

Аналоговая электроника.

Преобразование Лапласа.
Применение спектральных и операторных
методов анализа электрических цепей.

Преобразование Лапласа

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Расширим область аргументов на верхнюю комплексную полуплоскость: $s = \sigma + j\omega$

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega)$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(s)e^{st} ds$$

Свойства изображений

Переменная s называется оператором Лапласа. Если $f(t) \doteq F(s)$, то

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} f_k(t) e^{-st} dt = \sum_{k=1}^n F_k(s)$$

$$Af(t) \doteq A \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = AF(s)$$

Предельные соотношения:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Теоремы подобия и сдвига.

Теорема подобия (масштаба). Если $f(t) \doteq F(s)$, то

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Теорема сдвига (запаздывания). Если $f(t) \doteq F(s)$, то:

Для оригиналов: $f(t - \tau) \doteq e^{-s\tau} F(s)$

Для изображений: $F(s - \lambda) \doteq e^{\lambda t} f(t)$

Изображение производной.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-st} df(t) = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) de^{-st} = \\ &= 0 - f(0) + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)\end{aligned}$$

Операция дифференцирования, при нулевых начальных условиях, в области изображений вырождается в произведение изображения функции на оператор. Изображение второй производной:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \doteq s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Изображение интеграла.

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] d e^{-st} = \frac{F(s)}{s} + \frac{f(0)}{s}$$

Интегрирование, при нулевых начальных условиях, в области изображений вырождается в деление изображения функции на оператор.

Свойства изображений для производной и интеграла показывают что назначение преобразований Лапласа и Фурье - решение дифференциальных и интегральных уравнений.

Изображение для периодической функции.

Представим периодическую функцию как бесконечную сумму интервалов, равных периоду функции и определим результат преобразования с использованием теоремы смещения и свойства суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

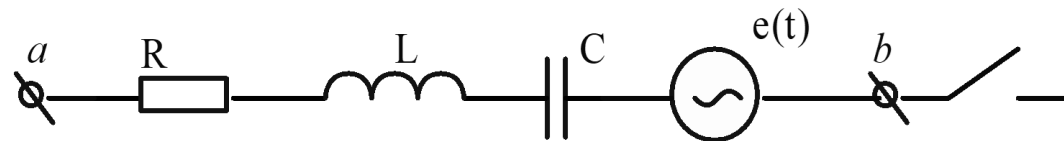
$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(\tau + nT)e^{-s(\tau+nT)}d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}} \end{aligned}$$

$F_1(s)$ - изображение одного периода функции

Операторный метод анализа переходных процессов в электрических цепях.

Пусть имеется участок цепи охваченный переходным процессом. Для такого участка можно записать по второму правилу Кирхгофа:

$$u_{ab}(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt - e(t)$$

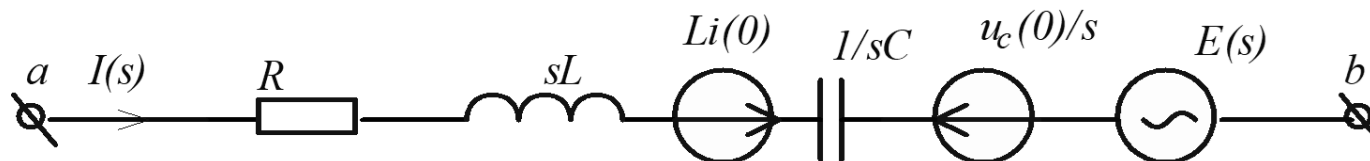


Применим к уравнению преобразование Лапласа, с учетом свойств преобразования производных и интегралов, рассмотренных ранее:

$$U_{ab}(s) = I(s) \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{s} - E(s)$$

Закон Ома в операторной форме

По полученному уравнению построим электрическую схему:



$$U_{ab}(s) = I(s) \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) - Li(0) + \frac{u_c(0)}{s} - E(s)$$

Выражение выше называется **законом Ома для участка цепи в операторной форме**, а схема – **схемой замещения в операторном пространстве**.

Изображение тока для такой цепи:

$$I(s) = \frac{U_{ab}(s) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{s} + E(s)}{Z(s)}$$

Здесь $Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$ - операторное сопротивление участка цепи.

Обратный переход от изображений к оригиналам

Оригинал	A	$e^{-\alpha t}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{b-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-bt})$	
Изображение	$\frac{A}{s}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+b)}$	

Формула разложения

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} \qquad F(s) = \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{s - s_k} \qquad A_k = \frac{F_1(s_k)}{F'_2(s_k)}$$

s_k - корни полинома $F_2(s)$

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{s - s_k} \doteq \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(s_k)}{F'_2(s_k)} \cdot e^{s_k t}$$

Порядок действий при решении задач операторным методом:

1. Определение независимых начальных условий путем расчета режима работы цепи до момента коммутации.
2. Составление *операторной **схемы замещения после момента коммутации***.
Запись уравнений по правилам Кирхгофа или другим методам расчета линейных цепей в операторной форме.
3. Решение полученных уравнений относительно изображений искомых величин.
4. Определение оригиналов (с помощью формулы разложения или таблиц соответствия оригиналов и изображений) по найденным изображениям.

Пример расчета переходного процесса операторным методом.

Определить ток индуктивности. Ключ замыкается.

В начальный момент ток в цепи был равен нулю.

Составим операторную схему замещения для цепи после момента коммутации.

Запишем выражение по второму правилу Кирхгофа:

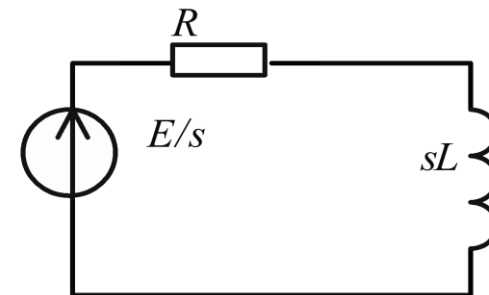
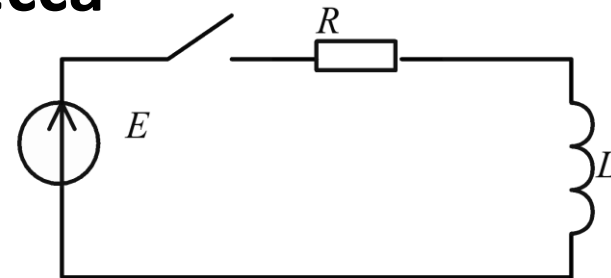
$$I(s)(R + sL) = \frac{E}{s}$$

Выразим ток

$$I(s) = \frac{E/L}{s(R/L + s)}$$

Выполним обратное преобразование используя таблицу изображений:

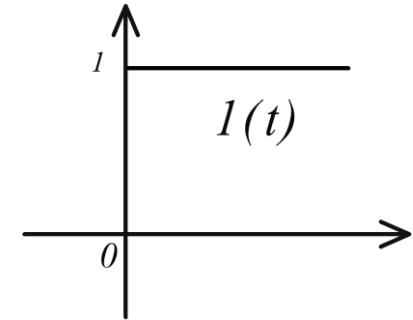
$$I(s) \doteq i_L(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$



Импульсные функции. Функция Хэвисайта.

Функция Хэвисайта (единичная ступенчатая функция):

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$



Изображение по Лапласу:

$$1(t) \doteq \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

При смещении относительно нулевого момента, изображение определяется по теореме смещения оригинала:

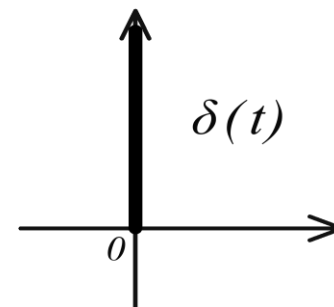
$$1(t - \tau) \doteq \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

Применение функции Хэвисайта: описание коммутации в цепи без применения ключа, представление сигналов как суммы элементарных воздействий (ступенек) и т.д.

Импульсные функции. Функция Дирака.

Функция Дирака

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0; \end{cases}$$



Изображение по Лапласу:

$$\delta(t) \doteq \int_0^{\infty} \frac{d1(t)}{dt} e^{-st} dt = 1$$

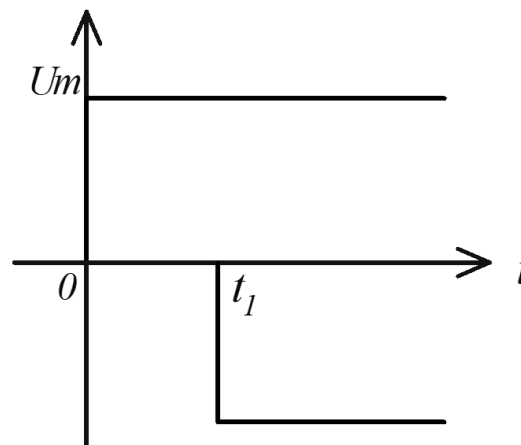
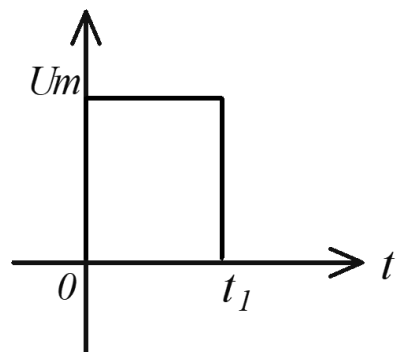
При смещении относительно нулевого момента, изображение определяется по теореме смещения оригинала:

$$\delta(t - \tau) \doteq e^{-s\tau}$$

Пример. Применение функции Хевисайта.

Изображение прямоугольного импульса при помощи функции Хевисайта

$$f(t) = U_m[1(t) - 1(t - t_1)] \doteq U_m \frac{1 - e^{-st_1}}{s}$$

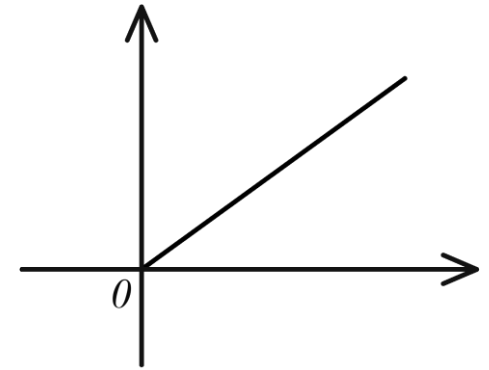


Отсюда видно, что последовательность прямоугольных импульсов (цифровой сигнал) всегда можно представить как сумму ступенчатых функций.

Стандартные воздействия

Функция линейного наклона:

$$\int_{-\infty}^t 1(t) dt = t \cdot 1(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$



Продолжая интегрировать полученную функцию далее получим виды стандартных воздействий:

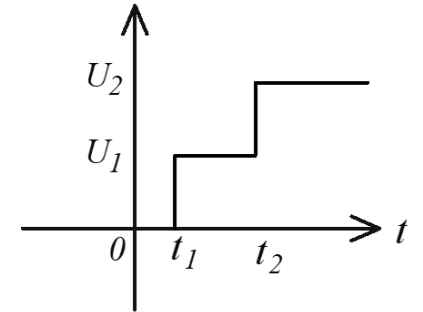
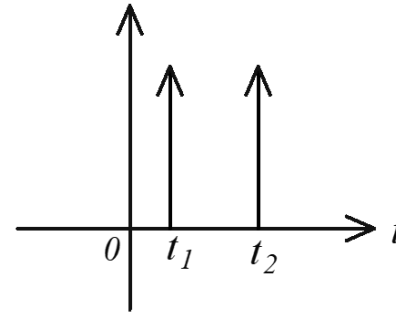
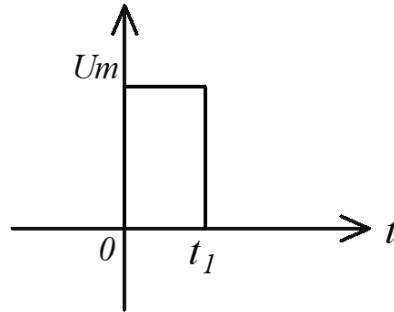
$$\frac{t^2}{2} \cdot 1(t), \quad \frac{t^3}{6} \cdot 1(t), \quad \dots$$

Аппроксимируя анализируемые сигналы с помощью стандартных воздействий, можно упростить работу по получению изображений реальных сигналов.

Применение функции Дирака.

1. Описание короткого импульса

$$f(t) \approx t_1 \cdot U_m \delta\left(\frac{t_1}{2}\right)$$



2. Производная функции с разрывами первого рода

$$f'(t) = U_1 \delta(t - t_1) + (U_2 - U_1) \delta(t - t_2)$$
$$\int_{-\infty}^t f'(t) dt = U_1 1(t - t_1) + (U_2 - U_1) 1(t - t_2)$$

Т.е. при анализе ступенчатых сигналов появляется возможность упрощения работы по получению изображений.

Кусочно-линейное воздействие.

Треугольный импульс

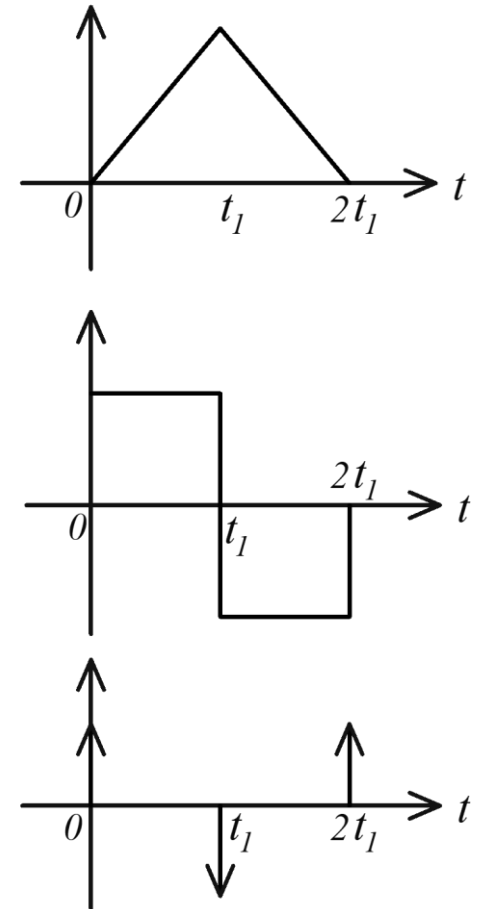
$$f(t) = U_m \frac{t}{t_1} \left[1(t) \frac{t}{t_1} - 2 \cdot 1(t - t_1) \frac{t - t_1}{t_1} + 1(t - 2t_1) \frac{t - 2t_1}{t_1} \right]$$

Получить изображение напрямую сложно, но если взять две производные и воспользоваться свойством интегрирования оригинала (интегрирование в операторном методе это просто деление на оператор):

$$F(s) = \frac{1}{s^2} L\{f''(t)\} = \frac{1}{s^2 t_1} U_m (1 - 2e^{-st_1} + e^{-2st_1})$$

В общем случае кусочно-линейного импульса:

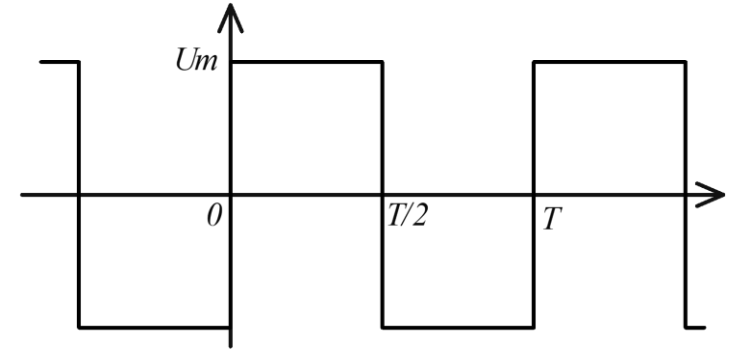
$$F(s) = \frac{1}{s^2} L \left\{ \sum A_k \delta(t - t_k) \right\}$$



Изображение для периодической функции. Пример.

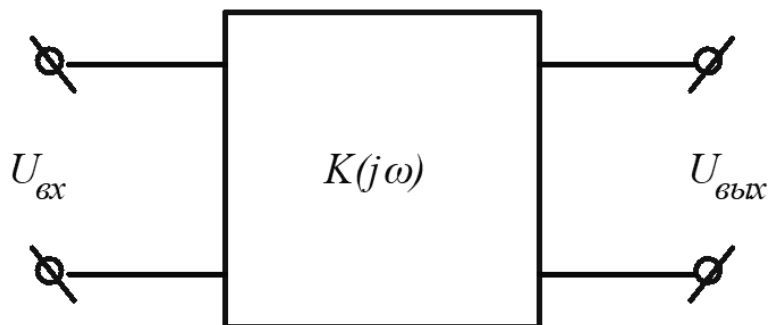
Изображение одного периода

$$f(\tau) = U_m \left[1(\tau) - 2 \cdot 1\left(\tau - \frac{T}{2}\right) + 1(\tau - T) \right]$$



$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = \frac{U_m}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} \left[1(\tau) - 2 \cdot 1\left(\tau - \frac{T}{2}\right) + 1(\tau - T) \right] d\tau = \\ &= \frac{U_m}{1 - e^{-sT}} \cdot \frac{1 - 2 \cdot e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}}{s} \end{aligned}$$

Динамическое звено.



Динамическое звено – четырехполюсник (в общем случае не симметричный и не взаимный) для которого мы определили направление прохода сигнала. В общем случае работа звена будет описана уравнением следующего вида:

$$a_n \frac{d^n U_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 U_{\text{ВЫХ}} = b_m \frac{d^m U_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 U_{\text{ВХ}}$$

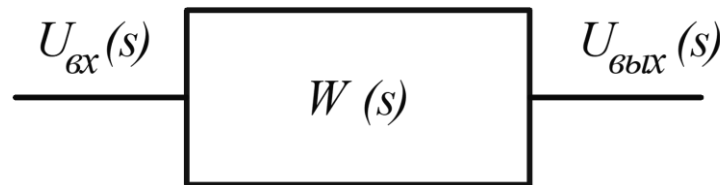
Понятие передаточной функции

Преобразуем с помощью интеграла Лапласа уравнение с предыдущего слайда:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) U_{\text{ВЫХ}}(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U_{\text{ВХ}}(s)$$

Передаточная функция динамического звена определяется как отношение изображения (по Лапласу) выходного напряжения к изображению входного:

$$\frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = W(s)$$



Свойства передаточной функции

- В физически реализуемых системах всегда $m \leq n$.
- Корни полинома в числителе называются нулями передаточной функции, корни полинома в знаменателе соответственно полюсами передаточной функции.
- При формальной замене $s = j\omega$ получается комплексная передаточная функция описывающая одновременно амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики системы (АФЧХ или ЧПФ – частотная передаточная функция цепи).

$$W(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \sqrt{Re(W)^2 + Im(W)^2} \cdot e^{j \arctg \frac{Im(W)}{Re(W)}}$$

$A(\omega)$ - АЧХ, $\varphi(\omega)$ - ФЧХ

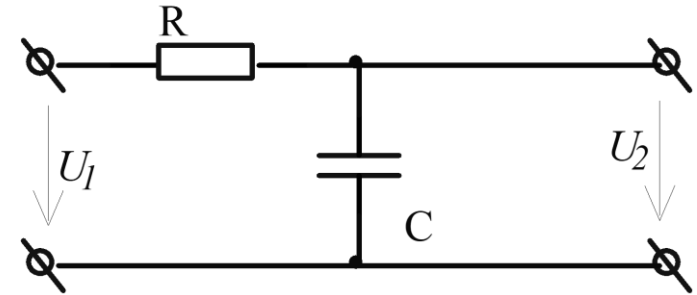
- При известном изображении входного сигнала и передаточной функции звена, определяется выходной сигнал (реакция на входное воздействие)

$$U_2(t) = L^{-1}\{W(s)U_1(s)\}$$

Построение передаточной функции.

$$U_{\text{BX}}(t) = i_c R + U_{\text{ВЫХ}}(t)$$

$$i_c = C \frac{dU_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt}$$



$$U_{\text{BX}}(s) = RI(s) + U_{\text{ВЫХ}}(s) = (RCs + 1)U_{\text{ВЫХ}}(s)$$

$$I(s) = sCU_{\text{ВЫХ}}(s)$$

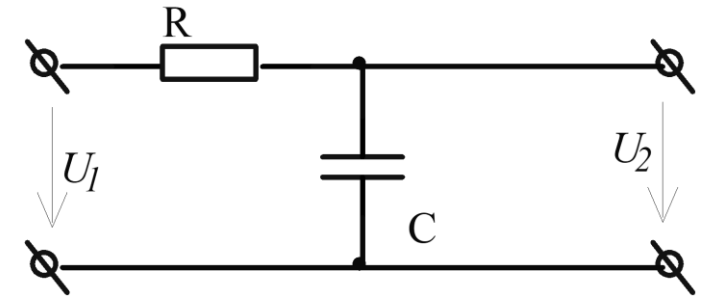
$$W(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{BX}}(s)} = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Из приведённого видно что правила Кирхгофа можно записать в операторной форме (при нулевых начальных условиях) используя операторные величины сопротивлений, токов и ЭДС. Решение этой задачи можно получить используя задачу о делителе напряжения и операторные сопротивления.

Частотная функция.

Построение частотно-передаточной функции

$$W(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{1}{sRC + 1}$$



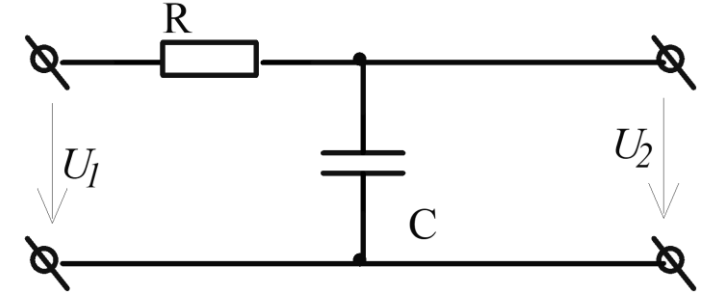
Для получения ЧПФ выполним замену $s = j\omega$ и преобразуем:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot e^{-j \arctg(\omega RC)}$$

Реакция цепи на импульсное воздействие. Операторный метод.

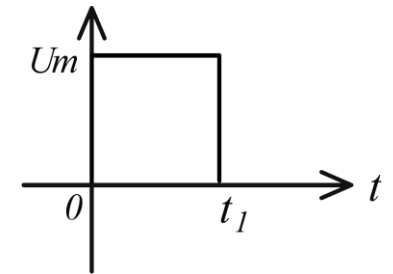
Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$



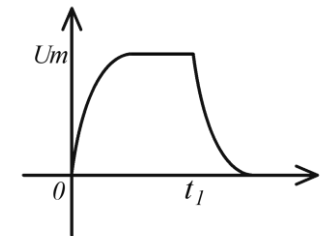
Воздействие – прямоугольный импульс (изображение):

$$U_1(s) = U_m \frac{1 - e^{-st_1}}{s}$$



Реакция обратное преобразование от произведения:

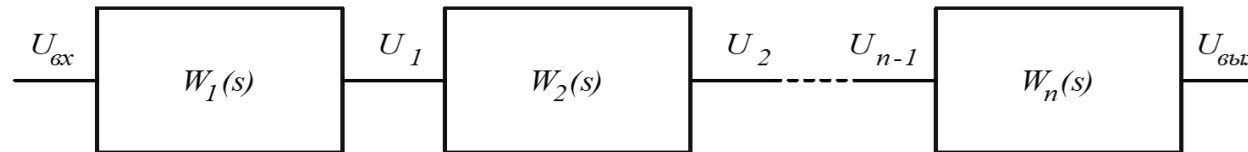
$$U_2(t) = L^{-1}\{W(s)U_1(s)\} = L^{-1}\left\{U_m \frac{1}{RC} \frac{1 - e^{-st_1}}{s(s + \frac{1}{RC})}\right\}$$



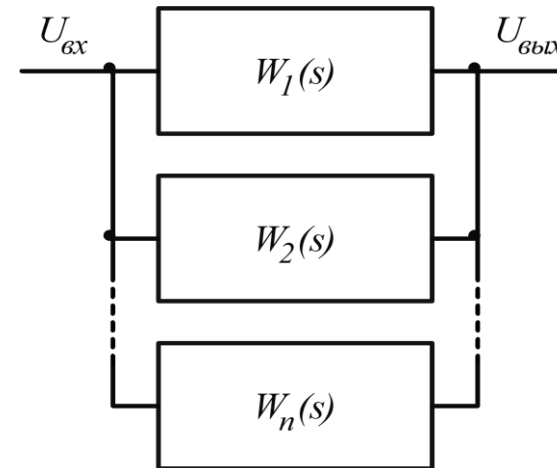
$$= U_m \left[1(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) - 1(t - t_1) \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \right) \right]$$

Последовательное и параллельное соединение звеньев.

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s)$$

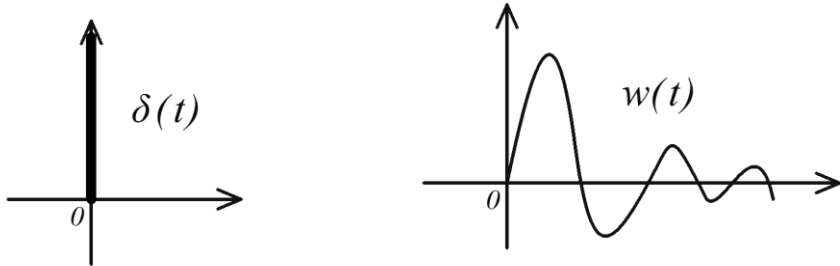


$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)$$



Временная характеристика

Временная или импульсная характеристика - реакция динамического звена на сигнал в виде $\delta(t)$.

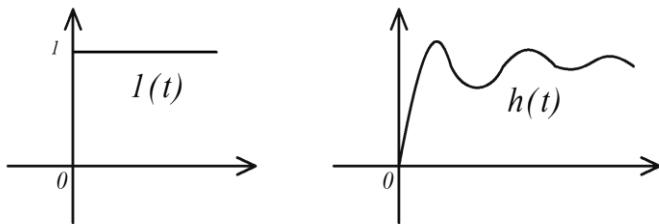


$$L\{w(t)\} = W(s)L\{\delta(t)\} = W(s)$$

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$$

Физический смысл передаточной функции - изображение по Лапласу временной характеристики звена.

Переходная характеристика динамического звена - реакция динамического звена на $1(t)$.



$$L\{h(t)\} = W(s)L\{1(t)\} = W(s)\frac{1}{s}$$

$$h(t) = \int_0^t w(t)dt, \quad w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Временная и переходная характеристики

Следует обратить внимание на то, что на вид временной и переходной характеристик звена накладывает ограничение принцип причинности – ***реакция не может появиться раньше воздействия***, следовательно значения характеристик при $t < 0$ должны быть равны нулю. Это правило справедливо и для реакции цепи на импульсные воздействия.

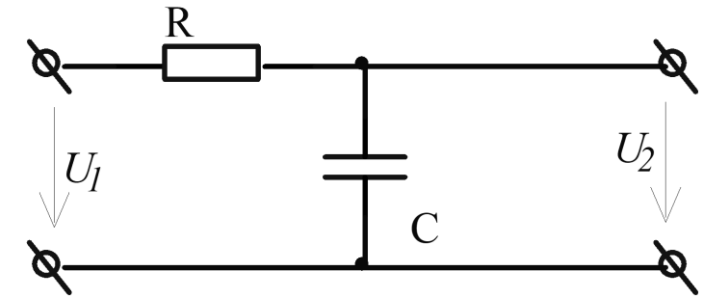
$$h(t) = h^*(t) \cdot 1(t)$$

$h^*(t)$ - аналитическое продолжение переходной характеристики.

$$w(t) = \frac{d(h^*(t) \cdot 1(t))}{dt} = \frac{dh^*(t)}{dt} \cdot 1(t) + h^*(t) \cdot \delta(t) = w^*(t) \cdot 1(t) + h^*(0_+) \delta(t)$$

Построение временной и переходной характеристик

$$W(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$



$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} \right\} = 1(t)(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \right\} = 1(t) \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Спектр и частотная характеристика

Частотно-передаточная функция получается из передаточной функции.

$$H(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \int_0^{+\infty} w(t)e^{-j\omega t} dt$$

При $t < 0$, импульсная характеристика $w(t) = 0$, тогда нижний предел интеграла можно расширить до $-\infty$.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)e^{-j\omega t} dt = S(j\omega)$$

Частотная характеристика звена это спектр импульсной характеристики.

Спектр и изображение по Лапласу

Из написанного выше видно, что спектр сигнала можно получить из изображения сигнала по Лапласу, заменой $s = j\omega$:

$$S(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$$

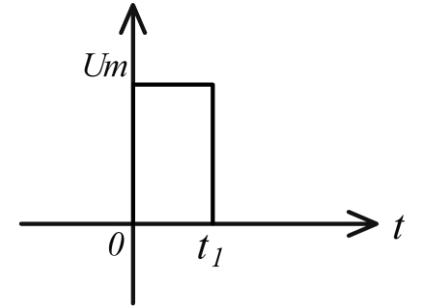
Непрерывный спектр одиночного импульса является огибающей периодической последовательности этих импульсов. Коэффициенты для дискретного разложения (в случае периодической последовательности импульсов) можно определить как:

$$\dot{C}_k = \frac{\omega_0}{2\pi} F(s)|_{s=jk\omega_0}$$

Прямоугольный импульс.

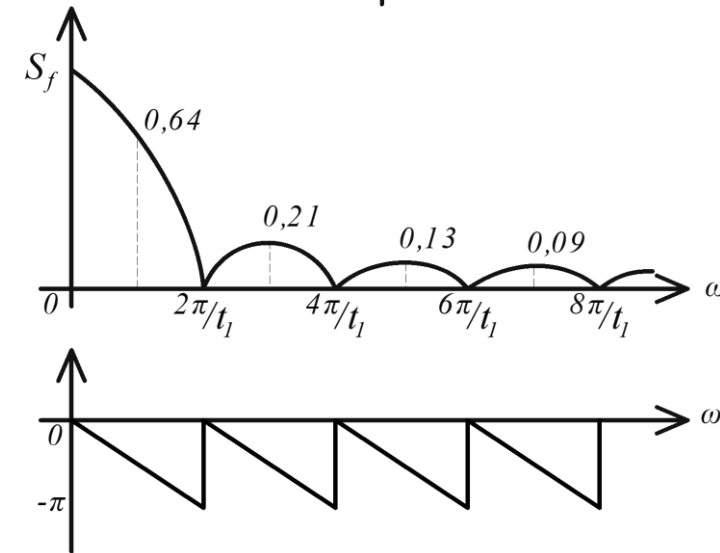
Спектр прямоугольного импульса получим из изображения:

$$U_m \frac{1 - e^{-st_1}}{s} \Big|_{s=j\omega} = U_m \frac{1 - e^{-j\omega t_1}}{j\omega} = \frac{U_m}{j\omega} e^{-j\frac{\omega t_1}{2}} \left(e^{j\frac{\omega t_1}{2}} + e^{-j\frac{\omega t_1}{2}} \right) \\ = \frac{2U_m}{j\omega} e^{-j\frac{\omega t_1}{2}} \sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)$$



Амплитудный и фазовый спектры:

$$A(\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \left| \sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right) \right|, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\omega t_1}{2} + \text{Arg}\left(\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)\right)$$



Начальное значение определим из соотношения о синусе малого угла:

$$A(0) = U_m t_1 = S_f$$

Реакция цепи на импульсное воздействие. Спектральный метод.

Частотно-передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Воздействие – прямоугольный импульс:

$$U_1(j\omega) = U_m \frac{1 - e^{-j\omega t_1}}{j\omega}$$

Реакция получается через обратное преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1}[U_1(j\omega)W(j\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[U_m \frac{1 - e^{-j\omega t_1}}{j\omega(j\omega RC + 1)}\right] = U_m \left[1(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - 1(t - t_1)\left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right)\right]$$

