Задания по дискретной математике

Задание 1 (*сдать до 15 марта*)

1. Алгоритмом фон Неймана и пирамидальным алгоритмом отсортировать массив. *У каждого свой вариант*

Дать оценки сложности этих алгоритмов.

2. (a) Построить последовательность АВЛ-деревьев для данных, поступающих в заданном порядке. *У каждого свой вариант*

(б) Удалить из полученного дерева сначала 7 элемент последовательности. Найти найти такую последовательность удалений элементов, чтобы нарушился баланс. Восстановить баланс АВЛ-дерева.

3. Привести пример АВЛ-дерева в котором после удаления некоторого элемента приходится несколько раз восстанавливать баланс.

4. Конструируется электронный прибор, состоящий из трех компонентов. Компоненты соединены последовательно, поэтому выход из строя одного из них влечет за собой отказ всего прибора. Надежность (вероятность безаварийной работы) прибора можно повысить путем дублирования каждого компонента. Конструкция прибора допускает использование одного или двух резервных (параллельных) блоков, т.е. каждый компонент может содержать до трех блоков, соединенных параллельно. Таблица содержит данные о надежности $r_i(k)$ и стоимости $c_i(k)$ i-го, $i = 1, 2, 3$ компонента прибора в зависимости от числа блоков $k = 1, 2, 3$.

k	r_1(k)	$c_1(k)$	$r_2(k)$	$c_2(k)$	$r_3(k)$	$c_3(k)$
1	0,6	1	0,7	3	0,5	2
2	0,8	2	0,8	5	0,7	4
3	0,9	3	0,9	6	0,9	5

Как сконструировать прибор, стоимость которого не должна быть больше 10? (*Без рекуррентных соотношений задача не засчитывается.*)

5. Завод может производить 3 вида продукции. Известно, что производство x единиц продукции i-го вида требует $s_i(x)$ единиц сырья. Известно также, что реализация единицы продукции i-го вида дает доход c_i. Требуется принять решение о количестве производимой продукции каждого вида, если в наличии имеется 65 единиц сырья.

Значения c_i и $s_i(x)$ приведены ниже.

i	1	2	3
c_i	3	4	2

$x \backslash i$	1	2	3
1	11	21	11
2	23	29	14
3	37	38	27
4	44	40	28
5	47	61	30

(*Без рекуррентных соотношений задача не засчитывается.*)

6. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке.*У каждого свой вариант, который нужно получить у преподавателя.*
(*Без рекуррентных соотношений задача не засчитывается.*)

7. Фирма получила заказ на изготовление моторов 8-ми типов по a_i штук каждого. Известно, что мотор k-го можно заметить мотором i-го типа, если $i \le k$. Стоимость производства одного мотора i-го типа составляет $c_i = 50 \cdot u_i$. Затраты на организацию производства моторов i-го типа $C_{0_i} = 1000 + 50 \cdot u_i$. Моторы какого типа и в каких количествах следует производить, чтобы полностью удовлетворить потребителей и минимизировать затраты.

	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	20	10	50	20	80	40	20	50
u_i	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3

(*Без рекуррентных соотношений задача не засчитывается.*)

8. Методом динамического программирования решить задачу о лыжных гонках. *У каждого свой вариант, который нужно получить у преподавателя.*
(*Без рекуррентных соотношений задача не засчитывается.*)

Задание 2 (*сдать до 15 апреля*)

1. Найти минимальное остовное дерево в полном графе с 7 вершинами, длины ребер которого совпадают с числами, стоящими выше главной диагонали в таблице 1.

<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5" colspan="5">Таблица 3</td><td>13</td><td>23</td></tr>
<tr><td>2</td><td>25</td><td>11</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td><td>28</td></tr>
<tr><td>4</td><td>21</td><td>14</td></tr>
<tr><td>5</td><td>19</td><td>25</td></tr>
<tr><td>6</td><td>13</td><td>20</td><td>16</td><td>23</td><td>26</td><td>18</td><td>15</td></tr>
<tr><td>7</td><td>23</td><td>29</td><td>29</td><td>26</td><td>24</td><td>18</td><td>25</td></tr>
</table>

Таблица 1

2. Пусть G — орграф, длины дуг которого приведены в таблице 2. Методом Дейкстры найти вектор кратчайших расстояний от вершины 2 до остальных вершин, а методом Флойда — Уоршелла найти матрицу кратчайших расстояний.

-	1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	23	-	-	66	-
2	56	-	-	54	-	-	34
3	-	56	-	-	-	-	-
4	-	-	5	-	39	30	-
5	34	-	-	-	-	-	46
6	-	-	73	31	19	-	4
7	-	-	-	3	-	43	-

Таблица 2

3. (а) Рассматривая числа в таблице 2 как пропускные способности дуг, найти в соответствующей сети максимальный поток из вершины 2 в вершину 3.

(б) Доказать на примере необходимость увеличения пропускных способностей обратных дуг вдоль увеличивающего пути.

4. Построить приближенное решение задачи коммивояжера в полном графе с 7 вершинами, длины ребер которого совпадают с числами, стоящими выше главной диагонали в таблице 1, используя 2–приближенный алгоритм. Найти оценку на длину оптимального маршрута коммивояжера, построив несколько 1-деревьев. Сделать вывод о величине оптимума.

5. Методом ветвей и границ решить задачу о рюкзаке из задания 1.6 *у каждого свой вариант.*

6. Методом ветвей и границ решить задачу коммивояжера для таблицы 3 *у каждого свой вариант.*

7. Пусть $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. Какие веса следует назначить элементам множества $E = \{1,2,3\}$ согласно теореме Радо-Эдмондса для того, чтобы жадный алгоритм построил неоптимальное решение задачи $\max_{S\in\mathcal{I}} \sum_{e\in S} w(e)$

8. Пусть E — множество ребер графа. Пусть $\mathcal{I}$ состоит из всех подмножеств ребер графа, которые образуют паросочетание. Доказать, что $\mathcal{M} = [E, \mathcal{I}]$ не является матроидом.

Задание 3 (*сдать до 15 мая*)

1. Решить задачу симплекс–методом, взяв в качестве исходного базисного решения точку $\overline{x}$:
(варианты 1,4,7 и тд.)

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 \to \min$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \;\; x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \;\; x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \;\; \overline{x} = (0, 0, 1, 2, 1).$$

(варианты 2,5,8 и тд.)

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3; \;\; x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \;\; x_1 + x_4 - x_5 = 0,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \;\; \overline{x} = (0, 2, 0, 1, 1).$$

(варианты 3,6,9 и тд.)

$$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 6x_5 \to \min$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 18, \;\; x_1 + 5x_2 + 2x_4 + 8x_5 = 13, \;\; x_3 + x_5 = 3,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \;\; \overline{x} = (0, 1, 2, 0, 1).$$

2. Решить задачу симплекс–методом, найдя начальное базисное допустимое решение методом искусственного базиса:
(варианты 1,4,7 и тд.)

$$-x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4 \to \min$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \;\; x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5,$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \;\; x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$$

(варианты 2,5,8 и тд.)

$$-x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \;\; 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$$

(варианты 3,6,9 и тд.)

$$-x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 10x_4 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \;\; x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$$

3. По заданному алфавитному коду

$$\{01, 011, 100, 2100, 10110, 00112\}$$

построить его граф и выяснить, является ли код разделимым.

4. Для заданного неразделимого кода $\{aa,\ ab,\ cc,\ cca,\ bcca,\}$ выяснить, является ли каждое из слов w кодом ровно одного сообщения:

(а) $w = ccabccabccabcc$;

(б) $w = bccaccabccabccacabcca$;

(в) $w = abbccaccabccaabab$.

5. Для кода $C = \{010, 101, 01010, (01)^k\}$, $k = 3s + 1$ найти слово минимальной длины, декодируемое неоднозначно.

6. Для заданных распределений вероятностей появления букв построить оптимальные коды по методам Фано и Хаффмана для $q = 3$ и посчитать избыточность:

(a) $(0.4, 0.11, 0.1, 0.1, 0.09, 0.08, 0.07, 0.03, 0.02)$;

(b) $(0.21, 0.20, 0.17, 0.16, 0.12, 0.08, 0.04, 0.02)$.

7. Построить по методу Хэмминга кодовое слово для сообщения $\widetilde{\alpha} = 01110111011$.

8. По каналу связи передавалось кодовое слово, построенное по методу Хэмминга для сообщения $\widetilde{\alpha}$. После передачи по каналу связи, искажающему слово не более чем в одном разряде, было получено слово $\widetilde{\beta} = 001011110111111$. Восстановить исходное сообщение.