

Домашняя работа к занятию 19.

1.1 Найдите разложение по степеням ε до второго порядка включительно решения задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} + \ln(1 + \varepsilon x) = 0 \\ x(0) = 1 + \varepsilon^2 \end{cases}$$

1.2 Найдите первое приближение решения задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, & x(0) = \varepsilon \\ \dot{y} = y^2 - x, & y(0) = 0 \end{cases}$$

1.3 Найдите первое приближение для периодического решения уравнения $\ddot{x} + x^2 = 1 + \varepsilon \cos t$ с периодом 2π .

2.1 Найдите первое приближение решения задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln x + \cos y - z^2, & x(0) = 1 - \sin \varepsilon \\ \dot{y} = x^2 - z^4, & y(0) = -2\varepsilon \\ \dot{z} = \frac{1}{2}xy, & z(0) = \ln(1 + \varepsilon) - 1 \end{cases}$$

2.2 Функция $\varphi(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} y''' + \sin y'' \cos y' + y^3 = 1 \\ y(0) = y_0; \quad y'(0) = y_1; \quad y''(0) = y_2 \end{cases}$$

Найдите $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$ при $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$.

2.3 Найдите $\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ при $\varepsilon = 1$, $\mu = 2$ для решения задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2, & x(1) = \varepsilon \\ \dot{y} = xy + t, & y(1) = \mu \end{cases}$$

Ответы.

1.1 Указания: Задача Коши для получения нулевого приближения:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 0 \\ x_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x_0 \equiv 1.$$

Задача Коши для первого приближения:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 + x_0 = 0 \\ x_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -t.$$

Для второго приближения:
$$\begin{cases} \dot{x}_2 - x_0^2 + 2x_1 = 0 \\ x_2(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = t^2 + t + 2.$$

Ответ: $x = 1 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2}{2}(t^2 + t + 2) + o(\varepsilon^2)$

1.2 Указания: Нулевое приближение: $x_0 \equiv 0, y_0 \equiv 0$.

Задача Коши для первого приближения:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2y_1, & x_1(0) = 1 \\ \dot{y}_1 = -x_1, & y_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(e^{-t} + 2e^{2t}) \\ y_1 = \frac{1}{3}(-e^{-t} + e^{2t}) \end{cases}.$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\varepsilon}{3}(e^{-t} + 2e^{2t}) + o(\varepsilon) \\ y = \frac{\varepsilon}{3}(-e^{-t} + e^{2t}) + o(\varepsilon) \end{cases}$$

1.3 Указания: $x_0 \equiv \pm 1$.

Ответ: $x = 1 + \varepsilon \cos t + o(\varepsilon)$ и $x = -1 - \frac{\varepsilon}{3} \cos t + o(\varepsilon)$

2.1 Указания: $x_0 \equiv 1, y_0 \equiv 0, z_0 \equiv -1$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2z_1, & x_1(0) = -1 \\ \dot{y}_1 = 2x_1 + 4z, & y_1(0) = -2 \\ \dot{z}_1 = \frac{1}{2}y_1, & z_1(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -e^{-t} \\ y_1 = -2e^{-t} \\ z_1 = e^{-t} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 1 - \varepsilon e^{-t} + o(\varepsilon) \\ y = -2\varepsilon e^{-t} + o(\varepsilon) \\ z = -1 + \varepsilon e^{-t} + o(\varepsilon) \end{cases}$$

2.2 Ответ: $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = 1, \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = t, \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = e^{-t} + t - 1$ при $y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0$.

2.3 Указания: нулевое приближение $x_0 = \frac{1}{t}, y_0 = t^2 + t$. Задача

Коши для первого приближения:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_0 \cdot x_1, & x_1(1) = 1 \\ \dot{y}_1 = x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0, & y_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{t^2} \\ y_1 = t + t \ln t - 1 = \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \end{cases}$$

$$\text{Аналогично } \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_0 \cdot x_1, & x_1(1) = 0 \\ \dot{y}_1 = x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0, & y_1(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 = \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ y_1 = t \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = t + t \ln t - 1, \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0$$