1. Электростатика

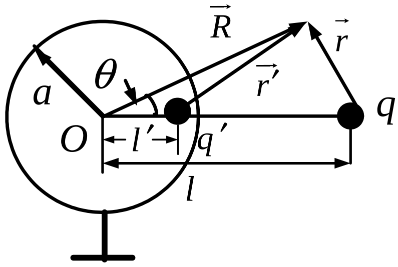
Урок 9

Метод изображений. Сфера

1.1. (Задача 2.27) Заряд q находится внутри (вне) заземленной (изолированной) проводящей сферы радиуса a на расстоянии ℓ, от ее центра. Найти распределение потенциала во всем пространстве, распределение и полный индуцированный заряд на сфере.

Решение а) Сфера заземлена. Заряд вне сферы.

Если сфера заземлена, потенциал сферы равен нулю: $\varphi(a) = 0$. Как показано в



задаче 1.10, в системе двух разноименных зарядов имеется сферическая эквипотенциальная поверхность нулевого потенциала. Если заряд q расположен на расстоянии ℓ от центра сферы радиуса a, то изображением этого заряда будет заряд $q' = -qa/\ell$, который следует поместить на расстояние $\ell' = a^2/\ell$ от центра сферы. Таким образом, распределение потенциала и напряженности электрического поля вне сферы, создаваемое зарядом q и индуцированными зарядами на сфере, совпадает с распределением потенциала и напряженности, создаваемым двумя точечными зарядами q и q':

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{a}{\ell}\frac{q}{r'} \qquad \text{при} \qquad R \geqslant a\,,$$

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} - q\frac{a}{\ell}\frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \qquad \text{при} \qquad R > a,$$

где r и r' – расстояния до точки наблюдения от зарядов q и q' соответственно. Потенциал внутри сферы постоянен и равен потенциалу на сфере $\varphi(a) = 0$.

В полости и на внутренней поверхности сферы нет зарядов. Потенциал сферы удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$. На стенках полости он должен быть константой, равной нулю. Решение, удовлетворяющее этому условию, можно указать сразу: это $\varphi = 0$. По теореме единственности других решений быть не может. Значит, и $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\,\varphi = 0$ для $R < a$. Равенство нулю электрического поля внутри сферы легко понять из следующих соображений. Если вместо сферы взять проводящий шар того же радиуса, то поле вне шара будет таким же, как поле вне сферы. А поле внутри шара будет равно нулю, поскольку шар – проводник. Не будет внутри шара и объемных зарядов: $\rho = 0$, так как $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Но такая электронейтральная среда не будет оказывать никакого влияния на величину электрического поля.

Поэтому если такую среду удалить, оставляя только проводящую оболочку, то от этого поле нигде не изменится. Оно останется равным нулю во всем пространстве, из которого удалена среда, т. е. внутри сферы.

Найдем распределение поверхностной плотности заряда σ по сфере. На заряженной поверхности, разделяющей области 1 и 2, в вакууме нормальные составляющие электрического поля терпят разрыв $E_{2R}\big|_{R=a} - E_{1R}\big|_{R=a} = 4\pi\sigma$. Поскольку в нашем случае поле с внутренней стороны сферы равно нулю $E_{1R}\big|_{R=a} = 0$, то

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_{2R}\Big|_{R=a} .$$

Найдем напряженность электрического поля на поверхности заземленной сферы. Заметим, что

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\ell} ,$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{r}' + \boldsymbol{\ell}'.$$

Используя эти соотношения, получаем

$$\mathbf{E} = q\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R}{\ell r'^3}\right)\mathbf{R} + \left(\frac{R}{\ell r'^3}\boldsymbol{\ell}' - \frac{\boldsymbol{\ell}}{r^3}\right)\right] .$$

Покажем, что второе слагаемое в скобках равно нулю на поверхности сферы. Подставляя в него $r = r'\ell/a$ и $\ell' = a^2/\ell$, получаем

$$\left(\frac{R}{\ell r'^3}\boldsymbol{\ell}' - \frac{\boldsymbol{\ell}}{r^3}\right)\Big|_{R=a} = \left(\frac{a^3}{\ell r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)\boldsymbol{\ell} = \left(\frac{a^3}{\ell^3}\frac{\ell^3}{a^3 r^3} - \frac{1}{r^3}\right)\boldsymbol{\ell} = 0 .$$

Таким образом, напряженность электрического поля на поверхности сферы, как и следовало ожидать, имеет только нормальную составляющую

$$\mathbf{E}\big|_{R=a} = q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R}{\ell r'^3}\right)\mathbf{R} .$$

Выражая r и r' через координаты $(R\,,\,\theta\,,\,\alpha)$ в сферической системе

$$r = \left(R^2 + \ell^2 - 2R\ell\cos\theta\right)^{1/2},$$

$$r' = \left(R^2 + \ell'^2 - 2R\ell'\cos\theta\right)^{1/2},$$

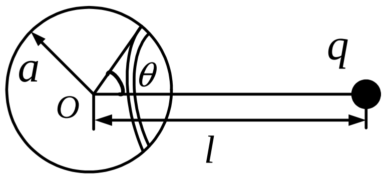
находим

$$E_{2R} = -\frac{q(\ell^2 - a^2)}{a(a^2 + \ell^2 - 2a\ell\cos\theta)^{3/2}}.$$

Тогда

$$\sigma = -\frac{q(\ell^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + \ell^2 - 2a\ell\cos\theta)^{3/2}}.$$

Найдем полный заряд на полусфере, обращенной к заряду q.



Заряд на кольце ширины $ad\theta$ радиуса $a\sin\theta$ равен

$$dQ = \sigma \cdot 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta\,.$$

Тогда величина заряда на полусфере, обращенной к заряду q, будет равна

$$\begin{aligned} Q_1 &= -2\pi a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \tfrac{q(\ell^2-a^2)\sin\theta\, d\theta}{4\pi a(a^2+\ell^2-2a\ell\cos\theta)^{3/2}} = \\ &= \tfrac{q(\ell^2-a^2)}{2\ell}\left(\tfrac{1}{\sqrt{a^2+\ell^2}} - \tfrac{1}{\ell-a}\right). \end{aligned}$$

Таким же образом найдем заряд на противоположной полусфере:

$$Q_2 = \frac{q(\ell^2 - a^2)}{2\ell}\left(\frac{1}{a+\ell} - \frac{1}{\sqrt{a^2+\ell^2}}\right).$$

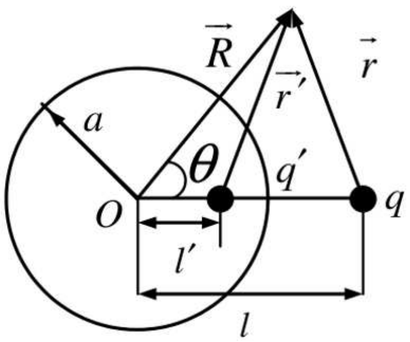
Суммарный заряд на сфере, как и следовало ожидать,

$$Q = Q_1 + Q_2 = -q\frac{a}{\ell}.$$

То, что полный заряд на сфере равен q', можно понять и не интегрируя поверхностную плотность. Действительно, мы нашли, что вне сферы поле $\mathbf{E}$ создается зарядами q и q'. Поток вектора через поверхность, внутри которой находится сфера без заряда q, определяется только полем, создаваемым зарядом q', так как поверхность не охватывает заряд q, т. е. $\oint(\mathbf{E}\,d\mathbf{s}) = 4\pi q'$. Но это и означает, что полный заряд на поверхности сферы равен q'.

б) Заряд вне сферы. Сфера изолирована.

Если сфера изолирована, то полный заряд сферы равен нулю, поэтому для определения поля вне сферы нужно поместить внутри сферы еще один фиктивный заряд $q'' = -q'$. Это легко понять из следующих рассуждений. Вне сферы будет



какое-то распределение напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Если взять поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность, окружающую сферу, но не окружающую заряд q, то он должен быть по теореме Гаусса равен полному заряду Q, находящемуся внутри объема, ограниченного этой поверхностью, умноженному на 4π:

$$\oint (\mathbf{E}\, d\mathbf{s}) = 4\pi Q\,.$$

Поскольку в действительности сфера не заряжена $Q = 0$, поток должен быть равен нулю. Если мы оставим внутри сферы только заряд q', то поток будет равен

$$\oint (\mathbf{E}\, d\mathbf{s}) = 4\pi q',$$

что неверно, значит, внутрь сферы нужно поместить еще один заряд q'', равный по величине и противоположный по знаку заряду q', $q'' = -q'$.

Заряд q'' нужно поместить в такую точку, чтобы сфера осталась эквипотенциальной поверхностью в системе трех зарядов. Такой точкой является центр сферы. Окончательно

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{R}) &= \tfrac{q}{r} + \tfrac{q'}{r'} - \tfrac{q'}{R} \quad &\text{при} \quad R \geqslant a,\\ \mathbf{E}(\mathbf{R}) &= \tfrac{q\mathbf{r}}{r^3} + \tfrac{q'\mathbf{r}'}{r'^3} - \tfrac{q'\mathbf{R}}{R^3} \quad &\text{при} \quad R > a. \end{aligned}$$

Внутри сферы потенциал постоянен и равен потенциалу на сфере

$$\varphi(\mathbf{R}) = \varphi(a) = \frac{q}{\ell} \qquad \text{при} \qquad R \leqslant a,$$

а поле $\mathbf{E} = 0$. Рассуждения такие же, как и для заземленной сферы.

Проводящая оболочка экранирует внешнее поле заряда q. Распределение заряда по поверхности будет иметь вид:

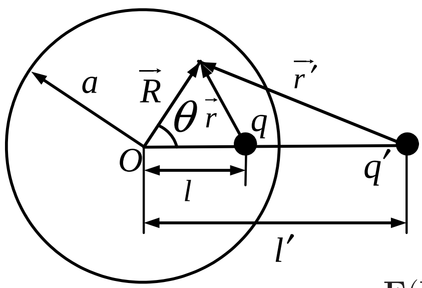
$$\sigma = -\frac{q(\ell^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + \ell^2 - 2a\ell\cos\theta)^{3/2}} + \frac{q}{4\pi a\ell} =$$

$$= \frac{q}{4\pi a^2}\left(\frac{a}{\ell} - \frac{a(\ell^2 - a^2)}{(a^2 + \ell^2 - 2a\ell\cos\theta)^{3/2}}\right).$$

в) Заряд внутри сферы. Сфера изолирована.

Заряд на сфере равен нулю, поскольку сфера была не заряжена. Если заменить сферу сферическим проводящим слоем некоторой толщины с внутренним радиусом, равным радиусу сферы, то поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность, проходящую в толще слоя, равен нулю, так как поле в проводнике $\mathbf{E} = 0$. Отсюда следует, что на внутренней поверхности слоя индуцируется заряд $(-q)$, на внешней – q. Поля внесенного заряда q и индуцированного на внутренней поверхности заряда $(-q)$ полностью компенсируют друг друга в толще слоя и во всем внешнем пространстве. Чтобы убедиться в этом, достаточно представить все внешнее пространство заполненным проводящей средой. В проводящей среде $\mathbf{E} = 0$, поэтому $\rho = 0$. Если теперь убрать электронейтральную среду, то ничего не изменится, поле останется равным нулю и распределение заряда на внутренней оболочке не зависит от толщины оболочки, а зависит только от места нахождения заряда q.

Чтобы индуцированный на внешней поверхности слоя заряд q не создавал в толщине слоя поле, он должен распределиться равномерно. Понятно, что равномерность



распределения заряда на внешней поверхности слоя сохранится, если толщину слоя устремить к нулю. Напряженность электрического поля вне сферы от равномерно распределенного по поверхности сферы заряда q будет такая же, как от точечного заряда q, помещенного в центр сферы:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{q\mathbf{R}}{R^3} \qquad \text{при} \qquad R > a\,,$$

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{q}{R} \qquad \text{при} \qquad R \geqslant a\,.$$

Причем поле вне сферы не зависит от того, где внутри сферы находится внесенный заряд q.

Следует заметить, что потенциал вне сферы удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и что этот потенциал на сфере должен быть константой. Но решение $\varphi = \text{const}$ и соответственно $\mathbf{E} = 0$ во всей области вне сферы будет неверным. Действительно, проводящая сфера делит все пространство на две области: внутреннюю с границей, на которой заряд $(-q)$, и внешнюю с границей, где заряд $(+q)$. Из решения $\mathbf{E} = 0$ следует, что на внешней границе $\sigma = 0$. А это не верно.

Потенциал

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \text{const} \qquad \text{при} \qquad R \leqslant a.$$

Из условия непрерывности потенциала на поверхности сферы следует, что $\text{const} = q/a$. Заряды q и q' обладают свойством взаимности: если q' является изображением заряда q, то и обратно заряд q является изображением заряда q'. Заряды

q и q' создают на сфере потенциал, равный нулю. Напряженность электрического поля внутри сферы

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} - q\frac{a}{\ell}\frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \qquad \text{при} \qquad R < a.$$

Поступая так же, как при выводе формулы (2), находим распределение заряда на внутренней поверхности сферы:

$$\sigma = -\frac{q(a^2 - \ell^2)}{4\pi a(a^2 + \ell^2 - 2a\ell\cos\theta)^{3/2}}\,.$$

Заряды на полусферах будут равны

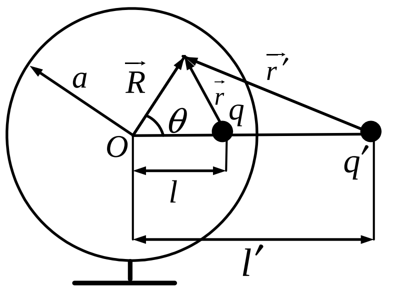
$$Q_1 = \frac{q(a^2 - \ell^2)}{2\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \ell^2}} - \frac{1}{a - \ell}\right),$$

$$Q_2 = \frac{q(a^2 - \ell^2)}{2\ell}\left(\frac{1}{a + \ell} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \ell^2}}\right).$$

Полный заряд на внутренней поверхности сферы, как и следовало быть, $Q_1 + Q_2 = -q$.

г) Заряд внутри сферы. Сфера заземлена.

Если заземлить сферу, рассмотренную выше, то потенциал сферы сравняется с потенциалом земли $\varphi = 0$ и заряд q с внешней поверхности сферы стечет в землю. Поэтому



$$\varphi = 0 \qquad \text{при} \qquad R \geqslant a,$$

$$\mathbf{E} = 0 \qquad \text{при} \qquad R > a.$$

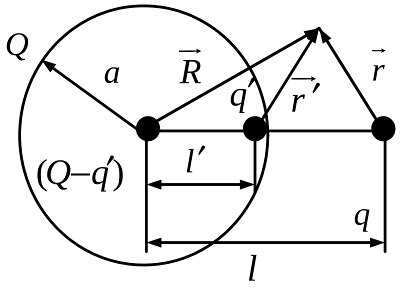
Напряженность электрического поля внутри сферы и распределение заряда по внутренней поверхности сферы не изменятся, останутся такими же, как для изолированной сферы. Потенциал

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \qquad \text{при} \qquad R \leqslant a.$$

Таким образом, заземленная сфера экранирует поле заряда, помещенного внутрь сферы.

1.2. (Задача 2.28) Заряд q находится на расстоянии ℓ от проводящей изолированной сферы радиуса $a < \ell$ с зарядом Q. Найти силу взаимодействия заряда со сферой. При каком значении заряда на сфере эта сила обращается в ноль?

Решение Сила взаимодействия заряженной сферы с зарядом q есть сила, с которой действует сфера на заряд q. Эта сила равна $\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\ell)$, где $\mathbf{E}(\ell)$ – напряжен-



ность электрического поля, которая создается заряженной сферой на месте заряда q. Для нахождения поля $\mathbf{E}(\ell)$ воспользуемся методом изображений (см. 2.27). Как было показано в задаче 2.27, поле индуцированных зарядов незаряженной сферы можно представить суперпозицией полей, создаваемых двумя точечными зарядами: $q' = -qa/\ell$, расположенным на расстоянии $\ell' = a^2/\ell$ от центра сферы, и $(-q')$, расположенным в центре сферы. Нетрудно понять, что в случае заряженной сферы для определения поля во внешнем пространстве, создаваемого сферой, нужно к зарядам q' и $(-q')$ добавить заряд сферы, поместив его в центр, чтобы поверхность сферы осталась эквипотенциальной. Итак,

$$\mathbf{E}(\ell) = \left[\frac{\bigl(Q + qa/\ell\bigr)}{\ell^2} - \frac{qa/\ell}{(\ell - \ell')^2}\right]\frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell} = \left[\frac{Q}{\ell^2} - \frac{qa^3(2\ell^2 - a^2)}{\ell^3(\ell^2 - a^2)^2}\right]\frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell},$$

$$\mathbf{F} = \left[\frac{Qq}{\ell^2} - \frac{q^2a^3(2\ell^2 - a^2)}{\ell^3(\ell^2 - a^2)^2}\right]\frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell}.$$

Если заряд

$$Q > q\frac{a^3(2\ell^2 - a^2)}{\ell(\ell^2 - a^2)^2},$$

то сфера отталкивает заряд q. При

$$Q < q\frac{a^3(2\ell^2 - a^2)}{\ell(\ell^2 - a^2)^2}$$

сфера притягивает заряд q. Когда

$$Q = q\frac{a^3(2\ell^2 - a^2)}{\ell(\ell^2 - a^2)^2},$$

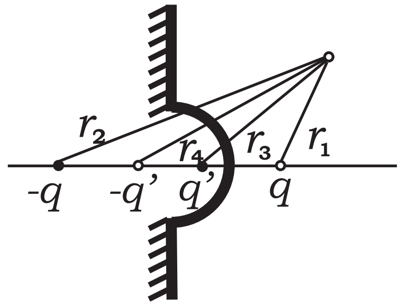
сила равна нулю. Сила, действующая со стороны заряда на сферу, равна $(-\mathbf{F})$.

1.3. (Задача 2.31) Внутри пространства, заполненного металлом, имеется сферическая полость радиуса ℓ. В полости на расстоянии h от ее центра находится заряженное с линейной плотностью $\varkappa$ кольцо радиуса ℓ. Найти потенциал и напряженность поля в центре кольца.

Решение $\varphi = 2\pi\varkappa - \frac{2\pi\varkappa\ell a}{\sqrt{h^2+\ell^2}\sqrt{\ell'^2+(h'-h)^2}}$, где $\ell' = \frac{a^2\ell}{h^2+\ell^2}$ – радиус кольца изображения, расположенного на расстоянии $h' = \frac{a^2h}{h^2+\ell^2}$ от центра полости. $E_z = -\frac{2\pi\varkappa a\ell(h'-h)}{\sqrt{h^2+\ell^2}\left[\ell'^2+(h'-h)^2\right]^{3/2}}$.

1.4.

(Задача 2.32) Заземленная проводящая плоскость имеет выступ в форме полусферы радиуса a. Центр полусферы лежит на плоскости. На оси симметрии системы на расстоянии $b > a$ от плоскости находится точечный заряд q. Найти потенциал электрического поля, а также заряд Q, индуцированный на выступе.



Решение $\varphi = q/r_1 - q/r_2 + q'/r_3 - q'/r_4$,
где $q' = -q\frac{a}{b}$, $b' = \frac{a^2}{b}$; r_i показаны на рисунке
и $Q_{\text{инд}} = -q\left(1 - \frac{b^2-a^2}{b\sqrt{b^2+a^2}}\right)$.