуть за середину бруска, чтобы оторвать его от U-образного сердечника? Полная длина магнита и бруска  $l_{\text{ж}} = 20 \text{ см}$ . Магнитная проницаемость магнетика  $\mu = 10^3$ .



Сечение бруска  $S$  такое же, что и у магнита. Рассеянием магнитного поля пренебречь. 4б

6. Бесконечный цилиндр из фольги с поверхностной проводимостью  $\sigma_*$  (закон Ома:  $i = \sigma_* E$ ) имеет сечение  $S$  произвольной формы. Цилиндр помещен в однородное переменное во времени магнитное поле  $\vec{H}(t) = \vec{H}_0 e^{-i\omega t}$ , параллельное образующей цилиндра. Найти модуль амплитуды  $H_1$  магнитного поля внутри цилиндра. 5б

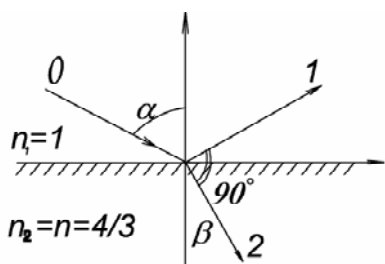


7. На равных расстояниях  $l$  от торцов соленоида с числом витков  $N$  и длиной  $a$  расположен одиночный виток, по которому идет ток  $I = I_0 \sin \omega t$ . Виток и витки катушки расположены в параллельных плоскостях и имеют одинаковые площади  $S$ . Найти ЭДС, возникающую на зажимах

катушки, считая  $\sqrt{S} \ll a, l$ . Указание: использовать симметрию коэффициентов взаимной индукции  $L_{12} = L_{21}$ . 6б

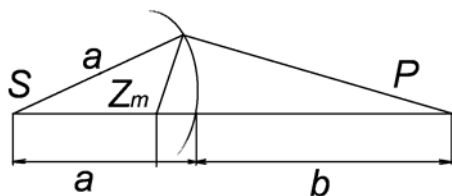
## Контрольная работа 2

1. На крыше НГУ стоит антенна радиусом  $r \approx 1$  м, принимающая сигналы от суточного спутника Земли, расположенного примерно на расстоянии  $R \approx 7R_3$  от центра Земли. Орбита спутника лежит в экваториальной плоскости. Учитывая, что широта Новосибирска около  $\varphi \approx 60^\circ$ , оценить угол между вертикалью и осью направления приема сигнала от спутника (2б). Считая, что прием идет в дециметровом диапазоне, оценить угловую точность нацеливания антенны на спутник  $\Delta\varphi$  (2б).



2. Солнечный луч падает из воздуха в воду под таким углом, что отраженный и прошедший лучи ортогональны. Какая доля падающего потока света попадает в воду при этом, если известно, что показатель преломления воды  $n = 4/3$ ? (4б)

3. В пустом резонаторе, имеющем форму куба с ребром  $a$ , возбуждена основная мода колебаний, в которой отлична от нуля  $x$ -компонента электрического поля. Считая проводимость металла резонатора очень высокой, найти распределение токов и зарядов на всех 6 гранях. Полная энергия электромагнитного поля в резонаторе равна  $W$ . (5б)



4. Найти частотный спектр сигнала  $E(t) = 0$  при  $|t| > \tau/2$  и  $E(t) = E_0 \sin(\pi t/\tau)$  при  $|t| \leq \tau/2$ . (2б)

5. Из точки  $S$  в точку  $P$  идет сферическая монохроматическая волна  $(E_0/r) \cdot \exp(ikr - \omega t)$ .

Получить вклад второй зоны Френеля в точке  $P$ , если все остальные зоны закрыты. (4б)

6. На зеркальную дифракционную решетку (число щелей  $N$ , постоянная решетки  $d$ , размер щели  $a$ ) под углом  $\alpha$  падает плоская монохроматическая длины  $\lambda$  волна под углом  $\alpha$  к вертикали. Под каким углом виден главный максимум? (2б) Оцените разрешающую способность такой решетки. (2б)

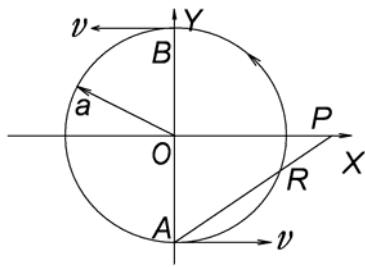
## Экзаменационная работа 2

1. На плоскую границу между вакуумом и однородной непоглощающей средой под углом  $45^\circ$  к нормали падает плоская монохроматическая волна. Найти связь между коэффициентами отражения  $R_{TM}$  и  $R_{TE}$ . (3б)

2. Две частицы с зарядами  $q$  и  $-q$  и равными массами  $m$  движутся, находясь вначале на концах диаметра окружности радиусом  $r_0$  и с полной энергией  $\varepsilon_0$ .

В нерелятивистском приближении найти зависимость радиуса  $r(t)$  от времени  $t$  и энергии  $\varepsilon(t)$ , учитывая потери на излучение. Скорость света равна  $c$ . (3б)

3. Точечный заряд  $q$  движется по орбите радиуса  $a$  со скоростью  $v$ .



Излучение, испущенное из положения  $A$  на орбите, попадает в точку  $P$  на оси  $X$  в тот момент времени, когда заряд оказался в точке  $B$  (см. рис.). Для произвольного значения  $v$  найти расстояние  $R$  от  $A$  до  $P$  (2б). Найти вектор  $\vec{B}$  поля излучения в точке  $P$  для случая  $v \ll c$ . (3б)

4. Пустой волновод характеризуется минимальной частотой  $\omega^*$  такой, что никакие волны с частотой  $\omega < \omega^*$  в волноводе не распространяются. Волновод заполнили однородной средой с проницаемостью  $\varepsilon > 1$ . С какой частотой надо запустить волну в волновод, чтобы ее фазовая скорость равнялась бы скорости света в вакууме? (4б)

5. От точечного источника  $S$  электромагнитного излучения идет волна с длиной волны  $\lambda$ . Во сколько раз изменится интенсивность волны в точке  $P$ , если на ее пути установить тонкий прозрачный диск, площадь которого составляет одну треть от площади первой зоны Френеля. Оптическая длина пути при этом увеличивается на  $\lambda/3$ . (4б)

6. Бесконечная непроводящая плоскость  $z = 0$  нулевой толщины, обладающая массой  $\mu$  на единицу площади и заряженная поверхностным зарядом с плотностью  $\sigma$ , может свободно перемещаться в плоскости  $z = 0$ . На плоскость падает по нормали плоскополяризованная монохроматическая электромагнитная волна с амплитудой  $E_0$  и частотой  $\omega$ . Найти комплексные амплитуды отраженной  $E_1$  и прошедшей  $E_2$  волн и амплитуду скорости плоскости  $v$  при условии  $v \ll c$ . (5б)

7. Свет от газоразрядной трубки, диаметр которой  $D = 0,1$  см падает на дифракционную решетку, расположенную на расстоянии  $l$ . Оценить, на каком минимальном расстоянии  $l_{\min}$  от трубки нужно расположить решетку, чтобы можно было в первом порядке дифракции разрешить две спектральные линии с интервалом между ними  $\delta\lambda = 5$  нм при  $\lambda = 500$  нм. Период решетки  $d = 5 \cdot 10^{-4}$  см. (6б)

## 2004/2005 учебный год

### Контрольная работа 1

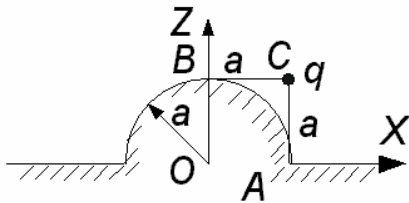
1. На большом расстоянии  $\ell$  друг от друга находятся два проводящих шарика: незаряженный маленький радиусом  $r$  и большой радиусом  $R \ll \ell$  с зарядом  $q$ . Оценить, во сколько раз изменится сила их взаимодействия, если шарики соединить по прямой проводником. 4 б



2. На высоте  $h$  на оси  $Z$  над плоскостью  $XU$  находится равномерно заряженный зарядом  $q$  круговой виток радиусом  $a$ . Получите выражение для первых двух ненулевых членов разложения по мультиполям потенциала  $\varphi(r, \theta)$  на большом расстоянии  $r \gg a$ . 4б

3. Металлический шар емкостью  $C_0$ , несущий заряд  $q$  окружили заземленной концентрической сферической оболочкой радиуса  $a$ . Найти потенциал шара после этого. 4б

4. В центре плоскости, разделяющей два полупространства, имеется полусферический купол радиуса  $a$ . Все нижнее полупространство с куполом заполнено металлом. На расстоянии  $a$  от плоскости и таком же расстоянии  $a$  от макушки купола  $B$  находится точечный заряд  $q$ . Найти плотность  $\sigma$  заряда в точке  $A$  под зарядом и в точке  $B$  на куполе. 5б



5. В бесконечной среде с проводимостью  $\sigma_0$ , где шел постоянный ток с плотностью  $\vec{j}_0$ , возникла сферическая область радиуса  $a$ , в которой проводимость стала равной  $\sigma_1$ . Найти: 1) полный ток  $J$  через эту область (4б); 2) напряженность  $\vec{E}$  электрического поля в ней (1б).

6. Во сколько раз изменится сила давления от ударов электронов ( $e, m$ ) об анод в плоском вакуумном диоде, если напряжение на нем изменить в  $n$  раз? 3б

## Экзаменационная работа 1

1. Вычислить, с какой силой  $F$  действует на бесконечный прямой провод с током  $J = 1$  А точечный магнитный диполь с моментом  $\vec{m} = 1$  эрг/Гс. Диполь находится на расстоянии  $a = 1$  см от провода и направлен на него. Скорость света  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с. (2б+1б)

2. Полый непроводящий цилиндр с радиусом сечения  $a$  заряжен с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Цилиндр движется со скоростью  $v \ll c$  вдоль оси  $Z$ , одновременно вращаясь с угловой скоростью  $\omega$  вокруг неё. Найти магнитное поле  $\vec{B}(R)$ . (3б)

3. Объёмно-заряженный круговой в сечении длинный прямой цилиндр радиусом сечения  $a$  вращается вокруг оси  $Z$  симметрии с угловой скоростью  $\omega$ . Найти распределение объёмной плотности зарядов  $\rho(R)$ , если результирующее магнитное поле  $B_z(R)$  внутри цилиндра известно:  $B_z(R) = B_0(1 - R^3/a^3)$ . Краевыми эффектами пренебречь. (3б)

4. По оси длинной толстостенной цилиндрической трубы с внутренним радиусом  $a$ , изготовленной из материала с проводимостью  $\sigma$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ , проходит прямой тонкий провод с током  $J_0 e^{i\omega t}$ . Для

случая  $\delta \ll a$  ( $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$  – глубина проникновения) найти распределение магнитного поля  $B_\alpha(R)$  внутри трубы вдали от концов (1б) и в её стенке. (Толщина стенки трубы порядка  $R$ ) 3б.

5. Внутри полого сверхпроводящего цилиндра (внешний радиус  $b$ , внутренний –  $a$ , длина  $\ell$ ,  $\ell \gg a$  ( $b \gg a$ )) имеется магнитное поле  $H_0$  вдоль оси. Цилиндр плавно помещают над поверхностью сверхпроводящего полупространства так, что расстояние от торца цилиндра до поверхности равно  $h$ , и цилиндр висит над поверхностью. Вес цилиндра  $P$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти  $h$ , считая, что  $h \ll a$ .. (5б)

6. Полый тонкостенный непроводящий цилиндр радиуса  $a$ , заряженный с поверхностной плотностью  $\sigma$ , помещают в коаксиальный сверхпроводящий цилиндр радиуса  $b$  ( $b > a$ ) и начинают вращать вокруг оси с угловой скоростью  $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$ . Найти установившееся переменное электрическое поле во всем пространстве. Длина цилиндров  $\ell \gg b$ . Краевыми эффектами пренебречь. (6б)

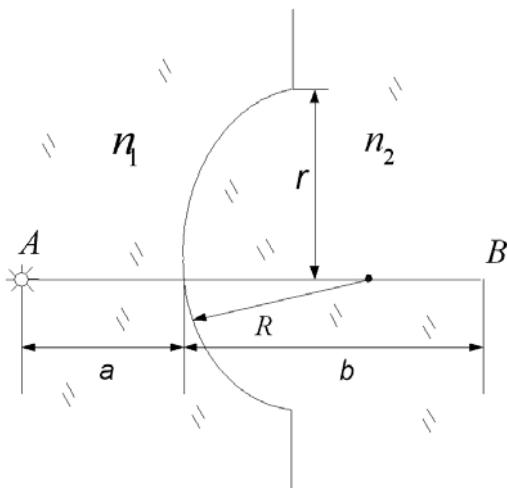
## Контрольная работа 2

1. Естественный свет падает под углом Брюстера на плоскую поверхность воды. Показатель преломления воды равен  $n = 4/3$ . Найти коэффициент прохождения  $T$  при этом. (3б)

2. Ближайшая к нам звезда Солнце имеет диаметр  $D = 1,4 \cdot 10^6$  км и находится от нас на расстоянии  $\ell = 1,5 \cdot 10^8$  км. Оцените, с какого минимального расстояния Вы увидите бы Солнце как обычную точечную звезду, а не диск. Размер Вашего зрачка при этом наблюдении принять равным  $d = 5$  мм, а среднюю длину световой волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см. (2б)

3. В волноводе с прямоугольным сечением  $a \times b$  ( $a > b$ ) идет  $H_{10}$  волна с частотой  $\omega_0$ . Потом волновод наполняют плазмой, диэлектрическая проницаемость которой  $\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$ . Найти плазменную частоту  $\omega_p$ , если длина волны при этом в  $m$  раз больше, чем в пустом волноводе. (5б)

4. Две прозрачные среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  разделены сферической поверхностью радиусом  $R$  и непрозрачным экраном с круглым отверстием радиусом  $r$ . На прямой  $AB$ , проходящей через центр сферы  $O$  (оптическая ось) находится точечный монохроматический источник  $A$  с частотой  $\omega$  на расстоянии  $a$  от границы раздела. При каком значении радиуса  $r$  в точке  $B$ , находящейся на расстоянии  $b$  справа от границы раздела, амплитуда волны будет максимальной? ( $r \ll R$ ) (4б)



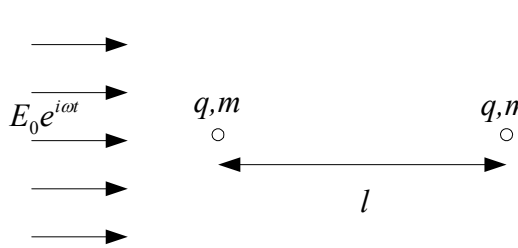
5. На четверть-волновую пластинку толщиной  $d = (2m+1)\lambda_2/4$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$  с показателем преломления  $n_2$  из среды с показателем преломления  $n_1$  по нормали падает плоская монохроматическая (с длиной волны  $\lambda_1$ ) волна с  $\ell_{\parallel} \gg d_1$ . Учитывая многократные отражения показать, что коэффициент прохождения  $T = \frac{4n_1 n_3 n_2^2}{(n_1 n_3 + n_2^2)^2}$ . (4б). Чему соответствует для  $T$  условие  $n_1 n_3 = n_2^2$ , а для  $R = 1 - T$  условия  $n_1 n_3 \gg n_2^2$  и  $n_1 n_3 \ll n_2^2$ . (1б)

6. Дифракционная решетка составлена из чередующихся полос поляроидов с взаимно ортогональными направлениями поляризации. Полное число полос  $2N$ . Ширина каждой –  $a$ . Найти угловое распределение интенсивности света, прошедшего сквозь решетку. Падающий свет естественный, падает по нормали с интенсивностью  $I_0$ . Что изменится, если закрыть все чётные щели? (4б)

## Экзаменационная работа 2

1. Бесконечно протяженный тонкий непроводящий лист, заряженный с поверхностной плотностью  $\sigma$ , колеблется со скоростью  $v = v_0 \rho^{-i\omega t}$  в своей плоскости, порождает электромагнитные волны. Найти усредненную по времени мощность внешних сил, необходимую для поддержания колебаний, (отнесенную к единице поверхности листа). 2б

2. Прямая бесконечная нить заряжена с линейной плотностью  $\kappa$  (в покое). Найти магнитное поле  $\vec{B}$ , создаваемое нитью в системе отсчета, где нить движется со скоростью  $\vec{v} \sim \vec{c}$ , направленной вдоль нити. 3б



распространяется линейно поляризованная электромагнитная волна. Расстояние между зарядами  $\ell \sim \lambda$ . Найти дифференциальные сечения для волны, рассеянной вперед, и волны, рассеянной назад. 3б

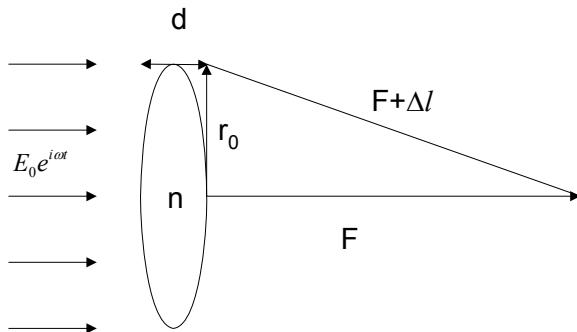
4. Плоскополяризованная монохроматическая электромагнитная волна (длина волны  $\lambda$ ) рассеивается на диске. Радиус диска  $R$ , толщина  $h \ll R$ , диэлектрическая проницаемость материала диска  $\varepsilon$  ( $\lambda \gg \sqrt{\varepsilon} R$ ). Электрическое поле волны перпендикулярно плоскости диска. Найти полное и дифференциальное сечение рассеяния волны на диске. 4б

5. По прямому бесконечному проводу течет постоянный ток  $I_0$ . К нему с постоянной скоростью  $v \ll c$  приближается по нормали сверхпроводящее кольцо индуктивностью  $L$ , радиуса  $a$  так, что проводник и кольцо находятся



в одной плоскости. Найти энергию  $\Delta E$ , потерянную на излучение в интервале  $r_0 \leq r < \infty$ , считая, что  $r_0 \gg a$ . 5б

6. Плоская волна  $E_0 \exp[i(kz - \omega t)]$  падает на собирающую линзу так, как показано на рисунке. Поперечник линзы  $r_0$  соответствует двум зонам Френеля для точки  $F$  (фокуса). Показать, что толщина линзы при заданных условиях равна  $d = \lambda/(n - 1)$ ,



где  $n$  – показатель преломления материала линзы. 1б. Пренебрегая отражением от поверхности линзы, найти амплитуду прошедшей волны в точке фокуса. 5б

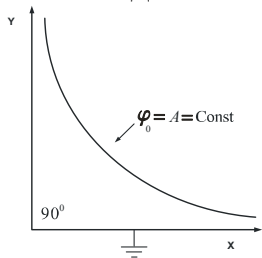
## 2005/2006 учебный год

### Контрольная работа 1

1. Оценить силу взаимодействия между заряженным (заряд  $q$ ) металлическим изолированным шаром и маленькой росинкой-каплей с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Радиус росинки  $a$  много меньше расстояния  $\ell$  между центрами рассматриваемых тел. (3 балла)  $\ell \gg b \gg a$

2. Параллельно плоской границе между вакуумом и диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$  на высоте  $h$  от границы расположена прямая бесконечная нить с зарядом единицы длины  $\chi$ . Найти силу на единицу длины  $dF/dl$  нити. (2 балла)

3. Один электрод системы заземлен и представляет собой двугранный угол  $90^\circ$ , а другой – имеющий потенциал  $\varphi_0$  – это гиперболическая поверхность  $xy = A = \text{Const}$ . Найти потенциал  $\varphi(x, y)$  в пространстве между электродами, удовлетворяющий уравнению Лапласа  $\Delta\varphi(x, y) = 0$  и граничным условиям. (4 балла)



4. Всё пространство было занято диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$  и находилось в однородном электрическом поле напряженностью  $\vec{E}_0$ . В начале координат возникла сферическая вакуумная полость радиуса  $a$ , а внутри неё остался диэлектрический шар радиуса  $b < a$  с центром в нуле. Найти поле  $\vec{E}$ , в зазоре между  $a$  и  $b$  (3 балла) и дипольный момент  $p$ , наведенный на шаре. (1 балл).

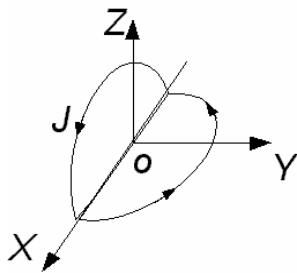
5. Нижний конец длинного цилиндрического конденсатора, обкладки которого находятся под постоянным напряжением, погрузили в проводящую жидкость на заметную глубину  $h$ , при этом сопротивление конденсатора равно  $R$ . Если глубину увеличить вдвое, сопротивление станет равным  $2R/3$ .

Найти сопротивление конденсатора при погружении нижнего конца на глубину в 4 раза большую первоначальной. Указание: обязательно учтите роль краевых эффектов. (5 баллов)

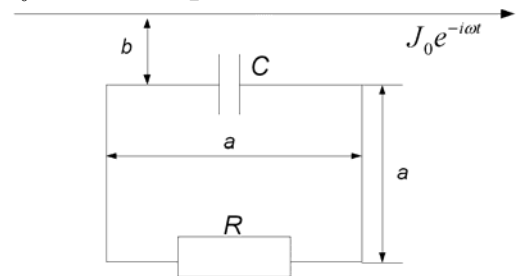
6. 6. Через неоднородную среду с проницаемостью  $\varepsilon(\vec{r})$  ( $\varepsilon \neq 0$ ) и проводимостью  $\sigma$  проходит пространственный ток с плотностью  $\vec{j}$ . Найти создавшийся в среде объёмный электрический заряд  $\rho(\vec{r})$ . (5 баллов)

## Экзаменационная работа 1

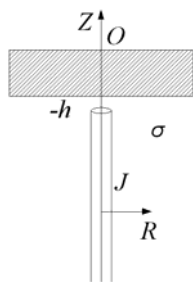
1. По круговому витку радиусом  $a$ , согнутому по диаметру под углом  $90^\circ$  идет ток  $J$ . Найти индукцию  $\vec{B}(O)$  в центре витка  $O$ . (2 балла)



2. Вдоль прямолинейного бесконечного проводника идет переменный ток  $J(t) = J_0 e^{-i\omega t}$ . На расстоянии  $b$  от проводника расположена квадратная (со стороной  $a$  рамка с большим сопротивлением  $R$  и емкостью  $C$ ). Рамка и проводник лежат в одной плоскости. Найти зависимость тока  $J(t)$  в рамке. (2 балла)



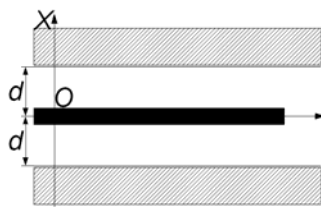
3. Горизонтальный стержень весом  $mg$  и длиной  $l$  скользит без трения по двум вертикальным стержням, соединенным внизу соленоидом с большой индуктивностью  $L$ . Перпендикулярно плоскости движения стержня существует магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Найти зависимость тока  $J(t)$  и смещения стержня  $x(t)$  от времени (4 балла) и частоту колебаний стержня, если в момент времени  $t = 0$  стержень отпускают без начальной скорости. Стержень и соленоид идеально проводящие. (2 балла)



4. Проводящая среда с проводимостью  $\sigma$  заполняет полупространство, закрытое сверху идеально проводящей тонкой пластинкой. На расстоянии  $h$  от границы среды находится открытый конец тонкого прямого полубесконечного изолированного провода с постоянным током  $I$ . Найти распределение потенциала  $\varphi(R, z)$  и распределение объемной плотности тока  $J(R, z)$  в среде.  $R$  – расстояние от оси  $z$ . (4 балла)



5. Параллельно оси бесконечного проводящего цилиндра (радиус  $a$ , проводимость  $\sigma$ ,  $\varepsilon = \mu = 1$ ) приложено внешнее магнитное поле индукции  $B_z$ . Цилиндр закрутили вокруг его оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ . Найти добавку к магнитному полю внутри цилиндра, считая ее малой по сравнению с  $B_z$ . (2 балла). Найти объемную плотность заряда  $\rho(R)$  в цилиндре. (3 балла)



6. В проводнике с проводимостью  $\lambda$ , заполняющем все пространство, имеется бесконечная

полость (щель)  $|x| < d$ . В плоскости  $x = 0$  расположена тонкая непроводящая бесконечная пластина, на которой равномерно распределен поверхностный заряд с плотностью  $\sigma$ . Пластина колеблется (вдоль оси  $z$ ) по закону  $v_z = v_0 e^{-i\omega t}$ . Найти установившиеся комплексные амплитуды электрического и магнитного полей. (3 балла). Какую силу (на единицу площади) надо прикладывать к пластине, чтобы поддерживать заданное движение? Масса единицы площади пластины равна  $\mu$ . (2 балла)

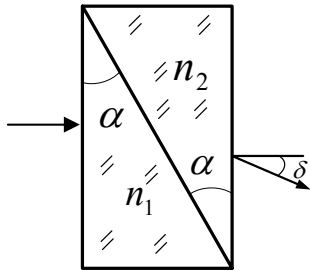
## Контрольная работа 2

1. Свет из воды (показатель преломления  $n=4/3=1,33$ ) через плоскую границу уходит в воздух (показатель преломления  $n=1$ ).

а) Найти коэффициент прохождения света через границу  $T$  при его нормальном падении (1 балл).

б) Найти наименьший угол полного внутреннего отражения  $\alpha_0$  (1 балл).

в) На границу падает циркулярно поляризованный свет. Для угла падения, отличающегося от угла Брюстера  $\beta$  на небольшую величину  $\gamma$  найти отношение интенсивностей отраженных волн ТЕ и ТМ (4 балла)



2. Плоскопараллельная пластина образована парой прямоугольных в сечении призм с малыми одинаковыми углами при вершинах  $\alpha \ll 1$ , имеющих близкие показатели преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Волна падает из вакуума по нормали на первую призму. По результату измерения угла выхода волны из системы в вакуум  $\delta \ll 1$  определить разность показателей преломления  $\Delta n = n_1 - n_2$ .

(3 балла)

3. По волноводу сечением  $a \times b$ , заполненному веществом с показателем преломления  $n$ , идет  $H_{m0}$  волна с частотой  $\omega$  и с  $ct \gg 1$ . Волновод обрывается, переходя в вакуум. При каких значениях  $m$  волна не выйдет из волновода? (3 балла).

*Дополнение для обсуждения в аудитории: Чтобы решение было правильным, нужно еще, чтобы было  $(\omega na)^2 / (\pi c)^2 - m^2 \gg 1, (a/b)^2$ . Объяснить это условие.*

4. На плоскую зеркальную поверхность шириной  $Na$  падает плоская монохроматическая волна под углом  $\alpha$  (длина волны  $\lambda$ ). На зеркало нанесены  $N \gg 1$  параллельных черных полос шириной  $b$ , на расстоянии  $a$  друг от друга. Найти угловое распределение интенсивности  $I(\theta)$ , отраженных от этой дифракционной решетки электромагнитных волн.

(4 балла)

5. Свет от лампы (точечный источник  $S$ ) падает на поверхность воды (показатель преломления  $n$ ), покрытую непрозрачной пленкой с круглым отверстием радиуса  $R$ , расположенном прямо под лампой. Точка наблюдения  $P$  расположена на дне сосуда на одной вертикали с источником  $S$  и центром

отверстия. Высота лампы над поверхностью воды  $a=1$  м, глубина сосуда  $b=4/3$  м,  $R=2$  мм,  $n=4/3$ , длина волны света  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см. Сколько зон Френеля размещается в отверстии? (2 балла) Как примерно изменится освещенность точки Р, если на отверстие наложить зонную пластинку, перекрывающую все нечетные зоны. (4 балла)

**Указание.** При описании волны в среде с показателем преломления  $n$  следует рассматривать оптическую длину  $n\ell$  вместо геометрической длины  $\ell$ . Учсть, что  $R \ll a, b$ .

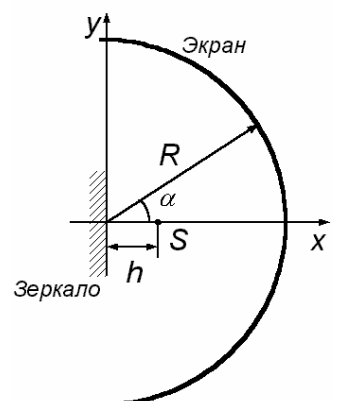
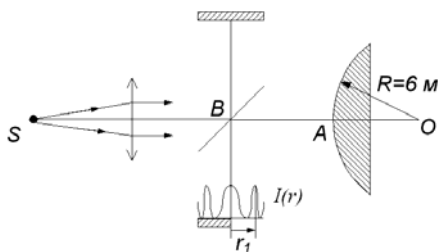
## Экзаменационная работа 2

1. 11 одинаковых параллельных диполей расположены на прямой, перпендикулярной их направлениям, на расстоянии  $\lambda/2$  друг от друга. Найти отношение интенсивностей излучения в волновой зоне вдоль той же прямой и перпендикулярно плоскости диполей в случаях, когда соседние диполи излучают: а) синфазно и б) в противофазе. (2б)

2. Тонкий стержень длиной  $l$  и сечением  $S$ , изготовленный из диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon \approx 1$  вращается с частотой  $\omega$  в магнитном поле  $\vec{B}$ , перпендикулярном плоскости вращения. Найти длину излучаемой волны и среднюю за период интенсивность излучения при условии  $\omega l \ll c$ . (3б)

3. По короткозамкнутому сверхпроводящему соленоиду (радиус сечения соленоида —  $R$ , длина —  $l_0$ , число витков  $N$ ,  $l_0 \gg R$ ) течет ток  $J_0$ . Соленоид растягивают по закону  $l = l_0(1 + a \sin \omega t)$ , где  $|a| < 1$ . Радиус  $R$  при этом не меняется. Найти в волновой зоне установившееся электрическое и магнитное поля и среднюю за период колебаний полную интенсивность излучения. Длина излучаемой волны  $\lambda \gg l$ . (4б)

4. Интерферометр Майкельсона (см. рисунок) освещается плоской волной от точечного источника в фокусе линзы. Одно из зеркал интерферометра заменили на сферическое с радиусом кривизны 6 м. Расстояние от вершины сферического зеркала до светоделительной пластины и от светоделительной пластины до экрана равны  $L=50$  см. Найти радиус первого кольца  $r_1$  на экране, если в центре интерференционной картины светлое пятно. Длина волны излучения  $\lambda=0.5$  мкм. (3 балла)



5. Параллельно зеркалу  $x=0$ , на расстоянии  $h$  от него расположен квазимонохроматический ( $\omega \pm \Delta\omega/2$ ,  $\Delta\omega \ll \omega$ ) источник в виде отрезка прямой, излучающий линейно

поляризованную волну с полем  $\vec{E}$ , параллельным оси  $z$ . Интерференция наблюдается на цилиндрическом экране радиуса  $R \gg h$ .

Для случая  $h \ll \pi c / \Delta \omega$ : выразить распределение интенсивности излучения  $I(\alpha)$  на экране как функцию угла  $\alpha$ , учтя потерю полуволны при отражении от зеркала (2б);

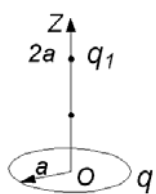
при  $h = m\lambda$ , где  $m \gg 1$  – целое число, вычислить положения светлых полос, в области  $\alpha \ll 1$  (2б);

для случая  $2h = \pi c / \Delta \omega$  найти, как видность полос на экране зависит от угла  $\alpha$ , считая контур спектральной линии прямоугольным. (4б)

6. На непрозрачный экран с отверстием в виде полукольца (см. рисунок) с внутренним радиусом  $r_0$  по нормали падает плоская монохроматическая волна с интенсивностью  $I_0$ . При каком минимальном внешнем радиусе  $r_1$  интенсивность в точке  $P$  с координатой  $z_p \gg r_0$  максимальна и чему она равна? б) Откроем вторую половину кольцевого отверстия и вставим в него стеклянную (с показателем преломления  $n$ ) пластину. При какой толщине пластины  $h$  интенсивность в точке  $P$  увеличится вдвое? Отражением от стекла пренебречь. (3б)

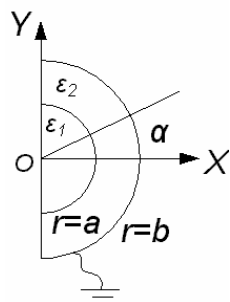
## 2006/2007 учебный год

### Контрольная работа 1



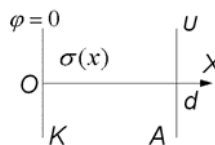
1. Диск радиуса  $a$  равномерно заряжен с суммарным зарядом  $q$ . В точке  $z = 2a$  находится точечный заряд  $q_1$ . Какую работу надо совершить, чтобы заряд  $q_1$  переместить в точку  $z = a$ ? (2 балла)

2. Два длинных сплошных металлических цилиндра, оси которых параллельны и находятся на расстоянии  $R \gg a$  друг от друга, где  $a$  – радиус сечений обоих цилиндров. Один из цилиндров заряжен равномерно с плотностью заряда на единицу длины  $\kappa$ , а другой не-заряжен. Пренебрегая краевыми эффектами, найти силу  $dF/d\ell$ , действующую на единицу длины любого из цилиндров. (4 балла)



3. Пространство внутри бесконечно длинного тонкостенного проводящего цилиндра с сечением в виде полукруга  $r = b$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  заполнено однородными диэлектриками с проницаемостями  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . Граница между ними в виде цилиндрической поверхности  $r = a$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , ( $a < b$ ) заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma(\alpha) = \sigma_0 \cos \alpha$ . Найти распределение потенциалов  $\varphi_{1,2}(r, \alpha)$ . (5 баллов)

4. На границе раздела двух диэлектриков с проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  находится точечный диполь  $\vec{p}$ . Найти электрическое поле и распределение поверхностных зарядов. (6 баллов)



5. Пространство между двумя электродами (катод и анод) находящимися на расстоянии  $d$  под напряжением  $U$ , занято проводящей средой с проводимостью  $\sigma(x) = \sigma_0 \left(1 + \frac{x}{r}\right)$ . Найти распределение объемного заряда  $\rho(x)$ . (4 балла)

Предварительные оценки в баллах:

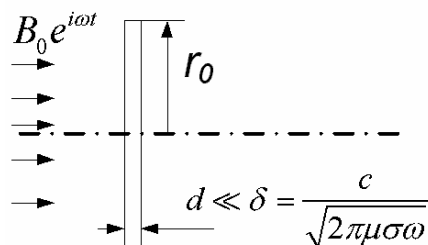
5 баллов  $\leq$  удовлетворительно  $\leq$  8 баллов, 9 баллов  $\leq$  хорошо  $\leq$  12 баллов.

## Экзаменационная работа 1

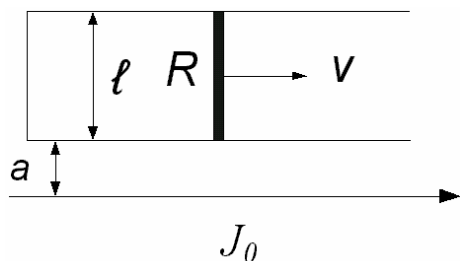
1. В центре кольца радиусом  $b$ , равномерно заряженного суммарным зарядом  $q$ , находится незаряженный диэлектрический шарик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и радиусом  $a \ll b$ . Какую работу необходимо затратить, чтобы переместить шарик вдоль оси симметрии кольца на расстояние  $b$  от его начального положения? (3 балла)

2. Внутри длинного короткозамкнутого соленоида с идеально проводящими витками с круговым сечением радиусом  $R$  создано магнитное поле  $B_0$ . Потом форму сечения изменили с круга на квадрат со стороной  $a = \pi R/2$ , оставив длину соленоида неизменной. Какую работу на единицу длины соленоида при этом затратили? (3 балла)

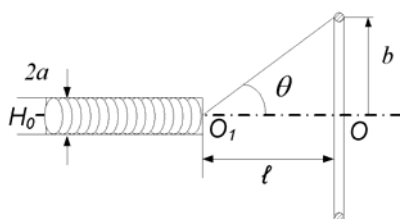
3. Проводящий диск с проводимостью  $\sigma$ , радиусом  $r_0$  и толщиной  $d$  установлен перпендикулярно однородному магнитному полю  $B_0 e^{i\omega t}$ . Определить для случая  $d \ll \delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$  усредненную интенсивность тепловыделения  $\langle Q \rangle$  в диске. (3 балла)



4. Длинный прямой провод с постоянным током  $J_0$  и П-образный проводник с подвижной перемычкой длиной  $\ell$  и длинными сторонами, параллельными этому проводу, размещены как показано на рисунке. Перемычка имеет сопротивление  $R$  и перемещается с постоянной скоростью  $v$ . Найти ток  $J$ , текущий через эту перемычку, и силу  $F$ , необходимую для поддержания постоянства скорости  $v$  перемычки. Сопротивлением подводящих проводов, скользящих контактов и индуктивность контура пренебречь. (3 балла)

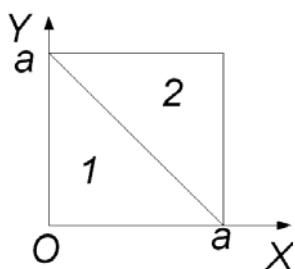


5. В магнитное поле полубесконечного соленоида вносят тонкое сверхпроводящее кольцо радиуса  $b$ , индуктивность кольца  $L$ . Плоскость



кольца перпендикулярна оси соленоида, центр  $O$  находится на оси. Положение кольца задается углом  $\theta$  (см. рисунок,  $O_1O = \ell \gg a$ ). Найти силу, действующую на кольцо, если магнитное поле в соленоиде вдали от конца равно  $H_0$ , радиус сечения соленоида  $a \ll b$  и ток в кольце до внесения в поле отсутствовал. (4 балла)

6. Два концентрических (с общей осью симметрии) идеально проводящих кольца с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a \ll b$ ) и индуктивностями  $L_a$  и  $L_b$  находятся в одной плоскости. В начальном положении ток в большом кольце  $J_b = J_0$ , а в малом кольце  $J_a = 0$ . Найти изменение энергии магнитного поля этой системы после удаления малого кольца на бесконечность. (5 баллов)

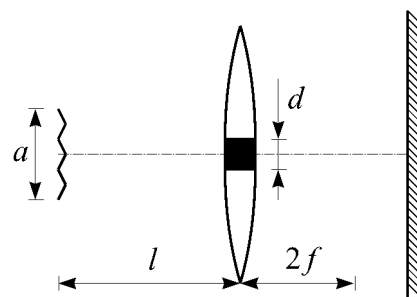


7. В тонкостенной идеально проводящей трубе квадратного сечения со сторонами  $a$  создано магнитное поле  $\vec{B}(x, y)$ , определяемое векторным потенциалом  $A_1 = A_0 xy \cdot e_z$ ,  $A_2 = A_0(a - x)(a - y) \cdot e_z$  соответственно в областях 1 и 2 (см. рисунок). Найти распределение токов, создающих заданное поле. (5 баллов)

## Контрольная работа 2

1. Плоскопараллельная стеклянная пластина толщины  $d$  с показателем преломления  $n$  освещается немонахроматическим точечным источником света с длинами волн в диапазоне от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ . Далее свет проходит через линзу, параллельную пластине. Интерференционная картина наблюдается в проходящем свете на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы. При какой максимальной толщине пластины интерференция еще видна? Считать поперечный размер пластины  $a$  и расстояние от нее до источника  $L$  такими, что  $a/L \ll 1$ . (3б)

2. Собирающая линза с фокусным расстоянием  $f$  распиlena пополам, половинки раздвинуты на небольшое расстояние  $d$ , заполненное непрозрачным веществом (билинза Бийе). Линза освещается протяженным источником света с длиной волны  $\lambda$ , расположенным на расстоянии  $l$  от нее ( $l > 2f$ ). Оценить максимальный размер  $a$  источника, при котором можно наблюдать интерференционную картину на экране за линзой. Расстояние до экрана  $\gg l$ . (4б)



3. Найти коэффициент прохождения неполяризованного света из воздуха в прозрачную полубесконечную среду с показателем преломления  $n$ . Угол падения  $\alpha = \arctg n$ . (3б)

4. На собирающую линзу размером  $D$  и фокусным расстоянием  $F_1$  падает широкий параллельный оптической оси пучок света с длиной волны  $\lambda$ . Пройдя первую линзу, свет падает на вторую с фокусным расстоянием  $F_2$ ,

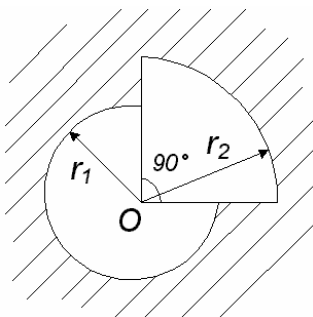
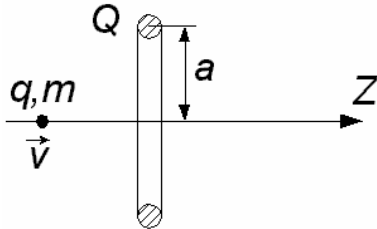
имеющую общую оптическую ось с первой линзой. Расстояние между линзами  $F_1 + F_2$ . Оценить минимальный диаметр отверстия диафрагмы, которую можно разместить на расстоянии  $F_1$  от первой линзы так, чтобы не повлиять на прохождение света. (2б). Какова угловая расходимость пучка света, выходящего из второй линзы? (1)

5. Прямоугольный волновод сечением  $a \times b$  заполнен диэлектриком с проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Определить все компоненты поля для  $H_{mn}$ -волны, распространяющейся вдоль этого волновода. Указать предельную частоту этой волны  $\omega$  (5б)

## Экзаменационная работа 2

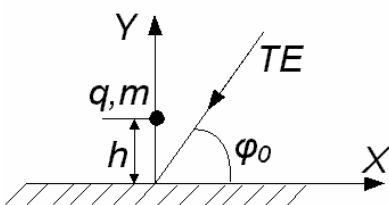
1. Электрон (заряд  $-e$ , масса  $m$ ) движется со скоростью  $v \ll c$  вокруг неподвижного заряда  $+Q$  по окружности. Найдите энергию, излученную электроном за один оборот. (2б)

2. Частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  пролетает по оси симметрии  $Z$  кольца с радиусом  $a$  и зарядом  $Q$ . Найдите скорость потери энергии на излучение  $dE/dt$  в произвольной точке  $z_0$  и полную величину энергии  $\Delta E$ , излученную частицей на всем её пути, если скорость частицы удовлетворяет условию  $v \gg \sqrt{\frac{2qQ}{ma}}$ . (4б)



3. На экран с вырезом, показанным на рисунке, по нормали падает плоская монохроматическая волна  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ . Определите амплитуду волны в точке  $P$ , находящейся на оси  $Z$  в точке  $z_p$ . Ось  $Z$  проходит через центр  $O$  выреза. Радиусы соответственно равны  $r_1 = \sqrt{\lambda z_p}$  и  $r_2 = \sqrt{3\lambda z_p/2}$ , где  $\lambda$  – длина волны. (4б)

4. На плоское идеально проводящее зеркало падает под углом  $\varphi_0$  плоская

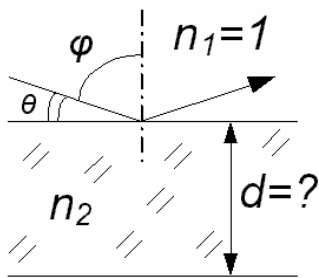


$TE$ -волна с длиной волны  $\lambda$  и амплитудой  $E_0$ . На высоте  $h$  находится частица с зарядом  $q$  и массой  $m$ . Найдите дифференциальное сечение рассеяния волны в такой системе. (5б)

5. Плоская квазимонохроматическая световая волна со средней длиной волны  $\lambda = 0,6 \mu\text{м}$  падает по нормали на дифракционную решетку. Картина дифракции наблюдается в фокальной плоскости собирающей линзы, параллельной решетке. Угловой размер главного максимума равен  $1^\circ$ , следующего за ним –  $3^\circ$ , а угловое расстояние между ними равно  $30^\circ$ . Найдите постоянную решетки  $d$  и оцените число штрихов  $N$  решетки (2б), а также ширину спектра  $\Delta\lambda$  падающего света. (2б)



6. Пучок лучей с длиной волны  $\lambda$  падает под скользким углом  $\frac{\pi}{2} - \varphi = \theta \ll 1$  из воздуха ( $n_1 = 1$ ) на пластину толщиной  $d$ ,



много большей длины волны. Коэффициент преломления в среде при этом чуть меньше единицы:  $n_2 = 1 - \delta_2$ ,  $\delta_2 \ll 1$ . Найдите, при каких углах  $\theta_{\text{ПВО}}$  лучи испытывают полное внутренне отражение (1б). При каких углах, заметно больших, чем угол  $\theta_{\text{ПВО}}$  (при этом угол  $\theta$  остается малым) расстояния между минимумами в коэффициенте отражения составляет  $\delta\theta$ . Найдите толщину пластинки  $d$  (3б).



# ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

2000/2001 учебный год

## Контрольная работа 1

**Задача 1.** Потенциал на оси кольца в зависимости от расстояния  $x$  до его центра равен:

$$\varphi(x) = \frac{q}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{2\pi\kappa a}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \text{ где } \kappa - \text{заряд на единицу длины.}$$

Согласно принципу суперпозиции, от 2-х колец потенциалы складываются, и в точке  $x=a$ :

$$\varphi = 2\pi\kappa a\sqrt{2}$$

Напряжённость электрического поля на оси кольца в зависимости от расстояния до его центра  $x$  равна:

$$E_x(x) = \frac{2\pi\kappa a x}{(\sqrt{a^2 + x^2})^{3/2}}, \text{ из суперпозиции } \vec{E} = \frac{\pi\kappa}{a} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right), \text{ модуль } E = \frac{\pi\kappa}{a}.$$

**Задача 2.** Задача на метод изображения. Реальный диполь индуцирует на поверхности диэлектрика связанный заряд, который создаёт в верхнем полупространстве электрическое поле, такое, какое создавал бы диполь  $\vec{p}'$  помещённый на расстоянии  $-h$  прямо напротив реального диполя. Из граничных условий (непрерывность нормальной составляющей вектора электрической индукции  $D_n$  и непрерывность тангенциальной составляющей вектора напряжённости электрического поля  $E_t$ ) следует:

$$\vec{p}' = -\vec{p} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \text{ (смотри задачу 2.39 из задачника 1)}$$

Энергию и силу взаимодействия двух диполей находим как в задаче 2.51 задачника 1.

$W = p^2 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{4h^3}$   $F = -\frac{\partial W}{\partial r}$ , где расстояние между двумя диполями  $r$  равно  $2h$ , следовательно:

$$\vec{F} = \vec{n} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{3p^2}{8h^4}. \text{ Диполь притягивается, если } \varepsilon \text{ больше единицы.}$$

**Задача 3.** Задача схожа с задачей 2.8 из задачника 1. Так как плотность связанных зарядов отлична от нуля только на границе полости, лапласиан потенциала в полости и вне её равен нулю. Из бесконечного множества аксиально-симметричных функций лапласиан от которых равен нулю, удовлетворить граничным условиям –

- 1: непрерывность нормальной составляющей вектора электрической индукции  $D_n$
- 2: непрерывность тангенциальной составляющей вектора напряжённости

электрического поля  $E_t$

3: потенциал не должен обращаться в бесконечность внутри полости

4: потенциал на бесконечности должен стремиться к потенциалу однородного поля  $E_0$  могут только следующие.

$$\varphi_{in} = E_{in} r \cos \theta \quad \varphi_{out} = E_0 r \cos \theta + \frac{d}{r^2} \cos \theta$$

Неизвестное однородное поле  $E_1$  внутри полости и дипольный момент полости  $d$  находим из граничных условий 1 и 2.

$$\vec{E}_{in} = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} \vec{E}_0 \quad \vec{d} = \frac{1-\varepsilon}{1+2\varepsilon} \vec{E}_0 a^3 \quad \vec{E}_{out} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{r}\vec{d})}{r^5}$$

Так как свободных зарядов на поверхности полости нет, полная плотность заряда равна плотности связанных зарядов и равна скачку нормальной составляющей вектора напряжённости электрического поля  $E_n$  делённому на  $4\pi$ .

$$\sigma_\varepsilon = \frac{3}{4\pi} \frac{1-\varepsilon}{1+2\varepsilon} E_0 \cos \theta.$$

**Задача 4.** Шар с вырезом рассматриваем как однородно заряженный шар с зарядом  $Q$  и кольцо с зарядом  $-q$ . Кольцо представляет из себя заряд и аксиально-симметричный квадруполь. Тогда, используя решение задачи 1.39 из задачника 1:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{Q-q}{r} - \frac{qa^2}{4} \frac{1-3\cos^2 \theta}{r^3}.$$

**Задача 5.** Сопротивление сферического конденсатора  $R = \frac{1}{\sigma} \int_a^b \frac{\delta r}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{ab}{(b-a)}.$

Ёмкость сферического конденсатора  $C = \varepsilon \frac{ab}{(b-a)}$  (задача 2.14 из задачника 1). Отсюда

$$C = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \frac{1}{R}.$$

**Задача 6.** В режиме, когда потенциалом, создаваемым электронами можно пренебречь (режим насыщения вакуумного диода), потенциал определяется только разностью потенциалов между катодом и анодом  $U$ :

$$\varphi_1 = U \frac{x}{d}, \text{ где } d - \text{расстояние между катодом и анодом.}$$

В режиме трёх вторых (смотри задачу из задачника 1):

$$\varphi_{3/2} = U \left( \frac{x}{d} \right)^{4/3}$$

$$\text{Из закона сохранения энергии скорость электронов } v(x) = \frac{\delta x}{\delta t} = \sqrt{\frac{2e\varphi(x)}{m}}.$$

Время пролёта электрона определяется как  $t = \int_0^d \frac{\delta x}{\sqrt{\frac{2e\varphi(x)}{m}}}$ . В первом случае:

$t_1 = \frac{2d}{\sqrt{\frac{2eU}{m}}}$  а во втором:  $t_{3/2} = \frac{3d}{\sqrt{\frac{2eU}{m}}}$ . Удивительное совпадение, но соотношение времён также составляет три вторых!

### Экзаменационная работа 1

**Задача 1.** Уравнение Лапласа  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  в данном случае является одномерным. На границах «сшивается» потенциал и его производная. Тогда:

$$\begin{aligned} z < -d & \quad \varphi_1 = C \\ -d < z < 0 & \quad \varphi_2 = C + 2\pi\rho(z+d)^2 \\ 0 < z < d & \quad \varphi_3 = C - 2\pi\rho(z-d)^2 + 4\pi\rho d^2 \\ d < z & \quad \varphi_4 = C + 4\pi\rho d^2 \end{aligned}$$

где  $C$  – константа.

**Задача 2.** Сначала находим напряжённость электрического поля вблизи вершины большого выступа. Задача схожа с задачей – металлический шар помещён в однородное поле. Центр координат помещаем в центр полусферического выступа.

$$\vec{E}_{out} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{\vec{r}(\vec{r}\vec{d})}{r^5} \quad \vec{E}_{in} = 0.$$

Из условия непрерывности тангенциальной составляющей вектора напряжённости электрического поля:

$$\vec{d} = \vec{E}_0 b^3, \text{ а поле вблизи вершины } \vec{E}_{out(r=b, \theta=0)} = 3\vec{E}_0.$$

Так как большой полусферический выступ вблизи вершины можно считать плоскостью, задача о нахождении поля вблизи малого выступа сводится к предыдущей. Таким образом, напряжённость электрического поля вблизи вершины малого выступа  $\vec{E}_{out} = 3 * 3\vec{E}_0 = 9\vec{E}_0$ , электрическое поле «концентрируется» вблизи острых выступов, вот почему во избежание пробоя пластины конденсаторов должны быть аккуратно зашлифованы.

**Задача 3.** Естественно, рассматриваем систему как плоскость с током без полости, внутри которой цилиндрический проводник с током, противоположным по направлению (и той же плотностью). Поле в полости:

$$B_x = \frac{4\pi}{c} j \cdot y, \text{ где в полярных координатах } y = R \sin \alpha \quad x = R \cos \alpha. \text{ В цилиндрическом}$$

проводнике с однородно протекающим током  $B_\alpha = \frac{2\pi}{c} j \cdot R$ . В сумме:

$$B_R = \frac{4\pi}{c} j \cdot R \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2\pi}{c} j R \sin 2\alpha \quad B_\alpha = \frac{2\pi}{c} j \cdot R = \frac{4\pi}{c} j \cdot R \sin^2 \alpha = \frac{2\pi}{c} j R \cos 2\alpha$$

**Задача 4.** Поле в цилиндрической полости цилиндрического проводника с

однородной плотностью тока находим, как в задаче из задачника 1.

$$\vec{B} = \frac{2\pi}{c} [\vec{j}_1 \times \vec{l}]$$

По полости течёт полный ток  $\vec{I} = \pi a^2 \vec{j}_2$  на который действует сила Ампера:

$$\vec{F} = -\frac{2\pi^2 a^2}{c^2} (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2) \vec{l}. \text{ Если токи параллельны, то сила направлена к центру.}$$

**Задача 5.** За эти времена токи, индуцированные в проводящем слое возникшей ЭДС индукции, не успевают затухнуть. Проводящий слой ведёт себя как сверхпроводник (магнитное поле в него не проникает). Тогда нормальная компонента вектора магнитного поля на границе слоя равна нулю, а поверхностные токи создают такое поле, которое создавал бы магнитный момент  $-\vec{m}_0$  – «зеркальное» изображение реального магнитного момента  $\vec{m}_0$ . Если поместить начало координат в точку пересечения проводящего слоя с линией, соединяющей момент и его изображение, то в полярных координатах напряжённость магнитного поля на границе слоя:

$$\vec{B} = -\frac{6m_0 \cos \theta \sin \theta}{h^3 / \cos^3 \theta} \cdot \vec{e}_r. \text{ Так как внутри слоя поля нет, то линейная плотность}$$

поверхностных токов, определяющих скачок тангенциальной составляющей вектора напряжённости магнитного поля ( $\Delta B_r = \frac{4\pi}{c} i_\alpha$ ) равна:

$$i_\alpha = -\frac{3m_0 c \cos^4 \theta \sin \theta}{2\pi h^3}$$

**Задача 6.** Тор сверхпроводящий, значит, поле внутри него не проникает, и индуктивность определяется лишь магнитным потоком, пронизывающем «дырку» бублика-тора. Если бы всё пространство было бы заполнено вакуумом, то, вследствие симметрии поток через верхнюю половинку был бы равен потоку через нижнюю половинку. Обозначим эти потоки как  $\Phi_0$ . На границе раздела магнитных сред текут только молекулярные токи, значит  $H_{r1} = H_{r2}$ . Но в среде  $\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1$  а  $\vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2$ , значит магнитный поток через верхнюю половинку возрастет в  $\mu_1$  раз, а через нижнюю, соответственно в  $\mu_2$  раз. Индуктивность пропорциональна магнитному потоку, тогда:

$$L = L_0 \cdot \frac{\mu_1 \Phi_0 + \mu_2 \Phi_0}{\Phi_0 + \Phi_0} = L_0 \cdot \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

## Контрольная работа 2

**Задача 1.** Хотя Солнце для наблюдателя на большом расстоянии выглядит как диск, для оценки будем рассматривать его как однородно светящуюся щель ширины  $h$ , находящуюся на расстоянии  $a$ ,  $\alpha = h/a$ . Электромагнитная волна, испускающаяся с верхнего края щели имеет одинаковую вероятность пройти через верхнюю или нижнюю щели. Оптическая длина этих траекторий соответственно:

Верх:

$$r_{11} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{d}{2} - \frac{h}{2}\right)^2} + \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2} \quad r_{12} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{d}{2} + \frac{h}{2}\right)^2} + \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2}$$

Здесь  $L$  – расстояние от экрана со щелями до экрана, на котором наблюдается интерференция,  $x$  – координата на экране, на котором наблюдается интерференция.

Для электромагнитной волны, испускающейся с верхнего края щели, оптическая длина траекторий, проходящих через верхнюю или нижнюю щели, соответственно:

Низ:

$$r_{21} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{d}{2} + \frac{h}{2}\right)^2} + \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2} \quad r_{22} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{d}{2} - \frac{h}{2}\right)^2} + \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2}$$

Обе волны образуют интерференционную картину, и видимость обратится в ноль, если максимум от одной волны совпадёт с минимумом от другой. Разлагаем подкоренные выражения по малости  $d, h \ll a$  и  $d, x \ll L$ , тогда:

$$\frac{\lambda}{2} = (r_{11} + r_{12}) - (r_{21} + r_{22}) \approx \frac{dh}{a} = d\alpha$$

Отсюда  $d_{\min} \approx \frac{\lambda}{2\alpha}$ , что составляет  $2.5 \cdot 10^{-3}$  см.

**Задача 2.** Для ТМ волны (также называется р-волна,  $\vec{E}$  - в плоскости падения), коэффициент отражения по амплитуде (из формул Френеля):

$$R_{TM} = \frac{\lambda_\mu \cos \varphi_1 - \lambda_\epsilon \cos \varphi_2}{\lambda_\mu \cos \varphi_1 + \lambda_\epsilon \cos \varphi_2}, \quad \text{где } \lambda_\epsilon = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}, \quad \lambda_\mu = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}, \quad \varphi_1 \text{ и } \varphi_2 - \text{углы падения и}$$

преломления соответственно.

При падении под углом Брюстера коэффициент отражения обращается в нуль:

$$\lambda_\mu \cos \varphi_1 - \lambda_\epsilon \cos \varphi_2 = 0.$$

Из закона Снеллиуса и простейших тригонометрических соотношений:

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1 \cdot \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}$$

Тогда:

$$\lambda_\mu \cos \varphi - \lambda_\epsilon \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1 \cdot \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} = 0, \quad \text{делим на косинус угла падения:}$$

$$\lambda_\mu = \lambda_\epsilon \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_1} - \tan^2 \varphi_1 \cdot \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}, \quad \text{далее} - \left(\frac{\lambda_\mu}{\lambda_\epsilon}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi_1} - \tan^2 \varphi_1 \cdot \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}$$

пользуемся тем, что  $\frac{1}{\cos^2 \varphi_1} = 1 + \tan^2 \varphi_1$ , тогда:

$$\left(\frac{\lambda_\mu}{\lambda_\epsilon}\right)^2 - 1 = \tan^2 \varphi_1 \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}\right), \quad \text{итого, тангенс угла Брюстера равен:}$$

$$tg\varphi_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_1\varepsilon_2 - \mu_2\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\mu_2\varepsilon_2 - \mu_1\varepsilon_1)}} \quad \text{TE}$$

Аналогично, для ТЕ волны (также называется s-волна,  $\vec{E}$  - перпендикулярен плоскости падения), тангенс угла Брюстера равен:

$$tg\varphi_1 = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\mu_1(\mu_2\varepsilon_2 - \mu_1\varepsilon_1)}} \quad \text{TM}$$

То есть, если  $\mu_1 = \mu_2$ , то для ТЕ волны  $tg\varphi_{B,TE} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$ , тангенс угла Брюстера равен соотношению коэффициентов преломления сред, а для ТМ волны угла Брюстера нет (тангенс угла падения комплексный). Если  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , то для ТМ волны  $tg\varphi_{B,TM} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1}$ , тангенс угла Брюстера равен соотношению коэффициентов преломления сред, а для ТЕ волны угла Брюстера нет.

**Задача 3.** Так как стоит тонкая линза, то параллельный пучок света заменяется точечным источником на расстоянии F от отверстия. Тогда, радиус m-той зоны Френеля равен:

$r_m = \sqrt{m \frac{\lambda F}{2}}$ , минимальный радиус диафрагмы, при котором интенсивность в центре максимальна  $R = \sqrt{\frac{\lambda F}{2}}$ . Надо оценить, при каком отклонении от центра разница оптической длины пути для лучей, идущих с противоположных сторон диафрагмы составляет половину длины волны. Можно воспользоваться решением задачи 1 из этой же контрольной, тогда радиус пятна:

$$x \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda F}{2}}$$

**Задача 4.** Из решения задачи 3.78 из задачника 2 находим распределения тангенциальной составляющей вектора  $\vec{H}$  на плоскостях (нормальная составляющая зануляется).

$$H = 2H_0 e^{i(k_z z - \omega t)} \frac{\frac{\pi/a}{\sqrt{(\pi/a)^2 + k_z^2}}} = H_0 e^{i(k_z z - \omega t)} \frac{\lambda}{a}, \text{ где } H_0 - \text{ амплитуда волны, } \lambda - \text{ длина}$$

волны. Так как поверхность идеально проводящая, поле в неё не проникает и линейную плотность тока на границе находим из скачка тангенциальной составляющей вектора  $\vec{H}$ .

$$i = H_0 e^{i(k_z z - \omega t)} \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{c}{4\pi}, \text{ ток перпендикулярен направлению распространения волны } z.$$

**Задача 5.** Амплитуда волны, прошедшей от каждой последующей зоны Френеля уменьшается вдвое. С учётом того, что волны от нечётных зон приходят в фазе, а от чётных в противофазе:



$$E_{\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} E_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} . \quad \text{Это сумма бесконечной геометрической прогрессии со}$$

знаменателем  $-1/2$  и первым членом  $E_1$ .  $E_{\infty} = \frac{2}{3} E_1$ ,  $I_{\infty} = \frac{4}{9} I_1$ . Интенсивность уменьшится.

Для большей интенсивности лучше закрыть все зоны, кроме первой.

**Задача 6.** Росинка является толстой линзой. Воспользуемся матричным формализмом. Каждый луч характеризуется вектором - отклонение от оптической оси  $x$  и угол наклона  $\alpha$ . Матрица первой границы:

$$\begin{pmatrix} x' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{d}\left(\frac{1}{n}-1\right) & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{С учётом того, что } n=4/3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2d} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Матрица промежутка } \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ и матрица второй границы } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{d}(1-n) & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3d} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Матрица всей линзы } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4}d \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Пройдя линзу, координаты луча станут:

$$x' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}d\alpha; \quad \alpha' = -\frac{x}{d} + \frac{1}{2}\alpha$$

Луч вышедший из точки  $x = \frac{1}{2}d\alpha$  под углом  $\alpha$ , пройдя линзу, пойдёт параллельно

оптической оси. Для этого луча координата  $x' = \frac{1}{4}d\alpha + \frac{3}{4}d\alpha = d\alpha$ . Значит, увеличение

$$M = \frac{x'}{x} = 2.$$

## Экзаменационная работа 2

**Задача 1.** Часть волны не проходит через призму и падает на экран по нормали, часть волны, прошедшая сквозь призму падает под углом  $\beta = (n-1)\alpha$ . Обе волны остаются

плоскими, так как  $\frac{\delta k}{k} \approx \frac{\lambda}{d} \ll 1$ , для того, чтобы наблюдалось максимальное количество интерференционных полос, необходимо чтобы обе части интерферировали по всей апертуре  $d$ . Тогда  $\Delta l = \frac{d}{\beta} = \frac{d}{(n-1)\alpha}$ . Расстояние между интерференционными полосами

$$\text{равно } \Delta x = \frac{\lambda}{(n-1)\alpha}.$$

**Задача 2.** Стандартная задача на дифракцию Френеля, необходимо только учесть влияние показателя преломления на оптическую длину пути. Тогда:

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{\left(\frac{a}{n_1} \cdot \frac{b}{n_2}\right)}{\left(\frac{a}{n_1} + \frac{b}{n_2}\right)}} = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{(an_2 + bn_1)}}$$

Заметим, что увеличение коэффициента преломления приводит к уменьшению длины волны в среде, а, значит и к уменьшению радиусов зон Френеля.

**Задача 3.** Падающая электромагнитная частично проникает в проводящую среду и там затухает по глубине с толщиной скин-слоя  $\delta = \frac{c}{\sqrt{\frac{\omega\sigma}{2\pi}}}$ , частично отражается. Граничные

условия – непрерывность тангенциальной компоненты поля  $\vec{E}$  и, так как плотность тока на поверхности не обращается в бесконечность, непрерывность тангенциальной компоненты поля  $\vec{B}$ . Если пренебречь током смещения то в проводящей среде:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{B}, \quad B_y(z, t) = B_0 e^{-\frac{1+i}{\delta}z} e^{-i\omega t}$$

Из уравнений Максвелла  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ,

$E_x(z, t) = \left(-\frac{\delta}{1+i}\right) i \frac{\omega}{c} B_0 e^{-\frac{1+i}{\delta}z} e^{-i\omega t} = \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{1+i}{\delta} B_0 e^{-\frac{1+i}{\delta}z} e^{-i\omega t}$ , из граничных условий  $E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = E_{\text{прош}}$ :

$$E_1 = -E_0 \frac{1 - \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{1+i}{\delta}}{1 + \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{1+i}{\delta}}, \text{ и при } \sigma \rightarrow \infty \quad E_1 \rightarrow -E_0.$$

**Задача 4.** Задача на дифракцию Френеля, для решения необходимо воспользоваться принципом дополнительности Бабинне. Дополнительным экраном для диска является непрозрачный экран с отверстием того же радиуса. Пусть амплитуда падающей волны  $E_0$ . Тогда:

$$E(z) = E_0 e^{ikz} - \frac{k}{2\pi iz} \int_0^R E_0 e^{ikz} e^{ik\frac{r^2}{2z}} 2\pi r \delta r \quad E(z) = E_0 e^{ikz} e^{ik\frac{R^2}{2z}}$$

Интенсивность света на оси постоянна и равна  $I_0 = E_0^2$ , то есть на оси диска всегда существует светлое пятно (пятно Пуассона). Необходимо отметить, что это решение справедливо только в области  $z \gg R$ . При приближении к диску в интеграле Кирхгофа необходимо учитывать косинус угла между нормалью к площадке и направлением на точку наблюдения. Тогда, в асимптотике, при  $z \approx R$ :  $I(z) = I_0 \frac{z^2}{R^2 + z^2}$

**Задача 5.** Электрическое поле от такой плоскости находим из решения уравнения Лапласа методом разделения переменных с соблюдением граничных условий на заряженной поверхности (задача из задачника 1). Напряжённость электрического поля на оси  $X=0, Y=0$  в нижнем полупространстве равна:

$$E(0;0;z) = 2\pi\sigma_0 e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot z}$$

Мощность излучения ультрарелятивистской частицы при движении параллельно электрическому полю:

$$w = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3}, \text{ энергия излучения } \Delta\varepsilon = \int_{-\infty}^0 \frac{2e^4 E(t)^2}{3m^2 c^3} \delta t, \quad t = \frac{z}{v} \simeq \frac{z}{c}, \quad \Delta\varepsilon = \frac{(2\pi\sigma_0)^2 r_e^2}{3\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2}.$$

**Задача 6.** Частица слегка изменит угол вылета за счёт того, что излучит часть энергии и, соответственно, изменит компоненту импульса  $p_x$  параллельную границе раздела области с магнитным полем. Так как изначально угол  $\alpha \ll 1$ , компонента импульса  $p_y$ , перпендикулярная границе раздела, практически не меняется по модулю, но, магнитное поле меняет её знак.

Изменение импульса частицы:  $\frac{\delta \vec{p}}{\delta t} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{\delta \varepsilon}{\delta t}$ . В момент, когда частица только залетела в область поля:

$$p_{0y} = \gamma_0 m c \alpha, \quad p_{0x} = \gamma_0 m c$$

В тот момент, когда частица вылетела:

$$p_y = -\gamma_0 m c \alpha, \quad p_x = \gamma m c. \text{ Значит } \beta = \frac{\gamma_0}{\gamma} \alpha.$$

Необходимо найти полную излучённую энергию и новое значение  $\gamma$ .

Для ультрарелятивистской частицы:

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta t} = -\frac{2}{3} c r_e^2 \gamma^2 B_0^2, \text{ где } r_e = \frac{e^2}{mc^2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{2}{3} c r_e^2 B_0^2 t, \text{ где время пролёта } t \simeq \frac{2\alpha R_L}{c}, \quad R_L - \text{ ларморовский радиус, который,}$$

так как  $\beta - \alpha \ll \alpha$ , можно считать постоянным  $R_L \simeq \frac{\gamma_0 m c^2}{e B_0}$ . Тогда:

$$\beta = \alpha \left( 1 + \frac{4}{3} \alpha \gamma_0^2 \frac{r_e^2 B_0}{e} \right) = \alpha \left( 1 + \frac{4}{3} \alpha \gamma_0^2 \frac{e^3 B_0}{m^2 c^4} \right)$$

2001/2002 учебный год

### Контрольная работа 1

**Задача 1.** Заряженный шарик (пусть его заряд равен  $q$ ) поляризует незаряженный.

Дипольный момент  $d$  последнего можно найти, поместив заряды изображения  $q' = -q \frac{a}{l}$

на расстоянии  $l' = \frac{a^2}{l}$  от его центра и  $q'' = -q'$  в центре:  $d = q'l' = -q \frac{a^3}{l^2}$ . Силу

взаимодействия шариков оценим как силу, действующую на точечный заряд в поле диполя:

$F_1 = qE_d = -2 \frac{q^2}{l^2} \left( \frac{a}{l} \right)^3$  (  $E_d = -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5} = 2\frac{\vec{d}}{l^3}$  при  $r=l$  ). Знак минус соответствует притяжению. После соединения проводником заряды на шариках равны  $q/2$ , и сила их отталкивания  $F_2 = \frac{(q/2)^2}{l^2}$ . Таким образом,  $\frac{F_2}{F_1} = -\frac{1}{8} \left( \frac{l}{a} \right)^3$ .

**Задача 2.** Поле в верхнем полупространстве эквивалентно полю кольца с зарядом  $Q$  и его изображения с зарядом  $Q' = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}Q$ , расположенного симметрично границе раздела в нижнем полупространстве. При этом  $\varphi_0$  определяется полным зарядом:  $\varphi_0 = \frac{Q+Q'}{r} = \frac{2}{\varepsilon+1} \frac{Q}{r}$ , а  $\varphi_1$  — дипольным моментом  $d = Qh - Q'h = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}Qh$ , направленным вдоль оси  $z$ :  $\varphi_1 = \frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^3} = \frac{d}{r^2} \cos \theta$ . Окончательно,  $\varphi(r, \theta) = \frac{2}{\varepsilon+1} \frac{Q}{r} + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1} \frac{Qh}{r^2} \cos \theta$ .

**Задача 3.** Пусть заряд единицы длины внутреннего цилиндра равен  $\kappa$ , а внешнего —  $(-\kappa)$ . Электрическое поле в пространстве между цилиндрами  $\vec{E} = \frac{2\kappa}{r^2} \vec{r}$  (вклад внешнего цилиндра в это поле равен нулю), а напряжение между ними  $U = 2\kappa \int_a^b \frac{dr}{r} = 2\kappa \ln \frac{b}{a}$ . Емкость системы на единицу длины  $\frac{dC}{dl} = \frac{dQ}{dl} \frac{1}{U} = \frac{\kappa}{U} = \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}}$ .

**Задача 4.** Заданное в задаче распределение заряда можно получить, взяв шар радиуса  $a$ , равномерно заряженный с объемной плотностью заряда  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ , а на место полости поместив шар радиуса  $a/2$  с плотностью заряда  $(-\rho)$ . Как известно, электрическое поле внутри равномерно заряженного шара равно  $\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}$ . Согласно принципу суперпозиции, для поля в полости имеем  $\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , где  $\vec{r}_{1,2}$  — радиус-векторы, проведенные в точку наблюдения соответственно из центра большого шара и центра полости. Учитывая, что  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{a}/2$ , где  $\vec{a}/2$  — вектор, проведенный из центра шара в центр полости, найдем, что поле в полости однородно и равно  $\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{\vec{a}}{2}$ , а  $\varphi = \frac{4}{6}\pi\rho a r \cos \theta$  (начало координат выбрано в центре большого шара, так что  $\vec{r} = \vec{r}_1$ , а  $\theta$  — угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{a}/2$ ).

**Задача 5.** Как известно, ток через вакуумный диод связан с напряжением на нем законом  $I = PU^{3/2}$ , где  $P = \frac{S}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{1}{h^2}$  ( $e$  и  $m$  — соответственно заряд и масса электрона). Емкости диода и плоского конденсатора одинаковы и равны  $C = \frac{S}{4\pi h}$ . Пусть  $Q$  — суммарный заряд на обкладках параллельно соединенных конденсатора и диода. Тогда напряжение на них  $U = \frac{Q}{2C}$ , а ток утечки через диод  $I = -\dot{Q}$ , то есть  $\dot{U} = -\frac{I}{2C}$ . Получившееся уравнение  $\dot{U} = -\frac{PU^{3/2}}{2C}$  при начальном условии  $U = U_0$  при  $t = 0$  имеет

$$\text{решение } U(t) = \frac{U_0}{(1 + \frac{P}{4C} \sqrt{U_0 t})^2} = \frac{U_0}{(1 + \frac{1}{9h} \sqrt{\frac{2e}{m} U_0 t})^2}.$$

### Экзаменационная работа 1

**Задача 1.** Заряд металлической толстостенной сферы может располагаться только на ее поверхностях— внутренней и внешней. Причем, на внутренней поверхности заряд равен  $-q$ , что легко показать, применив теорему Гаусса к замкнутой поверхности, находящейся всюду внутри металлической сферы с учетом того, что поле в металле равно нулю. Заряд внешней поверхности сферы равен  $+q$ , поскольку сфера не заряжена. Полный заряд системы равен  $q$  и распределен сферически симметрично внутри области  $r < r_2$ , поэтому при  $r \geq r_2$  потенциал ведет себя как  $q/r$  и при  $r = r_2$  совпадает с искомым потенциалом сферического слоя:  $\varphi_{\text{сл}} = q/r_2$ . Потенциал шара, всюду внутри шара одинаковый, просто найти в его центре:  $\varphi_{\text{ш}} = q/r_0 - q/r_1 + q/r_2$ .

**Задача 2.** Шарик находится в магнитном поле кольца равном

$$H_z = \frac{2\pi R^2 J}{c(R^2 + z^2)^{3/2}} \Big|_{z=h}$$

(ось  $z$  направлена от центра кольца к центру шарика,  $H_x = H_y = 0$ ), которое с учетом условия  $a \ll r$  можно считать вблизи шарика однородным. Шарик с магнитной проницаемостью  $\mu$  в однородном магнитном поле приобретает магнитный момент

$$\vec{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 \vec{H}, \text{ а действующая на него сила равна } F_z = m \frac{dH_z}{dz} \Big|_{z=h} = -\frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{12\pi^2 R^4 h J^2 a^3}{(R^2 + h^2)^4 c^2}.$$

**Задача 3.** Сечение цилиндра после обжатия представляет собой прямоугольник с размерами  $h \times d$  и два полукруга радиусами  $h/2$ . С учетом сохранения периметра сечения имеем:  $2\pi R = 2d + 2\pi(h/2) \Rightarrow d = \pi(R - h/2)$ . Сохранение потока через это сечение,

охватываемое сверхпроводником, дает:  $\pi R^2 B_0 = [dh + \pi(h/2)^2]B \Rightarrow B = B_0 \frac{R^2}{h(R - h/4)}$ .

Искомую силу можно найти по давлению магнитного поля, равному  $\frac{B^2}{8\pi}$ :

$$F = \frac{B^2}{8\pi} dl = \frac{B_0^2}{8} \frac{R^4 (R - h/2) l}{(R - h/4)^2 h^2}.$$

**Задача 4.** Непрерывность тангенциальной компоненты поля  $\vec{H}$  на боковой поверхности цилиндрического магнетика дает  $H = B/\mu$ , а сохранение потока через сечение сверхпроводящего цилиндра приводит к уравнению:  $H_0 \pi R^2 = B \pi r^2 + H(\pi R^2 - \pi r^2)$ . Решая

полученную систему, находим:  $\vec{H} = \frac{R^2}{R^2 + (\mu-1)r^2} H_0$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ .

**Задача 5.** Вольтамперная характеристика <<обычного>> вакуумного диода без вторичной эмиссии  $jS = PU^{3/2}$  (где  $P = \frac{S}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{1}{d^2}$ , а  $j$  — плотность электрического тока) может быть получена решением уравнения  $\varphi''(x) = -4\pi\rho(x) = -4\pi j/v(x)$ , где скорость электронов  $v(x)$  связана с потенциалом  $\varphi(x)$  законом сохранения энергии, с учетом соответствующих граничных условий на  $\varphi(x)$  и  $\varphi'(x)$ . Последние в нашем случае остаются без изменений, а уравнение принимает вид:  $\varphi''(x) = -4\pi j_1/v_1(x) - 4\pi j_2/v_2(x)$ , где

индексы 1 и 2 относятся к электронам, летящим соответственно от катода к аноду и в обратном направлении. По условию задачи,  $j_2 = \alpha j_1$ , а  $v_1(x) = v_2(x) = v(x)$ , так как упругое отражение от анода не меняет энергии электрона. Получаем уравнение:  $\varphi''(x) = -4\pi j_1(1+\alpha)/v(x)$ , сравнив которое с уравнением для <<обычного>> диода, находим решение:  $j_1(1+\alpha)S = PU^{3/2}$ . Полный ток в диоде равен, очевидно,

$$I = (j_1 - j_2)S = (1 - \alpha)j_1S = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} PU^{3/2}.$$

**Задача 6.** Решим уравнение Пуассона в проводнике

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

методом разделения переменных, то есть предположим, что решение представимо в виде:  $\varphi(r, \alpha) = R(r)Y(\alpha)$ , где  $R$  и  $Y$  — некоторые искомые функции. При  $r \rightarrow \infty$  потенциал должен соответствовать однородному полю  $E_0 = j_0/\sigma$ , то есть  $\varphi(r \rightarrow \infty) = -\frac{j_0}{\sigma} r \cos \alpha$ . Значит,  $Y = \cos \alpha$ . Подставив  $\varphi(r, \alpha) = R(r) \cos \alpha$  в уравнение Пуассона, получим уравнение:

$$\frac{1}{R} r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) = 1.$$

Будем искать его решение в виде  $R \propto r^n$ . Подставив, найдем два решения:  $n = 1$  и  $n = -1$ . Их линейная комбинация  $\varphi = \left( A_1 r + \frac{A_2}{r} \right) \cos \alpha$  тоже является решением уравнения Пуассона. Учтя граничное условие  $\varphi(r \rightarrow \infty) = -\frac{j_0}{\sigma} r \cos \alpha$ , найдем  $A_1 = -\frac{j_0}{\sigma}$ . Граничное

условие  $j_n = 0$  на плоской поверхности проводника:  $-\frac{1}{\sigma r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0, \pi} \propto \sin \alpha \Big|_{\alpha=0, \pi} = 0$  выполняется автоматически из-за равенства нулю  $\sin \alpha$ . Это же условие на цилиндрической поверхности проводника  $\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$  приводит к соотношению:

$$A_2 = A_1 a^2. \quad \text{Таким образом, } \varphi = -\frac{j_0}{\sigma} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) r \cos \alpha, \quad j_r = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r} = j_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \alpha, \\ j_\alpha = -\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -j_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \alpha.$$

**Задача 7.** Будем решать задачу, пользуясь комплексными амплитудами зависящих от времени величин. Потенциал  $\psi$  в указании к задаче соответствует линейной комбинации однородного поля и поля магнитного диполя. Причем, для поля снаружи  $\vec{H}^{\text{out}}$  однородное поле должно совпадать с заданным внешним  $\vec{H}_0$ , а для поля внутри  $\vec{H}^{\text{in}}$  дипольную компоненту нужно выбрать равной нулю, чтобы избежать расходимости в центре сферы:

$$\vec{H}^{\text{out}} = \vec{H}_0 - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5}, \quad \vec{H}^{\text{in}} = \vec{H}_1.$$

Здесь  $\vec{m}$  и  $\vec{H}_1$  — искомые величины. Граничные условия на поверхности сферы —  $H_n^{\text{in}} = H_n^{\text{out}}$  ( $\mu = 1$ ) и  $H_\tau^{\text{in}} = -H_\tau^{\text{out}} = 4\pi i^*/c$  ( $i^*$  — плотность поверхностного тока) — приводят к соотношениям:

$$H_1 \cos \theta = \left( \frac{2m}{a^3} + H_0 \right) \cos \theta, \quad \left( H_1 - H_0 + \frac{m}{a^3} \right) \sin \theta = \frac{4\pi}{c} i^*.$$

Плотность тока  $i^* = \sigma^* E$  найдем, применив интегральное уравнение Максвелла о циркуляции вектора  $\vec{E}$  к контуру под углом  $\theta$  на поверхности сферы:  $E e^{-i\omega t} 2\pi a \sin \theta = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$ , где  $\Phi = H_1 e^{-i\omega t} \pi a^2 \sin^2 \theta$ . Получим  $i^* = \frac{i\alpha H_1}{2c} \sin \theta$ , где введено обозначение  $\alpha := \omega \sigma^* a / c^2$ . Система из двух соотношений, выражающих граничные условия, теперь замкнута и не содержит угловых зависимостей. Решив ее, находим:

$$\vec{H}_1 = \frac{1+4\pi i\alpha}{1+16\pi^2\alpha^2} \vec{H}_0, \quad i^* = \frac{-4\pi\alpha^2 + i\alpha}{1+16\pi^2\alpha^2} H_0 c \sin \theta.$$

## Контрольная работа 2

**Задача 1.** Падающий луч содержит, очевидно, в равных долях  $s$ - и  $p$ -поляризованные компоненты. Условие  $\alpha = n_2/n_1$  с учетом закона преломления  $\sin \alpha / \sin \beta = n_1/n_2$  означает  $\alpha + \beta = \pi/2$ , то есть угол  $\alpha$  совпадает с углом Брюстера, при котором  $p$ -волна полностью проходит во вторую среду. Значит, искомый коэффициент прохождения есть  $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - R_s^2)$ , где амплитудный коэффициент отражения  $s$ -волны,

согласно формулам Френеля, равен  $R_s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \cos 2\alpha$  (здесь учтено, что

$\alpha + \beta = \pi/2$ ). Таким образом,  $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$ . С учетом  $\alpha = n_2/n_1$  отсюда находим

$$t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2.$$

**Задача 2.** Как известно,  $l_{\parallel} \sim \lambda^2 / \Delta \lambda$ , а  $l_{\perp} \sim \lambda / \alpha$ , где  $\alpha \sim D/l$  — малый угол, под которым виден источник. Таким образом,  $l_{\parallel} / l_{\perp} \sim \lambda D / (\Delta \lambda l) \approx 2,8$ .

**Задача 3.** Радиусы  $r_m$  зон Френеля определяются условием

$$n_1 \sqrt{r_m^2 + a^2} + n_2 \sqrt{r_m^2 + b^2} - n_1 a - n_2 b = \frac{\lambda}{2} m,$$

где учитывается оптическая разность хода лучей. Применив разложение корней (с учетом  $r_m \ll a, b$ ) вида  $\sqrt{r_m^2 + a^2} \approx a + \frac{r_m^2}{2a}$ , получим  $r_m = \sqrt{\frac{ab}{n_1 b + n_2 a}} \lambda m$ .

**Задача 4.** Поле в волноводе  $u = u_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{ik_z z}$ , где  $\left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \frac{\pi^2}{a^2} + k_z^2$ , представимо в виде суперпозиции двух волн:  $u = \frac{u_0}{2i} \left[ e^{i(k_z z - \frac{\pi x}{a})} + e^{i(k_z z + \frac{\pi x}{a})} \right]$ , распространяющихся под углами  $\pm \alpha$  к оси  $Z$ , где  $\alpha \approx \frac{\pi a}{\sqrt{k^2 + \pi^2/a^2}} = \frac{\lambda}{2a}$ . Расстояние между максимумами на экране равно  $2l\alpha = \lambda l/a$ , а их ширина равна  $l\alpha = \lambda l/(2a)$ .

**Задача 5.** Выберем ось  $x$  в плоскости экрана перпендикулярно щелям. Разложение волны  $u_0 e^{ik\alpha x}$  на выходе из щелей имеет вид:

$$|u_k| = \left| u_0 \int_{-a/2}^{+a/2} e^{i(k\alpha x - k\theta x)} dx \left[ 1 + e^{(ik\alpha - ik\theta)b} \right] \right| = \left| \frac{4u_0}{k(\theta - \alpha)} \sin \frac{k(\theta - \alpha)a}{2} \cos \frac{k(\theta - \alpha)b}{2} \right|,$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ , углы  $\alpha$  и  $\theta$  считаем малыми. Искомое угловое распределение есть:

$$dI = \frac{I_0}{2a} \left| \frac{u_k}{u_0} \right|^2 \frac{kd\theta}{2\pi} = \frac{I_0 ak}{\pi} \operatorname{sinc}^2 \frac{ka(\theta - \alpha)}{2} \cos^2 \frac{kb(\theta - \alpha)}{2} d\theta.$$

## Экзаменационная работа 2

**Задача 1.** Угловое распределение интенсивности от одной из щелей, как известно, равно:  $\frac{dI}{d\theta} = \frac{2I_0 a}{\lambda} \operatorname{sinc}^2 u$ , где  $u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$ . От двух щелей получим:

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{2I_0 a}{\lambda} \operatorname{sinc}^2 u \cdot |e^{i\pi} + e^{iv}|^2, \text{ где } v = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta. \text{ Окончательно: } \frac{dI}{d\theta} = \frac{8I_0 a}{\lambda} \operatorname{sinc}^2 u \sin^2 v.$$

**Задача 2.** При полностью открытом фронте амплитуда в точке  $P$  есть  $u_0 = E_0 e^{ikz_p}$ . Радиус выступа соответствует 3-ей (нечетной) зоне Френеля, поэтому вклад от круглого отверстия с таким радиусом равен  $u_{\text{отв}} = 2u_0$ . Вклад от открытой полуплоскости равен, очевидно,  $u_{\text{н/пл}} = u_0/2$ . Для полуплоскости с выступом получим:

$$u = u_{\text{н/пл}} - u_{\text{отв}}/2 = -u_0/2 = -\frac{1}{2} E_0 e^{ikz_p}.$$

**Задача 3.** Радиус отверстия соответствует 4-ой (четной) зоне Френеля для точек  $S$  и  $P$ . В точку  $P$  попадает также свет от изображения  $S'$  источника в зеркале. Для конструктивной интерференции света от источников  $S$  и  $S'$  радиус отверстия должен соответствовать нечетной зоне Френеля  $m$  для точек  $S'$  и  $P$  (с учетом добавления  $\pi$  к фазе волны при отражении):  $\sqrt{2\lambda a} = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$ , где  $b$  — расстояние от  $S'$  до экрана. Минимальное  $m$ , удовлетворяющее этому условию, есть  $m = 3$ . При этом  $b = 2a = a + 2l$ , то есть  $l = a/2$ .

**Задача 4.** Суммарное магнитное поле, действующее на электрон, равно нулю, а электрическое  $\vec{E} = 2\vec{E}_0$ . Из уравнения движения  $m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}$  получим для дипольного момента:  $\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m} \vec{E}$ . Интенсивность дипольного излучения, действующего в течении времени  $T$ , равна  $I = \frac{2|\ddot{\vec{d}}|^2}{3c^3} = \frac{2}{3} cr_e^2 E^2$ , где  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$  — «классический» радиус электрона. Полная излученная энергия  $\Delta E = IT = \frac{8}{3} cr_e^2 E_0^2 T$ .

**Задача 5.** Законы сохранения энергии и импульса для системы «волна + зеркало» имеют вид:

$$\gamma \mu c^2 + W = \mu c^2 + W_0 \beta \gamma \mu c - W/c = W_0/c,$$

где  $\beta = v/c$ . Из полученной системы уравнений найдем:  $(\beta + 1)\gamma = 1 + 2\alpha$ . Подставив  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ , найдем для  $\alpha \approx 1$ :  $\beta \approx 4/5$ .

**Задача 6.** Для одного дипольного излучателя, как известно,  $\left\langle \frac{dI_0}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 d_0^2}{8\pi c^3} \sin^2 \theta$ . Для двух заданных диполей

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \left\langle \frac{dI_0}{d\Omega} \right\rangle \left| 1 + e^{ik(10\lambda \cos \theta)} \right|^2 = \frac{\omega^4 d_0^2}{2\pi c^3} \sin^2 \theta \cos^2 (10\pi \cos \theta).$$

Из полученного выражения видно, что максимумы излучения наблюдаются под



углами  $\cos \theta_m = \pm \frac{m}{10}$ , где  $m$  — целое число. Очевидно, что  $|m| < 10$ , так как  $|\cos \theta_m| \leq 1$ , причем  $|\cos \theta_m| = 1$  не соответствует максимуму из-за равенства нулю  $\sin \theta_m$ . Полное число максимумов, таким образом, равно 19.

## 2002/2003 учебный год

### Контрольная работа 1

#### Задача 1.

Потенциал диполя имеет вид  $\varphi_d = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$ , а потенциал однородного электрического поля  $\varphi_E = -\vec{E}_0\vec{r}$ . Таким образом, уравнение требуемой эквипотенциали выглядит как:

$$\varphi = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} - \vec{E}_0\vec{r} = 0, \text{ а его решением является сфера радиуса } R = \left(\frac{p}{E_0}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

#### Задача 2.

Поле над заполненным проводником полупространством равно векторной сумме полей, создаваемых кольцом и его отражением, имеющим радиус  $a$ , заряд  $-Q$  и находящимся на расстоянии  $h$  ниже границы проводника. Учитывая, что  $h \ll a$ , легко найдем величину электрического поля в точке, находящейся на оси симметрии на поверхности металла:  $E = 2\pi \frac{Q}{a^2} \frac{h}{a} = 2\pi \frac{Qh}{a^3}$ . Теперь, в соответствие с граничным условием для нормальной компоненты электрического поля, находим, что  $\sigma = -\frac{Qh}{2\pi a^3}$ .

#### Задача 3.

Эквивалентное сопротивление подключенной к батарее цепи равно  $R_0 = \frac{R}{2} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R$ ,

а протекающий через нее ток  $I_0 = \frac{6\varepsilon}{5R}$ . Поскольку на каждом из трех параллельно соединенных резисторов в правом плече схемы падает одинаковая разность потенциалов, через них текут равные токи  $I_R = \frac{1}{3}I_0 = \frac{2\varepsilon}{5R}$ . Из симметрии схемы ясно, что через AC и BC в средний резистор правого плеча втекает по половине этого тока:  $I_{AC} = I_{BC} = \frac{I_R}{2} = 0.3 \text{ A}$ .

#### Задача 4.

В соответствие с решением задачи 1.24, до появления диэлектрического шарика электрическое поле в полости было однородным и равнялось  $E = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{a}{2} = \frac{2}{3}\pi\rho a$ . Поскольку диэлектрический шарик находится далеко от поверхности полости, можно считать, что на большом расстоянии от него поле останется тем же. Тогда, согласно решению задачи 2.8, найдем поле внутри диэлектрического шарика:  $E_{шар} = \frac{3}{2+\varepsilon}\frac{2}{3}\pi\rho a = \frac{2}{2+\varepsilon}\pi\rho a$ . Энергия электрического поля определяется в соответствие с общим правилом

$$W = \int_V dV \frac{\vec{D} \vec{E}}{8\pi} = \frac{2\varepsilon\pi^2 \rho^2 a^2 b^3}{3(\varepsilon + 2)^2}.$$

### Задача 5.

Снова по следам задачи 2.8, поверхностная плотность связанных зарядов равна  $\sigma_{св} = \frac{3(1-\varepsilon)}{4\pi(2+\varepsilon)} E_0 \cos \theta$ , где  $\theta$  - угол между направлением внешнего электрического поля и радиусом вектором в точку на поверхности шара. Плотность оказывается максимальной по модулю, когда  $\theta = 0$  или  $\pi$ .

### Задача 6.

Прежде всего, заметим, что в любой точке между катодом и анодом, скорость электрона движущегося к аноду по абсолютной величине будет равна скорости электрона, отраженного от анода и движущегося к катоду. Из этого следует, что и плотность идущего к катоду потока электронов в любой точке в  $\alpha$  раз меньше потока в направлении анода. Таким образом, на расстоянии  $x$  от катода плотность тока в диоде равна

$$j(x) = n(x)e(1-\alpha)v(x) = n(x)e(1-\alpha)\sqrt{\frac{2e\varphi(x)}{m}}, \text{ а плотность заряда складывается из}$$

плотностей, связанных с током  $j_1$ , текущим к аноду и током  $\alpha j_1$ , текущим в обратном направлении -  $\rho = j_1(1+\alpha)\sqrt{\frac{m}{2e\varphi(x)}}$ . Поскольку, как видно из уравнения для полной

плотности тока,  $j_1 = \frac{j}{1-\alpha}$ , то задача о нахождении вольтамперной характеристики

сводится к решению уравнения  $\Delta\varphi(x) = 4\pi j(x) \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \sqrt{\frac{m}{2e\varphi(x)}}$ . Легко видеть, что

$$j = \left( \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U^{3/2}}{9\pi d^2}, \text{ где } d - \text{расстояние от катода до анода.}$$

## Экзаменационная работа 1

### Задача 1.

Текущий по оси X ток создает магнитное поле  $\vec{B} = \frac{2I}{cr} \vec{e}_\varphi$ , где орт  $\vec{e}_\varphi$  и расстояние  $r$

заданы относительно оси X. Тогда сила, действующая на элемент длины  $d\vec{l}$  провода с током, текущим вдоль оси Y, равна:

$$|d\vec{F}| = \left| \frac{2I^2}{c^2 r} d\vec{l} \times \vec{e}_\varphi \right| = \frac{2I^2}{c^2} \frac{1}{\sqrt{h^2 + y^2}} \frac{y}{\sqrt{h^2 + y^2}} dy. \text{ Т.е. сила, действующая на единицу}$$

длины, есть:  $\frac{dF}{dy} = \frac{2I^2}{c^2} \frac{y}{h^2 + y^2}$ . Нетрудно видеть, что она достигает максимального

значения  $\left( \frac{dF}{dy} \right)_{\max} = \frac{I^2}{c^2 h}$ , когда  $y = \pm h$ . В точке  $y=0$  сила равна 0.

### Задача 2.

Если пренебречь полем излучения, то силу можно найти, если связать скорость изменения потока магнитного поля через контур, на границе которого находится заряд, и электрическое поле, возникающее в точке его положения. Поскольку магнитный момент

рамки равен  $m = \frac{abJ_0 \cos \omega t}{c}$  и направлен вдоль оси  $Z$ , то на плоскости  $XY$  он создает магнитное поле

$$\vec{H} = -\frac{\vec{m}}{r^3} = -\frac{abJ_0 \cos \omega t}{cr^3} \vec{e}_z. \text{ Возьмем контур в виде окружности радиуса } l. \text{ Чтобы}$$

определить пересекающий его поток магнитного поля, примем во внимание, что поток через всю плоскость  $XY$  равен нулю. Поскольку он складывается из потока внутри контура радиуса  $l$  и потока снаружи, то внутренний поток

$$\Phi_{in} = -\Phi_{out} = \frac{J_0 ab}{c} \cos \omega t \int_l^\infty \frac{1}{r^3} 2\pi r dr = \frac{2\pi J_0 ab}{cl} \cos \omega t. \text{ Такой поток создает на контуре ЭДС,}$$

$$\text{равную } \varepsilon = 2\pi l \cdot E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\pi}{c^2 l} J_0 \omega ab \sin \omega t, \text{ поэтому сила, действующая на заряд,}$$

$$\text{оказывается равной } F = qE = q \frac{J_0 \omega ab}{c^2 l^2} \sin \omega t.$$

### Задача 3.

Полный поток через контур замкнутого сверхпроводящего соленоида  $\Phi_0 = \frac{1}{c} \cdot \frac{4\pi}{c} \frac{N}{l} J \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot N = \frac{\pi^2 N^2 d^2 J}{c^2 l}$  остается неизменным, т.е. после того, как в соленоид

влетит магнетик и поле внутри него окажется равным  $H_1$ , поток  $\Phi_1 = \frac{1}{c} \cdot \mu H_1 \cdot N \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \Phi_0.$

Отсюда  $H_1 = \frac{H_0}{\mu}.$  Начальная энергия магнитного поля в соленоиде равна  $W_0 = \frac{H_0^2}{8\pi} V,$  а в

магнетике  $W_1 = \frac{\mu H_1^2}{8\pi} V,$  поэтому кинетическая энергия стержня составит

$$T = W_0 - W_1 = \frac{V}{8\pi} (H_0^2 - \mu H_1^2) = \frac{V}{8\pi} \left( H_0^2 - \frac{H_1^2}{\mu} \right) = \frac{\pi^2 N^2 d^2 J^2}{2c^2 l^2} \left( 1 - \frac{1}{\mu} \right).$$

### Задача 4.

Поскольку  $h \ll b$ , то можно считать, что полоса создает такое же поле, как бесконечная пластина с поверхностью плотностью тока  $J_0/b$ , т.е.  $H_0 = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{J_0}{b}.$  С учетом отражения на границе сверхпроводящего полупространства, поток поля в зазоре между пластиной и плоскостью равен  $\Phi_0 = 2 \frac{4\pi}{c} \frac{J_0}{b} \cdot h$  и остается неизменным при перемещениях пластины.

Т.е. после переноса пластины на высоту  $h$ , поле в зазоре оказывается равным  $H_1 = \frac{4\pi J_0}{bch_0} h.$

Давлением этого магнитного поля пластина удерживается в равновесии, т.е.

$$P_1 = \frac{H_1^2}{8\pi} = 2\pi \left( \frac{J_0 h}{bch_0} \right)^2 = \frac{\mu g}{b}. \text{ Отсюда } h = h_0 \frac{c}{J_0} \sqrt{\frac{\mu g b}{2\pi}}.$$

### Задача 5.

Энергия системы складывается из потенциальной энергии жидкости в поле тяжести

$W_g = mg \frac{h}{2}$  и энергии конденсатора. Если предположить, что пластины разомкнуты и

заряжены зарядами  $q$  и  $-q$  соответственно, то  $W_C = \frac{q^2}{2C}$ . Так как диэлектрическая

проницаемость жидкости равна единице -  $C = \frac{bH}{4\pi l}$ , и  $W_C = \frac{4\pi l q^2}{bH}$ . Связь между высотой столба жидкости и расстоянием между пластинами конденсатора проста -

$m = \rho h l b$ , отсюда  $l = \frac{m}{\rho h b}$ . Нужно найти минимум энергии:

$$W = \frac{4\pi m q^2}{bH \rho h b} + mg \frac{h}{2}, \text{ отсюда } h = q \sqrt{\frac{8\pi}{\rho H b^2 g}}. \text{ Если учесть, что в СГС}$$

размерность заряда  $\text{г}^{1/2} \text{см}^{3/2} \text{с}^{-1}$ , то легко проверить правильность ответа по размерности.

Если конденсатор подключён к батарее с ЭДС  $U_0$ , то надо учесть вклад в энергию работы, совершаемой источником ЭДС.

$$W_{C+batt} = \frac{CU_0^2}{2} - qU_0 = -\frac{CU_0^2}{2} = -\frac{bH}{8\pi l} U_0^2. \text{ С учётом связи между высотой}$$

столба жидкости и расстоянием между пластинами конденсатора полная энергия

$$W = -\frac{Hb^2 \rho U_0^2}{8\pi m} h + mg \frac{h}{2} = h \left( mg - \frac{Hb^2 \rho U_0^2}{8\pi m} \right)$$

Видно, что в этом случае равновесия нет, если  $mg > \frac{Hb^2 \rho U_0^2}{8\pi m}$ , то  $h$  будет стремиться к нулю, в противном случае пластины конденсатора сблизятся, вытолкнув всю жидкость.

### Задача 6.

Задача на квазистационарные явления и скин-эффект.

Поле в области 1 (между проводящей плёнкой и проводящим полупространством) это сумма падающей и отражённой волн. Его можно найти из граничных условий на проводящей плёнке. Разрыв тангенциальных составляющих магнитного поля равен  $\frac{4\pi}{c} i$ .

При этом  $i = \sigma^* E$ , а так как поле распространяется в вакууме, то амплитуды электрического и магнитного поля равны. Примем за начало отсчёта по координате  $z$  проводящую плоскость, тогда на границе

$$H_1 - H_0 = \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi}{c} \sigma^* E_0 = \frac{4\pi}{c} \sigma^* H_0, \text{ отсюда}$$

$$H_1 = H_0 \left( 1 - \frac{4\pi}{c} \sigma^* \right). \text{ Во всей области 1 } H_1(z, t) = H_1 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \cos kz,$$

где  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Поле в проводящем полупространстве представляет собой бегущую затухающую волну. Если  $\sigma \gg \omega$ , то поле в проводнике затухает как

$$H_2(z, t) = H_2 \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{i\frac{z}{\delta} - \frac{z}{\delta}}, \text{ где толщина скин-слоя } \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \text{ С учётом}$$

волны в пространстве 1:  $H_2 = H_1 \cdot \cos kb$ .

## Контрольная работа 2

### Задача 1.

Матрица перехода через дублет из дефокусирующей и фокусирующей линз выглядит как

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (\alpha-1)F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix}, \text{ где, справа налево записаны матрицы перехода}$$

через дефокусирующую линзу, пустой промежуток и фокусирующую линзу. Перемножая, найдем, что  $M = \begin{pmatrix} \alpha & (\alpha-1)F \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$ . Соответственно, после прохождения первого дублета, луч,

определяющий размер сечения пучка, будет описываться вектором  $\begin{pmatrix} x' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & (\alpha-1)F \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha d/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Размер пучка, таким образом, изменится в  $\alpha$  раз.

Легко видеть, что после прохождения  $N$  дублетов его размер изменится в  $\alpha^N$  раз.

### Задача 2.

Поскольку в волноводе возбуждена  $H_{11}$  волна, то компонента магнитного поля, направленная вдоль волновода (вдоль оси  $z$ ), имеет вид  $H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}$ ,

а дисперсионное уравнение записывается как  $\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2$ . В соответствии

со стандартной теорией волноводов, изложенной почти в любом учебнике по электродинамике, определяются остальные компоненты магнитного и электрического полей:

$$\begin{aligned} H_x &= -H_0 \frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}, \\ H_y &= -H_0 \frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}, \\ E_x &= -H_0 \frac{i\omega}{c(\omega^2/c^2 - k^2)} \frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}, \\ E_y &= -H_0 \frac{i\omega}{c(\omega^2/c^2 - k^2)} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned}$$

Теперь задача о нахождении поверхностных плотностей токов и зарядов сводится к требованию выполнения граничных условий на стенках волновода. С учетом дисперсионного уравнения, фазовая скорость волны в волноводе равна

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right]}}, \text{ а групповая } v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right]}.$$

### Задача 3.

При определении видности интерференционной картинки будем считать свет монохроматическим с длиной волны  $\lambda$ . Тогда, в соответствии с решением задачи 3.12,

видность равна  $V = \left| \text{sinc} \left( \frac{\pi d \alpha}{\lambda} \right) \right|$ , где  $d$  – расстояние между щелями в схеме Юнга.

Видность равна нулю, когда  $\frac{\pi d \alpha}{\lambda} = \pi$ , т.е.  $d_{\max} = \frac{\lambda}{\alpha}$ . Высота  $y$ , на которой интерференционная картинка исчезает, определяется разбросом длин волн  $\Delta \lambda$  -

$\frac{dy}{b} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$  - разность хода лучей через щели не должна превышать продольной длины когерентности. Из этого соотношения видно, что величина  $y$  обратно пропорциональна  $d$  и

$$y_{\min} = \frac{b}{d_{\max}} \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \alpha b.$$

### Задача 4.

Интеграл Кирхгофа в приближении дифракции Френеля записываем как:

$$E(\vartheta) = \sqrt{\frac{kn}{2\pi iz}} e^{i(knz - \omega t)} \sum_{m=0}^{N-1} \int_{md}^{md+b} E(x) e^{-ikn \sin \vartheta x} dx$$

Так как волна падает на решётку под углом  $\alpha$ , то в каждую точку решётки волна приходит с различной фазой  $E(x) = E_0 \cdot e^{ik \sin \alpha x}$ . Так как волна падает под углом Брюстера, то  $tg \alpha = n = \frac{4}{3}$ . Угол Брюстера для воды равен  $53.1^\circ$ . Интеграл от экспоненты берётся легко, сумма конечной геометрической прогрессии также находится, а интенсивность равна произведению амплитуды на её комплексно сопряжённое.

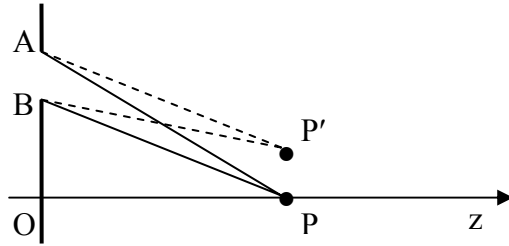
$$I(\vartheta) = E_0^2 \frac{kn \cdot b^2}{2\pi z} \cdot \sin^2 \left( \frac{knb}{2} \left( \sin \vartheta - \frac{\sin \alpha}{n} \right) \right) \cdot \frac{\left( \sin N \frac{knd}{2} \left( \sin \vartheta - \frac{\sin \alpha}{n} \right) \right)^2}{\left( \sin \frac{knd}{2} \left( \sin \vartheta - \frac{\sin \alpha}{n} \right) \right)^2}$$

Главный максимум будет наблюдаться при условии  $\sin \vartheta - \frac{\sin \alpha}{n} = 0$ , откуда  $\theta_0 = 36.9^\circ$ .

$$I_0 = \frac{kn \cdot N^2 b^2}{2\pi z}$$

### Задача 5.

Поскольку в общем случае поле  $E$  определяется выражением  $E_P = 4\pi \frac{iE_0}{k} e^{i(ka-\omega t)} [k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \dots]$ , где  $k_1 = -\frac{i}{\lambda}$ , то для открытой второй зоны амплитуда волны в точке Р равна  $E_P = -\left(-\frac{i}{\lambda}\right) 4\pi \frac{iE_0}{k} e^{i(ka-\omega t)} = -2E_0 e^{i(ka-\omega t)}$ . Амплитуда



обратится в ноль, если переместиться в сторону от оси симметрии в точку Р' так, чтобы разность хода лучей, идущих от краев второй зоны, составила  $\lambda$ . Если обозначить расстояние между точками Р и Р' через  $x$ , то несложно видеть, что  $AP - AP' = x \frac{\sqrt{2a\lambda}}{a}$ , а  $BP - BP' = x \frac{\sqrt{a\lambda}}{a}$ . Вычитая одно из другого, имеем  $(AP - BP) - (AP' - BP') = x \sqrt{\frac{\lambda}{a}} (\sqrt{2} - 1)$ .

Поскольку, по условию, эта разность должна быть равна  $\lambda/2$ , то  $x \approx \sqrt{\lambda a}$ .

## Экзаменационная работа 2

### Задача 1.

Двигаясь в электрическом поле кольца, электрон теряет энергию со скоростью

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} r_0^2 c \gamma^2 [E^2 - (\vec{\beta} \vec{E})^2] = \frac{2}{3} r_0^2 c \gamma^2 E^2 (1 - \beta^2) = \frac{2}{3} r_0^2 c E^2.$$

Следовательно, полная потеря энергии определится при интегрировании этого выражения:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2}{3} r_0^2 c \int_{-\infty}^{\infty} E^2 dt.$$

Используя очевидную подстановку  $x = vt$ ,  $dx = v dt$  и учитывая, что поле на оси определяется выражением

$$E = \frac{q}{r_0^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{r_0^2 + x^2}} = \frac{qx}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}},$$

легко видеть, что полная потеря энергии равна

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi q^2}{12 \beta r_0^2}.$$

При вычислении потерь энергии предполагалось, что частица движется с постоянной скоростью. Это верно до тех пор, пока, в соответствие с условием задачи, потерянная энергия много меньше энергии электрона.

### Задача 2.

Поскольку движение шаров не является релятивистским, уравнения их движения имеют вид  $m \ddot{r}_a = -q \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$  и  $m \ddot{r}_b = q \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ , так что вторая производная дипольного момента

системы равна  $\ddot{\vec{d}} = (-q)\ddot{\vec{r}}_a + q\ddot{\vec{r}}_b = \frac{2q^2}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ . Магнитное поле, создаваемое шарами в точке

$\vec{r}$ , имеет вид  $\vec{H} = \frac{2q^2}{mrc^2} [\vec{E}_0 \times \vec{n}] e^{-i\omega t}$ , а интенсивность излучения

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle r^2 = 4 \cdot \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{q^2}{mc^2} E_0^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle \sin^2 \theta = 4 \cdot \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{q^2}{mc^2} E_0^2 \sin^2 \theta = 4 \frac{q^2}{mc^2} \langle S_0 \rangle \sin^2 \theta,$$

где  $\langle S_0 \rangle$  - усредненный по времени поток энергии в падающей волне. Таким образом,

дифференциальное сечение рассеяния определяется выражением  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4 \frac{q^2}{mc^2} \sin^2 \theta$ , а полное сечение равно:

$$\sigma = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{32}{3} \frac{q^2}{mc^2}.$$

### Задача 3.

Магнитные поля, создаваемые диполями в точке  $\vec{r}$  волновой зоны, равны

$$\vec{H}_1 = -\omega^2 \frac{\vec{p}_0 \times \vec{n}}{rc^2} e^{-i(\omega t - k \frac{h}{2} \cos \theta)} \text{ и } \vec{H}_2 = -\omega^2 \frac{\vec{p}_0 \times \vec{n}}{rc^2} e^{-i(\omega t + k \frac{h}{2} \cos \theta)}, \text{ где, как обычно, } k = \frac{\omega}{c}.$$

Полное поле в точке наблюдения  $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = -2\omega^2 \frac{\vec{p}_0 \times \vec{n}}{rc^2} \cos(k \frac{h}{2} \cos \theta) e^{-i\omega t}$ .

Усредненная по времени угловая интенсивность определится выражением:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{4}{c^4} \cdot \cos^2(k \frac{h}{2} \cos \theta) \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{2\pi c^3} \cos^2(k \frac{h}{2} \cos \theta) \sin^2 \theta.$$

### Задача 4.

Амплитуда будет максимальной, если разность фаз, набираемых вдоль пути из точки А в точку В через какую либо точку на границе экрана ( $\varphi_2$ ) и через центр отверстия ( $\varphi_1$ ) окажется равной  $\pi$ , т.е.  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$  ( $+2\pi m$ ?). Так как  $\varphi_1 = \frac{\omega}{c} n_1 a + \frac{\omega}{c} n_2 b$ , а

$$\varphi_2 = \frac{\omega}{c} n_1 \sqrt{\left(a + \frac{r^2}{2R}\right)^2 + r^2} + \frac{\omega}{c} n_2 \sqrt{\left(b - \frac{r^2}{2R}\right)^2 + r^2} \approx \frac{\omega}{c} n_1 \left(a + \frac{r^2}{2R} + \frac{r^2}{2a}\right) + \frac{\omega}{c} n_2 \left(b - \frac{r^2}{2R} + \frac{r^2}{2b}\right), \text{ то}$$

из условия на разность фаз

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\omega}{c} \frac{r^2}{2} \left[ \frac{n_1}{R} + \frac{n_1}{a} - \frac{n_2}{R} + \frac{n_2}{b} \right] = \pi, \text{ находим } r^2 = \frac{2\pi c}{\omega} \frac{1}{n_1 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{R}\right) + n_2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{R}\right)}.$$

### Задача 5.

Если бы на пути волны не было никаких препятствий, амплитуда поля в точке  $Z_p$  была бы равна  $E_0$ . Чтобы учесть вклад диска, перекрывающего вторую зону Френеля, сначала уберем из  $E_0$  вклад, создаваемый открытой второй зоной ( $-2E_0$ ), а затем добавим вклад этой зоны в случае, когда она перекрыта диском толщины  $\Delta$  с показателем преломления  $n$ . Результирующая амплитуда окажется равной:

$$E = E_0 - (-2E_0) + (-2E_0) e^{i\frac{\omega}{c} n \Delta} = 3E_0 - 2E_0 e^{i\frac{\omega}{c} n \Delta}.$$

Очевидно, что она будет максимальной, когда  $e^{i\frac{\omega}{c} n \Delta} = -1$ , т.е.

$$\Delta = \frac{c}{\omega n} (2m+1)\pi = \frac{\lambda}{2n} (2m+1)$$



и составит при этом  $E = 5E_0$ . При этом интенсивность в точке  $Z_p$  в 25 раз превышает интенсивность в случае отсутствия экрана.

### Задача 6.

Дисперсионное отношение, связывающее частоту и длину  $H_{10}$  волны в пустом волноводе, выглядит как  $\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$ . В волноводе, заполненном плазмой, оно запишется как:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_p}\right)^2. \text{ Поскольку, по условию задачи, } \lambda_p = q\lambda, \text{ то, как нетрудно}$$

$$\text{видеть, } \omega_p^2 = \left[ \omega^2 - \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2 \right] \left(1 - \frac{1}{q^2}\right).$$

2003/2004 учебный год

### Контрольная работа 1

#### Задача 1.

Поскольку плотность заряда зависит только от радиуса, то, следовательно, задача имеет сферическую симметрию и потенциал будет функцией только радиуса, откуда следует, что поле имеет только радиальную компоненту, зависящую от радиуса. Тогда, в соответствии с теоремой Гаусса,

$$\int \vec{E} d\vec{s} = 4\pi E_r(r) r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r') dV' = 4\pi 4\pi \rho_0 \int_0^r \left(\frac{r'}{a}\right)^n r'^2 dr'.$$

Отсюда получаем при  $r \leq a$

$$E_r(r) = \frac{4\pi \rho_0}{r^2} \frac{r^3 (r/a)^n}{(3+n)} = \frac{4\pi \rho_0 a}{(3+n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}.$$

Для  $r > a$

$$E_r(r) = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{3+n} \frac{1}{r^2}.$$

Таким образом, получаем, что для  $n > -1$  максимум  $E_r$  находится при  $r = a$ . При этом максимальное значение  $E_r(a) = \frac{4\pi \rho_0 a}{3+n}$ .

Если  $n = -1$ , то  $E_r(r) = 4\pi \rho_0 a = \text{const}$  внутри шара.

При  $-2 < n < -1$  максимум функции  $E_r \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ .

#### Задача 2.

Поскольку и в том и другом случае шар создает поле диполя, необходимо приравнять дипольные моменты. Откуда получаем

$$\vec{E}_0 R^3 = \vec{E}_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3.$$

Тогда радиус «эквивалентной» диэлектрической сферы

$$R = a \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}}.$$

Задача 3.

Это обычный плоский диод, вольт-амперная характеристика которого подчиняется закону "3/2", а распределение потенциала имеет следующий вид

$$\varphi(x) = U \left( \frac{x}{d} \right)^{4/3}.$$

Так как

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi,$$

то

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \left( \frac{x}{d} \right)^{2/3}$$

или, с учетом закона "3/2",

$$v(x) = \left[ \frac{18\pi I}{S} \frac{e}{m} \right]^{1/3} x^{2/3}.$$

Задача 4.

В процессе решения задачи 3.24 было получено, что поле внутри полости – однородное, равное по величине

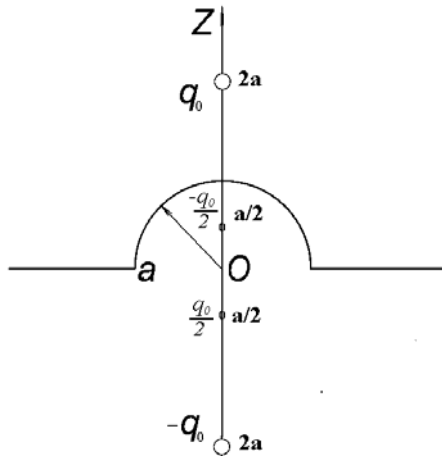
$$\vec{E}_{in} = \frac{3}{2} \vec{E}_0 = \frac{3}{2} \frac{\vec{j}_0}{\sigma}.$$

Поскольку шарик расположен вдали от поверхности полости, то мы имеем дело с диэлектрическим шариком в однородном поле  $\vec{E}_{in}$ . Шарик в однородном поле приобретает дипольный момент (см. задачу 2)

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} b^3 \vec{E}_{in} = \frac{3}{2} \frac{\vec{j}_0}{\sigma} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} b^3.$$

Задача 5.

В соответствии с принципами метода изображений необходимо поместить заряд  $q' = -qa/(2a) = -q/2$  в точку с координатой  $z' = a^2/2a = a/2$ . Для обеспечения нулевого потенциала на плоскости  $z = 0$  необходимо оба заряда отразить через плоскость вниз со сменой знака. Таким образом, получаем четыре заряда, показанных на рисунке.



Полный заряд, расположенный под линией раздела, а, точнее, заряд, распределенный вдоль поверхности, равен  $-q$ . Отсюда следует, что заряд на выступе равен  $Q = -q - q_{\text{плоск}}$ , где  $q_{\text{плоск}}$  – заряд плоской части границы раздела. Плотность этого заряда определяется по формуле

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_z(z=0).$$

Для определения поля на границе вычислим потенциал в произвольной точке в верхней полуплоскости. Запишем суммарный потенциал от четырех зарядов в произвольной точке, определяемой цилиндрическими координатами  $\{r, z, \alpha\}$ .

$$\varphi(r, z, \alpha) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-2a)^2}} - \frac{q}{2\sqrt{r^2 + (z-a/2)^2}} + \frac{q}{2\sqrt{r^2 + (z+a/2)^2}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + (z+2a)^2}}.$$

Тогда электрическое поле на границе

$$E_z(r, z=0) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} =$$

$$= q \left\{ \frac{z-2a}{[r^2 + (z-2a)^2]^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{z-a/2}{[r^2 + (z-a/2)^2]^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{z+a/2}{[r^2 + (z+a/2)^2]^{3/2}} - \frac{z+2a}{[r^2 + (z+2a)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{z=0} =$$

$$= -\frac{qa}{2} \left\{ \frac{8}{[r^2 + (2a)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[r^2 + (a/2)^2]^{3/2}} \right\}$$

Полный заряд на всей плоской части поверхности получается интегрированием предыдущего выражения по плоскости.

$$Q' = 2\pi \int \sigma r dr = -\frac{qa}{2} \left[ \frac{8}{\sqrt{5}a} - \frac{2}{\sqrt{5}a} \right] = -\frac{3q}{2\sqrt{5}}$$

Тогда заряд на выступе

$$Q = -q(1 - \frac{3}{2\sqrt{5}}) = q(\frac{3}{2\sqrt{5}} - 1).$$

Сила, действующая на выступ, равна силе действующей со стороны трех зарядов зеркального изображения минус сила, действующая со стороны плоской части поверхности. Сила со стороны трех зарядов изображения

$$F_1 = \left\{ -\frac{q^2/2}{(3/2a)^2} + \frac{q^2/2}{(5/2a)^2} - \frac{q^2}{16a^2} \right\} = -\frac{q^2}{a^2} \frac{737}{3600}$$

Сила, действующая со стороны плоской части поверхности, равна

$$F_2 = -\frac{1}{8\pi} 2\pi \left[ \frac{qa}{2} \right]^2 \int_a^\infty \left[ \frac{8}{[r^2 + (2a)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[r^2 + (a/2)^2]^{3/2}} \right]^2 r dr = -\frac{13q^2}{900a^2}.$$

Итоговый результат.

$$F = F_1 - F_2 = \frac{q^2}{a^2} \frac{137}{720}.$$

## Экзаменационная работа 1

1. Среднее значение тока

$$\langle J \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T J(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} J(t) dt + \int_{T/2}^T J(t) dt = \frac{8\varepsilon_0}{3\pi r}$$

2. Магнитный момент содержит две компоненты  $\vec{m} = \frac{\pi R^2 I}{2c} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ .

Соответственно поле  $\vec{B} = -\frac{\pi R^2 I}{2cI_0^3} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ .

3. Из непрерывности потенциала на заряженной границе раздела следует, что  $c_1 = c_2 = c$ . С помощью граничного условия  $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$  получаем  $c = -\frac{4\pi\sqrt{2}\sigma_0}{a(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$ .

4. Для медленно меняющегося поля

$$\vec{B} = \frac{3\mu}{\mu + 2} \vec{H}_0 \sin \omega t.$$

ЭДС в витке  $\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{3\mu}{\mu + 2} \varepsilon_0$ . Отсюда  $\varepsilon/\varepsilon_0 = 3\mu/(\mu + 2)$ .

5. Согласно теореме Стокса  $\oint H dl = \frac{4\pi IN}{c}$ . Мысленно отодвинем слегка брусок и подсчитаем энергию поля в зазоре:

$$\Delta W = \frac{H' B}{8\pi} (2S \cdot \Delta l).$$

Подставим сюда поле, найденное по теореме Стокса и, с учетом уравнения связи  $B = \mu H$ , а также граничных условий  $[B_n] = 0$ , получим выражение для силы:

$$F = \frac{4\pi I^2 N^2 \mu^2 S}{c^2 l^2}.$$

6. Будем искать поле внутри цилиндра в виде  $\vec{H}' = \vec{H}_1 e^{-i\omega t}$ , причем это поле, как и внешнее, также параллельно оси цилиндра. Граничное условие:  $H' - H = 4\pi i/c$ , где  $i = \sigma \cdot E$ . С помощью закона Фарадея находим

$$lE = -\frac{1}{c} \frac{\partial(H'S)}{\partial t}, \text{ откуда } E = \frac{c}{4\pi\sigma_*} (H' - H). \text{ И, наконец,}$$

$$H_1 = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left( \frac{4\pi\sigma_*\omega S}{lc^2} \right)^2}}.$$

7. Для ЭДС, возникающей на зажимах катушки, имеем выражение

$$\varepsilon = \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{dJ}{dt} = \frac{L_{12}}{c^2} J_0 \omega \cos \omega t$$

Для нахождения  $L_{12}$  рассмотрим поток через одиночный виток

$$\Phi = \frac{2H_0 S}{4\pi l^2} \cos \alpha \cdot S = \frac{L_{12}}{c} J, \text{ где } H_0 = \frac{4\pi J}{c} \cdot \frac{N}{a}.$$

Отсюда находим  $L_{12} = L_{21} = \frac{2NS^2}{l^2 a} \cos \alpha = \frac{NS^2}{l^3}$  и, наконец,

$$\varepsilon = \frac{NS^2 J_0 \omega}{c^2 l^3} \cos \omega t.$$

## Контрольная работа 2

1. Расстояние от антенны до спутника

$$L = \sqrt{R_3 + (7R_3)^2 - 2R_3 \cdot (7R_3) \cdot \cos 60^\circ} = R_3 \sqrt{43}.$$

Используя очевидное равенство

$$L \cdot \sin \theta = (7R_3) \cdot \sin 60^\circ,$$

найдем угол между вертикалью и осью направления приема сигнала от спутника:

$$\theta \approx 68^\circ.$$

Угловая точность нацеливания антенны на спутник:

$$\Delta \varphi \approx \frac{\lambda}{2r} = \frac{0,1}{2} \approx 3^\circ.$$

2. Так как падающий свет естественный, то его интенсивность

$$I_0 = \frac{1}{2} I_{\parallel} + \frac{1}{2} I_{\perp}.$$

Очевидно, что свет падает под углом Брюстера. Поэтому доля потока, попадающая в воду

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} T_{\perp} = \frac{1}{2} (1 + 1 - R_{\perp}) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 \approx 0,96.$$

3. Электрическое поле основной моды описывается выражением

$$E = E_x = E_0 \sin \left( \frac{\pi}{a} y \right) \sin \left( \frac{\pi}{a} z \right) \cos \omega t.$$

Сначала, используя граничные условия для нормальной составляющей электрической индукции, находим распределение зарядов

$$\sigma|_{x=0} = \frac{E_0}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) \cos \omega t, \quad \sigma|_{x=a} = -\frac{E_0}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) \cos \omega t.$$

Затем, выразив  $H_y$  и  $H_z$  через  $E_x$ , с помощью соответствующих граничных условий находим распределение токов

$$j_x|_{y=0} = \frac{c}{4\pi} H_z, \quad j_x|_{y=a} = \frac{c}{4\pi} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) \sin \omega t, \quad j_x|_{y=a} = -\frac{c}{4\pi} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) \sin \omega t;$$

$$j_x|_{z=0} = \frac{c}{4\pi} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin \omega t, \quad j_x|_{z=a} = -\frac{c}{4\pi} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin \omega t.$$

$$4. E(\omega) = E_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) e^{i\omega t} dt = E_0 \frac{1}{i} \left( \cos \frac{\omega \tau}{2} \right) \left( \frac{1}{\omega + \pi/\tau} + \frac{1}{\omega - \pi/\tau} \right).$$

5. Воспользуемся дифракционным интегралом Кирхгофа

$$E_P = \frac{E_0}{i\lambda} \int \frac{e^{ika}}{a} \frac{e^{ikr}}{r} \cos \psi_n (2\pi a^2 \sin \theta d\theta) \approx 2E_0 \frac{e^{ik(a+b)}}{a+b}.$$

Очевидно, что

$$r^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b) \cos \theta.$$

Отсюда

$$\sin \theta d\theta = \frac{r dr}{a(a+b)}.$$

Полагая  $\cos \psi_n \approx 1$ , найдем вклад  $n$ -ой зоны Френеля

$$E_n = E_0 \frac{e^{ika}}{a} \frac{2\pi a^2}{i\lambda} \frac{1}{a(a+b)} \int_{b+(n-1)\frac{\lambda}{2}}^{b+n\frac{\lambda}{2}} e^{ikr} dr = -E_0 \frac{e^{ik(a+b)}}{a+b} (e^{i\pi n} - e^{i\pi(n-1)}).$$

Для второй зоны получаем

$$E_2 = -2E_0 \frac{e^{ik(a+b)}}{a+b}.$$

6. Пусть на решетку перпендикулярно к ее поверхности падает плоская монохроматическая волна. Разность хода между вторичными волнами, исходящими из соседних щелей решетки, будет  $d \cos \theta$ , а разность фаз  $\delta = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ , где  $\theta$  - угол дифракции. Обозначим через  $E_1$  поле в точке наблюдения, излучаемое первой щелью. Поля, излучаемые остальными щелями:

$$E_2 = E_1 e^{-i\delta}, E_3 = E_1 e^{-i2\delta}, \dots, E_N = E_1 e^{-i(N-1)\delta},$$

где  $N$  - общее число щелей. Полное поле, излучаемое всеми щелями, представляется суммой

$$E = E_1 (1 + e^{-i\delta} + e^{-i2\delta} + \dots + e^{-i(N-1)\delta}) = E_1 \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}},$$

откуда

$$E = E_1 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} e^{-i(N-1)\delta/2}.$$

Для интенсивности получаем

$$I = I_1 \left[ \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]^2$$

В направлениях, определяемых условием

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

получаются главные максимумы. (При отдельных значениях  $m$  максимумы могут и не возникнуть, если эти направления совпадают с направлениями на дифракционные минимумы от одной щели, когда  $I_1 = 0$ ).

В направлениях, определяемых условием

$$d \sin \theta = \left( m + \frac{p}{N} \right) \lambda \quad (p = 1, 2, \dots, N-1),$$

получаются дифракционные минимумы, в которых интенсивность равна нулю.

Если волна падает на решетку наклонно под углом  $\alpha$ , то положение главных максимумов определяется условием

$$d(\sin \theta - \sin \alpha) = m\lambda,$$

а дифракционных минимумов - условием

$$d(\sin \theta - \sin \alpha) = \left( m + \frac{p}{N} \right) \lambda.$$

Для дифракционной решетки Рэлея предложил следующий критерий спектрального разрешения. Спектральные линии с близкими длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda'$  считаются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины для одной длины волны совпадает по своему положению с первым дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны, то есть

$$d(\sin \theta - \sin \alpha) = \left( m + \frac{1}{N} \right) \lambda,$$

$$d(\sin \theta - \sin \alpha) = m\lambda'.$$

Отсюда  $(m + 1/N)\lambda = m\lambda'$ , и следовательно,  $\delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \lambda/(Nm)$ . Таким образом, разрешающая способность

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm.$$

Направление на «самый» главный максимум с номером  $m = 0$  не зависит от длины волны. Он наблюдается под углом  $\theta = \alpha$ .

## Экзаменационная работа 2

1.

$$R_{TM} = \left[ \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \pi/4)}{\operatorname{tg}(\varphi + \pi/4)} \right]^2, \quad R_{TE} = \left[ \frac{\sin(\varphi - \pi/4)}{\sin(\varphi + \pi/4)} \right]^2, \quad R_{TM} = (R_{TE})^2.$$

2. Так как дипольный момент системы частиц  $\vec{d} = 2qr(\cos \omega t \cdot \vec{e}_x + \sin \omega t \cdot \vec{e}_y)$ , а

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{d} = -\omega^2 \vec{d}, \text{ то}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2(2q)^2 \omega^4}{3c^3} r^4. \quad (1)$$

С другой стороны  $\varepsilon = 2 \frac{mv^2}{2} - \frac{q^2}{2r}$  и, следовательно,

$$\varepsilon(t) = -\frac{q^2}{4r(t)} \quad (2)$$

А так как  $mv^2 / r = q^2 / 4r^2$ , то

$$\omega^2 = q^2 / (4mr^3). \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получаем  $d(1/r) / dt = k / r^4$ , где

$$k = 2q^4 / (3m^2 c^3) = (2/3)r_q^2 c, \quad r_q = q^2 / mc^2. \text{ Отсюда } r(t) = \sqrt[3]{r_0^3 - 2r_q^2 ct}, \quad t_0 = r_0^3 / 2r_q^2 c.$$

И, наконец,

$$\varepsilon(t) = -\frac{q^2}{4r_0} (1 / \sqrt[3]{1 - 2r_q^2 ct / r_0^3}) \text{ или } \varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt[3]{1 - \frac{128t\varepsilon_0^3}{m^2 c^3 q^3}}},$$

где  $\varepsilon_0 = -q^2 / 4r_0$ .

3. По условию заряд, двигаясь со скоростью  $v$ , успевает переместиться по орбите на расстояние  $\pi a$ , пока излучение проходит расстояние  $R$ , т. е.  $R = c(\pi a / v) = \pi a / \beta$ , где  $\beta = v / c$ . Поле в точке  $P$ :

$$\vec{B} = \frac{\left( \frac{d^2}{dt^2} \vec{d} \right) \times \vec{n}}{c^2 R} + \frac{\left( \frac{d}{dt} \vec{d} \right) \times \vec{n}}{c R^2}.$$

$$\text{Отсюда } \vec{B}_z = -q\beta^2 \frac{\cos \theta}{aR} + q\beta \frac{\sin \theta}{R^2}.$$

А теперь все выразим через  $\beta$ :  $\sin \theta = a / R = \beta / \pi$ ,  $\cos \theta \approx 1 - (1/2)(\beta / \pi)^2$  и, наконец,

$$B = -\frac{q}{\pi a^2} \beta^3 \left[ 1 - \frac{\beta}{\pi^2} + O(\beta^2) \right].$$

4. Дисперсионное соотношение для пустого волновода

$$(\omega / c)^2 = \gamma_{min}^2 + k^2,$$

отсюда, полагая  $k=0$ , получаем для минимальной частоты:  $\omega_* / c = \gamma_{min}$ .

Дисперсионное соотношение для заполненного волновода

$$\varepsilon(\omega / c)^2 = \gamma_{min}^2 + (k')^2.$$

Так как по условию фазовая скорость  $\omega / k' = c$ , то  $(\varepsilon - 1)(\omega / c)^2 = (\omega_* / c)^2$ , откуда

$$\omega = \frac{\omega_*}{\sqrt{\varepsilon - 1}}.$$

5. Пусть поле волны в точке  $P$  в отсутствие диска равно  $\vec{E}_0$ . Рассмотрим это поле как суперпозицию полей  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Вклад в  $\vec{E}_0$  от 1/3 части первой зоны Френеля на комплексной плоскости можно представить вектором  $\vec{E}_1$ , равным по модулю вектору  $\vec{E}_0$ , и повернутым по часовой стрелке на угол  $60^\circ$ . Увеличение оптической длины пути на  $\lambda/3$



после установки диска означает поворот вектора  $\vec{E}_1$  на угол  $120^\circ$  против часовой стрелки и преобразование его в вектор  $\vec{E}'_1$ , параллельный вектору  $\vec{E}_2$ . Таким образом, поле в точке  $P$  после установки диска станет равным по модулю  $2E_0$ , а интенсивность увеличится в 4 раза.

6. Уравнение движения плоскости:  $\mu(dv/dt) = \sigma(E_0 + E_1)$ . Отсюда получаем  $-i\omega\mu v = \sigma(E_0 + E_1)$ .

Граничные условия:  $E_0 + E_1 = E_2$  и  $E_0 - E_1 - E_2 = 4\pi\sigma v/c$ . Решая систему уравнений, находим

$$E_1 = -E_0/(1-i\alpha), E_2 = -i\alpha E_0/(1-i\alpha), v = (c/2\pi\sigma)E_0/(1-i\alpha),$$

где  $\alpha = c\omega\mu/(2\pi\sigma^2)$ .

7. Размеры области поперечной когерентности, т.е. площадки, освещаемой когерентно протяженным некогерентным источником:

$$r_\perp \sim \lambda/\alpha, \text{ где } \alpha = D/l - \text{угловой размер источника.}$$

Разрешающая способность решетки  $R = \lambda/\delta\lambda = mN_{\text{эфф}}$ , где эффективное число штрихов  $N_{\text{эфф}} \approx r_\perp/d$ . Тогда при  $m=1$ :  $\lambda/\delta\lambda \approx \lambda l/Dd$ , откуда  $l_{\min} \approx Dd/\delta\lambda = 100 \text{ см}$ .

## 2004/2005 учебный год

### Контрольная работа 1

1.А) До соединения проводником. Маленький незаряженный проводящий шарик приобретет в поле большого шарика дипольный момент  $\vec{p} = \vec{E}r^3$ , где  $E = \frac{q\vec{l}}{l^3}$  - поле от большого шарика. Диполь упругий ( $p \sim E$ ), значит сила, действующая на диполь

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial l} \left( r^3 \frac{q^2}{l^4} \right) = -\frac{2r^3 q^2}{l^5}$$

В) После соединения потенциалы шариков уравниваются, а заряд разделится пропорционально ёмкостям шариков ( $C=r, R$ ).  $q_1 = q \frac{r}{R+r} \approx \frac{qr}{R}$ ;  $q_2 = q \frac{R}{R+r} \approx q$ . Сила

$$\text{отталкивания шариков } F_2 = \frac{q_1 q_2}{l^2} \approx \frac{q^2 r}{Rl^2}.$$

$$\text{Отношение сил составит } \frac{F_1}{F_2} \approx -\frac{2r^2 R}{l^3}.$$

Неточность в таком решении заключается в том, что при соединении шариков проводником мы пренебрегли ёмкостью этого проводника, или, другими словами, тем, что на этом проводнике тоже останется часть заряда (причем, если  $l \gg R$ , то ёмкость прямого длинного проводника  $C_l \sim \frac{l}{2 \ln l/d}$ , где  $d$  – диаметр проводника, может оказаться больше ёмкости шаров).

2. Мультипольное разложение потенциала имеет вид

$$\varphi = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} + \dots + \frac{Q_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2} \dots \partial x_{\alpha_n}} \frac{1}{r}, \text{ где } Q, p,$$

$Q_{\alpha\beta}$ ,  $Q_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$  – заряд, дипольный, квадрупольный, и  $2^n$ -польный моменты системы соответственно. Для вычисления мультипольных моментов используем  $Q = \int \rho(\vec{r}') dV'$ ,  $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$ ,  $Q_{\alpha\beta} = \int x'_\alpha x'_\beta \rho(\vec{r}') dV'$ ,  $Q_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = \int x'_{\alpha_1} x'_{\alpha_2} ... x'_{\alpha_n} \rho(\vec{r}') dV'$ .

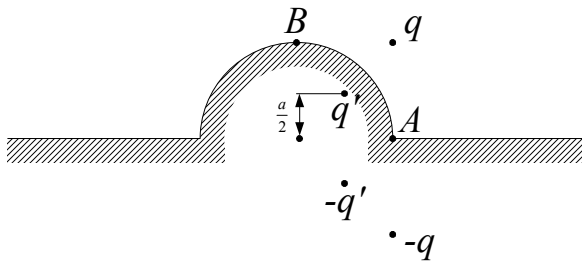
В данной задаче заряд и дипольный момент не равны нулю, значит достаточно ограничиться этими членами разложения. Заряд кольца задан по условию. Из симметрии кольца следует, что дипольный момент кольца равен нулю, если начало координат выбрано в центре кольца. При смещении начала координат вдоль оси  $z$  изменится  $p_z^* = \int (z' + h) \rho(\vec{r}') dV' = p_z + Qh = Qh$ . Следует отметить, что в данном случае  $p_z$  не зависит от ориентации кольца (т.е. не важно, какой угол между нормалью к плоскости кольца и осью  $z$ ).

Таким образом, первые два ненулевых члена разложения по мультиполям потенциала кольца  $\varphi(r, \theta)$  на большом расстоянии  $r \gg a$   $\varphi(r, \theta) \approx \frac{q}{r} + \frac{qh \cos(\theta)}{r^2}$ .

3. Для шара  $C_0=R$ . Сферическая концентрическая оболочка не создает поля внутри, значит поле внутри не изменится:  $\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3}$ . Потенциал шара

$$\varphi = \int \vec{E} d\vec{l} = q \int_a^R \frac{dr}{r^2} = q \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right) = q \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{a} \right).$$

4. Воспользуемся методом изображений. Система зарядов изображений будет состоять из 3 зарядов, расположенных как



показано на рисунке слева.  $q' = -\frac{q}{\sqrt{2}}$ . Для

нахождения поверхностной плотности заряда в точке  $B$  воспользуемся граничным условием  $[E_n] = 4\pi\sigma$ . Складывая нормальные компоненты поля от всех зарядов в точке  $B$  и учитывая, что поле в металле равно нулю, получим

$$[E_n] = -\frac{q}{a^2} \left( 1 - \frac{1}{5\sqrt{5}} \right) = 4\pi\sigma. \text{ Отсюда } \sigma_B = -\frac{q}{4\pi a^2} \left( 1 - \frac{1}{5\sqrt{5}} \right). \text{ Точка } A \text{ под зарядом находится}$$

в угле, в котором пересекаются две металлические полуплоскости. Поскольку поле на поверхности металла не может иметь компоненты вдоль поверхности, то в таких точках поле всегда равно нулю. Таким образом, плотность заряда в точке  $A$  равна нулю  $\sigma_A = 0$ .

5. Задача о распределении тока внутри и вокруг шара с проводимостью  $\sigma_1$ , помещенного в среду с проводимостью  $\sigma_0$ , в которой течет ток  $\vec{j}_0$  решена, например, в [Меледин Г.В., Черкасский В.С. Электродинамика частиц и полей в задачах, часть 1, Новосибирск: НГУ, 2003]. В ней получено, в частности, что ток внутри шара однородный

$$\vec{j}_1 = \vec{j}_0 \frac{3\sigma_1}{\sigma_0 + 2\sigma_1}. \text{ Тогда поле внутри шара } \vec{E}_1 = \frac{3\vec{j}_0}{\sigma_0 + 2\sigma_1}, \text{ полный ток через шар}$$

$$J = \frac{3\sigma_1 j_0}{\sigma_0 + 2\sigma_1} \pi a^2.$$

6. Давление на поверхность анода  $P = \frac{1}{S} \frac{dp}{dt} = \frac{vm}{S} \frac{dN}{dt} = mnv^2$ . Здесь  $m$ ,  $n$ ,  $v$  – масса, концентрация, и скорость электронов вблизи поверхности анода. Ток в диоде  $j = env$ , а следовательно,  $P = \frac{mvj}{e}$ . Из закона сохранения энергии скорость электронов  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \sim U^{1/2}$ . Из закона “3/2”  $j \sim U^{3/2}$ . Таким образом,  $P \sim U^2$ , а значит давление возрастет в  $n^2$  раз.

Другой способ решения состоит в использовании закона сохранения импульса. Т.к. диод – замкнутая система, а поля и токи стационарны, то полная сила, действующая на две пластины, равна нулю. На каждую пластину могут действовать силы давления от удара электронов (или сила отдачи от вылета электронов) и сила давления со стороны электрического поля  $P = \frac{E^2}{8\pi}$ . Обе эти силы на катоде равны нулю, т.к. мы считаем, что электроны вылетают с катода с нулевой скоростью, и делаем предположение о неограниченной эмиссии с катода, из которого следует, что  $E_k=0$ . Следовательно, эти силы должны быть равны и на поверхности анода. Т.е. в данной задаче можно вычислить во сколько раз вырастет давление со стороны электрического поля на поверхность анода. Поскольку  $E$  и  $\phi$  возрастают, очевидно, пропорционально, а  $P = \frac{E^2}{8\pi}$ , то давление вырастет в  $n^2$  раз.

### Экзаменационная работа 1

1. Поле диполя  $\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$ . Сила, действующая на участок провода длиной  $dx$ ,  $dF_y = [d\vec{l} \times \vec{B}]_y = -I \cdot dx \cdot B_z$ . Ось  $z$  направлена вдоль дипольного момента, ось  $x$  – вдоль провода. Проинтегрировав силу, получим  $F_y = -mI \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{1}{r^3} + \frac{3a^2}{r^5} \right) dx = -\frac{2mI}{ca^2}$ .

2. В силу принципа суперпозиции можно рассмотреть поступательное движение и вращение отдельно.

Для поступательного движения поле снаружи цилиндра будет как от прямого провода с  $I_z = \frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma \cdot 2\pi a \cdot v dt}{dt} = 2\pi\sigma av$ , т.е.  $B_\alpha = \frac{2I_z}{cr} = \frac{4\pi\sigma v}{r}$ . Поле внутри цилиндра равно нулю.

Для вращательного движения поле внутри цилиндра будет как поле от соленоида с поверхностной плотностью тока  $i_\alpha = \frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma \cdot 2\pi a}{T} = \sigma a \omega$ , т.е.  $B_z = \frac{4\pi i_\alpha}{c} = \frac{4\pi\sigma a \omega}{c}$ . Поля снаружи цилиндра нет.

Ответ: при  $r < a$   $B_r = B_\alpha = 0$ ,  $B_z = \frac{4\pi\sigma a \omega}{c}$ ; при  $r > a$   $B_r = B_z = 0$ ,  $B_\alpha = \frac{4\pi\sigma v}{r}$ .

3. Найдем плотность тока, создающего такое поле. Для этого воспользуемся теоремой Стокса  $\text{rot}\vec{B} = \frac{4\pi\vec{j}}{c}$ . Будем решать задачу в цилиндрической системе координат. Ротор в цилиндрических координатах вычисляется как

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \vec{e}_R & R \cdot \vec{e}_\alpha & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_R & RB_\alpha & B_z \end{vmatrix}$$

Поскольку у поля есть только  $z$ -компонента, зависящая только от  $R$ , то у тока будет только  $\alpha$ -компонента, как и должно быть у вращающегося заряженного цилиндра. Таким образом  $j_\alpha = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial R} = \frac{3cB_0 R^2}{4\pi a^3}$ . С другой стороны  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ , т.е.  $j_\alpha = \rho \omega R$ . Приравнявая токи, найдем  $\rho = \frac{3cB_0 R}{4\pi \omega a^3}$ .

4. Токи в стенке трубы будут течь вдоль оси  $z$  аксиально-симметрично. Такое распределение тока не будет создавать поля внутри трубы, т.е. поле внутри трубы создается только проводом  $B = \frac{2J_0 e^{i\omega t}}{cr}$ . Магнитное поле в стенке трубы можно найти, решив

уравнение скин-эффекта  $\text{rot}(\text{rot}\vec{B}) = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  с граничным условием на поверхности

трубы  $B_\alpha = \frac{2J_0 e^{i\omega t}}{ca}$ . Зависимость поля от времени – гармоническая:  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$ . Поскольку

магнитное поле направлено везде по  $\vec{e}_\alpha$ , а зависит только от  $R$ , то, расписав ротор в цилиндрических координатах, уравнение скин-эффекта можно привести к виду:

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R B_\alpha = -\frac{4\pi\sigma\mu\omega B_\alpha}{c^2} \quad \text{или} \quad -\frac{B_\alpha}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial B_\alpha}{\partial R} + \frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial R^2} = \frac{4\pi\sigma\mu\omega B_\alpha}{c^2}.$$

Точное решение этого уравнения выражается через функции Бесселя, но в данной задаче можно записать приближенное решение для  $\delta \ll a$ . В этом случае в левой части уравнения самым

большим слагаемым будет третье  $\frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial R^2}$ , а первое и второе в  $\left(\frac{\delta}{R}\right)^2$  и  $\frac{\delta}{R}$  раз меньше

соответственно (т.к. поле затухает внутрь металла в слое толщиной  $\sim \delta$ ). Тогда, пренебрегая

первыми двумя слагаемыми, получим уравнение  $\frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial R^2} = \frac{4\pi\sigma\mu\omega B_\alpha}{c^2}$ , решением которого,

удовлетворяющим граничному условию, будет  $B_\alpha(R) \approx \frac{2J_0 e^{i\omega t}}{ca} e^{-\frac{R-a}{\delta}(1+i)}$ .

5. Так как цилиндр и плоскость сверхпроводящие, то весь поток магнитного поля, выходящий из цилиндра, будет растекаться между торцом цилиндра и сверхпроводящей плоскостью. Найдем давление магнитного поля на торец цилиндра. Для этого найдем поле

в зазоре из сохранения магнитного потока:  $B_0 \cdot \pi a^2 = B \cdot h \cdot 2\pi r$ , откуда  $B = \frac{B_0 a^2}{2hr}$ . Сила,

действующая на цилиндр  $P = \int \frac{BH}{8\pi} dS = \int_a^b \frac{B_0^2 a^2}{32\pi h^2} 2\pi r dr = \frac{B_0^2 a^4}{16h^2} \ln \frac{b}{a}$ , отсюда получим для

высоты  $h = \frac{B_0 a^2}{4} \sqrt{\frac{\ln b/a}{P}}$ . При решении задачи считалось, что  $h \ll a$ .

6. Из геометрии задачи следует, что магнитное поле во всем пространстве будет переменным с частотой  $\omega$  и направленным вдоль оси цилиндров. Непроводящий цилиндр будет создавать поле внутри себя как от соленоида с поверхностной плотностью тока

$j = \frac{dQ}{dt} = \sigma a \Omega_0 e^{-i\omega t}$ , т.е.  $B_1 = \frac{4\pi j}{c} = \frac{4\pi \sigma a}{c} \Omega_0 e^{-i\omega t}$ . Так как внешний цилиндр

сверхпроводящий, то в нем будут течь токи, такие, что поток через этот цилиндр будет равен нулю, т.е.  $B_2\pi b^2 + B_1\pi a^2 = 0$ , где  $B_2$  – поле, создаваемое внешним цилиндром.

Чтобы найти переменное электрическое поле воспользуемся законом электромагнитной индукции, применив его к круглому контуру радиуса  $r$  с центром на оси цилиндров. Если радиус этого контура меньше  $a$ , то

$$2\pi r \cdot E_\alpha = \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} \pi r^2 i \omega (B_1 + B_2), \text{ откуда } E_\alpha = \frac{2\pi i \sigma a r \omega}{c^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \Omega_0 e^{-i\omega t}.$$

Если же радиус контура больше  $a$ , но меньше  $b$ , то

$$2\pi r \cdot E_\alpha = \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{i\omega}{c} (B_1\pi a^2 + B_2\pi r^2), \text{ откуда } E_\alpha = \frac{2\pi i \sigma a^3 \omega}{c^2 r} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \Omega_0 e^{-i\omega t}.$$

Легко проверить, что при  $r=a$  оба выражения дают одинаковое поле, т.е. граничное условие  $[E_r]=0$  выполнено. При  $r \geq b$  поле равно нулю. Комплексная единица  $i$  показывает, что электрическое поле сдвинуто по фазе относительно магнитного поля (или относительно угловой скорости) на  $\pi/2$ .

Ответ: 
$$E_\alpha = \frac{2\pi i \sigma a r \omega}{c^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \Omega_0 e^{-i\omega t} \text{ при } r < a, \quad E_\alpha = \frac{2\pi i \sigma a^3 \omega}{c^2 r} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \Omega_0 e^{-i\omega t} \text{ при } b > r > a.$$

## Контрольная работа 2

**Задача 1.** Поскольку свет падает под углом Брюстера, коэффициент отражения той части света, которая имеет проекцию вектора напряжённости электрического поля параллельную плоскости падения  $R_{||} = 0$ ; следовательно  $T_{||} = 1$ . Свет, который имеет проекцию вектора напряжённости электрического поля перпендикулярную плоскости падения, частично отражается с амплитудным коэффициентом отражения

$$r_{\perp} = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

По определению угла Брюстера  $(\varphi) = n = \frac{4}{3}$ , а  $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1+n^2}$ .  $\sin^2 \varphi = \frac{n^2}{1+n^2}$ ,  $\sin \psi = \frac{1}{n} \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ . Тогда  $\cos \psi = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$ .

Для вычисления коэффициента отражения запишем  $\sin(\varphi + \psi) = 1$ , тогда

$$\sin(\varphi - \psi) \sin \varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \varphi = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}},$$

$$r_{\perp} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}; R_{\perp} = |r_{\perp}|^2 = \left[ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right]^2.$$

$$T_{\perp} = 1 - R_{\perp} = 1 - \left[ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right]^2.$$

Окончательно получим

$$T = \frac{1}{2} [1 + T_{\perp}] = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{625} = 0.9608$$

**Задача 2.** Ранее нами было показано, что из соотношения Рэлея для различимости

двух точек объекта необходимо выполнение условия

$$\theta_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \frac{5 \cdot 10^{-5}}{0.5} = 1.22 \cdot 10^{-4}.$$

Тогда

$$L_{min} = D / \theta_{min} = \frac{1.4 \cdot 10^6}{1.22 \cdot 10^{-4}} = 1.15 \cdot 10^{10} \text{ километров.}$$

**Задача 3.** В волноводе гармоническое решение для  $H$ -волны можно записать в виде

$$\Delta_2 B_z(x, y) + \left( \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) B_z = 0.$$

Как известно, все поля в волноводе определяются (для  $H$ -волны) через  $B_z$ , которое удовлетворяет вышеприведенному уравнению и граничному условию

$$\frac{\partial B_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Если переписать это уравнение в виде

$$\Delta_2 \Psi(x, y) + \gamma^2 \Psi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0,$$

то понятно, что решение  $\Psi(x, y)$  и собственные значения  $\gamma_{m,n}$  зависят только от геометрии поперечного сечения волновода. Более того, для прямоугольного сечения  $axb$  и для волны  $H_{10}$  собственное число

$$\gamma_{1,0}^2 = \frac{\pi^2}{a^2}$$

и не зависит от вида функции  $\varepsilon(\omega)$ . Тогда дисперсионное уравнение для первого (вакуум) и второго (плазма) случая имеют вид (с учетом того, что частота возбуждающего источника не меняется ( $\omega = \omega_0$ )),

$$\varepsilon(\omega_0) \cdot \frac{\omega_0^2}{c^2} - k^2 = \frac{\pi^2}{a^2}; \quad \frac{\omega_0^2}{c^2} - k_0^2 = \frac{\pi^2}{a^2}.$$

По условию задачи  $k^2 = \frac{k_0^2}{m^2}$  (длина волны увеличилась в  $m$  раз). Подставляя эту зависимость и зависимость  $\varepsilon(\omega_0) = 1 - (\omega_p^2 / \omega_0^2)$  и делая несложные преобразования, получим

$$\frac{\omega_p^2}{c^2} = \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right) \left( \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} \right)$$

**Задача 4.** Для решения этой задачи необходимо обобщить понятие зон Френеля. Можно ее, конечно, решать и с помощью вычисления интеграла Кирхгофа, но проще определить при каком радиусе  $r$  разность оптических путей  $\Delta l = (n_1 l_1 + n_2 l_2) - (a n_1 - b n_2) = \frac{\lambda}{2}$ . Это и будет радиус, при котором интенсивность в точке В будет максимальной. Далее задача становится чисто геометрической. Из прямоугольных треугольников

$$l_1^2 = (a + x)^2 + r^2, \quad l_2^2 = (b - x)^2 + r^2.$$

Из прямоугольного треугольника с радиусом границы среды

$$R^2 - r^2 = (R - x)^2 = R^2 - 2Rx + x^2,$$

пренебрегая  $x^2$  по сравнению  $2Rx$ , получим  $r^2 = 2Rx$ . Вычислим  $l_1$

$$l_1 = a \sqrt{\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2 + \frac{2R}{a} \frac{x}{a}} = a \sqrt{1 + 2\frac{x}{a} + 2\frac{R}{a} \frac{x}{a}} \approx a + x \left(1 + \frac{R}{a}\right).$$

Аналогично, для  $l_2$

$$l_2 = b + x \left(\frac{R}{b} - 1\right).$$

Делая очевидные преобразования, получим

$$r = \sqrt{\frac{\lambda}{\frac{(n_1 - n_2)}{R} + \left(\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b}\right)}}$$

**Задача 5.** Из решения задачи 3.34 [Меледин Г.В., Черкасский В.С. Электродинамика частиц и полей в задачах, часть 2, Новосибирск: НГУ, 2003], с учётом многократной интерференции получаем:

$$T = \frac{\tau_{12}^2 \tau_{23}^2}{1 + r_{23}^2 r_{21}^2 - 2r_{23} r_{21} \cos \Delta \frac{2\pi}{\lambda_2}}, \text{ где } \Delta = 2dn_2, \tau \text{ и } r - \text{коэффициенты прохождения и}$$

отражения от границ соответствующих сред (вычисляемые по формулам Френеля). Так как пластинка четвертьволновая, прошедшие волны интерферируют в фазе, и коэффициент прохождения максимален (косинус равен минус единице). Подставив соответствующие коэффициенты получим требуемую формулу. При условии  $n_1 n_3 = n_2^2$  получаем полностью просветляющее покрытие и коэффициент прохождения равен единице. При условиях  $n_1 n_3 \gg n_2^2$  или  $n_1 n_3 \ll n_2^2$  коэффициент отражения близок к единице.

**Задача 6.** Получается, что мы имеем 2 сдвинутые дифракционные решётки каждая из которых пропускает свет с ортогональной поляризацией.

$$I_{\parallel}(\vartheta) = \frac{1}{4} I_0 \cdot \sin^2 \left( \frac{ka}{2} (\sin \vartheta) \right) \cdot \frac{(\sin Nka (\sin \vartheta))^2}{(\sin ka (\sin \vartheta))^2} \text{ и}$$

$$I_{\perp}(\vartheta) = \frac{1}{4} I_0 \cdot \sin^2 \left( \frac{ka}{2} (\sin \vartheta) \right) \cdot \frac{(\sin Nka (\sin \vartheta))^2}{(\sin ka (\sin \vartheta))^2}$$

Сумма данных волн будет иметь поляризацию, направленную под углом 45 градусов к плоскости поляризации любого из поляроидов. Если закрыть чётные полосы, интенсивность света уменьшится вдвое, направление вектора поляризации будет вдоль соответствующей оси поляроида.

**Задача 5.** При наличии частично когерентного излучения интерференционную картину можно наблюдать если разность хода меньше продольной длины когерентности. Для данного случая

$$\Delta l = 2dn \cos \psi \leq l_{\diamond}.$$

При записи этого выражения мы пренебрегаем слагаемым  $\lambda/2$ , потому что  $l_{\diamond} \gg \lambda$ . Подставляя выражение для  $d = l_{\diamond}/2$  и зависимость  $n \sin \psi = \sin \theta$ , получаем после несложных преобразований

$$\sin^2 \theta_* = n^2 - 1, \theta > \theta_*.$$

Записав соотношение для двух соседних максимумов

$$2dn \cos(\psi + \delta\psi) = m\lambda, \quad 2dn \cos \psi = (m+1)\lambda.$$

Вычитая из второго уравнения первое и используя малость  $\delta\psi$ , получим

$$\delta\psi = \frac{\lambda}{2d \sin \theta}$$

это непонятно что за решение - ???

## Экзаменационная работа 2

1. Найдем излучаемую мощность. Она будет равна мощности внешних сил, необходимой для поддержания колебаний.

Заряженная плоскость создает поверхностный ток  $\vec{i} = \sigma \vec{v} = \sigma v_0 e^{i\omega t}$ . Из граничного условия  $[H_\tau] = \frac{4\pi i}{c}$  найдем магнитное поле вблизи плоскости  $H = \frac{2\pi\sigma v_0}{c} e^{i\omega t}$ . Очевидно, магнитное поле волны будет иметь вид  $H = \frac{2\pi\sigma v_0}{c} e^{i(\omega t - kz)}$ , а амплитуды электрического и магнитного поля в вакууме совпадают.

Для того, чтобы посчитать мощность излучения, требуется уточнить, что имеется в виду под комплексной скоростью  $\vec{v}$ . Если считать, что реальная и мнимая часть скорости это ее проекции на две перпендикулярные оси в плоскости, то мощность излучения с единицы площади в одно полупространство

$$P = \langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} |H|^2 = \frac{\pi \sigma^2 v_0^2}{c}. \text{ Очевидно, такая же мощность излучается в другую}$$

сторону:  $P_\Sigma = \frac{2\pi \sigma^2 v_0^2}{c}$ . Если плоскости колеблется вдоль одной прямой, то от полей

$$\text{необходимо взять реальную часть. Тогда } P = \langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle |\text{Re } H|^2 \rangle = \frac{\pi \sigma^2 v_0^2}{2c}, \text{ а } P_\Sigma = \frac{\pi \sigma^2 v_0^2}{c}$$

(т.е. мощность в 2 раза меньше).

Мощность сил, действующих на плоскость можно посчитать и как  $P = \vec{F} \vec{v} = \sigma \vec{E} \vec{v}$ . После подстановки поля и скорости получим те же ответы, что и при решении первым способом.

2. 1-й способ. Найдем ток, создаваемый нитью в лабораторной системе отсчета, (где нить движется). Плотность тока и заряда образуют 4-вектор  $j_\alpha = (\vec{j}, \rho c)$ . В системе отсчета нити  $j'_\alpha = (0, 0, 0, \rho c)$ . В лабораторной системе  $j_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} j'_\beta = (\beta \gamma \rho c, 0, 0, \gamma \rho c)$ . Тогда ток в проводе  $I = \int j dS = \beta \gamma c \kappa$ . Тогда магнитное поле по модулю  $B = \frac{2I}{cr} = \frac{2\kappa}{r} \beta \gamma$ , а направлено по окружности вокруг провода. Также мы получили, что линейная плотность заряда на нити в лабораторной системе отсчета вырастет в  $\gamma$  раз, что является следствием релятивистского сокращения длины нити. Электрическое поле в лабораторной системе отсчета  $E = \frac{2\gamma \kappa}{r}$ .

2-й способ заключается в преобразовании полей из системы отсчета, связанной с нитью, в лабораторную систему. В системе нити  $\vec{H}' = 0; E'_r = \frac{2\kappa}{r}$ . Формулы преобразования полей имеют вид



$$\begin{aligned}
E_{\parallel} &= E'_{\parallel} \\
E_{\perp} &= \gamma \left( E'_{\perp} - \frac{1}{c} [V \times B']_{\perp} \right) \\
B_{\parallel} &= B'_{\parallel} \\
B_{\perp} &= \gamma \left( B'_{\perp} + \frac{1}{c} [V \times E']_{\perp} \right)
\end{aligned}$$

Здесь индекс  $\parallel$  обозначает компоненту поля вдоль нити, а  $\perp$  - поперек. Подставляя поле нити, получим

$$\begin{aligned}
B_{\parallel} &= 0 \\
B_{\perp} &= \gamma \frac{1}{c} [V \times E']_{\perp} = \beta \gamma \frac{2\kappa}{r}
\end{aligned}$$

Магнитное поле, как и в первом решении, направлено по окружности вокруг нити. Электрическое поле также легко вычисляется

$$\begin{aligned}
E_{\parallel} &= 0 \\
E_{\perp} &= \gamma E'_{\perp} = \frac{2\gamma\kappa}{r}
\end{aligned}$$

3. Поле рассеянной волны для одного заряда  $\vec{H} = \frac{[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}]}{c^2 r}$ , где  $\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = \frac{e^2 \vec{E}_0}{m}$ ,  $E_0$  - поле падающей волны. Поля рассеянных волн от каждого заряда будут складываться с учетом разности фаз между ними. При рассеянии вперед поля складываются в фазе и  $H_{1\Sigma} = 2H$ . При рассеянии назад разность хода волн составит  $2l$ , т.е.  $H_{2\Sigma} = H(1 + e^{2ikl})$ .

Дифференциальное сечение рассеяния  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S_0} \frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{S_0} \frac{c}{4\pi} |H_{\Sigma}|^2 r^2$ , что для

рассеяния вперед дает  $\frac{d\sigma_1}{d\Omega} = \frac{4\pi}{cE_0^2} \frac{4|\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} = \frac{4e^4 \sin^2 \theta}{m^2 c^4} = \frac{4e^4}{m^2 c^4} = 4r_e^2$ , (  $\theta = \pi/2$  ,

$r_e \approx 3 \cdot 10^{-13}$  см - классический радиус электрона). Для рассеяния назад

$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{4\pi}{cE_0^2} \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} \left( |1 + e^{2ikl}|^2 \right) = \frac{4e^4 \sin^2 \theta \cos^2 kl}{m^2 c^4} = 4r_e^2 \cos^2 kl$ , и также подставлено  $\theta = \pi/2$ .

4. В поле электромагнитной волны диск будет поляризоваться. Поскольку размер диска мал по сравнению с длиной волны падающего излучения, то весь диск можно заменить на точечный диполь. Дипольный момент будет менять с частотой внешнего поля. Излучение этого диполя и будет рассеянным излучением.

Пренебрегая краевыми эффектами, будем считать, что поле вне диска однородно и равно  $E_0 e^{i\omega t}$ . Из граничных условий на поверхности диска

$[D_n] = 0 \Rightarrow D_{вн} = D_{сн} = E_0 e^{i\omega t}$ ;  $E_{вн} = \frac{E_0 e^{i\omega t}}{\varepsilon}$ . Поверхностная плотность связанных зарядов на

поверхности диска  $\sigma_{св} = \frac{[E_n]}{4\pi} = \frac{E_0}{4\pi} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) e^{i\omega t}$ . Дипольный момент диска

$d = \sigma_{св} Sh = \frac{E_0 R^2 h}{4} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} e^{i\omega t}$ . Амплитуда электрического поля рассеянной волны

$$E = \frac{|\ddot{d}| \sin \theta}{c^2 r} \quad . \quad \text{Дифференциальное сечение рассеяния волны на диске}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S_0} \frac{dI}{d\Omega} = \frac{E^2}{E_0^2} r^2 = \left( \frac{(\varepsilon - 1) \hbar R^2 \omega^2 \sin \theta}{2 \varepsilon c^2} \right)^2 \quad . \quad \text{Полное сечение рассеяния}$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{(\varepsilon - 1) \hbar R^2 \omega^2}{\varepsilon c^2} \right)^2$$

5. Поскольку кольцо сверхпроводящее, то поток магнитного поля в нем сохраняется, а ток будет зависеть от положения кольца. Магнитный дипольный момент кольца пропорционален току, т.е. тоже будет меняться, а значит, возникнет магнитодипольное излучение.

Найдем магнитный момент кольца. Из сохранения потока  $\frac{2I_0}{cr} \pi a^2 + \frac{LI}{c} = 0 \Rightarrow I = \frac{2\pi a^2 I_0}{Lr}$ . Здесь учтено, что  $r \gg a$  и поле в плоскости кольца

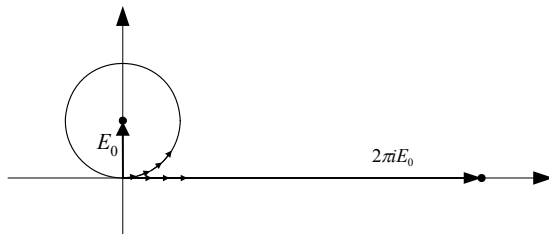
можно считать однородным. Магнитный момент витка с током  $m = \frac{IS}{c} = \frac{2\pi^2 a^4 I_0}{Lrc}$ .

Мощность магнитодипольного излучения найдем по формуле  $P = \frac{2|\ddot{m}|^2}{3c^3}$ . Запишем

зависимость  $r(t)$  в виде  $r(t) = r_0 - vt$ , тогда  $\ddot{m} = \frac{2\pi^2 a^4 I_0}{Lc} \frac{2v^2}{r^3}$ , а  $P = \frac{32 \pi^4 a^8 I_0^2 v^4}{3 c^5 L^2 r^6}$ .

Полная излученная энергия  $\Delta E = \int P dt = \frac{32 \pi^4 a^8 I_0^2 v^4}{3 c^5 L^2} \int_0^\infty \frac{dt}{(r_0 - vt)^6} = \frac{32 \pi^4 a^8 I_0^2 v^3}{15 c^5 L^2 r_0^5}$ .

6. Сначала найдем толщину линзы. По определению зон Френеля, разность хода лучей идущих из центра отверстия и с границы  $m$ -той зоны Френеля составляет  $\Delta l = \frac{m\lambda}{2}$ . Для второй зоны Френеля  $\Delta l = \lambda$ . Линза, покрывающая отверстие компенсирует оптическую разность хода для всех лучей. Тогда для луча, идущего по центру линзы,  $\lambda = \Delta l = dn - d = d(n - 1)$ , откуда и следует приведенный в условии задачи результат.



Амплитуду поля в точке наблюдения (фокусе линзы) можно найти из спирали Френеля (см. рисунок слева). При двух открытых зонах Френеля без линзы в точке наблюдения поле было бы равно нулю. Линза же компенсирует набег фазы для каждого луча и поле в точке наблюдения окажется равным длине окружности (спирали Френеля), т.е.  $E = 2\pi E_0$ . Комплексная единица показывает, что поле будет сдвинуто по фазе на четверть периода относительно того поля, которое было бы в этой точке при отсутствии экрана ( $E_0$ ).

## Контрольная работа 1

**Задача 1.** Так как расстояние до заряженного шара много больше диаметра росинки, она находится в практически однородном электрическом поле  $|E_0| = \frac{q}{l^2}$ . Считаем росинку шаром, дипольный момент диэлектрического шара в однородном поле равен:  $d = E_0 \cdot a^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{qa^3}{l^2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ . Проще вычислить силу, действующую от поля росинки (диполя) на заряд:  $F = q \cdot E_d = -q \cdot \frac{2d}{l^3} = \frac{2q^2 a^3}{l^5} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ . Сила притяжения направлена вдоль линии, соединяющей центр заряженного шара и росинки.

**Задача 2.** Задача на метод изображения. Заряд, индуцированный на поверхности диэлектрика, создаёт поле, которое бы создавала нить, размещённая на расстоянии  $h$  от поверхности в глубину диэлектрика (зеркальное отображение реальной нити) с зарядом на единицу длины  $\kappa' = \kappa \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$ . Сила взаимодействия на единицу длины двух заряженных нитей равна:  $\tilde{F} = \kappa E_{\text{mirror}} = \kappa \cdot \frac{2\kappa'}{2h} = \frac{\kappa^2}{h} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$ .

**Задача 3.** Функций, зависящих от  $x$  и  $y$ , лапласиан от которых равен нулю – бесконечное множество. Искусство заключается в том, чтобы выбрать из них те, что удовлетворяют граничным условиям. Сама форма поверхности подсказывает, что ответ надо искать в виде  $\varphi(x, y) = C \cdot x \cdot y$ . При  $x$  либо  $y$ , равном нулю, потенциал зануляется. Константу найдём из условий на гиперболической границе:  $\varphi_{\text{hyperbole}} = C \cdot A = \varphi_0$ , отсюда  $\varphi(x, y) = \frac{\varphi_0}{A} \cdot x \cdot y$ .

**Задача 4.** Разобьём пространство на 3 части: 1 –  $r > a$ ; 2 –  $b < r < a$ ; 3 –  $r < b$ . Во всём пространстве (кроме границ раздела) лапласиан от потенциала обращается в ноль. С учётом граничных условий в нуле и на бесконечности, будем искать электрическое поле в виде:

$$\vec{E}_1' = \vec{E}_0 + \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{d}_1) - \vec{d}_1}{r^3}, \quad \vec{E}_2' = \vec{E}_2 + \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{d}_2) - \vec{d}_2}{r^3}, \quad \vec{E}_3' = \vec{E}_3, \quad \text{где } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Имеем 4 неизвестных и 4 граничных условия на 2-х границах раздела:  $E_t = \text{const}$  и  $D_n = \text{const}$ . Из этих граничных условий:

На границе  $r=a$ :

$$-E_0 \sin \vartheta + \frac{d_1}{a^3} \sin \vartheta = -E_2 \sin \vartheta + \frac{d_2}{a^3} \sin \vartheta, \quad \varepsilon E_0 \cos \vartheta + 2\varepsilon \frac{d_1}{a^3} \cos \vartheta = E_2 \cos \vartheta + 2 \frac{d_2}{a^3} \cos \vartheta$$

На границе  $r=b$ :

$$-E_2 \sin \vartheta + \frac{d_2}{b^3} \sin \vartheta = -E_3 \sin \vartheta, \quad E_2 \cos \vartheta + 2 \frac{d_2}{b^3} \cos \vartheta = \varepsilon E_3 \cos \vartheta.$$

Видно, что граничные условия выполняются при любых углах  $\theta$  между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{E}_0$ , если:

$$\begin{aligned}
1) & -E_0 + \frac{d_1}{a^3} = -E_2 + \frac{d_2}{a^3} \\
2) & \varepsilon E_0 + 2\varepsilon \frac{d_1}{a^3} = E_2 + 2\frac{d_2}{a^3} \\
3) & -E_2 + \frac{d_2}{b^3} = -E_3 \\
4) & E_2 + 2\frac{d_2}{b^3} = \varepsilon E_3
\end{aligned}$$

Если к третьему уравнению прибавить четвертое, то:  $\frac{d_2}{b^3} = E_3 \frac{(\varepsilon - 1)}{3}$ , тогда:

$$\begin{aligned}
1) & -E_0 + \frac{d_1}{a^3} = -E_2 + E_3 \frac{b^3}{a^3} \frac{(\varepsilon - 1)}{3} \\
2) & \varepsilon E_0 + 2\varepsilon \frac{d_1}{a^3} = E_2 + 2E_3 \frac{b^3}{a^3} \frac{(\varepsilon - 1)}{3} \\
3) & -E_2 + E_3 \frac{(\varepsilon - 1)}{3} = -E_3
\end{aligned}$$

Из последнего уравнения -  $E_2 = E_3 \frac{(\varepsilon + 2)}{3}$ , и, соответственно:

$$\begin{aligned}
1) & -E_0 + \frac{d_1}{a^3} = -E_3 \frac{(\varepsilon + 2)}{3} + E_3 \frac{b^3}{a^3} \frac{(\varepsilon - 1)}{3} \\
2) & \varepsilon E_0 + 2\varepsilon \frac{d_1}{a^3} = E_3 \frac{(\varepsilon + 2)}{3} + 2E_3 \frac{b^3}{a^3} \frac{(\varepsilon - 1)}{3}
\end{aligned}$$

Умножаем первое уравнение на  $-2\varepsilon$  и складываем со вторым:

$$3\varepsilon E_0 = E_3 \frac{(\varepsilon + 2)}{3} + 2E_3 \frac{b^3}{a^3} \frac{(\varepsilon - 1)}{3} + E_3 \frac{2\varepsilon(\varepsilon + 2)}{3} - 2\varepsilon E_3 \frac{b^3}{a^3} \frac{(\varepsilon - 1)}{3}$$

$$\text{Отсюда: } 3\varepsilon E_0 = E_3 \frac{(\varepsilon + 2)(1 + 2\varepsilon)}{3} + 2E_3 \frac{b^3}{a^3} \frac{(\varepsilon - 1)}{3} (1 - \varepsilon), \text{ и поле внутри}$$

$$\text{шара равно: } E_3 = \frac{9\varepsilon E_0}{(\varepsilon + 2)(1 + 2\varepsilon) - 2\frac{b^3}{a^3}(\varepsilon - 1)^2}. \text{ Нужно было найти поле в зазоре:}$$

$$E_2 = \frac{3\varepsilon(\varepsilon + 2)E_0}{(\varepsilon + 2)(1 + 2\varepsilon) - 2\frac{b^3}{a^3}(\varepsilon - 1)^2} \text{ и дипольный момент внутреннего шара:}$$

$$d_2 = \frac{3\varepsilon(\varepsilon - 1)E_0 \cdot b^3}{(\varepsilon + 2)(1 + 2\varepsilon) - 2\frac{b^3}{a^3}(\varepsilon - 1)^2}$$

**Задача 5.** Вследствие краевых эффектов, уровень проводящей жидкости не совпадает с уровнем погружения. Обозначим разницу за  $H$ . Сопротивление конденсатора обратно пропорционально уровню жидкости в нём. Тогда, при погружении на  $h$ :  $R = \frac{C}{h + H}$ , а при

погружении на 2h:  $\frac{2}{3}R = \frac{C}{2h+H}$ , отсюда:  $C = R(h+H)$  и  $\frac{2}{3} = \frac{h+H}{2h+H}$ , значит  $h = H$ . И при погружении на 4h:  $R_{4h} = \frac{R \cdot 2h}{4h+h} = \frac{2}{5}R$ .

**Задача 6.** Через среду протекает однородный ток. Направим ось  $z$  вдоль направления тока  $\vec{j} = j \cdot \vec{e}_z$ . Среда проводящая, проводимость обозначим за  $\sigma$ . Согласно локальному закону Ома  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Вектор электрической индукции  $\vec{D} = \varepsilon(\vec{r}) \vec{E} = \varepsilon(\vec{r}) \frac{\vec{j}}{\sigma}$ . Необходимо

воспользоваться соотношением  $\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho_{free}$  (дивергенция вектора электрической индукции пропорциональна плотности свободных зарядов). Отсюда:

$$\rho_{free} = \frac{1}{4\pi} \text{div} \vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{j}{\sigma} \text{div} (\varepsilon(\vec{r}) \cdot \vec{e}_z)$$

### Экзаменационная работа 1

**Задача 1.** Необходимо просто сложить «половинки» полей от двух перпендикулярно расположенных колец. Тогда:  $\vec{B}(0) = \frac{\pi J}{ca} (\vec{e}_y + \vec{e}_z)$ .

**Задача 2.** Магнитное поле от бесконечного проводника известно, находим магнитный поток через рамку:  $\Phi(t) = \frac{2J(t)}{c} a \ln \left( \frac{a+b}{b} \right)$ . ЭДС индукции равна:  $\varepsilon(t) = -\frac{1}{c} \frac{\delta \Phi(t)}{\delta t}$ , а ток в рамке находим из правила Кирхгофа:  $J_1(t) = \frac{2a}{c^2} \ln \left( \frac{a+b}{b} \right) J_0 \omega^2 C \frac{1+i\omega CR}{1+(\omega CR)^2} e^{-i\omega t}$ . Так как сопротивление большое, магнитным потоком от этого тока, пронизывающим рамку, пренебрегаем (то есть пренебрегаем самоиндукцией).

**Задача 3.** ЭДС индукции, наводимая в контуре равна:  $\varepsilon(t) = -\frac{1}{c} \frac{\delta \Phi(t)}{\delta t} = \frac{1}{c} Bl \dot{x}$ . Так как сопротивление контура мало, эта ЭДС равна только ЭДС самоиндукции:  $\frac{1}{c} Bl \dot{x} = \frac{1}{c^2} L \frac{\delta I}{\delta t}$ . Необходимо также воспользоваться уравнением движения, на стержень действуют сила тяжести и сила Ампера:  $\ddot{x} = g - \frac{I Bl}{c m}$ . Если проинтегрировать предыдущую формулу с начальными условиями  $x(0) = 0$  и  $\dot{x}(0) = 0$ , то:  $\frac{1}{c} Bl x = \frac{1}{c^2} LI$ , и тогда:  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = g$ , где  $\omega_0^2 = \frac{B^2 l^2}{mL}$ . Тогда решением будет:  $x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$ , а для тока:  $I(t) = \frac{mgc}{Bl} (1 - \cos \omega_0 t)$ .

**Задача 4.** Так как пластинка на поверхности жидкости идеально проводящая, её потенциал константа, а граничные условия на ней таковы, что тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю. Точечный источник тока представляет собой точечный заряд, вблизи которого силовые линии электрического поля и линии тока идут по радиусу. Заряд, накопившийся на пластинке, создаёт такое поле, какое создавал бы

точечный заряд, помещённый на расстоянии  $h$  над жидкостью, но противоположный по знаку заряду – источнику тока. Таким образом, задача является задачей на метод

изображения. В полярных координатах:  $\varphi(R, z) = q \left( \frac{1}{\sqrt{(h+z)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h-z)^2 + R^2}} \right)$ , где

$$q = \frac{I}{4\pi\sigma}. \text{ Ток находим как } \vec{j}(R, z) = \sigma \vec{E} = -\sigma \left( \frac{\delta\varphi(R, z)}{\delta R} \vec{e}_R + \frac{\delta\varphi(R, z)}{\delta z} \vec{e}_z \right).$$

**Задача 5.** Внутри движущегося во внешнем магнитном поле проводника, полная сила Лоренца должна быть равна нулю:  $e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{B}] = 0$ , где в случае вращения:  $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ .

Таким образом, в стержне возникает радиальное поле  $\vec{E} = -\frac{\omega B}{c} \vec{r}$ . Из соотношения

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \text{ в цилиндрической системе координат } -\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} \left( \frac{\omega B}{c} r^2 \right) = 4\pi\rho, \text{ отсюда } \rho = -\frac{\omega B}{2\pi c}.$$

Так как в целом цилиндр остаётся электронейтральным, пренебрегая краевыми эффектами, получаем:  $\rho\pi a^2 + 2\pi\sigma = 0$ , и поверхностный заряд на поверхности цилиндра

$$\sigma = -\frac{\rho a}{2} = \frac{\omega B a}{4\pi c}. \text{ Находим граничный } i = \sigma\omega a = \frac{\omega^2 B a^2}{4\pi c} \text{ и объёмный ток } j = \rho v = -\frac{\omega^2 B r}{2\pi c}.$$

Интегрируя поле от множества соленоидов, получаем добавку к внешнему полю:

$$\Delta B_z(r \leq a) = \frac{\omega^2 r^2 B}{c^2}, \quad \Delta B_z(r > a) = 0. \text{ Разрыв поля на границе цилиндра обусловлен}$$

поверхностными токами, добавка имеет порядок малости  $\beta^2 = \frac{v_{\max}^2}{c^2}$ .

**Задача 6.** Магнитное поле вдоль оси  $Y$  возникает, так как движущаяся заряженная пластинка создаёт ток. Так как пластинка колеблется, ток переменный, и переменное магнитное поле создаёт переменное электрическое поле, направленное вдоль оси  $Z$ . Разрыв тангенциальной составляющей магнитного поля на пластинке равен  $\frac{4\pi}{c}i$ , где  $i$  –

поверхностный ток. Он равен  $\sigma v_z$ . Тогда, из симметрии задачи, магнитное поле по разные стороны пластинки одинаково по модулю, но противоположно по знаку. Разобьём верхнее полупространство на область 1 – от пластинки до проводника и область 2 – проводник.

Тогда, если  $d$  много меньше длины волны  $\frac{2\pi c}{\omega}$ ,  $H_1 = \frac{2\pi}{c} \sigma v_0 e^{-i\omega t}$ . Из известного

решения задачи о сильном скин-эффекте:  $H_2 = H_1 e^{-(1-i)\frac{x-d}{\delta}}$ , где  $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\lambda\omega}}$  –

толщина скин-слоя. Из уравнений Максвелла:  $E_2 = \frac{c}{4\pi\lambda} \frac{\delta H_2}{\delta x}$ , и, соответственно:

$$E_2 = -\frac{\sigma v_0 e^{-i\omega t}}{2\lambda\delta} (1-i) e^{-(1-i)\frac{x-d}{\delta}}. \text{ Электрическое поле в области 1 состоит из}$$

падающей и отражённой волны. Из уравнений Максвелла и из граничных условий (тангенциальная составляющая электрического поля на границе раздела непрерывна),

находим: 
$$E_1 = E_0 - \frac{i\omega}{c} H_1 x,$$

где 
$$E_0 = -\frac{2\pi\sigma\omega v_0 e^{-i\omega t} d}{c^2} \left( \frac{\delta}{2d} - i \left( 1 + \frac{\delta}{2d} \right) \right).$$
 Удельную силу (на единицу площади), необходимую для поддержания движения легко находим из уравнения движения: 
$$\mu \dot{v}_z = \sigma E_0 + \tilde{f}_z,$$

отсюда 
$$\tilde{f}_z = \frac{\pi\sigma^2\omega v_0 e^{-i\omega t} \delta}{c^2} - i\omega v_0 e^{-i\omega t} \mu \left( 1 + \frac{2\pi\sigma^2 d}{\mu c^2} \left( 1 + \frac{\delta}{2d} \right) \right).$$

## Контрольная работа 2

**Задача 1.** Обозначим коэффициент преломления воды  $n_0 = 4/3$ , а коэффициент преломления воздуха  $n_1 = 1$ .

а) В соответствии с формулами Френеля, коэффициент отражения электромагнитной волны по интенсивности в случае нормального падения на границу раздела двух сред равен:  $R = \left( \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right)^2$ , а коэффициент прохождения равен:  $T = 1 - R = \frac{4n_0 \cdot n_1}{(n_0 + n_1)^2}$ . В нашем случае  $T = \frac{48}{49}$ .

б) Если воспользоваться граничными условиями, из которых параллельные границе раздела составляющие волнового вектора падающей и прошедшей волны равны и законом дисперсии  $|k_i| = n_i \omega / c$ , где  $k_i$  – волновой вектор в  $i$ -той среде,  $n_i$  – показатель преломления  $i$ -той среды, то:  $k_{1,\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_1^2 - \sin^2 \varphi_0 \cdot n_0^2)$ . Здесь  $\varphi_0$  – угол падения. Видно, что перпендикулярная составляющая волнового вектора прошедшей волны становится мнимой, если  $\sin \varphi_0 \geq \frac{n_1}{n_0}$ . Значит, в нашем случае минимальный угол падения, при котором происходит полное внутреннее отражение, равен  $54^\circ$ .

в) Угол Брюстера определяется выражением  $\operatorname{tg} \varphi_B = \frac{n_1}{n_0} = 3/4$ . Угол Брюстера для границы раздела вода/воздух равен  $36.9^\circ$ . При падении под этим углом, у электромагнитной ТМ волны обращается в ноль коэффициент отражения. Обратите внимание, что для падения из оптически менее плотной среды в оптически более плотную среду (например, из воздуха в воду) угол Брюстера наоборот, больше  $45^\circ$ , и для границы раздела воздух/вода равен  $53.1^\circ$ , в ноль также обращается коэффициент отражения для ТМ волны. Циркулярно поляризованную волну можно представить в виде суммы ТМ и ТЕ волн с одинаковой амплитудой, но сдвинутых по фазе на четверть оборота. Используя формулы Френеля, получаем:

$$\frac{I_{TE}}{I_{TM}} = \left( \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_0 + \varphi_1)} \cdot \frac{tg(\varphi_0 + \varphi_1)}{tg(\varphi_0 - \varphi_1)} \right)^2 = \left( \frac{\cos(\varphi_0 - \varphi_1)}{\cos(\varphi_0 + \varphi_1)} \right)^2 = \left( \frac{1 + tg(\varphi_0)tg(\varphi_1)}{1 - tg(\varphi_0)tg(\varphi_1)} \right)^2$$

Разлагаем тангенс угла падения в ряд Тэйлора вблизи угла Брюстера:

$$tg \varphi_0 = tg(\varphi_B + \gamma) \approx tg \varphi_B + \frac{\gamma}{\cos^2 \varphi_B} = \frac{n_1}{n_0} \left( 1 + \gamma \cdot \left( \frac{n_0}{n_1} \right) \cdot \left( 1 + \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 \right) \right)$$

Для нахождения тангенса угла преломления воспользуемся законом Снеллиуса и тригонометрическими соотношениями:

$$tg(\varphi_1) = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{n_0}{n_1} \right)^2 \sin^2 \varphi_0}} = \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{tg^2 \varphi_0} + 1 - \left( \frac{n_0}{n_1} \right)^2}}$$

Воспользуемся разложением тангенса угла падения -

$$\frac{1}{tg \varphi_0} \approx \frac{n_0}{n_1} \left( 1 - \gamma \cdot \left( \frac{n_0}{n_1} \right) \cdot \left( 1 + \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 \right) \right), \text{ тогда:}$$

$$tg(\varphi_1) \approx \frac{n_0}{n_1} \cdot \left( 1 + \gamma \cdot \frac{n_0}{n_1} \cdot \left( 1 + \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 \right) \right), \text{ и, следовательно:}$$

$$\frac{I_{TE}}{I_{TM}} \approx \left( \frac{2}{2\gamma \frac{n_0}{n_1} \left( 1 + \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 \right)} \right)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{n_0}{n_1} + \frac{n_1}{n_0} \right)^2}$$

Для наших условий:

$$\frac{I_{TE}}{I_{TM}} \approx \frac{1}{\gamma^2} \cdot \left( \frac{12}{25} \right)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{144}{625}$$

## Задача 2.

На первой границе раздела (вакуум – диэлектрик с показателем  $n_1$ ) из-за нормального падения угол преломления не меняется. На границу раздела двух диэлектриков луч падает под углом  $\alpha$ , и, согласно закону Снеллиуса, выходит под углом  $\alpha_2 = \alpha \left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right)$ . Под данным

углом луч падает на границу раздела (диэлектрик с показателем  $n_2$  – вакуум) и также преломляется. Таким образом, угол, под которым луч выходит из призмы, равен:

$$\alpha_3 = n_2 \alpha_2 = \alpha (n_2 - n_1), \text{ значит } \Delta n = n_2 - n_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha}.$$



### Задача 3.

Как известно, любую моду прямоугольного волновода можно разложить на плоские волны, а волна  $H_{m0}$  представляет собой суперпозицию двух плоских волн с векторами  $k_z$  и  $k_x = \pm \frac{m\pi}{a}$ . Из дисперсии -  $\sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \frac{n\omega}{c}$ .

Пренебрегая искажением волн вблизи края волновода, считаем, что наша задача аналогична задаче о падении под углом  $\alpha$  ( $\sin \alpha = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \pm \frac{m\pi c}{a\omega n}$ ) плоской волны на границу раздела двух сред. Тогда условием полного внутреннего отражения таких волн будет превышение углом  $\alpha$  значения минимального угла полного внутреннего отражения:  $\sin \alpha = \frac{m\pi c}{a\omega n} \geq \frac{1}{n}$ . Отсюда  $m > \frac{a\omega}{\pi c}$ .

### Задача 4.

Интеграл Кирхгофа в приближении дифракции Френеля записываем как:

$$E(\vartheta) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} e^{i(kz - \omega t)} \sum_{m=0}^{N-1} \int_{m(a+b)}^{m(a+b)+a} E(x) e^{-ik \sin \vartheta x} dx$$

Так как волна падает на решётку под углом  $\alpha$ , то в каждую точку решётки волна приходит с различной фазой  $E(x) = E_0 \cdot e^{ik \sin \alpha x}$ . Интегрируем, потом находим сумму конечной геометрической прогрессии. Интенсивность равна произведению амплитуды на её комплексно сопряжённое.

$$I(\vartheta) = E_0^2 \frac{ka^2}{2\pi z} \cdot \sin^2 \left( \frac{ka}{2} (\sin \vartheta - \sin \alpha) \right) \cdot \frac{\left( \sin N \frac{k(a+b)}{2} (\sin \vartheta - \sin \alpha) \right)^2}{\left( \sin \frac{k(a+b)}{2} (\sin \vartheta - \sin \alpha) \right)^2}$$

### Задача 5.

Запишем условие для границы  $m$ -той зоны Френеля - разность фаз для лучей, идущих на расстоянии  $r$  от оси и вдоль самой оси составляет:

$$k\sqrt{r_m^2 + a^2} + kn\sqrt{r_m^2 + b^2} - ka - knb = m\pi$$

Разлагая в ряд Тейлора по малости  $\frac{r_m}{a} \ll 1$  и  $\frac{r_m}{b} \ll 1$  получаем:  $r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{n}{b}}}$ .

Это стандартная формула для радиусов зон Френеля, за исключением того, что вместо  $b$  стоит  $\frac{b}{n}$ . Обратите внимание, что оптическая длина пути увеличивается в  $n$  раз, а радиус зон Френеля уменьшается. Подставив значения, легко убедиться, что открыто 16 зон Френеля – 8 нечётных и восемь чётных. Так как вклад в суммарное поле на оси отверстия от нечётной и четной зоны равен нулю, то и интенсивность в точке Р близка к нулю. Если закрыть нечётные зоны, то каждая чётная зона в соответствии с интегралом Кирхгофа даст

интенсивность, вчетверо превосходящую интенсивность света, которая была бы в случае отсутствия экрана –  $I_0$ . Соответственно, 8 зон дадут интенсивность в 64 раза большую, в целом  $256I_0$ .

## Экзаменационная работа 2

### Задача 1.

а) Очевидно, что волны от двух синфазных диполей помещённых на расстоянии в половину длины волны, распространяющиеся вдоль направления смещения диполей, взаимно уничтожаются (излучение от разных диполей доходит до наблюдателя в противофазе). Поскольку диполей нечётное число, то остаётся излучение от одного диполя -  $I_{\parallel} = I_0$ . В перпендикулярном направлении волны от всех диполей складываются синфазно, и общее поле увеличивается в 11 раз. Следовательно, соотношение интенсивностей будет  $\frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} = 11^2 = 121$ .

б) В этом случае всё меняется местами – вдоль прямой идёт синфазное сложение полей, поперёк – взаимное уничтожение, следовательно  $\frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} = \frac{1}{121}$ .

### Задача 2.

Так как скорость вращения элементов стержня  $v \leq \omega l \ll c$ , то можно использовать дипольное приближение. Найдём дипольный момент стержня. В сопутствующей системе координат (своей для каждого элемента стержня, где он покоится), имеется электрическое

поле:  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{[\vec{v} \times \vec{B}]}{c} = \frac{\omega r B}{c} \vec{e}_r$ , которое направлено вдоль стержня. Дипольный

момент единицы объёма стержня равен:  $\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = \frac{\omega r B}{c} \cdot \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi} \cdot \vec{e}_r$ . Интегрируя по сечению и по длине стержня, получим его полный дипольный момент:

$\vec{P} = \frac{\omega B}{c} \cdot \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi} S \frac{l^2}{2} \cdot \vec{e}_r$ . Этот дипольный момент, не изменяясь по модулю, вращается в пространстве. В этих условиях, интенсивность дипольного излучения будет равна:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \frac{\langle \ddot{\vec{P}}^2 \rangle}{c^3} = \frac{2P^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{1}{96\pi^2} \cdot (\epsilon - 1)^2 \frac{\omega^6 B^2 S^2 l^4}{c^5}, \text{ а длина волны излучения } \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

### Задача 3.

Так как поток магнитного поля через сверхпроводящий соленоид сохраняется, то имеем следующее равенство:  $\Phi = \frac{L_0 J_0}{c} = \frac{L(t) J(t)}{c}$ .

Используя выражение для индуктивности длинного соленоида, получаем:

$$L(t) = \frac{4\pi N^2 S}{l(t)} = \frac{4\pi N^2 S}{l_0(1 + a \sin \omega t)} = \frac{L_0}{1 + a \sin \omega t} \quad (\text{площадь соленоида } S = \pi R^2).$$

Из этого соотношения получаем:  $J(t) = J_0(1 + a \sin \omega t)$ .

Так как размер соленоида мал по сравнению с длиной волны излучения, то задача решается в рамках дипольного приближения. Полный магнитный момент соленоида равен сумме моментов его витков:  $\vec{M} = N \cdot \vec{m} = \frac{NJ(t)S}{c} \vec{e}_z = \frac{NJ_0 S}{c} (1 + a \sin \omega t) \vec{e}_z$ . Тогда в волновой зоне легко получить выражение для полей излучения магнитного диполя и его интенсивности:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{[\vec{n} \times \ddot{\vec{m}}]}{c^2 r} = -\frac{1}{c^2 r} \cdot \sin \vartheta NJ_0 S \omega^2 a \sin(\omega(t - \frac{r}{c})) \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= -\frac{[[\vec{n} \times \ddot{\vec{m}}] \times \vec{n}]}{c^2 r} = \frac{1}{c^2 r} \cdot \sin \vartheta NJ_0 S \omega^2 a \sin(\omega(t - \frac{r}{c})) \cdot \vec{e}_\vartheta \\ I &= \frac{2 \langle \ddot{\vec{m}}^2 \rangle}{3c^3} = \frac{N^2 J_0^2 S^2 \omega^4 a^2}{3c^5}. \end{aligned}$$

#### Задача 4.

Параллельный пучок, отражённый от сферического зеркала удобно заменить точечным источником, помещённым в фокус этого зеркала (в параксиальном приближении). То есть, в эквивалентной оптической схеме данный источник располагается на расстоянии половины радиуса от поверхности сферы (в глубине сферы). Таким образом, на экране интерферируют плоская волна, падающая по нормали и сферическая расходящаяся волна из источника, расположенного на расстоянии  $2l + R/2$  от экрана. Поскольку по условию в центре светлое пятно, то в центр эти волны приходят в фазе. При смещении от центра на расстояние  $r$  возникает разность фаз, равная:

$$\Delta\varphi = k\sqrt{(2l + R/2)^2 + r^2} - k(2l + R/2) \approx \frac{kr^2}{2(2l + R/2)}$$

Первое светлое кольцо возникнет, когда разность фаз достигнет  $2\pi$ , отсюда:

$$r = \sqrt{2(2l + R/2)} \approx \frac{kr^2}{2(2l + R/2)} \quad \text{и для наших данных радиус}$$

составляет 0.2 сантиметра.

#### Задача 5.

а) На сферическом экране интерферируют волны от источника и волны, отражённые от зеркала. Удобно рассмотреть реальный источник  $S$  и его зеркальное изображение  $S'$ , излучающее в противофазе. Тогда  $I = 2I_0(1 - \cos k(l_2 - l_1))$ . Из простых геометрических

$$\text{соображений} \quad l_2 - l_1 = \sqrt{h^2 + R^2 + 2Rh \cos \alpha} - \sqrt{h^2 + R^2 - 2Rh \cos \alpha} \approx 2h \cos \alpha.$$

Следовательно -  $I = 4I_0 \sin^2(kh \cos \alpha)$ .

б) Максимумы интенсивности будут наблюдаться при выполнении условия:

$2kh \cos \alpha_N = 2\pi N + \pi$ . Используя, что  $h = m\lambda$  и раскладывая косинус малого угла, получаем:  $4\pi m \left(1 - \frac{\alpha_N^2}{2}\right) = 2\pi N + \pi$ . Отсюда легко выразить  $\alpha_N = \sqrt{\frac{4m - 2N - 1}{2m}}$ ,

либо, удобнее выразить  $\alpha_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2m}}$  где  $n$  – также целое число, равное  $2m - N - 1$ .

в) Интегрируем интенсивности от множества монохроматических источников и получаем:

$$I = \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} 2(1 - \cos(2kh \cos \alpha)) \frac{\Delta I}{\Delta k} \delta k, \text{ интенсивность «прямоугольная, то есть}$$

не зависит от  $k$ , значит:

$$I = 2I_0 (1 - \sin c(\Delta kh \cos \alpha) \cdot \cos(2k_0 h \cos \alpha)).$$

Отсюда видность интерференционной картины равна:

$$V = \left| \sin c(\Delta kh \cos \alpha) \right| = \left| \sin c\left(\frac{\Delta \omega}{c} h \cos \alpha\right) \right|, \text{ и далее, подставляя } h = \frac{\pi c}{2\Delta \omega},$$

имеем:

$$V = \sin c\left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha\right)$$

#### Задача 6.

а) Чтобы интенсивность в точке Р была максимальна, надо, чтобы разница оптических путей с краёв щели не превышала половины длины волны.

$$l_1 - l_0 = \sqrt{z_p^2 + r_1^2} - \sqrt{z_p^2 + r_0^2} \simeq \frac{r_1^2 - r_0^2}{2z_p} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{Отсюда находим: } r_1 = \sqrt{\lambda z_p + r_0^2} \simeq r_0 + \frac{\lambda z_p}{2r_0} \text{ (последнее, если предположить}$$

что внутренний радиус много больше первой зоны Френеля.

б) Вторая половина кольцевого отверстия создаёт в точке Р поле, такое же по амплитуде, как и первая, но из-за разности оптических путей, сдвинутое по фазе:

$$\Delta \varphi = kh(n-1). \text{ В итоге имеем } E_\Sigma = E_1 + E_2 = E_1 (1 + e^{i\Delta \varphi}). \text{ Интенсивность}$$

$$I = E_\Sigma \cdot E_\Sigma^*, \text{ следовательно } I = 2E_1^2 (1 + \cos \Delta \varphi). \text{ Для того, чтобы интенсивность}$$

была больше ровно в 2 раза, надо, чтобы  $\Delta \varphi = kh(n-1) = m\pi + \frac{\pi}{2}$ , значит

$$h = \frac{\lambda}{n-1} \frac{2m+1}{4}.$$

## Контрольная работа 1

1. Вычисляем потенциал на оси диска на расстоянии  $z$  от центра:

$$\varphi(z) = 2\pi\sigma \int_0^a \frac{r\delta r}{\sqrt{z^2 + r^2}} = 2\pi\sigma(\sqrt{z^2 + a^2} - z)$$

$$\sigma = \frac{q}{\pi a^2}, \varphi(z) = \frac{2q}{a^2}(\sqrt{z^2 + a^2} - z)$$

Работа по перемещению заряда равна разнице потенциалов, умноженной на заряд:

$$A = q_1(\varphi(a) - \varphi(2a)) = \frac{2qq_1}{a}(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{5}).$$

2. Задача на метод изображения. Незаряженный цилиндр находится в почти однородном поле, и, чтобы выполнить закон сохранения заряда и граничные условия на поверхности проводника (потенциал константа, тангенциальная компонента электрического поля равна нулю), заряды распределяются на поверхности данного цилиндра так, что можно считать, что ими создаваемые поля происходят от 2-х заряженных нитей. Одна с зарядом  $+k$  расположена по оси цилиндра, другая с зарядом  $-k$  находится на расстоянии  $l' = \frac{a^2}{R}$  на линии, соединяющей оси цилиндров. Все нити параллельны осям цилиндров. Тогда, сила на единицу длины находится просто:

$$\tilde{F} = \frac{2\kappa^2}{R-l'} - \frac{2\kappa^2}{R} = \frac{2\kappa^2}{R} \left( \frac{1}{1-\frac{l'}{R}} - 1 \right) \approx \frac{2\kappa^2}{R} \cdot \frac{l'}{R} = \frac{2\kappa^2}{R^3} a^2$$

3. Так как плотность заряда равна нулю везде, кроме заряженной границы, то потенциал ищем в виде набора функций, зависящих только от угла и радиуса, лапласиан от которых равен нулю. Таких функций бесконечное множество, но, для того, чтобы выполнить граничные условия в нуле (потенциал не обращается в бесконечность), на внешней границе и на плоскости секущей цилиндры напололам (потенциал обращается в ноль, так как внешний цилиндр заземлён), потенциал ищем в виде:

$$\varphi_1(r, \alpha) = Ar \cos \alpha, \quad \varphi_2(r, \alpha) = Br \cos \alpha - \frac{B \cdot b^2}{r} \cos \alpha$$

Имеем 2 константы и 2 граничных условия на границе  $r=a$ :

$$\Delta D_n = 4\pi\sigma_0 \cos \alpha, \quad \varphi_1(a, \alpha) = \varphi_2(a, \alpha)$$

Тогда:

$$A = \frac{4\pi\sigma_0 \left( 1 - \left( \frac{b^2}{a^2} \right) \right)}{\varepsilon_1 \left( 1 - \left( \frac{b^2}{a^2} \right) \right) - \varepsilon_2 \left( 1 + \left( \frac{b^2}{a^2} \right) \right)}$$

$$B = \frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon_1 \left(1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right) - \varepsilon_2 \left(1 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right)}$$

4. Задача также на метод изображения. Пусть один заряд диполя (-q) находится прямо на границе раздела, а сам диполь образует угол  $\theta$  с нормалью к границе раздела. Из граничных условий, заряды изображения равны:

$$q' = q \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, q'' = q \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \text{ от заряда на границе раздела, поле будет как от заряда } -q \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Поле в верхней полуплоскости будет как от диполя  $p$  + от его изображения  $p'$ :

$$p_{1\perp} = p \cos \theta \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) = p \cos \theta \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$p_{1\parallel} = p \sin \theta \left(1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) = p \sin \theta \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{(\vec{p}_1 \vec{n})}{r^2}$$

Здесь мы разбили диполь на перпендикулярную и параллельную границе раздела составляющую. Вектор  $\vec{n}$  - нормаль к границе раздела. В нижней полуплоскости, соответственно:

$$p_{2\perp} = p \cos \theta \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad p_{2\parallel} = p \sin \theta \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{(\vec{p}_2 \vec{n})}{r^2}$$

Поле находим как градиент от потенциала, а поверхностный заряд из граничных условий:

$$\sigma = \frac{E_{1\perp} - E_{2\perp}}{4\pi}$$

$$\text{Тогда - } \sigma = -\frac{p \cos \theta}{\pi r^3} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

5. Режим стационарный, заряд нигде не накапливается, значит  $\text{div} \vec{j} = 0$ , а так как задача одномерная,  $j_x = \text{const} = j_0$ . Так как  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , то  $E_x(x) = \frac{j_0}{\sigma_0 \left(1 + \frac{x}{d}\right)}$ .

Найдём плотность тока из условия -  $U = \int_0^d E_x(x) dx$ , тогда  $j_0 = \frac{U \sigma_0}{d \cdot \ln 2}$ . Плотность

заряда найдём из соотношения  $\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ , и

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta}{\delta x} E_x(x) = \frac{U}{4\pi d^2 \ln 2 \left(1 + \frac{x}{d}\right)^2}$$

### Экзаменационная работа 1

1. Диполь является «упругим» и его потенциальная энергия во внешнем поле равна

$$W = -\frac{(\vec{d}\vec{E})}{2}, \text{ электрическое поле на оси кольца равно } E_z(z) = \frac{qz}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \text{ а}$$

дипольный момент диэлектрического шара в однородном поле равен

$$d_z(z) = E_z(z) \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3. \text{ Работа по перемещению диполя равна разности}$$

$$\text{потенциальной энергии и составляет } A = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E_z^2(b) = -\frac{1}{16} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 \frac{q^2}{b^4}.$$

2. Поток магнитного поля в соленоиде с идеально проводящими витками сохраняется:

$$B_0 \pi R^2 = B' \left( \frac{\pi R}{2} \right)^2. \text{ Работа (на единицу длины) равна разнице потенциальной}$$

$$\text{энергии (на единицу длины) в конечном и начальном состояниях. } W_0 = \pi R^2 \frac{B_0^2}{8\pi},$$

$$W' = a^2 \frac{B'^2}{8\pi} \quad A = R^2 \frac{B_0^2}{8\pi} (4 - \pi).$$

3. Напряжённость вихревого электрического поля (поле имеет только составляющую

$$\text{вдоль угла } \alpha) \text{ равна: } E_\alpha(r) = -\frac{r}{2c} i\omega B_0. \text{ По закону Джоуля-Ленца, усреднённая по}$$

$$\text{времени мощность, выделяемая в единице объёма равна: } \langle w \rangle = \frac{\sigma}{2} \left( \frac{r\omega}{2c} B_0 \right)^2.$$

Интегрируем по объёму и получаем:

$$W = \frac{\sigma}{8} \left( \frac{\omega}{c} B_0 \right)^2 \cdot \int_0^{r_0} 2\pi d \cdot r^3 dr = \frac{\pi\sigma}{16} dr_0^4 \left( \frac{\omega}{c} B_0 \right)^2. \text{ Обратите внимание, что}$$

полная мощность пропорциональна не площади диска, а площади в квадрате. Поэтому сердечники трансформаторов делают не из сплошных проводников, а пластин, разделённых диэлектриком (чтобы токи Фуко не слишком грели сердечник).

4. Напряжённость магнитного поля от бесконечного прямого тока -  $H_a(r) = \frac{2I_0}{cr}$ . ЭДС индукции пропорциональна изменению магнитного потока и равна падению

напряжения на сопротивлении:  $\mathcal{E}_{ind} = -\frac{v}{c} \cdot \int_a^{a+l} \frac{2I_0}{cr} \delta r = IR$ . Отсюда

$I = -\frac{v}{c^2} \cdot \frac{2I_0}{R} \ln\left(1 + \frac{l}{a}\right)$ . Проинтегрировав силу Ампера, действующую на каждый

участок перемычки, получаем полную силу:  $F = \frac{v}{c^4} \cdot \frac{4I_0^2}{R} \left( \ln\left(1 + \frac{l}{a}\right) \right)^2$ .

5. Полный поток магнитного поля через соленоид равен  $\Phi_0 = H_0 \pi a^2$ , поток от соленоида, пронизывающий кольцо равен  $\Phi = \frac{1}{2} \Phi_0 (1 - \cos \vartheta)$ . Так как кольцо сверхпроводящее, то полный поток магнитного поля через него постоянный. Так как до внесения в поле соленоида тока в кольце не было, и, соответственно, не было магнитного поля, то полный поток магнитного поля через кольцо равен нулю. Значит:  $\Phi + \frac{L}{c} I = 0$ ,

отсюда находим ток в кольце:  $I = -\frac{c}{2L} \Phi_0 (1 - \cos \vartheta)$ . Магнитное поле от полубесконечного соленоида на расстояниях много больше его радиуса равно:

$\vec{B}(r) = H_0 \frac{\vec{r}}{r^3} a^2$ . Интегрируем силу ампера и получаем:

$$F = \frac{\Phi_0^2}{4\pi L b} \cdot (1 - \cos \vartheta) \sin^3 \vartheta.$$

6. Кольца идеально проводящие, значит поток магнитного поля через каждое сохраняется. При удалении малого кольца электрический ток в большом кольце и поток магнитного поля через него не изменяются (так как первоначально не было электрического тока в малом кольце). В малом кольце электрического тока первоначально не было, но

поток магнитного поля сквозь него был  $\Phi_a = B_0 \pi a^2$ , где  $B_0 = \frac{2\pi I_0}{cb}$  - магнитное поле в центре большого кольца. Значит, при удалении малого кольца на бесконечность, для того, чтобы сохранить в нём поток магнитного поля, в нём возникнет электрический ток

$I_a' = \frac{B_0 \pi a^2 c}{L_a}$ . Тогда, изменение энергии магнитного поля системы равно:

$$\Delta W = W' - W_0 = \frac{L_a (I_a')^2}{2c^2} = \frac{B_0^2 \pi^2 a^4}{2L_a} = \frac{4\pi^4 a^4 I_0^2}{2L_a c^2 b^2}.$$



7. Можно найти магнитное поле как ротор от вектор-потенциала.

$\vec{B}_1 = A_0 (x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$ ,  $\vec{B}_2 = A_0 (x\vec{e}_x - y\vec{e}_y - a(\vec{e}_x - \vec{e}_y))$ . Так как лапласиан от вектор-потенциалов в области 1 и 2 равен нулю, объёмных токов нет. Ток на поверхности находим из скачка тангенциальной составляющей магнитного поля. На диагонали:

$B_{1\tau} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ,  $B_{2\tau} = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$ , следовательно, линейная плотность тока на диагонали -

$$i_z = \frac{c}{4\pi} a A_0 \sqrt{2}.$$

## Контрольная работа 2

### Задача 1.

Задача на продольную длину когерентности. Так как по условию  $a/L \ll 1$ , то свет падает на пластинку практически по нормали, к тому же, поперечная длина когерентности не играет роли. Значит, чтобы наблюдалась интерференция, оптическая длина пути (удвоенная толщина пластинки, помноженная на коэффициент преломления) должна быть меньше или равна продольной длине когерентности  $l_{\parallel} = \lambda^2 / \Delta\lambda$ , отсюда  $d \leq \lambda^2 / 2\Delta\lambda \cdot n$ .

### Задача 2.

Так как линза разделена, получаем два изображения источника. Из формулы тонкой линзы легко получить, что изображения расположены в плоскости, отстоящей на расстоянии  $l' = \frac{l}{l/f - 1}$  за линзой. Так как по условию  $l > 2f$ , то  $l' < l$ . Протяжённость

источников равна:  $a' = \frac{a}{l/f - 1}$ , а расстояние между их центрами  $d' = d + \frac{l'}{l} d = \frac{l/f}{l/f - 1} d$ .

Свет, вышедший из центра источника, имеет равную вероятность распространяться по двум траекториям с одинаковой оптической длиной пути равной

$l_{center} = \sqrt{(l + l')^2 + d'^2} + \sqrt{z^2 + d'^2}$  (где  $z \gg l, l'$  это расстояние до экрана), и всегда приходит в фазе (светлая точка). Интерференция пропадёт, картинка будет «серой», если свет от краёв источника, распространяясь также по двум траекториям (но уже с разной оптической длиной) будет образовывать тёмную точку. Для этого необходимо, чтобы разница данных оптических путей составляла половину длины волны (или больше, тогда видность также будет стремиться к нулю, колеблясь по модулю синкуса). Отсюда:

$$\frac{ad}{(l + l') \left( \frac{l'}{l} \right)^2} \geq \frac{\lambda}{2}. \text{ Подставив значение } l', \text{ получаем: } a \geq \frac{\lambda}{2} \frac{fd}{l^2 \left( \frac{l}{f} - 1 \right)}.$$

### Задача 3.

Неполяризованный свет наполовину состоит из ТЕ и ТМ волн (которые также называются s и p волны, соответственно). Найдём коэффициенты отражения для обеих

волн, обозначив угол падения за  $\alpha$ , у угол преломления за  $\beta$ . Учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha = n$ , из простых геометрических соображений следует:  $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ ,

$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}}$ . Тогда:  $r_p = \frac{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)} = 0$ ,  $r_s = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ . Коэффициент

прохождения по интенсивности равен:  $T = 1 - \frac{r_s^2 + r_p^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{2n^2}{(n^2 + 1)^2}$ .

#### Задача 4.

Задача-оценка на соотношение неопределённостей. Чтобы диафрагма не влияла на прохождение пучка, необходимо, чтобы её размер был больше размера пучка в фокусе линзы. Из соотношения неопределённости, угловое расхождение пучка  $\delta\alpha \approx \frac{\lambda}{D}$ , а размер пучка в фокусе первой линзы равен  $\frac{\lambda}{D} \cdot F_1$ . Тогда:  $d \geq \frac{\lambda}{D} \cdot F_1$ . Если апертура второй линзы меньше пучка  $D_2 < D \frac{F_2}{F_1}$ , то расхождение пучка будет определяться этой апертурой, и -  $\delta\alpha \approx \frac{\lambda}{D_2}$ .

#### Задача 5.

Дисперсионное соотношение для волны в волновомоду будет:

$$\left( \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} \right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left( \frac{\pi}{ma} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{nb} \right)^2 + k_z^2, \text{ откуда, для того, чтобы волна}$$

распространялась не затухая (то есть проекция волнового вектора на ось z не была мнимой),

частота должна быть:  $\omega \geq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left( \frac{\pi}{ma} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{nb} \right)^2}$ . Электромагнитное поле должно

удовлетворять уравнениям Максвелла и граничным условиям. На границе идеального волновода должны зануляться тангенциальная компонента электрического поля и нормальная компонента магнитного поля. Отсюда:

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) e^{i(k_z - \omega t)}$$

$$H_x = -\frac{ik_z}{\chi^2} \frac{\pi m}{a} H_0 \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) e^{i(k_z - \omega t)}$$

$$H_y = -\frac{ik_z}{\chi^2} \frac{\pi n}{b} H_0 \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) e^{i(k_z - \omega t)}$$

$$E_x = \frac{i\omega\mu}{c\chi^2} \frac{\pi n}{b} H_0 \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) e^{i(k_z - \omega t)}$$

$$E_y = -\frac{i\omega\mu}{c\chi^2} \frac{\pi m}{a} H_0 \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) e^{i(k_z - \omega t)}$$

$E_z$  как и положено  $H_{\text{мп}}$  волне везде равен нулю, а  $\chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - k_z^2$ .

## Экзаменационная работа 2

1. Как известно, нерелятивистская частица с зарядом  $q$ , движущаяся с ускорением  $a$ , за время  $\Delta t$  излучает энергию

$$\Delta \varepsilon = \frac{2}{3c^3} q^2 a^2 \Delta t.$$

В частности, электрон, движущийся по окружности радиуса  $r$ , испытывает ускорение

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Радиус  $r$  определяется из равенства центробежной и кулоновской сил:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{eQ}{r^2} \Rightarrow r = \frac{eQ}{mv^2}.$$

Таким образом, за время

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v},$$

то есть за один оборот, электрон излучает энергию:

$$\Delta \varepsilon = \frac{2}{3c^3} e^2 \left( \frac{eQ}{mr^2} \right)^2 \frac{2\pi r}{v} = \frac{4\pi}{3c^3} \frac{e^4 Q^2}{m^2 v} \frac{1}{r^3} = \frac{4\pi}{3c^3} \frac{e}{Q} mv^5.$$

Или

$$\Delta \varepsilon = \frac{8\pi}{3c^3} \frac{e}{Q} \left( \frac{v}{c} \right)^3 \frac{mv^2}{2}.$$

2. Заряженное кольцо на оси симметрии создает поле

$$E_z(z) = \frac{Qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

В системе отсчета, движущейся вдоль этой оси, поле такое же. Поэтому

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d\varepsilon'}{dt'} = \frac{2}{3} \frac{q^4 Q^2}{m^2 c^3} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3}.$$

Полная энергия, излученная частицей на всем ее пути, равна

$$\Delta \varepsilon = \frac{2}{3c^3} \left( \frac{q^2 Q}{m} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(a^2 + z^2)^3} \frac{dt}{dz} dz.$$

Используя условие  $v_0 \gg \sqrt{\frac{2Qq}{ma}}$ , выносим скорость из-под знака интеграла. Тогда

$$\Delta \varepsilon = \frac{2}{3c^3 v_0} \left( \frac{q^2 Q}{m} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(a^2 + z^2)^3} dz.$$

Окончательный ответ

$$\Delta \varepsilon = \frac{\pi}{6c^3 v_0} \left( \frac{q^2 Q}{m} \right)^2 \frac{1}{a^3}.$$

3. Вырез в экране можно рассматривать как комбинацию из  $3/4$  первой зоны Френеля, радиус которой  $r_1 = \sqrt{\lambda z_p}$ , и  $1/4$  круга радиусом  $r_2 = \sqrt{3\lambda z_p/2}$ , в котором укладывается первая зона и половина второй. С помощью векторной диаграммы находим геометрическую (комплексную) сумму вкладов

$$E_p = \frac{3}{4} \cdot 2E_0 e^{i\frac{\pi}{2}} e^{ikz_p} + \frac{1}{4} \sqrt{2} E_0 e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{ikz_p} = iE_0 e^{ikz_p} \frac{1}{4} (7+i).$$

Очевидно, что, то же самое получится, если вырез в экране рассматривать как сумму первой зоны Френеля и  $1/4$  части «полуторной» зоны.

4. Волна, падающая на зеркало, интерферирует с отраженной волной:

$$E_z = E_0 e^{-ik_x x - ik_y y - i\omega t} - E_0 e^{-ik_x x + ik_y y - i\omega t} = E_0 (-2i) \sin(k_y y) e^{-ik_x x - i\omega t}.$$

Поле, действующее на частицу, находящуюся на высоте  $h$  над зеркалом:

$$E = -2iE_0 \sin(k_y h) e^{-i\omega t} = A e^{-i\omega t}.$$

(Предполагается, что скорость, приобретаемая частицей, мала по сравнению со скоростью света. Поэтому действием магнитных полей падающей и отраженной волн пренебрегаем).

Уравнение движения заряда:

$$m\ddot{z} = -q2iE_0 \sin(k_y h) e^{-i\omega t} = qA e^{-i\omega t}.$$

Магнитное поле рассеянной зарядом волны:

$$\vec{H}_q(\vec{r}, t) = \frac{\left[ \ddot{\vec{d}}_1 \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \times \vec{n}_1 \right]}{c^2 R_1},$$

где  $\ddot{\vec{d}}_1(t) = q^2 A e^{-i\omega t} \vec{e}_z$ ,  $|\vec{R}_1| = |\vec{r} - \vec{r}_1|$ ,  $R_1 \approx r - (\vec{n}_1 \vec{r}_1)$ .

Для того, чтобы выполнялись граничные условия, необходимо учесть электрическое изображение заряда  $q$ , то есть заряд  $-q$  в точке  $y = -h$ :

$$\vec{H}_{-q}(\vec{r}, t) = \frac{\left[ \ddot{\vec{d}}_2 \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \times \vec{n}_2 \right]}{c^2 R_2}.$$

Здесь  $\vec{d}_2 = -\vec{d}_1$ ,  $|\vec{R}_2| = |\vec{r} - \vec{r}_2|$ .

Далее считаем, что  $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}$ , а в знаменателе  $R_1 = R_2 = r$ . Суммарное магнитное поле рассеянной волны:

$$\begin{aligned} \vec{H}_\Sigma &= [\vec{e}_z \times \vec{n}] \frac{q^2 A}{c^2 r m} e^{i(kr - \omega t)} \left[ e^{-ik(\vec{n}\vec{r}_1)} - e^{-ik(\vec{n}\vec{r}_2)} \right] = [\vec{e}_z \times \vec{n}] \frac{q^2 A}{c^2 r m} e^{i(kr - \omega t)} \left[ e^{-ikh \sin \theta \sin \varphi} - e^{+ikh \sin \theta \sin \varphi} \right], \\ |H_\Sigma|^2 &= \frac{q^4 \sin^2 \theta}{m^2 c^4 r^2} \cdot 4E_0^2 \sin^2(kh \sin \varphi_0) \cdot 4 \sin^2(kh \sin \theta \sin \varphi). \end{aligned}$$

И, наконец,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{16q^4 \sin^2 \theta}{m^2 c^4 r^2} \cdot \sin^2(kh \sin \varphi_0) \cdot \sin^2(kh \sin \theta \sin \varphi).$$

5. Направления на дифракционные максимумы определяются выражением:

$$\sin \theta_m = \frac{\lambda m}{d}.$$

Так как, по условию,  $\theta_1 = 30^\circ$ , то

$$d = 2\lambda = 1,2 \text{ мкм}.$$

Ширина главного максимума  $\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}$ . Отсюда

$$N \approx \frac{\theta_1}{\Delta\theta_0} = 30.$$

Ширина первого максимума  $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_0 + \Delta\theta_\lambda$ , где  $\Delta\theta_\lambda = \frac{\Delta\lambda}{d}$ . По условию  $\Delta\theta_\lambda = 2\Delta\theta_0$ .

Следовательно,  $\frac{\Delta\lambda}{d} \approx 2 \frac{\lambda}{Nd}$ , откуда

$$\Delta\lambda \approx \frac{2\lambda}{N} \approx 0,04 \text{ мкм}.$$

6. Так как плёнка толстая, туннелированием и влиянием другой границы пренебрегаем. Полное внутренне отражение происходит, когда проекция волнового вектора падающей волны на ось  $x$  становится меньше модуля волнового вектора преломлённой волны (тогда перпендикулярная составляющая волнового вектора преломлённой волны становится мнимой).

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi \geq \frac{2\pi}{\lambda} (1 - \delta_2), \text{ или } \sqrt{1 - \theta^2} \geq (1 - \delta_2), \text{ откуда } \theta_{\text{ПВО}} \leq \sqrt{2\delta_2}.$$

При угле  $\theta$  большем, чем  $\theta_{\text{ПВО}}$  фаза волны не меняется при отражении от пластинки и меняется на угол  $\pi$  при отражении от воздуха. Разница в фазе за счёт оптической разницы

путей составляет:  $\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2d \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \varphi}$ . Минимум коэффициента отражения будет

тогда, когда все отраженные лучи приходят в противофазе. Значит:

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2d \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \varphi_m} = 2\pi m, \text{ и, соответственно: } \sin \varphi_m = \sqrt{n_2^2 - \left(\frac{\lambda}{2d}\right)^2 m^2}.$$

Но лучше и эффективнее сделать следующую оценку: луч почти не преломляется и разница в

$$\text{оптической длине пути составляет } 2d(\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)), \text{ откуда } d = \frac{\lambda}{2\delta\theta}.$$

Учебное издание

В. В. Володин, М.И.Захаров, А.Н.Матвеев, Г.В.Меледин, А.Г.Погосов,  
С.Л.Синицкий, Б.И.Хазин, В.С.Черкасский

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ  
ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ 2000-2007 гг**

Учебное пособие

Редактор *С. В. Исакова*  
Оригинал-макет *О. Г. Заварзиной*

Подписано в печать 27.03.2006 г.  
Формат 60 x 84 1/16. Офсетная печать. Гарнитура Times New Roman.  
Уч.-изд. л. 1. Усл. печ. л. 0,93. Тираж 100 экз.

Заказ №  
Редакционно-издательский центр НГУ  
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.