Вариант 1

1. В правой аффинной системе координат ($\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$) дан метрический тензор $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -5 \\ -6 & -5 & 11 \end{pmatrix}$ и заданы ковекторы $\mathbf{u} = \mathbf{e^1} + 3\,\mathbf{e^2} + \mathbf{e^3}$, $\mathbf{v} = \mathbf{e^1} + \mathbf{e^2} + \mathbf{e^3}$. Вычислить w_3, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathbf{rot}\,\mathbf{a})_1$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (3\,v + w, 5\,u + w^2, u - v)$, а координаты u, v, w связаны с декартовыми соотношениями (система координат правая)
$x = (u^2 - v)/2$, $y = (u + 2)v$, $z = w + u$.

3. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в некоторой точке тензор T имеет вид
$T = (T_i^j) = \mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^1} + 3\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^2} + 5\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^1} + 7\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^2} + 189\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e^2} + 981\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^3} + 9\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e^3}$. Выписать координаты T_i^j тензора T. Найти координату $T_{2'}^{1'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^1/\partial x^{3'} \\ \partial x^2/\partial x^{1'} & \partial x^2/\partial x^{2'} & \partial x^2/\partial x^{3'} \\ \partial x^3/\partial x^{1'} & \partial x^3/\partial x^{2'} & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\,x^{1'}} & -2\,x^{2'} & 0 \\ x^{1'} & \mathrm{e}^{x^{2'}} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Для криволинейной системы координат (x^1, x^2), связанной с декартовой соотношениями $x = \cos x^1 \operatorname{ch} 2\,x^2$, $y = -\sin x^1 \operatorname{sh} 2\,x^2$, $x^1 > 0$, $x^2 > 0$, вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{2,21}$.

5. Найти компоненту $T_{11\cdot}^{\cdot\cdot 2}$ тензора $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \nabla_i S_{j\cdot}^{\cdot k}$, где
$S = (S_{j\cdot}^{\cdot k}) = x^1\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^1} + 3x^2\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^2} + (\cos x^1 + x^2)\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^1} + (x^1 + x^2)\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^2}$. Выписать координаты $S_{j\cdot}^{\cdot k}$ тензора S. Символы Кристоффеля:
$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \dfrac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$; $\Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \dfrac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$.

Вариант 2.

1. В правой аффинной системе координат ($\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$) дан метрический тензор $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ -5 & 11 & -6 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ и заданы ковекторы $\mathbf{u} = 3\,\mathbf{e^1} + \mathbf{e^2} + \mathbf{e^3}$, $\mathbf{v} = \mathbf{e^1} + 2\,\mathbf{e^3}$. Вычислить w_2, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\mathbf{rot}\,\mathbf{a})_2$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (v^2 + w^2, 2\,u^2 + w, u + 2\,v)$, а координаты u, v, w связаны с декартовыми соотношениями (система координат правая)
$x = (u - v^2)/2$, $y = u(v + 1)$, $z = w + v$.

3. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в некоторой точке тензор T имеет вид $T = (T_i^j) = 2\,\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^1} + 4\,\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^2} + 6\,\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^1} + 8\,\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^2} + 148\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e^2} + 841\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^3} + 10\,\mathbf{e_3} \otimes \mathbf{e^3}$. Выписать координаты T_i^j тензора T. Найти координату $T_{1'}^{2'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^1/\partial x^{3'} \\ \partial x^2/\partial x^{1'} & \partial x^2/\partial x^{2'} & \partial x^2/\partial x^{3'} \\ \partial x^3/\partial x^{1'} & \partial x^3/\partial x^{2'} & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4\,x^{1'}} & -x^{2'} & 0 \\ 3\,x^{1'} & \mathrm{e}^{x^{2'}} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Для криволинейной системы координат (x^1, x^2), связанной с декартовой соотношениями $x = \cos x^1 \operatorname{ch} 3\,x^2$, $y = -\sin x^1 \operatorname{sh} 3\,x^2$,, $x^1 > 0$, $x^2 > 0$, вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{1,21}$.

5. Найти компоненту $T_{22\cdot}^{\cdot\cdot 1}$ тензора $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \nabla_i S_{j\cdot}^{\cdot k}$, где
$S = (S_{j\cdot}^{\cdot k}) = x^1\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^1} + 2\,\sin x^2\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e^2} + 5x^1\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^1} + (x^1 + \cos x^2)\mathbf{e_2} \otimes \mathbf{e^2}$. Выписать координаты $S_{j\cdot}^{\cdot k}$ тензора S. Символы Кристоффеля:
$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \dfrac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$; $\Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \dfrac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$.