

# ОСНОВЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКИ

---

*Лектор – Сергей Валерьевич Смирнов*

## **Программа курса лекций**

(7-й семестр, лекции 36 ч., семинары 36 ч., диф.зач.)

1. Двоичная арифметика, представление чисел с плавающей точкой, точность вычислений.
2. Решение уравнений  $f(x) = 0$ . Методы деления пополам, простых итераций, Ньютона. Скорость сходимости. Многомерный метод Ньютона. Вычисление нулей комплексных функций.
3. Вычисление интегралов. Методы прямоугольников, трапеций. Формула Симпсона. Оценка ошибки для этих методов. Несобственные интегралы.
4. Интерполяция и аппроксимация. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и Ньютона. Точность интерполяции. Первые и вторые производные функции, заданной на сетке. Интерполяция кубическими сплайнами.
5. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Критерий устойчивости. Метод Рунге-Кутты второго порядка точности. Многошаговые методы. Жесткие уравнения. Пакет программ Numerical Recipes.
6. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Трехдиагональные матрицы. Прогонка. Представление о численных методах решения задачи на собственные значения. Степенной метод. Обратные итерации. Метод вращений Якоби. Пакет программ LAPACK.
7. Решение задачи Коши для одномерного уравнения диффузии на отрезке. Аппроксимация граничных условий Дирихле и Неймана. Схемы явные, неявные и Кранка-Николсона. Точность аппроксимации. Критерий устойчивости.
8. Задача Коши для многомерного уравнения диффузии. Схемы явные и неявные. Схема расщепления. Локально одномерный метод.
9. Дискретное преобразование Фурье. Элайзинг, эффект частотола, Окно Ханна. Алгоритм быстрого преобразования Фурье. Пакет программ FFTW.
10. Задача Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера. Схема расщепления по физическим факторам. Разностные методы в представлении взаимодействия.
11. Метод установления для уравнения Пуассона. Решение нелинейных операторных уравнений  $\hat{L}\varphi = 0$ . Методы стрельбы, Ньютона-Рафсона-Канторовича. Метод инвариантного погружения.

12. Численное решение уравнения переноса. Критерий устойчивости Куранта. Уравнение Хопфа. Построение устойчивой схемы, сохраняющей квадратичный интеграл движения.
13. Генерация последовательности случайных чисел.
14. Метод Бубнова-Галёркина. Метод конечных элементов.
15. Параллельные вычисления. Технологии OMP, MPI, CUDA.

## Литература

- [1] **Смирнов С. В.** Основы вычислительной физики. Часть I. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2015.
- [2] **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М:Наука, 1978.
- [3] **Дьяченко В.Ф.** Основные понятия вычислительной математики. М: Наука, 1972.
- [4] **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. М:Мир, 1980.
- [5] **Каханер Д., Моулер К., Нэш С.** Численные методы и программное обеспечение. М:Мир, 1998.

## Темы семинаров

Семинары проходят в терминальном классе. Их цель — выработка практических навыков по написанию простых программ, реализующих численные методы, их отладке до работоспособного состояния, верификации результатов.

1. Представление чисел с плавающей точкой.
2. Итерационные методы решения уравнений.
3. Интегрирование функций.
4. Полиномиальная интерполяция.
5. Решение ОДУ.
6. Степенной метод вычисления максимального собственного значения.
7. Задача Коши для одномерного уравнения диффузии по явной схеме.
8. Дискретное преобразование Фурье синусоиды. Окно Ханна.
9. Вычисление свертки через преобразование Фурье.
10. Уравнение переноса.

## Памятка по написанию программ

Требования к программам:

1. Необходима проверка результатов работы программы на разумность, предельные случаи, согласие с аналитическими решениями там, где они могут быть получены. Ценность программы, которая компилируется и «что-то» считает, близка к нулю.

2. Все константы, соответствующие физическим величинам и расчётным параметрам, должны быть объявлены в виде отдельных переменных (в т.ч. со спецификатором `const`) либо с помощью директивы препроцессора `#define` :

```
//Под MSVC используйте #define _USE_MATH_DEFINES перед подключением math.h!  
printf("BAD WAY:      Circle length of radius R=%f is %f\n", r, 3.141593*r);  
printf("PLEASE DO SO: Circle length of radius R=%f is %f\n", r, M_PI*r);
```

#### Рекомендации:

1. Ставьте точки при целочисленных константах, используемых при вычислениях величин с плавающей точкой:

```
const double x = 2/3;    //x будет равен нулю!  
const double y = 2./3.; //y будет равен двум третям
```

2. Минимизируйте повторяющийся программный код, выносите его в отдельные функции, тестируйте их работу и затем используйте повторно. Помните: грамотно спроектированную и разбитую на логические блоки программу отлаживать значительно легче.
3. Перед тем как писать программу, подумайте, есть ли в ней логические блоки, которые могут быть полезны вам в будущем при решении других задач (напр., интегрирование сеточных функций, интерполяция, построение графиков)? Если да, то вынесите их в отдельные функции, не использующие глобальных переменных программы. Этим вы сэкономите своё время и силы на написание и отладку следующих программ.
4. Используйте форматирование кода для улучшения его читаемости

```
http://ru.wikipedia.org/wiki/Стандарт\_оформления\_кода  
http://ru.wikipedia.org/wiki/Спагетти-код
```

5. Используйте графики для анализа полученных результатов. Как правило, графическая информация воспринимается человеком гораздо легче и быстрее чисел.
6. Если программа работает неправильно, и ошибку не удаётся найти внимательным чтением исходного кода, добавьте в программу вывод отладочной информации (значений переменных, значений в узлах сетки, нормы сеточных функций и т.п.) с помощью `printf` или `fprintf`, либо используйте отладчик, проверяя «вручную» результаты промежуточных вычислений.

## Задачи для семинаров

### Задача 1

*Машинным  $\varepsilon$*  называется такое число, что  $1 + \varepsilon/2 = 1$ , но  $1 + \varepsilon \neq 1$ . (Также часто используется обозначение ULP – *unit in the last place*, или *unit of least precision*, единица в младшем разряде.) Найти машинное  $\varepsilon$ , число разрядов в мантиссе, максимальную и минимальную степени, при вычислениях с обычной и двойной точностью. Сравнить друг с другом четыре числа:  $1$ ,  $1 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $1 + \varepsilon$  и  $1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$ , объяснить результат.

### Задача 2

Вычислить сумму

$$\sum_{n=1}^{10000} \frac{(-1)^n}{n}$$

четырьмя способами:

- суммируя подряд от больших к малым  $n$ ,
- суммируя подряд от малых к большим  $n$ ,
- суммируя от больших к малым  $n$  отдельно положительные и отрицательные слагаемые,
- суммируя от малых к большим  $n$  отдельно положительные и отрицательные слагаемые.

Объяснить различие ответов. Который точнее?

### Задача 3

Используя методы дихотомии, простых итераций, Ньютона, найти уровень энергии  $E$  основного состояния квантовой частицы в прямоугольной потенциальной яме

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

### Задача 4

Вычислить интегралы

$$I_{4a} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad I_{4b} = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} e^{\sin x} dx$$

методами трапеций и Симпсона, разделив отрезок интегрирования на 4, 8, 16 интервалов. Как убывает погрешность численного интегрирования с ростом числа интервалов?

### Задача 5

Вычислить интегралы

$$I_{5a} = \int_0^1 \frac{1 + \cos x}{x^{1/3}} dx, \quad I_{5b} = \int_0^\infty \frac{1 + \exp(-x)}{1 + x^{3/2}} dx$$

Задача 6

Провести интерполяционный полином  $P_n(x)$  через точки

$$x_k = \frac{\pi k}{4n}, \quad y_k = \sin x_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

при  $n = 4$ . Нарисовать график  $P_4(x) - \sin(x)$

Задача 7

Решить задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad x(0) = 1, \quad 0 < t < 3$$

методами Эйлера и Рунге-Кутты второго порядка точности.

Задача 8

Решить систему уравнений хищник-жертва

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a x - b x y \\ \dot{y} &= c x y - d y \end{aligned}$$

методом Рунге-Кутты второго порядка точности при  $a = 10$ ,  $b = 2$ ,  $c = 2$ ,  $d = 10$ . Нарисовать фазовую траекторию.

Задача 9

Решить жесткую систему уравнений по неявной схеме Эйлера

$$\begin{aligned} u' &= 998 u + 1998 v \\ v' &= -999 u - 1999 v \end{aligned}$$

Задача 10

Методом прогонки решить разностный аналог граничной задачи для уравнения  $y'' = \sin x$  на промежутке  $0 < x < \pi$ .

Задача 11

Найти уровень энергии и волновую функцию  $\psi(x)$  основного состояния в потенциальной яме  $U(x)$ , решая конечномерный аналог спектральной задачи для одномерного стационарного уравнения Шрёдингера

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) - E \right) \psi(x, t) = 0, \quad |\psi(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0.$$

Для поиска наименьшего собственного значения  $\hat{H}\vec{\psi} = E_0\vec{\psi}$  трёхдиагональной матрицы  $\hat{H}$  использовать метод обратных итераций. Проверить работу программы, сравнив с точным решением для  $U(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

## Задача 12

Вычислить спектр мощности и нарисовать его для функции  $f(t) = \sin \omega t$ . Сравнить спектры, полученные с прямоугольным окном и окном Ханна, для разных частот  $\omega$ .

## Варианты курсовых работ

По согласованию с преподавателем в терминальном классе, студент может самостоятельно выбрать тему курсовой работы. Студентам, которые не согласуют тему работы до начала декабря, будет предложена одна из задач из списка ниже либо аналогичная по уровню сложности задача по выбору преподавателя.

### Вариант 1

Решить задачу Коши для одномерного уравнения диффузии по схеме Кранка-Николсона

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad L = 10$$

$$u(0, t) = u_0 + a \sin \omega t, \quad u_0 = 1, \quad a = 0.5, \quad \omega = 2\pi, \quad u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

Построить на одном графике зависимости температуры от времени на границе  $x = 0$  и в точке  $x = 0.5$ . Модифицировать программу, заменив граничное условие в точке  $L$  на условие теплоизоляции  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  и построить аналогичный график.

### Вариант 2

Решить задачу Коши для одномерного уравнения диффузии по схеме Кранка-Николсона

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad 0 < x < L, \quad L = 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad f(x) = x(1 - x/L)^2.$$

На каждом шаге по времени найти максимальное значение температуры и положение максимума, построить график зависимости указанных величин от времени.

Модифицировать программу, заменив граничное условие в точке  $L$  на условие теплоизоляции  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  и построить аналогичные графики.

Что будет, если обе границы теплоизолированы?

### Вариант 3

Решить задачу Коши для одномерного уравнения диффузии по схеме Кранка-Николсона

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad L = 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = x(1 - x/L)^2,$$

На каждом шаге по времени найти максимальное значение температуры и нарисовать зависимость максимальной температуры от времени. Показать что на больших временах она убывает экспоненциально.

Модифицировать программу, заменив граничное условие в точке  $L$  на условие теплоизоляции  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  и нарисовать аналогичный рисунок.

#### Вариант 4

Найти стационарное решение  $\varphi$  методом стрельбы  $\varphi'' = e^\varphi - (1 - x^4)$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $\varphi(-1) = 0, \varphi(1) = 1$ .

#### Вариант 5

Найти стационарное решение  $\varphi$  методом Ньютона-Рафсона-Канторовича

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = e^\varphi - (1 - x^2), \quad -1 < x < 1, \quad \varphi(-1) = \varphi(1) = 0.$$

#### Вариант 6

Найти стационарное решение  $\varphi$  методом инвариантного погружения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = e^\varphi - \sin(x), \quad 0 < x < \pi, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 1$$

#### Вариант 7

Решить задачу Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера по явной схеме. Производную по координате заменить на разностное отношение и полученную систему ОДУ по времени решить методом Рунге-Кутты второго порядка точности

$$i \frac{\partial A}{\partial t} = 2|A|^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad -L < x < L, \quad L = 10$$

$$A(-L, t) = A(L, t) = 0, \quad A(x, 0) = c\lambda / \cosh(\lambda x)$$

При любом  $\lambda$  и  $c = 1$   $|A|$  не должен зависеть от времени. При  $\lambda = 1$  попробуйте поменять  $c$ . Нарисовать поверхность  $|A(x, t)|$ .

#### Вариант 8

Используя пакет FFTW, решить задачу Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера по схеме расщепления

$$i \frac{\partial A}{\partial t} = 2|A|^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad -L < x < L, \quad L = 10$$

$$A(-L, t) = A(L, t), \quad A(x, 0) = c\lambda / \cosh(\lambda x)$$

При любом  $\lambda$  и  $c = 1$   $|A|$  не должен зависеть от времени. При  $\lambda = 2$  попробуйте поменять  $c$ . Нарисовать поверхность  $|A(x, t)|$ .

#### Вариант 9

Решая задачу Коши по неявной схеме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) = x(1 - x)$$

найти максимальное собственное значение оператора  $\hat{L} = g \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при  $g = 0.5$  и  $g = 1$ . Как зависит ответ от выбора  $f(x)$ ?

### Вариант 10

Используя метод установления и локально одномерный метод, найти стационарное распределение температуры в двумерной квадратной области в задаче с источником тепла

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y).$$

при условии, что температура на границах квадрата равна нулю

$$u(-L, y, t) = u(L, y, t) = u(x, -L, t) = u(x, L, t) = 0, \quad L = 1.$$

Интенсивность источника  $f(x, y) = (1 - x^2/L^2)(1 - y^2/L^2)$ . Вычислить и нарисовать зависимость от времени температуры в центре квадрата. Убедиться, что она перестала меняться и нарисовать двумерное распределение температуры.

### Вариант 11

Используя метод установления и локально одномерный метод, найти стационарное распределение температуры в двумерной квадратной области в задаче с ненулевой температурой на границе

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$u(-L, y, t) = u(L, y, t) = (1 - y^2/L^2), \quad u(x, -L, t) = u(x, L, t) = (1 - x^2/L^2), \quad L = 1.$$

Вычислить и нарисовать зависимость от времени температуры в центре квадрата. Убедиться, что она перестала меняться в процессе установления решения и нарисовать двумерное распределение температуры.

### Вариант 12

Используя локально одномерный метод, решить задачу Коши для уравнения теплопроводности в двумерной квадратной области

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

при условии, что температура на границах квадрата равна нулю

$$u(-L, y, t) = u(L, y, t) = u(x, -L, t) = u(x, L, t) = 0, \quad L = 1,$$

а начальное распределение температуры  $u(x, y, 0) = (1 - x^2/L^2)(1 - y^2/L^2)$ . Вычислить и нарисовать зависимость от времени температуры в центре квадрата. Убедиться, что закон спада на больших временах имеет экспоненциальный характер. Определить показатель экспоненты.

### Вариант 13



Решить задачу Коши для одномерного уравнения диффузии по схеме Кранка-Николсона

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(1-bx)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < L, \quad L = 10, \quad b = 0.02$$

$$u(0, t) = u_0 + a \sin \omega t, \quad u_0 = 1, \quad a = 0.5, \quad \omega = 2\pi, \quad u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

Нарисовать на одном рисунке для сравнения зависимости температуры от времени на границе  $x = 0$  и в точке  $x = 0.5$ .

Модифицировать программу, заменив граничное условие в точке  $L$  на условие теплоизоляции  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  и нарисовать аналогичный рисунок.

#### Вариант 14

Решить задачу Коши для одномерного уравнения диффузии по схеме Кранка-Николсона

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad L = 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0,$$

$$f(x) = x(1 - x/L)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(\omega t), \quad \omega = 2\pi$$

Нарисовать зависимость от времени температуры в центре и поверхность  $u(x, t)$  для одного периода колебаний источника, когда завершился переходной период.

Модифицировать программу, заменив граничное условие в точке  $L$  на условие теплоизоляции  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  и нарисовать аналогичный рисунок.

Что будет, если обе границы теплоизолированы?

#### Вариант 15

Найти зависимость температуры от времени в центре двумерной квадратной области в задаче с источником тепла и анизотропной теплопроводностью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t)$$

при условии, что температура на границах квадрата равна нулю

$$u(-L, y, t) = u(L, y, t) = u(x, -L, t) = u(x, L, t) = 0, \quad L = 1.$$

Интенсивность источника

$$f(x, y) = (1 - x^2/L^2)(1 - y^2/L^2) + (y/L + 1)(1 - y^2/L^2) \sin(\omega t), \quad \omega = 2\pi.$$

Вычислить и нарисовать зависимость от времени температуры в центре квадрата.

#### Вариант 16

Найти стационарное решение  $\varphi$  методом инвариантного погружения

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = (1 + 0.1x^2)e^\varphi - (1 - x^2), \quad -1 < x < 1, \quad \varphi(-1) = \varphi(1) = 0$$

### Вариант 17

Решить задачу Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера по схеме расщепления

$$i \frac{\partial A}{\partial t} = 2|A|^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad -L < x < L, \quad L = 10$$

$$A(-L, t) = A(L, t), \quad A(x, 0) = c\lambda / \cosh(\lambda x)$$

При любом  $\lambda$  и  $c = 1$  решение  $|A(x, t)|$  не должно зависеть от времени. Исследовать численное решение при  $\lambda = 2$  для различных  $c$ . Нарисовать поверхность  $|A(x, t)|$ . Использовать быстрое преобразование Фурье из пакета Numerical Recipies.

### Вариант 18

Найти зависимость температуры от времени в центре двумерной квадратной области в задаче с анизотропной теплопроводностью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u(-L, y, t) = u(L, y, t) = \sin 2\pi t, \quad u(x, -L, t) = u(x, L, t) = 0, \quad L = 1.$$

### Вариант 19

Найти зависимость температуры от времени в центре двумерной квадратной области в задаче с анизотропной теплопроводностью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$u(-L, y, t) = u(L, y, t) = \sin 2\pi t$$

Стенки  $u(x, -L, t)$  и  $u(x, L, t)$  теплоизолированы.  $L = 1$ .

### Вариант 20\*

Используя метод установления, найти стационарное распределение температуры в круге радиуса  $R$ , если температура на границе поддерживается равной  $T(\varphi)$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad u(R, \varphi) = T(\varphi) = \sum_{m=-l}^{+l} T_m(\varphi) e^{im\varphi}$$

*Указание.* Искать решение в виде

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{m=-l}^{+l} u_m(r, t) e^{im\varphi}$$

выделить в  $u_m(r, t)$  асимптотики в нуле  $u_m(r, t) = r^m f_m(r, t)$ , получить и интегрировать уравнения на  $f_m(r, t)$ . Для разложения в ряд Фурье использовать пакет FFTW. Исследовать несколько частных случаев (в т.ч. с нетривиальной зависимостью от  $\varphi$ ), для которых легко выписать аналитическое решение.

### Вариант 21\*

Решить задачу Коши для нестационарного одномерного уравнения Шрёдингера

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - U(x)\right)\psi(x, t) = 0$$

по явной схеме. Производную по координате заменить на разностное отношение и полученную систему ОДУ по времени проинтегрировать методом Рунге-Кутты второго порядка точности. Построить решение  $\psi(x, t)$  и Фурье-образ скалярного произведения  $P(t) = \langle \psi(x, t) | \psi(x, 0) \rangle$ . Рассмотреть случай линейного осциллятора. В чём физический смысл  $|P(\omega)|^2$ ?

*Требования к программе:* предусмотреть возможность замены потенциала  $U(x)$  и начальных условий  $\psi(x, 0)$ . Фурье-образ вычислять с помощью пакета FFTW.

### Вариант 22

Найти уровень энергии и волновую функцию  $\psi(x)$  основного состояния в симметричной яме  $U(-x) = U(x)$ , интегрируя одномерное стационарное уравнение Шрёдингера

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) - E\right)\psi(x, t) = 0, \quad |\psi(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0$$

по  $x$  от 0 до некоторого  $x_{\max}$  для различных  $E$ . Интегрирование по  $x$  вести методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Проверить работу программы в нескольких частных случаях, для которых легко выписывается аналитическое решение спектральной задачи.

### Вариант 23

Используя метод вращений Якоби для решения конечномерного аналога спектральной задачи для одномерного стационарного уравнения Шрёдингера, найти уровни энергии и волновые функции  $\psi_k(x)$  основного и первых 20 возбуждённых состояний гармонического осциллятора. Сравнивая численный ответ с точным решением, оценить погрешность ответа в зависимости от количества  $k$  нулей волновой функции  $\psi_k(x)$ .

### Вариант 24

Решить задачу Коши для уравнения Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -5 < x < 10,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x^2/2), \quad 0 < t < t_{\max} = 1.$$

Вычислить максимальную невязку с точным решением. Сравнить результаты, полученные при использовании разных численных схем.

### Вариант 25

Используя метод установления, найти стационарное распределение температуры в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями с радиусами  $a$  и  $b$ , если температура на внутренней границе поддерживается равной  $f(\varphi)$ , а на внешней границе —  $g(\varphi)$ . Исследовать несколько частных случаев (в т.ч. с нетривиальной зависимостью от  $\varphi$ ), для которых легко выписать аналитическое решение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad u(a, \varphi) = f(\varphi), \quad u(b, \varphi) = g(\varphi)$$

Программу составили к.ф.-м.н. доцент Александр Иванович Черных, к.ф.-м.н. доцент Сергей Валерьевич Смирнов.