24.11.21

Задача 1

Доказать, что в-ра a_1, a_2, a_3 линейно независимы

$$a_1 = (1,2,-1)^T,\ a_2 = (2,5,-2)^T,\ a_3 = (-1,-2,3)^T.$$

Опр Вектора $v_1, \dots, v_n$ наз-ся лин. незав., если $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

Решение. Нужно доказать, что

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$ только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Т.е. нужно доказать, что система имеет единственное решение.

Решаем.

$$\begin{array}{ccc|cl} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} & A1 \\ \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{-4} & \cancel{0} & A2 \\ \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{3} & \cancel{0} & A3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{0} & A4 = A2 - 2A1 \end{array}$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
\cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
A5 = A3 + A1 \\
A6 = A5 : 2 \\
A7 = A1 + A6 \\
A8 = A4 + 2A6 \\
A9 = A7 - 2A8
\end{array}
$$

Разрешённая матрица:
$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 0.$

<u>Замечание.</u> a_1, a_2, a_3 – лин. независимы в $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3$ – это базис в $\mathbb{R}^3$

<u>Задача 2</u> Найти координаты вектора $b =$ в базисе a_1, a_2, a_3.

<u>Решение.</u> Нужно найти $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 = b$$

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{cases}
\beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3 = 3 \\
2\beta_1 + 5\beta_2 - 4\beta_3 = 9 \\
-\beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3 = -7
\end{cases}
$$

Решаем

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
\cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{3} \\
\cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{-4} & \cancel{9}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
A1 \\
A2
\end{array}
$$

~~-1~~	~~-2~~	~~3~~	~~-7~~		$A3$
~~0~~	~~1~~	~~-2~~	~~3~~		$A4 = A2 - 2A1$
~~0~~	~~0~~	~~2~~	~~-4~~		$A5 = A3 + A1$
0	0	1	-2		$A6 = A5 : 2$
~~1~~	~~2~~	~~0~~	~~1~~		$A7 = A1 + A6$
0	1	0	-1		$A8 = A4 + 2A6$
1	0	0	3		$A9 = A7 - 2A8$

Разрешённая матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \beta_1 = 3,\ \beta_2 = -1,\ \beta_3 = 2$$

$$\Rightarrow b = 3a_1 - a_2 + 2a_3$$

Задача

№681

$a_1 = (1, 2, 3, -4)^T$

$a_2 = (2, 3, -4, 1)^T$

$a_3 = (2, -5, 8, -3)^T$

$a_4 = (5, 26, -9, -12)^T$

$a_5 = (3, -4, 1, 2)^T$

Решать будем аналогично первым двум задачам: сначала выделим линейно независимые вектора, потом выразим остальные через них.

Решение Записываем вектора в столбец и приводим её к разрешённому виду.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1	2	2	5	3	A1
~~2~~	~~3~~	~~-5~~	~~26~~	~~-4~~	~~A2~~
~~3~~	~~-4~~	~~8~~	~~-9~~	~~1~~	A3
~~-4~~	~~1~~	~~-3~~	~~-12~~	~~2~~	A4
0	-1	-9	16	-10	A5 = A2 - 2A1
~~0~~	~~-10~~	~~2~~	~~-24~~	~~-8~~	~~A6~~ = A3 - 3A1
~~0~~	~~9~~	~~5~~	~~8~~	~~14~~	~~A7~~ = A4 + 4A1
~~0~~	~~-1~~	~~7~~	~~-16~~	~~6~~	~~A8~~ = A6 + A7
~~0~~	~~0~~	~~16~~	~~-32~~	~~16~~	A9 = A8 - A5
~~0~~	~~0~~	~~68~~	~~-136~~	~~68~~	A10 = A7 + 9A8
0	0	1	-2	1	A11 = A9 : 16
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~-2~~	~~1~~	A12 = A10 : 68
					A13 = A11 - A12

Ступ. вид:

1	2	2	5	3	B1
0	1	9	-16	10	B2
0	0	1	-2	1	B3
0	1	0	2	1	B4 = B2 - 9B3
1	2	0	9	1	B5 = B1 - 2B3
1	0	0	5	-1	B6 = B5 - 2B4

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3$ — лин. независ.

Разрешённый вид

1	0	0	5	-1
0	1	0	2	1
0	0	1	-2	1

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = a_4$

$\Rightarrow \alpha_1 = 5, \ \alpha_2 = 2, \ \alpha_3 = -2.$

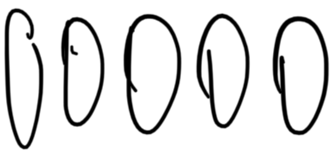
$a_4 = 5a_1 + 2a_2 - 2a_3$

$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 = a_5$.

$\Rightarrow \beta_1 = -1 \quad \beta_2 = 1 \quad \beta_3 = 1$

$a_5 = -a_1 + a_2 + a_3$

Задача $\quad a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

 $\leftarrow$ записали в столбцы.

разрешённому виду

$\Rightarrow$ ответ

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{matrix} \Rightarrow$$

a_1, a_2, a_4 – базис

$a_3 = 2a_1 - 2a_2$

$a_5 = a_1 + 3a_2 + 4a_4$

Задача

Найти СЛУ, решение которой — элементы лин. многообразия

$$U = \{ (1,2,0,1)^T + \alpha(3,1,1,0)^T + \beta(2,-2,0,1)^T \}$$

1) Найти СЛУ

$$L = \{ \alpha(3,1,1,0)^T + \beta(2,-2,0,1)^T \}$$

Пусть $x \in L \iff \exists\, \alpha, \beta:$

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = x_1 \\ \alpha - 2\beta = x_2 \\ \alpha = x_3 \\ \beta = x_4 \end{cases}$$ совместна

т.е.

$$\begin{array}{cc|c} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{x_1} \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{x_2} \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_3 - 2x_4 \\ 0 & 0 & x_2 - x_3 + 2x_4 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

подставляем

2) Пусть $v \in U$, тогда

$$v = (1,2,0,1) + x$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \leftarrow \text{ответ}$$

$v \in U \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta :$

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = v_1 - 1 \\ \alpha - 2\beta = v_2 - 2 \\ \alpha = v_3 \\ \beta = v_4 - 1 \end{cases}$$

совместна, т.е

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & v_1 - 1 \\ 1 & -2 & v_2 - 2 \\ 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 1 & v_4 - 1 \\ 0 & 0 & v_1 - 1 - 3v_3 - 2(v_4 - 1) \\ 0 & 0 & v_2 - 2 - v_3 + 2(v_4 - 1) \end{array}\right) \begin{array}{l} A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$A5 = A1 - 3A3 - 2A4$$

$$A6 = A2 - A3 + 2A4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - 3v_3 - 2v_4 + 1 = 0 \\ v_2 - v_3 + 2v_4 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 - 3v_3 - 2v_4 = -1 \\ v_2 - v_3 + 2v_4 = 4 \end{cases}$$