Занятие 7

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим уравнения второго порядка

$$F(x; y; y'; y'') = 0. \tag{7.1}$$

На этом занятии мы обсудим приемы, позволяющие понизить порядок уравнения, то есть свести решение уравнения (7.1) к решению уравнения первого порядка.

Если уравнение (7.1) не содержит искомую функцию $y(x)$, то есть имеет вид $F(x; y'; y'') = 0$, то, вводя новую функцию $u(x) = y'(x)$, мы придем к уравнению первого порядка $F(x; u; u') = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 y'' = (y')^2$.

Полагая $u(x) = y'(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $x^2 u' = u^2$. Оно имеет решение $u \equiv 0$, которое приводит к $y \equiv D$, и общее решение $u = \dfrac{x}{Cx+1}$.

Возвращаясь в последнем выражении к функции $y(x)$, получаем уравнение $y'(x) = \dfrac{x}{Cx+1}$.

Если $C = 0$, его решения — семейство $y = \dfrac{x^2}{2} + D$. Если же $C \neq 0$, его решения

$$y(x) = \frac{1}{C^2}\Big(Cx - \ln|Cx+1|\Big) + D. \quad \square$$

Как мы видим, общее решение уравнения содержит две произвольные константы, и это не случайно.

Вспомним, что задача Коши для уравнения второго порядка, разрешенного относительно высшей производной, ставится следующим образом: найти дважды дифференцируемую функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению $y'' = f(x; y; y')$ и начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Теорема Пикара гарантирует существование и единственность решения этой задачи на некотором отрезке $|x - x_0| \leqslant h$ при условии непрерывности функции $f(x; y; y')$ и ограниченности ее производных $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0; y_1)$.

Это означает, что условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ должны однозначно определять значения двух констант в общем решении уравнения $y'' = f(x; y; y')$. Конечно, мы можем столкнуться с ситуацией, когда эти условия определяют решение, которое не описывается общей формулой.

Так, нетрудно убедиться, что для задачи Коши

$$\begin{cases} x^2 y'' = (y')^2 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

выполнены условия теоремы Пикара, поэтому других решений, кроме $y \equiv 1$, оно не имеет. Однако, это решение не входит в семейство, описываемое общей формулой.

Поэтому при решении задачи Коши не стоит увлекаться поиском общего решения. Более эффективно определять значения констант по мере их появления «на сцене».

Поставим другие начальные условия для того же уравнения:

$$\begin{cases} x^2 y'' = (y')^2 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

Замена $u(x) = y'(x)$ приводит нас к задаче Коши $x^2 u' = u^2$, $u(1) = 1$. Ее решением является функция $u = x$. Возвращаясь к функции $y(x)$, получим задачу Коши $y' = x$, $y(1) = 1$. Ее решением является функция $y = \dfrac{x^2 + 1}{2}$, также не входящая в общее решение.

Если уравнение (7.1) не содержит явно независимую переменную x, то есть имеет вид $F(y; y'; y'') = 0$, то следует сделать замену $u(y) = y'$. Чрезвычайно важно понимать, что аргументом функции u является y. Поэтому по правилу дифференцирования сложной функции $y''(x) = u'(y) \cdot y'(x) = u' \cdot u$, где $u'(y) = \dfrac{du}{dy}$.

Таким образом, замена $u(y) = y'$ приводит уравнение $F(y; y'; y'') = 0$ к уравнению первого порядка $F(y; u; u' \cdot u) = 0$.

Пример 2. Решить уравнение $y'' = 2y \cdot y'$.

Замена $y' = u(y)$, $y'' = u' \cdot u$ приводит уравнение к виду $u' \cdot u = 2y \cdot u$. Тогда $u = 0$, что дает семейство решений $y = C$, или $u' = 2y$, что дает $u(y) = y^2 + C$. Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем уравнение $y'(x) = y^2 + C$.

Далее рассмотрим отдельно три случая.

Если $C = 0$, то есть $y'(x) = y^2$, то получим решение $y = 0$, которое входит в найденное ранее семейство $y = C$, и решение $y = -\dfrac{1}{x + C}$, которое следует считать частным, поскольку в ответ входит только одна константа.

Если $C = a^2 > 0$, то есть $y'(x) = y^2 + a^2$, то получим общий интеграл

$$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} = x + C.$$

Если $C = -a^2 < 0$, то есть $y'(x) = y^2 - a^2$, то получим общий интеграл

$$\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{y - a}{y + a} \right| = x + C. \quad \square$$

Теперь для этого же уравнения решим задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = 2y \cdot y' \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Так как $y' = u(y)$, то в начальный момент (при $x = 0$) имеем $y = 1$

и $y'\big|_{y=1} = 2$, то есть $u(1) = 2$. Именно с таким начальным условием и следует решать задачу Коши для уравнения $u' \cdot u = 2y \cdot u$.

Так как $u \equiv 0$ не удовлетворяет условию Коши, то $u' = 2y$, откуда $u(y) = y^2 + C$. Из условия $u(1) = 2$ получаем $C = 1$. Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем задачу Коши

$$\begin{cases} y'(x) = y^2 + 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Общий интеграл уравнения $\operatorname{arctg} y = x + C$. Из начального условия $\operatorname{arctg} 1 = 0 + C$, то есть $C = \frac{\pi}{4}$.

Итак, решение поставленной задачи Коши дается формулой

$$\operatorname{arctg} y = x + \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда можно определить y как явную функцию от x, отметив, что $\left| x + \frac{\pi}{4} \right| < \frac{\pi}{2}$, то есть $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, где $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. $\square$

Рассмотрим ситуацию, когда уравнение (7.1) не содержит явно переменных x и y, то есть имеет вид $F(y'; y'') = 0$.

В данном случае порядок уравнения можно понизить двумя способами: положив $y' = p(x)$ или $y' = p(y)$. В первом случае мы придем к уравнению $F(p; \frac{dp}{dx}) = 0$, а во втором — к уравнению $F(p; p\frac{dp}{dy}) = 0$.

Какой из этих способов лучше? А может быть эффективно использовать оба? Тогда из первого уравнения мы определим x как функцию от p, а из второго — y как функцию от p, и получим ответ в параметрической форме. Рассмотрим пример.

Пример 3. Решить уравнение $y'' = e^{(y')^2}$.

Полагаем $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$ и $\frac{dp}{dx} = e^{p^2}$, или $e^{-p^2} dp = dx$.

Теперь положим $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'(y) \cdot p$ и $\frac{dp}{dy} \cdot p = e^{p^2}$, или

$e^{-p^2} p\,dp = dy$.

Итак, мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} dx = e^{-p^2} dp \\ dy = e^{-p^2} p\,dp. \end{cases}$$

Осталось только проинтегрировать их:

$$\begin{cases} x = \int\limits_0^p e^{-\tau^2} d\tau + C_1 \\ y = -0,5e^{-p^2} + C_2. \end{cases}$$

Мы получили общее решение (содержащее две произвольных константы) в параметрической форме. $\square$

Рассмотренный прием можно назвать методом введения параметра для уравнения второго порядка $F(y'; y'') = 0$, приводящим к понижению порядка уравнения. Если для этого уравнения нужно решить задачу Коши с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, то, вводя параметр описанным способом, мы придем к решению двух задач Коши:

$$\begin{cases} F(p; \frac{dp}{dx}) = 0 \\ p(x_0) = y_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} F(p; p\frac{dp}{dy}) = 0 \\ p(y_0) = y_1. \end{cases}$$

Как мы видели ранее, вовсе не обязательно вводить параметр стандартным способом. Продемонстрируем эффективность «нестандартного» введения параметра на следующем примере.

Пример 4. Решить уравнение $(y'')^2 = (y')^2 + 1$.

Положим $y'' = \operatorname{ch} p$, $y' = \operatorname{sh} p$. Тогда уравнение обратится в тождество: $\operatorname{ch}^2 p = \operatorname{sh}^2 p + 1$.

Наша цель — восстановить x и y как функции от p.

С одной стороны, $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, и из первого уравнения получаем

$\dfrac{dy'}{dx} = \operatorname{ch} p$, или $dy' = \operatorname{ch} p\, dx$. С другой стороны, из второго уравнения $dy' = \operatorname{ch} p\, dp$.

Следовательно, $\operatorname{ch} p\; dx = \operatorname{ch} p\; dp$, или $dx = dp$ (так как функция $\operatorname{ch} p$ не обращается в ноль). Таким образом, $x = p + C_1$.

Вспомним, что $y' = \operatorname{sh} p$, то есть $dy = \operatorname{sh} p\, dx$. Учитывая, что $dx = dp$, получим $dy = \operatorname{sh} p\, dp$ и $y = \operatorname{ch} p + C_2$.

Итак, общее решение в параметрическом виде $\begin{cases} x = p + C_1 \\ y = \operatorname{ch} p + C_2. \end{cases}$

Отсюда легко получить и явную зависимость y от x:

$$y = \operatorname{ch}(x - C_1) + C_2. \quad \square$$

Заметим, что понижая порядок уравнения стандартными методами, мы обрекли бы себя на довольно громоздкие вычисления.

Обычно мы вводим параметр, если уравнение не разрешено относительно высшей производной. Если к тому же уравнение допускает понижение порядка, можно совместить эти два приема.

Пример 5. Решить уравнение $(y'')^3 + xy'' = 2y'$.

Полагаем $y'' = p$, тогда из уравнения $2y' = p^3 + xp$, и

$$2\, dy' = 3p^2 dp + xdp + pdx.$$

С другой стороны, $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, то есть $dy' = p\, dx$. Исключая dy', придем к уравнению

$$3p^2 dp = p\, dx - xdp.$$

Если $p = 0$, то $y' = 0$, следовательно $y = C$.

Иначе, поделив уравнение на p^2, придем к $3\, dp = \dfrac{p\, dx - xdp}{p^2}$ или $3\, dp = d\big(\dfrac{x}{p}\big)$. Отсюда $\dfrac{x}{p} = 3p + C_1$, то есть $x = 3p^2 + C_1 p$.

Тогда $2y' = p^3 + xp = 4p^3 + C_1p^2$ и мы легко можем восстановить функцию $y(p)$:

$$2\,dy = (4p^3+C_1p^2)dx = (4p^3+C_1p^2)(6p+C_1)dp = (24p^4+10C_1p^3+C_1^2p^2)dp.$$

Итак, $\begin{cases} x = 3p^2 + C_1p \\ y = \dfrac{12}{5}p^5 + \dfrac{5}{4}C_1p^4 + \dfrac{1}{6}C_1^2p^3 + C_2. \end{cases}$ $\square$

Пример 6. Решить задачу Коши $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}(y'')^3 + 2y'' \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

Положим $y'' = p$, тогда уравнение примет вид $y = \dfrac{2}{3}p^3 + 2p$.

Функция $y = \dfrac{2}{3}p^3 + 2p$ монотонна и, следовательно, обратима. Таким образом, уравнение $y = \dfrac{2}{3}(y'')^3 + 2y''$ можно однозначно разрешить относительно y'', причем для полученного уравнения $y'' = F(y)$ выполнены все условия теоремы Пикара, и поставленная задача Коши имеет единственное решение.

Поскольку уравнение не содержит явно переменную x, можно понизить его порядок, сделав замену $y' = u(y)$. Тогда $y''(x) = u' \cdot u$, где $u'(y) = \dfrac{du}{dy}$. С другой стороны, мы ввели параметр, положив $y'' = p$. Таким образом, $u' \cdot u = p$, откуда $u\,du = p\,dy$.

Дифференцируя тождество $y = \dfrac{2}{3}p^3 + 2p$, получаем еще одно соотношение между дифференциалами: $dy = (2p^2 + 2)\ dp$.

Исключая dy из системы $\begin{cases} u\,du = p\,dy \\ dy = (2p^2 + 2)\,dp \end{cases}$, приходим к уравнению $u\,du = p(2p^2 + 2)\,dp$. Отсюда $u^2 = p^4 + 2p^2 + C$.

Напомним, что мы ищем решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Из монотонности функции $y = \dfrac{2}{3}p^3 + 2p$ следует, что $y = 0$, если и только если $p = 0$. Поэтому $u\big|_{p=0} = 1$, следовательно, $C = 1$ и $u(p) = \sqrt{p^4 + 2p^2 + 1} = p^2 + 1$

Итак, $\begin{cases} y'(p) = p^2 + 1 \\ y = \frac{2}{3}p^3 + 2p, \end{cases}$ и нам осталось найти $x(p)$, что мы уже неоднократно делали.

$$\begin{cases} dy = (p^2 + 1)dx \\ dy = (2p^2 + 2)dp \end{cases} \Rightarrow dx = \frac{2p^2 + 2}{p^2 + 1}dp = 2dp \Rightarrow x = 2p + C.$$

Так как $x\big|_{p=0} = 0$, то $C = 0$, и $\begin{cases} x = 2p \\ y = \frac{2}{3}p^3 + 2p. \end{cases}$

Можно исключить параметр и получить решение в явном виде.

Ответ: $y = \frac{1}{12}x^3 + x$ $\square$

Если в уравнении (7.1) функция $F(x; y; y'; y'')$ является однородной порядка 0 относительно переменных y, y' и y'', то есть

$$F(x;\ ky;\ ky';\ ky'') = F(x;\ y;\ y';\ y''),$$

то порядок уравнения можно понизить, сделав замену $\frac{y'}{y} = u(x)$.

Тогда $y' = y \cdot u, \quad y'' = y \cdot u' + y' \cdot u = y \cdot u' + y \cdot u^2.$

Пример 7. Решить уравнение $y'' \cdot y = (y')^2 \cdot x$.

Положив $y' = y \cdot u$, придем к уравнению $y^2(u' + u^2) = y^2u^2x$. Отсюда

$$y = 0 \text{ или } u' + u^2 = u^2x.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными: $u' = u^2(x - 1)$.

$$u = 0 \text{ или } \frac{du}{u^2} = (x - 1)dx.$$

Если $u = 0$, то $y' = 0$ и $y = C$.

Если $\frac{du}{u^2} = (x - 1)dx$, то $u = \frac{2}{-x^2 + 2x + C}$, и для функции $y(x)$ мы получаем уравнение первого порядка:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{-x^2 + 2x + C},$$

которое легко интегрируется, если известно значение C.

Так, если для исходного уравнения была поставлена задача Коши $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$, то

$$\left.\frac{y'}{y}\right|_{x=1} = 2 = \frac{2}{1+C} \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Тогда

$$\frac{y'}{y} = \frac{-2}{x(x-2)} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C.$$

$$y = \frac{x}{x-2} \cdot C$$

Из начальных условий $C = -1$.

Итак, решение поставленной задачи Коши $y = \dfrac{x}{2-x}$. $\square$