МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

И.А. Долгунцева, А.П. Ульянов

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

(Учебное пособие)

Новосибирск
2010

В настоящем учебном пособии приведены основные понятия, теоремы и методы решения задач аналитический геометрии и линейной алгебры, соответствующим программе курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» по направлению «Физика» Новосибирского государственного университета.

В каждом разделе кратко изложены основные теоретические сведения и приведены типы решения задач.

Цель пособия — обеспечить помощь при самостоятельном освоении данного курса, а также при подготовке к семинарским занятиям по данному курсу студентам и начинающим преподавателям.

Авторы
И. А. Долгунцева, к. ф.-м. н., А. П. Ульянов

Учебное пособие «Практикум по аналитической геометрии и линейной алгебре» подготовлено в рамках реализации «Программы развития НИУ — НГУ на 2009–2018 годы», а также при финансовой поддержке Совета по Грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1).

Содержание

1. Векторная алгебра

Скалярное произведение	
Определение скалярного произведения двух векторов	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert\cdot\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$
Скалярное произведение в декарторых координатах	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
Скалярный квадрат	$\mathbf{a}^2 = \lvert\mathbf{a}\rvert^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
Свойства: 1) коммутативность (переместительное) 2) ассоциативность (сочетательное) относительно скалярного множителя λ 3) дистрибутивность (распределительное)	 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})$ $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
Условие ортогональности двух векторов	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$
Приложения: 1) угол между векторами 2) (векторная) проекция вектора **a** на вектор **b**	 $\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert}$ $pr_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}$
Векторное произведение	
Определение векторного произведения двух векторов	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}$, такой что: 1) $\lvert\mathbf{c}\rvert = \lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$, 2) $\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\perp\mathbf{b}$, 3) $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ — правая тройка векторов.
Векторное произведение в декартовых координатах	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_1 & b_1 \\ \mathbf{j} & a_2 & b_2 \\ \mathbf{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$
Свойства: 1) антикоммутативность (антипереместительное) 2) ассоциативность (сочетательное) относительного скалярного множителя λ 3) дистрибутивность (распределительное)	 $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{a} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$ $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$

	$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$
Условие коллинеарности двух ненулевых векторов	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\iff\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}$
Тождество Лагранжа ("БАЦ минус ЦАБ")	$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$
Приложение: 1) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$	$S_{\mathbf{ab}}=\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$
Смешанное произведение	
Определение смешанного произведения трёх векторов	$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$
Смешанное произведение в декартовых координатах	$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_3\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$
Свойства: 1) изменение знака при перестановке двух сомножителей 2) не меняет знак при циклической перестановке множителей 3) векторы $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ образуют: - правую тройку, если - левую тройку, если	$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=-(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b})=-(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a})=-(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})$ $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})=(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b})$ $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})>0$ $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})<0$
Условие компланарности трёх векторов	$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0\iff\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ — компланарны
Приложение: Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$	$V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}=\|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\|$

Пример 1 *Даны радиус-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ точек A и B. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки C, делящей вектор $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ.*

► По правилу сложения векторов $\overrightarrow{OC}$ можно представить как сумму $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$, где $\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}$. Так как $\dfrac{AC}{CB}=\lambda$, то $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{AC}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$. Далее замечаем, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Теперь, подставляя все значения в выражение $\overrightarrow{OC}$, получаем:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OB}-\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{r}_1+\frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{r}_2.$$ ◄

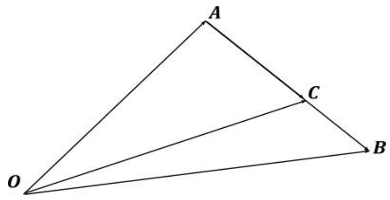

Рис. 1

Пример 2 *Длины единичных векторов аффинной системы координат суть соответственно* $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = \sqrt{3}$, *а угол между ними* $\omega = \frac{5\pi}{6}$. *Относительно этой системы координат даны два вектора* $\mathbf{a} = [1, 2]$, $\mathbf{b} = [2, 2]$. *Найти угол между этими векторами.*

▶ По свойствам скалярного произведения

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \cdot (2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1^2 + 6\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_2^2.$$

Так как длина $|\mathbf{e}_1| = 2$, то $\mathbf{e}_1^2 = 4$; $|\mathbf{e}_2| = \sqrt{3}$, то $\mathbf{e}_2^2 = 3$. Скалярное произведение базисных векторов найдем по определению:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = |\mathbf{e}_1| \cdot |\mathbf{e}_2| \cos\omega = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -3.$$

Подставляем найденные значения в $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 4 - 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 2.$$ ◀

Пример 3 *Даны два вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$. *Найти вектор* $\mathbf{c}$, *являющийся:*

(a) ортогональной проекцией вектора $\mathbf{b}$ *на вектор* $\mathbf{a}$;

(b) ортогональной проекцией вектора $\mathbf{a}$ *на плоскость, перпендикулярную к вектору* $\mathbf{b}$.

▶ (a) Найдем векторную проекцию $\mathbf{b}$ на $\mathbf{a}$. Она равна

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}.$$

(b) Для того, чтобы найти ортогональную проекцию $\mathbf{a}$ на плоскость с нормалью $\mathbf{b}$ нужно найти проекцию $\mathbf{a}$ на вектор номали $\mathbf{b}$, а затем вычесть и $\mathbf{a}$ найденную ортогональную проекицю. Полученный вектор является проекцией на плоскость.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\mathbf{b}.$$

Другой способ решения состоит в векторном умножении вектора $\mathbf{a}$ дважды на единичный вектор, коллинеарный $\mathbf{b}$, т.е. на $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$. Вычисляя первый раз векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{e}$ получим вектор, перпендикулярный $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. лежащий в плоскости, нормалью к которой является $\mathbf{b}$. Умножая это произведение еще раз на вектор $\mathbf{e}$: $(\mathbf{a} \times \mathbf{e}) \times \mathbf{e}$, получим вектор, лежащий с $\mathbf{a}$ в одной плоскости и имеющий длину, равную длине проекции $\mathbf{a}$ на плоскость. ◀

Пример 4 *Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{a} = [8, 4, 1]$, $\mathbf{b} = [2, -2, 1]$.

▶ Площадь параллелограмма, построенного на данных, векторах равна модулю векторного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 8 & 2 \\ \mathbf{j} & 4 & -2 \\ \mathbf{k} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} - 6j - 24\mathbf{k} \Longrightarrow$$

$$S = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-24)^2} = 12\sqrt{6}$$

◀

2. Прямые и плоскости

Основные способы задания прямых и плоскостей. В таблице номера уравнений соответствуют названиям:
1) — общее уравнение;
2) — нормальное уравнение;
3) — параметрическое уравнение;
4) — уравнение по точкам.

Прямая		*Плоскость*
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$
(1) $Ax+By+C=0$	$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$	$Ax+By+Cz+D=0$
(2) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0$	$\begin{cases} (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0 \\ (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{m}=0 \end{cases}$	$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0$
(3) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t+\mathbf{w}s$
(4) $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$	$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$
Обозначения:		

– вектор нормали		
$\mathbf{n} = [A, B]$	$\mathbf{n} = [A, B, C]$, $\mathbf{m} = [A_1, B_1, C_1]$	$\mathbf{n} = [A, B, C]$
– заданная точка		
$\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0]$ $\mathbf{r}_1 = [x_1, y_1]$	$\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$, $\mathbf{r}_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $\mathbf{r}_2 = [x_2, y_2, z_2]$	$\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ $\mathbf{r}_1 = [x_1, y_1, z_1]$
– произвольная точка		
$\mathbf{r} = [x, y]$	$\mathbf{r} = [x, y, z]$	$\mathbf{r} = [x, y, z]$
– направляющий вектор		
$\mathbf{v}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$

Переход от одного способа задания к другому. Часто в задачах требуется по одному уравнению прямой или плоскости найти другое уравнение. Следующая таблица иллюстрирует способы перехода от одного уравнения к другому.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">По</th><th colspan="4">Ищем</th></tr>
<tr><th>(1)</th><th>(2)</th><th>(3)</th><th>(4)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">(1)</td><td>Пр. $\mathbb{R}^2$</td><td rowspan="3">Общее</td><td rowspan="3">Списать $\mathbf{n}$, подобрать $\mathbf{r}_0$</td><td rowspan="3">Решить уравнение, систему уравнений</td><td rowspan="3">Пройти через параметры</td></tr>
<tr><td>Пр. $\mathbb{R}^3$</td></tr>
<tr><td>Пл. $\mathbb{R}^3$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(2)</td><td>Пр. $\mathbb{R}^2$</td><td rowspan="3">Раскрыть скобки</td><td rowspan="3">Нормальное</td><td>$\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$</td><td rowspan="3">Пройти через параметры</td></tr>
<tr><td>Пр. $\mathbb{R}^3$</td><td>$\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}$</td></tr>
<tr><td>Пл. $\mathbb{R}^3$</td><td>$\mathbf{v}, \mathbf{w} \perp \mathbf{n}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(3)</td><td>Пр. $\mathbb{R}^2$</td><td rowspan="3">Пройти через нормальное</td><td>$\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$</td><td rowspan="3">Параметрическое</td><td rowspan="3">Подставить значение параметров</td></tr>
<tr><td>Пр. $\mathbb{R}^3$</td><td>$\mathbf{m}, \mathbf{n} \perp \mathbf{v}$</td></tr>
<tr><td>Пл. $\mathbb{R}^3$</td><td>$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(4)</td><td>Пр. $\mathbb{R}^2$</td><td rowspan="3">Раскрыть все</td><td rowspan="3">Пройти через параметры</td><td>$\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$</td><td rowspan="3">По точкам</td></tr>
<tr><td>Пр. $\mathbb{R}^3$</td><td>$\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$</td></tr>
<tr><td>Пл. $\mathbb{R}^3$</td><td>$\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{w} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0$</td></tr>
</table>

Пример 5 *Составить общее, нормальное, параметрическое и по точкам уравнения прямой, проходящей через точки с координатами* $(1, 3)$ *и* $(2, 4)$.

► Так как даны две точки на прямой, то сразу записываем уравнение прямой по точкам:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{4-3} \Longleftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1}.$$

Из этого уравнения легко выводится параметрическое уравнение. Для этого достаточно заметить, что знаменатели дробей являются координатами направляющего вектора прямой $\mathbf{v}_1 = [1, 1]$. Записываем параметрические уравнения:

$$x = 1 + t,\ y = 3 + t.$$

Другой способ состоит в приравнивании каждой дроби в уравнении по точкам к параметру t:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = t \Longrightarrow \frac{x-1}{1} = t \text{ и } \frac{y-3}{1} = t \Longrightarrow x = 1 + t,\ y = 3 + t.$$

Для известного направляющего вектора угадываем нормаль к прямой: какой-нибудь вектор $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$, например, $\mathbf{n} = [-1, 1]$. Тогда нормальное уравнение прямой имеет вид

$$[-1, 1] \cdot [x-1, y-3] = 0.$$

Вычисляя скалярное произведение, получаем общее уравнение прямой

$$x - y + 2 = 0. \qquad ◄$$

Пример 6 *Дан треугольник ABC: $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$ и $C(6, -5)$. Составьте уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A.*

► Искомая прямая проходит через точку A и середину стороны BC. Сле-

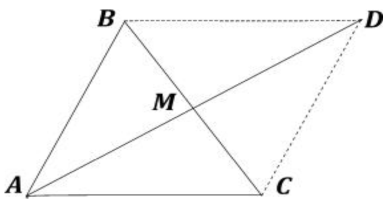

Рис. 1

довательно, она содержит диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Поэтому рассмотрим их сумму $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ в качестве направляющего вектора прямой, содержащей медиану. Найдем его координаты:

$$\overrightarrow{AB} = [4-(-2), 1-3] = [6,-2],$$
$$\overrightarrow{AC} = [4-6, 1-(-5)] = [-2,6]$$
$$\mathbf{v} = [6-2, -2+6] = [4,4].$$

В качестве направляющего вектора можно взять любой другой, коллинеарный данному. Пусть это будет $[1,1]$. Можно составить параметрические уравнения прямой: $x = -2+t,\ y = 3+t$. ◀

3. Взаимное расположение прямых и плоскостей

Всюду далее $\Delta\mathbf{r}$ обозначает $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Взаимное расположение прямых $l_1\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 t_2$.

Расположение:	Условие:
1) Скрещиваются	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \Delta\mathbf{r}) \neq 0$
2) Пересекаются	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \Delta\mathbf{r}) = 0$ и $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$
3) Параллельны	$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v}_1 \times \Delta\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$
4) Совпадают	$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v}_1 \times \Delta\mathbf{r} = \mathbf{0}$

Взаимное расположение плоскостей $\alpha_1\colon \mathbf{n}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0$ и $\alpha_2\colon \mathbf{n}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r} - 2) = 0$.

Расположение:	Условие:
1) Пересекаются	$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$
2) Параллельны	$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{n}_1 \cdot \Delta\mathbf{r} \neq 0$
3) Совпадают	$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{n}_1 \cdot \Delta\mathbf{r} = 0$

Взаимное расположение прямой $l_1\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t$ и **плоскости** $\mathbf{n}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0$.

Расположение:	Условие
1) Пересекаются	$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \neq 0$
2) Параллельны	$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ и $\Delta\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \neq 0$
3) Прямая лежит в плоскости	$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ и $\Delta\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$

Расстояния.

От	**До**			
	точки $\mathbf{r}_2$	прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 t$ в $\mathbb{R}^2$	прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 t$ в $\mathbb{R}^3$	плоскости $\mathbf{n}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0$ в $\mathbb{R}^3$
точки $\mathbf{r}_1$	$\Vert\Delta\mathbf{r}\Vert$	$\dfrac{\Vert\mathbf{v}_2 \times \Delta\mathbf{r}\Vert}{\Vert\mathbf{r}_2\Vert}$	$\dfrac{\Vert\mathbf{v}_2 \times \Delta\mathbf{r}\Vert}{\Vert\mathbf{r}_2\Vert}$	$\dfrac{\vert\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_2\vert}{\Vert\mathbf{n}_2\Vert}$
прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t$ в $\mathbb{R}^2$		$\dfrac{\Vert\mathbf{v}_2 \times \Delta\mathbf{r}\Vert}{\Vert\mathbf{r}_2\Vert}$ 0, если $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$	*	*
прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t$ в $\mathbb{R}^3$			$\dfrac{\vert(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \Delta\mathbf{r}\vert}{\Vert\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\Vert}$	$\dfrac{\vert\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_2\vert}{\Vert\mathbf{n}_2\Vert}$
плоскости $\mathbf{n}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0$ в $\mathbb{R}^3$				$\dfrac{\vert\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_2\vert}{\Vert\mathbf{n}_2\Vert}$

Полезные формулы.

Наименование	Определения и формулы
Угол между прямыми l_1 и l_2, заданных уравнениями: 1) $l_1 \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t$ и $l_2 \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 t$ 2) $l_1 \colon \mathbf{n}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0$ и $l_2 \colon \mathbf{n}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0$	$= \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, $= \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$.
Угол между прямой l и плоскостью α, заданных уравнениями: 1) $l \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t$ и $\alpha \colon \mathbf{m}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0$ 2) $l \colon \mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0$ и $\alpha \colon \mathbf{m}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0$	$= \frac{\pi}{2} - \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{m})$, $= \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{m})$.
Угол между плокостями α_1 и α_2, заданных уравнениями $\alpha_1 \colon \mathbf{m}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0$ и $\alpha_2 \colon \mathbf{m}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0$	$= \angle(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$.
Проекция точки $\mathbf{r}_1$ на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 t$	$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_2 - \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \Delta\mathbf{r}}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$, где $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$
Проекция точки $\mathbf{r}_1$ на плоскость $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0$	$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_1 + \dfrac{\mathbf{n}_2 \cdot \Delta\mathbf{r}}{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2}\mathbf{n}_2$, где $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

Уравнения общего перпендикуляра скрещивающихся прямых $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t_1$ *и* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 t_2$	$\begin{cases} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0, \\ (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0. \end{cases}$
Основания общего перпендикуляра скрещивающихся прямых $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 t_2$	$t_1 = \frac{(\Delta\mathbf{r} \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}$, $t_2 = -\frac{(\mathbf{v}_1 \times \Delta\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}$

Пример 7 *Определите взаимное расположение прямых:*

(a) $x = 1 + 2t,\ y = 2 - 2t,\ z = -t$ *и* $x = -2t,\ y = -5 + 3t, z = 4$*;*

(b) $x = 9t,\ y = 5t,\ z = -3 + t$ *и* $2x - 3y - 3z - 9 = 0,\ x - 2y + z + 3 = 0.$

► Исследование взаимного расположения прямых проведем по схеме. Выясняем взаимное расположение направляющих векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Если $\mathbf{v}_1 || \mathbf{v}_2$, то далее исследуем на параллельность/совпадение, иначе — пересечение/скрещивание.

(a) Итак, с уравнений прямых находим $\mathbf{v}_1 = [2, -2, -1]$, $\mathbf{v}_2 = [-2, 3, 0]$, $\mathbf{r}_1 = [1, 2, 0]$, $\mathbf{r}_2 = [0, -5, 4]$, $\Delta\mathbf{r} = [1, 7, -4]$.

Вычисляем $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = [3, 2, 2] \neq \mathbf{0}$, следовательно, прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Вычислим $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \Delta\mathbf{r} = 9 \neq 0$, поэтому прямые скрещиваются.

(b) Для решения второй задачи найдем направляющие векторы и какие-нибудь точки на данных прямых. Находим направляющий вектор первой прямой $\mathbf{v}_1 = [9, 5, 1]$ и точку на ней $\mathbf{r}_1 = [0, 0, -3]$.

Так как вторая прямая задана как линия пересечения двух плокостей, то ее направляющим вектором будет векторное произведение векторов нормалей к плоскостям: $\mathbf{n}_1 = [2, -3, -3]$, $\mathbf{n}_2 = [1, -2, 1]$, следовательно, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = [-9, -5, -1]$. Видим, что $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ коллинеарны, следовательно, прямые либо параллельны либо совпадают.

В общем случае для того, чтобы найти точку на прямой, решаем систему уравнений, подставляя вместо одной из переменных какое-нибудь достаточно «хорошее» число. В данной задаче замечаем, что точка $\mathbf{r}_1 = [0, 0, -3]$ удовлетворяет уравнению второй прямой. Поэтому эти прямые совпадают. ◄

Пример 8 *Для прямых* $x = 3 + t,\ y = 1 - t,\ z = 2 + 2t$ *и* $x = -t,\ y = 2 + 3t,\ z = 3t$ *найдите:*

(a) кратчайшее расстояние между ними;

(b) уравнение общего перпендикуляра к ним.

► Списываем необходимые векторы с уравнений этих прямых:

$$\mathbf{r}_1 = [3, 1, 2], \quad , \mathbf{r}_2 = [0, 2, 0], \quad \mathbf{v}_1 = [1, -1, 2], \quad \mathbf{v}_2 = [-1, 3, 3].$$

Расстояние между прямыми вычисляем по формуле:

$$d = \frac{|(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \Delta\mathbf{r}|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|} = \frac{18}{\sqrt{110}}.$$

Уравнение общего перпендикуляра можно получить как линию пересечения плоскостей, содержащих каждую из данных прямых и общих перпендикуляр.

Находим направляющий вектор общего перпендикуляра $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = [-9, -5, 2]$.

Составляем уравнения плоскостей, содержащих общий перпендикуляр:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \Longrightarrow 4x - 10y - 7z - 12 = 0,$$
$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0 \Longrightarrow 21x - 25y + 32z - 50 = 0.$$

◀

4. Преобразование координат

Пусть заданы два базиса (репера): базис $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ исходной (**старой**) системы координат и базис $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \rangle$ другой (**новой**) системы координат. Каждый вектор **нового репера** имеет некоторые координаты в **старом репере**:

$$\mathbf{e}'_1 = t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + t_{31}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}'_2 = t_{12}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + t_{32}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}'_3 = t_{13}\mathbf{e}_1 + t_{23}\mathbf{e}_2 + t_{33}\mathbf{e}_3.$$

Матрицей перехода от старого репера $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ к новому реперу $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \rangle$ называется матрица T, составленная из координатных **столбцов** векторов $\mathbf{e}'_i$, $(i = 1, 2, 3)$, т.е. матрица

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода между реперами на плоскости определяется аналогично.

Если старый и новый реперы ортонормированные и одинаково ориентированные, то матрица T перехода между ними называется *матрицей поворота.* Матрица **поворота на плоскости** на угол φ имеет вид:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Формулы преобразования координат точки на плоскости и в пространстве

Преобразование		*Преобразование базисного репера с сохранием начала*	*Сдвиг начала с сохранением репера*
$\mathbb{R}^2$	В координатах	$\begin{cases} x = t_{11}x' + t_{12}y', \\ y = t_{21}x' + t_{22}y'. \end{cases}$	$\begin{cases} x = x + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases}$
	В матричной форме	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$
$\mathbb{R}^3$	В координатах	$\begin{cases} x = t_{11}x' + t_{12}y' + t_{13}z', \\ y = t_{21}x' + t_{22}y' + t_{23}z', \\ z = t_{31}x' + t_{32}y' + t_{33}z'. \end{cases}$	$\begin{cases} x = x + x_0, \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0. \end{cases}$
	В матричной форме	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

Обозначения:

$[x, y, z]$ — координаты некоторой точки M в старой системе координат (старом базисе);

$[x', y', z']$ — координаты той же точки M в новой системе координат (новом базисе);

$[x_0, y_0, z_0]$ — координаты нового начала координат O'.

Пример 9 *Даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$. По отношению к первой системе координат начало второй находится в точке $O'[-1, 3]$, единичные векторы второго репера имеют координаты $\mathbf{e}'_1 = [2, 3]$, $\mathbf{e}'_2 = [1, 1]$. Напишите выражения координат точек относительно первой системы координат через их координаты во второй системе координат.*

► Преобразование координат является последовательным выполнением двух преобразований: преобразования репера с сохранением начала координат и сдвига полученного репера в новое начало. Последовательное выполнение этих преобразований (их *композиция* или *суперпозиция*) дает искомое преобразование. При этом нет принципиальной разницы какое преобразование выполнить в первую очередь, а какое — во вторую. Поэтому найдем сначала преобразование репера, а затем перенесем его в новое начало.

Поскольку известны координаты векторов нового репера, то сразу составляем матрицу перехода:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получаем искомое преобразование:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x = 2x' + y' - 1, \\ y = 3x' + y' + 3. \end{cases}$$ ◀

Пример 10 *Новая система координат получена из старой системы координат переносом начала координат в точку $O'[3, -4]$ и поворотом на угол $\alpha = -\arccos\frac{12}{13}$. Найдите координаты точки $A[6, -2]$ в новой системе координат.*

▶ Найдем матрицу поворота репера в плоскости для данного $\alpha = -\arccos\frac{12}{13}$:

$$T = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}.$$

Тогда формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{13}(12x' + 5y') + 3, \\ y = \frac{1}{13}(-5x' + 12y') - 4. \end{cases}$$

Известны старые координаты точки $(x, y) = (6, -2)$. Поэтому для того, чтобы найти координаты (x', y') этой же точки в новой системе координат, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 6 = \frac{1}{13}(12x' + 5y') + 3, \\ -2 = \frac{1}{13}(-5x' + 12y') - 4, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{13}(12x' + 5y') = 3, \\ \frac{1}{13}(-5x' + 12y') = -2. \end{cases}$$

Откуда координаты точки A в новой системе $(x', y') = (2, 3)$. ◀

5. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Общим уравнением кривой второго порядка называется уравнение вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Удобно записывать это уравнение в матричном виде $X^{\mathsf{T}}\Delta X = 0$, где

$$\Delta = \left[\begin{array}{cc|c} A & B & E \\ B & C & D \\ \hline E & D & F \end{array}\right], \qquad \delta = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Общее уравнение кривой определяет одну из следующих линий:

(I) $|\delta| \neq 0$. К первой группе относятся линии, имеющие единственный центр симметрии:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1 \text{ — эллипс,} \\ 0 \text{ — две мнимые пересекающиеся прямые,} \\ -1 \text{ — мнимый эллипс,} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1 \text{ — гипербола,} \\ 0 \text{ — пересекающиеся прямые.} \end{cases}$$

(II) $|\delta| = 0$, $|\Delta| \neq 0$. Ко второй группе относятся линии, не имеющие центра симметрии:

$$y^2 = 2px \text{ — парабола.}$$

(III) $|\delta| = 0$, $|\Delta| = 0$. К третьей группе относятся линии, имеющие прямую центров симметрии:

$$x^2 = \begin{cases} a^2, a \neq 0 \text{ — две параллельные прямые,} \\ -a^2, a \neq 0 \text{ — две мнимые параллельные прямые,} \\ 0 \text{ — две совпавшие прямые.} \end{cases}$$

Точка (x_0, y_0) называется *центром линии* второго порядка, если ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Существует несколько способов приведения уравнение кривой к каноническому. Их принципиальное отличие состоит в том, какое преобразование проводить в первую очередь — поворот или параллельный перенос. Рассмотрим оба способа.

Метод «поворот → перенос».

Поворот. Цель применения преобразования поворота — исключить из уравнения слагаемое, содержащее произведение xy. Поэтому предположим, что коэффициент $B \neq 0$.

Исключить B из уравнения кривой можно двумя способами. В **первом случае** находят угол поворота φ, преобразование координат и эти выражения подставляют в исходное уравнение.

(1) Поворот системы координат задается системой равенств:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

где угол φ находим так:

(a) если $A \neq C$, то φ является решением уравнения:

$$2B\cos 2\varphi + (C - A)\sin 2\varphi = 0 \iff \operatorname{tg}^2\varphi + \frac{A-C}{B}\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0;$$

(b) если $A = C$, то можно повернуть на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

(2) Делаем замену координат в общем уравнении кривой. В результате приходим к уравнению

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0.$$

Коэффициенты A_1, C_1, D_1, E_1 можно вычислить непосредственно или найти по формулам:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} = T^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} T, \qquad \begin{bmatrix} D_1 & E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \cdot T,$$

где матрица T обозначает матрицу поворота.

Второй способ требует знания дополнительной теории: диагонализации симметричной матрицы, который более подробно будет рассмотрен позже.

(1) Составляем *характеристическое уравнение*

$$\det \begin{bmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

и ищем его корни — *собственные числа* λ_1 и λ_2.

(2) Находим координаты базисных (*собственных*) векторов $\mathbf{e}'_i$ как решение системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_i & B \\ B & C-\lambda_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ i = 1, 2.$$

(3) Нормируем найденные векторы и из их координат по столбцам составляем матрицу поворота T.

(4) В результате сразу записываем $A_1 = \lambda_1$ и $C_1 = \lambda_2$. Вычисляем коэффициенты D_1 и E_1 как в предыдущем варианте решения и записываем уравнение в новых координатах: $A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0$.

Параллельный перенос. Далее ход решения для первого и второго способов совпадают.

(1) (a) Если $A_1C_1 \neq 0$, то в уравнении

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0$$

присутствуют оба квадрата переменных x и y. Выделяем полные квадраты с x и y:

$$A_1(x_1 - x_0)^2 + C_1(y_1 - y_0)^2 + F_1 = 0.$$

(b) Если один из коэффициентов при квадратах равен нулю, пусть, для определенности, $A_1 = 0$, то уравнение $C_1y_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+F = 0$ приводится к виду

$$C_1(y_1 - y_0)^2 + 2E_1(x_1 - x_0) = 0.$$

(2) Переобозначаем переменные: $x_K = x_1-x_0$, $y_K = y_1-y_0$ и записываем каноническое уравнение кривой

$$A_1x_K^2 + C_1y_K^2 + F_1 = 0 \;\text{ или }\; C_1y_K^2 + 2E_1x_K = 0.$$

(3) Находим выражение старых координат через канонические:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_K + x_0 \\ y_K + y_0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{e}'_1 = [\cos\varphi, \sin\varphi]^\mathsf{T}$, $\mathbf{e}'_2 = [-\sin\varphi, \cos\varphi]^\mathsf{T}$ и $O'(x_0, y_0)$ есть векторы канонического базиса и новое начало координат.

Метод «перенос → поворот»

Если $|\delta| \neq 0$, то для упрощения преобразований можно перенести начало координат в центр линии второго порядка, т.е. выполнить **параллельный перенос**. Находим:

(a) центр линии второго порядка (x_0, y_0);

(b) сдвиг системы координат:

$$x = x_c + x_0, \quad y = y_c + y_0;$$

(c) заменяем координаты в уравнении:

$$Ax_c^2 + 2Bx_cy_c + Cy_c^2 + F_1 = 0,$$

где $F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F$.

Поворот осуществляется одним из описанных выше способов.

Если $|\delta| = 0$, то приведение кривой второго порядка к каноническому виду осуществляется по схеме «поворот $\rightarrow$ паралельный перенос».

Пример 11 *Определите вид и расположение линии второго порядка, заданной уравнением:*
(a) $7x^2 + 6xy - y^2 + 14x + 6y + 23 = 0$*;*
(b) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 16x - 2y + 6 = 0$.

► (a) **I способ.** Из уравнения

$$\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{8}{3}\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0.$$

находим тангенс угла поворота $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}$ или $\operatorname{tg}\varphi = -3$. Выберем положительное значение тангенса, соответствующее повороту системы координат против часовой стрелки. Если в результате этого преобразования изменится порядок координат, то выполним еще одно преобразование, дополнительно повернув на угол $90°$ или переименовав оси.

Итак, пусть $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3} \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Матрица поворота будет иметь вид

$$T = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix},$$

а преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x_1 - y_1), \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x_1 + 3y_1). \end{cases}$$

Подстановку найденных выражений для старых координат можно заменить вычислением нескольких произведений матриц:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} D_1 & E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 24 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение линии в новых координатах примет вид:

$$8x_1^2 - 2y_1^2 + \frac{48}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{4}{\sqrt{10}}y_1 + 23 = 0.$$

Далее группируем слагаемые с одинаковыми переменными и дополняем до квадратов:

$$8\left(x_1^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{9}{10}\right) - \frac{72}{10} - 2\left(y_1^2 - \frac{2}{10}y_1 + \frac{1}{10}\right) + \frac{2}{10} + 28 = 0;$$

$$8\left(x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 2\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + 16 = 0.$$

Вводим новые координаты $x_2 = x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}$, $y_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}$. В результате получаем «почти каноническое» уравнение гиперболы:

$$8x_2^2 - 2y_2^2 = -16.$$

Для того, чтобы его окончательно привести к каноническому виду, переименуем координатные оси: $x_K = y_2$, $y_K = x_2$, и разделим обе его части на -16. В результате получаем каноническое уравнение гиперболы.

$$\frac{x_K^2}{8} - \frac{y_K^2}{2} = 1.$$

Остается найти преобразование координат, приводящее к каноническому виду. Для этого нужно для всех выполненных преобразований подставить одну формулу в другую и выписать окончательные формулы:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_K - \frac{3}{\sqrt{10}} \\ x_K + \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(-x_k + 3y_K) - 1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x_K + y_K). \end{cases}$$

II способ. Составим характеристическое уравнение $\det(\delta - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

и находим его корни — собственные числа: $\lambda = -2$, $\lambda = 8$. Далее для каждого корня λ решаем систему уравнений $(\delta - \lambda E) = \mathbf{0}$:

$$\lambda = 8 \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{решение} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda = -2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{решение} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Нормируем полученные векторы и меняем знак у второго вектора так, чтобы получилась матрица

$$T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Находим коэффициенты линейной части D_1, E_1 и преобразование координат так же, как и в предыдущем случае. Кроме того, данный способ гарантирует, что $A_1 = 8$ и $C_1 = -2$. Снова получаем уравнение:

$$8x_1^2 - 2y_1^2 + \frac{48}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{4}{\sqrt{10}}y_1 + 23 = 0.$$

Далее рассуждения повторяют предыдущий метод.

III способ. Заметим, что $|\delta| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, значит, данное уравнение задает центральную линию. Координаты центра линии являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 7x_0 + 3y_0 + 7 = 0, \\ 3x_0 - y_0 + 3 = 0. \end{cases}$$

Получаем центр $(x_0, y_0) = (-1, 0)$. Центральная система координат связана с исходной равенствами $x = x_c - 1$, $y = y_c$. Тогда уравнение кривой принимает вид

$$7x_c^2 + 6x_c y_c - y_c^2 + F_1 = 0,$$

где $F_1 = 7x_0 + 3y_0 + 23 = 16$. Далее поворот выполняется одним из описанных выше способов.

Наконец, находим связь исходных и канонических координат подстановкой равенств для центральных и канонических координат в равенства связи исходных и центральных координат.

(b) В этом примере рассмотрим только второй способ приведения уравнения к каноническому. Запишем матрицу Δ для данного уравенения:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -8 \\ 6 & 4 & -1 \\ -8 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $\det(\delta - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 6 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda = 0$$

и находим его корни: $\lambda = 0$ и $\lambda = 13$. Для каждого корня λ решаем систему уравнений $(\delta - \lambda E) = \mathbf{0}$:

$$\lambda = 13 \Longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ решение } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$\lambda = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ решение } \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Нормируем полученные векторы и меняем знак у второго вектора так, чтобы получилась матрица

$$T = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x_1 - 2y_1), \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x_1 + 3y_1). \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение, находим коэффициенты линейной части уравнения. Таким образом, уравнение имеет вид:

$$13x_1^2 - \frac{52}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{26}{\sqrt{13}}y_1 + 6 = 0.$$

Дополняем до полного квадрата часть выражения с переменной x_1:

$$13\left(x_1^2 - \frac{4}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{4}{\sqrt{13}}\right) - 4 + \frac{26}{\sqrt{13}}y_1 + 6 = 0;$$
$$13\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{13}}y_1 + 2 = 0.$$

Теперь группируем слагаемое с y_1 и свободный член, вынося $^2\sqrt{13}$ за скобки, получим дополнительный сдвиг по оси y_1:

$$13\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \frac{26}{\sqrt{13}}\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{13}}\right) = 0.$$

Теперь, полагая $y_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{13}}$ и $x_2 = x_1 - \frac{2}{\sqrt{13}}$ и деля обе части на 13, получим «почти каноническое» уравнение параболы

$$x_2^2 + \frac{2}{\sqrt{13}}y_2 = 0.$$

Для того, чтобы окончательно привести его к каноническому, дополнительно повернем систему координат на угол $\psi = -90^\circ$:

$$\begin{cases} x_2 = y_K, \\ y_2 = -x_K, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y_K^2 = \frac{2}{\sqrt{13}} x_K.$$

Наконец, находим преобразование координат:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_K + \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -x_K - \frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix},$$

откуда получаем систему равенств:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x_K + 3y_K) + \frac{8}{13}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(-3x_K + 2y_K) + \frac{1}{13}. \end{cases}$$

◄

6. Система комплексных чисел

Множество комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$.

Каждое комплексное число $z \in \mathbb{C}$ может быть представленно в виде

$$z = x + iy,$$

где x, $y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Такая форма записи называется *алгебраической*. Число x называется *действительной частью* z и обозначается $\operatorname{Re} z$, а y — *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$.

Сопряженным к комплексному числу $z = x + iy$ называется число $\overline{z} = x - iy$.

Операции с коплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел. При сложении или вычитании комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ соответственно складываются или вычитаются их действительные и мнимые части:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Умножение комплексных чисел. Комплексные числа перемножаются как многочлены от переменной i, при этом i^2 заменяется на -1:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Деление комплексных чисел. Для того, чтобы найти обратное к комплексному числу $z = x + iy \neq 0$, необходимо числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{z}$ домножить и разделить на сопряженное к z:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)\cdot(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Тогда для того, чтобы разделить число $z_1 = x_1 + iy_1$ на $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, нужно умножить z_1 на z_2^{-1}:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Свойства операций с комплекными числами

Теорема 1 *Сложение и умножение комплексных чисел для любых z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$ обладает следующими свойствами:*

(1) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *(ассоциативность сложения);*

(2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *(коммутативность сложения);*

(3) $z + 0 = 0 + z = z$ *(существование нуля 0);*

(4) $z + (-z) = (-z) + z = 0$ *(существование противоположного числа);*

(5) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ *(ассоциативность умножения);*

(6) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ *(коммутативность умножения);*

(7) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ *(существование единицы);*

(8) $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$, *если* $z \neq 0$ *(существование обратного числа);*

(9) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ *и* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ *(дистрибутивность умножения относительно сложения).*

Пример 12 *Вычислите выражения:*
(a) $(2+i)(3-i)$; *(b)* $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$ *(c)* i^{77}.

► (a) Раскроем скобки, считая каждое число многочленом от переменной i, и заменим i^2 на -1. Получим

$$(2+i)(3-i) = 2\cdot 3 - 2i + 3i - i^2 = 6 - 2i + 3i + 1 = 7 + i.$$

(b) Вначале вычислим произведение в числителе дроби:

$$\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i} = \frac{5\cdot 7 + 7i - 5\cdot 6i - 6i^2}{3+i} = \frac{35+6+7i-30i}{3+i} = \frac{41-23i}{3+i}.$$

Теперь домножим числитель и знаменатель полученной дроби на число, сопряженное к знаменателю и раскроем все скобки:

$$\begin{aligned}\frac{41-23i}{3+i} =& \frac{(41-23i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)} = \frac{123-69i-41i+23i^2}{3^2-i^2}\\ =& \frac{100-110i}{10} = 10-11i.\end{aligned}$$

(c) Заметим, что $i^2=-1$ и $i^4=1$. Тогда $i^{77}=i^{4\cdot 19+1}=(i^4)^{19}\cdot i = i$ ◄

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

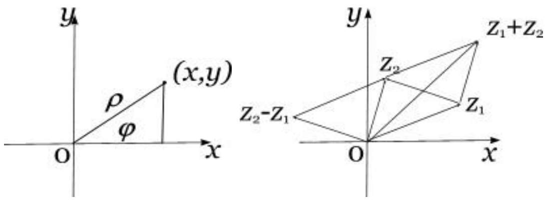

Рис. 1

Каждое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой на комплексной плоскости с координатами (x, y) в прямоугольной системе координат (рис 1). В таком случае сумма z_1+z_2 и разность z_1-z_2 комплексных чисел z_1 и z_2 геометрически изображается как сумма или разность радиус-векторов соответствующих им точек на плоскости (рис 2, 3).

Рассмотрим полярную систему координат, располагая ее таким образом, чтобы полюс совпадал с началом прямоугольной системы координат, и полярная ось была направлена вдоль оси Ox . Тогда формулы связи прямоугольной и полярной системы координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

где (φ, ρ) — полярные координаты точки z: ρ — длина радиус-вектора точки z, а φ — угол между радиус-вектором точки z и полярной осью (рис 4).

Следовательно, число $z = x + iy$ можно записать в виде:

$$z = x + iy = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такую форму записи комплексного числа называют *тригонометрической.* Число ρ называют *модулем* числа z и обозначают $|z|$, угол φ — *аргументом* числа z и обозначают $\arg z$. Из определения следует, что

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Заметим, что для одного и того же значения $|z|$ аргументы φ и $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, определяют одну и ту же точку на плоскости, т. е. одно и то же комплексное число (рис 5). Поэтому принято рассматривать *главный аргумент* $\arg z \in [0, 2\pi)$ или $\arg z \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Считают, что $\arg 0$ не определен.

Пример 13 *Найдите тригонометрическую форму числа:*
(a) $-3i$; *(b)* $-1 + i$; *(c)* $2 + \sqrt{3} + i$; *(d)* $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

► (a) Число $-3i$ на комплексной плоскости изображается точкой с коор-

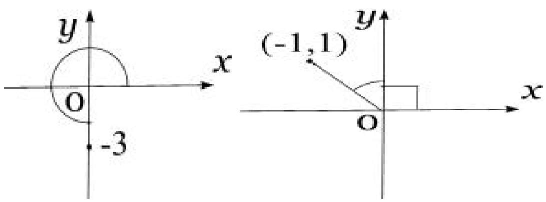

Рис. 1

динатами $(0; -3)$ (рис. 6).

Находим аргумент $\arg(-3i) = \frac{3\pi}{2}$ и модуль $|-3i| = 3$. Тогда тригонометрическая форма числа

$$-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

(b) Число $-1 + i$ на комплексной плоскости изображается точкой с координатами $(-1; 1)$ (рис. 7).

Модуль $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, а аргумент $\arg(-1+i) = \frac{\pi}{2} + \varphi$, где угол φ можно найти из равенства $\operatorname{tg}\varphi = 1 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$, а тригонометрическая форма числа

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

(c) Число $2+\sqrt{3}+i$ на комплексной плоскости изображается точкой с координатами $(2+\sqrt{3};1)$ (рис 8).

Модуль $|2+\sqrt{3}+i| = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Однако для непосредственного вычисления $\arg(2+\sqrt{3}+i)$ необходимо вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Поэтому для того, чтобы найти тригонометрическую форму числа $2+\sqrt{3}+i$, преобразуем его:

$$2+\sqrt{3}+i = 2\cdot(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}+i\cdot 0).$$

Заменяя $1=\cos 0$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, $0=\sin 0$ и применяя формулы суммы косинусов и синусов, получим:

$$\begin{aligned}2+\sqrt{3}+i =&2\cdot\left(\cos 0+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}+i\sin 0\right)\\ =&2\cdot\left(2\cos\frac{\pi}{12}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\\ =&4\cos\frac{\pi}{12}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

Используя формулу косинуса двойного угла, можно показать, что $4\cos\frac{\pi}{12} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$, т.е. модулю $2+\sqrt{3}+i$. Следовательно, тригонометрическая форма числа

$$2+\sqrt{3}+i = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

(d) Заметим, что $|\sin\alpha+i\cos\alpha| = \sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = 1$. Применяя формулы приведения, находим тригонометрическую форму числа

$$\sin\alpha+i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

◄

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. При умножении двух комплексных чисел $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1\cdot z_2 = (\rho_1\cdot\rho_2)(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме. При делении комплексных чисел $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0$ в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Возведение комплексных чисел в целую степень. Для того, чтобы возвести комплексное число z в целую степень n, нужно представить z в тригонометрической форме $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а затем воспользоваться формулой *де Муавра*:

$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа. Для того, чтобы извлечь корень n-й степени из комплексного числа z, нужно представить z в тригонометрической форме $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а затем воспользоваться формулой:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Здесь $\sqrt[n]{\rho}$ — корень n-й степени из неотрицательного действительного числа.

Существует ровно n корней из комплексного числа, при этом все корни расположены в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

Пример 14 *Вычислите выражения:*
(a) $(\sqrt{3} + i)^{21}$; *(b)* $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$.

► (a) Представим $\sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + 2)^{21} =& 2^{21} \cdot \left(\cos\frac{21 \cdot \pi}{6} + i\sin\frac{21 \cdot \pi}{6}\right)\\ =& 2^{21} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{2} + i\sin\frac{7\pi}{2}\right) = -2^{21}i.\end{aligned}$$

(b) Представим $8\sqrt{3}i - 8$ в тригонометрической форме. Находим

$$|8\sqrt{3}i - 8| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16,$$
$$\arg(8\sqrt{3}i - 8) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда

$$8\sqrt{3}i - 8 = 16 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8} = \sqrt[4]{16} \cdot \left(\cos\frac{2\pi/3 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi/3 + 2\pi k}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Находим

$$k = 0: \ z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i;$$
$$k = 1: \ z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3};$$
$$k = 2: \ z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i;$$
$$k = 3: \ z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

◀

Пример 15 *Представьте в виде многочленов от* $\sin x$ *и* $\cos x$ *функцию* $\cos 5x$.

▶ Вычислим $(\cos x + i\sin x)^5$ двумя способами. С одной стороны, по формуле де Муавра

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x.$$

С другой стороны, возводя $\cos x + i\sin x$ в 5-ю степень по биному Ньютона, получим:

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^5 = &\cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - \\ &- 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x \\ =&(\cos^5 x - 10\cos^3 \sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x) + \\ &+ i(5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x).\end{aligned}$$

Приравнивая действительные части, получим

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x.$$

◀

Теорема 2 *Сопряжение комплексных чисел обладает следующими свойствами:*

(1) $\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2 = \overline{z_1 \pm z_2}$*;*

(2) $\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$*;*

(3) $\overline{z}_1 / \overline{z}_2 = \overline{z_1 / z_2}$*;*

(4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*;*

(5) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$.

Экспоненциальная форма комплексного числа

Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ позволяет записать комплексное число $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в *экспоненциальной форме*:

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi}.$$

Кроме того, используя формулу Эйлера, тригонометрические функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ можно выразить через комплексную экспоненту:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$
$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Пример 16 *Выразите через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных* x*, функцию* $\sin^5 x$*.*

▶ Выразим $\sin x$ через комплексную экспоненту:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Возводя в 5-ю степень обе части равенства и применяя формулу бинома Ньютона, получим:

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 =$$
$$= \frac{e^{5xi} - 5e^{4xi}e^{-xi} + 10e^{3xi}e^{-2xi} - 10e^{2xi}e^{-3xi} + 5e^{xi}e^{-4xi} - e^{-5xi}}{32i} =$$
$$= \frac{e^{5xi} - 5e^{3xi} + 10e^{xi} - 10e^{-xi} + 5e^{-3xi} - e^{-5xi}}{32i}.$$

Группируем слагаемые к подобными степенями и снова применяем формулу, выражающую функцию синус через комплексную экпоненту:

$$\begin{aligned}\sin^5 x =& \frac{(e^{5xi} - e^{-5xi})}{32i} + 5\frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{32i} + 10\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{32i} = \\ =& \frac{1}{16}\left(\sin 5x + 5\sin 3x + 10\sin x\right).\end{aligned}$$

◀

Пример 17 *Докажите равенство:*

$$\sin x + \sin 2x + \ldots \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

▶ Заметим, что $\sin x = \operatorname{Im}(\cos x + i\sin x) = \operatorname{Im} e^{ix}$. Тогда $\sin kx = \operatorname{Im} e^{ikx}$. Следовательно, в левой части равенства стоит сумма мнимых частей комплексных чисел e^{ix}, e^{2ix}, …, e^{inx}. При сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части, поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin kx =& \operatorname{Im} e^{ix} + \operatorname{Im} e^{2ix} + \ldots + \operatorname{Im} e^{inx} = \\ &= \operatorname{Im}\left(e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{inx}\right).\end{aligned}$$

Сумма в правой части последнего равенства — это сумма n первых членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = e^{ix}$ и знаменателем $q = e^{ix}$. Получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \operatorname{Im}\frac{e^{ix}(1 - e^{inx})}{1 - e^{ix}}.$$

Далее, подставляя вместо $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ и выполняя преобразование тригонометрических выражений (упражнение), получим комплексное число, мнимая часть которого равна выражению в правой части доказываемого равенства. ◀

Пример 18 *Изобразите на комплексной плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим условиям: (a) $|z - 1 - i| < 1$; (b) $\arg z = \frac{\pi}{3}$; (c) $|\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| = 1$.*

▶ (a) Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$|z - 1 - i| = |(x-1) + i(y-1)| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < 1$$

$$\iff (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1.$$

Точки плоскости (x, y), удовлетворяющие неравенству $(x-1)^2+(y-1)^2 < 1$, расположены внутри круга с центром в $(1, 1)$ и радиусом 1. (рис.)

(b) Точки z на комплексной плоскости, для которых $\arg z = \frac{\pi}{3}$, расположены на луче, выходящем из начала координат, составляющим угол $\frac{\pi}{3}$ с положительным направлением оси Ox. (рис) Так как аргумент 0 не определен, то точка $(0, 0)$ выкалывается.

(c) Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$|\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| = 1 \iff |x + y| = 1 \iff x + y = \pm 1 \iff x + y \pm 1 = 0.$$

Уравнения $x+y\pm 1 = 0$ задают пару параллельных прямых на плоскости. (рис.) ◀

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите выражения:

(a) $(2 + i)(3 + 7i) - (1 + 2i)(5 + 3i)$; (b) $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$; (c) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^3+1}$;

(d) $\frac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$.

2. Решите уравнение $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$.

3. Решите систему уравнений:

(a) $\begin{cases}(3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i,\\(4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i;\end{cases}$ (b) $\begin{cases}(2 + i)x + (2 - i)y = 6,\\(3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8.\end{cases}$

(e) $(1 + i)^n$, $n \in \mathbb{Z}$; (f) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$; (g) $\sqrt{2i}$;

(h) $\sqrt[4]{-1}$; (i) $\sqrt[3]{1 + i}$.

Ответы.

1. (a) $4i$. (b) $\dfrac{13}{2} - \frac{1}{2}i$. (c) $-\frac{1}{25} - \frac{32}{25}i$. (d) $5 - 5i$.

2. $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3i$

7. Многочлены

Обозначим $\mathbb{F}$ одну из числовых систем $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Многочленом (полиномом) от одной переменной x с коэффициентами в $\mathbb{F}$ называется выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_i \in \mathbb{F}$, $i = 0, 1, \ldots n$ и $a_n \neq 0$. Число n называется *степенью* многочлена $f(x)$ и обозначается $\deg f$. Одночлен (моном) $a_n x^n$ называется *старшим членом* многочлена $f(x)$.

Множество всех многочленов от одной переменной с коэффициентами в $\mathbb{F}$ обозначается $\mathbb{F}[x]$, т.е.

$$\mathbb{F}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{F}, i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Операции с многочленами

Сложение многочленов. При сложении многочленов $f(x)$ и $g(x)$ складывают коэффициенты при одинаковых степенях, при этом $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$.

Умножение многочленов. Пусть $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$. Тогда *произведением* многочленов $f(x)$ и $g(x)$ является многочлен

$$(f \cdot g)(x) = c_{m+n}x^{m+n} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

степень которого $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$, а коэффициенты c_i определены равенством

$$c_i = \sum_{t+k=i} a_t b_k, \quad i = 0, 1, \ldots, m+n.$$

Деление многочлена на многочлен с остатком

Теорема 3 (Алгоритм деления с остатком) *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существуют единственные многочлены $q(x)$ и $r(x)$, такие, что*

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

причем $0 \leq \deg r(x) < \deg g(x)$ или $r(x) = 0$.

Пример 19 *Разделить с остатком многочлен $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ на многочлен $g(x) = x^2 + x + 1$.*

► Так как $\deg f \geq \deg g$, то ищем первый член полинома $q(x)$ как *частное* старших членов полиномов $f(x)$ и $g(x)$. В данном примере он равен $x^5 : x^2 = x^3$. Находим первый остаток $f_1(x) = f(x) - x^3 \cdot g(x)$. Вычисления удобно записывать «столбиком»:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +3x^4 & +x^3 & +4x^2 & -3x & -1 & x^2+x+1 \\ \cline{7-7}
x^5 & +\ x^4 & +x^3 & & & & x^3 \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & & +4x^2 & -3x & -1 &
\end{array}$$

Рассмотрим многочлен

$$f_1(x) = f(x) - x^3 \cdot g(x) = 2x^4 + 4x^2 - 3x - 1.$$

Так как $\deg f_1 \geq \deg g$, то второй член $2x^2$ полинома $q(x)$ будет равен частному старших членов полиномов $f_1(x)$ и $g(x)$. Находим второй остаток $f_2(x) = f_1(x) - 2x \cdot g(x)$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +3x^4 & +\ x^3 & +4x^2 & -3x & -1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{7-7}
\underline{x^5} & \underline{+\ x^4} & \underline{+\ x^3} & & & & x^3 + 2x^2 \\
 & 2x^4 & & +4x^2 & -3x & -1 & \\
 & \underline{2x^4} & \underline{+2x^3} & \underline{+2x^2} & & & \\
 & & -2x^3 & +2x^2 & -3x & -1 &
\end{array}$$

Повторяя рассуждения, получим:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +3x^4 & +\ x^3 & +4x^2 & -3x & -1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{7-7}
\underline{x^5} & \underline{+\ x^4} & \underline{+\ x^3} & & & & x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \\
 & 2x^4 & & +4x^2 & -3x & -1 & \\
 & \underline{2x^4} & \underline{+2x^3} & \underline{+2x^2} & & & \\
 & & -2x^3 & +2x^2 & -3x & -1 & \\
 & & \underline{-2x^3} & \underline{-2x^2} & \underline{-2x} & & \\
 & & & 4x^2 & -\ x & -1 & \\
 & & & \underline{4x^2} & \underline{+4x} & \underline{+4} & \\
 & & & & -5x & -5 &
\end{array}$$

Таким образом, $f(x) = g(x) \cdot (x^3 + 2x^2 - 2x + 4) - 5x - 5$. ◀

Делимость многочленов. Если остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен нулю, то говорят, что $f(x)$ *делится* (или *нацело делится*) на $g(x)$.

Корни многочленов. Пусть $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Число $c \in \mathbb{F}$ называется *корнем многочлена* $f(x)$, если $f(c) = 0$.

Теорема 4 *Остаток от деления* $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ *на* $x - c$ *равен значению* $f(c)$ *многочлена* $f(x)$ *при* $x = c$.

Теорема 5 (Безу) *Число* $c \in \mathbb{F}$ *является корнем многочлена* $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ *тогда и только тогда, когда* $x - c$ *делит* $f(x)$ *в* $\mathbb{F}[x]$.

Схема Горнера. Деление многочлена $f(x)$ на $x - c$ удобнее осуществлять по *схеме Горнера.* Рассмотрим ее на примере.

Пример 20 *Выполните деление с остатком* $f(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$ *на* $x - 3$.

► Составляем таблицу, в которой над чертой расположены все коэффициенты многочлена $f(x)$, слева от черты — значение c, а под чертой — соответствующие коэффициенты частного и остаток, последовательно вычисляемые. В данном примере:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 3 & 2, & 2\cdot 3-1=5, & 5\cdot 3-3=12, & 12\cdot 3+0=36, & 36\cdot 3+1=109, & 109\cdot 3-3=324 \end{array}.$$

Таким образом, частное

$$q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109,$$

а остаток $f(3) = 324$. ◄

Кратные корни. Число $c \in \mathbb{F}$ называется *k-кратным корнем* многочлена $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, если $f(x)$ делится на $(x - c)^k$ и не делится на $(x - c)^{k+1}$. Число k называют *показателем кратности* корня.

Корень кратности 1 называют *простым* корнем (соответственно, при $k = 2$ и $k = 3$ говорят о *двойном* и *тройном* корне).

Пример 21 *Найдите показатель кратности корня* 2 *многочлена* $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

► Если $x = 2$ — k-кратный корень многочлена $f(x)$, то остаток от деления $f(x)$ на $(x-2)^k$ равен нулю, а остаток от деления на $(x-2)^{k+1}$ отличен от нуля. Следовательно, выполняя деление $f(x)$ на $x - 2$ с остатком по схеме

Горнера до тех пор, пока остаток равен нулю, найдем показатель кратности корня, который будет равен количеству нулевых остатков в схеме Горнера.

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -5 & 7 & -2 & 4 & -8 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\
2 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & \\
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\
2 & 1 & 3 & \boxed{7} & & &
\end{array}$$

Таким образом,

$$f(x) = (x-2)^3 \cdot (x^2 + x + 1)$$

и показатель кратности корня $k = 3$. ◀

Теорема Гаусса

Теорема 6 (Гаусс) *Любой многочлен $f(x) \in \mathbb{C}$, $\deg f \geq 1$, имеет комплексный корень.*

Следствие 1 *Любой многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени $n \geq 1$ имеет ровно n комплексных корней, считаемых со своими кратностями.*

Следствие 2 *Любой многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени $n \geq 1$*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

может быть представлен, причем единственным (с точностью до порядка сомножителей) образом, в виде

$$f(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n),$$

где $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Неприводимые многочлены

Многочлен $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg f \geq 1$, называется *неприводимым над* $\mathbb{F}$, если $f(x)$ **нельзя** представить в виде произведения $h(x) \cdot g(x)$ многочленов $h(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами в $\mathbb{F}$, таких, что $0 < \deg h, \deg g < \deg f$.

Следствие 3 *Неприводимыми над $\mathbb{C}$ являются только линейные многочлены.*

Теорема 7 *Если c — комплексный корень $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, то $f(\overline{c}) = 0$.*

Следствие 4 *Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только линейные многочлены и квадратичные с отрицательным дискриминатом.*

Пример 22 *Постройте многочлен наименьшей степени:*

(1) с комплексными коэффициентами;

(2) с действительными коэффициентами;

если 1 *является его двойным корнем, а* 2, 3 *и* $1+i$ *— простыми.*

► (1) Многочлен $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)$ — многочлен наименьшей степени с *комплексными* коэффициентами, имеющий данные корни.

(2) Так как $1+i$ является корнем искомого многочлена с *действительными* коэффициентами, то $1-i$ также является его корнем. Тогда многочлен наименьшей степени равен

$$\begin{aligned} f(x) =& (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)(x-1+i) \\ =& (x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+5). \end{aligned}$$

◄

Пример 23 *Разложите на неприводимые множители над* $\mathbb{C}$ *и над* $\mathbb{R}$ *многочлены:*

(1) $x^3-6x^2+11x-6$*;* *(2)* x^4+4.

► (1) Многочлен $x^3-6x^2+11x-6$ имеет действительные корни 1, 2 и 3, поэтому его разложения над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ совпадают и равны:

$$x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

(2) Многочлен x^4+4 не имеет действительных корней, однако его степень равна 4, поэтому он приводим. Действительно, прибавляя и вычитая $4x^2$, найдем разложение на неприводимые множители над $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^4+4 =& (x^4+4x^2+4)-4x^2 \\ =& (x^2+2)^2-(2x)^2 \\ =& (x^2-2x+2)(x^2+2x+2). \end{aligned}$$

А теперь, вычисляя корни каждого из множителей, находим разложение на неприводимые множители над $\mathbb{C}$:

$$x^4 = (x-1-i)(x-1+i)(x+1-1)(x+1+i).$$

◄

8. Системы линейных уравнений

Пусть $\mathbb{F}$ — одна из числовых систем: $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Системой линейных алгебраических уравнений от n неизвестных $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{$\bigstar$}$$

где $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{F}$.

Основной матрицей системы ($\bigstar$) называют матрицу

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Расширенной матрицей системы ($\bigstar$) называют матрицу

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Решение системы линейных уравнений. Упорядоченный набор чисел $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ называется *решением* системы ($\bigstar$), если при подстановке $x_1 = x_1^\circ,\ x_2 = x_2^\circ,\ \ldots,\ x_n = x_n^\circ$ каждое уравнение обращается в верное равенство.

<table>
<tr><td>Количество решений</td><td>Одно решение</td><td>Много решений</td><td>Нет решений</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Система</td><td colspan="2">Совместная</td><td rowspan="2">Несовместная</td></tr>
<tr><td>Определенная</td><td>Неопределенная</td></tr>
</table>

Две системы называются *эквивалентными*, если они несовместны или совместны и имеют одинаковое множество решений.

Метод исключения неизвестных

Элементарные преобразования системы уравнений.

(R1) Умножение уравнения системы на число, не равное нулю.

(R2) Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число.

(R3) Перестановка пары уравнений местами.

Теорема 8 *Две системы эквивалентны, если одна из них получена путем применения конечной последовательности элементарных преобразований.*

Ступенчатый вид матрицы. Матрицу называют *ступенчатой*, если:

(1) первый слева элемент в каждой строке равен 1 (главная единица);

(2) остальные элементы столбца, содержащего главную единицу, равны 0;

(3) в каждой следующей строке главная единица расположена правее, чем главная единица предыдущей строки.

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Под *элементарными преобразованиями* строк матрицы понимают преобразования, соответствующие элементарным преобразованиям уравнений, т.е.

(R1) умножение любой строки на ненулевое число;

(R2) прибавление к одной строке, другой, умноженной на число;

(R3) перестановка местами любой пары строк.

Стандартный метод приведения к ступенчатому виду заключается в последовательном занулении элементов матрицы, начиная с левого столбца и двигаясь вправо.

Пример 24 *Приведите к ступенчатому виду матрицу*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

► Обозначим через $A_{(k)}$ строку k текущей матрицы, и справа от матрицы будем указывать преобразование, которым получена данная строка.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{исходная матрица}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{(R3)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} && A_{(1)} \leftrightarrow A_{(2)} \\
&\text{(R2)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} && A_{(2)} \longleftarrow A_{(2)} + 3A_{(1)} \\
&\text{(R2)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} && A_{(4)} \longleftarrow A_{(4)} - 2A_{(1)} \\
&\text{(R3)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} && A_{(2)} \leftrightarrow A_{(3)} \\
&\text{(R2)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} && A_{(3)} \longleftarrow A_{(3)} - 2A_{(2)} \\
&\text{(R2)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} && A_{(4)} \longleftarrow A_{(4)} - A_{(2)} \\
&\text{(R3)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} && A_{(3)} \leftrightarrow A_{(4)} \\
&\text{(R1)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} && A_{(3)} \longleftarrow -\tfrac{1}{6}A_{(3)} \\
&\text{(R2)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} && A_{(1)} \longleftarrow A_{(1)} - 2A_{(3)} \\
&\text{(R2)} && \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} && A_{(2)} \longleftarrow A_{(2)} - 3A_{(3)}.
\end{aligned}
$$

Можно заметить, что порядок строк в матрице по ходу вычислений совершенно не важен. Достаточно лишь следить за тем, какая строка является ведущей на данном шаге, не взирая на ее положение в матрице.

Поскольку порядок строк в матрице не играет никакого значения, можно значительно сократить запись каждого шага. Заменим переписывание **всей** матрицы более короткими действиями:

(1) указать элементарное преобразование R, совершаемое на данном шаге;

(2) приписать снизу к матрице результат преобразования R, т.е. новую строку;

(3) пометить как удаленную сроку, к которой применялось преобразование R; вместо нее далее будет рассматриваться только что полученная строка.

При этом полезно нумеровать строки, а удаленные строки не зачеркивать, а именно помечать (например, знаком $\times$)

Вернемся к разобранному примеру. После первого шага получилась запись

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ \times \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \\ A_{(5)} = A_{(2)} + 3A_{(3)}. \end{array}$$

Продолжая, получим запись вычислений в виде таблицы

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \\ \times \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \\ A_{(5)} = A_{(2)} + 3A_{(3)} \\ A_{(6)} = A_{(4)} - 2A_{(3)} \\ A_{(7)} = A_{(5)} - 2A_{(1)} \\ A_{(8)} = A_{(6)} - A_{(1)} \\ A_{(9)} = -\frac{1}{6}A_{(8)} \\ A_{(10)} = A_{(1)} - 3A_{(9)} \\ A_{(11)} = A_{(3)} - 2A_{(9)}. \end{array}$$

Располагая невычеркнутые строки матрицы в правильном порядке, получаем ступенчатый вид исходной матрицы

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{(11)} \\ A_{(10)} \\ A_{(9)} \\ A_{(7)} \end{array}$$

◄

Критерий совместности системы линейных уравнений

Теорема 9 *Любая система линейных уравнений эквивалентна (единственной) системе ступенчатого вида.*

Следствие 5

(1) Система определена тогда и только тогда, когда все столбцы ступенчатой матрицы главные.

(2) Система совместна тогда и только тогда, когда каждой нулевой строке в ступенчатой матрице соответствует нулевой свободный член.

(3) Число параметров, описывающих множество решений системы, равно числу неглавных столбцов.

Пример 25 *Решите систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -6. \end{cases}$$

► Заметим, что все преобразования уравнений системы меняют только коэффициенты в уравнениях, поэтому все преобразования обычно производят над расширенной матрицей данной системы.

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(1)} + A_{(3)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(2)} - 2A_{(3)} \\ & A_{(6)} = \frac{1}{3}A_{(5)} \\ & A_{(7)} = A_{(4)} + A_{(6)} \\ & A_{(8)} = A_{(3)} + 2A_{(6)} \end{array}$$

Итак, ступенчатая матрица данной системы

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} A_{(8)} \\ A_{(6)} \end{array} \quad ,$$

где рамкой выделены главные единицы. Теперь можно записать общее решение в виде

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 - \ \ x_5 + 4, \\ x_3 = \qquad x_4 - 3x_5 + 5, \\ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \text{ — произвольные.} \end{cases}$$

◄

Пример 26 *Исследовать систему уравнений на совместность и найти общее решение в зависимости от параметра* λ

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_1 - \ \ x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$$

► Составим расширенную матрицу системы и приведем ее сначала к *трапецевидному* виду.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} \end{array}$$

Заметим, что в первом столбце матрицы нет ни одного числа, кратного всем остальным. Можно, например, в качестве ведущей выбрать первую строку, но тогда в ходе вычислений появятся дробные числа, что затрудняет вычисления. Однако, если вычесть из первой строки вторую, получим строку с первым единичным элементом.

$$\begin{array}{ccl}
\left[\begin{array}{rrrr|r}
5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\
4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\
8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\
7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \\
1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\
0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\
0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\
0 & 4 & 14 & 38 & \lambda-14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\
0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{7}{2} \\
1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & \frac{9}{2}
\end{array}\right]
&
\begin{array}{c}
\times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
&
\begin{array}{l}
A_{(1)} \\
A_{(2)} \\
A_{(3)} \\
A_{(4)} \\
A_{(5)} = A_{(1)} - A_{(2)} \\
A_{(6)} = A_{(2)} - 4A_{(5)} \\
A_{(7)} = A_{(3)} - 8A_{(5)} \\
A_{(8)} = A_{(4)} - 7A_{(5)} \\
A_{(9)} = A_{(7)} - A_{(6)} \\
A_{(10)} = A_{(8)} - 2A_{(6)} \\
A_{(11)} = \frac{1}{2}A_{(6)} \\
A_{(12)} = A_{(5)} + A_{(11)}
\end{array}
\end{array}$$

Итак, трапецевидная матрица данной системы

$$\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{rrrr|r}
\boxed{1} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \\
0 & \boxed{1} & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{7}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
A_{(12)} \\
A_{(11)} \\
A_{(10)} \\
A_{(9)}
\end{array}
\end{array}$$

Поскольку система совместна тогда и только тогда, когда каждой нулевой строке основной матрицы соответствует нулевой свободный член, то данная система *совместна* только при $\lambda = 0$. Общее решение системы при $\lambda = 0$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}(3 + 5x_3 + 13x_4), \\ x_2 = -\frac{1}{2}(7 + 7x_3 + 19x_4), \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ — произвольные.} \end{cases}$$

Система *не совместна* при $\lambda \neq 0$. ◀

9. Линейные пространства

Пусть $\mathbb{F}$ — одна из числовых систем: $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Линейным (векторным) пространством над $\mathbb{F}$ называется непустое множество $\mathcal{L}$ с операциями сложения и умножения на скаляры из $\mathbb{F}$, такими, что для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c} \in \mathcal{L}$ и любых α и $\beta \in \mathbb{F}$ выполнены аксиомы:

(L1) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (ассоциативность);

(L2) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$ (коммутативность);

(L3) $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{L} : \mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (существование нуля);

(L4) $\exists (-\mathbf{a}) \in \mathcal{L} : \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a})+\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (существование противоположного вектора);

(L5) $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$ (ассоциативность умножения на скаляр);

(L6) $(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$ и $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ (дистрибутивность умножения относительно сложения;

(L7) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ (свойство единицы).

Элементы линейного пространства называют *векторами.*

Пример 27 *Выясните, является ли линейным пространством каждое из следующих множеств:*

(1) множество $\mathbb{F}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{F}, 1 \le i \le n\}$ *столбцов высоты* n *над* $\mathbb{F}$ *с операциями покомпонентного сложения и умножения на скаляр:*

$$[a_1, \ldots a_n] + [b_1, \ldots, b_n] = [a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n],$$
$$\lambda[a_1, \ldots, a_n] = [\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n];$$

(2) множество $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *прямоугольных матриц* $[a_{ij}]$ *порядка* $m \times n$ *над* $\mathbb{F}$ *с операциями покомпонентного сложения и умножения на скаляр:*

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}],$$
$$\lambda[a_{ij}] = [\lambda a_{ij}];$$

(3) множество многочленов степени не выше n

$$\mathbb{F}_n[x] = \{f(x) = a_t x^t + a_{t-1}x^{t-1} + \ldots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{F}, 0 \le i \le t, t \le n\}$$

с обычными операциями сложения и умножения на скаляры многочленов;

(4) $\mathbb{C}$ *— множество комплексных чисел над* $\mathbb{R}$ *с обычными операциями сложения и умножения.*

► Для того, чтобы доказать что некоторое множество образует линейное пространство, необходимо проверить выполнимость всех аксиом линейного пространства.

(1) Поскольку операции сложения и умножения на скаляры в пространстве столбцов $\mathbb{F}^n$ определены покомпонентно, то аксиомы (L1), (L2), (L5) – (L7) выполнены, так соответствующие свойства выполняютсся для элементов $\mathbb{F}$. Нулевым вектором является столбец с нулевыми компонентами:

$$\mathbf{0} = [0, 0, \ldots, 0].$$

Тогда вектор, противоположный данному — это вектор, все координаты которого противоположны координатам данного, т.е.

$$-[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [-a_1, -a_2, \ldots, -a_n].$$

(2) Аналогично, поскольку сложение матриц и умножение на скаляр определяется покомпонентно, то достаточно проверить выполнение аксиом (L3) и (L4). Роль нулевого элемента в пространстве матриц играет нулевая матрица — матрица с нулевыми элементами, а матрица, противоположная данной, — это матрица, все компоненты которой противоположны соответствующим компонентам данной матрицы.

(3) Множество многочленов степени не более n также образуют линейное пространство. В этом множестве роль нулевого вектора выполняет нулевой многочлен, а противоположного — многочлен с противоположными компонентами.

(4) Проверяется аналогично(1). ◀

Линейная комбинация. Пусть $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\} = \mathcal{X} \subseteq \mathbb{F}^n$. *Линейной комбинацией* векторов $\mathcal{X}$ с коэффициентами α_1, α_2, ..., α_r называют вектор

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_r X_r.$$

Если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_r = 0$, то комбинацию $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_r X_r$ называют *тривиальной*.

Линейная зависимость. Множество векторов $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\} = \mathcal{X} \subseteq \mathbb{F}^n$ называют *линейно зависимым*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, т.е.

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \neq (0, 0, \ldots, 0): \ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_r X_r = 0.$$

Множество векторов $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\} = \mathcal{X} \subseteq \mathbb{F}^n$ называют *линейно независимым*, если

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_r X_r = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0.$$

Свойства линейных комбинаций. Для любого множества векторов $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\} = \mathcal{X}$ линейного пространства:

(1) если $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ линейно зависимо, то $\mathcal{X}$ линейно зависимо;

(2) если $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ и $\mathcal{X}$ линейно независимо, то $\mathcal{Y}$ линейно независимо;

(3) хотя бы один вектор X_i линейно выражается через остальные векторы $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ линейно зависимо;

(4) если $\mathcal{X}$ линейно независимо, то $Z \in \langle \mathcal{X} \rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} \cup \{Z\}$ линейно зависимо.

Линейная оболочка. Подпространство. Множество $\langle \mathcal{X} \rangle$ всех возможных линейных комбинаций векторов из $\mathcal{X}$ называется *линейной оболочной* $\mathcal{X}$, т.е.

$$\langle \mathcal{X} \rangle = \{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_r X_r \mid \alpha_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Теорема 10 *Пусть $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{F}^n$ — непустое подмножество. Тогда $\mathcal{L}$ —* ***подпространство*** *пространства $\mathbb{F}^n$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}$ замкнуто относительно взятия линейных комбинаций, т.е. для любых $X, Y \in \mathcal{L}$ и для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$*

$$\lambda X + \mu Y \in \mathcal{L}.$$

Линейная оболочка $\langle \mathcal{X} \rangle$ закмкнута относительно сложения векторов и умножения на скаляры, т.е. для любых X, $Y \in \langle \mathcal{X} \rangle$ их линейная комбинация $\alpha X + \beta Y \in \langle \mathcal{X} \rangle$. Следовательно, $\langle \mathcal{X} \rangle$ является подпространством $\mathbb{F}^n$.

Пример 28 *Выясните, являются ли линейным подпространством соответствующего линейного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:*

(1) все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy;

(2) многочлены с вещественными коэффициентами степени n;

(3) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,\}$ относительно обычных операций сложения и умножения на скаляр в $\mathbb{R}^n$;

(4) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,\}$ относительно обычных операций сложения и умножения на скаляр в $\mathbb{R}^n$.

► (1) Множество $Ox \cup Oy$ векторов, лежащих на одной из осей Ox и Oy не замкнуто относительно сложения, следовательно, не является подпространством на плоскости.

(2) Множество многочленов степени n не образует линейное подпространство в пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$. Действительно, рассмотрим два многочлена

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$$

и

$$g(x) = -x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Тогда сумма этих многочленов

$$(f+g)(x) = (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

имеет степень меньше n, а значит, не принадлежит данному множеству.

(3) Данное множество является линейным подпростанством. Для доказательства проверим замкнутость относительно взятия линейных комбинаций векторов данной совокупности. Пусть $[x_1, \ldots, x_n]$ и $[y_1, \ldots, y_n]$ принадлежат данному множеству, т.е.

$$x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n = 0.$$

Тогда

$$\lambda[x_1, \ldots, x_n] + \mu[y_1, \ldots, y_n] = [\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n]$$

тоже принадлежит данному множеству, т.к. удовлетворяет условию

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) + \ldots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \ldots + x_n) + \mu(y_1 + \ldots + y_n) = 0.$$

(4) Данное множество не являтеся линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$, т.к. оно не замкнуто относительно взятия линейных комбинаций. Действительно, если $[x_1, \ldots, x_n]$ и $[y_1, \ldots, y_n]$ принадлежат данному множеству, т.е.

$$x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n = 1,$$

то

$$(x_1 + y_1) + \ldots + (x_n + y_n) = (x_1 + \ldots + x_n) + (y_1 + \ldots + y_n) = 2 \neq 1.$$

◀

Базис пространства. Размерность. Упорядоченное множество векторов $\mathbb{F}^n \supseteq \mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_r\}$ называется *базисом* пространства $\mathcal{L} \subset \mathbb{F}^n$, если:

(1) $\mathcal{X}$ линейно независимо;

(2) $\langle \mathcal{X} \rangle = \mathcal{L}$.

Другими словами, каждый вектор Y из $\mathcal{L}$ **однозначно** представляется в виде линейной комбинации векторов из $\mathcal{X}$:

$$Y = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_r X_r.$$

Коэффициенты $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]^\mathsf{T}$ в разложении вектора Y называются *координатами* вектора Y в базисе $\mathcal{X}$.

Пространство $\mathbb{F}^n$ обладает *стандартным базисом*:

$$E_1 = [1, 0, \ldots, 0]^\mathsf{T}, E_2 = [0, 1, \ldots, 0]^\mathsf{T}, \ldots, E_n = [0, \ldots, 0, 1]^\mathsf{T}.$$

Теорема 11 *Пусть $\mathcal{L}$ линейная оболочка в $\mathbb{F}^n$ с базисом $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ и Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_s — линейно независимая система векторов из $\mathcal{L}$. Тогда:*

(1) $s \le r$;

(2) $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_s\}$ может быть дополнена до базиса $\mathcal{L}$.

Теорема 12 *Каждое линейное пространство $\emptyset \ne \mathcal{L} \subseteq \mathbb{F}^n$ обладает конечным базисом. Все базисы $\mathcal{L}$ состоят из одинакового числа $r \le n$ векторов.*

Число векторов в базисе $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^n$ называют *размерностью* пространства и обозначают $\dim \mathcal{L}$.

Следствие 6 *Пусть $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда*

(1) если $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$ — подпространство, то $\dim \mathcal{S} \le \dim \mathcal{L}$;

(2) если $\dim S = \dim L$, то $\mathcal{S} = \mathcal{L}$.

Пример 29 *Векторы $\mathbf{e}_1 = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{e}_2 = [1, 1, 2]^\mathsf{T}$, $\mathbf{e}_1 = [1, 2, 3]^\mathsf{T}$ и $\mathbf{x} = [6, 9, 14]^\mathsf{T}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.*

► Рассмотрим тривиальную линейную комбинацию $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. Подставим вместо каждого вектора его столбец координат

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Умножим каждый вектор на скаляр, сложим и приравняем соответствующие коэффициенты. Получим систему линейных уравнений относительно неизвестных α_1, α_2, α_3

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ линейно независимы, поэтому они образуют базис в $\mathbb{R}^3$.

Теперь найдем координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, т.е найдем коэффициенты в разложении $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$. Снова подставляя вместо каждого вектора его координатный столбец, умножая на скаляры и скадывая векторы, приравнивая соотвествующие компоненты столбцов, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 9, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 14. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений.

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \\ \\ \times \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ A_{(4)} = A_{(2)} - A_{(1)} \\ A_{(5)} = A_{(3)} - A_{(2)} \\ A_{(6)} = A_{(5)} - A_{(4)} \\ A_{(7)} = A_{(1)} - A_{(5)} \end{array} \end{array}$$

Итак, ступенчатая матрица системы имеет вид

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right] & \begin{array}{l} A_{(7)} \\ A_{(6)} \\ A_{(4)}. \end{array} \end{array}$$

Отсюда находим $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, т.е. $[1, 2, 3]^\mathsf{T}$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. ◀

Пример 30 *Найдите размерность и какой-нибудь базис линейного пространства, натянутого на векторы* $\mathbf{a}_1 = [1, 0, 0, -1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{a}_2 = [2, 1, 1, 0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{a}_3 = [1, 1, 1, 1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{a}_2 = [1, 2, 3, 4]^\mathsf{T}$, $\mathbf{a}_1 = [0, 1, 2, 3]^\mathsf{T}$. *Найдите линейные зависимости между данными векторами.*

► Задача сводится к обычной задаче приведения матрицы к ступенчатому виду.

I способ.

(1) Из данных векторов *по строкам* составляем матрицу A.

(2) Приводим A к ступенчатому виду A'.

(3) *Ненулевые строки* ступенчатой матрицы A' образуют базис линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle$.

(4) Восстанавливая выражение каждой нулевой строки A', получаем линейные зависимости между данными векторами.

В этом случае пометки, детализирующие элементарные преобразования, позволяют найти такие зависимости посредством обратных подстановок.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{cl} & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} \\ \times & A_{(5)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(4)} - A_{(3)} \\ & A_{(7)} = A_{(6)} - A_{(5)} \\ \times & A_{(8)} = A_{(3)} - A_{(1)} \\ \times & A_{(9)} = A_{(2)} - 2A_{(1)} \\ & A_{(10)} = A_{(9)} - A_{(8)} \\ & A_{(11)} = A_{(5)} - A_{(9)} \\ & A_{(12)} = A_{(9)} - A_{(11)} \end{array}$$

Итак, получили ступенчатую матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} A_{(1)} \\ A_{(12)} \\ A_{(11)} \\ A_{(7)} \\ A_{(10)}. \end{array}$$

Строки $A_{(1)} = [1, 0, 0, -1]^{\mathsf{T}}$, $A_{(12)} = [0, 1, 0, 1]^{\mathsf{T}}$, $A_{(11)} = [0, 0, 1, 1]^{\mathsf{T}}$ образуют базис линейной оболочки $\mathcal{L} = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle$, $\dim \mathcal{L} = 3$.

Найдем линейные зависимости между векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$. Для этого выразим нулевые строки $A_{(7)}$ и $A_{(10)}$ через исходные.

$$\begin{aligned} A_{(7)} =& A_{(6)} - A_{(5)} = A_{(4)} - A_{(3)} - A_{(5)} = \mathbf{0}, \\ A_{(10)} =& A_{(9)} - A_{(8)} = A_{(2)} - 2A_{(1)} - A_{(3)} + A_{(1)} \\ =& - A_{(1)} + A_{(2)} - A_{(3)} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Так как $A_{(i)} = \mathbf{a}_i$, $1 \leq i \leq 5$, то искомые линейные зависимости имеют вид

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}.$$

II способ.

(1) Из данных векторов по *столбцам* составляем матрицу A.

(2) Приводим A к ступенчатому виду A'.

(3) Векторы, соответствующие *главным столбцам* матрицы A', линейно независимы и образуют базис линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle$.

(4) Неглавные столбцы матрицы A' — это координаты остальных векторов в найденном базисе.

По сравнению с предыдущим, этот способ отыскания линейных зависимостей проще, потому что не требует обратных подстановок и подробных, громоздких пометок.

$$\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(4)} + A_{(1)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(3)} - A_{(6)} \\ & A_{(7)} = A_{(5)} - 2A_{(2)} \\ & A_{(8)} = A_{(6)} - A_{(7)} \\ & A_{(9)} = A_{(2)} - 2A_{(7)} \\ \times & A_{(10)} = A_{(1)} - A_{(7)} \\ & A_{(11)} = A_{(10)} - 2A_{(9)} \end{array}$$

Оставшиеся строки

$$\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

показывают, что множество $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ является искомым базисом, т.к. эти векторы соответствуют главным столбцам ступенчатой матрицы, а неглавные столцы суть координаты векторов $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}_5$ в базисе $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{a}_5 &= \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4. \end{aligned}$$

◀

Матрица перехода от одного базиса к другому

Пусть в пространстве $\mathcal{L}$ даны два базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, которые мы будем условно называть «старый» и «новый» соответственно. *Матрицей перехода* от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ называется матрица, по *столбцам* которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе, т.е. если

$$\mathbf{f}_j = t_{1j}\mathbf{e}_1 + t_{2j}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{nj}\mathbf{e}_n, \quad 1 \leq j \leq n,$$

то матрица перехода

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Координаты вектора в разных базисах. Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ — произвольный вектор. Тогда его координаты $[x_1, x_2, \dots, x_n]^\mathsf{T}$ в старом базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ связаны с координатами $[x'_1, x'_2, \dots, x'_n]^\mathsf{T}$ в новом базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ равенством

$$[x_1, x_2, \dots, x_n]^\mathsf{T} = T \cdot [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]^\mathsf{T}.$$

Пример 31 *Даны два базиса*

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 = [1,2,1]^\mathsf{T}, & \mathbf{e}_2 = [2,3,3]^\mathsf{T}, & \mathbf{e}_3 = [3,7,1]^\mathsf{T}; \\ \mathbf{f}_1 = [3,1,4]^\mathsf{T}, & \mathbf{f}_2 = [5,2,1]^\mathsf{T}, & \mathbf{f}_3 = [1,1,-6]^\mathsf{T}. \end{array}$$

Найдите связь координат одного и того же вектора в этих базисах.

► Для того, чтобы найти связь координат одного и того же вектора в разных базисах, найдем матрицу перехода. Для этого нужно решить три системы линейных уравнений

$$x_{1j}\mathbf{e}_1 + x_{2j}\mathbf{e}_2 + x_{3j}\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_j, \quad 1 \le j \le 3,$$

отличающихся только значениями столбца свободных членов. Поскольку эти значения не играют никакой роли при выборе элементарных преобразований, разумно составить расширенную матрицу из основной матрицы и столбцов координат $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & -9 & -31 & -23 \\ 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -51 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(3)} - A_{(1)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(2)} - 2A_{(1)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(4)} + A_{(5)} \\ & A_{(7)} = -A_{(6)} \\ & A_{(8)} = A_{(4)} + 2A_{(7)} \\ \times & A_{(9)} = A_{(1)} - 3A_{(7)} \\ & A_{(10)} = A_{(9)} - 2A_{(8)} \end{array}$$

Получили ступенчатую матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -27 & -71 & -51 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 12 & 8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} A_{(10)} \\ A_{(8)} \\ A_{(7)}. \end{array}$$

Находим решение каждой системы линейных уравнений.

$$\text{Для } \mathbf{f}_1\text{:} \begin{cases} x_{11} = -27, \\ x_{21} = 9, \\ x_{31} = 4. \end{cases}$$

$$\text{Для } \mathbf{f}_2\text{:} \begin{cases} x_{12} = -71, \\ x_{22} = 20, \\ x_{32} = 12. \end{cases}$$

$$\text{Для } \mathbf{f}_3\text{:} \begin{cases} x_{13} = -51, \\ x_{23} = 9, \\ x_{33} = 8. \end{cases}$$

Составляя из найденных координат, матрицу перехода, замечаем, что полученная матрица совпадает с матрицей, расположенной справа от черты в расширенной матрице, т.е. с матрицей

$$T = \begin{bmatrix} -27 & -71 & -51 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}.$$

Итак, формулы связи координат одного и того же вектора в этих базисах имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 51x_3', \\ x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3', \\ x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'. \end{cases}$$

◀

Операции с подпространствами

Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ — два подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$.

Суммой $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ подпространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ называется минимальное подпространство, содержащее оба подпространства.

$$\mathcal{V} + \mathcal{W} = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \mathbf{w} \in \mathcal{W}\}.$$

Пересечением $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ подпространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ называется максимальное подпространство, содержащееся в каждом из них.

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V} \wedge \mathbf{v} \in \mathcal{W}\}.$$

Сумма $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ и пересечение $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ подпространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ является подпространством в $\mathcal{L}$.

Теорема 13 (формула Грассмана) *Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ — два подпространства линейного пространства. Тогда*

$$\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = \dim(\mathcal{V} + \mathcal{W}) + \dim \mathcal{V} \cap \mathcal{W}.$$

Сумма $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ называется *прямой*, если $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$.

Пример 32 *Даны векторы*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a}_1 = [1, 1, 0, 0, -1]^\mathsf{T}, & \mathbf{b}_1 = [1, 0, 1, 0, 1]^\mathsf{T}, \\ \mathbf{a}_2 = [0, 1, 1, 0, 1]^\mathsf{T}, & \mathbf{b}_2 = [0, 2, 1, 1, 0]^\mathsf{T}, \\ \mathbf{a}_1 = [0, 0, 1, 1, 1]^\mathsf{T}; & \mathbf{b}_1 = [1, 2, 1, 2, -1]^\mathsf{T}. \end{array}$$

Найдите базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \text{ и } \mathcal{B} = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle.$$

► **I способ.**

(1) Из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ составляем по *строкам* матрицы A и B.

(2) Из матриц A и B составляем блочную матрицу

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & B \end{array}\right].$$

(3) Приводим ее к ступенчатому виду и отбрасываем ненулевые строки, если такие есть. Их не будет вовсе, если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ являются базисами линейных оболочек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

(4) Ненулевые строки блочной матрицы, расположенные слева от вертикальной черты образуют базис суммы $\mathcal{A} + \mathcal{B}$; ненулевые строки правой половины матрицы, у которых левые половины нулевые, составляют базис пересечения $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Составляем блочную матрицу. При этом достаточно получить трапецевидную матрицу.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\quad
\begin{array}{cl}
 & A_{(1)} \\
 & A_{(2)} \\
 & A_{(3)} \\
\times & A_{(4)} \\
\times & A_{(5)} \\
\times & A_{(6)} \\
\times & A_{(7)} = A_{(4)} - A_{(1)} \\
\times & A_{(8)} = A_{(6)} - A_{(1)} \\
\times & A_{(9)} = A_{(7)} + A_{(2)} \\
\times & A_{(10)} = A_{(8)} - A_{(2)} \\
\times & A_{(11)} = A_{(5)} - 2A_{(2)} \\
 & A_{(12)} = A_{(11)} + A_{(3)} \\
 & A_{(13)} = A_{(10)} - A_{(12)} \\
\times & A_{(14)} = A_{(9)} - 2A_{(3)} \\
\times & A_{(15)} = A_{(14)} + A_{(12)} \\
\times & A_{(16)} = A_{(15)} - A_{(13)} \\
 & A_{(17)} = \frac{1}{2}A_{(16)}
\end{array}$$

Шесть оставшихся строк

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
\boxed{1} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\quad
\begin{array}{l}
A_{(1)} \\
A_{(2)} \\
A_{(3)} \\
A_{(12)} \\
A_{(13)} \\
A_{(17)}
\end{array}$$

дают трапецевидную матрицу, строки которой линейно независимы. Ввиду того, что

$$A_{(12)} = A_{(11)} + A_{(3)} = A_{(5)} - 2A_{(2)} + A_{(3)},$$

получаем линейную независимость $\mathbf{b}_2$ от $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$; следовательно, множество $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2\}$ образуют базис $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. В качестве базиса $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ можно взять векторы

$$[1, 0, 0, 1, 1]^{\mathsf{T}}, [0, 1, 1, 0, 0]^{\mathsf{T}}.$$

II способ. Задача сводится к отысканию линейных зависимостей между векторами.

(1) Из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ составляем по *столбцам* матрицы A и B

(2) Из матриц A и B составляем блочную матрицу $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$.

(3) Приводим ее к ступенчатому виду и отбрасываем ненулевые строки, если такие есть.

(4) Векторы, отвечающие главным столбцам ступенчатой матрицы, образуют базис суммы $\mathcal{A}+\mathcal{B}$; из неглавных столбцов находим базис пересечения $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$.

Итак, найдем линейные зависимости между данными векторами.

$$\begin{array}{ccl}
\left[\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
&
\begin{array}{c}
\times \\ \times \\ \times \\ \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \\ \\ \times \\ \\
\end{array}
&
\begin{array}{l}
A_{(1)} \\
A_{(2)} \\
A_{(3)} \\
A_{(4)} \\
A_{(5)} \\
A_{(6)} = A_{(2)} - A_{(1)} \\
A_{(7)} = A_{(5)} + A_{(1)} \\
A_{(8)} = A_{(7)} - A_{(3)} \\
A_{(9)} = A_{(1)} - A_{(8)} \\
A_{(10)} = A_{(9)} + A_{(6)} \\
A_{(11)} = A_{(3)} - A_{(10)} \\
A_{(12)} = A_{(11)} - A_{(4)} \\
A_{(13)} = A_{(8)} - A_{(12)}
\end{array}
\end{array}$$

Выпишем ненулевые строки, помечая главные столбцы соответствующим исходными векторами:

$$\begin{array}{cl}
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3
\end{array} & \\
\left[\begin{array}{rrr|rrr}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
A_{(9)} \\ A_{(10)} \\ A_{(4)} \\ A_{(12)}.
\end{array}
\end{array}$$

Из этой таблицы сразу находим, что $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1\}$ образуют базис $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Также находим выражения для оставшихся векторов

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_1,$$
$$\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_1.$$

Поэтому базис $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ можно составить из векторов

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,$$
$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3.$$

Ответ отличается от полученного первым способом, но они и не должны совпадать, так как базис подпространства не определяется однозначно. ◀

Ранг матрицы

Рангом матрицы A по строкам называется размерность пространства ее строк и обозначается $\mathrm{rk}_\Gamma A$.

Рангом матрицы A по столбцам называется размерность пространства ее столбцов и обозначается $\mathrm{rk}_\mathrm{B} A$.

Теорема 14 *Ранги матрицы по строкам и по стролбцам равны. Это число называется* ***рангом*** *матрицы и обозначается* $\mathrm{rk}\, A$.

Для нахождения ранга матрицы достаточно привести ее к ступенчатому виду. Тогда ранг матрицы равен числу ненулевых строк в ее ступенчатом виде.

Пространство решений системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *однородной*, если столбец свободных членов равен $\mathbf{0}$.

Множество решений однородной системы уравнений является линейным пространством (точнее, подпространством в $\mathbb{F}^n$.

Теорема 15 *(1) Размерность пространства решений системы $AX = \mathbf{0}$ равна $n - r$, где n — число неизвестных, $r = \mathrm{rk}\, A$.*

(2) Всякое подпространство $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{F}^n$ является пространством решений некоторой однородной системы уравнений.

Базис пространства решений системы $AX = \mathbf{0}$ называется *фундаментальной системой решений.*

Пример 33 *Найдите общее решение и фундаментальную систему решений системы*

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

► Заметим, что основная матрица системы совпадает с матрицей в примере 25. Тогда общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 - x_5, \\ x_3 = x_4 - 3x_5, \\ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \text{ — произвольные.} \end{cases}$$

Для того, чтобы найти фундаментальную систему решений, по очереди присваиваем каждой свободной неизвестной значение 1, а остальным — 0. Таким образом, решения $X_1 = [0,1,0,0,0]^\mathsf{T}$, $X_2 = [-2,0,1,1,0]^\mathsf{T}$ и $X_3 = [-1,0,-3,0,1]^\mathsf{T}$ образуют базис пространства решений данной системы уравнений. ◄

Пример 34 *Найти систему уравнений, задающих линейное пространство, натянутое на векторы*

$$\mathbf{a}_1 = [1, -1, 1, 0]^\mathsf{T}, \quad \mathbf{a}_2 = [1, 1, 0, 1]^\mathsf{T}, \quad \mathbf{a}_3 = [2, 0, 1, 1]^\mathsf{T}.$$

► Пусть $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ — произвольный вектор. Предположим, что координаты $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^\mathsf{T}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3$$

для некоторых α_1, α_2, α_3. Существование таких чисел означает совместность системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x_1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \qquad\quad\; = x_2, \\ -\alpha_1 + \qquad\;\; \alpha_3 = x_3, \\ \qquad\; \alpha_2 + \;\; \alpha_3 = x_4. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 - 2x_4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cl} & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ & A_{(4)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(2)} + A_{(1)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(3)} - A_{(1)} \\ & A_{(7)} = A_{(6)} + A_{(4)} \\ & A_{(8)} = A_{(5)} - 2A_{(4)} \end{array}$$

Полученная система совместна тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - \;\; x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

◄

Линейные многообразия

Линейным многообразием (типа $\mathcal{V}$) называется множество $\mathcal{M} = \mathbf{a} + \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — некоторое подпространство, $\mathbf{a}$ — вектор, не принадлежащий $\mathcal{V}$.

Теорема 16 *(1) Множество решений системы уравнений $AX = B$ совпадает с линейным многообразием $X_0 + \mathcal{L}$, где X_0 — некоторое частное решение $AX = B$, $\mathcal{L}$ — пространство решений сопутствующей однородной системы $AX = \mathbf{0}$.*

(2) Всякое линейное многообразие в $\mathbb{F}^n$ является множеством решений некоторой неоднородной системы уравнений.

Пример 35 *Найдите общее решение и линейное многообразие системы уравнений*

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -6. \end{cases}$$

► Общее решение данной системы

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 - x_5 + 4, \\ x_3 = x_4 - 3x_5 + 5, \\ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \text{ — произвольные,} \end{cases}$$

было найдено в примере 25, а базис пространства решений сопутствующей однородной системы — в примере 33:

$$X_1 = [0, 1, 0, 0, 0]^{\mathsf{T}}, X_2 = [-2, 0, 1, 1, 0]^{\mathsf{T}}, X_3 = [-1, 0, -3, 0, 1]^{\mathsf{T}}.$$

Частное решение удобно находить, зануляя все свободные переменные:

$$X_0 = [4, 0, 5, 0, 0]^{\mathsf{T}}.$$

Итак, множество решений данной системы можно представить в виде

$$X_0 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3,$$

где α, β и $\gamma \in \mathbb{R}$ — произвольные. ◄

Пример 36 *Даны векторы*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a}_0 = [1, -1, 1, -1]^{\mathsf{T}}, & \mathbf{a}_1 = [1, -1, 1, 0]^{\mathsf{T}}, \\ \mathbf{a}_2 = [1, 1, 0, 1]^{\mathsf{T}}, & \mathbf{a}_3 = [2, 0, 1, 1]^{\mathsf{T}}. \end{array}$$

Найдите систему уравнений, задающих линейное многообразие

$$\{\mathbf{a}_0 + \alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 + \gamma\mathbf{a}_3\}.$$

► Сначала найдем сопутствующую однородную систему уравнений, пространство решений которой является линейной оболочкой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

В примере 34 мы нашли сопутствующую однородную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Тогда $\mathbf{a}_0$ — частное решение неоднородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = b_1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = b_2. \end{cases}$$

Подставляя вместо неизвестных координаты вектора $\mathbf{a}_0$, находим $b_1 = 1$, $b_2 = 2$.

Итак, неоднородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2. \end{cases}$$

◄

10. Определители

Перестановки и подстановки. Всякое расположение чисел $1, 2, \ldots, n$ в некотором порядке называется *перестановкой* (*n-перестановкой*).

Множество всех n-перестановок обозначается $\mathbb{P}_n$. Число всевозможных n-перестановок равно $n!$.

Говорят, что в данной перестановке числа i и j образуют *инверсию*, если $i > j$, но стоит раньше j. Перестановка называется *четной*, если число инверсий четное, иначе — *нечетной*.

Всякое взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя называется *подстановкой* (*n-подстановкой*). Обычно подстановки записывают в виде таблицы, располагая числа в первой строке в порядке возрастания:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — n-перестановка. Такая форма записи означает, что $\sigma(1) = i_1$, $\sigma(2) = i_2$, …, $\sigma(n) = i_n$.

Множество всех n-подстановок обозначается $\mathbb{S}_n$. Число различных n-подстановок равно числу всех n-перестановок. Число инверсий подстановки $\operatorname{inv}\sigma$ равно числу инверсий перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. *Знак* $\operatorname{sgn}\sigma$ подстановки σ равен $(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}$.

Пример 37 *Определите четность перестановки* $(7, 5, 6, 4, 1, 3, 2)$.

► Количество инверсий можно подсчитать как число элементов перестановки перед 1 + число элементов перед 2, кроме 1, + число элементов перед 3, кроме 1 и 2, и т.д.…

Для данной перестановки число инверсий равно $4+5+4+3+1+1 = 18$. Следовательно, данная перестановка четная. ◄

Определитель n-го порядка. Пусть A — квадратная матрица n-го порядка. *Определителем матрицы* A называется алгебраическая сумма $n!$ слагаемых, каждый член которой — произведение n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. При этом каждое слагаемое $a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}$ входит со знаком $\operatorname{sgn}\sigma$, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}.$$ ♦

Пример 38 *Выясние, какие из произведений входят в определитель соответствующего порядка? Если входят, то с каким знаком?*

(1) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$*;*

(2) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

► (1) Не входит, т.к. содержит два множителя из второй строки: a_{27} и a_{25}.

(2) Входит со знаком $+$, т.к. подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

четная (число инверсий равно 16). ◄

Пример 39 *Пользуясь только определением определителя, вычислите*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

► Заметим, что единственным ненулевым слагаемым в правой части (♦) будет только произведение $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Его индексы составляют тождественную подстановку $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, $\operatorname{sgn}\varepsilon = 1$. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

◄

Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка.

Свойства определителей

Теорема 17 *Для любой квадратной матрицы* $\det A = \det A^{\mathsf{T}}$.

В частности, все свойства, сформулирванные для строк, верны и для столбцов.

Теорема 18 *Если в матрице поменять местами любые две строки, то определитель матрицы сменит знак на противоположный. Иначе говоря,* $\det$ *есть* ***кососимметрическая*** *фукнция строк матрицы.*

Теорема 19 *Определитель есть линейная фукнция элементов любой ее строки. Иначе говоря, определитель есть* **полилинейная** *функция строк матрицы.*

Теорема 20 *Для всех $n \times n$ матриц A и B,*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Следствие 7 *Определитель матрицы с нулевой строкой равен нулю.*

Следствие 8 *Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен нулю.*

Следствие 9 *Для любой $n \times n$ матрицы A и любого скаляра λ,*

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Следствие 10 *Прибавление к одной строке другой, умноженной на число, не меняет определителя.*

Разложение определителя по строке. *Минором* порядка k (не обязательно квадратной) матрицы A называют определитель матрицы, составленной из элементов матрицы A, стоящих на пересечении каких-либо различных k строк и k столбцов матрицы A.

Пусть A — $n \times n$ матрица. Обозначим $M_{ij}(A)$ минор порядка $n-1$, полученный из A вычеркиванием строки и столбца, содержащих a_{ij}. Число $(-1)^{i+j} M_{ij}(A)$ называют *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} матрицы A

Теорема 21 (Лаплас) *Для каждой строки матрицы A определитель* $\det A$ *равен сумме произведений элементов в этой строке на их алгебраические дополнения; аналогично для каждого столбца:*

$$\det A = \sum_{1 \le j \le n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A), \quad 1 \le i \le n;$$
$$\det A = \sum_{1 \le i \le n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A), \quad 1 \le j \le n.$$

Пример 40 *Пользуясь свойствами определителей, вычислите:*

$$\text{(1)} \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}; \quad \text{(2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

► (1) Определители порядка 4 и выше вычисляют разложением по строке или по столбцу. При этом лучше выбирать ту строку (или столбец), в которой почти все элементы равны нулю.

В данном примере разложим определитель, например, по последней строке. Так как почти все элементы этой строки, кроме d, равны нулю, то единственным ненулевым слагаемым будет произведение d на его алгебраическое дополнение

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} d \cdot \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = d \cdot \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}.$$

Далее можно разложить по последнему столбцу

$$d \cdot \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} cd \begin{vmatrix} a & 3 \\ 0 & b \end{vmatrix} = abcd.$$

(2) Преобразуем определитель таким образом, чтобы один из его столбцов (или одна из строк) содержал максимальное количество нулей. Для этого будем прибавлять к строкам (столбцам) определителя другие строки (столбцы), умноженные на подходящие числа. При этом важно следить за тем, чтобы изменять именно ту строку (столбец), **к которой** прибавляем, а также за порядком строк.

Прибавим последнюю строку ко всем предыдущим и разложим по последнему столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далее, если вынести 2 из каждой строки определителя и вычесть из первого столбца последний, получим

$$-\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Осталось разложить по первому столбцу:

$$-2^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2^3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2^3.$$

◄

Метод вычисления определителей с числовыми элементами, состоящий в обращении в нуль всех элементов некоторой строки (столбца), кроме одного, и последующем понижении порядка, становится весьма громоздким в случае определителей с буквенными элементами. Тем более этот метод неудобен в случае вычисления определителей произвольного порядка n.

Общего метода для вычисления таких определителей не существует. К определителям того или иного специального вида применяют различные методы, приводящие к более простой, чем (♦), формуле. Приведем наиболее употребительные из них.

Приведение к треугольному виду. Определитель преобразуют к такому виду, где все элементы, лежащие по одному сторону одной из диагоналей, равны нулю. Случай побочной диагонали сводится к главной путем изменения порядка строк (столбцов).

Пример 41 *Вычислите приведением к треугольному виду определитель*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

► Вычтем последнюю строку из каждой строки.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 2-n & \dots & -2 & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по последнему столбцу. Получим определитель, содержащий нулевые элементы ниже побочной диагонали. При этом полученный определитель имеет порядок $n-1$.

$$D = (-1)^{n+n} \cdot n \cdot \begin{vmatrix} 1-n & 2-n & \dots & -2 & -1 \\ 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Перестановкой столбцов приведем матрицу определителя к верхнетреугольному виду. Для этого сначала поставим последний столбец на место первого, последовательно переставляя его с соседним столбцом. При этом будет произведено $n-1$ перестановка столбцов. Следовательно, определитель изменит знак $n-1$ раз.

$$D = n\cdot(-1)^{n-1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1-n & 2-n & \dots & -2 \\ 0 & 2-n & 3-n & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Аналогично переставим последний столбец полученного определителя на место второго. При этом определитель изменит знак $n-2$ раза.

$$D = n\cdot(-1)^{(n-1)+(n-2)}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1-n & 2-n & \dots & -3 \\ 0 & -1 & 2-n & 3-n & \dots & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Продолжая так далее переставлять столбцы, получим

$$\begin{aligned} D =& n\cdot(-1)^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & \dots & 1-n \\ 0 & -1 & \dots & 2-n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \\ =& n\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}\cdot n. \end{aligned}$$

◀

Метод рекуррентных соотношений. Определитель выражают, преобразуя и разлагая по строке или столбцу, через определители *того же вида*, но *меньшего порядка*. Полученное равенство называется *рекуррентным* соотношением.

I способ («снизу вверх»). По общему виду определителя вычисляют столько определителей низших порядков, сколько их было в правой части рекуррентного соотношения. Определители более высоких порядков вычисляются последовательно из реккурентного соотношения. При этом, вычислив из рекуррентного соотношения несколько определителей малых порядков, стараются заметить вид искомого выражения, а затем доказывают справедливость этого выражения при любом n с помощью рекуррентного соотношения и индукции по n.

II способ («сверху вниз»). В рекуррентное соотношение, выражающее определитель n-го порядка, подставляют выражение определителя $(n-1)$-го порядка, полученное из того же рекуррентного соотношения заменой n на $n-1$, далее подставляют аналогичное выражение для определителя $(n-2)$-го порядка и т.д., пока не выяснится вид искомого общего выражения определителя n-го порядка.

Можно комбинировать оба пути, используя второй способ для нахождения общего вида выражения определителя n-го порядка, а затем доказывая справедливость данного выражения по индукции.

Пример 42 *Вычислите методом рекуррентных соотношений определитель*

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

► Будем раскладывать данный определитель по последней строке.

$$D_n = (-1)^{n+n} \cdot 3 \cdot D_{n-1} + (-1)^{n+(n-1)} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Далее разложим второй определитель по последнему столбцу. Получим рекуррентное соотношение

$$D_n = 3 \cdot D_{n-1} - 2 \cdot D_{n-2}.$$

Данное соотношение можно преобразовать к выражению вида

$$D_n - D_{n-1} = 2 \cdot (D_{n-1} - D_{n-2})$$

или

$$D_n - 2D_{n-1} = D_{n-1} - 2D_{n-2}.$$

Рассмотрим первое из них. Используя это рекуррентное соотношение найдем выражение для $D_{n-1} - D_{n-2}$ и подставим его в исходное (метод «сверху вниз»).

$$D_n - D_{n-1} = 2 \cdot (D_{n-1} - D_{n-2}) = 2^2 \cdot (D_{n-2} - D_{n-3}).$$

Продолжая так далее, находим выражение для $D_n - D_{n-1}$ через определители наименьших порядков D_2 и D_1, которые соответственно равны 1 и 5.

$$D_n - D_{n-1} = 2^{n-2} \cdot (D_2 - D_1) = -2^n.$$

Теперь рассмотрим второе следствие рекуррентного соотношения

$$D_n - 2D_{n-1} = D_{n-1} - 2D_{n-2}.$$

Повторяя рассуждения, находим значение $D_n - 2D_{n-1}$:

$$D_n - 2D_{n-1} = D_{n-1} - 2D_{n-2} = \ldots = D_2 - 2D_1 = -9.$$

Из системы равенств

$$D_n - D_{n-1} = -2^n, \quad D_n - 2D_{n-1} = -9,$$

находим $D_{n-1} = 9$. Тогда $D_n = D_{n-1} - 2^n = 9 - 2^n$. ◄

Представление определителя в виде суммы определителей. Некоторые определители легко вычисляются путем разложения определителя в сумму определителей того же порядка относительно строк (столбцов).

Пример 43 *Представив определитель в виде суммы двух определетелей, вычислите*

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \ldots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \ldots & a_3b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \ldots & x_n \end{vmatrix}.$$

► К x_n прибавим и вычтем a_nb_n. Тогда последний столбец данного определителя можно представить в виде суммы двух столбцов, а сам определитель — в виде суммы двух определителей, отличающихся только последними столбцами.

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \ldots & a_2b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & (x_n - a_nb_n) + a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \ldots & a_2b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \ldots & 0 \\ a_2b_1 & x_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & x_n - a_nb_n \end{vmatrix}.$$

Раскладывая второй определитель в сумме по последнему столбцу, получим определитель того же вида, что и исходный, только порядка $n - 1$.

Рассмотрим отдельно первый определитель в сумме. Вычислим его методом приведения к треугольному виду. Заметим, что все элементы последней строки кратны a_n. Вынесем a_n из последней строки и, последовательно домножая ее на a_i, будем вычитать из i-ой строки, где $1 \leq i \leq (n-1)$.

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \dots & a_2b_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{vmatrix} = a_n \cdot \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \dots & a_2b_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$= a_n \cdot \begin{vmatrix} x_1 - a_1b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 - a_2b_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель — определитель нижнетреугольной. Он равен произведению элементов главной диагонали. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \dots & a_2b_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{vmatrix} = a_nb_n(x_1 - a_1b_1)(x_2 - a_2b_2)\dots(x_{n-1} - a_{n-1}b_{n-1}).$$

Итак, рекуррентное соотношение для D_n имеет вид

$$D_n = (x_1 - a_1b_1)(x_2 - a_2b_2)\dots(x_{n-1} - a_{n-1}b_{n-1})a_nb_n + (x_n - a_nb_n)D_{n-1}.$$

Используя рекуррентное соотношение, находим

$$\begin{aligned} D_n = &(x_1 - a_1b_1)(x_2 - a_2b_2)\dots(x_{n-1} - a_{n-1}b_{n-1})a_nb_n \\ &+ (x_1 - a_1b_1)\dots(x_{n-2} - a_{n-2}b_{n-2})(x_n - a_nb_n)a_{n-1}b_{n-1} \\ &+ (x_n - a_nb_n)(x_{n-1} - a_{n-1}b_{n-1})D_{n-2}. \end{aligned}$$

Продолжая так далее, находим

$$\begin{aligned} D_n = &(x_1 - a_1b_1)(x_2 - a_2b_2)\dots(x_{n-1} - a_{n-1}b_{n-1})a_nb_n \\ &+ (x_1 - a_1b_1)\dots(x_{n-2} - a_{n-2}b_{n-2})(x_n - a_nb_n)a_{n-1}b_{n-1} + \dots \\ &+ (x_2 - a_2b_2)\dots(x_{n-1} - a_{n-1}b_{n-1})(x_n - a_nb_n)a_1b_1. \end{aligned}$$

Вынеся множитель $\prod\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - a_ib_i)$, получим выражение определителя

$$D_n = \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - a_ib_i) \times \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{a_jb_j}{x_j - a_jb_j}.$$

◀

Выделение линейных множителей. Определитель рассматривается как многочлен от одной или нескольких входящих в него букв. Преобразуя его, выясняют, что он делится на ряд линейных множителей, а значит, если эти множители взаимно просты, и на их произведение.

Сравнивая отдельные члены определителя с членами произведения множителей, находят частное от деления определителя на это произведение и тем самым находят сам определитель.

Пример 44 *Вычислите методом выделения линейных множителей определитель Вандермонда n-го порядка*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

► Рассмотрим D_n как многочлен от переменной x_n в коэффициентами, зависящими от $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Видим, что D_n обращается в нуль при $x_n = x_1, x_n = x_2, \dots, x_n = x_{n-1}$. Следовательно, D_n делится на многочлены $x_n - x_1, x_n - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}$. Так как все эти многочлены взаимно просты, то D_n делится и на их произведение, т.е.

$$D_n = q \cdot (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}), \qquad (*)$$

где q — некоторый многочлен, зависящий от $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Разлагая определитель Вардермонда по последней строке, видим, что он является многочленом степени $n-1$ от x_n, причем коэффициент при старшем члене x_n^{n-1} равен D_{n-1}:

$$D_n = D_{n-1}x_n^{n-1} + \text{ младшие члены.}$$

С другой стороны, из равенства $(*)$ коэффициент при x_n^{n-1} равен q. Следовательно,

$$q = D_{n-1}.$$

Получили рекуррентную формулу

$$D_n = D_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}).$$

Откуда находим выражение для исходного определителя

$$D_n = \prod_{1 \le j < i \le n} (xi - x_j).$$

◄

Некоторые приложения определителей

Ранг матрицы по минорам. Метод окаймляющих миноров. *Рангом по минорам* произвольной (необязательно квадратной) матрицы A называют наибольший порядок $\mathrm{rk}_{\mathrm{M}}\, A$ ее минора с ненулевым значением.

Теорема 22 *Ранг матрицы по минорам равен ее рангу по строкам/столбцам.*

Окаймляющим минором данного минора M матрицы A называют каждый минор $\widetilde{M}$, вычеркивание из которого крайней строки и крайнего столбца дает M.

Теорема 23 *Ранг A по минорам равен такому числу r, что у A имеется ненулевой минор M порядка r, а значения всех миноров A, окаймляющих M, нулевые.*

Таким образом, при вычислении ранга матрицы A по минорам, следует переходить от миноров меньших порядков к минорам меньших порядков. Если $M \neq 0$ порядка r, то следует вычислять лишь миноры порядка $r+1$, окаймляющие M. Если все они равны 0, то $\mathrm{rk}\, A = r$.

Пример 45 *Найдите методом окаймляющих миноров ранг матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

► В качестве ненулевого минора порядка 1 можно взять $M_1 = 2$. Рассмотрим минор $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ порядка 2, окаймляющий найденный минор M_1. Заметим, что $M_2 = 0$. Поэтому рассмотрим еще один минор $M_2' = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ порядка 2, окаймляющий минор M_1. Так как $M_2' \neq 0$, то перейдем к минорам 3-го порядка, окаймляющим данный минор.

В матрице A содержится три минора порядка 3, окаймляющих минор M_2'. А именно,

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_3' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad M_3'' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Поскольку каждый из них равен нулю, то $\mathrm{rk}_{\mathrm{M}}\, A = 2$. ◄

Критерий невырожденности матрицы. Обратные матрицы. Матричные уравнения.

Теорема 24 *Следующие условия на $n \times n$ матрицу A равносильны:*
(1) $\det A \neq 0$*;*
(2) $\operatorname{rk} A = n$*;*
(3) существует такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Если эти условия выполнены, то матрицу A называют *невырожденной*, а матрицу A^{-1} — *обратной* к A.

Обозначим $A^{\vee}$ **транспонированную** матрицу алгебраических дополнений, т.е. матрицу с элементами $a_{ij}^{\vee} = (-1)^{i+j} M_{ji}$. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee}.$$

Однако при вычислении обратных матриц более эффективным и менее трудоемким явяется **метод элементарных преобразований**.

Заметим, что обратная матрица A^{-1} является решением *матричного уравнения* $AX = E$ с известной матрицей A и единичной матрицей E (того же размера). Тогда матрица X должна быть квадратной, и каждый ее столбец $X^{(i)}$ является решением системы уравнений $AX^{(i)} = E^{(i)}$, где $X^{(i)}$ обозначает i-й столбец X. Разумно поступить аналогично примеру 31, составив расширенную матрицу $[A|E]$ и приведя ее к ступенчатому виду, найти обратную матрицу.

Пример 46 *Найдите обратную матрицу A^{-1} для матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

► Приписываем к матрице A справа столбцы единичной матрицы E, т.е. саму единичную матрицу, затем приводим левую половину к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ & A_{(3)} \\ & A_{(4)} = A_{(2)} + 2A_{(3)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(1)} - 3A_{(3)} \\ & A_{(6)} = A_{(5)} - A_{(4)}. \end{array}$$

Выписываем оставшиеся строки матрицы

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{(3)} \\ A_{(4)} \\ A_{(6)}. \end{array}$$

Матрица, стоящая в правой части, обратна к исходной матрице A. ◀

Пример 47 *Решите матричное уравнение*

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ -5 & 8 & -3 \\ -4 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

▶ Если матрица A невырождена, то решение X матричного уравнения $AX = B$ ($XA = B$) можно найти, умножая обе части уравнения на матрицу A^{-1}:

$$X = A^{-1}B \quad (X = BA^{-1}).$$

В данном примере матрица A не обратима, т.к. ее столбцы линейно зависимы: $A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} = \mathbf{0}$. Заметим, что столбцы матрицы B также линейно зависимы: $B^{(1)} + B^{(2)} + B^{(3)} = \mathbf{0}$. Найдем решение данного уравнения.

Составим таблицу и приведем ее левую половину к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -3 & 1 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -5 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(2)} - A_{(3)} \\ & A_{(5)} = A_{(1)} - A_{(3)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(3)} - 2A_{(4)} \\ & A_{(7)} = A_{(6)} + 2A_{(5)} \\ & A_{(8)} = A_{(4)} + A_{(5)}. \end{array}$$

В сторке $A_{(7)}$ выяснилось, что все три столбца начальной матрицы B дают совместные системы. Выпишем оставшиеся ненулевые строки:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} A_{(8)} \\ A_{(5)}. \end{array}$$

Теперь по ним нужно записать фундаментальные решения сопутствующей однородной системы $AX = \mathbf{0}$ и по одному частному решению неоднородной системы $AX = B^{(k)}$ для каждого столбца матрицы B. Пусть x_3

— параметр. Подставляя $x_3 = 1$, находим фундаментальное решение X_0; подставляя $x_3 = 0$ находим частные решения X_1, X_2, X_3:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы $AX = B^{(k)}$ есть линейное многообразие

$$\{X^{(k)} + \alpha_k X^{(0)} \mid \alpha_k \in \mathbb{R}\},$$

причем параметры α_1, α_2, α_3 между собой независимы. Поэтому общее решение исходного матричного уравнения записывается в виде

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix},$$

или

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

◀

Правило Крамера.

Теорема 25 *Если* $\det A \neq 0$, *то система* $AX = B$ *линейных уравнений в матричной форме записи, она же*

$$A^{(1)}x_1 + A^{(2)}x_2 + \ldots + A^{(n)}x_n = B$$

в форме линейной комбинации столбцов, имеет единственное решение

$$X = [\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n]^\mathsf{T}, \quad \widehat{x}_j = D_j / \det A,$$

где D_j *есть определитель матрицы, полученной из матрицы* A *заменой столбца* $A^{(j)}$ *на столбец* B.

Применение определителей к составлению уравнений и доказательству линейной (не)зависимости.

Пример 48 *Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три точки* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) *лежали на одной прямой.*

► Пусть $Ax + By + c = 0$ — уравнение прямой. Принадлежность данных точек прямой равносильно тому, что каждое из равенств

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ Ax_2 + By_2 + C = 0, \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$$

является тождеством. Данную систему можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных A, B, C, не равных одновременно нулю.

Однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A$ меньше числа переменных. Последнее означает линейную зависимость строк матрицы, что равносильно равенству нулю определителя матрицы системы, т.е.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

◄

Пример 49 *Составьте уравнение окружности, проходящей через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), не лежащие на одной прямой.*

► Пусть (x, y) есть произвольная точка окружности, и $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ — уравнение искомой окружности. Так как все четыре точки (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) принадлежат на данной окружности, то их координаты удовлетворяют уравнению окружности. Получаем систему уравнений относительно x_0, y_0 и R:

$$\begin{cases} x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - R^2 = 0, \\ x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2 + y_1^2 - 2y_1y_0 + y_0^2 - R^2 = 0, \\ x_2^2 - 2x_2x_0 + x_0^2 + y_2^2 - 2y_2y_0 + y_0^2 - R^2 = 0, \\ x_3^2 - 2x_3x_0 + x_0^2 + y_3^2 - 2y_3y_0 + y_0^2 - R^2 = 0, \end{cases}$$

которую перепишем в виде

$$\begin{cases} -2xx_0 - 2yy_0 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) + (x^2 + y^2) = 0, \\ -2x_1x_0 - 2y_1y_0 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) + (x_1^2 + y_1^2) = 0, \\ -2x_2x_0 - 2y_2y_0 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) + (x_2^2 + y_2^2) = 0, \\ -2x_3x_0 - 2y_3y_0 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) + (x_3^2 + y_3^2) = 0. \end{cases}$$

Получили систему уравнений относительно неизвестных x_0, y_0 и $x_0^2+y_0^2-R^2$. Она совместна тогда, когда строки расширенной матрицы данной системы линейно зависимы, т.е.

$$\begin{vmatrix} -2x & -2y & 1 & x^2+y^2 \\ -2x_1 & -2y_1 & 1 & x_1^2+y_1^2 \\ -2x_2 & -2y_2 & 1 & x_2^2+y_2^2 \\ -2x_3 & -2y_3 & 1 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

◀

Пример 50 *Докажите линейную независимость системы функций*

$$e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx},$$

где все k_1, k_2, ..., k_n — попарно различные вещественные числа.

▶ Запишем тривиальную линейную комбинацию

$$\alpha_1 e^{k_1x} + \alpha_2 e^{k_2x} + \ldots + \alpha_n e^{k_nx} = \mathbf{0}$$

и продифференцируем полученное равенство $n-1$ раз. Получим систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & \ldots & e^{k_nx} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & \ldots & k_ne^{k_nx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1}e^{k_1x} & k_2^{n-1}e^{k_2x} & \ldots & k_n^{n-1}e^{k_nx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Так как $e^{k_i} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то система равносильна системе

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Определитель матрицы данной системы есть определитель Вандремонда, который не равен нулю для попарно различных чисел k_1, k_2, ..., k_n. Следовательно, система уравнений имеет только нулевое решение $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, и данная система функций линейно независима. ◀

11. Билинейные и квадратичные формы

Пусть $\mathbb{F}$ обозначает одну из числовых множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Билинейной формой на $\mathbb{F}^n$ называют выражение вида

$$f(X,Y) = X^{\mathsf{T}}AY,$$

где $X = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathsf{T}}$ и $Y = [y_1, \ldots, y_n]^{\mathsf{T}}$ принимают значения из $\mathbb{F}^n$, а $A = [a_{ij}]$ — матрица коэффициентов порядка $n \times n$, которая называется *матрицей билинейной формы.*

Билинейную форму можно записать в виде многочлена от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$

$$f(X,Y) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j.$$

Билинейная форма обладает свойством *линейности* по каждому аргументу:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y) =& \alpha_1 f(X_1, Y) + \alpha_2 f(X_2, Y), \\ f(X, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2) =& \beta_1 f(X, Y_1) + \beta_2 f(X, Y_2), \end{aligned}$$

где $X_i, Y_j \in \mathbb{F}^n$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}$ $(i,j = 1,2)$.

Квадратичной формой называют выражение вида

$$q(X) = f(X,X) = X^{\mathsf{T}}AX.$$

которое также можно представить в виде многочлена

$$q(X) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

Билинейная форма называется *симметричной*, если

$$f(X,Y) = f(Y,X).$$

Теорема 26 *Билинейная форма $f(X,Y) = X^{\mathsf{T}}AY$ симметричная тогда и только тогда, когда матрица A билинейной формы f симметрична.*

Теорема 27 *Любая квадратичная форма задается симметричной матрицей.*

Изменение матрицы билинейной формы при смене базисов. Пусть S — матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, связывающая старые и новые координаты векторов $X = SX'$ и $Y = SY'$. Тогда матрица билинейной формы в новых координатах имеет вид:

$$A' = S^{\mathsf{T}}AS.$$

Две билинейные формы называются *эквивалентыми*, если одна получена из другой заменой переменных.

Говорят, что билинейная форма f имеет *канонический вид*, если ее матрица A диагональна. Базис $\mathcal{B}$, в котором A диагональна, называется *каноническим.*

Теорема 28 (Лагранж) *Для всякой квадратичной формы существует канонический базис.*

Метод приведения квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа, метод выделения полных квадратов). Пусть дана квадратичная форма

$$q(X) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j.$$

(1) Пусть $a_{11} \neq 0$. Если $a_{11} = 0$ и $a_{ii} \neq 0$, то перенумеровываем переменные.

Итак, можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Сгруппируем все слагаемые, содержащие x_1, и выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} q(X) =& [a_{11}x_1^2 + 2x_1(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)] + \sum_{2\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j \\ =& a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 + \sum_{2\le i,j\le n} b_{ij}x_ix_j. \end{aligned}$$

Далее повторяем рассуждения для формы $\sum\limits_{2\le i,j\le n} b_{ij}x_ix_j$ и т.д.

(2) Если все $a_{ii} = 0$ и $a_{ij} \neq 0$, то можно сделать замену переменных:

$$x_i = x_i' - x_j', \quad x_j = x_i' + x_j', \quad x_k = x_k' \text{ для всех } k \neq i, j.$$

Пример 51 *Найдите нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду форму, для формы*

$$q(X) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1.$$

► Так как все $a_{ii} = 0$ и $a_{12} \neq 0$, то выполним замену

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3, \quad x_4 = y_4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} q(Y) =& (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 + y_4) + (y_1 + y_2)y_3 + y_3y_4 \\ =& y_1^2 + y_1y_3 + y_1y_4 - y_2^2 - y_2y_4 + y_2y_3 + y_3y_4. \end{aligned}$$

Теперь квадратичная форма содержит y_1^2. Сгруппируем слагаемые, содержашие y_1, и выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} q(Y) =&[y_1^2 + y_1(y_3+y_4)] - y_2^2 - y_2y_4 + y_2y_3 + y_3y_4 \\ =&[y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4]^2 - \frac{1}{4}(y_3+y_4)^2 - y_2^2 - y_2y_4 + y_2y_3 + y_3y_4 \\ =&[y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4]^2 - y_2^2 + y_2y_3 - y_2y_4 - \frac{1}{4}[y_3 - y_4]^2. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения для $-y_2^2 + y_2y_3 - y_2y_4 - \frac{1}{4}[y_3 - y_4]^2$, найдем канонический вид квадратичной формы:

$$q(Y) = [y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4]^2 - [y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4]^2.$$

Введем новые переменные $z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4$, $z_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4$, $z_3 = y_3$ и $z_4 = y_4$. Тогда квадратичная форма примет вид:

$$q(Z) = z_1^2 - z_2^2.$$

Теперь найдем преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду. Перепишем преобразования переменных в матричном виде:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot Y, \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot Z$$

Итак, преобразование переменных, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot Z.$$

Заметим, что преобразование координат определено неоднозначно. ◀

Вещественные квадратичные формы

Следствие 11 *Для всякой квадратичной формы q ранга r на пространстве $\mathbb{F}^n$, найдется базис, в котором*

$$q(X) = c_1x_1^2 + \dots c_rx_r^2, \qquad \text{где } c_i \in \mathbb{F}^\times = \mathbb{F} \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

В случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ квадратичную форму можно привести к сумме квадратов. Случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ сложнее: нельзя избавится от минусов.

Следствие 12 *Для всякой вещественной квадратичной формы q существует базис, в котором она принимает* **нормальный** *вид*

$$q(X) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2.$$

Теорема 29 (закон инерции) *Числа p и r, определяющие вид нормальный вид вещественной квадратичной формы q, зависят только от q и не зависят от выбора базиса, приводящего его к каноническому виду.*

Число r называется *индексом инерции* (*рангом*) квадратичной формы, p — *положительным* индексом инерции, $r-p$ — *отрицательным* индексом инерции, $2p - r$ — сигнатура. Иногда сигнатурой называют пару чисел $(p, r - p)$.

Индекс инерции	Название	Дополнительные условия
$r = n$	*Невырожденная*	
$p = n$	*Положительно определеная*	$\mathbf{x} \neq 0 \Longrightarrow q(\mathbf{x}) > 0$
$r - p = n$	*Отрицательно определеная*	$\mathbf{x} \neq 0 \Longrightarrow q(\mathbf{x}) < 0$
$r - p = 0$	*Неотрицательно полуопределеная*	$q(\mathbf{x}) \geq 0$
$p = 0$	*Неположительно полуопределеная*	$q(\mathbf{x}) \leq 0$

Главным минором матрицы A называется минор $\Delta_k(A)$, составленный из первых k строк матрицы A и первых k столбцов.

Теорема 30 *Если все главные миноры матрицы вещественной квадратичной формы q имеют ненулевые значения $\Delta_0, \ldots, \Delta_n$, то количества сохранений и перемен знаков в этой последовательности равны положительному и отрицательному индексам инерции формы q.*

Следствие 13 (критерий Сильвестра) *Для всякой вещественной квадратичной формы равносильны утверждения:*
(1) квадратичная форма положительно определена;
(2) в любом базисе ее главные миноры положительны.

Пример 52 *Найдите все значения параметра λ, при которых положительно определена квадратичная форма*

$$f = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3.$$

► Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

и вычислим главные миноры матрицы A:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 2 - \lambda^2, \quad \Delta_3 = 5 - 3\lambda^2.$$

Для положительной определенности данной форму необходимо, чтобы $\Delta_2 = 2-\lambda^2 > 0$ и $\Delta_3 = 5-3\lambda^2 > 0$. Решая полученную систему неравенств, находим $|\lambda| < \sqrt{5/3}$. ◄

12. Линейные отображения и линейные операторы

Пусть $\mathbb{F}$ обозначает одну из числовых систем: $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Предположим, что $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ — линейные пространства над $\mathbb{F}$ размерностей $\dim \mathcal{V} = n$ и $\dim \mathcal{W} = m$ соответственно.

Отображение $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ пространства $\mathcal{V}$ в пространство $\mathcal{W}$ называется *линейным*, если для любых $X, Y \in \mathcal{V}$ и для любых α, $\beta \in \mathbb{F}$

$$\varphi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\varphi(X) + \beta\varphi(Y).$$

Если $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, то линейное отображение $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ называется *линейным оператором.*

Теорема 31 *Между линейными отображениями $\mathcal{V}$ в $\mathcal{W}$ и $m \times n$ матрицами имеется взаимно однозначное соответствие.*

Матрица линейного отображения. Соответствие между линейными отображениями и матрицами задается следующим образом. Рассмотрим стандартный базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ пространства $\mathbb{F}^n$. Образы $\varphi(\mathbf{e}_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ векторов стандартного базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ принадлежат пространству $\mathbb{F}^m$, следовательно, могут быть разложены по базису $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ стандратного базиса $\mathbb{F}^m$:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_1) =& a_{11}\mathbf{f}_1 + \ldots + a_{m1}\mathbf{f}_m, \\ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(\mathbf{e}_n) =& a_{1n}\mathbf{f}_1 + \ldots + a_{mn}\mathbf{f}_m. \end{aligned}$$

Тогда матрица, **столбцы** которой состоят из координат образов $\varphi(\mathbf{e}_i)$ базисных векторов,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

будет искомой матрицей. Она называется *матрицей линейного отображения* в базисах $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$.

Пример 53 *Найдите матрицу линейного оператора* $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{a}$ *в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^3$*, если* $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$ *в ортонормированном базисе* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *, а* $(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ *обозначает стандартное скалярное произведение.*

► Вычислим $\varphi(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
&\varphi(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3,\\
&\varphi(\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) = \mathbf{0},\\
&\varphi(\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) = -3(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) = -3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица линейного оператора φ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

◄

Образ вектора при линейном отображении. Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ имеет координаты X. Предположим, что линейное отображение $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ задано матрицей A в базисах $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$. Тогда координаты образа вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ можно найти по формуле:

$$\varphi(\mathbf{x}) = AX.$$

Пример 54 *Докажите, что существует единственный линейный оператор пространства* $\mathbb{R}^3$*, переводящий векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ *соответственно в векторы* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$*, если* $\mathbf{a}_1 = [2, 3, 5]^\mathsf{T}$*,* $\mathbf{a}_2 = [0, 1, 2]^\mathsf{T}$*,* $\mathbf{a}_3 = [1, 0, 0]^\mathsf{T}$*,* $\mathbf{b}_1 = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$*,* $\mathbf{b}_2 = [1, 1, -1]^\mathsf{T}$*,* $\mathbf{b}_3 = [2, 1, 2]^\mathsf{T}$*.*

► Обозначим A_φ матрицу искомого линейного оператора φ в том же базисе, в котором заданы координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. Тогда

$$A_\varphi \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Составим матрицы A и B из столбцов координат векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ соответственно. Тогда матрица A_φ будет решением матричного уравнения

$$A_\varphi \cdot A = B.$$

Это уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда A — обратимая матрица, т.е. ее столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно независимы.

Итак, $A_\varphi = BA^{-1}$. Находим$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$. Следовательно, $A_\varphi = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. ◀

Матрица линейного отображения в разных базисах. Рассмотрим $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ — старый и новый базисы пространства $\mathcal{V}$, а $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ и $\{\mathbf{f}'_1, \ldots, \mathbf{f}'_m\}$ — старый и новый базисы пространства $\mathcal{W}$. Обозначим соответственно S и T матрицы перехода между базисами пространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$.

Пусть $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ — линейное отображение. Тогда матрица A этого отображения в базисах $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ связана с матрицей A' отображения в базисах $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, $\{\mathbf{f}'_1, \ldots, \mathbf{f}'_m\}$ равенством

$$A' = S^{-1}AT.$$

Пример 55 *Линейный оператор φ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ имеет матрицу*

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

▶ Матрицу оператора в новом базисе найдем по формуле $A' = T^{-1}AT$. Составляем матрицу перехода, находим T^{-1}, а затем A':

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

◀

Ядро и образ линейного отображения. *Ядром* $\operatorname{Ker}\varphi$ линейного отображения $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ называется такое множество векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, что $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т.е.

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in \mathcal{V} \mid \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Образом $\operatorname{Im}\varphi$ линейного отображения $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ называется множество образов $\varphi(\mathbf{x})$ всех векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, т.е.

$$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(\mathcal{V}) = \{\varphi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}.$$

Если A — матрица линейного оператора φ, то

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\varphi &= \text{ пространство решений } A\mathbf{x}=\mathbf{0}, \\ \operatorname{Im}\varphi &= \text{ пространство столбцов матрицы } A. \end{aligned}$$

Пример 56 *Найдите базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

► **I способ.** Для того, чтобы найти базис ядра $\operatorname{Ker}\varphi$ линейного оператора φ, нужно найти базис пространства решений системы уравнений $AX = \mathbf{0}$.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{cl} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(2)} - A_{(1)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(1)} - 2A_{(5)} \\ & A_{(7)} = A_{(6)} + A_{(3)} \\ \times & A_{(8)} = A_{(4)} - 5A_{(5)} \\ & A_{(9)} = A_{(8)} + 2A_{(3)} \\ & A_{(10)} = A_{(5)} - A_{(3)} \end{array}$$

Выпишем ненулевые строки ступенчатой матрицы, выделяя главные единицы:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} A_{(10)} \\ A_{(3)}. \end{array}$$

Теперь последовательно подставляя вместо свободных переменных x_2, x_3 значение 1 и зануляя остальные свободные переменные, находим базис пространства решений:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Далее, чтобы найти базис образа $\operatorname{Im}\varphi$ оператора φ, нужно определить базис пространства столбцов матрицы A. По найденному ступенчатому виду матрицы A, определяем, что, например, первый и последний столбцы матрицы A можно взять в качестве базисных.

Итак,

$$\operatorname{Ker}\varphi = \langle [-2, 1, 0, 3]^{\mathsf{T}}, [3, 0, 1, -5]^{\mathsf{T}} \rangle$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \langle [2,3,0,5]^{\mathsf{T}}, [12,1,3]^{\mathsf{T}} \rangle$$

II способ позволяет одновременно находить базис ядра и образа линейного отображения. Для этого нужно:

(1) составить расширенную матрицу $\left[E|A^{\mathsf{T}}\right]$;

(2) над строками расширенной матрицы выполнить преобразования, приводящие AT к ступенчатому виду B, и пусть в результате справа будет получена матрица C;

(3) ненулевые строки матрицы B образуют базис образа линейного отображения, а строки матрицы C, справа от которых стоят нулевые строки матрицы B, образуют базис ядра линейного отображения.

Итак, составляем расширенную матрицу $\left[E|A^{\mathsf{T}}\right]$ и приводим A^{T} к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 5 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\
1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\
0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\quad
\begin{array}{cl}
\times & A_{(1)} \\
 & A_{(2)} \\
\times & A_{(3)} \\
\times & A_{(4)} \\
 & A_{(5)} = A_{(2)} + A_{(3)} \\
\times & A_{(6)} = A_{(4)} - A_{(2)} \\
\times & A_{(7)} = A_{(1)} - 2A_{(2)} \\
 & A_{(8)} = A_{(6)} - 2A_{(5)} \\
 & A_{(9)} = A_{(7)} - 3A_{(5)}.
\end{array}$$

Выпишем оставшиеся строки:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\quad
\begin{array}{l}
A_{(2)} \\
A_{(5)} \\
A_{(8)} \\
A_{(9)}.
\end{array}$$

Находим

$$\operatorname{Ker}\varphi = \langle [0,-3,2,1]^{\mathsf{T}}, [1,-5,-3,0]^{\mathsf{T}} \rangle,$$
$$\operatorname{Im}\varphi = \langle [1,0,-3,1]^{\mathsf{T}}, [0,1,2,1]^{\mathsf{T}} \rangle.$$

Найденные вторым способом базисы ядра и образа отличается от предыдущих. Но базис и не определяется однозначно. ◀

13. Собственные и корневые подпространства

Инвариантные подпространства. Подпространство $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ называется *инвариантным* относительно линейного оператора $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, если $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$, т.е.

$$\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{U} \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{U}.$$

Теорема 32 *Для всякого линейного оператора $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k$, где все $\mathcal{V}_i$ инвариантны относительно φ;

(2) в некотором базисе пространства $\mathcal{V}$ оператор φ задается блочно-диагональной матрицей с k блоками на диагонали.

Собственные векторы и собственные значения. Вектор $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\mathsf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, принадлежащим *собственному значению* (*числу*) $\lambda \in \mathbb{F}$, если $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.

Собственным подпространством, принадлежщим собственному числу $\lambda \in \mathbb{F}$, называют множество собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ, в объединении с нулевым вектором, т.е.

$$\mathcal{V}^\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} \mid \mathsf{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

Другими словами, $\mathcal{V}^\lambda = \operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E})$, где за E обозначен тождественный оператор на $\mathcal{V}$. Размерность $\dim \mathcal{V}^\lambda$ собственного подпространства $\mathcal{V}^\lambda$ называют *геометрической кратностью* числа λ.

Спектром оператора A называют множество всех собственных значений A вместе с их геометрическими кратностями и обозначают $\operatorname{Spec}\mathsf{A}$.

Теорема 33 *Пусть дан линейный оператор $\mathsf{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Тогда:*

(1) собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы;

(2) сумма всех собственных подпространств — прямая.

Характеристический многочлен матрицы и оператора. Многочлен $\chi_A(t) = \det(A - tE)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

Характеристический многочлен $\chi_{\mathsf{A}}(t)$ оператора $\mathsf{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ — это характеристический многочлен матрицы A этого оператора в некотором базисе.

Можно доказать, что для матрицы порядка $n \times n$ характеристический многочлен равен

$$|A - \lambda E| = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + c_n,$$

где c_i — сумма главных миноров порядка i матрицы A.

Теорема 34 *Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) λ — собственное число оператора A;

(2) $\chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = 0$;

(3) $\mathcal{V}^\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$.

Пример 57 *Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

► (1) Составим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Тогда по теореме 34 все собственные числа данного оператора являются корнями многочлена $\chi_A(\lambda)$. Вычисляя главные миноры матрицы A, находим характеристический многочлен оператора:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 + (4-7+4)(-\lambda)^2$$
$$+ \left(\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} \right)(-\lambda) + \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2.$$

Корнями многочлена $\chi_A(\lambda)$, а, следовательно, и собственными числами оператора являются $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$.

(2) Найдем собственные векторы, принадлежащие собственным числам 1 и 0. Для этого достаточно найти базис собственных подпространств $\mathcal{V}^1$ и $\mathcal{V}^0$, т.е. базис $\mathrm{Ker}(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E})$ для $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$.

$\underline{\lambda = 1}$. Составляем матрицу оператора $\mathsf{A}_1 = \mathsf{A} - \lambda\mathsf{E}$ при $\lambda = 1$:

$$A_1 = A - 1 \cdot E = \begin{bmatrix} 4-1 & -5 & 2 \\ 5 & -7-1 & 3 \\ 6 & -9 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ищем базис ядра оператора A_1. Для этого составляем расширенную матрицу $[E|A_1^{\mathsf{T}}]$ и приводим ее к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(3)} + A_{(1)} \\ & A_{(5)} = A_{(4)} + A_{(2)} \\ & A_{(6)} = A_{(2)} + 2A_{(1)} \\ & A_{(7)} = A_{(1)} - 3A_{(6)}. \end{array}$$

Получили матрицу:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} A_{(6)} \\ A_{(7)} \\ A_{(5)}. \end{array}$$

Отсюда определяем базис ядра $\operatorname{Ker} A_1$ составляет вектор с координатами $[1,1,1]^{\mathsf{T}}$. Значит, $\mathcal{V}^1 = \langle [1,1,1]^{\mathsf{T}} \rangle$.

Теперь рассмотрим $\underline{\lambda = 0}$ и оператор $\mathsf{A}_0 = \mathsf{A}$. Повторяя рассужения, находим:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Итак, базис ядра оператора A_0 составляет вектор $[1,2,3]^{\mathsf{T}}$. Значит, $\mathcal{V}^0 = \langle [1,2,3]^{\mathsf{T}} \rangle$. ◀

Пример 58 *Доказать, что линейное подпространство, натянутое на любую систему собственных векторов преобразования* A*, инвариантно относительно* A*.*

▶ Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ — собственные векторы оператора A, принадлежащие собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ соответственно. Рассмотрим линейную оболочку $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ и вектор $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$. Тогда

$$\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathsf{A}(x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_k\mathbf{a}_k) = (x_1\lambda_1)\mathbf{a}_1 + \ldots + (x_k\lambda_k)\mathbf{a}_k,$$

то есть $\mathsf{A}\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$. ◀

Диагонализация линейного оператора

Линейный оператор A называется *диагонализируемым*, если в некотором базисе его матрица A диагональна.

Многочлен в $\mathbb{F}[x]$ называется *вполне разложимым над* $\mathbb{F}$, если он разлагается в произведение линейных множителей в $\mathbb{F}[x]$.

Теорема 35 (критерий диагонализируемости) *Для всякого линейного оператора* A *на линейном пространстве* $\mathcal{V}$ *над* $\mathbb{F}$ *эквивалентны утверждения:*

(1) оператор A *диагонализируем;*

(2) характеристический многочлен $\chi_{\mathsf{A}}(t)$ *вполне разложим над* $\mathbb{F}$ *и геометрическая кратность корня* λ *равна его кратности как корня* $\chi_{\mathsf{A}}(t)$*;*

(3) прямая сумма всех собственных подпространств оператора A *равна всему пространству* $\mathcal{V}$*, т.е.*

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} \mathsf{A}} \mathcal{V}^{\lambda}.$$

Следствие 14 *Любой оператор, имеющий различные собственные значения, диагонализируем.*

Пример 59 *Выясните, можно ли привести к диагональному виду над $\mathbb{R}$ матрицу оператора:*

$$(a)\ \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix};\quad (b)\ \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix};\quad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если возможно, то найдите этот вид и базис, в котором матрица оператора диагональна.

► (a) Составляем характеристический многочлен $\chi_{\mathsf{A}}(\lambda)$ и находим его корни.

$$\chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

Многочлен $\chi_{\mathsf{A}}(\lambda)$ имеет простой корень 1 и двойной корень 2.

Найдем базис собственного подпространства $\mathcal{V}^1 = \operatorname{Ker}\mathsf{A}_1$, где $\mathsf{A}_1 = \mathsf{A} - 1\cdot\mathsf{E}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ & A_{(3)} \\ & A_{(4)} = A_{(1)} + A_{(3)} \\ & A_{(5)} = A_{(2)} + A_{(4)}. \end{array}$$

Получили матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} A_{(4)} \\ A_{(3)} \\ A_{(5)}. \end{array}$$

Поэтому $\mathcal{V}^1 = \operatorname{Ker}\mathsf{A}_1 = \langle [1,1,1]^{\mathsf{T}} \rangle$.

Теперь найдем базис для собственного подпространства $\mathcal{V}^2 = \operatorname{Ker}\mathsf{A}_2$, где $\mathsf{A}_2 = \mathsf{A} - 2\cdot\mathsf{E}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ & A_{(3)} \\ & A_{(4)} = A_{(1)} + A_{(2)} \\ & A_{(5)} = A_{(2)} + 3A_{(3)}. \end{array}$$

Тогда матрица имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} A_{(3)} \\ A_{(4)} \\ A_{(5)}. \end{array}$$

Поэтому $\mathcal{V}^2 = \operatorname{Ker} \mathsf{A}_2 = \langle [1,1,0]^\mathsf{T}, [0,1,3]^\mathsf{T} \rangle$.

Итак, $\mathcal{V}^1 \oplus \mathcal{V}^2 = \langle [1,1,1]^\mathsf{T}, [1,1,0]^\mathsf{T}, [0,1,3]^\mathsf{T} \rangle = \mathcal{V}$. Следовательно, оператор A диагонализируем. Переходя к базису, составленному из собственных векторов, находим матрицу оператора в новом базисе:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

где $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ — матрица перехода к новому базису.

(b) Составляем характеристический многочлен $\chi_\mathsf{B}(\lambda)$ и находим его корни.

$$\chi_\mathsf{B}(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Многочлен $\chi_\mathsf{B}(\lambda)$ имеет простой корень 2 и двойной корень 1.

Найдем базис собственного подпространства $\mathcal{V}^1 = \operatorname{Ker} \mathsf{B}_1$, где $\mathsf{B}_1 = \mathsf{B} - 1 \cdot \mathsf{E}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ & A_{(3)} \\ & A_{(4)} = A_{(2)} + A_{(1)} \\ & A_{(5)} = A_{(1)} + 2A_{(3)}. \end{array}$$

Полученная матрица имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} A_{(3)} \\ A_{(5)} \\ A_{(4)}. \end{array}$$

Поэтому $\mathcal{V}^1 = \operatorname{Ker} \mathsf{B}_1 = \langle [1,1,0]^\mathsf{T} \rangle$.

Теперь найдем базис для собственного подпространства $\mathcal{V}^2 = \operatorname{Ker} \mathsf{B}_2$, где $\mathsf{B}_2 = \mathsf{B} - 2 \cdot \mathsf{E}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & -6 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{ll} & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ \times & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} = A_{(2)} + A_{(3)} \\ & A_{(5)} = A_{(4)} + 2A_{(1)} \\ & A_{(6)} = A_{(3)} + A_{(1)} \end{array}$$

Тогда матрица имеет вид

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{l} A_{(1)} \\ A_{(6)} \\ A_{(5)}. \end{array}$$

Значит, $\mathcal{V}^2 = \operatorname{Ker} \mathsf{B}_2 = \langle [2,1,1]^\mathsf{T} \rangle$.

Итак, $\mathcal{V}^1 \oplus \mathcal{V}^2 = \langle [1,1,0]^\mathsf{T}, [2,1,1]^\mathsf{T} \rangle \subsetneqq \mathcal{V}$. Следовательно, оператор B не диагонализируем.

(c) Составляем характеристический многочлен $\chi_\mathsf{C}(\lambda)$ и находим его корни.

$$\chi_\mathsf{C}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 4t + 7).$$

Многочлен $\chi_\mathsf{C}(\lambda)$ имеет вещественный корень -1 и два комплексных корня $2 \pm i\sqrt{3}$. Поэтому $\chi_\mathsf{C}(\lambda)$ не является вполне разложимым над $\mathbb{R}$, следовательно, оператор C не диагонализируем. ◀

Таким образом, **важными условиями диагонализируемости** матрицы линейного оператора, являются:

(1) разложимость на линейные множители характеристического многочлена матрицы оператора;

(2) равенство размерности собственного подпространства и кратности характеристического корня.

Корневое разложение пространства

Корневым подпространством $\mathcal{V}(\lambda)$, соответствующим собственному значению λ оператора A, называется ядро линейного оператора $(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E})^n$, где $n = \dim V$.

Размерность $\dim \mathcal{V}(\lambda)$ называется *алгебраической кратностью* корня λ.

Заметим, что $\mathcal{V}^\lambda = \operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E}) \subseteq \operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E})^n = \mathcal{V}(\lambda)$.

Теорема 36 (корневое разложение) *Для всякого оператора* A *на линейном пространстве* $\mathcal{V}$ *над* $\mathbb{F}$ *эквивалентны утверждения:*

(1) характеристический многочлен $\chi_\mathsf{A}(\lambda)$ *вполне разложим над* $\mathbb{F}$*;*

(2) прямая сумма всех корневых подпространств равна всему $\mathcal{V}$*.*

Алгоритм нахождения корневого разложения пространства.

(1) Найти собственые значения линейного оператора A.

(2) Составить матрицу линейного оператора $\mathsf{A}_i = \mathsf{A} - \lambda_i\mathsf{E}$ для некоторого $\lambda_i \in \operatorname{Spec} \mathsf{A}$.

(3) Найти базис ядра

$$\operatorname{Ker} \mathsf{A}_i^{n_i} = \operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \lambda_i \mathsf{E})^{n_i}$$

и образа

$$\operatorname{Im} \mathsf{A}_i^{n_i} = \operatorname{Im}(\mathsf{A} - \lambda_i \mathsf{E})^{n_i}$$

оператора $\mathsf{A}_i^{n_i}$, где n_i — показатель кратности корня λ_i многочлена $\chi_{\mathsf{A}}(t)$. Базис ядра $\operatorname{Ker} \mathsf{A}_i^{n_i}$ является базисом корневого подпространства $\mathcal{V}(\lambda_i)$.

(4) Повторить (1) – (3) для всех $\lambda_i \in \operatorname{Spec} \mathsf{A}$.

Пример 60 *Найти корневые подпространства линейного оператора* A, *заданного в некотором базисе матрицей:*

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

► Составляем характеристический многочлен:

$$\chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2.$$

Тогда спектр линейного оператора A равен $\operatorname{Spec} \mathsf{A} = \{1, 0\}$.

Найдем корневое подпространство $\mathcal{V}(1)$ для $\lambda = 1$. Для этого составляем матрицу оператора $\mathsf{A}_1 = \mathsf{A} - 1 \cdot \mathsf{E} = \mathsf{A} - \mathsf{E}$:

$$A_1 = A - E = \begin{bmatrix} 4-1 & -5 & 2 \\ 5 & -7-1 & 3 \\ 6 & -9 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Так как $\lambda = 1$ — простой корень характеристического многочлена $\chi_{\mathsf{A}}(t)$ (показатель кратности этого корня равен 1), то корневое подпространство

$$\mathcal{V}(1) = \operatorname{Ker} \mathsf{A}_1^1 = \operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \mathsf{E})^1$$

равно собственному подпространству

$$\mathcal{V}^1 = \operatorname{Ker} \mathsf{A}_1 = \operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \mathsf{E}),$$

принадлежащим собственному значению $\lambda = 1$. Поэтому достаточно найти базис ядра $\operatorname{Ker} \mathsf{A}_1$ (см. решение примера 57).

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Следовательно, $\mathcal{V}(1) = \mathcal{V}^1 = \langle [1, 1, 1]^{\mathsf{T}} \rangle$.

Теперь найдем корневое подпространство $V(0)$, соответствующее собственному значению $\lambda = 0$. Так же составляем матрицу оператора $\mathsf{A}_0 = \mathsf{A} - 0 \cdot \mathsf{E} = \mathsf{A}$:

$$A_0 = A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Так как показатель кратности корня $\lambda = 0$ характеристического многочлена $\chi_{\mathsf{A}}(t)$ равна 2, то корневое подпространство $\mathcal{V}(0) = \operatorname{Ker} \mathsf{A}_0^2 = \operatorname{Ker} \mathsf{A}^2$. Матрица линейного оператора A_0^2 равна:

$$A_0^2 = A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем ядро $\operatorname{Ker} \mathsf{A}_0^2$, матрица которого равна A_0^2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \times & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ & A_{(3)} \\ & A_{(4)} = A_{(1)} + A_{(2)} \\ & A_{(5)} = A_{(2)} + 3A_{(3)}. \end{array}$$

Получили матрицу вида:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} A_{(3)} \\ A_{(4)} \\ A_{(5)}. \end{array}$$

Следовательно, $\mathcal{V}(0) = \langle [1,1,0]^{\mathsf{T}}, [0,1,3]^{\mathsf{T}} \rangle$.

Итак, корневое разложение векторного пространства $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V}(1) \oplus \mathcal{V}(0)$. ◄

Заметим, что

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V}(1) \oplus \mathcal{V}(0).$$

Поскольку корневое подпространство $\mathcal{V}(1)$ есть ядро $\operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \mathsf{E})$ оператора $\mathsf{A} - \mathsf{E}$, то образом $\operatorname{Im}(\mathsf{A} - \mathsf{E})$ этого оператора будет второе слагаемое $\mathcal{V}(0)$ в прямой сумме $\mathcal{V}(1) \oplus \mathcal{V}(0)$. Следовательно, в качестве базиса корневого подпространства $\mathcal{V}(0)$ можно взять базисные векторы $\operatorname{Im}(\mathsf{A} - \mathsf{E})$, т.е. векторы $[1,2,3]^{\mathsf{T}}$ и $[0,1,3]^{\mathsf{T}}$.

14. Жорданова нормальная форма линейного оператора

Случай нильпотентного оператора

Ниль-цепи. Пусть $\mathsf{N} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ — нильпотентный линейный оператор, т. е. $\mathsf{N}^m(\mathcal{V}) = \mathbf{0}$ для некоторого целого $m > 1$.

Пусть $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Последовательность векторов $\mathbf{u}$, $\mathsf{N}\mathbf{u}$, $\mathsf{N}^2\mathbf{u}$, …, $\mathsf{N}^{h-1}\mathbf{u}$ называется *ниль-цепью высоты h с началом в векторе* $\mathbf{u}$, если $\mathsf{N}^h\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Система векторов, составленная из ниль-цепей, называется *жордановой.* Запись жордановой системы векторов в виде таблицы из ниль-цепей называется *жордановой таблицей.*

высота $h_1 + 1$	$\mathbf{u}_1$			
высота h_1	$\mathsf{N}\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$		
высота $h_1 - 1$	$\mathsf{N}^2\mathbf{u}_1$	$\mathsf{N}\mathbf{u}_2$	…	$\mathbf{u}_k$
высота $h_1 - 2$	$\mathsf{N}^3\mathbf{u}_1$	$\mathsf{N}^2\mathbf{u}_2$	…	$\mathsf{N}\mathbf{u}_k$
	…	…	…	…
высота 1	$\mathsf{N}^{h_1}\mathbf{u}_1$	$\mathsf{N}^{h_2}\mathbf{u}_2$	…	$\mathsf{N}^{h_k}\mathbf{u}_k$

Элементарные преобразования жорданой таблицы.

(1) Исключение нулевого вектора на высоте 1 со сдвигом всей цепи вниз.

(2) Умножение на $\alpha \neq 0$.

(3) Прибавление к одной цепи высоты h отрезка высоты h другой цепи (высоты $\geq h$).

(4) Перестановка цепей.

Теорема 37 *Если в жордановой системе векторы на высоте* 1 *линейно независимы, то вся система линейно независима.*

Теорема 38 *Для всякого нильпотентного оператора* $\mathsf{N} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *существует базис* $\mathcal{V}$*, являющийся жордановой системой. При этом число* c_h *ниль-цепей высоты* h *не зависит от выбора жордановой системы и равно*

$$c_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1},$$

где $r_i = \dim \mathsf{N}^i(\mathcal{V})$.

Алгоритм нахождения жордановой базы векторного пространства относительно нильпотентного оператора.

(1) Пусть $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{V}$ — базисный вектор. Вычислить ниль-цепь с началом в $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{e}_1, \mathsf{N}\mathbf{e}_1, \mathsf{N}^2\mathbf{e}_1, \ldots, \mathsf{N}^{h-1}\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0},$$

если $\mathsf{N}^h\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$. Записать этот столбец в жорданову таблицу.

(*) Если число векторов в жордановой таблице равно размерности всего пространства V, то они образуют базу. В противном случае перейти к п. 2.

(2) Дополнить таблицу ниль-цепью с началом в новом векторе $\mathbf{e}_i$.

(3) Элементарными преобразованиями ниль-цепей перестроить жорданову таблицу таким образом, чтобы система веторов на высоте 1 была линейно независима.

Перейти к (*).

(4) Перенумеровать векторы в жордановой системе снизу вверх и слева направо. Например,

$\mathbf{v}_3$		
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_5$	
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_6$

Пример 61 *Найти канонический вид матрицы линейного оператора* N *и матрицу перехода к новому (жорданowому) базису, если* N *задан в некотором базисе матрицей*

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

► Составляем характеристический многочлен $\chi_{\mathsf{N}}(\lambda) = -\lambda^3$. Он имеет тройной корень 0:

$$\operatorname{Spec} \mathsf{N} = \{0\}.$$

Далее возводим N в степень $\leq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Однако уже

$$\mathsf{N}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mathsf{N} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — нильпотентный линейный оператор, степень нильпотентности N равна 2, т. е. $\mathsf{N}^2 = \mathsf{O}$ и 2 — наименьшее число с этим свойством.

Построим жорданов базис для оператора N. В качестве исходного базиса пространства $\mathbb{R}^3$ можно взять стандартный базис.

Пусть $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^{\mathsf{T}}$. Строим ниль-цепь с началом в векторе $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^{\mathsf{T}}, \quad \mathsf{N}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{N}^2\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}.$$

Записываем эти векторы в жорданову таблицу:

$$\begin{array}{|r|}\hline 1\\ 0\\ 0\\ \hline 2\\ 1\\ -1\\ \hline\end{array}$$

Так как количество векторов в жордановой таблице равно $2 < \dim \mathbb{R}^3$, то берем следующий базисный вектор $\mathbf{e}_2 = [0,1,0]^\mathsf{T}$ пространства $\mathbb{R}^3$ и строим ниль-цепь с началом в $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{e}_2 = [0,1,0]^\mathsf{T}, \mathsf{N}\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{N}^2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}.$$

Дописываем найденную ниль-цепь в жорданову таблицу:

$$\begin{array}{r|r|r|}\cline{2-3} & 1 & 0\\ \text{высота } 2 & 0 & 1\\ & 0 & 0\\ \cline{2-3} & 2 & 4\\ \text{высота } 1 & 1 & 2\\ & -1 & -2\\ \cline{2-3}\end{array}$$

Видим, что векторы $[2,1,-1]^\mathsf{T}$ и $[4,2,-2]^\mathsf{T}$ высоты 1 линейно зависимы. Преобразуем жорданову таблицу так, чтобы векторы высоты 1 были линейно независимы. Для этого вычтем из второго столбца удвоенный первый:

$$\begin{array}{|r|r|}\hline 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ \hline 2 & 4\\ 1 & 2\\ -1 & -2\\ \hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|r|r|}\hline 1 & -2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ \hline 2 & 0\\ 1 & 0\\ -1 & 0\\ \hline\end{array}$$

Исключаем нулевой вектор на высоте 1 сдвигом всей цепи вниз:

$$\begin{array}{|r|r|}\hline 1 & -2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ \hline 2 & 0\\ 1 & 0\\ -1 & 0\\ \hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|r|rr}\cline{1-1} 1 & \\ 0 & \\ 0 & \\ \hline 2 & -2 & \multicolumn{1}{|r}{}\\ 1 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{}\\ -1 & 0 & \multicolumn{1}{|r}{}\\ \cline{1-2}\end{array}$$

Так как число векторов в таблице равно $3 = \dim \mathbb{R}^3$, то найденные векторы образуют жорданов базис: $\mathbf{f}_1 = [2,1,-1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{f}_2 = [1,0,0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{f}_3 = [-2,1,0]^\mathsf{T}$.

Найдем матрицу оператора N в этом базисе. Для этого вычислим

$$\mathsf{N}\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{N}\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{f}_1,$$

$$\mathsf{N}\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица оператора в жордановом базисе

$$N' = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где T — матрица перехода к жорданову базису. Вертикальная и горизонтальная линии разделяют жорданову матрицу N' на две подматрицы $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $[0]$ — *жордановы клетки.* ◀

Общий случай

Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\lambda_1) \oplus \mathcal{V}(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}(\lambda_s)$ — корневое разложение пространства $\mathcal{V}$ относительно оператора A с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ соответственно. Обозначим $\mathsf{N}_i = (\mathsf{A} - \lambda_i \mathsf{E})|_{\mathcal{V}(\lambda_i)}$. Так как

$$\mathcal{V}(\lambda_i) = \operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \lambda_i \mathsf{E})^{k_i},$$

то $\mathsf{N}_i^{k_i}|_{\mathcal{V}(\lambda_i)} = \mathsf{O}$ и N_i нильпотентный оператор на $\mathcal{V}(\lambda_i)$.

Жорданова нормальная форма (матрицы) линейного оператора. *Жордановой клеткой $J_k(\lambda)$ порядка k с собственным значением λ* на главной диагонали называется матрица вида:

$$J_k(\lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}}_{k}.$$

Жордановой нормальной формой матрицы A линейного оператора A называется блочно-диагональная матрица, на диагонали которой стоят жордановы клетки:

$$J(A) = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

где собственные значения λ_1, λ_2, ..., λ_s не обязательно все различны.

Пусть k — наивысший порядок жордановых клеток $J_t(\lambda)$ на главной диагонали; $r_i = \dim \mathsf{N}^i(\mathcal{V})$. Тогда число c_h таких клеток порядка h ($h = 1, 2, \ldots, k$) определяется по формуле

$$c_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1},\ h = 1, 2, \ldots, k.$$

Теорема 39 *Для всякого оператора* A *на линейном пространстве* $\mathcal{V}$ *над* $\mathbb{F}$ *эквивалентны утвержения:*

(1) характеристический многочлен $\chi_{\mathsf{A}}(t)$ *вполне разложим над* $\mathbb{F}$*;*

(2) существует базис в $\mathcal{V}$*, в котором* A *задается жордановой матрицей.*

Алгоритм нахождения жордановой формы произвольного линейного оператора.

(1) Найти корневое разложение пространства $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}(\lambda_s)$ относительно оператора A с собственными значениями λ_1, ..., λ_s.

(2) На каждом корневом подпространстве $\mathcal{V}(\lambda_i)$ ($i = 1, \ldots, s$) рассмотреть нильпотентный оператор $\mathsf{N}_i : \mathcal{V}(\lambda_i) \to \mathcal{V}(\lambda_i)$; для него построить жорданову систему и найти жорданову нормальную форму.

(3) Жорданова форма матрицы A оператора A получается объединением найденных жордановых клеток, а жорданова система оператора A получается объединением жордановых систем всех корневых подпространств.

Пример 62 *Найдите жорданову нормальную форму линейного оператора, заданного матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

► Найдем корневое разложение оператора A. Для этого составим характеристический многочлен $\chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda-2)^3$ и найдем его корни: простой корень $\lambda = 0$ и тройной корень $\lambda = 2$.

В разложении $\mathcal{V} = \mathcal{V}(0) \oplus \mathcal{V}(2)$ корневое подпространство $\mathcal{V}(0)$ равно собственному подпространству $\mathcal{V}^0 = \mathrm{Ker}(\mathsf{A} - 0 \cdot \mathsf{E}) = \mathrm{Ker}\,\mathsf{A}$, так как $\lambda = 0$ — простой корень. Следовательно, второе прямое слагаемое $\mathcal{V}(2)$ будет образом $\mathrm{Im}(\mathsf{A} - 0 \cdot \mathsf{E}) = \mathrm{Im}\,\mathsf{A}$. Используем это замечание для нахождения корневого разложения.

Итак, найдем корневое подпространство $\mathcal{V}(0)$:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{cl} & A_{(1)} \\ \times & A_{(2)} \\ & A_{(3)} \\ \times & A_{(4)} \\ \times & A_{(5)} = A_{(4)} + A_{(3)} \\ \times & A_{(6)} = A_{(2)} - 3A_{(4)} \\ & A_{(7)} = A_{(6)} + 2A_{(1)} \\ & A_{(8)} = A_{(5)} + A_{(7)}. \end{array}$$

Выпишем оставшиеся строки полученной матрицы:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} A_{(7)} \\ A_{(4)} \\ A_{(1)} \\ A_{(8)}. \end{array}$$

Находим базисы корневых подпространств: $\mathcal{V}(0) = \mathrm{Ker}\,\mathsf{A} = \langle [2,1,1,-2]^{\mathsf{T}} \rangle$ и $\mathcal{V}(2) = \mathrm{Im}\,\mathsf{A} = \langle [2,1,-1,2]^{\mathsf{T}} [0,1,1,-2]^{\mathsf{T}}, [0,0,1,-3]^{\mathsf{T}} \rangle$.

Поскольку корневое подпространство $\mathcal{V}(0)$ одномерно, то жорданов базис на этом подпространстве совпадает с $[2,1,1,-2]^{\mathsf{T}}$, а жорданова клетка оператора A имеет вид $[0]$.

Найдем жордавнову систему для $\mathcal{V}(2)$. Оператор $\mathsf{N} = \mathsf{A} - 2\mathsf{E}$ нильпотентен на $\mathcal{V}(2)$. Его матрица:

$$N = A - 2E = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Построим ниль-цепь в началом в векторе $\mathbf{e}_1 = [2,1,-1,2]^{\mathsf{T}}$:

$$\mathbf{e}_1, \quad \mathsf{N}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{N}^2\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}.$$

Добавляем найденную нильцепь в жорданову таблицу:

$$
\begin{array}{|r|}
\hline
2 \\
1 \\
-1 \\
2 \\
\hline
8 \\
4 \\
0 \\
-4 \\
\hline
\end{array}
$$

Число векторов в таблице равно $2 < \dim \mathcal{V}(2) = 3$. Поэтому построим еще одну ниль-цепь с началом в векторе $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 1, -2]^\mathsf{T}$: $\mathbf{e}_2$, $\mathsf{N}\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$, и допишем ее в жорданову таблицу:

$$
\begin{array}{|r|r|}
\cline{1-1}
2 & \multicolumn{1}{r}{} \\
1 & \multicolumn{1}{r}{} \\
-1 & \multicolumn{1}{r}{} \\
2 & \multicolumn{1}{r}{} \\
\hline
8 & 0 \\
4 & 1 \\
0 & 1 \\
-4 & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

Теперь число векторов в жордановой таблице равно 3, причем векторы высоты 1 линейно независимы. Следовательно, векторы $\mathbf{f}_1 = [8, 4, 0, -4]^\mathsf{T}$, $\mathbf{f}_2 = [2, 1, -1, 2]^\mathsf{T}$, $\mathbf{f}_3 = [0, 1, 1, -2]^\mathsf{T}$ образуют жорданову систему подпространства $\mathcal{V}(2)$, в котором оператор A имеет жорданову форму

$$
\left[\begin{array}{cc|c}
2 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 2
\end{array}\right].
$$

Заметим, что размер каждой жордановой клетки с собственным значением λ на диагонали также равен высоте ниль-цепи. В данном примере мы нашли две ниль-цепи, высоты 1 и 2, в корневом подпространстве $\mathcal{V}(2)$, в матрице $J(A)$ им соответствуют две жордановых клетки порядка 1 и 2, соответствующих этим цепям.

Теперь, чтобы найти жорданов базис всего пространства $\mathcal{V}$ и жорданову форму матрицы $J(A)$ достаточно объединить найденные базисы и составить $J(A)$ из найденных клеток:

$$
J(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.
$$

◀

15. Функции от матриц

Пусть $J_n(\lambda)$ есть жорданова клетка порядка n с собственным значением λ на главной диагонали:

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Тогда для любой числовой функции $f(x)$, определенной в окрестности λ, имеющей конечные производные $f'(\lambda), \ldots, f^{(n-1)}(\lambda)$в этой точке, значение фукнции от жордановой клетки $J_n(\lambda)$ равно

$$f(J_n(\lambda)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Если матрица J является блочно-диагональной матрицей с жордановыми клектами J_1, J_2, $\ldots$, J_k на главной диагонали

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix},$$

то значение $f(J)$ равно

$$J = \begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_k) \end{bmatrix}.$$

Пусть A — произвольная матрица порядка n, $J(A)$ — ее жорданова нормальная форма, T — матрица перехода к жорданову базису, т.е. $J(A) = T^{-1}AT$ или, наоборот, $A = TJ(A)T^{-1}$. Тогда

$$f(A) = Tf(J(A))T^{-1}. \qquad (\clubsuit)$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить функцию f от матрицы A, нужно:

(1) привести матрицу A к жордановой форме J и найти жорданову систему (матрицу перехода T);

(2) вычислить значение фукнции от каждой из жордановых клеток и составить из них матрицу $f(J)$;

(3) найти $f(A)$ по формуле (♣).

Пример 63 *Вычислите* $\exp A$*, если* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$.

► Найдем жорданову форму матрицы A. Составляем характеристическое уравнение $\chi_A(\lambda) = \lambda^2$. Полученное уравнение имеет двойной корень $\lambda = 0$. Следовательно, матрица A нильпотентна, ее корневое подпространство совпадает со всем пространством.

Рассмотрим стандартный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ пространства $\mathbb{R}^2$. Построим ниль-цепь с началом в векторе $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad A^2\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}.$$

Так как высота ниль-цепи равна $2 = \dim \mathbb{R}^2$, то векторы $A\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1$ образуют жорданову систему векторов. Выписываем жорданову нормальную форму матрицы A и считаем значение $f(A)$:

$$J(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow f(J(A)) = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 \\ 0 & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $f(A)$ будет равна:

$$f(A) = Tf(J(A))T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad ◄$$

16. Геометрия евклидовых и эрмитовых пространств

Сравним евклидово и эрмитово пространство.

Евклидово	***Унитарное***
пространство над числовым полем	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
со ***скалярным произведением*** —	
билинейной функцией, ставящей каждой паре векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ такое **вещественное** число, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнены следуюшие условия: (1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$; (2) $(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$; (3) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для любого $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.	билинейной функцией, ставящей каждой паре векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ такое **комплексное** число, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполнены следуюшие условия: (1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$; (2) $(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$; (3) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для любого $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
Скалярное произведение в ОНБ	
$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\mathsf{T} Y$	$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i = X^\dagger Y$
Матрица Грама $G_\mathbf{e} = [g_{ij}] = [(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)]$ базиса $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$	
Матрица Грама в различных базисах	
$G' = S^\mathsf{T} G S$	$G' = S^\dagger G S$
Скалярное произведение в **произвольном** базисе $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$	
$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = X^\mathsf{T} G Y$	$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij} \overline{x}_i y_j = X^\dagger G Y$

Геометрия евклидова (эрмитова) пространства. *Длиной* (*нормой*) вектора $\mathbf{x}$ называется действительное число $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Вектор длины 1 называется *нормированным.*

Неравенство Коши — Буняковского $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ позволяет определить угол α между векторами

$$\cos \alpha = (\mathbf{x}, \mathbf{y})/(|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|).$$

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются *ортогональными*, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Объем n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$:

$$V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \sqrt{\det G_\mathbf{a}}.$$

Пример 64 *В пространстве вещественных многочленов* $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ *от переменной* x *степени* ≤ 3 *со скалярным произведением*

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

задан треугольник со сторонами x, x^3, $x-x^3$. Найдите угол треугольника между сторонами x и $x-x^3$ и длину противолежащей стороны x^3.

► Длина $\|x^3\|$ стороны x^3 равна $\|x^3\| = \sqrt{(x^3, x^3)}$. Находим

$$(x^3, x^3) = \int_{-1}^{1} x^6 dx = \left.\frac{x^7}{7}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{7}.$$

Откуда $\|x^3\| = \sqrt{\frac{2}{7}}$.

Найдем косинус угла α между x и $x - x^3$:

$$\cos\alpha = \frac{(x, x - x^3)}{\|x\| \cdot \|x - x^3\|}.$$

Для этого вычислим скалярные произведения $(x, x-x^3)$, (x, x), $(x-x^3, x-x^3)$:

$$(x, x - x^3) = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)dx = \frac{4}{15},$$
$$(x, x) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$
$$(x - x^3, x - x^3) = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)dx = \frac{16}{105}.$$

Тогда $\cos\alpha = \sqrt{0,7}$. ◄

Ортогональное проектирование вектора на подпространство. Рассмотрим подпространство $\mathcal{W} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \rangle$ евклидова пространства $\mathcal{V}$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ — произвольный вектор. Найдем ортогональную проекцию $\mathbf{x}_{\parallel}$ и ортогональную составляющую $\mathbf{x}_{\perp}$ вектора $\mathbf{x}$ относительно подпространства $\mathcal{W}$.

Представим вектор $\mathbf{x}$ в виде суммы векторов $\mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$, где $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathcal{W}$ и $\mathbf{x}_{\perp} \perp \mathcal{W}$. Последнее означает, что $\mathbf{x}_{\perp} \perp \mathbf{y}$ для всех векторов $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$. Поэтому $\mathbf{x}_{\perp} \perp \mathbf{e}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Так как $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$, то для всех $i = 1, 2, \ldots, k$

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_{\parallel}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}).$$

Поскольку $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathcal{W}$, то $\mathbf{x}_{\parallel} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k$. Поэтому система равенств $(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_{\parallel}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ принимает вид:

$$x_1(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) + x_2(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_2) + \ldots + x_k(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (1)$$

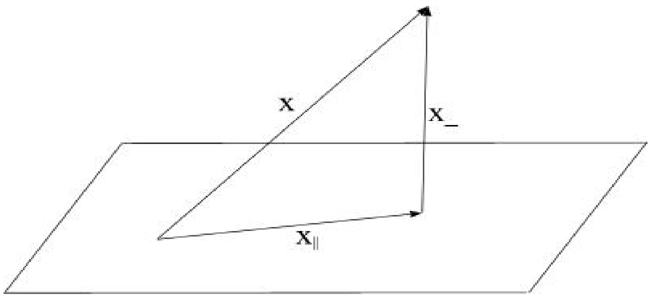

Рис. 1

Система (1) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, ..., x_k. Решая полученную систему уравнений, находим $\mathbf{x}_{\|}$, а затем $\mathbf{x}_{\perp}$.

Пример 65 *Найдите ортогональную проекцию* $\mathbf{x}_{\|}$ *и ортогональную составляющую* $\mathbf{x}_{\perp}$ *вектора* $\mathbf{x} = [2, -1, 3, -2]^{\mathsf{T}}$ *относительно подпространства* $\mathcal{W}$*, натянутого на векторы* $\mathbf{e}_1 = [3, -2, 1, 1]^{\mathsf{T}}$*,* $\mathbf{e}_2 = [1, 0, -1, 1]^{\mathsf{T}}$*,* $\mathbf{e}_3 = [2, -2, 2, 0]^{\mathsf{T}}$.

► Заметим, что вектор $\mathbf{e}_3$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,$$

а векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — линейно независимы. Возьмем их в качестве базисных векторов пространства $\mathcal{W}$.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\|} + \mathbf{x}_{\perp}$, где $\mathbf{x}_{\|} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ — вектор, принадлежащий $\mathcal{W}$. Составим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{x}), \\ x_1(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{x}). \end{cases} \tag{2}$$

Находим матрицу системы и свободные коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 3^2 + (-2)^2 + 1^2 + 1^2 = 15, \\
&(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 3, \\
&(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3, \\
&(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 9, \\
&(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = -3.
\end{aligned}$$

Подставляем найденные значения в систему (2):

$$\begin{cases} 15x_1 + 3x_2 &= 9, \\ 3x_1 + 3x_2 &= -3. \end{cases} \tag{3}$$

Решая систему уравнений (3), находим $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. Следовательно,

$$\mathbf{x}_{\parallel} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{\perp} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ортогональное дополнение к подпространству. Пусть $\mathcal{W}$ — подпространство евклидова (эрмитова) пространства $\mathcal{V}$.

Вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ называется*ортогоналеным* подпространству $\mathcal{W}$ и обозначается $\mathbf{x} \perp \mathcal{W}$, если $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$.

Ортогональным дополнением к подпространству $\mathcal{W}$ называют множество

$$\mathcal{W}^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} : \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \text{ для всех } \mathbf{y} \in \mathcal{W}\}.$$

При этом $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$.

Найдем базис ортогонального дополнения $\mathcal{W}^{\perp}$ подпространства $\mathcal{W}$, если подпространство $\mathcal{W}$ есть линейная оболочка векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор $\mathcal{W}^{\perp}$. Тогда $\mathbf{x}$ ортогонален всем векторам $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$. Значит, $\mathbf{x}$ ортогонален $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{4}$$

Предположим, что векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$\mathbf{a}_i = a_{i1}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{in}\mathbf{e}_n, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Будем искать вектор $\mathbf{x}$ в виде

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

где x_1, …, x_n — неизвестные. Подставляем разложения векторов $\mathbf{a}_1$,…, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{x}$ в равенства (4) (для простоты будем считать, что пространство вещественные):

$$(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, a_{i1}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{in}\mathbf{e}_n) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$x_1 a_{i1} + \ldots + x_n a_{in} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{5}$$

Получили систему k линейных уравнений относительно неизвестных x_1, $\ldots$, x_n. Пространство решений этой системы совпадает с $\mathcal{W}^{\perp}$. Таким образом, чтобы найти базис $\mathcal{W}^{\perp}$, нужно найти базис пространства решений системы уранений (5).

Пример 66 *Найдите ортогональное дополнение $\mathcal{W}^{\perp}$ линейной оболочки $\mathcal{W}$ системы векторов* $\mathbf{a}_1 = [1, -2, 2, -3]^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{a}_2 = [2, -3, 2, -2]^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{a}_3 = [1, -1, 0, 1]^{\mathsf{T}}$.

► Пусть $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4$. Из того, что $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Находим общее решение и базис пространства решений:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2c_1 - 5c_2 \\ 2c_1 - 4c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \text{ — параметры.}$$

Таким образом, $\mathcal{W}^{\perp} = \langle [2, 2, 1, 0]^{\mathsf{T}}, [-4, -5, 0, 1]^{\mathsf{T}} \rangle$. ◄

Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Пусть дан произвольный базис $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ векторного пространства $\mathcal{V}$. Построим ортогональный базис $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$.

1) Полагаем $\mathbf{f}_1$ равным $\mathbf{e}_1$, т. е. $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1$.

2) Будем искать второй базисный вектор $\mathbf{f}_2$, исходя из условия $\mathbf{f}_2 \perp \mathbf{f}_1$. Для этого рассмотрим вектор $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \alpha\mathbf{f}_1$, где коэффициент α пока неизвестен. Домножим обе части равенства $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \alpha\mathbf{f}_1$ скалярно на $\mathbf{f}_1$:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2) - \alpha(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1).$$

В силу ортогональности векторов $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$, поэтому

$$\alpha = \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)}.$$

Подставляя найденное значение α в $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \alpha\mathbf{f}_1$, находим $\mathbf{f}_2$.

Другими словами, на этом шаге находим ортогональную составляющую вектора $\mathbf{e}_2$ относительно подпространства $\langle \mathbf{f}_1 \rangle$.

3) Аналогично, находим третий базисный вектор $\mathbf{f}_3$ как ортогональную составляющую вектора $\mathbf{e}_3$ относительно подпространства $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle$, т. е. полагаем $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 - \beta \mathbf{f}_1 - \gamma \mathbf{f}_2$, где β и γ — некоторые коэффициенты. Поскольку $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_2$, то

$$0 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3) - \beta(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) - \gamma(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2),$$
$$0 = (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3) - \beta(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1) - \gamma(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2).$$

Так как $(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$, получаем:

$$\beta = \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)}, \qquad \gamma = \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2)},$$

и т. д. ...

$k+1$) Пусть векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ попарно ортогональны. Найдем вектор $\mathbf{f}_{k+1}$ как ортогональную составляющую вектора $\mathbf{e}_{k+1}$ относительно подпространства $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k \rangle$:

$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{e}_{k+1} - \alpha_1 \mathbf{f}_1 - \ldots - \alpha_k \mathbf{f}_k,$$

где

$$\alpha_i = \frac{(\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_{k+1})}{(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Пример 67 *Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов:*

$$\mathbf{e}_1 = [2, 1, 3, -1]^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{e}_2 = [7, 4, 3, -3]^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{e}_3 = [1, 1, -6, 0]^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{e}_4 = [5, 7, 7, 8]^{\mathsf{T}}.$$

► 1) Полагаем $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 = [2, 1, 3, -1]^{\mathsf{T}}$.

2) Ищем $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \alpha \mathbf{f}_1$, где

$$\alpha = \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)} = \frac{7 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot (-1)}{2^2 + 1^2 + 3^2 + (-1)^2} = 2.$$

Тогда

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3) Ищем $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 - \beta \mathbf{f}_1 - \gamma \mathbf{f}_2$, где

$$\beta = \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 6 \cdot 3 + 0 \cdot (-1)}{2^2 + 1^2 + 3^2 + (-1)^2} = -1;$$
$$\gamma = \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2)} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 6 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1)}{3^2 + 2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = 1.$$

Так как

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

то вектор $\mathbf{e}_3$ лежит в подпространстве $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle$. Значит, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_4 - \beta' \mathbf{f}_1 - \gamma' \mathbf{f}_2$, где

$$\beta' = \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_4)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)} = \frac{5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot (-1)}{2^2 + 1^2 + 3^2 + (-1)^2} = 2;$$
$$\gamma' = \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_4)}{(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2)} = \frac{5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) + 8 \cdot (-1)}{3^2 + 2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, ортогональный базис пространства $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$:

$$\mathbf{f}_1 = [2, 1, 3, -1]^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{f}_2 = [3, 2, -3, -1]^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{f}_3 = [1, 5, 1, 10]^\mathsf{T}.$$

◀

Можно сократить вычисления, если сразу заметить, что вектор $\mathbf{e}_3$ равен линейной комбинации $(-4) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Тогда, выбирая в качестве базиса систему векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_4$, применяем процесс ортогонализации уже к ним.

17. Операторы в евклидовом (эрмитовом) пространстве

Сопряженный оператор. Пусть $\mathsf{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ — линейный оператор, действующий в эрмитовом (или евклидовом) пространстве $\mathcal{V}$. Оператор A^* называется *сопряженным* к A, если для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$

$$(\mathsf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathsf{A}^*\mathbf{y}).$$

Теорема 40 *Пусть A — матрица линейного оператора A в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и G — матрица Грама векторов базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда матрица A^* сопряженного линейного оператора A^* имеет вид:*

в евклидовом пространстве	в эрмитовом пространстве
$A^* = G^{-1} A^\mathsf{T} G$	$A^* = G^{-1} A^\dagger G.$

Пример 68 *Пусть в некотором базисе скалярное произведение задано билинейной формой* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$, *а линейный оператор* A *матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицу A^* *сопряженного преобразования* A^* *в том же базисе.*

► Перепишем данную билинейную форму в матричном виде:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

где $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ есть матрица Грама. Тогда матрица A^* сопряженного оператора A^* равна $A^* = G^{-1}A^{\mathsf{T}}G = \begin{bmatrix} 128 & 413 & 514 \\ 36 & 117 & 145 \\ -61 & -197 & -245 \end{bmatrix}$. ◄

Оператор A называется *нормальным*, если $\mathsf{A}\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$. Изучим их более подробно.

Самосопряженные операторы

Оператор $\mathsf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ называется *самосопряженным*, если $\mathsf{A} = \mathsf{A}^*$.

	Самоспоряженный оператор	
	в евклидовом пространстве	в унитарном пространстве
название	*симметрический*	*эрмитовый*
матрица в ОНБ	$A^{\mathsf{T}} = A$	$A^{\dagger} = A$

Теорема 41 *Пусть* A — *самосопряженный оператор на евклидовом (эрмитовом) и* A — *его матрица. Тогда:*

(1) $\operatorname{Spec} \mathsf{A}$ — *вещественный;*

(2) собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны;

(3) существует ОНБ из собственных векторов;

(4) существует диагональная матрица D *и ортогональная (или унитарная) матрица* S *такие, что* $D = S^{\mathsf{T}}AS$ $(D = S^{\dagger}AS)$.

Пример 69 *Найдите ОНБ собственных векторов и матрицу D в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

► Задача нахождения канонической формы самосопряженного оператора и канонического базиса сводится к обычной задаче диагонализации матрицы оператора с последующим построением ортонормированного базиса из найденных собственных векторов.

Итак, составляем характеристический многочлен оператора $\chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27$ и находим его корни: двойной корень $\lambda = 3$ и простой $\lambda = -3$. Следовательно, спектр $\operatorname{Spec}\mathsf{A} = \{-3, 3, 3\}$.

Находим базис собственного подпространства $\mathcal{V}^3 = \operatorname{Ker}\mathsf{A}_3 = \operatorname{Ker}(\mathsf{A} - 3\mathsf{E})$:

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \times \quad A_{(1)} \\ \times \quad A_{(2)} \\ \quad A_{(3)} \\ \quad A_{(4)} = A_{(1)} - A_{(3)} \\ \quad A_{(4)} = A_{(2)} + 2A_{(3)}. \end{array} \end{array}$$

Выписываем оставшиеся строки:

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} A_{(3)} \\ A_{(4)} \\ A_{(4)}. \end{array} \end{array}$$

Тогда собственное подпространство $\mathcal{V}^3$ есть линейная оболочка

$$\mathcal{V}^3 = \langle [1, 0, -1]^{\mathsf{T}}, [2, 1, 0]^{\mathsf{T}} \rangle.$$

Более того, так как собственное подпространство $\mathcal{V}^{-3}$ является образом $\operatorname{Im}\mathsf{A}_3 = \operatorname{Im}(\mathsf{A} - 3\mathsf{E})$, то сразу находим его базис: $\mathcal{V}^{-3} = \langle [1, -2, 1]^{\mathsf{T}} \rangle$.

Теперь для найденного базиса, состоящего из собственных векторов оператора A, построим ортонормированный базис. Во-первых, заметим, что базисный вектор $[1, -2, 1]^{\mathsf{T}}$ подпространства $\mathcal{V}^{-3}$ ортогонален подпространству $\mathcal{V}^3$. Нормируя его, получаем первый вектор искомого базиса $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}[1, -2, 1]^{\mathsf{T}}$. Теперь рассмотрим базис $\mathbf{e}_1 = [1, 0, -1]^{\mathsf{T}}$ и $\mathbf{e}_2 = [2, 1, 0]^{\mathsf{T}}$ подпространства $\mathcal{V}^3$. Применяя к ним процесс ортогонализации и нормируя полученные векторы, найдем оставшиеся два вектора. Пусть $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, -1]^{\mathsf{T}}$. Тогда

$$\mathbf{e}_{2\perp} = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{2\parallel} = \mathbf{e}_2 - \frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = [1, 1, 1]^{\mathsf{T}}.$$

Следовательно, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^\mathsf{T}$.

Таким образом, канонический вид матрицы самосопряженного оператора и матрица перехода к каноническому базису: $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$. ◀

Приведение симметричной квадратичной формы к главным осям. Каждой квадратичной форме $q(\mathbf{x}) = X^\mathsf{T}AX$ соответствует единственный линейный оператор A, имеющий с q одну и ту же матрицу в одинаковых базисах. Так как квадратичная форма q задается симметричной (эрмитовой) матрицей, то A — симметрический (эрмитовый) оператор. Следовательно, для A существует ОНБ, в котором матрица его матрица диагональна. Но тогда в этом базисе квадратичная форма q тоже будет иметь диагональный вид.

Теорема 42 *Для всякой симметричной (эрмитовой) формы $q(\mathbf{x})$ на евклидовом (эрмитовом) пространстве $\mathcal{V}$ над $\mathbb{F}$ существует такой ортонормированный базис, в котором $q(\mathbf{x})$ имеет вид:*

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1\|x_1\|^2 + \ldots + \lambda_n\|x_n\|^2.$$

Пример 70 *Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ к главным осям.*

► Задача сводится к диагонализации матрицы данной квадратичной формы и поиску ортонормированного базиса, в котором она имеет диагональный вид. Симметричность матрицы гарантирует существование такого базиса.

Запишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем ее характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5$ и собственные числа: простой корень $\lambda = 5$ и двойной корень $\lambda = -1$.

Далее находим собственные подпространства для данного оператора:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^5 &= \mathrm{Ker}(A - 5E) = \langle [1, 1, 1]^\mathsf{T} \rangle; \\ \mathcal{V}^{-1} &= \mathrm{Ker}(A + E) = \langle [1, -1, 0]^\mathsf{T}, [1, 0, -1]^\mathsf{T} \rangle. \end{aligned}$$

Применяя процесс ортогонализации для базиса каждого подпространства и нормируя полученные векторы, находим нужный нам ортонормированный базис:

$$\mathcal{V}^5 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^\mathsf{T} \right\rangle;$$
$$\mathcal{V}^{-1} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,-1]^\mathsf{T}, \frac{1}{\sqrt{6}}[1,-2,1]^\mathsf{T} \right\rangle.$$

Тогда, применяя преобразование координат

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

получим канонический вид квадратичной формы q:

$$q(\mathbf{y}) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

◀

Приведение пары квадратичных форм к главным осям.

Теорема 43 *Пусть на линейном пространстве $\mathcal{V}$ над $\mathbb{F}$ заданы две симметричные (эрмитовы) формы $q(\mathbf{x}) = X^\dagger AX$ и $r(\mathbf{x})$, причем $r(\mathbf{x})$ положительно определена. Тогда существует невырожденное линейное преобразование пространства $\mathcal{V}$, в котором обе формы имеют диагональный вид.*

Алгоритм приведения пары квадратичных форм к каноническому виду.

(1) Проверяем, что r положительно определена.

(2) Приводим r к нормальному виду методом Лагранжа (выделения полных квадратов). Пусть T — матрица перехода к базису, в котором r имеет нормальный вид:

$$r = Y^\dagger Y, \quad X = TY.$$

(3) Вычисляем матрицу квадратичной формы q в новом базисе: $B = T^\dagger AT$, B — эрмитовая матрица.

(4) Унитарным преобразованием S приводим матрицу B к диагональному виду:

$$D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = S^\mathsf{T} BS, \quad Y = SZ.$$

(5) Находим преобразование пространства $X = RZ$, где $R = TS$, при этом квадратичные формы имеют вид:

$$r = Z^{\dagger}Z, \quad q = Z^{\dagger}DZ.$$

Пример 71 *Найдите невырожденное линейное преобразование пространства, приводящее пару квадратичных форм к каноническому виду:*

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2, \quad g = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2.$$

► Заметим, что f положительно определена. Приведем f к нормальному виду методом Лагранжа:

$$f = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + (\sqrt{2}x_2)^2.$$

Положим $y_1 = x_1 + x_2$ и $y_2 = \sqrt{2}x_2$. Получим нормальный вид квадратичной формы f и соответствующее преобразование координат:

$$f(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу второй квадратичной формы g в тех же координатах:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}.$$

Далее приведем $q(\mathbf{y}) = Y^{\mathsf{T}}BY$ к главным осям. Находим характеристический многочлен $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 20$ и его корни $\lambda = 5$ и $\lambda = -4$; собственные подпространства:

$$\mathcal{V}^5 = \mathrm{Ker}(B - 5E) = \langle [2\sqrt{2}, 1]^{\mathsf{T}} \rangle;$$
$$\mathcal{V}^{-4} = \mathrm{Ker}(B + 4E) = \langle [-1, 2\sqrt{2}]^{\mathsf{T}} \rangle.$$

Нормируя полученные векторы, находим канонический вид квадратичной формы g и соотвествующее преобразование координат:

$$g(\mathbf{z}) = 5z_1^2 - 4z_2^2, \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что последнее преобразование является ортогональным, поэтому не меняет вид квадратичной формы f:

$$f = Y^{\mathsf{T}}Y = Z^{\mathsf{T}}Z.$$

Остается найти преобразование координат как композицию первого и второго преобразований:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -1 \\ \sqrt{2}/6 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

◄

Изометричекие и кососамосопряженные операторы

Оператор A называется *изометрическим*, если $\mathsf{A}\mathsf{A}^* = \mathsf{E}$.

	Изометрический оператор	
	в евклидовом пространстве	в унитарном пространстве
название	*ортогональный*	*унитарный*
матрица в ОНБ	$A^{\mathsf{T}} \cdot A = A \cdot A^{\mathsf{T}} = E$	$A^{\dagger} \cdot A = A \cdot A^{\dagger} = E$
спектр	$\operatorname{Spec}\varphi = \{\lambda : \lvert\lambda\rvert = 1\}$	
канонический вид матрицы	блочно-диагональная (см. т. 44.)	диагональная

Теорема 44 *Пусть* A *— ортогональный оператор,* A *— матрица* A*. Тогда:*

(1) существует ОНБ из собственных векторов;

(2) существует блочно-диагональная матрица D *с блоками*

$$[\pm 1], \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

и ортогональная матрица S *такие, что* $D = S^{\mathsf{T}}AS = S^{-1}AS$*.*

Оператор A называется *кососамосопряженным*, если $\mathsf{A}^* = -\mathsf{A}$.

	Кососамопряженный оператор	
	в евклидовом пространстве	в унитарном пространстве
название	*кососимметрический*	*косоэрмитовый*
матрица в ОНБ	$A^{\mathsf{T}} = -A$	$A^{\dagger} = -A$
спектр	$\operatorname{Spec}\varphi = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = 0\}$	
канонический вид матрицы	блочно-диагональная (см. т. 45.)	диагональная

Теорема 45 *Пусть* A *— кососамосопряженный оператор,* A *— матрица* A*. Тогда:*

(1) существует ОНБ из собственных векторов;

(2) существует блочно-диагональная матрица D *с блоками*

$$[0], \quad \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

и ортогональная матрица S *такие, что* $D = S^{\mathsf{T}}AS = S^{-1}AS$*.*

Пример 72 *Для ортогонального преобразования* φ*, заданного в ОНБ матрицей*

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix},$$

найдите канонический вид матрицы этого оператора и ОНБ, в котором она имеет канонический вид. (Искомый базис определен неоднозначно.)

► 1) Ищем собственные числа данного оператора. Для этого составляем характеристический многочлен $\chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$ и находим его корни $\lambda = 1$ и $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$\operatorname{Spec}\mathsf{A} = \left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

2) Ищем собственные векторы для каждого действительного собственного числа и для одного из пары комплексно сопряженных.

Рассмотрим $\underline{\lambda = 1}$. Матрица оператора $\mathsf{A}_1 = \mathsf{A} - 1 \cdot \mathsf{E} = \mathsf{A} - \mathsf{E}$ (характеристическая матрица) имеет вид:

$$A - E = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} - 1 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - 1 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ищем ядро оператора $\mathsf{A} - \mathsf{E}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \times \quad A_{(1)} \\ \quad A_{(2)} \\ \quad A_{(3)} \\ \quad A_{(4)} = A_{(1)} + A_{(2)}. \end{array}$$

Следовательно, собственный вектор, отвечающий собственному значению 1, равен $\mathbf{v}_1 = [1, 1, 0]^{\mathsf{T}}$. Нормируем его: $\mathbf{f}_1 = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0]^{\mathsf{T}}$.

Пусть комплексному собственному числу $\sigma + i\rho$ отвечает собственный вектор $\mathbf{v}$, представленный в виде $\mathbf{v} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$, где векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют вещественные координаты. Тогда $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, имеют одинаковую длину, причем

$$\mathsf{A}(\mathbf{x}) = \sigma\mathbf{x} - \rho\mathbf{y}, \quad \mathsf{A}(\mathbf{y}) = \rho\mathbf{x} + \sigma\mathbf{y}.$$

Другими словами, двумерное подпространство, натянутое на векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, инвариантно относительно оператора A, и его матрица на этом подпространстве имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma & \rho \\ -\rho & \sigma \end{bmatrix}.$$

Заметим, что комплексно сопряженному собственному числу $\sigma - i\rho$ отвечает собственный вектор $\mathbf{v}' = \mathbf{x} - i\mathbf{y}$, поэтому двумерное инвариантное подпространство для собственного числа $\sigma - i\rho$ совпадает с двумерным инваринатным подпространством для собственного числа $\sigma + i\rho$. Значит, достаточно рассмотреть только одно из комплексно сопряженных собственных чисел.

Итак, рассмотрим собственное число $\underline{\lambda = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Непосредственное нахождение ядра комплексной матрицы связано со значительными вычислительными трудностями, которые можно избежать следующим образом.

Возьмем какой-нибудь вектор, ортогональный $\mathbf{v}$, например, вектор $\mathbf{u} = [0, 0, 1]^\mathsf{T}$. Так как он ортогонален $\mathbf{v}$, то он принадлежит двумерному инвариантному подпространству. Найдем его образ при действии оператора $\mathsf{A} - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathsf{E}$:

$$\left(\mathsf{A} - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathsf{E}\right)\mathbf{u} = \mathsf{A}\mathbf{u} - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{u} = \left[\sqrt{6}/4, -\sqrt{6}/4, -i\sqrt{3}/2\right]^\mathsf{T}.$$

Найденный вектор является собственным вектором оператора A, принадлежащим комплексному собственному значению $\lambda = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда находим $\mathbf{f}_2 = [0, 0, 1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{f}_3 = [\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]^\mathsf{T}$ и соответствующий блок матрицы A (причем в этом случае отрицательный синус всегда будет стоять ниже главной диагонали):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Теперь запишем канонический вид матрицы линейного оператора A и матрицу перехода к ОНБ, в котором она имеет такой вид:

$$D = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right], \quad S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм нахождения канонического вида матрицы кососамосопряженного оператора совпадает с предыдущим.

Полярное и сингулярное разложения отображения

Эрмитовый оператор $\mathsf{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ называется *неотрицательным*, если для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$

$$(\mathsf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0.$$

Теорема 46 *Для любого оператора* $\mathsf{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *операторы* AA^* *и* $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ — *неотрицательные.*

Теорема 47 *Линейный оператор* A — *неотрицательный тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Spec}\mathsf{A} \subseteq \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Теорема 48 *Для любого линейного преобразования* $\mathsf{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *унитарного пространства* $\mathcal{V}$ *существуют такое эрмитовое преобразование* P_1 (P_2) *и такое унитарное преобразование* W, *что* $\mathsf{A} = \mathsf{P}_1 W$ — *левое полярное разложение (*$\mathsf{A} = W\mathsf{P}_2$ — *правое полярное разложение).*

Алгоритм нахождения левого полярного разложения.

(1) Составляем матрицу AA^* оператора AA^*.

(2) Вычисляем $P_1 = \sqrt{AA^*}$:

– находим $\operatorname{Spec} AA^*$;

– находим ОНБ из собственных векторов, в котором AA^* имеет диагональный вид D, T — матрица перехода к этому базису;

– вычисляем $D' = \sqrt{D}$;

– вычисляем $P_1 = TD'T^{-1}$.

(3) ищем матрицу W такую, чтобы $A = P_1 W$.

Если $\det A \neq 0$, то $W = P_1^{-1}A$ (или $W = AP_2^{-1}$). В противном случае вначале следует найти сингулярное разложение, тогда $W = UV^\dagger$ (см. сингулярное разложение).

Алгоритм нахождения **правого полярного разложения** получается из алгоритма левого полярного разложения заменой AA^* на A^*A и $A = P_1 W$ на $A = WP_2$.

Теорема 49 *Пусть* $\mathsf{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\operatorname{rk}\mathsf{A} = r$. *Тогда существуют такие унитарные преобразования* U *пространства* $\mathbb{R}^n$ *и* V *пространства* $\mathbb{R}^m$, *что* $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^\dagger$, *где*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и } \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0.$$

Такое представление называется *сингулярным разложением* оператора A, а числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — *сингулярными числами.*

Алгоритм построения сингулярного разложения ($m \le n$).

(1) Составляем матрицу A^*A.

(2) Находим $\operatorname{Spec} A^*A = \{\lambda_1^2, \ldots, \lambda_r^2, 0\}$ и ОНБ из собственных векторов: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$. Пусть V — матрица перехода к этому базису.

(3) Полагаем $\mathbf{f}_i = \frac{1}{\lambda_i} A\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, а $\mathbf{f}_{r+1}, \ldots, \mathbf{f}_n$ выбираем так, чтобы $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ составляли ОНБ. Тогда U — матрица, составленная из столбцов координат векторов $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$.

(4) Полагаем Σ — как в теореме 2. Проверка сингулярного разложения.

Пример 73 *Найти сингулярное разложение матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

► Находим

$$A^\dagger A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}.$$

Матрица вырождена, поэтому один корень 0, а второй находится по следу и равен 20. Значит,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подбираем собственный вектор $[-3, 1]^\top$ для корня 0 и нормируем его. Второй собственный вектор должен быть ортогонален, поэтому $[1, 3]^\top$ подходит и имеет ту же норму. В соответствии с порядком сингулярных чисел по невозрастанию составляем

$$V = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Находить U напрямую из уравнения $U\Sigma = AV$ неудобно: матрица Σ вырождена, решение не единственно. Поскольку $\operatorname{rk} \Sigma = 1$, дополним первый столбец матрицы AV до ортогонального базиса, затем нормируем столбцы и получим U:

$$AV = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{10} & -1 \\ \sqrt{10} & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверка сингулярного разложения:

$$U\Sigma V^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 2\sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

◄

Пример 74 *Найти левое и правое полярные разложения матрицы A из предыдущей задачи.*

► Используя найденное сингулярное разложение, вычисляем унитарную матрицу

$$W = UV^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Теперь вычисляем две неотрицательные эрмитовы матрицы:

$$P_1 = U\Sigma U^{\dagger} = AW^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$P_2 = V\Sigma V^{\dagger} = W^{\dagger}A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Получаем левое полярное разложение $A = P_1 W$ и правое полярное разложение $A = WP_2$. ◄

Список литературы

1. *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* Геометрия. — М.: Наука, 1990.
2. *Александрова Н.И.* Семинары по высшей алгебре и аналитической геометрии. Ч. I. — Новосибирск, 2007.
3. *Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1964.
4. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Физматлит, 2005.
5. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре — М.: Физматлит, 2001.
6. *Ильин В.А., Позняк В.Э.* Аналитическая геометрия. — М.: Физматлит, 1999.
7. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. I. — М.: Физматлит, 2001.
8. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. II. — М.: Физматлит, 2001.
9. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971.
10. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1969.
11. *Погорелов А.В.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1978.
12. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1978.
13. Сборник задач по по алгебре. / Под ред.Кострикина А.И. В 2 т. Т. 1. — М.: Физматлит, 2007.
14. *Ульянов А.П.* Конспект лекций по алгебре и геометрии. Ч. I. — Новосибирск, 2007.
15. *Ульянов А.П.* Конспект лекций по алгебре и геометрии. Ч. II. — Новосибирск, 2007.
16. *Ульянов А.П.* Конспект лекций по алгебре и геометрии. Ч. III. — Новосибирск, 2007.
17. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.
18. *Фаддеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1972.