МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики

АЮПОВА Н.Б.

ЛЕКЦИИ ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

(Курс лекций)

Новосибирск

2012

Аюпова Н.Б. Лекции по векторному и тензорному анализу/Новосиб.гос.ун-т, Новосибирск, 2012. 94 с.

Учебное пособие соответствует программе курса "Векторный и тензорный анализ" и представляет собой изложение курса лекций. Пособие содержит основные сведения. по следующим разделам: ортогональные тензоры, тензорная алгебра, тензорные поля и понятие ковариантной производной. В заключение приведены основные сведения теории поверхностей.

Предназначено для студентов физического и геолого-геофизического факультетов НГУ.

Рецензент к.ф-м.н., доцент каф. высшей математики ФФ А.И.Черных

Курс лекций подготовлен в рамках реализации Программы развития

НИУ-НГУ на 2009–2018 г.г.

1 Ортогональные тензоры в геометрии и механике

1.1 Векторы.

Рассматрим прямоугольную декартову систему координат. Пусть $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ — орты, положенные в основу нашей координатной системы. Составим скалярные произведения ортов:

$$\mathbf{e_i}\,\mathbf{e_j} = \delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{array} \right.$$

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор, отложенный для определенности из начала координат O. Координаты вектора $\mathbf{x}$ можем определить как коэффициенты разложения

$$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{e_1} + x_2\,\mathbf{e_2} + x_3\,\mathbf{e_3},$$

x_i — проекции вектора $\mathbf{x}$ на оси, $x_1 = \mathbf{x}\,\mathbf{e_1}$, $x_2 = \mathbf{x}\,\mathbf{e_2}$, $x_3 = \mathbf{x}\,\mathbf{e_3}$. Здесь проекции записаны в виде скалярных произведений вектора $\mathbf{x}$ на соответствующие орты.

Вектор $\mathbf{x}$ выражает какой-либо физический объект, например, параллельный сдвиг твердого тела, силу, скорость в данной точке и т.п. Этот объект существует независимо от координатной системы но наш способ задания зависит от координатной системы.

Между тем, координатные оси можно выбирать с большим произволом, их можно подвергать различным преобразованиям: произвольным параллельным сдвигам и поворотам вокруг начала O.

Таким образом, способ задания векторов $\mathbf{x}$ координатами x_1, x_2, x_3 зависит от координатной системы. Т.е. на картину изучаемых нами векторов накладывается, вообще говоря, случайный выбор координатной системы и изучаемая картина усложняется излишними подробностями. Основная задача тензорного исчисления - разобраться в создавшемся положении, научиться выделять то существенное, что относится к самим изучаемым объектам, и отбрасывать то случайное, что привнесено произвольным выбором координатной системы.

Для этого надо выяснить, как меняются координаты неизменного вектора $\mathbf{x}$ вследствие перехода от одной координатной системы к другим.

В дальнейшем будем рассматривать лишь поворот осей (включая зеркальное отображение) вокруг неподвижного начала O.

Пусть при неподвижном начале координат из старого базиса $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ переходим в новый $\{\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3}\}$. Выразим новые орты в разложении по старым

$$\begin{aligned}
\mathbf{e'_1} &= A_{11}\,\mathbf{e_1} + A_{12}\,\mathbf{e_2} + A_{13}\,\mathbf{e_3},\\
\mathbf{e'_2} &= A_{21}\,\mathbf{e_1} + A_{22}\,\mathbf{e_2} + A_{23}\,\mathbf{e_3},\\
\mathbf{e'_3} &= A_{31}\,\mathbf{e_1} + A_{32}\,\mathbf{e_2} + A_{33}\,\mathbf{e_3}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Из этих соотношений видно, что коэффициент

$$A_{ij} = \mathbf{e'_i}\,\mathbf{e_j}, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2}$$

совпадает со скалярным произведением $\mathbf{e'_i}\,\mathbf{e_j}$.

Замечание.

Матрица поворота A_{ij} представляет собой это матрицуа косинусов $\cos(x'_i, x_j)$

$$A_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$$

Теперь выразим старые орты через новые

$$\begin{aligned}
\mathbf{e_1} &= A'_{11}\,\mathbf{e'_1} + A'_{12}\,\mathbf{e'_2} + A'_{13}\,\mathbf{e'_3},\\
\mathbf{e_2} &= A'_{21}\,\mathbf{e'_1} + A'_{22}\,\mathbf{e'_2} + A'_{23}\,\mathbf{e'_3},\\
\mathbf{e_3} &= A'_{31}\,\mathbf{e'_1} + A'_{32}\,\mathbf{e'_2} + A'_{33}\,\mathbf{e'_3}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично предыдущему получим

$$A'_{ij} = \mathbf{e_i}\,\mathbf{e'_j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Сравнивая (2) и (4), получим, что

$$A_{ij} = A'_{ji}. \tag{5}$$

т.е. $\|A_{ij}\|$ и $\|A'_{ij}\|$ взаимно транспонированные. Но, кроме того, они и взаимно обратные, так как определяют взаимно обратные преобразования (1) и (3).

Итак, чтобы получить матрицу, обратную $\|A_{ij}\|$, достаточно ее транспонировать. Матрицы с этим свойством называются *ортогональными*. То, что матрицы $\|A_{ij}\|$ и $\|A'_{ij}\|$ взаимно обратные, можно записать в виде равенства их произведения единичной матрице

$$\sum_s A_{js}A'_{sk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k,\\ 1, & j = k \end{cases}$$

или, согласно (5),

$$\sum_s A_{js} A_{ks} = \delta_{jk}.$$

Ортогональная матрица имеет определитель ± 1.

$$\det \|A_{ij}\| = \pm 1$$

Положительный знак означает, что новый ортогональный репер имеет ту же ориентацию, что и старый, а отрицательный — что ориентация репера меняется на обратную.

Теперь посмотрим, как будут меняться координаты при повороте осей Найдем координаты вектора в старой координатной системе

$$x_i = \mathbf{x}\,\mathbf{e_i},$$

и, аналогично, в новой.

$$x'_i = \mathbf{x}\,\mathbf{e'_i}$$

Умножая скалярно на $\mathbf{x}$ равенства (3) и пользуясь последними формулами получаем

$$\begin{aligned} x'_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \\ x'_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \\ x'_3 &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \end{aligned}$$

Другими словами, при повороте осей координаты каждого данного вектора подвергаются тому же ортогональному преобразованию, что и орты.

$$\mathbf{e'_k} = \sum_i A_{ki}\,\mathbf{e_i} \tag{6}$$

$$x'_k = \sum_i A_{ki} x_i \tag{7}$$

Преобразования, обратные (6) и (7) запишутся следующим образом:

$$\mathbf{e}_i = \sum A'_{ik}\,\mathbf{e}'_k = \sum A_{ki}\,\mathbf{e}'_k \tag{8}$$

$$x_i = \sum A'_{ik} x'_k = \sum A_{ki} x'_k \tag{9}$$

Будем говорить, что нам дан *вектор* или *тензор валентности 1* или *ранга 1*, если для каждой из координатных систем нам даны три занумерованных числа, преобразующихся по закону (7).

1.2 Двухвалентные тензоры.

Возьмем два вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. и обозначим через a_{ij} всевозможные произведения

$$a_{ij} = x_i y_j.$$

При повороте осей получим, согласно (7),

$$x'_p = \sum_i A_{pi} x_i$$

и аналогично

$$y'_q = \sum_j A_{qi} x_j$$

Перемножая эти два равенства почленно, получим

$$x'_p y'_q = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} x_i y_j$$

а значит

$$a'_{pq} = \sum_i A_{pi} A_{qj} a_{ij}. \tag{10}$$

Будем говорить, что нам дан тензор валентности два, если в каждой из координатных систем нам заданы девять чисел, занумерованных двумя индексами a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, и преобразующиеся при повороте координатных осей по закону (10).

В дальнейшем будем опускать знак суммы, предполагая, что суммирование производится по повторяющимся индексам.

Определим операции умножения вектора на тензор и тензора на вектор.

Пусть дан тензор P с элементами P_{ij} и вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$

Под скалярным произведением тензора P на вектор $\mathbf{a}$ справа будем понимать новый вектор $\mathbf{b} = P\,\mathbf{a}$, полученный по формуле

$$b_i = P_{ij} a_j$$

Под скалярным произведением P на вектор $\mathbf{a}$ справа будем понимать новый вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a}\,P$, полученный по формуле

$$c_j = a_i P_{ij}$$

Пусть даны два тензора P и Q с элементами P_{ij} и Q_{ij} соответственно. Скалярным произведением тензоров P и Q будем называть тензор S с элементами S_{ij}

$$S_{ij} = P_{ik}Q_{kj}$$

Тензор δ_{ij} можно рассматривать как тензор подстановки индекса: $x_i = \delta_{ij}x_j$.

1.3 Многовалентные тензоры. Тензорная алгебра.

По аналогии с двухвалентным тензором можно ввести понятие о тензоре любой валентности.

Дан тензор валентности m, если для любой координатной системы даны 3^m чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ занумерованных m индексов $i_1 i_2 \ldots i_m = 1, 2, 3$, которые в записи отличаются друг от друга 1-м, 2-м,..., m-м местом записи при букве a, и которые при повороте координатной системы преобразуются по закону

$$a'_{p_1 \ldots p_m} = A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \ldots A_{p_m i_m} a_{i_1 \ldots im} \tag{11}$$

Операции над тензорами

1) сложение тензоров одинаковой валентности: пусть $a_{i_1 \ldots im}$ и $b_{i_1 \ldots im}$ — два тензора одинаковой валентности.

Составим в каждой координатной системе числа $c_{i_1 \ldots im}$ путем сложения соответствующих координат наших тензоров

$$c_{i_1 \ldots im} = a_{i_1 \ldots im} + b_{i_1 \ldots im} \tag{12}$$

Эти числа тоже являются компонентами тензоров. В самом деле, для тензоров $a_{i_1 \ldots im}$ и $b_{i_1 \ldots im}$ по (11) имеет место

$$a'_{p_1 \ldots p_m} = A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \ldots A_{p_m i_m} a_{i_1 \ldots im}$$
$$b'_{p_1 \ldots p_m} = A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \ldots A_{p_m i_m} b_{i_1 \ldots im}$$

Складываем эти равенства почленно

$$c'_{i_1 \ldots im} = A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \ldots A_{p_m i_m} a_{i_1 \ldots im} + A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \ldots A_{p_m i_m} b_{i_1 \ldots im}$$

и пользуемся формулой (12),

$$c'_{i_1 \ldots im} = A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \ldots A_{p_m i_m} c_{i_1 \ldots im}.$$

$c_{i_1\ldots im}$Таким образом доказан тензорный закон преобразования компонент

2) тензорное умножение $\otimes$

$$C = A \otimes B$$

Каждая компонента тензора A умножается на каждую компоненту тензора B. Ранг получившегося тензора равен сумме рангов исходных.

Рассмотрим пример. Пусть размерность пространства равна 2. Тензор A — тензор второго ранга, тензор B — первого ранга. Вычислим компоненты тензора $C = A \otimes B$;

$$\begin{array}{llll} C_{111} = A_{11}B_1, & C_{112} = A_{11}B_2, & C_{121} = A_{12}B_1, & C_{122} = A_{12}B_2, \\ C_{211} = A_{21}B_1, & C_{212} = A_{21}B_2, & C_{221} = A_{22}B_1, & C_{222} = A_{22}B_2. \end{array}$$

3) Свертывания тензоров

$$a_k = a_{kii}$$

$$a'_{pqr} = A_{pi}A_{qj}A_{rk}a_{ijk}$$
$$a'_p = a'_{pss} = A_{pi}A_{sj}A_{sk}a_{ijk}$$
$$A_{sj}A_{sk} = \delta_{jk}$$
$$a'_p = A_{pi}\delta_{jk}a_{ijk}$$
$$a'_p = A_{pi}a_{ijj} = A_{pi}a_i$$

Ранг тензора понижается на 2

Можно рассматривать скалярное произведение тензора на вектор и вектора на тензор как свертку.

4) Подстановка индекса

$$b_{jki} = a_{ijk}$$

Вернемся к случаю двухвалентных тензоров.

Главные оси тензора.

Пусть

$$\mathbf{b} = P\,\mathbf{a}$$

Если $\mathbf{b}$ коллинеарен $\mathbf{a}$, то $\mathbf{a}$ —главное направление тензора. Если при этом $\mathbf{b} = \lambda\,\mathbf{a}$, то λ — главное значение, величина λ показывет во сколько раз тензор увеличивает векторы, направленные по главным осям тензора.

Рассмотрим уравнение

$$P\,\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{a}$$

и составим характеристический многочлен

$$\lambda^3 - \lambda^2(p_{11} + p_{22} + p_{33}) + \\ +\lambda\left(\begin{vmatrix} p_{22} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix}\right) - \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = 0$$

, его корни не зависят от координатной системы,

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора

1.4 Симметричные и кососимметрические тензоры

Тензор называется симметричным, если значение компонент этого тензора не меняется при перестановке двух любых индексов этого тензора.

Тензор называется кососимметрическим, если при транспозиции (перестановке) любых двух индексов у любой координаты, он меняет знак.

Для двухвалентного кососимметрического тензора:

$$c_{ij} = -c_{ji}$$

$$c_{ii} = -c_{ii} \Longrightarrow c_{ii} = 0$$

Докажем теорему о свойствах симметричного тензора

Критерий симметричности. Тензор является симметричным, если и только если $\mathbf{a}\,P\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\,P\,\mathbf{a}$ для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Доказательство. Обозначим компоненты тензора p_{ij}, пусть тензор симметричный, т.е.

$$p_{ij} = p_{ji}$$

$\Rightarrow$

$a_i p_{ij} b_j = b_j p_{ji} a_i$, т.к. матрица симметрична

$\Leftarrow$

пусть

$$a_i p_{ij} b_j = b_j p_{ij} a_j = b_j p_{ji} a_i = a_i p_{ji} b_j$$

в силу произвольности a_i и b_j

Теорема.

Если тензор симметричный, то все собственные значения вещественные.

Пусть λ — какое либо собственное значение, т.е. корень уравнения $P\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$. Имеем систему уравнений $p_{ij}x_j = \lambda x_i$ или

$$(p_{11} - \lambda)x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 = 0,$$

$$p_{12}x_1 + (p_{22} - \lambda)x_2 + p_{23}x_3 = 0,$$

$$p_{13}x_1 + p_{21}x_2 + (p_{33} - \lambda)x_3 = 0.$$

Умножим эти уравнения на $x_p^* = \bar{x}_p$ — комплексно-сопряженное к x_p

$$x_i^* p_{ij} x_j = \lambda x_i^* x_i,$$

где $x_i^* x_i$ — вещественно и неотрицательно $x_i x_i^* > 0$.

$$p_{11}x_1x_1^* + p_{12}x_1^*x_2 + p_{13}x_1^*x_3 +$$

$$+p_{12}x_2^*x_1 + p_{22}x_2^*x_2 + p_{23}x_2^*x_3 +$$

$$+p_{13}x_3^*x_1 + p_{23}x_3^*x_2 + p_{33}x_3^*x_3 =$$

$$= \lambda(x_1x_1^* + x_2x_2^* + x_3x_3^*),$$

где $(x_1x_1^* + x_2x_2^* + x_3x_3^*) > 0$. Произведения $x_i^*x_i$ — вещественные числа. Поэтому те члены суммы, для которых $i = j$ — вещественные числа. Те члены, для которых $i \neq j$ объединим попарно, например, для $i = 1$, $j = 2$ и $i = 2$, $j = 1$ получим $p_{12}(x_1^*x_2 + x_2^*x_1)$, выражение в скобках $(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i) + (a_2 - b_2 i)(a_1 + b_1 i)$ — вещественное число.

Таким образом все λ вещественные числа

Докажем, что векторы, соответствующие этим собственным числам ортогональны.

Пусть λ_1 — корень и соответствующее собственное направление обозначим $\mathbf{e}_1'$.

$$P\,\mathbf{e}_1' = \lambda_1\,\mathbf{e}_1' \tag{13}$$

Пусть E_2 — плоскость, перпендикулярная $\mathbf{e}_1'$. Докажем, что все векторы этой плоскости переходят в векторы той же плоскости. Пусть $\mathbf{x}$ — вектор плоскости E_2, так что $\mathbf{x} \perp \mathbf{e_1'}$

$$\mathbf{e}_1'\,\mathbf{x} = 0.$$

Умножая обе части равенства (13) на $\mathbf{x}$ получаем

$$\mathbf{x}\,P\,\mathbf{e}_1' = \lambda_1\,\mathbf{e}_1'\,x = 0.$$

По критерию симметричности

$$\mathbf{x}\,P\,\mathbf{e}_1' = 0, \tag{14}$$

т.е. векторы, перпендикулярные $\mathbf{e}_1'$, переходят в векторы перпендикулярные $\mathbf{e_1'}$.

Теперь можно рассматривать тензор P на плоскости E_2, поскольку он переводит векторы плоскости E_2 в векторы этой же плоскости. Вводим на плоскости E_2 прямоугольные декартовы координаты и ищем собственные направления с упрощением, рассматривая вместо трехмерного пространства двумерное. Матрица координат будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} p_{11}' & p_{12}' \\ p_{21}' & p_{22}' \end{pmatrix}, \quad p_{12}' = p_{21}'$$

. А характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} p_{11}' - \lambda & p_{12}' \\ p_{21}' & p_{22}' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Мы снова обнаружим наличие собственного направления, которое зададим вектором $\mathbf{e_2'}$. Соответствующее собственное значение обозначим λ_2. Так как вектор $\mathbf{e_2'}$ принадлежит E_2, то он перпендикулярен $\mathbf{e_1'}$.

Наконец, построим единичный вектор $\mathbf{e_3'}$, ортогональный $\mathbf{e_2'}$. Из (14) следует, что $P\,\mathbf{e_3'}$ будет ортогонален $\mathbf{e_1'}$ и $\mathbf{e_2'}$.

Т.к. $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ взаимно перпендикулярны, то λ_1, λ_2, λ_3 дают растяжение или сжатие пространства в отношении $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Каждой точке с координатами x_1', x_2', x_3' соответствует точка $y_1 = \lambda_1 x_1'$ $y_2 = \lambda_2 x_2'$ $y_3 = \lambda_3 x_3'$.

Если $\lambda_1 = 0$, то все пространство переходит в точки плоскости.

Если они все различны, то существуют три собственных вектора (направления)

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то существует плоскость собственных векторов.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то $y_1 = \lambda_1 x_1'$, $y_2 = \lambda_2 x_2'$, $y_3 = \lambda_3 x_3'$. Любое направление является собственным.

Кососимметричные тензоры.

Двухвалентный кососимметричный тензор $a_{ij} = -a_{ji}$ называется бивектором.

$u_1 = -a_{23}$, $u_2 = -a_{31}$, $u_3 = -a_{12}$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{x}\,.$$

В левой координатной системе $u_1 = a_{23}$, $u_2 = a_{31}$, $u_3 = a_{12}$.

Трехвалентный кососимметрический тензор — тривектор.

Рассмотрим трехвалентный кососимметрический тензор с элементами c_{ijk}.

Для любых индексов имеет место соотношение

$$c_{ijk} = -c_{ikj}.$$

Если среди индексов есть одинаковые, то $c_{ijj} = -c_{ijj} = 0$.

Все отличные от нуля — индексы различны — получаем 6 координат.

$$c_{123} = c_{231} = c_{312} = -c_{213} = -c_{321} = -c_{132}$$

При четной подстановке индексов координаты тривектора не меняется, при нечетной — меняется. В результате у тривектора есть единственная существенная координата c_{123}.

Вычислим свертку

$$I = c_{ijk} x_i y_j z_k$$

$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — произвольные векторы.

Формально в этой сумме 27 членов, но большинство из них равны нулю.

Получим

$$\begin{aligned}
I &= c_{123}(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - \\
&\quad -x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2) \\
&= c_{123}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{cases} c_{123}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) & \text{правая система координат} \\ -c_{123}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) & \text{левая система координат} \end{cases}
\end{aligned}$$

c_{123} — относительный инвариант

Таким образом получаем

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk \text{ — четная} \\ -1, & ijk \text{ — нечетная} \end{cases}$$

тензор Ле́ви-Чиви́ты в правом базисе.

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$ — правое векторное произведение в правой координатной системе.

В левом базисе наоборот.

Кососимметрические тензоры большей валентности в трехмерном пространстве равны нулю.

Аксиальные и полярные векторы.

Пусть система координат изменяется следующим образом

$$x' = -x, \quad y' = y, \quad z' = z$$

составляющие полярного вектора изменяются по формулам

$$a_{x'} = -a_x, \quad a_{y'} = a_y, \quad a_{z'} = a_z$$

$$b_{x'} = -b_x, \quad b_{y'} = b_y, \quad b_{z'} = b_z$$

Составляющие аксиального вектора меняют знак, например, составляющие векторного произведения изменятся по закону

$$(a \times b)_{x'} = (a \times b)_x, \quad (a \times b)_{y'} = -(a \times b)_y, \quad (a \times b)_{z'} = -(a \times b)_z$$

Альтернирование

Если дан a_{ijk}, то его можно альтернировать.

$$c_{ijk} = \frac{1}{3!}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} - a_{ikj} - a_{kji} - a_{jik})$$

Похоже на определитель. Если в качестве a_{ijk} взять произведение трех векторов **x**, **y**, **z**, то выражение в скобках — **относительный инвариант**.

Можно получить абсолютный инвариант. 6-тивалентный тензор $c_{i_1i_2i_3j_1j_2i_3}$ кососимметричный по индексам первой и второй тройки имеет единственную существенную координату c_{123123}. При переходе от правой координатной системы к левой она 2 раза умножается на (-1), т.е. не меняет знак, это **абсолютный инвариант**.

Пусть задан произвольный 6-валентный тензор $a_{i_1i_2i_3j_1j_2i_3}$ Проальтернируем по 1 и 2 тройке индексов

$$c_{i_1i_2i_3j_1j_2j_3} = a_{[i_1i_2i_3][j_1j_2j_3]}$$

Частный случай

$$c_{i_1i_2i_3j_1j_2j_3} = a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}$$

$$c_{i_1i_2i_3j_1j_2j_3} = a_{i_1i_2i_3[j_1j_2j_3]} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & a_{i_1j_3} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & a_{i_2j_3} \\ a_{i_3j_1} & a_{i_3j_2} & a_{i_3j_3} \end{vmatrix}$$

Близкие процессы альтернация и составление определителя. Полученный тензор кососимметричен и по первой тройке индексов. Можно просто переставить строки определителя.

Этот закон можно пояснить другими словами

$$a'_{pq} = A_{pi}A_{qj}a_{kj}$$

$$\det|a'_{pq}| = \det\|A_{pi}\| \det\|A_{qj}\| \det\|a_{ij}\|$$

Инвариант имеет геометрический смысл: так меняется объем тела при преобразовании a_{ij}

Симметрирование: $b_{ijk} = \dfrac{1}{3!}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{ikj} + a_{jki} + a_{kji})$

1.5 Теоремы сокращения

Теорема 1

Если для любой прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ мы имеем совокупность трех величин b_1, b_2, b_3 и если при переходе к любой другой системе координат (прямоугольной) и для любого вектора $\mathbf{a}$ выполнено

$$a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3' = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

то величины b_1, b_2, b_3 определяют вектор $\mathbf{b}$

Доказательство:

Пусть $a_1' = 1$, $a_2' = 0$, $a_3' = 0$

$$b_1' = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Система координат преобразуется по закону

$$e_i' = A_{ik}e_k$$

$$e_i = A_{ki}e_k'$$

$$x_i = A_{ki}x_k'$$

Т.к. $\mathbf{a}$ — вектор, то $a_1 = A_{11}$, $a_2 = A_{12}$, $a_3 = A_{13}$.

$$b_1' = A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + A_{13}b_3$$

т.е. преобразуется по закону преобразования векторов. Аналогично для b_2', b_3'.

Имеет место аналогичная теорема для тензоров:

Теорема 2.

Пусть для любой прямоугольной системы координат имеем совокупность девяти величин p_{kj}, $k, j = 1, 2, 3$ и пусть линейные соотношения

$$\begin{aligned} b_1 &= p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + p_{13}a_3 \\ b_2 &= p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + p_{23}a_3 \\ b_3 &= p_{31}a_1 + p_{32}a_2 + p_{33}a_3 \end{aligned}$$

(или $b_k = p_{kj}a_j$) определяют в любой координатной системе совокупность трех величин b_1, b_2, b_3. Если это компоненты вектора всегда, так только за a_i взяты компоненты какого либо вектора, то p_{ij} определяют тензор P.

Доказательство. Выберем систему координат $Ox'_1x'_2x'_3$

Выразим p'_{kl} через p_{rs}. Выберем $\mathbf{a}$ так, что $a'_1 = 1$, $a'_k = 0$, $k = 2, 3$.

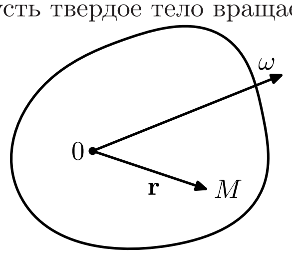
$b'_k = p'_{k1}$, т.к. $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ — векторы.

$b'_k = A_{kr}b_r$, $a_s = A_{1s}a'_1$.

$p'_{k1} = b'_k = A_{kr}b_r = A_{kr}p_{rj}a_j = A_{kr}A_{1j}p_{rj}$, т.е. изменяется по тензорному закону.

1.6 Тензор моментов инерции.

Пусть твердое тело вращается около неподвижной точки 0



Выразим главный момент количества движения относительно точки 0 через вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

$M \to \mathbf{r}$, тогда скорость точки M

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Если взять малый элемент dm, количество движения

$$\mathbf{v}\, dm = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\, dm$$

по определению моментом количества движения будет

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm = \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dm$$

Сумма всех этих моментов будет

$$I = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dm$$

Пользуясь равенством $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} r^2 - \mathbf{r}(r\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \mathbf{r}(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3),$$

получаем

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \omega_1 \int (x_2^2 + x_3^2) dm - \omega_2 \int x_1 x_2 dm - \omega_3 \int x_1 x_3 dm \\
l_2 &= -\omega_1 \int x_2 x_1 dm + \omega_2 \int (x_1^2 + x_3^2) dm - \omega_3 \int x_2 x_3 dm \\
l_3 &= -\omega_1 \int x_3 x_1 dm - \omega_2 \int x_2 x_3 dm + \omega_3 \int (x_1^2 + x_2^2) dm
\end{aligned}
$$

Формулы могут быть записаны в виде

$$\mathbf{l} = J\boldsymbol{\omega}$$

или

$$
\begin{aligned}
l_1 &= J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 \\
l_2 &= J_{21}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3 \\
l_3 &= J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3
\end{aligned}
$$

Тензор моментов инерции, очевидно, симметричен. При замене координат он преобразуется по тензорному закону.

1.7 Тензорные поля.

Будем говорить, что дано тензорное поле, если в каждой точке M пространства задан некоторый тензор постоянной валентности, меняющийся от точки к точке.

Тензорное поле нулевой валентности — скалярное поле (температура). Одновалентное тензорное поле — векторное поле. Примеры векторных полей: вектор электрического или магнитного поля, вектор скорости движения жидкости в среде.

Операции для тензорных полей определяются в каждой точке.

Дифференцирование по скалярному аргументу — дифференцируется каждая компонента.

Градиент вектора по другому вектору

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

$$((\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a})_1 = v_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial a_x}{\partial z}.$$

Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$$

Дадим $\mathbf{r}$ бесконечно малое приращение, тогда

$$\begin{aligned}
da_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3 \\
da_2 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}dx_3 \\
da_3 &= \frac{\partial a_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}dx_3
\end{aligned}$$

На основании теоремы о сокращении можно сделать выводы, что коэффициенты образуют тензор.

Тензор, производный от вектора $\mathbf{a}$ по вектору $\mathbf{r}$

$$\frac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Формулы можно записать следующим образом

$$d\,\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{r}} \cdot d\,\mathbf{r}$$

Введем в рассмотрение тензор, сопряженный с (15),

$$\nabla\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Можно записать

$$d\,\mathbf{a} = d\,\mathbf{r} \cdot \nabla\,\mathbf{a}$$

Разложим $\dfrac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{r}}$ на симметричную и кососимметричную часть.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{da_1}{dx_2}+\dfrac{da_2}{dx_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{da_1}{dx_3}+\dfrac{da_3}{dx_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{da_1}{dx_2}+\dfrac{da_2}{dx_3}\right) & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{da_2}{dx_3}+\dfrac{da_3}{dx_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{da_1}{dx_3}+\dfrac{da_3}{dx_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{da_2}{dx_3}+\dfrac{da_3}{dx_2}\right) & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{r}}+\nabla\,\mathbf{a}\right)$$

Пусть $\mathbf{a}$ — вектор смещения частиц упругого тела. Тогда это называется деформационным тензором.

Антисимметричная часть

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\,\mathbf{a}}{dr}-\nabla\,\mathbf{a}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a}$$

Тензор $\dfrac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{r}}$ — симметричен $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{a}$ — потенциальное векторное поле, $\mathbf{a}=\operatorname{grad}\varphi$.

Замечание Для симметричного тензора P справедливо равенство

$$\mathbf{a}\,P=P\,\mathbf{a}$$

а через антисимметричного тензора B

$$B\cdot\mathbf{a}=\omega\times\mathbf{a},$$

$$\mathbf{a}\cdot B=\mathbf{a}\times\omega=-B\cdot\mathbf{a}\,.$$

Пусть $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ — вектор смещения частицы упругого тела, тогда

$$\frac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{r}}=\Phi+A=U.$$

Φ — симметричная часть $\Phi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{r}} + \nabla\,\mathbf{a}\right)$

A — антисимметричная часть $A = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{r}} - \nabla a\right)$

$$d\,\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{a}}{d\,\mathbf{r}} \cdot d\,\mathbf{r} = \Phi d\,\mathbf{r} + A \cdot d\,\mathbf{r}$$

$$A \cdot d\,\mathbf{r} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a} \times d\,\mathbf{r}$$

$$d\,\mathbf{a} = \Phi d\,\mathbf{r} + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a} \times d\,\mathbf{r}$$

Эта формула определяет относительные перемещения различных точек бесконечно малого объема, окружающих рассматриваемую точку, в виде суммы двух членов, последний из которых дает поворот объема как целого, а первый определяет истинную деформацию.

1.8 Кинематическое истолкование векторного поля

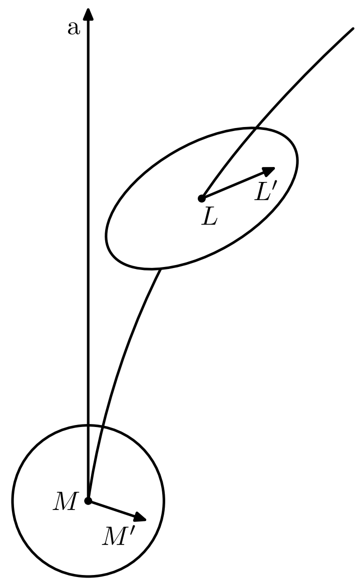
Пусть Ω — область, в которой задано векторное поле, заполнена некоторой подвижной деформирующейся средой, например жидкостью, $\mathbf{a}(M)$ — скорость, с которой движется та или иная частица. Какой смысл имеет производный тензор векторного поля?

Пусть движение стационарно, т.е. поле скоростей не зависит от времени. Вырежем шарик с центром в точке M и с бесконечно малым радиусом ρ и будем за ним следить. Он будет двигаться, вращаясь и деформируясь.

Каждая точка описывает траекторию $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t)$

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, x_3)$$

За бесконечно малый промежуток времени частица смещается на $\varepsilon\,\mathbf{a}(M)$. Производными высших порядков пренебрегаем.



Пусть M' — точка в шарике.

$$\overrightarrow{ML} \approx \varepsilon\, \mathbf{a}(M)$$

$$\overrightarrow{M'L'} \approx \varepsilon\, \mathbf{a}(M')$$

$$\overrightarrow{MM'} \longrightarrow \overrightarrow{LL'}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{LL'} &= \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'L'} = \overrightarrow{MM'} + (\overrightarrow{M'L'} - \overrightarrow{ML}) \approx \\ &\approx \overrightarrow{MM'} + \varepsilon\,(a(M') - a(M)) \end{aligned}$$

ε и ρ бесконечно малые и не зависят от друг от друга.

$\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M) = \triangle\, \mathbf{a}(M) = U\, \mathbf{z}$,где $\mathbf{z} = \overrightarrow{MM'}$

$$\overrightarrow{LL'} = (E + \varepsilon U)\, \mathbf{z}$$

Преобразование $\overrightarrow{MM'} \longrightarrow \overrightarrow{LL'}$ происходит (с указанной степенью точности) посредством действия тензора $E + \varepsilon U$, где U — производный тензор векторного поля скоростей, ε – протекший бесконечно малый промежуток времени.

Бесконечно малые векторы, исходящие из центра капли, переходят в векторы, исходящие из центра смещенной (и деформированной) капли, подвергаясь действию тензора $(E+\varepsilon U)$

$$U = A + \Phi$$

деформация посредством $(E+\varepsilon\Phi)$; поворот посредством $E+\varepsilon A$

Рассмотрим тензор мало отличающийся от единичного

$$E+\varepsilon U = E+\varepsilon A+\varepsilon\Phi$$

$$\mathbf{y} = (E+\varepsilon U)\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + \varepsilon A\,\mathbf{x} + \varepsilon\Phi\,\mathbf{x}$$

A — кососимметричный, Φ — симметричный.

Рассмотрим частный случай, когда A отсутствует.

Тензор симметричный и он дает чистую деформацию пространства.

$$E+\varepsilon\Phi = \delta_{ij}+\varepsilon f_{ij}$$

Найдем собственные числа и собственные направления тензора $E+\varepsilon\Phi$. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения, а $\mathbf{x}$ — собственное направление тензора Φ, соответствующее одному собственному значению, например λ_1, тогда

$$(E+\varepsilon\Phi)\,\mathbf{x} = E\,\mathbf{x} + \varepsilon\Phi\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + \varepsilon\lambda_1\,\mathbf{x} = (1+\varepsilon\lambda_1)\,\mathbf{x}$$

$\mathbf{x}$ — собственное направление, а $1+\varepsilon\lambda_1$, $1+\varepsilon\lambda_2$, $1+\varepsilon\lambda_3$ — собственные значения $E+\varepsilon\Phi$.

Собственные значения — это коэффициенты бесконечно малого растяжения (сжатия), производимого $E+\varepsilon\Phi$

Пусть теперь $\Phi=0$, т.е. рассмотрим $E+\varepsilon A$

$$A\,\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}$$

$$E+\varepsilon A = \mathbf{x} + \varepsilon\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}$$

поворот около оси, проходящей через O и направленной по $\boldsymbol{\omega}$ на бесконечно малый угол $\varepsilon|\boldsymbol{\omega}|$. Если рассмотреть вращение пространства как твердого тела вокруг O с постоянным вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, это означает, что вращение совершается вокруг оси, направленной по $\boldsymbol{\omega}$, причем за единицу времени совершается поворот на угол $|\omega|$. Линейная скорость движения каждой точки M выражается вектором

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$$

За бесконечно малый промежуток времени ε точка сместится на вектор

$$\varepsilon\,\mathbf{v} = \varepsilon\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

$$\overrightarrow{OM'} = \mathbf{r} + \varepsilon\,\mathbf{v} = \mathbf{r} + \varepsilon\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

т.е. это поворот пространства за бесконечно малый промежуток времени ε при векторе угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Общий случай: $(E+\varepsilon\Phi)(E+\varepsilon A)\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + \varepsilon\Phi\,\mathbf{x} + \varepsilon A\,\mathbf{x} + \varepsilon^2\Phi A\,\mathbf{x}$ последний член отбросим, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка.

Результата действия произвольного тензора $E+\varepsilon U$ представляет собой наложение бесконечно малой чистой деформации и бесконечно малого поворота.

Коэффициент объемного расширения в данном случае

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{V}}{V} &= \det|\delta_{ij} + |\varepsilon u_{ij}| \approx \begin{vmatrix} 1+\varepsilon u_{11} & \varepsilon u_{12} & \varepsilon u_{13} \\ \varepsilon u_{21} & 1+\varepsilon u_{22} & \varepsilon u_{23} \\ \varepsilon u_{31} & \varepsilon u_{32} & 1+\varepsilon u_{33} \end{vmatrix} \approx \\ &\approx 1 + \varepsilon(u_{11} + u_{22} + u_{33}). \end{aligned}$$

При раскрытии определителя бесконечно малыми высших порядков мы пренебрегли.

Вращение любой бесконечно малой капли жидкости в процессе ее движения происходит с переменным вектором угловой скорости, равным в каждой точке $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Симметричная часть называется тензором скоростей деформаций.

Коэффициент объемного расширения

$$\frac{\widetilde{V}}{V} = 1 + \varepsilon\,\mathbf{a}_{ii},$$

$$\frac{\widetilde{V}}{V} = 1 + \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a}\,.$$

Относительное объемное расширение равно $\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a}$.

Если $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$, то движение происходит без изменения объема

Векторное поле называется соленоидальным, если $\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = 0$

Векторное поле потенциально, если $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} f(M)$, т.е. $a_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. В этом случае $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$.

Дифференцирование тензора.

Рассмотрим тензорное поле $a_{ij} = a_{ij}(M) = a_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ Нас интересует вопрос: как меняется тензор от точки к точке в бесконечно малой окрестности точки M. Для этой цели смещаемся из точки M в бесконечно близкую точку M'. мы движемся по некоторой параметрически заданной кривой

$$x_1(t), \quad x_2(t), \quad x_3(t),$$

причем при заданном значении t мы находимся в точке M, а при значении $t+\Delta t$ в точке M'. Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ выражается формулой

$$\overrightarrow{OM} = x_i(t)\,\mathbf{e}_i,$$

а его дифференциал

$$dM = dx_i(t)\,\mathbf{e}_i \approx \overrightarrow{MM'}.$$

$da_{ij} = \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} dx_l$ — абсолютный дифференциал тензорного поля a_{ij}. Он зависит от точки и смещения.

Проверим, что это тензор

$$\mathbf{e'_q} = A_{qi}\,\mathbf{e}_i$$

$a'_{ij} = A_{is}A_{jp}a_{sp}$, A — постоянная

$$da'_{ij} = A_{is}A_{jp}\frac{\partial a_{sp}}{\partial x_l}A_{lk}dx_k$$

тензор. Будем обозначать

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} = \nabla_l a_{ij}.$$

По какому закону будет преобразовываться?

В старых координатах

$$x_l = A_{sl}x'_s.$$

В новых координатах

$$\nabla_s a'_{pq} = \frac{\partial a'_{pq}}{\partial x'_s} = \frac{\partial a'_{pq}}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x'_s},$$

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_s} = A_{sl},$$

$$\frac{\partial a'_{pq}}{\partial x_l} = A_{pi}A_{qj}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l},$$

$$\nabla_s a'_{pq} = A_{pi}A_{qj}A_{sl}\nabla_l a_{ij}.$$

Таким образом, при замене координат $\nabla_l a_{ij}$ преобразуется как трехвалентный тензор.

Совокупность всех частных производных 1-го порядка образуют тензор тензор валентности на единицу больше.

Тензор напряжений

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}\,dS$$

F — сила, действующая на площадку S, $F = \Phi(\mathbf{s})$. Для любого α

$$\Phi(\alpha\,\mathbf{s}) = \alpha\Phi(\mathbf{s})$$

$$F = \Phi(\mathbf{n})dS,$$

где $\Phi(\mathbf{n})$ — сила напряжения на данной площадке, отнесенная к единице площади, т.е. напряжение на данной площадке.

$$F = PdS$$

$P = \Phi(\mathbf{n})$ выражается через направляющие косинусы положительной нормали $\mathbf{n}$.

$$P_i = f_{ij}n_j$$

$$F_i = f_{ij}s_j$$

Координаты вектора силы выражаются через координаты вектора площадки, сила $\mathbf{F}$ получается из вектора площадки $\mathbf{s}$ действием на него тензора f — тензора напряжений.

В теории упругости считается, что для однородных и изотропных тел

$$f_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\tilde{b}_{ij},$$

где $\tilde{b}_{ij}$ — тензор деформаций. Коэффициенты λ, μ — коэффициенты Ламе, постоянные для данного тела.

$$\theta = \sum_i \tilde{b}_{ii}$$

относительное объемное расширение, инвариант.

Поток векторного поля через поверхность. Поток тензорного поля через поверхность.

Пусть S — поверхность, $\mathbf{a}$ — векторное поле. Потоком векторного поля $\mathbf{a}$ через поверхность S называется

$$p = \iint\limits_S \mathbf{a}\,\mathbf{n}\,dS,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности. Поток выражает, например, объем жидкости, протекающей через поверхность S в направлении от отрицательной стороны к положительной.

Пусть S — поверхность, A — тензорное поле. Потоком тензора называется

$$\mathbf{p} = \iint\limits_S A\,\mathbf{n}\,dS.$$

$\mathbf{p}$ — вектор. Интегрирование $A\,\mathbf{n}$ — интегрирование каждой компоненты.

$$p_i = \iint a_{ij} n_j dS$$

Если в сплошной среде имеются силы напряжения, характеризуемые полем тензора напряжения F с координатами f_{ij}, то поток тензора — равнодействующая всех сил напряжения, приложенных к S.

Теорема Остроградского.

Для векторного поля.

$$\iint\limits_S \mathbf{a}\,\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV$$

Рассмотрим поток тензорного поля A через S

$$p_i = \iint\limits_S (a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + a_{i3}n_3)dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3} \right) dV$$

Дивергенция тензора поля — векторное поле.

$$\overrightarrow{\operatorname{div} A} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} = \nabla_j a_{ij}$$

т.е. производится свертка по первому и третьему индексам.

$$p_i = \iiint\limits_V (\overrightarrow{\operatorname{div} A})_i dV$$

$$\mathbf{p} = \iiint\limits_V \overrightarrow{\operatorname{div} A} dV$$

Теорема Остроградского для потока тензорного поля через замкнутую поверхность имеет вид:

$$\iint\limits_S A\,\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_V \overrightarrow{\operatorname{div} A} dV$$

Уравнения гидродинамики.

Пусть S — поверхность, ограничивающая жидкую среду. Внутри жидкости действуют объемные силы, т.е. дано векторное поле $Q(M,t)$, выражающее в каждой точке и в каждый момент силу, действующую на элемент жидкости и отнесенную к единице массы.

Равнодействующая сил напряжения, действующих на замкнутую поверхность S, где $\mathbf{n}$ направлена по внешней нормали, равна

$$\mathbf{p} = \iint\limits_S \Phi\,\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\Phi dV.$$

Равнодействующая объемных сил

$$\iiint Q\rho dV,$$

где ρdV — элемент массы, $Q\rho dV$ — объемная сила, действующая на этот элемент массы.

Выразим равнодействующую сил инерции для жидкости, заключенной внутри S. Скорость каждой частицы выражается вектором $\mathbf{v}(M,t)$, ускорение

$$\frac{d\,\mathbf{v}}{dt} + A\,\mathbf{v},$$

где A — производный тензор векторного поля $\mathbf{v}(M,t)$.

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + a_{ij}v_j$$

Тогда равнодействующая сил инерции равна

$$-\iiint \left(\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial t} + A\,\mathbf{v}\right)\rho dV.$$

Сумма всех сил, действующих на рассматриваемую часть жидкости, включая силы инерции, должна равняться нулю. Поэтому

$$\iiint \left(\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Phi + Q - \frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial t} - A\,\mathbf{v}\right)\rho dV = 0$$

Ввиду произвольности области, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A\,\mathbf{v} = Q + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Phi.$$

2 Тензорная алгебра

2.1 Аффинное пространство n измерений. Аффинная координатная система.

Будем говорить, что дано аффинное пространство n измерений, если выполнены следующие аксиомы

1. существует по крайней мере одна точка;
2. каждой паре точек A и B, заданных в определенном порядке поставлен в соответствие в соответствие один вектор $\overrightarrow{AB}$;

3. для каждой точки A и для каждого вектора $\mathbf{x}$ существует одна и только одна точка B такая, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$;
4. если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ — аксиома параллелограмма;
5. каждому вектору $\mathbf{x}$ и каждому числу α поставлен в соответствие определенный вектор, который будем обозначать $\alpha\,\mathbf{x}$;
6. $1\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$;
7. $(\alpha+\beta)\,\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{x}$;
8. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{y}$;
9. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ следовательно для любого вектора $\mathbf{x}$ выполнено: $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
10. существуют n линейно независимых векторов но любые $(n+1)$ векторов — зависимы.

В нашем пространстве существуют n линейно независимых векторов. Обозначим их $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$.

Присоединим вектор $\mathbf{x}$, получим систему $(n+1)$ зависимых векторов $\alpha\,\mathbf{x} + \alpha_1\,\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\,\mathbf{e}_n = 0$. $\alpha \neq 0$, иначе бы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ были зависимы

$$\mathbf{x} = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + ... + x^n\,\mathbf{e}_n\,.$$

Индекс вверху показывает на характер преобразования. Любой вектор n-мерного аффинного пространства может быть разложен по n выбранным линейно независимым векторам. Например, для $n = 3$

$$\mathbf{x} = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3$$

Аффиный репер — совокупность какой-либо точки 0 и занумерованных линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, которые для наглядности будем представлять себе отложенными от точки 0.

Эти координаты определяются единственным образом.

Если существуют два различных разложения

$$\mathbf{x} = x^1\,\mathbf{e}_1 + ... + x^n\,\mathbf{e}_n = y^1\,\mathbf{e}_1 + ... + y^n\,\mathbf{e}_n,$$

то

$$(x^1 - y^1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (x^n - y^n)\,\mathbf{e}_n = 0,$$

что невозможно по линейной независимости $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Аффинные координаты точки M это аффинные координаты вектора $\overrightarrow{OM}$.

Как можно преобразовывать реперы?

Пусть $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ — векторы другой координатной системы — нового репера. Каждый из векторов может быть представлен

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{1'} = A_{1'}^1\,\mathbf{e}_1 + A_{1'}^2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{1'}^n\,\mathbf{e}_n;\\
&\mathbf{e}_{2'} = A_{2'}^1\,\mathbf{e}_1 + A_{2'}^2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{2'}^n\,\mathbf{e}_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{e}_{n'} = A_{1'}^n\,\mathbf{e}_1 + A_{2'}^n\,\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{n'}^n\,\mathbf{e}_n
\end{aligned}
$$

Объединяя формулы можно написать $\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^i\,\mathbf{e}_i$ (суммирование по повторяющемуся индексу)

Условием преобразования является линейная независимость строк матрицы, состоящей из коэффициентов

$$
\begin{pmatrix}
A_{1'}^1 & A_{1'}^2 & . & . & A_{1'}^n\\
A_{2'}^1 & A_{2'}^2 & . & . & A_{2'}^n\\
. & . & . & . & .\\
A_{n'}^1 & A_{n'}^2 & . & . & A_{n'}^n
\end{pmatrix},
$$

$$\det \|A_{i'}^i\| \neq 0.$$

Тогда существует обратная матрица. Будем обозначать ее $B_i^{i'}$. Можно записать

$$\mathbf{e}_i = B_i^{i'}\,\mathbf{e}_{i'}$$

или

$$\mathbf{e}_i = B_i^{1'}\,\mathbf{e}_{1'} + ... + B_i^{n'}\,\mathbf{e}_{n'}$$

Матрица B взаимно обратная

$$
\begin{pmatrix}
B_1^{1'} & B_1^{2'} & . & . & B_1^{n'}\\
B_2^{1'} & B_2^{2'} & . & . & B_2^{n'}\\
. & . & . & . & .\\
B_n^{1'} & B_n^{2'} & . & . & B_n^{n'}
\end{pmatrix}
$$

Единичную матрицу будем обозначать

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Тогда можно записать

$$B^{j'}_k A^k_{i'} = \delta^{j'}_{i'},$$

$$A^j_{k'} B^{k'}_i = \delta^i_j$$

или

$$\mathbf{e}_i = B^{i'}_i A^j_{i'} \, \mathbf{e}_j$$

Как будут выражаться новые координаты через старые:

$$\mathbf{x} = x^i \, \mathbf{e}_i = x^{i'} \, \mathbf{e}_{i'}$$

$$\mathbf{x} = \underbrace{x^i B^{i'}_i}_{x^{i'}} \mathbf{e}_{i'}, \quad x^{i'} = x^i B^{i'}_i$$

Итак

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \, \mathbf{e}_i$$

$$x^{i'} = x^i B^{i'}_i$$

2.2 Контравариантные тензоры

Введем понятие о контравариантном тензоре. Важнейший пример одновалентного контравариантного тензора — координаты фиксированного вектора. Будем говорить, что дан контравариантный одновалентный тензор, если при замене координат он меняется по закону

$$a^{i'} = B^{i'}_i a^i.$$

"Контравариантный" — противопреобразующийся, не так, как репер.

Определим k-раз контравариантный тензор, как тензор, преобразующийся по закону

$$a^{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = B^{i'_1}_{i_1} B^{i'_2}_{i_2} \ldots B^{i'_k}_{i_k} a^{i_1 i_2 \ldots i_k}, \qquad (k, 0)$$

2.3 Ковариантный тензор.

Пусть каждому $\mathbf{x}$ соответствует число φ:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}).$$

И выполнены соотношения

$$\forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \quad \varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \varphi(\mathbf{x}_1) + \varphi(\mathbf{x}_2)$$

$$\forall \alpha, \quad \varphi(\alpha\, \mathbf{x}) = \alpha \varphi(\mathbf{x})$$

Т.е. $\varphi(\mathbf{x})$ — линейная функция от вектора $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = x^i\, \mathbf{e}_i$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^1\, \mathbf{e}_1 + ... + x^n\, \mathbf{e}_n) = x^1 \varphi(\mathbf{e}_1) + ... + x^n \varphi(\mathbf{e}_n)$$

$$\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_i x^i$$

В другой системе координат

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_{i'} x^{i'},$$

$$\varphi_{i'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'}),$$

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\, \mathbf{e}_i,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{i'} &= \varphi(A^1_{i'}\, \mathbf{e}_1 + A^2_{i'}\, \mathbf{e}_2 + \ldots + A^n_{i'}\, \mathbf{e}_n) \\ &= A^1_{i'} \varphi(\mathbf{e}_1) + A^2_{i'} \varphi(\mathbf{e}_2) + \ldots + A^n_{i'} \varphi(\mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Таким образом получаем $\varphi_{i'} = A^i_{i'} \varphi_i$

Закон преобразования совпадает с законом преобразования репера.

Будем говорить, что дан одновалентный ковариантный тензор, если при замене координат он преобразуется по закону

$$a_{i'} = A^i_{i'} a_i.$$

“Ковариантный” — сопреобразующиеся.

Будем говорить, что дан k раз ковариантный тензор, если при замене координат он преобразуется по закону

$$a_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ldots A^{i_k}_{i'_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

Примером ковариантного одновалентного тензора или ковектора может служить градиент функции. В самом деле, рассмотрим $\operatorname{grad} f$, его компонента равна $\frac{\partial f}{\partial x^i}$. В другой системе координат

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}A^i_{i'}$$

преобразование происходит по ковариантному закону,

$$C_{i'} = A^i_{i'}C_i.$$

Таким образом, градиент — ковектор Пусть теперь

$$\mathbf{y} = U\,\mathbf{x}$$

при этом выполнены следующие соотношения

$$U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = U\,\mathbf{x}_1 + U\,\mathbf{x}_2,$$

$$U(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha U\,\mathbf{x}\,.$$

Тогда

$$U\,\mathbf{e}_i = u^1_i\,\mathbf{e}_1 + u^2_i\,\mathbf{e}_2 + ... + u^n_i\,\mathbf{e}_n = u^j_i\,\mathbf{e}_j\,.$$

Учитывая, что

$$x = x^i\,\mathbf{e}_i$$

и пользуясь свойством линейности отображения U

$$y = x^i u^j_i\,\mathbf{e}_j = y^j\,\mathbf{e}_j,$$

получаем

$$y^j = u^j_i x^i.$$

u^j_i — компоненты тензора.

В новой системе координат

$$U\,\mathbf{e}_{i'} = u^{j'}_{i'}\,\mathbf{e}_{j'}$$

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\,\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_j = B^{i'}_j\,\mathbf{e}_{i'}$$

Компоненты U преобразуются по закону

$$U\,\mathbf{e}_{i'} = U(A^i_{i'}\,\mathbf{e}_i) = A^i_{i'}U\,\mathbf{e}_i = A^i_{i'}u^j_i\,\mathbf{e}_j = A^i_{i'}u^j_i B^{j'}_j\,\mathbf{e}_{j'}$$

Компонент преобразования

$$u_{i'}^{j'} = A_{i'}^{i} B_{j}^{j'} u_{j}^{i}, \qquad (1,1)$$

смешанный тензор 1-раз ковариантный, 1 раз контравариантный.

Будем говорить, что дан $(p+q)$ валентный тензор, p раз контравариантный и q раз ковариантный, (p,q)

$$a_{i'_1 \dots i'_q}^{j'_1 \dots j'_p} = B_{j_1}^{j'_1} B_{j_2}^{j'_2} \dots B_{j_p}^{j'_p} A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \dots A_{i'_q}^{i_q} a_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}$$

2.4 Операции над тензорами.

1. Сложение — можно складывать тензоры одинаковой валентности. В результате получаем тензор той же валентности, что и слагаемые.

Инвариантный характер операции сложения и остальных тензорных операций следует понимать в том смысле, что они дают в результате вполне определенный тензор, не зависящий от того, в какой координатной системе происходит выкладка.

$$z^i = x^i + y^i$$

z^i — координата вполне определенного тензора.

2. Умножение тензоров.

Рассмотрим пример: пусть $u_j^i = b^i c_j$ — мультипликативный, т.е. получен умножением, тогда если $y = Ux$, то

$$y^i = u_j^i x^j$$

или $y^i = b^i c_j x^j$, $c_j x^j$ можно истолковать как линейную скалярную функцию от x, U — диада, ее действие — постоянный вектор умножается на скалярную функцию.

3. Свертывание.

Пусть дан тензор типа a_{pq}^{ij}. Рассмотрим следующее выражение

$$a_{p1}^{1j} + a_{p2}^{2j} + ... + a_{pn}^{nj} = b_p^j$$

Это тоже тензор.

Проверим, что закон его преобразования — тензорный:

$$a_{p'q'}^{i'j'} = B_i^{i'} B_j^{j'} A_{p'}^{p} A_{q'}^{q} a_{pq}^{ij}$$

$$b^{i'}_{q'} = a^{i's}_{sq'} = B^{i'}_i \underbrace{B^s_j A^p_s}_{\delta^p_j} A^q_{q'} a^{ij}_{pq} = B^{i'}_i A^q_{q'} \delta^p_j a^{ij}_{pq} = B^{i'}_i A^q_{q'} a^{is}_{sq} = B^{i'}_i A^q_{q'} b^i_q$$

4. Подстановка индекса. Альтернирование и симметрирование.

Пусть дан a^{ij}_{pqr}. Можно составить новый по другому нумеруя b^{ij}_{pqr}

$$b^{ij}_{pqr} = a^{ij}_{rpq}$$

b^{ij}_{pqr} получен круговой подстановкой индекса. Получаем тензор того же строения.

Подстановка индекса — по месту написания. Верхние и нижние индексы менять нельзя.

Симметрирование.

При перестановке индексов имеем $N!$ подстановок.

Если $N = 1$ — ничего не меняется.

Если $N = 2$ — симметрирование, $a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$

Если $N = 3$ — $a_{(ijk)} = \dfrac{1}{6}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{jik} + a_{ikj} + a_{kji})$

Тензор называется симметричным по нескольким индексам, если он не меняется при транспозиции этих индексов.

Альтернирование.

Четные и нечетные подстановки.

$N = 1$ — ничего

$N = 2$ — $a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$

$N = 3$ — $a_{[ijk]} = \dfrac{1}{6}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} - a_{jik} - a_{ikj} - a_{kji})$

Кососимметрический, если он умножается на -1 при любой нечетной подстановке и на $+1$ при четной.

При альтернации — кососимметрический.

Отметим важное свойство тензоров.

Теорема сокращения.

Пусть дан T^k_{ij}, в соответствие каждому ковариантному индексу приводим контравариантный вектор $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, а контравариантному ковектор $\mathbf{w}$, тогда

$$T^k_{ij} u^i v^j w_k = f.$$

И наоборот, если для любой системы координат имеется совокупность n^3 величин T^k_{ij} и для любых компонентов векторов u^i, v^j, w^k выражение является инвариантом, то T^k_{ij} — тензор 2 раза ковариантный, 1 раз контравариантный.

Т.к. система координат произвольная, то можно в качестве векторов взять $u^{i'} = \delta_p^{i'}$, $v^{j'} = \delta_q^{j'}$, $w^{k'} = \delta_{k'}^r$.

Тогда в новой системе координат

$$\widetilde{f} = T_{pq}^r$$

В старой системе координат

$$u^i = A_{i'}^i u^{i'} = A_{i'}^i \delta_p^{i'} = A_p^i$$

$$v^i = A_{j'}^j v^{j'} = A_{j'}^j \delta_q^{j'} = A_q^j$$

$$w_k = B_k^{k'} w_{k'} = B_k^{k'} \delta_{k'}^r = B_k^r$$

Преобразование происходит по тензорному закону

$$f = T_{ij}^k A_p^i A_q^j B_k^r = \widetilde{f}$$

2.5 Метрический тензор

Введем скалярное произведение. Зададим в n-мерном пространстве билинейную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Условие невырожденности: $\forall\, \mathbf{x} \neq 0\ \exists\, \mathbf{y}$:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$$

В остальном все произвольно.

Евклидовым пространством будем называть n-мерное аффинное пространство, в котором задана фиксированная билинейная скалярная функция двух векторных аргументов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, удовлетворяющая свойству симметрии и невырожденности. Эту функцию будем называть скалярным произведением и обозначать $\mathbf{x}\,\mathbf{y}$ или $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Два вектора называются ортогональными, если

$$\mathbf{x}\,\mathbf{y} = 0$$

Длиной вектора $\mathbf{x}$ будем называть $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ и обозначать $|\,\mathbf{x}\,|$.

$$|\,\mathbf{x}\,| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

Расстояние между точками A и B называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$

$$|AB| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$$

Скалярное произведение как билинейная функция обладает следующими свойствами:

$$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$

$$(\alpha\,\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Такие же свойства можем записать и по второму аргументу.

Задание билинейной функции эквивалентно заданию дважды ковариантного тензора φ_{ij}, его коэффициенты определяются следующими соотношениями

$$\varphi_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$$

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{ij} x^i y^j.$$

В случае скалярного произведения $\mathbf{x}\,\mathbf{y}$ тензор коэффициентов будем называть метрическим (фундаментальным) тензором и обозначать g_{ij}

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j,$$

$$\mathbf{x}\,\mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j.$$

В случае $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ получаем скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$, который выражается квадратичной формулой

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = g_{ij} x^i x^j$$

Условие симметрии ($\mathbf{x}\,\mathbf{y} = \mathbf{y}\,\mathbf{x}$) эквивалентно симметричности тензора

$$g_{ij} = g_{ji}.$$

Условие невырожденности для любого $\mathbf{x} \neq 0$ существует неортогональный ему вектор $\mathbf{y}$, т.е. не существует векторов $\mathbf{x} \neq 0$ ортогональных всем векторам пространства.

Если условие не выполнено, то существует $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, такой что $\mathbf{x}\,\mathbf{y} = 0$ для всех $\mathbf{y}$, т.е. $g_{ij} x^i y^j = 0$, векторы $y^1, \ldots, y^n$ — произвольны, поэтому

$$g_{ij} x^i = 0.$$

вектор $\mathbf{x} \neq 0$, т.е. x^i одновременно не равны 0, отсюда получаем

$$\det \|g_{ij}\| = 0.$$

Обратно, если $\det \|g_{ij}\| = 0$ выполнено, то существуют ненулевые $x^1 ... x^n$, для которых $\mathbf{x}\,\mathbf{y} = 0$.

Для вырождения матрицы необходимо и достаточно, чтобы $\det \|g_{ij}\| = 0$.

Внесение в n-мерное аффинное пространство операции скалярного умножения эквивалентно заданию в нем метрического тензора g_{ij}, удовлетворяющего условию симметрии $g_{ij} = g_{ji}$ и невырожденности $\det \|g_{ij}\| \neq 0$.

Этого достаточно потребовать в одной координатной системе

$$g_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}$$

Если считать номером строки в матрицах $g_{ij}, g_{i'j'}$ первый индекс, в $A^i_{i'}$ — нижний индекс, а в $A^j_{j'} g_{ij}$ — верхний, то можно сказать, что $g_{i'j'}$ получается умножением $A^i_{i'} \|g_{ij}\| A^j_{j'}$ в порядке записи.

Т.е. определители умножаются

$$\det |g_{i'j'}| = \det |A^i_{i'}|^2 \det |g_{ij}|$$

$\det |g_{ij}|$ — относительный инвариант (веса 2). Если он обращается в 0 в одной координатной системе, то и в другой он равен нулю.

2.6 Связь ковариантных и контравариантных компонент.

Составим из величин g_{ij} матрицу g^{ij} по закону

$$\|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}$$

g^{ij} — дважды контравариантный тензор, т.е. преобразуется следующим образом

$$g^{i'j'} = B^{i'}_i B^{j'}_j g^{ij}$$

Построив в одной координатной системе g^{ij} обратный к g_{ij}, перейдем к другой системе координат и докажем, что эта матрица будет обратной к $g^{i'j'}$, т.е. что

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k.$$

В самом деле

$$g^{i'j'} = B_i^{i'} B_j^{j'} g^{ij}, \quad g_{j'k'} = A_{j'}^j A_{k'}^k g_{jk}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g^{i'j'} g_{j'k'} &= B_i^{i'} B_r^{j'} g^{ir} A_{j'}^j A_{k'}^k g_{jk} = \\ &= B_i^{i'} \delta_r^j g^{ir} A_{k'}^k g_{jk} = \\ &= B_i^{i'} g^{ij} A_{k'}^k g_{jk} = B_i^{i'} A_{k'}^k \delta_k^i = \delta_{k'}^{i'} \end{aligned}$$

Таким образом, $g^{i'j'}$ — обратный к $g_{i'j'}$.

g^{ij} — будем называть контравариантным метрическим тензором.

Как в евклидовом пространстве можно каждый ковариантный индекс переделать в контравариантный?

$$x_i = g_{ij} x^j$$

Эта операция опускания индекса определена однозначно

$$x^i = g^{ij} x_j$$

Координаты контравариантного тензора x^i — координаты вектора $\mathbf{x} = x^i\, \mathbf{e_i}$

Опускание индекса: $x_i = g_{ij} x^j = (\mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_j) x^j = (\mathbf{e}_i, x^j\, \mathbf{e}_j)$

$$x_i = \mathbf{x}\, \mathbf{e_i}$$

Опускание индекса — скалярное произведение этого вектора на векторы репера. Их будем называть ковариантными координатами вектора $\mathbf{x}$.

По этой же схеме можно поднять или опустить другие индексы.

Чтобы не путать, будем ставить точки:

$a_{ij.l}^{..k}$ — поднять первый индекс

$$a_{.j.l}^{i.k.} = g^{ip} a_{pj.l}^{..k.}$$

$$g_{i.}^{.j} = g^{jp} g_{ip} = \delta_i^j, \quad g^{jp} = g^{pj},$$
$$g_{..}^{ij} = g^{ip} \delta_p^j = g^{ij}$$

Длина элемента дуги определяется равенством

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k.$$

Скалярное произведение определено соотношением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ij} x^i y^j,$$

т.е.

$$(x, x) = g_{ij} x^i y^j = x_j x^j g^{ij} x_i x_j.$$

Угол между векторами. Так как

$$(x, y) = |x||y| \cos\varphi,$$

то

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij} x^i y^j}{\sqrt{x_i x^i}\sqrt{y_j y^j}}.$$

Ортогональность

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

Сопряженный базис.

Введем сопряженный базис $(\mathbf{e}^i)$. Пусть выполнены соотношения

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta^i_j.$$

Тогда

$$\mathbf{x} = a_i\, \mathbf{e}^i$$

и

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = (a_i\, \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = a_i \delta^i_j = x_i$$

т.о. можно рассмотреть ковариантную компоненту как элемент разложения по базису $\mathbf{e}^i$.

Векторное произведение.

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ — векторы. Образуем два определителя

$$V = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix},$$

$$V' = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Так как
$$x_i = g_{ij}x^j,$$
получаем
$$V' = \begin{vmatrix} g_{1k}x^k & g_{2k}x^k & g_{3k}x^k \\ g_{1k}y^k & g_{2k}y^k & g_{3k}y^k \\ g_{1k}z^k & g_{2k}z^k & g_{3k}z^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = gV.$$
В другой системе координат
$$x_{i'} = A^i_{i'}x_i.$$
Обозначим $\det \|A\|$. Тогда
$$\widetilde{V'} = \begin{vmatrix} A^i_1 x_i & A^i_2 x_i & A^i_3 x_i \\ A^i_1 y_i & A^i_2 y_i & A^i_3 y_i \\ A^i_1 z_i & A^i_2 z_i & A^i_3 z_i \end{vmatrix} = V' \det \|A\|$$
$$V \cdot V' = \begin{vmatrix} x^i x_i & x^i y_i & x^i z_i \\ y^i x_i & y^i y_i & y^i z_i \\ z^i x_i & z^i y_i & z^i z_i \end{vmatrix}$$
Выражаем инвариант
$\widetilde{V} \cdot \widetilde{V'} = V \cdot V' \; V' = gV$
$\widetilde{V} \det A = V$, $\widetilde{V'} = V' \det A = \widetilde{g}\widetilde{V}$
$$\widetilde{g}_{i'j'} = g_{ij} det A^2$$
Пусть $\widetilde{g}$ и $\sqrt{\widetilde{g}} > 0$
$$\sqrt{\widetilde{g}} = \det A \cdot \sqrt{g}$$
$$\frac{\widetilde{V'}}{V'} = \frac{V}{\widetilde{V}} = \frac{\widetilde{V} \det A}{\widetilde{V}} = \sqrt{\frac{\widetilde{g}}{g}}$$
$$\frac{\widetilde{V'}}{V'} = \frac{\widetilde{g}\widetilde{V}}{gV}$$
$$\frac{\widetilde{V'}}{\sqrt{\widetilde{g}}} = \frac{V'}{\sqrt{g}}, \quad \widetilde{V}\sqrt{\widetilde{g}} = V\sqrt{g}$$

$V\sqrt{g}$ и $\dfrac{V'}{\sqrt{g}}$ — инварианты.

Введем величины:

$$\delta_{123} = \delta_{231} = \delta_{312} = 1$$
$$\delta_{321} = \delta_{213} = \delta_{132} = -1$$

0 в остальных случаях.

Тогда

$$V = x^1y^1z^1 + x^2y^3z^1 + x^3y^1z^2 \\ - x^1y^3z^2 - x^2y^1z^3 - x^3y^2z^1 = \delta_{ijk}x^iy^jz^k$$

$$V' = \delta_{ijk}x_iy_jz_k$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \sqrt{g}V & = & \sqrt{g}\delta_{ijk}x^iy^jx^k \\ \dfrac{1}{\sqrt{g}}V' & = & \dfrac{1}{\sqrt{g}}\delta_{ijk}x_iy_jz_k \end{array}\right\} \text{инварианты.}$$

Из теоремы сокращения тензоров получаем, что $\sqrt{g}\delta_{ijk}$ — ковариантный тензор, обозначим его e_{ijk}, а $\dfrac{1}{\sqrt{g}}\delta_{ijk} = e^{ijk}$

Получаем

$$e^{ijk}g_{i\alpha}g_{j\beta}g_{k\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta_{\alpha\beta\gamma}g_{i\alpha}g_{j\beta}g_{k\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} g_{1\alpha} & g_{2\alpha} & g_{3\alpha} \\ g_{1\beta} & g_{2\beta} & g_{3\beta} \\ g_{1\gamma} & g_{2\gamma} & g_{3\gamma} \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}}g\delta_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{g}\delta_{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha\beta\gamma}.$$

Инвариант записывается следующим образом

$$\sqrt{g}V = \frac{1}{\sqrt{g}}V' = e_{ijk}x^iy^jz^k = e^{ijk}x_iy_jz_k.$$

Пусть даны два вектора $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{y}^j$, определим

$$u_k = e_{ijk}x^iy^j,$$
$$u^k = e^{ijk}x_iy_j.$$

Компоненты u_k и u^k — ковариантные и контравариантные компоненты векторного произведения.

Тензор e^{ijk} — дискриминантный тензор Леви-Чивиты.

2.7 Тензоры в псевдоэвклидовом пространстве

Рассмотрим базис $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$, для векторов которого выполнены соотношения

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, \quad i \neq j,$$

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \pm 1,$$

т.е. векторы в базисе единичные и мнимоединичные.

Перенумеруем его векторы так, чтобы мнимоединичные были в начале.

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \ldots = \mathbf{e}_k^2 = -1,$$

$$\mathbf{e}_{k+1}^2 = \mathbf{e}_{k+2}^2 = \ldots = \mathbf{e}_n^2 = 1.$$

Тогда фундаментальный тензор g_{ij} будет иметь компоненты

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{kk} = -1,$$

$$g_{k+1,k+1} = \ldots = g_{nn} = 1.$$

связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора $x_i = g_{ij}x^j$ теперь перепишется в виде

$$x_i = -x^i, \quad i = 1, \ldots, k \quad x_i = x^i, \quad i = k+1, \ldots, n.$$

Скалярное произведение имеет вид

$$\mathbf{x}\,\mathbf{y} = g_{ij}x^i y^i = -x_1^1 y_1^1 - \ldots - x^k y^k + x^{k+1}y^{k+1} + \ldots + x^n y^n.$$

Инвариантную квадратичную форму $g_{ij}x^i x^j$, выражающую скалярный квадрат вектора, будем называть метрической квадратичной формой.

При любом выборе базиса число мнимых ортов одно и то же. Пусть мы построили два ортонормированных репера $(0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $(0', \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_l, \mathbf{e}'_{l+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n)$. Предположим, $l > k$.

Рассмотрим в совокупности единичные векторы $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ и мнимоединичные $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_l$. Их число больше n, поэтому они должны быть линейно зависимы

$$\alpha_1\,\mathbf{e}'_1 + \ldots + \alpha_l\,\mathbf{e}'_l = \beta_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \beta_n e_n$$

Возведем обе части равенства в квадрат и получим

$$-\alpha_1^2 - \ldots - \alpha_l^2 = \beta_{k+1}^2 + \ldots + \beta_n^2.$$

Это равенство может иметь место только при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n$.

k — число мнимоединичных ортов, будем называть индексом евклидова пространства.

Вектор $\mathbf{x} \neq 0$, для которого $|\,\mathbf{x}\,| = 0$ и который, следовательно, ортогонален самому себе, называется изотропным.

Частный случай.

Пусть $n = 2$.

$$\mathbf{e}_0^2 = -1, \quad \mathbf{e}_1^2 = 1$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = -x^0, x_1 = x^1.$$

Скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x^0 y^0 + x^1 y^1,$$

следовательно, квадрат длины вектора равен

$$\mathbf{x}^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2.$$

Найдем изотропные векторы $\mathbf{x}^2 = 0$.

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 = 0,$$

следовательно, для изотропного вектора.

$$x^1 = \pm x^0.$$

При $|x^1| > |x^0|$ имеем векторы вещественной длины, при $|x^1| < |x^0|$ — векторы мнимой длины.

Ортогональные векторы. Пусть

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0,$$

т.е.

$$-x^0 y^0 + x^1 y^1 = 0.$$

Эти векторы симметричны относительно биссектрис координатных углов. Изотропная прямая, как направленная по изотропному вектору, ортогональна сама себе.

Отложим от 0 отрезки одинаковой длины. Пусть $\mathbf{x}^2 = \rho^2$, тогда $-(x^0)^2 + (x^1)^2 = \rho^2$ Изображением окружности на плоскости служат ветви равнобочной гиперболы. В случае, когда $\rho = 0$, это пара изотропных кривых.

Рассмотрим преобразование ортогонального базиса, сохраняющее ортогональность.

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{0'} &= A^0_{0'}\,\mathbf{e}_0 + A^1_{0'}\,\mathbf{e}_1 \\ \\ \mathbf{e}_{1'} &= A^0_{1'}\,\mathbf{e}_0 + A^1_{1'}\,\mathbf{e}_1 \end{cases}$$

$A^0_{0'} \neq 0$ — иначе мнимоединичный вектор переходит в единичный и будет противоречие. $A^1_{1'} \neq 0$ — из этих же соображений.

По ортогональности $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ выполнено соотношение

$$\frac{A^1_{0'}}{A^0_{0'}} = \frac{A^0_{1'}}{A^1_{1'}} = \beta.$$

Обозначим $A^0_{0'} = a$, $A^1_{1'} = b$. Тогда можно записать

$$A^1_{0'} = a\beta, \quad A^0_{1'} = b\beta$$

$$\mathbf{e}_{0'} = a(\mathbf{e}_0 + \beta\,\mathbf{e}_1)$$

$$\mathbf{e}_{1'} = b(\beta\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)$$

Орт $\mathbf{e}_{0'}$ — мнимоединичный, откуда

$$\mathbf{e}^2_{0'} = -1 = -(A^0_{0'})^2 + (A^1_{0'})^2 = -a^2 + a^2\beta^2 = -1, \quad a = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Аналогично, орт $\mathbf{e}_{1'}$

$$\mathbf{e}^2_{1'} = 1 = -(A^0_{1'})^2 + (A^1_{1'})^2 = -b^2\beta^2 + b^2 = 1, \quad b = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Окончательно закон преобразования имеет вид

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e_0} + \beta\,\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta\,\mathbf{e_0} + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad -1 < \beta < 1.$$

Знаки могут быть любые независимо друг от друга.

2.8 Пространство Минковского

С классической точки зрения существует лишь одна система отсчета неподвижная в абсолютном смысле слова, относительно которой формулируются законы физики. Для классической механики → формулировка законов не меняется, если покоящуюся систему отсчета заменить системой, движущейся равномерно и прямолинейно — инерциальные системы отсчета. Это принцип относительности Галилея.

Пусть S — покоящаяся система отсчета (X, Y, Z), S' — движущаяся система отсчета (X', Y', Z'). Ось X по направлению движения S', скорость (постоянная) $= v$, через t координатные оси X', Y', Z' сдвинутся относительно X, Y, Z на vt в направлении X. Если в момент t события в точке x, y, z относительно S, то относительно S'

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \tag{16}$$

время носит абсолютный характер.

Промежуток времени между двумя событиями один и тот же, независимо от того, в такой системе отсчета измеряется

$$t' = t. \tag{17}$$

Если прослеживать движение материальной точки

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

проекции ускорения будут одни для обеих систем отсчета.

В классической динамике рассматриваются системы материальных точек. Ускорение пропорционально силам, а силы зависят от расположения точек. Это расположение одно и то же для всех систем координат.

$$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$$

при данном t

$$x_2' - x_1', y_2' - y_1', z_2' - z_1'$$

Уравнения движения одни для всех систем S и S'. Формулы (16) и (17) — галилеевы преобразования.

С точки зрения классической механики скорость света c (скорость распространения электромагнитных волн), относительно системы отсчета, движущейся со скоростью v должна быть $c + v$, если свет движется навстречу системе и $c - v$, если он "догоняет"ее. Но движение системы отсчета не нарушает законов электродинамики.

Не только законы механики, но и электродинамики выглядят совершенно одинаково в любой инерциальной системе отсчета; в частности, скорость света (в вакууме) постоянна и равна c в любой инерциальной системе координат. Вместо одной покоящейся системе отсчета возникает класс инерциальных систем, в которых законы физики формулируются одинаково и которые движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно.

Будем рассматривать 4-мерное пространство событий.

Событие - элементарное событие, т.е. происходящее в столь малом объеме пространства и в короткий промежуток времени $\to$ задание определенного места (точки) в пространстве и в определенный момент времени.

Новые формулы преобразования:

$$\begin{array}{cc} S & S' \\ x, y, z, t & x', y', z', t' \end{array}$$

1. Эта зависимость будет линейной, т.е. $t', x', y', z' \to$ линейная функция от t, x, y, z. Лишь при линейной зависимости обеспечивается соблюдение законов инерции в любой инерционной системе.

2. Скорость света была бы одна и та же и равнялась c

Событие M — из некоторой точки подается сигнал. Событие $\widetilde{M}$ — сигнал принимается в другой момент времени.

$$\begin{array}{lcc} \text{в } S & M & \widetilde{M} \\ & (t, x, y, z) & (\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcc} \text{в } S' & M & \widetilde{M} \\ & (t', x', y', z') & (\widetilde{t'}, \widetilde{x'}, \widetilde{y'}, \widetilde{z'}) \end{array}$$

Сигнал распространяется со скоростью света c относительно S

$$\sqrt{(\widetilde{x}-x)^2+(\widetilde{y}-y)^2+(\widetilde{z}-z)^2} = c(\widetilde{t}-t)$$

$$-(c\widetilde{t}-ct)^2+(\widetilde{x}-x)^2+(\widetilde{y}-y)^2+(\widetilde{z}-z)^2 = 0 \qquad (18)$$

С точки зрения S'

$$-(c\widetilde{t'}-ct')^2+(\widetilde{x'}-x')^2+(\widetilde{y'}-y')^2+(\widetilde{z'}-z')^2 = 0 \qquad (19)$$

(18) $\Rightarrow$ (19) и наоборот.

Потребуем большего. Для любых M, $\widetilde{M}$

$$-(c\widetilde{t}-ct)^2+(\widetilde{x}-x)^2+(\widetilde{y}-y)^2+(\widetilde{z}-z)^2$$
$$\equiv -(c\widetilde{t'}-ct')^2+(\widetilde{x'}-x')^2+(\widetilde{y'}-y')^2+(\widetilde{z'}-z')^2 \quad (20)$$

потребуем это и тогда, когда правая часть НЕ обращается в нуль.

Линейная зависимость t', x', y', z' ***от*** t, x, y, z ***при переходе от одной инерционной системы к другой такова, чтобы для любых двух событий было выполнено (20).***

Связь с геометрией 4-мерного псевдозвклидова пространства.

В ортонормированной координатной системе x^0, x^1, x^2, x^3

$$\mathbf{x}^2=-(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$$

В частности

$$\overline{M\widetilde{M}}^2=-(\widetilde{x}^0-x^0)^2+(\widetilde{x}^1-x^1)^2+(\widetilde{x}^2-x^2)^2+(\widetilde{x}^3-x^3)^2$$

Выберем инерциальную систему S, (t, x, y, z) — координаты с точки зрения S.

Выберем в псевдоэвклидовом пространстве ортонормированную систему x^0, x^1, x^2, x^3

$$x^0=ct, \quad x^1=x, \quad x^2=y, \quad x^3=z.$$

Пространство событий $\overset{\text{отображение}}{\Longleftrightarrow}$ на псевдоэвклидово пространство

Пусть есть другая инерционная система S'.

$$M \longrightarrow (t', x', y', z')$$

$$x^{0'}=ct', \quad x^{1'}=x', \quad ,x^{2'}=y', \quad x^{3'}=z'.$$

$x^{i'}$ тоже ортонормированная.

Т.к. t', x', y', z' линейно зависят от t, x, y, z, то $x^{i'}$ — аффинные координаты.

Выполнено (20), поэтому

$$
\begin{aligned}
&-(\widetilde{x}^0 - x^0)^2 + (\widetilde{x}^1 - x^1)^2 + (\widetilde{x}^2 - x^2)^2 + (\widetilde{x}^3 - x^3)^2 = \\
&\qquad = (\widetilde{x}^{0'} - x^{0'})^2 + (\widetilde{x}^{1'} - x^{1'})^2 + (\widetilde{x}^{2'} - x^{2'})^2 + (\widetilde{x}^{3'} - x^{3'})^2
\end{aligned}
$$

$$
\overline{M\widetilde{M}}^2 = -(\widetilde{x}^{0'} - x^{0'})^2 + (\widetilde{x}^{1'} - x^{1'})^2 + (\widetilde{x}^{2'} - x^{2'})^2 + (\widetilde{x}^{3'} - x^{3'})^2
$$

$x^{i'}$ — аффинные координаты, в которых скалярный квадрат вектора $\overline{M\widetilde{M}}^2$ выражается через сумму-разность квадратов его координат $\widetilde{x}^{i'} - x^{i'}$. Это может быть только в ортонормированной системе координат.

Вывод формул Лоренца.

$$
\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\,\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathbf{e}_1 = \frac{\beta\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}
$$

$$
\mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3
$$

Преобразование координат

$$
x^{0'} = \frac{x^0 - \beta x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^{1'} = \frac{-\beta x^0 + x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3.
$$

В первой формуле оставляем только "+", т.к. иначе возрастание t вело бы к убыванию t'. Во второй формуле устранение знака минус не связано с принципиальными соображениями и достигается изменением положительного направления оси X' на обратное, вследствие чего x' меняет знак. Окончательно формулы выглядят следующим образом:

$$
t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x^{1'}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z.
$$

Дифференцируя почленно три из четырех уравнений и учитывая, что в нашем случае $dx' = dy' = dz'$, т.к. мы рассматриваем одну и ту же точку в разные моменты времени t', получаем:

$$
0 = \frac{-\beta cdt + dv}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 0 = dy, \quad 0 = dz.
$$

$$\frac{dx}{dt} = \beta c$$

Обозначим скорость движения S' относительно S через $v = \beta c$, $-1 < \beta < 1$. Получили преобразование Лоренца.

Преобразования Лоренца.

Формулы Лоренца:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y; \qquad z' = z$$

Обратные:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, x \qquad = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y' \qquad z = z'$$

Система S' движется относительно S со скоростью v, S движется относительно S' со скоростью $-v$.

Анализ преобразований Лоренца.

В классической механике $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \approx 1$, $t' \approx t$, $x' \approx x$, $y' \approx y$, $z' \approx z$.

1. Сокращение продольных размеров движущихся тел

Пусть в S' на оси X' покоится стержень длины l. Обозначим абсциссы концов этого стержня через x_1', x_2'.

$$x_2' - x_1' = l$$

Относительно S этот стержень движется вместе с системой S' со скоростью v в направлении оси X, вдоль которой он расположен, оси X и X' все время совпадают. Обозначим координаты концов стержня в системе S через x_1, x_2.

$$x_1' = \frac{-vt + x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x_2' = \frac{-vt + x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{с точки зрения S}$$

Через l' обозначим длину стержня в системе S'.

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

2. Относительный характер одновременности.

Пусть x_1, x_2 — различные, $t_1 = t_2 = t$.

$$t'_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t'_2 = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Это разновременность для событий, происходящих в ***разных*** точках пространства.

Если два события таковы, что их последовательность относительно разных инерционных систем может быть различной, возмущение, вызванное первым, пришло к месту совершения второго не позже, чем в момент его совершения.

3. Отставание движущихся часов.

В системе S' неподвижно укреплены часы, отсчитывающие время t', их координаты $x', y', z' = \text{const}$.

$$t_1 = \frac{t'_1 - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t'_2 - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t'_2 - t'_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}(t_2 - t_1)$$

движущиеся часы отстают

4. Формула сложения скоростей

Относительно S' точка движется.

$$\frac{dx'}{dt} = v'_x, \qquad \frac{dy'}{dt} = v'_y, \qquad \frac{dz'}{dt} = v'_z.$$

Система S' движется относительно S со скоростью v в направлении x

$$dt = \frac{dt' + \dfrac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad dx = \frac{vdt' + dx'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

$$dy = dy', \qquad dz = dz'.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v + \frac{dx'}{dt'}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\frac{\frac{dy'}{dt'}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}},$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\frac{\frac{dz'}{dt'}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

$$v_x = \frac{v + v'_x}{1 + \frac{vv_x}{c^2}}, \quad v_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\frac{v'_y}{1 + \frac{vv_x}{c^2}}, \quad v_z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\frac{v'_z}{1 + \frac{vv_x}{c^2}}$$

Уравнения Максвелла.

$$\operatorname{div} H = 0, \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho \qquad \operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho u$$

ρ — плотность электрического заряда;

u — векторная скорости его движения в данной точке и в данный момент времени.

С классической точки зрения уравнения неинвариантны относительно перехода от одной инерциальной системы к другой.

С точки зрения 4-мерного пространства-времени уравнения инвариантны.

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}$$

Введем тензор

$$\begin{vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{vmatrix} = \|F_{ij}\|, \quad i,j = 0,1,2,3.$$

$\mathbf{s}$ — 4-мерный вектор плотности тока

$$s^0 = \rho, \qquad s^1 = \rho\frac{u_x}{c} \qquad s^2 = \rho\frac{u_y}{c}, \qquad s^3 = \rho\frac{u_z}{c}.$$

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^3} = 4\pi s^0$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^3} = \frac{\partial F_{10}}{\partial x^0} + 4\pi s^1 \Longrightarrow -\frac{\partial F_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^3} = 4\pi s^1$$

Пользуясь кососимметричностью $F_{ij} = -F_{ji}$:

$$F^{ij} = g^{ip}g^{jq}F_{pq},$$
$$F^{ji} = g^{jq}g^{iq}F_{qp},$$

$$g_{00} = -1, \qquad g_{\lambda\lambda} = 1,$$
$$g^{00} = -1, \qquad g^{\lambda\lambda} = 1,$$
$$F^{00} = F_{00}, \qquad F^{\lambda\mu}, = F_{\lambda\mu},$$

$$F^{0\lambda} = -F_{0\lambda},$$

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = 0,$$
$$\frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{20}}{\partial x^3} = -\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}.$$

Первая группа уравнений Максвелла сводится к

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0.$$

В аффинном случае в результате частного дифференцирования тензора получается поле нового тензора с добавочным ковариантным индексом.

$$F_{ijk} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}.$$

$\Lambda_{ijk} = F_{ijk} + F_{jki} + F_{kij}$ — тоже тензор.

$\Lambda_{ijk} = 0$ т.е. и в других системах тоже ноль.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho,$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho u_x,$$

И еще два уравнения, получающиеся из последнего круговой перестановкой x, y, z.

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = 4\pi s^0,$$
$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = 4\pi s^1,$$
$$\frac{\partial F^{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} = 4\pi s^2,$$
$$\frac{\partial F^{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} = 4\pi s^3.$$
$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 4\pi s^i, \qquad F^{ii} = 0.$$

Получили тензор дважды контравариантный и один раз ковариантный.

2.9 Полилинейные формы

Определение: Определение:

Функция $H(x_1, \ldots, x_m)$ от m векторных аргументов $x_1, \ldots, x_m$, меняющихся в линейном пространстве K, называется полилинейной (m — линейной) формой, если она линейна по любому аргументу x_j, где $j = \overline{1, m}$ при фиксированном значении остальных аргументов $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m$

Полилинейная форма называется симметричной, если она не изменяется при перемене местами двух своих аргументов.

Полилинейная форма называется антисимметричной, если при перемене мест двух аргументов она изменяет значение.

Пример: Полилинейная форма — определитель. Это антисимметричная полилинейная форма.

$$x_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$$

$$A(x_1...x_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Тензор — полилинейная форма.

Преобразование полилинейной формы при замене системы координат.

Имеем n^k коэффициентов.

$$\mathbf{e}_{i'}=A^i_{i'}\,\mathbf{e}_i,\quad h_{j_1,\dots,j_k}=H(\mathbf{e}_{j_1},\dots,\mathbf{e}_{j_k}).$$

В новой системе координат

$$h_{i'_1,\dots,i'_k}=h_{\{i'\}}=H(\mathbf{e}_{i'_1},\dots,\mathbf{e}_{i'_k})$$

Пусть $\mathbf{u}_i=\underset{i}{u}^s\,\mathbf{e}_s$. В силу линейности $H(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$, получаем

$$\begin{aligned}H(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)&=H(\underset{1}{u}^{s_1}\,\mathbf{e}_{s_1},\underset{2}{u}^{s_2}\,\mathbf{e}_{s_2},\dots,\underset{k}{u}^{s_k}\,\mathbf{e}_{s_k})\\&=\underset{1}{u}^{i_1}\dots\underset{k}{u}^{i_k}H(\mathbf{e}_{i_1},\dots,\mathbf{e}_{i_k})=h_{i_1,\dots,i_k}u^{i_1}\dots u^{i_k}.\end{aligned}$$

Таким образом, при преобразованип координат

$$\begin{aligned}h_{i'_1\dots i'_k}&=H(\mathbf{e}_{i'_1}\dots\mathbf{e}_{i'_k})==H(A^{i_1}_{i'_1}\,\mathbf{e}_{i_1},A^{i_2}_{i'_2}\,\mathbf{e}_{i_2},\dots,A^{i_k}_{i'_k}\,\mathbf{e}_{i_k})\\&=A^{i_1}_{i'_1},A^{i_2}_{i'_2},\dots,A^{i_k}_{i'_k}H(\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},\dots,\mathbf{e}_{i_k})=A^{i_1}_{i'_1},A^{i_2}_{i'_2},\dots,A^{i_k}_{i'_k}h_{i_1,\dots,i_k}\end{aligned}$$

по ковариантному закону.

Форма может быть задана на ковекторах, тогда она задает контравариантный тензор.

Каноническое отображение

$t:L_1\times\dots\times L_p\longrightarrow L_1\otimes\dots\otimes L_p$

$(l_1,\dots,l_p)\longrightarrow l_1\otimes\dots\otimes l_p$ является полилинейным.

Обозначения тензора и обозначение основных операций.

Бескоординатная запись.

Элемент тензорного произведения

$$T^q_p(L)=\underbrace{L^*\otimes...\otimes L^*}_{p}\otimes\underbrace{L\otimes...\otimes L}_{q}$$

называется тензором на L типа (p,q) и валентности $p+q$

Базис.
Сопряженный базис.

$$T = T_p^q e_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_q} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_p}$$

$$\sigma \otimes \tau \in T_{n+n'}^{m+m'} = T_n^m \otimes T_{n'}^{m'}$$

$$T = T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{jm}$$

Для бескоординатной записи
$L_1 \dots L_p$ — линейные пространства.
$L_1^* \dots L_q^*$ — сопряженные пространства (пространство линейных функций на линейном пространстве L)

$$(f_1 + f_2)(l_1 + l_2) = f_1(l_1 + l_2) + f_2(l_1 + l_2)$$

$$T_p^q(L) = \underbrace{L^* \otimes \dots \otimes L^*}_{p} \otimes \underbrace{L \otimes \dots \otimes L}_{q}$$

$$f\sigma :$$

$$\Phi(\overset{1}{x}, \dots, \overset{n}{x}) = \Phi(\overset{1}{x}{}^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \overset{n}{x}{}^{i_n} \mathbf{e}_{i_n}) = \overset{1}{x}{}^{i_1} \dots \overset{n}{x}{}^{i_n} \Phi(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n})$$

$$A \wedge B = \mathrm{Alt}(A \otimes B)$$

$$\mathrm{Alt}A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{k!} \sum \delta_{i_1 \dots i_k} A(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$$

3 Тензорные поля

3.1 Криволинейные координаты.

Пусть есть n непрерывных дифференцируемых функций $f_k(x^1, \dots, x^n)$, где $k = 1, \dots, n$. Введем новые переменные

$$x^{i'} = f_{i'}(x^1, \dots, x^n)$$

Пусть преобразование обратимо.

$$x^i = g_i(x^{1'}, \dots, x^{n'}),$$

переменные $x^{1'}$ — криволинейные координаты.

$x^{i'}$ — криволинейные координаты, если они связаны с аффинными координатами обратимым и взаимно однозначным и непрерывным дифференцируемым отображением.

$x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ — координаты.

Далее область — точка и окрестность, связная.

Якобианы обоих преобразований не равны нулю:

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right| \neq 0, \qquad \mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right| \neq 0.$$

Матрицы взаимно обратные и неособенные.

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \quad \text{суммирование по } k'$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j \Longrightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

Например, цилиндрические и сферические координаты. Однако, для взаимной обратимости надо рассматривать не все пространство, а удалить из него полуплоскость, краем которой является ось z и также ось z.

Радиус-вектор точки $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM} = g_1(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\,\mathbf{e}_1 + \ldots + g_n(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\,\mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{x}}{\partial x^{1'}}, \ldots, \frac{\partial\,\mathbf{x}}{\partial x^{n'}} \quad \text{будут линейно независимы}$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}_n$$

$\left|\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|$ неособенная $\Longrightarrow$ $\frac{\partial\,\mathbf{x}}{\partial x^i}$ линейно независимы.

Координатные линии — кривые, вдоль которых меняется только одна координата. Через любую точку области проходит единственная координатная линия x^i.

$\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\dfrac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial x^i}$ — касательная к координатной линии. Будем обозначать касательные к координатной линии $\mathbf{x_i}$.

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, ..., x^n)$$

$$x^i = x^i(x^{1'}, ..., x^{n'})$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial x^{i'}} = \mathbf{x_i}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

Рассмотрим произвольное тензорное поле V^i_{jk}

$$V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1, ..., x^n)$$

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}V^i_{jk}(M)$$

Преобразование происходит по тензорному закону.

Эллиптические координаты.

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\mu\cos\nu,$$
$$y = a\,\mathrm{sh}\,\mu\sin\nu,$$

$$\mu \geq 0, \quad \nu \in [0, 2\pi).$$

$$\frac{x^2}{a^2\,\mathrm{ch}^2\,\mu} + \frac{y^2}{a^2\,\mathrm{sh}^2\,\mu} = \cos^2\nu + \sin^2\nu = 1$$

Координатные линии для μ — эллипсы.

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\nu} - \frac{y^2}{a^2\sin^2\nu} = \mathrm{ch}^2\,\mu - \mathrm{sh}^2\,\mu = 1$$

Координатные линии для ν — гиперболы.

Коэффициенты Ламэ

$$H_\mu = H_\nu = a\sqrt{\mathrm{sh}^2\,\mu + \sin^2\nu}$$

Цилиндрическая система координат

$$\left.\begin{array}{lcll} x & = & \rho\cos\varphi, & \text{цилиндр} \\ y & = & \rho\sin\varphi, & \text{полуплоскость} \\ z & = & z, & \text{плоскость } \perp Oz \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{координатные}\\ \text{поверхности}\end{array}$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1 e_1$$

H_1 — длина $\dfrac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial q_1}$

$H_i^2 = \left(\dfrac{\partial r}{\partial q_i}\right)^2$ — коэффициенты Ламэ

$$\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\,\mathbf{k}$$

$$(H_i)^2 = (\frac{\partial r}{\partial q_i})^2 = (\frac{\partial x}{\partial q_i})^2 + (\frac{\partial y}{\partial q_i})^2 + (\frac{\partial z}{\partial q_i})^2$$

Коэффициенты Ламэ.

Полярная система координат	Сферическая система координат
$H_r = 1$	$H_r = 1$
$H_\varphi = r$	$H_\theta = r$
	$H_\varphi = r \sin\theta$

Градиент, дивергенция, ротор в криволинейной системе координат

Будем рассматривать криволинейные ортогональные координаты.

Условие ортогональности криволинейных координат

$$\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial q_i}\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial q_k} = H_i^2 \delta_k^i$$

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — единичные векторы по касательным к координатным линиям

$$\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i\,\mathbf{e}_i$$

Найдём $\operatorname{grad} q_i$, перпендикулярный к $q_i = const$.

Единичный вектор $\mathbf{e}_i^*$ — нормаль к этой поверхности по возрастанию q_i

$$\operatorname{grad} q_i = h_i\,\mathbf{e}_i^* \quad \text{- не суммируется!}$$

$$h_i^2 = (\operatorname{grad} q_i)^2 = \left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial z}\right)^2$$

h_i — дифференциальные параметры первого порядка.

Покажем, что векторы $\operatorname{grad} q_1$, $\operatorname{grad} q_2$, $\operatorname{grad} q_3$ образуют систему векторов, взаимных с $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}$.

Для этого надо показать, что

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} &= 1, \\ \operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} &= 0, \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Умножая обе части равенства

$$d\,\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3$$

скалярно на $\operatorname{grad} q_i = \left(\dfrac{\partial q_i}{\partial x}, \dfrac{\partial q_i}{\partial y}, \dfrac{\partial q_i}{\partial z} \right)$

$$\begin{aligned} dq_i = \operatorname{grad} q_i \cdot d\,\mathbf{r} = \left(\operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right) dq_1 + \left(\operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right) dq_2 \\ + \left(\operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \right) dq_3 \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности dq_1, dq_2, dq_3 следуют искомые равенства.

$$e_i = e_i^*$$

Необходимые и достаточные условия ортогональности криволинейных координат можно записать как

$$\operatorname{grad} q_i \operatorname{grad} q_k = 0, \quad i \neq k/$$

Для ортогональных криволинейных координат выполнено

$$h_i = \frac{1}{H_i},$$

в частности

$$\operatorname{grad} q_i = \frac{\mathbf{e}_i}{H_i}.$$

$$\begin{aligned} d\,\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 \\ &= H_1 q_1 e_1 + H_2 q_2 e_2 + H_3 q_3 e_3 \end{aligned}$$

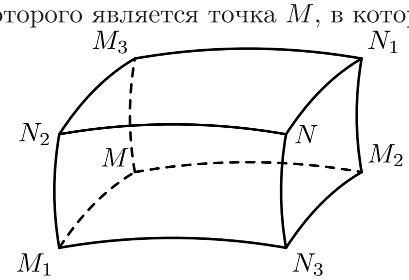
$$
\begin{aligned}
&ds_i = H_i dq_i \quad \text{суммирования нет} \\
&ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \\
&dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\operatorname{grad} q_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\operatorname{grad} q_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\operatorname{grad} q_3 \\
&= \frac{\mathbf{e_1}}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e_2}}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e_3}}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}
\end{aligned}
$$

Для вычисления $\operatorname{div}\mathbf{a}$ удобно применять формулу

$$
\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\limits_S(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})dS}{V}
$$

взяв за V объем бесконечно малого параллелепипеда, одной из вершин которого является точка M, в которой ищем дивергенцию.



Грань $MM_2N_1M_3$ имеет величину

$$
d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3
$$

нормальная составляющая вектора $\mathbf{a}$ к этой грани равна $(-a_1)$, поэтому поток через эту грань будет равен $(-a_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3)$

Для противоположной грани координата q_1 имеет значение q_1+dq_1, значения других координат остаются теми же, поток будет равен

$$
\left(a_1 H_2 H_3 + \frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1}dq_1\right)dq_2 dq_3
$$

Через две грани поток равен

$$
\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1}dq_1 dq_2 dq_3
$$

Аналогично для потока через грани $MM_1N_2M_3$ и $M_2N_3NN_1$

$$\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2}dq_1dq_2dq_3$$

и через грани $MM_1N_3M_2$ и $M_3N_2NN_1$

$$\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}dq_1dq_2dq_3$$

Складывая все три выражения, получим полный поток

$$\oint\limits_S a_n dS.$$

Деля его на объем параллелепипеда $V = H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3$, получим окончательно

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right\}.$$

В частности получаем формулы

$$\operatorname{div}\mathbf{e_1} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{e_2} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{e_3} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}$$

Рассмотрим $\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Применим формулу

$$\operatorname{rot}_n\mathbf{a} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint\limits_C \mathbf{a}\cdot d\,\mathbf{r}}{S}$$

Чтобы получить проекцию $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на координатную линию q_1, нужно взять за C контур $MM_2N_1M_3$, его площадь равна

$$\sigma = H_2H_3dq_2dq_3$$

Далее вычисляем интеграл по замкнутому контуру $MM_2N_1M_3$. Прежде всего

$$\int\limits_{MM_2}\mathbf{a}\cdot d\,\mathbf{r} = a_2ds_2 = a_2H_2dq_2$$

Далее
$$\int\limits_{M_3N_1} \mathbf{a}\cdot d\,\mathbf{r} = \left\{ a_2H_2 + \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3} dq_3 \right\} dq_2,$$
т.к. в этом интеграле координата q_2 имеет значение $q_2 + dq_2$, значения других координат остаются прежними.

Точно также вычисляются
$$\int\limits_{MM_3} \mathbf{a}\cdot d\,\mathbf{r} = a_3H_3dq_3$$
и
$$\int\limits_{M_2N_1} \mathbf{a}\cdot d\,\mathbf{r} = \left\{ a_3H_3 + \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial \varphi^2} dq_3 \right\} dq_3.$$
Поэтому
$$\oint = \int\limits_{MM_2} + \int\limits_{M_2N_1} - \int\limits_{M_3N_1} - \int\limits_{MM_3} = \left\{ \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3} \right\} dq_2dq_3.$$
Деля это выражение на $d\sigma_1$, получим требуемое выражение
$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_1 = \frac{1}{H_2H_3}\left\{ \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3} \right\}$$
$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_2 = \frac{1}{H_3H_1}\left\{ \frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_1} \right\}$$
$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_3 = \frac{1}{H_1H_2}\left\{ \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_2} \right\}$$

Рассмотрим оператор Лапласа. Так как
$$\Delta\psi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi,$$
получаем выражение
$$\Delta\psi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3} \right) \right\}$$

3.2 Метрический (фундаментальный)тензор в криволинейной системе координат.

$$ds^2 = g_{ik}(x^1, \ldots, x^n) dx^i dx^k$$

Значение этой формы должно быть одно для всех систем координат.

Введем метрику. В аффинной системе координат

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \, \mathbf{e}_j \, .$$

Рассматривая тензор g_{ij} в криволинейных координатах x^i, мы относим его в каждой точке M к соответствующему локальному реперу $\{M, \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$. Его координаты будут выражаться скалярными произведениями

$$g_{ij}(M) = \mathbf{x}_i(M) \, \mathbf{x}_j(M)$$

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \, \mathbf{r}}{\partial x^i}$$

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$$

переход к новым криволинейным координатам

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{x^{j'}} g_{ij}$$

Рассмотрим параметрически заданную кривую

$$x^i = x^i(t)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \ldots, x^n)$$

Касательный вектор

$$\frac{d \, \mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \, \mathbf{r}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \, \mathbf{x}_i$$

$\dfrac{dx^i}{dt}$ — координаты, контравариантный тензор. Переход в другую систему координат

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}.$$

$$d \, \mathbf{r} = \mathbf{x}_i \, dx^i$$

dx^i — один раз ковариантный тензор. В другой системе координат

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i$$

Все дифференциалы берутся при бесконечно малом смещении, они берутся как дифференциалы от параметра t при его бесконечно малом приращении dt.

$$\left(\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

Отсюда

$$\left|\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right)^2} = \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}$$

и длина кривой

$$L = \int\limits_{M_0}^{M_1}(d\,\mathbf{r}) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left|\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt$$

$$ds = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}$$

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

— квадрат длины дуги выражается квадратичной формой, это метрическая форма

Найдем углы, которые составляют направления касательных и нормалей с осями прямоугольной системы координат.

y_1, y_2, y_3 — прямоугольная система координат;

$\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$ — касательные к координатным линиям;

$\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — нормали к координатным поверхностям.

Возьмем направление $\mathbf{s}_1$, вдоль нее меняется только x^1.

$$d\,\mathbf{r} = (dy_1, dy_2, dy_3)$$

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x^i}dx^i, \quad dy_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x^i}dx^i, \quad dy_3 = \frac{\partial y_3}{\partial x^i}dx^i,$$

не суммируется по i.

Величина вектора $d\,\mathbf{r}$ равна

$$ds_i = \sqrt{dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\partial y_1}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial x^i}\right)^2} dx^i = \sqrt{g_{ii}} dx^i$$

по i не суммируется.

$$\cos(s_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y_g}{\partial x^i}$$

т.к.

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}{|a||b|} = \frac{g_{ik}A^i B^k}{\sqrt{g_{ik}A^i A^k}\sqrt{g_{ik}B^i B^k}}$$

Знаем, что

$$A_i = g_{ik}A^k, \quad A^i = g^{ik}A_k$$

Рассмотрим касательные к координатным линиям и нормали к координатным плоскостям
по касательным $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$ — единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$
по нормали $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — единичные векторы $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$

Пусть a_1, a_2, a_3 — составляющие этого вектора в прямоугольной системе координат;
A_{s_i} — косоугольные составляющие по направлениям s_i;
A_{n_i} — косоугольные составляющие по направлениям n_i;
a_{n_i} проекции на нормали к координатным плоскостям;
a_{s_i} проекции на касательные к координатным линиямю

$$\mathbf{a} = A_{s_1}\,\mathbf{e}_1 + A_{s_2}\,\mathbf{e}_2 + A_{s_3}\,\mathbf{e}_3;$$
$$\mathbf{a} = A_{n_1}\,\mathbf{e}^1 + A_{n_2}\,\mathbf{e}^2 + A_{n_3}\,\mathbf{e}^3$$

Ортогональная проекция на направление касательной

$$a_{s_i} = a_j \cos(\mathbf{s}_i, y_j),$$

$$\cos(\mathbf{n}_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \frac{\partial x^i}{\partial y_j},$$

по основной формуле

$$A_i = a_j \frac{\partial y_j}{\partial x^i}$$

$$a_{s_i} = a_j \cos(s_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} a_j \frac{\partial y_j}{\partial x^i}$$

$$a_{s_i} = \frac{A_i}{\sqrt{g_{ii}}}$$

$$a_{n_i} = a_j \cos(\mathbf{n}_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} a_j \frac{\partial x^i}{\partial y_j}$$

$$A^i = a_j \frac{\partial x^i}{\partial y_j}$$

$$a_{n_i} = \frac{A^i}{\sqrt{g^{ii}}}$$

a_{s_i}, a_{n_i} — ортогональные проекции на касательные к координатным линиям и нормали к координатным плоскостям.

Составляющие $\mathbf{e}_i$ по y_1, y_2, y_3.

$$\cos(s_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y_j}{\partial x^i}$$

Составляющие $\mathbf{e}^i$ по y_1, y_2, y_3

$$\cos(n_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \frac{\partial x^i}{\partial y_j}$$

Таким образом

$$a_j = \sum_i A_{s_i} \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y_j}{\partial x^i} = \sum_i A^i \frac{\partial y_j}{\partial x^i}$$

$$a_j = \sum_i A_{n_i} \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \frac{\partial x^i}{\partial y_j} = \sum_i A_i \frac{\partial x^i}{\partial y_j}$$

Отсюда получаем

$$A_{s_i} = \sqrt{g_{ii}} A^i \qquad\qquad A_{n_i} = \sqrt{g^{ii}} A_i$$

$a_{s_i} = a_{n_i} = A_{s_i} = A_{n_s}$ — физические составляющие вектора.

В случае криволинейных ортогональных координат

$$A_i = H_i a_{x_i}, \quad A^i = \frac{1}{H_i} a_{x_i}$$

$$g_{ii} = H_i^2$$

Рассмотрим дифференцирование компонент вектора:

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k$$

$$A_{i'} = A_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

$$dA_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dA_i + A_i d\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dA_i + A_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} dx^{k'}$$

Для того, чтобы дифференциал был тензором, надо было бы

$$dA_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dA_i$$

Введем вспомогательное понятие геодезической.

3.3 Геодезическая

Рассмотрим параметрически заданную кривую

$$\begin{gathered} x^1 = x^1(t), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x^n = x^n(t). \end{gathered}$$

Длина отрезка кривой L между M_0 и M_1

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k.$$

Обозначим $\dfrac{\partial x^i}{\partial t} = \dot{x}^i$.

$$ds = \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} dt,$$

$$l = \int\limits_{t_0}^{t_1} ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} dt.$$

Определение: Линия, длина отрезка которой, расположенного между произвольными достаточно близкими ее точками, меньше длины любой другой соседней кривой называется *геодезической*.

Уравнение: L_0 — геодезическая, параметр — длина дуги s, отсчет от M_0. s для M_1 равно l_0.

$$x^\alpha = x_0^\alpha(s) \qquad \alpha = \overline{1,n}$$

Пусть

$$\xi^\alpha : \xi^\alpha(0) = \xi^\alpha(l_0) = 0$$
$$x^\alpha = x_0^\alpha(s) + \varepsilon\xi^\alpha(s)$$

ε — малый параметр, который может быть либо больше, либо меньше нуля.

Пусть уравнение геодезической имеет вид:

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

$$\Phi\left(x_0, \frac{dx_0}{ds}\right) = g_{ik}\frac{dx_0^i}{ds}\frac{dx_0^k}{ds} = 1$$

т.к.

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k.$$

Вместо t берем s

$$l(\varepsilon) = \int\limits_0^{l_0} \sqrt{\Phi\left(x_0 + \varepsilon\xi, \quad \frac{dx_0}{ds} + \varepsilon\frac{d\xi}{ds}\right)} \quad ds$$

при $\varepsilon = 0$ получим l_0 меньше, чем длина всех других дуг.

Т.е. эта функция при $\varepsilon = 0$ должна иметь минимум. Производная должна быть равна 0.

$$\left[\frac{dl(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0$$

Можно дифференцировать под знаком интеграла, это сложная функция.

$$\left[\frac{dl(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right] = \int\limits_0^{l_0} \frac{1}{2\sqrt{\Phi\left(x_0 + \varepsilon\xi, \quad \frac{dx_0}{ds} + \varepsilon\frac{d\xi}{ds}\right)}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial(x_0^i + \varepsilon\xi^i)}\xi^i(s) + \frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{dx_0^i}{ds} + \varepsilon\frac{d\xi^i}{ds}\right)}\frac{\partial\xi^i}{ds} \right\} ds$$

При $\varepsilon = 0$

$$\left[\frac{dl(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right] = \int\limits_0^{l_0} \frac{1}{2\sqrt{\Phi\left(x_0, \frac{dx_0}{ds}\right)}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_0^i}\xi^i(s) + \frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{dx_0^i}{ds}\right)}\frac{d\xi^i}{ds} \right) ds$$

$$\Phi\left(x_0, \frac{dx_0}{ds}\right) = 1$$

по i суммирование

$$\int\limits_0^{l_0} \frac{\partial\Phi}{\partial x_0^i}\xi^i(s)ds + \int\limits_0^{l_0} \frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{dx_0^i}{ds}\right)}\frac{\partial\xi^i}{\partial s}ds = 0$$

Второй интеграл вычисляем по частям

$$\int\limits_0^{l_0} \frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{dx_0^i}{ds}\right)}d\xi^i = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{dx_0^i}{ds}\right)}\xi^i\right]\Bigg|_{s=0}^{s=l_0} - \int\limits_0^{l_0} \xi^i \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{dx_0^i}{ds}\right)}\right) ds =$$

$$= -\int\limits_0^{l_0} \xi^i \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{dx_0^i}{ds}\right)}\right) ds$$

т.к.

$$\xi^i(0) = \xi^i(l_0)$$

$$\int\limits_0^{l_0} \xi^i \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_0^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\frac{dx_0^i}{ds}}\right)\right] = 0$$

По произвольности ξ^i необходимо, чтобы было выполнено

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx^i}{ds}}\right) = 0 \tag{21}$$

Таким образом, можно дать такое определение *геодезической* — это линия, удовлетворяющая уравнению (21).

Воспользуемся уравнением

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}.$$

Уравнение геодезической

$$\frac{d\Phi}{dx^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{dx^i}{ds}\right)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{dx^i}{ds}\right)} = 2g_{ik}\frac{dx^k}{ds}$$

(2-ка потому, что есть $g_{ki}\dfrac{dx_k}{ds}\dfrac{dx^i}{ds}$)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{dx^i}{ds}\right)}\right) = 2g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2} + 2\frac{dg_{ik}}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

$$\frac{dg_{ik}}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \frac{dg_{i\alpha}}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}$$
$$\frac{dg_{ik}}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \frac{dg_{i\beta}}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{dx^i}{ds}\right)}\right) = 2g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2} + \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad \lambda = \overline{1, n}$$

$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля, n^3 функций.

Символы Кристоффеля не тензоры, в самом деле, в прямоугольной системе координат геодезическая имеет вид

$$x^\lambda = a_\lambda s + b_\lambda \tag{22}$$

$a_\lambda = \text{const}$, $b_\lambda = \text{const}$. Тогда

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = 0,$$

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = 0.$$

Если выбрать сферические координаты, то геодезическая не может быть выражена (22), тогда $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \neq 0$

Но для тензора выполнено свойство: если он равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и в любой другой. Т.е. символы Кристоффеля не тензор.

3.4 Свойства символов Кристоффеля

Символы Кристоффеля первого и второго рода связаны соотношениями

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = g^{i\lambda}\Gamma_{i,\alpha\beta}, \quad \Gamma_{k,\alpha\beta} = g_{k\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}.$$

$$g_{k\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = g_{k\lambda}g^{i\lambda}\Gamma_{i,\alpha\beta} = \delta^i_k\Gamma_{i,\alpha\beta} = \Gamma_{k,\alpha\beta}$$

Симметрия по индексам

$$\Gamma_{i,\alpha\beta} = \Gamma_{i,\beta\alpha}, \quad \Gamma^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\beta\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} + \Gamma_{\beta,\alpha\gamma}$$

Найдем $\dfrac{\partial g}{\partial x^\alpha}$, где g — определитель

Дифференцируем определитель

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & \cdot & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot & \cdot & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdot & \cdot & g_{nn} \end{vmatrix}$$

Можно разложить по строке

$$g = \sum_{k=1}^{n} g_{jk} G_{jk}$$

G_{ik} — алгебраическое дополнение к g_{ik} со знаком, j — фиксировано.

$$g^{lj} g = \delta^l_k G_{jk} \Rightarrow G_{ik} = g g^{ki},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\alpha} G_{ik},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = g g^{ki} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\alpha},$$

Подставляя выражение для символов Кристоффеля, имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = g g^{ki} \left(\Gamma_{i,k\alpha} + \Gamma_{k,i\alpha} \right) = g \Gamma^k_{k\alpha} + g \Gamma^i_{i\alpha} = 2g \Gamma^i_{i\alpha}.$$

Окончательно получаем формулу

$$\Gamma^i_{i\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\alpha}$$

Преобразование символов Кристофффеля при замене координат.

Рассмотрим уравнение геодезической

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Тогда при замене координат

$$\frac{dx^\lambda}{ds} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{i'}} \frac{dx^{i'}}{ds},$$

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{i'}}\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} + \frac{dx^{i'}}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\lambda}{dx^{i'}}\right),$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\lambda}{dx^{i'}}\right) = \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}}\frac{dx^{k'}}{ds},$$

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{dx^{i'}}{ds}, \quad \frac{dx^\beta}{ds} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{i'}}\frac{dx^{i'}}{ds}.$$

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{i'}}\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}}\frac{dx^{i'}}{ds}\frac{dx^{k'}}{ds}$$

Объединяя эти формулы, получим

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{i'}}\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}}\frac{dx^{i'}}{ds}\frac{dx^{k'}}{ds} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{dx^{i'}}{ds}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{i'}}\frac{dx^{i'}}{ds} = 0$$

С другой стороны:

$$\frac{d^2x^{r'}}{ds^2} + \Gamma^{r'}_{i'k'}\frac{dx^{i'}}{ds}\frac{dx^{k'}}{ds} = 0$$

Умножим на $\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^{i'}}$:

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{i'}}\Gamma^{r'}_{i'k'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}}$$

Умножим на $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^\lambda}$:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{r'}} = \delta^{i'}_{r'}$$

$$\Gamma^{l'}_{i'k'} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^\lambda}$$

Обратно аналогично:

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^{l'}_{i'k'}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{l'}}$$

Получили закон преобразования символов Кристоффеля при замене координат.

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{r'}}\Gamma^{r'}_{i'k'} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$$

3.5 Ковариантная производная

Надо дать понятие тензорной производной вектора и тензора.

Если есть поле скалярной функции $\varphi(x_1, ..., x_n)$, то $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ — ковектор. При переходе из одной системы координат в другую $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{i'}} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial x_{i'}}$ меняется по ковекторному закону.

Пусть есть ковариантный вектор A_i, при замене координат он изменяется по закону

$$A_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} A_i. \tag{23}$$

Составим дифференциал

$$dA_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dA_i + A_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} dx^{k'}.$$

Если бы величины dA_i были составляющими тензора, формулы их преобразования имели бы вид

$$dA_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dA_i.$$

Это будет только в случае, если

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} = 0.$$

Продифференцируем (23) по $x^{k'}$:

$$\frac{\partial A_{i'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} + A_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}}$$

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{r'}} \Gamma^{r'}_{i'k'} - \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk}$$

$$\frac{\partial A_{i'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} + A_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{r'}} \Gamma^{r'}_{i'k'} - A_i \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{\alpha\beta}$$

Сгруппируем слагаемые

$$\frac{\partial A_{i'}}{\partial x^{k'}} - A_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{r'}} \Gamma^{r'}_{i'k'} = \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_i \Gamma^i_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}}$$

Выражение

$$\nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_i \Gamma^i_{\alpha\beta}$$

называется ковариантной производной ковариантного вектора, это тензор второго ранга.

Определим ковариантную производную контравариантного вектора A^α. Пусть

$$\varphi = A^\alpha B_\alpha, \qquad B_\alpha \text{— прозвольный ковариантный вектор}$$

$$\nabla_\beta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta}$$

$$\nabla_\beta \varphi = (\nabla_\beta A^\alpha) B_\alpha + A^\alpha \nabla_\beta B_\alpha$$

$A^\alpha \nabla_\beta B_\alpha$ — ковариантный вектор;
$B_\alpha \nabla_\beta A^\alpha$ — ковариантный вектор;

$$B_\alpha \nabla_\beta A^\alpha = \nabla_\beta (A^\alpha B_\alpha) - A^\alpha \nabla_\beta B_\alpha.$$

$$\begin{aligned} B_\alpha \nabla_\beta A^\alpha &= \frac{\partial (A^\alpha B_\alpha)}{\partial x^\beta} - A^\alpha \left(\frac{\partial B_\alpha}{\partial x^\beta} - B_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \right) = \\ &= B_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + A^\alpha B_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \\ &= B_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + A^\lambda B_\alpha \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем по произвольности B_α

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + A^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} = \nabla_\beta A^\alpha.$$

Также определяется производная любого тензора.

Например, рассмотрим тензор

$$A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot}$$

Возьмем три произвольных вектора u^α, v^β и w_γ и составим $A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} u^\alpha v^\beta w_\gamma$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\lambda(A_{\alpha\beta.}^{..\gamma}u^\alpha v^\beta w_\gamma) &= \\
&= u^\alpha v^\beta w_\gamma \nabla_\lambda A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} u^\alpha v^\beta w_\gamma + A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} v^\beta w_\gamma \nabla_\lambda u^\alpha + \\
&\qquad + A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} u^\alpha w_\gamma \nabla_\lambda v^\beta + + A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} u^\alpha v^\beta \nabla_\lambda w_\gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u^\alpha v^\beta w_\gamma \nabla_\lambda A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} &= \\
&= \nabla_\lambda(A_{\alpha\beta.}^{..\gamma}u^\alpha v^\beta w_\gamma) - A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} v^\beta w_\gamma \nabla_\lambda u^\alpha - \\
&\qquad - A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} u^\alpha w_\gamma \nabla_\lambda v^\beta - - A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} u^\alpha v^\beta \nabla_\lambda w_\gamma
\end{aligned}
$$

Это один раз ковариантный вектор. $\nabla_\lambda A_{\alpha\beta.}^{..\gamma}$ должен быть тензором 4-го ранга 3 раза ковариантным, один раз контрвариантным

Подставим в формулу

$$
\begin{aligned}
\nabla_\lambda(A_{\alpha\beta.}^{..\gamma}u^\alpha v^\beta w_\gamma) &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(A_{\alpha\beta.}^{..\gamma}u^\alpha v^\beta w_\gamma) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(A_{\alpha\beta.}^{..\gamma})u^\alpha v^\beta w_\gamma + A_{\alpha\beta.}^{..\gamma}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\lambda} v^\beta w_\gamma + \\
&\qquad + A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} u^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\lambda} w_\gamma + A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} u^\alpha v^\beta \frac{\partial w_\gamma}{\partial x^\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u^\alpha v^\beta \nabla_\lambda w_\gamma A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} &= \\
&= \frac{\partial A_{\alpha\beta.}^{..\gamma}}{\partial x^\lambda} u^\alpha v^\beta w_\gamma - A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} v^\beta w_\gamma u^\mu \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} u^\alpha w_\gamma v^\mu \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha + \\
&\qquad + A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} u^\alpha v^\beta w_\mu \Gamma_{\lambda\gamma}^\mu
\end{aligned}
$$

Переобозначим: μ и α во втором слагаемом, μ и β в третьем слагаемом, μ и γ в четвертом слагаемом.

По произвольности u^α, v^β и w_γ получаем

$$
\nabla_\lambda A_{\alpha\beta.}^{..\gamma} = \frac{\partial A_{\alpha\beta.}^{..\gamma}}{\partial x^\lambda} - A_{\mu\beta.}^{..\gamma}\Gamma_{\gamma\lambda}^\mu - A_{\alpha\mu.}^{..\gamma}\Gamma_{\beta\lambda}^\mu + A_{\alpha\beta.}^{..\mu}\Gamma_{\mu\lambda}^\gamma
$$

Правила действий

Ранее было установлено, что $\nabla_\alpha\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$ — ковариантный вектор

Установим правила дифференцирования в общем виде.

Дифференцирование произведения тензоров совершается по тому же закону, что и в обыкновенном анализе.

$$\nabla_\lambda(A_\alpha B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}) = B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\nabla_\lambda A_\alpha + A_\alpha \nabla_\lambda B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}$$

$$\nabla_\lambda(A_\alpha B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}) = \frac{\partial(A_\alpha B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma})}{\partial x^\lambda} - A_\mu B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\Gamma_{\lambda\alpha}^\mu - A_\alpha B_{\mu\cdot}^{\cdot\gamma}\Gamma_{\lambda\beta}^\mu + A_\alpha B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma =$$
$$= \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\lambda} - A_\mu \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu\right) B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma} + A_\alpha \left(\frac{B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}}{\partial x^\lambda} - B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\Gamma_{\beta\lambda}^\mu + B_{\beta\cdot}^{\cdot\mu}\Gamma_{\mu\lambda}^\gamma\right) =$$
$$= B_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\nabla_\lambda A_\alpha + A_\alpha \nabla_\lambda B_{\mu\cdot}^{\cdot\lambda}$$

Производная тензора, сокращенного по нескольким индексам, может быть получена сокращением по этим индексам производной исходного тензора.

$$B_{\alpha\beta\cdot\lambda}^{\cdot\cdot\gamma} = \nabla_\lambda A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}$$
$$\gamma = \beta$$
$$B_{\alpha\beta.\lambda}^{\cdot\cdot\beta} = \frac{\partial A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\beta}}{\partial x^\lambda} - A_{\mu\beta\cdot}^{\cdot\cdot\beta}\Gamma_{\alpha\lambda}^\mu = \nabla_\lambda A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\beta}$$

и можно обобщить это правило для произвольных тензоров

$$\nabla_\lambda(A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma} B_{\cdot\gamma}^{\beta\cdot}) = B_{\cdot\gamma}^{\beta\cdot}\nabla_\lambda A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma} + A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}\nabla_\lambda B_{\cdot\gamma}^{\beta\cdot}$$

Ковариантная производная фундаментального тензора равна нулю. Пусть дан фундаментальный тензор g_{ik}

$$\nabla_\lambda g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu k}\Gamma_{i\lambda}^\mu - g_{i\mu}\Gamma_{k\lambda}^\mu = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{k,i\lambda} - \Gamma_{i,k\lambda},$$

была доказана формула

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} + \Gamma_{\beta,\alpha\gamma},$$

отсюда получаем

$$\nabla_\lambda g_{ik} = 0,$$

$$\nabla_\lambda g_i^k = \frac{\partial g_i^k}{\partial x^\lambda} - g_\mu^k \Gamma_{i\lambda}^\mu + g_i^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^k = -\Gamma_{i\lambda}^k + \Gamma_{\mu\lambda}^k = 0,$$

$$g_i^l = g_{ik} g^{kl},$$
$$\nabla_\lambda g_i^l = g^{kl} \nabla_\lambda g_{ik} + g_{ik} \nabla_\lambda g^{kl},$$
$$g_{ik} \nabla_\lambda g^{kl} = 0,$$

умножая на g^{ik}, получаем

$$g_k^r \nabla_\lambda g^{kl} = \nabla_\lambda g^{rl} = 0.$$

Введем контравариантные производные, определив их формулами вида

$$\nabla^\mu A_i = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda A_i$$
$$\nabla^\mu A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma} = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda A_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}$$

Принимая во внимание доказанное свойство фундаментальных тензоров и данное определение контравариантной производной, можем без труда написать составляющие различного рода производной от какого-либо тензора. Например, у $\nabla_\lambda A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$

$$\begin{array}{llll} \nabla_\lambda A_{\alpha\beta}, & \nabla_\lambda A_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}, & \nabla_\lambda A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}, & \nabla_\lambda A^{\alpha\beta}, \\ \nabla^\lambda A_{\alpha\beta}, & \nabla^\lambda A_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}, & \nabla^\lambda A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}, & \nabla^\lambda A^{\alpha\beta} \end{array}$$

Данное определение тензорной производной годится для любой системы координат и имеет тензорный характер. Поэтому, взяв какую-нибудь векторную операцию и выразив ее через тензорные производные, мы получаем выражение, имеющее тензорный характер и потому пригодное для вычисления в любой системе координат.

Пусть имеется прямоугольная система координат y_1, y_2, y_3, введем криволинейную систему координат x^1, x^2, x^3. Тогда y_1, y_2, y_3 будут функциями от x^1, x^2, x^3 и обратно

$$y_\alpha = y_\alpha(x^1, x^2, x^3) \qquad x^i = x^i(y_1, y_2, y_3).$$

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками будет выражаться в y_1, y_2, y_3

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2,$$

в координатах x^1, x^2, x^3

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

где
$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^j}.$$

В случае ортогональных криволинейных координат, обозначая, как обычно
$$H_i^2 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial x^i}\right)^2$$
будем иметь
$$g_{ii} = H_i^2, \quad g = H_1^2 H_2^2 H_3^2, \quad g^{ii} = \frac{1}{H_i^2}, \quad g_{ij} = g^{ij} = 0, \quad i \neq j$$

Пусть ортогональная проекция вектора, приложенного в точке M на оси криволинейной системы координат имеет физические компоненты a_{x_i} тогда:
$$a_{x^i} = H_i a^i = \frac{1}{H_i} a_i \qquad \text{суммирования нет.}$$

Рассмотрим различные векторные операции.

1) Градиент скалярной функции f

В декартовой системе координат этот вектор имеет составляющие
$$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_3}.$$

Вектор с составляющими $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ — ковариантный вектор, в системе координат y_i совпадает с составляющими $\operatorname{grad} f$. Ковариантные составляющие градиента в любой системе координат являются
$$\nabla_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}.$$
Контравариантными составляющими будут служить величины
$$\nabla^\alpha f = g^{\alpha\lambda} \nabla_\lambda f = g^{\alpha\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}.$$
Физические компоненты проекции $\operatorname{grad} f$ на оси координат
$$(\operatorname{grad} f)_{x_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

2) Дивергенция вектора $\mathbf{a}$

В координатах y_1, y_2, y_3

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_{x_i}}{\partial y_i},$$

переходя к x^i и, заменяя обыкновенные производные на тензорные, приходим к выражению $\nabla_i a^i = \nabla^i a_i$, которое имеет инвариантный характер и в случае прямоугольной системы координат совпадает с $\operatorname{div}\mathbf{a}$, т.к. все символы Кристоффеля равны нулю. В любой системе координат имеем равенство

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla_i a^i = \nabla^i a_i = g^{ik}\nabla_k a_i = \nabla_k(g^{ik}a_i).$$

Если воспользоваться формулой для ковариантной производной

$$\nabla_i a^k = \frac{\partial a^k}{\partial x^i} + a^\lambda \Gamma^k_{i\lambda},$$

полагая в этой формуле $k = i$, суммируя по i и пользуясь формулой

$$\Gamma^i_{i\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\lambda},$$

получим

$$\nabla_i a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} a^\lambda \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}a^i)}{\partial x^i}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}a^i)}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}g^{i\lambda}a_\lambda)}{\partial x^i}.$$

В ортогональной криволинейной системе координат, пользуясь формулами для физических компонент

$$\sqrt{g}g^{i\lambda}a_\lambda = H_1H_2H_3\frac{1}{H_i^2}a_i = H_1H_2H_3a_{x_i},$$

получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3a_{x^1})}{\partial x^1} + \frac{\partial(H_3H_1a_{x^2})}{\partial x^2} + \frac{\partial(H_1H_2a_{x^3})}{\partial x^3}\right].$$

3) Лапласиан.

Применим полученную для $\operatorname{div}\mathbf{a}$ формулу к $\mathbf{a} = \operatorname{grad} f$

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad a^i = g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}$$

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right),$$

$$\triangle f = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\right\}.$$

4) Ротор.

В декартовой системе координат для составляющих ротора имеем выражения вида

$$(\operatorname{rot} a)_{y_1} = \frac{\partial a_{y_2}}{\partial y_3} - \frac{\partial a_{y_3}}{\partial y_2}$$

Однако, если заменим обыкновенные производные на тензорные и составим выражение вида

$$\nabla_i a_k - \nabla_k a_i,$$

то получим ковариантный тензор 2-го ранга

$$\nabla_i a_k - \nabla_k a_i = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - a_\lambda\Gamma^\lambda_{ik} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} + a_\lambda\Gamma^\lambda_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k}$$

Из этого тензора сделаем вектор, умножив его на e^{ijk},

$$e^{123} = e^{312} = e^{231} = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$e^{132} = e^{321} = e^{213} = -\frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$r^\lambda = e^{ijk}\nabla_i a_k$$

составляющие

$$r^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right)$$
$$r^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \right)$$
$$r^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right)$$

В декартовой системе координат $g = 1$ и выражение совпадает с тем, что было написано ранее Ковариантные составляющие будут вычисляться по общему правилу

$$r_i = g_{i\alpha} r^\alpha$$

так что

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ g_{i1} \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right) + g_{i2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \right) + g_{i3} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) \right\}.$$

В физических составляющих для случая ортогональных координат получим

$$(\operatorname{rot} a)_{x^1} = \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (H_3 a_{x^3})}{\partial x^2} - \frac{\partial (H_2 a_{x^2})}{\partial x^3} \right\}$$

и две аналогичные формулы для остальных осей.

3.6 Тензор Римана-Кристоффеля

Рассмотрим поле какого-либо контравариантного вектора A^α, составим для него вторые контравариантные производные $\nabla_\beta \nabla_i A^\alpha$ и $\nabla_i \nabla_\beta A^\alpha$ и образуем их разность. Мы имеем прежде всего

$$\nabla_i A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^i} + A^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda i}$$

и далее

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta \nabla_i A^\alpha &= \frac{\partial \nabla_i A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\nabla_i A^\rho - \Gamma^\rho_{i\beta}\nabla_\rho A^\alpha \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^i} + A^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda i}\right) + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\left(\frac{\partial A^\rho}{\partial x^i} + A^\lambda \Gamma^\rho_{\lambda i}\right) \\
&\quad -\Gamma^\rho_{i\beta}\left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\rho} + A^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\rho}\right) = \\
&= \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\lambda i}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\frac{\partial A^\rho}{\partial x^i} - \Gamma^\rho_{i\beta}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\rho} \\
&\quad - A^\lambda \Gamma^\rho_{i\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\rho} + A^\lambda\left[\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\lambda i}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\lambda i}\right].
\end{aligned}$$

При перестановке индексов i и β сумма первых пяти членов последнего выражения останется неизменной; последние два члена превратятся в

$$A^\lambda\left[\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\rho i}\Gamma^\rho_{\lambda\beta}\right].$$

Поэтому получаем следующее важное равенство

$$\nabla_\beta \nabla_i A^\alpha - \nabla_i \nabla_\beta A^\alpha = A^\lambda\left[\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\lambda i}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\lambda i} - \Gamma^\alpha_{\rho i}\Gamma^\rho_{\lambda\beta}\right]. \tag{24}$$

Так как это равенство имеет место для произвольного вектора A^λ и так как слева стоит тензор третьего ранга, два раза ковариантный, один раз контравариантный, то выражение в квадратных скобках является тензором четвертого ранга, три раза ковариантным, раз контравариантным. Этот тензор называется тензором Римана-Кристоффеля и обозначается следующим образом

$$R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{i\beta\lambda\cdot} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda i}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda\beta}}{\partial x^i} + \Gamma^\nu_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\lambda i} - \Gamma^\nu_{\rho i}\Gamma^\rho_{\lambda\beta}. \tag{25}$$

При этом обозначении равенство перепишется следующим образом

$$\nabla_\beta \nabla_i A^\alpha - \nabla_i \nabla_\beta A^\alpha = A^\lambda R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{i\beta\lambda\cdot}. \tag{26}$$

Из него следует, что при ковариантном дифференцировании порядок дифференцирования можно изменять только в том случае, если тензор Римана-Кристоффеля обращается в нуль. Если в основной квадратичной форме пространства

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \tag{27}$$

коэффициенты g_{ik} не зависят от координат, то все символя Кристоффеля обращаются в нуль. Но тогда по формулам (25) и тензор Римана -Кристоффеля обращается в нуль.

Можно показать, что если тензор Римана-Кристоффеля во всех точках пространства обращается в нуль, то в этом пространстве можно выбрать такие координаты x^1, x^2, ..., x^n, чтобы основная квадратичная форма приняла вид (27) с постоянными коэффициентами, ясно, что в этом случае ковариантное дифференцирование совпадает с обыкновенным, и поэтому делается понятным, почему порядок дифференцирования не влияет на результат.

4 Основы теории поверхностей в тензорном изложении

Пусть Φ — регулярная поверхность, т.е. допускает регулярную параметризацию, задана в параметрической форме, где функции k раз непрерывно дифференцируемы, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{n}$ — единичная нормаль в точке (u, v)

Первая квадратичная форма.

$I = d\,\mathbf{r}^2$ — положительно определенная, т.к. равна нулю только при $du = 0$ и $dv = 0$.

Будем обозначать

$$(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) = E, \quad (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = F, \quad (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) = G$$

$$I = d\,\mathbf{r}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

это выражение для вычисления длины кривой на поверхности.

Пусть Φ — поверхность, γ — кривая на ней, P_0 — точка, общая для кривой и поверхности, $\mathbf{r}(u, v)$ — параметризация поверхности, $r(t)$ — параметризация кривой $P_0 \to u_0, v_0, t_0$

При достаточно малом δ точка $P(t)$ кривой $|t - t_0| < \delta$ принадлежит параметризованной окрестности точки P_0. $P(t)$ соответствует $u(t)$, $v(t)$ т.е.

$$r(t) = r\left(u(t), v(t)\right),$$

где $u(t), v(t)$ — уравнение кривой на поверхности

$$u'^2 + v'^2 \neq 0$$

Кривую на поверхности всегда можно задать уравнением

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)).$$

Длина кривой от $P_0(t_0)$ до $P(t)$

$$s(t_0, t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\,\mathbf{r}'(t)|dt = \int\limits_{t_0}^{t} |\,\mathbf{r}'(u(t), v(t))|dt = \int\limits_{\gamma(P_0,P)} |d\,\mathbf{r}(u,v)| = \int\limits_{\gamma(P_0,P)} \sqrt{I}.$$

Первая квадратичная форма задает матрицу и ее называют линейным элементом поверхности.

Площадь поверхности.

Пусть Φ — гладкая поверхность, G — область на поверхности, ограниченная конечным числом гладких кривых.

P —касательная плоскость, спроектируем ее на поверхность

$$dS = |\,\mathbf{r}'_u\,du \times \mathbf{r}'_v\,dv| = |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|dudv$$

$$|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|^2 = \mathbf{r}_u^2\,\mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2$$

$$S = \int\int \sqrt{EG - F^2}dudv$$

Вторая квадратичная форма.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ — параметризация поверхности, $\mathbf{n}(u,v)$ — единичный вектор нормали в точке $P(u,v)$

Вторая квадратичная форма:

$$-d\,\mathbf{r}\cdot d\,\mathbf{n} = (-\,\mathbf{r}_u\,\mathbf{n}_u)du^2 + (-\,\mathbf{r}_u\,\mathbf{n}_v - \mathbf{r}_v\,\mathbf{n}_u)dudv + (-\,\mathbf{r}_v\,\mathbf{n}_v)dv^2$$

Обозначим

$$-\,\mathbf{r}_u\,\mathbf{n}_u = L, \quad -\,\mathbf{r}_v\,\mathbf{n}_v = N, \quad -\,\mathbf{r}_u\,\mathbf{n}_v - \mathbf{r}_v\,\mathbf{n}_u = 2M$$

$$d\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0 \Longrightarrow d(d\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) = d^2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} + d\,\mathbf{r}\,d\,\mathbf{n} = 0$$

$$II = d\,\mathbf{r}^2\cdot\mathbf{n} = \mathbf{r}_{uu}\,\mathbf{n}\,du^2 + 2\,\mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}\,dudv + \mathbf{r}_{vv}\,\mathbf{n}\,dv^2$$

$$L = \mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{n}, \quad M = \mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}, \quad N = \mathbf{r}_{vu}\cdot\mathbf{n}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}}{|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|}, \qquad |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,| = \sqrt{EG - F^2}$$

$$L=\frac{(\mathbf{r}_{uu},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{|\,\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,|}=\frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$M=\frac{(\mathbf{r}_{uv},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{|\,\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,|}=\frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$N=\frac{(\mathbf{r}_{vv},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)}{|\,\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,|}=\frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Если поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$, то

$$L=\frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z'_x+z'_y}},\quad M=\frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z'_x+z'_y}},\quad N=\frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z'_x+z'_y}}.$$

Кривизна.
Обозначим Θ — угол между касательными в точках P и Q
Кривизной будем называть величину

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S}=k_1$$

Теорема.

Регулярная (дважды непрерывно дифференцируемая) кривая имеет в каждой точке определенную кривизну k_1.

Если $r=r(s)$ — естественная параметризация, то $k_1=|r''(s)|$. (естественная параметризация — параметром является длина дуги.)

Доказательство.

$$P\longrightarrow s$$
$$Q\longrightarrow s+\Delta s$$

$$\boldsymbol{\tau}(s)=\mathbf{r}'(s)$$
$$\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)=\mathbf{r}'(s+\Delta s)$$

$$|\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)-\tau(s)|=2\sin\frac{\Delta\Theta}{2}$$

$$\frac{|\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\tau}(s)|}{|\Delta s|}=\frac{2\sin\frac{\Delta\Theta}{2}}{\Delta s}=\frac{\sin\frac{\Delta\Theta}{2}}{\frac{\Delta\Theta}{2}}\frac{\Delta\Theta}{\Delta s}$$

$$\Delta\Theta \xrightarrow[\Delta s\to 0]{} 0$$

по непрерывности получаем

$$k_1=|\,\mathbf{r}''(s)|$$

Величина, обратная кривизне - радиус кривизны $\rho=\frac{1}{k_1}$

Кручение.

P — точка, Q — точка (γ)

$\Delta\Theta$ — угол между соприкасающимися плоскостями кривой в точках P и Q.

Абсолютное кручение k_2:

$$\lim\frac{\Delta Q}{\Delta S}=k_2$$

Теорема.

Трижды дифференцируемая кривая в каждой точке, где кривизна не равна, имеет определенное кручение $|k_2|$.

Если $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$

$$|k_2|=\frac{|(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\mathbf{r}''')|}{k_1^2}$$

$\tau\cdot\tau'=0$, $\mathbf{r}''\perp\mathbf{r}'$ так как $\boldsymbol{\tau}^2=1$ $\boldsymbol{\tau}=\dfrac{\mathbf{r}'}{|\,\mathbf{r}'\,|}$

Главная нормаль — нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости.

Бинормаль - нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости.

Соприкасающаяся плоскость.

$$\frac{h}{d^2}\xrightarrow[Q\to P]{} 0$$

Соприкасающаяся плоскость параллельна $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$

Кривизна кривой на поверхности

$(\mathbf{r}'', n)$
$|\,\mathbf{r}''\,| = k$, $\mathbf{r}''$ направлен по нормали к кривой

$$|\,\mathbf{r}'', n| = k\cos\Theta$$

Θ — угол между главной нормалью и кривой и нормалью к поверхности.

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}'', n) &= (\mathbf{r}_{uu}\, u'^2 + 2\,\mathbf{r}_{uv}\, u'v' + \mathbf{r}_{vv}\, v'^2 + \mathbf{r}_u\, u'' + \mathbf{r}_v\, v'') \cdot \mathbf{n} = \\ &= (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n})u'^2 + 2(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n})u'v' + (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n})v'^2\end{aligned}$$

Вторая квадратичная форма

$$\mathbf{r}_u \perp \mathbf{n}, \qquad \mathbf{r}_v \perp \mathbf{n}$$

$$k\cos\Theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{II}{I}$$

Таким образом

$$k\cos\Theta = k_0 = const,$$

напоминание:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = ds^2$$

k_0 — нормальная кривизна поверхности в данном направлении (du, dv). Она равна кривизне кривой, которая получается в сечении плоскостью, перпендикулярной касательной плоскости и содержащей направление (du, dv).

Направление называется главным направлением, если норм. кривизна поверхности в этом направлении является *экстремальной*.

Два главных направления перпендикулярны и сопряжены.

$$(L - k_0E)du^2 + 2(M - k_0F)dudv + (N - k_0G)dv^2 = 0$$

$$t = \frac{du}{dv}$$

$$\varphi = (L - k_0E)t^2 + 2(M - k_0F)t + (N - k_0G) = 0$$

$$k_0 = k_0(t)$$

Для минимума и максимума $k_0'(t) = 0$.

$$k_0'(t) = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\frac{\partial\varphi}{\partial k_0}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (L - k_0E)t + (M - k_0F) = 0$$
$$(L - k_0E)du + (M - k_0F)dv = 0$$

Аналогично:
$$t_1 = \frac{dv}{du}$$
$$(M - k_0F)du + (N - k_0G)dv = 0$$
$$\frac{L - k_0E}{M - k_0F} = \frac{M - k_0F}{N - k_0G}$$
$$(L - k_0E)(N - k_0G) = (M - k_0F)^2$$
$$k_0^2(EG - F^2) + 2(FM - EN - GL)k_0 + (LN - M^2) = 0$$

$K = k_{01} \cdot k_{02}$ — гауссова кривизна, это степень разброса пучка нормалей поверхности точке элемента.

$H = \frac{1}{2}(k_{01} + k_{02})$ — средняя кривизна

$$K = \frac{LN - m^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{FM - EN - GL}{EG - F^2}$$

$$(Ldu + Mdv) = k_0(Edu + Fdv)$$
$$(Mdu + Ndv) = k_0(Fdu + Gdv)$$

Делим и получаем уравнение на направления

$$(EM - FL)du^2 + (EN - GL)dudv + (FN - GM)dv^2 = 0$$

$$\frac{dv}{du} = \varphi_1(u, v), \qquad \frac{dv}{du} = \varphi_2(u, v)$$

Выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена так, что xy лежат в касательной плоскости.

Средняя кривизна поверхности, натянутой на контур, равна нулю.

Пусть S — поверхность, (u, v) — параметризация, $\mathbf{r}(u, v)$ — ее радиус-вектор. Будем варьировать по нормали.

$$\mathbf{r}^{(1)}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d(u, v)\,\mathbf{n}(u, v)$$

$$\mathbf{r}_u^{(1)} = \mathbf{r}'_u + \alpha'_u\,\mathbf{n} + \alpha\,\mathbf{n}_u$$
$$\mathbf{r}_v^{(1)} = \mathbf{r}'_v + \alpha'_v\,\mathbf{n} + \alpha\,\mathbf{n}_v$$

$$E_1 = (\mathbf{r}'_u + \alpha'_u\,\mathbf{n} + \alpha\,\mathbf{n}'_u)^2 = \mathbf{r}'_u + 2\alpha'_u(\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{n}) + 2\,\mathbf{n}(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}')$$
$$(\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{n}) = 0$$

$$E_1 = E - 2\alpha L$$
$$F_1 = F - 2\alpha M$$
$$G_1 = G - 2\alpha N$$

$$\begin{aligned} E_1G_1 - F_1^2 &= EG - F^2 - 2\alpha(En - 2FM + GL) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4\alpha H) \end{aligned}$$

$$\sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = \sqrt{EG - F^2}\left(1 - \frac{4\alpha H}{2} + o(H)\right)$$

$$\iint\limits_{S_1} \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}dudv - \iint\limits_{(S)} \sqrt{EG - F^2}dudv =$$
$$= -\int\int\limits_{S} 2\alpha H\sqrt{EG - F^2}dudv$$

$$\delta S = -\int\int\limits_{S} 2\alpha H dS$$

Таким образом получаем, что H должно быть равно нулю.

Формула Эйлера.

Индикатриса кривизны

Введем в касательной плоскости поверхности декартовы координаты, приняв точку касания за начало координат, а прямые, содержащие $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ за оси координат, сами векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ за базисные векторы. Пусть x, y — точки на индикатрисе.

$$(x, y)(\mathbf{r}_u\,\mathbf{r}_v)$$

$$x\,\mathbf{r}_u + y\,\mathbf{r}_v = \sqrt{R}\frac{\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv}{|\,\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv|}$$

Возведем в квадрат и используем, что $(x, y) \parallel (du, dv)$

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{|Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2|} = \frac{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}{|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2|}$$

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = 1$$

Теперь выберем так параметризацию так, чтобы главное направление было по оси x.

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\Theta}{R_1} + \frac{\sin^2\Theta}{R_2}$$

R_1 — максимальный радиус, R_2 — минимальный радиус. Θ —угол.

Символы Кристоффеля.

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}_u) = 0 \qquad u = u^1$$
$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}_v) = 0 \qquad v = u^2$$

$$\frac{\partial}{\partial u^j}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_i) = (\mathbf{n}_j, \mathbf{r}_i) + (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{ij}) = 0$$

Где $(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{ij})$ — вторая квадратичная форма

Разложим частные производные $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ по $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}$; они лежат в касательной плоскости

$$\mathbf{n}_1 = -b_1^1\,\mathbf{r}_1 - b_1^2\,\mathbf{r}_2 = -b_1^\alpha\,\mathbf{r}_\alpha$$
$$\mathbf{n}_2 = -b_2^1\,\mathbf{r}_1 - b_2^2\,\mathbf{r}_2 = -b_2^\alpha\,\mathbf{r}_\alpha$$

Умножим скалярно на $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$

$$b_{i1} = \mathbf{n}_i\,\mathbf{r}_1 = -b_i^1\,\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_1 - b_i^2\,\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2$$
$$b_{i2} = \mathbf{n}_i\,\mathbf{r}_2 = -b_i^1\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_1 - b_i^2\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_1 = g_{11} \qquad \mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2 = g_{12} \qquad \mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_1 = g_{21} \qquad \mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_2 = g_{22}$$

обозначим

$$\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j}$$

$$\mathbf{r}_{ij} = G^1_{ij} r_1 + G^2_{ij} r_2 + \alpha_{ij}\,\mathbf{n}$$

Умножим на $\mathbf{n}$

$$\mathbf{r}_{ij}\,\mathbf{n} = \alpha_{ij} \leftarrow \text{коэффициент второй квадратичной формы}$$

$$\mathbf{r}_{ij} = G^1_{ij}\,\mathbf{r}_1 + G^2_{ij}\,\mathbf{r}_2 + b_{ij}\,\mathbf{n}$$

Умножим последнее равенство скалярно на $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$

Обозначим

$$\mathbf{r}_{ij}\,\mathbf{r}_k = G_{k,ij} = \Gamma_{k,ij}.$$

Пользуясь

$$\mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_j = g_{ij},$$

$$\mathbf{r}_{ik}\,\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k},$$

получаем символы Кристоффеля

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right).$$

Список литературы

[1] Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1961.

[2] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1980.

[3] Топоногов В.А. Тензорная алгебра и тензорный анализ. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1995.
http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/Toponogov.pdf

[4] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Изд-во техн.-теор. лит-ры, 1953.

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1979.

[6] Сокольников И.С. Тензорный анализ: Теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред. М., КомКнига, 2007.

[7] Кованцов Н.И., Зражевская Г.М., Кочаровский В.Г., Михайловский В.И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. Киев, Вища школа, 1989.

[8] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Наука, 1987.