Занятие 3

Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида

$$y' = k(x)\, y + f(x). \tag{3.1}$$

Везде далее мы будем считать, что $k(x)$ и $f(x)$ — функции, непрерывные на некотором интервале $(a; b)$.

Уравнение (3.1) часто записывают в виде $y' - k(x)\, y = f(x)$, поэтому функцию $f(x)$ называют *правой частью* уравнения. Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение

$$y' = k(x)\, y \tag{3.2}$$

называется *однородным.*

Отметим некоторые свойства решений линейных уравнений.

1) Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями однородного уравнения (3.2). Тогда их линейная комбинация $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ с произвольными числовыми коэффициентами α_i также является решением уравнения (3.2).

Кроме того, однородное уравнение всегда имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Таким образом, множество решений уравнения (3.2) не пусто и является линейным многообразием.

2) Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения неоднородного уравнения (3.1). Тогда их разность $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ является решением однородного уравнения (3.2). Действительно,

$$y'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = (k\, y_1(x) + f) - (k\, y_2(x) + f) = k\,(y_1 - y_2) = k\, y(x).$$

Отсюда сразу же следует, что общее решение $y_{\text{о.н.}}(x)$ уравнения (3.1) может быть представлено в виде

$$y_{\text{о.н.}}(x) = y_{\text{о.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x), \tag{3.3}$$

где $y_{\text{о.о.}}(x)$ — общее решение однородного уравнения (3.2), $y_{\text{ч.н.}}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (3.1).

Такую структуру имеет множество решений любого линейного уравнения, то есть уравнения вида $L[y] = f$, где $L[y]$ — линейный оператор, независимо от его природы. Например, вы встречались с такой ситуацией при решении алгебраических уравнений, где $L[y]$ — оператор умножения вектора y на матрицу. Также, при восстановлении функции по ее производной, вы фактически решали простейшее линейное дифференциальное уравнение $y' = f(x)$ и его общее решение — неопределенный интеграл — имеет такую же структуру.

3) Пусть правая часть уравнения (3.1) представлена в виде линейной комбинации $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, и функции y_i являются решениями уравнений $y_i' = k(x)\, y_i + f_i(x)$, $i = 1; 2$. Тогда линейная комбинация решений $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ является решением уравнения (3.1), что легко проверить непосредственной подстановкой функции $y(x)$ в уравнение (3.1).

Это свойство называется *принципом суперпозиции.* Оно позволяет свести решение трудной задачи к решению серии более простых задач.

Изучение линейных уравнений мы начнем с простейшего уравнения

$$y' = k\, y + f(x), \tag{3.4}$$

где k — некоторое число.

Общее решение однородного уравнения $y' = k\, y$ легко находится методом разделения переменных. Оно имеет вид $y = Ce^{kx}$.

Запомним это, и будем сразу выписывать решения таких уравнений:

$$y' = k\,y \quad \to \quad y = C \cdot e^{kx}.$$

Как видно из этой формулы, любое решение уравнения $y' = k\,y$ пропорционально функции $y = e^{kx}$. Таким образом, все решения этого уравнения образуют одномерное линейное пространство, базисом которого является функция $y = e^{kx}$.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (3.4), нам достаточно отыскать одно его частное решение и воспользоваться формулой (3.3).

Частное решение будем искать методом «вариации постоянной», то есть попробуем найти решение в виде $y(x) = C(x) \cdot e^{kx}$, где $C(x)$ — неизвестная функция, подлежащая определению. Подставляя функцию $y(x) = C(x) \cdot e^{kx}$ в уравнение (3.4), получим тождество

$$C\,'(x) \cdot e^{kx} + C(x) \cdot k\,e^{kx} = k \cdot C(x)e^{kx} + f(x),$$

из которого следует, что искомая функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$C\,'(x) = e^{-kx} \cdot f(x).$$

В качестве $C(x)$ можно взять любую первообразную функции $e^{-kx} \cdot f(x)$, например,

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{-k\tau} \cdot f(\tau)\,d\tau,$$

где x_0 — произвольная точка из интервала $(a; b)$.

Таким образом, мы нашли частное решение уравнения (3.4):

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = e^{kx} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-k\tau} \cdot f(\tau)\, d\tau = \int\limits_{x_0}^{x} e^{k(x-\tau)} \cdot f(\tau)\, d\tau.$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.4) задается формулой

$$y(x) = C \cdot e^{kx} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{k(x-\tau)} \cdot f(\tau)\, d\tau. \tag{3.5}$$

Теперь решим задачу Коши $y(x_0) = y_0$. Поскольку $y_{\text{ч.н.}}(x_0) = 0$, то константу C находим из условия $C \cdot e^{kx_0} = y_0$. Итак, решением задачи Коши для уравнения (3.4) с начальными данными $y(x_0) = y_0$ является функция

$$y(x) = y_0 \cdot e^{k(x-x_0)} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{k(x-\tau)} \cdot f(\tau)\, d\tau.$$

Это решение состоит из двух слагаемых. Первое является решением задачи Коши для однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями $\begin{cases} y' = ky \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, а второе — решением задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями $\begin{cases} y' = ky + f(x) \\ y(x_0) = 0. \end{cases}$

Здесь мы снова наблюдаем проявление принципа суперпозиции: решение общей задачи Коши складывается из решений двух задач Коши специального вида.

Будем говорить, что уравнение (3.4) имеет *специальную* правую часть, если

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\lambda x},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n. В этом случае частное решение уравнения можно найти методом «неопределенных коэффициентов», а именно, в виде $y(x) = x^p \cdot Q_n(x) \cdot e^{\lambda x}$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n, коэффициенты которого нам и предстоит определить. Если $\lambda \neq k$, то $p = 0$, если же $\lambda = k$, то $p = 1$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' = 2y + (x^2 - 2x) \cdot e^x$.

Так как $k = 2$, то $y_{\text{о.о.}} = C \cdot e^{2x}$. Поскольку $\lambda = 1 \neq k$, будем искать частное решение в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x.$$

Подставляя его в уравнение, приходим к тождеству

$$(2Ax + B) \cdot e^x + (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x \equiv 2\,(Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x + (x^2 - 2x) \cdot e^x.$$

После сокращения на e^x и приведения подобных слагаемых получим

$$Ax^2 + (2A + B)\,x + (B + C) \equiv (2A + 1)x^2 + (2B - 2)\,x + 2C.$$

Это равенство должно выполняться для всех значений x, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой его частях должны быть равны. Это приводит нас к системе линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} A = 2A + 1 \\ 2A + B = 2B - 2 \\ B + C = 2C. \end{cases}$ Отсюда $A = -1$, $B = 0$, $C = 0$.

Итак, $y_{\text{ч.н.}} = -x^2 \cdot e^x$, и $y_{\text{о.н.}} = C \cdot e^{2x} - x^2 \cdot e^x$. □

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y' = y + (x^2 - 2x) \cdot e^x$.

Так как $k = 1$, то $y_{\text{о.о.}} = C \cdot e^x$. Поскольку $\lambda = 1 = k$, то можно было бы искать частное решение в виде $y_{\text{ч.н.}} = x \cdot (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x$, но проще найти его методом «вариации постоянной».

Если $y_{\text{ч.н.}} = C(x) \cdot e^x$, то функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$C\,'(x) = e^{-x} \cdot f(x) = x^2 - 2x.$$

Например, можно взять $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2$.
Тогда $y_{\text{ ч.н.}} = (\dfrac{x^3}{3} - x^2) \cdot e^x$, и $y_{\text{ о.н.}} = C \cdot e^x + (\dfrac{x^3}{3} - x^2) \cdot e^x$. $\square$

Если правая часть уравнения (3.4) имеет вид

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{или} \quad f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

то частное решение можно найти методом «неопределенных коэффициентов», используя формулу Эйлера $e^{(\alpha + i\beta)\,x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$.

Поясним суть этого приема на примере.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y\,' = y - 2\,x \cdot \sin x$.

Заметим, что свойства линейных уравнений 1) – 3) выполняются как над полем вещественных, так и над полем комплексных чисел.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями уравнений $u\,' = u - 2\,x \cdot \cos x$ и $v\,' = v - 2\,x \cdot \sin x$ соответственно. Тогда функция $z = u + iv$ удовлетворяет уравнению $z\,' = z - 2\,x \cdot e^{ix}$.

Частное решение этого уравнения ищем в виде $z_{\text{ ч.н.}} = (Ax + B) \cdot e^{ix}$, где A и B — комплексные числа. Подставляем в уравнение:

$$A \cdot e^{ix} + (Ax + B)\,i \cdot e^{ix} = (Ax + B) \cdot e^{ix} - 2\,x \cdot e^{ix}.$$

Отсюда $A + i\,(Ax + B) = (Ax + B) - 2\,x$, и $\begin{cases} i\,A = A - 2 \\ A + i\,B = B. \end{cases}$

Находим $A = (1 + i)$, $B = i$, и

$$z_{\text{ ч.н.}} = \big((1 + i)\,x + i\big) \cdot (\cos x + i\,\sin x) =$$

$$= \Big(x(\cos x - \sin x) - \sin x\Big) + i\,\Big(x(\cos x + \sin x) + \cos x\Big).$$

Выделяем мнимую часть $v(x) = Im\, z(x) = x(\cos x + \sin x) + \cos x$. Это и есть частное решение исходного уравнения $y' = y - 2\,x \cdot \sin x$. А его общее решение

$$y_{\text{ о.н.}} = C \cdot e^x + x(\cos x + \sin x) + \cos x. \quad \square$$

Обратимся теперь к уравнению общего вида (3.1).

Теорема. Если функции $k(x)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором интервале $(a;b)$, то через каждую точку $(x_0;y_0)$, где $x_0 \in (a;b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ проходит единственное решение этого уравнения, определенное при всех $x \in (a;b)$.

Подчеркнем два важных момента. Во-первых, теорема утверждает, что задача Коши $y(x_0) = y_0$ имеет решение при любом $y_0 \in \mathbb{R}$. Во-вторых, это решение существует на всем интервале $(a;b)$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $xy' + (x+1)\,y = 3x^2 \cdot e^{-x}$.

Это уравнение не разрешено относительно производной, и нетрудно видеть, что если привести его к виду (3.1), то функции $k(x)$ и $f(x)$ будут разрывны в точке $x = 0$. Поэтому максимальным интервалом, на котором выполняются условия теоремы, является луч $(-\infty;0)$ или луч $(0;+\infty)$.

Рассмотрим однородное уравнение $xy' + (x+1)\,y = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} + \frac{x+1}{x}\,dx = 0.$$

Его общее решение $y_{\text{ о.о.}}(x) = C \cdot x^{-1} e^{-x} = C \cdot \Phi(x)$.

Решение неоднородного уравнения найдем методом вариации постоянной: $y_{\text{ч.н.}} = C(x) \cdot \Phi(x)$. Подставляя эту функцию в уравнение, получим равенство

$$x(C\,' \cdot \Phi + C \cdot \Phi\,') + (x+1)C \cdot \Phi = 3x^2 \cdot e^{-x}.$$

Так как $x\,\Phi\,' + (x+1)\Phi = 0$, то функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$C\,'(x)\Phi(x) = 3xe^{-x}.$$

Следовательно, $C\,'(x) = 3x^2$, и $C\,(x) = x^3$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{о.н.}}(x) = C \cdot x^{-1}\, e^{-x} + x^2\, e^{-x}. \quad \square$$

В рассмотренном примере присутствуют ключевые моменты, составляющие алгоритм решения любого уравнения вида (3.1). Отметим их еще раз.

1) Однородное уравнение (3.2) решается методом разделения переменных. Его общее решение имеет вид $y_{\text{о.о.}}(x) = C \cdot \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — любое частное решение. Таким образом, решения однородного уравнения образуют одномерное линейное пространство, и $\Phi(x)$ — его базис.

2) Неоднородное уравнение решается методом вариации постоянной: $y_{\text{ч.н.}}(x) = C(x) \cdot \Phi(x)$, где $C(x)$ находится из условия $C\,'(x)\Phi(x) = f(x)$.

Часто возникают задачи, в которых требуется найти решение уравнения, удовлетворяющее каким-либо дополнительным условиям, отличным от условия Коши.

Пример 5. Рассмотрим уравнение $xy\,' + y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

Условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши нарушены в точке $x = 0$. Все решения однородного уравнения $y_{\text{ о.о.}}(x) = \dfrac{C}{x}$, кроме решения $y \equiv 0$, неограничены при $x \to 0$. Возникает вопрос: как ведут себя решения неоднородного уравнения при $x \to 0$? Есть ли среди них ограниченные и даже имеющие предел при $x \to 0$?

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации постоянной: $y_{\text{ ч.н.}}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Тогда $C'(x) = f(x)$ и $C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau$. Частное решение имеет вид

$$y_{\text{ ч.н.}}(x) = \frac{1}{x} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau.$$

Для того, чтобы это решение было ограничено в точке $x = 0$, необходимо, чтобы $\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau \to 0$ при $x \to 0$, а это означает, что нужно положить $x_0 = 0$.

Итак, единственное решение, которое может быть ограниченным при $x \to 0$, имеет вид

$$y^* = \frac{1}{x} \cdot \int\limits_{0}^{x} f(\tau)\,d\tau.$$

Покажем, что оно действительно ограничено и имеет конечный предел в точке $x = 0$. При переходе к пределу возникает неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, и мы раскроем ее, воспользовавшись правилом Лопиталя. Функция $f(x)$ непрерывна, ее первообразная $F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(\tau)\,d\tau$ дифференцируема, и $F\,'(x) = f(x)$.

$$\lim_{x\to 0} y^*(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_{0}^{x} f(\tau)\,d\tau}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = f(0).$$

Итак, исходное уравнение имеет единственное ограниченное в точке $x = 0$ решение. Это решение имеет при $x \to 0$ конечный предел, равный $f(0)$. Остальные решения неограничены в точке $x = 0$. Понятно, что в таком случае ставить в точке $x = 0$ задачу Коши с произвольным значением $y(0) = y_0$ для уравнения $xy' + y = f(x)$ не имеет смысла. □

Пример 6. Рассмотрим уравнение $y' + y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на всей вещественной оси.

Решения однородного уравнения $y_{\text{о.о.}} = Ce^{-x}$, кроме решения $y \equiv 0$, неограничены при $x \to -\infty$. Существует ли решение неоднородного уравнения, ограниченное на всей вещественной оси?

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{\text{ч.н.}} = C(x)e^{-x}$, где $C'(x) = e^x f(x)$, $C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{\tau} f(\tau)\, d\tau$.

Для того, чтобы решение $y_{\text{ч.н.}} = C(x)e^{-x}$ было ограничено при $x \to -\infty$, необходимо, чтобы $\lim\limits_{x\to-\infty} C(x) = 0$.

Положим $C(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\tau} f(\tau)\, d\tau$. Этот интеграл сходится при $x \to -\infty$, так как $f(x)$ ограничена:

$$|f(\tau)| \le M \quad \Rightarrow \quad |e^{\tau} f(\tau)| \le Me^{\tau}$$

$$|C(x)| = \Big| \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\tau} f(\tau)\, d\tau \Big| < M \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\tau}\, d\tau = Me^{x}$$

Итак, единственное частное решение, которое может удовлетворять поставленным условиям, имеет вид

$$y^*(x) = e^{-x} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\tau} f(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{(\tau - x)} f(\tau)\, d\tau.$$

Сделаем замену $\tau - x = s$, тогда

$$y^*(x) = \int_{-\infty}^{0} e^s f(x+s)\,ds,$$

и ограниченность этого решения становится очевидной:

$$|y^*(x)| \le M \int_{-\infty}^{0} e^s\,ds = M.$$

Интересно отметить, что если функция $f(x)$ — периодическая с периодом T, то найденное решение $y^*(x)$ также будет периодическим:

$$y^*(x+T) = \int_{-\infty}^{0} e^s f(x+T+s)\,ds = \int_{-\infty}^{0} e^s f(x+s)\,ds = y^*(x). \quad \square$$

Вообще говоря, периодичность правой части уравнения не всегда влечет существование периодического решения. Например, простейшее линейное уравнение $y' = \sin^2 x$ не имеет ни одного периодического решения (проверьте это, выписав формулу общего решения).

Уравнения, приводящиеся к линейным

Одним из таких уравнений является уравнение *Бернулли*

$$y' = k(x)\,y + f(x)y^m,\ m \ne 0,\ m \ne 1.$$

Отметим, что при $m > 0$ это уравнение имеет решение $y \equiv 0$, которое является особым при $0 < m < 1$.

Для отыскания других решений поделим обе части уравнения на y^m:

$$\frac{y'}{y^m} = k(x)\frac{1}{y^{m-1}} + f(x)$$

Замена $z(x) = 1/y^{m-1}$ приводит это уравнение к линейному.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $xy' + 2y + x^5 e^x y^3 = 0$.

Это уравнение Бернулли, $m = 3$. Функция $y \equiv 0$ — решение.

Делим обе части уравнения на y^3:

$$x\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{y^2} + x^5 e^x = 0.$$

Положим $z = y^{-2}$, тогда $z' = -2y^{-3}y'$:

$$-\frac{x}{2} \cdot z' + 2z + x^5 e^x = 0.$$

$$z_{\text{ о.о.}} = C \cdot x^4,$$

$$z_{\text{ ч.н.}} = C(x) \cdot x^4, \text{ где } C(x) = 2e^x,$$

$$z_{\text{ о.н.}} = C \cdot x^4 + 2x^4 e^x.$$

Таким образом, общее решение $y^{-2} = C \cdot x^4 + 2x^4 e^x$ и $y \equiv 0$. $\square$

Другой распространенный случай: уравнение становится линейным, если x считать функцией от y.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $(2e^y - x)y' = 1$.

Положим $x = x(y)$, тогда $x' = 1/y'$, и уравнение можно преобразовать к виду $x' = -x + 2\,e^y$. Его решение

$$x_{\text{ о.о.}} = C \cdot e^{-y},$$

$$x_{\text{ ч.н.}} = A \cdot e^y, \text{ где } A = 1,$$

$$x_{\text{ о.н.}} = C \cdot e^{-y} + e^y. \quad \square$$

Наконец, рассмотрим ситуацию, когда уравнение становится линейным при переходе к новой функции $z = G(y)$.

По правилу дифференцирования сложной функции $z' = G'(y) \cdot y' = g(y) \cdot y'$, где $G(y)$ — первообразная для функции $g(y)$. Если такие комбинации присутствуют в уравнении, замена $z = G(y)$ может его существенно упростить.

Пример 9. Рассмотрим уравнение $x^2 y' + x + e^{-y} = 0$.

Умножим его на e^y: $\quad x^2 e^y y' + x e^y + 1 = 0$.
Положим $z = e^y$, тогда $z' = e^y y'$. Уравнение становится линейным относительно z: $\quad x^2 z' + xz + 1 = 0$.

Пример 10. Уравнение $\dfrac{y'}{y} + \ln y \operatorname{tg} x = \sin x$ заменой $z = \ln y$ превращается в линейное уравнение $z' + z \operatorname{tg} x = \sin x$. $\square$