Теория игр в топологии

Содержание

Рассмотрим общую схему, как игры используются в топологии. То есть как используя игры доказывать теоремы в топологии.

Применение топологических игр. Сети и базы.

Сравнительно несложно доказываются утверждения вида:

(1) $(P) \implies$ игра δ-благоприятна

Если в пространстве X выполняется некоторое свойство (P), то X благоприятно для некоторого игрока $\delta \in P$ в некоторой топологической игре G.

Используем свойство (P) и строим выигрышную стратегию для игрока δ. Двойственное утверждение:

(2) игра δ-неблагоприятна $\implies (Q)$

Если X не благоприятна для δ в игре G, то для X выполняется свойство (Q)$= \neg$(P).

Труднее доказывать утверждения вида

(3) $(P) \implies$ игра δ-неблагоприятна

Если в пространстве X выполняется свойство (P), то X не благоприятно для игрока $\delta \in P$ в игре G.

(4) игра δ-благоприятна $\implies (Q)$

Если X благоприятна для δ в игре G, то для X выполняется свойство (Q)$= \neg$(P).

Стандартная схема использования игр:

$$(A) \implies \text{что то про игры} \implies (B)$$

Либо первая либо вторая импликация будет вида (3) или (4). То есть реализуеться одна из схем:

(I) $(A) \underset{(1)}{\implies}$ игра δ-благоприятна $\underset{(4)}{\implies} (B)$

(II) $(A) \underset{(3)}{\implies}$ игра δ-неблагоприятна $\underset{(2)}{\implies} (B)$

Тут сложные импликации вида (3) и (4). Эти импликации двойственны.

Как доказывать (4)

Общая схема доказательства

(4) игра δ-благоприятна $\Longrightarrow$ (Q)

Играют игроки δ и κ. "Простой" способ доказательства (4) состоит в доказательтве

игра δ-благоприятна $\Longrightarrow$ игра κ-неблагоприятна $\Longrightarrow$ (Q)

Но такое доказательство не существенно облегчают доказательства $(A) \Longrightarrow (B)$, так как сводит схему (I) к схеме (II).

Схема

$(A) \Longrightarrow$ игра δ-благоприятна $\Longrightarrow$ игра κ-неблагоприятна $\Longrightarrow$ (B)

также испольлзуеться, например, при доказательстве того что $\mathbb{I}$ являеться тучным пространством.

Более сложен но и более полезен способ:

1. Берем выигрышную стратегию s для игрока δ.
2. Строим специальным способом семейство стратегий $\{q_\alpha : \alpha \in A\}$ для игрока κ.
3. Получаем семейство партий $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$, выигрышных для игрока δ, $p_\alpha = p(s, q_\alpha)$.
4. Семейство партий $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$ используем для доказательства свойства (Q).

Используем эту схему в характеризации пространств, в которых игрок β выигрывет в игре Банаха Мазура.

Пусть X пространство и $\mathcal{V}$ семейство непустых подмножеств X. Семейство $\mathcal{V}$ называется

1. *сетью* X, если для любого $x \in X$ и окрестности $U \ni x$ существут $V \in \mathcal{V}$, $x \in V \subset U$;
2. π*-сетью* X, если для любого открытого непустого $U \subset X$ существут $V \in \mathcal{V}$, $V \subset U$;
3. *базой* X, если $\mathcal{V}$ состоит из открытых множеств и является сетью X;
4. π*-базой* X, если $\mathcal{V}$ состоит из открытых множеств и является π-сетью X.

Семейство множеств $\mathcal{P}$ называеться *дизьюнктным семейством*, если $A \cap B = \varnothing$ для различных $A, B \in \mathcal{P}$.

Theorem 2.1.

Пусть X пространство и $\mathcal{V}$ есть π-сеть. Тогда существует $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$, так что

1. $\overline{\bigcup \mathcal{P}} = X$;
2. *семейство $\mathcal{P}$ являеться дизьюнктным семейством.*

Доказательство для счетного $\mathcal{V}$

Докажем теорему сначала для случая, когда множество $\mathcal{V}$ счетно, $\mathcal{V} = \{M_n : n < \omega\}$. Построим $\mathcal{P} = \{M_{n_k} : k < \omega\} \subset \mathcal{V}$ с помощью индукции.

База индукции, $k = 0$. $n_0 = 0$.

Шаг индукции, $k > 0$. Пусть $M = M_{n_0} \cup M_{n_0} \cup M_{n_1} \cup ... \cup M_{n_{k-1}}$. Если $\overline{M} = X$, то положим $\mathcal{P} = \{M_{n_0}, M_{n_0}, M_{n_1}, ..., M_{n_{k-1}}\}$ и теорема доказана.

Положим $U = X \setminus \overline{M} \neq \varnothing$, $N_k = \{i < \omega : M_i \subset U\}$. Так как $\mathcal{V}$ есть сеть, то $N_k \neq \varnothing$. Положим $n_k = \min N_k = \min\{i : i \in N_k\}$. Последовательность n_k возрастающая.
Покажем, что $M = \bigcup \mathcal{P} = \bigcup_{k<\omega} M_{n_k}$ плотно в X, то есть $\overline{M} = X$. Предположим противное. Тогда $U = X \setminus \overline{M}$ открыто и не пусто. Так как $\mathcal{V}$ есть π-сеть, то $M_l \subset U$ для некоторого $l < \omega$. Существует k, для которого $l < n_k$. Противоречие, так как $l \in N_k$ и $l < n_k = \min N_k$.

Лемма Цорна

Существует несколько альтернативных формулировок леммы Цорна.
Основная: если в частично упорядоченном множестве M для всякого линейного упорядоченного подмножества существует верхняя грань, то в M существует максимальный элемент.
В приложениях наиболее удобна формулировка, утверждающая существование максимального элемента, который не меньше заданного: если всякая цепь в частично упорядоченном множестве M имеет верхнюю грань, то всякий элемент из M предшествует некоторому максимальному.

В оригинальной статье 1935 года Цорн сформулировал утверждение для множеств, частично упорядоченных по отношению включения: если семейство множеств $\mathfrak{M}$ обладает тем свойством, что объединение любой цепи множеств из $\mathfrak{M}$ есть снова множество из этого семейства, то $\mathfrak{M}$ содержит максимальное множество.
Семейство $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}$ называеться *цепью*, если для любых $A, B \in \mathcal{M}$ либо $A \subset B$ либо $B \subset A$.

Доказательство в общем случае.

Положим

$$\mathfrak{M} = \{\mathcal{M} \subset \mathcal{V} : \mathcal{M} \text{ есть дизьюнектное семейство}\}.$$

Объеденение цепи в $\mathfrak{M}$ снова будет дизьюнктным семейством, то есть будет принадлежать $\mathfrak{M}$. Применим лемму Цорна и возмем $\mathcal{P} \in \mathfrak{M}$ максимальный элемент. Покажем, что $M = \bigcup \mathcal{P}$ плотно в X. Предположим противное. Пусть $U = X \setminus \overline{M} \neq = \varnothing$. Так как $\mathcal{V}$ есть π-сеть, то существует $P \in \mathcal{V}$, так что $P \subset U$. Тогда $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{P\} \in \mathfrak{M}$ и $\mathcal{P}'$ строго больше $\mathcal{P}$. Противоречие с максимальностью $\mathcal{P}$.