Домашняя работа к занятию 13

1.1 Решите задачу Коши $\begin{cases} \dot{x} = x - y + e^t \cos t, & x(0) = 0 \\ \dot{y} = x + y + e^t \sin t, & y(0) = 0 \end{cases}$

1.2 Найдите общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$. Выделите решение, ограниченное при $x \to +\infty$. Имеет ли оно предел при $x \to +\infty$?

1.3 Решите задачу Коши $\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = -2 \\ \dot{y} = z, & y(0) = -1 \\ \dot{z} = x + 3e^t, & z(0) = 0 \end{cases}$

2.1 Решите задачу Коши $\begin{cases} \dot{x} = y + z + 1, & x(0) = 0 \\ \dot{y} = x + y + e^t, & y(0) = 1 \\ \dot{z} = -x + z, & z(0) = -1 \end{cases}$

Найдите общее решение уравнения

2.2 $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$ **2.3** $y'' + 3y' + 2y = \sin e^x$

3.1 Докажите, что если $f(x)$ — периодическая функция, то уравнение $y'' - y = f(x)$ имеет единственное периодическое решение.

3.2 Все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ имеют отрицательную вещественную часть, $\vec{f}(t)$ — периодическая вектор-функция. Докажите, что система $\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{f}(t)$ имеет периодическое решение.

3.3 Решите матричную задачу Коши $\begin{cases} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{AY} + \mathbf{B} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{C} \end{cases}$ при условии, что $\det \mathbf{A} = 0$.

Ответы и указания

1.1 *Указания*: собственные числа однородной системы $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, фундаментальная матрица $\mathbf{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$

Ответ: $x(t) = te^t \cos t$, $y(t) = te^t \sin t$.

1.2 $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x \operatorname{arctg} e^{-x} - 0,5e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$.
Решение $y(x) = e^x \operatorname{arctg} e^{-x} - 0,5e^{2x} \ln(1+e^{-2x})$ ограничено при $x \to +\infty$. Его предел при $x \to +\infty$ равен 0,5.

1.3 *Указания*: матрица однородной системы имеет собственное число $\lambda_1 = 1$. Поэтому искать частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов невыгодно.

Сведем систему к уравнению относительно z. Получим $\dddot{z} = z + 3e^t$ и начальные данные $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 1$, $\ddot{z}(0) = 2$, откуда $z_{\text{ч.н.}} = te^t$. Далее $\dot{y} = z = te^t$, $y(0) = -1 \Rightarrow y_{\text{ч.н.}} = te^t - e^t$, и наконец $x = \dot{z} - 3e^t = te^t - 2e^t$.

Ответ: $x(t) = (t - 2)e^t$, $y(t) = (t - 1)e^t$, $z(t) = te^t$.

2.1 *Указания*: матрица однородной системы имеет собственные числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2,3} = 1$, поэтому метод неопределенных коэффициентов приводит к громоздким вычислениям.

Заметим, что сложив второе и третье уравнения, мы получим для функции $u = y + z$ уравнение $\dot{u} = u + e^t$ и начальные условия $u(0) = 0$. Отсюда $u(t) = te^t$.

Подставив найденное значение $y+z = te^t$ в первое уравнение системы, проинтегрируем его с учетом начальных условий: $x(t) = te^t - e^t + t + 1$. После этого из второго и третьего уравнений легко найти y и z.

Ответ: $x = (t-1)e^t+t+1$, $y = (\frac{t^2}{2}+3)e^t-t-2$, $z = (-\frac{t^2}{2}+t-3)e^t+t+2$.

2.2 *Указания*: уравнение Эйлера сведите к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, выписав его характеристический многочлен $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$.

Полученное уравнение $\dddot{y} - 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = e^{3t} + 3e^t$ можно решать, используя принцип суперпозиции.

Ответ: $y(x) = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + C_3x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x(\ln|x|)^2$

2.3 *Указания*: $y_{\text{о.о.}} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. Решая методом вариации постоянных, получим условия $C_1'(x) = e^x \sin e^x$, $C_2' = -e^{2x}\sin e^x$, откуда находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Ответ: $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - e^{-2x}\sin e^x$.

3.1 $y(x) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x-s) + f(x+s)}{2} e^{-s} ds.$

3.2 $\vec{y}(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\mathbf{A}s)\vec{f}(s+t)ds.$