СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
Лекция 9 Теория Ландау фазовых переходов II рода.

Образовский Е. Г.

1 января 2022 г.

План лекции:

План лекции:

- **Теория Ландау фазовых переходов II рода**

План лекции:

- **Теория Ландау фазовых переходов II рода**
- **Влияние флуктуаций**

Феноменологический подход Ландау

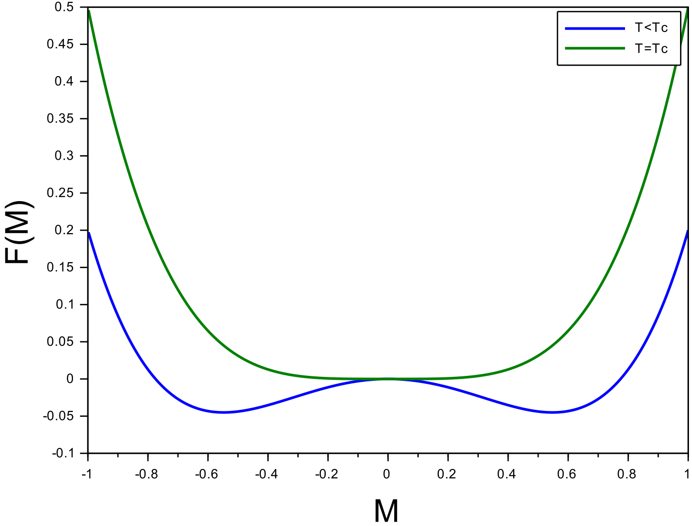
Свойство универсальности объясняет успех феноменологической теории Ландау фазовых переходов второго рода. В этой теории описание системы вблизи критической точки проводится с помощью разложения свободной энергии (или другого термодинамического потенциала) по малому, в этой области, значению параметра порядка M и его пространственным производным, если система находится в пространственно неоднородных условиях (здесь имеется в виду неполное термодинамическое равновесие). Ограничимся для простоты однокомпонентным параметром порядка и будем в дальнейшем иметь в виду переход из парамагнитной в ферромагнитную фазу для одноосного ферромагнетика.

$$F = \int dV \left[aM^2 + bM^4 + c\left(\nabla M\right)^2 - hM\right] \tag{1}$$

Теория Ландау фазовых переходов II рода

Поскольку в отсутствии выделенного направления свободная энергия не зависит от ориентации параметра порядка (в данном случае в положительном или отрицательном направлении некоторой выделенной оси), то разложение идет только по четным степеням. Ландау предположил, что коэффициенты разложения a, b, c являются аналитическими функциями температуры, точнее коэффициент $a = \alpha(T - T_c)$, а другие коэффициенты положительны (поскольку свободная энергия должна быть минимальна). Такой выбор объясняет появление ниже критической температуры ненулевой намагниченности даже в нулевом внешнем магнитном поле, основываясь на минимальности свободной энергии в равновесии.

Теория Ландау фазовых переходов II рода



Для пространственно однородной системы минимизация свободной энергии приводит к уравнению

$$2aM + 4bM^3 = h. \qquad (2)$$

Из этого уравнения можно найти магнитную восприимчивость

$$\chi^{-1} = 2a + 4b\bar{M}^2 \qquad (3)$$

Равновесное значение параметра порядка $\bar{M}$ при стремящемся к нулю магнитном поле равно

$$\bar{M} = \begin{cases} \sqrt{\frac{-a}{2b}} & \text{для } T < T_c,; \\ 0 & \text{для } T > T_c \end{cases} \qquad (4)$$

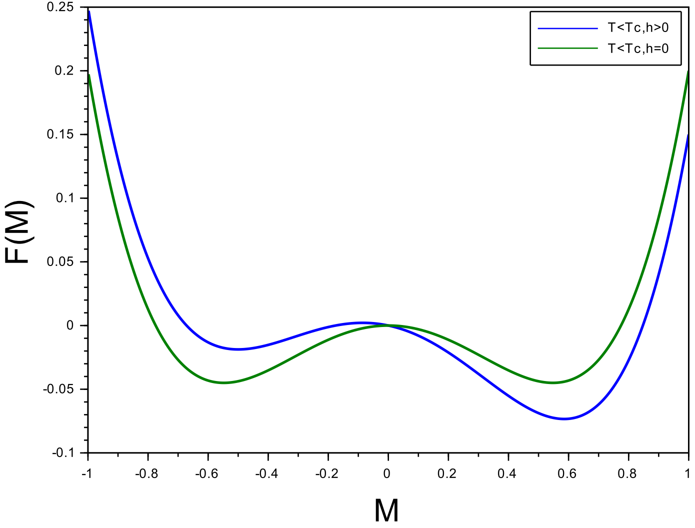
Отсюда находим, что критический показатель $\beta = 1/2$.

Влияние внешнего поля будет сильным, если величина hM превосходит aM^2, иначе

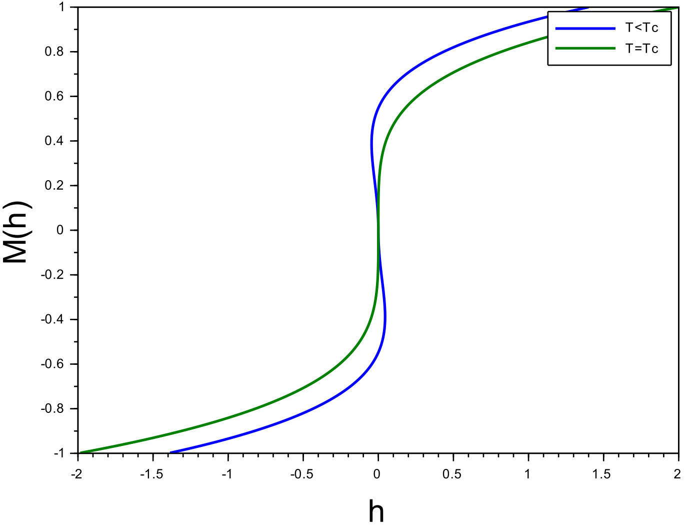
$$h > h_c \sim aM = \frac{(\alpha|T - T_c|)^{3/2}}{\sqrt{b}}. \tag{5}$$

При приближении к критической температуре $T \to T_c$ любое внешнее поле будет сильным.

Теория Ландау фазовых переходов II рода



Теория Ландау фазовых переходов II рода



Теория Ландау фазовых переходов II рода

Подставляя значение $\bar{M}$ в выражение для восприимчивости, получаем

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha(T_c - T)} & \text{для } T < T_c,; \\ \frac{1}{2\alpha(T - T_c)} & \text{для } T > T_c \end{cases} \tag{6}$$

Поведение системы при критической температуре во внешнем магнитном поле характеризуется еще одним критическим показателем δ, определяемым из соотношения

$$M \sim h^{1/\delta} \quad \rightarrow \quad \delta = 3 \tag{7}$$

Теория Ландау фазовых переходов II рода

До сих пор при вычислении поведения системы вблизи критической точки учитывался вклад только от наиболее вероятной конфигурации намагниченности. Рассмотрим флуктуации относительно равновесной конфигурации и вычислить теплоемкость и корреляционную длину выше и ниже T_c в теории Ландау в квадратичном приближении.

Рассмотрим вклад в статсумму от малых флуктуаций на фоне однородной конфигурации поля параметра порядка

$$Z = e^{-\beta F} = \int DM(x) e^{-\beta H}, \tag{8}$$

где

$$H = \int d^d x \left[a(M_0 + M(x))^2 + c(\nabla M)^2 + b(M_0 + M(x))^4 - h(x)M(x) \right] \tag{9}$$

Оставляя только квадратичные по полю M члены, имеем для $T > T_c$, $M_0 = 0$

$$H = H_0 + \int d^d x \left[c(\nabla M)^2 + aM^2 - h(x)M(x) \right] \tag{10}$$

для $T < T_c$, $M_0 = -a/2b$

$$H = H_0 + \int d^d x \left[c(\nabla M)^2 + 2aM^2 - h(x)M(x) \right] \tag{11}$$

Чтобы вычислить статсумму нужно проинтегрировать по всем конфигурациям поля $M(x)$, что удобно сделать рассматривая систему в ящике объема $V = L^d$, и накладывая периодические граничные условия, т.е. $kl = 2\pi m$, где $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Перейдем к фурье-компонентам

$$M(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} M_{\mathbf{k}}, M_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} M(\mathbf{x}) \tag{12}$$

Тогда, например,

$$\int d^d x M(\mathbf{x})^2 = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{V} \int d^d x e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} M_{\mathbf{k}} M\mathbf{k}' = \sum_{\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}} M_{-\mathbf{k}} \tag{13}$$

поскольку

$$\frac{1}{V} \int d^d x e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} = \Delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{14}$$

Теория Ландау фазовых переходов II рода

Получаем для $T > T_c$

$$H = H_0 + \sum_{\mathbf{k}} [(ck^2 + a) M_{\mathbf{k}} M_{-\mathbf{k}} - h_{-\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}}] \qquad (15)$$

Теперь для вычисления статсуммы можно перейти к интегрированию по дискретному набору фурье-компонент $M_{\mathbf{k}}$

$$Z = \int \prod_{\mathbf{k}} dM_{\mathbf{k}} e^{-\beta H} \equiv e^{-\beta F} \qquad (16)$$

Для вещественного поля $M(\mathbf{x})$ у пары комплексных переменных $M_{\mathbf{k}}, M_{-\mathbf{k}}$ только две независимые компоненты

$$dM_{\mathbf{k}} dM_{-\mathbf{k}} = d(ReM_{\mathbf{k}}) d(ImM_{\mathbf{k}}) \qquad (17)$$

Для случая $T > T_c, h = 0, a = \alpha(T - T_c)$ имеем

$$F = F_0 - \frac{T}{2}\sum_{\mathbf{k}} \ln \frac{\pi}{ck^2 + a}, \tag{18}$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = S_0 + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \ln \frac{\pi}{ck^2 + a} - \frac{T}{2}\sum_{\mathbf{k}} \frac{\alpha}{ck^2 + a}, \tag{19}$$

$$C = T\frac{\partial S}{\partial T} = C_0 - \frac{T}{2}\sum_{\mathbf{k}} \frac{\alpha}{ck^2 + a} + \frac{T^2}{2}\sum_{\mathbf{k}} \frac{\alpha^2}{(ck^2 + a)^2}. \tag{20}$$

При $T \to T_c, a \equiv A(T - T_c) \to 0$ и наиболее сингулярным при $k \to 0$ будет последний член. Из периодических гранусловий $kL = 2\pi m$ следует $dm = Ldk/2\pi$ и

$$\sum_{\mathbf{k}}(\cdots) \to \frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dk(\cdots) \tag{21}$$

Тогда

$$C_{sing} = \frac{T^2\alpha^2 V}{2(2\pi)^d}\int \frac{d^dk}{(a+ck^2)^2} =$$

$$\frac{T^2\alpha^2 V}{2(2\pi)^d c^2}\xi^{4-d}\int \frac{d^dk'}{(1+k'^2)^2} \sim (T - T_c)^{d/2-2}, \tag{22}$$

где $\xi \equiv (c/a)^{1/2} \sim (T - T_c)^{-1/2}$ есть корреляционная длина. Видно, что при $d < 4$ в достаточной близости к критической точке теплоемкость превосходит значение, получаемое в теории среднего поля, так что требуется более точный учет флуктуационных эффектов.

Критерий применимости теории среднего поля.
Для однородной намагниченности свободная энергия равна

$$F = V(aM_0^2 + bM_0^4) = -\frac{\alpha^2 V(T - T_c)^2}{4b}. \tag{23}$$

Теплоемкость при $T \to T_c$

$$C_V = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{\alpha^2 V T_c}{2b}. \tag{24}$$

Применимость теории Ландау в трехмерном пространстве $(d = 3)$ ограничена условием

$$C_V \gg C_{sing} \sim \frac{T_c^2 \alpha^2 V}{a^2}\left(\frac{a}{c}\right)^{3/2} = \frac{T_c^2 \alpha^2 V}{\sqrt{ac^3}}. \tag{25}$$

Отсюда получаем

$$|T - T_c| \gg \frac{T_c^2 b^2}{\alpha c^3} \tag{26}$$

критерий Леванюка-Гинзбурга.

Вычислим корреляционную функцию

$$\langle M(\mathbf{x}_1)M(\mathbf{x}_2)\rangle = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}_1} e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{x}_2} \langle M_{\mathbf{k}_1} M_{\mathbf{k}_2}\rangle. \tag{27}$$

Среднее

$$\langle M_{\mathbf{k}_1} M_{\mathbf{k}_2}\rangle = \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial h_{\mathbf{k}_1}}\frac{\partial}{\partial h_{\mathbf{k}_2}} Z, \tag{28}$$

где

$$Z = \int \prod_{\mathbf{k}} dM_{\mathbf{k}} e^{-H/T}, \tag{29}$$

$$H/T = H_0/T + \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{ck^2 + a}{T} M_{\mathbf{k}} M_{-\mathbf{k}} - h_{\mathbf{k}} M_{-\mathbf{k}}\right]. \tag{30}$$

Обозначим

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \frac{ck^2 + a}{T} \tag{31}$$

и преобразуем

$$M_{\mathbf{k}} = M'_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}}. \tag{32}$$

Тогда

$$\sum_{\mathbf{k}} \left[\alpha_{\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}} M_{-\mathbf{k}} - h_{\mathbf{k}} M_{-\mathbf{k}}\right] =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \left[\alpha_{\mathbf{k}} M'_{\mathbf{k}} M'_{-\mathbf{k}} + h_{\mathbf{k}} M_{-\mathbf{k}} \left(2\alpha_{\mathbf{k}}\beta_{\mathbf{k}} - 1\right) + h_{\mathbf{k}} h_{-\mathbf{k}} \left(\alpha^2_{\mathbf{k}}\beta_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{k}}\right)\right]. \tag{33}$$

Если выбрать $2\alpha_{\mathbf{k}}\beta_{\mathbf{k}} = 1$, то

$$H/T = H_0/T + \sum_{\mathbf{k}} \left[\alpha_{\mathbf{k}} M'_{\mathbf{k}} M'_{-\mathbf{k}} - \frac{1}{4\alpha_{\mathbf{k}}} h_{\mathbf{k}} h_{-\mathbf{k}}\right]. \tag{34}$$

Тогда

$$\langle M_{\mathbf{k}_1} M_{\mathbf{k}_2} \rangle = \frac{\partial}{\partial h_{\mathbf{k}_1}} \frac{\partial}{\partial h_{\mathbf{k}_2}} \exp\left(\sum_{\mathbf{k}} \frac{h_{\mathbf{k}} h_{-\mathbf{k}}}{4\alpha_{\mathbf{k}}} \right) \Big|_{h=0} = \frac{1}{2\alpha_{\mathbf{k}1}} \delta_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2} =$$

$$= \frac{T}{2(ck_1^2 + a)} \delta_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2}. \qquad (35)$$

Значит

$$\langle M(\mathbf{x}_1) M(\mathbf{x}_2) \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \frac{T}{2(ck^2 + a)} = \frac{T}{2c(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2 + k_0^2}, \qquad (36)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, $k_0^2 = a/c$.

$$\int d^3k \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+k_0^2} = \int\limits_0^\infty 2\pi k_\perp dk_\perp \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{e^{ik_z r}}{k_z^2+k_\perp^2+k_0^2} =$$

$$= 2\pi^2 \int\limits_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{\sqrt{k_\perp^2+k_0^2}} e^{-\sqrt{k_\perp^2+k_0^2}\,r} = 2\pi^2 \int\limits_0^\infty d\sqrt{k_\perp^2+k_0^2}\, e^{-\sqrt{k_\perp^2+k_0^2}\,r} =$$

$$= \frac{2\pi^2}{r} e^{-k_0 r}. \tag{37}$$

В итоге

$$\langle M(\mathbf{x}_1) M(\mathbf{x}_2) \rangle = \frac{T}{8\pi c |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} e^{-|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|/\xi}, \tag{38}$$

где

$$\xi = \sqrt{\frac{c}{\alpha(T-T_c)}} \sim (T-T_c)^{-1/2}. \tag{39}$$