Уравнение теплопроводности. Метод Фурье I

“Уравнения математической физики”

Скопинцев Артур Маркович

Новосибирск, 2023

• • •

Оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Если

1. $\Delta u > 0$ в точке (x, y), то $u(x, y)$ *меньше «среднего значения* функции в соседних точках»[1]) (например, на окружности с центром в точке (x, y));
2. $\Delta u = 0$ в точке (x, y), то $u(x, y)$ *равна «среднему значению* функции в соседних точках»;
3. $\Delta u < 0$ в точке (x, y), то $u(x, y)$ *больше «среднего значения* функции в соседних точках».

Используя этот факт[2]), дадим интерпретацию основных уравнений математической физики.

Согласно *уравнению теплопроводности* $u_t = \alpha^2 \Delta u$ для температуры (или концентрации) u, *скорость изменения* температуры u_t пропорциональна величине Δu. Значит, если температура в точке *меньше*, чем средняя температура на окружности, окружающей данную точку, то температура в данной точке *будет возрастать*.

Согласно *волновому уравнению* $u_{tt} = \alpha^2 \Delta u$ для смещения мембраны, ускорение точки мембраны u_{tt} (или сила, действующая на точку) пропорционально величине Δu. Значит, точка мембраны *ускоряется вверх* (сила направлена вверх), если ее смещение (по высоте) *меньше*, чем *среднее смещение* соседних точек.

Если функция удовлетворяет *уравнению Лапласа* $\Delta u = 0$, то ее значение всегда совпадает со средним значением. Например, натянутая неподвижная резиновая мембрана удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, смещение мембраны в любой точке *равно среднему смещению* мембраны на окружности с центром в этой точке.

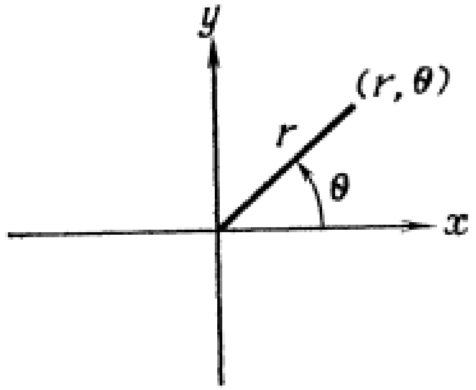
Уравнение Пуассона $\Delta u = f$, где f — функция, зависящая от пространственных переменных (может быть и константой), описывает значительное число различных явлений.

1. $\Delta u = -\rho$ описывает потенциал *электростатического поля*, если ρ — плотность статических зарядов. Зная основное свойство лапласиана, что бы вы могли сказать о свойствах потенциального поля?
2. $\Delta u = -g(x, y)$ описывает стационарное распределение температуры от теплового источника $g(x, y)$. Если $g(x, y)$ положительна в точке, значит, в этой точке тепло *выделяется*, если же $g(x, y)$ отрицательна, то тепло в этой точке поглощается.
3. $\Delta u + \lambda u = 0$ — это уравнение Гельмгольца (приведенное волновое уравнение), которое описывает (помимо многого другого) пространственную часть собственных колебаний мембраны. Это уравнение возникает при разделении пространственных и временной переменных в волновом уравнении и уравнении теплопроводности.

Лапласиан в различных с.к.

Полярные координаты определяются соотношениями

$$\begin{array}{lcl} r^2 = x^2 + y^2, & \text{или} & x = r\cos\theta, \\ \operatorname{tg}\theta = y/x, & & y = r\sin\theta. \end{array}$$



$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = u_r(\cos\theta) - u_\theta(\sin\theta/r).$$

$$u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y = u_r \sin\theta + u_\theta(\cos\theta/r).$$

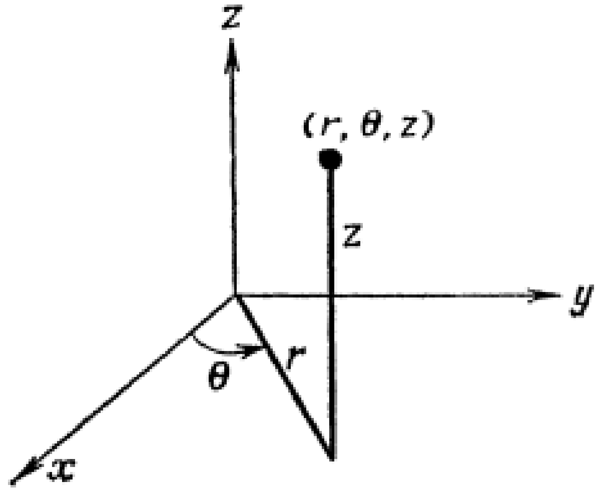
$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x = \\ &= (u_x)_r\, r_x + (u_x)_\theta\, \theta_x = \\ &= (u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta/r)_r \cos\theta + (u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta/r)_\theta(\sin\theta/r) = \\ &= (u_{rr}\cos\theta - u_{r\theta}\sin\theta/r + u_\theta\sin\theta/r^2)\cos\theta + \\ &+ (u_{r\theta}\cos\theta - u_r\sin\theta - u_{\theta\theta}\sin\theta/r - u_\theta\cos\theta/r)(-\sin\theta/r). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} = (u_{rr}\sin\theta + u_{r\theta}\cos\theta/r - \cos\theta/r^2)\sin\theta + \\ + (u_{r\theta}\sin\theta + u_r\cos\theta + u_{\theta\theta}\cos\theta/r - u_\theta\sin\theta/r)(\cos\theta/r). \end{aligned}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

Цилиндрические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями:

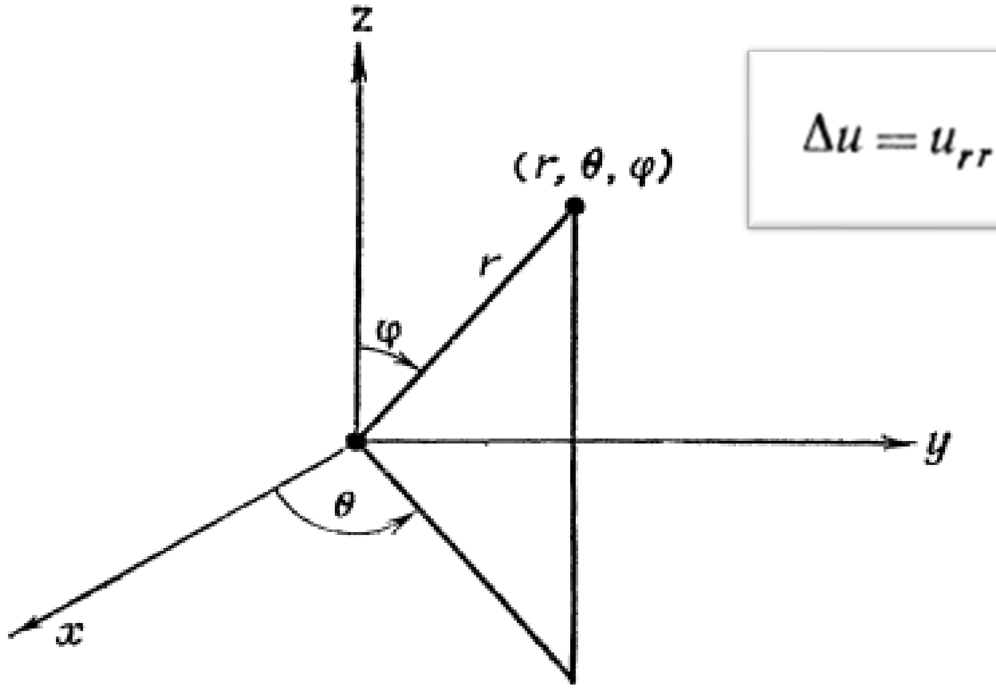
$$\begin{array}{lcl} r^2 = x^2 + y^2, & & x = r\cos\theta, \\ \operatorname{tg}\theta = y/x, & \text{или} & y = r\sin\theta, \\ z = z, & & z = z. \end{array}$$



$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}$$

Сферические координаты определяются следующим образом:

$$\begin{array}{lcl} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, & & x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ \cos\varphi = z/r, & \text{или} & y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ \operatorname{tg}\theta = y/x, & & z = r\cos\varphi. \end{array}$$



$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r^2}u_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_{\theta\theta}$$

Уравнение теплопроводности

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty.$$

u_t — *скорость изменения* температуры во времени (измеряется в град/с)
и величину
u_{xx} — *вогнутость* температурного профиля $u(x, t)$ (которая служит мерой отличия температуры в данной точке от температуры в соседних точках).

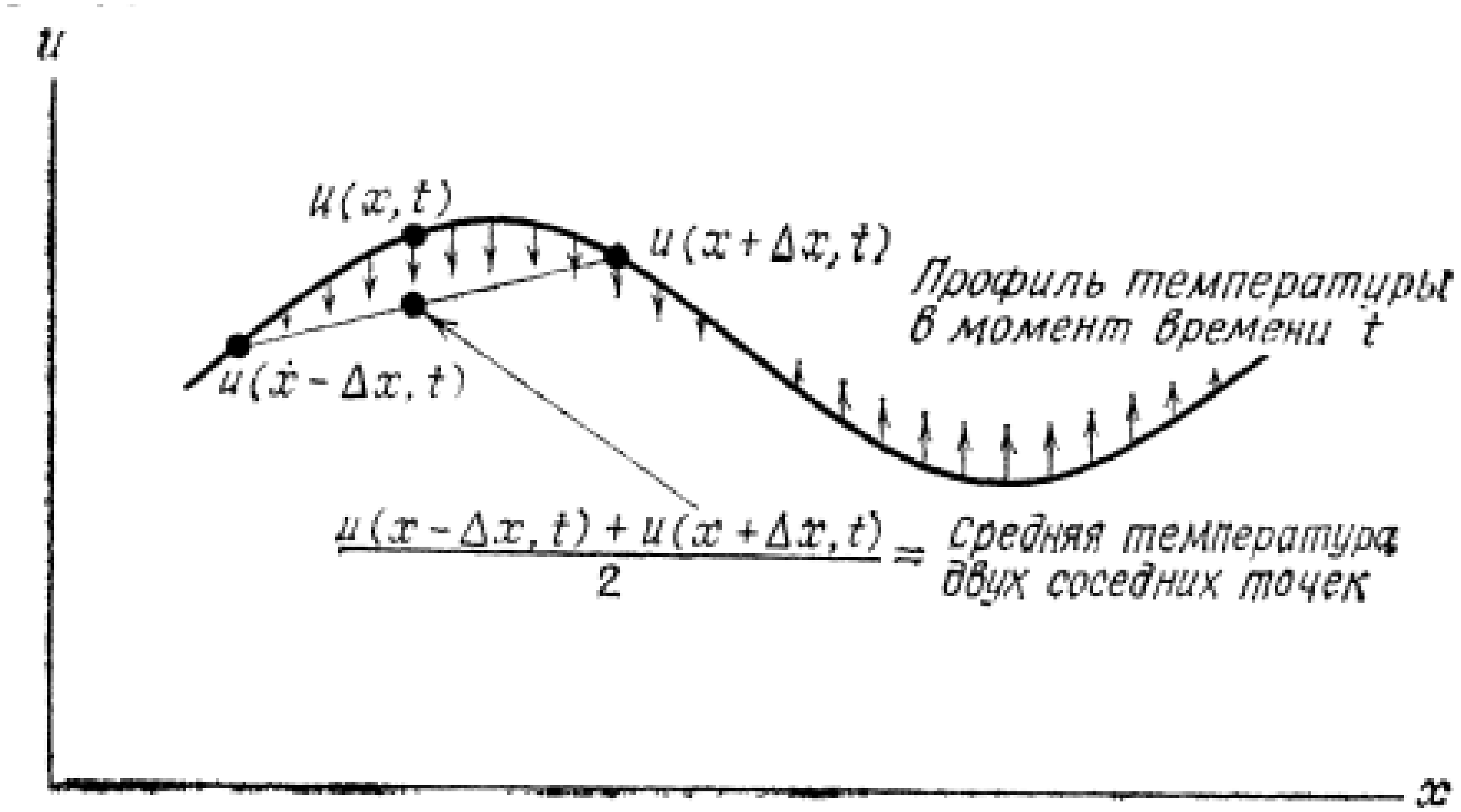
Посмотрим, как можно интерпретировать величину u_{xx} на языке теплопроводности. Предположим, что мы аппроксимируем величину u_{xx} конечными разностями

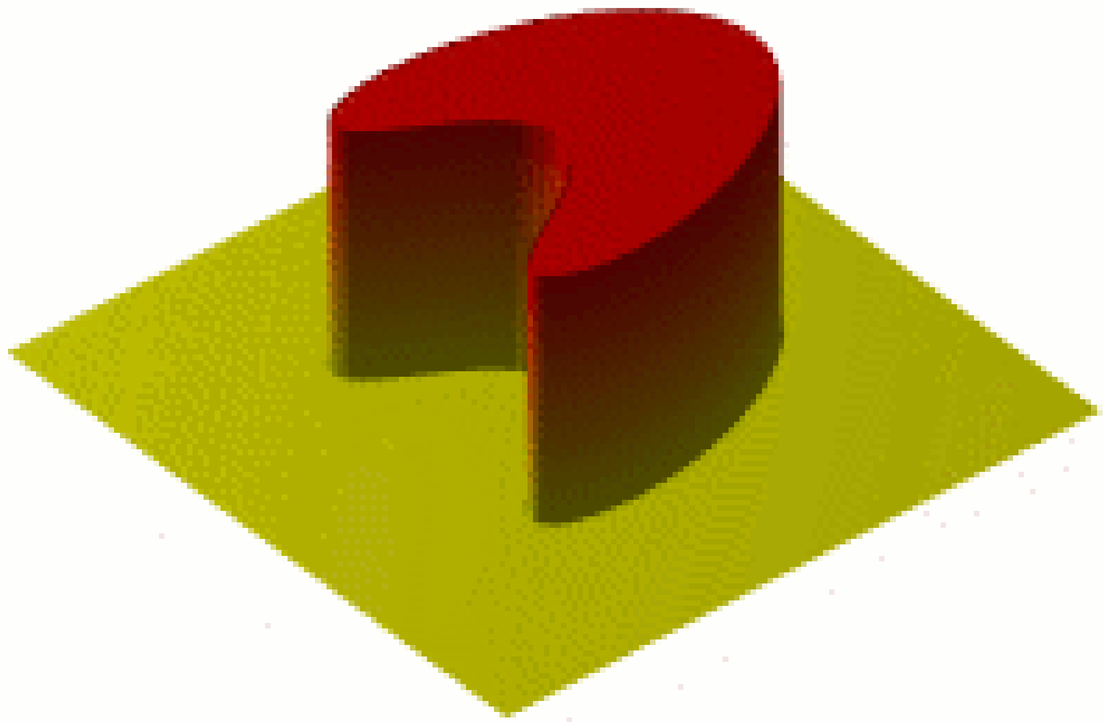
$$u_{xx}(x, t) \cong \frac{1}{\Delta x^2}[u(x+\Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x-\Delta x, t)].$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$u_{xx}(x, t) \cong \frac{2}{\Delta x^2}\left[\frac{u(x+\Delta x, t)+u(x-\Delta x, t)}{2} - u(x, t)\right].$$

1. Если температура $u(x, t)$ меньше среднего значения температуры в двух соседних точках, то $u_{xx} > 0$ (здесь полный поток тепла вдоль оси x положителен).
2. Если температура $u(x, t)$ равна среднему значению температур в двух соседних точках, то $u_{xx} = 0$ (здесь полный поток тепла вдоль оси x равен нулю).
3. Если температура $u(x, t)$ больше среднего значения температуры в двух соседних точках, то $u_{xx} < 0$ (здесь полный поток тепла вдоль оси x отрицателен).





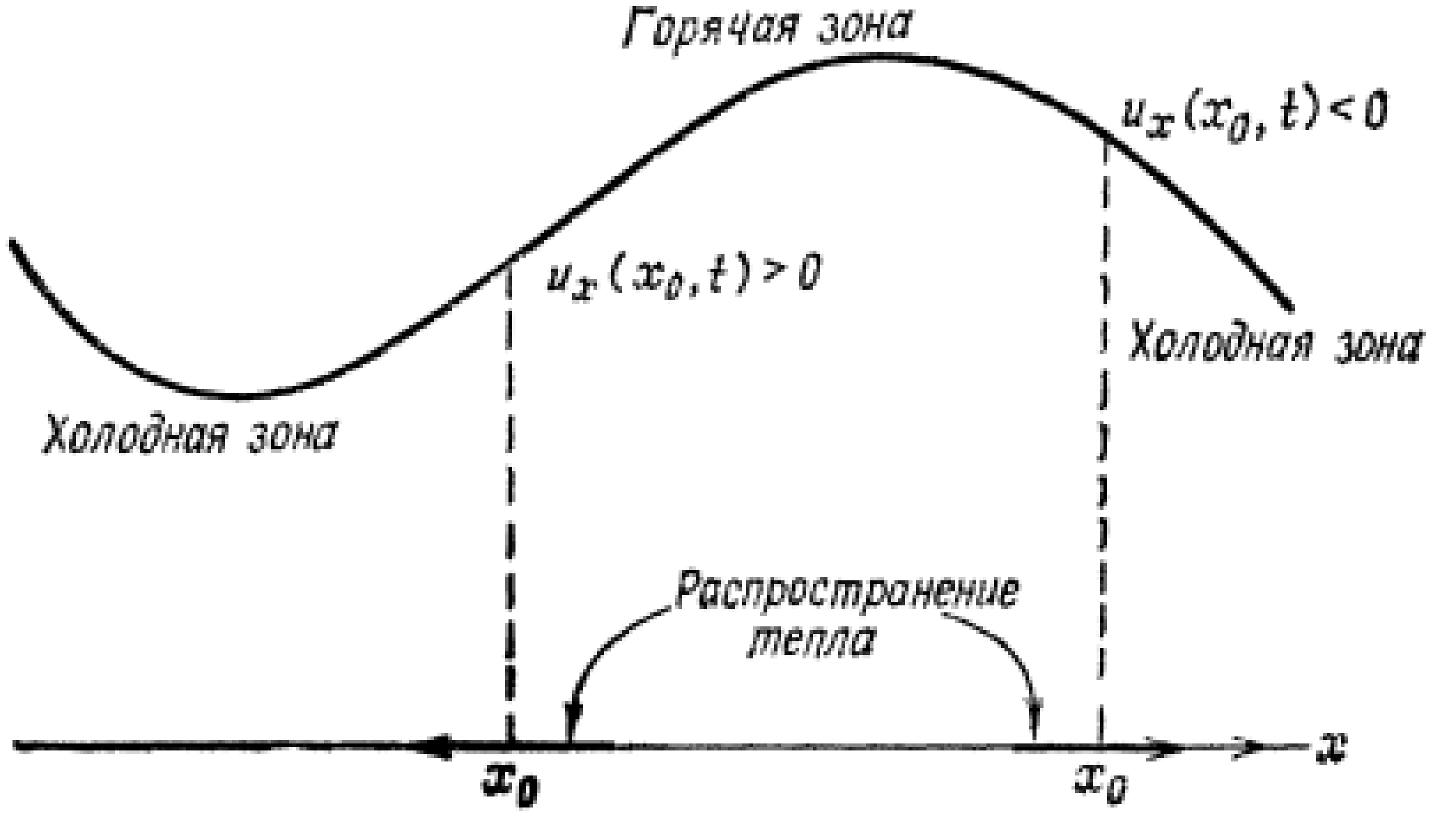
Закон Фурье

Поток тепла, проходящий через границу области, пропорционален нормальной производной температуры в направлении внутренней нормали.

В нашей одномерной задаче закон Фурье принимает вид:

$$\begin{cases} \text{вытекающий поток тепла при } x=0 \text{ равен } k\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \text{вытекающий поток тепла при } x=l \text{ равен } -k\dfrac{\partial u}{\partial x}, \end{cases}$$

Поток, протекающий через точку x слева направо $= -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$



Закон Фурье гласит: если $u_x < 0$, то в точке x_0 тепло течет *слева направо*, если $u_x > 0$, то в точке x_0 тепло течет *справа налево*. (Тепло всегда течет от более высоких температур к более низким.)

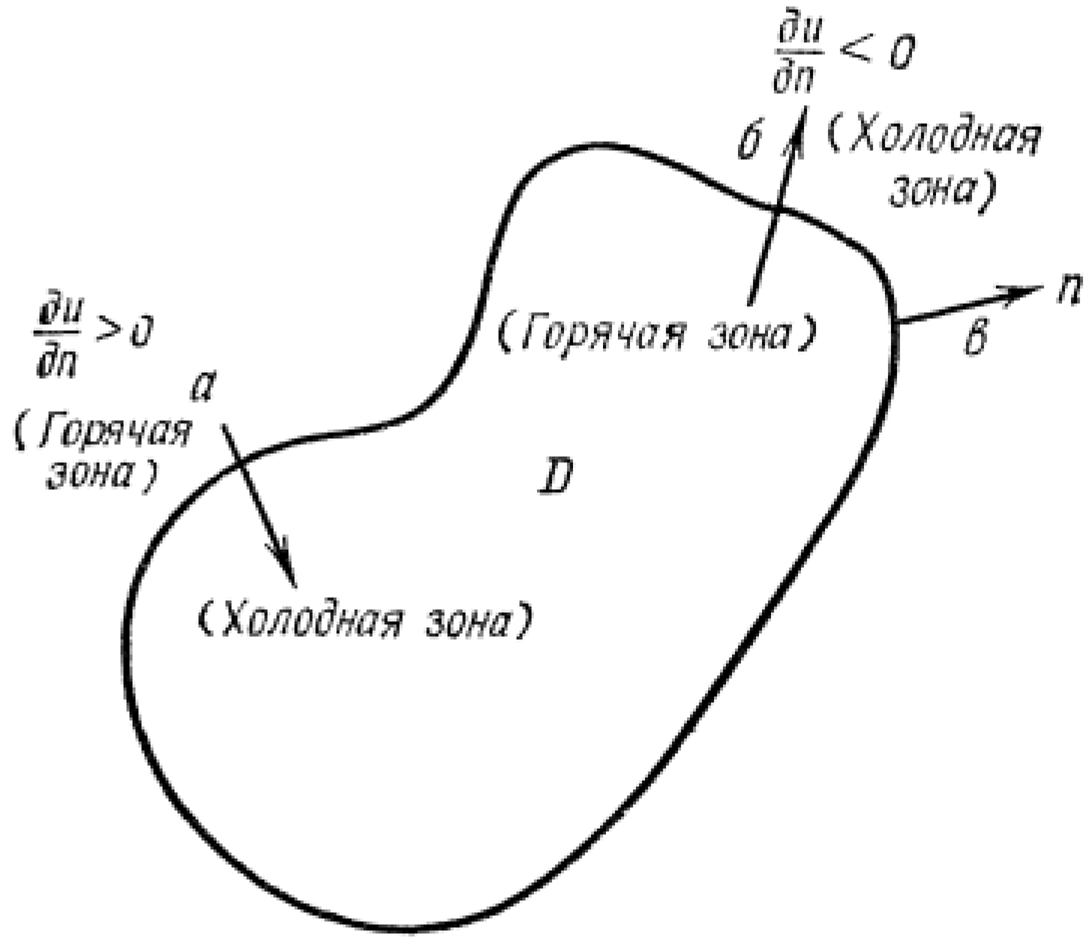
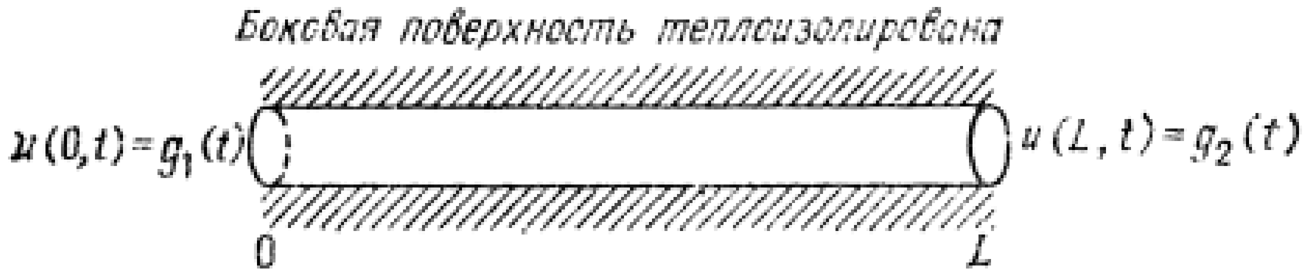
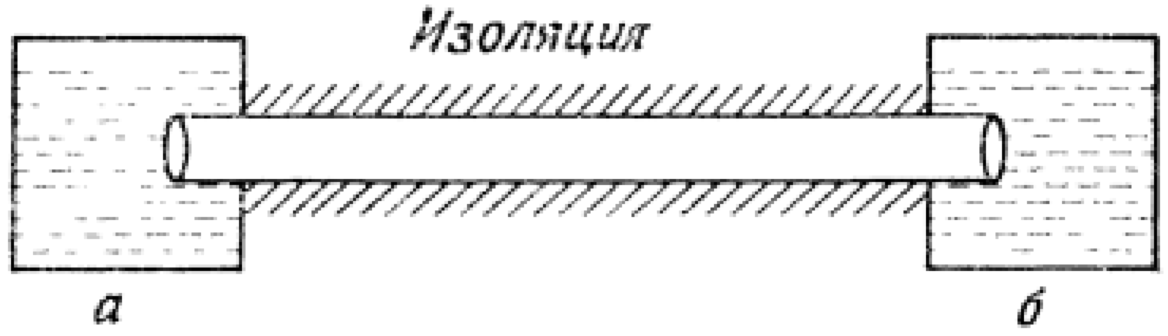


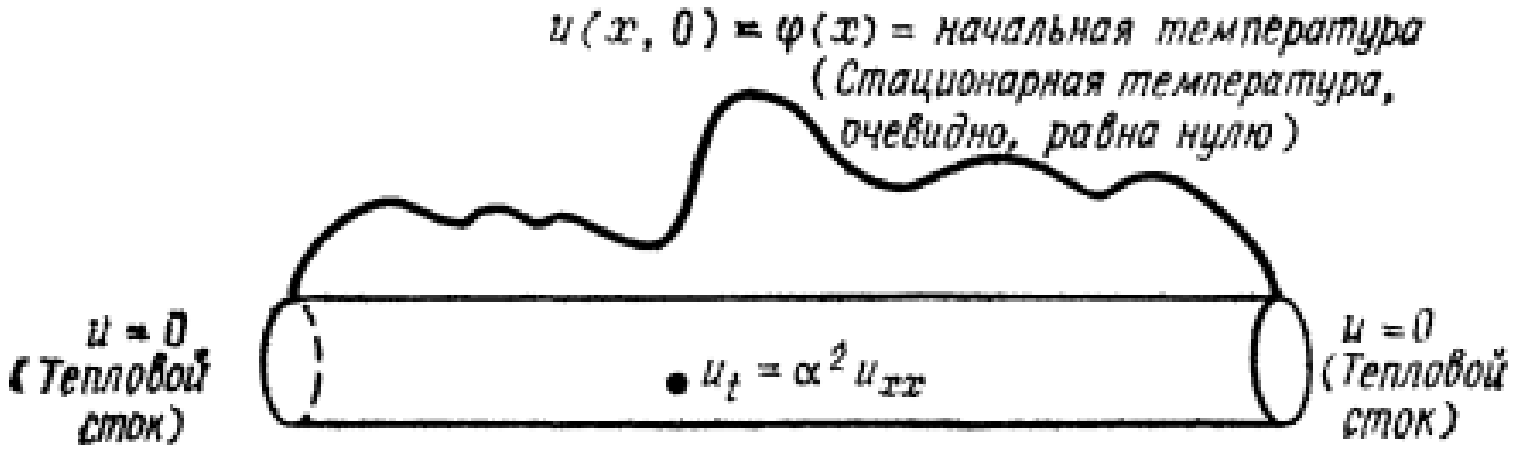
Иллюстрация закона Фурье: $\dfrac{\partial u}{\partial n} > 0$ означает, что тепло втекает в область; $\dfrac{\partial u}{\partial n} < 0$ означает, что тепло вытекает из области; n — направление внешней нормали; $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — изменение температуры в направлении n; $\dfrac{\partial u}{\partial n} = -\dfrac{\partial u}{\partial(-n)}$ — производная в направлении внутренней нормали есть взятая с противоположным знаком производная по внешней нормали.

Граничные условия



1. $u = g(t)$ (на границе задана температура),
2. $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g(t)$ (задана температура *окружающей среды*;
   n — вектор *внешней нормали* к границе),
3. $\frac{\partial u}{\partial n} = g(t)$ (задан тепловой поток через границу).





Схематическое изображение диффузионной задачи.

Метод Фурье для задачи теплопроводности

Метод разделения переменных — один из наиболее почтенных по возрасту методов решения смешанных задач и применяется, когда:

1. Уравнение является линейным и однородным (не обязательно с постоянными коэффициентами).
2. Граничные условия заданы в виде

$$\alpha u_x(0,\ t)+\beta u(0,\ t)=0,$$
$$\gamma u_x(1,\ t)+\delta u(1,\ t)=0,$$

где α, β, γ и δ — константы (граничные условия, заданные в таком виде, называются **линейными однородными граничными условиями**).

Вместо изучения метода в общем случае давайте разберем сначала частную задачу (позже мы обсудим и общий случай). Рассмотрим смешанную задачу диффузионного типа: найти решение

$$\text{(УЧП)}\quad u_t=\alpha^2 u_{xx},\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\text{(ГУ)}\quad \begin{cases} u(0,\ t)=0, \\ u(1,\ t)=0, \end{cases}\quad 0<t<\infty,$$

и начальному условию

$$\text{(НУ)}\quad u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Прежде чем приступить к разделению переменных, дадим физическую интерпретацию нашей задачи. Итак, имеется стержень конечной длины, концы которого поддерживаются при постоянной, равной нулю температуре (на самом деле концы могут поддерживаться при гораздо более высокой температуре, значение которой принимается за начало отсчета). Дополнительные данные о задаче представлены в виде начального условия. Наша цель — найти распределение температуры $u(x,\ t)$ в последующие моменты времени.

Для простейшего уравнения с частными производными разделение переменных — это поиски решений вида

$$u(x,\ t)=X(x)\,T(t),$$

где $X(x)$ — функция, зависящая только от переменной x, а $T(t)$ — зависящая только от t. Такое решение является в каком-то смысле простейшим, поскольку температура $u(x,\ t)$, представленная в таком виде, будет сохранять «форму» профиля в различные моменты времени t

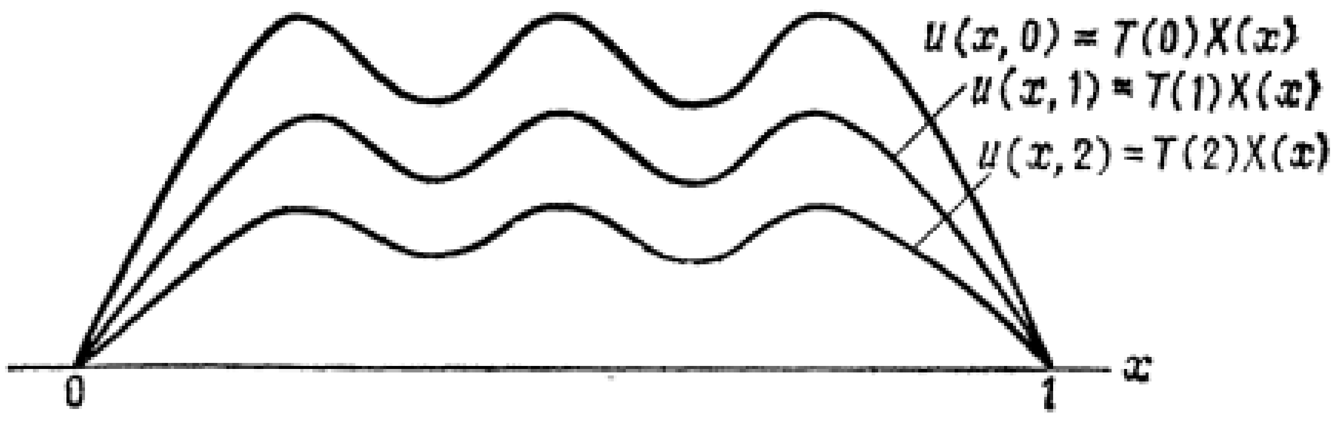


График функции $X(x)\,T(t)$ в различные моменты времени t.

Общая идея заключается в том, чтобы найти бесконечное число таких решений уравнения с частными производными (которые удовлетворяют граничным условиям). Эти простейшие функции $u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ (называемые **фундаментальными решениями**) являются как бы элементарными кирпичиками, из которых строится решение нашей задачи. Решение нашей задачи $u(x, t)$ находится в виде такой линейной комбинации фундаментальных решений $X_n(x) T_n(t)$, что результирующая сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t)$$

удовлетворяет начальным условиям. Поскольку эта сумма удовлетворяет уравнению и граничным условиям, она является решением исходной задачи. Нам осталось проделать все эти выкладки достаточно подробно.

ШАГ 1. (Нахождение элементарных решений уравнения с частными производными.)

Мы хотим найти функцию $u(x, t)$, которая является решением следующей задачи:

$$\text{(УЧП)} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\text{(ГУ)} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$\text{(НУ)} \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Будем искать решения, представимые в виде $u(x, t) = X(x) T(t)$. Для этого подставим выражение $X(x) T(t)$ в уравнение. В результате подстановки получаем

$$X(x) T'(t) = \alpha^2 X''(x) T(t).$$

Теперь выполним операцию, присущую данному методу: ***разделим*** обе части последнего уравнения на $\alpha^2 X(x) T(t)$, в результате чего получаем

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Про это выражение говорят, что в нем **переменные разделены**, т. е. левая часть уравнения зависит только от t, а правая часть — только от x. Так как x и t *не зависят один от другого*, то каждая часть этого уравнения должна быть константой. Обозначим эту константу k, тогда

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} = k$$

или

$$T' - k\alpha^2 T = 0,$$
$$X'' - kX = 0.$$

$$T' + \lambda^2\alpha^2 T = 0,$$
$$X'' + \lambda^2 X = 0.$$

$T(t) = Ae^{-\lambda^2\alpha^2 t}$ (A — произвольная постоянная),

$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$ (A, B — произвольные постоянные).

$$\boxed{u(x, t) = e^{-\lambda^2\alpha^2 t}[A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]}$$

ШАГ 2. (Нахождение решений, удовлетворяющих граничным условиям.)

Положение сейчас таково: у нас есть бесконечное множество решений исходного уравнения, но не все они удовлетворяют граничным или начальным условиям. Следующий шаг состоит в выборе такого *подмножества* решений вида

$$e^{-\lambda^2\alpha^2 t}[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)], \tag{5.1}$$

которые удовлетворяют граничным условиям

$$u(0,\ t)=0,$$
$$u(1,\ t)=0.$$

Чтобы сделать это, подставим решения (5.1) в эти граничные условия. В результате получаем

$$u(0,\ t)=Be^{-\lambda^2\alpha^2 t}=0\Rightarrow B=0,$$
$$u(1,\ t)=Ae^{-\lambda^2\alpha^2 t}\sin\lambda=0\Rightarrow \sin\lambda=0.$$

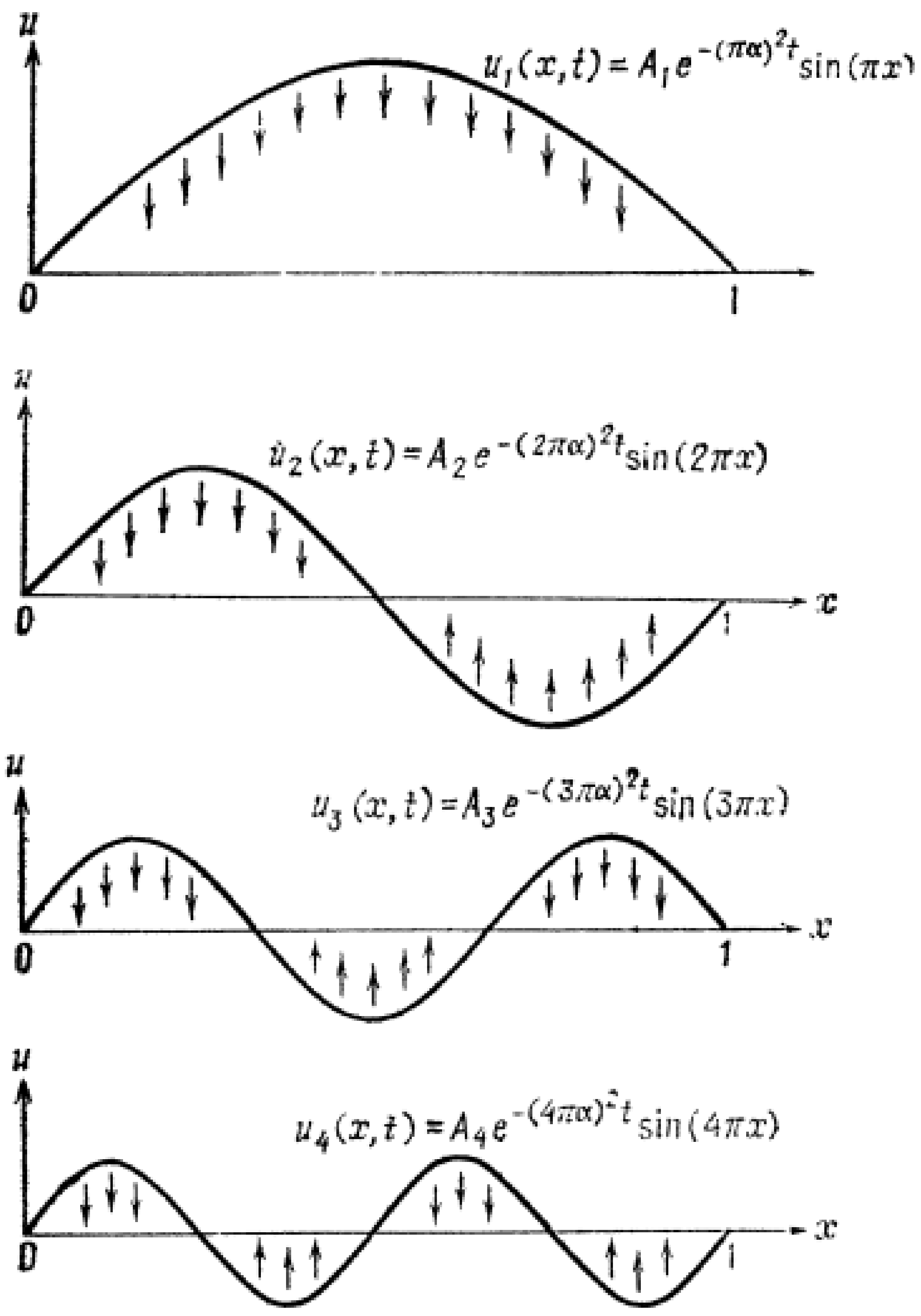
Второе граничное условие накладывает ограничение на возможные значения константы разделения λ: она должна быть корнем уравнения $\sin\lambda=0$. Другими словами, чтобы удовлетворить условию $u(1,\ t)=0$, необходимо *потребовать* выполнения соотношений

$$\lambda=\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \ldots$$

или

$$\lambda_n=\pm n\pi,\quad n=1,\ 2,\ \ldots .$$

$$u_n(x,\ t)=A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x),\quad n=1,2\ \ldots$$



Фундаментальные решения $u_n(x,\ t)=A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi n x)$.

ШАГ 3. (Нахождение решения, удовлетворящего уравнению, граничным и начальным условиям.)

Последний (и, вероятно, наиболее интересный с математической точки зрения) шаг заключается в нахождении такой суммы фундаментальных решений

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x),$$

т. е. в подборе таких коэффициентов A_n, что функция будет удовлетворять начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Подстановка суммы в начальное условие дает

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x). \tag{5.3}$$

Это уравнение приводит нас к интересному вопросу: можно ли начальную температуру $\varphi(x)$ разложить в ряд по элементарным функциям вида

$$A_1 \sin(\pi x) + A_2 \sin(2\pi x) + A_3 \sin(3\pi x) + \ldots ?$$

Положительный ответ на этот вопрос дал французский математик Жозеф Фурье. Оказалось, что для достаточно хороших функций такое разложение возможно[1]). Тогда возникает новый вопрос: как найти коэффициенты разложения A_n?

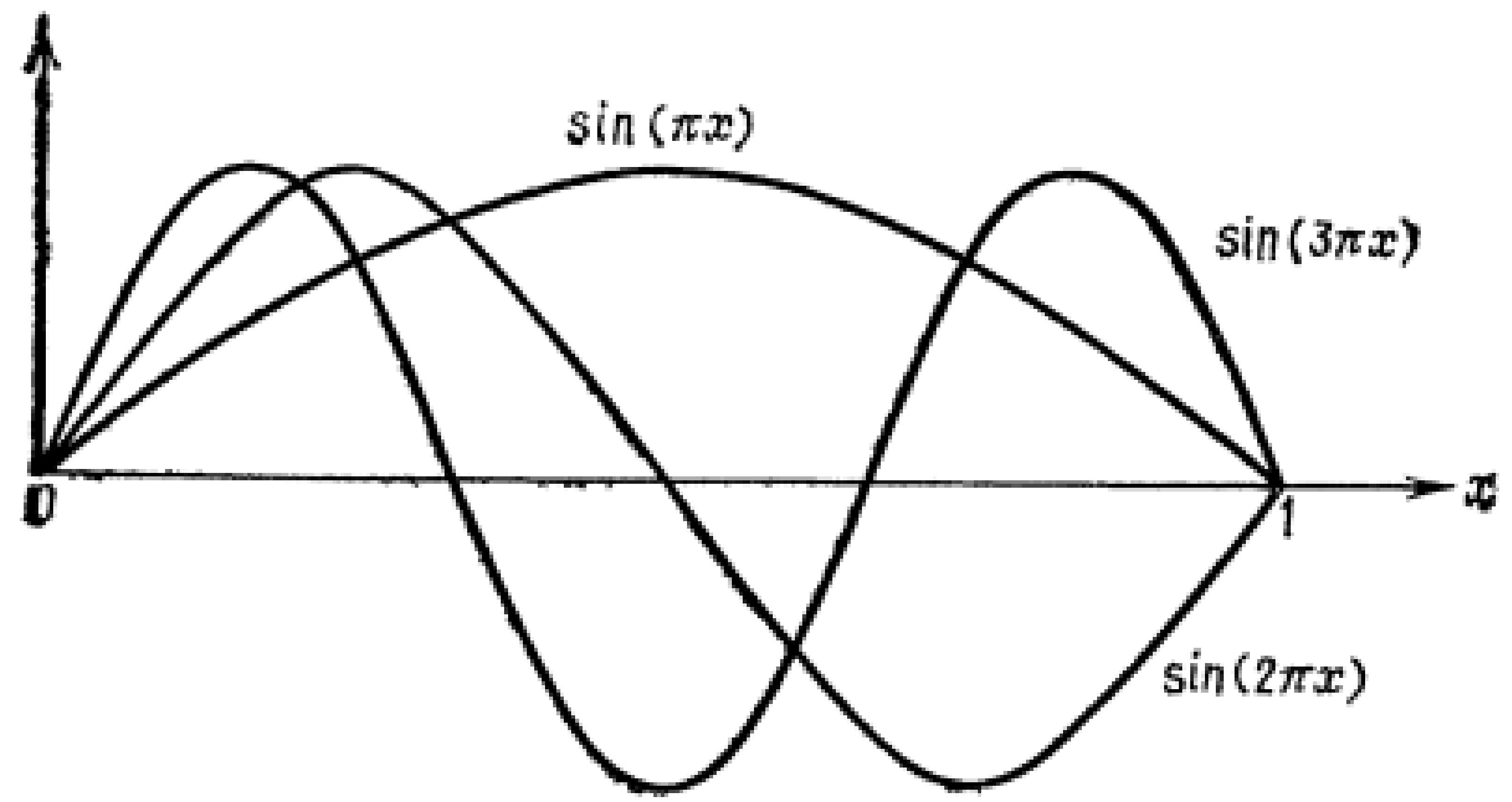
На самом деле сделать это очень легко. Для этого воспользуемся свойством системы функций

$$\{\sin(n\pi x);\ n = 1, 2, \ldots\},$$

известным, как **ортогональность**.

В нашем случае (см. задачу 2), эти функции удовлетворяют условиям

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1/2, & m = n. \end{cases}$$



Последовательность ортогональных функций

Итак, мы хотим найти коэффициенты в разложении

$$\varphi(x) = A_1 \sin(\pi x) + A_2 \sin(2\pi x) + A_3 \sin(3\pi x) + \ldots .$$

Умножим обе части этого соотношения на $\sin(m\pi x)$ (m — произвольное целое число) и *проинтегрируем* от нуля до единицы. В результате получаем

$$\int_0^1 \varphi(x) \sin(m\pi x)\, dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x)\, dx = \frac{A_m}{2}$$

(все остальные слагаемые обратились в нуль, благодаря ортогональности). Решая уравнение относительно A_m, получаем

$$A_m = 2\int_0^1 \varphi(x) \sin(m\pi x)\, dx.$$

Таким образом, мы получили, что решение записывается в виде

(5.4) $$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi n x),}$$

где коэффициенты A_n определяются по формулам

$$\boxed{A_n = 2\int_0^1 \varphi(x) \sin(\pi n x)\, dx.}$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство: единственная разница между *разложением* функции $\varphi(x)$ *в ряд Фурье по синусам* в (5.3) и решением (5.4) состоит в наличии временно́го множителя $e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$ в каждом члене ряда. Следовательно, если начальное условие имеет простое разложение, например, вида

$$\varphi(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x),$$

то решение можно записать сразу

$$u(x, t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi x) + \frac{1}{2} e^{-(3\pi\alpha)^2 t} \sin(3\pi x).$$

В этом случае очевидно, что если мы разложим $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам, то получим

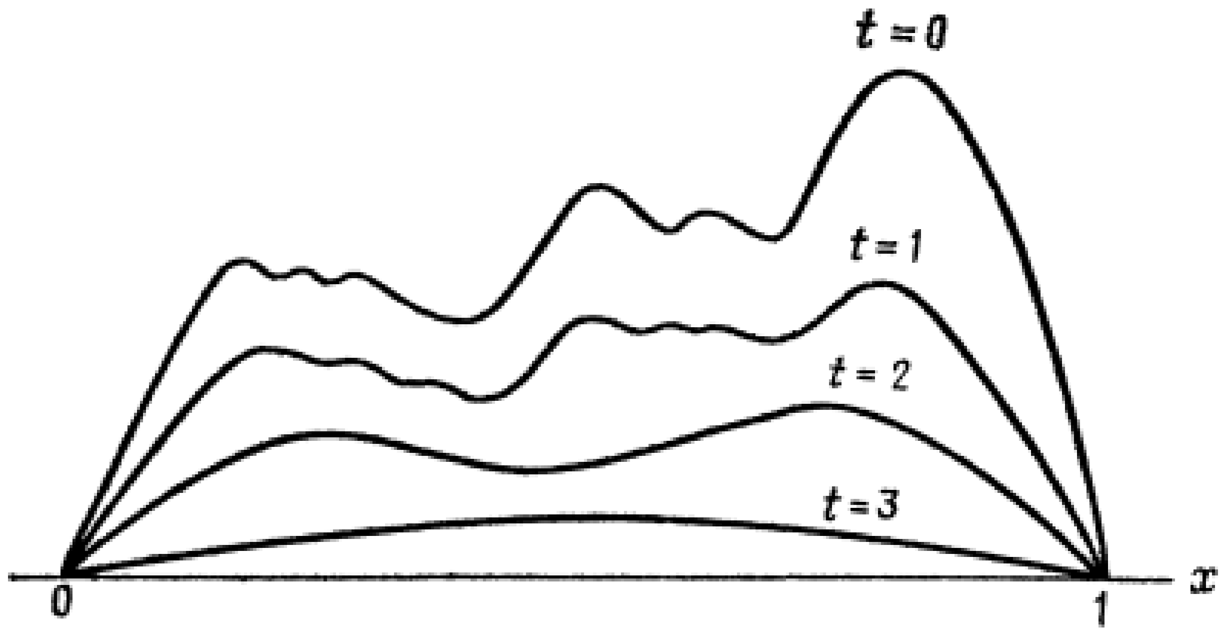
$$A_1 = 1,$$
$$A_2 = 0,$$
$$A_3 = 1/2,$$
$$A_4 = A_5 = \ldots = 0.$$

Можно интерпретировать решение (5.4) следующим образом: мы представляем начальную температуру $\varphi(x)$ в виде суммы простейших функций вида $A_n \sin(\pi n x)$; каждая такая функция порождает отклик $A_n e^{-(\pi n\alpha)^2 t} \sin(\pi n x)$. Складывая все такие отклики, мы получаем решение, соответствующее начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Каждое слагаемое в разложении

$$u(x,\ t) = A_1 e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi x) + A_2 e^{-(2\pi\alpha)^2 t} \sin(2\pi x) + \dots$$

является функцией от x и t. Отметим, что вклад слагаемых с большими номерами при $t > 0$ очень мал благодаря множителю $e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$. Следовательно, по истечении достаточно большого промежутка времени полное решение приближенно совпадает с первым слагаемым, которое представляет собой затухающую со временем полуволну синусоиды (рис. 5.5.)



В диффузионных задачах члены высокого порядка быстро затухают; $\varphi(x)$ — начальная температура. Отметим, что в первую очередь в решении пропадают высокие частоты — сначала исчезли самые мелкие осцилляции.

Неоднородная задача

Рассмотрим задачу о распространении тепла в теплоизолированном стержне, концы которого поддерживаются при постоянных температурах k_1 и k_2, т. е.

$$
(6.3)\quad
\begin{array}{lll}
\text{(УЧП)} & u_t=\alpha^2 u_{xx}, & 0<x<L,\quad 0<t<\infty,\\
\text{(ГУ)} & \begin{cases} u(0,t)=k_1,\\ u(L,t)=k_2,\end{cases} & 0<t<\infty,\\
\text{(НУ)} & u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant L.
\end{array}
$$

$$
u(x,t)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Предельное решение}\\ \text{для больших времен}}}{\text{стационарная}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Часть решения,}\\ \text{которая зависит}\\ \text{от НУ и стре-}\\ \text{мится к нулю с}\\ \text{ростом времени}}}{\text{переходная}}=
$$

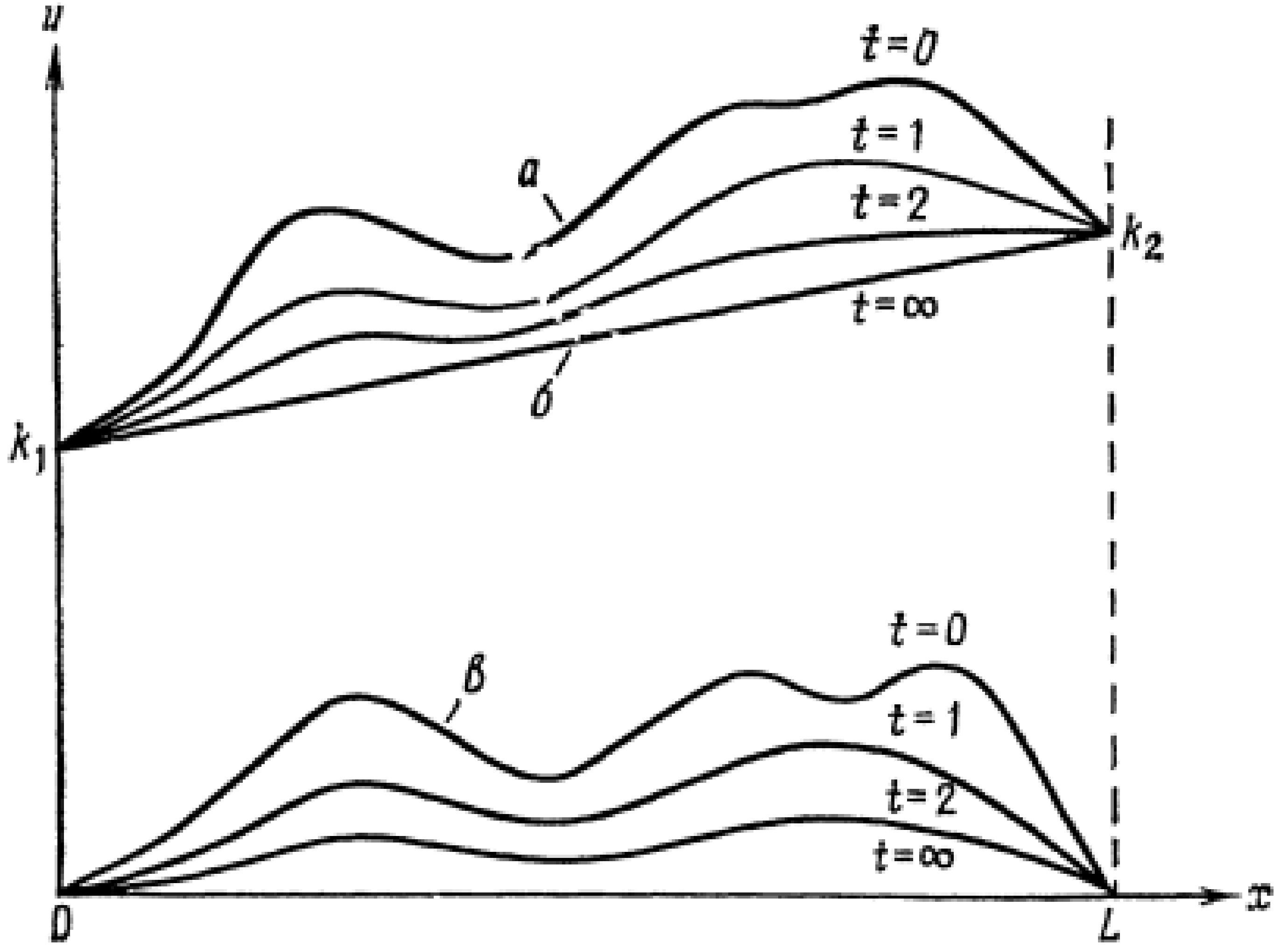
$$
=\left[k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)\right]+U(x,t).
$$

$$
(6.4)\quad
\begin{array}{lll}
\text{(УЧП)} & U_t=\alpha^2 U_{xx} & 0<x<L,\\
\text{(ГУ)} & \begin{cases} U(0,t)=0,\\ U(L,t)=0,\end{cases} & 0<t<\infty,\\
\text{(НУ)} & U(x,0)=\varphi(x)-\left[k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)\right]=\bar\varphi(x), &
\end{array}
$$

где $\bar\varphi(x)$ — новое, но известное начальное условие.

$$
U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x/L),
$$

$$
a_n=\frac{2}{L}\int_0^L \bar\varphi(\xi)\sin(\pi n\xi/L)\,d\xi.
$$



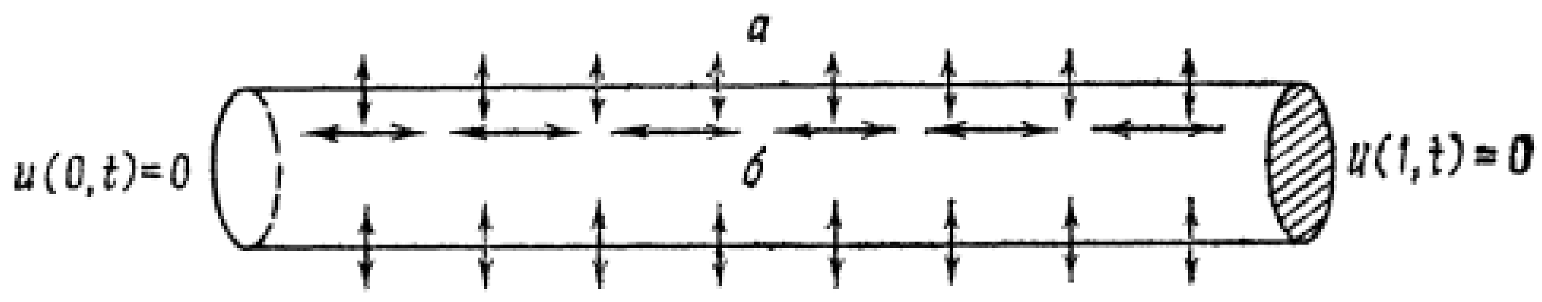
Решения задачи (6.3) в различные моменты времени: *а* — начальная температура $u(x,0)=\varphi(x)$; *б* — стационарная температура $u(x,\infty)=k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)$; *в* — переходная температура.

Обобщение простейшей задачи теплопереноса, пример

Рассмотрим следующую задачу:

$$(8.1)\qquad \begin{aligned} &(\text{УЧП}) && u_t=\alpha^2u_{xx}-\beta u, \quad 0<x<1, \quad 0<t<\infty,\\ &(\text{ГУ}) && \begin{cases} u(0,\ t)=0,\\ u(1,\ t)=0,\end{cases} \quad 0<t<\infty,\\ &(\text{НУ}) && u(x,\ 0)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\end{aligned}$$

в которой слагаемое $-\beta u$ описывает поток тепла через боковую поверхность стержня



Задача теплопроводности, описываемая уравнением $u_t=\alpha^2u_{xx}-\beta u$: *а* — потери тепла через боковую поверхность; *б* — диффузия вдоль стержня.

Наша цель — вместо $u(x,\ t)$ ввести новую температуру $w(x,\ t)$ так, чтобы уравнение для $w(x,\ t)$ стало проще исходного уравнения

$$u_t=\alpha^2u_{xx}-\beta u.$$

Это достаточно общий метод решения уравнений с частными производными, но выбор подходящего преобразования основывается на интуитивных представлениях о поведении решений исходного уравнения. Например, в задаче (8.1) температура $u(x,\ t)$ в каждой точке x_0 изменяется в результате действия двух факторов:

1) *диффузии* тепла вдоль стержня (за счет слагаемого α^2u_{xx}),
2) *переноса* тепла через боковую поверхность стержня (за счет слагаемого $-\beta u$).

Важнейшим элементом нашего рассуждения является следующий: если бы *диффузия вдоль* стержня *отсутствовала* ($\alpha=0$), то температура в каждой точке стержня экспоненциально спадала к нулю по закону

$$u(x_0 t)=u(x_0,\ 0)\,e^{-\beta t}.$$

Опираясь на это наблюдение, зададимся вопросом: нельзя ли представить решение задачи (8.1) в виде произведения двух множителей

$$u(x, t) = e^{-\beta t} w(x, t) \tag{8.2}$$

или:

$$\begin{pmatrix}\text{Температура стержня с} \\ \text{неизолированной боко-} \\ \text{вой поверхностью}\end{pmatrix} = e^{-\beta t} \cdot \begin{pmatrix}\text{Температура стержня с} \\ \text{изолированной боковой} \\ \text{поверхностью}\end{pmatrix},$$

где $w(x, t)$ описывает распределение температуры, обусловленное только диффузией. Давайте посмотрим, что получится, если подставить это выражение для температуры в задачу (8.1). После выполнения соответствующих выкладок (читатель может проделать их самостоятельно) мы получим

$$\begin{array}{lll} \text{(УЧП)} & w_t = \alpha^2 w_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, & \\ \text{(ГУ)} & \begin{cases} w(0, t) = 0, \\ w(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty, & \\ \text{(НУ)} & w(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. & \end{array} \tag{8.3}$$

Новая задача почти точно совпадает с первоначальной, но в ней уже нет слагаемого $-\beta u$. Таким образом, вместо того чтобы решать задачу (8.1), мы решим преобразованную задачу (8.3), а затем умножим полученное решение $w(x, t)$ на $e^{-\beta t}$. В нашем случае решение задачи (8.3) уже было получено ранее методом разделения переменных, так что можно сразу написать

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x), \\ a_n &= 2\int_0^1 \varphi(\xi) \sin(n\pi\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{8.4}$$

и, следовательно, решение исходной задачи (8.1) имеет вид

$$u(x, t) = e^{-\beta t} w(x, t).$$

Разложение по собственным функциям

$$
\begin{array}{lll}
(\text{УЧП}) & u_t=\alpha^2 u_{xx}+f(x,t), & 0<x<1, \quad 0<t<\infty, \\
(9.1)\ (\text{ГУ}) & \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 u_x(0,t)+\beta_1 u(0,t)=0, \\ \alpha_2 u_x(1,t)+\beta_2 u(1,t)=0,\end{array}\right. & 0<t<\infty, \\
(\text{НУ}) & u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant 1.
\end{array}
$$

Идея метода исключительно проста. Известно, что решение задачи (9.1) при $f(x, t)=0$ (так называемой соответствующей однородной задачи) записывается в виде ряда

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n\alpha)^2 t} X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма—Лиувилля,

$$
(9.2)\qquad
\begin{array}{l}
X''+\lambda^2 X=0, \\
\alpha_1 X'(0)+\beta_1 X(0)=0, \\
\alpha_2 X'(1)+\beta_2 X(1)=0.
\end{array}
$$

Зададимся вопросом: нельзя ли решение неоднородной задачи (9.1) также искать в виде ряда по собственным функциям, но более общего вида

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Для такого предположения есть определенные физические основания. В самом деле, слагаемые $f(x, t)$ описывают источник тепла, расположенный *внутри* стержня. Значит, зависимость решения от времени будет выражаться не экспонентами

$$e^{-(\lambda_n\alpha)^2 t},$$

как это было в случае однородной задачи, а какими-то другими функциями.

Рассмотрим неоднородную задачу

$$
\begin{array}{lll}
(\text{УЧП}) & u_t=\alpha^2 u_{xx}+f(x,t), & 0<x<1, \quad 0<t<\infty, \\
(9.3)\ (\text{ГУ}) & \left\{\begin{array}{l}u(0,t)=0, \\ u(1,t)=0,\end{array}\right. & 0<t<\infty, \\
(\text{НУ}) & u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant 1.
\end{array}
$$

Процесс решения задачи представим в виде последовательности следующих шагов.

ШАГ 1. Основная идея метода состоит в разложении плотности источника $f(x, t)$ в ряд по собственным функциям

$$f(x, t)=f_1(t) X_1(x)+f_2(t) X_2(x)+\ldots+f_n(t) X_n(x)+\ldots$$

и определении откликов системы $u_n(x, t)$ на воздействие *каждой* компоненты $f_n(t) X_n(x)$. Если все отклики будут найдены, то решение задачи будет иметь вид

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t).$$

Основная трудность в этом методе—разложение плотности источника на компоненты $f_n(t) X_n(x)$. Оказывается, что множители $X_n(x)$ в данной задаче являются *собственными векторами* системы Штурма—Лиувилля, которая возникает при решении методом разделения переменных *соответствующей однородной задачи*, а именно

$$
(9.4)\qquad
\begin{array}{l}
u_t=\alpha^2 u_{xx} \quad (\text{отметим, что } f(x, t)=0), \\
u(0, t)=0, \\
u(1, t)=0, \\
u(x, 0)=\varphi(x).
\end{array}
$$

Задача Штурма — Лиувилля в этом случае имеет вид

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$
$$X(0) = 0,$$
$$X(1) = 0,$$

а ее решениями являются функции

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3 \ldots .$$

Следовательно, разложение плотности источника представимо в виде ряда

(9.5) $$f(x, t) = f_1(t)\sin(\pi x) + f_2(t)\sin(2\pi x) + \ldots + f_n(t)\sin(n\pi x) + \ldots .$$

И наконец, для того чтобы найти функции $f_n(t)$, умножим обе части последнего соотношения на $\sin(m\pi x)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по координате x.

В результате получаем

$$\int_0^1 f(x, t)\sin(m\pi x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{1}{2} f_m(t)$$

или (после замены m на n)

(9.6) $$f_n(t) = 2\int_0^1 f(x, t)\sin(n\pi x)\,dx.$$

Последнее соотношение устанавливает связь между коэффициентами $f_n(t)$ и плотностью теплового источника $f(x, t)$.

ШАГ 2. (Нахождение отклика $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ на входное воздействие $f_n(t)X_n(x)$.)

Заменим плотность источника его разложением в ряд

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(n\pi x)$$

и попытаемся найти индивидуальные отклики, т. е. функции $T_n(t)$ в

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x).$$

Поскольку решение задачи имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x),$$

то подставим это выражение в исходную задачу

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(n\pi x),$$
$$u(0, t) = 0,$$
$$u(1, t) = 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

в результате чего получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin(n\pi x) = -\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2 T_n(t)\sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(\pi n x),$$

(9.7) $$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin 0 = 0$$ (удовлетворяется тождественно),

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi) = 0$$ (удовлетворяется тождественно),

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin(n\pi x) = \varphi(x).$$

Переписывая уравнение и начальное условие

$$\text{(УЧП)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n - f_n(t)] \sin(n\pi x) = 0,$$

$$\text{(НУ)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(n\pi x) = \varphi(x),$$

мы можем заметить, что функции $T_n(t)$ являются решениями задачи Коши

$$\text{(9.8)} \qquad \begin{aligned} &T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = f_n(t), \\ &T_n(0) = 2\int_0^1 \varphi(\xi) \sin(n\pi\xi)\, d\xi = a_n. \end{aligned}$$

Все эти ОДУ легко решаются и их решения записываются в виде

$$\text{(9.9)} \qquad T_n(t) = a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} + \int_0^t e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau,$$

откуда нетрудно получить полное решение задачи (9.3):

$$\text{(9.10)} \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x) =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)]}_{\uparrow} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau \right]}_{\uparrow}$$

Переходная часть (обусловлена начальным условием) — Стационарная часть (обусловлена правой частью $f(x, t)$).

Из решения (9.10) видно, что *температурный отклик* состоит из *двух частей*: первая часть возникает благодаря начальным условиям, а вторая часть — благодаря плотности источника $f(x, t)$. Отметим, что термин «стационарная часть» не лучшим образом подходит для описания второй части температурного отклика, поскольку здесь не подразумевается, что эта часть не зависит от времени (стационарный режим может оказаться периодическим, если $f(x, t)$ — периодическая функция времени t).

Пример

$$\text{(УЧП)}\quad u_t = \alpha^2 u_{xx} + \sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

$$(9.11)\qquad \text{(ГУ)}\quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$\text{(НУ)}\quad u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Наша цель — вычислить коэффициенты $T_n(t)$ в разложении

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x)$$

(собственные функции этой задачи $X_n(x)$ совпадают с собственными функциями предыдущей). Если подставить это разложение в исходную задачу, мы получим следующую задачу Коши для определения функций $T_n(t)$:

$$T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = f_n(t) = 2\int_0^1 \sin(3\pi x) \sin(n\pi x)\, dx = \begin{cases} 1 & n = 3, \\ 0 & n \neq 3, \end{cases}$$

$$T_n(0) = 2\int_0^1 \sin(\pi\xi) \sin(n\pi\xi)\, d\xi = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & n \neq 1. \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения последовательно для $n = 1, 2\ldots$.

$$(n=1)\quad \left.\begin{aligned} &T_1' + (\pi\alpha)^2 T_1 = 0 \\ &T_1(0) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_1(t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t},$$

$$(n=2)\quad \left.\begin{aligned} &T_2' + (2\pi\alpha)^2 T_2 = 0 \\ &T_2(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_2(t) = 0,$$

$$(n=3)\quad \left.\begin{aligned} &T_3' + (3\pi\alpha)^2 T_3 = 1 \\ &T_3(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_3(t) = \frac{1}{(3\pi\alpha)^2}\left[1 - e^{-(3\pi\alpha)^2 t}\right],$$

$$(n \geqslant 4)\quad \left.\begin{aligned} &T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = 0 \\ &T_n(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(0) = 0.$$

Следовательно, решение задачи можно записать в виде

$$u(x, t) = \underbrace{e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi x)}_{\text{Переходный процесс (обусловлен НУ)}} + \underbrace{\frac{1}{(3\pi\alpha)^2}\left[1 - e^{-(3\pi\alpha)^2 t}\right] \sin(3\pi x)}_{\text{Стационарный процесс (обусловлен правой частью УЧП)}}. \qquad (9.12)$$

Решения однородных краевых задач

Постановка задачи	Решение задачи
$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\ell \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u(-\ell,t) = u(\ell,t)$ $u_x(-\ell,t) = u_x(\ell,t)$	$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sin \frac{\pi k}{\ell} x + A_k \cos \frac{\pi k}{\ell} x \right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}$ $A_0 = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x)\, dx$ $A_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx$ $B_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx.$
$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u(0,t) = 0$ $u(\ell,t) = 0$	$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{\pi k}{\ell} x\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}$ $B_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx.$
$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u_x(0,t) = 0$ $u_x(\ell,t) = 0$	$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\pi k}{\ell} x\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}$ $A_0 = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x)\, dx$ $A_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx$
$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u(0,t) = 0$ $u_x(\ell,t) = 0$	$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{\pi (2k-1)}{2\ell} x\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi (2k-1)}{2\ell}\right)^2 t}$ $B_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi (2k-1) x}{2\ell}\right) dx.$
$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u_x(0,t) = 0$ $u(\ell,t) = 0$	$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\pi (2k-1)}{2\ell} x\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi (2k-1)}{2\ell}\right)^2 t}$ $A_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi (2k-1) x}{2\ell}\right) dx.$