Занятие 19

Метод малого параметра.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y}, \varepsilon) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{a}(\varepsilon) \end{cases} \tag{19.1}$$

Правая часть системы $\vec{f}$ и начальные данные $\vec{a}$ зависят от параметра ε.

Если вектор-функции $\vec{f}$ и $\vec{a}$ можно представить в виде

$$\vec{f}(t, \vec{y}, \varepsilon) = \vec{f}_0(t, \vec{y}) + \varepsilon \vec{f}_1(t, \vec{y}) + \dots + \frac{\varepsilon^m}{m!}\vec{f}_m(t, \vec{y}) + o(\varepsilon^m),$$
$$\vec{a}(\varepsilon) = \vec{a}_0 + \varepsilon \vec{a}_1 + \ldots + \frac{\varepsilon^m}{m!}\vec{a}_m + o(\varepsilon^m),$$

то решение задачи Коши (19.1) также можно представить в виде

$$\vec{y}(t, \varepsilon) = \vec{y}^{[0]}(t) + \varepsilon \vec{y}^{[1]}(t) + \ldots + \frac{\varepsilon^m}{m!}\vec{y}^{[m]}(t) + o(\varepsilon^m).$$

Заметим, что $\vec{y}^{[0]}(t) = \vec{y}(t, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}$, $\vec{y}^{[1]}(t) = \left.\dfrac{\partial \vec{y}(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ и так далее.

Метод малого параметра позволяет находить функции $\vec{y}^{[k]}(t)$ одну за другой, начиная с $k = 0$, решая специальным образом построенные задачи Коши.

Так, полагая в (19.1) значение $\varepsilon = 0$, мы получим задачу Коши для определения функции $\vec{y}^{[0]}(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y}^{[0]}(t) = \vec{f}(t, \vec{y}^{[0]}, 0) \\ \vec{y}^{[0]}(t_0) = \vec{a}(0) \end{cases}$$

Для определения функции $\vec{y}^{[1]}(t)$ следует продифференцировать уравнение и начальные условия в (19.1) по ε и положить $\varepsilon = 0$. Правая часть и начальные данные полученной задачи Коши будут содержать функцию $\vec{y}^{[0]}(t)$, которая была найдена на предыдущем шаге.

Дифференцируя уравнение и начальные условия в (19.1) по ε дважды и полагая $\varepsilon = 0$, можно получить задачу Коши для определения функции $\vec{y}^{[2]}(t)$. Но, как правило, речь идет только о построении первого приближения.

Рассмотрим примеры, а затем сформулируем общие утверждения.

Пример 1. Найдем первое приближение $y^{[0]}(t) + \varepsilon y^{[1]}(t)$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2t + \varepsilon y^2 \\ y(0) = \varepsilon - 1 \end{cases} \tag{19.2}$$

Разложим решение по степеням ε: $y(t, \varepsilon) = y_0(t) + y_1(t)\varepsilon + o(\varepsilon)$.

Функция $y_0(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dt}(t) = 2t \\ y_0(0) = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $y_0(t) = t^2 - 1$.

Продифференцируем уравнение и начальные условия в (19.2) по ε:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon}\dfrac{dy}{dt} = y^2 + \varepsilon \dfrac{\partial y^2}{\partial \varepsilon} \\ \quad \dfrac{\partial y}{\partial \varepsilon}\Big|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

Заметим, что при достаточной гладкости функции $y(t, \varepsilon)$ можно поменять порядок дифференцирования: $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial y}{\partial\varepsilon}$.

Полагая $\varepsilon = 0$ и учитывая, что $y(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = y_0(t)$, $\dfrac{\partial y}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = y_1(t)$, получаем задачу Коши $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y_1 = y_0^2 = (t^2-1)^2 \\ y_1(0) = 1. \end{cases}$

Ее решение $y_1 = \dfrac{1}{5}t^5 - \dfrac{2}{3}t^3 + t + 1$.

Таким образом, $y(t,\varepsilon) = (t^2-1) + \varepsilon\left(\dfrac{1}{5}t^5 - \dfrac{2}{3}t^3 + t + 1\right) + o(\varepsilon)$. $\square$

Пример 2. Разложить решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} + \sin x = 0 \\ x(0) = \varepsilon\,, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{19.3}$$

по степеням ε до ε^3 включительно.

Эта задача описывает колебания математического маятника при малых начальных отклонениях. Ищем решение в виде

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \frac{\varepsilon^2}{2}x_2(t) + \frac{\varepsilon^3}{3!}x_3(t) + o(\varepsilon^3).$$

Задачу Коши для функции $x_0(t)$ получаем, положив в (19.3) $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + \sin x_0 = 0 \\ x_0(0) = 0, \quad \dot{x}_0(0) = 0. \end{cases}$$

Решением поставленной задачи, очевидно, является функция $x_0(t) \equiv 0$ (она удовлетворяет уравнению и начальным условиям, а так как все условия теоремы Пикара выполнены, то других решений нет).

Дифференцируем (19.3) по ε:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right) + \cos x \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon} = 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\Big|_{t=0} = 1\,, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{19.4}$$

Положим $\varepsilon = 0$. Поскольку $x(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = x_0(t)$ и $\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = x_1(t)$, получаем задачу Коши для функции $x_1(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\cos x_0)\, x_1 = 0 \\ x_1(0) = 1\,, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases}$$

На предыдущем шаге мы определили, что $x_0(t) \equiv 0$, поэтому уравнение существенно упрощается:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 = 0 \\ x_1(0) = 1\,, \quad \dot{x}_1(0) = 0. \end{cases}$$

Решением данной задачи Коши является функция $x_1(t) = \cos t$.

Дифференцируем (19.4) ещё раз по ε

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2}\right) - \sin x \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \cos x \cdot \dfrac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{19.5}$$

Полагаем $\varepsilon = 0$ и получаем уравнение для функции $x_2(t) = \dfrac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0}$:

$$\ddot{x}_2(t) - \sin x_0 \cdot x_1^2 + \cos x_0 \cdot x_2 = 0.$$

Учитывая, что $x_0 \equiv 0$ и $x_1(t) = \cos t$, приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t) + x_2 = 0 \\ x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, ее решение $x_2 \equiv 0$.

Дифференцируем уравнения (19.5) по ε

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3}\right) - \cos x \cdot \left(\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right)^3 - \sin x \cdot 2\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon} \cdot \dfrac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} \quad - \sin x \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon} \cdot \dfrac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \cos x \cdot \dfrac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3}\right|_{t=0} = 0 \\ \left.\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Полагаем $\varepsilon = 0$ и получаем уравнение на функцию $x_3(t) = \left.\dfrac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3}\right|_{\varepsilon=0}$:

$$\ddot{x}_3 - \cos x_0 \cdot x_1^3 - 6 \sin x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 + \cos x_0 \cdot x_3 = 0.$$

Подставляя найденные ранее значения $x_0 \equiv 0$, $x_1(t) = \cos t$ и $x_2 \equiv 0$, получаем задачу Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}_3 + x_3 - \cos^3 t = 0 \\ x_3(0) = 0\,, \quad \dot{x}_3(0) = 0. \end{cases}$$

Решением поставленной задачи Коши является функция

$$x_3(t) = \frac{1}{16} \sin t \cdot \sin 2t + \frac{3}{8} t \sin t.$$

Итак, искомое разложение по степеням ε имеет вид:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot \cos t + \frac{\varepsilon^3}{3!}\left(\frac{1}{16} \sin t \cdot \sin 2t + \frac{3}{8} t \sin t\right) + o(\varepsilon^3).$$

Заметим, что если заменить в уравнении (19.3) функцию $\sin x$ на эквивалентную функцию x (при малых значениях x), то полученная задача Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = \varepsilon\,, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

будет иметь решение $x = \varepsilon \cos t$, что в точности совпадает с первым приближением, полученным выше. $\square$

Обычно при разложении по степеням ε вполне удовлетворяются первым или вторым приближением. Но на этом примере мы показали, что в принципе можно продвинуться как угодно далеко, причем на каждом шаге, за исключением первого, мы получаем линейные уравнения.

Пример 3. Найти разложение по степеням малого параметра ε периодического (с периодом равным 2π) решения уравнения

$$\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \varepsilon \dot{x}^2. \tag{19.6}$$

Ищем решение в виде

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon).$$

Функция $x_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_0 + 3x_0 = 2\sin t.$$

Единственное периодическое решение этого уравнения, имеющее период 2π, есть $x_0(t) = \sin t$.

Дифференцируем уравнение (19.6) по ε и полагаем $\varepsilon = 0$.

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + 3\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \dot{x}^2 + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\dot{x}^2$$

Учитывая, что $x\big|_{\varepsilon=0} = x_0(t)$ и $\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = x_1(t)$, получим

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 = \dot{x}_0^2.$$

Поскольку $x_0(t) = \sin t$, уравнение приобретает вид

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 = \cos^2 t$$

Периодическое с периодом 2π решение этого уравнения можно найти методом неопределённых коэффициентов, представив правую часть в виде $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$.

Итак, $x_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t$, и искомое разложение имеет вид

$$x(t) = \sin t + \varepsilon\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) + o(\varepsilon) \quad \square$$

Пример 4. Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln x + \sin y - z^2 + \cos t\varepsilon, & x(0) = \cos\varepsilon \\ \dot{y} = xy, & y(0) = \sin\varepsilon \\ \dot{z} = x^2 - z^4 + \cos y - e^{\varepsilon^2}, & z(0) = -1 + \varepsilon^2 \end{cases} \tag{19.7}$$

Зная, что нулевые приближения функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ суть константы, найти их первые приближения.

Положим в начальных условиях $\varepsilon = 0$. Тогда $x_0(0) = 1$, $y_0(0) = 0$, $z_0(0) = -1$. Нетрудно проверить, что функции $x_0 \equiv 1$, $y_0 \equiv 0$, $z_0 \equiv -1$ действительно являются решением системы (19.7) при $\varepsilon = 0$, то есть

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \ln x_0 + \sin y_0 - z_0^2 + 1, \\ \dot{y}_0 = x_0 y_0, \\ \dot{z}_0 = x_0^2 - z_0^4 + \cos y_0 - 1. \end{cases}$$

Представим функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в виде

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon), \\ y(t) = \varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon), \\ z(t) = -1 + \varepsilon z_1(t) + o(\varepsilon). \end{cases}$$

Подставим эти выражения в систему (19.7), воспользуемся разложениями Тейлора входящих в нее функций и оставим только слагаемые, содержащие первую степень параметра ε.

Для первого уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(1 + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon)\right) = \ln(1 + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon)) + \\ &+ \sin(\varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon)) - (-1 + \varepsilon z_1(t) + o(\varepsilon))^2 + 1 - \frac{t^2\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) = \\ &= \varepsilon x_1(t) + \varepsilon y_1(t) + 2\varepsilon z_1(t) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

или $\qquad \dot{x}_1(t) = x_1(t) + y_1(t) + 2z_1(t)$

Для второго уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon)\right) = (1 + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon))(\varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon))$$

или $\qquad \dot{y}_1(t) = y_1(t)$

Для третьего уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(-1+\varepsilon z_1(t)+o(\varepsilon)\right)=\left(1+\varepsilon x_1(t)+o(\varepsilon)\right)^2-\left(-1+\varepsilon z_1(t)+o(\varepsilon)\right)^4+$$
$$+\cos(\varepsilon y_1(t)+o(\varepsilon))-(1-\varepsilon^2+o(\varepsilon^2))=2\varepsilon x_1(t)+4\varepsilon z_1(t)+o(\varepsilon)$$

или $\qquad \dot z_1(t)=2x_1(t)+4z_1(t)$

Начальные условия также разложим по степеням ε:

$$\begin{cases} 1+x_1(0)\varepsilon+o(\varepsilon)=\cos\varepsilon=1-\dfrac{\varepsilon^2}{2}+o(\varepsilon^2) \\ y_1(0)\varepsilon+o(\varepsilon)=\sin\varepsilon=\varepsilon+o(\varepsilon) \\ -1+z_1(0)\varepsilon+o(\varepsilon)=-1+\varepsilon^2 \end{cases}$$

Следовательно, $x_1(t)=0$, $y_1(0)=1$, $z_1(0)=0$.

Итак, для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ мы получили задачу Коши

$$\begin{cases} \dot x_1(t)=x_1(t)+y_1(t)+2z_1(t) & x_1(t)=0 \\ \dot y_1(t)=y_1(t) & y_1(0)=1 \\ \dot z_1(t)=2x_1(t)+4z_1(t) & z_1(0)=0 \end{cases} \tag{19.8}$$

Решением этой задачи Коши являются функции

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{12}e^{5t}-\dfrac{3}{4}e^{t}, \\ y_1=e^{t}, \\ z_1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}e^{5t}-\dfrac{1}{2}e^{t}. \quad \square \end{cases}$$

В этом примере для получения системы на функции x_1, y_1, z_1 мы воспользовались разложением функций по формуле Тейлора. Очевидно, что систему (19.8) можно было получить из (19.7) дифференцированием по ε, как мы это делали в предыдущих примерах. Выбор техники в таких случаях — дело вкуса.

Пример 5. Найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$, где $x(t,\mu)$ - решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{2}{t} - \dfrac{2}{x} \\ x(1) = 1\,, \quad \dot{x}(1) = \mu \end{cases}$$

Представим решение в виде $x(t,\mu) = x_0(t) + x_1(t)(\mu - 1) + o(\mu - 1)$. Заметим, что $x_1(t)$ и есть искомая функция $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$.

Функция $x_0(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = \dfrac{2}{t} - \dfrac{2}{x_0} \\ x_0(1) = 1\,, \quad \dot{x}(1) = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $x_0(t) = t$ удовлетворяет уравнению и дополнительным условиям.

В данном примере более естественно дифференцирование исходного уравнения и начальных условий по μ:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right) = \frac{2}{x^2}\frac{\partial x}{\partial \mu}$$

Для функции $x_1(t)$ получим уравнение

$$\ddot{x}_1 = \frac{2}{x_0^2}x_1 = \frac{2}{t^2}x_1$$

или, с учетом введенных обозначений и найденного решения и начальные условия $x_1(1) = 0$, $\dot{x}_1(1) = 1$.

Решением поставленной задачи Коши для уравнения Эйлера является функция

$$x_1(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3t}. \;\square$$

Проанализируем рассмотренные примеры. Система для функций $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$, как правило, была нелинейной, и мы находили её решение, пользуясь теми или иными подсказками. Однако для функций, которые дают первое приближение, мы всегда получали <u>линейную систему</u> (уравнение). Это важное обстоятельство и делает метод малого параметра столь эффективным: если нулевое приближение известно, то первое и последующие приближения можно построить, решая задачи Коши для линейных систем. Покажем это в общем виде.

Если $\dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y}, \varepsilon)$, $\vec{y}(t_0) = \vec{b}(\varepsilon)$, то для $i = 1 \dots n$

$$\begin{cases} \dot{y}_i = f_i(t, y_1, \dots, y_n, \varepsilon) \\ y_i(t_0) = b_i(\varepsilon) \end{cases}$$

Дифференцируем уравнение и начальные условия по ε:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial y_i}{\partial \varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\dfrac{\partial y_j}{\partial \varepsilon} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \varepsilon} \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial \varepsilon}(t_0) = \dfrac{\partial y_i}{\partial \varepsilon} b_i \end{cases}$$

Полагаем $\varepsilon = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y_i^{[1]} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, \vec{y}^{[0]}, 0) \cdot y_j^{[1]} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \varepsilon}(t, y^{[0]}, 0) \\ y_i^{[1]}(t_0) = \left.\dfrac{\partial b_i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \end{cases}$$

Таким образом, на функции $y_i^{[1]}$ получаем <u>линейную систему</u>

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y}^{[1]} = A(t) \cdot \vec{y}^{[1]} + \vec{F}(t), \\ \vec{y}^{[1]}(t_0) = \vec{b}_0, \end{cases}$$

которую называют «системой в вариациях».

Самостоятельная работа

1. Найти разложение решения задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} + e^{\varepsilon x} = 1 \\ x(0) = \sin\varepsilon \end{cases}$ по степеням ε до второго порядка включительно.

2. Найти разложение по степеням ε периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + x^3 = 1 + \varepsilon \sin t$$

3. Найти производные $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$, $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x^4 + y^2 - 1, & y(0) = \varepsilon \end{cases}$$

4. Найти функции $\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varepsilon}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ при $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + y + \sin x) & x(0) = -\varepsilon \\ \dot{y} = \sqrt[4]{1+z} - e^{xy} & y(0) = \varepsilon^2 \\ \dot{z} = x^3 - y^2 + \cos z - 1 & z(0) = 4\varepsilon \end{cases}$$

Ответы и указания к самостоятельной работе

1. $\begin{cases} \dot{x}_0 + 1 = 1 \\ x_0(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \equiv 0; \begin{cases} \dot{x}_1 + x_0 = 0 \\ x_1(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 \equiv 1$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 + (x_0)^2 + 2x_1 = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 + 2 = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -2t$$

Ответ: $x(t) = \varepsilon - \varepsilon^2 t + o(\varepsilon^2)$

2. $\ddot{x}_0 + x_0^3 = 1 \Rightarrow x_0 \equiv 1$.

$\ddot{x}_1 + 3x_0^2 \cdot x_1 = \sin t \Rightarrow \ddot{x}_1 + 3x_1 = \sin t \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}\sin t$

Ответ: $x(t) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}\sin t + o(\varepsilon)$

3. $\begin{cases} \dot{x}_0 = x_0 y_0, & x_0(0) = 1 \\ \dot{y}_0 = x_0^4 + y_0^2 - 1, & y_0(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0(t) \equiv 1 \\ y_0(t) \equiv 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, & x_1(0) = 0 \\ \dot{y}_1 = 4x_1, & y_1(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2t \\ y_1(t) = \operatorname{ch} 2t \end{cases}$$

4. $x_0 \equiv 0$, $y_0 \equiv 0$, $z_0 \equiv 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_1 & x_1(0) = -1 \\ \dot{y}_1 = \dfrac{z}{4} & y_1(0) = 0 \\ \dot{z}_1 = 0 & z_1(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - t \\ y_1 = t \\ z_1 \equiv 4 \end{cases}$$