ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Лектор — Эдуард Витальевич Арбузов

Программа курса лекций
(3-й семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экзамен)

1. Интегралы и ряды Фурье

1.1 Теорема о представлении функций интегралами и рядами Фурье.
 1.1.1 Лемма Римана-Лебега.
 1.1.2 Доказательство теоремы Фурье.
 1.1.3 Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.
 1.1.4 Разложение функции в ряд Фурье без вычисления интегралов.
1.2 Вещественная форма интегралов и рядов Фурье.
 1.2.1 Интеграл Фурье в вещественной форме.
 1.2.2 Ряд Фурье в вещественной форме.
 1.2.3 Интегралы и ряды Фурье для чётных и нечётных функций.
 1.2.4 Амплитудный и фазовый спектры.
1.3. Преобразование Фурье.
 1.3.1 Прямое и обратное преобразование Фурье.
 1.3.2 Синус- и косинус-преобразования Фурье.
 1.3.3 Различные формы записи преобразования Фурье.
 1.3.4 Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$.
 1.3.5 Преобразование Фурье-Бесселя.

2. Свойства преобразования Фурье и коэффициентов рядов Фурье

2.1 Непрерывность, ограниченность, асимптотическое поведение.
2.2 Линейная замена переменной в преобразовании Фурье.
2.3 Неравенство Бесселя.
2.4 Ряды и преобразование Фурье и операция дифференцирования.
 2.4.1 Преобразование Фурье от производных функции.
 2.4.2 Коэффициенты ряда Фурье для производной функции.
 2.4.3 Дифференцирование преобразования Фурье.
 2.4.4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.

3. Сходимость рядов Фурье

3.1 Равномерная сходимость рядов Фурье.
3.2 Равенство Ляпунова.
3.3 Скорость сходимости рядов Фурье.
3.4 Явление Гиббса.

4. Свёртка функций

4.1 Преобразование Фурье от произведения функций.
4.2 Определение и свойства свёртки.
4.3 Преобразование Фурье от свёртки функций.
4.4 Свёртка и обратное преобразование Фурье.
4.5 Фильтрующие свойства свёртки.
4.5.1 Приближение непрерывных функций дифференцируемыми.
4.5.2 Приближение абсолютно интегрируемых функций бесконечно дифференцируемыми.
4.5.3 Приближение функций, интегрируемых с квадратом модуля, финитными бесконечно дифференцируемыми функциями.

5. Преобразование Лапласа

5.1 Оригиналы и изображения.
5.2 Свойства подобия, смещения изображения, запаздывания оригинала, свёртка оригиналов.
5.3 Преобразование Лапласа производных и интегралов.
5.4 Дифференцирование и интегрирование изображений.
5.5 Аналитичность изображения, формула обращения.
5.6 Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

6. Преобразование Фурье быстро убывающих функций

6.1 Быстро убывающие функции.
6.2 Преобразование Фурье быстро убывающих функций.
6.3 Формула Пуассона.
6.4 Преобразование Фурье функций, интегрируемых с квадратом.
6.4.1 Теорема Планшереля.
6.4.2 Корреляционная функция. Автокорреляция.

7. Обобщённые функции

7.1 Моделирование сингулярных объектов. Дельта-образующие последовательности, δ-функция Дирака.
7.2 Пространства основных и обобщённых функций. Регулярные и сингулярные обобщённые функции.
7.3 Примеры обобщённых функций.
7.4 Сходимость последовательности обобщённых функций. Формулы Сохоцкого.

7.5 Свойства обобщённых функций.

7.5.1 Линейная замена переменной в обобщённой функции.

7.5.2 Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые. Невозможность умножения двух произвольных обобщённых функций.

7.5.3 Дифференцирование обобщённых функций. Теорема о связи классической и обобщённой производных для кусочно-гладкой функции. Плотность заряда электрического диполя.

7.5.4 Свёртка обобщённых функций. Пример, показывающий, что свёртка не ассоциативна.

7.6 Фундаментальные решения дифференциальных уранений.

7.6.1 Теорема о фундаментальном решении линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

7.6.2 Частные решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

7.6.3 Вычисление фундаментального решения трёхмерного оператора Лапласа.

7.7 Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста.

7.7.1 Формула Фурье.

7.7.2 Дифференцирование и преобразование Фурье.

7.7.3 Свёртка и преобразование Фурье обобщённых функций.

7.7.4 Примеры преобразования Фурье обобщённых функций.

7.8 Ряд Фурье периодических функций как формула Фурье в пространстве обобщённых функций медленного роста.

8. Некоторые приложения преобразования Фурье

8.1 Применение метода Фурье к решению задач для уравнений в частных производных

8.1.1 Применение метода разделения переменных для решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в случае ограниченного интервала.

8.1.2 Задача Коши для уравнения теплопроводности на неограниченном интервале.

8.1.3 Фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

8.1.4 Задача Дирихле в полуплоскости.

8.2 Задача о наилучшем приближении тригонометрическими многочленами.

8.3 Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции полиномами.

8.4 Соотношение неопределённости.

8.5 Цифровая обработка сигналов.

8.5.1 Функция отсчётов.

8.5.2 Теорема Котельникова — Шеннона.

8.5.3 Преобразование Фурье и свойства функции выборки.

Литература

Учебные и методические пособия, изданные в НГУ, доступны в электронном виде на сайте кафедры `http://www.phys.nsu.ru/ok03`

Основная литература:

1. *Александров В.А.* Ряды Фурье: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
2. *Александров В.А.* Преобразование Фурье: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2002.
3. *Александров В.А.* Преобразование Лапласа. Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1992.
4. *Александров В.А.* Обобщённые функции: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2005.
5. *Бельхеева Р.К.* Ряды Фурье в примерах и задачах: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2011.
6. *Бельхеева Р.К.* Преобразование Фурье в примерах и задачах: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2014.
7. *Бельхеева Р.К.* Обобщённые функции в примерах и задачах: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2014.

Дополнительная литература:

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
2. *Зорич В.А.* Математический анализ. М.: Наука, 1984. Т. 2.
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 3.
5. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.

План семинаров

1-й семинар. — Разложение 2π-периодических функций в ряд Фурье. Суммирование числовых рядов с помощью рядов Фурье.

2-й семинар. — Разложение только по синусам или только по косинусам. Симметрии графика 2π-периодической функции и свойства её коэффициентов Фурье.

3-й семинар. — Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом.

4-й семинар. — Комплексная форма ряда Фурье. Разложение функций в ряд Фурье без вычисления интегралов.

5-й семинар. — Равенство Ляпунова. Суммирование числовых рядов с помощью равенства Ляпунова.

6-й семинар. — Представление функции её интегралом Фурье. Разложение на полупрямой.

7-й семинар.— Преобразование Фурье и его общие свойства: сдвиг по фазе, сдвиг по аргументу, производная от преобразования Фурье и преобразование Фурье от производной. Нахождение преобразования Фурье конкретных функций.

8-й семинар. — Нахождение преобразования Фурье конкретных функций.

9-й семинар. — Свёртка. Формула Пуассона и её применение к суммированию числовых рядов.

10-й семинар. — Оригиналы и изображения, определение преобразования Лапласа. Нахождение преобразования Лапласа конкретных функций и помощью определения. Теоремы подобия и смещения, дифференцирование и интегрирование изображений и оригиналов.

11-й семинар. — Нахождение преобразования Лапласа конкретных функций с помощью теорем подобия и смещения, дифференцирования и интегрирования изображений и оригиналов.

12-й семинар. — Запаздывание и свёртка оригиналов. Решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

13-й семинар. — Основные и обобщённые функции. Сходимость обобщённых функций.

14-й семинар. — Дифференцирование обобщённых функций. Применение теоремы о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального оператора.

15-й семинар. — Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые. Линейная и нелинейная замены переменных в обобщённых функциях. Свёртка обобщённых функций.

16-й семинар. — Обобщённые функции медленного роста и преобразование Фурье от них. Повторный разбор наиболее трудных вопросов из предыдущих семинаров.

Задания по основам функционального анализа

Задание 1 *(сдать до 16 октября)*

Ряды Фурье

1. Для функции $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0, \end{cases}$ предполагая, что она имеет период 2π, нарисуйте график и найдите её ряд Фурье.

2. Представьте функцию $f(x) = x^2$ в виде ряда Фурье по косинусам в интервале $(0, \pi)$.

3. Используя результат предыдущей задачи, найдите суммы следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

4. Представьте функцию $\ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ в виде комплексного, а затем в виде вещественного ряда Фурье. Здесь a — вещественный параметр, такой что $|a| > 1$.

5. Разложите функцию $f(x) = \cos(\pi x/2)$ в ряд Фурье в интервале $(-1, 1)$.

6. Разложите в ряд Фурье в комплексной форме 2π-периодическую функцию, заданную формулой $f(x) = e^{-2x}$ в интервале $x \in (-\pi, \pi)$. Пусть $S(x)$ обозначает сумму полученного ряда Фурье„ вычисленную в точке x. Найдите $S(3\pi)$. Ответ обоснуйте.

7. Напишите равенство Ляпунова для функции $f(x) = \sin ax$, $x \in (-\pi, \pi)$, где a — вещественный параметр.

8. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0, \pi]$. Докажите, что при выполнении условия $f(0) = f(\pi) = 0$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^{\pi} [f(x)]^2\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi} [f'(x)]^2\, dx,$$

называемое *неравенством Стеклова.* Объясните почему оно превращается в равенство лишь для функций вида $f(x) = b\sin x$, где b — произвольное вещественное число.

9. Пусть квадраты функций f и g интегрируемы на интервале $(-\pi, \pi)$ и пусть a_n, b_n, c_n и $\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n, \widetilde{c}_n$ — коэффициенты рядов Фурье в вещественном и комплексном виде для функций f и g соответственно. Покажите справедливость обобщённого равенства Ляпунова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \pi(\frac{a_0\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\widetilde{a}_n + b_n\widetilde{b}_n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{\widetilde{c}_n}.$$

Как будет выглядеть аналог данного равенства в случае комплекснозначных функций?

Задачи 10*, 11* не являются обязательными. Они принимаются только у тех студентов, кто сдал **в срок (!)** все обязательные задачи 1-9 из данного задания. Решения задачи 10* и 11* принимаются до 30-го декабря 2023 года и за решение каждой из них студент получает 15 баллов!

10*. Найдите решение $u(t, x)$ уравнения колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, предполагая, что концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$, и зная её начальное положение $u(0, x) = f(x)$ и скорость в каждой точке $u_t(0, x) = g(x)$. Как можно задать эти условия для щипковых и ударно-клавишных струнных музыкальных инструментов?

11*. Применяя метод Фурье, найдите решение задачи Дирихле в круге

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < R^2,$$

$$u(x, y) = f(x, y), \quad x^2 + y^2 = R^2,$$

и получите формулу Пуассона

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \psi) + \rho^2} f(\psi) d\psi,$$

где ρ, φ - полярные координаты.

Задание 2 *(сдать до 20 ноября)*

Преобразование Фурье

1. Используя интегральную формулу Фурье, докажите равенство

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 y}{y^2}\cos 2xy\; dy = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

2. Решите интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} f(y)\sin xy\, dy = xe^{-x^2}.$$

3. Вычислите преобразование Фурье функции

$$f(x,y) = rect_a(x)\cdot rect_b(y),$$

где функция

$$rect_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

определяет прямоугольный сигнал шириной $2a$.

4. Для функции $f_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{cx}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где $\Gamma(a)$– гамма-функция, докажите равенство $f_a * f_b = f_{a+b}, \quad a, b > 0$.

5. Найдите обратное преобразование Фурье для функции $f(x) = \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2$, и вычислите интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 ax}{x^2}dx$.

6. С помощью формулы Пуассона докажите следующее соотношение, называемое *θ-формулой* и играющее важную роль в теории эллиптических функций и теории теплопроводности

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-an^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a}n^2}.$$

Здесь a — вещественный положительный параметр.

7. Для скалярного поля $u(x,y,z)$ и векторного поля $F(x,y,z)$ найдите Фурье-образы ∇u, $\mathrm{div} F$, $\mathrm{rot} F$, Δu.

8. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = e^{ix^2}$.

9. Рассмотрим быстро убывающую функцию $\varphi(x)$ вещественной переменной x и её преобразование Фурье $\psi(p)$, которое, как вы знаете, тоже быстро убывает с ростом модуля p. Будем считать, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ имеют одинаковую L_2-норму; более того, будем считать, что она равна единице, т. е. допустим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p)|^2\,dp = 1.$$

В таком случае мы вправе считать функции $|\varphi(x)|^2$ и $|\psi(p)|^2$ плотностями распределения вероятностей случайных величин x и p. В курсе квантовой механики будет показано, что эти случайные величины, в свою очередь, можно интерпретировать, как координату и импульс «одномерной» квантовой частицы.

Интегралы

$$x_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\varphi(x)|^2\,dx \quad \text{и} \quad p_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p\,|\psi(p)|^2\,dp$$

имеют смысл средних значений случайных величин x и p при заданных их распределениях, а степень «разброса» этих величин около их средних значений характеризуют их среднеквадратические отклонения — положительные числа $\sigma(\varphi)$ и $\sigma(\psi)$, определяемые равенствами

$$\sigma^2(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2\,|\varphi(x)|^2\,dx \quad \text{и} \quad \sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p-p_0)^2\,|\psi(p)|^2\,dp.$$

Ваша задача — доказать одно из самых красивых и удивительных неравенств, какие можно встретить в математике и которое было открыто физиком:

$$\sigma(\varphi)\,\sigma(\psi) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Это неравенство представляет собой строгое математическое выражение знаменитого принципа неопределённости Гейзенберга, согласно которому нельзя одновременно измерить и координату, и импульс квантовой частицы — уточняя одно, мы непременно теряем информацию о другом.

Доказательство проведите по следующей схеме. Наряду с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ рассмотрим ещё одну пару функций

$$\Phi(x) = e^{-ip_0\,(x+x_0/2)}\,\varphi(x+x_0) \quad \text{и} \quad \Psi(p) = e^{ix_0\,(p+p_0/2)}\,\psi(p+p_0).$$

Иногда говорят, что $\Phi(x)$ и $\Psi(p)$ получены из $\phi(x)$ и $\psi(p)$ «сдвигом и нормировкой». Далее действуйте так:

(a) Покажите, что $\Psi(p)$ служит преобразованием Фурье функции $\Phi(x)$.

(б) Докажите, что новые функции имеют те же L_2-нормы, что и прежние, т. е. докажите, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi\,(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi\,(p)|^2\,dp = 1.$$

(в) Докажите, что относительно новых функций средние значения случайных величин x и p равны нулю, т. е. докажите, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,|\Phi\,(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\,|\Psi(p)|^2\,dp = 0.$$

(г) Убедитесь, что произведённые нами «сдвиг и нормировка» распределений случайных величин x и p не меняют их дисперсий, т. е. докажите, что

$$\sigma^2(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2|\Phi\,(x)|^2\,dx \quad \text{и} \quad \sigma^2\,(\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^2|\Psi(p)|^2\,dp.$$

(д) Опираясь на равенство Парсеваля, а также на связь, которую преобразование Фурье устанавливает между дифференцированием и умножением на аргумент, докажите, что для каждого вещественного t справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |tx\Phi\,(x) + \Phi'(x)|^2\,dx = t^2\sigma^2(\varphi) - t + \sigma^2\,(\psi).$$

(е) Воспользуйтесь тем, что вещественный квадратный многочлен $t^2\sigma^2(\varphi) - t + \sigma^2\,(\psi)$ неотрицателен.

Задачи 10*, 11* не являются обязательными. Они принимаются только у тех студентов, кто сдал **в срок (!)** все обязательные задачи 1-9 из данного задания. Решения задачи 10* и 11* принимаются до 30-го декабря 2023 года и за решение каждой из них студент получает 15 баллов!

10*. Найдите решение $u(t,x) \in S$ задачи Коши для волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x),$$

если функции $f(x), g(x) \in S$, и $x \in (-\infty, \infty)$.

11*. Докажите, что если функции $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$, $g(x) \in L_2(-\infty,\infty)$, то выполняется неравенство Юнга: $||f * g||_{L_2} \leq ||f||_{L_1}||g||_{L_2}$.

Математичекой моделью линейных систем, коммутирующих с оператором сдвига, является интегральный оператор свёртки $Au = k * u$. Ядро этого оператора — функция k, определяет свойства изучаемого объекта, который описывается линейной системой, а неравенство Юнга даёт условие, при котором функция $v = Au$ — реакция системы на воздействие $u \in L_2$, также остаётся функцией из L_2.

Задание 3 *(сдать до 30 декабря)*

Преобразование Лапласа

1. Определите показатели роста и найдите изображения следующих оригиналов:

$$f(t) = \frac{\sin \omega t}{t}, \quad g(t) = \int_t^{\infty} \frac{\sin \omega \tau}{\tau} d\tau.$$

2. По известному изображению

$$F(p) = \frac{p-2}{p^2(p^2+4)},$$

найдите соответствующий ему оригинал $f(t)$.

3. Используя преобразование Лапласа, решите начальную задачу для дифференциального уравнения:

$$y''(t) + y'(t) = \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

4. Используя преобразование Лапласа, решите интегральное уравнение

$$x(t) - e^{-2t} \int_0^t e^{2s} x(s) ds = 1 + t, \quad t > 0.$$

Обобщённые функции

5. Покажите, что регулярные обобщенные функции $\{\delta_a\}$, порожденные функциями

$$\delta_a(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-a^2 y^2}\, dy,$$

при $a \to \infty$ сходятся к δ-функции Дирака.

6. Для обобщённой функции $f(x) = (|x| \cos x) * \delta'$, найдите f', f''.

7. Найдите фундаментальные решения дифференциальных операторов

$$\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2, \quad \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2,$$

и запишите формулы для частных решений соответствующих дифференциальных уравнений.

8. Найдите преобразование Фурье функции $\sin |x|$.

9. Вычислите производную обобщенной функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, и найдите преобразование Фурье обобщенной функции $|x|$.

Задачи 10*, 11* не являются обязательными. Они принимаются только у тех студентов, кто сдал все обязательные задачи 1-9 из данного задания. Решения задачи 10* и 11* принимаются до 30-го декабря 2023 года и за решение каждой из них студент получает 15 баллов!

10*. Применяя преобразование Фурье (по x) и используя полученный в задаче 8 результат, найдите фундаментальное решение волнового уравнения, т.е. решите уравнение:

$$\mathcal{E}_{tt}(t,x) - \omega^2 \mathcal{E}_{xx}(x) = \delta(t,x) = \delta(t)\delta(x).$$

11*. Пусть известны значения функции $G(\omega) = |\widehat{g}(\omega)|^2$, где

$$g(x) = a\delta(x) + f(x), \quad a = const,$$

и вещественнозначная функция $f(x)$ равна нулю вне интервала (x_0, x_0+T).

При каких значениях чисел x_0 и T, по данным $G(\omega)$ можно восстановить функцию $f(x)$?

Правила аттестации студентов
по «Основам функционального анализа»

§1. Контроль работы в семестре

(1) В течение семестра студенту настоятельно рекомендуется сдать своему семинаристу в устной форме задачи 1–9 из приведённых выше заданий (всего 27 задач).

Задачи 10*, 11* из каждого задания не являются обязательными. Они представляют собой приглашение к маленькому самостоятельному исследованию, порой требующему применения методов, изложенных на лекциях, но не изучавшихся на семинарах.

(2) За каждую задачу (кроме задачи 9 из задания 2), полностью сданную в срок, студент получает 6 баллов. За задачу 9 из задания 2 студент получает 12 баллов при условии, что она сдана в срок. За задачу, сданную (полностью или частично) после установленного срока, студент получает ноль баллов.

Задачи 10* и 11* из каждого задания принимаются только у тех студентов, кто сдал **в срок (!)** все обязательные задачи 1-9 из данного задания. Зато решения задачи 10* и 11* принимаются до 30-го декабря 2023 года и за решение каждой из них студент получает 15 баллов!

(3) В конце семестра семинарист оценивает работу каждого студента своей группы и добавляет ему от 0 до 50 баллов в зависимости от того, насколько активно студент решал задачи у доски в классе, домашние задания, контрольные работы и т. п.

(4) Сумма баллов, начисленных студенту в соответствии с пунктами (2) и (3) называется «баллами за работу в семестре». Она сообщается всем студентам до проведения консультации и учитывается при выставлении оценки за экзамен.

(5) Приём задач из задания семинаристами заканчивается с окончанием зачётной сессии, т. е. 30-го декабря 2023 года.

§2. Проведение экзамена

(6) Экзамен проводится в очной или дистанционной форме. Форма проведения экзамена определяется приказом ректора НГУ и/или распоряжением декана физического факультета НГУ накануне сессии. Правила проведения экзамена в очной форме изложены ниже в пунктах (9)–(22). Экзамен в дистанционной форме в целом проводится по тем же правилам; основные изменения изложены ниже в пункте (23).

(7) Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы. При наличии уважительной причины и по предварительному согласованию с лектором в особых случаях допускается сдача экзамена с другой группой. Примером уважительной причины может служить поездка на Всероссийскую студенческую олимпиаду по теоретической механике.

(8) Поскольку по «Основам функционального анализа» не предусмотрен зачёт, то к сдаче экзамена допускаются все студенты (даже те, кто не сдал всех задач из приведённых выше заданий).

(9) Очный экзамен начинается с того, что студент вытягивает экзаменационный билет. Каждый билет содержит три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий и блиц-опрос». Правила сдачи первого вопроса билета и оценивания ответа на него изложены в пунктах (11)–(14). Два других вопроса являются теоретическими вопросами (в частности, они не содержат задач) из программы лекций. Список теоретических вопросов, выносимых на экзамен, выкладывается заранее (до проведения консультации). Правила сдачи второго и третьего вопросов билета и оценивания ответов на них изложены в пунктах (16)–(19).

(10) Если студент не смог ответить хоть на один вопрос билета, то экзамен прекращается (т. е. остальные вопросы билета студент даже не отвечает), а в экзаменационную ведомость ставится оценка «неудовлетворительно».

(11) Ответ по билету всегда начинается с ответа на первый вопрос «Сдача задач из заданий и блиц-опрос», причём на этот вопрос нужно отвечать без подготовки и не своему семинаристу, а любому другому свободному экзаменатору.

(12) Сдача задач из заданий (как часть ответа на первый вопрос билета) не может длиться более 30 минут. При этом студент может (и даже должен) пользоваться своей тетрадью, в которой он заранее решил те из 27 задач из приведённых выше заданий (задачи 1-9), решения которых он не сумел объяснить своему семинаристу во время семестра. Если за 30 минут студент сумел объяснить экзаменатору решения всех своих долгов по заданиям, то он переходит к ответу на блиц-опрос (см. пункт (14) настоящих Правил); в противном случае экзамен заканчивается (см. пункт (10) настоящих Правил), но из долга студента вычёркиваются сданные им на экзамене задачи.

(13) Если студент сдал все задачи 1-9 из заданий до начала экзаменационной сессии (что очень рекомендуется), то первый вопрос сводится для него к блиц-опросу.

(14) Блиц-опрос — это беседа с преподавателем на одну из тем, не вошедших в билет. Во время блиц-опроса экзаменатор задаёт 3–5 вопросов, на которые студент должен отвечать сразу (без подготовки). Цель блиц-опроса в том, чтобы выяснить насколько свободно студент владеет самыми основными понятиями и фактами, изученными в курсе «Основы функционального анализа». Речь идёт только о формулировках теорем и определениях. В этот момент доказательства теорем не спрашивают. По результатам блиц-опроса никаких оценок не ставится и баллы не начисляются. Но для тех студентов, кто не может поддерживать разговор в таком формате экзамен прекращается в соответствии с пунктом (10) настоящих Правил.

(15) Студент, ответивший на первый вопрос билета получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета.

(16) При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета можно пользоваться только собственной головой. Другими словами, при подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами и подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена и отправлены на пересдачу.

(17) Выходить из аудитории до начала ответа на второй и третий вопросы билета нельзя (точнее — выйти можно, а вот снова войти уже нельзя).

(18) Ответы на второй и третий вопросы билета даются любому свободному экзаменатору (не обязательно тому, кто проводил блиц-опрос), но не своему семинаристу. Экзаменатор может задавать сопутствующие вопросы, непосредственно вытекающие из ответа студента на второй и третий вопросы билета. Например, если студент в своём ответе упомянул какую-то теорему, свойство или понятие, то преподаватель может попросить сформулировать эту теорему (или свойство, или понятие) в общем виде и попросить проверить выполяются ли условия этой теоремы в той конкретной ситуации, в связи с которой студент эту теорему упомянул.

(19) В случае необходимости преподаватель может заменить сопутствующий вопрос задачей. Например, вместо того, чтобы спросить «что называется рядом Фурье» он может попросить найти ряд Фурье функции, тождественно равной единице, а вместо того, чтобы спросить «что называется преобразованием Фурье обобщённой функции», он может попросить найти преобразование Фурье от дельта-функции. В качестве таких задач, заменяющих сопутствующие вопросы, не используются задачи, требующие сложных вычислений или нестандартных подходов.

(20) Ответ на второй и третий вопросы билета оценивается по пятибальной системе: «пятёрка» ставится за полный и правильный ответ как на вопрос билета, так и на сопутствующие вопросы экзаменатора; «четвёрка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из данного вопроса билета и объяснение основных идей доказательства (при этом допускается, что доказательсто не доведено до конца); «тройка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из билета (при этом допускается, что о доказательстве не сказано ничего); «двойка» ставится за незнание хоть одной из теорем или хоть одного из важных (т. е. многократно используемых в курсе) определений.

(21) Положительные оценки, полученные за ответ на второй и третий вопросы билета, конвертируются в баллы следующим образом: «пятёрка» — 200 баллов; «четвёрка» — 100 баллов, «тройка» — ноль баллов. (Напомним, что в соответствии с пунктом (10) настоящих Правил, «двойка», полученная за ответ на любой вопрос билета, немедленно ведёт к прекращению экзамена.)

(22) После того, как студент ответил (не на «двойку») на все вопросы

билета, все заработанные им баллы суммируются (т. е. складываются баллы за ответы на второй и третий вопросы с баллами за работу в семестре). В ведомость (и зачётку) выставляется общая оценка за осенний семестр по курсу «Основы функионального анализа», определяемая следующим образом: «отлично» — если сумма баллов не меньше 500; «хорошо» — если сумма баллов от 300 до 499; «удовлетворительно» — если сумма баллов от 100 до 299; «неудовлетворительно» — если сумма баллов менее 100.

(23) Экзамен в дистанционной форме проводится в Google Meet и организуется так, чтобы максимально следовать правилам очного экзамена, изложенным выше в пунктах (9)–(22). Наиболее важные отличия в правилах проведения дистанционного экзамена от очного приведены ниже к пунктах (а)–(н):

(а) Лектор заранее (до консультации) выкладывает экзаменационные билеты на своей страничке на сайте кафедры.

(б) Лектор сообщает каждому студенту ссылку на встречу в Google Meet приблизительно за 15 минут до начала экзамена электронным письмом, отправляемым с его университетского почтового ящика на университетский адрес студента. Студент должен сам позаботиться о том, чтобы это письмо не попало в спам, и чтобы у него было надёжное интернет-соединение на всё время экзамена. Если низкое качество видео- и/или аудио-связи будет препятствовать проведению экзамена, то экзамен будет прекращён на любой стадии, а в экзаменационную ведомость будет выставлена отметка «неявка».

(в) Лектор заранее выставляет каждому студенту предварительную оценку. При этом он опирается на баллы, заработанные студентом в семестре и отзывы семинаристов. Студент об этой оценке не знает до начала экзамена.

(г) Экзамен и его видео-запись ведёт модератор на Google Meet встрече, описанной в пункте (б). Вызвав очередного студента, модератор просит его представиться на камеру и сообщает ему предварительную оценку.

(д) Если студент согласен с предварительной оценкой, то он переходит к ответам на Блиц-опрос.

Если студент не согласен с предварительной оценкой, то модератор с помощью датчика случайных чисел определяет для студента номер билета и назначает экзаменатора (т.е. сообщает имя встречи в Google Meet, уже открытой экзаменатором).

(е) Если студент согласен со своей предварительной оценкой и успешно ответил на вопросы Блиц-опроса, то экзамен для него заканчивается, а предварительная оценка выставляется в экзаменационную ведомость.

Для тех студентов, кто не может поддерживать разговор в таком формате экзамен прекращается в соответствии с пунктом (10) настоящих Правил.

(ж) Студент, не согласный со своей предварительнрой оценкой, переходит на указанную ему модератором встречу с экзаменатором, которая записывается от начала до конца экзамена, и приступает к ответу на билет в соответствии с пунктами (10)–(15) и (18)–(22) настоящих Правил.

(з) Если у студента есть долги по заданиям, то он должен заранее сфотографировать или отсканировать листки со своими решениями соответствующих задач и выложить этот файл в Google Docs в папку, указанную экзаменатором. При этом сдача долгов состоит в том, студент демонстрирует экзаменатору соответствующий файл в Google Meet, комментирует свои решения и отвечает на сопутствующие вопросы.

(и) При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета студент может пользоваться любой литературой или конспектами. В частности, он может отключить видео-камеру и микрофон. Но он должен немедленно выйти на связь, если экзаменатор обратится к нему в Google Meet. Не нужно думать, что переписывание больших кусков текста из учебников или конспекта поможет студенту сдать экзамен. Ведь экзаменатор будет оценивать понимание излагаемого студентом материала и, в частности, его способность отвечать на сопутствующие вопросы.

(к) Закончив подготовку ко второму и третьему вопросам билета, студент фотографирует листки со своими ответами и выкладывает их в Google Docs в папку, указанную экзаменатором.

(л) Ответ на второй и третий вопросы билета состоит в том, студент демонстрирует экзаменатору соответствующий файл в Google Meet, комментирует свои записи и отвечает на сопутствующие вопросы. При этом студенту разрешается использовать только свои записи (т.е. запрещается использовать книги, конспекты, или подсказки от кого-либо).

(м) Если студент считает, что ему несправедливо занизили оценку, то он имеет право на апелляцию. А именно, он может изложить свои претензии в электронном письме на адрес лектора <e.arbuzov@g.nsu.ru> и (под копирку) заведующего кафедрой — Александра Петровича Ульянова <a.ulyanov@g.nsu.ru>. Важно, что эта претензия должна быть получена в день экзамена не позднее 23:59 по новосибирскому времени. В течение трёх дней видео-запись ответа студента будет просмотрена лектором или другим преподавателем кафедры по выбору заведующего кафедрой. О принятом по результатам апелляции решении студент будет немедленно проинформирован по электронной почте.

(н) Лектор оставляет за собой право в течение трёх дней аннулировать результат экзамена конкретного студента в случае грубого нарушения им правил проведения экзамена. Примерами грубого нарушения могут служить такие ситуации: под именем данного студента на экзамен пришёл другой человек; или студент получил от модератора один билет, а экзаменатору стал отвечать другой билет; или на видео-записи видно, что студенту подсказывали во время ответа. Аннулирование результата экзамена обосновывается видео-записью ответа студента. О принятом решении лектор сообщает и студенту, и деканату не позднее, чем через три дня после экзамена.

§3. Проведение пересдачи

(24) Пересдача проводится по тем же правилам и тем же билетам, что и основной экзамен.

(25) На пересдаче долг по задачам из заданий состоит из задач, не сданных в течении семестра, на основном экзамене и на предыдущих пересдачах.

§4. Особые ситуации

(26) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе (например, если из-за праздников пропало занятие и студенты ещё не решали в классе задачи, аналогичные некоторым задачам из задания), так и отдельному студенту (например, в случае его продолжительной болезни или командировки для участия в студенческой олимпиаде). В любом случае продление срока должно быть согласовано с лектором.

(27) Все конфликтные, спорные и неоднозначные ситуации, возникающие при изучении курса «Основы функционального анализа», урегулирует лектор. Это касается как работы в семестре, так и сдачи экзамена и проведения пересдачи.

Правила аттестации студентов
по «Основам функционального анализа»
составил к.ф.-м.н. Э. В. Арбузов.