Занятие 21

Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

При разделении переменных в уравнении Гельмгольца мы получали обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \tag{21.1}$$

Коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ и правая часть $f(x)$ как правило являются непрерывными функциями на некотором интервале.

Поскольку уравнение (21.1) линейно, его общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_0(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — частные решения однородного уравнения, образующие фундаментальную систему решений (ФСР), а $y_0(x)$ — частное решение неоднородного уравнения. Если ФСР каким-либо образом построена, то частное решение $y_0(x)$ можно найти методом вариации постоянных. Напомним, как это делается.

Пример 1. Найдем общее решение уравнения

$$(x^2 + x)\,y'' + x^2y' - xy = (x+1)^2.$$

Легко убедиться, что функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = e^{-x}$ являются решениями однородного уравнения. Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2\, x$.

Ищем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x)\, x.$$

Напоминаем, что для получения условий на $C_1(x)$ и $C_2(x)$ уравнение должно быть разрешено относительно старшей производной:

$$y'' + \frac{x}{x+1} y' - \frac{1}{x+1} y = \frac{x+1}{x}.$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & x \\ -e^{-x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{x+1}{x} \end{pmatrix}.$$

Итак, $\begin{cases} e^{-x} C_1' + x C_2' = 0, \\ -e^{-x} C_1' + C_2' = \dfrac{x+1}{x}, \end{cases}$ следовательно $\begin{cases} C_1(x) = -e^{x}, \\ C_2(x) = \ln|x|. \end{cases}$

Частное решение неоднородного уравнения: $y_{\text{част}} = x \ln|x| - 1$.

<u>Ответ:</u> $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2\, x + x \ln|x| - 1$.

Рассмотрим способы построения ФСР однородного уравнения

$$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0. \tag{21.2}$$

Как мы знаем, решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют ФСР на некотором интервале, если их определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

не обращается в ноль на этом интервале.

Если нам известно частное решение $y_1(x)$ однородного уравнения (21.2), мы можем построить второе решение, дополняющее его до ФСР, используя функцию $W(x)$.

Напомним, что функция $W(x)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{dW}{dx} = -a(x)W(x). \tag{21.3}$$

Решив уравнение (21.3) и раскрыв определитель Вронского

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

мы получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции $y_2(x)$. Поделим обе части этого уравнения на $y_1^2(x)$ и преобразуем его в полную производную:

$$\frac{W(x)}{y_1^2(x)} = \frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1^2(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right). \tag{21.4}$$

Интегрируя уравнение (21.4), находим функцию $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$, а затем и $y_2(x)$.

Пример 2. Найдем общее решение уравнения

$$x^2(x+1)y'' - 2y = 0.$$

Заметим, что если это уравнение переписать в виде, разрешенном относительно старшей производной

$$y'' - \frac{2}{x^2(x+1)}y = 0,$$

то коэффициент при y имеет две точки разрыва $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Поэтому следует рассматривать решения на интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$.

Уравнение Лиувилля в данном случае имеет вид $\frac{d}{dx}W(x) = 0$, следовательно, $W(x) \equiv const$. Положим $W(x) \equiv 1$, поскольку мы ищем частное решение.

Убедившись, что функция $y_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$ удовлетворяет исходному уравнению, найдем $y_2(x)$.

Сначала решим уравнение (21.4).

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{1+1/x}\right) = \frac{1}{(1+1/x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

Найдём какую-нибудь первообразную функции $\frac{x^2}{(1+x)^2}$.

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x)^2} = \int \left(1 - \frac{2x+1}{(1+x)^2}\right) dx =$$
$$= \int \left(1 - \frac{2(x+1)}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx = x - 2\ln|1+x| - \frac{1}{1+x}.$$

Итак,

$$y_2(x) = \frac{x+1}{x}\left(x - 2\ln|1+x| - \frac{1}{1+x}\right) = x + 1 - \frac{2(x+1)}{x}\ln|1+x| - \frac{1}{x}.$$

(Обратите внимание, что функция $y_2(x)$ имеет разрыв в точке $x_1 = 0$ и устранимый разрыв в точке $x_2 = -1$.)

Ответ: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Таким образом, при построении ФСР уравнения второго порядка самое главное — найти одно частное решение, а далее работает простой алгоритм. В некоторых случаях это частное решение можно подобрать, используя простые соображения.

Например, для уравнения вида $g(x)y'' - xy' + y = 0$ частное решение $y_1(x) = x$ угадывается без труда.

Решение уравнения $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ попробуем искать в виде $y = e^{kx}$. Тогда после сокращения на e^{kx} получим

$$xk^2 - (2x+1)k + (x+1) = 0 \quad \text{или} \quad (k^2 - 2k + 1)x + (1-k) = 0.$$

Последнее условие выполнено тождественно при $k = 1$. Таким образом, функция $y = e^x$ является частным решением.

Частное решение уравнения $x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3)y' + 6xy = 0$ будем искать в виде многочлена. Посмотрим, какой степени может быть этот многочлен. Если $y(x) = x^n + \ldots$, то после подстановки в уравнение получим

$$x(x^2+6)(n(n-1)x^{n-2} + \ldots) - 4(x^2+3)(nx^{n-1} + \ldots) + 6x(x^n + \ldots) = 0$$

Коэффициент при старшей степени, которая в нашем случае равна $n+1$, должен обратиться в ноль:

$$n(n-1) - 4n + 6 = 0.$$

Отсюда $n_1 = 2$ или $n_2 = 3$.

Ищем частное решение в виде $y_1(x) = Ax^2 + Bx + C$ и получаем $y_1(x) = x^2 + 2$. Второе решение ищем в виде многочлена третьей степени и получаем $y_2(x) = x^3$.

Таким образом, нам удалось построить общее решение

$$y(x) = C_1(x^2 + 2) + C_2x^3.$$

Заметим, что использование формулы Лиувилля привело бы здесь к значительным техническим сложностям.

Далее мы рассмотрим приёмы, позволяющие в некоторых случаях найти общее решение уравнения (21.2).

1. Заменой $y(x) = \rho(x) \cdot z(x)$ можно свести уравнение (21.2) к уравнению для функции $z(x)$, которое не содержит первую производную, а для такого уравнения $W(x) \equiv const$. Наша цель — подобрать подходящим образом функцию $\rho(x)$.

Пример 3. Решим уравнение $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)\, y = 0$.

Положим $y(x) = \rho(x)z(x)$, тогда

$$x^2(\rho''z + 2\rho'z' + \rho z'') - 2x(\rho'z + \rho z') + (x^2 + 2)\rho z = 0.$$

Коэффициент при z' приравняем к нулю: $2x^2\rho' - 2x\rho = 0$. Решением этого уравнения является функция $\rho(x) = x$. Тогда уравнение для функции $z(x)$ приобретает вид

$$x^3z'' - 2xz + (x^2+2)xz = 0$$

и далее, после сокращения на x^3, превращается в $z'' + z = 0$.

Отсюда $z(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ и $y(x) = x \cdot z(x)$.

Ответ: $y(x) = C_1\, x \sin x + C_2\, x \cos x$.

2. Заменой независимой переменной $t = \varphi(x)$ также можно привести уравнение (21.2) к уравнению, которое не содержит первой производной.

Пример 4. Решим уравнение $xy'' - y' - 4x^3y = 0$.

Производные от функции y по переменной t будем обозначать точкой сверху. Напомним:

$$y'(x) = \dot{y}(t)\varphi'(x),$$

$$y'' = \ddot{y}(t)(\varphi'(x))^2 + \dot{y}(t)\varphi''(x).$$

Исходное дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$x(\ddot{y}(\varphi')^2 + \dot{y}\varphi'') - \dot{y}\varphi' - 4x^3y = 0.$$

Найдём функцию $\varphi(x)$ такую, что $x\varphi'' - \varphi' = 0$. Это уравнение можно легко решить, понижая порядок: $\varphi(x) = C_1x^2 + C_2$.

Мы можем выбрать любое решение $t = \varphi(x)$, например, $t = x^2$. Тогда $x(2x)^2\ddot{y} - 4x^3y = 0$, или $\ddot{y} - y = 0$.

Общее решение этого уравнения: $y(x) = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Возвращаясь к переменной x, получаем решение $y(x)$.

Ответ: $y(x) = C_1e^{x^2} + C_2e^{-x^2}$.

В отличие от линейного уравнения с постоянными коэффициентами, для которого построение ФСР сводится к решению алгебраической задачи, для уравнения с переменными коэффициентами общего правила построения ФСР, к сожалению, не существует. Говорят, что линейное уравнение с переменными коэффициентами «бросает вызов искусству аналитика». Иногда для уравнения, которое часто встречается в приложениях, разумнее дать новое название функциям, образующим его ФСР, чем пытаться выразить эти функции через другие, уже известные. С такими уравнениями мы встретимся очень скоро.

В заключение рассмотрим пример построения ФСР для линейного уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами.

Пример 5. Найдем ФСР уравнения

$$(x-2)y''' - (2x-3)y'' + xy' - y = 0. \tag{21.5}$$

Два линейно независимых решения этого уравнения легко найти, используя описанные выше приемы. Это $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = e^x$.

Чтобы найти третье решение, необходимо, с одной стороны, определить функцию $W(x)$ из уравнения Лиувилля (21.3)

$$\frac{dW(x)}{dx} = -a_1(x)W(x),$$

где $a_1(x)$ — коэффициент при $y''(x)$ в уравнении (21.5), разрешенном относительно старшей производной.

В нашем случае $a_1(x) = \dfrac{-2x+3}{x-2}$. Решая уравнение $\dfrac{dW}{dx} = \dfrac{2x-3}{x-2}W$, получаем $W(x) = C(x-2)e^{2x}$.

С другой стороны, по определению $W(x) = \begin{vmatrix} x & e^x & y_3(x) \\ 1 & e^x & y_3'(x) \\ 0 & e^x & y_3''(x) \end{vmatrix}$.

Раскрывая этот определитель по третьему столбцу и подставляя найденное значение $W(x) = C(x-2)e^{2x}$, получаем уравнение для $y_3(x)$:

$$(x-1)y_3'' - xy_3' + y_3 = C(x-2)e^x. \tag{21.6}$$

Итак, зная функцию $W(x)$, мы свели решение однородного уравнения третьего порядка к решению неоднородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Но для решения уравнения (21.6) у нас нет универсального алгоритма. Таким образом, даже подобрав два решения, мы не смогли с помощью формулы Лиувилля найти третье.

Заметим, что для однородного уравнения второго порядка, зная одно решение, всегда можно дополнить его до ФСР с помощью формулы Лиувилля.

А теперь вернёмся к уравнению (21.5) и попробуем решить его иначе. Перегруппируем слагаемые, выделив множитель $(x-2)$:

$$(x-2)(y''' - 2y'' + y') - (y'' - 2y' + y) = 0.$$

Сделав замену $u = y'' - 2y' + y$, получим уравнение $(x-2)u' - u = 0$.

Находим $u(x) = C(x-2)$ и получаем уравнение для функции $y(x)$:

$$y'' - 2y' + y = C(x-2).$$

Это — линейное уравнение с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Его общее решение $y(x) = (Ax + B)e^x + Cx$.

Ответ: ФСР уравнения (21.5) состоит из функций x, e^x и xe^x.

Итак, мы рассмотрели некоторые приемы построения ФСР для линейных уравнений с переменными коэффициентами, но все они, к сожалению, носят частный характер. На следующем занятии мы познакомимся с более общим способом построения ФСР для уравнений, коэффициенты которых являются аналитическими функциями.