Вариант 1

1. Задана аффинная система координат $\mathbf{e_1} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{e_2} = -2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{e_3} = -3\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$, ковектор $\mathbf{u} = (961, -961, 961)$ и два вектора $\mathbf{v^1} = (0, 1, 2)$ и $\mathbf{v^2} = (-1, 3, 4)$. Найти ориентированный объем V параллепипеда, построенного на $\mathbf{u}, \mathbf{v^1}, \mathbf{v^2}$. Доказать, что $V^{-1} \cdot (\mathbf{v^1} \times \mathbf{v^2})$ преобразуется по тензорному закону при переходе в другую систему координат.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\operatorname{rot} \mathbf{a})_3$, где $\mathbf{a} = (e^{4v} \sin u, \cosh v - w^2, 2u + e^v)$, а координаты u, v, w связаны с декартовыми соотношениями
$$x = \sin 3u + e^v + 2w,\ y = 3u + \sinh v,\ z = -u + 2\cosh v - 5w.$$

3. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в некоторой точке тензор T имеет вид $T = (T^i_j) = -7\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^1} - \mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^2} + 2\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^1} - 5\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^2} - \mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^3} + 3\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^2} + \mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^3}$. Выписать координаты T^i_j тензора T. Найти координату $T^{1'}_{2'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{x^{1'}} & 0 & e^{x^{2'}} \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & e^{x^{3'}} \end{pmatrix}.$$

4. Для криволинейной системы координат (x^1, x^2), связанной с декартовыми соотношениями $x = 2e^{x^1 - x^2} + \cos x^1$, $y = -e^{3x^1 + 2x^2} - 2\cosh x^2$, выписать первую компоненту вектора ускорения a_{x^1}.

5. Найти компоненту $T^{\cdot\cdot 2}_{21\cdot}$ тензора $T^{\cdot\cdot k}_{ij\cdot} = \nabla_i S^{\cdot k}_{j\cdot}$, где $S = \left(S^{\cdot k}_{j\cdot}\right) = \sin x^3\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^2} - \mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^3} + 3\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^1} - 2x^2\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^2} + 4x^1\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^3} + 4x^1\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^1} + x^2\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^2}$. Вычислить полную свертку тензора S. Ненулевые символы Кристоффеля:
$\Gamma^1_{12} = \dfrac{1}{x^2}$, $\Gamma^1_{22} = -2$, $\Gamma^1_{23} = -\dfrac{1}{2x^2x^3}$, $\Gamma^2_{12} = -\dfrac{1}{(x^2)^2}$, $\Gamma^2_{22} = \dfrac{2}{x^2}$, $\Gamma^2_{23} = \Gamma^3_{12} = \dfrac{1}{2(x^2)^2x^3}$, $\Gamma^3_{22} = -\dfrac{1}{x^2x^3}$, $\Gamma^3_{23} = -\dfrac{2(x^2)^2+1}{4(x^3)^2(x^2)^2}$, $\Gamma^3_{33} = \dfrac{1}{x^3}$.

Вариант 2

1. Задана аффинная система координат $\mathbf{e_1} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e_2} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{k}$, $\mathbf{e_3} = -2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, ковектор $\mathbf{u} = (7, 14, -14)$ и два вектора $\mathbf{v^1} = (3, 1, 2)$ и $\mathbf{v^2} = (2, 1, 0)$. Найти ориентированный объем V параллелепипеда, построенного на $\mathbf{u}, \mathbf{v^1}, \mathbf{v^2}$. Доказать, что $V^{-1} \cdot (\mathbf{v^1} \times \mathbf{v^2})$ преобразуется по тензорному закону при переходе в другую систему координат.

2. Вычислить ковариантную компоненту $(\operatorname{rot}\mathbf{a})_2$, где $\mathbf{a} = (e^{4v}\sin u, \cosh v - w^2, 2u + e^v)$, а координаты u, v, w связаны с декартовыми соотношениями
$$x = 4u + \cosh v + e^{2w},\ y = e^v - 3\cosh w,\ z = -2u - 3(\cosh v - \cosh w).$$

3. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в некоторой точке тензор T имеет вид $T = (T^i_j) = 4\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^1} + \mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^2} - \mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^1} + 5\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^2} - 2\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^3} + 3\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^1} + 7\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^3}$. Выписать координаты T^i_j тензора T. Найти координату $T^{3'}_{2'}$ в этой точке в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, если известна матрица перехода
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x^{1'}} & -e^{x^{2'}} & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3e^{x^{3'}} \end{pmatrix}.$$

4. Для криволинейной системы координат (x^1, x^2), связанной с декартовыми соотношениями $x = -2e^{x^1 - 2x^2} + \cosh x^1$, $y = e^{3x^1 + x^2} - 3\cos x^2$, выписать вторую компоненту вектора ускорения a_{x^2}.

5. Найти компоненту $T^{\cdot\cdot 3}_{21\cdot}$ тензора $T^{\cdot\cdot k}_{ij\cdot} = \nabla_i S^{\cdot k}_{j\cdot}$, где $S = \left(S^{\cdot k}_{j\cdot}\right) = x^2x^3\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^1} + 5\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^2} - \operatorname{sh} x^2\,\mathbf{g_1} \otimes \mathbf{g^3} - x^3\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^1} + 3x^1\,\mathbf{g_2} \otimes \mathbf{g^3} + x^2\,\mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^2} + \mathbf{g_3} \otimes \mathbf{g^3}$. Вычислить полную свертку тензора S. Ненулевые символы Кристоффеля:
$\Gamma^1_{12} = \dfrac{1}{x^2}$, $\Gamma^1_{22} = -2$, $\Gamma^1_{23} = -\dfrac{1}{2x^2x^3}$, $\Gamma^2_{12} = -\dfrac{1}{(x^2)^2}$, $\Gamma^2_{22} = \dfrac{2}{x^2}$, $\Gamma^2_{23} = \Gamma^3_{12} = \dfrac{1}{2(x^2)^2x^3}$, $\Gamma^3_{22} = -\dfrac{1}{x^2x^3}$, $\Gamma^3_{23} = -\dfrac{2(x^2)^2 + 1}{4(x^3)^2(x^2)^2}$, $\Gamma^3_{33} = \dfrac{1}{x^3}$.