Гл. 8. Интегральные уравнения.

§ 8.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта.

Интегральными уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла.

Пример 8.1 (уравнения Фредгольма и Вольтерра)

$\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds+f(t)=0$ – ур-ние Фредгольма первого рода;
$\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds+f(t)=x(t)$ – ур-ние Фредгольма второго рода;
$\int_a^t K(t,s)x(s)\,ds+f(t)=0$ – ур-ние Вольтерра первого рода;
$\int_a^t K(t,s)x(s)\,ds+f(t)=x(t)$ – ур-ние Вольтерра второго рода.
Здесь $K : [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ и $f : [a,b]\to\mathbb{C}$ — известные функции, а $x : [a,b]\to\mathbb{C}$ — искомая функция.

Замечание 8.2

Поскольку $\int_a^t K(t,s)x(s)\,ds = \int_a^b \tilde{K}(t,s)x(s)\,ds$, где
$\tilde{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & a\le s\le t\le b, \\ 0, & a\le t< s\le b, \end{cases}$, то уравнения Вольтерра являются частным случаем уравнений Фредгольма.

Определение 8.3 (оператора Гильберта — Шмидта)

Интегральным оператором Гильберта — Шмидта называется оператор A, сопоставляющий функции $x \in L_2[a,b]$ функцию y по правилу

$$y(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds,$$

где функция $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$, называемая ядром интегрального оператора Гильберта — Шмидта, удовлетворяет условию $\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds < +\infty$.

Замечание 8.4

Уравнение Фредгольма второго рода может быть записано в операторном виде $x = Ax + f$, где A — оператор Гильберта — Шмидта.

Теорема 8.5 (о компактности оператора Гильберта — Шмидта)

Интегральный оператор Гильберта — Шмидта A *с ядром* K *является линенйным компактным оператором, переводящим пространство* $L_2[a, b]$ *в себя. При этом*

$$\|A\| \leq \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t, s)|^2 \, dt \, ds \right)^{1/2}. \tag{1}$$

Доказательство теоремы 8.5. Линейность оператора A следует из свойств линейности интеграла.
В силу неравенства Коши — Буняковского для $t \in [a, b]$ имеем:

$$|y(t)|^2 = \left|\int_a^b K(t, s)x(s)\, ds\right|^2$$

$$\leq \int_a^b |K(t, s)|^2\, ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2\, ds = \|x\|^2 \cdot \int_a^b |K(t, s)|^2\, ds.$$

Интегрируя по t, получим:

$$\|Ax\|^2 = \|y\|^2 = \int_a^b |y(t)|^2\, dt \leq \|x\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2\, dt\, ds,$$

откуда следует, что $y \in L_2[a, b]$. Следовательно, доказано, что $A : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$.

Оценим норму $\|A\|$. Имеем

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 \, dt \, ds \right)^{1/2}$. Поэтому

оператор A ограничен и выполнено неравенство (1).

Осталось доказать, что оператор A компактен.

Пусть $(x_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ — полная ортонормированная система функций в $L_2[a,b]$. Убедимся, что всевозможные попарные произведения $(x_n(t)\overline{x_m(s)})_{n,m \in \mathbb{N}}$ образуют полную ортонормированную систему функций в $L_2([a,b] \times [a,b])$.

Её ортонормированность следует из того, что

$$(x_n(t)\overline{x_m(s)}, x_{n_0}(t)\overline{x_{m_0}(s)}) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b [x_n(t)\overline{x_m(s)}] \cdot \overline{[x_{n_0}(t)\overline{x_{m_0}(s)}]} \, dt \, ds$$

$$= \left[\int\limits_a^b \int\limits_a^b x_n(t)\overline{x_{n_0}(t)} \, dt \right] \cdot \left[\int\limits_a^b \int\limits_a^b x_{m_0}(s)\overline{x_m(s)} \, ds \right] = \delta_{n,n_0} \cdot \delta_{m,m_0}.$$

Полнота же будет следовать из известного критерия полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве: ортонормированная система в гильбертовом пространстве полна, если не существует ненулевого вектора, ортогонального сразу ко всем векторам системы. Предполагая, что функция $g : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ ортогональна любой функции $x_n(t)\overline{x_m(s)}$, и заменяя двойной интеграл повторным, будем иметь

$$0 = (g(t,s), x_n(t)\overline{x_m(s)}) = \int_a^b \int_a^b g(t,s)\overline{x_n(t)\overline{x_m(s)}}\, dt\, ds$$

$= \int_a^b \left[\int_a^b g(t,s)\overline{x_n(t)}\, dt\right] x_m(s)\, ds$. Поскольку это равенство справедливо при любом m, а система функций $(x_m(s))_{m\in\mathbb{N}}$ полна в $L_2[a, b]$, заключаем, что функция, стоящая в квадратных скобках, равняется нулю как элемент пространства $L_2[a, b]$, т. е. $\int_a^b g(t,s)\overline{x_n(t)}\, dt = 0$ для почти всех $s \in [a, b]$.

По той же причине $g(t,s)=0$ для почти всех t и s, а значит, g равняется нулю как элемент пространства $L_2([a,b]\times[a,b])$. В силу критерия полноты система $(x_n(t)\overline{x_m(s)})_{n,m\in\mathbb{N}}$ полна в $L_2([a,b]\times[a,b])$.

Поскольку система $(x_n(t)\overline{x_m(s)})_{n,m\in\mathbb{N}}$ полна в $L_2([a,b]\times[a,b])$, то ядро $K(t,s)$, как всякая другая функция из $L_2([a,b]\times[a,b])$, может быть разложено по этой системе:

$$K(t,s)=\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}x_n(t)\overline{x_m(s)}.$$

Для каждого натурального числа N положим

$$K_N(t,s):=\sum_{n,m=1}^{N} a_{nm}x_n(t)\overline{x_m(s)}.$$

и обозначим через A_N оператор Гильберта — Шмидта с ядром K_N.

Так как $K_N \in L_2([a,b]\times[a,b])$, то по уже доказанному $A_N : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ — ограниченный оператор. Для любого $x \in L_2[a,b]$ имеем

$$(A_N x)(t) = \int_a^b K_N(t,s)x(s)\,ds$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{n,m=1}^N a_{nm} x_n(t)\overline{x_m(s)} \Big) x(s)\,ds = \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t),$$

где $\alpha_n = \sum\limits_{m=1}^N a_{nm} \int\limits_a^b x(s)\overline{x_m(s)}\,ds$. Поэтому любая функция из образа $\operatorname{im} A_N$ является линейной комбинацией конечного набора функций $x_1(t), \dots, x_N(t)$. Следовательно, образ $\operatorname{im} A_N$ — конечномерное подпространство. Тогда A_N — конечномерный оператор. А мы знаем, что каждый конечномерный оператор компактен.

В силу опереления сходимости ряда

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} x_n(t) \overline{x_m(s)}$$

в пространстве $L_2([a,b] \times [a,b])$ имеем $\|K - K_N\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} \to 0$ при $N \to \infty$. Разность операторов $A - A_N$ является оператором Гильберта — Шмидта с ядром $K - K_N$. По неравенству (1)

$$\|A - A_N\| \le \Big(\int_a^b \int_a^b |K(t,s) - K_N(t,s)|^2 \, dt \, ds \Big)^{1/2}$$

$$= \|K - K_N\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} \to 0$$

при $N \to \infty$. Следовательно, последовательность компактных операторов A_N сходится к оператору A. По теореме о пределе последовательности компактных операторов получаем, что оператор A компактен.

Теорема доказана.

Теорема 8.6 (об операторе, сопряженном оператору Гильберта — Шмидта)

Если A — оператор Гильберта — Шмидта с ядром $K(t,s)$, то сопряженый ему оператор A^* также является оператором Гильберта — Шмидта с ядром $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}$.

Доказательство теоремы 8.6. Покажем, что для оператора $(By)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\,ds$ и для любых $x, y \in L_2[a,b]$ выполнено равенство $(Ax, y) = (x, By)$ (т. е. $B = A^*$). Действительно,

$$(Ax, y) = \int_a^b \Big[\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\Big]\overline{y(t)}\,dt = \int_a^b x(s)\Big[\int_a^b K(t,s)\overline{y(t)}\,dt\Big]\,ds$$

$$= \int_a^b x(t)\overline{\Big[\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\,ds\Big]}\,dt = (x, By).$$

Теорема доказана.

§ 8.2. Решение уравнений с вырожденным ядром.

В этом параграфе мы рассмотрим один метод решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds = f(t), \tag{2}$$

ядро K которого имеет вид

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)Q_j(s), \tag{3}$$

где $P_j : [a,b] \to \mathbb{C}$, $Q_j : [a,b] \to \mathbb{C}$ — некоторые функции такие, что $P_j, Q_j \in L_2[a,b]$, $j = 1, \ldots, n$.

Определение 8.7 (вырожденного ядра)

Ядро вида (3) называется вырожденным.

Мы покажем, что решение уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром может быть сведено к решению некоторой линейной системы алгебраических уравнений. Прежде всего заметим, что без ограничения общности можем считать функции P_j в разложении (3) линейно независимыми: в противном случае мы бы выделили среди P_j максимальное число линейно независимых, выразили бы остальные P_j линейно через независимые и, перегруппировав слагаемые, вновь получили бы выражение вида (3), но теперь в нем все P_j были бы линейно независимы. Подставим в уравнение (2) вместо $K(t,s)$ его выражение (3), получим $x(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \int_a^b Q_j(s)x(s)\,ds + f(s)$ или

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t), \tag{4}$$

где введено обозначение $q_j = \int_a^b Q_j(s)x(s)\,ds$.

Смысл равенства (4) в том, что теперь мы знаем вид решения «с точностью до неопределенных коэффициентов q_j», для нахождения которых подставим (4) в уравнение (2):

$$\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \int\limits_a^b Q_j(s) \left[\sum_{k=1}^{n} q_k P_k(s) + f(s) \right] ds + f(t).$$

Вводя обозначения $a_{jk} = \int_a^b Q_j(s) P_k(s)\, ds$, $b_j = \int_a^b Q_j(s) f(s)\, ds$, перепишем последнее равенство так:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k + b_j \right].$$

Ввиду линейной независимости функций P_j это равенство возможно лишь в случае совпадения коэффициентов при P_j в его левой и правой частях:

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k + b_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Таким образом, мы получим для коэффициентов q_j систему линейных алгебраических уравнений, решив которую, с помощью формулы (4) найдем функцию x, заведомо удовлетворяющую интегральному уравению (2): ведь все выкладки, с помощью которых мы пришли от уравнения (2) к системе (5), можно проделать в обратном порядке.

Замечание 8.8

В заключение отметим, что если ядро уравнения (2) не является вырожденным, то, разлагая его в ряд Тейлора или в ряд Фурье и удерживая конечное число слагаемых, получим уравнение с вырожденным ядром, решения которого по-видимому приближенно совпадают с решениями исходного уравнения. С деталями основанного на этой идее приближенного метода решения интегральных уравнений Фредгольма можно познакомиться по книге Л. В. Кантаровича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа».

§ 8.3. Альтернатива Фредгольма.

Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \to H$ — линейный компактный оператор, A^* — его сопряженный. Разрешимость неоднородного уравнения

$$x - Ax = f \tag{н}$$

устанавливается с помощью однородного уравнения

$$x - Ax = 0, \tag{о}$$

неоднородного сопряженного уравнения

$$y - A^*y = g \tag{сн}$$

и однородного сопряженного уравнения

$$y - A^*y = 0 \tag{со}$$

следующей теоремой:

Теорема 8.9 (альтернатива Фредгольма)

Для уравнения (н) *возможны только два случая:*
I. *Однородное уравнение* (о) *имеет только нулевое решение. При этом однородное сопряженное уравнение* (со) *также имеет только нулевое решение, а уравнение* (н) *и* (сн) *имеют и равно одно решение для любой правой части.*
II. *Однородное уравнение* (о) *имеет* n *линейно независимых решений* $x_1, \ldots, x_n$. *При этом однородное сопряженное уравнение* (со) *также имеет* n *линейно независимых решений* $y_1, \ldots, y_n$, *а для разрешимости уравнения* (н) *необходимо и достаточно, чтобы* $(f, y_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. *При выполнении последних условий общее решение уравнения* (н) *имеет вид*

$$x = x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n,$$

где x_0 — *частное решение неоднородного уравнения* (н), *а* $c_1, \ldots, c_n$ — *произвольные постоянные.*

Теорема 8.9 без доказательства.

Упражнение 8.10

Доказать теорему 8.9 (альтернативу Фредгольма) для операторов Гильберта — Шмидта с вырожденным ядром.

Замечание 8.11

Обратим внимание на то, что альтернатива Фредгольма, в частности, утверждает, что уравнение (н) не может иметь бесконечного числа линейно независимых решений.

Замечание 8.12

Поскольку оператор Гильберта — Шмидта компактен, то не вызывает сомнений, что альтернатива Фредгольма имеет прямое отношение к интегральным уравнениям.

§ 8.4. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений.

При решении уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds + f(t)$$

содержащего параметр μ, оказывается полезной теорема Неймана, доказанная в главе 7 «Операторы в гильбертовых пространствах».

Теорема 8.13 (фон Неймана)

Пусть H — гильбертово пространство, $B : H \to H$ — линейный оператор такой, что $\|B^m\| < 1$ для некоторого натурального m, то оператор $(I - B)^{-1}$ существует, линеен, определен во всем пространстве H, ограничен, и для него имеет место равенство

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n.$$

Перепишем рассматриваемое уравнение Фредгольма в операторном виде

$$x = \mu A x + f, \tag{6}$$

где A — соответствующий оператор Гильберта — Шмидта. Учитывая ограниченность оператора Гильберта — Шмидта: $\|A\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds\right)^{1/2} < \infty$, на основании теоремы фон Неймана заключаем, что для всех достаточно малых μ (а именно для $|\mu| < 1/\|A\|$) оператор $(I - \mu A)^{-1}$ существует и может быть представлен в виде ряда $(I - \mu A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n$.

Следовательно, при $|\mu| < 1/\|A\|$ уравнение (6) для любого f имеет единственное решение, которое к тому же задается в виде ряда $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f = f + \mu A f + \mu^2 A(Af) + \ldots$, называемого рядом Неймана.

Другими словами, при $|\mu| < 1/\|A\|$ решение уравнения (6) может быть получено в виде ряда $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, первый член которого совпадает со свободным членом уравнения (6): $x_0 = f$, а каждый последующий член выражается через предыдущий по рекурретной формуле $x_{n+1} = \mu A x_n$. Такой способ нахождения решения называется методом последовательных приближений.

Интуитивно ясно, что частичная сумма $\sum\limits_{n=0}^{N} x_n$ ряда Неймана может рассматриваться как приближенное решение уравнения (6). Это соображение действительно лежит в основе одного из распространенных приближенных методов решения интегральных уравнений, с которым можно более детально познакомиться, например, по книге Л. В. Кантаровича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа».

При построении ряда Неймана нужно уметь находить n-ю степень A^n оператора A при любом n.

Определение 8.14 (повторного ядра)

Ядро оператора A^n называется повторным ядром и обозначается через K_n.

Теорема 8.15 (о повторном ядре оператора Гильберта — Шмидта)

При $n = 2, 3, \ldots$ оператор A^n является оператором Гильберта — Шмидта и для повторных ядер справедливо соотношение

$$K_n(t,s) = \int_a^b K(t,r) K_{n-1}(r,s)\, dr, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

где $K_1(t,s) = K(t,s)$.

Доказательство теоремы 8.15. При каждом $n = 2, 3, \ldots$ наша формула вытекает из следующего вычисления:

$$(A^n x)(t) = (A(A^{n-1}))(t) = \int_a^b K(t,r)(A^{n-1}x)(r)\,dr$$

$$= \int_a^b K(t,r)\Big(\int_a^b K_{n-1}(r,s)x(s)ds\Big)dr = \int_a^b \Big(\int_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)dr\Big)x(s)ds$$

Следовательно, $K_n(t,s) = \int\limits_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)\,dr$.

Кроме того,

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(t,s)|^2 \, dt \, ds = \int_a^b \int_a^b \left| \int_a^b K(t,r) K_{n-1}(r,s) \, dr \right|^2 dt \, ds$$

$$\leq \int_a^b \int_a^b \Big(\int_a^b |K(t,r)|^2 \, dr \cdot \int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2 \, dr \Big) \, dt \, ds$$

$$= \int_a^b \int_a^b |K(t,r)|^2 \, dt \, dr \cdot \int_a^b \int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2 \, dr \, ds < \infty.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем записать ряд Неймана $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f$ в виде интегрального оператора

$$x(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \int\limits_a^b K_n(t,s) f(s)\, ds = f(t) + \int\limits_a^b R(t,s;\mu) f(s)\, ds, \tag{7}$$

где использовано обозначение $R(t,s;\mu) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^n K_n(t,s)$.

Определение 8.16 (резольвенты интегрального оператора и резольвентного ядра)

Интегральный оператор из (7) $(\mathcal{R}_\mu f)(t) = \int_a^b R(t,s;\mu) f(s)\, ds$ называется резольвентой изначального интегрального оператора A, а функция $R(t,s;\mu)$ — его резольвентным ядром.

§ 8.5. Интегральные уравнения с симметричными ядрами.

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds. \tag{8}$$

Будем записывать его в операторном виде $x = \mu Ax$, где $x \in L_2[a,b]$, а оператор Гильберта — Шмидта A отображает гильбертово пространство $L_2[a,b]$ в себя. Как мы знаем, оператор A компактен и, кроме того, является самосопряженным, если $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$ (при выполнении последнего условия ядро называется симметричным).

Напомним, что в главе 7 «Операторы в гильбертовых пространствах» мы называли ненулевой вектор $x \in H$ собственным вектором оператора B, отображающего гильбертово пространство H в себя, если $Bx = \lambda x$ для некоторого комплексного числа λ, называемого в этом случае собственным значением оператора B.

В отличие от этого, в теории интегральных уравнений принято следующее

Определение 8.17 (собственной функции и собственного значения интегрального уравнения)

Функцию $x \in L_2[a, b]$, не равную нулю тождественно, называют собственной функцией интегрального уравнения (8) (или собственной функцией уравнения $x = \mu A x$, или собственной функцией ядра K), если имеет место равенство

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t, s) x(s)\, ds$$

или $x = \mu A x$ для некоторого комплексного числа μ, называемого при этом собственным значением интегрального уравнения (8) (или собственным значением уравнения $x = \mu A x$, или собственным значением ядра K).

Замечание 8.18

Короче говоря, мы можем сказать, что если $\lambda \neq 0$ является собственным значением оператора A, то число $\mu = 1/\lambda$ является собственным значением уравнения $x = \mu A x$.

Напомним некоторые свойства собственных чисел и собственных векторов оператора $B : H \to H$, доказанные в главе 7 «Операторы в гильбертовых пространствах»:

1) Число линейно независимых совбственных векторов, отвечающих данному собственному значению $\lambda \neq 0$ компактного оператора B, конечно.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ число собственных значений компактного оператора B, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| > \varepsilon$, конечно.

3) Собственные значения компактного оператора B можно перенумеровать в порядке невозрастания модулей $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$.

4) Все собственные числа компактного самосопряженного оператора B вещественны.

5) Любые два собственных вектора самосопряженного компактного оператора B, отвечающие его различным собственным значениям, ортогональны.

6) Каждый ненулевой компактный самосопряженный оператор B имеет по крайней мере одно собственное число, отличное от нуля.

Следующие свойства собственных чисел и собственных функций интегрального уравнения $x = \mu Ax$ вытекают из 1)–6):

i) Число линейно независимых собственных функций, отвечающих данному собственному значению μ интегрального уравнения $x = \mu Ax$, конечно.

ii) Для любого $\varepsilon > 0$ число собственных значений интегрального уравнения $x = \mu Ax$, удовлетворяющих неравенству $|\mu| < \varepsilon$, конечно.

iii) Собственные значения интегрального уравнения $x = \mu Ax$ можно перенумеровать в порядке неубывания модулей: $|\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \ldots$.

iv) Все собственные значения интегрального уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром вещественны.

v) Любые две собственные функции интегрального уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром, отвечающие его различным собственным значениям, ортогональны.

vi) Всякое интегральное уравнение $x = \mu Ax$ с симметричным ядром имеет по крайней мере одно собственное значение.

§ 8.6. Теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов.

Напомним, что наиболее важное свойство собственных функций самосопряженного компактного оператора дается следующей теоремой Гильберта — Шмидта:

Теорема 8.19 (Гильберта — Шмидта для компактных самосопряженных операторов)

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство ненулевой размерности и $B : H \to H$ — компактный самосопряжённый оператор. Тогда в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора B.

Чтобы сформулировать аналогичную теорему для интегрального уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром, примем следующие соглашения. Всюду в этом параграфе мы будем считать, что последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ собственных функций уравнения $x = \mu Ax$ с симметричным ядром является ортонормированной. Это не ограничивает общности рассуждений, так как в силу свойств, обсуждавшихся в предыдущем параграфе, собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, заведомо ортогональны. Что же касается собственных функций, отвечающих одному и тому же собственному значению, то они, очевидно, лежат в некотором конечномерном подпространстве, и мы можем заменить их произвольным ортонормированным базисом этого подпространства, построенным, например, с помощью процедуры ортогонализации Грама — Шмидта.

Кроме того, нам будет удобно использовать следующее

Определение 8.20 (представимости функции через ядро)

Говорят, что функция $f \in L_2[a, b]$ представима через ядро $K \in L_2([a, b] \times [a, b])$, если существует функция $g \in L_2[a, b]$ такая, что $f(t) = \int\limits_a^b K(t, s)g(s)\, ds$, т. е. если f лежит в образе оператора Гильберта — Шмидта с ядром K.

Теорема 8.21 (Гильберта — Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром)

Пусть $f \in L_2[a,b]$ *представима через симметричное ядро* $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$. *Тогда она может быть разложена в ряд*

$$f(t) = \sum_n f_n x_n(t), \tag{9}$$

где $x_1, \dots, x_n, \dots$ *— ортонормированная последовательность собственных функций ядра* K, *а коэффициенты* f_n *могут быть найдены по формуле*

$$f_n = \int_a^b f(t)\overline{x_n(t)}\,dt.$$

Замечание 8.22

И в теореме 8.21, и в определении 8.20 речь идет о равенстве функций в пространстве $L_2[a, b]$, а не о их совпадении при каждом $t \in [a, b]$.

Замечание 8.23

В равенстве (9) суммирование по n может вестись как по конечному, так и по бесконечному множеству. В последнем случае сумма понимается как сумма бесконечного числа элементов гильбертова пространства $L_2[a, b]$.

Упражнение 8.24

Доказать теорему 8.21.

Применим теорему 8.21 к решению неоднородного уравнения $x = \mu Ax + f$, где A — интегральный оператор Гильберта — Шмидта с симметричным ядром K.
Если x является его решением, то $x - f = \mu Ax$. Это значит, что функция $x - f$ представима через ядро K. По теореме 8.21 она может быть разложена в ряд по ортонормированной последовательности собственных функций $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ однородного уравнения $x = \mu Ax$:

$$x - f = \sum_n a_n x_n. \qquad (10)$$

Подставив это разложение для x в первоначальное уравнение и учитывая, что $Ax_n = \frac{x_n}{\mu_n}$, получим:

$$f + \sum_n a_n x_n = x = \mu Ax + f = \mu \sum_n \frac{a_n}{\mu_n} x_n + \mu Af + f$$

или

$$\sum_n \left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right) a_n x_n = \mu Af.$$

Поскольку функция Af, очевидно, представима через ядро K, то она тоже разлагается в ряд по функциям $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, коэффициенты которого обозначим через b_n:

$$Af = \sum_n b_n x_n, \qquad b_n = \int_a^b (Af)(t)\overline{x_n(t)}\, dt.$$

Значит,

$$\sum_n \left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right) a_n x_n = \sum_n \mu b_n x_n.$$

Откуда, учитывая линейную независимость функций $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, получаем для всех n равенство

$$\left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right) a_n = \mu b_n. \tag{11}$$

Для номеров n таких, что $\mu_n \neq \mu$, из (11) находим

$$a_n = \mu \frac{\mu_n b_n}{\mu_n - \mu}.$$

Для номеров n таких, что $\mu_n = \mu$, равенство (11) будет выполняться только, если $b_n = 0$, при этом a_n может быть любым. Поэтому исходное уравнение разрешимо только при выполнении условия, что $b_n = 0$ для всех номеров n таких, что $\mu_n = \mu$. При этом общее решение имеет вид

$$x(t) = f(t) + \sum_{n\colon \mu_n = \mu} a_n x_n(t) + \mu \sum_{n\colon \mu_n \neq \mu} \frac{\mu_n}{\mu_n - \mu} b_n x_n(t),$$

где коэффициенты a_n произвольны для номеров n таких, что $\mu_n = \mu$.

Наконец, воспользовавшись результатами следующего вычисления

$$b_n = \int_a^b (Af)(t)\overline{x_n(t)}\,dt = \int_a^b \Big(\int_a^b K(t,s)f(s)\,ds\Big)\overline{x_n(t)}\,dt$$

$$= \int_a^b f(s)\Big(\int_a^b K(t,s)\overline{x_n(t)}\,dt\Big)\,ds = \int_a^b f(t)\Big(\int_a^b K(s,t)\overline{x_n(s)}\,ds\Big)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\overline{\Big(\int_a^b \overline{K(s,t)}x_n(s)\,ds\Big)}\,dt = \int_a^b f(t)\overline{\Big(\int_a^b K(t,s)x_n(s)\,ds\Big)}\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\overline{(Ax_n)(t)}\,dt = \overline{\mu_n}^{-1}\int_a^b f(t)\overline{x_n(t)}\,dt = \mu_n^{-1}\int_a^b f(t)\overline{x_n(t)}\,dt, \tag{12}$$

получим формулу

$$x(t) = f(t) + \sum_{n\colon \mu_n = \mu} a_n x_n(t) + \mu \sum_{n\colon \mu_n \neq \mu} \frac{x_n(t)}{\mu_n - \mu} \int_a^b f(t) \overline{x_n(t)}\, dt, \tag{13}$$

называемую разложением решения интегрального уравнения $x = \mu A x + f$ по собственным функциям ядра. Она позволяет получить решение неоднородного уравнения, если известны все решения соответствующего однородного. Иногда говорят, что решение (13) получено методом Гильберта — Шмидта.

Замечание 8.25

При вычислениях (12) мы использовали, что ядро K симметрично ($K(t,s) = \overline{K(s,t)}$) и его собственные значения вещественны ($\overline{\mu_n} = \mu_n$).

Замечание 8.26

Если число μ не является собственным значением ядра K, то множество номеров n таких, что $\mu_n = \mu$, пусто. Тогда уравнение имеет единственное решение для любой функции f и в формуле (13) отсутствует сумма $\sum\limits_{n:\,\mu_n=\mu} a_n x_n(t)$. Сравните полученное условие разрешимости уравнения с альтернативой Фредгольма.

§ 8.7. Инегральные уравнения Вальтера: теорема о существовании и единственности решения.

Решения уравнения Вальтера обладают рядом специальных свойств, которых, вообще говоря, нет у решений уравнений Фредгольма. Приведём следующую теорему, которую надо рассматривать как «противовес» альтернативе Фредгольма для уравнений Фредгольма.

Теорема 8.27 (о сущетсвовании и единственности решения уравнения Вольтерра)

Если $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$, *то при любом* μ *и любой функции* $f \in L_2[a,b]$ *уравнение Вальтерра второго рода*

$$x(t) = \mu \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds + f(t), \qquad t \in [a,b],$$

имеет и притом единственное решение $x \in L_2[a,b]$, *которое может быть найдено с помощью метода последовательных приближений.*

Без доказательства.