Домашняя работа к занятию 8

1.1 Найдите общее решение уравнения $y^{IV} = y''' + x - 1$

1.2 Решите задачу Коши $\begin{cases} y'' - xy''' + \ln y''' = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0 \end{cases}$

2.1 Решите задачу Коши $\begin{cases} x^2(yy'' - (y')^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3} \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \end{cases}$

2.2 Решите задачу Коши $\begin{cases} x^2y'' = (xy')^2 + xy' + 1 \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \end{cases}$

Ответы.

1.1 *Указание*: понижаем порядок уравнения, полагая $y''' = u(x)$.

Ответ: $y = C_1e^x + C_2x^2 + C_3x + C_4 - \dfrac{x^4}{24}$.

1.2 *Указание*: понижаем порядок уравнения, полагая $y'' = u(x)$. Полученное уравнение $u - xu' + \ln u' = 0$ параметризуем, полагая $u' = p$.

Ответ: $y = \dfrac{x^3}{6} + x$.

2.1 *Указание*: поделим обе части уравнения на y^2 и выделим выражения, являющиеся полными производными:

$$x^2\Big(\frac{yy'' - (y')^2}{y^2}\Big) + x\frac{y'}{y} = \frac{2x^{5/2}y' - 3yx^{3/2}}{y^2}$$

Поделим обе части уравнения на x:

$$x\Big(\frac{y'}{y}\Big)' + \frac{y'}{y} = 2\frac{x^{3/2}y' - \frac{3}{2}x^{1/2}y}{y^2}$$

$$\left(x\frac{y'}{y}\right)' = -2\left(\frac{x^{3/2}}{y}\right)' \quad \Rightarrow \quad x\frac{y'}{y} + 2\frac{x^{3/2}}{y} = C$$

Из начальных данных определяем, что $C = 2$, и получаем линейное неоднородное уравнение $xy' + 2x^{3/2} = 2y$. Его частное решение можно найти в виде $y = Ax^{3/2}$.

Ответ: $y = 4\sqrt{x^3} - 3x^2$.

2.2 *Указание*: уравнение является уравнением Эйлера, поэтому делаем замену $x = e^t$ и приходим к задаче Коши $\begin{cases} \ddot{y} = (\dot{y})^2 + 2\dot{y} + 1 \\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$. Понижаем порядок, полагая $\dot{y} = u(t)$.

Ответ: $y = 1 - \ln x - \ln(1 - \ln x)$, $x \in (0; e)$.