Кривые второго порядка

Задачка 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$(2 \;\; -1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (4 \;\; 1 \;\; -1)$$

$$\begin{array}{l} \vec{a_1} \rightarrow \\ \vec{a_2} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{b_1} & \vec{b_2} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_2} \\ \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_2} \end{bmatrix}$$

Задачка 2

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ \ y)\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x + 7y \end{pmatrix} =$$

$$= 2x^2 + 3xy + 5xy + 7y^2 = 2x^2 + 8xy + 7y^2$$

Задачка 2

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ \ y)\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x + 7y \end{pmatrix} =$$

$$= 2x^2 + 3xy + 5xy + 7y^2 = 2x^2 + 8xy + 7y^2$$

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2$$

Задачка 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(x \;\; y)\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \;\; y)\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x + 7y \end{pmatrix} =$$

$$= 2x^2 + 3xy + 5xy + 7y^2 = 2x^2 + 8xy + 7y^2$$

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + \boxed{(a_{12} + a_{21})}xy + a_{22}y^2$$

$$2 \cdot \frac{a_{12} + a_{21}}{2}$$

Задачка 3

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$(a_1\ \ a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1x + a_2y$$

Транспонирование

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Свойства:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Симметричная матрица

$$A^T = A$$

Примеры:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Кососимметричная матрица

$$A^T = -A$$

Примеры:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Общее уравнение

Кривая второго порядка – ГМТ плоскости, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$$

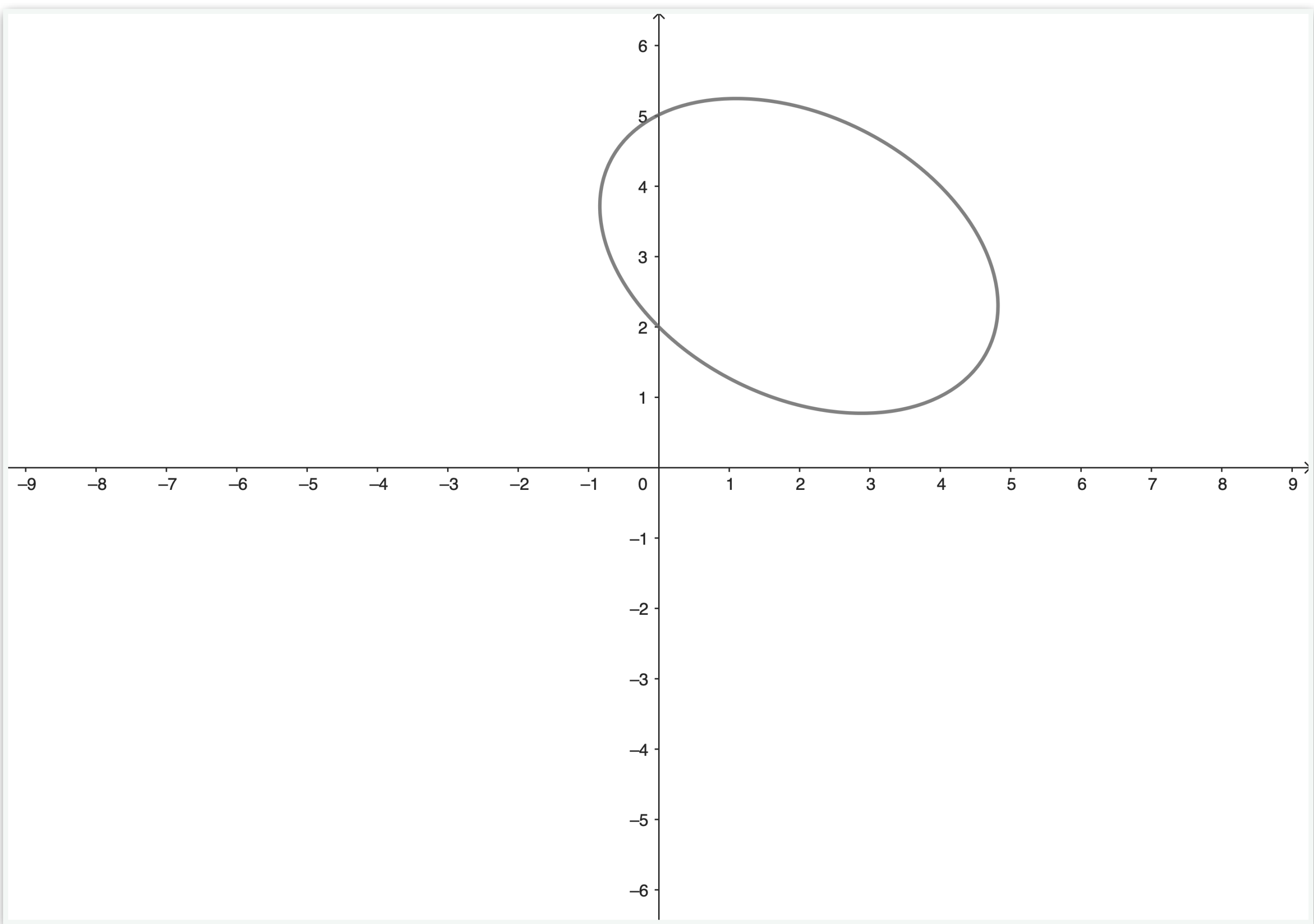
$$\Downarrow$$

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a_1\ \ a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

Задача 1

№ 807 (1)

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$



Алгоритм

Поворот

↓

Параллельный перенос

↓

Поворот (если надо)

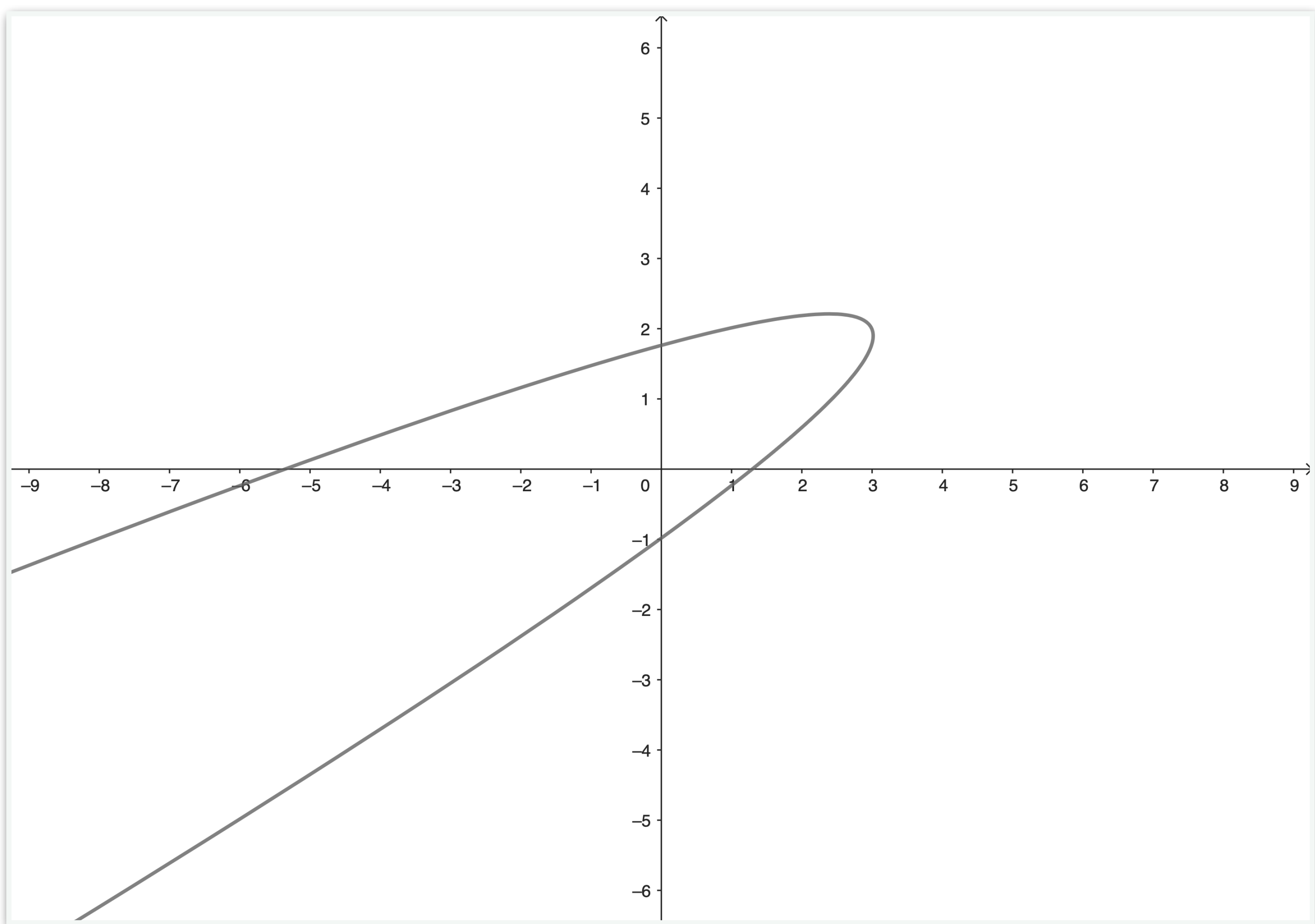
↓

Ответ

Задача 2

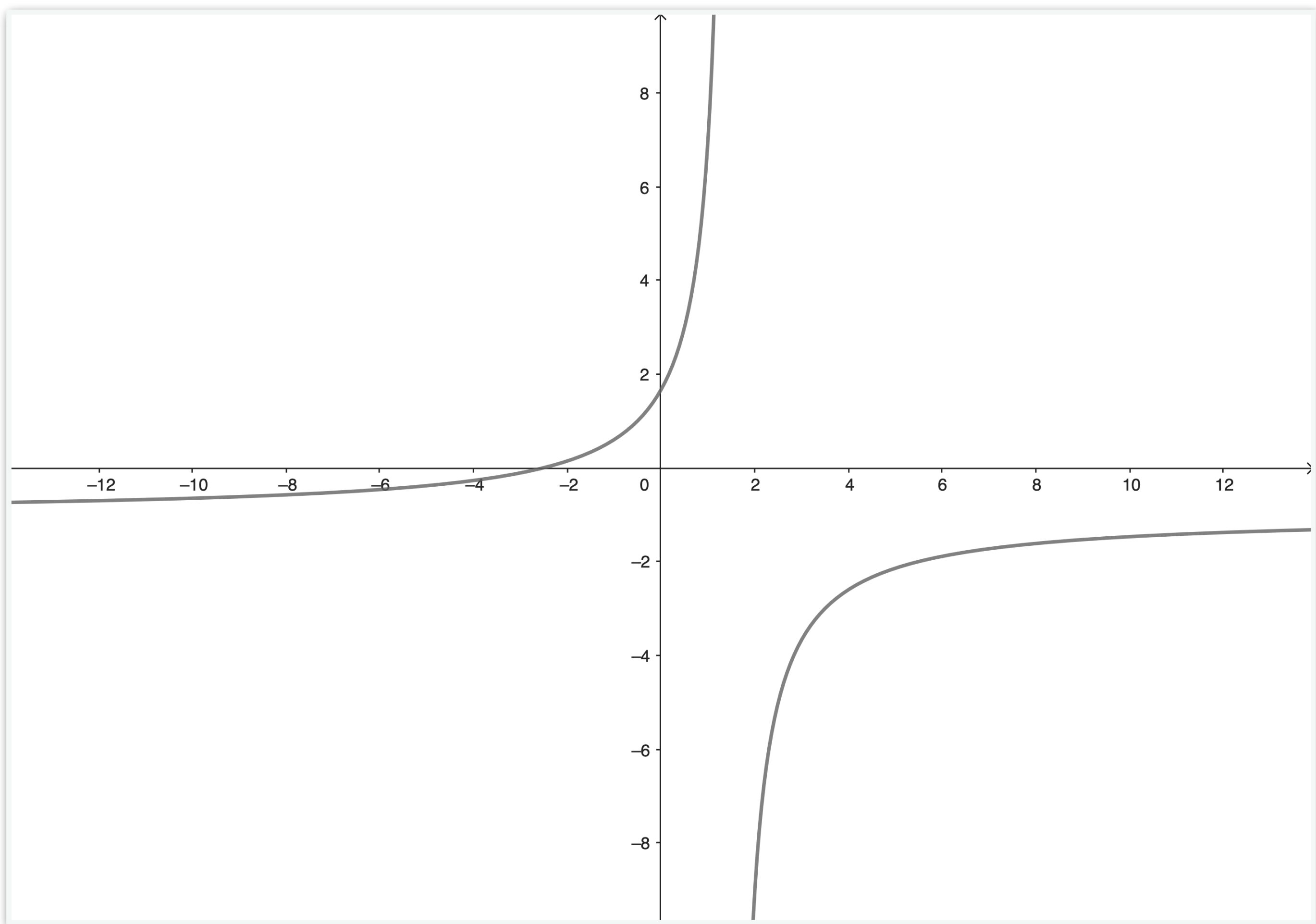
№ 807 (3)

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$



Задача 3

$$2xy + 2x - 3y + 5 = 0$$



Замечание

Задание 2 (сдать до 6 ноября)
Вариант 1

1. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

2. Эллипс, гипербола и парабола заданы своими каноническими уравнениями. Из точки (x_0, y_0) вне данной кривой к ней проведены две касательные. Найти уравнение прямой, проходящей через обе точки касания.

3. Доказать, что сумма обратных величин длин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

4. Найти формулы преобразования прямоугольных координат в пространстве, если начала двух систем различны, а концы единичных базисных векторов совпадают.

5. Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x + 9y + 7 = 0$;
(b) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$.

6. Запишите в тригонометрической форме следующие числа, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 + i \operatorname{ctg} \alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i \sin\alpha)^{21}; \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{18}; \quad \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} + 2i}{1 - i}}.$$

7. Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^5 x$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных x.

8. Применяя комплексные числа, доказать при $x \neq 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, равенство

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

9. Доказать, что многочлен $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на многочлен x^2+x+1 при всех $m, n, p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

10*. Комплексные переменные z и w связаны соотношением $z+z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает w, когда z пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;
(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.