

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра общей физики

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ
ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ПО
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ 2022–2024 гг.**

Учебное пособие

Новосибирск
2024

ББК В313 я 73-4

УДК 537 (075.8)

Э 360

Э 360 Экзаменационные и олимпиадные варианты задач по электродинамике 2022–2024 гг. : учеб. пособ. / А. Г. Погосов, С. Л. Синицкий, В. А. Володин и др.; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2024. – 105 с.

ISBN XXX-X-XXXX-XXXX-X

В учебном пособии собраны задачи, предлагавшиеся студентам физического факультета НГУ на письменных контрольных и экзаменационных работах по электродинамике в 2022–2024 гг.

Предназначено для студентов-физиков, информатиков и геофизиков НГУ.

ББК В313 я 73-4

УДК 537 (075.8)

© Новосибирский государственный университет, 2023

© А. Г. Погосов, С. Л. Синицкий,
В. А. Володин, Л. С. Брагинский,
Е. Ю. Жданов, А. В. Зайцев,
М. И. Захаров, П. В. Калинин,
М. С. Котельникова, Д. А. Максимов,
П. Л. Новиков, Д. А. Похабов,
Е. С. Сандалов, А. А. Симонов,
В. Д. Степанов, О. А. Шушаков,

ISBN xxx-x-xxxx-xxxx-x

2024

Оглавление

Предисловие	5
Условия задач	6
2022/2023 учебный год	6
Контрольная работа 1.1, вар. 1	6
Контрольная работа 1.1, вар. 2	7
Контрольная работа 1.2, вар. 1	8
Контрольная работа 1.2, вар. 2	9
Экзаменационная работа 1	10
Контрольная работа 2.1, вар. 1	12
Контрольная работа 2.1, вар. 2	13
Контрольная работа 2.2, вар. 1	14
Контрольная работа 2.2, вар. 2	16
Экзаменационная работа 2	17
2023/2024 учебный год	19
Контрольная работа 1.1, вар. 1	19
Контрольная работа 1.1, вар. 2	20
Контрольная работа 1.2, вар. 1	21
Контрольная работа 1.2, вар. 2	23
Экзаменационная работа 1	24

Контрольная работа 2.1, вар. 1	26
Контрольная работа 2.1, вар. 2	27
Контрольная работа 2.2, вар. 1	29
Контрольная работа 2.2, вар. 2	30
Решения	32
2022/2023 учебный год	32
Контрольная работа 1.1, вар. 1	32
Контрольная работа 1.1, вар. 2	35
Контрольная работа 1.2, вар. 1	38
Контрольная работа 1.2, вар. 2	43
Экзаменационная работа 1	47
Контрольная работа 2.1, вар. 1	53
Контрольная работа 2.1, вар. 2	57
Контрольная работа 2.2, вар. 1	59
Контрольная работа 2.2, вар. 2	63
Экзаменационная работа 2	65
2023/2024 учебный год	74
Контрольная работа 1.1, вар. 1	74
Контрольная работа 1.1, вар. 2	77
Контрольная работа 1.2, вар. 1	79
Контрольная работа 1.2, вар. 2	83
Экзаменационная работа 1	86
Контрольная работа 2.1, вар. 1	93
Контрольная работа 2.1, вар. 2	96
Контрольная работа 2.2, вар. 1	99
Контрольная работа 2.2, вар. 2	102
Список литературы	105

Предисловие

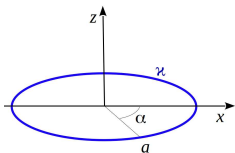
Потребность в данном издании возникла в связи с введением на физическом факультете НГУ письменного экзамена, ставшего позднее и теоретическим туром студенческой олимпиады. Задачи для вариантов отбирались всеми преподавателями, ведущими курс. Необходимые 6–7 задач выбирались из большого числа предлагаемых на конкурсной основе и оценивались в баллах в зависимости от трудности: очень легкие – 1–2 балла, очень трудные – 6–7 баллов. Границы оценок устанавливались в баллах в зависимости от набора задач в варианте.

При оценивании решения предусмотрена оценка-автомат «отлично». Дело в том, что при сдаче устного экзамена учитываются результаты письменного. Получивший на письменном экзамене оценку-автомат «отлично» освобождается от устного экзамена, и ему выставляется итоговая оценка «отлично» в том случае, если студент написал работу на ступень выше «пятерки». При этом обязательным условием является получение оценки «отлично» за работу в семестре. Студенты, набравшие наибольшее количество баллов, становятся призерами олимпиады. Их работы отмечаются деканатом физического факультета.

Условия задач

2022/2023 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1



Задача 1 Тонкое кольцо радиуса a заряжено с линейной плотностью $\varkappa(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi} \varkappa_0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$. Найти потенциал на оси кольца как функцию z (см.

рисунок). (3 б.)

Задача 2

Найти электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ внутри и снаружи заряженного шара радиуса a с объёмной плотностью заряда $\rho(r) = \rho_0 \frac{r^2}{a^2}$. (3 б.)

Задача 3

Тонкое кольцо радиуса a расположено в плоскости xy так, что его центр совпадает с началом координат. Кольцо заряжено с линейной плотностью заряда $\varkappa(\alpha) = \varkappa_0 \cos \alpha$, где α – угол от оси x . Найти первый исчезающий член разложения создаваемого кольцом потенциала электрического поля $\varphi(\mathbf{r})$ на расстояниях $r \gg a$. (3 б.)

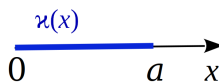
Задача 4

Тонкий стержень длины $4a$ лежит на оси z так, что его центр совпадает с началом координат. Стержень заряжен с линейной плотностью заряда $\varkappa(z) = \varkappa_0 \left(\frac{|z|}{a} - 1 \right)$. Найти первый не исчезающий член разложения создаваемого им потенциала электрического поля $\varphi(r, \theta)$ на больших расстояниях $r \gg a$. (4 б.)

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Задача 1

Отрезок длиной a заряжен с линейной плотностью $\varkappa(x) = \frac{x}{a} \varkappa_0$. Найти потенциал в точке O (см. рисунок). (3 б.)



Задача 2

Найти электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ внутри и снаружи заряженного шара радиуса a с объёмной плотностью заряда $\rho(r) = \rho_0 \frac{r^3}{a^3}$. (3 б.)

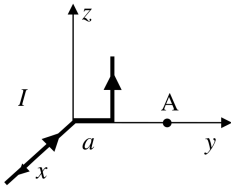
Задача 3

Тонкое непроводящее кольцо радиуса a расположено в плоскости xy так, что его центр совпадает с началом координат. Кольцо заряжено с линейной плотностью заряда $\varkappa(\alpha) = \varkappa_0 \sin \alpha$, где α – угол от оси x . Найти первый не исчезающий член разложения создаваемого кольцом потенциала электрического поля $\varphi(\mathbf{r})$ на больших расстояниях $r \gg a$. (3 б.)

Задача 4

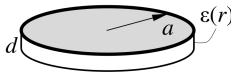
Тонкий стержень длины $4a$ лежит на оси z так, что его центр совпадает с началом координат. Стержень заряжен с линейной плотностью заряда $\varkappa(z) = \begin{cases} \varkappa_0, & |z| \geq a \\ -\varkappa_0, & |z| < a \end{cases}$. Найти первый не исчезающий член разложения создаваемого им потенциала электрического поля $\varphi(r, \theta)$ на больших расстояниях $r \gg a$. (4 б.)

Контрольная работа 1.2, вариант 1



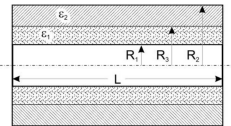
Задача 1

Провод состоит из двух полубесконечных отрезков, соединённых отрезком длины a , как показано на рисунке. Первый полубесконечный расположен вдоль оси x , отрезок длины a расположен вдоль оси y , а второй полубесконечный отрезок расположен в плоскости YZ и параллелен оси z . По проводу течёт ток I . Найти магнитное поле \mathbf{H} в точке A с координатами $(0, b, 0)$. (3 б.)



Задача 2

Пространство между двумя круглыми параллельными проводящими пластинами радиуса a , расположенными на расстоянии d ($d \ll a$), заполнено средой, диэлектрическая проницаемость которой меняется по закону $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \cos \frac{\pi r^2}{6a^2}$, где r – расстояние от оси, проходящей через центры пластин. Найти ёмкость. (4 б.)



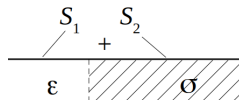
Задача 3

В цилиндрический конденсатор с длиной L и радиусами обкладок R_1 и

$R_2 \ll L$ вставлены без зазоров два коаксиальных цилиндрических слоя с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Радиус границы между слоями R_3 . Конденсатор зарядили до напряжения U_0 , после чего источник отключили. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы вынуть внешний диэлектрический слой (сила трения отсутствует). (4 б.)

Задача 4

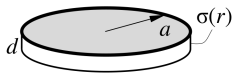
Слой внутри плоского конденсатора содержит непроводящий диэлектрик площадью S_1 с диэлектрической проницаемостью ϵ и проводник площадью S_2 с проводимостью σ ($\epsilon_2 = 1$) (см. рисунок). Найти время релаксации зарядов, нанесенных на пластины конденсатора. (4 б.)



Контрольная работа 1.2, вариант 2

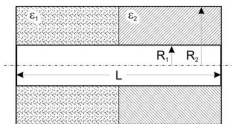
Задача 1

Пространство между двумя круглыми параллельными проводящими пластинами радиуса a , расположенными на расстоянии d ($d \ll a$), заполнено средой, проводимость которой меняется по закону $\sigma(r) = \sigma_0 \cos \frac{\pi r^2}{6a^2}$, где r – расстояние от оси, проходящей через центры пластин. Найти сопротивление. (4 б.)



Задача 2

В одну половину цилиндрического конденсатора с длиной L и радиусами обкладок R_1 и $R_2 \ll L$ вставлен без зазоров цилиндрический слой с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , а в другую половину – с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Конденсатор зарядили до напряжения U_0 ,

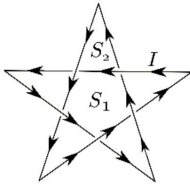


после чего внешний источник отключили. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы вынуть диэлектрический слой с ϵ_1 (сила трения отсутствует). (4 б.).

Задача 3

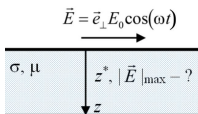
Слой внутри цилиндрического конденсатора содержит непроводящий диэлектрик углового размера α с диэлектрической проницаемостью ϵ и, в остальной области, проводник с проводимостью σ (диэлектрическая проницаемость равна 1) (см. рисунок). Найти время релаксации зарядов, нанесенных на пластины конденсатора. (4 б.)

Экзаменационная работа 1



Задача 1

Электрический ток I бежит по контуру в виде звезды (в местах пересечений контакта нет). Найти магнитный момент контура, если площади S_1 и S_2 известны. (2 б.)

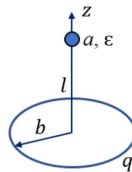


Задача 2

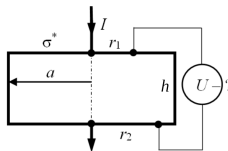
Электрическое поле в верхнем полупространстве ($z < 0$) меняется по закону $\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t \mathbf{e}_\perp$, где \mathbf{e}_\perp — единичный вектор, перпендикулярный оси z . Нижнее полупространство ($z > 0$) занимает среда с магнитной проницаемостью μ и проводимостью σ . В момент времени, когда поле в верхнем полупространстве равно нулю, найти, на каком расстоянии z^* от поверхности значение модуля электрического поля E максимально и чему оно равно. (3 б.)

Задача 3

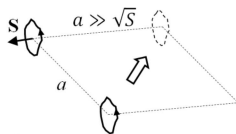
Найти силу, действующую на равномерно заряженное кольцо радиуса b с зарядом q со стороны маленького диэлектрического шарика радиуса a с проницаемостью ϵ , расположенного на оси кольца на расстоянии l от его центра. При этом считать, что $a \ll l, b$. (4 б.)

**Задача 4**

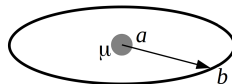
На основания и боковую поверхность непроводящего цилиндра радиуса a и длины h нанесена тонкая плёнка с поверхностной проводимостью σ^* . К центрам оснований присоединены концы проводника, по которому течёт ток I . Контакты вольтметра присоединены к двум точкам на противоположных основаниях, отстоящим от оси на расстояния r_1 и r_2 соответственно. Какое напряжение U показывает вольтметр? (4 б.)

**Задача 5**

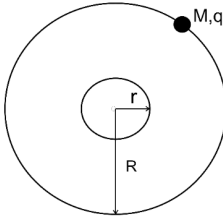
Два одинаковых плоских сверхпроводящих витка площади S и индуктивности L , расположены в одной плоскости на расстоянии a ($a \ll \sqrt{S}$) друг от друга. В витках течёт одинаковый ток, направленный в одну и ту же сторону. Во сколько раз изменится ток в витках, если поместить их на расстояние a друг от друга на линии, перпендикулярной плоскости витков (см. рисунок)? (4 б.)

**Задача 6**

Каково изменение индуктивности ΔL кругового витка радиуса b при вне-



сении в его центр маленького шарика радиуса $a \ll b$ с магнитной проницаемостью μ ? (5 б.)



Задача 7

Маленькая бусинка массы M , заряженная зарядом q , может двигаться без трения вдоль спицы в форме окружности радиуса R , расположенной горизонтально. Кольцевой контур радиуса $r \ll R$ расположен в центре спицы так, что плоскости контура и спицы совпадают. Вначале бусинка покоится, а ток в контуре отсутствует. Затем в контуре появляется ток, и бусинка приходит в движение. Считая, что ток в контуре увеличивается от нуля до некоторого постоянного значения I_0 , определить установившуюся скорость вращения бусинки. (6 б.)

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Задача 1

Неполяризованный свет падает по нормали на стопку из трёх поляроидов. Угол между осями поляризации первого и последнего равен 90° , а первого и среднего – 45° . На какой минимальный угол нужно повернуть средний поляроид, чтобы интенсивность прошедшего света упала в 2 раза? (3 б.)

Задача 2

Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией падает из воздуха на плоскую границу диэлектрика с проницаемостью $\epsilon = 1.5$ ($\mu = 1$) под углом 60° . Найти от-

ношение полуосей эллиптически поляризованной отражённой волны. (3 б.)

Задача 3

Найти изменение критической частоты прямоугольного волновода сечением $a \times b$ ($a > b$) при его заполнении газом с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$ при условии, что $a \gg \frac{\pi c}{\omega_0}$. Критическая частота – это минимальная частота ЭМ волны, которая способна распространяться в волноводе без затухания (4 б.)

Задача 4

Проводящая бесконечно тонкая поверхность, для которой имеет место закон Ома $J = \sigma^* E$, где J – ток через единицу длины, а σ^* – её поверхностная проводимость, расположена параллельно бесконечному идеально проводящему полупространству на расстоянии $\lambda/4$ от него. На неё по нормали падает плоская монохроматическая линейно поляризованная электромагнитная волна. Вне проводников – вакуум. Найти отношение интенсивности волны, отражённой от этой системы, к интенсивности падающей волны. (4 б.)

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Задача 1

Неполяризованный свет падает по нормали на стопку из трёх поляроидов. Угол между осями поляризации первого и последнего равен 90° , а первого и среднего – 45° . На какой минимальный угол нужно повернуть средний поляроид, чтобы интенсивность прошедшего света упала в 4 раза? (3 б.)

Задача 2

Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией падает под углом 30° из прозрачной диэлектрической среды с проницаемостью $\epsilon = 2$ ($\mu = 1$) в воздух. Найти отношение полуосей эллиптически поляризованной отражённой волны. (3 б.)

Задача 3

В пустом прямоугольном волноводе 5×1 см с идеально проводящими стенками вдоль оси z распространяется H -волна, для которой фазовая скорость в 5 раз больше, чем групповая. Найти минимально возможное значение k_z , при котором возможно распространение такой волны.

Задача 4

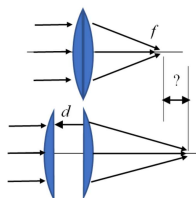
Проводящая бесконечно тонкая поверхность, для которой имеет место закон Ома $J = \sigma^* E$, где J – ток через единицу длины, а σ^* – её поверхностная проводимость, расположена параллельно бесконечному идеально проводящему полупространству на расстоянии $\lambda/4$ от него. На неё по нормали падает плоская монохроматическая линейно поляризованная электромагнитная волна. Вне проводников – вакуум. Найти мощность, выделяемую в единице площади тонкой поверхности. (4 б.)

Контрольная работа 2.2, вариант 1**Задача 1**

Во сколько раз нужно увеличить ширину одной из щелей в опыте Юнга, чтобы видность интерференционной картины уменьшилась вдвое по сравнению со случаем одинаковых щелей? (3 б.)

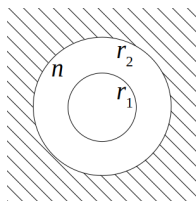
Задача 2

Тонкая симметричная двояковыпуклая линза составлена из двух одинаковых тонких плоско-выпуклых линз. При освещении её слева пучком света, параллельным оптической оси, преломлённые линзой лучи собираются в точку на оси на расстоянии f . На какое расстояние сдвинется точка, в которой собираются лучи, если левую половинку линзы отодвинуть на расстояние d от правой? (4 б.)



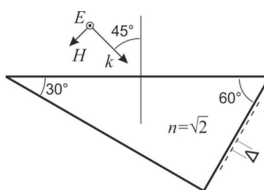
Задача 3

Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ падает по нормали на светонепроницаемый экран с круглым отверстием радиуса $r_2 = \sqrt{\frac{2\lambda z_p}{3}}$, где z_p – расстояние до точки наблюдения Р, находящейся на оптической оси за экраном. В отверстие вставлено стекло однородной толщины с оптической плотностью n . На какую минимальную величину нужно увеличить толщину стекла в области круга радиуса $r_1 = \sqrt{\frac{\lambda z_p}{3}}$, чтобы занулить интенсивность в точке Р? (4 б.)



Задача 4

Плоская монохроматическая ТЕ-волна с частотой ω падает из воздуха на горизонтальную поверхность стеклянного клина под углом 45° . Показатель преломления стекла $n = \sqrt{2}$. Сечение клина – это прямоугольный треугольник с острыми углами 30° и 60° (см. рисунок). На нижней правой грани клина в проходящем свете наблюдается интерференционная картина,

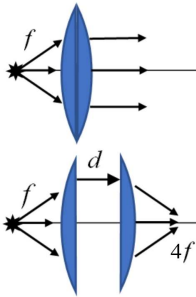


создаваемая двумя волнами: преломленной на верхней грани и отраженной от нижней левой грани. Найти расстояние Δ между интерференционными полосами (многократными отражениями пренебречь). (4 б.)

Контрольная работа 2.2, вариант 2

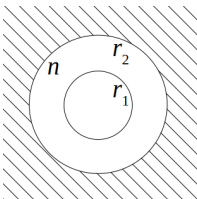
Задача 1

Во сколько раз нужно уменьшить ширину одной из щелей в опыте Юнга, чтобы видность интерференционной картины уменьшилась втрое по сравнению со случаем одинаковых щелей? (3 б.)



Задача 2

Тонкая симметричная двояковыпуклая линза составлена из двух одинаковых тонких плоско-выпуклых линз. При освещении её слева светом от точечного источника, расположенного на оптической оси на расстоянии f , преломлённый линзой свет представляет собой пучок свет, параллельный оптической оси. На какое расстояние d правую половинку линзы следует отодвинуть от левой, чтобы свет сфокусировался в точку на оптической оси, расположенную на расстоянии $4f$ от правой линзы? (4 б.)



Задача 3

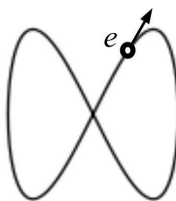
Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ падает по нормали на светонепроницаемый экран с круглым отверстием радиуса $r_2 = \sqrt{\frac{2\lambda z_p}{3}}$, где z_p – расстояние до точки наблюдения P, находящейся на оптической

оси за экраном. В отверстие вставлено стекло однородной толщины с оптической плотностью n . На какую минимальную величину нужно увеличить толщину стекла в области круга радиуса $r_1 = \sqrt{\frac{\lambda z_p}{3}}$, чтобы интенсивность в точке P стала максимальной? (4 б.)

Экзаменационная работа 2

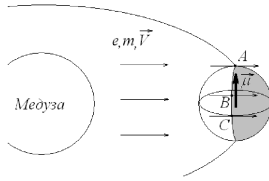
Задача 1

Заряд e движется вдоль траектории, представляющей собой фигуру Лиссажу, совершая гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях: $\mathbf{r}(t) = a \cdot \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_x + a \cdot \sin 2\omega t \cdot \mathbf{e}_y$. Найти усреднённую по времени полную мощность $\langle I \rangle$ дипольного излучения (3 б.). Найти отношение усреднённых мощностей излучения в направлении оси x и оси z (1 б.).



Задача 2

Излучение антенной решётки с периодом d , состоящей из $N \gg 1$ синхронных вибраторов, направлено в сторону Луны. Определить длину волны λ , при которой угловая ширина $\Delta\theta$ главного лепестка диаграммы направленности излучения равна угловому размеру Луны. (Ширина $\Delta\theta$ соответствует расстоянию между нулевыми минимумами интенсивности). Расстояние до Луны и ее диаметр принять равными $400 \cdot 10^3$ км и $3.5 \cdot 10^3$ км соответственно. Ширина антенной решетки равна 10 м. (4 б.)

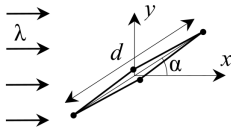


Задача 3

Третья планета системы Медуза имеет магнитный момент, параллельный оси собственного вращения и перпендикулярный плоскости вращения планеты вокруг звезды. При прохождении потока заряженных частиц от звезды через магнитное поле планеты возникает излучение электромагнитных волн. Оценить, во сколько раз отличается интенсивность в единицу телесного угла в направлениях по нормали к поверхности планеты из точек на полюсе (точка А) и из точки на широте 45° (точка В) соответственно (3 б.). Какова интенсивность в единицу телесного угла в направлении по нормали к поверхности из точки С на экваторе (1 б.)? В точках А, В и С скорость частиц считать нерелятивистской и направленной вдоль линии звезда-планета по касательной к поверхности планеты.

Задача 4

Плоская немонохроматическая волна (диапазон волновых чисел от $k_0 - \Delta k/2$ до $k_0 + \Delta k/2$) интенсивностью I_0 падает по нормали на круглое отверстие радиусом a в непрозрачном экране. Найти распределение интенсивности $I(z)$ за отверстием на оси z , перпендикулярной плоскости отверстия и проходящей через его центр, при $z \gg a$. Амплитуды волн с разными значениями k одинаковы.



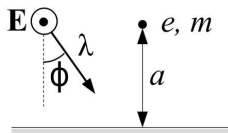
Задача 5

Плоская электромагнитная волна с длиной волны λ , распространяющаяся вдоль оси x , рассеивается на четырёх электронах, расположенных в вершинах ромба, лежащего в плоскости xy . Большая диагональ ромба длиной d со-

ставляет угол α с осью, длина малой диагонали ромба много меньше λ . Найти отношение I_{\perp}/I_{\parallel} интенсивностей волн, рассеянных в поперечном (вдоль оси y) и в продольном (вдоль оси x) направлениях. (5 б.)

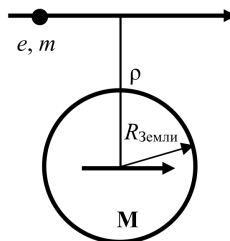
Задача 6

Плоская ТЕ-волна с длиной λ падает под углом ϕ на идеально проводящую плоскость. На расстоянии a от плоскости находится свободный заряд e массой m . Найти дифференциальное сечение рассеяния $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. Время падения заряда на плоскость считать много большим a/c .



Задача 7

Электрон космических лучей с энергией $K = 10^{10}$ эВ (0,016 эрг) пролетает в магнитном поле Земли с прицельным параметром $\rho = 2R_{\text{Земли}}$. Оценить излученную электроном энергию ЭМ волн, если направления траектории электрона и магнитного диполя Земли совпадают (заряд электрона $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГС, масса электрона $m = 9.1 \cdot 10^{-28}$ г, $R_{\text{Земли}} = 6400$ км, скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, магнитный момент Земли $= 8 \cdot 10^{25}$ Гс/см³). (6 б.)



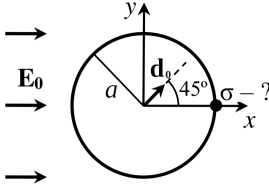
2023/2024 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Задача 1

В сфере радиуса r , заряженной с поверхностной плотностью σ , сделали малое отверстие радиусом $a \ll r$. Найти

поле в центре сферы. (3 б.)



Задача 2

Металлическая сфера радиуса a помещена во внешнее однородное электрическое поле E_0 , направленное вдоль оси x . В центре сферы находится точечный диполь с дипольным моментом d_0 , направленным под углом 45° к оси x . Найти плотность заряда σ на поверхности сферы в точке, лежащей на оси x . (4 б.)

Задача 3

В центре диэлектрического шара радиуса b помещён проводящий шар радиуса $a < b$ со свободным зарядом q . При этом известно, что потенциал $\varphi(a \leq r \leq b) = \frac{qa}{2r^2}$. Найти как диэлектрическая проницаемость зависит от r ($\epsilon(r) = ?$). (4 б.)

Задача 4

Система зарядов состоит из двух тонких отрезков длины $2a$ каждый. Первый отрезок равномерно заряжен зарядом q , лежит на оси x и занимает область оси $(-a, a)$. Вторым отрезком равномерно заряжен зарядом $-q$, лежит на оси y и занимает область оси $(-a, a)$. Найти потенциал электрического поля на больших расстояниях от системы зарядов $\varphi(r)$ ($r \gg 2a$). (5 б.)

Контрольная работа 1.1, вариант 2

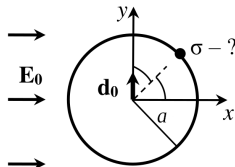
Задача 1

В сфере радиуса r , заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{q}{4\pi r^2}$, сделали малое отверстие радиусом $a \ll r$.

В центр сферы поместили заряд $-q$. Найти поле на оси, соосной оси отверстия, на расстоянии $l \gg a$ от центра сферы. (3 б.)

Задача 2

Металлическая сфера радиуса a помещена во внешнее однородное электрическое поле \mathbf{E}_0 , направленное вдоль оси x . В центре сферы находится точечный диполь с дипольным моментом \mathbf{d}_0 , направленным по оси y . Найти плотность заряда σ на поверхности сферы в точке, лежащей на биссектрисе угла xOy . (4 б.)



Задача 3

В центре диэлектрического шара радиуса b помещён проводящий шар радиуса $a < b$ со свободным зарядом q . При этом известно, что потенциал $\varphi(a \leq r \leq b) = \frac{qa}{2r^2}$. Найти как объёмная плотность связанного заряда зависит от r ($\rho_\epsilon(r) = ?$). (4 б.)

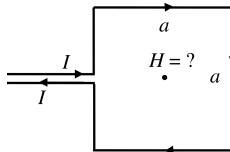
Задача 4

Тонкий отрезок, заряженный с линейной плотностью $\kappa = \kappa_0(3(z/a)^2 - 1)$, лежит на оси z и занимает область оси $(-a, a)$. Найти потенциал электрического поля на больших расстояниях от системы зарядов $\varphi(\mathbf{r})$ ($r \gg a$).

Контрольная работа 1.2, вариант 1

Задача 1

Ток I бежит по полубесконечному проводу, который образует квадратную рамку со стороной a и возвращается по



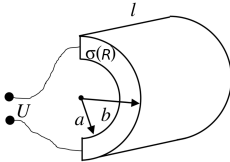
очень близкому параллельному полубесконечному проводу. Найти магнитное поле в центре квадратной рамки. (3 б.)

Задача 2

Диэлектрический шар с проницаемостью $\varepsilon = 1$ и радиусом a заряжен с объёмной плотностью $\rho(r) = \alpha/\sqrt{r}$. Найти изменение энергии электростатического поля во всём пространстве, если в результате фазового перехода шар из непроводящего состояния перейдёт в проводящее состояние. (4 б.)

Задача 3

Пространство между обкладками незаряженного цилиндрического конденсатора длины l заполнено однородной средой с проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε . Радиусы обкладок a и b ($l \gg b - a$). Конденсатор отключили от батарейки с напряжением U . Какая энергия выделится в виде Джоулева тепла за время t после подключения батарейки? (4 б.)



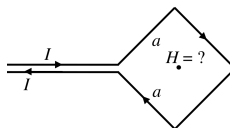
Задача 4

Из толстой длинной трубы длины l с радиусами a и b ($l \gg b - a$), сделанной из неоднородного материала с проводимостью $\sigma(R) = \sigma_0(R/a)$, вырезана вдоль оси часть с угловым размером π . К продольным плоскостям разреза подведено напряжение. Найти сопротивление системы при таком подключении. Краевыми эффектами пренебречь. (5 б.)

Контрольная работа 1.2, вариант 2

Задача 1

Ток I бежит по полубесконечному проводу, который образует квадратную рамку со стороной a и возвращается по очень близкому параллельному полубесконечному проводу. Найти магнитное поле в центре квадратной рамки. (3 б.)



Задача 2

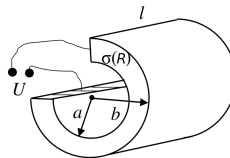
Диэлектрический шар с проницаемостью $\varepsilon = 1$ и радиусом a заряжен с объёмной плотностью $\rho(r) = \beta\sqrt{r}$. Найти изменение энергии электростатического поля во всём пространстве, если в результате фазового перехода шар из непроводящего состояния перейдёт в проводящее состояние. (4 б.)

Задача 3

Пространство между обкладками разомкнутого цилиндрического конденсатора длины l заполнено однородной средой с проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε . Радиусы обкладок a и b ($l \gg b - a$). В начальный момент времени на внутренней обкладке цилиндрического конденсатора находился заряд q_0 . Какая энергия выделится в виде Джоулева тепла за время t после подключения батарейки? (4 б.)

Задача 4

Из толстой длинной трубы длины l с радиусами a и b ($l \gg b - a$), сделанной из неоднородного материала с проводимостью $\sigma(R) = \sigma_0(\frac{R}{a})^2$, вырезана вдоль оси часть с угловым



размером $\frac{\pi}{2}$. К продольным плоскостям разреза подведено напряжение. Найти сопротивление системы при таком подключении. Краевыми эффектами пренебречь. (5 б.)

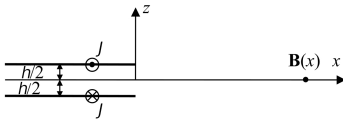
Экзаменационная работа 1

Задача 1

Сопротивление длинного цилиндрического проводника измеряют на частоте, соответствующей сильному скин-эффекту. Оценить, во сколько раз увеличится сопротивление проводника, если частоту измерений увеличить втрое, а сам провод раскатать до вдвое меньшего диаметра с соответствующим увеличением длины. (3 б.)

Задача 2

Между двумя концентрическими проводящими сферами с радиусами R_1 и R_2 находится точечный заряд q на расстоянии a ($R_2 > a > R_1$) от центра сфер. Внутренняя сфера заряжена зарядом Q , внешняя не заряжена. Сферы соединяют между собой тонким проводником. Найти, какой заряд ΔQ перетечёт на внешнюю сферу. (3 б.)

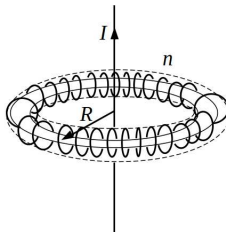


Задача 3

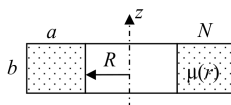
По полуплоскости ($z = -\frac{h}{2}$, $x < 0$) течёт однородный поверхностный ток J , направленный по оси y , а по полуплоскости ($z = +\frac{h}{2}$, $x < 0$) — такой же ток в противоположном направлении. Найти вектор магнитной индукции $\mathbf{B}(x)$ на оси x при $x \gg h$. (4 б.)

Задача 4

По оси тороидального короткозамкнутого сверхпроводящего соленоида радиуса R с плотностью намотки n и радиусом витков, много меньшим R , проходит прямой длинный провод. Сначала токи в проводе и в соленоиде равны нулю. Затем по проводу пускают ток I . Найти ток I_s , который возникнет в обмотке соленоида. (4 б.)

**Задача 5**

Найти индуктивность тороидально-го соленоида прямоугольного сечения размером $a \times b$ с внутренним радиусом R , числом витков N , заполненного неоднородным магнетиком с магнитной проницаемостью $\mu(r) = \mu_0 \frac{r}{R}$, где r – расстояние до оси соленоида. (4 б.)

**Задача 6**

Два идеально проводящих шарика расположены в однородной среде с проводимостью σ_0 на большом по сравнению с их радиусами расстоянии $2l$ друг от друга. Найти изменение сопротивления ΔR между шариками, если посередине между ними поместить другой маленький шарик радиуса a ($a \ll l$) с проводимостью σ . (6 б.)

Задача 7

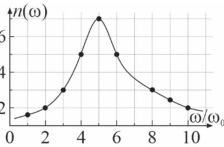
Тонкое сверхпроводящее кольцо радиуса R лежит на горизонтальном столе. Ток в кольце отсутствует. Экспериментатор подносит к кольцу постоянный магнит, размеры которого существенно меньше радиуса кольца. После того как магнит отпускают, а его колебания затухнут, магнит

оказывается подвешенным на оси кольца на расстоянии h от его центра. Удерживая магнит в этом положении, кольцо ненадолго переводят в нормальное состояние, после чего возвращают в сверхпроводящее. Затем экспериментатор поднимает магнит, не меняя его ориентации, вследствие чего кольцо отрывается от стола и оказывается подвешенным горизонтально. При этом магнит находится на оси кольца на расстоянии H от его центра. Найти отношение масс кольца и магнита. (6 б.)

Контрольная работа 2.1, вариант 1

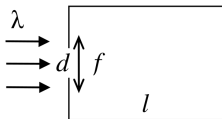
Задача 1

1. Плоская монохроматическая ТЕ-волна падает из вакуума на плоскую границу раздела среды с $\varepsilon = \mu = \sqrt{3}$ под углом 60 градусов. Найти коэффициент отражения по амплитуде. (3 б.)



Задача 2

Волновой пакет $E(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(k_z z - \omega_0 t) \cos(4k_z z - 4\omega_0 t)$, где $k_z = \omega_0/c$, падает из воздуха по нормали на плоскую границу диэлектрика с показателем преломления, частотная зависимость которого показана на графике (см. рис.). Найти максимальное значение напряжённости электрического поля в отражённом волновом пакете. (4 б.)



Задача 3

Вплотную к отверстию диаметром d камеры-обскуры длиной l соосно с ним прижата тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием f ($d \ll f < l$). Оценить размер

пятна на задней стенке камеры при падении по нормали к отверстию плоской волны длиной λ . (4 б.)

Задача 4

На открытый конец пустого прямоугольного волновода сечения $3a \times 2a$ в некоторый момент времени направляют квазимонохроматический электромагнитный импульс с частотой $\omega = \frac{\pi c}{a\sqrt{2}}$ и разбросом частот $\Delta\omega \ll \omega$, который возбуждает в нём волновой пакет со всеми возможными модами для данной частоты. Возбуждённый пакет, распространяясь по волноводу, постепенно распадается на несколько пакетов, каждый со своей модой. Приёмник, расположенный внутри волновода на большом расстоянии от открытого края, последовательно зарегистрировал пакеты с разными модами. Приход пакета с какой модой был зарегистрирован приёмником последним? Расплыванием пакетов пренебречь. (4 б.)

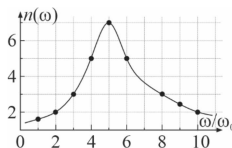
Контрольная работа 2.1, вариант 2

Задача 1

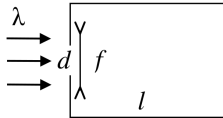
1. Плоская монохроматическая ТМ-волна падает из вакуума на плоскую границу раздела среды с $\varepsilon = \mu = \sqrt{3}$ под углом 60° градусов. Найти коэффициент отражения по амплитуде. (3 б.)

Задача 2

Волновой пакет $E(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(2k_z z - 2\omega_0 t) \cos(4k_z z - 4\omega_0 t)$, где $k_z = \omega_0/c$, падает из воздуха по нормали на плоскую границу диэлектрика с показателем преломления, частотная зависимость которого показана на



графике (см. рис.). Найти максимальное значение напряжённости электрического поля в отражённом волновом пакете. (4 б.)



Задача 3

Вплотную к отверстию диаметром d камеры-обскуры длиной l соосно с ним прижата тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием f ($d \ll f < l$). Оценить размер пятна на задней стенке камеры при падении по нормали к отверстию плоской волны длиной λ . (4 б.)

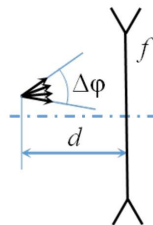
Задача 4

На открытый конец пустого прямоугольного волновода сечения $3a \times a$ в некоторый момент времени направляют квазимонохроматический электромагнитный импульс с частотой $\omega = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\pi c}{a}$ и разбросом частот $\Delta\omega \ll \omega$, который возбуждает в нём волновой пакет со всеми возможными модами для данной частоты. Возбуждённый пакет, распространяясь по волноводу, постепенно распадается на несколько пакетов, каждый со своей модой. Приёмник, расположенный внутри волновода на большом расстоянии от открытого края, последовательно зарегистрировал пакеты с разными модами. Приход пакета с какой модой был зарегистрирован приёмником последним? Расплыванием пакетов пренебречь. (4 б.)

Контрольная работа 2.2, вариант 1

Задача 1

Из некоторой точки, отстоящей на расстоянии d от тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием f , выходит световой пучок с угловым размером (разбросом углов лучей) $\Delta\phi$. Найти угловой размер $\Delta\phi'$ этого пучка на выходе из линзы. (3 б.)

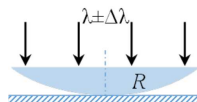


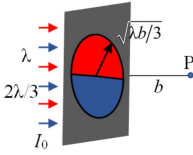
Задача 2

На непрозрачный экран-ширму с двумя параллельными тонкими щелями перпендикулярно его плоскости падает плоская монохроматическая волна. На проекционном экране, расположенном параллельно экрану-ширме вдали от него, наблюдается интерференционная картина (схема Юнга). Светлые интерференционные полосы пронумерованы так, что полоса, наблюдающаяся в центре экрана, на равном удалении от щелей, названа 0-й. Проекционный экран начинают удалять от экрана-ширмы с некоторой постоянной скоростью. С какой скоростью движется вдоль экрана 5-я интерференционная полоса, если известно, что она удаляется от 2-й со скоростью u ? (3 б.)

Задача 3

Плоская квазимонохроматическая световая волна со спектральным диапазоном $\lambda \pm \Delta\lambda$ падает по нормали на плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны R , лежащую на плоском зеркале. Найти радиус интерференционной картины, наблюдаемой вблизи оси линзы (максимальный радиус видимого кольца Ньютона). (3 б.)

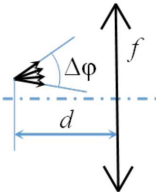




Задача 4

В круглое отверстие радиуса $\sqrt{\frac{\lambda b}{3}}$ в непрозрачном экране вставлены два полукруглых светофильтра, пропускающих свет с длиной волны λ и $\frac{2\lambda}{3}$ соответственно, каждый из которых закрывает половину отверстия. Экран с отверстием освещается плоской волной, представляющей собой сумму двух волн с длинами λ и $\frac{2\lambda}{3}$ с одинаковыми интенсивностями. Суммарная интенсивность падающей волны равна I_0 . Найти интенсивность в точке P , расположенной на оси отверстия на расстоянии b от него. (5 б.)

Контрольная работа 2.2, вариант 2



Задача 1

Из некоторой точки, отстоящей на расстоянии d от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием f , выходит световой пучок с угловым размером (разбросом углов лучей) $\Delta\phi$. Найти угловой размер $\Delta\phi'$ этого пучка на выходе из линзы. (3 б.)

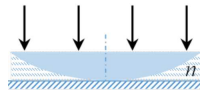
Задача 2

На непрозрачный экран-ширму, имеющий две параллельные тонкие щели, расположенные на расстоянии d друг от друга, перпендикулярно его плоскости падает плоская монохроматическая волна с длиной λ . На проекционном экране, расположенном параллельно экрану-ширме вдали от него, наблюдается интерференционная картина (схема Юнга). Светлые интерференционные полосы пронумерованы по порядку так, что полоса, наблюдающаяся в центре

экрана, на равном удалении от щелей, названа 0-й. Проекционный экран начинают удалять от экрана-ширмы со скоростью v . С какой скоростью 5-я интерференционная полоса удаляется от (-2) -й полосы? (3 б.)

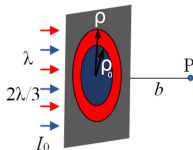
Задача 3

Плоская квазимонохроматическая световая волна падает по нормали на плоско-выпуклую линзу, лежащую на плоском зеркале. Во сколько раз изменится радиус интерференционной картины, наблюдаемой вблизи оси линзы, (максимальный радиус видимого кольца Ньютона), если пространство между линзой и зеркалом заполнить средой с показателем преломления n ? (3 б.)



Задача 4

В центр круглого отверстия радиуса $\rho = \sqrt{\lambda b}$ в непрозрачном экране вставлен светофильтр радиуса $\rho_0 = \sqrt{\frac{2\lambda b}{3}}$, пропускающий свет с длиной волны $\frac{2\lambda}{3}$, а в незакрытую этим светофильтром кольцевую область отверстия вставлен другой светофильтр, пропускающий свет с длиной волны λ и имеющий форму кольца с внутренним и внешним радиусом ρ_0 и ρ соответственно. Экран с отверстием освещается плоской волной, представляющей собой сумму двух волн с длинами λ и $\frac{2\lambda}{3}$ с одинаковыми интенсивностями. Суммарная интенсивность падающей волны равна I_0 . Найти интенсивность в точке P , расположенной на оси отверстия на расстоянии b от него. (5 б.)



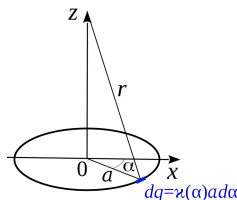
Решения

2022/2023 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1

Выделим на кольце элементарный отрезок $ad\alpha$. Вклад элементарного отрезка в потенциал на оси кольца составляет



$$d\varphi(z) = \frac{dq}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\varkappa(\alpha)ad\alpha}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\varkappa_0\alpha ad\alpha}{2\pi\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Полный потенциал находим интегрированием по длине кольца:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{\varkappa_0\alpha ad\alpha}{2\pi\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\varkappa_0 a}{2\pi\sqrt{a^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} \alpha d\alpha = \\ &= \frac{\varkappa_0 a}{2\pi\sqrt{a^2 + z^2}} \cdot \frac{(2\pi)^2}{2} = \frac{\varkappa_0 \pi a}{\sqrt{a^2 + z^2}}.\end{aligned}$$

Решение задачи 2

Применим теорему Гаусса. В качестве области интегрирования возьмем шар радиуса r с центром в начале координат. Из симметрии задачи следует, что поле направлено по радиусу и зависит только от радиуса. Тогда теорема Гаусса принимает вид:

$$\oiint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oiint E(r) dS = E(r) \oiint dS = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q(r).$$

В случае $r < a$ заряд внутри области интегрирования равен

$$Q(r) = \int_0^r \rho(\tilde{r}) d\tilde{V} = \int_0^r \rho_0 \frac{\tilde{r}^2}{a^2} \cdot 4\pi \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \frac{4\pi\rho_0 r^5}{5a^2},$$

а поле

$$E(r) = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{5a^2}.$$

В случае $r \geq a$ заряд внутри области интегрирования равен

$$Q(a) = \frac{4\pi\rho_0 a^5}{5a^2} = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{5},$$

а поле

$$E(r) = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{5r^2}.$$

Решение задачи 3

Задача на мультипольное разложение потенциала.

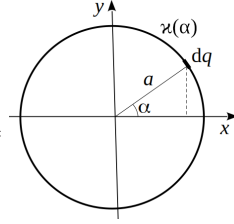
Кулоновский член равен нулю, так как равен нулю полный заряд системы:

$$Q = \int_0^{2\pi} \varkappa(\alpha) a d\alpha = \int_0^{2\pi} \varkappa_0 \cos \alpha a d\alpha = a \varkappa_0 \sin \alpha \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Дипольный момент равен:

$$d = d_x = \int_0^{2\pi} x dq = \int_0^{2\pi} a \cos \alpha \kappa_0 \cos \alpha a d\alpha =$$

$$= \pi a \kappa_0.$$



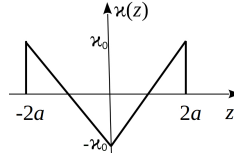
Поэтому доминирующим является потенциал диполя

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{d_x x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\pi a \kappa_0 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Решение задачи 4

Задача на мультипольное разложение потенциала.

Из симметрии распределения плотности заряда (см. рисунок) следует что полный заряд и дипольный момент системы равны нулю.



Вычисляем квадрупольные моменты:

$$D_{zz} = \int (3z^2 - z^2) dq = \int (3z^2 - z^2) \kappa(z) dz =$$

$$= \int_0^{2a} (3z^2 - z^2) \kappa_0 \left(\frac{z}{a} - 1\right) dz - \int_{-2a}^0 (3z^2 - z^2) \kappa_0 \left(\frac{z}{a} + 1\right) dz =$$

$$= \kappa_0 \left(\left(\frac{2z^4}{4a} - \frac{2z^3}{3} \right) \Big|_0^{2a} - \left(\frac{2z^4}{4a} + \frac{2z^3}{3} \right) \Big|_{-2a}^0 \right) = \frac{16\kappa_0 a^3}{3},$$

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{D_{zz}}{2} = -\frac{8\kappa_0 a^3}{3},$$

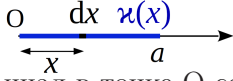
недиагональные компоненты $D_{ij} = 0$, так как для них равны нулю подынтегральные выражения.

Итак,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{D_{ij}x_i x_j}{2r^5} = \frac{D_{zz}z^2 + D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2}{2r^5} = \frac{D_{zz}(2z^2 - (x^2 + y^2))}{4r^5} = \\ &= \frac{D_{zz}r^2(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{4r^5} = \frac{D_{zz}(3\cos^2\theta - 1)}{4r^3} = \frac{4\kappa_0 a^3(3\cos^2\theta - 1)}{3r^3}.\end{aligned}$$

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Решение задачи 1

Выделим на отрезке элемент dx .
 Вклад элементарного отрезка в потенциал в точке O составляет

$$d\varphi(0) = \frac{dq}{x} = \frac{\kappa(x)dx}{x} = \frac{\kappa_0 x dx}{ax} = \frac{\kappa_0 dx}{a}.$$

Полный потенциал находим интегрированием по длине кольца *:

$$\varphi(0) = \int_0^a \frac{\kappa_0 dx}{a} = \frac{\kappa_0}{a} \int_0^a dx = \frac{\kappa_0}{a} \cdot a = \kappa_0.$$

Решение задачи 2

Применим теорему Гаусса. В качестве области интегрирования возьмем шар радиуса r с центром в начале координат. Из симметрии задачи следует, что поле направлено по

*Как можно самостоятельно убедиться, потенциал в любой другой точке отрезка равен бесконечности. Поле же оказывается бесконечным во всех точках отрезка. Эта сингулярность является следствием бесконечно малой толщины отрезка. При ненулевой толщине поле становится конечным, но при прочих равных условиях оно растет с уменьшением толщины.

радиусу и зависит только от радиуса. Тогда теорема Гаусса принимает вид:

$$\oiint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oiint E(r) dS = E(r) \oiint dS = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q(r).$$

В случае $r < a$ заряд внутри области интегрирования равен

$$Q(r) = \int_0^r \rho(\tilde{r}) d\tilde{V} = \int_0^r \rho_0 \frac{\tilde{r}^3}{a^3} \cdot 4\pi \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \frac{4\pi \rho_0 r^6}{6a^3},$$

а поле

$$E(r) = \frac{4\pi \rho_0 r^4}{6a^3}.$$

В случае $r \geq a$ заряд внутри области интегрирования равен

$$Q(a) = \frac{4\pi \rho_0 a^6}{6a^3} = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{6},$$

а поле

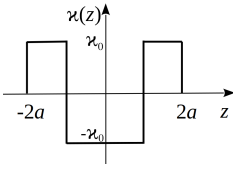
$$E(r) = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{6r^2} = \frac{2\pi \rho_0 a^3}{3r^2}.$$

Решение задачи 3

Решение идентично задаче 3 вар. 1 (см. на стр. 34) с заменой осей $x \rightarrow y$ (поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{d_y y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\pi a \kappa_0 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Решение задачи 4



Задача на мультипольное разложение потенциала.

Из симметрии распределения плотности заряда (см. рисунок) следует, что полный заряд и дипольный момент системы равны нулю.

Вычисляем квадрупольные моменты:

$$\begin{aligned} D_{zz} &= \int (3z^2 - z^2) dq = \int 2z^2 \kappa(z) dz = \\ &= \int_{-2a}^{-a} 2\kappa_0 z^2 dz - \int_{-a}^a 2\kappa_0 z^2 dz + \int_a^{2a} 2\kappa_0 z^2 dz = \\ &= \kappa_0 \left(\left. \frac{2z^3}{3} \right|_{-2a}^{-a} - \left. \frac{2z^3}{3} \right|_{-a}^a + \left. \frac{2z^3}{3} \right|_a^{2a} \right) = 8\kappa_0 a^3, \end{aligned}$$

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{D_{zz}}{2} = -4\kappa_0 a^3,$$

недиагональные компоненты $D_{ij} = 0$, так как для них равны нулю подынтегральные выражения.

Итак,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{D_{ij}x_i x_j}{2r^5} = \frac{D_{zz}z^2 + D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2}{2r^5} = \frac{D_{zz}(2z^2 - (x^2 + y^2))}{4r^5} = \\ &= \frac{D_{zz}r^2(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{4r^5} = \frac{D_{zz}(3\cos^2\theta - 1)}{4r^3} = \frac{2\kappa_0 a^3(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}. \end{aligned}$$

вектора \mathbf{D}^* :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\pi} \iint D(r) dS = \int_0^a \frac{\varepsilon_0 U \cos \frac{\pi r^2}{6a^2}}{4\pi d} \cdot 2\pi r dr = \frac{6a^2 \varepsilon_0 U}{4\pi d} \sin \frac{\pi a^2}{6a^2} = \\ &= \frac{3a^2 \varepsilon_0 U}{4\pi d}. \end{aligned}$$

Тогда емкость равна

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{3a^2 \varepsilon_0}{4\pi d}.$$

Потенциал однородного поля удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям на пластинах. Поэтому по теореме единственности предположение об однородном поле верно.

Решение задачи 3

Определим емкость конденсатора в начальном варианте. Пусть на внутренней обкладке содержится заряд Q . Силовые линии \mathbf{E} и \mathbf{D} направлены по радиусу, а их абсолютные величины зависят только от радиуса. Тогда из теоремы Гаусса

$$\mathbf{D}(r) = \frac{2\kappa}{r} \mathbf{e}_r = \frac{2Q}{Lr} \mathbf{e}_r.$$

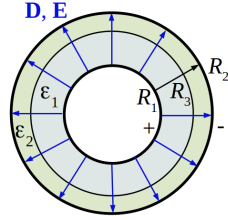
*Полезно отметить, что, в отличие от потенциала, плотность свободных зарядов распределена по пластинам неравномерно. Это следует из граничных условий на нормальные компоненты \mathbf{D} по обе стороны от верхней или нижней пластины:

$$D(r) = 4\pi\sigma(r) \Rightarrow \sigma(r) = \frac{\varepsilon(r)E}{4\pi} = \frac{\varepsilon_0 U \cos \frac{\pi r^2}{6a^2}}{4\pi d}.$$

Отсюда напряженность поля равна

$$E_1(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_1} = \frac{2Q}{\varepsilon_1 L r}, \quad R_1 < r < R_3,$$

$$E_2(r) = \frac{2Q}{\varepsilon_2 L r}, \quad R_3 < r < R_2,$$



а напряжение на обкладках конденсатора

$$U = \frac{2Q}{\varepsilon_1 L} \ln \frac{R_3}{R_1} + \frac{2Q}{\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_2}{R_3}.$$

Обратная емкость конденсатора равна

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{2}{\varepsilon_1 L} \ln \frac{R_3}{R_1} + \frac{2}{\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_2}{R_3}.$$

Начальная энергия конденсатора равна

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon_1 L} \ln \frac{R_3}{R_1} + \frac{2}{\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_2}{R_3} \right).$$

Конечная энергия конденсатора равна

$$W' = \frac{Q^2}{2C'} = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon_1 L} \ln \frac{R_3}{R_1} + \frac{2}{L} \ln \frac{R_2}{R_3} \right).$$

Работа на вынимании 2-го слоя

$$\begin{aligned} A &= W' - W = \frac{Q^2}{2C'} = \\ &= \frac{Q^2}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon_1 L} \ln \frac{R_3}{R_1} + \frac{2}{L} \ln \frac{R_2}{R_3} - \frac{2}{\varepsilon_1 L} \ln \frac{R_3}{R_1} - \frac{2}{\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_2}{R_3} \right) = \\ &= \frac{Q^2}{L} \left(\ln \frac{R_2}{R_3} - \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_3} \right) = \frac{Q^2}{L} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \ln \frac{R_2}{R_3}. \end{aligned}$$

Выражая Q через U , получим

$$Q = CU = \frac{L}{2} \frac{U}{\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_3}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_3}},$$

$$A = \frac{LU^2}{4} \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_3}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_3} \right)^2} \ln \frac{R_2}{R_3}.$$

Решение задачи 4

Нанесем заряды $\pm Q$ на пластины конденсатора. Нескомпенсированные заряды возможны только на пластинах, в прилегающих к пластинам слоям диэлектрика и на границе раздела диэлектрика с проводником. Объемная плотность зарядов в диэлектрике равна нулю, поскольку там

$$\rho_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho = 0.$$

Объемная плотность зарядов в проводнике равна нулю, поскольку там

$$\rho_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\sigma} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

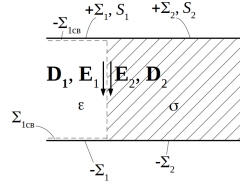
Заметим, что если силовые линии поля ориентированы по нормали к пластинам, то поверхностные заряды на границе “диэлектрик-проводник” не образуются. Примем, пока в качестве предположения, такую конфигурацию силовых линий. В этом случае поле между пластинами является суперпозицией полей параллельных заряженных плоскостей и формируется свободными зарядами на пластинах и связанными зарядами в диэлектрике на границах с пластинами:

$$E_1 = 4\pi(\Sigma_1 - \Sigma_{1\text{св}}),$$

$$E_2 = 4\pi\Sigma_2.$$

Из гран. условия на тангенциальные компоненты \mathbf{E} на границе "диэлектрик-проводник" следует, что

$$E_1 = E_2,$$



откуда $D_1 = \varepsilon D_2$. Далее, $E = 0$ снаружи от конденсатора как поле плоскости (слоя) с суммарной плотностью заряда, равной нулю. Тогда из гран. условия на нормальные компоненты \mathbf{D} по обе стороны от верхней или нижней пластины получим

$$\begin{aligned} D_1 &= 4\pi\Sigma_1, \\ D_2 &= 4\pi\Sigma_2. \end{aligned} \Rightarrow \Sigma_1 = \varepsilon\Sigma_2.$$

Теперь учтем, что $Q = \Sigma_1 S_1 + \Sigma_2 S_2 = (\varepsilon \frac{S_1}{S_2} + 1) S_2 \Sigma_2$, и запишем полный ток между пластинами:

$$I = S_2 j_2 = S_2 \sigma E_2 = S_2 \sigma \cdot 4\pi\Sigma_2,$$

$$-\frac{dQ}{dt} = 4\pi\sigma \frac{Q}{\varepsilon \frac{S_1}{S_2} + 1} \Rightarrow Q(t) = Q(0) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где время релаксации $\tau = \frac{\varepsilon \frac{S_1}{S_2} + 1}{4\pi\sigma}$.

В заключение отметим, что всюду, кроме узких областей вблизи краев конденсатора, решение для \mathbf{E} удовлетворяет уравнениям Максвелла и гран. условиям для D_n и E_τ на всех границах раздела. Поэтому по теореме единственности сделанное выше предположение единственно и верно.

Контрольная работа 1.2, вариант 2**Решение задачи 1**

Пусть на пластины подано напряжение U . Рассмотрим решение в виде однородного поля $\mathbf{E} = \frac{U}{d}\mathbf{e}_z$ в проводнике. Плотность тока равна:

$$j(r) = \sigma(r)E = \frac{\sigma_0 U \cos \frac{\pi r^2}{6a^2}}{d}.$$

Полный ток между пластинами найдем интегрированием по площади пластины:

$$I = \iint j dS = \int_0^a \frac{\sigma_0 U \cos \frac{\pi r^2}{6a^2}}{d} \cdot 2\pi r dr = \frac{6a^2 \sigma_0 U}{d} \sin \frac{\pi a^2}{6a^2} = \frac{3a^2 \sigma_0 U}{d}.$$

Тогда сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I} = \frac{d}{3a^2 \sigma_0}.$$

Потенциал однородного поля удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям на пластинах. Поэтому по теореме единственности предположение об однородном поле верно.

Решение задачи 2

Определим емкость конденсатора в начальном варианте. Пусть на внутренней обкладке содержится заряд Q . Силовые линии \mathbf{E} и \mathbf{D} направлены по радиусу, а их абсолютные величины зависят только от радиуса. Тогда из граничных условий на тангенциальные компоненты \mathbf{E} следует, что

$$E_1(r) = E_2(r).$$

Отсюда следует связь между электрическими индукциями в двух диэлектриках:

$$D_1(r) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2(r).$$

А из гран. условия на нормальные компоненты получаем связь между плотностями свободных зарядов на внутренней обкладке конденсатора:

$$\begin{aligned} D_1(r) &= \frac{2\kappa_1}{r_1} \\ D_2(r) &= \frac{2\kappa_2}{r_1} \end{aligned} \Rightarrow \kappa_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \kappa_2.$$

Поскольку $Q = \frac{L}{2} \kappa_1 + \frac{L}{2} \kappa_2$, то

$$Q = \frac{L}{2} \kappa_2 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1 \right)$$

$$\kappa_2 = \frac{2Q}{L \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1 \right)}$$

$$D_2(r) = \frac{2\kappa_2}{r} = \frac{4Q}{L \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1 \right) r}$$

$$E_2(r) = \frac{2\kappa_2}{r} = \frac{4Q}{L \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1 \right) \varepsilon_2 r} = \frac{4Q}{L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r}$$

С другой стороны

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{4Q}{L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Отсюда обратная емкость конденсатора в исходном состоянии равна

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{4}{L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Начальная энергия конденсатора равна

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2} \frac{4}{L(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Конечная энергия конденсатора равна ($\epsilon_1 \rightarrow 1$)

$$W' = \frac{Q^2}{2} \frac{4}{L(1 + \epsilon_2)} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Работа на вынимании 2-го слоя

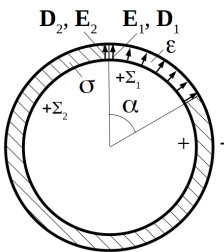
$$A = W' - W = \frac{2Q^2}{L} \ln \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{1 + \epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right).$$

Выражая Q через U , получим

$$Q = CU = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{4 \ln \frac{R_2}{R_1}} LU,$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{LU^2}{8 \ln \frac{R_2}{R_1}} \left(\frac{1}{1 + \epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 = \\ &= \frac{LU^2}{8 \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{\epsilon_1 - 1}{1 + \epsilon_2} (\epsilon_1 + \epsilon_2). \end{aligned}$$

Решение задачи 3



Нанесем заряды $+Q$ на внутреннюю и $-Q$ на внешнюю обкладку конденсатора. Нескомпенсированные заряды возможны только на обкладках, в прилегающих к обкладкам слоям диэлектрика и на границе раздела диэлектрика с проводником. Объемная плотность

зарядов в диэлектрике равна нулю, поскольку там

$$\rho_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho = 0.$$

Объемная плотность зарядов в проводнике равна нулю, поскольку там

$$\rho_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\sigma} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Заметим, что если силовые линии поля ориентированы по радиусу, то поверхностные заряды на границе ”диэлектрик-проводник” не образуются. Примем, пока в качестве предположения, такую конфигурацию силовых линий. В этом случае из гран. условия на тангенциальные компоненты \mathbf{E} на границе ”диэлектрик-проводник” следует, что

$$E_1 = E_2,$$

откуда $D_1 = \varepsilon D_2$.

Далее, $E = 0$ в области, ограниченной внутренней обкладкой (там решение для потенциала $\varphi \equiv +U$ удовлетворяет уравнению Лапласа с гран. условием $\varphi_{\Gamma} = +U$). Тогда из гран. условия на нормальные компоненты \mathbf{D} по обе стороны от внутренней обкладки получим

$$\begin{aligned} D_1 &= 4\pi\Sigma_1, \\ D_2 &= 4\pi\Sigma_2. \end{aligned} \Rightarrow \Sigma_1 = \varepsilon\Sigma_2.$$

Теперь учтем, что

$$Q = \alpha r L \Sigma_1 + (2\pi - \alpha) r L \Sigma_2 = \left(\varepsilon \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} + 1 \right) (2\pi - \alpha) \Sigma_2,$$

и запишем полный ток между пластинами:

$$I = (2\pi - \alpha) r L j_2 = (2\pi - \alpha) r L \sigma E_2 = (2\pi - \alpha) r L \sigma \cdot 4\pi \Sigma_2,$$

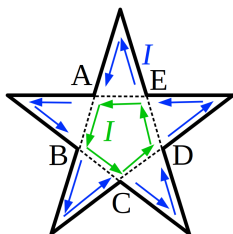
$$-\frac{dQ}{dt} = 4\pi\sigma \frac{Q}{\varepsilon \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} + 1} \Rightarrow Q(t) = Q(0) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где время релаксации $\tau = \frac{\varepsilon \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} + 1}{4\pi\sigma}$.

В заключение отметим, что всюду, кроме узких областей вблизи краев конденсатора, решение для \mathbf{E} удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям для D_n и E_τ на всех границах раздела. Поэтому по теореме единственности сделанное выше предположение единственно и верно.

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1



В соответствии с принципом суперпозиции разобьем систему токов на ток I , текущий по внешнему замкнутому контуру звезды, и ток I , текущий по периметру пятиугольника ABCDE. В обоих контурах токи текут против хода часовой стрелки. Суммарный магнитный

момент звезды равен

$$m = \frac{5S_2 + S_1}{c} I + \frac{S_1}{c} I = \frac{5S_2 + 2S_1}{c} I,$$

направлен на нас.

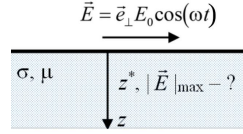
Решение задачи 2

Данная задача на анализ известного решения:

$$E(z, t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} + \omega t\right).$$

Условие на ωt :

$$\cos \omega t = 0 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} + \pi m_1.$$



Условие на экстремум $E(z)$:

$$E'_z = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \left(-\frac{1}{\delta} \cos \left(\frac{z}{\delta} + \omega t \right) - \frac{1}{\delta} \sin \left(\frac{z}{\delta} + \omega t \right) \right) = 0,$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{z}{\delta} + \omega t \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{2} + \pi m_1 \right) = -\operatorname{tg} \frac{z}{\delta} = -1,$$

$$\frac{z}{\delta} = \frac{\pi}{4} + \pi m.$$

$E_{max}(z)$ отвечает $m = 0$, так что искомая глубина

$$z^* = \frac{\pi}{4} \delta, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}.$$

Подставляя $z = z^*$ в выражение для поля, получим

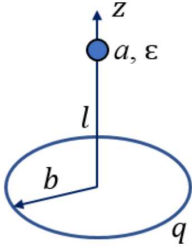
$$E_{max} = E_0 e^{-\frac{\pi}{4}} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi m_1 \right) = \pm \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Поле переменное, поэтому подходят оба решения $\pm E_{max}$.

Решение задачи 3

Найдем сначала силу на шарик со стороны кольца. Это будет сила на упругий электрический диполь в поле кольца. Поле в центре шарика равно

$$E(z) = \frac{qz}{(b^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{ql}{(b^2 + l^2)^{3/2}}.$$



Электрический дипольный момент, навводимый на шарике, равен *

$$\mathbf{d} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{ql}{(b^2 + l^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

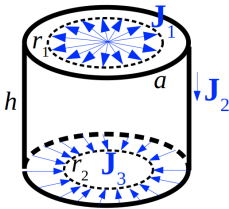
Сила на диполь равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{(\varepsilon - 1)ql}{(\varepsilon + 2)(b^2 + l^2)^{3/2}} \cdot \frac{qz}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{(\varepsilon - 1)ql}{(\varepsilon + 2)(b^2 + l^2)^{3/2}} \left(\frac{q}{(b^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3qz \cdot 2z}{2(b^2 + z^2)^{5/2}} \right) \Big|_{z=l} \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{(\varepsilon - 1)q^2 l}{(\varepsilon + 2)(b^2 + l^2)^{3/2}} \left(\frac{b^2 + l^2}{(b^2 + l^2)^{5/2}} - \frac{3l^2}{(b^2 + l^2)^{5/2}} \right) \mathbf{e}_z = \frac{(\varepsilon - 1)q^2 l(b^2 - 2l^2)}{(\varepsilon + 2)(b^2 + l^2)^4} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

На кольцо действует противоположная сила.

При $l < \frac{b}{\sqrt{2}}$ отталкивание, при $l > \frac{b}{\sqrt{2}}$ притяжение.

Решение задачи 4



На верхнем основании цилиндра через окружность радиуса r протекает ток I . Поэтому линейная плотность тока и поле выражаются как

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{J}_1(\mathbf{r})}{\sigma^*} = \frac{I}{2\pi\sigma^*r} \mathbf{e}_r.$$

По боковой поверхности протекает ток I . Поэтому линейная плотность тока и поле там постоянны:

$$\mathbf{J}_2 = \frac{I}{2\pi a} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}_2}{\sigma^*} = \frac{I}{2\pi\sigma^*a} \mathbf{e}_z.$$

*Здесь и ниже дипольный момент записан как не зависящий от z , поэтому оператор ∇ на него не действует и диполь считается твердым.

На нижнем основании цилиндра через окружность радиуса r протекает ток I . Поэтому линейная плотность тока и поле выражаются как

$$\mathbf{J}_3(\mathbf{r}) = -\frac{I}{2\pi r}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{J}_3(\mathbf{r})}{\sigma^*} = -\frac{I}{2\pi\sigma^*r}\mathbf{e}_r.$$

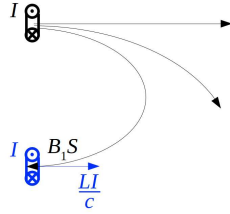
Тогда падение напряжения между точками r_1 и r_2 определяется интегрированием

$$\begin{aligned} U &= \int_{r_1}^a E_1(r)dr + \int_0^h E_2 dz + \int_a^{r_2} E_3(r)dr = \\ &= \frac{I}{2\pi\sigma^*} \ln \frac{a}{r_1} + \frac{I}{2\pi\sigma^*a}h + \frac{I}{2\pi\sigma^*} \ln \frac{a}{r_2} = \frac{I}{2\pi\sigma^*} \left(\ln \frac{a^2}{r_1 r_2} + \frac{h}{a} \right). \end{aligned}$$

Решение задачи 5

В начальном положении поверхность, натянутую на второй контур, пронизывает поток самоиндукции и поток взаимной индукции (см. рисунок):

$$\Phi_i = \frac{LI}{c} + \iint \mathbf{B}_1 d\mathbf{S} = \frac{LI}{c} + \iint \mathbf{B}_1 \mathbf{n}_1 dS,$$



где \mathbf{B}_1 – поле, наводимое 1-м контуром в пространстве. Это поле магнитного диполя:

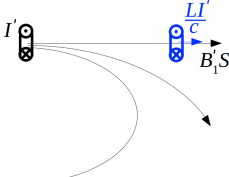
$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 0 = -\frac{\mathbf{m}}{a^3}.$$

Магнитный момент контура 1 равен $\mathbf{m} = \frac{IS}{c}\mathbf{n}_1$.

Тогда начальный поток через 2-й контур равен

$$\Phi_i = \frac{LI}{c} - \frac{IS^2}{ca^3}.$$

В конечном положении в обоих контурах циркулирует ток I' *. Поток поля через поверхность, стягиваемую 2-м контуром, составляет (см. рисунок)



$$\Phi' = \frac{LI'}{c} + B_1 S = \frac{LI'}{c} + 2 \frac{m' S}{a^3} =$$

$$= \frac{LI'}{c} + 2 \frac{I' S^2}{ca^3}.$$

С другой стороны из сохранения потока следует, что

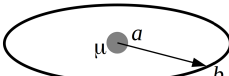
$$\frac{LI'}{c} + 2 \frac{I' S^2}{ca^3} = \frac{LI}{c} - \frac{I' S^2}{ca^3}.$$

Для искомого отношения получаем

$$\frac{I'}{I} = \frac{La^3 - S^2}{La^3 + 2S^2}.$$

Решение задачи 6

Рассмотрим процесс, в котором ток поддерживается постоянным и тогда изменение индуктивности находится по формуле



$$\delta L = \frac{c \delta \Phi}{I}.$$

Изменение потока вызвано полем диполя. Применим выражение $\delta \Phi = \oint \mathbf{A}_m \cdot d\ell$ и подставим формулу для вектор-потенциала диполя $\mathbf{A}_m = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$:

$$\delta \Phi = \oint \mathbf{A}_m \cdot d\ell = \frac{2\pi b m b}{b^3} = \frac{2\pi m}{b}.$$

*Ток по сверхпроводящему контуру изменяется вследствие изменения коэффициента взаимной индукции $L_{12} = L_{21}$. При равных начальных токах и потоках поля это изменение действует симметрично на токи в обоих контурах.

Воспользуемся ответом к задаче 5.7 из [1] о магнитном шарике в однородном поле

$$\mathbf{m} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{B}$$

и запишем поле в центре кольца с током

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi I}{cb} e_z.$$

Подставим $m(B)$ в выражение для потока:

$$\delta\Phi = \frac{2\pi}{b} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 B = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \frac{2\pi}{b} \cdot \frac{2\pi I}{cb} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \frac{4\pi^2 a^3 I^2}{cb^2}.$$

Отсюда искомое изменение индуктивности равно

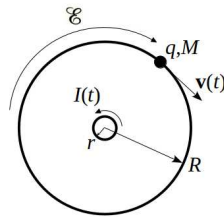
$$\delta L = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \frac{4\pi^2 a^3}{b^2}.$$

Решение задачи 7

Картина явления состоит в следующем. При возбуждении тока в кольцо оно приобретает магнитный момент. Переменное поле магнитного диполя создает переменный во времени магнитный поток через круг радиуса R . Согласно закону Фарадея вдоль окружности образуется вихревое электрическое поле, которое разгоняет бусинку.

Перепишем уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{c\partial t}$ в форме $\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{c\partial t}$, интегрирование которого с учетом аксиальной симметрии задачи дает

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{c\partial t}.$$



Вектор-потенциал магнитного диполя, равный $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}$, направлен по окружности.

Домножим обе части уравнения на q :

$$q\mathbf{E} = \frac{q\partial m}{cR^2\partial t}\mathbf{e}_\alpha = \frac{qS\partial I}{c^2R^2\partial t}\mathbf{e}_\alpha.$$

Левая часть представляет собой силу на бусинку ^{*}, поэтому уравнение ее движения имеет вид

$$M \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{qS}{c^2R^2} \cdot \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Интегрируя уравнение по времени, получаем

$$v = \frac{qS}{c^2MR^2}I_0 = \frac{\pi r^2 q}{c^2MR^2}I_0.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1

Поле после прохождения через первый поляроид становится линейно поляризованным. Пусть его амплитуда равна E_1 . До поворота второго поляроида поле за вторым поляроидом было равно $E_2 = E_1 \cos 45^\circ$, а за третьим $E_3 = E_1 \cos^2 45^\circ = \frac{E_1}{2}$. Выходная интенсивность равна

$$I_3 = \frac{I_1}{4}.$$

^{*}Сила на бусинку записана в проекции на касательную к окружности. Нормальная (центростремительная) компонента обусловлена реакцией спицы и на скорость бусинки не влияет.

Пусть после поворота угол между осями первого и второго поляроидов составляет β . Тогда после поворота поле за вторым поляроидом равно $E'_2 E_1 \cos \beta$, а за третьим $E'_3 = E_1 \cos \beta \cos(90^\circ - \beta) = E_1 \cos \beta \sin \beta = \frac{\sin 2\beta}{2} E_1$. Выходная интенсивность после поворота равна

$$I'_3 = \frac{\sin^2 2\beta}{4} I_1 = I_3 \sin^2 2\beta.$$

По условию задачи $\frac{I'_3}{I_3} = \frac{1}{2}$, откуда $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\beta = 22.5^\circ$. Искомый угол поворота $45^\circ - \beta = 22.5^\circ$.

Решение задачи 2

Падающую волну с круговой поляризацией можно представить как суперпозицию ТЕ- и ТМ-волн с одинаковыми амплитудами. (То, что эти волны различаются по фазе, для данной задачи значения не имеет). Тогда значения полуосей эллиптически поляризованной отраженной волны определяются только амплитудными коэффициентами отражения ТЕ- и ТМ-волны соответственно.

$$\frac{\xi_1}{\zeta_1} = \frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)} = \frac{\cos(\theta_0 - \theta_2)}{\cos(\theta_0 + \theta_2)}.$$

Угол θ_2 находим из закона преломления:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{1.5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \theta_2 = \sin \theta_0 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sin 60^\circ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\theta_2 = 45^\circ.$$

Подставляем полученные численные значения в исходную формулу:

$$\left| \frac{\xi_1}{\zeta_1} \right| = \left| \frac{(\cos(60^\circ - 45^\circ))}{\cos(60^\circ + 45^\circ)} \right| = -\frac{\cos 15^\circ}{\cos 105^\circ} \approx 3.73$$

Решение задачи 3

Подставляя в волновое уравнение $\Delta E - \frac{\varepsilon \mu \partial^2 E}{c^2 \partial t^2} = 0$ выражение $\varepsilon(\omega)$, получим

$$\frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2} = k_z^2 + \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2. \quad (1)$$

Для H_{10} -волны $l = 1$, $m = 0$ в пределе $k_z \rightarrow 0$ уравнение принимает вид

$$\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2 \omega^2 = k_0^2 c^2, \quad (2)$$

где обозначено $k_0 = \frac{\pi}{a}$.

Далее излагаются два способа решения.

Способ 1.

Уравнение (2) сводится к биквадратному

$$\omega^4 - (\omega_0^2 + \omega_p^2 + k_0^2 c^2) \omega^2 + k_0^2 c^2 \omega_0^2 = 0,$$

решая которое, получим *

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 + k_0^2 c^2 \pm \sqrt{(\omega_0^2 + \omega_p^2 + k_0^2 c^2)^2 - 4k_0^2 c^2 \omega_0^2}}{2},$$

$$\omega_{+,-} = \omega_{1,2} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2 + k_0^2 c^2 + 2k_0 c \omega_0} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2 + k_0^2 c^2 - 2k_0 c \omega_0}}{2}.$$

При $\omega_p \rightarrow 0$ $\omega_1 \rightarrow \omega_0$, $\omega_2 \rightarrow k_0 c$. Необходимо выбрать низкочастотный корень. Раскладывая решение ω_2 по малому параметру $\frac{k_0 c}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}$, получим

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{k_0 c \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}} = \frac{\pi c}{a \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}}.$$

Способ 2.

Из уравнения (1) видно, что в области частот, где $\varepsilon \approx \text{const}$, закон дисперсии (для $l, m=1,0$) соответствует прямоугольному волноводу с эффективным параметром $\frac{\pi}{a} \rightarrow \frac{\pi}{a\sqrt{\varepsilon}}$. С учетом условия $a \gg \frac{\pi c}{\omega_0}$ это означает, что вблизи критической частоты $\omega \ll \omega_0$. Поэтому там

$$\varepsilon \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2},$$

откуда

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{\pi c}{a\sqrt{\varepsilon}} \approx \frac{\pi c}{a \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}}.$$

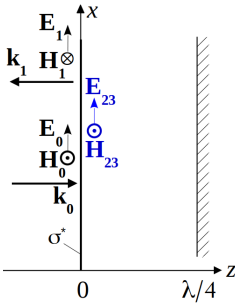
*При выражении $\omega_{1,2}$ из $\omega_{1,2}^2$ использовано тождество

$$A \pm \sqrt{A^2 - B^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{A+B} \pm \sqrt{A-B} \right)^2.$$

В нашем случае $A = \omega_0^2 + \omega_p^2 + k_0^2 c^2$, $B = 2k_0 c \omega_0$.

Решение задачи 4

Задачу можно решить точно для произвольного расстояния между проводящей и зеркальной плоскостями. Но заданные условия позволяют значительно упростить решение. Для этого заметим, что э-м поле в промежутке между плоскостями имеет вид стоячей волны. Магнитное поле на зеркальной поверхности имеет пучность, а на проводящей поверхности сдвинуто по фазе на $k\lambda/4 = \pi/2$, а значит, имеет там узел. Это позволяет использовать только граничное



условие на тангенциальные компоненты \mathbf{H} на проводящей пластине:

$$H_0 + H_1 = H_2 + \frac{4\pi}{c}\sigma^*(E_0 + E_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0 - E_1 = 0 + \frac{4\pi}{c}\sigma^*(E_0 + E_1),$$

откуда находим

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 - \frac{4\pi}{c}\sigma^*}{1 + \frac{4\pi}{c}\sigma^*}, \quad \frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{1 - \frac{4\pi}{c}\sigma^*}{1 + \frac{4\pi}{c}\sigma^*} \right)^2.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1

Ход решения идентичен задаче 1 вар. 1 (см. на стр.) с той разницей, что теперь $\frac{I'_3}{I_3} = \frac{1}{4}$, откуда $\sin 2\beta = \frac{1}{2}$ и $\beta = 15^\circ$. Искомый угол поворота $45^\circ - \beta = 30^\circ$.

Решение задачи 2

Задача аналогична задаче 2 вар. 1 (см. на стр. 54) с тем отличием, что теперь $\theta_0 = 30^\circ$ и $n_1 = \sqrt{2}$.

Тогда для угла θ_2 имеем:

$$\sin \theta_2 = \sin 30^\circ \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \theta_2 = 45^\circ.$$

Подставляем полученные численные значения в исходную формулу:

$$\left| \frac{\xi_1}{\zeta_1} \right| = \left| \frac{(\cos(30^\circ - 45^\circ))}{\cos(30^\circ + 45^\circ)} \right| = \frac{\cos 15^\circ}{\cos 75^\circ} \approx 3.73$$

Решение задачи 3

В прямоугольном волноводе выполняется соотношение между фазовой и групповой скоростями $v_\Phi v_\Gamma = c^2$, из которого

$$v_\Phi = \sqrt{5}c.$$

Закон дисперсии в прямоугольном волноводе:

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 = c^2 k_z^2 + \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 (l^2 + 25m^2)$$

Фазовая скорость:

$$v_\Phi^2 = \frac{\omega^2}{k_z^2} = c^2 + \frac{(\pi c)^2 \cdot (l^2 + 25m^2)}{k_z^2 a^2} = 5c^2,$$

откуда

$$k_z^2 = \frac{\pi^2 (l^2 + 25m^2)}{4a^2}.$$

Минимально возможному значению k_z соответствует мода $\{l, m\} = \{1, 0\}$:

$$k_{z \min}^2 = \frac{\pi^2}{4a^2}, \quad k_{z \min} = \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{10} \text{ см}^{-1}.$$

Решение задачи 4

Амплитуду электрического поля в проводящей пластине возьмем из решения задачи 4 вар. 1 (см. на стр. 57):

$$E_0 + E_1 = \left(1 + \frac{1 - \frac{4\pi}{c}\sigma^*}{1 + \frac{4\pi}{c}\sigma^*}\right) E_0 = \frac{2E_0}{1 + \frac{4\pi}{c}\sigma^*}.$$

Искомая мощность равна

$$W = \frac{\sigma^* E^2}{2} = \frac{2\sigma^* E_0^2}{\left(1 + \frac{4\pi}{c}\sigma^*\right)^2}.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 1

Решение задачи 1

Согласно принципу Гюйгенса пропорционально ширине щели увеличивается число когерентных вторичных источников и, следовательно, амплитуда поля на основном экране. Тогда интенсивность света на экране квадратична ширине щели. В классической схеме Юнга амплитуда суммарного поля в произвольной точке экрана равна

$$\hat{E} = \hat{E}_1 + \hat{E}_2,$$

а интенсивность

$$\begin{aligned} I &= (\hat{E}_1 + \hat{E}_2) \cdot (\hat{E}_1^* + \hat{E}_2^*) = \hat{E}_1 \hat{E}_1^* + \hat{E}_2 \hat{E}_2^* + \hat{E}_1 \hat{E}_2^* + \hat{E}_2 \hat{E}_1^* = \\ &= I_1 + I_2 + 2\text{Re}\{\hat{E}_1 \hat{E}_2^*\} = (I_1 + I_2) \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cos \Delta\phi\right). \end{aligned}$$

Видность равна

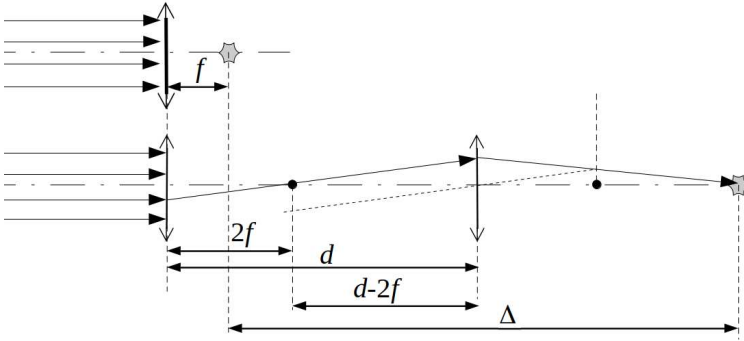
$$V = \left| \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \right|.$$

Если щель 2 в s раз шире щели 1, то

$$V = \frac{2\sqrt{s^2 I_1 I_1}}{I_1 + s^2 I_1} = \frac{2s}{1 + s^2}.$$

Если $V = 0.5$, то $s^2 - 4s + 1 = 0$ и $s = 2 + \sqrt{3}$.

Решение задачи 2



Фокусное расстояние составной линзы равно f . Каждая из обеих половинок представляет собой собирающую линзу с фокусным расстоянием $2f$. Тогда изображение плоского пучка находится в точке на расстоянии $2f$ справа от левой половинки. Эту точку следует рассматривать как предмет по отношению к правой половинке. Предмет находится на расстоянии $d - 2f$ слева от нее. Положение изображения находим из уравнения тонкой линзы:

$$\frac{1}{d - 2f} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{2f},$$

откуда

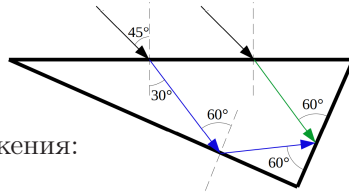
$$d_2 = \frac{2f(d - 2f)}{d - 4f},$$

Решение задачи 4

Расстояние между интерферирующими полосами однозначно задается углами падения интерферирующих пучков. Найдем угол преломления на верхней грани:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_0}{n} = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = 30^\circ.$$

На левой грани лучи испытывают полное внутреннее отражение, поскольку там угол падения $\theta'_0 = 60^\circ$ превышает угол полного внутреннего отражения:



$$\sin \theta_{\text{по}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta_{\text{по}} = 45^\circ.$$

Тогда на правой грани имеем две волны одинаковой амплитуды, падающие под углами 60° и -60° к грани соответственно. Совместив ось x с правой гранью (в плоскости рисунка), запишем суперпозицию двух полей на грани как функцию x :

$$E = E_2 e^{i(k_{2x}x - \omega t)} + E_2 e^{i(-k_{2x}x - \omega t)} = 2E_2 \cos k_{2x}x e^{-i\omega t}$$

(начало оси x выбрано так, чтобы не возникало дополнительного сдвига по фазе между двумя волнами).

Условие на максимум интенсивности:

$$k_{2x}x_m = 2\pi m,$$

$$nk \cos 60^\circ x_m = 2\pi m,$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2}x_m = 2\pi m,$$

$$\sqrt{2} \frac{\pi}{\lambda} \Delta = 2\pi,$$

$$\Delta = \sqrt{2}\lambda.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 2

Решение задачи 1

Задача аналогична задаче 1 вар. 1 (см. на стр. 59), но теперь

$$\frac{2s}{1+s^2} = \frac{1}{3}.$$

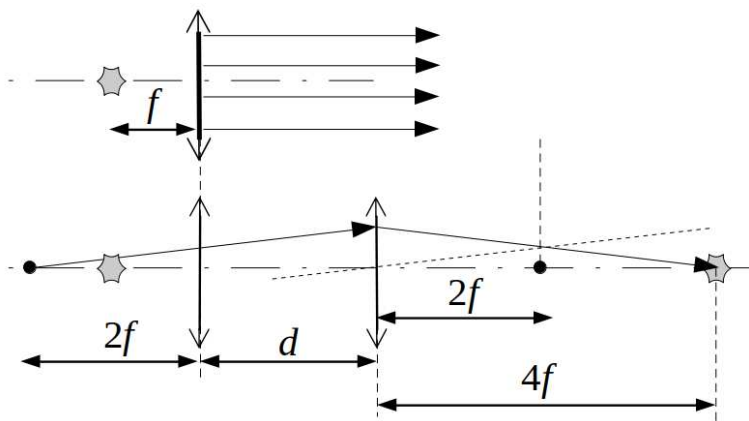
$$s^2 - 6s + 1 = 0, \quad s = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Нужно уменьшить ширину щели в $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$ раз.

Решение задачи 2

Фокусное расстояние составной линзы равно f . Каждая из обеих половинок представляет собой собирающую линзу с фокусным расстоянием $2f$. Тогда изображение точечного источника, создаваемое левой половинкой, находится в точке, положение которого определим из уравнения тонкой линзы:

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{2f},$$



откуда

$$d_2 = -2f, \text{ слева от левой половинки.}$$

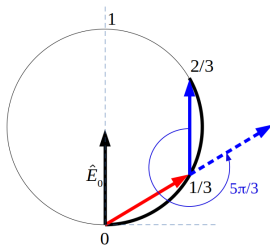
Это изображение следует рассматривать как предмет для правой половинки, находящийся на расстоянии $2f + d$ от правой половинки. Уравнение тонкой линзы для правой половинки имеет вид

$$\frac{1}{2f + d} + \frac{1}{4f} = \frac{1}{2f},$$

откуда искомое расстояние равно

$$d = 2f.$$

Решение задачи 3



Кольцо, ограниченное радиусами r_1 и r_2 , занимает вторую треть первой зоны Френеля. Его вклад в поле \mathbf{E}_p описывается вектором, показанным синим цветом на диаграмме Френеля. Круг радиусом r_1 занимает первую треть первой зоны Френеля. Его вклад в поле \mathbf{E}_p описывается вектором, показанным красным цветом на диаграмме Френеля. Увеличение толщины стекла изменяет фазу волны, что соответствует повороту второго вектора на диаграмме Френеля. Для того, чтобы сумма первого и второго векторов стала максимальной длины, угол поворота первого вектора должен составить

$$\Delta\phi = \frac{5\pi}{3}.$$

С другой стороны

$$\Delta\phi = (n-1)k\delta = \frac{2\pi(n-1)\delta}{\lambda},$$

откуда искомая толщина равна

$$\delta = \frac{5\lambda}{6(n-1)}.$$

Экзаменационная работа 2

Решение задачи 1

Общее выражение для искомой величины:

$$\langle I \rangle = \frac{2\langle \ddot{d}^2 \rangle}{3c^3}. \quad (1)$$

Получим выражение для $\langle \ddot{d}^2 \rangle$:

$$\ddot{\mathbf{d}} = -ae\omega^2 \cdot \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_x - 4ae\omega^2 \cdot \sin 2\omega t \cdot \mathbf{e}_y,$$

$$\ddot{d}^2 = \ddot{d}_x^2 + \ddot{d}_y^2 = a^2 e^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + 16a^2 e^2 \omega^4 \sin^2 2\omega t,$$

$$\langle \ddot{d}^2 \rangle = \frac{a^2 e^2 \omega^4 (1+16)}{2} = \frac{17a^2 e^2 \omega^4}{2}.$$

Подставим полученное выражение для $\langle \ddot{d}^2 \rangle$ в (1) *:

$$\langle I \rangle = \frac{17a^2 e^2 \omega^4}{3c^3}.$$

Решение задачи 2

С точки зрения углового распределения интенсивности излучения антенная решетка эквивалентна дифракционной решетке с периодом d и нулевой шириной щелей:

$$I(\theta) \propto \frac{\sin^2 \frac{kNd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}}.$$

Расстояние между минимумами, прилегающими к главному максимуму, задается условием **

$$\frac{kNd \sin \theta_m}{2} = \pm \pi \Rightarrow \theta_m = \pm \frac{2\pi}{kNd}, \quad \Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd}.$$

*Полученный результат выглядит, как сумма интенсивностей, создаваемых отдельно x - и y -компонентами дипольного момента. В действительности решать задачу через сложение интенсивностей было бы методологически неверно, поскольку поля, наводимые этими компонентами, не являются ортогональными во всем пространстве.

**Здесь мы предположили, что $\lambda \ll Nd$ и тогда $\theta_m \approx \sin \theta_m \ll 1$. Из ответа будет видно, что сделанное предположение верно.

Отсюда искомая длина волны равна

$$\lambda = \frac{Nd\Delta\theta}{2} = 10 \cdot \frac{3.5}{2 \cdot 400} = 8.75 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 8.75 \text{ см.}$$

Решение задачи 3

Интенсивность в единицу телесного угла равна

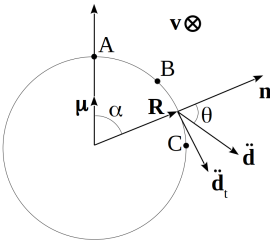
$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{\ddot{d}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3},$$

где θ – угол между направлением излучения и $\ddot{\mathbf{d}}$.

Учитывая, что искомое излучение сосредоточено в плоскости ABC, удобно переписать записанную формулу в виде

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{\ddot{d}_t^2}{4\pi c^3},$$

где \ddot{d}_t – компонента $\ddot{\mathbf{d}}$, касательная к поверхности в плоскости ABC.



Вектор $\ddot{\mathbf{d}}$ параллелен и пропорционален силе Лоренца

$$\mathbf{F}_L = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Тогда с учетом геометрии задачи в искомое излучение дает вклад только радиальная компонента поля, равная

$$B_R = 2 \frac{\mu \cos \alpha}{R^3},$$

так что угловая зависимость интенсивности излучения имеет вид

$$\frac{dJ}{d\Omega} \propto \cos^2 \alpha.$$

Для излучений из точек А и В имеем:

$$\frac{\frac{dJ_A}{d\Omega}}{\frac{dJ_B}{d\Omega}} = \frac{\cos^2 0}{\cos^2 45^\circ} = 2.$$

Излучение из точки С в радиальном направлении

$$\frac{dJ_C}{d\Omega} \propto \cos^2 90^\circ = 0.$$

Решение задачи 4

Запишем интеграл Корхгофа для k -й гармоники:

$$E_k(z) = \frac{1}{i\lambda} \int \frac{E_{0k} e^{ikR}}{R} \cos \Psi dS$$

R связано с радиусом r в области интегрирования:

$$R^2 = r^2 + z^2, \quad 2rdr = 2RdR, \quad dS = 2\pi r dr = 2\pi R dR.$$

$$\begin{aligned} E_k(z) &= \frac{2\pi E_{0k} \langle \cos \Psi \rangle}{i\lambda} \int_z^{z + \frac{a^2}{2z}} e^{ikR} dR = \\ &= \frac{2\pi E_{0k} \langle \cos \Psi \rangle}{i\lambda} \frac{e^{ikR}}{ik} \Big|_z^{z + \frac{a^2}{2z}} = E_{0k} e^{ikz} \langle \cos \Psi \rangle \left(1 - e^{ika^2/(2z)} \right). \end{aligned}$$

Соответствующая интенсивность запишется как

$$I_k(z) = 4I_{0k} \langle \cos \Psi \rangle^2 \sin^2 \frac{ka^2}{4z}.$$

Интенсивность во всем интервале Δk равна

$$\begin{aligned}
 I(z) &= \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} I_k(z) dk = 2I_0 \langle \cos \Psi \rangle^2 \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} (1 - \cos \frac{ka^2}{2z}) dk = \\
 &= 2I_0 \langle \cos \Psi \rangle^2 \left(\Delta k + \left(\sin \frac{(k_0 - \Delta k/2)a^2}{2z} - \sin \frac{(k_0 + \Delta k/2)a^2}{2z} \right) \frac{2z}{a^2} \right) = \\
 &= 2I_0 \langle \cos \Psi \rangle^2 \left(\Delta k - \frac{4z}{a^2} \sin \frac{\Delta ka^2}{4z} \cos \frac{k_0 a^2}{2z} \right) = \\
 &= 2I_0 \Delta k \langle \cos \Psi \rangle^2 \left(1 - \operatorname{sinc} \frac{\Delta ka^2}{4z} \cos \frac{k_0 a^2}{2z} \right) = \\
 &= 2I_0 \left(1 - \operatorname{sinc} \frac{\Delta ka^2}{4z} \cos \frac{k_0 a^2}{2z} \right).
 \end{aligned}$$

Аргумент косинуса можно представить в виде

$$\frac{k_0 a^2}{2z} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a^2}{2z} = \pi \frac{\Delta R}{\lambda/2} = \pi N,$$

где N – эффективное число зон Френеля, укладывающихся в отверстие.

Решение задачи 5

Ускорение заряда, находящегося в точке (x, y) , пропорционально мгновенному электрическому полю в этой точке. Фаза сигнала, приходящего на приемник, включает фазу генерации излучения и пропорциональна расстоянию от генератора до приемника:

$$\phi_{\Pi} = \phi_{\Gamma} + \phi_{\Gamma\Pi} = kx + k(x_{\Pi} - x) + k(y_{\Pi} - y).$$

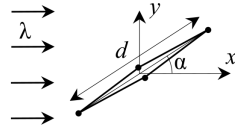
Ускорение пропорционально \ddot{d} и полю излучения частицы. Поэтому сигнал, приходящий на приемник, расположенный на оси y , выражается суммой

$$E_y = E_0 \left(e^{ikd(\frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\sin \alpha}{2})} + e^{ikd(-\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{2})} + 2e^0 \right) =$$

$$= 2E_0 \left(1 + \cos \frac{kd(\cos \alpha - \sin \alpha)}{2} \right) = 4E_0 \cos^2 \frac{kd(\cos \alpha - \sin \alpha)}{4}.$$

Интенсивность сигнала

$$I_y = 16E_0^2 \cos^4 \frac{kd(\cos \alpha - \sin \alpha)}{4}.$$



Сигнал, приходящий на приемник, расположенный на оси x , выражается суммой

$$E_x = E_0 \left(e^{ikd(\frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha}{2})} + e^{ikd(-\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\cos \alpha}{2})} + 2e^0 \right) = 4E_0.$$

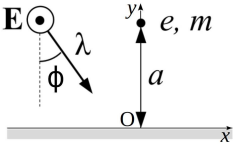
Интенсивность сигнала

$$I_x = 16E_0^2.$$

Искомое отношение равно

$$\frac{I_y}{I_x} = \cos^4 \frac{kd(\cos \alpha - \sin \alpha)}{4}.$$

Решение задачи 6



Поместим начало координат в точку O (см. рисунок). Поле, в котором находится заряд, образовано падающей и отраженной волнами:

$$E = E_0 e^{i(k_x x - k_y y - \omega t')} + E_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t')} =$$

$$= 2E_0 e^{-i\omega t'} \cos(k_y a) = 2E_0 e^{-i\omega t'} \cos(ka \cos \phi).$$

Ускорение частицы и $\ddot{\mathbf{d}}$ равны соответственно

$$\ddot{z} = \frac{eE}{m} = \frac{2eE_0}{m} e^{-i\omega t'} \cos(ka \cos \phi),$$

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{2e^2 E_0}{m} e^{-i\omega t'} \cos(ka \cos \phi) \mathbf{e}_z.$$

Поле волны, рассеянной самим диполем и приходящей на приемник в момент времени t , равно

$$H_1(t) = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} = \frac{2e^2 E_0}{mc^2 r} e^{i(kR_1 - \omega t)} \cos(ka \cos \phi) \sin \theta,$$

где θ – угол между направлением рассеяния и осью z , R_1 – расстояние от диполя до приемника.

Поле волны, рассеянной диполем-изображением, равно

$$H_2(t) = -\frac{2e^2 E_0}{mc^2 r} e^{i(kR_2 - \omega t)} \cos(ka \cos \phi) \sin \theta,$$

где R_2 – расстояние от диполя-изображения до приемника.

Тогда поле и интенсивность суммарной волны:

$$H_{12}(t) = H_1(t) \cos(ka \cos \phi) \sin \theta (1 - e^{i(k\Delta R - \omega t)}),$$

$$I_{12} = \frac{16ce^4 E_0^2}{8\pi m^2 c^4 r^2} \cos^2(ka \cos \phi) \sin^2 \theta \sin^2 \frac{k\Delta R}{2}.$$

Интенсивность в единицу телесного угла

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{2e^4 E_0^2}{\pi m^2 c^3} \cos^2(ka \cos \phi) \sin^2 \theta \sin^2 \frac{k\Delta R}{2}.$$

Интенсивность падающей волны

$$I = \frac{c}{8\pi} E_0^2.$$

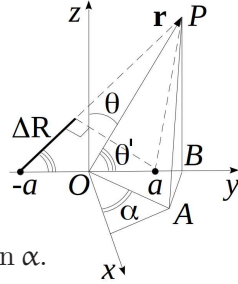
Дифференциальное сечение рассеяния

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{dJ/d\Omega}{I} = \frac{16e^4}{m^2 c^4} \cos^2(ka \cos \phi) \sin^2 \theta \sin^2 \frac{k\Delta R}{2} = \\ &= 16r_e^2 \cos^2(ka \cos \phi) \sin^2 \theta \sin^2 \frac{k\Delta R}{2}, \end{aligned}$$

где $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$ – эффективный радиус частицы.

Наконец, учтем, что разность хода двух волн равна *

$$\Delta R = 2a \cos \theta' = 2a \sin \theta \sin \alpha.$$



Тогда окончательное выражение для дифференциального сечения рассеяния:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= 16r_e^2 \cos^2(ka \cos \phi) \sin^2 \theta \sin^2 \frac{2ka \sin \theta \sin \alpha}{2} = \\ &= 16r_e^2 \cos^2 \frac{2\pi a \cos \phi}{\lambda} \sin^2 \theta \sin^2 \frac{2\pi a \sin \theta \sin \alpha}{\lambda}. \end{aligned}$$

*Пусть точка A – проекция P на плоскость (xy) , а точка B – проекция P на ось y (см. рисунок). Имеем:

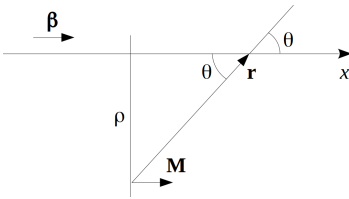
$$\mathbf{PA} \perp \mathbf{OB}, \mathbf{PB} \perp \mathbf{OB} \Rightarrow \mathbf{OB} \perp (\mathbf{PAB}), \mathbf{AB} \perp \mathbf{OB}.$$

Тогда

$$(\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OB}) = (\mathbf{OA} \cdot \mathbf{OB}), \quad r \cdot OB \cos \theta' = r \cdot \sin \theta \cos(90^\circ - \alpha),$$

$$\cos \theta' = \sin \theta \sin \alpha.$$

Решение задачи 7



Потери энергии на излучение описываются интегралом

$$\mathcal{E} = \frac{2cr_e^2}{3} \gamma^2 \int [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}]^2 dt.$$

Видно, что вклад в излучение дает только компонента \mathbf{H} , перпендикулярная к $\boldsymbol{\beta}$. Выразим ее:

$$H_{\perp} = -\frac{M}{r^3} + 3 \frac{M \cos \theta}{r^3} \sin \theta = 3 \frac{M \cos \theta}{\rho^3} \sin^4 \theta.$$

Перейдем к интегрированию по углу θ *:

$$x = \rho \operatorname{ctg} \theta, \quad dx = -\frac{\rho d\theta}{\sin^2 \theta}, \quad dt = -\frac{\rho d\theta}{c\beta \sin^2 \theta},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{2cr_e^2}{3} \gamma^2 \int \beta^2 \left(3 \frac{M \cos \theta}{\rho^3} \sin^4 \theta \right)^2 \cdot \frac{\rho d\theta}{c\beta \sin^2 \theta} = \\ &= -\frac{6M^2 r_e^2}{\rho^5} \beta \gamma^2 \int_{\pi}^0 \cos^2 \theta \sin^6 \theta d\theta = \frac{15\pi M^2 r_e^2}{64\rho^5} \beta \gamma^2. \end{aligned}$$

Подставим численные значения:

$$\gamma = \frac{10^{10}}{0.5 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^4, \quad r_e = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

$$\mathcal{E} = \frac{15 \cdot 3.14 \cdot 64 \cdot 10^{50} \cdot 2.8^2 \cdot 10^{-26}}{64 \cdot 12.8^5 \cdot 10^{40}} 4 \cdot 10^8 = 4.3 \cdot 10^{-11} \text{ эрг}$$

* Использовано значение определенного интеграла:

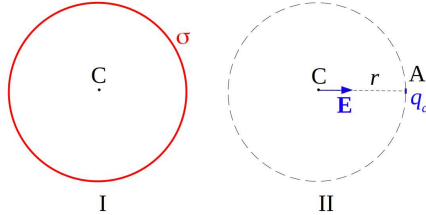
$$\int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{128}.$$

2023/2024 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1

Применим принцип суперпозиции. Представим сферу с отверстием как суперпозицию равномерно заряженной сферы без отверстия и маленькой части сферы с противоположной плотностью заряда. Вклад первой в поле в центре равен нулю. А вторая на расстоянии радиуса представляет собой точечный заряд. Поэтому суммарное поле равно



$$\mathbf{E}_c = \frac{q_a}{r^2} \mathbf{e}_{AC} = \frac{\sigma \pi a^2}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

где вектор \mathbf{e}_r – единичный вектор, сонаправленный с \mathbf{CA} .

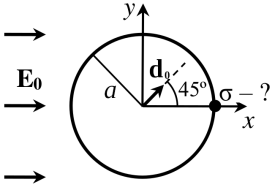
Решение задачи 2

Заметим, что поле снаружи от сферы такое же, как и в отсутствие точечного диполя в центре. Действительно, конфигурация силовых линий поля задается там тем же уравнением Лапласа с граничным условием на сфере $\varphi|_\Gamma = \text{const}$. Из теоремы Гаусса следует, что и численное значение потенциала на сфере то же. Поэтому из теоремы единственности следует идентичность двух решений:

$$\mathbf{E}_{ex}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 - \frac{E_0 a^3}{r^3} \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + 3 \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r.$$

Решение для потенциала внутри имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_{in}(\mathbf{r}) &= \frac{(\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^3} - E^* r \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \\ &= \frac{d_0}{r^2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) - E^* r \cos(\theta - \frac{\pi}{4}).\end{aligned}$$



Из граничного условия $\varphi|_{r=a} = \text{const}$ следует, что

$$E^* = \frac{d_0}{a^3}, \quad \varphi|_{r=a} = 0.$$

Поле внутри сферы равно

$$\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{d}_0}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}_0}{a^3}.$$

Искомую плотность заряда находим из граничного условия на нормальные компоненты поля в точке $(a, 0)$:

$$\sigma = \frac{E_{ex,n} - E_{in,n}}{4\pi} = \frac{(E_0 + 2E_0) - \frac{d_0\sqrt{2}}{2a^3}}{4\pi} = \frac{6E_0a^3 - d_0\sqrt{2}}{8\pi a^3}.$$

Решение задачи 3

Распределение $\mathbf{D}(r)$ внутри диэлектрика найдем из теоремы:

$$\oiint \mathbf{D}(r) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 D(r) = 4\pi q \Rightarrow D(r) = \frac{q}{r^2}.$$

С другой стороны $D = \varepsilon E$, где

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla \varphi(r) = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{qa}{2r^2} = \frac{qa}{r^3} \mathbf{e}_r.$$

Отсюда искомая диэлектрическая проницаемость

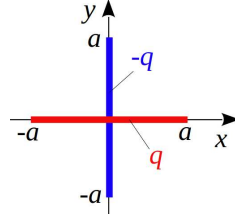
$$\varepsilon(r) = \frac{D(r)}{E(r)} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{r^3}{qa} = \frac{r}{a}.$$

Решение задачи 4

Задача на мультипольное разложение потенциала.

Из симметрии распределения плотности заряда (см. рисунок) следует что полный заряд и дипольный момент системы равны нулю.

Из симметрии заряженной системы следует равенство нулю полного заряда и электрического дипольного момента системы. Вычислим элементы тензора квадрупольных моментов. Для отрезка 1 имеем:



$$D_{1xx} = \int_{-a}^a (3x^2 - x^2) q dx = \left. \frac{2qx^3}{3} \right|_{-a}^a = \frac{4qa^3}{3} = \frac{2qa^2}{3},$$

$$D_{1yy} = D_{1zz} = -\frac{D_{1xx}}{2} = -\frac{qa^2}{3},$$

где учтено, что x – ось симметрии системы и что след тензора D_1 равен нулю. Недиagonальные компоненты $D_{1ij} = 0$, так как для них равны нулю подынтегральные выражения.

Аналогично для отрезка 2 получим

$$D_{2yy} = -\frac{2qa^2}{3}, \quad D_{2xx} = D_{2zz} = \frac{qa^2}{3}, \quad D_{2ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Элементы тензора системы двух отрезков получается суммированием:

$$D_{xx} = qa^2, \quad D_{yy} = -qa^2,$$

$$D_{zz} = 0, \quad D_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

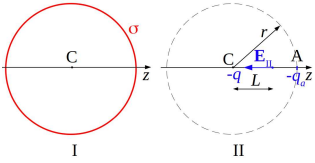
Итак,

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{D_{ij}x_i x_j}{2r^5} = \frac{D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2}{2r^5} = \frac{qa^2(x^2 - y^2)}{2r^5}.$$

Контрольная работа 1.1, вариант 2

Решение задачи 1

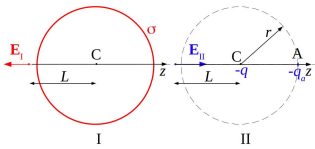
Применим принцип суперпозиции. Представим сферу с отверстием как суперпозицию равномерно заряженной сферы без отверстия и маленькой части сферы с противоположной плотностью заряда. Далее рассмотрим два случая.



Случай 1: точка наблюдения внутри сферы. Тогда поле сплошной сферы равно нулю, и остается поле от двух точечных зарядов:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z) &= \mathbf{E}_I(z) + \mathbf{E}_{II}(z) = 0 + \left(-\frac{qz}{|z|^3} + \frac{q\pi a^2(z-r)}{4\pi r^2|z-r|^3} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left(-\frac{qz}{|z|^3} + \frac{q\pi a^2(z-r)}{4\pi r^2|z-r|^3} \right) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

(здесь и всюду ниже z – координата точки наблюдения, $|z| = l$, $|z - r| \gg a$).



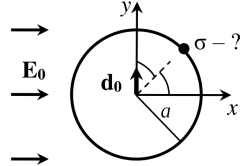
Случай 2: точка наблюдения снаружи от сферы. Тогда поле сплошной сферы равно $\frac{qz}{|z|^3}$ и в суперпозиции с полем точечного заряда $-q$ дает ноль. Остается

только поле от точечного заряда q_a :

$$\mathbf{E}(z) = 0 - \frac{q\pi a^2(z-r)}{4\pi r^2|z-r|^3} \mathbf{e}_z = \frac{q\pi a^2(r-z)}{4\pi r^2|z-r|^3} \mathbf{e}_z.$$

Решение задачи 2

Аналогично задаче 2 вар. 1 (см. на стр. 75) получим поле снаружи и внутри шара:



$$\mathbf{E}_{ex}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 - \frac{E_0 a^3}{r^3} \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + 3 \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{d}_0}{r^3} + 3 \frac{(\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}_0}{a^3}.$$

Искомую плотность заряда находим из граничного условия на нормальные компоненты поля в точке $(r, \theta) = (a, \frac{\pi}{4})$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E_{ex,n} - E_{in,n}}{4\pi} = \frac{E_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{3d_0 \sqrt{2}}{2a^3}}{4\pi} = \\ &= \frac{3\sqrt{2}(E_0 a^3 - d_0)}{8\pi a^3}. \end{aligned}$$

Решение задачи 3

Решение для поля берем из задачи 3 вар. 1 с идентичным условием (см. на стр. 75):

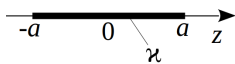
$$\mathbf{E}(r) = \frac{qa}{r^3} \mathbf{e}_r.$$

Искомая плотность заряда:

$$\rho_\varepsilon(r) = \rho(r) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial}{4\pi \partial r} \frac{qa}{r^3} = -\frac{3qa}{4\pi r^4}.$$

Решение задачи 4

Задача на мультипольное разложение потенциала.



Полный заряд отрезка равен

$$q = \int_{-a}^a \kappa(x) dx = \kappa_0 \left(3 \frac{z^3}{3a^2} - z \right) \Big|_{-a}^a = 0.$$

Из симметрии распределения плотности заряда дипольный момент системы также равен нулю.

Вычислим элементы тензора квадрупольных моментов:

$$\begin{aligned} D_{zz} &= \int_{-a}^a (3z^2 - z^2) \kappa_0 (3(z/a)^2 - 1) dz = \kappa_0 \left(\frac{6z^5}{5a^2} - \frac{2z^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a = \\ &= \frac{16\kappa_0 a^3}{15}, \end{aligned}$$

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{D_{zz}}{2} = -\frac{8\kappa_0 a^3}{15},$$

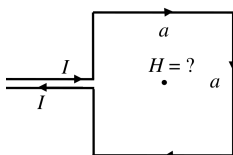
где учтено, что z – ось симметрии системы и что след тензора D_1 равен нулю. Недиagonальные компоненты $D_{1ij} = 0$, так как для них равны нулю подынтегральные выражения.

Итак,

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{D_{ij} x_i x_j}{2r^5} = \frac{D_{zz} z^2 + D_{xx} x^2 + D_{yy} y^2}{2r^5} = \frac{4\kappa_0 a^3 (3 \cos^2 \theta - 1)}{15r^3}.$$

Контрольная работа 1.2, вариант 1

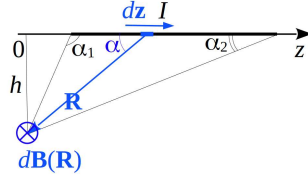
Решение задачи 1



Искомое магнитное поле равно векторной сумме полей, образуемых током в 6-ти прямолинейных участках провода.

Вклад подводящих проводов равен нулю, так как по принципу суперпозиции они могут быть сведены к одному проводу с нулевым током.

Вклад одного отрезка рамки может быть рассчитан по формуле, полученной на семинарах:



$$H_1 = \frac{I}{ch} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = \frac{2\sqrt{2}I}{ca},$$

где учтено, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ и $h = \frac{a}{2}$.

Поля от каждого из 4-х отрезков направлены от нас и равны друг другу по абсолютной величине.

Суммарное поле направлено от нас и равно

$$H = 4H_1 = \frac{8\sqrt{2}I}{ca}.$$

Решение задачи 2

В результате перехода шара в проводящее состояние весь заряд перетечет из его объема на поверхность.

Энергия заряженной системы может быть рассчитана как энергия поля во всем пространстве:

$$W = \int \frac{ED}{8\pi} dV. \quad (1)$$

Заметим, что поле снаружи от шара не изменится, поскольку в сферически симметричном случае оно равно полю точечного заряда, сосредоточенного в центре шара, а величина заряда не изменится. Поэтому для определения изменения энергии поля во всем пространстве достаточно рассмотреть только энергию внутри шара.

Поле в проводнике равно нулю, поэтому и энергия поля в шаре в конечном состоянии равна нулю.

Поле внутри шара в начальном состоянии найдем интегрированием уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E(r)) = 4\pi \frac{\alpha}{\sqrt{r}},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 E(r)) = 4\pi\alpha r^{3/2},$$

$$r^2 E(r) = \frac{2 \cdot 4\pi\alpha}{5} r^{5/2},$$

$$E(r) = \frac{8\pi\alpha}{5} r^{1/2}.$$

После подстановки полученного выражения $E(r)$ в (1), получим

$$W_0 = \frac{1}{8\pi} \int_0^a \frac{64\pi^2 \alpha^2 r}{25} 4\pi r^2 dr = \frac{64\pi^3 \alpha^2}{8\pi \cdot 25} a^4 = \frac{8\pi^2 \alpha^2 a^4}{25}.$$

Изменение энергии равно

$$\Delta W = W' - W_0 = -\frac{8\pi^2 \alpha^2 a^4}{25}.$$

Решение задачи 3

В процессе разрядки конденсатора между его обкладками течет, заряд перетекает с положительно заряженной пластины на отрицательно заряженную. Величина заряда и напряжение на пластинах уменьшаются со временем по экспоненциальному закону

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

с временем релаксации $\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$.

Энергия конденсатора в текущий момент времени t равна

$$W(t) = \frac{CU^2(t)}{2},$$

в момент времени $t = 0$

$$W_0 = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Разность этих энергий

$$W_0 - W(t) = \frac{CU_0^2}{2}(1 - e^{-2\frac{t}{\tau}})$$

равна количеству выделившейся теплоты.

Учтем, что емкость конденсатора равна

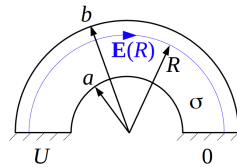
$$C = \frac{l\varepsilon}{2 \ln \frac{b}{a}}.$$

Тогда

$$\Delta W(t) = \frac{l\varepsilon U_0^2}{4 \ln \frac{b}{a}}(1 - e^{-2\frac{t}{\tau}}).$$

Решение задачи 4

В данной задаче нужно сообразить, что силовые линии электрического поля имеют только азимутальную компоненту в цилиндрических переменных. Тогда из условия



$$\int E(R)Rd\alpha = U$$

имеем

$$\mathbf{E}(R) = \frac{U}{\pi R} \mathbf{e}_\alpha.$$

Далее, плотность тока равна

$$j(R) = \sigma(R)E(R) = \frac{\sigma_0 R}{a} \frac{U}{\pi R} = \frac{\sigma_0 U}{\pi a},$$

а полный ток между электродами

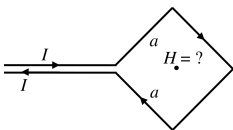
$$I = j \cdot l(b - a) = \frac{\sigma_0 U l(b - a)}{\pi a}.$$

Искомое сопротивление

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\pi a}{\sigma_0 l(b - a)}.$$

Контрольная работа 1.2, вариант 2

Решение задачи 1



Вклад подводящих проводов в поле равен нулю. Вклад рамки с током рассчитывается так же, как в задаче 1 вар. 1 (см. на стр. 80). Поэтому суммарное

поле направлено от нас и равно

$$H = \frac{8\sqrt{2}I}{ca}.$$

Решение задачи 2

В результате перехода шара в проводящее состояние весь заряд перетечет из его объема на поверхность.

Энергия заряженной системы может быть рассчитана как энергия поля во всем пространстве:

$$W = \int \frac{ED}{8\pi} dV. \quad (1)$$

Заметим, что поле снаружи от шара не изменится, поскольку в сферически симметричном случае оно равно полю точечного заряда, сосредоточенного в центре шара, а величина заряда не изменится. Поэтому для определения изменения энергии поля во всем пространстве достаточно рассмотреть только энергию внутри шара.

Поле в проводнике равно нулю, поэтому и энергия поля в шаре в конечном состоянии равна нулю.

Поле внутри шара в начальном состоянии найдем интегрированием уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E(r)) = 4\pi\beta\sqrt{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 E(r)) = 4\pi\beta r^{5/2},$$

$$r^2 E(r) = \frac{2 \cdot 4\pi\beta}{7} r^{7/2},$$

$$E(r) = \frac{8\pi\beta}{7} r^{3/2}.$$

После подстановки полученного выражения $E(r)$ в (1), получим

$$W_0 = \frac{1}{8\pi} \int_0^a \frac{64\pi^2\beta^2 r^3}{49} 4\pi r^2 dr = \frac{64 \cdot 4\pi^3\beta^2}{8\pi \cdot 49 \cdot 6} a^6 = \frac{16\pi^2\beta^2 a^6}{147}.$$

Изменение энергии равно

$$\Delta W = W' - W_0 = -\frac{8\pi^2\alpha^2 a^4}{25}.$$

Решение задачи 3

Отличие от задачи 3 варианта 1 (см. на стр. 81) состоит только в том, что в данной задаче задан начальный заряд. Поэтому энергия конденсатора в текущий момент времени t записывается в виде

$$W(t) = \frac{q^2(t)}{2C},$$

в момент времени $t = 0$

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Разность этих энергий

$$W_0 - W(t) = \frac{q_0^2}{2C}(1 - e^{-2\frac{t}{\tau}})$$

равна количеству выделившейся теплоты.

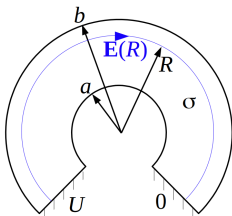
Учтем, что емкость конденсатора равна

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \frac{b}{a}}.$$

Тогда

$$\Delta W(t) = \frac{q_0^2 \ln \frac{b}{a}}{\varepsilon l} (1 - e^{-\frac{8\pi\sigma}{\varepsilon} t}).$$

Решение задачи 4



По аналогии с решением задачи 4 варианта 1 (см. на стр. 82) поле в трубе равно

$$\mathbf{E}(R) = \frac{2U}{3\pi R} \mathbf{e}_\alpha.$$

Далее, плотность тока равна

$$j(R) = \sigma(R)E(R) = \frac{2\sigma_0 R^2}{3a^2} \frac{U}{\pi R} = \frac{3\sigma_0 U R}{2\pi a^2},$$

а полный ток между электродами

$$I = \int_a^b j(R) l dR = \int_a^b \frac{3\sigma_0 U l R dR}{2\pi a^2} = \frac{3\sigma_0 U l (b^2 - a^2) r dr}{4\pi a^2}.$$

Искомое сопротивление

$$R = \frac{U}{I} = \frac{4\pi a^2}{3\sigma_0 l (b^2 - a^2)}.$$

Экзаменационная работа 1

Решение задачи 1

Сопротивление проводника описывается общей формулой

$$R = \frac{\rho l}{S},$$

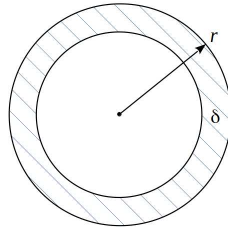
где S – эффективная площадь сечения, l – длина проводника, ρ – удельное сопротивление.

Вследствие скин-эффекта ток течет только по скин-слою. Поэтому эффективная площадь сечения равна

$$S = 2\pi r \delta.$$

Толщина скин-слоя равна

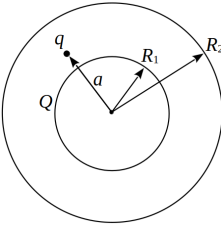
$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}.$$



Тогда за счет увеличения частоты толщина скин-слоя уменьшится в $\sqrt{3}$ раз. За счет раскатывания провода радиус уменьшится в 2 раза, а длина $l = \frac{V}{\pi r^2}$ увеличится в 4 раза. В итоге искомое отношение составит

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{3}.$$

Решение задачи 2

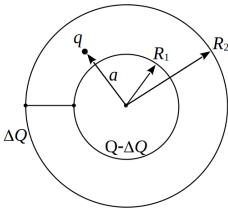


Потенциал внешней сферы до и после коммутации равен

$$\phi_2 = \frac{Q + q}{R_2}.$$

Потенциал в центре после коммутации равен

$$\phi_1 = \frac{Q - \Delta Q}{R_1} + \frac{\Delta Q}{R_2} + \frac{q}{a}.$$



Поскольку поле внутри проводящей внутренней сферы равно нулю, потенциал в центре равен потенциалу внутренней сферы, который после коммутации равен потенциалу внешней сферы:

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta Q = \frac{\frac{Q}{R_1} + \frac{q}{a} - \frac{Q+q}{R_2}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = Q + \frac{\frac{R_2}{a} - 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1} q.$$

Решение задачи 3

Задача имеет изящное решение. Рассмотрим сначала электростатическую задачу об электрическом поле снаружи от полубесконечной цепи линейных электрических диполей, каждый из которых представляет собой пару разноименно заряженных прямых бесконечных нитей (см. рисунок). Внутри такой цепи имеет место компенсация зарядов на стыке соседних диполей. Нескомпенсированным оказывается только заряд нити на конце цепи. Поэтому снаружи получим поле бесконечной прямой заряженной нити, расположенной на конце цепи:

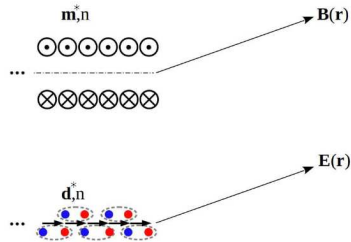
$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{2\kappa}{R} \mathbf{e}_R = \frac{2d^*}{\delta \cdot R} \mathbf{e}_R.$$

где d^* – величина удельного дипольного электрического момента, δ – период в цепи линейных диполей.

Теперь вернемся к магнитостатической задаче. Пару полубесконечных плоскостей с противоположными линейными токами можно разбить на пары элементарных отрезков с противоположными токами. Каждая такая пара представляет собой линейный магнитный диполь. Поскольку поля магнитного и электрического линейных диполей устроены однотипно, с заменой $\mathbf{d}^* \leftrightarrow \mathbf{m}^*$, $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B}$, то и результирующее поле получается аналогичной заменой

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \frac{2\kappa_m}{R} \mathbf{e}_R = \frac{2dm^*}{Rdx} \mathbf{e}_R,$$

где $m^* = \frac{Jhdx}{c}$ – величина элементарного удельного магнитного момента, dx – длина элементарного отрезка.



Подставляя выражение для dm^* , получим

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \frac{2Jh}{cR} \mathbf{e}_R.$$

В частности, на оси x

$$\mathbf{B}(x) = \frac{2Jh}{cx} \mathbf{e}_x.$$

Решение задачи 4

Поток магнитного поля внутри соленоида исходно и после пуска по прямому проводу тока равен нулю. Поскольку соленоид тонкий, то внутри соленоида сохраняется нулевое поле, которое по принципу суперпозиции может быть записано как

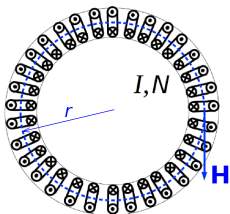
$$\frac{2I}{cR} - \frac{4\pi n I_s}{c} = 0 \Rightarrow I_s = \frac{I}{2\pi R n} = \frac{I}{N},$$

где N – полное число витков в соленоиде.

Решение задачи 5

Пустим по соленоиду ток I . Запишем теорему Стокса для кругового контура радиуса r (см. рисунок):

$$\oint \mathbf{H}(r) d\ell = 2\pi r H(r) = \frac{4\pi N I}{c} \Rightarrow H(r) = \frac{2NI}{cr}.$$



Для вектора магнитной индукции получим

$$B(r) = \mu(r)H(r) = \mu_0 \frac{r}{R} \frac{2NI}{cr} = \frac{2\mu_0 NI}{cR} = \text{const}.$$

Магнитный поток внутри всех витков соленоида равен

$$\Phi = BSN = \frac{2\mu_0 N^2 I a b}{cR},$$

откуда индуктивность

$$L = \frac{c\Phi}{I} = \frac{2\mu_0 N^2 ab}{R}.$$

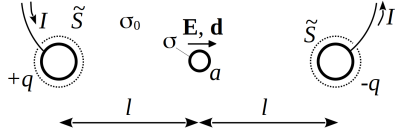
Решение задачи 6

Пусть между идеально проводящими шариками ток I . На электродах соберутся разноименные заряды, абсолютную величину которых найдем из теоремы Гаусса

$$\oiint \mathbf{E} d\mathbf{S} \approx \iint_{\tilde{S}} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iint_{\tilde{S}} \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{j} d\mathbf{S} = \frac{I}{\sigma_0} = 4\pi q \Rightarrow q = \frac{I}{4\pi\sigma_0},$$

где за \tilde{S} обозначена поверхность без точки, через которую подводится ток (см. рисунок). Эти заряды создают в средней точке поле

$$E = \frac{2q}{l^2},$$



которое приводит к поляризации зарядов на промежуточном шарике и создает на нем дипольный момент (см. задачу 3.24 из [1])

$$\mathbf{d} = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma + 2\sigma_0} a^3 \mathbf{E}.$$

Диполь наводит в пространстве дополнительное поле, изменяя разность потенциалов между электродами

$$\Delta U = -\frac{2d}{l^2} = \frac{(\sigma_0 - \sigma)a^3 I}{(\sigma + 2\sigma_0)\sigma_0\pi l^4}$$

Соответствующее изменение сопротивления равно

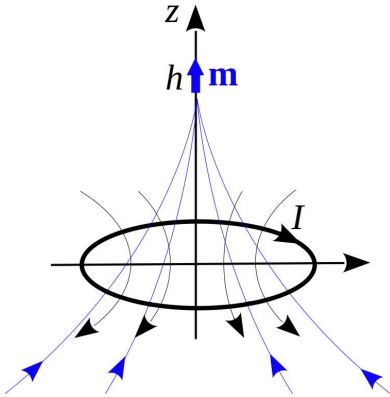
$$\Delta R = \frac{(\sigma_0 - \sigma)a^3}{(\sigma + 2\sigma_0)\pi\sigma_0 l^4}.$$

Решение задачи 7

Магнитный поток в области внутри сверхпроводящего кольца сохраняется. В первой части эксперимента этот поток равен нулю. При приближении магнита к кольцу это условие выполняется по механизму возбуждения в нем тока, который создает компенсирующий магнитный поток.

Получим выражение для силы отталкивания, действующей на магнит, находящийся в точке z . Пусть магнитный момент магнита равен m . Тогда магнитный поток, создаваемый магнитом внутри кольца, равен

$$\Phi(z) = \oint \mathbf{A} d\ell = \oint \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} d\ell = \frac{2\pi R^2 m}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$



Компенсирующий магнитный поток равен

$$\frac{LI}{c} = \Phi(z),$$

откуда ток в кольце равен

$$I = \frac{2\pi c R^2 m}{L(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{2\pi c m R^2}{L(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

(магнит зафиксирован в точке $z = h$).

Магнитное поле, создаваемое током I на оси кольца:

$$\mathbf{B}(z) = -\frac{2\pi R^2 I}{c(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

Это поле является внешним по отношению к твердому

магнитному диполю. Тогда сила на магнит равна

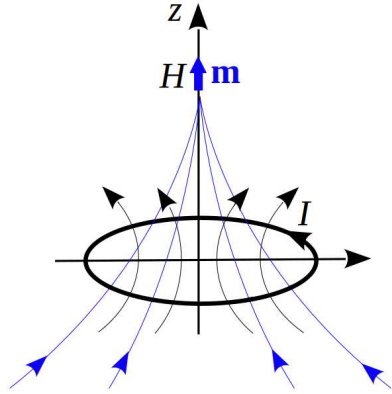
$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{2\pi m R^2 I}{c(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z = \frac{6\pi m R^2 I z}{c(z^2 + R^2)^{5/2}} \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{12\pi^2 m^2 R^4 h}{L(h^2 + R^2)^4} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

В состоянии левитации $F_1 = M_m g$.

После того, как кольцо переводится в нормальное состояние, ток в нем становится равен нулю, а магнитный поток внутри него

$$\Phi_2 = \frac{2\pi R^2 m}{(h^2 + R^2)^{3/2}} = \text{const}.$$

При удалении магнита в положение z закон сохранения магнитного потока принимает вид



$$\frac{2\pi R^2 m}{(h^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{LI}{c} + \frac{2\pi R^2 m}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Ток в кольце:

$$\begin{aligned}I &= \frac{2\pi c R^2 m}{L(h^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{2\pi c R^2 m}{L(z^2 + R^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{2\pi c R^2 m}{L} \left(\frac{1}{(h^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right).\end{aligned}$$

Поле на оси:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{2\pi R^2 I}{c(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

Сила на магнит:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 &= \frac{2\pi R^2 I}{c} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z = -\frac{6\pi R^2 I z}{c(z^2 + R^2)^{5/2}} \mathbf{e}_z = \\ &= -\frac{12\pi^2 R^4 m}{L} \left(\frac{1}{(h^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{1}{(H^2 + R^2)^{3/2}} \right) \frac{H}{(H^2 + R^2)^{5/2}} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Учитывая отрыв кольца от плоскости опоры, $F_2 = M_{\text{к}} g$.

Искомое отношение масс равно

$$\frac{M_{\text{к}}}{M_m} = \frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{1}{(h^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{1}{(H^2 + R^2)^{3/2}} \right) \frac{H(h^2 + R^2)^4}{h(H^2 + R^2)^{5/2}}.$$

Контрольная работа 2.1, вариант 1

Решение задачи 1

Воспользуемся формулой Френеля для ТЕ-волны в случае $\mu \neq 1$:

$$\xi_1 = \frac{\mu_2 \sin \theta_2 \cos \theta_0 - \mu_1 \sin \theta_0 \cos \theta_2}{\mu_2 \sin \theta_2 \cos \theta_0 + \mu_1 \sin \theta_0 \cos \theta_2}.$$

Угол θ_2 найдем из закона преломления:

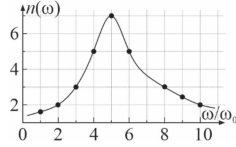
$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

$\theta_2 = 30^\circ$, откуда

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{3} \sin 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cos 30^\circ}{\sqrt{3} \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} \frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{\sqrt{3} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$$

Решение задачи 2

Представим заданный волновой пакет в виде суперпозиции двух плоских монохроматических волн, воспользовавшись тригонометрическим тождеством $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$:



$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(k_z z - \omega_0 t) \cos(4k_z z - 4\omega_0 t) = \\ = \frac{E_0}{2} \cos(5k_z z - 5\omega_0 t) + \frac{E_0}{2} \cos(3k_z z - 3\omega_0 t).$$

По кривой $n(\omega)$ определяем показатели преломления для каждой волны:

$$n_I = n(5\omega_0) = 7, \quad n_{II} = n(3\omega_0) = 3.$$

Амплитуды отраженных волн составляют

$$E_I = \frac{E_0}{2} \cdot \frac{1 - n_I}{1 + n_I} = -\frac{3E_0}{8}, \quad E_{II} = \frac{E_0}{2} \cdot \frac{1 - n_{II}}{1 + n_{II}} = -\frac{E_0}{4}.$$

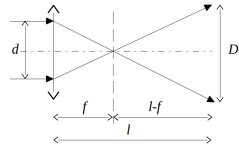
Максимальное значение поля в отраженном волновом пакете достигается, например, на границе раздела при $t = 0$ и равно

$$E_{max} = |E_I + E_{II}| = \frac{5E_0}{8}.$$

Решение задачи 3

Оценим размер пятна без учета соотношения неопределенностей:

$$D_1 = 2 \frac{d}{2} \cdot \frac{l - f}{f} = d \left(\frac{l}{f} - 1 \right).$$



С учетом соотношения неопределенностей:

$$D_2 = 2\frac{\lambda}{d}l = \frac{2\lambda l}{d}.$$

Оба вклада аддитивны:

$$D = D_1 + D_2 = d\left(\frac{l}{f} - 1\right) + \frac{2\lambda l}{d}.$$

Решение задачи 4

Групповая скорость волны, распространяющейся с заданной частотой ω в прямоугольном волноводе, равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{c^2 k_z}{\omega}.$$

Отсюда видно, что минимальной групповой скоростью обладает мода с наименьшим значением k_z на данной частоте. С учетом закона дисперсии в прямоугольном волноводе наименьшим k_z обладает мода с наибольшей минимальной частотой среди тех мод, которые возможны на частоте ω (то есть для которых $\omega_{\min} < \omega = \frac{\pi c}{a\sqrt{2}}$).

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \omega_{\min}^2 = c^2 k_z^2 + c^2 \left(\left(\frac{m\pi}{3a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2a} \right)^2 \right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{18}{36} > \frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{4} = \frac{4m^2}{36} + \frac{9n^2}{36}$$

$$18 > 4m^2 + 9n^2$$

m	n	$4m^2 + 9n^2$
0	1	9
0	2	36
1	1	13
2	0	16
2	1	25
3	0	36

Минимальной групповой скоростью обладает пакет с модой (20), он будет зарегистрирован последним.

Контрольная работа 2.1, вариант 2

Решение задачи 1

Воспользуемся формулой Френеля для ТМ-волны в случае $\mu \neq 1$:

$$\zeta_1 = \frac{\mu_1 \sin 2\theta_0 - \mu_2 \sin 2\theta_2}{\mu_1 \sin 2\theta_0 + \mu_2 \sin 2\theta_2}.$$

Угол θ_2 найдем из закона преломления:

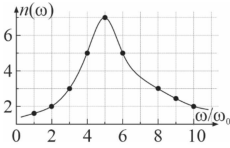
$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

$\theta_2 = 30^\circ$, откуда

$$\zeta_1 = \frac{\sin 120^\circ - \sqrt{3} \sin 60^\circ}{\sin 120^\circ + \sqrt{3} \sin 60^\circ} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$$

Получился такой же ответ, как и в задаче 1 вар. 1. Это закономерный результат, так как в случае $\mu = \varepsilon$ уравнения Максвелла в среде без объемных зарядов и токов становятся симметричными относительно замены $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$, $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$.

Решение задачи 2



Представим заданный волновой пакет в виде суперпозиции двух плоских монохроматических волн, воспользовавшись тригонометрическим тождеством $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= E_0 \cos(2k_z z - \omega_0 t) \cos(4k_z z - 4\omega_0 t) = \\ &= \frac{E_0}{2} \cos(2k_z z - 2\omega_0 t) + \frac{E_0}{2} \cos(6k_z z - 6\omega_0 t). \end{aligned}$$

По кривой $n(\omega)$ определяем показатели преломления для каждой волны:

$$n_I = n(2\omega_0) = 2, \quad n_{II} = n(6\omega_0) = 5.$$

Амплитуды отраженных волн составляют

$$E_I = \frac{E_0}{2} \cdot \frac{1 - n_I}{1 + n_I} = -\frac{E_0}{6}, \quad E_{II} = \frac{E_0}{2} \cdot \frac{1 - n_{II}}{1 + n_{II}} = -\frac{E_0}{3}.$$

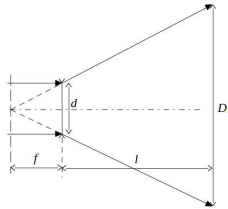
Максимальное значение поля в отраженном волновом пакете достигается, например, на границе раздела при $t = 0$ и равно

$$E_{max} = |E_I + E_{II}| = \frac{E_0}{2}.$$

Решение задачи 3

Оценим размер пятна без учета соотношения неопределенностей:

$$D_1 = 2 \frac{d}{2} \cdot \frac{l + f}{f} = d \left(\frac{l}{f} + 1 \right).$$



С учетом соотношения неопределенностей:

$$D_2 = 2\frac{\lambda}{d}l.$$

Оба вклада аддитивны:

$$D = D_1 + D_2 = d \left(\frac{l}{f} + 1 \right) + \frac{2\lambda l}{d}.$$

Решение задачи 4

Групповая скорость волны, распространяющейся с заданной частотой ω в прямоугольном волноводе, равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{c^2 k_z}{\omega}.$$

Отсюда видно, что минимальной групповой скоростью обладает мода с наименьшим значением k_z на данной частоте. С учетом закона дисперсии в прямоугольном волноводе наименьшим k_z обладает мода с наибольшей минимальной частотой среди тех мод, которые возможны на частоте ω (то есть для которых $\omega_{\min} < \omega = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\pi c}{a}$).

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \omega_{\min}^2 = c^2 k_z^2 + c^2 \left(\left(\frac{m\pi}{3a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)$$

$$\frac{5}{3} = \frac{15}{9} > \frac{m^2}{9} + \frac{9n^2}{9}$$

$$15 > m^2 + 9n^2$$

m	n	$m^2 + 9n^2$
0	1	9
0	2	36
1	1	10
2	1	13
3	0	9
3	1	18

Минимальной групповой скоростью обладает пакет с модой (21), он будет зарегистрирован последним.

Контрольная работа 2.2, вариант 1

Решение задачи 1

Общий вид матрицы преобразования луча от источника до точки выхода из линзы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование угла задается выражением

$$\alpha_2 = a_{21}x_1 + a_{22}\alpha_1,$$

а разброс по углу

$$\Delta\alpha_2 = a_{22}\Delta\alpha_1 = a_{22}\Delta\phi.$$

Таким образом, достаточно определить только элемент a_{22} матрицы преобразования луча:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \frac{d}{f} + 1 \end{pmatrix}$$

Искомый разброс по углу равен

$$\Delta\alpha_2 = \left(1 + \frac{d}{f}\right) \Delta\phi.$$

Решение задачи 2

Зависимость интенсивности от вертикальной координаты в классической схеме Юнга:

$$I(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{kdx}{L}\right),$$

откуда положение m -го максимума:

$$\frac{kd}{L}x_m = 2\pi m \Rightarrow x_m = \frac{2\pi L}{kd}m = \frac{\lambda L}{d}m.$$

Продифференцируем по времени полученное равенство:

$$\dot{x}_m = \frac{\lambda \dot{L}}{d}m.$$

Из условия $\dot{x}_5 - \dot{x}_2 = \frac{\lambda \dot{L}}{d}(5 - 2) = u$ получим

$$\frac{\lambda \dot{L}}{d} = \frac{u}{3}.$$

Тогда скорость движения 5-го максимума равна

$$\dot{x}_5 = 5 \frac{\lambda \dot{L}}{d} = \frac{5u}{3}.$$

Решение задачи 3

Для кольца радиуса x величина зазора между зеркалом и поверхностью линзы составляет

$$\Delta = \frac{x^2}{2R}.$$

Критическое условие на то, что кольцо наблюдается:

$$2\Delta = l_{\parallel} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

откуда максимальный радиус наблюдаемого кольца:

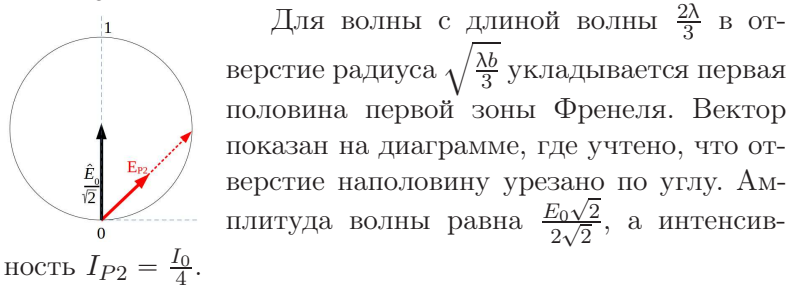
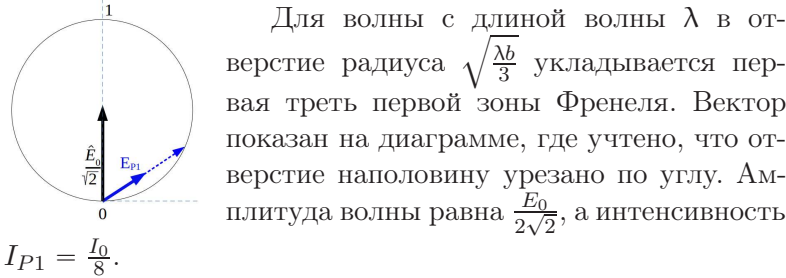
$$x_{\text{кр}} = \lambda \sqrt{\frac{R}{\Delta\lambda}}.$$

Решение задачи 4

Волны с разными частотами не интерферируют. Поэтому для интенсивности падающей волны имеем

$$I_0 = I_{10} + I_{20} \Rightarrow I_{10} = I_{20} = \frac{I_0}{2}, \quad E_{10} = E_{20} = \sqrt{\frac{I_0}{2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}.$$

Амплитуды обеих волн в точке P находим с помощью диаграммы Френеля.



Суммарная интенсивность равна сумме интенсивностей каждой волны:

$$I_{P\Sigma} = \frac{I_0}{8} + \frac{I_0}{4} = \frac{3I_0}{8}.$$

Контрольная работа 2.2, вариант 2

Решение задачи 1

Отличие от задачи 1 вар. 1 состоит только в знаке фокусного расстояния:

$$\Delta\alpha_2 = \left(1 - \frac{d}{f}\right) \Delta\phi.$$

Решение задачи 2

Скорость движения m -го максимума была определена при решении задачи 2 вар. 1:

$$\dot{x}_m = \frac{\lambda \dot{L}}{d} m = \frac{\lambda v}{d} m.$$

Тогда скорость удаления 5-й полосы от (-2)-й равна

$$\dot{x}_5 - \dot{x}_{-2} = \frac{7\lambda v}{d}.$$

Решение задачи 3

Для кольца радиуса x величина зазора между пластиной и зеркалом составляет

$$\Delta = \frac{x^2}{2R}.$$

Критическое условие на то, что кольцо наблюдается:

$$2n\Delta = l_{\parallel} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

откуда максимальный радиус наблюдаемого кольца:

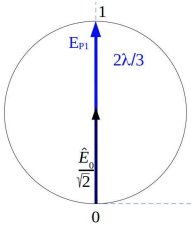
$$x_{\text{кр}} = \lambda \sqrt{\frac{R}{n\Delta\lambda}}.$$

Таким образом, при заполнении зазора средой с показателем преломления n радиус интерференционной картины уменьшится в \sqrt{n} раз.

Решение задачи 4

Как и в задаче 4 вар. 1, для амплитуд двух падающих волн имеем

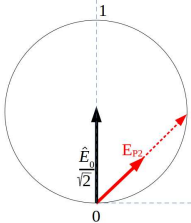
$$E_{10} = E_{20} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}.$$



Амплитуды обеих волн в точке P находим с помощью диаграммы Френеля.

Для волны с длиной волны $\frac{2\lambda}{3}$ в отверстие радиуса $\sqrt{\frac{\lambda b}{3}}$ укладывается полная первая зона Френеля. Вектор показан на диаграмме. Амплитуда волны равна $\frac{2E_0}{\sqrt{2}}$,

а интенсивность $I_{P1} = 2I_0$.



Для волны с длиной волны λ в кольцо с внутренним радиусом $\sqrt{\frac{2\lambda b}{3}}$ и внешним $\sqrt{\lambda b}$ укладывается последняя треть первой зоны Френеля. Вектор показан на диаграмме. Амплитуда волны равна $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$, а интенсивность $I_{P2} = \frac{I_0}{2}$.

Суммарная интенсивность равна сумме интенсивностей каждой волны:

$$I_{P\Sigma} = 2I_0 + \frac{I_0}{2} = \frac{5I_0}{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 1. Электродинамика частиц и полей. 52, 90
2. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2. Электродинамика частиц и волн.
3. Яковлев В. И. Классическая электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1. Электричество и магнетизм.