Занятие 29

Нули решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Теорема сравнения.

Рассмотрим два дифференциальных уравнения:

$$y_1'' + y_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_2'' - y_2 = 0$$

Решения их нам хорошо известны. Это

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \text{ и } y = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x$$

Мы видим, что любое решение первого на отрезке, длина которого больше π, обязательно обратится в ноль хотя бы два раза. Решения второго уравнения могут обратиться в ноль не более одного раза на отрезке любой длины.

Если решение дифференциального уравнения обращается в ноль на данном интервале не более одного раза, оно называется *неколеблющимся* на этом интервале. В противном случае оно называется *колеблющимся.*

Важно понимать, что если ненулевое решение дифференциального уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ обращается в ноль в точке x_0, то оно обязательно меняет знак в этой точке. Поэтому колебательный характер решения связан с наличием у него нулей.

Мы знаем (см. занятие 21), что заменой $y(x) = \rho(x)u(x)$ уравнение $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ можно привести к виду

$$u''(x) + Q(x)u = 0. \tag{29.1}$$

При этом функция $\rho(x)$ может быть найдена из уравнения $2\rho'(x) + a(x)\rho(x) = 0$, а функция $Q(x)$ — из уравнения $Q(x) = -\frac{1}{4}a^2(x) - \frac{1}{2}a'(x) + b(x)$. Может сложиться обманчивое представление, что колебательный характер решения связан с тем, является ли функция $Q(x)$ знакопостоянной на каком-то отрезке, и с тем, каков этот знак. Однако, это не так.

Пример 1. Изучим поведение решений уравнения Эйлера

$$y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$$

на интервале $(0; +\infty)$. Определяющее уравнение $\lambda(\lambda - 1) + a^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}$.

Если $a^2 = \frac{1}{4}$, то общее решение $y(x) = C_1\sqrt{x} + C_2 \ln x\sqrt{x}$. Как видим, любое решение является неколеблющимся.

Если $a^2 < \frac{1}{4}$, то корни $\lambda_{1,2}$ вещественные, и общее решение $y(x) = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2}$. Мы опять видим неколеблющиеся решения.

Если же $a^2 > \frac{1}{4}$, то корни $\lambda_{1,2}$ комплексно-сопряженные, и общее решение

$$y(x) = C_1\sqrt{x}\cos(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}\ln x) + C_2\sqrt{x}\sin(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}\ln x).$$

Очевидно, на интервале $(0; +\infty)$ эти функции являются колеблющимися.

Таким образом, из положительности функции $Q(x)$ нельзя сделать вывод о колебательном характере решений. Но можно показать, что если $Q(x) \leqslant 0$ на интервале $(a; b)$, то на этом интервале любое решение уравнения (29.1) будет неколеблющимся.

Следующая теорема, называемая теоремой сравнения, занимает центральное место при исследовании колебательного характера решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим два уравнения:

$$u''(x) + A(x)u = 0$$

$$v''(x) + B(x)v = 0$$

Функции $A(x)$ и $B(x)$ определены и непрерывны на интервале $(a; b)$. Будем говорить, что эти уравнения образуют штурмову пару, если $\forall x \in (a; b)$ выполняется $A(x) \leqslant B(x)$.

Если функция $u(x)$, являющаяся решением первого уравнения, колеблется на интервале $(a; b)$ и x_1, x_2 — какие-либо два последовательных нуля этой функции, то *любое* решение $v(x)$ второго уравнения обращается в ноль хотя бы один раз на интервале $(x_1; x_2)$.

Если обозначить через $d_u(a; b)$ расстояние между любыми двумя последовательными нулями функции $u(x)$ на интервале $(a; b)$, а через $d_v(a; b)$ — расстояние между любыми двумя последовательными нулями функции $v(x)$, то теорема сравнения может быть кратко записана следующим образом: если $A(x) \leqslant B(x)$ на интервале $(a; b)$, то $d_v(a; b) < d_u(a; b)$.

Или, переходя на сленг, говорят, что функция $v(x)$ колеблется на интервале $(a; b)$ чаще, чем функция $u(x)$.

Из теоремы сравнения следует, что если $m \leqslant Q(x) \leqslant M$ на $(a; b)$, то расстояние между любыми двумя последовательными нулями любого решения уравнения (29.1) заключено в пределах от $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$ до $\dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$.

Вернемся к примеру 1. Уравнения $u''(x) + a^2u = 0$ и $y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$ образуют штурмову пару на интервале $(\varepsilon; 1)$ $(\varepsilon > 0)$. Расстояние между любыми двумя последовательными нулями любого решения первого уравнения равно $\frac{\pi}{a}$, и для того чтобы они попадали на интервал $(\varepsilon; 1)$, необходимо, чтобы $\frac{\pi}{a} < 1 - \varepsilon$, то есть $a^2 > (\frac{\pi}{1-\varepsilon})^2$.

Таким образом, при достаточно больших a все решения уравнения $y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$ имеют хотя бы один ноль на интервале $(\varepsilon; 1)$.

Уравнения $y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$ и $v''(x) + a^2v = 0$ образуют штурмову пару на интервале $(1; +\infty)$. Если мы уже знаем, что решения первого уравнения колеблются, то эта пара дает возможность оценить снизу расстояние между двумя последовательными нулями решения первого уравнения величиной $\frac{\pi}{a}$. Если же мы не знаем, что первое уравнение имеет колеблющиеся решения, то на основании этой пары сделать вывод о колебательном характере решений мы не можем.

Наконец, на интервале $(1; M)$ уравнения $u'' + \frac{a^2}{M^2}u = 0$ и $y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$ образуют штурмову пару. Расстояние между двумя последовательными нулями любого решения первого уравнения равно $\frac{M\pi}{a}$, и можно выбрать достаточно большое значение M, чтобы на интервале $(1; M)$ решения первого уравнения были колеблющимися. Но тогда будут колеблющимися и решения второго уравнения, причем расстояние между двумя последовательными нулями любого его решения оценивается сверху числом $\frac{M\pi}{a}$.

Сравнивая результаты проведенного анализа с точным решением, полученным ранее, мы видим, что теорема Штурма дает качественную оценку колебательного характера решений, но зато освобождает нас от необходимости искать точное решение.

Пример 2. Оценить сверху и снизу расстояние d между двумя последовательными нулями любого решения уравнения $y'' + (1+x)y = 0$ на отрезке $[24; 80]$.

На этом отрезке $25 \leqslant Q(x) \leqslant 81$, следовательно, для расстояния d получаем оценку $\frac{\pi}{9} \leqslant d \leqslant \frac{\pi}{5}$.

Можно оценить и число нулей N на этом отрезке. Длина отрезка равна 56, поэтому $5\frac{56}{\pi} \leqslant N \leqslant 9\frac{56}{\pi}$, или $90 \leqslant N \leqslant 160$.

Пример 3. Покажем, что уравнение $y'' + xy = 0$ имеет на отрезке $[-25; 25]$ не менее 15 нулей.

Рассмотрим отрезок $[\varepsilon^2; 25]$. На нем расстояние d между двумя последовательными нулями любого решения заключено в пределах от $\frac{\pi}{5}$ до $\frac{\pi}{\varepsilon}$. Число нулей $N \geqslant \frac{(25-\varepsilon^2)\cdot\varepsilon}{\pi}$.

Найдем такое ε, чтобы функция $f(\varepsilon) = \frac{(25-\varepsilon^2)\cdot\varepsilon}{\pi}$ принимала максимальное значение. $f'(\varepsilon_0) = 0$ при $\varepsilon_0^2 = \frac{25}{3}$. При этом $f(\varepsilon_0) \approx 15,3$. Таким образом, на отрезке $[\frac{25}{3}; 25]$ любое решение имеет не менее 15 нулей.

Пример 3. Доказать, что расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения $y'' + x^2 y = 0$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$

Мы должны показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что на интервалах $(\delta; +\infty)$ и $(-\infty; -\delta)$ расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения меньше ε.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим штурмову пару

$$u''(x) + a^2 u = 0 \text{ и } y'' + x^2 y = 0.$$

На интервале $|x| > |a|$ расстояние между двумя последовательными нулями любого решения второго уравнения оценивается сверху числом $\dfrac{\pi}{|a|}$. Если $\varepsilon = \dfrac{\pi}{|a|}$, то $|a| = \dfrac{\pi}{\varepsilon}$, и следовательно надо взять $\delta = |a| = \dfrac{\pi}{\varepsilon}$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ полагаем $\delta = \dfrac{\pi}{\varepsilon}$, тогда при $|x| > \delta$ расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения меньше ε.

Исследуем колебательный характер функций Бесселя. Рассмотрим уравнения Бесселя порядка ν

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Сделаем замену $y(x) = \dfrac{z(x)}{\sqrt{x}}$. Она приведет уравнение к виду

$$z'' + \Big(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\Big)z = 0.$$

Если $\nu^2 = \dfrac{1}{4}$, то общее решение этого уравнения

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

и расстояние между двумя последовательными нулями любого решения равно π.

Пусть $\nu^2 = \dfrac{9}{4}$. Покажем сначала, что любое решение уравнения

$$z'' + \Big(1 - \frac{2}{x^2}\Big)z = 0$$

действительно является колеблющимся на интервале $(0; +\infty)$.

Для этого рассмотрим штурмову пару

$$u'' + (1-\varepsilon)u = 0 \text{ и } z'' + \bigl(1 - \frac{2}{x^2}\bigr)z = 0$$

При этом необходимо, чтобы $1 - \varepsilon \geqslant 1 - \frac{2}{x^2}$, то есть $x \in [\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}; +\infty)$. Решения первого уравнения, очевидно, являются колеблющимися при $\varepsilon < 1$, и расстояние между любыми двумя нулями любого решения равно $\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}$.

Следовательно на интервале $x \geqslant \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ расстояние d между любыми двумя нулями функции $z(x)$, являющейся решением второго уравнения, допускает оценку $d < \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} < \pi(1 + \frac{\varepsilon}{2})$.

Зная теперь, что решение $z(x)$ имеет колебательный характер, рассмотрим штурмову пару

$$z'' + \bigl(1 - \frac{2}{x^2}\bigr)z = 0 \text{ и } v'' + v = 0,$$

и сделаем вывод, что $d > \pi$.

Итак, мы показали, что $\pi < d < \pi(1 + \frac{\varepsilon}{2})$ при $x \geqslant \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$. Полученный результат означает, что расстояние между любыми двумя последовательными нулями функции Бесселя $J_{3/2}(x)$ всегда больше, чем π, и стремится к π при $x \to +\infty$.

Функция $J_{3/2}(x)$ имеет достаточно простой вид:

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Bigl(\frac{\sin x}{x} - \cos x\Bigr).$$

Но получить отсюда оценку расстояния между ее нулями (и даже сделать вывод о ее колебательном характере!) затруднительно.

Рассмотрим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y = 0.$$

Замена $y(x) = \dfrac{z(x)}{\sqrt{x}}$ приведет уравнение к виду

$$z'' + \bigl(1 + \frac{1}{4x^2}\bigr)z = 0.$$

Из теоремы сравнения для пары уравнений

$$u'' + u = 0 \text{ и } z'' + \bigl(1 + \frac{1}{4x^2}\bigr)z = 0$$

сразу следует и то, что решения $z(x)$ колеблющиеся, и оценка расстояния между любыми двумя последовательными нулями $d < \pi$.

Теперь составим штурмову пару

$$z'' + \bigl(1 + \frac{1}{4x^2}\bigr)z = 0 \text{ и } v'' + (1 + \varepsilon)v = 0, \text{ где } x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Отсюда можно получить оценку для расстояния между любыми двумя последовательными нулями снизу: $\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} < d$

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ для достаточно малых ε, то можно упростить оценку, и окончательно получить

$$\pi(1 - \frac{\varepsilon}{2}) < d < \pi$$

Таким образом, расстояние между любыми двумя последовательными нулями функции Бесселя $J_0(x)$ меньше π, и стремится к π при $x \to +\infty$.

Теперь можно немного по-другому взглянуть на график функции $J_0(x)$ (рис. 26.1 занятия 26)) Получить информацию о колебательном характере этой функции из степенного ряда совершенно невозможно (впрочем, то же самое можно сказать про ряды для функций $\sin x$ и $\cos x$). Именно дифференциальное уравнение явилось для нас источником новых сведений о его решениях.

Модифицированная функция Бесселя $I_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - y = 0,$$

которое заменой $y(x) = \dfrac{z(x)}{\sqrt{x}}$ приводится к виду

$$z'' + \big(-1 + \frac{1}{4x^2}\big)z = 0.$$

Если $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, то $Q(x) \leqslant 0$. Следовательно, никакое решение не может иметь более одного нуля на этом интервале. Можно показать, что на отрезке $[\varepsilon; \frac{1}{2}]$ при любом ε функция $I_0(x)$ также не имеет нулей (еще раз посмотрите на рис. 26.3)

Таким образом, модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ являются неколеблющимися, а функции Бесселя $J_\nu(x)$ — колеблющимися. Некоторые студенты употребляют именно такие термины: «колеблющиеся функции Бесселя» для $J_\nu(x)$ и «неколеблющиеся функции Бесселя» для $I_\nu(x)$. Нам кажется, что такая терминология не только допустима, но и более информативна, чем нейтральное название «модифицированная функция Бесселя».

Самостоятельная работа

1. Оцените расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения $y'' + xy = 0$ на отрезке $[16; 25]$.

2. Оцените количество нулей на отрезке $[0; 4]$ любого решения уравнения $y'' + 2^x y = 0$.

3. Покажите, что функция $y = \sin(2\ln x)$, $x > 0$, является решением уравнения Эйлера $x^2y'' + xy' + 4y = 0$. Сделайте выводы о расстоянии между нулями решения при $x \to +\infty$ и при $x \to +0$. Можно ли получить ту же информацию, не находя решения, а делая оценки с помощью теоремы сравнения?

4. К какому пределу стремится расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения $y'' + (1 + e^{-x})y = 0$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$?

Ответы к самостоятельной работе

1. $\frac{\pi}{5} < d < \frac{\pi}{4}$

2. *Указание*: $m = 1$, $M = 16 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < d < \pi \Rightarrow \frac{4}{\pi} < N < \frac{16}{\pi}$

Ответ: $2 \leqslant N \leqslant 5$

4. $d \to \pi$ при $x \to +\infty$; $d \to 0$ при $x \to -\infty$.