

Вопросы к блиц-опросу в рамках экзамена по курсу

“Основы Функционального Анализа”

1. Теорема о представлении 2π -периодических функций рядами Фурье в вещественной и комплексной форме. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом.
2. Теорема о представлении функций интегралами Фурье в вещественной и комплексной форме.
3. Ряды и интегралы Фурье для чётных и нечётных функций.
4. Лемма Римана-Лебега.
5. Прямое и обратное преобразование Фурье.
6. Синус- и косинус- преобразования Фурье.
7. Различные формы записи преобразования Фурье.
8. Преобразование Фурье функций нескольких переменных.
9. Непрерывность, ограниченность, асимптотическое поведение преобразования Фурье.
10. Линеиная замена переменной в преобразовании Фурье: свойства подобия, запаздывания и смещения.
11. Коэффициенты ряда Фурье для производной функции.
12. Преобразование Фурье от производной функции.
13. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.
14. Неравенство Бесселя.
15. Поточечная и равномерная сходимость рядов Фурье.
16. Равенство Ляпунова.
17. Явление Гиббса.
18. Скорость сходимости рядов Фурье.
19. Свёртка функций. Прямое и обратное преобразование Фурье от свертки и произведения функций.
20. Преобразование Фурье быстро убывающих функций. Формула Парсеваля.
21. Формула Пуассона для быстро убывающих функций.
22. Преобразование Лапласа: оригиналы и изображения, формула обращения.
23. Преобразование Лапласа от производной: дифференцирование и интегрирование оригиналов.
24. Дифференцирование преобразования Лапласа: дифференцирование и интегрирование изображений
25. Основные и обобщенные функции. Примеры регулярных и сингулярных обобщённых функций.
26. δ -функция Дирака и δ -образующие последовательности.
27. Сходимость последовательности обобщённых функций, формулы Сохоцкого.
28. Линеиная замена переменной в обобщенных функциях, умножение на бесконечно дифференцируемые функции.
29. Дифференцирование обобщенных функций. Теорема о связи классической и обобщённой производных для кусочно-гладкой функции.
30. Свёртка обобщенных функций.
31. Фундаментальное решение дифференциальных уравнений. Частные решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
32. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.
33. Теорема о приближении функции тригонометрическими многочленами.

34. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.
35. Сформулируйте определение метрики и метрического пространства.
36. Приведите примеры метрик: дискретной метрики, метрик Минковского в \mathbb{F}^n ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}), метрик в пространствах l_p ($1 \leq p < +\infty$), l_∞ , $L_p(\mathbb{X})$ ($1 \leq p < +\infty$) и равномерной метрики в пространстве $C[a, b]$.
37. Сформулируйте определение всюду плотного подмножества метрического пространства и определение сепарабельного метрического пространства.
38. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности в метрическом пространстве и определение полного метрического пространства.
39. Сформулируйте определение нормы и нормированного линейного пространства.
40. Сформулируйте определение метрики, порожденной нормой, и определение банахова пространства.
41. Приведите примеры норм в пространствах \mathbb{F}^n , l_p ($1 \leq p < +\infty$), l_∞ , $L_p(\mathbb{X})$ ($1 \leq p < +\infty$), $C[a, b]$.
42. Сформулируйте определение скалярного произведения в линейном пространстве, а также определения евклидова и унитарного пространств.
43. Сформулируйте определение нормы, порожденной скалярным произведением, и определение гильбертова пространства.
44. Сформулируйте определение коэффициентов Фурье и ряда Фурье в гильбертовом пространстве.
45. Сформулируйте определение полной ортонормированной системы и определение гильбертова базиса.
46. Сформулируйте теорему о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве.
47. Разложите функцию $f(x) = x^2$ в ряд по многочленам Лежандра со стандартизацией $P_n(1) = 1$. (напоминание: формула Родрига для многочленов Лежандра с указанной стандартизацией имеет вид $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$)
48. Сформулируйте определение линейного оператора, его области определения, ядра и образа.
49. Сформулируйте определение ограниченного линейного оператора. Может ли конечномерный оператор быть неограниченным?
50. Сформулируйте определение нормы линейного оператора. Чему равны нормы нулевого и тождественного оператора?
51. Сформулируйте определение непрерывного линейного оператора в точке и во всем пространстве. Как соотносятся между собой непрерывность линейного оператора в точке и во всем пространстве? Как соотносятся между собой непрерывность линейного оператора во всем пространстве и его ограниченность?
52. Сформулируйте определение обратимого линейного оператора. Сформулируйте утверждение о связи обратимости линейного оператора с тривиальностью его ядра. Сформулируйте определение обратного линейного оператора.
53. Сформулируйте определение резольвентного множества и спектра оператора. Сформулируйте определение резольвенты оператора.
54. Сформулируйте определения точечного, непрерывного и остаточного спектров оператора.

55. Сформулируйте определение линейного функционала в гильбертовом пространстве и определение пространства, сопряженного к гильбертову пространству.
56. Сформулируйте теорему Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
57. Найдите норму линейного функционала $f : L_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, заданного формулой $f(x) = \int_0^1 \sqrt{t} x(t) dt$.
58. Сформулируйте определение оператора, сопряженного к ограниченному оператору, действующему на паре гильбертовых пространств.
59. Сформулируйте теорему об эквивалентном определении компактного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.
60. Сформулируйте теорему о свойствах спектра компактного оператора в бесконечномерном гильбертовом пространстве (всего 3 свойства).
61. Сформулируйте теорему Гильберта–Шмидта.
62. Сформулируйте определение и перечислите важнейшие классы линейных интегральных уравнений (всего 4 класса).
63. Сформулируйте определение интегрального оператора Гильберта–Шмидта и теорему о его компактности.
64. Сформулируйте утверждение альтернативы Фредгольма применительно к вопросу о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода $(I - A)x = f$.
65. Решите интегральное уравнение $x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds = 1$.