

ТЕРМОДИНАМИКА и СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Лекция 8 Распределение Гиббса с переменным числом частиц.

лектор: Образовский Е. Г.

3 мая 2022 г.

План лекции:

План лекции:

- Большое каноническое распределение.

План лекции:

- Большое каноническое распределение.
- Адсорбция.

План лекции:

- Большое каноническое распределение.
- Адсорбция.
- Полупроводники.

Пусть тело в термостате имеет температуру термостата, но находится поначалу само по себе в неравновесном состоянии (характеризуемом каким-то параметром x), а затем переходит к равновесному состоянию. При таком переходе должна возрасти полная энтропия замкнутой системы — тела и термостата:

$$S_{\text{полн}} = S_0 + S, \quad \Delta S_{\text{полн}} \geq 0. \quad (456)$$

Это условие неудобно для расчетов, так как для его использования надо было бы знать энтропию термостата. Используя тот факт, что в течение всего процесса установления равновесия термостат пребывает в равновесном состоянии, можно преобразовать это условие к такому виду, что в него будет входить только температура термостата.

Происходит обмен теплотой между телом и термостатом:

$$\Delta E = \delta Q = -\Delta E_0, \quad (457)$$

причем состояние термостата остается равновесным, так что изменение его энтропии равно

$$\Delta S_0 = -\frac{\delta Q}{T_0}; \quad (458)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{полн}} &= \Delta S - \frac{\Delta E}{T_0} = \frac{T_0 \Delta S - \Delta E}{T_0} = -\frac{\Delta(E - T_0 S)}{T_0} = \\ &= -\frac{\Delta F(T_0, V, x)}{T_0} \geq 0. \end{aligned} \quad (459)$$

Итак, $\Delta F(T_0, V, x) \leq 0$ при $T_0 = \text{const}$, $V = \text{const}$: если тело находится в термостате и над ним не совершается работа, то прочие макроскопические параметры, определяющие состояние тела, приходят к таким значениям, при которых свободная энергия минимальна.

переменное число частиц.

Рассмотрим еще одну задачу: термостат является одновременно и баростатом, тело может изменять объем — найти условия равновесия. Можно было бы решить ее почти так же, как первую.

Продemonстрируем другой способ, сходный с рассуждениями при выводе канонического распределения.

Вероятность определенного квантового состояния тела, при котором его объем равен V , а энергия — E определяется статистическим весом состояний термостата:

$$W_n = \frac{\Gamma_0(E_{\text{полн}} - E, V_{\text{полн}} - V)}{\Gamma_{\text{полн}}(E_{\text{полн}}, V_{\text{полн}})} \propto e^{S_0(E_{\text{полн}} - E, V_{\text{полн}} - V)}. \quad (460)$$

Разлагаем энтропию термостата

$$S_0 = S_0(E_{\text{полн}}, V_{\text{полн}}) - \frac{E}{T_0} - \frac{P_0 V}{T_0} + \dots \quad (461)$$

(Использовали равенство $\left(\frac{\partial S_0}{\partial V_0}\right)_E = \frac{P_0}{T_0}$, которое следует из $dE = TdS - PdV$).

Тогда

$$W(E, V) \propto e^{S+S_0} \propto e^{S-(E+P_0V)/T_0} = e^{-(E+P_0V-T_0S)/T_0}. \quad (462)$$

Отсюда следует, что в состоянии равновесия величина $E + P_0V - T_0S$ имеет минимум. Вспомним потенциал Гиббса:

$$\Phi(T, P, x) = E + PV - TS. \quad (463)$$

Условие равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(T_0, P_0, x) = 0. \quad (464)$$

переменное число частиц.

Рассмотрим теперь задачу о равновесии двух тел, которые могут обмениваться друг с другом частицами (молекулами). При каком условии будет соблюдаться динамическое равновесие — равенство прихода и ухода частиц от одного тела к другому? Будем считать для определенности, что оба тела находятся в термостате и объемы их фиксированы. Параметром, задающим частичное равновесие, в этом случае естественно считать число частиц N_1 в одном теле, изменения чисел частиц в обоих телах связаны друг с другом: $dN_2 = -dN_1$. В таких условиях должна быть минимальной суммарная свободная энергия $F = F_1(T, V_1, N_1) + F_2(T, V_2, N_2)$ по отношению к варьированию N_1 : $dF/dN_1 = 0$. Это условие дает $\mu_1 = \mu_2$, где

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, V} \quad (465)$$

— химический потенциал тела.

переменное число частиц.

Химический потенциал по отношению к обменам частицами играет роль, аналогичную роли температуры по отношению к обмену теплом: направление потока частиц — от тела с большим химическим потенциалом к телу с меньшим.

С учетом зависимости свободной энергии от числа частиц полный дифференциал ее $dF = -SdT - PdV + \mu dN$. Перейдя к потенциалу Гиббса, $\Phi(T, P) = F + PV = N\varphi(T, P)$,¹ получим $d\Phi = -SdT + VdP + \mu dN$. При дифференцировании по N получим $\mu = \varphi(T, P)$, т. е. химический потенциал — это потенциал Гиббса в расчете на одну частицу, причем он не зависит от количества вещества (является, как говорят, интенсивной переменной). В этом отношении он тоже схож с температурой.

¹ Здесь подразумевается, что все частицы тела одинаковы, например, все — молекулы воды.

Большое каноническое распределение

Пусть тело, находящееся в термостате, может обмениваться с ним не только теплом, но и частицами. Задача состоит в том, чтобы найти вероятность того, что тело содержит заданное число частиц N и находится при этом в определенном состоянии k (энергия которого равна $E_{N,k}$). Объем же тела предполагается фиксированным. Схема решения задачи такова же, как при выводе канонического распределения. Вероятность определяется статистическим весом термостата:

$$w_{N,k} = A e^{S_0(E_{\text{полн}} - E_{N,k}, N_{\text{полн}} - N)}. \quad (466)$$

Разложение величины, стоящей в показателе, по относительно малым E и N дает: ²

$$S_0 = S_0(E_{\text{полн}}, N_{\text{полн}}) - \frac{E}{T} + \frac{\mu}{T} N \quad (467)$$

² Используем соотношение $dE = TdS - PdV + \mu dN$,
откуда $\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right) = -\mu/T$.

Тогда распределение вероятности

$$w_{N,k} = \frac{1}{Q} e^{(\mu N - E_{N,k})/T}, \quad (468)$$

где Q — *большая статсумма*:

$$Q = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/T} \sum e^{-E_{N,k}/T}. \quad (469)$$

Полученное распределение называется *большим каноническим распределением Гиббса*.

Флуктуации числа частиц в большом каноническом ансамбле.

Из определения большой статсуммы

$$Q = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} e^{-\beta F} \quad (470)$$

имеем ряд равенств

$$\bar{N} = \frac{1}{Q} \sum_{N=0}^{\infty} N e^{\beta\mu N} e^{-\beta F} = \frac{1}{\beta Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu} \right), \quad (471)$$

$$\overline{N^2} = \frac{1}{\beta^2 Q} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu^2} \right) = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu} \right)^2 \right]. \quad (472)$$

переменное число частиц.

Значит

$$\overline{\Delta N^2} = \overline{N^2} - \bar{N}^2 = \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial(\beta\mu)^2} = T \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right). \quad (473)$$

Например, для идеального одноатомного больцмановского газа свободная энергия равна

$$F = -TN \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right], \quad (474)$$

следовательно

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,T} = -T \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (475)$$

и относительные флуктуации числа частиц

$$\frac{\overline{\Delta N^2}}{\bar{N}^2} = \frac{1}{\bar{N}}. \quad (476)$$

Таким образом для макроскопической системы $N \gg 1$ флуктуации числа частиц очень малы.

Введем новую величину

$$\Omega = -T \ln Q. \quad (477)$$

Это новый потенциал. Исследуем его:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -\frac{T}{Q} \cdot \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N}{T} e^{\mu N/T} \sum e^{-E_{N,k}/T} = \sum_{N=0}^{\infty} w_{N,k} N = -\langle N \rangle, \quad (478)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = \sum w_{N,k} \frac{\partial E_k}{\partial \lambda} = \langle \Lambda \rangle, \quad (479)$$

как при вычислении F , где λ — параметр в выражении для энергии;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial T} &= -\ln Q + \frac{T}{Q} \sum \sum \frac{\mu N - E_{N,n}}{T^2} \cdot e^{(\mu N - E_{N,n})/T} = \\ &= -\ln Q + \frac{1}{T} (\mu \langle N \rangle - \langle E \rangle) = \frac{\Omega + \mu \langle N \rangle - \langle E \rangle}{T}. \end{aligned} \quad (480)$$

С другой стороны, по определению энтропии,

$$-S = \sum w \ln w = \sum w \left(-\ln Q + \frac{\mu N - E_{N,k}}{T} \right) = \frac{\Omega + \mu \langle N \rangle - \langle E \rangle}{T}, \quad (481)$$

что совпадает с $\frac{\partial \Omega}{\partial T}$.

В итоге

$$d\Omega = -SdT + \Lambda d\lambda - Nd\mu. \quad (482)$$

Сопоставляя с равенством

$$dF = -SdT + \Lambda d\lambda + \mu dN, \quad (483)$$

заключаем, что $\Omega = F - \mu N$. Потенциал Гиббса $\Phi = N\mu = F + PV$.

Для однородной среды $\Omega = F - \mu N = -PV$.

Рассмотрим тело в термостате, которое имеет фиксированный объем и может обмениваться с термостатом частицами, но значение какого-то параметра x , характеризующего его внутреннее состояние, не равно равновесному. Вероятность этого состояния при условии, что частичное равновесие тела, которому отвечает определенное значение параметра x , достигается очень быстро по сравнению со временем, за которое достигается равновесие с термостатом по отношению к теплообмену и к обмену частицами,

$$W(x) \propto \exp \left(S - \frac{E - \mu_0 N}{T_0} \right) = \exp \left(- \frac{\Omega(V, T_0, \mu_0, x)}{T_0} \right). \quad (484)$$

В описанных условиях равновесие достигается при условии минимума Ω -потенциала.

Пример 1

Атомы газа могут оседать (адсорбироваться) на поверхности сосуда. Имеется определённое количество M мест на поверхности, на которые может быть адсорбирован атом. Каждое из них может принять не более одного атома. Какая доля возможных мест окажется занята атомами? (Эта доля называется степенью адсорбции). N_0 атомов больцмановского газа занимают объем V , температура T . Энергия адсорбированного атома равна $-\varepsilon$.

Разобьем поверхность на ячейки, которые могут быть либо пусты, либо заняты только одной частицей. Мы можем рассматривать одну ячейку как систему, способную обмениваться энергией и частицами с газом. Степень адсорбции α — отношение числа адсорбированных атомов к числу мест на поверхности — равна среднему числу атомов, находящихся на каждом из возможных мест.

1) Рассмотрим сначала случай $N_0 \gg M$.

Обозначим число адсорбированных атомов N_a , число доступных мест на поверхности M , число атомов в газовой фазе $N_g = N_0 - N_a$, где N_0 – полное число атомов. Свободная энергия адсорбированных атомов равна

$$F_a = -\varepsilon N_a - T \ln \frac{M!}{N_a! (M - N_a)!}, \quad (485)$$

откуда находим химический потенциал адсорбированных атомов

$$\mu_a = \left(\frac{\partial F_a}{\partial N_a} \right)_{T,V} = -\varepsilon + T \ln \frac{N_a}{(M - N_a)}. \quad (486)$$

Приравнивая химическому потенциалу атомов в газовой фазе

$$\mu_g = -T \ln \left[\frac{V}{N_0} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right], \quad (487)$$

где мы учли, что $N_g = N_0 - N_a \gg N_a$, получим степень адсорбции

$$\alpha(V, T) \equiv \frac{N_a}{M} = \frac{1}{1 + \frac{V}{N_0} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\epsilon/T}}. \quad (488)$$

Используя уравнение состояния для газовой фазы

$$PV = N_0 T, \quad (489)$$

можно найти

$$\alpha(P, T) = \frac{P}{P + P_0} \quad (490)$$

где

$$P_0 = T^{5/2} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon/T}. \quad (491)$$

2) Рассмотрим теперь случай $N_0 = M$.

Условие равновесия дает

$$\mu_a = -\varepsilon + T \ln \frac{N_a}{(N_0 - N_a)} = \mu_g = -T \ln \left[\frac{V}{(N_0 - N_a)} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right], \quad (492)$$

Откуда находим

$$\frac{(N_0 - N_a)^2}{N_a} = \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon/T} \equiv A. \quad (493)$$

Тогда число адсорбированных атомов равно

$$N_a = N_0 + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + N_0 A}, \quad (494)$$

где перед корнем взят знак минус, поскольку $N_a \leq N_0$. При высоких температурах ($A \gg N_0$) число адсорбированных атомов стремится к нулю

$$N_a \approx N_0 + \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4N_0}{A} - \frac{1}{8} \frac{16N_0^2}{A^2} \right) = \frac{N_0}{A} N_0. \quad (495)$$

При низких температурах ($A \ll N_0$) число атомов в газовой фазе

$$N_g = N_0 - N_a \approx \sqrt{N_0 A}. \quad (496)$$

Пример 2

Найдем концентрацию электронов и химический потенциал в собственном полупроводнике.

При нулевой температуры все уровни энергии в валентной зоне заняты электронами, в зоне проводимости все уровни пусты. Ширина запрещенной зоны $\Delta \sim 1$ эВ. При повышении температуры небольшая часть электронов $\sim e^{-\Delta/T}$ переходит из валентной зоны в зону проводимости, образуя в валентной зоне пустые уровни - дырки. Энергия электронов в зоне проводимости

$$\varepsilon_e = \Delta + \frac{p^2}{2m_e}, \quad (497)$$

энергия дырок в валентной зоне

$$\varepsilon_h = \frac{p^2}{2m_h}, \quad (498)$$

где m_e, m_h – эффективные массы электронов и дырок.

переменное число частиц.

Свободная энергия электронов, рассматриваемых как больцмановский газ, равна

$$F_e = -N_e T \ln \left[\frac{2eV}{N_e} \left(\frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta/T} \right], \quad (499)$$

Свободная энергия дырок равна

$$F_h = -N_h T \ln \left[\frac{2eV}{N_h} \left(\frac{m_h T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (500)$$

Минимизируя полную свободную энергию

$$F = F_e + F_h \quad (501)$$

по числу электронов, и учитывая что в собственном полупроводнике $N_e = N_h$, получим условие равновесия

$$\mu_e + \mu_h = 0. \quad (502)$$

Химические потенциалы равны

$$\mu_e = -T \ln \left[\frac{2V}{N_e} \left(\frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta/T} \right], \quad (503)$$

$$\mu_h = -T \ln \left[\frac{2V}{N_h} \left(\frac{m_h T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (504)$$

Отсюда получаем

$$n_e n_h = 4(m_e m_h)^{3/2} \left(\frac{T}{2\pi\hbar^2} \right)^3 e^{-\Delta/T} \quad (505)$$

$n_i = N_i/V$ – концентрации.

Значит

$$n_e = n_h = 2(m_e m_h)^{3/4} \left(\frac{T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta/2T}. \quad (506)$$

Химический потенциал электронов равен

$$\mu_e = \frac{\Delta}{2} + \frac{3T}{4} \ln \frac{m_h}{m_e}. \quad (507)$$

Найдем вклад в теплоемкость электронов и дырок для собственного полупроводника.

Средняя энергия равна

$$E = \left(\Delta + \frac{3}{2} T \right) N_e + \frac{3}{2} T N_h = (\Delta + 3T) A T^{3/2} e^{-\Delta/T}, \quad (508)$$

где

$$A = 2V \left(\frac{\sqrt{m_e m_h}}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (509)$$

Тогда теплоемкость равна

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_v \approx \frac{\Delta^2}{T^2} N_e, \quad (510)$$

поскольку $\Delta \gg T$.

Приложение: примесный полупроводник

Если в полупроводник IV группы (Ge, Si) ввести в небольшом количестве атомы V группы (P, As, Sb), то их четыре электрона образуют валентные связи с Ge, Si , а один электрон остается слабо связанным, энергия связи $\Delta - E_d \sim 0,01 - 0,03 \text{ эВ}$, и он легко может перепрыгнуть в зону проводимости уже при температуре $T \sim 300^\circ \text{K}$. Легированные таким образом полупроводники называют донорными или n -типа.

Найдем зависимость химического потенциала и числа носителей заряда в зоне проводимости в зависимости от температуры.

переменное число частиц.

Прежде всего найдем среднее число заполнения донорных уровней. На одном донорном уровне электроны могут располагаться по одному (со спином либо вверх либо вниз), но не два одновременно т.к. из-за кулоновского отталкивания энергия такого состояния сильно возрастает. В этом случае большая статсумма для i -го донорного уровня есть

$$Q_i = \sum_{n_i} e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)n_i} = 1 + 2e^{\beta(\mu - E_d)}. \quad (511)$$

Среднее число заполнения донорного уровня находится из

$$n_d = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Q_i}{\partial E_d} = \frac{2e^{\beta(\mu - E_d)}}{1 + 2e^{\beta(\mu - E_d)}}, \quad (512)$$

а число ионизованных (отдавших электроны) донорных атомов N_d^+ равно

$$N_d^+ = (1 - n_d)N_d = \frac{N_d}{1 + 2e^{\beta(\mu - E_d)}}, \quad (513)$$

где N_d – полное число донорных атомов.

Теперь число электронов в зоне проводимости складывается из числа электронов, перепрыгнувших из валентной зоны и электронов, поставляемых донорными атомами, именно

$$N_e = N_h + \frac{N_d}{1 + 2e^{\beta(\mu - E_d)}}. \quad (514)$$

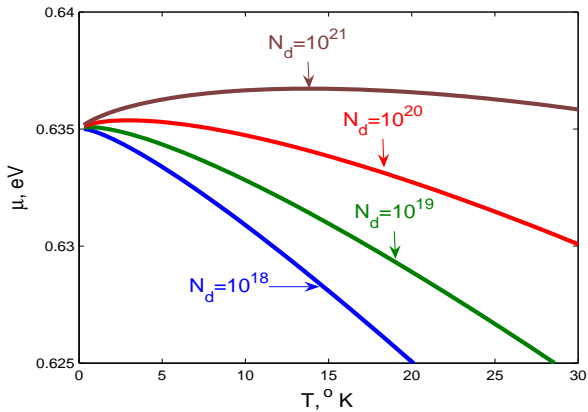
При температуре $T \ll \Delta \approx 1\text{эВ} \approx 12000^\circ\text{K}$ вероятность создания электрон-дырочной пары мала, т.е. малы средние числа заполнения для электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне, для чего необходимо выполнение условий $e^{\beta\mu} \gg 1$, $e^{\beta(\Delta - \mu)} \gg 1$.

В этом случае получается больцмановское распределение, так что мы имеем следующие выражения для числа электронов в зоне проводимости N_e и числа дырок в валентной зоне N_h

$$N_e = V e^{-\beta(\Delta - \mu)} \int 2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} e^{-p^2/2m_e T} = 2V \left(\frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\beta(\Delta - \mu)} \equiv N_c e^{-\beta(\Delta - \mu)}, \quad (515)$$

$$N_h = V e^{-\beta\mu} \int 2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} e^{-p^2/2m_h T} = 2V \left(\frac{m_h T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\beta\mu} \equiv N_v e^{-\beta\mu} \quad (516)$$

переменное число частиц.



Тогда получаем уравнение на химический потенциал

$$N_c e^{-\beta(\Delta-\mu)} = N_v e^{-\beta\mu} + \frac{N_d}{1 + 2e^{\beta(\mu-E_d)}}. \quad (517)$$

При достаточно низких температурах, таких что $e^{\beta(\mu-E_d)} \gg 1$, основным поставщиком электронов в зону проводимости будут донорные атомы, поэтому

$$N_c e^{-\beta(\Delta-\mu)} \approx \frac{N_d}{2e^{\beta(\mu-E_d)}}, \quad (518)$$

откуда

$$e^{2\beta\mu} = \frac{N_d}{2N_c} e^{\beta(\Delta+E_d)}, \quad (519)$$

что дает

$$\mu = \frac{\Delta + E_d}{2} + \frac{T}{2} \ln \left(\frac{N_d}{2N_c} \right), \quad (520)$$

$$N_e = \frac{N_d}{2} e^{-\beta\mu} e^{\beta E_d} = \sqrt{\frac{N_d N_c}{2}} e^{-\beta \frac{\Delta - E_d}{2}}. \quad (521)$$

переменное число частиц.

Как и для собственных полупроводников, в этом температурном режиме число носителей заряда очень сильно зависит от температуры. При $T = 0$ химический потенциал $\mu = (\Delta + E_d)/2$. Интересно, что с повышением температуры химический потенциал сначала растет, рис. 1, достигая максимума, который находится из условия

$$\frac{d\mu}{dT} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{N_d}{2N_c} \right) + \frac{T}{2} \left(-\frac{3}{2} \frac{1}{T} \right) = 0 \rightarrow \frac{N_d}{2N_c} = e^{3/2}. \quad (522)$$

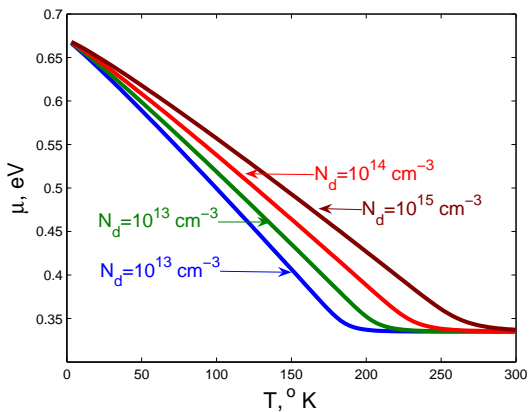
Подставляя значение N_c , получим

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m_e e} \left(\frac{N_d}{4V} \right)^{2/3}, \quad \mu_0 = \frac{\Delta + E_d}{2} + \frac{3\pi\hbar^2}{2m_e e} \left(\frac{N_d}{4V} \right)^{2/3}. \quad (523)$$

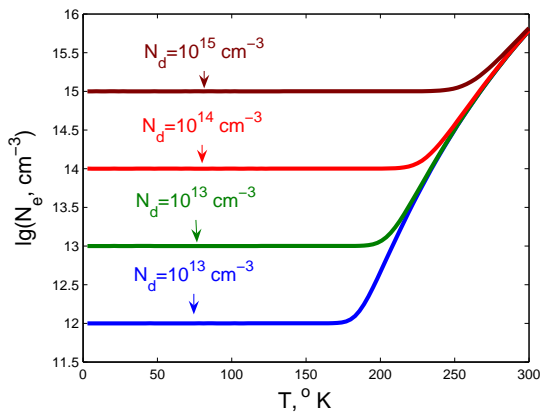
(Отметим, что в этих формулах e – основание натурального логарифма, а не заряд электрона!)

Из выражения для μ_0 следует, что с увеличением числа донорных атомов N_d может случиться, что μ_0 станет больше Δ , т.е. уровень Ферми “влезет” в зону проводимости и получится “металл точнее вырожденный полупроводник.

переменное число частиц.



переменное число частиц.



В другом температурном режиме $e^{\beta(\mu - E_d)} \ll 1$ следует учесть вклад дырок из валентной зоны (при этом все донорные уровни пусты):

$$N_c e^{\beta(\mu - \Delta)} = N_v e^{-\beta\mu} + N_d, \quad (524)$$

откуда, решая квадратное уравнение, получим

$$e^{\beta\mu} = \frac{N_d + \sqrt{4N_c N_v e^{-\beta\Delta} + N_d^2}}{2N_c e^{-\beta\Delta}}. \quad (525)$$

Перед корнем выбран знак плюс, поскольку $e^{\beta\mu} > 0$.

Если температура не очень большая, $N_d^2 \gg 4N_c N_v e^{-\beta\Delta}$, то

$$\mu = \Delta + T \ln \frac{N_d}{N_c}, \quad N_e = N_c e^{\beta(\mu - \Delta)} = N_d = \text{Const} \quad (526)$$

Это как раз тот температурный режим, в котором работает большинство полупроводниковых приборов.

При дальнейшем повышении температуры, когда $N_d^2 \ll 4N_c N_v e^{-\beta\Delta}$, восстанавливается режим собственной проводимости, рис. 3

$$e^{\beta\mu} = \sqrt{\frac{N_v}{N_c}} e^{\beta\Delta/2} \rightarrow \mu = \frac{\Delta}{2} + \frac{3}{4} T \ln \frac{m_h}{m_e} \quad (527)$$