Домашняя работа к занятию 5

1.1 Найдите второе приближение решения задачи Коши

$$\begin{cases} y\,' = 1 + x\sin(y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

На каком интервале теорема Пикара гарантирует существование решения, если правая часть рассматривается в области $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1/2$?

1.2 Найдите второе приближение решения задачи Коши для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos y; \quad x(0) = 0 \\ \dot{y} = -\sin x; \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

На каком интервале теорема Пикара гарантирует существование решения, если $|t| \leqslant 10$, $|x| \leqslant 2$, $|y| \leqslant 1$?

1.3 Найдите второе приближение решения задачи Коши

$$\begin{cases} y''' = (y'')^2 + y \\ y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = 0 \end{cases}$$

2.1 Найдите интегральную линию уравнения $x^2y\,'\sin y = xy\,' - y$, проходящую через точку $(\pi/2; \pi/2)$. Покажите, что непродолжаемое решение задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями $y(\pi/2) = \pi/2$ определено на интервале $(\frac{1}{\sin\tau}; +\infty)$, где τ — корень уравнения $\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} = \tau$ на интервале $(0; \pi)$.

3.1 Доказать, что если $f(x)$ — четная непрерывная функция, то решение задачи Коши $\begin{cases} y'' + f(x)y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = a \end{cases}$ является нечетной функцией.

3.2 При каких значениях y_0 решение задачи Коши $\begin{cases} y' = y^2\cos x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ определено при всех x? Какой интервал существования решения гарантирует теорема Пикара, если $y_0 = 1/2$, $|x| \leqslant a$ и $|y - 1/2| \leqslant 1$?

Ответы и указания

1.1 $y^{[2]} = x + \dfrac{1-\cos x^2}{2}$; $h = 1/4$

1.2 $x^{[2]} = t$, $y^{[2]} = 1 - \cos t$; $h = 1$

1.3 $y^{[4]} = x + \dfrac{1}{24}x^4$

2.1 Поделив обе части уравнения на x^2, легко привести его к виду $\left(\frac{y}{x} + \cos y\right)' = 0$. Отсюда общий интеграл $\frac{y}{x} + \cos y = C$, или $x = \dfrac{y}{C - \cos y}$.

Из условия $y(\pi/2) = \pi/2$ получаем, что $C = 1$, то есть $x = \dfrac{y}{1-\cos y}$, где $y \in (0;\pi)$. На всем этом интервале x остается положительным, причем $x \to +\infty$ при $y \to 0$ и $y \to \pi$. Следовательно, функция $x(y)$ имеет положительный минимум на этом интервале.

Разрешим исходное дифференциальное уравнение относительно производной: $y' = \dfrac{y}{x - x^2 \sin y}$. Условия теоремы Пикара нарушаются в тех точках кривой $x = \dfrac{y}{1-\cos y}$, в которых $x - x^2\sin y = 0$, то есть $x = \dfrac{1}{\sin y}$. Отсюда $\dfrac{1-\cos y}{y} = \sin y$, то есть $y = \operatorname{tg}\dfrac{y}{2}$. Учитывая выпуклость функции $\operatorname{tg} t$, легко показать, что это уравнение имеет единственное решение на интервале $(0;\pi)$.

3.1 *Указание*: Покажите, что если функция $\varphi(x)$ является решением задачи Коши $\begin{cases} y'' + f(x)y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = a \end{cases}$, то функция $\psi(x) = -\varphi(-x)$ удовлетворяет тому же уравнению и тем же начальным условиям, что и функция $\varphi(x)$. Далее воспользуйтесь единственностью решения задачи Коши.

3.2 Решение задачи Коши определено при всех x, если $|y_0| < 1$. Теорема Пикара гарантирует существование решения с начальными данными $y_0 = 1/2$ на интервале $|x| < h$, где $h = \min\{a; 4/9\}$, хотя непродолжаемое решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_0 = 1/2$, определено при всех x.