

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

4-й семестр, задание № 1

Теорема Пикара. Методы решения уравнений первого порядка.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Покажите, что все интегральные кривые уравнения $xy' = (x + y)$ пересекают ось Ox под одним и тем же углом. Найдите этот угол. Найдите общее решение уравнения. Покажите, что все интегральные кривые входят в точку $(0; 0)$, касаясь оси Oy . (3 б)

Решите задачу Коши $\begin{cases} xy' = (x + y) \\ y(1) = 0 \end{cases}$ и укажите максимальный интервал существования этого решения. Покажите, что любую интегральную кривую уравнения можно получить преобразованием подобия $(x; y) \mapsto (kx; ky)$ из интегральной кривой, проходящей через точку $(1; 0)$. Найдите коэффициент подобия k для кривой, проходящей через точку $(1; -1)$. (3 б)

2. Решите задачу Коши $\begin{cases} y' = \sin(xy) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ и укажите максимальный интервал существования этого решения. Пусть $y = \varphi(x)$ - произвольное непродолжаемое решение уравнения $y' = \sin(xy)$. Найдите интервал его существования и покажите, что оно является четной функцией. (3 б)

3. Найдите три последовательных приближения $y^{[k]}$ ($k = 0, 1, 2$) решения задачи Коши $\begin{cases} y' = x + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ и оцените точность приближения $y^{[1]}$, выбрав некоторую окрестность точки $x = 0$. (3б)

4. Покажите, что только одно решение уравнения $y' \sin x + y \cos x = 1$ является ограниченным при $x \rightarrow +0$. Найдите это решение и укажите максимальный интервал его существования. (3 б)

5. Ортогональной траекторией семейства кривых $\Phi(x; y; a) = 0$ называется кривая, пересекающая кривые этого семейства под прямым углом. Найдите ортогональные траектории семейства парабол $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$. (3 б)

6. Решите уравнение $y^2(1+x)dx = xydy - x^3dx$, выделяя интегрируемые комбинации. Проанализируйте ход решения и укажите интегрирующий множитель, который приводит рассматриваемое уравнение к уравнению в полных дифференциалах (3 б)

7.
$$\begin{cases} y + xy' \ln y' = xy' \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
 Решите задачу Коши и покажите, что она поставлена некорректно. (3 б)

8. Решите задачу Коши, понизив порядок уравнения
$$\begin{cases} xyy'' + 4yy' = 4x(y')^2 \\ y(1) = 1; \quad y'(1) = 2 \end{cases} \quad (3 \text{ б})$$