Электрические цепи с распределенными параметрами.

Электрические цепи с распределенными параметрами

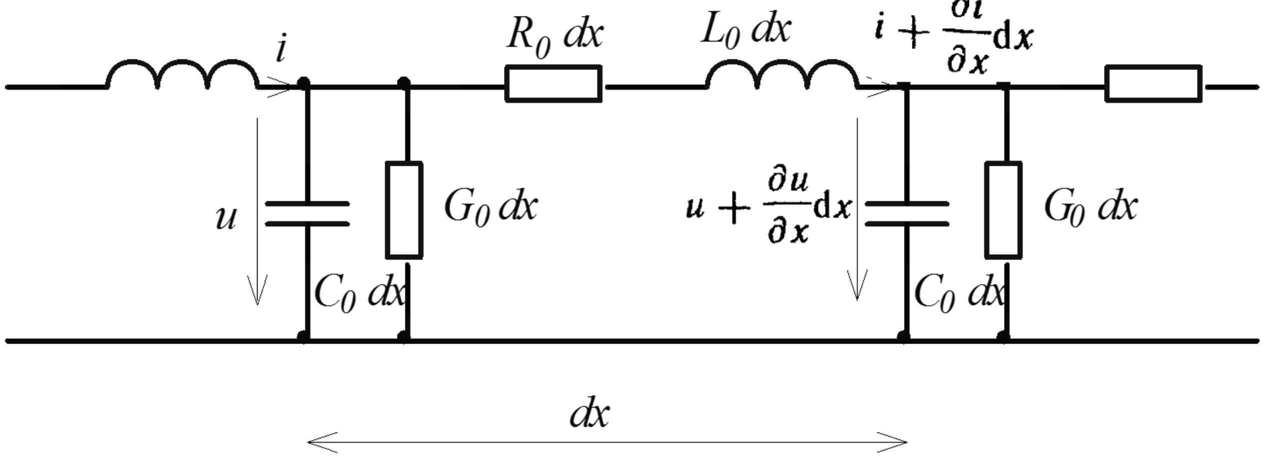
Цепи, токи и напряжения в которых зависят от точки, в которой произведено измерение, называются **цепями (линиями) с распределенными параметрами, или длинными линиями**.

Токи и напряжения в линии являются функциями не только времени, но и расстояния.

Рассмотрение работы линии проведем при условии наличия в цепи ***синусоидальных токов и напряжений***.

Уравнение однородной линии в стационарном режиме.

R_0, L_0, C_0 и G_0 первичные параметры линии



Приращение тока и напряжения на элементе длины выразим через частные производные, запишем соотношения по правилам Кирхгофа

$$-u + iR_0dx + L_0dx\frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx = 0$$

$$i - uG_0dx - C_0dx\frac{\partial u}{\partial t} - i - \frac{\partial i}{\partial x}dx = 0$$

Уравнение однородной линии в стационарном режиме

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = iR_0 + L_0\frac{\partial i}{\partial t} \quad , \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = uG_0 + C_0\frac{\partial u}{\partial t}$$

Учитывая условие синусоидальности токов и напряжений, введем обозначения $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ и $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$, тогда:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0\dot{I} \quad , \qquad -\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0\dot{U}$$

Продифференцируем по расстоянию первое уравнение и подставим в него второе:

$$\boxed{\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Z_0Y_0\dot{U}}$$

Уравнение однородной линии в стационарном режиме

Характеристическое уравнение : $p^2 - Z_0 Y_0 = 0,$

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{Z_0 Y_0} = \pm\gamma = \pm(\alpha + j\beta).$$

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x}$$

γ - постоянная распространения, α -коэффициент затухания, β - коэффициент фазы.

Продифференцируем напряжение для нахождения тока:

$$-\frac{d(\dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x})}{dx} = \gamma \dot{A}_2 e^{-\gamma x} - \gamma \dot{A}_1 e^{\gamma x} = Z_0 \dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_1}{Z_C} e^{\gamma x}, \qquad Z_C = \frac{Z_0}{\gamma} = \frac{\gamma}{Y_0} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$$

Падающая и отраженная волны

Запишем решение уравнения линии в тригонометрическом виде для наглядности:

$$u(t,x) = A_2 e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x + \varphi_2) + A_1 e^{\alpha x}\sin(\omega t + \beta x + \varphi_1)$$

$$i(t,x) = \frac{A_2}{Z_C} e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x + \varphi_1 - \varphi_Z) - \frac{A_1}{Z_C} e^{\alpha x}\sin(\omega t - \beta x + \varphi_2 - \varphi_Z)$$

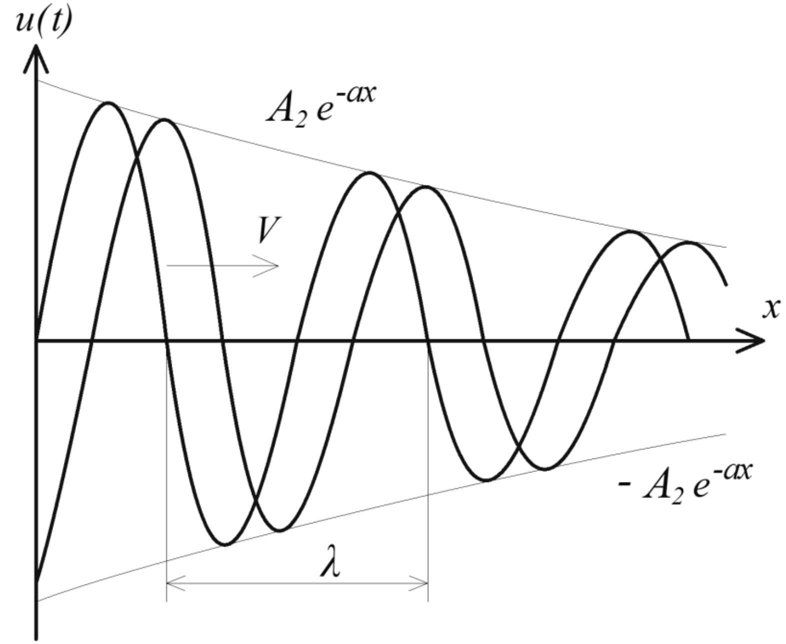
Первое слагаемое в выражениях определяется как прямая или падающая (распространяющаяся от начала линии к концу) волна, второе как обратная или отраженная (от конца линии, идущая в сторону начала) волна.

Учитывая то, что начальной точкой отраженной волны является конец линии, знак показателя экспоненты определяющей затухание физического смысла не лишен.

Наличие отраженных волн в линии может приводить к искажению и потере передаваемой информации, вопрос о борьбе с этим явлением будет рассмотрен немного позже.

Параметры линии

$$u(t,x) = A_1 e^{\alpha x}\sin(\omega t + \beta x + \varphi_1) + A_2 e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x + \varphi_2)$$



Фаза волны $\omega t - \beta x + \varphi_1$

Продифференцируем по времени и приравняем к нулю:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

Длина волны определяется фазовым сдвигом на 2π

$$\omega t - \beta(x+\lambda) + \varphi_1 = \omega t - \beta x + \varphi_1 - 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = vT = \frac{v}{f}$$

Для падающей и отраженной волн выполняется закон Ома: $\dot{I}_{\text{пр}} = \frac{\dot{U}_{\text{пр}}}{Z_C}$, $\dot{I}_{\text{обр}} = \frac{\dot{U}_{\text{обр}}}{Z_C}$

Определение постоянных интегрирования

Ток и напряжение в начале линии (*x=0*):

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 \quad , \qquad \dot{I}_1 = \frac{\dot{A}_2}{Z_C} - \frac{\dot{A}_1}{Z_C}$$

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C) \quad , \qquad \dot{A}_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C)$$

$$\dot{U} = \frac{1}{2}\left(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C\right)e^{\gamma x} + \frac{1}{2}\left(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C\right)e^{-\gamma x} = \dot{U}_1 ch\gamma x - \dot{I}_1 Z_C sh\gamma x$$

$$\dot{I} = \frac{1}{2Z_C}\left(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C\right)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2Z_C}\left(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C\right)e^{\gamma x} = \dot{I}_1 ch\gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_C} sh\gamma x$$

Уравнение линии конечной длины

$\dot{I}_{\text{н}}$ $\dot{U}_{\text{н}}$ ток и напряжение нагрузки, l - длина линии, $y = l - x$.

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{н}} ch\gamma(l - y) + \dot{I}_{\text{н}} Z_C sh\gamma(l - y)$$
$$\dot{I} = -\frac{\dot{U}_{\text{н}}}{Z_C} sh\gamma(l - y) + \dot{I}_{\text{н}} ch\gamma(l - y)$$

Если $y = 0$, и обозначить входные параметры индексом 1, а ток и напряжение нагрузки индексом 2, то получим уравнения линии как четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 ch\gamma l + \dot{I}_2 Z_C sh\gamma l$$
$$\dot{I}_1 = -\frac{\dot{U}_2}{Z_C} sh\gamma l + \dot{I}_2 ch\gamma l$$

Линия бесконечной длины. Согласование линии.

В случае бесконечно длинной линии слагаемое содержащее $e^{\gamma x}$, не имеет смысла (конца нет, значит не будет отражения), следовательно $\mathrm{A}_1 = 0$ и решение примет вид:

$$\dot{U} = \dot{A}_2 e^{-\gamma x} \quad , \qquad \dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{Z_C} e^{-\gamma x}$$

Для бесконечной линии сопротивление в любой ее точке : $\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_C$

Если мощность, полученная от источника равна: $P_1 = \dot{U}_1 \, \dot{I}_1 \cdot cos\varphi$

то в конце линии, длиной l :

$$P_{\text{н}} = \dot{U}_{\text{н}} \, \dot{I}_{\text{н}} \cdot cos\varphi = \dot{U}_1 e^{-\alpha l} \, \dot{I}_1 e^{-\alpha l} \cdot cos\varphi = P_1 e^{-2\alpha l}$$

КПД и затухание в линии: $\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P_1} = e^{-2\alpha l}$, $\alpha l = \frac{1}{2} ln \frac{P_{\text{н}}}{P_1}$

Коэффициент отражения и режим работы линии

Коэффициент отражения по напряжению:

$$K_u = \frac{\dot{A}_1 e^{\gamma l}}{\dot{A}_2 e^{-\gamma l}} = \frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C}$$

Коэффициент отражения по току: $K_i = -K_u$

При согласованной нагрузке $|K_u| = 0$ отражения отсутствуют, линия работает в **режиме бегущей волны.** Мощность, переносимая волной, полностью выделяется в нагрузке.

При холостом ходе или коротком замыкании на выходе линии $|K_u| = 1$ линия работает в **режиме стоячей волны**, волна полностью отражается от конца линии. В таком случае вся мощность возвращается в генератор. Стоячей волна называется потому, что координаты минимумов и максимумов этой волны неизменны относительно начала или конца линии.

В остальных случаях режим работы называется **режимом смешаных волн**. В этих случаях часть мощности выделяется в нагрузке, часть возвращается в генератор.

Линия без потерь

В случае $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ потери активной мощности в линии отсутствуют. Для такой линии:

$$\alpha = 0 \quad , \qquad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0} \quad , \qquad \gamma = j\beta = j\,\frac{\omega}{v} = j\,\frac{2\pi}{\lambda}\ , \qquad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Для линии конечной длины, можно записать: $\gamma l = j\,\frac{2\pi l}{\lambda}$. Уравнения длинной линии преобразуются в уравнения, записанные с использованием тригонометрических функций от вещественного аргумента:

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{н}} cos\,\frac{2\pi}{\lambda}(l - x) + j\dot{I}_{\text{н}} Z_C sin\,\frac{2\pi}{\lambda}(l - x)$$

$$\dot{I} = j\,\frac{\dot{U}_{\text{н}}}{Z_C} sin\,\frac{2\pi}{\lambda}(l - x) + \dot{I}_{\text{н}} cos\,\frac{2\pi}{\lambda}(l - x)$$

при $\frac{\mathrm{R_0}}{\omega \mathrm{L_0}} \ll 1$, $\frac{\mathrm{G_0}}{\omega \mathrm{C_0}} \ll 1$ линия считается линией без потерь.

Линия без искажений.

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = (\alpha + j\beta) \qquad\qquad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{C_0 Z_c}$$

Для отсутствия искажений необходимо обеспечить $\alpha = const$, и $v = const$. При этом сигналы всего спектра частот будут распространяться одинаково и относительная форма импульсов не будет искажена (затухание уменьшит амплитуды). Отсюда вытекает что $Z_c = const$, следовательно, характеристическое сопротивление не зависит от частоты.

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}\left(\frac{R_0/L_0 + j\omega}{G_0/C_0 + j\omega}\right)}$$

Видно что Z_c будет вещественной константой при $R_0/L_0 = G_0/C_0$.

Линия без искажений.

Для линии без искажений фазовая скорость

$$v = \frac{1}{C_0 Z_c} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

и затухание

$$\alpha = G_0 Z_c = \sqrt{R_0 G_0} = \frac{R_0}{Z_c}$$

Для реальных линий $R_0/L_0 \gg G_0/C_0$. Поэтому для придания реальным линиям свойств линий без искажения искусственно увеличивают их индуктивность. В качестве примера можно примести кабель компьютерного монитора, на котором одеты ферритовые трубки для увеличения индуктивности.

Искажения, как и наличие отраженных волн, являются причиной потери информации при передачах.

Входное сопротивление линии.

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 ch\gamma l + \dot{I}_2 Z_C sh\gamma l}{\frac{\dot{U}_2}{Z_C} sh\gamma l + \dot{I}_2 ch\gamma l} = Z_C \frac{Z_{\text{н}} ch\gamma l + Z_C sh\gamma l}{Z_{\text{н}} sh\gamma l + Z_C ch\gamma l} = Z_C \frac{Z_{\text{н}} + Z_C th\gamma l}{Z_C + Z_{\text{н}} th\gamma l}$$

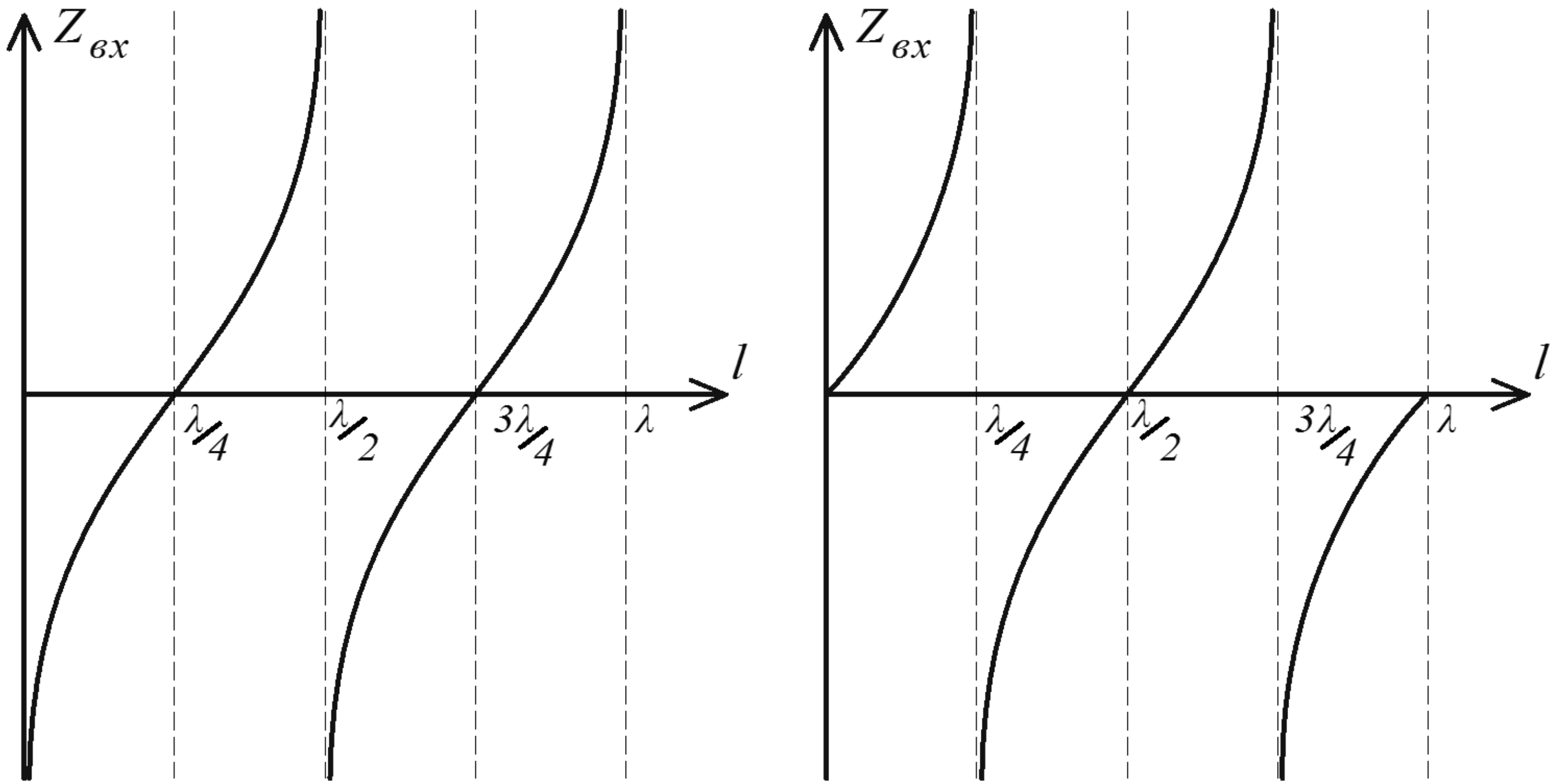
Зависимость входного сопротивления от длины имеет колебательный характер. При определенных длинах линии ее входное сопротивление может быть вещественным - такие длины линии называются резонансными. Для линии без потерь:

$$Z_{\text{вх}} = Z_C \frac{Z_{\text{н}} + jZ_C tg \frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_C + jZ_{\text{н}} tg \frac{2\pi}{\lambda} l}$$

Трансформирующие свойства линии.

Для режимов хх и кз, когда мощность, передаваемая в нагрузку, равна нулю:

$$Z_{\text{вх хх}} = -jZ_C \mathrm{ctg}\frac{2\pi}{\lambda}l, \qquad Z_{\text{вх кз}} = jZ_C tg\frac{2\pi}{\lambda}l$$



Переходные процессы в длинной линии.

Для линии ранее были получены уравнения

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = iR_0 + L_0\frac{\partial i}{\partial t} \quad , \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = uG_0 + C_0\frac{\partial u}{\partial t}$$

Упростим задачу предположив, что линия является линией без потерь

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0\frac{\partial i}{\partial t} \quad , \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_0\frac{\partial u}{\partial t}$$

Продифференцируем левое уравнение по расстоянию, а правое по времени и подставим друг в друга

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \quad , \qquad \text{здесь} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Переходные процессы в длинной линии.

Решение уравнений также представляет собой сумму прямой и обратной волн.

$$u(t,x) = u_{\text{пр}} + u_{\text{обр}}\ , \qquad i(t,x) = \frac{u_{\text{пр}}}{Z_c} - \frac{u_{\text{обр}}}{Z_c} = i_{\text{пр}} - i_{\text{обр}}$$

Переходный процесс в линии – наложение новых волн вызванных измененным режимом работы на волны существовавшего до начала изменения.

В качестве примера рассмотрим отрезок линии без нагрузки, с распространением прямоугольной волны.

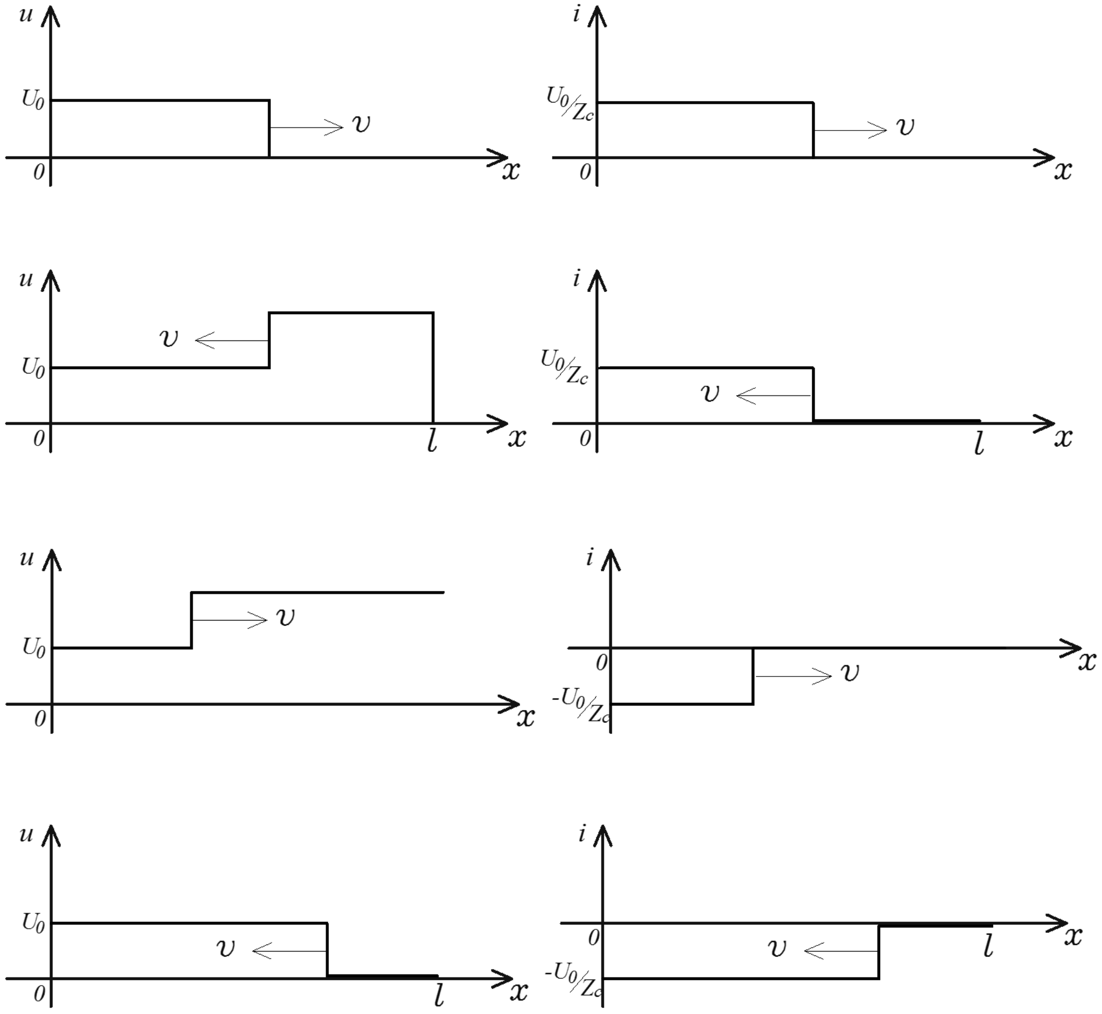
Пример. Подключение источника постоянного напряжения к линии.

В начальный момент времени волна распространяется от начала линии со скоростью v.

По достижении конца линии волна полностью отражается, ток в конце равен нулю, а напряжение удваивается.

При возвращении к началу линии, где источник поддерживает начальную величину напряжения, возникает волна напряжения отрицательной полярности.

После отражения от конца волны вернутся к началу линии где ток и напряжение станут равными нулю.



Пример

Время прохождения волны по линии:

$$\tau = \frac{l}{v}$$

Длительность периода переходного процесса в линии - 4τ.

При изменении условий задачи на короткое замыкание конца линии переходный процесс будет протекать аналогично, только удваиваться будет ток в линии.

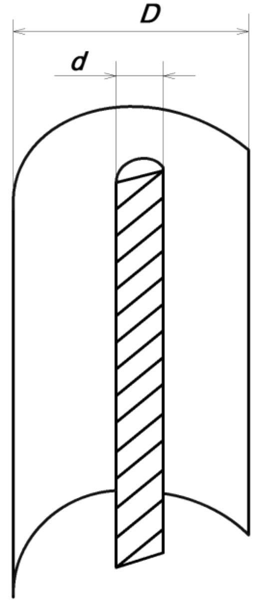
Пример. Коаксиальная линия.

Емкость коаксиального кабеля. Напряженность поля для цилиндра снаружи $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r h}$, внутри проводника поля нет.

$$U = \int E dr = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r h} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h} ln\frac{D}{d}$$

Здесь h длина конденсатора, q заряд, E напряженность поля, r координата по радиусу системы. Учитывая, что мы ищем погонную величину ($h = 1\text{м}$) и определение электрической емкости $C = \frac{q}{U}$ получаем:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{ln\frac{D}{d}}$$



Индуктивность коаксиального кабеля. Индукция магнитного поля в кабеле и магнитный поток:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \Phi = h\int B dr = h\int_{d/2}^{D/2} \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r} dr = h\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} ln\frac{D}{d}$$

Здесь I ток проводников. Учитывая погонный характер искомой величины и то, что $\Phi = LI$ получаем:

$$L = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} ln\frac{D}{d}$$

Т.к. материалы из которых изготовлен кабель не являются ферромагнетиками примем $\mu = 1$.

Поля внутри проводников полностью компенсируют друг друга, и учитывать их вклад в индуктивность не нужно.

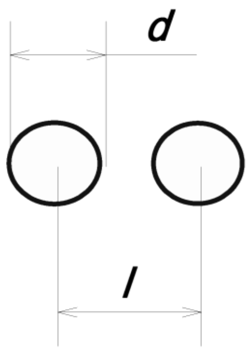
Пример. Двухпроводная линия.

Емкость двухпроводной линии. Разность потенциалов проводников, вычисленных относительно центральной точки системы:

$$\varphi_{\text{левый}} - \varphi_{\text{правый}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h} ln\frac{l - {d}/{2}}{{d}/{2}} + \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h} ln\frac{l - {d}/{2}}{{d}/{2}}$$

Тогда:

$$C = \frac{\pi\varepsilon\varepsilon_0}{ln\frac{l - {d}/{2}}{{d}/{2}}}$$



Индуктивность. Для потока двухпроводной линии:

$$\Phi = 2\int_{d/2}^{l-d/2} \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r} l dr = h\frac{\mu\mu_0 I}{\pi} ln\frac{l - {d}/{2}}{{d}/{2}}$$

$$L = \frac{\mu\mu_0}{\pi} ln\frac{l - {d}/{2}}{{d}/{2}}$$

Если учесть магнитный поток внутри проводника, поле меняется от 0 до поверхностного значения:

$$B_{\text{вн}} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi\, {d^2}/{4}} r\,, \qquad \Phi_{\text{вн}} = h\int_0^{d/2} \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi\, {d^2}/{4}} r dr = h\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\ , L_{\text{вн}} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}$$

Тогда погонная индуктивность линии с учетом этой индуктивности (удвоенной, т.к. проводников 2):

$$L = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\left(1 + 2ln\frac{l - {d}/{2}}{{d}/{2}}\right)$$

Коэффициент затухания.

В общем случае постоянная распространения:

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

$$\alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(C_0 R_0 + L_0 G_0)$$

Система уравнений:

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 \ , \qquad 2\alpha\beta = \omega(R_0 C_0 + L_0 G_0)$$

Выразим коэффициент затухания:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{\left({R_0}^2 + \omega^2 {L_0}^2\right)\left({G_0}^2 + \omega^2 {C_0}^2\right)}\right)}$$