

Вариант 1

1. В аффинной системе координат (e_1, e_2, e_3) задана метрика $g_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и векторы $u = e_1 - 4e_2, v = 3e_2 + 7e_3$. Вычислить контравариантные компоненты $w = v \times u$ и $|w|$.

2. В цилиндрической системе координат

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z.$$

задана функция $f(\rho, \phi, z) = \sin(z\phi) + \sin^2(\rho)$. Проверить, является ли функция f гармонической.

3. Найти компоненту T_{12}^2 тензора $T_{ik}^j = \nabla_i S_{.k}^j$, где

$$S_{.k}^j = x^1 e_1 \otimes e^1 + \sin x^2 e_1 \otimes e^2 + x^1 x^2 e_2 \otimes e^2 + e_1 \otimes e^2.$$

Символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$

4. Катеноид задан вектор-функцией $r(u, v) = (ach_a^u \cos v, ach_a^u \sin v, u)$. Вычислить метрику поверхности, $\Gamma_{1,21}$, и длину кривой $u + v = 0$, при $0 \leq u \leq 1$.
5. Вычислить $(rot a)_3$ где $a = (a_1, a_2, a_3) = (u^2, v^3, u^2 z)$, а координаты u, v, z связаны с декартовыми, соотношениями

$$x = u + \sqrt{u^2 + v}, \quad y = -u + \sqrt{u^2 + v}, \quad z = z.$$

Вариант 2.

1. В аффинной системе координат (e_1, e_2, e_3) задана метрика $g_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и векторы $u = 3e_2 + 7e_3, v = e_1 - 4e_2$. Вычислить контравариантные компоненты $w = v \times u$ и $|w|$.

2. В цилиндрической системе координат

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z.$$

задана функция $f(\rho, \phi, z) = \cos(z\phi + \rho^2) + (z - \rho)^2$. Проверить, является ли функция f гармонической.

3. Найти компоненту T_{12}^2 тензора $T_{ik}^j = \nabla_i S_{.k}^j$, где

$$S_{.k}^j = x^2 e^1 \otimes e_1 + \cos x^1 e^1 \otimes e_2 + x^2 e^2 \otimes e_2 + e^1 \otimes e_2.$$

Символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$

4. Катеноид задан вектор-функцией $r(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$. Вычислить метрику поверхности, $\Gamma_{2,12}$, и длину кривой $u - v = 0$, при $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$.
5. Вычислить $(rot a)_3$ где $a = (a_1, a_2, a_3) = (uz, vz, u^3)$, а координаты u, v, z связаны с декартовыми, соотношениями

$$x = u + \sqrt{u^2 + v}, \quad y = -u + \sqrt{u^2 + v}, \quad z = z.$$