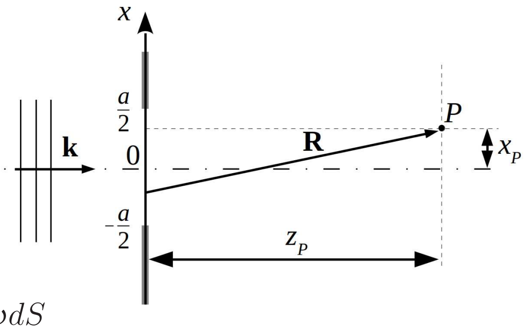
Зона дифракции Фраунгофера

Выберем систему координат так, чтобы щель лежала в плоскости $z = 0$ и имела размеры $-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, $-\infty < y < \infty$. Экран находится в плоскости $z = z_p$.



Поле в точке $P(x_p, z_p)$ экрана выражается интегралом Кирхгофа:

$$E_P = \frac{1}{i\lambda}\int\limits_S E_0 \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\cos\psi dS$$

R в знаменателе подынтегрального выражения можно считать примерно равным z_p и вынести из-под интеграла. Пусть z_p попадает в зону дифракции Френеля. Тогда

$$R \approx z_p + \frac{(x-x_p)^2}{2z_p} + \frac{y^2}{2z_p} = z_p + \frac{x^2}{2z_p} - \frac{x_p x}{z_p} + \frac{x_p^2}{2z_p} + \frac{y^2}{2z_p}.$$

Выясним, когда можно пренебрегать членом $\sim x^2$:

$$k\tfrac{x^2}{2z_p} \ll \tfrac{\pi}{4}$$

$$|x| < a/2 \rightarrow \quad \tfrac{1}{\lambda}\cdot\tfrac{a^2}{4z_p} \ll \tfrac{1}{4}$$

$$z_p \gg \tfrac{a^2}{\lambda}$$

Полученное неравенство задает интервал значений z_p, в котором в разложении R по малому параметру можно ограничиться членами, линейными по x. Этот интервал называется зоной дифракции Фраунгофера. Зона Фраунгофера входит целиком в зону дифракции Френеля:

$$\frac{a^2}{\lambda} = a\frac{a}{\lambda} > a\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/3}$$

В зоне дифракции Фраунгофера в щели укладывается много меньше одной зоны Френеля:

$$a \ll \sqrt{\lambda z_p}$$

В зоне дифракции Фраунгофера интеграл Кирхгофа принимает вид

$$E_P = \tfrac{1}{i\lambda}\int\limits_S E_0\tfrac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\cos\psi dS = \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ik\left(z_p+\frac{x_p^2}{2z_p}\right)}}{i\lambda z_p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\frac{ky^2}{2z_p}}\,dy\int\limits_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-i\frac{kx_p x}{z_p}}\,dx = \sqrt{i\lambda z_p}\frac{E_0\,\mathrm{e}^{ik\left(z_p+\frac{x_p^2}{2z_p}\right)}}{i\lambda z_p}\int\limits_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-i\frac{kx_p x}{z_p}}\,dx =$$

$$= \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ik\left(z_p+\frac{x_p^2}{2z_p}\right)}}{\sqrt{i\lambda z_p}}\int\limits_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-i\frac{kx_p x}{z_p}}\,dx = \frac{E_0 a\,\mathrm{e}^{ik\left(z_p+\frac{x_p^2}{2z_p}\right)}}{\sqrt{i\lambda z_p}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{kax_p}{2z_p}\right) = \frac{E_0 a\,\mathrm{e}^{ik\left(z_p+\frac{x_p^2}{2z_p}\right)}}{\sqrt{i\lambda z_p}}\,\mathrm{sinc}\,\frac{k_x a}{2},$$

где введено обозначение $k_x = \frac{x_p}{z_p}k$.