Урок 13

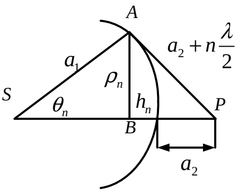
Зоны Френеля. Дифракция Френеля

1. (Задача 3.53.) Найти радиус ρ_n n-й зоны Френеля. Чему он будет равен, если падающая волна плоская? Доказать, что площади зон Френеля равны. Найти вклад в амплитуду колебания в точке B от n-й зоны Френеля.

Решение Расстояние между центром сферы и точкой $P - SP = a_1 + a_2$.
Тогда

$$E(P) = \frac{1}{iL}\int E_0 \frac{e^{ika_1}}{a_1}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\cos\psi \mathrm{d}S.$$

Для вычисления интеграла разобьем сферическую поверхность на кольцевые зоны с центром в точке P и радиусом $r_n = a_2 n\frac{\lambda}{2}$, где $n = 1, 2, \ldots$ — целые числа.



Найдем радиусы кольцевых границ этих зон и их площади $\triangle S_n = S_n - S_{n-1}$, где S_n — площадь сферического сегмента ($S_n = 2\pi a_1 h_n$).

Выразим ρ_n^2 из $\triangle SAB$ и $\triangle BAP$:

$$a_1^2 - (a_1 - h_n)^2 = \left(a_2 + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (a_2 + h_n)^2.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$a_1^2 - a_1^2 - h_n^2 + 2a_1 h_n = a_2^2 + n\frac{\lambda^2}{4} + na_2\lambda - a_2^2 - h_n^2 - 2a_2 h_n.$$

Пренебрегая слагаемым $n^2\frac{\lambda^2}{4}$ $(a_{1,2} \gg \lambda)$, получаем

$$h_n = \frac{a_2}{a_1 + a_2}\frac{n\lambda}{2} \quad \text{и} \quad S_n = 2\pi h_n a_1 = \pi\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\lambda n = nS_1.$$

Площадь любой кольцевой зоны

$$\triangle S_n = S_n - S_{n-1} = \pi\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\lambda$$

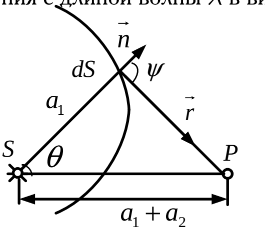
не зависит от n и мала (пропорциональна λ). Радиус зоны

$$\rho_n = \sqrt{a_1^2 - (a_1 - h_n)^2} = \sqrt{(2a_1 - h_n)hn} \cong \sqrt{2a_1 h_n} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\lambda n} = \sqrt{n}\rho_1.$$

При $a_1 \longrightarrow \infty$ $\rho_n \longrightarrow \sqrt{a_2\lambda n}$, при $a_1 = a_2 = a$ $\rho_n = \sqrt{2a\lambda n}$. Например, при $a_2 = a_1 = 1$ м, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$см $= 5 \cdot 10^{-7}$м $\rho_1 = \sqrt{2 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 0,1$ см. Для $a_1 \longrightarrow \infty$ и $a_2 = 1$ м $\rho_1 = \sqrt{5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2} = \frac{0,1}{\sqrt{2}}$ см $\approx 0,07$ см $\approx 0,7$ мм. Зоны для видимого света очень узки.

Для определения вклада в амплитуду колебаний в точке B от $n-$ой зоны Френеля используем интеграл Кирхгофа для точечного источника монохроматического излучения с длиной волны λ в виде $E = \int\int \frac{E_0 e^{ikr}}{i\lambda r} \cos\psi \mathrm{d}S$.



Границы зоны $a_2 + (n-1)\frac{\lambda}{2}$ и $a_2 + n\frac{\lambda}{2}$. Расстояние между источником и наблюдателем $SP = a_1 + a_2$. Вклад от n-й зоны:

$$E_n = \frac{E_0}{i\lambda} \int \frac{e^{ika_1}}{a_1} \cos\psi_n \frac{e^{ikr}}{r} 2\pi a_1^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta,$$

$$r^2 = a_1^2 + (a_1 + a_2) - 2a_1(a_1 + a_2)\cos\theta.$$

Найдем дифференциал этого соотношения: $2r\mathrm{d}r = 2a_1(a_1+a_2)\sin\theta\mathrm{d}\theta$, отсюда

$$\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{r\mathrm{d}r}{a_1(a_1 + a_2)}.$$

Подставим в интеграл:

$$E_n = \frac{E_0}{i\lambda} \int_{a_2+(n-1)\frac{\lambda}{1}}^{a_2+n\lambda/2} \frac{e^{ika_1}}{a_1} \cos\psi_n \frac{e^{ikr}}{r} 2\pi a_1^2 \cdot \frac{r\mathrm{d}r}{a_1(a_1 + a_2)} =$$

$$= E_0 \frac{e^{ika_1} 2\pi}{i\lambda(a_1 + a_2)} \int_{a_2+(n-1)\frac{\lambda}{1}}^{a_2+n\lambda/2} \cos\psi_n e^{ikr} \mathrm{d}r.$$

Заменим переменные: $r = r' + a_2$, тогда из-под интеграла уйдет множитель e^{ika_2} и упростятся пределы интегрирования.

Кроме того, учитывая узость зоны и слабую зависимость $\cos\psi_n$ от угла в пределах зоны, заменим $\cos\psi_n$ на его среднее значение $\overline{\cos\psi_n}$ и вынесем из-под интеграла эту константу:

$$E_n = \frac{E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1 + a_2)} \frac{\overline{\cos\psi_n} 2\pi}{i\lambda} \int_{(n-1)/\lambda/2}^{n\lambda/2} e^{ikr} \mathrm{d}r,$$

$$J_n = \int_{(n-1)\lambda/2}^{n\lambda/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} r} \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi i} \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda} n\frac{\lambda}{2}} - e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\frac{\lambda}{2}} \right),$$

$$J_n = \frac{\lambda}{2\pi}\left(e^{i\pi n} - e^{i\pi(n-1)}\right) = \frac{\lambda 2(-1)^n}{2\pi i},$$

так как
$$e^{i\pi n} - e^{i\pi(n-1)} = 2(-1)^n.$$

Таким образом,

$$E_n = \frac{2E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1+a_2)}(-1)^{n+1}\overline{\cos\psi_n}.$$

В частности, $E_1 = \frac{2E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{a_1+a_2}$, т. е. в 2 раза больше амплитуды при полностью открытом фронте $E = \frac{E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{a_1+a_2}$. Кроме того, видно, что вклады зон образуют знакочередующийся ряд со слабо падающей, но падающей с ростом n зависимостью от n, обусловленной падением $\overline{\cos\psi_n}$.

2. (Задача 3.54.) Получить оценку вклада в колебание в точке B (см. рисунок к задаче 3.53) при открытии и закрытии произвольного числа зон Френеля. В частности, когда: а) закрыты все зоны, кроме первой; б) закрыты все четные зоны; в) фаза всех четных зон изменена на π.

Решение Если E — амплитуда в B при полностью открытом фронте, то а) $E_1 \simeq 2E$; б) $E_n^* \simeq \sum\limits_{i=1}^{n} E_{2i-1} > E_1$, где n — число открытых нечетных зон; в) $E_n \simeq \sum\limits_{i=1}^{n} E_1 \simeq 2E_n^*$, где n — число открытых зон.

3. (Задача 3.55) Определить максимальное фокусное расстояние зонной пластинки Френеля, если ее m-й радиус равен r_m ($m = 5$, длина волны $\lambda = 5\cdot 10^{-5}$ см; $r_5 = 1,5$ мм). Что произойдет, если пространство между зонной пластинкой и экраном заполнено средой с показателем преломления n $(n > 1)$?

Решение Радиус m-ой зоны Френеля определяется соотношением

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}.$$

Эту формулу можно преобразовать к виду формулы тонкой линзы

$$\frac{m\lambda}{r_m^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

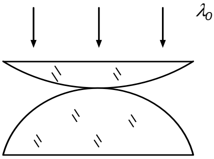
величина f и есть фокус зонной пластинки

$$f = \frac{r_m^2}{m\lambda} \to \max$$

$$\frac{r_5^2}{5\lambda} = \frac{\left(15 \cdot 10^{-2}\right)}{5 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 90 \text{ см}.$$

При наличии за зонной пластинкой среды с $n > 1$ в приведенных выше формулах необходимо заменить расстояние b на оптический путь, т.е. $b' = nb$ и, следовательно, второй член в формуле «линзы» уменьшится, а, значит, фокусное расстояние f увеличится.

4. (Задача 3.57) Найти фокусное расстояние для длины волны λ у зонной пластинки, полученной в результате фотографирования с увеличением k в проходящем свете с длиной волны λ_0 двух соприкасающихся выпуклыми сторонами плоско-выпуклых линз с радиусами кривизны R_1 и R_2. Свет падает по нормали к плоскостям линз.



Решение Оптические пути при наличии двух соприкасающихся выпуклых поверхностей (аналогично расчету колец Ньютона) равны

$$\delta_{m_1} = \frac{r^2 m}{2R_1}, \ \delta_{m_2} = \frac{r^2 m}{2R_2}.$$

Суммарная разность хода в схеме будет

$$\Delta_m = 2\left(\delta_{m_1} + \delta_{m_2}\right) = m\lambda_0.$$

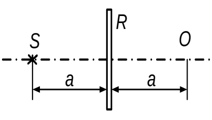
Равенство разности ходов целому числу длин волн определяет условие (радиусы) максимумов получаемых колец Ньютона.

$$r_m^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = m\lambda_0, \text{ откуда } r_m = \sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} m\lambda_0}.$$

$$R_m = kr_m = k\sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} m\lambda_0}$$

$$F = \frac{R_m^2}{m\lambda} = \frac{k^2 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \lambda_0$$

5. (Задача 3.67.) Посередине между точечным источником и экраном помещен непрозрачный диск радиусом R. Плоскость диска параллельна экрану, а его ось проходит через источник. На экране в точке O — светлое пятно. В центре диска сделали круглое отверстие. При каком минимальном радиусе отверстия в точке O будет темно? Каким при этом должен быть радиус диска?



Решение Интеграл Кмрхгофа в общем виде можно записать как

$$E\left(p\right)=\frac{k}{2\pi i}\iint\frac{E(S)}{R}e^{i(KR-\omega t)}dS$$

Сначала решаем задачу об интенсивности света на оси круглого отверстия в экране как функции расстояния z. Интеграл Кирхгофа в параксиальном приближении (расходящиеся сферические волны).

$$E\left(p\right)=\frac{k}{2\pi iz}\exp\left\{i\left(kz-\omega t+k\frac{\left(x-x_p\right)^2+\left(x-y_p\right)^2}{2z}\right)\right\}dxdy$$

$$x,x_p,y,y_p\ll z$$

Тогда на оси $x_p=y_p=0$ интеграл Кирхгофа перепишется в виде

$$E^{(1)}\left(z\right)=\frac{k}{2\pi iz_p}E_0\int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{2\pi}e^{\frac{ikr^2}{2z_p}}rdrd\varphi=-E_0\left(e^{\frac{ik\rho^2}{2z}}-1\right)$$

$$\left|E^{(1)}\left(z\right)\right|=2E_0\left|\sin\frac{\pi\rho^2}{2\lambda z}\right|.$$

По теории Бабина

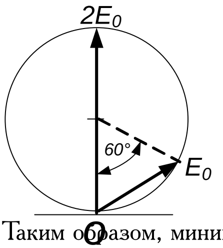
$$E^{(1)}\left(p\right)+E^{(2)}\left(p\right)=E_0,$$

где $E^(1)(p)-$ амплитуда в точке P от отверстия, а $E^(2)(p)-$ амплитуда от экрана. Тогда от экрана

$$E=E_0\exp\left\{\frac{ik\rho^2}{2z}\right\}$$

$$I\left(z\right)=I_0$$

безотносительно радиуса экрана. Чтобы погасить E_0 необходимо получить половину вклада центральной зоны, а это значит на векторной диаграмме необходимо выбрать угол 60^0 (см. рисунок), что соответствует $\frac{1}{3}$ площади первой зоны.



$$S_{\text{отв}}=\frac{1}{3}S_0,\ \pi R_{\text{отв}}^2=\frac{1}{3}\pi\frac{a\lambda}{2},\ R_{\text{отв}}=\sqrt{\frac{a\lambda}{6}}.$$

Таким образом, минимальный радиус отверстия $r_{\min}\simeq\sqrt{a\lambda/6}$; радиуса же диска при этом (чтобы амплитуды гасились) должен удовлетворять условию

$$R\simeq\sqrt{a\lambda\left(n\pm1/3\right)},$$

где $n=0,1,2,...$ (для $n=0$ только знак «+»).