КОМИТЕТ ПО ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
МИНИСТЕРСТВА НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И
ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

В. А. Александров

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Методические указания

Новосибирск
2003

В методических указаниях изложены сведения о свойствах ортогональных многочленов и их приложениях, а также приведены задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по основам функционального анализа на физическом факультете Новосибирского государственного университета.

Методические указания предназначены для студентов и преподавателей физического факультета.

Второе издание осуществлено в электронном виде в 2003 году. В нём лишь исправлены опечатки, вкравшиеся в первое издание 1993 года.

Предисловие

В курсе “Основы функционального анализа”, читаемом для студентов второго года обучения на физическом факультете Новосибирского государственного университета, теме “Ортогональные многочлены” отведено приблизительно 4 лекции и 4 практических занятия в феврале — начале марта. Появление данного пособия вызвано отсутствием удобного в работе учебника и задачника: как правило в книгах по ортогональным многочленам излагается гораздо больше материала, чем может освоить студент за отведённое ему программой время, а в задачах, разбросанных по многочисленным монографиям, довольно трудно ориентироваться.

Обсудим основные особенности предлагаемых вам методических указаний.

Прежде всего, мы по традиции избегаем применения контурных интегралов от функций комплексного переменного и теории вычетов, поскольку на физическом факультете курс теории функций комплексного переменного в разные годы читается в разных семестрах, В частности бывало и так, что первые лекции по этому предмету совпадали по времени с изучением ортогональных многочленов. Этим, в частности, объясняется отсутствие в нашем пособии таких важных тем, как интегральные представления и асимптотические разложения ортогональных многочленов.

Другая особенность нашего подхода состоит в том, что на лекциях излагается только материал параграфов 1–11, т. е. общие свойства ортогональных многочленов и теория многочленов Лежандра. Этот материал входит в экзаменационные билеты, а соответствующие задачи решаются на практических занятиях и выносятся на зачёт, в силу бюрократических причин именуемый допуском. Содержащаяся в параграфах 12–21 теория многочленов Эрмита и Лагерра строится по аналогии с теорией многочленов Лежандра. Пользуясь этим обстоятельством, мы не рассказываем материал указанных параграфов на лекциях. Он сообщается без доказательств преподавателями на практических занятиях. Соответственно, вопросы, относящиеся к многочленам Эрмита и Лагерра, не входят в экзаменационные билеты, а от студентов требуется только знание формулировок соответствующих теорем и умение решать задачи, что они и должны продемонстрировать на зачёте.

Содержащееся в параграфе 16 решение задачи квантования гармонического осциллятора выходит за рамки курса математического анализа и представляет собой факультативный материал, иллюстрирующий типичное применение ортогональных многочленов в физике.

Коротко прокомментируем книги, использованные при написании данного пособия и рекомендуемые для более глубокого ознакомления с предметом.

Наше изложение наиболее близко к принятому в книгах

1. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. — М. — Л.: Физматгиз, 1963.

2. П. К. Суетин. Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1976.

Изложение, ориентированное на физиков, и снабжённое физическими примерами, читатель найдёт в книге:

3. Г. Арфкен. Математические методы в физике. — М.: Атомиздат, 1970.

Очень сжатое введение в теорию ортогональных многочленов, осуществлённое с точки зрения задачи Штурма-Лиувилля, содержится в книге

4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

Максимальное использование теории функций комплексного переменного при построении теории ортогональных многочленов осуществлено в книге:

5. А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. Основы теории специальных функций. — М.: Наука, 1974.

В следующей классической и наиболее полной монографии об ортогональных многочленах изложение ведётся с гораздо более общих чем у нас позиций

6. Г. Сегё. Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962.

Я глубоко благодарен А. А. Егорову за компьютерный набор данного пособия.

§ 1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации системы мономов

Напомним, что процесс ортогонализации Грама-Шмидта состоит в том, что счетной последовательности $x_1, \dots, x_n, \dots$ линейно независимых векторов вещественного гильбертова пространства H сопоставляются новые последовательности $y_1, \dots, y_n, \dots$ и $z_1, \dots, z_n, \dots$ векторов из H следующим образом:

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = x_1, & z_1 = y_1/\|y_1\|, \\
y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1, & z_2 = y_2/\|y_2\|, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
y_n = x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (x_n, z_k)z_k, & z_n = y_n/\|y_n\|, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

При этом говорят, что последовательность $z_1, \dots, z_n, \dots$ получена из $x_1, \dots, x_n, \dots$ с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Как известно, она обладает следующими свойствами:

1) последовательность $z_1, \dots, z_n, \dots$ ортонормирована;

2) для каждого n линейная оболочка векторов $z_1, \dots, z_n$ совпадает с линейной оболочкой векторов $x_1, \dots, x_n$;

3) если одна из последовательностей $x_1, \dots, x_n, \dots$ или $z_1, \dots, z_n, \dots$ полна, то и другая является полной;

4) последовательность векторов $w_1, \dots, w_n, \dots$ обладает свойствами 1) – 2) тогда и только тогда, когда $w_n = \pm z_n$ для всех n.

Переходя к построению ортогональных многочленов, договоримся функцию $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ называть *весовой функцией* или *весом* в интервале (a, b), если на этом интервале она неотрицательна, интегрируема и её интеграл положителен, т. е. если $h(x) \geq 0$ и выполняются условия

$$0 < \int\limits_a^b h(x)\, dx < +\infty.$$

Введём в рассмотрение множество $L_2^h(a, b)$ тех функций $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, для которых интеграл

$$\int\limits_a^b f^2(x)h(x)\,dx$$

сходится. Очевидно, это множество образует линейное пространство.

Поскольку для любого $x \in (a,b)$, очевидно, выполняется неравенство

$$|f(x)g(x)h(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x)h(x) + g^2(x)h(x)],$$

то, проинтегрировав его почленно, заключаем, что для любых функций f, $g \in L_2^h(a,b)$ интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)h(x)\,dx$$

сходится:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)h(x)\,dx\right| &\leq \int\limits_a^b |f(x)g(x)h(x)|\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\int\limits_a^b f^2(x)h(x)\,dx + \int\limits_a^b g^2(x)h(x)\,dx\right] < +\infty.\end{aligned}$$

следовательно, любым функциям f, $g \in L_2^h(a,b)$ мы можем поставить в соответствие число

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)h(x)\,dx,$$

которое, как легко проверить, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, (правда при этом нам придётся принять обычное соглашение о том, что функция $f \in L_2^h(a,b)$ считается нулём пространства $L_2^h(a,b)$, если $(f,f) = \int\limits_a^b f^2(x)h(x)\,dx = 0$).

Одним из важнейших достоинств конструкции интеграла Лебе́га является то, что пространство $L_2^h(a,b)$, с введённым скалярным произведением, полно.

Подводя итог предыдущим рассуждениям, можно сказать,что с каждым интервалом (a, b) и каждой весовой функцией $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ мы связали некоторое специальное гильбертово пространство $L_2^h(a, b)$.

Если интервал (a, b) конечен, то, очевидно, каждый моном x^n принадлежит $L_2^h(a, b)$. Если же (a, b) бесконечен, то будем дополнительно считать, что весовая функция убывает на бесконечности настолько быстро, что все мономы x^n лежат в $L_2^h(a, b)$.

Ясно, что на любом интервале (a, b) последовательность мономов $1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^n,\ \dots$ образует линейно независимую систему. Применим к ней процесс ортогонализации Грама — Шмидта относительно скалярного произведения, введённого в $L_2^h(a, b)$. В результате получим последовательность многочленов $q_0,\ q_1,\ \dots,\ q_n,\ \dots,$ в которой при каждом $k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$ многочлен q_k имеет степень k и

$$\int\limits_a^b q_n(x) q_m(x) h(x)\, dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n; \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

Для того, чтобы в последующем нам было удобнее формулировать свойства ортогональных многочленов, давайте воспользуемся указанным выше свойством 4) и домножим, если это необходимо, многочлен q_n на минус единицу так,чтобы у каждого из q_n старший коэффициент стал положительным. Полученные в результате многочлены будем по-прежнему обозначать q_n и будем называть *многочленами, ортогональными с весом h на интервале* (a, b). При этом интервал (a, b) будем называть *интервалом ортогональности.*

Для конечного интервала (a, b) последовательность мономов полна в $L_2^h(a, b)$. В самом деле, из теории интеграла Лебега известно, что множество непрерывных функций, определённых в замкнутом интервале $[a, b]$, плотно в $L_2^h(a, b)$. Следовательно, для любой $f \in L_2^h(a, b)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся непрерывная функция $f_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$, лежащая в $L_2^h(a, b)$ такая, что норма $\|f - f_\varepsilon\|$ разности функций f и f_ε, равная по определению

$$\left\{ \int\limits_a^b [f(x) - f_\varepsilon(x)]^2 h(x)\, dx \right\}^{1/2},$$

не превосходит ε:

$$\|f - f_\varepsilon\| = \left\{ \int\limits_a^b [f(x) - f_\varepsilon(x)]^2 h(x)\, dx \right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

С другой стороны, в силу теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами, для непрерывной функции f_ε найдется многочлен P такой, что

$$|f_\varepsilon(x) - P(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$. Следовательно,

$$\|f_\varepsilon - P\| = \left\{ \int\limits_a^b [f_\varepsilon(x) - P(x)]^2 h(x)\, dx \right\}^{1/2} \le \varepsilon \cdot \left\{ \int\limits_a^b h(x)\, dx \right\}^{1/2}.$$

Окончательно получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен P, для которого

$$\|f - P\| \le \|f - f_\varepsilon\| + \|f_\varepsilon - P\| \le \varepsilon \left[1 + \left\{ \int\limits_a^b h(x)\, dx \right\}^{1/2} \right].$$

Поскольку здесь в квадратных скобках стоит постоянная, не зависящая от ε, а само ε произвольно, то последнее соотношение и показывает, что с помощью конечных линейных комбинаций мономов 1, x, x^2, … , x^n, … (каковой является многочлен P) можно сколь угодно близко (по норме пространства $L_2^h(a, b)$) приблизиться к произвольной функции $f \in L_2^h(a, b)$. Но именно это и означает, что последовательность мономов полна в $L_2^h(a, b)$.

Используя свойство 3), заключаем, что последовательность ортогональных многочленов полна на любом конечном промежутке (a, b) при любой весовой функции h. Значит, следуя общей схеме, изложенной в разделе "Геометрия пространств со скалярным произведением," мы можем рассматривать последовательность ортогональных многочленов как ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2^h(a, b)$, а значит можем ввести коэффициенты Фурье относительно этого базиса и можем разлагать функции в ряд по ортогональным многочленам.

Но вначале мы сосредоточим своё внимание на поточечных свойствах ортогональных многочленов, которое никак не следует из общих рассуждений в духе гильбертовых пространств.

Задача

1. Применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, ортогонализовать мономы 1, x, x^2, x^3 в пространстве $L_2^h(a,b)$, если

а) $a=-1$, $b=1$, $h(x)=1$ для всех x;

б) $a=-1$, $b=1$, $h(x)=1/\sqrt{1-x^2}$.

§ 2. Общие свойства ортогональных многочленов

В предыдущем параграфе, используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, мы получили последовательность многочленов $q_0, \dots$, $q_n, \dots$, ортогональных на интервале (a,b) с весом h. Непосредственно из метода Грама — Шмидта следуют такие свойства ортогональных многочленов:

1) *Произвольный многочлен степени n можно представить в виде линейной комбинации первых $n+1$ ортогональных многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n$.*

2) *Последовательность ортогональных многочленов q_0, $q_1, \dots$, $q_n, \dots$ определяется весом h однозначно.*

Используя эти свойства, мы можем вывести следующие

3) *Если Q_m — произвольный многочлен степени m и $n>m$, то*

$$\int_a^b Q_m(x)q_n(x)h(x)\,dx = 0.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться свойством 1) и разложить Q_m в линейную комбинацию многочленов q_0, $q_1, \dots, q_m$ и использовать ортогональность последних.

4) *Если промежуток ортогональности симметричен относительно начала координат (т. е. имеет вид $(-a,a)$), а весовая функция h чётна, то многочлен q_n содержит только те степени независимой переменной, которые имеют одинаковую чётность с номером n. Другими словами, при сделанных предположениях имеет место тождество*

$$q_n(-x) = (-1)^n q_n(x),$$

справедливое для всех n и для всех $x \in (-a,a)$.

Для доказательства сделаем в равенстве

$$\int_{-a}^{a} q_n(x)q_m(x)h(x)\,dx = \delta_{nm}$$

замену x на $-x$ и используем чётность h. Тогда

$$\int_{-a}^{a} q_n(-x)q_m(-x)h(x)\,dx = \delta_{nm}$$

или

$$\int_{-a}^{a} \tilde{q}_n(x)\tilde{q}_m(x)h(x)\,dx = \delta_{nm}$$

где введено обозначение $\tilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$. Ясно, что $\tilde{q}_n$ является многочленом степени n с положительным старшим коэффициентом. Учитывая последнее из выписанных интегральных равенств, заключаем, что многочлены $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \dots$ ортогональны в промежутке $(-a, a)$ с весом h. Но в силу свойства 2), вес определяет ортогональные многочлены однозначно. Поэтому для каждого n имеем: $q_n = \tilde{q}_n$ или $q_n(x) = \tilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$ для всех $x \in (-a, a)$, что и требовалось доказать.

Закончим этот параграф более серьёзным свойством, утверждающим, что для произвольной последовательности ортогональных многочленов имеется рекуррентная формула, связывающая три последовательных многочлена q_{n-1}, q_n и q_{n+1}:

5) *Пусть* $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ *— последовательность ортогональных многочленов, причём* a_n *и* b_n *— коэффициенты при старших степенях многочлена* q_n:

$$q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots .$$

Тогда

$$xq_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x).$$

Для доказательства разложим многочлен $(n+1)$-й степени $xq_n(x)$

в линейную комбинацию многочленов q_0, q_1, ... , q_{n+1}:

$$xq_n(x) = \sum_{m=0}^{n+1} c_{nm} q_m(x).$$

Используя ортогональность многочленов q_0, ... , q_n, ... , находим

$$c_{nm} = \int_a^b xq_n(x)q_m(x)h(x)\,dx.$$

Из последнего равенства вытекает, что $c_{nm} = c_{mn}$, а из предыдущего — что $c_{nm} = 0$ при $m > n+1$. Следовательно, $c_{nm} = 0$ при $m < n-1$. Поэтому

$$xq_n(x) = c_{n,n+1}q_{n+1}(x) + c_{n,n}q_n(x) + c_{n,n-1}q_{n-1}(x) \tag{1}$$

Сравнивая коэффициенты при x^{n+1} и x^n в левой и правой частях тождества (1), получим

$$\begin{aligned} &x(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots) = c_{n,n+1}(a_{n+1}x^{n+1} + b_{n+1}x^n + \dots) \\ &+ c_{n,n}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots) + c_{n,n-1}(a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots), \end{aligned}$$

т. е. $a_n = c_{n,n+1}a_{n+1}$ и $b_n = c_{n,n+1}b_{n+1} + c_{n,n}a_n$, или $c_{n,n+1} = a_n/a_{n+1}$ и $c_{n,n} = b_n/a_n - b_{n+1}/a_{n+1}$. Для получения коэффициента $c_{n,n-1}$ достаточно воспользоваться соотношением $c_{nm} = c_{mn}$:

$$c_{n,n-1} = c_{n-1,n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов $c_{n,n+1}$, $c_{n,n}$ и $c_{n,n-1}$ в тождество (1), мы завершим доказательство свойства 5).

В заключение отметим, что, несколько огрубляя ситуацию, мы можем дать другую формулировку свойства 5): для любой последовательности ортогональных многочленов q_0, q_1, ... , q_n, ... существуют постоянные A_n, B_n и C_n такие, что для любого n и всех $x \in (a, b)$ справедливо равенство

$$q_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)q_n(x) + C_n q_{n-1}(x).$$

Задачи

2. Доказать, что минимум интеграла

$$I(Q) = \int_a^b Q^2(x)h(x)\,dx$$

на множестве всех многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом достигается тогда и только тогда, когда

$$Q(x) = \frac{1}{a_n} q_n(x),$$

причём этот минимум равен $1/a_n^2$. Здесь $q_n(x) = a_n x^n + \ldots$ — многочлены, ортогональные на интервале (a, b) с весом h.

3. Как известно, если многочлены q_0, q_1, ... , q_n, ... ортогональны в интервале $(-a, a)$ с весом h, являющимся чётной функцией, то при нечётном n многочлен q_n содержит только нечётныее степени независимой переменной, а при чётном n — только чётные, т. е.

$$q_{2n}(x) = s_n(x^2) \text{ и } q_{2n+1}(x) = x t_n(x^2),$$

где s_n и t_n — некоторые многочлены степени n. Доказать, что

а) многочлены $s_n(x) = q_{2n}(\sqrt{x})$ ортогональны на интервале $(0, a^2)$ с весом $h_1(x) = h(\sqrt{x})/\sqrt{x}$.

б) многочлены $t_n(x) = q_{2n+1}(\sqrt{x})/\sqrt{x}$ ортогональны на интервале $(0, a^2)$ с весом $h_2(x) = \sqrt{x}h(\sqrt{x})$.

§ 3. Свойства нулей ортогональных многочленов

Пусть q_0, q_1, ... , q_n, ... — последоваательность многочленов, ортогональных на интервале (a, b) с весом h. Приведём наиболее важные свойства нулей ортогональных многочленов.

1) *Все нули многочлена q_n действительны, просты и расположены на интервале (a, b).*

Поскольку мы имеем дело с ортогональными многочленами, то при $n \geq 1$

$$\int_a^b q_0(x)q_n(x)h(x)\,dx = 0.$$

Но весовая функция h неотрицательна на (a, b), а q_0 — многочлен нулевой степени, т. е. некоторая постоянная. Следовательно, многочлен q_n принимает на (a, b) значения разных знаков.

Допустим теперь, что $x_1, \ldots, x_m$ $(m \le n)$ — все точки интервала (a, b) в которых многочлен q_n меняет знак (т. е. в правой полуокрестности каждой из них он положителен, а в левой — отрицателен, или наоборот).

Предположим, что $m < n$ и рассмотрим вспомогательный многочлен

$$Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m).$$

Тогда многочлен $Q_m(x)q_n(x)$ сохраняет знак на (a, b), а значит

$$\int\limits_a^b Q_m(x)q_n(x)h(x)\,dx \neq 0$$

что при нашем предположении $m < n$ противоречит свойству 3) из § 2.

Следовательно, $m = n$, а это и означает, что все корни многочлена q_n расположены на интервале (a, b) и различны.

2) *Для любого n справедливы неравенства $q_n(b) > 0$ и $(-1)^n q_n(a) > 0$.*

Это очевидно, поскольку все корни q_n лежат на (a, b), а старший коэффициент многочлена q_n положителен.

3) *При любом n два соседних многочлена q_{n-1} и q_n не могут иметь общих корней.*

Допустим, от противного, что эти многочлены имеют общий корень x_0. Тогда в силу рекуррентной формулы (см. свойство 5) из § 2), x_0 является также корнем многочлена q_{n-2}.

Рассуждая аналогично, придём к равенствам $q_{n-2}(x_0) = 0, \ldots, q_1(x_0) = 0$, $q_0(x_0) = 0$, последнее из которых ведёт нас к противоречию: с одной стороны, будучи многочленом нулевой степени, q_0 является постоянной, а значит равняется нулю тождественно и

$$\int\limits_a^b q_0^2(x)h(x)\,dx = 0;$$

с другой стороны, согласно процессу ортогонализации Грама — Шмидта,

$$\int\limits_a^b q_0^2(x)h(x)\,dx = 1.$$

4) *Если x_0 есть корень многочлена q_n, то многочлены q_{n-1} и q_{n+1} принимают в точке x_0 значения разных знаков.*

В самом деле, в силу рекуррентной формулы (см. свойство 5) из § 2), имеем

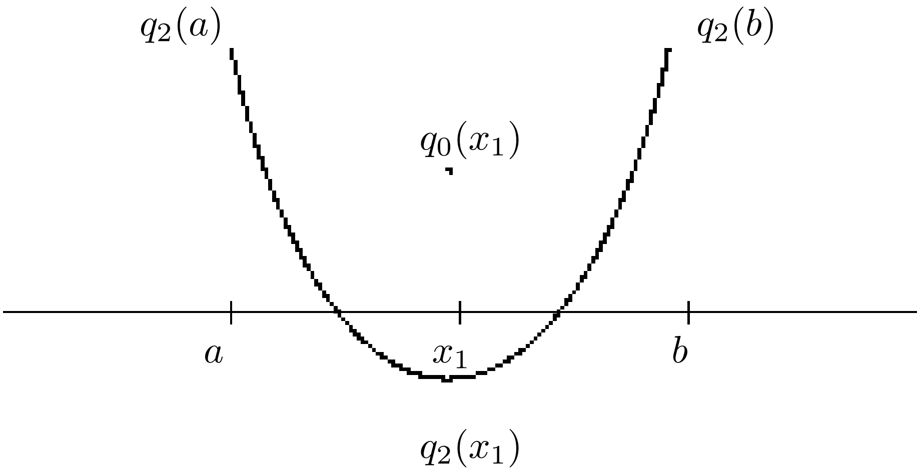
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}q_{n+1}(x_0) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}q_{n-1}(x_0),$$

где a_m — старший коэффициент многочлена q_m, который положителен по построению ортогональных многочленов.

5) *Нули соседних ортогональных многочленов q_n и q_{n+1} перемежаются.* Под этим подразумевается, что если $x_{\text{лев}}$ и $x_{\text{пр}}$ — самый левый и самый правый корни многочлена q_n, а x_1 и x_2 — любые два его последовательных корня, то в каждом из интервалов $(a, x_{\text{лев}})$, (x_1, x_2) и $(x_{\text{пр}}, b)$ многочлен q_{n+1} имеет ровно один корень.

Доказательство будем вести индукцией по степени многочлена.

Наше утверждение становится осмысленным начиная с $n = 1$. Пусть x_1 — это единственный корень многочлена первой степени q_1, лежащий в (a, b) в силу свойства 1). Поскольку $q_0(x_1) > 0$, то, в силу свойства 4), $q_2(x_1) < 0$. Но, согласно свойству 2), $q_2(a) > 0$ и $q_2(b) > 0$. Значит на каждом из интервалов (a, x_1) и (x_1, b) многочлен q_2



имеет хотя бы один корень (см. рис.). Но многочлен второй степени q_2 не может иметь более двух нулей. Следовательно, на каждом из интервалов (a, x_1) и (x_1, b) корень ровно один. Тем самым свойство 5) доказано при $n = 1$.

Предположим теперь, что свойство 5) доказано для некоторого n и докажем его для $n + 1$.

Пусть x_1, x_2 — последовательные корни многочлена q_{n+1}. Тогда из предположения индукции следует, что многочлен q_n принимает в x_1 и x_2 значения разных знаков: иначе мы бы получили, что либо q_n вообще не имеет корней между x_1 и x_2, т. е. между какими-то последовательными корнями q_n лежат сразу 2 корня x_1 и x_2 многочлена q_{n+1}, что невозможно; либо q_n имеет больше одного корня между x_1 и x_2, т. е. между какими-то последовательными корнями q_n вообще нет нулей многочлена q_{n+1}, что опять-таки противоречит предположению индукции. Итак, q_n принимает в x_1 и x_2 значения разных знаков. Тогда, согласно свойству 4), заключаем, что q_{n+2} также принимает в x_1 и x_2 значения разных знаков и, следовательно, имеет хоть один корень в интервале (x_1, x_2).

Пусть теперь $x_{\text{лев}}$ и $x_{\text{пр}}$ — самый левый и самый правый корни многочлена q_{n+1}. Согласно свойству 2), многочлены q_n и q_{n+2} принимают значения одинакового знака в точке a. А в силу свойства 4) они принимают значения разных знаков в точке $x_{\text{лев}}$. Но в силу предположения индукции многочлен q_n не имеет корней на интервале $(a, x_{\text{лев}})$ и, значит, сохраняет знак. Таким образом, многочлен q_{n+2} принимает значения разных знаков в точках a и $x_{\text{лев}}$ и поэтому имеет хотя бы один корень на интервале $(a, x_{\text{лев}})$.

Существование хотя бы одного корня многочлена q_{n+2} на интервале $(x_{\text{пр}}, b)$ доказывается аналогично.

В заключение осталось заметить, что про $n + 2$ интервала вида $(a, x_{\text{лев}})$, (x_1, x_2), $(x_{\text{пр}}, b)$ мы знаем, что на каждом из них многочлен степени $n+2$ q_{n+2} имеет по крайней мере один корень. А поскольку он не может иметь больше чем $n + 2$ корня, то на каждом из интервалов он имеет ровно по одному корню.

§ 4. Классические ортогональные многочлены

Наиболее важный класс ортогональных многочленов образуют так называемые *классические ортогональные многочлены*, которые приведены в следующей таблице:

N°	Название	Обозначение	Интервал ортогональ– ности, (a,b)	Весовая функция, h
1.	Многочлены Якóби	$P_n(x;\alpha,\beta)$	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha\times$ $\times(1+x)^\beta$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$
2.	Многочлены Эрми́та	$H_n(x)$	$(-\infty,+\infty)$	e^{-x^2}
3.	Многочлены Лаге́рра	$L_n^\alpha(x)$	$(0,+\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$, $\alpha>-1$
4.	Ультрасферические многочлены или многочлены Гегенба́уэра	$C_n(x;\lambda)$	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda>-1/2$
5.	Многочлены Чебышёва первого рода	$T_n(x)$	$(-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6.	Многочлены Чебышёва второго рода	$U_n(x)$	$(-1,1)$	$\sqrt{1-x^2}$
7.	Многочлены Лежандра	$P_n(x)$	$(-1,1)$	1

Как легко видеть, многочлены Гегенбауэра являются частным случаем многочленов Якоби: $C_n(x;\lambda)=P_n(x;\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})$, а многочлены Чебешёва и Лежандра являются частными случаями как многочленов Якоби, так и многочленов Гегенбауэра, например $P_n(x)=P_n(x;0,0)=C_n(x;\frac{1}{2})$.

Ясно, что если каждый из ортогональных многочленов $q_0, q_1, \ldots,$ $q_n, q_{n+1}, \ldots$ мы умножим на некоторую постоянную, то большинство свойств, изложенных в § 2 и § 3 останется в силе. Однако ниже мы увидим, что если мы домножаем на специальным образом подобранные постоянные, то формулы принимают наиболее простой вид (например, уже известная нам рекуррентная формула из § 2). Выбор этих постоянных множителей называется *стандартизацией ортогональных многочленов.* Таким образом, наше соглашение о том, что каждый из многочленов q_n имеет единичную длину в $L_2^h(a,b)$ и положительный старший коэффициент, является хотя и очень естественным, но лишь одним из возможных способов стандартизации. Легко указать другие естественные, правда очень редко используемые, способы стандартизации: у каждого q_n старший коэффициент равен единице или для каждого n $q_n(1)=1$. Как ни странно, наиболее удобные формулы получаются, если многочлены q_0, q_1, $\ldots$, q_n, q_{n+1}, $\ldots$ — стандартизированы с помощью производящей функции в соответствии со следующим определением:

Функцию $w(x,t)$ двух переменных называют *производящей функцией* для последовательности многочленов q_0, q_1, $\ldots$, q_n, $\ldots$, если её разложение в ряд по степеням t при достаточно малых t имеет вид

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n(x)}{\alpha_n}t^n,$$

где α_n — некоторые постоянные.

Условимся применять названия и обозначения для многочленов из приведённой выше таблицы не зависимо от способа стандартизации, который будет ясен из контекста.

В математике какое-либо перечисление оправдано в том случае, если оно заканчивается словами “и других объектов такого типа нет.”

Легко проверить, что классические ортогональные многочлены, приведённые в таблице, задаются с помощью весовых функций h, удовлетворяющих так называемому *уравнению Пи́рсона*

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{\alpha_0+\alpha_1 x}{\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2}$$

и предельным условиям

$$\lim_{x\to a+0}h(x)B(x)=\lim_{x\to b-0}h(x)B(x)=0,$$

где $B(x)=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2$, $A(x)=\alpha_0+\alpha_1 x$.

С помощью несложных, но довольно громоздких и по этой причине опускаемых нами рассуждений, можно показать, что и наоборот, если весовая функция h удовлетворяет уравнению Пирсона (хоть с какими-нибудь постоянными α_0, α_1, β_0, β_1, β_2) и указанным выше предельным условиям, то она с точностью до линейной замены переменной совпадает с одной из весовых функций приведённых в таблице классических ортогональных многочленов. Именно в этом смысле в таблице перечислены все классические ортогональные многочлены.

Если мы будем эксплуатировать тот факт, что весовая функция классических ортогональных многочленов не произвольна, а удовлетворяет уравнению Пирсона, то мы сможем получить дополнительные свойства таких многочленов, которые и приведём ниже без доказательства.

Если весовая функция h удовлетворяет уравнению Пирсона и граничным условиям, то

1) *ортогональный многочлен q_n является решением дифференциального уравнения*

$$B(x)y''(x) + [A(x) + B'(x)]y'(x) - \gamma_n y(x) = 0,$$

где $\gamma_n = n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]$;

2) *имеет место формула Родри́га*

$$q_n(x) = c_n \frac{1}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n}[h(x)B^n(x)], \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

где c_n — некоторые постоянные;

3) *производные $\frac{d^m}{dx^m} q_n(x)$ являются классическими ортогональными многочленами с тем же промежутком ортогональности*;

4) *у многочленов q_0, q_1, ..., q_n, ... имеется производящая функция, выражающаяся через элементарные функции.*

Мы докажем эти свойства не для всех классических ортогональных многочленов сразу, а лишь в частном случае многочленов Лежандра. Этому посвящены ближайшие несколько параграфов.

Задачи

4. Используя задачу 3, доказать, что многочлен $H_{2n}(x)$ пропорционален многочлену $L_n^{-1/2}(x^2)$, а многочлен $H_{2n+1}(x)$ — многочлену $xL_n^{1/2}(x^2)$.

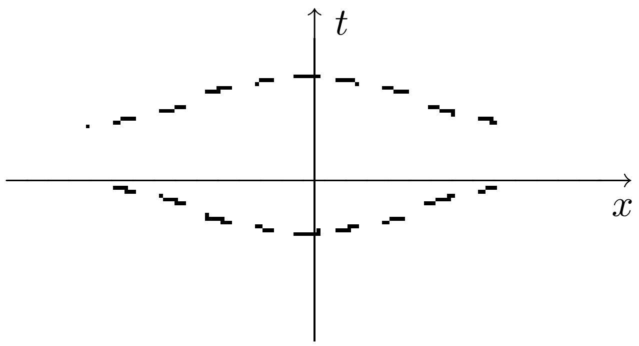
5. Доказать, что многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ пропорциональны многочленам $\cos(n \arccos x)$.

§ 5. Многочлены Лежандра: производящая функция и рекуррентные соотношения

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

определённую и бесконечно дифференцируемую в некоторой окрестности оси x плоскости (x,t).



При каждом фиксированном x разложим её в ряд Тейлора по степеням t:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

где $P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n} w(x,t)\Big|_{t=0}$.

Ниже мы займёмся изучением свойств возникающих функций P_n с тем, чтобы по мере их накопления доказать, что при каждом n функция P_n является многочленом степени n, причём эти многочлены ортогональны на интервале $(-1,1)$ с весовой функцией h, тождественно равной единице. В соответствии с определениями, принятыми в предыдущем параграфе, именно многочлены P_n мы будем называть *многочленами Лежандра.* При этом из самого их определения следует, что w является для них производящей функцией, а стандартизованы многочлены Лежандра “с помощью производящей функции.”

Прежде всего непосредственно найдём P_0 и P_1:

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{1!}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-2tx+t^2)^{-3/2}(-2x+2t)\bigg|_{t=0} = x.$$

Теперь займёмся выводом *рекуррентных соотношений.* Чтобы получить первое из них, воспользуемся тождеством

$$(1-2tx+t^2)\frac{\partial w}{\partial t} + (t-x)w = 0$$

и подставим в него вместо функции w её разложение в ряд

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Принимая во внимание, что степенной ряд можно дифференцировать почленно, имеем

$$(1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0,$$

откуда, приравнивая к нулю коэффициент при t^k, находим

$$(k+1)P_{k+1}(x) - 2xkP_k(x) + (k-1)P_{k-1}(x) + P_{k-1}(x) - xP_k(x) = 0$$

или

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \qquad n = 1,\ 2,\dots \quad (2)$$

Как следствие мы выведем из этой формулы упомянутое выше утверждение о том, что *при каждом n функция P_n является многочленом степени n.* Поскольку мы знаем, что $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) \equiv x$, то наше утверждение, очевидно, истинно при $n = 0$ и $n = 1$. Допустив, что оно истинно при всех значениях индексов от 0 до n, из формулы (2) получим, что P_{n+1} является многочленом степени $n+1$. В силу принципа математической индукции наше утверждение доказано.

Аналогично из тождества

$$(1-2tx+t^2)\frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0$$

получаем

$$(1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = 0,$$

откуда следует

$$P'_k(x) - 2xP'_{k-1}(x) + P'_{k-2}(x) - P_{k-1}(x) = 0, \qquad k = 2,\ 3, \dots$$

или

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) - P_n(x) = 0, \qquad n = 1,\ 2, \dots, \tag{3}$$

где штрих означает, как обычно, производную по переменной x.

Продифференцируем соотношение (2) по x:

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP'_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0$$

и исключим из полученного равенства и (3) один раз $P'_{n-1}(x)$, другой — $P'_{n+1}(x)$:

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) - (n+1)P_n(x) = 0, \tag{4}$$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) - nP_n(x) = 0, \tag{5}$$

$n = 1,\ 2,\ \dots$. Складывая (4) и (5), приходим к более симметричной формуле

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \qquad n = 1,\ 2, \dots. \tag{6}$$

Задачи

6. Предыдущие рассуждения показывают, что формулы (4), (5) справедливы при $n = 1,\ 2,\ \dots$. Прямой подстановкой $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ убедиться, что (4) справедлива и при $n = 0$.

7. Показать, что

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n,$$

$$P_{2n+1}(0) = 0, \qquad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

$$P'_n(1) = n(n+1)/2.$$

8. Доказать, что для каждого x и всех достаточно малых t справедливо соотношение

$$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)t^n.$$

9. Показать, что если некоторая функция f может быть разложена в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

сходящийся равномерно в интервале, содержащем точку $x = 1$, то разложение интеграла от этой функции будет

$$\int\limits_1^x f(y)\,dy = -a_0 - \frac{1}{3}a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{2n-1} - \frac{a_{n+1}}{2n+3} \right) P_n(x).$$

10. Доказать тождество

$$(1-x)[P_n'(x) + P_{n+1}'(x)] = (n+1)[P_n(x) - P_{n+1}(x)].$$

§ 6. Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности

Продолжая рассуждения предыдущего параграфа, заменим в формуле (4) n на $n-1$:

$$P_n'(x) - xP_{n-1}'(x) - nP_{n-1}(x) = 0$$

и исключим $P_{n-1}'(x)$ из полученного уравнения и (5):

$$(1-x^2)P_n'(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0.$$

Смысл последней формулы в том, что она позволяет выразить производную от многочленов Лежандра через сами многочлены. Продифференцируем её по x и снова исключим $P_{n-1}'(x)$ с помощью (5):

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + nP_n(x) + nxP_n'(x) - nP_{n-1}'(x) = 0,$$

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + nP_n(x) + n^2P_n(x) = 0,$$

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Полученное соотношение показывает, что многочлен Лежандра $y = P_n(x)$ является частным решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0,$$

называемого *дифференциальным уравнением Лежандра.*

Используем это уравнение для доказательства ортогональности многочленов Лежандра на интервале $(-1, 1)$ с весом $h(x) \equiv 1$. Для этого умножим дифференциальное уравнение для $P_m(x)$ на $P_n(x)$, дифференциальное уравнение для $P_n(x)$ — на $P_m(x)$ и вычтем одно из другого:

$$[(1-x^2)P'_m(x)]'P_n(x) - [(1-x^2)P'_n(x)]'P_m(x) \\ + [m(m+1) - n(n+1)]P_m(x)P_n(x) = 0$$

или

$$\big\{(1-x^2)[P'_m(x)P_n(x) - P_m(x)P'_n(x)]\big\}' \\ + (m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x) = 0.$$

Интегрируя последнее равенство в интервале $(-1, 1)$ и замечая, что интеграл от первого слагаемого равен нулю, находим

$$(m-n)(m+n+1)\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0,$$

откуда следует, что при $m \neq n$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0.$$

Ортогональность доказана. Найдём норму P_n. Для этого заменим в рекуррентном соотношении (2) n на $n-1$:

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0,$$

умножим полученное уравнение на $(2n+1)P_n(x)$, а само уравнение (2)

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

умножим на $(2n-1)P_{n-1}(x)$ и вычтем из первого второе. Получим

$$n(2n+1)P_n^2(x) + (n-1)(2n+1)P_n(x)P_{n-2}(x) \\ - (n+1)(2n-1)P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - n(2n-1)P_{n-1}^2(x) = 0,$$

n=2, 3, ... , откуда, интегрируя по промежутку $(-1,1)$ и учитывая уже доказанную выше ортогональность, находим

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\,dx, \qquad n=2,\ 3,\dots.$$

Последовательное применение этой формулы даёт следующие выражение для квадрата нормы многочленов Лежандра

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{5}\int\limits_{-1}^{1} P_1^2(x)\,dx$$

$$= \frac{3}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{2n+1}, \qquad n=2,\ 3,\dots.$$

Непосредственное вычисление показывает, что полученный результат справедлив также при $n=0$ и $n=1$:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_0^2(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} dx = 2 = \frac{2}{2\cdot 0+1};$$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_1^2(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} = \frac{2}{2\cdot 1+1}.$$

Из доказанного следует, что *многочлены* $(n+1/2)^{1/2}P_n$ *ортонормированы на интервале* $(-1,1)$ *с весом* $h(x)\equiv 1$. Кроме того, из формулы (2) с очевидностью следует, что старший коэффициент каждого из них положителен. Но мы знаем, что при заданном весе h этими условиями ортогональные многочлены определяются однозначно. Тем самым мы убедились в эквивалентности двух данных выше определений многочленов Лежандра: одно из них приведено в таблице § 4 и определяет многочлены Лежандра как ортогональные многочлены с весом 1 на интервале $(-1,1)$, а другое (являющееся для нас основным рабочим инструментом) приведено в § 5 и определяет многочлены Лежандра через производящую функцию.

Теперь мы в состоянии более детально объяснить наш выбор несколько загадочного на первый взгляд способа стандартизации многочленов Лежандра — "с помощью производящей функции." В соответствии со свойством 5) из § 2 для ортогональных многочленов $(n+1/2)^{1/2}P_n$ справедлива трёхчленная рекуррентная формула, которая, конечно, совпадает с формулой (2) из § 5. Но если мы перепишем последнюю в терминах многочленов $(n+1/2)^{1/2}P_n$, то в ней появится три дополнительных множителя вида $(n+1/2)^{1/2}$ и формула станет более громоздкой. Именно в этом смысле стремление к простоте формул определяет традиционный для многочленов Лежандра способ стандартизации "с помощью производящей функции," которого мы здесь и придерживаемся.

Задачи

11. Показать, что общее решение дифференциального уравнения Лежандра есть

$$y(x) = aP_n(x) + bP_n(x)\int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{(t^2-1)P_n^2(t)}.$$

12. Показать, что уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{du}{d\theta}\right) + n(n+1)u = 0$$

удовлетворяет функция $u = P_n(\cos\theta)$.

13. Показать, что уравнению

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left[\left(n+1/2\right)^2 + \frac{1}{4\sin^2\theta}\right]u = 0$$

удовлетворяет функция $u = (\sin\theta)^{1/2}P_n(\cos\theta)$.

14. Показать, что если в дифференциальном уравнении Лежандра сделать замену $x^2 = t$, то оно примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\frac{1}{2t} - \frac{1}{1-t}\right]\frac{dy}{dt} + \frac{(n+1)ny}{4t(1-t)} = 0.$$

15. Вычислить интегралы

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{1} x^2P_n(x)P_{n+1}(x)\,dx$$

16. Показать, что

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)(P_n'(x))^2\,dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1}.$$

17. Доказать, что

$$\int_{-1}^{1} x(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)\,dx$$

равняется нулю, кроме случаев, когда $m-n=\pm1$, и определить его значение в этих случаях.

18. Доказать, что последовательность многочленов P_n' ортогональна на интервале $(-1,1)$ с некоторым весом и найти его. (Напомним, что в соответствии со свойством 3) § 4 ортогональность производных является общим свойством всех классических ортогональных многочленов).

§ 7. Формула Родрига для многочленов Лежандра

Как было упомянуто в § 4, формула Родрига имеется для каждой последовательности классических ортогональных многочленов. В данном параграфе мы докажем *формулу Родрига*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

для многочленов Лежандра. Здесь под нулевой производной подразумевается сама функция.

Для доказательства мы проверим, что выражение, стоящее в правой части формулы Родрига для многочленов Лежандра, является многочленом степени n, имеющим положительный старший коэффициент и ту же норму в пространстве $L_2^h(-1,1)$ $(h(x)\equiv 1)$, что и P_n, причём многочлены с разными номерами ортогональны. После чего формула Родрига, очевидно, следует из того, что ортогональные многочлены определяются весовой функцией однозначно.

Используя n раз то обстоятельство, что производная от многочлена степени k есть многочлен степени $k-1$, видим, что выражение, стоящее в правой части формулы Родрига, является многочленом степени именно n. Столь же просто понять, что этот многочлен имеет положительный старший коэффициент. Следовательно, для реализации нашего плана нужно убедиться только в том, что интеграл

$$I_{mn} = \frac{1}{2^{m+n} n!\, m!} \int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\right] \left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right] dx$$

равен $2\delta_{mn}/(2n+1)$, где δ_{mn} — символ Кроне́ккера.

Если $m \neq n$, то можно без ограничения общности считать, что $m > n$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$I_{mn} = \frac{1}{2^{m+n} m!\, n!} \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \,\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n\right] dx$$

$$= -\frac{1}{2^{m+n} m!\, n!} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n \, dx.$$

Здесь мы учли, что внеинтегральный член зануляется, поскольку многочлен $\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m$ содержит в качестве множителя выражение x^2-1, равное нулю при $x = \pm 1$. Повторяя интегрирование по частям m раз, найдём

$$I_{mn} = \frac{(-1)^m}{2^{m+n} m!\, n!} \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n \, dx.$$

Однако, $m > n$, а значит, $n + m > 2n$, и

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n = 0.$$

Следовательно, при $m \neq n$ $\ I_{mn} = 0$.

Если же $m = n$, то выведенная выше с помощью интегрирования по частям формула даёт

$$I_{nn} = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n \, dx.$$

Преобразуя этот интеграл, учтём следующие три обстоятельства. Первое — многочлен $(x^2-1)^n$ имеет степень $2n$, причём его старший коэффициент равен 1, а значит его производная порядка $2n$ равна $(2n)!$. Второе — подынтегральная функция чётна. Третье – имеет место равенство $(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$. Поэтому

$$I_{nn} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot 2 \int\limits_{0}^{1} (1-x^2)^n \, dx.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $y = x^2$ и вспомним, что бета-функция Эйлера задаётся интегралом

$$B(a,b) = \int\limits_{0}^{1} t^{a-1}(1-t)^{b-1} \, dt,$$

где a и b — положительные параметры. Тогда можем записать

$$I_{nn} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int\limits_{0}^{1} y^{-1/2}(1-y)^n \, dy = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} B(\frac{1}{2}, n+1).$$

В своё время с помощью интегрирования по частям для $b > 1$ была выведена формула

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1).$$

Желающие вспомнить это вычисление могут найти его в пункте 529 второго тома книги Г. М. Фихтенгольца “Курс дифференциального и интегрального исчисления.” Используя последнюю формулу и тот факт, что

$$B(a,1) = \int\limits_{0}^{1} t^{a-1} \, dt = \frac{1}{a},$$

получаем

$$B(a,n+1) = \frac{n}{a+n}\cdot\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\ldots\frac{2}{a+2}\cdot\frac{1}{a+1}\cdot B(a,1)$$
$$= \frac{n!}{(a+n)(a+n-1)\ldots(a+1)a}.$$

Теперь мы в состоянии закончить вычисление I_{nn}, которое и завершает доказательство формулы Родрига для многочленов Лежандра:

$$I_{nn} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\cdot\frac{n!2^{n+1}}{(1+2n)(1+2n-2)\ldots(1+2)1}$$
$$= \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\cdot 2\cdot\frac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

§ 8. Разложение функций в ряды по многочленам Лежандра

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Для всех n и всех $x\in[-1,1]$ справедливо неравенство $|P_n(x)|\le 1$.*

Доказательство. Когда вы применяли формулу Тейлора для получения разложений элементарных функций в степенные ряды, вы получили формулу

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

справедливую при $|x|<1$ и любом вещественном α. Правая часть этой формулы называется биномиальным рядом. Найти коэффициенты этого ряда совсем не трудно, если последовательно вычислять значения производных функции $(1+x)^\alpha$ при $x=0$. Сложнее доказать, что при каждом $x\in(-1,1)$ сумма этого ряда равна $(1+x)^\alpha$, для чего нужно оценивать остаточный член в формуле Тейлора этой функции. Мы этого сейчас делать не будем, а желающие освежить такое рассуждение в своей памяти могут найти подробности в пункте 407 второго тома трёхтомника “Курс дифференциального и интегрального исчисления” Г. М. Фихтенгольца.

Положив $\alpha = -1/2$ и заменив x на $-x$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-1)^n x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

где для краткости введено обозначение

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}, \qquad a_0 = 1,$$

а разложение имеет место для всех $x \in (-1, 1)$.

В производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

многочленов Лежандра сделаем замену переменной $x = \cos\theta$ $(-\pi < \theta < \pi)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) t^n.$$

С другой стороны, воспользовавшись формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и биномиальным разложением для функции $(1-x)^{-1/2}$, можем написать при $|t| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{i\theta}t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^{-i\theta}t}}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{i\theta m} t^m\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-i\theta k} t^k\right).$$

Поскольку известно, что степенные ряды можно почленно перемножать внутри интервала сходимости, то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в двух последних формулах, получим

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m} e^{i\theta(2m-n)}$$

$$= a_0 a_n \cos n\theta + a_1 a_{n-1}\cos(n-2)\theta + \dots + a_n a_0 \cos n\theta.$$

Учитывая, что все a_n положительны, можем написать

$$|P_n(\cos\theta)| \le a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0 = P_n(1) = 1.$$

Чтобы убедиться в последнем равенстве, достаточно в производящей функции положить $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Если функция $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема, то для каждого $x \in [-1,1]$ справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

где $c_n = (P_n, P_n)^{-1}(f, P_n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx.$

Доказательство. Как было показано в § 6, многочлены $(n + 1/2)^{1/2} P_n$ ортонормированы на интервале $(-1,1)$ с весом $h(x) \equiv 1$. Для произвольной функции $g \in L_2^h[-1,1]$ обозначим через $\lambda_n(g)$ её n-й коэффициент Фурье относительно системы многочленов $(n+1/2)^{1/2} P_n$, т. е. положим

$$\lambda_n(g) = (n + \frac{1}{2})^{1/2} \int\limits_{-1}^{1} g(x) P_n(x)\,dx.$$

Предполагая, что функция g имеет непрерывную первую производную и воспользовавшись рекуррентной формулой (6) из § 5:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) P_n(x),$$

с помощью интегрирования по частям можем написать

$$\lambda_n(g) = \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})^{-1/2} \left[\int\limits_{-1}^{1} g(x) P'_{n+1}(x)\,dx - \int\limits_{-1}^{1} g(x) P'_{n-1}(x)\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})^{-1/2} \left[g(x) P_{n+1}(x) \Big|_{-1}^{1} \right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \int\limits_{-1}^{1} g'(x)P_{n+1}(x)\,dx - g(x)P_{n-1}(x)\Big|_{-1}^{1} + \int\limits_{-1}^{1} g'(x)P_{n-1}(x)\,dx\Big] \\
&= \frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^{-1/2}(n-\frac{1}{2})^{-1/2}\lambda_{n-1}(g') \\
&\quad - \frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^{-1/2}(n+\frac{3}{2})^{-1/2}\lambda_{n+1}(g').
\end{aligned}
$$

В последнем равенстве мы учли, что внеинтегральные члены попарно сокращаются, т. к. из доказательства леммы мы знаем, что $P_{n+1}(1) = P_{n-1}(1) = 1$ и, аналогично, $P_{n+1}(-1) = P_{n-1}(-1) = (-1)^{n+1}$:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} P(-1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n.
$$

Введём обозначения

$$
a_n = \frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^{-1/2}(n-\frac{1}{2})^{-1/2}; \qquad b_n = \frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^{-1/2}(n+\frac{3}{2})^{-1/2}
$$

и перепишем доказанную выше формулу в более коротком виде:

$$
\lambda_n(g) = a_n\lambda_{n-1}(g') - b_n\lambda_{n+1}(g').
$$

Повторное применение этой формулы даёт

$$
\begin{aligned}
c_n &= (n+\frac{1}{2})^{1/2}\lambda_n(f) \\
&= (n+\frac{1}{2})^{1/2}[a_n\lambda_{n-1}(f') - b_n\lambda_{n+1}(f')] \\
&= (n+\frac{1}{2})^{1/2}\{a_n[a_{n-1}\lambda_{n-2}(f'') - b_{n-1}\lambda_n(f'')] \\
&\quad - b_n[a_{n+1}\lambda_n(f'') - b_{n+1}\lambda_{n+2}(f'')]\}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Теперь заметим, что числа $\lambda_n(f'')$ являются коэффициентами Фурье непрерывной функции f'' относительно ортонормированной системы $(P_n, P_n)^{-1/2}P_n$. Поэтому неравенство Бесселя даёт

$$
\sum_{n=0}^{\infty}[\lambda_n(f'')]^2 \le \int\limits_{-1}^{1}[f''(x)]^2\,dx < +\infty.
$$

Как известно общий член сходящейся числового ряда стремится к нулю, а значит — ограничен. Следовательно найдётся такая постоянная K, что для всех n выполнено неравенство

$$|\lambda_n(f'')| \leq K.$$

Кроме того, очевидно, каждая из последовательностей a_n и b_n эквивалентна последовательности $1/2n$ при $n \to \infty$ (Напомним, что последовательности называются эквивалентными, если предел отношения их n-ых членов равен единице). Следовательно, найдётся постоянная M такая, что для всех достаточно больших номеров n будут выполнены неравенства

$$a_n \leq M/n \;\text{ и }\; b_n \leq M/n.$$

Учитывая сказанное, из равенства (7) заключаем, что для всех достаточно больших номеров n выполнено неравенство

$$|c_n| \leq 4KM^2(n+\frac{1}{2})^{1/2}/n^2 \leq \operatorname{const}/n^{3/2}.$$

Поскольку $|P_n(x)| \leq 1$ для всех $x \in (-1,1)$ и всех n, то последнее неравенство означает, что модуль n-ого члена функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ оценивается сверху n-ым членом сходящегося числового ряда $\operatorname{const}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$. Значит функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ сходится равномерно и его сумма является функцией непрерывной.

Легко убедиться, что все коэффициенты Фурье непрерывной функции $g(x) = f(x) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ относительно ортонормированной системы $(n+1/2)^{1/2}P_n$ равны нулю:

$$\begin{aligned}\lambda_m(g) &= (m+\frac{1}{2})^{1/2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (m+\frac{1}{2})^{1/2}\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx \\ &= (m+\frac{1}{2})^{-1/2}c_m - (m+\frac{1}{2})^{-1/2}c_m = 0.\end{aligned}$$

Используя критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве и тот факт, что $(n+1/2)^{1/2}P_n$ — полная система, отсюда заключаем, что функция g равна нулю в смысле пространства $L_2^h[-1,1]$. Последне, как известно, означает, что

$$\int_1^1 g^2(x)h(x)\,dx = 0. \tag{8}$$

Остаётся заметить, что если бы неотрицательная непрерывная функция g^2 была строго положительной хоть в одной точке промежутка $[-1,1]$, то интеграл (8) был бы положителен. Значит для всех $x \in [-1,1]$ $g(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что только что доказанная теорема аналогична изучавшимся ранее теоремам о разложении функции в тригонометрический ряд. Несколько усложнив доказательство, мы могли бы, как и в случае рядов Фурье, получить теорему о разложении разрывных функций в ряд по многочленам Лежандра. И вновь оказалось бы, что в точке разрыва сумма ряда сходится к полусумме пределов функции слева и справа.

Аналогию с рядами Фурье можно продолжить, если вспомнить, что чем более гладкой является функция, тем быстрее стремится к нулю её коэффициент Фурье. Легко понять,что в нашем случае равенство (7), равно как и предшествующее ему, выражают именно это обстоятельство.

Задачи

19. Разложить в ряд по многочленам Лежандра следующие функции:

а) x^2; б) $\frac{1}{\sqrt{1-px}}$;

в) $\sqrt{1-px}$; г) $\frac{1-x^2}{2\sqrt{1-x}}$;

д) e^{ax}; е) δ — функция Дирака;

ж) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \le x < \alpha; \\ 1, & \text{если } \alpha < x \le 1. \end{cases}$

20. Используя формулу

$$P_n(\cos\theta) = a_0a_n\cos n\theta + a_1a_{n-1}\cos(n-2)\theta + \cdots + a_na_0\cos n\theta,$$

полученную при доказательстве леммы, показать, что

$$P_{2n}(\cos\theta) = 2 \cdot \frac{(4n-1)!!}{(4n)!!} \cos 2n\theta + 2 \cdot \frac{(4n-3)!!}{(4n-2)!!} \cdot \frac{1}{2} \cos(2n-2)\theta$$
$$+ 2 \cdot \frac{(4n-5)!!}{(4n-4)!!} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cos(2n-4)\theta + \dots + \frac{(4n-2n-1)!!}{(4n-2n)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

причём коэффициента 2 нет только у последнего слагаемого.

21. Используя предыдущую задачу показать, что

$$\int\limits_0^\pi P_{2n}(\cos\theta)\, d\theta = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \pi.$$

22. Используя предыдущую задачу, разложить в ряд по многочленам Лежандра следующие функции:

а) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\arcsin x$.

§ 9. Мультипольное разложение кулонова потенциала

Если в точке трёхмерного пространства с радиус-вектором $\overrightarrow{r_1}$ помещён единичный положительный электрический заряд, то, как известно, потенциал созданного им поля в точке с радиус-вектором $\overrightarrow{r_2}$, равен

$$\Phi = \frac{1}{|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|}.$$

Введя обозначение $r_1 = |\overrightarrow{r_1}|$, $r_2 = |\overrightarrow{r_2}|$, $r_- = \min(r_1, r_2)$, $r_+ = \max(r_1, r_2)$, $t = r_-/r_+$ θ — угол между векторами $\overrightarrow{r_1}$ и $\overrightarrow{r_2}$, можем записать

$$\Phi = \frac{1}{|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2\cos\theta + r_2^2}} = \frac{1}{r_+\sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2}}.$$

Поскольку $0 \le t \le 1$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ сходится для всех $|t| < 1$, можем записать

$$\Phi = \frac{1}{r_+} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^n. \tag{9}$$

Интересно, что в этой формуле r_1 и r_2 меняются ролями в зависимости от того, что из них больше. Вопрос о сходимости ряда при $r_+ = r_-$ мы не обсуждаем.

Полученная формула часто применяется в теоретической физике. Приведём пример, называемый мультипольным разложением кулонова потенциала.

Пусть заряд занимает конечный объём V, а плотность заряда задана функцией $\rho(\overrightarrow{r})$. Будем интересоваться потенциалом поля, создаваемого этим зарядом на расстояниях много бо́льших, чем линейные размеры объёма V. Введём прямоугольную систему координат с началом внутри объёма V и обозначим через $\overrightarrow{r}$ радиус-вектор текущей точки объёма V, а через $\overrightarrow{R}$ — радиус-вектор точки, в которой вычисляется потенциал. Тогда, как известно,

$$\Phi(\overrightarrow{R}) = \iiint\limits_V \frac{\rho(\overrightarrow{r})}{|\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}|}\, dV.$$

Используя обозначения $R = |\overrightarrow{R}|$, $r = |\overrightarrow{r}|$, θ — угол между векторами $\overrightarrow{R}$ и $\overrightarrow{r}$, а также формулу (8), получим

$$\Phi(\overrightarrow{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \iiint\limits_V \rho(\overrightarrow{r}) r^n P_n(\cos\theta)\, dV = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n}{R^{n+1}}.$$

Отметим, что первые три коэффициента в последней формуле имеют собственные названия:

$\sigma_0 = \iiint\limits_V \rho(\overrightarrow{r})\, dV$ — *полный заряд*;

$\sigma_1 = \iiint\limits_V \rho(\overrightarrow{r}) r\cos\theta\, dV$ — *дипольный момент*;

$\sigma_1 = \iiint\limits_V \rho(\overrightarrow{r}) r^2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\, dV$ — *квадрупольный момент*.

§ 10. Применение многочленов Лежандра при решении дифференциальных уравнений

Как известно, многие проблемы электростатики, термодинамики и других разделов физики могут быть сведены́ к задаче о нахождении потенциала, т. е. гармонической функции u, заданной в области D и удовлетворяющей на её границе ∂D условиям вида

$$u\big|_{\partial D} = f \quad \text{или} \quad \left.\frac{du}{dn}\right|_{\partial D} = f$$

где f — заданная функция на поверхности ∂D, а n — её внешняя нормаль.

В настоящем параграфе мы будем решать такую задачу для сферы. Причём, чтобы не выходить за пределы изложенных в предыдущих параграфах сведений о многочленах Лежандра, мы ограничимся случаем симметрии вращения. Последнее означает, что значения граничной функции f не изменяются при вращении точек сферы вокруг некоторой оси, которую без ограничения общности можно считать осью z.

Более точно нашу задачу можно сформулировать так: *Предполагая, что в трёхмерном пространстве введены сферические координаты, найти функцию $u = u(r, \varphi, \theta)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа*

$$\triangle\, u = 0$$

в шаре $r < a$ и принимающую на сфере $r = a$ заданные значения

$$u\big|_{r=a} = f(\theta).$$

Как известно, уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\triangle\, u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Поскольку граничные значения $u\big|_{r=a}$ не меняются при поворотах относительно оси z, т. е. не зависят от φ, то кажется естественным искать решение u, не меняющееся при поворотах относительно оси z, т. е. не зависящее от φ. Но тогда последний член в уравнении Лапласа занулится.

Двигаясь дальше, будем искать частные решения уравнения Лапласа в виде

$$u(r, \theta) = R(r)\Psi(\theta).$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2}\Psi\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}R\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Psi}{d\theta}\right) = 0$$

или

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Psi\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Psi}{d\theta}\right).$$

Левая часть последней формулы зависит только от r, а правая — только от θ. Поэтому и левая и правая часть есть постоянная величина, которую мы обозначим через $n(n+1)$, считая n натуральным числом. Теперь наша задача свелась к нахождению решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - n(n+1)R = 0 \tag{10}$$

и

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Psi}{d\theta}\right) + n(n+1)\sin\theta\Psi = 0. \tag{11}$$

Изложенный в предыдущем абзаце приём свед́ения уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, называется *методом разделения переменных* и часто используется в математике и её приложениях.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что уравнению (10) удовлетворяет функция

$$R(r) = Ar^n, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

а уравнению (11) — функция

$$\Psi(\theta) = BP_n(\cos\theta), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

где A и B — произвольные постоянные. В самом деле, как известно, n-ый многочлен Лежандра P_n является частным решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0.$$

Сделаем в нём замену переменного, полагая $x = \cos\theta$. Тогда $dx = -\sin\theta\,d\theta$, а значит

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}$$

и

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(\cos\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{dy(\cos\theta)}{d\theta}.$$

Дважды применяя последнюю формулу к дифференциальному уравнению Лежандра, будем последовательно иметь

$$\frac{d}{dx}\left[-\sin^2\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right]+n(n+1)P_n(\cos\theta)=0,$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right]+n(n+1)\sin\theta P_n(\cos\theta)=0,$$

а значит Ψ — решение уравнения (11).

Таким образом, мы имеем набор частных решений

$$Cr^nP_n(\cos\theta),\qquad n=0,\ 1,\dots,$$

уравнения Лапласа, а поскольку оно линейно, то и любая линейная комбинация

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^nP_n(\cos\theta)$$

этих решений снова есть решение. И нам остаётся подобрать коэффициенты c_n так, чтобы решение принимало на поверхности шара $r<a$ заданные значения.

Другими словами, мы хотим подобрать коэффициенты c_n так, чтобы для всех $\theta\in[0,\pi]$ имело место равенство

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_na^nP_n(\cos\theta).$$

Это очень похоже на разложение функции в ряд по многочленам Лежандра. Действительно, если мы сделаем замену переменных $\cos\theta=x$, то последнее равенство перепишется в виде

$$f(\arccos x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_na^nP_n(x),\qquad x\in[-1,1].$$

Значит, речь идёт о том, чтобы разложить функцию $g(x)=f(\arccos x)$ в ряд по многочленам Лежандра в интервале $[-1,1]$. Поскольку функция "арккосинус" бесконечно дифференцируема, то , согласно теореме из § 8, для дважды непрерывно дифференцируемой функции f такое разложение справедливо и даётся формулами

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_nP_n(x),$$

где $c_n a^n = g_n = (n+\frac{1}{2}) \int\limits_{-1}^{1} g(x) P_n(x)\,dx = (n+\frac{1}{2}) \int\limits_{0}^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta\,d\theta.$

Окончательно получаем, что функция

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), \tag{12}$$

где $g_n = (n+\frac{1}{2}) \int\limits_{0}^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta\,d\theta$ удовлетворяет и уравнению Лапласа и граничным условиям.

Как это обычно бывает, получив решение, постараемся его обдумать с разных сторон.

Прежде всего заметим, что функциональный ряд, стоящий в правой части формулы (12) сходится в каждой точке шара $r < a$, т. к. каждый его член мажорируется соответствующим членом сходящейся геометрической прогрессии $K \sum\limits_{n=0}^{\infty} \bigl(r/a\bigr)^n$.

В процессе решения мы сделали следующие упрощающие предположения:

а) $u(r,\varphi,\theta) = R(r)\Psi(\theta)$;

б) общая постоянная в уравнениях (10) и (11) равна не произвольному вещественному числу, а — $n(n+1)$, где n — натуральное;

в) для каждого из уравнений (10) и (11) мы брали одно из двух его линейно независимых решений.

Поэтому нетривиальным становится утверждение о том, что мы не потеряли никаких решений. Это действительно так и следует из того, что решение нашей задачи единственно: изучая формулу Гаусса — Остроградского, вы доказывали, что гармоническая функция в ограниченной области однозначно определяется своими значениями на границе области. Те, кто хочет вспомнить доказательство этого факта, могут посмотреть задачу 4395 из “Сборника задач и упражнений по математическому анализу” Б. П. Демидовича — там в двух словах намечен план доказательства.

§ 11. Поле точечного заряда, помещённого внутри полой проводящей сферы

Применим результаты предыдущего параграфа для *нахождения* *поля точечного заряда q, помещённого внутри полой проводящей сферы радиуса a на расстоянии b от её центра.*

Поместим начало координат в центр сферы и направим ось z через точку A, в которой находится заряд. Нам будет удобно представить искомый потенциал Φ в виде суммы потенциала источника (т. е. потенциала, создаваемого зарядом q) и потенциала u вторичного поля, создаваемого зарядами, индуцированными на внутренней поверхности сферы:

$$\Phi = \frac{q}{\rho} + u,$$

где $\rho = |AM| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta}$ — расстояние от точки A до произвольной точки M, в которой ищется потенциал, имеющей в сферической системе координаты (r, φ, θ).

Поскольку мы имеем дело со статикой, то потенциал Φ на сфере $r = a$ равен нулю. Следовательно, мы имеем граничные условия для функции u:

$$u|_{r=a} = -\frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}} = f(\theta).$$

(Правое равенство здесь является обозначением). Кроме того, из электростатики известно, что потенциал u удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle\, u = 0$. Тем самым мы пришли к задаче, решённой в предыдущем параграфе: *найти функцию u, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\triangle\, u = 0$ в шаре $r < a$ и граничным условиям $u|_{r=a} = f(\theta)$ на сфере $r = a$.*

Как мы знаем, основным элементом решения этой задачи является разложение функции $f(\theta)$ в ряд по многочленам $P_n(\cos\theta)$. В нашем случае нет необходимости вычислять интегралы из формулы (12). Достаточно в формуле для производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

положить $t = b/a$, $x = \cos\theta$. Тогда

$$f(\theta) = -\frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}} = -\frac{q}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{a}\right)\cos\theta}}$$

$$= -\frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

После этого формула (12) даёт

$$u = -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{br}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

Преобразуем полученное выражение с помощью формулы для производящей функции. Положив в ней $t = br/a^2$, $x = \cos\theta$, будем иметь

$$\begin{aligned} u &= -\frac{q}{a}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{br}{a^2}\right)\cos\theta + \left(\frac{br}{a^2}\right)^2}} \\ &= -\frac{qa}{b}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2 - 2r\left(\frac{a^2}{b}\right)\cos\theta + r^2}} = \frac{q'}{\rho'}, \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения

$$q' = -\frac{qa}{b}, \quad \rho' = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2b'r\cos\theta + b'^2}}, \quad b' = \frac{a^2}{b}.$$

Теперь мы видим, что окончательно искомый потенциал может быть представлен в виде суммы

$$\Phi = \frac{q}{\rho} + \frac{q'}{\rho'}.$$

Здесь первое слагаемое является потенциалом заряда q в отсутствие сферы, второе же можно интерпретировать как потенциал некоторого вспомогательного заряда q', называемого отражённым и учитывающего влияние проводящей сферы, помещённого в точке A', полученной из точки A инверсией относительно сферы $r = a$. (Напоминание: говорят, что точка A' получена из точки A инверсией относительно сферы $r = a$ с центром в точке O, если обе они лежат на одном луче, выходящем из O и $|OA| \cdot |OA'| = a^2$. Легко понять, что в нашем случае $|OA| = b$, $|OA'| = b' = a^2/b$, а значит действительно $|OA| \cdot |OA'| = bb' = a^2$).

Задачи

23. Вычислить плотность заряда на проводящей границе полости $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, в которую помещён заряд q на расстоянии $r = b < 1$ от центра.

24. Определить возмущённый электростатический потенциал при внесении нейтральной проводящей сферы радиуса r в первоначально однородное электромагнитное поле.

§ 12. Многочлены Эрмита: производящая функция и формула Родрига

Разложим функцию

$$w(x,t) = e^{2xt-t^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{C},$$

в ряд Тейлора в нуле:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \tag{13}$$

Ниже мы увидим, что функции H_n являются многочленами, ортогональными на всей числовой прямой с весом e^{-x^2}. Именно их мы и будем называть *многочленами Эрмита.* При таком подходе очевидно, что функция $w(x,t) = e^{2xt-t^2}$ является для них производящей.

В соответствии с формулой Тейлора имеем

$$H_n(x) = \left.\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right|_{t=0} = e^{x^2} \left.\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]\right|_{t=0}$$
$$= (-1)^n e^{x^2} \left.\left[\frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}\right]\right|_{y=x}.$$

Следовательно,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \qquad n = 1,\ 2, \ldots; \qquad H_0(x) = 1.$$

Это выражение называется *формулой Родрига.*

Задачи

25. Доказать,что

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \qquad H_{2n+1}(0) = 0,$$

$$H'_{2n}(0) = 0, \qquad H'_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2.$$

26. Найти $H_1(x)$, $H_2(x)$ и $H_3(x)$, выполнив дифференцирование в формуле Родрига.

27. Доказать,что если n — чётно, то $H_n(x)$ является чётной функцией от x, а если n — нечётно, то — нечётной.

28. Доказать равенства

$$e^{t^2}\cos(2xt) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

$$e^{t^2}\sin(2xt) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

29. Доказать тождество

$$e^{x^2}H_n(x) = -\frac{d}{dx}e^{x^2}H_{n-1}(x).$$

30. С помощью производящей функции получить теорему сложения для многочленов Эрмита:

$$H_n(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{H_k(x)H_{n-k}(y)}{k!\,(n-k)!}\cos^k\alpha\sin^{n-k}\alpha.$$

§ 13. Многочлены Эрмита: рекуррентные формулы и дифференциальное уравнение

Поскольку

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2(x-t)e^{2xt-t^2},$$

то имеет место тождество

$$\frac{\partial w}{\partial t} - (2x-2t)w = 0.$$

Подставляя в него вместо w степенной ряд (13) и вспоминая,что в пределах круга сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно, будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}(x)}{n!}t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^{n+1} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при t^n, получим *рекуррентную формулу*

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \qquad n = 1,\ 2,\dots \qquad (14)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что если H_n и H_{n-1} являются многочленами степени n и $n-1$ соответственно, то H_{n+1} является многочленом степени $n+1$. Поскольку $H_0(x) = 1$ и $H_1(x) = 2x$ являются многочленами степени 0 и 1, отсюда на основании принципа математической индукции заключаем, что *при каждом n функция H_n действительно является многочленом степени n.*

Аналогично из тождества

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 2tw = 0,$$

легко получить ещё одну рекуррентную формулу

$$H_n'(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0, \qquad n = 1,\ 2, \dots, \tag{15}$$

Складывая формулы (14) и (15), придём к соотношению

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) = 0,$$

продифференцировав которое ещё раз и вновь используя формулу (15), получим

$$H_{n+1}'(x) - 2H_n(x) - 2xH_n'(x) + H_n''(x) = 0,$$
$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Значит, функция $y = H_n(x)$ является частным решением уравнения

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Задачи

31. Доказать тождество

$$e^{-x^2} H_n(x) = -\frac{d}{dx} e^{-x^2} H_{n-1}(x).$$

32. Проверить, что функция $y_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$, называемая *функцией Эрмита*, является частным решением уравнения

$$y'' + (2n + 1 - x^2)y = 0.$$

§ 14. Многочлены Эрмита: соотношения ортогональности

Нам предстоит доказать *соотношения ортогональности*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Из них, в частности, следует, что многочлены H_n ортогональны на всей числовой оси с весом e^{-x^2}.

Пусть $y_n = e^{-x^2/2} H_n(x)$. Тогда, в силу задачи 32, имеем

$$y_n'' + (2n + 1 - x^2) y_n = 0,$$

$$y_m'' + (2m + 1 - x^2) y_m = 0.$$

Умножив первое из этих равенств на y_m, второе — на y_n и вычтя второе из первого, получим

$$y_m'' y_n - y_m'' y_n + 2(n - m) y_n y_m = 0,$$

что можно также переписать в виде

$$\frac{d}{dx}(y_n' y_m - y_m' y_n) + 2(n - m) y_n y_m = 0.$$

Интегрируя последнее соотношение от минус до плюс бесконечности и учитывая тот очевидный факт, что $y_n(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, будем иметь

$$2(n - m) \int_{-\infty}^{+\infty} y_n y_m\, dx = 2(n - m) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 0.$$

Если $n \neq m$, то из этого равенства следует ортогональность многочленов H_n и H_m с весом e^{-x^2}.

Чтобы рассмотреть случай $n = m$, запишем рекуррентную формулу (14)

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0, \qquad n = 1,\ 2, \ldots,$$

и заменим в ней n на $n - 1$:

$$H_n(x) - 2x H_{n-1}(x) + 2(n - 1) H_{n-2}(x) = 0, \qquad n = 2,\ 3, \ldots.$$

Умножим первое из этих соотношений на H_{n-1}, второе — на H_n и вычтем второе из первого:

$$2nH_{n-1}^2(x) + H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}H_n(x) - H_n^2(x) = 0,$$

n=2, 3, ... Умножим полученное равенство на e^{-x^2}, проинтегрируем по всей вещественной прямой и воспользуемся установленной выше ортогональностью многочленов Эрмита. В результате получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\,dx = 2n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)\,dx, \qquad n = 2,\ 3, \ldots .$$

Следовательно, мы сумели выразить искомый интеграл для H_n через такой же интеграл для H_{n-1}. Многократно применяя эту формулу, будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\,dx = 2n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)\,dx = \ldots$$

$$= 2^{n-1} n! \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)\,dx = 2^{n-1} n! 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2\,dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Последнее равенство здесь написано в силу следующего вычисления, использующего интегрирование по частям и известное значение интеграла Эйлера — Пуассона $\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\right)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2\,dx = -\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,d\left(e^{-x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Задача

33. Показать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2 H_n^2(x)\,dx = 2^n n!(n+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}.$$

(Заметим, что этот интеграл встречается при подсчёте среднего квадрата смещения квантового осциллятора.)

§ 15. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита

Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *кусочно-гладкой*, если для каждого положительного вещественного числа a найдется конечное число точек $-a = a_1 < a_2 < \dots < a_n = a$ таких, что на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) функция f непрерывно дифференцируема, а в каждой точке $x + a_i$ она имеет конечные пределы слева и справа

$$f(x-0) = \lim_{h\to+0} f(x-h), \qquad f(x+0) = \lim_{h\to+0} f(x+h),$$

а также конечную левую и правую производные

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}, \qquad \lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}.$$

Напомним, что именно такое определение кусочно-гладкой функции мы принимали, когда изучали вопрос о разложении функции в тригонометрический ряд Фурье. При этом, очевидно, допускается, что кусочно-гладкая функция имеет точки разрыва.

Теорема. *Если для кусочно-гладкой функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f^2(x)\,dx$$

имеет конечное значение, то в каждой точке x непрерывности функции f имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x),$$

где $c_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\, dx.$

Доказательство этой теоремы мы опустим, т.к. оно с одной стороны довольно громоздко, а с другой — не даёт ничего нового в идейном плане после того, как были доказаны аналогичные теоремы о разложении функции в тригонометрический ряд Фурье и в ряд по многочленам Лежандра. Интересующиеся могут найти это доказательство в монографии Н. Н. Лебедева “Специальные функции и их приложения,” стр. 91–97.

Методы нахождения разложений для функций частного вида мы продемонстрируем на следующих примерах.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^{2p}$ $(p = 0,\, 1,\, 2,\, \dots\ )$.

Поскольку функция f чётна, а многочлен H_{2n+1} — нечётен, то

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_{2n+1}(x)\, dx = 0,$$

т. к. под интегралом стоит нечётная функция.

Чтобы найти c_{2n}, воспользуемся формулой Родрига и правилом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_{2n}(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} e^{-x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \left[x^{2p}\ \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} e^{-x^2} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \right. \\ &\qquad \left. -2p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-1} \left(\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} e^{-x^2} \right) dx \right] = \dots \\ &= \frac{(2p)(2p-1)\dots(2p-2n+1)}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-2n} e^{-x^2}\, dx. \end{aligned}$$

В процессе вычислений мы учли, что все внеинтегральные члены зануляются. Из последнего выражения видно, что если $n > p$, то в числителе дроби, стоящей перед интегралом, один из сомножителей будет равен нулю. Следовательно, если $n > p$, то $c_{2n} = 0$.

Предполагая, что $n \leq p$ и пользуясь чётностью подынтегральной функции, можем написать

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \cdot 2 \int\limits_0^{+\infty} x^{2p-2n} e^{-x^2}\, dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $x^2 = y$ и вспомним, что для $\alpha > 0$ гамма — функция Эйлера задаётся интегралом

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy.$$

Тогда

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \int\limits_0^{+\infty} y^{p-n} e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$
$$= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \Gamma(p-n+\frac{1}{2}).$$

Чтобы избежать прямого вычисления последнего интеграла, воспользуемся функциональными свойствами гамма — функции: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ и его следствием $\Gamma(n+1) = n!$, а также формулой удвоения

$$2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha).$$

Применяя формулу удвоения для $\alpha = p - n + \frac{1}{2}$, получим

$$2^{2p-2n}\Gamma(p-n+\frac{1}{2})(p-n)! = \sqrt{\pi}(2p-2n)!.$$

Следовательно,

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \frac{\sqrt{\pi}(2p-2n)!}{2^{2p-2n}(p-n)!} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(2n)!\,(p-n)!}.$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$x^{2p} = \sum_{n=0}^{p} \frac{(2p)!}{2^{2p}(2n)!\,(p-n)!} H_{2n}(x), \qquad p = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = e^{ax}$, где a — произвольное вещественное или комплексное число.

Как и в предыдущем примере, разложение можно найти, вычисляя c_n с помощью интегралов. Но в данном случае проще подставить в разложение для производящей функции

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

значение $t = a/2$. Тогда сразу найдём

$$e^{ax} = e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{2^n n!} H_n(x).$$

Задачи

34. Разложить следующие функции в ряды по многочленам Эрмита:

а) $f(x) = \cos 2x$; б) $f(x) = \sin 2x$;
в) $f(x) = \operatorname{ch} 2x$; г) $f(x) = \operatorname{sh} 2x$;
д) $f(x) = x^{2p+1}$, $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$;
е) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$
ж) $f(x) = |x|$.

§ 16. Функции Эрмита. Уравнение Шрёдингера для гармонического осциллятора

Как уже говорилось в задаче 32, функции $y_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, называются *функциями Эрмита.* Следующие их свойства являются простой переформулировкой известных нам свойств многочленов Эрмита и в доказательстве не нуждаются:

1) *Функции Эрмита ортогональны на интервале* $(-\infty, +\infty)$ *с весом единица*:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y_n(x) y_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m; \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{если } n = m. \end{cases}$$

2) *Всякая непрерывно дифференцируемая функция* f, *интегрируемая с квадратом на* $(-\infty, +\infty)$ *может быть разложена в ряд по функциям Эрмита*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x), \qquad -\infty < x < +\infty,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) y_n(x)\, dx.$$

3) *Если* $\lambda = 2n + 1$, *то функция Эрмита* $y_n(x)$ *является частным решением уравнения*

$$y'' + (\lambda - x^2) y = 0. \tag{16}$$

Ниже нам понадобится такое уточнение последнего свойства: *если* λ *не равняется ни одному из чисел вида* $\lambda_n = 2n+1$ $(n = 0, 1, \dots)$, *то уравнение* (16) *не имеет ненулевых решений, интегрируемых с квадратом на интервале* $(-\infty, +\infty)$.

Рассуждая от противного, предположим, что такое решение y, соответствующее некоторому λ, нашлось. Задав произвольно $n = 0, 1, 2, \dots$, будем иметь

$$y'' + (\lambda - x^2) y = 0,$$

$$y_n'' + (\lambda_n - x^2) y_n = 0.$$

Умножив первое из этих равенств на y_n, второе — на y и вычтя второе из первого, получим

$$y'' y_n - y_n'' y + (\lambda - \lambda_n) y y_n = 0,$$

что можно также записать в виде

$$\frac{d}{dx}(y' y_n - y_n' y) + (\lambda - \lambda_n) y y_n = 0. \tag{17}$$

Тот факт, что функция $y_n(x) = e^{-x^2} H_n(x)$ и её производная y'_n стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, очевиден. Поскольку функция y интегрируема с квадратом на интервале $(-\infty, +\infty)$, то можно показать, что существуют последовательности чисел a_k и b_k стремящиеся к плюс и минус бесконечности, соответственно, такие, что

$$\lim_{k\to\infty} y(a_k) = \lim_{k\to\infty} y'(a_k) = \lim_{k\to\infty} y(b_k) = \lim_{k\to\infty} y'(b_k) = 0$$

Тогда, интегрируя равенство (17) в пределах от a_k до b_k, получим

$$[y'(x)y_n(x) - y'_n(x)y(x)]\Big|_{b_k}^{a_k} + (\lambda - \lambda_n)\int\limits_{b_k}^{a_k} y(x)y_n(x)\,dx = 0.$$

Откуда, переходя к пределу при $k \to \infty$, найдём

$$(\lambda - \lambda_n)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(x)y_n(x)\,dx = 0.$$

Поскольку по предположению λ не равняется ни одному из чисел λ_n, отсюда следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(x)y_n(x)\,dx = 0.$$

Другими словами, это равенство означает, что все коэффициенты Фурье функции y относительно ортогональной системы функций y_n равны нулю. Но функция y является решением дифференциального уравнения второго порядка, а значит — как минимум дважды непрерывно дифференцируема. Поэтому она разлагается в поточечно сходящийся ряд Фурье по функциям Эрмита. Но выше мы убедились, что все коэффициенты этого ряда равны нулю, а значит функция y тождественно равна нулю. Что и требовалось доказать.

В квантовой механике стационарное состояние частицы, находящейся в стационарном (т. е. не зависящем от времени t) поле с потенциалом $U = U(x, y, z)$, описывается волновой функцией

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{\frac{iE}{\hbar}t},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, E — общая энергия частицы, а функция ψ удовлетворяет *стационарному уравнению Шрёдингера*

$$\triangle\,\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$$

и условию нормировки

$$\iiint |\psi|^2\,dx\,dy\,dz = 1.$$

Здесь m обозначает массу частицы, а $\triangle$ — оператор Лапласа, т. е.

$$\triangle = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Задача состоит в том, чтобы найти указанные выше стационарные состояния, т. е. найти набор собственных значений энергии E и соответствующих решений ψ стационарного уравнения Шрёдингера.

В случае гармонического осциллятора (т. е. грузика, подвешенного на пружинке) потенциал U имеет вид

$$U = \frac{m\omega^2}{2}x^2,$$

где ω — собственная (циклическая) частота осциллятора, а x — величина отклонения от положения равновесия. Стационарное уравнение Шрёдингера при этом превратится в

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)\psi = 0$$

при дополнительном условии нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1.$$

Вводя обозначения

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}, \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \qquad z = \frac{x}{x_0},$$

для функции $\psi = \psi(z)$ после очевидных преобразований, получим уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + (\lambda - z^2)\psi = 0$$

с дополнительным условием нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(z)|^2 \, dz = \frac{1}{x_0}.$$

Если λ принимает одно из значений $\lambda_n = 2n + 1$ $(n = 0, 1, \dots)$, то последнее уравнение имеет решение

$$\psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-z^2/2} H_n(z)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

Как следует из приведённых выше свойств функций Эрмита, при других значениях λ уравнение (18) ненулевых решений не имеет.

Возвращаясь к исходным обозначениям, находим

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}},$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \dots.$$

Из последней формулы мы видим, что с точки зрения квантовой механики энергия осциллятора может принимать лишь дискретный набор значений E_n. Это обстоятельство кардинально отличает квантовую механику от классической, где, как известно, энергия осциллятора

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

может равняться произвольному положительному числу (p — импульс частицы). Чтобы подчеркнуть это отличие, говорят, что в квантовой механике энергия квантуется. Число n, определяющее номер квантового уровня, называют главным квантовым числом. В низшем квантовом состоянии при $n = 0$ энергия осциллятора отлична от нуля и равна

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

§ 17. Многочленны Лагерра: производящая функция и формула Родрига

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-xt/(1-t)},$$

определённую для произвольного вещественного x и комплексного t, по модулю не превосходящего 1: $|t| < 1$. Параметр α будем считать бóльшим, чем минус единица: $\alpha > -1$. При фиксированном x разложим функцию $w(x,t)$ в ряд Тейлора по переменной t:

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n.$$

Ниже мы увидим, что функции L_n^α являются многочленами, ортогональными на интервале $(0, +\infty)$ с весом $x^\alpha e^{-x}$. Именно их мы и будем называть *многочленами Лагерра.* Очевидно, это определение не противоречит информации, приведённой в таблице параграфа 4. Кроме того, непосредственно из определения ясно, что функция

$$w(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-xt/(1-t)}$$

является производящей для многочленов Лагерра.

Представляя коэффициенты в разложении производящей функции в ряд Тейлора в виде контурных интегралов и используя теорию вычетов, можно показать, что

$$L_n^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x} x^{n+\alpha}], \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$$

Это соотношение называется *формулой Родрига.* Детально её доказательство мы приводить не будем отчасти потому, что оно требует привлечения методов теории функций комплексного переменного, отчасти — потому, что мы не будем пользоваться ею.

Задачи

35. Проверить следующие соотношения двумя способами: непосредственно находя коэффициенты в разложении производящей функции и выполняя дифференцирование в формуле Родрига —

$$L_0^\alpha(x) = 1; \qquad L_1^\alpha(x) = 1 + \alpha - x;$$

$$L_2^\alpha(x) = \frac{1}{2}[(1+\alpha)(2+\alpha) - 2(2+\alpha)x + x^2].$$

36. Вывести формулу

$$L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} L_k^\alpha(x) L_{n-k}^\beta(y).$$

37. Доказать тождество

$$(1-t)^2 \frac{\partial w}{\partial t} + [x - (1-t)(1+\alpha)]w = 0.$$

§ 18. Многочленны Лагерра: рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение

Подставим в тождество, приведённое в задаче 37, разложение производящей функции в степенной ряд и воспользуемся тем, что в круге сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно. Получим

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha(x)t^{n-1} + [x - (1-t)(1+\alpha)] \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x)t^n = 0.$$

Выделим в получившемся степенном ряде коэффициент при t^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и приравняем его к нулю:

$$\begin{aligned}(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) - 2nL_n^\alpha(x) + (n-1)L_{n-1}^\alpha(x)& \\ + (x-\alpha-1)L_n^\alpha(x) + (\alpha+1)L_{n-1}^\alpha(x) &= 0\end{aligned}$$

или

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (x-\alpha-2n-1)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0 \quad (19)$$

Это рекуррентное соотношение справедливо для всех n, начиная с единицы. Из него, в частности, следует, что если L_n^α и L_{n-1}^α является многочленами степени n и $n-1$ соответственно, то L_{n+1}^α является многочленом степени $n+1$. Но поскольку мы уже знаем, что $L_0^\alpha(x) = 1$ и $L_1^\alpha(x) = 1+\alpha-x$, то, в силу принципа математической индукции, L_n^α является многочленом степени n при любом $n = 0, 1, 2, \dots$.

Аналогично предыдущему, подставляя в тождество

$$(1-t)\frac{\partial w}{\partial x} + tw = 0$$

тейлоровское разложение производящей функции w, дифференцируя его почленно и приравнивая к нулю коэффициенты при t^n, получим ещё одно рекуррентное соотношение

$$\frac{dL_n^\alpha}{dx} - \frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx} + L_{n-1}^\alpha = 0, \tag{20}$$

справедливое для всех n, начиная с единицы.

Из формулы (19) выразим $L_{n-1}^\alpha(x)$ и подставим в полученное соотношение (20):

$$\left(1 + \frac{x-\alpha-2n-1}{n+\alpha}\right)\frac{dL_n^\alpha}{dx} + \frac{n+1}{n+\alpha}\frac{dL_{n+1}^\alpha}{dx} \\ + \left(-\frac{x-\alpha-2n-1}{n+\alpha} + \frac{1}{n+\alpha}\right)L_n^\alpha - \frac{n+1}{n+\alpha}L_{n+1}^\alpha = 0.$$

После приведения подобных и умножения на $n+\alpha$, последнее выражение примет вид

$$(x-n-1)\frac{dL_n^\alpha}{dx} + (n+1)\frac{dL_{n+1}^\alpha}{dx} + (2n+2+\alpha-x)L_n^\alpha - (n+1)L_{n+1}^\alpha = 0.$$

Наши рассуждения доказывают это соотношение для $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Прямая проверка убеждает нас, что оно справедливо также при $n = 0$.

Заменив в последней формуле индекс n на $n-1$, получим соотношение

$$(x-n)\frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx} + n\frac{dL_n^\alpha}{dx} + (2n+\alpha-x)L_{n-1}^\alpha - nL_n^\alpha = 0,$$

справедливое для $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Подставляя в него выражение для $\frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx}$, полученное из (20), будем иметь

$$x\frac{dL_n^\alpha}{dx} - nL_n^\alpha + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha = 0. \tag{21}$$

Последнее соотношение справедливо для $n = 1,\ 2,\ \ldots$ и позволяет выражать производную от многочлена Лагерра через сами многочленны.

Дифференцируя (21) по x и исключая из получившегося уравнения функции $\frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx}$ и L_{n-1}^α с помощью (20) и (21), будем последовательно иметь

$$\frac{dL_n^\alpha}{dx} + x\frac{d^2L_n^\alpha}{dx^2} - n\frac{dL_n^\alpha}{dx} + (n+\alpha)\frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx} = 0,$$

$$x\frac{d^2L_n^\alpha}{dx^2}+(1-n)\frac{dL_n^\alpha}{dx}+(n+\alpha)\left(\frac{dL_n^\alpha}{dx}+L_{n-1}^\alpha\right)=0,$$
$$x\frac{d^2L_n^\alpha}{dx^2}+(1+\alpha)\frac{dL_n^\alpha}{dx}+nL_n^\alpha-x\frac{dL_n^\alpha}{dx}=0,$$
$$x\frac{d^2L_n^\alpha}{dx^2}+(1+\alpha-x)\frac{dL_n^\alpha}{dx}+nL_n^\alpha=0.$$

Следовательно, функция $y(x)=L_n^\alpha(x)$ является частным решением уравнения
$$xy''+(1+\alpha-x)y'+ny=0.$$

Задачи

38. Исходя из тождества $(1-t)w(x,t,\alpha+1)=w(x,t,\alpha)$, вывести равенство $L_n^{\alpha+1}(x)-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)=L_n^\alpha(x)$ для $n=1,\,2,\,\ldots$.

39. Из соотношения $\partial w/\partial x(x,t,\alpha)=-tw(x,t,\alpha+1)$ вывести формулу
$$\frac{dL_n^\alpha}{dx}(x)=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$$
для $n=1,\,2,\,\ldots$.

40. Проверить, что дифференциальное уравнение
$$xy''+(1+\alpha-2\beta)y'+\left[n+\frac{1+\alpha}{2}-\frac{x}{4}+\frac{\beta(\beta-\alpha)}{x}\right]y=0$$
имеет частное решение $y_n(x)=e^{-x/2}x^\beta L_n^\alpha(x)$, называемое функцией Лагерра.

41. Проверить, что дифференциальное уравнение
$$y''+\left[4n+2\alpha+2-x^2+\frac{\frac14-\alpha^2}{x^2}\right]y=0$$
имеет частное решение $y(x)=e^{-x^2/2}x^{\alpha+1/2}L_n^\alpha(x^2)$.

§ 19. Многочленны Лагерра: соотношение ортогональности

В этом параграфе мы докажем, что многочлены Лагерра удовлетворяют соотношениям
$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{если } n\neq m;\\ \Gamma(n+\alpha+1)/n!, & \text{если } n=m,\end{cases}$$

называемым *соотношениями ортогональности.* Из них, в частности, следует, что многочлены L_n^α ортогональны на интервале $(0, +\infty)$ с весом $e^{-x}x^\alpha$. (Напомним, что параметр α принимает значения бо́льшие минус единицы).

Пусть $y_n(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2}L_n^\alpha(x)$. Полагая в задаче 40 $\beta = \alpha/2$, видим, что функция y_n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy_n'' + y_n' + \left(n + \frac{1+\alpha}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\alpha^2}{4x}\right) y_n = 0,$$

которое можно переписать в несколько ином виде

$$(xy_n')' + \left(n + \frac{1+\alpha}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\alpha^2}{4x}\right) y_n = 0.$$

Напишем это же уравнение ещё для одного индекса — m

$$(xy_m')' + \left(m + \frac{1+\alpha}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\alpha^2}{4x}\right) y_m = 0,$$

умножим первое из этих соотношений на y_m, второе — на y_n и вычтем из первого второе. Получим соотношение

$$(xy_n')'y_m - (xy_m')'y_n + (n-m)y_ny_m = 0,$$

проинтегрировав которое на интервале $(0, +\infty)$, будем иметь

$$x\left(y_n'y_m - y_m'y_n\right)\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} xy_n'(x)y_m'(x)\,dx$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} xy_m'(x)y_n'(x)\,dx + (n-m)\int\limits_0^{+\infty} y_n(x)y_m(x)\,dx = 0.$$

При $\alpha > -1$ внеинтегральные члены в этом выражении зануляются: при $x \to +\infty$ это очевидно, а при $x \to +0$ это следует из непосредственно проверяемого соотношения $x(y_n'y_m - y_m'y_n) = O(x^{1+\alpha})$ (см. задачу 42).

Окончательно, последнее соотношение даёт

$$(n-m)\int\limits_0^{+\infty} y_n(x)y_m(x)\,dx = 0,$$

откуда и следует, что при $n \neq m$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)\, dx = 0.$$

Чтобы найти значение этого интеграла при $n = m$, умножим формулу (19) на $L_{n-1}^\alpha(x)$ и вычтем из получившегося выражения умноженную на $L_n^\alpha(x)$ формулу (19), в которой индекс n заменён на $n-1$:

$$\begin{array}{l} (n+1)L_{n+1}^\alpha - (x-\alpha-2n-1)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0 \,\Big|\cdot L_{n-1}^\alpha(x) \\ - \\ \underline{nL_n^\alpha - (x-\alpha-2n+1)L_{n-1}^\alpha(x) + (n-1+\alpha)L_{n-2}^\alpha(x) = 0 \,\Big|\cdot L_n^\alpha(x)} \\ \qquad\qquad (n+\alpha)[L_{n-1}^\alpha(x)]^2 - n[L_n^\alpha(x)] + \dots = 0. \end{array}$$

В последнем выражении многоточие заменяет сумму попарных произведений многочленов Лагерра с несовпадающими индексами, взятых с некоторыми постоянными множителями. Умножая последнее соотношение на $x^\alpha e^{-x}$, интегрируя его от 0 до $+\infty$ и пользуясь доказанной выше ортогональностью многочленов Лагерра с разными номерами, будем иметь

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2\, dx = \frac{n+\alpha}{n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_{n-1}^\alpha(x)]^2\, dx,$$

$n = 2, 3, \dots$. Следовательно, нам удалось выразить искомый интеграл для L_n^α через такой же интеграл для L_{n-1}^α. Многократно применяя полученную формулу, найдём

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2\, dx &= \frac{n+\alpha}{n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_{n-1}^\alpha(x)]^2\, dx \\ &= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)}{n(n-1)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_{n-2}^\alpha(x)]^2\, dx = \dots \\ &= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+2)}{n(n-1)\dots 3\cdot 2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_1^\alpha(x)]^2\, dx. \end{aligned}$$

Теперь мы сможем закончить это вычисление, если используем явный вид многочлена Лагерра первой степени $L_1^\alpha(x) = 1 + \alpha - x$, определение гамма — функции $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$ и её основное функциональное свойство $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$:

$$\frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+2)}{n(n-1)\ldots 3\cdot 2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^\alpha [L_1^\alpha(x)]^2\, dx$$

$$= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+2)}{n!}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^\alpha[(1+\alpha)^2 - 2(1+\alpha)x + x^2]\, dx$$

$$= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+2)}{n!}[(1+\alpha)^2\Gamma(\alpha+1) - 2(1+\alpha)\Gamma(\alpha+2) + \Gamma(\alpha+3)]$$

$$= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+2)}{n!}\Gamma(\alpha+1)[(1+\alpha)^2 - 2(1+\alpha)^2 + (2+\alpha)(1+\alpha)]$$

$$= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+2)(\alpha+1)}{n!}\Gamma(\alpha+1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

Тем самым мы нашли норму многочлена Лагерра L_n^α при $n = 2$, $3, \ldots$. Прямая проверка показывает, что это же выражение годится для $n = 0$, 1.

Задачи

42. Доказать, что $x[y_n'(x)y_m(x) - y_m'(x)y_n(x)] = O(x^{1+\alpha})$ при $x \to +0$, где y_n — функция Лагерра. Другими словами, доказать, что величина

$$\frac{x[y_n'(x)y_m(x) - y_m'(x)y_n(x)]}{x^{1+\alpha}}$$

остаётся ограниченной при x стремящемся к нулю справа.

43. Прямой проверкой убедиться, что формула

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$$

справедлива при $n = 0$ и $n = 1$.

44. Используя задачу 4, доказать формулы

$$L_n^{-1/2}(x^2) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!} H_{2n}(x),$$

$$L_n^{1/2}(x^2) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n!} \frac{H_{2n+1}(x)}{x}.$$

§ 20. Разложение функций в ряды по многочленам Лагерра

Теорема. *Если для кусочно-гладкой функции $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ интеграл*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha} [f(x)]^2 \, dx$$

имеет конечное значение, то в каждой точке x непрерывности функции f имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{\alpha}(x),$$

где $c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(x) f(x) \, dx$.

При первом знакомстве с предметом нам кажется излишним приводить доказательство этой теоремы. Наиболее же дотошные читатели могут найти его, отправляясь от книги Н. Н. Лебедева “Специальные функции и их приложения,” стр. 144 .

Следующие примеры иллюстрируют два основных приёма разложения конкретных функций в ряды по многочленам Лагерра.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^{\beta}$, $x > 0$.

Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha} x^{2\beta} \, dx$$

имеет две особые точки: 0 и $+\infty$. На бесконечности он, очевидно, сходится при любых α и β. В нуле же он сходится, если и только если $\alpha + 2\beta > -1$. Значит при $\beta > -(1 + \alpha)/2$ выполнены условия теоремы и для всех $x \in (0, +\infty)$ справедливо равенство

$$x^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x),$$

где $c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+\beta} L_n^\alpha(x)\, dx$. Воспользовавшись формулой Родрига, а затем интегрируя n раз по частям, будем иметь

$$c_n = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^{+\infty} x^\beta \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x} x^{n+\alpha}]\, dx$$

$$= -\frac{\beta}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^{+\infty} x^{\beta-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[e^{-x} x^{n+\alpha}]\, dx = \ldots$$

$$= (-1)^n \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+\beta}\, dx.$$

Используя определение гамма — функции и её основное функциональное свойство, можем преобразовать последнее выражение к виду

$$c_n = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta-n+1)}.$$

Таким образом, при $\alpha > -1$, $\beta > -(1+\alpha)/2$ и для каждого $x \in (0, +\infty)$ имеет место равенство

$$x^\beta = \Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta-n+1)}.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = e^{-ax}$, $x > 0$.

Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha e^{-2ax}\, dx$$

сходится в нуле при $\alpha > -1$, а на бесконечности — при $\alpha > -1/2$. Следовательно, при выполнении этих неравенств, функция f разлагается в ряд по многочленам Лагерра. Как и в предыдущем примере, коэффициенты разложения можно найти, вычисляя соответствующие интегралы. Но в данном случае проще в равенстве для производящей функции

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)t^n$$

положить $t = a/(a+1)$. Тогда $1-t = 1/(a+1)$, $t/(1-t) = a$ и, следовательно,

$$(a+1)^{\alpha+1}e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\left(\frac{a}{a+1}\right)^n.$$

Откуда и находится искомое разложение

$$e^{-ax} = (a+1)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^n L_n^{\alpha}(x).$$

Задача

45. Разложить в ряд по многочленам Лагерра функцию $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

§ 21 Функции Лагерра

Определённые при $x > 0$ и $\alpha > -1$ функции $y_n^{\alpha}(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2} \times L_n^{\alpha}(x)$, $n = 0, 1, \ldots,$ называются *функциями Лагерра.* Следующие их свойства являются простой переформулировкой известных нам свойств многочленов Лагерра и в доказательстве не нуждаются:

1) *Функции Лагерра ортогональны на интервале* $(0, +\infty)$ *с весом единица*

$$\int_0^{+\infty} y_n^{\alpha}(x)y_m^{\alpha}(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ \Gamma(n+\alpha+1)/n!, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

2) *Всякая непрерывно дифференцируемая функция* f, *интегрируемая с квадратом на интервале* $(0, +\infty)$, *может быть разложена в ряд по функциям Лагерра*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n^{\alpha}(x), \qquad 0 < x < +\infty,$$

где

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int\limits_0^{+\infty} f(x) y_n^\alpha(x)\, dx.$$

3) *Введя обозначения* $\lambda_n^\alpha = n + (1+\alpha)/2$, *можем утверждать, что функция Лагерра* $y_n^\alpha(x)$ *является частным решением уравнения*

$$xy'' + y' + \left[\lambda - x/4 - \alpha^2/4x\right] y = 0 \tag{22}$$

при $\lambda = \lambda_n^\alpha$ (см. задачу 40). Более того, действуя по аналогии с изложенным в параграфе 16, можно показать, что *если при фиксированном* α *число* λ *не равняется ни одному из чисел* λ_n^α, *то уравнение* (22) *не имеет ненулевых решений, интегрируемых с квадратом на интервале* $(0, +\infty)$.

Оказывается, что именно функции Лагерра решают задачу квантования электрона в кулоновом потенциале, а также задачу квантования трёхмерного гармонического осциллятора. Но с технической точки зрения изложение этих вопросов целесообразно отложить до знакомства со свойствами сферических функций.

Содержание