

Решение двумерных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

1. Явные разностные схемы

1.1. Характеристика

1.2. Исследование устойчивости

1.3. Метод решения

2. Неявные разностные схемы

2.1. Характеристика

2.2. Исследование устойчивости

2.3. Метод решения с использованием схемы расщепления

2.4. Алгоритм решения с использованием схемы расщепления

2.5. Метод решения с использованием схемы переменных направлений

2.6. Метод решения с использованием схемы предиктор-корректор

2.7. Алгоритм решения с использованием схемы предиктор-корректор

3. Сравнительная характеристика изученных разностных схем

4. Решение дифференциальных уравнений параболического типа, содержащих первые производные по координатам

4.1. Общие правила

4.2. Частные случаи

5. Задания для самоконтроля

1. Явные разностные схемы

1.1. Характеристика

Запишем двумерное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в следующем общем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f(t, x, y); \quad t \in [0, t_k], \quad x \in [a, b], \quad y \in [c, d]; \quad (8.1)$$

причём параметры v_1 и v_2 могут быть как положительными, так и отрицательными.

Напомним, что при исследовании устойчивости разностных схем, аппроксимирующих одномерные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, было сформулировано правило выбора конечной разности для аппроксимации первой производной по координате, согласно которому при положительном значении параметра v , стоящего перед этой производной, следует использовать левую конечную разность, при отрицательном v – правую конечную разность (правило применимо только в случае, если рассматриваемая производная находится в левой части дифференциального уравнения). Кроме этого, для решения разностной схемы при положительном v потребуется левое граничное условие, при отрицательном v – правое граничное условие.

Применение правила выбора конечной разности к двумерным дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка позволяет записать для уравнения (8.1), учитывая различные варианты знаков v_1 и v_2 , четыре явные разностные схемы, которые с учётом обозначений, введённых при описании разностной сетки для двумерных задач, имеют вид:

$$1. v_1 > 0, v_2 > 0: \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y} = f_{jk}^n; \quad (8.2)$$

$$2. v_1 > 0, v_2 < 0: \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k}^n}{h_y} = f_{jk}^n; \quad (8.3)$$

$$3. v_1 < 0, v_2 > 0: \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j,k}^n}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y} = f_{jk}^n; \quad (8.4)$$

$$4. v_1 < 0, v_2 < 0: \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j,k}^n}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k}^n}{h_y} = f_{jk}^n. \quad (8.5)$$

Учитывая порядок аппроксимации разностных операторов, из которых составлены разностные схемы (8.2)-(8.5), легко видеть, что каждая из них имеет первый порядок аппроксимации и по времени, и по каждой из координат:

$$O(\Delta t, h_x, h_y).$$

Для решения разностных схем (8.2)-(8.5) требуется правильно задать начальное и граничные условия (для определённости будем рассматривать граничные условия 1-го рода):

$$1. v_1 > 0, v_2 > 0: \quad u(t=0, x, y) = \xi(x, y), \quad u(t, x=a, y) = \varphi(t, y), \quad u(t, x, y=c) = \psi(t, x);$$

$$2. v_1 > 0, v_2 < 0: \quad u(t=0, x, y) = \xi(x, y), \quad u(t, x=a, y) = \varphi(t, y), \quad u(t, x, y=d) = \psi(t, x);$$

$$3. v_1 < 0, v_2 > 0: \quad u(t=0, x, y) = \xi(x, y), \quad u(t, x=b, y) = \varphi(t, y), \quad u(t, x, y=c) = \psi(t, x);$$

$$4. v_1 < 0, v_2 < 0: \quad u(t=0, x, y) = \xi(x, y), \quad u(t, x=b, y) = \varphi(t, y), \quad u(t, x, y=d) = \psi(t, x).$$

1. Явные разностные схемы

1.2. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость явной разностной схемы (8.2), аппроксимирующей дифференциальное уравнение (8.1), с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член $f_{j,k}^n$, наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоник:

$$u_{j,k}^n = \lambda^n e^{i\alpha j} e^{i\beta k}, \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad \beta \in [0, 2\pi];$$

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} e^{i\beta k} - \lambda^n e^{i\alpha j} e^{i\beta k}}{\Delta t} + v_1 \frac{\lambda^n e^{i\alpha j} e^{i\beta k} - \lambda^n e^{i\alpha(j-1)} e^{i\beta k}}{h_x} +$$

$$+ v_2 \frac{\lambda^n e^{i\alpha j} e^{i\beta k} - \lambda^n e^{i\alpha j} e^{i\beta(k-1)}}{h_y} = 0.$$

Упрощаем данное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j} e^{i\beta k}$, и выражаем λ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v_1 \frac{1 - e^{-i\alpha}}{h_x} + v_2 \frac{1 - e^{-i\beta}}{h_y} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 - v_1 \frac{\Delta t}{h_x} - v_2 \frac{\Delta t}{h_y} + v_1 \frac{\Delta t}{h_x} e^{-i\alpha} + v_2 \frac{\Delta t}{h_y} e^{-i\beta}.$$

Напомним, что если собственные числа оператора перехода имеют комплексный вид, то согласно необходимому условию устойчивости разностных схем (3.8) требуется, чтобы они были расположены внутри или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости.

Введём следующие обозначения:

$$r_1 = v_1 \frac{\Delta t}{h_x} > 0, \quad r_2 = v_2 \frac{\Delta t}{h_y} > 0, \quad r_1 + r_2 = r \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 - r + r_1 e^{-i\alpha} + r_2 e^{-i\beta}.$$

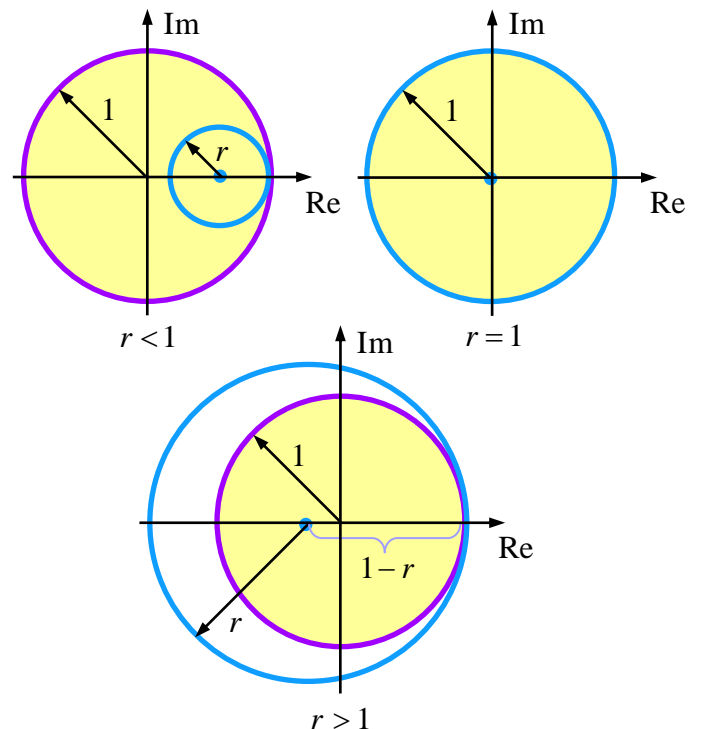
Данное выражение трудно анализировать, поскольку оно содержит две переменные величины - α и β . Рассмотрим наиболее простой случай, когда $\alpha = \beta$:

$$\lambda = 1 - r + r e^{-i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что собственные числа оператора перехода расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке $(1 - r; 0)$ и радиусом:

$$|r e^{i\alpha}| = \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha} = r.$$

Сравнивая расположение этой окружности на комплексной плоскости с условием (3.8), получаем три различных варианта (см. рисунок). Видно, что окружность, соответствующая собственным числам оператора перехода, при $r < 1$ находится внутри круга, соответствующего условию (3.8); при $r > 1$ – вне этого круга; а при r



$= 1$ совпадает с его границей. Таким образом, в случае $\alpha = \beta$ явная разностная схема (8.2) будет устойчива при выполнении следующего условия:

$$r = r_1 + r_2 = v_1 \frac{\Delta t}{h_x} + v_2 \frac{\Delta t}{h_y} \leq 1. \quad (8.6)$$

Можно доказать, что выражение (8.6) также будет являться условием устойчивости явной разностной схемы (8.2) и в случае $\alpha \neq \beta$, однако в силу сложности это доказательство рассматривать не будем.

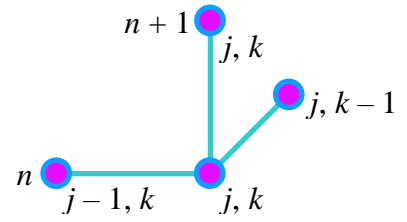
Исследование устойчивости разностных схем (8.3)-(8.5) проводится по аналогичной методике и позволяет в итоге получить обобщённое условие устойчивости для всех четырёх явных разностных схем (8.2)-(8.5), аппроксимирующих дифференциальное уравнение (8.1):

$$\left| v_1 \right| \frac{\Delta t}{h_x} + \left| v_2 \right| \frac{\Delta t}{h_y} \leq 1.$$

1. Явные разностные схемы

1.3. Метод решения

Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий явную разностную схему (8.2), свидетельствует о том, что она содержит одну неизвестную величину – значение функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени. Выражая эту величину из разностной схемы, получаем рекуррентное соотношение



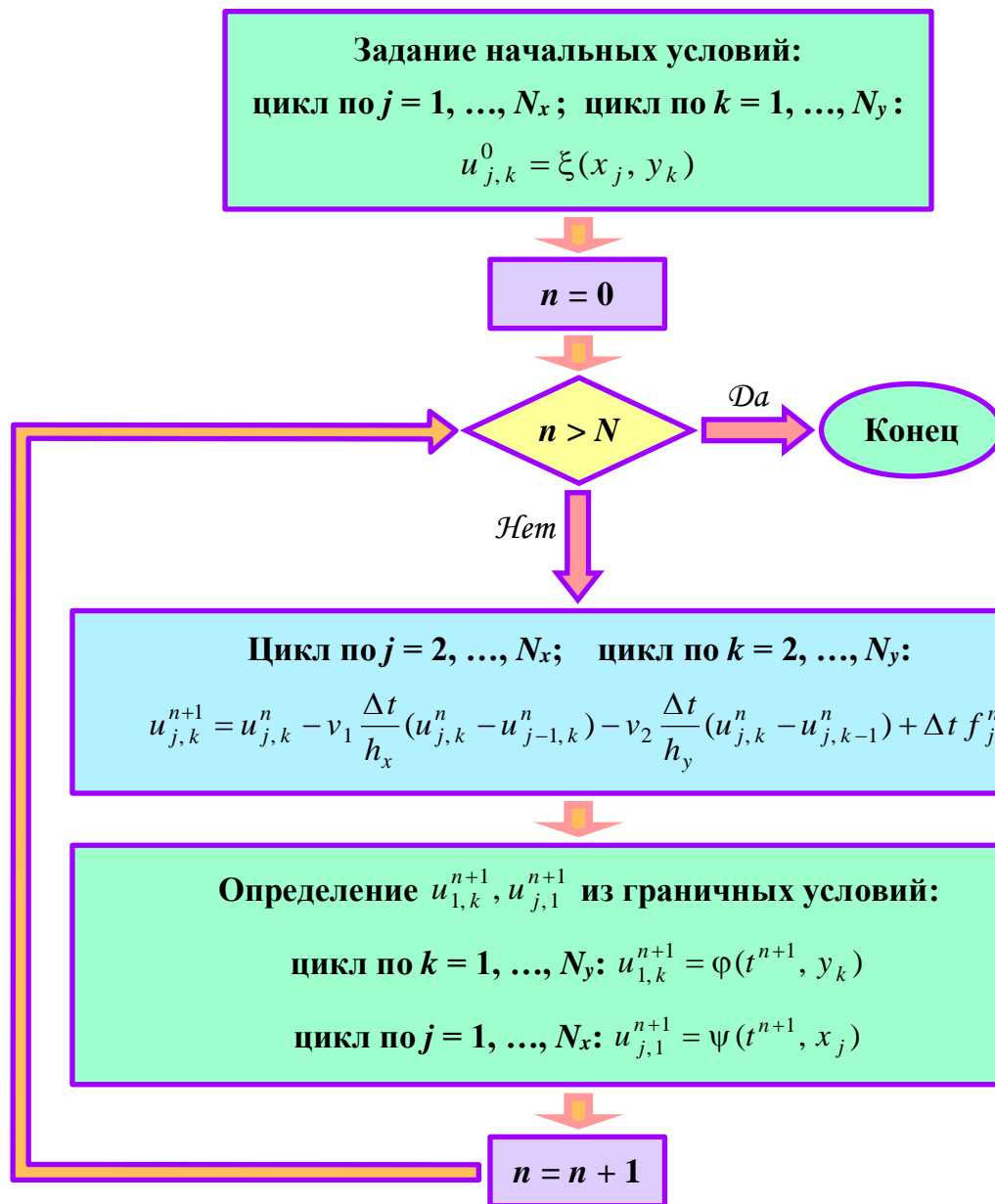
$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n - v_1 \frac{\Delta t}{h_x} (u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n) - v_2 \frac{\Delta t}{h_y} (u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n) + \Delta t f_{jk}^n, \quad (8.7)$$

позволяющее рассчитать все значения функции u на $(n + 1)$ -ом шаге по времени (при известных значениях функции u на n -ом шаге), кроме значений $u_{1,k}^{n+1}, u_{j,1}^{n+1}$, определяемых с помощью граничных условий. Если заданы граничные условия 1-го рода, то эти значения определяются непосредственно из разностной аппроксимации граничных условий:

$$u_{1,k}^{n+1} = \varphi(t^{n+1}, y_k), \quad u_{j,1}^{n+1} = \psi(t^{n+1}, x_j).$$

Если заданы граничные условия 2-го или 3-го рода, то значения $u_{1,k}^{n+1}, u_{j,1}^{n+1}$ можно определить, выразив их из разностной аппроксимации граничных условий.

Ниже приводится алгоритм решения (в виде блок-схемы) явной разностной схемы (8.2), аппроксимирующей дифференциальное уравнение (8.1).



Методика и алгоритм решения разностных схем (8.3)-(8.5) аналогичны.

2. Неявные разностные схемы

2.1. Характеристика

Применение правила выбора конечной разности для аппроксимации первой производной по координате к двумерным дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка позволяет записать для уравнения (8.1), учитывая различные варианты знаков v_1 и v_2 , четыре неявные разностные схемы, которые с учётом обозначений, введённых при описании разностной сетки для двумерных задач, имеют вид:

$$1. v_1 > 0, v_2 > 0: \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j-1,k}^{n+1}}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} = f_{jk}^n; \quad (8.8)$$

$$2. v_1 > 0, v_2 < 0: \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j-1,k}^{n+1}}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y} = f_{jk}^n; \quad (8.9)$$

$$3. v_1 < 0, v_2 > 0: \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j+1,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} = f_{jk}^n; \quad (8.10)$$

$$4. v_1 < 0, v_2 < 0: \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j+1,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y} = f_{jk}^n. \quad (8.11)$$

Учитывая порядок аппроксимации разностных операторов, из которых составлены разностные схемы (8.8)-(8.11), легко видеть, что каждая из них имеет первый порядок аппроксимации и по времени, и по каждой из координат:

$$O(\Delta t, h_x, h_y).$$

Для решения разностных схем (8.8)-(8.11) требуется правильно задать начальное и граничные условия (для определённости будем рассматривать граничные условия 1-го рода):

$$t \in [0, t_k], \quad x \in [a, b], \quad y \in [c, d];$$

$$1. v_1 > 0, v_2 > 0: \quad u(t=0, x, y) = \xi(x, y), \quad u(t, x=a, y) = \varphi(t, y), \quad u(t, x, y=c) = \psi(t, x);$$

$$2. v_1 > 0, v_2 < 0: \quad u(t=0, x, y) = \xi(x, y), \quad u(t, x=a, y) = \varphi(t, y), \quad u(t, x, y=d) = \psi(t, x);$$

$$3. v_1 < 0, v_2 > 0: \quad u(t=0, x, y) = \xi(x, y), \quad u(t, x=b, y) = \varphi(t, y), \quad u(t, x, y=c) = \psi(t, x);$$

$$4. v_1 < 0, v_2 < 0: \quad u(t=0, x, y) = \xi(x, y), \quad u(t, x=b, y) = \varphi(t, y), \quad u(t, x, y=d) = \psi(t, x).$$

2. Неявные разностные схемы

2.2. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость неявной разностной схемы (8.8), аппроксимирующей дифференциальное уравнение (8.1), с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член $f_{j,k}^n$, наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоники:

$$\begin{aligned} u_{j,k}^n &= \lambda^n e^{i\alpha j} e^{i\beta k}, \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad \beta \in [0, 2\pi]; \\ \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} e^{i\beta k} - \lambda^n e^{i\alpha j} e^{i\beta k}}{\Delta t} + v_1 \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} e^{i\beta k} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)} e^{i\beta k}}{h_x} + \\ &+ v_2 \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} e^{i\beta k} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha j} e^{i\beta(k-1)}}{h_y} = 0. \end{aligned}$$

Упрощаем данное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j} e^{i\beta k}$:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v_1 \frac{\lambda - \lambda e^{-i\alpha}}{h_x} + v_2 \frac{\lambda - \lambda e^{-i\beta}}{h_y} = 0.$$

Группируя члены, содержащие λ , в левой части уравнения, выразим величину, обратную λ :

$$\begin{aligned} \lambda \left(1 + v_1 \frac{\Delta t}{h_x} + v_2 \frac{\Delta t}{h_y} - v_1 \frac{\Delta t}{h_x} e^{-i\alpha} - v_2 \frac{\Delta t}{h_y} e^{-i\beta} \right) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda} &= 1 + v_1 \frac{\Delta t}{h_x} + v_2 \frac{\Delta t}{h_y} - v_1 \frac{\Delta t}{h_x} e^{-i\alpha} - v_2 \frac{\Delta t}{h_y} e^{-i\beta}. \end{aligned}$$

Напомним, что если величины, обратные собственным числам оператора перехода, имеют комплексный вид, то согласно необходимому условию устойчивости разностных схем (3.8), записанному в виде (5.7), требуется, чтобы они были расположены вне или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости.

Введём следующие обозначения:

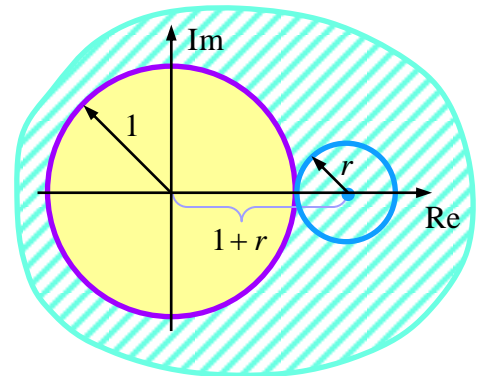
$$r_1 = v_1 \frac{\Delta t}{h_x} > 0, \quad r_2 = v_2 \frac{\Delta t}{h_y} > 0, \quad r_1 + r_2 = r \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = 1 + r - r_1 e^{-i\alpha} - r_2 e^{-i\beta}.$$

Данное выражение трудно анализировать, поскольку оно содержит две переменные величины - α и β . Рассмотрим наиболее простой случай, когда $\alpha = \beta$:

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + r - r e^{-i\alpha}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что величины, обратные собственным числам оператора перехода, расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке $(1+r; 0)$ и радиусом r . Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию (5.7) при

любом значении r (см. рисунок). Таким образом, в случае $\alpha = \beta$ неявная разностная схема (8.8) устойчива. Можно доказать, что устойчивость разностной схемы (8.8) сохранится и в случае $\alpha \neq \beta$ (в силу сложности это доказательство не рассматривается); следовательно, неявная разностная схема (8.8) является абсолютно устойчивой.

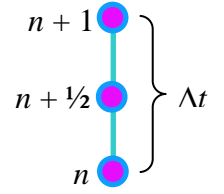


Проведя исследование устойчивости неявных разностных схем (8.9)-(8.11) по аналогичной методике, можно доказать, что каждая из них также является абсолютно устойчивой.

2. Неявные разностные схемы

2.3. Метод решения с использованием схемы расщепления

Для решения неявных разностных схем (8.8)-(8.11), аппроксимирующих дифференциальное уравнение (8.1), используется метод дробных шагов, подробно рассмотренный нами при изучении методов решения двумерных дифференциальных уравнений параболического типа. Суть метода дробных шагов заключается в расщеплении интервала Δt пополам (см. рисунок), что



позволяет представить неявную разностную схему в виде двух подсхем, каждая из которых имеет более простой метод решения. Рассмотрим методику решения неявных разностных схем (8.8)-(8.11) на примере разностной схемы (8.8).

Преобразуем с помощью метода дробных шагов неявную разностную схему (8.8) в схему расщепления:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} = f_{jk}^n; \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} = 0. \quad (8.12)$$

Первая подсхема аппроксимируется на первом полушаге интервала Δt и является неявной по координате x . Вторая подсхема аппроксимируется на втором полушаге интервала Δt и является неявной по координате y . Складывая обе подсхемы, получаем соотношение, отличающееся от разностной схемы (8.8) только тем, что производная по координате x аппроксимируется в нём не на $(n + 1)$ -ом шаге по времени, а на шаге $(n + 1/2)$:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} = f_{jk}^n.$$

Данное соотношение показывает, что схема расщепления (8.12) имеет, как и неявная разностная схема (8.8), первый порядок аппроксимации и по времени, и по каждой из координат:

$$O(\Delta t, h_x, h_y).$$

Каждая из подсхем схемы расщепления (8.12), являясь аналогом неявной разностной схемы для одномерного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, абсолютно устойчива и решается с помощью соответствующего рекуррентного соотношения:

$$u_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^n + v_1 \frac{\Delta t}{h_x} u_{j-1,k}^{n+1/2} + \Delta t f_{jk}^n}{1 + v_1 \frac{\Delta t}{h_x}}; \quad u_{j,k}^{n+1} = \frac{u_{j,k}^{n+1/2} + v_2 \frac{\Delta t}{h_y} u_{j,k-1}^{n+1}}{1 + v_2 \frac{\Delta t}{h_y}}. \quad (8.13)$$

Для реализации рекуррентных соотношений (8.13) требуется знать значения $u_{1,k}^{n+1/2}, u_{j,1}^{n+1}$, определяемые с помощью граничных условий:

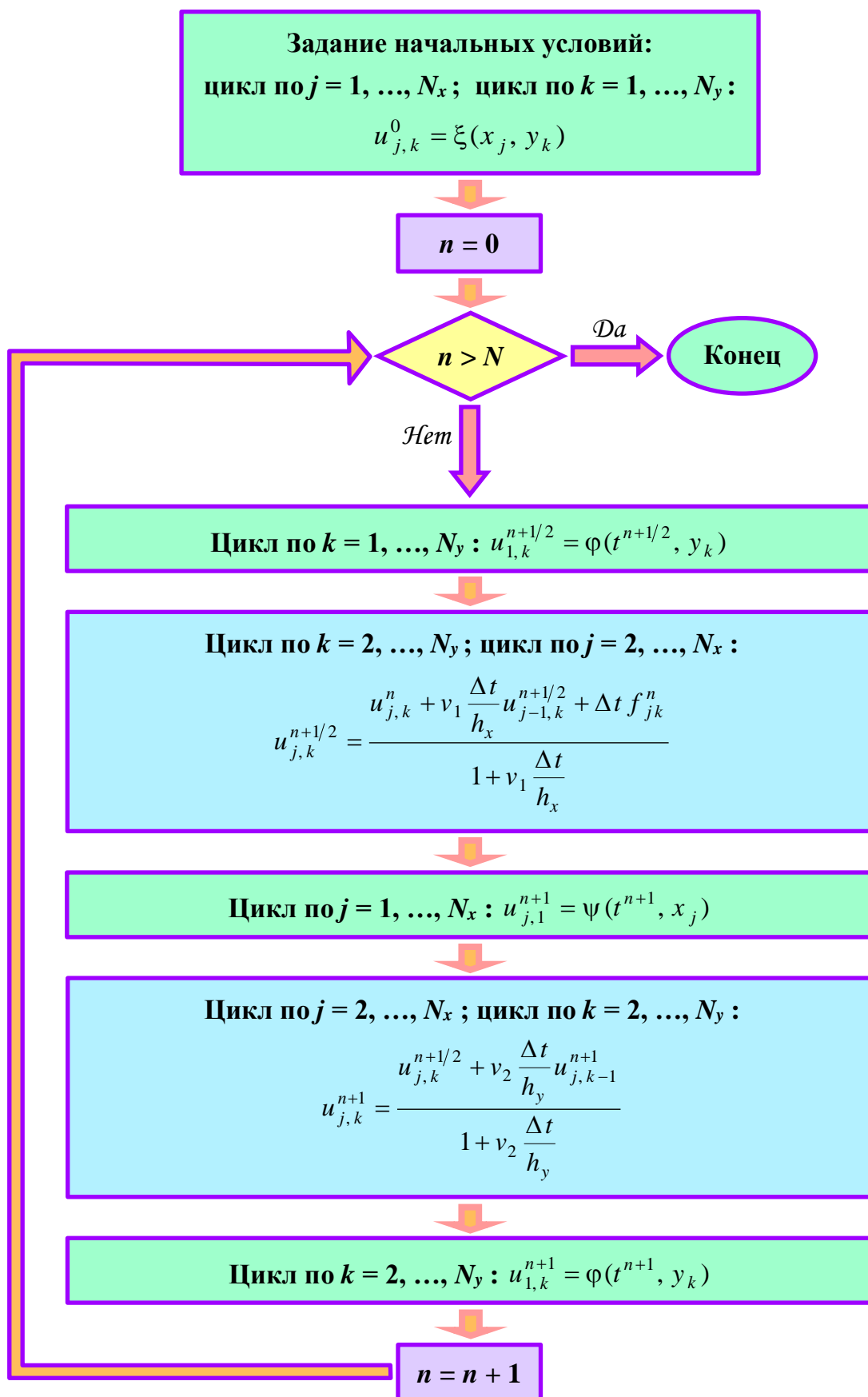
$$u_{1,k}^{n+1/2} = \varphi(t^{n+1/2}, y_k), \quad u_{j,1}^{n+1} = \psi(t^{n+1}, x_j).$$

Если заданы граничные условия 2-го или 3-го рода, то для определения значения $u_{1,k}^{n+1/2}$ необходимо решить систему двух уравнений: разностной аппроксимации левого граничного условия по координате x и первого рекуррентного соотношения в системе (8.13) при $j = 2$; для определения значения $u_{j,1}^{n+1}$ также необходимо решить систему двух уравнений: разностной аппроксимации левого граничного условия по координате y и второго рекуррентного соотношения в системе (8.13) при $k = 2$.

2. Неявные разностные схемы

2.4. Алгоритм решения с использованием схемы расщепления

Приведём алгоритм решения (в виде блок-схемы) схемы расщепления (8.12), являющейся интерпретацией неявной разностной схемы (8.8), аппроксимирующей двумерное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (8.1).



2. Неявные разностные схемы

2.5. Метод решения с использованием схемы переменных направлений

Преобразуем с помощью метода дробных шагов неявную разностную схему (8.8) в схему переменных направлений:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \frac{v_1}{2} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{v_2}{2} \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y} &= 0; \\ \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{v_1}{2} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{v_2}{2} \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} &= f_{jk}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Первая подсхема в схеме переменных направлений (8.14) аппроксимируется на первом полушаге интервала Δt и является неявной по координате x и явной по координате y . Вторая подсхема аппроксимируется на втором полушаге интервала Δt и является неявной по координате y и явной по координате x . Складывая обе подсхемы, получаем:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{v_2}{2} \left(\frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y} + \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} \right) = f_{jk}^{n+1/2}.$$

Видно, что данное соотношение аппроксимируется относительно точки $t^{n+1/2}$. Следовательно, разностный оператор, аппроксимирующий производную функции u по времени, является центральной конечной разностью, которая, как известно, имеет второй порядок аппроксимации. Таким образом, схема переменных направлений (8.14), имея порядок аппроксимации

$$O(\Delta t^2, h_x, h_y),$$

является более точной по сравнению со схемой расщепления (8.12).

Каждая из подсхем схемы переменных направлений (8.14) является абсолютно устойчивой и решается с помощью соответствующего рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1/2} &= \frac{u_{j,k}^n + v_1 \frac{\Delta t}{2h_x} u_{j-1,k}^{n+1/2} - v_2 \frac{\Delta t}{2h_y} (u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n)}{1 + v_1 \frac{\Delta t}{2h_x}}; \\ u_{j,k}^{n+1} &= \frac{u_{j,k}^{n+1/2} + v_2 \frac{\Delta t}{2h_y} u_{j,k-1}^{n+1} - v_1 \frac{\Delta t}{2h_x} (u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}) + \Delta t f_{jk}^{n+1/2}}{1 + v_2 \frac{\Delta t}{2h_y}}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Алгоритм решения схемы переменных направлений (8.14) аналогичен алгоритму решения схемы расщепления (8.12).

2. Неявные разностные схемы

2.6. Метод решения с использованием схемы предиктор-корректор

Преобразуем с помощью метода дробных шагов неявную разностную схему (8.8) в схему предиктор-корректор:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^n}{\Delta t/2} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j-1,k}^{n+1/4}}{h_x} &= 0; & \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/4}}{\Delta t/2} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y} &= 0; \\ \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y} &= f_{jk}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Первые две подсхемы в схеме предиктор-корректор (8.16) составляют предиктор. Первая подсхема в составе предиктора аппроксимируется на шаге по времени $(n + 1/4)$ и является неявной по координате x . Вторая подсхема – аппроксимируется на шаге по времени $(n + 1/2)$ и является неявной по координате y . Обе подсхемы абсолютно устойчивы.

Третья подсхема в схеме предиктор-корректор (8.16) является корректором. Поскольку корректор аппроксимируется относительно точки $t^{n+1/2}$, разностный оператор, аппроксимирующий производную функции u по времени, является центральной конечной разностью которая, как известно, имеет второй порядок аппроксимации. Таким образом, схема предиктор-корректор (8.16), имея порядок аппроксимации

$$O(\Delta t^2, h_x, h_y),$$

является более точной по сравнению со схемой расщепления (8.12).

Каждая из подсхем в схеме предиктор-корректор (8.16) решается с помощью соответствующего рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1/4} &= \frac{u_{j,k}^n + v_1 \frac{\Delta t}{2h_x} u_{j-1,k}^{n+1/4}}{1 + v_1 \frac{\Delta t}{2h_x}}; & u_{j,k}^{n+1/2} &= \frac{u_{j,k}^{n+1/4} + v_2 \frac{\Delta t}{2h_y} u_{j,k-1}^{n+1/2}}{1 + v_2 \frac{\Delta t}{2h_y}}; \\ u_{j,k}^{n+1} &= u_{j,k}^n - v_1 \frac{\Delta t}{h_x} (u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}) - v_2 \frac{\Delta t}{h_y} (u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}) + \Delta t f_{jk}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

2. Неявные разностные схемы

2.7. Алгоритм решения с использованием схемы предиктор-корректор

Приведём алгоритм решения (в виде блок-схемы) схемы предиктор-корректор (8.16), являющейся интерпретацией неявной разностной схемы (8.8), аппроксимирующей двумерное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (8.1).

Задание начальных условий:
цикл по $j = 1, \dots, N_x$; цикл по $k = 1, \dots, N_y$:

$$u_{j,k}^0 = \xi(x_j, y_k)$$

$n = 0$

$n > N$

Да

Конец

Нет

Цикл по $k = 1, \dots, N_y$: $u_{1,k}^{n+1/4} = \varphi(t^{n+1/4}, y_k)$

Цикл по $k = 2, \dots, N_y$; цикл по $j = 2, \dots, N_x$:

$$u_{j,k}^{n+1/4} = \frac{u_{j,k}^n + v_1 \frac{\Delta t}{2h_x} u_{j-1,k}^{n+1/4}}{1 + v_1 \frac{\Delta t}{2h_x}}$$

Цикл по $j = 1, \dots, N_x$: $u_{j,1}^{n+1/2} = \psi(t^{n+1/2}, x_j)$

Цикл по $j = 2, \dots, N_x$; цикл по $k = 2, \dots, N_y$:

$$u_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^{n+1/4} + v_2 \frac{\Delta t}{2h_y} u_{j,k-1}^{n+1/4}}{1 + v_2 \frac{\Delta t}{2h_y}}$$

Цикл по $k = 2, \dots, N_y$: $u_{1,k}^{n+1/2} = \varphi(t^{n+1/2}, y_k)$

Цикл по $j = 2, \dots, N_x$; цикл по $k = 2, \dots, N_y$:

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n - v_1 \frac{\Delta t}{h_x} (u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}) - v_2 \frac{\Delta t}{h_y} (u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}) + \Delta t f_{jk}^{n+1/2};$$

определение $u_{1,k}^{n+1}, u_{j,1}^{n+1}$ из граничных условий.

$n = n + 1$

3. Сравнительная характеристика изученных разностных схем

Приведём сравнительную характеристику разностных схем, аппроксимирующих двумерное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f(t, x, y).$$

Для определённости рассмотрим случай $v_1 > 0$, $v_2 > 0$.

1. Явная разностная схема

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y} = f_{jk}^n.$$

- Имеет порядок аппроксимации $O(\Delta t, h_x, h_y)$.
- Условно устойчива $v_1 \frac{\Delta t}{h_x} + v_2 \frac{\Delta t}{h_y} \leq 1$.
- Решается с помощью рекуррентного соотношения (8.7).

2. Схема расщепления

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} = f_{jk}^n; \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} = 0.$$

- Имеет порядок аппроксимации $O(\Delta t, h_x, h_y)$.
- Абсолютно устойчива.
- Решается с помощью рекуррентных соотношений (8.13).

3. Схема переменных направлений

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \frac{v_1}{2} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{v_2}{2} \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y} = 0;$$
$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{v_1}{2} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{v_2}{2} \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} = f_{jk}^{n+1/2}.$$

- Имеет порядок аппроксимации $O(\Delta t^2, h_x, h_y)$.
- Абсолютно устойчива.
- Решается с помощью рекуррентных соотношений (8.15).

4. Схема предиктор-корректор

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^n}{\Delta t/2} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j-1,k}^{n+1/4}}{h_x} = 0; \quad \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/4}}{\Delta t/2} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y} = 0;$$
$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y} = f_{jk}^{n+1/2}.$$

- Имеет порядок аппроксимации $O(\Delta t^2, h_x, h_y)$.
- Абсолютно устойчива.

- Решается с помощью рекуррентных соотношений (8.17).

Напомним, что в случае $v_1 < 0$ для аппроксимации производной по координате x следует использовать правую конечную разность и для реализации расчётного алгоритма задать правое граничное условие по x ; в случае $v_2 < 0$ для аппроксимации производной по координате y следует использовать правую конечную разность и для реализации расчётного алгоритма задать правое граничное условие по y . Поэтому в случае $v_1 < 0$ и(или) $v_2 < 0$ вид рекуррентных соотношений изменится и для их расчёта потребуется задать циклы в расчётных алгоритмах следующим образом:

по x - $j = N_x - 1, \dots, 1$;

по y - $k = N_y - 1, \dots, 1$.

Порядок аппроксимации и устойчивость перечисленных разностных схем при этом останутся таким же.

4. Решение дифференциальных уравнений параболического типа, содержащих первые производные по координатам

4.1. Общие правила

В разделе "Примеры математических моделей, содержащих дифференциальные уравнения в частных производных" мы рассматривали математическую модель трубчатого реактора с продольным и поперечным перемешиванием, в котором протекает простая необратимая реакция. Баланс по концентрации исходного реагента для нестационарного режима имеет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_R \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{D_R}{r} \frac{\partial c}{\partial r} - k c,$$

где k – константа скорости химической реакции; c – концентрация исходного реагента; r – координата по радиусу реактора; x – координата по длине реактора; v – линейная скорость потока; D_L , D_R – коэффициенты диффузии в продольном и поперечном направлениях.

Данное уравнение относится к двумерным дифференциальным уравнениям параболического типа. В то же время оно содержит производные первого порядка по координатам x и r . Методы численного решения подобных уравнений аналогичны методам, рассмотренным нами при изучении двумерных дифференциальных уравнений параболического типа, не содержащих производных первого порядка по координатам. Однако эта аналогия будет выполняться только при правильном выборе конечных разностей для аппроксимации первых производных по координатам.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} = \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k u + f(t, x, y), \quad v_1 > 0, \quad v_2 < 0, \quad k \geq 0, \quad \sigma > 0,$$

для которого запишем схему расщепления, соблюдая правило выбора конечных разностей для аппроксимации производных $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} &= \sigma \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - 2u_{j,k}^{n+1/2} + u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x^2} - k u_{j,k}^{n+1/2} + f_{j,k}^n, \\ \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + v_2 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y} &= \sigma \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y^2}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Каждая из подсхем является абсолютно устойчивой и решается с помощью метода прогонки. Коэффициенты, соответствующие уравнению (4.10), имеют вид:

- для первой подсхемы

$$\begin{aligned} a_j &= -\sigma \frac{\Delta t}{h_x^2}, & b_j &= 1 + v_1 \frac{\Delta t}{h_x} + 2\sigma \frac{\Delta t}{h_x^2} + k \Delta t, \\ c_j &= -v_1 \frac{\Delta t}{h_x} - \sigma \frac{\Delta t}{h_x^2}, & \xi_{j,k}^n &= u_{j,k}^n + \Delta t f_{j,k}^n; \end{aligned}$$

- для второй подсхемы

$$\tilde{a}_k = v_2 \frac{\Delta t}{h_y} - \sigma \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{b}_k = 1 - v_2 \frac{\Delta t}{h_y} + 2\sigma \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{c}_k = -\sigma \frac{\Delta t}{h_y^2}, \quad \tilde{\xi}_{j,k}^{n+1/2} = u_{j,k}^{n+1/2}.$$

Легко видеть, что для обеих подсхем достаточное условие сходимости прогонки (4.16) выполняется. Алгоритм решения разностной схемы (8.18) такой же, как и при отсутствии первых производных по координатам x и y в исходном дифференциальном уравнении (см. раздел 7.6.3).

4. Дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие первые производные по координатам

4.2. Частные случаи

Рассмотрим двумерное дифференциальное уравнение параболического типа, в котором отсутствует производная второго порядка по одной из координат:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k u + f(t, x, y); \quad v_1 > 0, \quad v_2 > 0, \quad k \geq 0, \quad \sigma > 0. \quad (8.19)$$

Схема расщепления для уравнения (8.19) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + v_1 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} &= -k u_{j,k}^{n+1/2} + f_{j,k}^n, \\ \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + v_2 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} &= \sigma \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y^2}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Первая подсхема в схеме (8.20) является аналогом неявной разностной схемы для одномерного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка; она абсолютно устойчива и решается с помощью рекуррентного соотношения:

$$u_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^n + v_1 \frac{\Delta t}{h_x} u_{j-1,k}^{n+1/2} + \Delta t f_{j,k}^n}{1 + v_1 \frac{\Delta t}{h_x} + k \Delta t}.$$

Вторая подсхема в схеме (8.20) является аналогом неявной разностной схемы для одномерного дифференциального уравнения параболического типа; она также абсолютно устойчива, но решается с помощью метода прогонки. Данное обстоятельство должно быть учтено при составлении алгоритма решения схемы расщепления (8.20), аппроксимирующей уравнение (8.19).

Запишем для уравнения (8.19) схему переменных направлений:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \frac{v_1}{2} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{v_2}{2} \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y} &= \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{h_y^2}, \\ \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{v_1}{2} \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{v_2}{2} \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} &= \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y^2} - \\ &\quad - k u_{j,k}^{n+1/2} + f_{j,k}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что отсутствие в уравнении (8.19) второй производной по координате x не оказывает влияния на методику аппроксимации второй производной по координате y .

Как и в случае схемы расщепления (8.20), обе подсхемы абсолютно устойчивы; первая подсхема решается с помощью рекуррентного соотношения:

$$u_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^n + \frac{v_1}{2} \frac{\Delta t}{h_x} u_{j-1,k}^{n+1/2} - \frac{v_2}{2} \frac{\Delta t}{h_y} (u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n) + \frac{\sigma}{2} \frac{\Delta t}{h_y^2} (u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n)}{1 + \frac{v_1}{2} \frac{\Delta t}{h_x}},$$

вторая подсьема — с помощью метода прогонки.

Задания для самоконтроля

1. Из представленных ниже явных разностных схем, аппроксимирующих дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 3 \frac{\partial u}{\partial y} + t$$

выберите ту, которая записана в соответствии с правилом выбора конечных разностей для аппроксимации производных первого порядка по координатам x и y .

◊ А.	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + 2 \frac{u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n}{h_x} = 3 \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y} + \Delta t n$
◊ Б.	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + 2 \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j,k}^n}{h_x} = 3 \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k}^n}{h_y} + \Delta t n$
◊ В.	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + 2 \frac{u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n}{h_x} - 3 \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k}^n}{h_y} = \Delta t n$
◊ Г.	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + 2 \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j,k}^n}{h_x} - 3 \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y} = \Delta t n$
◊ Д.	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + 2 \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n}{2h_x} - 3 \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n}{2h_y} = \Delta t n$
◊ Е.	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + 2 \frac{u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n}{h_x} = 3 \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n}{2h_y} + \Delta t n$

2. Определите, какое из представленных ниже условий обеспечит устойчивость явной разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение из задания № 1, если

$$h_x = h_y = 0,1.$$

◊ А.	$\Delta t \leq \frac{1}{10} = 0,1$	◊ Г.	$\Delta t \leq \frac{1}{50} = 0,02$
◊ Б.	$\Delta t \leq \frac{1}{20} = 0,05$	◊ Д.	$\Delta t \leq \frac{1}{60} \approx 0,017$
◊ В.	$\Delta t \leq \frac{1}{30} \approx 0,033$	◊ Е.	$\Delta t \leq \frac{1}{100} = 0,01$

3. Выберите из представленных ниже разностных соотношений те, которые составляют схему расщепления, аппроксимирующую дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} + 7 \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

и записанную в соответствии с правилом выбора конечных разностей для аппроксимации производных первого порядка по координатам x и y .

◊ А.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} - 5 \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j,k}^n}{h_x} = 0;$	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + 7 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} = 0.$
◊ Б.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} - 5 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_x} = 0;$	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + 7 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y} = 0.$
◊ В.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} - 5 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} = 0;$	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + 7 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y} = 0.$
◊ Г.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} - 5 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_x} = 0;$	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + 7 \frac{u_{j-1,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y} = 0.$
◊ Д.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} - 5 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_x} = 0;$	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + 7 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y} = 0.$
◊ Е.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} - 5 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_x} = 0;$	$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + 7 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} = 0.$

4. Выберите граничные условия, которые необходимы для численного решения дифференциального уравнения из задания № 3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} + 7 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

$$< > u(t, x = 0, y) = \varphi_1(t, y)$$

$$< > u(t, x, y = 0) = \varphi_2(t, y)$$

$$< > u(t, x = 1, y) = \psi_1(t, y)$$

$$< > u(t, x, y = 1) = \psi_2(t, y)$$

5. Выберите из представленных ниже разностных соотношений те, которые составляют схему предиктор-корректор, аппроксимирующую дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} - 9u,$$

и записанную в соответствии с правилом выбора конечных разностей для аппроксимации производных первого порядка по координатам x и y .

◇ А.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j-1,k}^{n+1/4}}{h_x}, \quad \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/4}}{\Delta t} = 8 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y},$ $\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + 8 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_y} - 9u_{j,k}^{n+1/2}.$
◇ Б.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^n}{\Delta t/2} = 3 \frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j-1,k}^{n+1/4}}{h_x}, \quad \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/4}}{\Delta t/2} = 8 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y},$ $\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x} + 8 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_y} - 9u_{j,k}^{n+1/2}.$
◇ В.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^n}{\Delta t/2} = 3 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^{n+1/4}}{h_x}, \quad \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/4}}{\Delta t/2} = 8 \frac{u_{j,k+1}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_y},$ $\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_x} + 8 \frac{u_{j,k+1}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_y} - 9u_{j,k}^{n+1/2}.$
◇ Г.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^n}{\Delta t/2} = 3 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^{n+1/4}}{h_x} - 9u_{j,k}^{n+1/4}, \quad \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/4}}{\Delta t/2} = 8 \frac{u_{j,k+1}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_y},$ $\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_x} + 8 \frac{u_{j,k+1}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_y} - 9u_{j,k}^{n+1/4}.$
◇ Д.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^n}{\Delta t/2} = 3 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^{n+1/4}}{h_x}, \quad \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/4}}{\Delta t/2} = 8 \frac{u_{j,k+1}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_y},$ $\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_x} + 8 \frac{u_{j,k+1}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_y} - 9u_{j,k}^{n+1/2}.$
◇ Е.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^n}{\Delta t/2} = 3 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/4} - u_{j,k}^{n+1/4}}{h_x}, \quad \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/4}}{\Delta t/2} = 8 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y},$ $\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_x} + 8 \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y} - 9u_{j,k}^{n+1/2}.$

6. Выберите граничные условия, которые необходимы для численного решения дифференциального уравнения из задания № 5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} + 9u, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

$$< > u(t, x = 0, y) = \varphi_1(t, y)$$

$$< > u(t, x, y = 0) = \varphi_2(t, y)$$

$$< > u(t, x = 1, y) = \psi_1(t, y)$$

$$< > u(t, x, y = 1) = \psi_2(t, y)$$

7. Выберите из представленных ниже разностных соотношений те, которые составляют схему расщепления, аппроксимирующую дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} - 13u,$$

и записанную в соответствии с правилом выбора конечной разности для аппроксимации производной первого порядка по координате y .

◇ А.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 7 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}}{h_x} - 13u_{j,k}^{n+1/2}; \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} = 6 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y}.$
◇ Б.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 7 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - 2u_{j,k}^{n+1/2} + u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x^2} - 13u_{j,k}^{n+1/2};$ $\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} = 6 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y^2}.$
◇ В.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 7 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - 2u_{j,k}^{n+1/2} + u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x^2} - 13u_{j,k}^{n+1/2}; \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} = 6 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y}.$
◇ Г.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 7 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - 2u_{j,k}^{n+1/2} + u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x^2} - 13u_{j,k}^{n+1/2}; \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} = 6 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y}.$
◇ Д.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 7 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - 2u_{j,k}^{n+1/2} + u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x^2} - 13u_{j,k}^{n+1/2}; \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} = 6 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y} - 13u_{j,k}^{n+1}.$
◇ Е.	$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 7 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - 2u_{j,k}^{n+1/2} + u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x^2} - 13u_{j,k}^n; \quad \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} = 6 \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y}.$

8. Выберите из приведённых ниже уравнений то, которое является рекуррентным соотношением для первой подсхемы схемы расщепления, аппроксимирующей дифференциальное уравнение из задания № 7.

$$\begin{array}{ll}
 \diamond \text{ А. } u_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^n + 7 \frac{\Delta t}{h_x} u_{j+1,k}^{n+1/2}}{1 + 7 \frac{\Delta t}{h_x} + 13 \Delta t} & \diamond \text{ В. } u_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^n + 7 \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{j+1,k}^{n+1/2} + 7 \frac{\Delta t}{h_x^2} u_{j-1,k}^{n+1/2}}{1 + 14 \frac{\Delta t}{h_x^2} + 13 \Delta t} \\
 \diamond \text{ Б. } u_{j,k}^{n+1/2} = \alpha_j u_{j+1,k}^{n+1/2} + \beta_j & \diamond \text{ Г. } u_{j,k}^{n+1} = \alpha_j u_{j+1,k}^{n+1} + \beta_j
 \end{array}$$

9. Выберите из приведённых ниже уравнений то, которое является рекуррентным соотношением для второй подсхемы схемы расщепления, аппроксимирующей дифференциальное уравнение из задания № 7.

$$\begin{array}{ll}
 \diamond \text{ А.} & u_{j,k}^{n+1} = \frac{u_{j,k}^{n+1/2} + 6 \frac{\Delta t}{h_y} u_{j,k+1}^{n+1}}{1 + 6 \frac{\Delta t}{h_y}} \\
 \diamond \text{ Б.} & u_{j,k}^{n+1/2} = \tilde{\alpha}_k u_{j,k+1}^{n+1/2} + \tilde{\beta}_k \\
 \diamond \text{ В.} & u_{j,k}^{n+1} = \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - 6 \frac{\Delta t}{h_y} u_{j,k-1}^{n+1}}{1 - 6 \frac{\Delta t}{h_y}} \\
 \diamond \text{ Г.} & u_{j,k}^{n+1} = \tilde{\alpha}_k u_{j,k+1}^{n+1} + \tilde{\beta}_k
 \end{array}$$

10. Выберите граничные условия, которые необходимы для численного решения дифференциального уравнения из задания № 7:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} - 13u, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

$$< > u(t, x = 0, y) = \varphi_1(t, y)$$

$$< > u(t, x, y = 0) = \varphi_2(t, y)$$

$$< > u(t, x = 1, y) = \psi_1(t, y)$$

$$< > u(t, x, y = 1) = \psi_2(t, y)$$