

Домашняя работа к занятию 22.

Решите краевые задачи

$$1.1 \quad \begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = 0; \quad y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$1.2 \quad \begin{cases} y'' + y = x \\ y'(0) = 0; \quad y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$1.3 \quad \begin{cases} y'' + y = \cos 2x \\ y'(0) = 0; \quad y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

1.4 Найдите условия разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y'(0) = 0; \quad y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Решите краевые задачи

$$2.1 \quad \begin{cases} x^2 y'' + xy' - y = 3x^2 \\ 3y(1) - 2y'(1) = 0 \\ 5y(2) - 6y'(2) = 0 \end{cases}$$

$$2.2 \quad \begin{cases} x^2 y'' + xy' - y = 3x^2 \\ y(1) - y'(1) = 0 \\ y(2) - 2y'(2) = 0 \end{cases}$$

$$2.3 \quad \begin{cases} x^2 y'' + xy' - y = 3x^2 - 7 \\ y(1) - y'(1) = 0 \\ y(2) - 2y'(2) = 0 \end{cases}$$

2.4 Найдите условия разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' - y = f(x) \\ y(1) - y'(1) = 0 \\ y(2) - 2y'(2) = 0 \end{cases}$$

3.1 а) При каких значениях параметра λ краевая задача

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = f(x) \\ y(0) = 0; \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

имеет решение при любой функции $f(x)$?

б) При каких значениях параметра λ краевая задача

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = 1 \\ y(0) = 0; \quad y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{не имеет решений?}$$

3.2 Функция $q(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $q(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

Докажите, что краевая задача
$$\begin{cases} y'' + q(x)y = 0 \\ y(a) = A; \quad y(b) = B \end{cases}$$
 разрешима при любых значениях A и B .

Докажите, что при $B = 0$ решение $y(x)$ монотонно на отрезке $[a; b]$.
Выясните, от чего зависит характер монотонности — будет функция $y(x)$ убывающей или возрастающей.

3.3 При каких условиях на коэффициенты α_i, β_i краевая задача

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2 + f_1(t), & \alpha_1 y_1(0) + \alpha_2 y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_2 = y_1 + f_2(t), & \beta_1 y_1(\frac{\pi}{2}) + \beta_2 y_2(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

разрешима при любых функциях $f_1(t)$ и $f_2(t)$?

Ответы и указания.

1.1 $y(x) = \sin x + x$

1.2 Указание: $y(x) = \cos x \in \text{Ker } L$

Ответ: задача решений не имеет

1.3 Указание: решений бесконечно много.

Ответ: $y(x) = C \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x$

1.4 $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$

2.1 $y(x) = x + x^2$

2.2 Указание: $y(x) = x \in \text{Ker } L$

Ответ: задача решений не имеет

2.3 Указание: решений бесконечно много.

Ответ: $y(x) = Cx + x^2 + 7 - \frac{3}{x}$

$$\mathbf{2.4} \int_1^2 f(x) dx = 0$$

3.1 а) $\lambda \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ б) $\lambda = \pi(2n + 1), n \in \mathbb{Z}$

3.3 $\alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \neq 0$