

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра общей физики

А. Е. Гореликова, В. В. Рандин

**Лабораторная работа 3.1.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ГАЗА И ЖИДКОСТИ**

Методические указания
Второе издание, переработанное и дополненное

Новосибирск
2016

УДК 532.133, 533.16
ББК В365.11
Г-68

Рецензент
канд. техн. наук, *О. А. Брагин*

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

Г-68 Лабораторная работа 3.1. **Определение вязкости газа и жидкости** : метод. указания / А. Е. Гореликова, В. В. Рандин; Новосиб. гос. ун-т. 2-е изд. перераб. и доп. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. – 21 с.

На примере процессов в жидкости и газе студенты знакомятся с закономерностями обмена импульсом в разных средах, понимают различие в механизмах поведения трения в различных средах. Студенты изучают различную зависимость вязкости от температуры в жидкости и в газе. При подготовке разработки, выполняемой в рамках модернизации практикума, модернизирована экспериментальная установка, выполнено ее оснащение, обеспечена компьютерная обработка экспериментальных данных, а также подготовлены методические указания по выполнению лабораторной работы студентами.

Пособие предназначено для студентов первого курса физического факультета НГУ. Оно может быть полезно также студентам ФЕН и ГГФ, изучающим курсы термодинамики, молекулярной физики.

УДК 532.133, 533.16
ББК В365.11

© Новосибирский государственный
университет, 2016
© А. Е. Гореликова, В. В. Рандин, 2016

Оглавление

Введение	4
Определение коэффициента вязкости глицерина методом Стокса	6
Методика измерений	6
Описание установки	8
Задания	9
Определение вязкости воздуха капиллярным вискозиметром	9
Методика измерений	9
Описание установки	11
Задания	12
Список литературы	12
Приложение 1. Вязкость газов	13
Приложение 2. Вязкость жидкостей	15
Приложение 3. Закон сопротивления Стокса	17
Приложение 4. Основные обозначения	20

Лабораторная работа 3.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ГАЗА И ЖИДКОСТИ

Цель работы: определение сил внутреннего трения в жидкости и газе, установление их зависимости от температуры.

Оборудование: термостат, сосуд с глицерином, сосуд с водой, секундомер, пробные тела, сосуды с водой, манометр.

В данной работе вы ознакомитесь с двумя классическими способами определения вязкости: с помощью капиллярного вискозиметра и методом Стокса.

Введение

Явление внутреннего трения (вязкости) связано с возникновением сил трения между двумя слоями газа или жидкости, перемещающимися параллельно друг другу с различными по величине скоростями и обусловлено обменом импульсами между этими слоями среды.

Максвелл предложил следующее объяснение механизма возникновения «вязких» сил в газах, основанное на кинетической теории. Молекулы выполняют как упорядоченное движение со скоростью, равной скорости движения слоя, в котором они находятся, так и хаотическое движение во всех направлениях и, следовательно, также и в направлении, перпендикулярном рассматриваемым слоям. Вследствие этого некоторое число молекул переходит из одного слоя в другой. Эти молекулы при столкновении с движущимися молекулами слоя, в который они перешли, обмениваются импульсами. В результате этого происходит торможение слоя, движущегося быстрее (рис. 1, 1), и ускорение слоя, движущегося медленнее (рис. 1, 2). В отличие от газов в жидкостях расстояние между молекулами мало, сила взаимодействия велика, и поэтому главной причиной вязкости жидкости являются силы взаимодействия между молекулами. Рассмотрим два очень тонких слоя жидкости или газа, движущихся вдоль оси x . Допустим, что толщина каждого слоя равна du , а скорость движения верхнего слоя больше скорости движения нижнего слоя на du . Сила внутреннего трения, возникающая между слоями, пропорциональна градиенту скорости du/dy , площади соприкосновения слоев и будет действовать в направлении оси x .

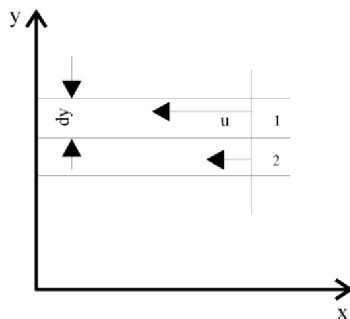


Рис. 1. Движение слоя жидкости или газа

Величина этой силы, отнесенная к единице площади равна:

$$f = \mu \frac{du}{dy}, \quad (1)$$

коэффициент пропорциональности μ называют коэффициентом внутреннего трения или коэффициентом вязкости (сокращенно его часто называют просто вязкостью). Из определения следует, что размерность μ в системе СИ – $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = \text{Па} \cdot \text{с}$ (паскаль-секунда).

Вязкость жидкости μ , определенную таким образом, называют также динамической вязкостью, в отличие от так называемой кинематической вязкости ν , которая равна динамической вязкости, деленной на плотность жидкости $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Размерность ν в системе СИ – $\text{м}^2/\text{с}$.

Для газов, согласно элементарной кинетической теории

$$\mu = \frac{1}{3} \bar{u} \rho \bar{\lambda},$$

где \bar{u} – средняя скорость теплового движения молекул, $\bar{\lambda}$ – средняя длина свободного пробега, ρ – плотность газа. Эта простая зависимость позволяет увидеть, каким образом вязкость газа зависит от температуры (T) и давления (p). Плотность газа ρ прямо пропорциональна числу молекул в единице объема n . Средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна n . Таким образом, произведение $\rho \bar{\lambda}$ не зависит от концентрации n . Отсюда следует, что динамический коэффициент вязкости газов μ при постоянной температуре не зависит от давления ($p = nkT$). Подставляя выражения для средней скорости теплового движения молекул, плотности газа и средней длины свободного пробега, не трудно получить, что динамический коэффициент вязкости газов μ пропорционален \sqrt{T} . Таким образом, с увеличением температуры вязкость газа растет (см. приложение 1).

В связи с тем, что вязкость жидкости имеет другую природу, она зависит от температуры по совершенно другому закону. В жидкости при увеличении температуры уменьшаются силы взаимного притяжения молекул, что приводит к уменьшению вязкости (см. приложение 2). Вязкость жидкости изменяется по закону

$$\mu \sim T e^{\frac{w}{kT}},$$

где w – энергия, обусловленная связью молекулы с соседними частицами (энергия активации). Необходимо иметь в виду, что эти зависимости для вязкостей газов и жидкостей являются приближенными.

Благодаря силам внутреннего трения безвихревое, безотрывное течение, которое в гидродинамике называется ламинарным, наблюдается только при достаточно малых скоростях. С увеличением скорости течение становится неустойчивым, появляются вихри (турбулентное течение). При этом сила внутреннего трения резко возрастает, увеличивается сила сопротивления, действующая на обтекаемое тело. Переход от ламинарного режима течения к турбулентному зависит от свойств среды и скорости ее движения. О характе-

ре течения можно судить по безразмерному числу $Re = \frac{Lu\rho}{\mu} = \frac{Lu}{\nu}$, которое называется числом Рейнольдса и характеризует отношение кинетической энергии движущейся жидкости к потерям энергии за счет сил вязкого трения. Действительно, по порядку величины кинетическая энергия $K = \frac{\mu u^2}{2} \approx \rho L^3 u^2$, а работа сил трения $A = \int F dl \approx f LS \approx \mu \frac{u}{L} L^3$, где учтено, что $f = \mu \frac{du}{dy}$. Теперь $\frac{K}{A} = \frac{\rho L^3 u^2}{\mu u L^2} = \frac{\rho Lu}{\mu} = \frac{Lu}{\nu}$, т. е. имеем число Рейнольдса, определенное выше. Из этого соотношения между кинетической энергией и работой сил вязкого трения видно, что вязкость играет большую роль при малых числах Рейнольдса, когда течение ламинарное.

Определение коэффициента вязкости глицерина методом Стокса

Методика измерений

Вычисление точного значения силы сопротивления, возникающей при движении тела произвольной формы в вязкой среде, возможно только для некоторых частных случаев – ламинарное обтекание средой бесконечного цилиндра, эллипсоида вращения, бесконечно тонкой пластины. Однако общее выражение для силы сопротивления достаточно просто получить, пользуясь методом размерностей.

Сила сопротивления может зависеть от формы и размеров тела L , его скорости u , свойств среды – вязкости μ и плотности ρ .

Представим силу сопротивления в виде произведения

$$F = fS, \quad (2)$$

где S – площадь поверхности тела, f – сила вязкого трения из формулы (1).

Для сферы $S = 4\pi R^2$, а силу трения $f = \mu \frac{du}{dy}$ можно оценить как $\mu \frac{u}{R}$. Получаем

$$F = 4\pi\mu uR. \quad (3)$$

Экспериментально установлено, что ламинарное обтекание сферического тела наблюдается при $Re < 100$. Проведенный Стоксом точный расчет силы сопротивления, при обтекании сферического тела радиуса R вязкой безграничной средой (см. приложение 3) дал

$$F = 6\pi\mu uR. \quad (4)$$

Уравнение движения сферы в вязкой жидкости под действием силы тяжести при малых Re :

$$(m_{\text{т}} + m_{\text{п}}) \frac{du}{dt} = V(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{п}})g - 6\pi\mu uR,$$

здесь $\rho_{\text{т}}$ и $\rho_{\text{ж}}$ – плотности тела и жидкости соответственно, $m_{\text{т}}$ – масса тела, $m_{\text{п}}$ – добавка, обусловленная присоединенной массой, V – объем тела, g – ускорение свободного падения.

Сферическая частица, падающая в вязкой жидкости под действием силы тяжести, в конце концов начинает двигаться с постоянной скоростью, при которой действие силы тяжести уравновешивается гидромеханическими силами:

$$6\pi\mu U_c R = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_T - \rho_{ж})g.$$

Эта скорость называется установившейся скоростью падения и равна

$$U_c = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_T - \rho_{ж})g}{6\pi\mu R} = \frac{2}{9} \frac{R^2(\rho_T - \rho_{ж})g}{\mu}. \quad (5)$$

Обозначая величину $\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi\mu R}{m_T + m_{\Pi}}$, с ис-

пользованием (5) уравнение движения можно переписать в виде $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\tau}(U_c - u)$. Разделя переменные

$$\frac{du}{U_c - u} = \frac{1}{\tau} dt,$$

и интегрируя, получим

$$-\ln(U_c - u) = \frac{t}{\tau} + C.$$

Принимая, что при $t = 0$, $u = u_0$, получаем $C = \ln(U_c - u_0)$ и

$$\ln \frac{U_c - u}{U_c - u_0} = -\frac{t}{\tau}, \text{ откуда } u = U_c - (U_c - u_0)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (6)$$

Графики этой функции при различных u_0 представлены на рис. 2. Таким образом, наблюдая падение тела в вязкой жидкости, можно определить характерное время релаксации скорости

$$\tau = \frac{m_T + m_{\Pi}}{6\pi\mu R} \quad (7)$$

и равновесную скорость $U_c = \frac{2}{9} \frac{R^2(\rho_T - \rho_{ж})g}{\mu}$. Каждое из этих соотношений позволяет определить вязкость жидкости. Удобнее использовать соотношение для равновесной скорости. Тогда при падении тела в безграничной среде (расстояние до границ $L \gg R$)

$$\mu = \frac{2}{9} \frac{R^2(\rho_T - \rho_{ж})g}{U_c}. \quad (8)$$

При падении шарика радиуса R_{Π} в цилиндрической трубе радиуса R_0 и высоты h учет влияния границ дает

$$\mu = \frac{2}{9} g R_{\Pi}^2 \frac{\rho_T - \rho_{ж}}{U_c \left(1 + 2.1 \frac{R_{\Pi}}{R_0}\right) \left(1 + 1.33 \frac{R_{\Pi}}{h}\right)}. \quad (9)$$

Рассмотренный метод составляет суть определения вязкости жидкости методом Стокса.

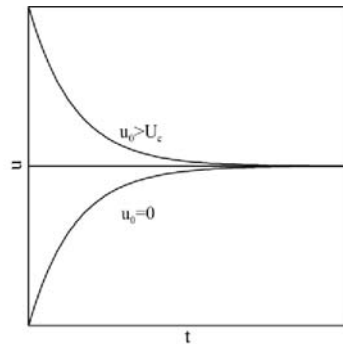


Рис. 2. Изменение скорости как функции времени

Описание установки

Для определения вязкости жидкости и ее температурной зависимости в данной работе используется цилиндрическая стеклянная труба (рис. 3, 1), в которую налита исследуемая жидкость – глицерин. Для изменения температуры исследуемой жидкости труба помещена в прозрачный резервуар 2, в котором циркулирует вода, подогреваемая термостатом 3. Температура жидкости измеряется термопарой 4. В работе используется свинцовая дробь ($\rho_{\text{т}} = 11,3 \text{ г/см}^3$) (также могут применяться стальные шарики ($\rho_{\text{т}} = 7,8 \text{ г/см}^3$) и другие предметы), радиус которой измеряется микрометром. Необходимо распределить шарики в группы по размерам, измерить радиусы шариков и найти среднее значение $\bar{R}_{\text{ш}}$ и среднеквадратичное отклонение $\sqrt{\Delta R_{\text{ш}}^2}$ для группы каждого размера и в дальнейших расчетах использовать $R_{\text{ш}} = \bar{R}_{\text{ш}} \pm \sqrt{\Delta R_{\text{ш}}^2}$. Скорость падения определяется по времени прохождения заданного отрезка, для чего используются секундомер и линейка. Так как равновесная скорость устанавливается спустя некоторое время после падения шарика в жидкость, следует предварительно оценить время и соответственно глубину, после которых устанавливается равновесная скорость. Как следует из (6), при $t \geq 5\tau$ и $u_0 = 2U_c$ величина отклонения скорости от равновесной $\frac{u - U_c}{U_c} < 1\%$, поэтому измерения следует проводить через время $t \geq 5\tau = \frac{5m_{\text{т}}}{6\pi\mu R_{\text{ш}}}$ после начала падения. В последнем случае масса $m_{\text{т}}$ и радиус $R_{\text{ш}}$ шарика легко определяются. Для оценки величины вязкости жидкости можно использовать формулу (9), полагая U_c равной средней скорости движения шарика на всем пути.

Проведя предварительные измерения и расчеты, необходимо включить циркуляцию воды термостата и нагреватель и по мере нагревания исследуемой жидкости до 50°C провести не менее 10 измерений вязкости. Результаты представить в виде графика $\mu = f(T)$.

При выполнении работы следует учитывать следующее:

1. Шарики следует предварительно смачивать в глицерине, чтобы на них не оставалось пузырьков воздуха.
2. Шарики следует отпускать с уровня воды с нулевой ско-

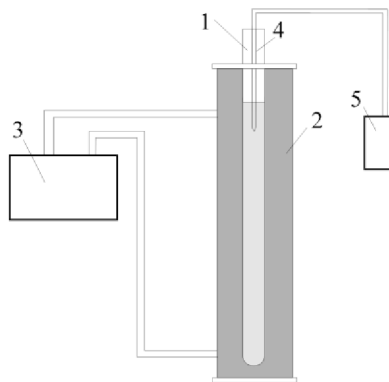


Рис. 3. Схема установки измерения вязкости. 1 – стеклянная труба с глицерином, 2 – резервуар с водой, 3 – термостат, 4 – термопара, 5 – измеритель температуры

ростью. Шарик нужно отпускать максимально близко к центру относительно поперечного сечения трубы, чтобы избежать влияния стенок трубы.

3. При измерениях необходимо учитывать, что все приведенные выше формулы получены для *ламинарного* обтекания сферического тела ($Re < 100$). В качестве характерного размера L в формуле для вычисления Re нужно взять диаметр шарика $2R_{ш}$, в качестве характерной скорости – U_c .

Задания

1. Отберите необходимое количество шариков и рассортируйте их в группы по размерам.
2. В каждой группе шариков определите среднее значение радиуса и среднеквадратичное отклонение от него.
3. Проведите эксперимент с одним шариком из каждой группы, оцените время установления движения и приблизительную величину вязкости жидкости. Оцените время установления равновесной скорости. На основании проведенных оценок выберите положение меток для измерения установившейся скорости.
4. Проведите измерение установившейся скорости при разных температурах жидкости, рассчитайте величину вязкости и постройте график ее зависимости от температуры.
5. Оцените значение числа Рейнольдса для каждого измерения.
6. Составьте перечень источников погрешностей метода, оцените вклад каждого из них и суммарную ошибку метода. Укажите возможности для повышения точности измерений.
7. Сравните полученные результаты с табличными значениями вязкости.

Определение вязкости воздуха капиллярным вискозиметром

Методика измерений

Применение метода Стокса для определения вязкости воздуха затруднительно, так как установление движения в поле силы тяжести для реальных тел достигается при числах Re , превышающих критические, из-за чего расчетные соотношения, предполагающие ламинарность обтекания, не выполняются. Распространенным методом определения вязкости газов является метод капиллярного вискозиметра. Суть метода заключается в том, что при заданном перепаде давлений на концах трубы расход газа через трубу Q при прочих равных условиях является функцией вязкости: $Q=f(\mu)$. При ламинарном течении жидкости в трубе достаточно просто определить вид этой зависимости.

Рассмотрим течение газа по цилиндрической трубе радиуса R_0 . При установившемся движении, если пренебречь эффектами сжимаемости, скорость газа постоянна вдоль линий тока и меняется только в зависимости от расстояния от оси трубы, а давление в каждом поперечном сечении постоянно. За счет сил вязкого трения скорость газа равна нулю у поверхности трубки и возрастает к центру. Выделим в трубе бесконечно короткий цилиндрический объем газа с произвольным радиусом r (рис. 4). При установившемся течении касательная сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, уравнивается разностью давлений, действующих на торцы выделенного цилиндрического объема, т. е.

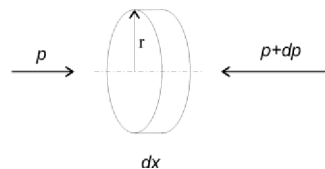


Рис. 4. Выделенный объем газа

$$\pi r^2 dp = 2\pi r dx \mu \frac{du}{dr} \text{ или } r \frac{dp}{dx} = 2\mu \frac{du}{dr}. \quad (10)$$

Так как движение газа стационарно и сечение трубы одинаково по всей длине, то профиль скорости $u(r)$ и ее поперечный градиент du/dr одинаковы в любом сечении, т.е. не зависят от переменной x . Это позволяет проинтегрировать уравнение (10) вдоль трубы и получить следующее соотношение:

$$r(p_2 - p_1) = 2\mu \frac{du}{dr} L,$$

где p_2 – давление на выходе, p_1 – давление на входе, L – длина трубы. Теперь нетрудно получить уравнение на градиент скорости

$$\frac{du}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu L} r.$$

И после интегрирования найти распределение скорости газа по сечению трубы

$$u(r) = C - \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} r^2.$$

Константа C определяется из граничного условия на стенке трубы $u(R_0) = 0$ (условие прилипания). В итоге получаем

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R_0^2 - r^2). \quad (11)$$

Таким образом, распределение скорости в поперечном сечении трубы определяется параболическим законом. В принципе, полученное соотношение позволяет находить вязкость газа, если известна его скорость при каком-нибудь радиусе. Однако гораздо проще измерять расход газа, который можно найти по полученному профилю скорости (11). В единицу времени через кольцевую площадку с внутренним радиусом r и наружным радиусом $r + dr$ протекает объем газа $dQ = 2\pi r du$. Подставляя сюда значение скорости, и интегрируя, получим

$$Q = 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} \int_0^{R_0} r (R_0^2 - r^2) dr = \pi \frac{p_1 - p_2}{8\mu L} R_0^4. \quad (12)$$

Измеряя объемный расход газа $Q = V/t$ через трубу радиусом R_0 и длиной L при перепаде давлений $\Delta p = p_1 - p_2$ на концах трубы, можно определить

вязкость из уравнения (12). Если перепад давлений измеряется U -образным манометром с плотностью рабочей жидкостью ρ через разность высот h , то перепад давлений будет $\Delta p = \rho gh$, а вязкость выражается формулой

$$\mu = \frac{\pi \rho g h t R_0^4}{8VL}.$$

Описание установки

Схема установки для измерения вязкости воздуха представлена на рис. 5. При открытии крана 5 жидкость начинает вытекать из газометра (краны 6 и 7 должны быть закрыты). По мере вытекания жидкости в газометр через капилляр 1 поступает эквивалентное количество воздуха. Воздух поступает в капилляр через теплообменник, расположенный в термостате. Изменяя температуру воды в термостате, можно изменить температуру воздуха. При малых скоростях движения воздуха по капилляру сжимаемостью можно пренебречь и принять объемный расход воздуха равным объемному расходу жидкости. Краном 5 можно изменять расход воздуха через капилляр. С помощью крана 6 можно доливать воду в газометр (кран 7 при этом должен быть открыт). Объем воды, вытекший за время t , и соответственно объем воздуха, перетекший через капилляр, измеряется мензуркой, а время – секундомером. Перепад давления (разность высот жидкости в трубках манометра) можно измерять линейкой.

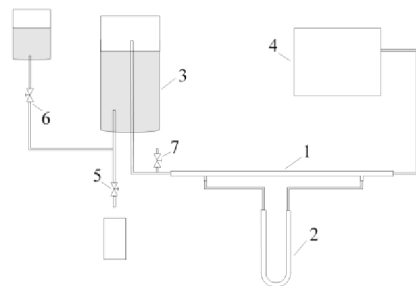


Рис. 5. Установка для измерения вязкости газа. 1 – капилляр, 2 – дифференциальный манометр, 3 – газометр, 4 – термостат, 5, 6, 7 – краны

При выполнении работы следует учитывать следующее:

1. Стационарное течение устанавливается не сразу – необходимо подождать после открытия крана 5 некоторое время, пока в манометре не установятся равновесные уровни.
2. При малом объеме вытекшей воды будут большие погрешности при измерении ее объема, при очень больших объемах вытекшей воды будет уменьшаться скорость истечения за счет понижения уровня воды в газометре.
3. Полученные соотношения справедливы для ламинарного течения, которое наблюдается в трубе при $Re < 2200$, поэтому нужно контролировать величину числа Рейнольдса для течения газа в трубе. В качестве линейного масштаба в формуле числа Рейнольдса для трубы следует брать диаметр трубы $2R_0$, в качестве характерной скорости – так называемую приведенную скорость $\bar{u} = Q/S$ (S – площадь поперечного сечения трубы).

Проведя предварительные расчеты, необходимо включить циркуляцию воды термостата и нагреватель и по мере нагревания исследуемого газа до

50 °С провести не менее 10 измерений вязкости. Результаты представить в виде графика $\mu = f(T)$.

Задания

1. Произведите несколько измерений при различных температурах газа. Рассчитайте величину вязкости. Оцените значения числа Рейнольдса для каждого измерения.
2. Составьте перечень источников погрешностей метода, оцените вклад каждого из них и суммарную ошибку метода. Укажите возможные меры повышения точности измерений.
3. Сравните кинематические вязкости глицерина и воздуха.

Список литературы

Кикоин А. К., Кикоин И. К. Молекулярная физика. М. : Наука, 1976.
Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. : Гос. изд. технико-теоретической лит., 1955.
Физическая энциклопедия: в 5 т. – М. : Сов. Энциклопедия, 1988.
Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М. : Мир, 1976.
Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М. : Наука, 1974.

Приложение 1. Вязкость газов

Как определить число молекул, пересекающих 1 см^2 площадки? Если бы все молекулы двигались с одинаковой скоростью u , направленной по оси X , то число молекул, пересекающих за 1 с площадку за 1 см^2 , было бы равно $n u$, где n – число молекул в единице объема (рис. 6).

В действительности существует распределение молекул по скоростям, но для грубой оценки мы примем, что у всех молекул одна и та же скорость, равная средней скорости u . Примем также, что тепловые скорости молекул равномерно распределены по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Тогда из всех молекул единицы объема $1/3$ движется вдоль оси X и из них половина движется в положительном направлении оси X , т. е. по направлению к площадке, в то время как другая половина движется в противоположном направлении – от нее.

Следовательно, число молекул, пересекающих 1 см^2 площадки S за 1 с слева направо, и число молекул, пересекающих ту же площадку в противоположном направлении, равны $1/6 n \bar{u}$.

Если газ течет с некоторой скоростью u , то это значит, что все его молекулы обладают этой скоростью сверх скорости теплового движения, которое в текущем газе происходит совершенно так же, как и в покоящемся. Каждая молекула имеет, следовательно, импульс mu (m – масса молекулы), направленный в одном для всех молекул направлении. Обычно скорость течения газа значительно меньше средней скорости теплового движения его молекул. Когда скорость течения газа больше скорости тепловых движений молекул (точнее, скорости звука в данном газе), возникает ряд новых явлений, составляющих предмет изучения газовой динамики.

Рассмотрим площадку S , параллельную скорости течения газа и, следовательно, перпендикулярную к направлению переноса импульса (рис. 7). Пусть скорость течения газа убывает в направлении оси Y , т. е. скорость течения справа от площадки меньше, чем слева от нее. Благодаря обмену молекулами между обоими слоями газа (обмен происходит из-за тепловых движений) это различие уменьшается. Молекулы справа от S

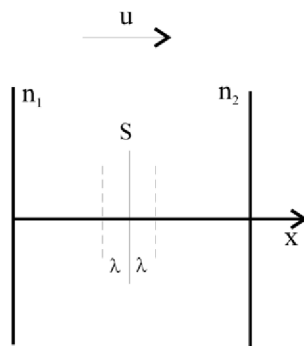


Рис. 6. Движение газа

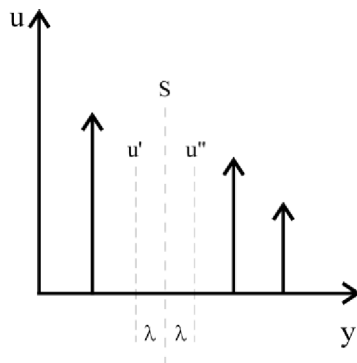


Рис. 7. Перенос импульса в газе

замещаются другими молекулами, пришедшими слева, имеющими большую скорость и, следовательно, больший импульс. При столкновении этих молекул с молекулами, находившимися до этого справа от S , большая скорость течения распределится между всеми молекулами справа, после чего скорость течения этого слоя, а, следовательно, и импульс, станут больше, в то время как скорость и импульс слоя газа слева от S уменьшатся.

Другими словами, обмен молекулами, обусловленный тепловыми движениями, приводит к выравниванию скоростей течения различных слоев газа. Таков механизм переноса импульса в направлении оси Y от одного слоя текущего газа к другому.

Величина потока импульса L , переносимого в единицу времени через единицу площади площадки S , определится разностью импульсов L_1 и L_2 , переносимых молекулами, пересекающими площадку S слева и справа. Импульс L_1 , переносимый молекулами слева направо, равен произведению импульса отдельной молекулы на число молекул, пересекающих единицу площади в единицу времени. Последнее равно $1/6 n \bar{u}$ (n – число молекул в единице объема, \bar{u} – средняя скорость теплового движения молекулы). Импульс отдельной молекулы, который она приносит, пересекая площадку S , – это тот импульс, которым молекула обладала при последнем столкновении перед площадкой, т. е. на расстоянии порядка средней длины свободного пробега λ от площадки.

Если скорость течения газа на расстоянии λ слева от S равна u' , то импульс молекулы, связанный с течением газа, равен $m u'$ (m – масса молекулы). Таким образом, $L_1 = 1/6 n \bar{u} m u'$. Соответственно для молекул, пересекающих площадку S – справа, $L_2 = 1/6 n \bar{u} m u''$, где u'' – скорость течения газа на расстоянии λ справа от S . Результирующий поток импульса L через единицу площади за 1 с равен

$$L = L_1 - L_2 = 1/6 n \bar{u} m (u' - u''),$$

где $u' - u''$ – разность скоростей течения газа в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии 2λ , т. е.

$$u' - u'' = -2\lambda \frac{du}{dy},$$

откуда

$$L = -1/3 n m \bar{u} \lambda \frac{du}{dy}.$$

Сравнивая это выражение с $L = -\mu \frac{du}{dy}$, получаем выражение для коэффициента вязкости:

$$\mu = 1/3 m n \bar{u} \lambda = 1/3 \rho \bar{u} \lambda,$$

где ρ – плотность газа. Данное выражение дает оценку коэффициента вязкости с точностью до численного множителя, который только приблизительно равен $1/3$.

Из этого выражения видно, что коэффициент вязкости тоже не должен зависеть от давления, так как произведение $\rho \bar{u} \lambda$ не зависит от давления. Опыты

по измерению вязкости в широком диапазоне давлений подтверждают этот вывод.

Коэффициент внутреннего трения, как и коэффициент теплопроводности, должен зависеть от температуры, так как в выражение для μ входит средняя скорость тепловых движений молекул, зависящая от температуры по закону \sqrt{T} . Значит, коэффициент вязкости тоже должен расти с повышением температуры пропорционально \sqrt{T} .

В действительности вязкость растет несколько быстрее, чем \sqrt{T} . Это связано с тем, что с повышением температуры не только растет тепловая скорость молекул, но и уменьшается эффективное поперечное сечение молекул и поэтому растет длина свободного пробега; расстояние от места последнего перед данным слоем столкновения становится большим, и, следовательно, увеличивается изменение импульса, которое молекула с собой приносит.

Таким образом, изложенные здесь молекулярно-кинетические представления о механизме вязкости находятся в хорошем качественном и количественном согласии с опытом.

Приложение 2. Вязкость жидкостей

В жидкостях, как и в газах, наблюдаются явления диффузии, теплопроводности и вязкости. Но механизм этих процессов в жидкостях иной, чем в газах.

Явления переноса в газах определяются длиной свободного пробега молекул. Именно поэтому выражения для всех коэффициентов переноса содержат в качестве множителя длину свободного пробега. Но в жидкостях, как и в очень плотных газах, понятие длины свободного пробега теряет смысл. В жидкостях среднее расстояние между молекулами такого же порядка, как размеры самих молекул, поэтому и «свободного» пробега у молекул нет. Молекулы жидкости могут лишь совершать малые колебания в пределах, ограниченных межмолекулярными расстояниями.

Однако время от времени колеблющаяся молекула в результате флуктуации может получить от соседних молекул избыточную энергию, достаточную для того, чтобы совершить скачок на некоторое расстояние δ . В новом месте частица проведет некоторое время, совершая колебания, пока снова не получит, опять в результате флуктуации, нужную для скачка энергию; она вновь совершит скачок и т. д. Такие колебания, сменяющиеся скачками, и есть тепловые движения молекул жидкости.

Как часто происходят молекулярные скачки? Сколько времени проходит между скачками? Это зависит от свойств молекул, от сил взаимодействия между ними, от плотности жидкости. Хотя силы взаимодействия между молекулами имеют очень сложный характер, но все же некоторые соображения

о движениях частиц и о связанных с этим явлениях переноса можно сформулировать.

Для явления диффузии в жидкости, как и в любом веществе, остается справедливым закон Фика $I = -D dq/dx$ (I – диффузионный поток, D – коэффициент диффузии, q – концентрация). Выражение же для коэффициента диффузии D можно получить из следующих соображений. Если время между скачками молекул (его можно назвать временем «оседлой» жизни молекулы) обозначить через t , то величина $\bar{\delta}/t$ будет представлять собой скорость молекулы. Это позволяет нам сравнить $\bar{\delta}$ со средней длиной свободного пробега, а $\bar{\delta}/t$ – со средней скоростью молекул. Тогда по аналогии с идеальными газами, у которых коэффициент диффузии определяется произведением длины свободного пробега на среднюю скорость молекул, мы можем и для жидкости написать, что коэффициент диффузии (точнее, самодиффузии) жидкости выражается равенством

$$D = \frac{1}{6} \bar{\delta} \frac{\bar{\delta}}{t} = \frac{1}{6} \frac{\bar{\delta}^2}{t}.$$

Множитель $1/6$ (а не $1/3$) здесь появляется потому, что движения молекул носят характер случайных блужданий, для которых существует шесть равно-возможных направлений (три оси координат и два направления вдоль каждой из них), так что в некотором избранном направлении движется $1/6$ всех молекул. В формулу входит среднее значение квадрата $\bar{\delta}^2$, а не квадрат среднего значения $\bar{\delta}^2$, так как среднее значение равно нулю.

Коэффициент самодиффузии D сильно зависит от температуры, прежде всего потому, что с повышением температуры уменьшается длительность t «оседлой» жизни молекулы, что и приводит к резкому увеличению D с ростом температуры. Длительность пребывания молекулы в данном месте жидкости определяется вероятностью для молекулы получить энергию w , достаточную для скачка. А вероятность эта, как всегда в таких случаях, выражается законом Больцмана:

$$\frac{n}{n_0} = e^{-w/kT}.$$

Здесь n – число молекул в единице объема, энергия которых равна w , а n_0 – число молекул в том же объеме, энергия которых порядка средней тепловой, т. е. kT . Чем больше вероятность получения молекулой энергии w , тем меньше будет время «оседлости» t . Поэтому для среднего времени \bar{t} можно написать выражение:

$$\bar{t} = A e^{w/kT}.$$

Множитель A имеет ясный физический смысл. Ведь до того, как молекула совершает скачок, она колеблется с некоторой частотой ν . Каждое колебание можно рассматривать как «попытку» молекулы совершить скачок. Поэтому вероятность совершить его тем больше, а время оседлости молекулы тем меньше, чем больше частота колебаний ν . Множитель A и связан с этой частотой: $A=1/\nu$. Следовательно, множитель A имеет смысл периода колебаний молекулы.

Если подставить только что написанное выражение для \bar{t} в формулу для коэффициента диффузии, мы получим:

$$D = B e^{w/kT}.$$

Здесь $B = \frac{1}{6} \overline{\delta^2 v}$, а w – энергия, необходимая для скачка молекулы, называемая энергией активации молекулы.

Численное значение коэффициента диффузии у жидкостей много меньше, чем у газов. Например, коэффициент диффузии NaCl в воде при комнатной температуре равен $1,1 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$, в то время как для диффузии аргона в гелий он равен $7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Внутреннее трение (вязкость) жидкостей, как и газов, возникает при движении жидкости из-за переноса импульса в направлении, перпендикулярном к направлению движения. Перенос импульса из одного слоя в другой осуществляется при скачках молекул, о которых говорилось выше. Общий закон внутреннего трения – это закон Ньютона. Коэффициент же вязкости μ может быть получен на основе тех же соображений о движениях молекул, которые уже приводились. Очевидно, что жидкость будет тем более текучей (с тем меньшей вязкостью), чем меньше время t «оседлости» молекул и, значит, чем чаще происходят скачки. Эти соображения приводят к выражению для коэффициента вязкости, называемому уравнением Френкеля – Андраде:

$$\mu = C e^{w/kT}.$$

Множитель C , входящий в это уравнение, зависит от дальности скачка δ , частоты колебаний ν и температуры T . Однако температурный ход вязкости определяется множителем $e^{w/kT}$. Как следует из этой формулы, с повышением температуры вязкость быстро уменьшается. Так, вязкость воды при изменении температуры от 0°C до 100°C уменьшается от $1,8 \cdot 10^{-3}$ до $2,8 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}\cdot\text{с}$.

Приложение 3. Закон сопротивления Стокса

Функция тока – скалярная функция ψ пространственных координат и времени, сохраняющая неизменным свое значение на линии тока, для которой выполняется условие $U = \text{grad} \psi$, следующее из уравнения непрерывности в приближении несжимаемой жидкости.

Обтекание тела удобно описывать при помощи системы координат, характерной для поверхности тела. Обозначим через \vec{n} вектор внешней нормали в точке поверхности тела, а через \vec{s} – единичный тангенциальный вектор. Выражения для нормальной и тангенциальной составляющих скорости на поверхности имеют вид

$$U_n = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad U_s = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Наиболее часто встречаемой краевой задачей для осесимметричных течений является движение тела вращения в бесконечной жидкости с постоянной

скоростью $U_z = i_z U$, параллельной оси его вращения. Полагаем, что радиус сферы равен a и что она движется в положительном направлении оси z со скоростью U . Для удобства выбираем сферические координаты и тогда, полагая, $\gamma = \sin \theta r$, получим граничные условия, которые должны выполняться на поверхности сферы $r=a$:

$$\begin{aligned}\psi|_{r=a} &= -\frac{1}{2} U a^2 \sin^2 \theta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial r}|_{r=a} &= -U a \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Так как жидкость покоится на бесконечности, необходимо принять во внимание условие

$$\frac{\psi}{r^2} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Эта функция тока удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E^4 \psi = 0,$$

где в сферических координатах

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Ищем решение в виде

$$\psi = \sin^2 \theta F(r).$$

Вид решения можно угадать из граничных условий. В соответствии с видом E^2 в сферических координатах последовательно имеем:

$$E^2 \psi = \sin^2 \theta \left(F'' - \frac{2}{r^2} F \right) = \sin^2 \theta f(r),$$

$$E^4 \psi = \sin^2 \theta \left(f'' - \frac{2}{r^2} f \right).$$

Отсюда следует уравнение:

$$f'' - \frac{2}{r^2} f = 0,$$

решение которого есть

$$f(r) = A r^2 + \frac{B}{r}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}F'' - \frac{2}{r^2} F &= A r^2 + \frac{B}{r}, \\ F(r) &= \frac{A r^4}{10} - \frac{B r}{2} + C r^2 + \frac{D}{r}.\end{aligned}$$

Зная эти результаты, мы можем записать функцию тока в следующем виде:

$$\psi = \sin^2 \theta \left(\frac{A r^4}{10} - \frac{B r}{2} + C r^2 + \frac{D}{r} \right).$$

В соответствии с условием покоя жидкости на бесконечности необходимо положить $A = 0$, $C = 0$. Тогда после применения граничных условий можно определить постоянные B и D :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} U a^2 &= -\frac{1}{2} B a + \frac{D}{a}, \\ -U a &= \frac{1}{2} B + \frac{D}{a^2}.\end{aligned}$$

Решая уравнения, получаем

$$B = \frac{3}{2} U a, \quad D = \frac{1}{4} U a^3.$$

Тогда функция тока равна

$$\psi = \frac{1}{4} U r^2 \sin^2 \theta \left(\left(\frac{a}{r} \right)^3 - 3 \frac{a}{r} \right),$$

откуда соответствующие компоненты скорости в сферических координатах выражаются в виде:

$$U_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} U \cos \theta \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(\frac{a}{r} - 3 \frac{r}{a} \right),$$

$$U_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{4} U \sin \theta \left(\frac{a}{r} \right) \left(\left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \right).$$

Для получения давления в сферических координатах нужно использовать следующие формулы:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E^2 \psi),$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\mu}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (E^2 \psi).$$

Полагая $A = 0$, имеем

$$E^2 \psi = B \frac{\sin^2 \theta}{r},$$

и тогда давление имеет следующий вид:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta = -\mu B \left(\frac{2 \cos \theta dr}{r^3} + \frac{\sin \theta d\theta}{r^2} \right) = \mu B d \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right).$$

После интегрирования получаем:

$$p = p_\infty + \frac{3}{2} \mu a U \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Далее получаем выражение для силы, действующей на сферу

$$F_z = \mu \pi \int_0^\pi r^3 \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B \sin^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) r d\theta = -3B\mu\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -4\pi\mu B,$$

которое справедливо независимо от значений постоянных величин A , B , C , D . В данном случае это приводит к виду:

$$F_z = -6\pi\mu a U.$$

Этот результат известен как закон сопротивления Стокса.

Приложение 4. Основные обозначения

L – характерный геометрический размер, длина, м;
 r, R – радиус, м;
 h – высота, м;
 S – площадь поверхности тела, м^2 , или площадь сечения трубы, м^2 ;
 V – объем тела, м^3 ;
 m – масса тела, кг;
 u, U – скорость газа (жидкости), м/с;
 Q – расход газа (жидкости), $\text{м}^3/\text{с}$;
 g – ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$;
 ρ – плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$;
 λ – длина свободного пробега, м;
 p – давление, $\text{Н}/\text{м}^2$, Па;
 n – концентрация, $1/\text{м}^3$;
 k – постоянная Больцмана, Дж/К;
 T – температура, $^{\circ}\text{C}$;
 w – энергия активации, Дж;
 μ – коэффициент динамической вязкости, $\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$, Па·с;
 ν – коэффициент кинематической вязкости, $\text{м}^2/\text{с}$.

Учебное издание

Гореликова Анастасия Егоровна
Рандин Вячеслав Валерьевич

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ГАЗА И ЖИДКОСТИ
Лабораторная работа 3.1

Учебно-методическое пособие
2-е издание, переработанное и дополненное

Редактор *Д. М. Валова*
Обложка *Е. В. Неклюдовой*

Подписано в печать 15.11.2016
Формат 60х84 1/16. Уч.-изд. л. 1,3. Усл. печ. л. 1,2.
Тираж 20 экз. Заказ №

Издательско-полиграфический центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.