Занятие 13

Неоднородные линейные уравнения и системы. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим систему неоднородных линейных уравнений

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{f}(t), \tag{13.1}$$

где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица порядка n, $\vec{f}(t)$ — произвольная вектор-функция.

Общее решение этой системы представимо в виде

$$\vec{y}_{\,\text{о.н.}}(t) = \vec{y}_{\,\text{о.о.}}(t) + \vec{y}_{\,\text{ч.н.}}(t),$$

где $\vec{y}_{\,\text{о.о.}}(t)$ — общее решение однородной системы, $\vec{y}_{\,\text{ч.н.}}(t)$ — частное решение неоднородной системы. Такая структура решения является прямым следствием линейности системы.

Мы знаем, что решение однородной системы можно представить в виде

$$\vec{y}_{\,\text{о.о.}}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{c},$$

где $\mathbf{Y}(t)$ — фундаментальная матрица, столбцы которой являются линейно независимыми решениям этой системы.

Общим методом нахождения частного решения неоднородной системы является «метод вариации постоянной». Он заключается в том, что частное решение строится в виде

$$\vec{y}_{\text{ч.н.}}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{c}(t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (13.1), получим

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) \cdot \vec{c}(t) + \mathbf{Y}(t) \cdot \dot{\vec{c}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{c}(t) + \vec{f}(t).$$

Учитывая, что $\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t)$, приходим к уравнению

$$\mathbf{Y}(t) \cdot \dot{\vec{c}}(t) = \vec{f}(t).$$

Поскольку $\mathbf{Y}(t)$ — фундаментальная матрица, она обратима при любом значении t, и следовательно

$$\dot{\vec{c}}(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t) \;\cdot \vec{f}(t), \tag{13.2}$$

откуда мы и определяем вектор-функцию $\vec{c}(t)$, интегрируя каждую компоненту вектора $\mathbf{Y}^{-1}(t) \;\cdot \vec{f}(t)$.

С точки зрения теории, самая удобная из фундаментальных матриц — матричная экспонента. Помимо того, что $\exp(\mathbf{A}t)\Big|_{t=0} = \mathbf{E}$, она легко обращается: $\big[\exp(\mathbf{A}t)\big]^{-1} = \exp(-\mathbf{A}t)$. Поэтому разумно в качестве $\mathbf{Y}(t)$ выбирать матричную экспоненту, если ее легко построить (например, в случае кратных корней).

Пример 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin t \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

Здесь $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$. По теореме Кэли матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то есть $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{E}$. На прошлом занятии мы построили матричную экспоненту для такого случая:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cos t + \mathbf{A}\sin t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Как было отмечено выше, $\big[\exp(\mathbf{A}t)\big]^{-1} = \exp(-\mathbf{A}t)$, то есть

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (13.2)

$$\dot{\vec{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \cdot \sin t \\ \sin^2 t \end{pmatrix},$$

откуда $\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5\sin^2 t \\ 0,5t - 0,25\sin 2t \end{pmatrix}$ (мы ищем *частное* решение, поэтому в качестве $C_1(t)$ и $C_2(t)$ можно выбрать любые из первообразных).

Итак, частное решение неоднородной системы:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5\sin^2 t \\ 0,5t - 0,25\sin 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t\sin^2 t \\ t\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + 0,5t\sin t \\ y(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t + 0,5t\cos t - 0,5\sin t. \end{cases}$$

После того, как найдено общее решение, можно решить задачу Коши. Например, если требовалось найти решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, то, подставляя $t = 0$ в формулу общего решения, находим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Следовательно, решение поставленной задачи Коши $\begin{cases} x(t) = \cos t + 0,5t\sin t \\ y(t) = -1,5\sin t + 0,5t\cos t. \end{cases}$ $\square$

Используя матричную экспоненту, выпишем общую формулу решения задачи Коши $\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{f}(t)$, $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$:

$$\vec{y}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\cdot\vec{y}_0 + \exp(\mathbf{A}t)\cdot\int\limits_0^t \exp(-\mathbf{A}\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

(Сравните эту формулу с формулой решения задачи Коши для уравнения первого порядка, которую мы получили на третьем занятии.)

Пример 2. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = -x + y + z + e^t \\ \dot{z} = x - z + 3e^{-t}. \end{cases}$

На занятии 11 мы нашли фундаментальную матрицу этой системы (см. пример 3):

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3e^{2t} & 0 \\ 0 & -2e^{2t} & -e^{-t} \\ 1 & e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Это не матричная экспонента, поскольку $\mathbf{Y}(0) \neq \mathbf{E}$.

Метод вариации приведет нас к системе, которую можно решить, например, методом Гаусса:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 + 3e^{2t}\dot{C}_2 = 0 \\ -2e^{2t}\dot{C}_2 - e^{-t}\dot{C}_3 = e^t \\ \dot{C}_1 + e^{2t}\dot{C}_2 + 2e^{-t}\dot{C}_3 = 3e^{-t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{C}_1 = e^t + 1,5e^{-t} \\ \dot{C}_2 = -\frac{1}{3}e^{-t} - 0,5e^{-3t} \\ \dot{C}_3 = -\frac{1}{3}e^{2t} + 1. \end{cases}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем $\begin{cases} C_1 = e^t - 1,5e^{-t} \\ C_2 = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ C_3 = -\frac{1}{6}e^{2t} + t \end{cases}$

Следовательно, частное решение неоднородной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} 1 & 3e^{2t} & 0 \\ 0 & -2e^{2t} & -e^{-t} \\ 1 & e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t - 1,5e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ -\frac{1}{6}e^{2t} + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} \\ -0,5e^t - \frac{1}{3}e^{-t} - te^{-t} \\ e^t - \frac{4}{3}e^{-t} + 2te^{-t} \end{pmatrix}$$

Общее решение неоднородной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3e^{2t} & 0 \\ 0 & -2e^{2t} & -e^{-t} \\ 1 & e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + \begin{pmatrix} -1 \\ -t - \frac{1}{3} \\ 2t - \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

Как видим, частное решение системы представлено в виде суммы двух функций. Первая является частным решением системы

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^t, \tag{13.3}$$

а вторая — частным решением системы

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}. \tag{13.4}$$

Будем говорить, что правая часть системы имеет *специальный вид*, если $\vec{f}(t) = \mathbf{P}_m(t) \cdot e^{\lambda_0 t}$, где $\mathbf{P}_m(t)$ — вектор-функция, каждая компонента которой является многочленом степени не выше m.

Частное решение в таком случае следует искать в виде

$$\vec{y}_{\text{ч.н.}}(t) = \mathbf{Q}_{m+p}(t) \cdot e^{\lambda_0 t},$$

где $\mathbf{Q}_{m+p}(t)$ — вектор-функция, каждая компонента которой является многочленом степени $m + p$. Если λ_0 — не корень характеристического многочлена, то $p = 0$, если же λ_0 — корень характеристического многочлена кратности k, то $p = k$. Коэффициенты этих многочленов неизвестны, но их можно найти, подставив функцию $\mathbf{Q}_{m+p}(t) \cdot e^{\lambda_0 t}$ в исходную систему.

Следуя этому алгоритму, решение системы (13.3) следует искать в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e^t$. Подставляем его в систему:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда $a = 2$, $b = -0,5$, $c = 1$.

Поскольку $\lambda = -1$ является корнем характеристического многочлена, система (13.4) имеет частное решение вида $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \\ A_3 t + B_3 \end{pmatrix} \cdot e^t$. В результате мы получим громоздкую систему для определения шести неизвестных, и решать эту задачу методом неопределенных коэффициентов уже не так эффективно. Однако этот метод показывает нам, какова должна быть структура решения, что дает, например, возможность проконтролировать правильность вычислений методом вариации постоянной, а также отвечать на некоторые вопросы о поведении решений. $\square$

Вернемся к примеру 1. Рассмотрим систему $\begin{cases} \dot{x} = y + e^{it} \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

Найдем комплекснозначное решение этой системы и выделим его мнимую часть. Так как $\lambda = i$ — корень характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$, то решение следует искать в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} \cdot e^{it}$, где A, B, C, D — комплексные числа. После подстановки получаем:

$$\begin{cases} A + i(At + B) = (Ct + D) + 1 \\ C + i(Ct + D) = -(At + B). \end{cases}$$

Решение этой системы $A = 0,5$, $B = 0$, $C = 0,5i$, $D = -0,5$.

Выделяем мнимую часть решения:

$$\operatorname{Im}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} t \\ it-1 \end{pmatrix}(\cos t + i\sin t)\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t\sin t \\ t\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Методом неопределенных коэффициентов мы получили то же частное решение, что и методом вариации постоянных. Вообще говоря, частные решения, полученные разными способами, могут отличаться на слагаемое, являющееся решением однородной системы. $\square$

Теперь посмотрим, как работает метод вариации постоянных для линейного уравнения n-ного порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{13.5}$$

где $f(x)$ — произвольная функция.

Введем функции $y_i(x)$ следующим образом:

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)}$$

Эти равенства и уравнение (13.5) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - \ldots - a_{n-1} y_2 - a_n y_1 + f(x), \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{13.6}$$

Характеристический многочлен системы совпадает с характеристическим многочленом исходного уравнения (13.5):

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & 0 \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^n \cdot (\lambda^n + \lambda^{n-1} a_1 + ... + a_n)$$

Как мы знаем, однородное уравнение имеет n линейно независимых решений $\varphi_i(x)$, и любое решение однородного уравнения можно представить в виде их линейной комбинации:

$$y(x) = y_1(x) = C_1\,\varphi_1(x) + C_2\,\varphi_2(x) + ... + C_n\,\varphi_n(x)$$

Тогда

$$y_2(x) = {y_1}'(x) = C_1\,{\varphi'}_1(x) + C_2\,{\varphi'}_2(x) + ... + C_n\,{\varphi'}_n(x)$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = C_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x) + C_2\,\varphi_2^{(n-1)}(x) + ... + C_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x)$$

Таким образом, фундаментальная матрица однородной системы (13.6) имеет специальный вид

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \dots & \varphi'_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

и называется матрицей Вронского, а ее определитель $\varphi(x) = \det \mathbf{Y}(x)$ — вронскианом. Мы уже упоминали, что определитель фундаментальной матрицы удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\varphi'(x) = \operatorname{tr} \mathbf{A} \cdot \varphi(x) = -a_1 \varphi(x)$$

Эта формула в дальнейшем окажется очень полезной.

Метод вариации для системы (13.6) приводит нас к соотношению

$$\mathbf{Y}(x) \cdot \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \vdots \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix},$$

из которого можно определить функции $C'_i(x)$, поскольку $\det \mathbf{Y}(x) \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \vdots \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \mathbf{Y}^{-1}(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{13.7}$$

Таким образом, метод вариации заключается в следующем:

1. Находим общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{ о.о.}}(x) = C_1\,\varphi_1(x) + C_2\,\varphi_2(x) + \ldots + C_n\,\varphi_n(x).$$

2. Составляем матрицу Вронского

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

3. Частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ ч.н.}}(x) = C_1(x)\,\varphi_1(x) + C_2(x)\,\varphi_2(x) + \ldots + C_n(x)\,\varphi_n(x).$$

4. Находим функции $C_i(x)$, интегрируя уравнение (13.7).

5. Записываем общее решение уравнения (13.5) в виде

$$y_{\text{ о.н.}}(x) = y_{\text{ о.о.}}(x) + y_{\text{ ч.н.}}(x),$$

где $y_{\text{ о.о.}}(x)$ — общее решение однородного уравнения, $y_{\text{ ч.н.}}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Из предлагаемого алгоритма видно, что при решении задач нет необходимости сводить уравнение к системе. Мы проделали это один раз в общем виде, чтобы было понятно происхождение условий (13.7).

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Корни характеристического многочлена $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, следовательно, общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{ о.о.}}(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-2x}.$$

Ищем частное решение в виде

$$y_{\text{ ч.н.}}(x) = C_1(x)\, e^{-x} + C_2(x)\, e^{-2x}.$$

Составляем матрицу Вронского и решаем систему

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{e^x+1} \end{pmatrix},$$

откуда

$$C'_1(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad , C'_2(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x+1} \quad \text{и}$$

$$C_1(x) = \ln(e^x+1), \quad C_2(x) = \ln(e^x+1) - e^x.$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$y_{\text{ ч.н.}}(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\ln(1+e^x) - e^{-x}.$$

Последнее слагаемое можно включить в общее решение однородного уравнения. Итак,

$$y_{\text{ о.н.}}(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{-2x} + e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\ln(1+e^x).\ \square$$

Мы научились строить ФСР для линейных систем и уравнений с постоянными коэффициентами. В случае переменных коэффициентов процесс построения ФСР не так прост, и мы обсудим этот вопрос позднее. Однако, если ФСР каким-либо образом получена, то дальнейшее построение частного решения неоднородного уравнения или системы методом вариации никоим образом не зависит от того, являются коэффициенты системы (13.1) или уравнения (13.1) числами или функциями.

Продемонстрируем метод вариации для решения уравнения Эйлера.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $x^2y'' - 2y = 6\dfrac{\ln x}{x}$.

Ищем решения однородного уравнения в виде $y(x) = x^\lambda$. Это приводит нас к характеристическому уравнению $\lambda(\lambda-1)-2=0$, корни которого $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$. Таким образом,

$$y_{\text{ o.o.}}(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2x^2.$$

Ищем частное решение в виде

$$y_{\text{ ч.н.}}(x) = C_1(x)\frac{1}{x} + C_2(x)x^2.$$

Составляем матрицу Вронского и выписываем систему уравнений для поиска $C_i(x)$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & x^2 \\ -\dfrac{1}{x^2} & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{6\ln x}{x^3} \end{pmatrix}. \tag{13.8}$$

Обращаем ваше внимание на правую часть этой системы. Дело в том, что при сведении уравнения к системе необходимо, чтобы коэффициент при старшей производной был равен 1. Поэтому мы делим уравнение на x^2 и получаем в правой части функцию $\dfrac{6\ln x}{x^3}$.

Далее, решая систему (13.8), получим

$$C'_1(x) = -2\frac{\ln x}{x}\quad, C'_2(x) = 2\frac{\ln x}{x^4}\quad, \text{откуда}$$
$$C_1(x) = -\ln^2 x, \quad C_2(x) = -\frac{2}{3}\frac{\ln x}{x^3} - \frac{2}{9}\frac{1}{x^3}.$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$y_{\text{ ч.н.}}(x) = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2}{3}\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{9x}.$$

Включая последнее слагаемое в общее решение однородного уравнения, запишем ответ:

$$y_{\text{ о.н.}}(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2x^2 - \left(\frac{2}{3}\ln x + \ln^2 x\right)\frac{1}{x}.$$

Заметим, что правая часть уравнения Эйлера в рассмотренном примере имеет специальный вид, что позволяет также получить решение этого уравнения методом неопределенных коэффициентов. Таким образом, у вас есть возможность выбора того или иного метода в зависимости от ситуации. $\square$