

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

К. В. Лотов

ФИЗИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Второе издание, исправленное и дополненное

Новосибирск
2018

УДК 530.1 (075.8)

ББК 22.31

Л 804

Рецензент:

доцент *А. Д. Беклемишев*

Лотов, К. В.

Л 804 Физика сплошных сред : учеб. пособие / К. В. Лотов;
Новосиб. гос. ун-т. 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск :
ИПЦ НГУ, 2018. — 136 с.

ISBN 978-5-4437-0780-8

Учебное пособие содержит конспективное изложение курса «Физика сплошных сред», который читается в осеннем семестре для студентов физического факультета. Курс включает в себя основы электродинамики сплошных сред, гидродинамики и теории упругости. Уровень изложения рассчитан на студентов, прослушавших курс электродинамики, знакомых с основами механики, термодинамики и статистической физики и владеющих математическим аппаратом в объеме университетских курсов.

УДК 530.1 (075.8)

ББК 22.31

ISBN 978-5-4437-0780-8

© Новосибирский государственный
университет, 2018

© К. В. Лотов, 2018

Оглавление

Предисловие	6
1 Электродинамика сплошных сред	7
1.1 Уравнения Максвелла для сплошной среды	7
1.2 Материальное уравнение	10
1.3 Операторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$ в фурье-представлении	11
1.4 Дисперсионное уравнение	12
1.5 Анализ волновых свойств среды на примере газа осцилляторов	13
1.6 Асимптотика диэлектрической проницаемости при больших частотах	16
1.7 Частотная и пространственная дисперсия	16
1.8 Свойства симметрии $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в изотропных и зеркально-изомерных средах	18
1.9 Естественная оптическая активность	19
1.10 Одноосные кристаллы	21
1.11 Эффект Керра	23
1.12 Магнитооптические эффекты	24
1.13 Аналитические свойства диэлектрической проницаемости	26
1.14 Теорема Крамерса — Кронига	28
1.15 Электромагнитные волны в средах с частотной дисперсией	31
1.16 Предвестник	34
1.17 Связь тензора диэлектрической проницаемости с обычными ε , μ и σ	37
1.18 Диссипация энергии волны	38
1.19 Энергия волны	39
1.20 Импульс волны	41
1.21 Поток энергии волны	42
1.22 Переходное излучение	44
1.23 Черенковское излучение	45

1.24	Нелинейная проницаемость	50
1.25	Трехволновое взаимодействие	51
1.26	Самофокусировка	56
2	Гидродинамика	60
2.1	Уравнения идеальной гидродинамики	60
2.2	Лагранжевы переменные	65
2.3	Закон Бернулли	66
2.4	Теорема Томсона	67
2.5	Потенциальное течение	68
2.6	Потенциальное обтекание тела	70
2.7	Вихревое движение жидкости	73
2.8	Звук	76
2.9	Энергия и импульс плоской звуковой волны	77
2.10	Волны на разделе сред	78
2.11	Вязкая жидкость	83
2.12	Закон подобия	85
2.13	Уравнение теплопереноса	86
2.14	Поверхности разрыва	88
2.15	Ударная адиабата	88
2.16	Истечение газа через сопло	92
2.17	Простые волны	95
2.18	Слабая ударная волна	97
2.19	Турбулентность	100
2.20	Логарифмический профиль скоростей	103
2.21	Достаточное условие отсутствия конвекции	105
2.22	Свободная конвекция	107
2.23	Мягкое и жесткое возбуждение конвекции	112
2.24	Конвективный перенос тепла	114
3	Теория упругости	115
3.1	Тензор деформации	115
3.2	Тензор напряжений	117
3.3	Закон Гука	118
3.4	Простые деформации	118
3.5	Энергия деформации	119
3.6	Звук в твердом теле	121
3.7	Продольные колебания стержней	122
3.8	Изгиб стержней	123
3.9	Поперечные колебания стержней	126
3.10	Устойчивость стержней (по Эйлеру)	129
3.11	Кручение стержней	130

Приложения	133
1. Дифференциальные операторы в цилиндрических координатах	133
2. Дифференциальные операторы в сферических координатах .	134

Предисловие

По электродинамике сплошных сред, гидродинамике и теории упругости написано много больших и хороших книг. Однако изобилие материала слабо помогает студентам при подготовке к экзамену, поскольку за короткий срок прочесть много толстых книг нереально. Поэтому при написании данного пособия главной целью было не только лаконично изложить темы, традиционно читаемые в рамках данного курса, но и избежать перегрузки текста избыточным материалом.

Первое издание этого учебного пособия вышло в 2001 году. Во втором издании исправлены замеченные ошибки и добавлены новые разделы, недавно появившиеся в лекционном курсе.

Автор приносит свою искреннюю благодарность Д. Д. Рютову, Г. Е. Векштейну, Б. Н. Брейзману, И. А. Котельникову и В. Н. Худику, в разные годы читавшим «Физику сплошных сред» и фактически сформировавшим этот курс в его настоящем виде, а также В. Б. Реве и А. Д. Беклемишеву за многие полезные замечания.

Глава 1

Электродинамика сплошных сред

1.1 Уравнения Максвелла для сплошной среды

Уравнения Максвелла известны из курса электродинамики:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Это — точные уравнения для точных значений полей \vec{E} , \vec{B} и тока \vec{j} . В среде, где создающих поле частиц очень много, точное значение тока, как правило, не известно, потому удобнее пользоваться уравнениями Максвелла, усредненными по статистическому ансамблю, т. е. по всем возможным микроскопическим состояниям системы при заданном ее макроскопическом состоянии. Усредненные уравнения по форме совпадают с (1.1), (1.2), но смысл входящих в них букв другой: теперь \vec{E} , \vec{B} и \vec{j} — средние значения полей и тока. Далее мы будем пользоваться только усредненными по ансамблю уравнениями.

Вторая пара уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (1.4)$$

есть следствие первой пары (1.1), (1.2) и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.5)$$

Точнее, это начальные условия для уравнений (1.1) и (1.2). Например, взяв дивергенцию (1.1)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

и воспользовавшись (1.5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi\rho) = 0.$$

Таким образом, если в какой-то момент времени равенства (1.3) и (1.4) выполнены, то они выполняются всегда.

Полный ток \vec{j} удобно разделить на две части: ток сторонних зарядов $\vec{j}_{стор}$ и ток $\vec{j}_{ср}$, создаваемый частицами среды:

$$\vec{j} = \vec{j}_{стор} + \vec{j}_{ср}. \quad (1.6)$$

Это деление не всегда является однозначным. Если среда является проводящей, т. е. при наличии стационарного электрического поля в ней течет постоянный ток, то ток проводимости можно считать как сторонним, так и током среды. В свою очередь, ток и заряд среды всегда можно представить в виде

$$\vec{j}_{ср} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M}, \quad \rho_{ср} = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad (1.7)$$

где \vec{P} и \vec{M} — некоторые векторы. Представление (1.7) неоднозначно: ток и заряд среды не изменятся при замене

$$\vec{P} \longleftrightarrow \vec{P} + \operatorname{rot} \vec{X}, \quad \vec{M} \longleftrightarrow \vec{M} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

где \vec{X} — произвольный вектор. Эта неоднозначность снимается по-разному в квазистатических и динамических задачах.

В электро- и магнитостатике, когда поля во времени не меняются или меняются медленно, в качестве \vec{P} и \vec{M} удобно выбрать физически осмысленные величины: дипольный и магнитный моменты единицы объема среды. Вектор \vec{P} называют поляризацией среды, а вектор \vec{M} —

намагниченностью. Вводя напряженность магнитного поля \vec{H} и электрическую индукцию \vec{D}

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (1.9)$$

можно переписать первое уравнение Максвелла в обычной для квазистатических задач форме:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{смор}} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + 4\pi \text{rot } \vec{M}, \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{смор}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Именно такой подход обычно излагается в курсе «Электродинамика». Он удобен, если величины \vec{H} и \vec{D} прямо пропорциональны полям \vec{B} и \vec{E} .

В динамических задачах, когда зависимость поля от времени становится существенной, в качестве \vec{P} и \vec{M} уже не удобно брать дипольный и магнитный моменты единицы объема. Формально, разумеется, можно вычислить эти моменты и ввести \vec{H} и \vec{D} по формулам (1.9), однако простой связи этих величин с полями \vec{B} и \vec{E} уже не будет. Поэтому неоднозначность (1.8) устраняется иначе:

$$\vec{M} \equiv 0. \quad (1.11)$$

Соответственно различия между \vec{B} и \vec{H} не делается, а электрической индукцией называется такой вектор \vec{D} , для которого

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j}_{\text{ср}}. \quad (1.12)$$

Первое уравнение Максвелла принимает вид

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{смор}} \quad (1.13)$$

с начальным условием

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{смор}}. \quad (1.14)$$

Везде далее мы будем пользоваться именно таким определением \vec{D} и такой формой уравнения Максвелла. Индекс «ср» у тока и заряда среды будем опускать.

1.2 Материальное уравнение

Уравнения Максвелла определяют, какими будут поля при заданном распределении зарядов и токов, т. е. как среда влияет на поле. Чтобы замкнуть систему уравнений, надо также указать, как поле влияет на среду, т. е. задать материальное уравнение. В качестве материального уравнения может выступать зависимость $\vec{j}(\vec{E}, \vec{B})$ или $\vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$.

Поскольку из уравнения Максвелла (1.2) поле \vec{B} легко выражается через \vec{E} , то можно считать \vec{j} и \vec{D} функциями только от \vec{E} . При малой напряженности поля \vec{E} зависимости $\vec{j}(\vec{E})$ и $\vec{D}(\vec{E})$ будут линейными (можно их разложить по степеням \vec{E} и оставить линейные члены как наибольшие).

Электрическое поле можно считать малым, когда оно мало по сравнению с характерными значениями электрического поля в среде. Обычно эти характерные значения очень большие (например, в диэлектрике напряженность внутриатомного поля порядка ГВ/м), потому область применимости линейной электродинамики сплошных сред очень широка. Везде далее, где не оговорено особо, мы будем считать зависимости $\vec{j}(\vec{E})$ и $\vec{D}(\vec{E})$ линейными.

Самый общий вид линейной связи между двумя векторными величинами \vec{j} и \vec{E} имеет вид

$$j_\alpha(\vec{r}, t) = \int E_\beta(\vec{r}', t') \sigma_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') d\vec{r}' dt', \quad (2.1)$$

или, в операторной форме,

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E}. \quad (2.2)$$

Здесь $\hat{\sigma}$ — оператор проводимости. Ядро оператора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ обладает рядом универсальных свойств:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{если} \quad t' > t \quad (2.3)$$

(будущее не влияет на настоящее);

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{если} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| > c(t - t') \quad (2.4)$$

(быстрее скорости света возмущение не распространяется);

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(\vec{r} - \vec{r}', t, t') \quad \text{в однородной среде} \quad (2.5)$$

(в среде нет выделенной точки);

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t - t') \quad \text{в стационарной среде} \quad (2.6)$$

(нет выделенного момента времени). Далее мы будем рассматривать только однородные стационарные среды.

Аналогичными свойствами обладает ядро оператора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, связывающего \vec{D} и \vec{E} :

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon} \vec{E}. \quad (2.7)$$

1.3 Операторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$ в фурье-представлении

Будем пользоваться симметричной формой преобразования Фурье, обозначая функции и их фурье-образы одинаковыми буквами:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d\vec{k} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}(q) e^{iq\xi} dq, \quad (3.1)$$

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} d\vec{r} dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}(\xi) e^{-iq\xi} d\xi, \quad (3.2)$$

где для сокращения записи введены векторы

$$\xi = (\vec{r}, t), \quad q = (\vec{k}, -\omega). \quad (3.3)$$

Найдем фурье-образ от материального уравнения

$$D_\alpha(\xi) = \int E_\beta(\xi') \varepsilon_{\alpha\beta}(\eta) d\xi', \quad \eta = \xi - \xi'. \quad (3.4)$$

Получаем

$$\begin{aligned} D_\alpha(q) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-iq\xi} d\xi \int E_\beta(\xi') \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi - \xi') d\xi' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-iq\eta} e^{-iq\xi'} E_\beta(\xi') \varepsilon_{\alpha\beta}(\eta) d\xi' d\eta = \\ &= \int e^{-iq\eta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\eta) d\eta \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int E_\beta(\xi') e^{-iq\xi'} d\xi' = \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta}(q) E_\beta(q). \end{aligned}$$

Итак, если ввести фурье-представление оператора диэлектрической проницаемости согласно определению

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) &= \int \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau) e^{-i\vec{k}\vec{\rho} + i\omega\tau} d\vec{\rho} d\tau, \\ \vec{\rho} &= \vec{r} - \vec{r}', \quad \tau = t - t', \end{aligned} \quad (3.5)$$

то связь между фурье-образами величин будет особенно простой:

$$D_\alpha(\vec{k}, \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) E_\beta(\vec{k}, \omega), \quad (3.6)$$

что является следствием известного математического факта (фурье-образ свертки с точностью до коэффициентов есть произведение фурье-образов). Обратим внимание, что формула (3.5) не есть преобразование Фурье, так как там не хватает коэффициента $(2\pi)^{-2}$.

Аналогично для оператора проводимости имеем

$$j_\alpha(\vec{k}, \omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) E_\beta(\vec{k}, \omega). \quad (3.7)$$

В фурье-представлении операторы проводимости и диэлектрической проницаемости оказываются, вообще говоря, тензорами второго ранга, потому будем пользоваться терминами «тензор диэлектрической проницаемости» и «тензор проводимости» для обозначения фурье-представлений соответствующих операторов.

Из определения электрической индукции (1.12) вытекает полезное соотношение, связывающее тензоры проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ и диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Действительно, преобразование Фурье от (1.12) дает

$$-i\omega\vec{D} = -i\omega\vec{E} + 4\pi\vec{j},$$

откуда

$$\begin{aligned} D_\alpha &= E_\alpha + \frac{4\pi i}{\omega} j_\alpha, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta &= \delta_{\alpha\beta} E_\beta + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta} E_\beta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) выполняется при любом поле \vec{E} , следовательно, в фурье-представлении

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (3.9)$$

1.4 Дисперсионное уравнение

Есть стандартный способ определения волновых свойств среды по заданному тензору диэлектрической проницаемости. Он состоит в следующем. Мы разлагаем поля на гармоники (плоские монохроматические волны), исследуем каждую гармонику по отдельности и находим, какие из гармоник могут существовать в среде сами по себе. Математически

разложение на гармоники осуществляется преобразованием Фурье. Запишем уравнения Максвелла в фурье-представлении:

$$i \left[\vec{k} \times \vec{B} \right] = -\frac{i\omega}{c} \vec{D}, \quad (4.1)$$

$$i \left[\vec{k} \times \vec{E} \right] = \frac{i\omega}{c} \vec{B}. \quad (4.2)$$

Нас интересуют волны, которые могут распространяться в среде в отсутствие сторонних зарядов, поэтому в уравнении (4.1) мы положили $j_{стор} = 0$. Выражая \vec{B} из (4.2), подставляя его в (4.1) и раскрывая двойное векторное произведение, получаем

$$\left[\vec{k} \times \left[\vec{k} \times \vec{E} \right] \right] = \vec{k}(\vec{k}\vec{E}) - \vec{E}k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{D}. \quad (4.3)$$

То же в тензорных обозначениях имеет вид

$$k_\alpha k_\beta E_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} E_\beta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = 0, \quad (4.4)$$

или

$$L_{\alpha\beta} E_\beta = 0, \quad L_{\alpha\beta} = k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (4.5)$$

Однородная система уравнений (4.5) имеет ненулевое решение, если определитель матрицы L равен нулю:

$$\det L = 0. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) связывает между собой параметры волны (ω и \vec{k}) и называется дисперсионным уравнением. Его решения $\omega_n(\vec{k})$ (вообще говоря, комплексные) определяют волны, которые в данной среде могут распространяться. Таких решений, а значит и типов волн, может быть несколько, что отражается индексом ' n '. Зависимости $\omega_n(\vec{k})$ называются дисперсионными соотношениями. Соответствующие им ненулевые решения $\vec{E}_n(\vec{k})$ системы (4.5) определяют поляризацию волн, т. е. ориентацию вектора \vec{E} по отношению к волновому вектору \vec{k} и выделенным направлениям среды (если таковые есть).

1.5 Анализ волновых свойств среды на примере газа осцилляторов

Вышеизложенный метод анализа волновых свойств нужно дополнить общим методом нахождения тензора диэлектрической проницаемости.

Он состоит в следующем. Предположим, в среде имеется малое электрическое поле в виде плоской волны:

$$\vec{E} \propto \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t). \quad (5.1)$$

Это поле создает возмущения плотности и скорости зарядов, которые можно найти из уравнений движения отдельных частиц среды. Так как электрическое поле мы выбрали малым, то уравнения движения можно линеаризовать по амплитуде возмущения, оставив в нем только слагаемые, пропорциональные $|\vec{E}|$. Зная плотность зарядов и их скорость, можно найти возникающий в среде ток \vec{j} и из коэффициентов пропорциональности между компонентами векторов \vec{j} и \vec{E} собрать тензор проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$. Затем по формуле (3.9) находится тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

Проиллюстрируем описанный выше общий метод на примере конкретной среды (газа осцилляторов). Предположим, в единице объема есть n неподвижных притягивающих центров, около каждого из которых есть один электрон с зарядом $(-e)$, движущийся по закону

$$m \frac{d^2 \vec{\delta r}}{dt^2} = -\kappa \vec{\delta r} - e \vec{E}, \quad (5.2)$$

где $\vec{\delta r}$ — смещение электрона относительно положения равновесия, коэффициент κ характеризует возвращающую силу, а \vec{E} — возмущающее электрическое поле (5.1). Так как вынужденные колебания электрона совершаются с частотой вынуждающей силы, то смещение $\vec{\delta r}$ легко находится:

$$-m\omega^2 \vec{\delta r} = -\kappa \vec{\delta r} - e \vec{E}, \quad \vec{\delta r} = \frac{e \vec{E}}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad (5.3)$$

где мы ввели частоту осциллятора

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}. \quad (5.4)$$

По известному смещению находим скорость и ток:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\delta r}}{dt} = -\frac{ie\omega \vec{E}}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad \vec{j} = -en\vec{v} = \frac{ine^2\omega \vec{E}}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad (5.5)$$

а затем тензоры проводимости и диэлектрической проницаемости:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{ine^2\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \delta_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{4\pi ne^2}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\right) \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.6)$$

В выражении (5.6) наряду с частотой осциллятора можно увидеть еще одну характерную частоту среды, называемую электронной плазменной частотой:

$$\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / m}. \quad (5.7)$$

Таким образом, тензор диэлектрической проницаемости газа осцилляторов выражается через одну скалярную функцию $\varepsilon(\omega)$, тоже называемую диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (5.8)$$

Для дальнейшего продвижения нам необходимо выбрать оси координат. Пусть ось \vec{z} параллельна вектору \vec{k} . Тогда векторное уравнение (4.5) примет вид

$$\begin{pmatrix} -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (5.9)$$

Определитель матрицы $L_{\alpha\beta}$ обращается в нуль в двух случаях:

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\varepsilon(\omega)}, \quad (5.10)$$

$$\varepsilon(\omega) = 0. \quad (5.11)$$

Волны первого типа называют электромагнитными. Это — поперечные волны ($\vec{E} \perp \vec{k}$), у них есть две возможные поляризации [$\vec{E} \in (\vec{x}, \vec{y})$], и в вакуумном пределе ($\varepsilon = 1$, $\vec{D} = \vec{E}$) они переходят в обычные электромагнитные волны в вакууме.

Волны второго типа могут иметь только дискретный спектр частот:

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_0^2}. \quad (5.12)$$

Это — продольные волны ($\vec{E} \parallel \vec{k} \parallel \vec{z}$). Такие волны также называют потенциальными, поскольку в них

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \times \vec{E}] = 0, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (5.13)$$

1.6 Асимптотика диэлектрической проницаемости при больших частотах

Если частота поля ω велика по сравнению с частотами движения всех электронов в атомах вещества, то все электроны можно рассматривать как свободные, пренебрегая их взаимодействием друг с другом и с ядрами атомов. Действительно, уравнение движения электрона среды можно записать так:

$$m\ddot{\delta\vec{r}} = -m\omega^2\delta\vec{r} = -e\vec{E} + \vec{F}_{\text{возвр}}, \quad (6.1)$$

где $\vec{F}_{\text{возвр}}$ — некая возвращающая сила, линейно зависящая от смещения электрона $\delta\vec{r}$ (иначе в рамках линейной электродинамики быть не может). Если эта сила не растет с частотой (что естественно предположить), то можно ей пренебречь по сравнению с $m\omega^2\delta\vec{r}$. Следовательно, в быстроосциллирующем поле \vec{E} электроны приобретают скорость

$$\vec{v} = -i\omega\delta\vec{r} = \frac{e\vec{E}}{im\omega} \quad (6.2)$$

и создают ток

$$\vec{j} = -en\vec{v} = \frac{ine^2}{m\omega}\vec{E}, \quad (6.3)$$

где n — полное число электронов в единице объема. Из формул (6.3) и (3.9) находим проводимость и диэлектрическую проницаемость:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma\delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma = \frac{ine^2}{m\omega}, \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}. \quad (6.4)$$

Таким образом, для любой среды

$$\varepsilon(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (6.5)$$

где ω_p — плазменная частота (5.7).

1.7 Частотная и пространственная дисперсия

Говорят, что среда не обладает ни частотной, ни пространственной дисперсией, если ее отклик на внешнее поле является мгновенным и локальным, т. е. электрическая индукция в любой точке в любой момент

времени определяется только электрическим полем в той же точке в тот же момент времени:

$$D_{\alpha}(\vec{r}, t) = A_{\alpha\beta} E_{\beta}(\vec{r}, t), \quad (7.1)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = A_{\alpha\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'), \quad (7.2)$$

где $A_{\alpha\beta}$ — некоторая матрица с постоянными коэффициентами. Тензор диэлектрической проницаемости при этом не зависит ни от ω , ни от \vec{k} :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \int A_{\alpha\beta} \delta(\vec{\rho}) \delta(\tau) e^{-i\vec{k}\vec{\rho} + i\omega\tau} d\vec{\rho} d\tau = A_{\alpha\beta}. \quad (7.3)$$

Полное отсутствие дисперсии — это идеализация, справедливая с некоторой точностью в некотором частотном диапазоне. В действительности все среды обладают дисперсией. Говорят, что среда обладает частотной дисперсией, если ее отклик на внешнее поле не является мгновенным:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) \text{ зависит от } \vec{E}(\vec{r}, t'), \quad t' < t, \quad (7.4)$$

или, что эквивалентно, тензор диэлектрической проницаемости зависит от частоты: $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)$.

Соответственно, среда обладает пространственной дисперсией, если

$$\vec{D}(\vec{r}, t) \text{ зависит от } \vec{E}(\vec{r}', t), \quad \vec{r} \neq \vec{r}', \quad (7.5)$$

или $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k})$. Разумеется, среда может обладать и пространственной, и частотной дисперсией: $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$.

Отметим, что в силу (3.9) в отсутствие частотной дисперсии тензор проводимости должен зависеть от частоты линейно.

Простым примером среды с дисперсией может служить газ заряженных частиц, вращающихся в магнитном поле вследствие теплового движения (рис.1.1). Ток в точке ‘В’, а значит и вектор \vec{D} , зависит от величины электрического поля в точке ‘А’, которое было там во время нахождения там частицы.

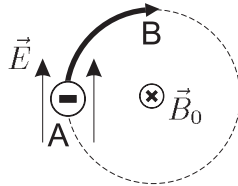


Рис. 1.1: Движение электрона в магнитном поле

1.8 Свойства симметрии $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в изотропных и зеркально-изомерных средах

Изотропными называют среды, в которых нет выделенных направлений (в отсутствие волны). Зеркально-изомерными называют среды, не инвариантные относительно зеркального отражения. Изотропные и инвариантные относительно отражения среды называют истинно изотропными.

Примером зеркально-изомерной среды может служить газ спиральных молекул. Спирали бывают левые и правые, причем правую спираль нельзя перевести в левую никакими пространственными поворотами. Отражение меняет знак спирали. Поэтому если до зеркального отражения спиралей одного типа в среде было больше, то после отражения их будет меньше, т. е. получится другая среда. Зеркальных изомеров много среди органических веществ со сложными молекулами.

Построим общий вид тензора диэлектрической проницаемости изотропной среды из соображений тензорной размерности. В отсутствие пространственной дисперсии (т. е. выделенного направления \vec{k}) для построения тензора второго ранга можно воспользоваться только инвариантным тензором (символом Кронекера):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega) \delta_{\alpha\beta}. \quad (8.1)$$

При наличии пространственной дисперсии можно также пользоваться вектором \vec{k} :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = A(k, \omega) \delta_{\alpha\beta} + B(k, \omega) k_\alpha k_\beta + C(k, \omega) e_{\alpha\beta\gamma} k_\gamma. \quad (8.2)$$

Здесь $e_{\alpha\beta\gamma}$ — инвариантный тензор Лёви-Чивита, а A , B и C — некие скалярные функции (в силу изотропии среды они могут зависеть только от модуля $|\vec{k}|$). Непосредственным перебором легко убедиться, что из одного вектора и инвариантных тензоров можно построить только выписанные выше слагаемые. Обычно общее выражение для $\varepsilon_{\alpha\beta}$ записывают в другой (эквивалентной) форме:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\perp \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) + \varepsilon_\parallel \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + i g e_{\alpha\beta\gamma} \frac{k_\gamma}{k}. \quad (8.3)$$

Почему так удобнее, будет ясно из следующих разделов.

При тройном зеркальном отражении системы (инверсии осей координат) истинный вектор \vec{k} меняет знак. Инвариантные же тензоры $\delta_{\alpha\beta}$ (истинный тензор) и $e_{\alpha\beta\gamma}$ (псевдотензор) знака не меняют. Если среда

является истинно изотропной, то, во-первых, она не может характеризоваться никакой псевдоскалярной величиной (меняющей знак при отражении), и, во-вторых, тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ не должен изменяться при отражении. Поэтому в случае истинно изотропной среды должно быть $g \equiv 0$. И наоборот, если в изотропной среде $g \neq 0$, то такая среда является зеркально-изомерной.

1.9 Естественная оптическая активность

Зеркально-изомерные среды обладают так называемой естественной оптической активностью, т. е. способностью вращать плоскость поляризации электромагнитной волны. Рассмотрим это явление количественно.

Пусть диэлектрическая проницаемость среды имеет вид (8.3), причем

$$g \neq 0, \quad |g| \ll \varepsilon_{\perp}. \quad (9.1)$$

Направим ось \vec{z} по вектору \vec{k} . Тогда

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

и уравнение (4.5) принимает вид

$$\begin{pmatrix} -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} & i\frac{\omega^2}{c^2}g & 0 \\ -i\frac{\omega^2}{c^2}g & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (9.3)$$

Из (9.3) виден смысл введения «продольной» и «поперечной» диэлектрических проницаемостей ε_{\parallel} и ε_{\perp} : они отвечают за продольные и поперечные волны.

На продольные волны наличие оптической активности не влияет. Дисперсионное соотношение для них

$$\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = 0. \quad (9.4)$$

Дисперсионное соотношение для поперечных волн получим в форме $k = k_{\pm}(\omega)$, характеризующей распространение в пространстве волн

с заданной частотой. Имеем

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}\right)^2 &= \frac{\omega^4}{c^4}g^2, \\ k_{\pm}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_{\perp} \pm g), \\ k_{\pm} &\approx \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{c} \left(1 \pm \frac{g}{2\varepsilon_{\perp}}\right). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Эти волны имеют круговую поляризацию:

$$E_x = \pm iE_y, \quad E_z = 0, \quad (9.6)$$

причем фазовая скорость волн с правой и левой поляризацией различна.

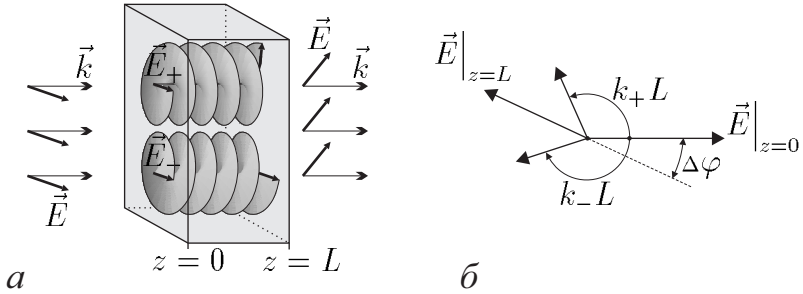


Рис. 1.2: Естественная оптическая активность (а); к вычислению угла поворота плоскости поляризации (б)

Пусть в плоскопараллельный слой оптически активной среды входит линейно поляризованный свет (рис. 1.2, а). Как мы только что установили, в такой среде поперечные волны могут распространяться только с круговой поляризацией. Поэтому на входе в среду ($z = 0$) линейно поляризованный свет разлагается на право- и левополяризованные составляющие, и дальше эти составляющие движутся независимо друг от друга. На выходе из среды ($z = L$) набег фаз у право- и левополяризованной волн будет различным: k_+L и k_-L , соответственно. Поэтому после сложения этих волн получится линейно поляризованный свет с плоскостью поляризации, повернутой на угол

$$\Delta\varphi = \frac{(k_+ - k_-)L}{2} = \frac{\omega g L}{2c\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} \quad (9.7)$$

(рис. 1.2,б). Если на выходе из среды волны разной круговой поляризации имеют различные амплитуды (из-за различия декрементов затухания или коэффициентов отражения на границе), то при их сложении получится свет с эллиптической поляризацией.

Естественная оптическая активность — явление весьма распространенное среди органических веществ естественного происхождения. Это связано с не объясненным до сих пор свойством живой природы строить белки только из левых оптических изомеров аминокислот (термины «левый» и «правый» здесь условны, так как не всегда соответствуют направлению вращения плоскости поляризации). Так, 19 из 20 жизненно важных аминокислот оптически активны. Белки, синтезированные искусственно из правых аминокислот, не усваиваются организмом. Бактерии подвергают брожению лишь один из изомеров, не затрагивая другой. Левый никотин в несколько раз ядовитее правого.

Естественной оптической активностью могут также обладать вещества с зеркально-асимметричной кристаллической структурой, но простыми молекулами. Их называют оптически активными веществами второго рода.

1.10 Одноосные кристаллы

Одноосными кристаллами в электродинамике сплошных сред называют среды (не обязательно обладающие кристаллической структурой), в которых есть только одно выделенное направление. Это направление (\vec{n}) называют оптической осью.

В отсутствие пространственной дисперсии общий вид тензора диэлектрической проницаемости одноосного кристалла (из соображений тензорной размерности) такой:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\perp}(\delta_{\alpha\beta} - n_{\alpha}n_{\beta}) + \varepsilon_{\parallel} n_{\alpha}n_{\beta} + i g e_{\alpha\beta\gamma} n_{\gamma}. \quad (10.1)$$

Если среда не является зеркально-изомерной, то \vec{n} — истинный вектор, а g не может быть псевдоскаляром. Поэтому при зеркальном отражении среды вектор \vec{n} меняет знак, а g и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ не могут изменить знака. Отсюда заключаем, что в отсутствие зеркальной изомерии $g \equiv 0$.

Найдем, какие волны могут распространяться в одноосном кристалле без зеркальной изомерии. Выберем оси так:

$$\vec{z} \parallel \vec{n}, \quad \vec{k} \in (\vec{x}, \vec{z}), \quad \vec{n} = (0, 0, 1), \quad \vec{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel}). \quad (10.2)$$

Тогда уравнение (4.5) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} - k_{\parallel}^2 & 0 & k_{\perp}k_{\parallel} \\ 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} - k^2 & 0 \\ k_{\perp}k_{\parallel} & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\parallel} - k_{\perp}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (10.3)$$

Волну с дисперсионным соотношением и поляризацией

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{\perp}, \quad E_y \neq 0, \quad \vec{E} \perp (\vec{k}, \vec{n}) \quad (10.4)$$

называют обыкновенной электромагнитной волной. На распространение такой волны наличие оптической оси никак не сказывается.

Волну, электрическое поле которой лежит в плоскости (\vec{k}, \vec{n}) , называют необыкновенной волной. Дисперсионное соотношение для нее

$$\frac{\omega^4}{c^4}\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel} - \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_{\perp}k_{\perp}^2 + \varepsilon_{\parallel}k_{\parallel}^2) = 0,$$

или в более компактной форме

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{k_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{k_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}}. \quad (10.5)$$

Фазовая скорость (ω/k) такой волны зависит от направления вектора \vec{k} . Направление групповой скорости, вообще говоря, не совпадает с направлением волнового вектора:

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega^2}{\partial \vec{k}} = \frac{c^2}{\omega} \left(\frac{\vec{k}_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\vec{k}_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \right) \nparallel \vec{k}. \quad (10.6)$$

Можно также показать, что преломленный необыкновенный луч в общем случае не лежит в плоскости падения.

Наличие в одноосном кристалле двух типов волн с различным направлением групповой скорости приводит к так называемому двойному лучепреломлению, т. е. раздвоению световых лучей при прохождении через кристалл (рис. 1.3, а).

Из-за различия фазовых скоростей двух волн одноосные кристаллы способны изменять тип поляризации электромагнитной волны. В частности, если набег фаз двух волн различаются на $\pi/2$, то круговая поляризация переходит в линейную и наоборот (рис. 1.3, б).

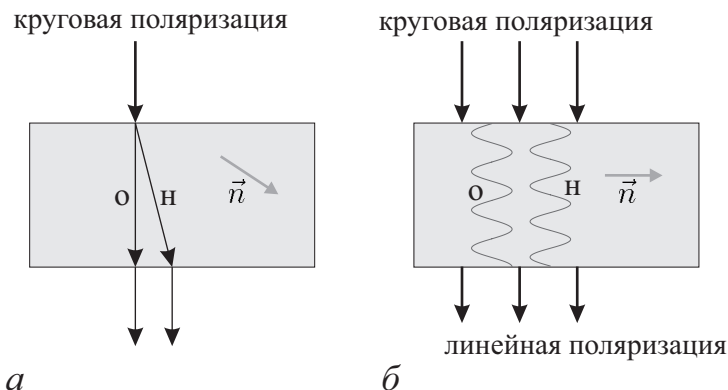


Рис. 1.3: Эффекты двойного лучепреломления (а) и изменения поляризации (б). Буквы «о» и «н» обозначают обыкновенную и необыкновенную волны

1.11 Эффект Керра

В однородном внешнем электрическом поле (\vec{E}_0) истинно изотропная среда приобретает свойства одноосного кристалла. Это явление называется эффектом Керра (J. Kerr, 1875). Действительно, поле \vec{E}_0 задает в среде выделенное направление, т. е. оптическую ось. Поскольку \vec{E}_0 — истинный вектор, диэлектрическая проницаемость среды с полем принимает вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = A(\omega, E_0) \delta_{\alpha\beta} + B(\omega, E_0) E_{0\alpha} E_{0\beta}, \quad (11.1)$$

или

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\perp} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{E_{0\alpha} E_{0\beta}}{E_0^2} \right) + \varepsilon_{\parallel} \frac{E_{0\alpha} E_{0\beta}}{E_0^2}, \quad (11.2)$$

$$\varepsilon_{\perp} = A, \quad \varepsilon_{\parallel} = A + BE_0^2, \quad (11.3)$$

где A и B — некие функции. В общем случае $B \neq 0$, поэтому $\varepsilon_{\perp} \neq \varepsilon_{\parallel}$, что и соответствует одноосному кристаллу.

На эффекте Керра основано действие ячейки Керра (рис. 1.4) — устройства, применяемого в качестве оптического затвора или модулятора света. Схематически действие такого затвора показано на рис. 1.4. Используется способность одноосного кристалла изменять поляризацию света с линейной на круговую и обратно. Поляризационные фильтры («поляризатор» и «анализатор») находятся в скрещенном положении, потому в отсутствие поля в конденсаторе свет через систему

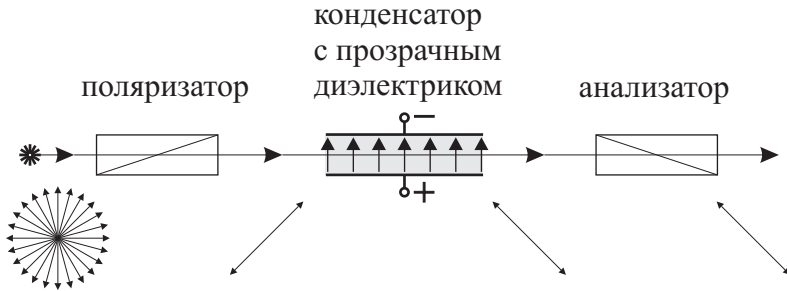


Рис. 1.4: Действие ячейки Керра. Снизу схематически показана поляризация света (направление вектора \vec{E})

не проходит. При включении поля направление поляризации меняется на перпендикулярное, и анализатор пропускает свет.

1.12 Магнитооптические эффекты

Рассмотрим истинно изотропную среду без пространственной дисперсии, помещенную во внешнее однородное магнитное поле \vec{B}_0 . Внешнее поле задает выделенное направление, поэтому тензор диэлектрической проницаемости среды принимает вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\perp} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{B_{0\alpha}B_{0\beta}}{B_0^2} \right) + \varepsilon_{\parallel} \frac{B_{0\alpha}B_{0\beta}}{B_0^2} + ig e_{\alpha\beta\gamma} \frac{B_{0\gamma}}{B_0}, \quad (12.1)$$

причем коэффициент g не зануляется из соображений зеркальной симметрии, так как \vec{B}_0 — псевдовектор (не меняет знака при тройном отражении).

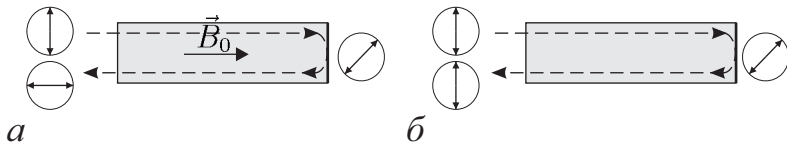


Рис. 1.5: Поворот плоскости поляризации во внешнем магнитном поле (а) и в среде с естественной оптической активностью (б). В кружках показана ориентация электрического поля волны в плоскости, перпендикулярной \vec{k}

Если волна распространяется параллельно внешнему полю ($\vec{k} \parallel \vec{B}_0$), то наша задача эквивалентна задаче о естественной оптической активности (тензор (12.1) принимает тот же вид). Следовательно, электромагнитные волны имеют в среде круговую поляризацию с несколько различными фазовыми скоростями, что и приводит к вращению плоскости поляризации линейно поляризованного света. Этот эффект (вращение плоскости поляризации при наложении продольного магнитного поля) называется эффектом Фарадея (М. Faraday, 1845). Направление фарадеевского вращения зависит от знака произведения $\vec{k}\vec{B}_0$, поэтому при прохождении среды «туда и обратно» углы поворота складываются (рис. 1.5, а). Иная ситуация будет в случае естественной оптической активности. Поскольку направление вращения плоскости поляризации не зависит от направления распространения волны, то после прохождения среды «туда и обратно» поляризация света будет прежней (рис. 1.5, б).

При распространении волны поперек внешнего магнитного поля среда ведет себя почти как одноосный кристалл. Этот эффект называется эффектом Коттона — Мутона (А. Cotton, Н. Mouton, 1907). Действительно, в случае

$$\vec{z} \parallel \vec{B}_0, \quad \vec{k} \parallel \vec{x} \quad (12.2)$$

имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} & i\frac{\omega^2}{c^2}g & 0 \\ -i\frac{\omega^2}{c^2}g & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\parallel} - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (12.3)$$

откуда находим волны:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{\parallel}, \quad E_z \neq 0, \quad \vec{E} \parallel \vec{B}_0; \quad (12.4)$$

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{\perp} - \frac{g^2}{\varepsilon_{\perp}}, \quad E_x, E_y \neq 0, \quad \vec{E} \perp \vec{B}_0. \quad (12.5)$$

В случае слабого внешнего поля волна (12.5) является почти поперечной ($\vec{E} \perp \vec{k}$):

$$|g| \ll \varepsilon_{\perp} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad |E_x| \ll |E_y|. \quad (12.6)$$

Наличие в среде двух линейно поляризованных поперечных волн с разными фазовыми скоростями приводит к изменению поляризации света

(см. рис. 1.3,б). Можно также показать, что если вектор \vec{k} почти (но не строго) перпендикулярен \vec{B}_0 , то направления распространения волн (12.4) и (12.5) немного различаются, что приводит к эффекту двойного лучепреломления.

1.13 Аналитические свойства диэлектрической проницаемости

Область аналитичности. Рассмотрим среду с частотной дисперсией и диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega) \delta_{\alpha\beta}. \quad (13.1)$$

В силу определений вектора электрической индукции \vec{D} (1.12) и оператора $\hat{\varepsilon}$ (3.4) имеем

$$\vec{E}(t) + \int_{-\infty}^t 4\pi \vec{j}(t') dt' = \vec{D}(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t-t') \vec{E}(t') dt', \quad (13.2)$$

откуда видно, что ядро оператора диэлектрической проницаемости должно содержать в себе δ -функцию. Введем, по определению, функцию отклика среды

$$f(\tau) = \varepsilon(\tau) - \delta(\tau), \quad \tau = t - t'. \quad (13.3)$$

Тогда

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + \int_{-\infty}^t f(t-t') \vec{E}(t') dt'. \quad (13.4)$$

Заметим, что функция $f(\tau)$ действительна (связывает действительные физические величины \vec{D} и \vec{E}) и стремится к нулю при больших значениях аргумента (поле \vec{E} из далекого прошлого слабо влияет на текущее состояние системы).

В фурье-представлении из (13.3) получаем

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (13.5)$$

Интеграл в (13.5) заведомо сходится при $\text{Im } \omega > 0$, причем в силу свойств преобразования Лапласа $\varepsilon(\omega)$ является аналитической функцией в области сходимости. Таким образом, аналитичность в верхней

полуплоскости является следствием принципа причинности ($f(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$) и выбранного определения преобразования Фурье (3.1), (3.2).

Четность. Из формулы (13.5) с очевидностью следует

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega^*). \quad (13.6)$$

В частности, на мнимой полуоси $\text{Im } \omega > 0$ функция $\varepsilon(\omega)$ принимает действительные значения. На действительной оси

$$\text{Re } \varepsilon(-\omega) = \text{Re } \varepsilon(\omega), \quad \text{Im } \varepsilon(-\omega) = -\text{Im } \varepsilon(\omega). \quad (13.7)$$

Вещественные значения. Функция $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости принимает каждое вещественное значение не более одного раза. Для доказательства этого факта вычислим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\varepsilon}{d\omega} \frac{d\omega}{\varepsilon - a}, \quad a \in \mathbf{R} \quad (13.8)$$

по контуру C (рис. 1.6, а), проходящему над вещественной осью ω и замыкающемуся через комплексную бесконечность. В силу принципа аргумента интеграл I равен разности между числом нулей и числом полюсов знаменателя $\varepsilon(\omega) - a$ внутри контура C . Поскольку внутри C функция $\varepsilon(\omega)$ аналитична и не имеет полюсов, то число I показывает, сколько раз $\varepsilon(\omega)$ принимает значение a .

Для вычисления I перейдем к переменной ε :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon - a}. \quad (13.9)$$

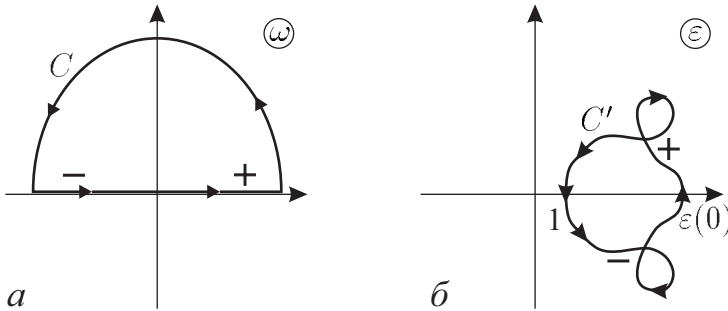


Рис. 1.6: Соответствие контуров интегрирования на плоскости комплексной переменной ω (а) и ε (б)

Контур C' на плоскости комплексной переменной ε (рис. 1.6,б) проходит через единицу при $\omega = \infty$ и через $\varepsilon(0)$ при $\omega = 0$. Участок C' , соответствующий положительной полуоси действительной оси ω и обозначенный «+», будет лежать в верхней полуплоскости, поскольку в среде всегда есть диссипация (пусть даже очень маленькая), а для положительности Q при $\omega > 0$ в силу (18.9) нужно $\text{Im } \varepsilon > 0$. Отрицательная полуось ω в силу (13.7) перейдет в симметричный относительно действительной оси ε участок контура C' (обозначенный '−'). Направление обхода C' будет таким, как показано на рис. 1.6,б.

Контур C' пересекает действительную ось только в двух точках. Следовательно, если $a \in (1, \varepsilon(0))$, то внутри C' появляется один простой полюс $I = 1$ и действительное значение a принимается один раз. В противном случае $\varepsilon(\omega)$ не принимает значения a в верхней полуплоскости переменной ω .

Из доказанной теоремы следует, что $\varepsilon(\omega)$ принимает действительные значения только на мнимой полуоси $\text{Im } \omega > 0$, причем монотонно убывает на ней от $\varepsilon(0)$ до 1.

1.14 Теорема Крамерса — Кронига

Аналитическую функцию можно полностью восстановить по ее действительной или мнимой части. Применительно к диэлектрической проницаемости это означает, что по дисперсии волны (определяемой $\text{Re } \varepsilon$) можно найти декремент ее затухания (выражающийся через $\text{Im } \varepsilon$) и наоборот.

Получим соответствующие формулы для среды с диэлектрической проницаемостью (13.1), причем будем считать $\varepsilon(\omega)$ аналитической также и на действительной оси (при $\text{Im } \omega \geq 0$). Выберем $\omega_0 \in \mathbb{R}$ и вычислим интеграл

$$\int_C \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (14.1)$$

по контуру C (рис. 1.7). Поскольку внутри контура подынтегральное выражение аналитично, этот интеграл равен нулю. С другой стороны,

$$\int_C = \int_{\widehat{R}} + \int_{-R}^{\omega_0 - \rho} + \int_{\widehat{\rho}} + \int_{\omega_0 + \rho}^R, \quad (14.2)$$

причем интеграл по большой полуокружности в силу асимптотики (6.5)

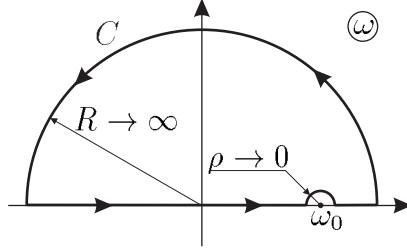


Рис. 1.7: К доказательству теоремы Крамерса — Кронига (контур интегрирования)

зачнуляется:

$$\int_{\widehat{R}} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega = - \int_{\widehat{R}} \frac{\omega_p^2}{\omega^3} d\omega \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad (14.3)$$

интеграл по малой полуокружности сводится к полувычету:

$$\int_{\widehat{\rho}} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega = -\pi i \operatorname{Res} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} = -\pi i (\varepsilon(\omega_0) - 1), \quad (14.4)$$

а интегралы по участкам действительной оси объединяются в один интеграл в смысле главного значения. Таким образом,

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega = \pi i (\varepsilon(\omega_0) - 1), \quad (14.5)$$

откуда, взяв отдельно действительную и мнимую части, получаем формулы

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega = -\pi \operatorname{Im} \varepsilon(\omega_0), \quad (14.6)$$

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \pi (\operatorname{Re} \varepsilon(\omega_0) - 1), \quad (14.7)$$

известные как формулы Крамерса — Кронига (Н. А. Kramers, R. L. Kronig, 1927). Формулы (14.6) и (14.7) позволяют по известной

мнимой части диэлектрической проницаемости найти вещественную и наоборот.

Мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ не только положительна при $\omega > 0$, но и не может быть пренебрежимо малой во всем интервале частот. Действительно, перепишем левую часть (14.7) в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega + \omega_0} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{2\omega \operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega, \end{aligned} \quad (14.8)$$

где в одном из интегралов мы сделали замену $\omega \rightarrow -\omega$ и воспользовались нечетностью $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$. При $\omega_0 \rightarrow \infty$ можно пренебречь ω^2 в знаменателе (14.8) и воспользоваться асимптотикой (6.5):

$$- \int_0^{\infty} \frac{2\omega \operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega_0^2} d\omega = -\pi \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2},$$

откуда получаем правило сумм:

$$\int_0^{\infty} \omega \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) d\omega = \frac{\pi \omega_p^2}{2}. \quad (14.9)$$

Аналогично при $\omega_0 \rightarrow 0$ из (14.8) имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} (\varepsilon(0) - 1). \quad (14.10)$$

Формулы Крамерса — Кронига и их следствия легко обобщить на среды, диэлектрическая проницаемость которых имеет полюс в нуле (проводящие среды).

В качестве примера применения формул Крамерса — Кронига найдем мнимую часть диэлектрической проницаемости газа осцилляторов по ее действительной части (5.8). Из (14.6) имеем

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega_*) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\omega_p^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega - \omega_*)} d\omega. \quad (14.11)$$

Если $\omega_* \neq \pm\omega_0$, то подынтегральное выражение в (14.11) можно разложить на элементарные дроби,

$$\frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega - \omega_*)} = \frac{A}{\omega - \omega_0} + \frac{B}{\omega + \omega_0} + \frac{C}{\omega - \omega_*}, \quad A, B, C \in \mathbf{R}, \quad (14.12)$$

каждая из которых при интегрировании в смысле главного значения обращается в ноль. При совпадении же частоты ω_* с частотой осциллятора $\pm\omega_0$ подынтегральное выражение имеет неинтегрируемую особенность при $\omega = \pm\omega_0$. Таким образом,

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega_*) = \begin{cases} 0, & \omega_* \neq \pm\omega_0, \\ \pm\infty, & \omega_* = \pm\omega_0, \end{cases} \quad (14.13)$$

поэтому естественно искать мнимую часть диэлектрической проницаемости в виде суммы дельта-функций:

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = A_0 \delta(\omega - \omega_0) - A_0 \delta(\omega + \omega_0). \quad (14.14)$$

Коэффициенты A_0 в этом выражении выбраны одинаковыми, чтобы обеспечить нечетность функции $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$. При помощи (14.7) находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{\omega - \omega_*} d\omega = \frac{A_0}{\omega_* - \omega_0} + \frac{A_0}{\omega_* + \omega_0} = -\frac{\pi\omega_p^2}{\omega_*^2 - \omega_0^2}, \quad (14.15)$$

$$A_0 = \frac{\pi\omega_p^2}{2\omega_0}. \quad (14.16)$$

Как будет показано далее, мнимая часть диэлектрической проницаемости отвечает за затухание электромагнитной волны в такой среде. Таким образом, газ осцилляторов поглощает волну только на резонансной частоте ω_0 .

1.15 Электромагнитные волны в средах с частотной дисперсией

Пусть на полупространство, заполненное средой с проницаемостью (13.1) (рис. 1.8, а), падает по нормали электромагнитная волна с резким передним фронтом, так что электрическое поле на границе (при $x = 0$)

$$E_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ Ae^{-i\omega_0 t - \delta t}, & t > 0. \end{cases} \quad (15.1)$$

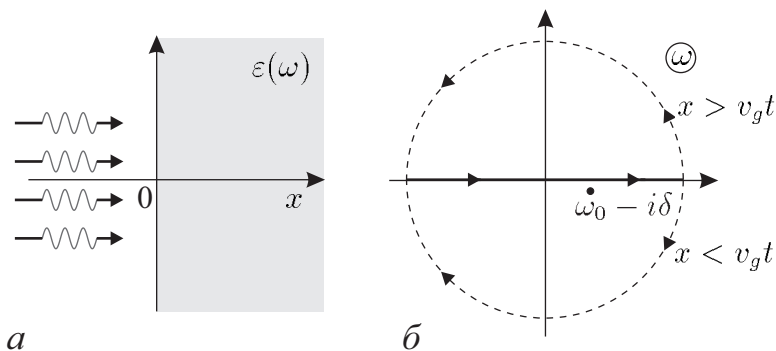


Рис. 1.8: Геометрия задачи (а), замыкание контуров интегрирования (б)

Слабое затухание $\delta > 0$ ($\delta \rightarrow 0$) здесь введено в формулу для того, чтобы в дальнейшем избежать неопределенностей при интегрировании. Найдём в одномерном случае, как эта волна будет распространяться в среде.

Заметим, что электрическое поле — величина действительная. Его запись при помощи комплексной экспоненты подразумевает, что у выражения (15.1) надо взять действительную часть, хотя сама операция взятия действительной части обычно опускается. Поскольку все дальнейшие математические действия, которые мы будем производить с электрическим полем, в силу линейности задачи коммутируют с взятием действительной части, то можно эту операцию (Re) держать в уме. Будем считать коэффициент A комплексным, что позволит единообразно описать разные начальные фазы волны (рис. 1.9).

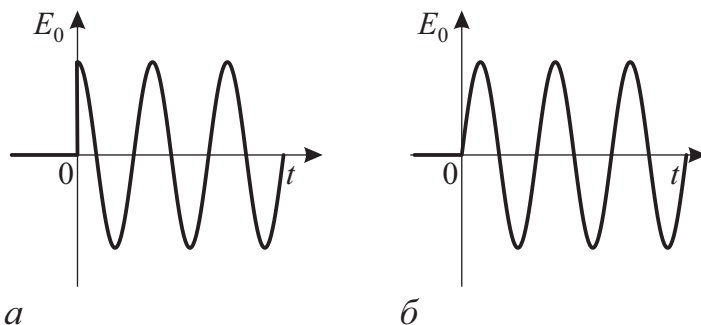


Рис. 1.9: Электрическое поле на границе среды при действительном коэффициенте A (а) и при чисто мнимом (б)

Стандартный метод определения $E(x, t)$ состоит в следующем. На границе мы разлагаем поле на плоские монохроматические волны, находим закон распространения отдельной гармоник в среде, после чего интегрированием собираем из гармоник полное поле в произвольной точке в произвольный момент времени. Амплитуды отдельных гармоник $E(\omega)$ получаем преобразованием Фурье по времени:

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} A e^{-i\omega_0 t - \delta t} e^{i\omega t} dt = \frac{iA}{\sqrt{2\pi}(\omega - \omega_0 + i\delta)}. \quad (15.2)$$

Поле отдельной гармоник

$$E(x, t) = E(\omega) e^{ik(\omega)x - i\omega t}, \quad (15.3)$$

где $k(\omega)$ — закон дисперсии электромагнитных волн,

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}. \quad (15.4)$$

Поскольку мы рассматриваем граничную задачу (временная зависимость поля в некоторой точке задана), то частота ω действительна, а k может принимать комплексные значения. Полное поле получается интегрированием (15.3):

$$E(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{ik(\omega)x - i\omega t} d\omega. \quad (15.5)$$

Как видно из (15.2), наибольший вклад в интеграл (15.5) дают гармоник с $\omega \approx \omega_0$, что позволяет разложить $k(\omega)$ в ряд вблизи этой точки:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \dots \approx k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}, \quad (15.6)$$

$$k_0 = k(\omega_0), \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Следовательно,

$$E(x, t) \approx \frac{iA}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_0 x - i\omega_0 t} d\omega}{\omega - \omega_0 + i\delta} e^{i(\omega - \omega_0)(x/v_g - t)}. \quad (15.7)$$

Для вычисления интеграла (15.7) замкнем контур интегрирования по большой полуокружности (рис. 1.8, б), причем при $x > v_g t$ контур замыкается через верхнюю полуплоскость, а при $x < v_g t$ — через нижнюю,

чтобы вклад в интеграл от полуокружности стремился к нулю за счет экспоненциальной малости подынтегрального выражения. Интеграл по замкнутому контуру легко вычисляется через вычеты. Так как подынтегральная функция аналитична в верхней полуплоскости и имеет простой полюс в нижней (при $\omega = \omega_0 - i\delta$), окончательно получаем

$$x > v_g t : E(x, t) = 0; \quad (15.8)$$

$$x < v_g t : E(x, t) = \frac{iA}{2\pi} e^{ik_0 x - i\omega_0 t} (-2\pi i) e^{-\delta(x/v_g - t)} \approx A e^{ik_0 x - i\omega_0 t}. \quad (15.9)$$

Можно показать, что учет второй производной $d^2 k/d\omega^2$ в (15.6) дает расплывание переднего фронта волны (рис. 1.10).

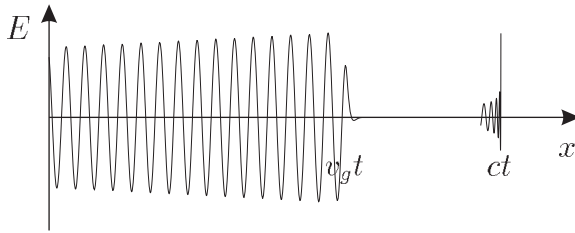


Рис. 1.10: Электромагнитная волна и предвестник в среде с частотной дисперсией

1.16 Предвестник

Если электромагнитное поле на границе среды включается скачком (как в предыдущем разделе), то в его спектре присутствуют гармоники с большими частотами, для которых $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$. Высокочастотные гармоники распространяются в среде со скоростью света и образуют предвестник — короткий электромагнитный импульс, который бежит перед передним фронтом основного волнового пакета (рис. 1.10). Рассмотрим это явление количественно.

В случае электромагнитных волн функция $k(\omega)$, как и $\varepsilon(\omega)$, аналитична в верхней полуплоскости. Следовательно, мы можем поднять контур интегрирования в (15.5) так, чтобы он всюду проходил по области больших частот, где верна асимптотика (6.5) (рис. 1.11, а). При больших $|\omega|$ имеем

$$k(\omega) \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right), \quad (16.1)$$

откуда

$$E(x, t) = \frac{iA}{2\pi} \int_C \frac{d\omega}{\omega - \omega_0 + i\delta} \exp \left(\frac{i\omega x}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right) - i\omega t \right).$$

Малая (по сравнению с ω) добавка в знаменателе отвечает за основной импульс. Однако, поскольку нас сейчас интересует только предвестник, пренебрежем ей:

$$E(x, t) = \frac{iA}{2\pi} \int_C \frac{d\omega}{\omega} \exp \left(i\omega \left(\frac{x}{c} - t \right) - \frac{ix\omega_p^2}{2\omega c} \right). \quad (16.2)$$

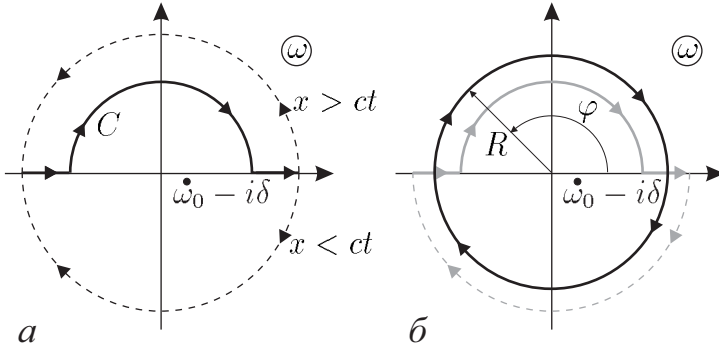


Рис. 1.11: Видоизменения контура интегрирования в задаче о предвестнике: переход в область больших частот (а) и преобразование в окружность (б)

Поведение подынтегрального выражения при удалении от действительной оси определяется знаком выражения $x/c - t$, стоящего в показателе экспоненты. При $x > ct$ подынтегральное выражение экспоненциально убывает при удалении от действительной оси вверх, поэтому

$$E(x, t) = 0, \quad x > ct. \quad (16.3)$$

При $x < ct$ экспонента мала в нижней полуплоскости, потому интеграл (16.2) не изменится, если контур C замкнуть через нижнюю полуплоскость по большой полуокружности (рис. 1.11, а). Замкнутый контур, в свою очередь, приведем к окружности радиуса R (рис. 1.11, б):

$$\omega = Re^{i\varphi}, \quad d\omega = iRe^{i\varphi}d\varphi, \quad (16.4)$$

$$E(x, t) = \frac{iA}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} i d\varphi \exp \left(-\frac{iR(ct-x)}{c} e^{i\varphi} - \frac{i x \omega_p^2}{2Rc} e^{-i\varphi} \right). \quad (16.5)$$

Для вычисления интеграла (16.5) выберем

$$R = \sqrt{\frac{x \omega_p^2}{2(ct-x)}}. \quad (16.6)$$

Тогда

$$E(x, t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left(-\frac{i \omega_p}{c} \sqrt{2x(ct-x)} \cos \varphi \right) d\varphi. \quad (16.7)$$

Этот интеграл выражается через функцию Бесселя:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\alpha \cos \varphi} d\varphi = J_0(\alpha), \quad (16.8)$$

$$E(x, t) = A J_0 \left(\frac{\omega_p}{c} \sqrt{2x(ct-x)} \right). \quad (16.9)$$

Заметим, что, поскольку радиус контура интегрирования R должен быть большим, формула (16.9) применима только при $x \approx ct$.

Итак, перед волновым пакетом с резким (по сравнению со временем ω_p^{-1}) передним фронтом может появиться предвестник — короткий непериодический импульс, бегущий со скоростью света (рис. 1.12). Если поле волнового пакета нарастает плавно (амплитуда A чисто мнимая), то предвестника не возникает.

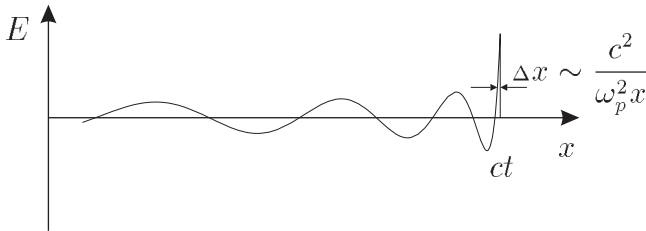


Рис. 1.12: Форма предвестника

1.17 Связь тензора диэлектрической проницаемости с обычными ε , μ и σ

При небольших частотах электродинамические свойства среды можно описывать как тензором диэлектрической проницаемости, так и «обычными» статическими ε (диэлектрической проницаемостью), μ (магнитной проницаемостью) и σ (проводимостью). Найдем, как эти два способа описания соотносятся между собой.

Пусть среда в некоторой области частот характеризуется постоянными значениями ε , μ и σ . Из определений ε и μ находим векторы поляризации и намагниченности:

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E}, \quad (17.1)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B} - \vec{H}}{4\pi} = \frac{1 - 1/\mu}{4\pi} \vec{B} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \vec{B}. \quad (17.2)$$

С их помощью из формулы

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M} + \sigma \vec{E} \quad (17.3)$$

и уравнения Максвелла

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \times \vec{E}] \quad (17.4)$$

находим фурье-образ тока среды:

$$\vec{j} = -i\omega \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E} + \frac{ic^2(\mu - 1)}{4\pi\mu\omega} [\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}]] + \sigma \vec{E}. \quad (17.5)$$

Коэффициенты пропорциональности между компонентами тока и электрического поля составляют тензор проводимости:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\omega(\varepsilon - 1)}{4\pi i} \delta_{\alpha\beta} - \frac{c^2(\mu - 1)}{4\pi i\mu\omega} (k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta}) + \sigma \delta_{\alpha\beta}, \quad (17.6)$$

откуда с помощью (3.9) получаем

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \delta_{\alpha\beta} + \frac{(\mu - 1)c^2}{\mu\omega^2} (k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta). \quad (17.7)$$

Как видно, среда с отличной от единицы магнитной проницаемостью обладает пространственной дисперсией, а значит и нелокальностью отклика тока на электрическое поле. При этом отклик вектора намагниченности на магнитное поле будет вполне локальным. Из выражения (17.7) также ясно, почему тензор диэлектрической проницаемости неудобен для решения статических задач: он имеет полюс при $\omega \rightarrow 0$.

1.18 Диссипация энергии волны

Умножим уравнение (1.2) скалярно на \vec{B} и вычтем из него уравнение (1.1), умноженное на \vec{E} :

$$\begin{aligned}\vec{B} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} &= -\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) - \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{\text{тор}}) \vec{E}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] \right) &= -\vec{j} \vec{E} - \vec{j}_{\text{тор}} \vec{E}.\end{aligned}\quad (18.1)$$

Мы получили уравнение баланса энергии электромагнитного поля. Первый член в левой части (18.1) — это изменение энергии поля в единице объема, второй член обусловлен потоком электромагнитной энергии. Члены в правой части соответствуют поглощению энергии волны вследствие диссипации и работе поля при изменении поляризации среды (первый) и работе поля против стороннего тока (второй).

Выведем универсальную формулу для средней мощности Q , выделяющейся в среде вследствие диссипации волны. Будем считать частоту ω действительной, что соответствует граничной задаче и делает усреднение по периоду волны строго определенным математическим действием. При этом средняя работа по изменению поляризации среды обращается в ноль, и

$$Q = \langle \vec{j} \vec{E} \rangle, \quad (18.2)$$

где угловые скобки означают усреднение по периоду. В плоской гармонической волне

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \left(\vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\omega) e^{i\omega t} \right), \quad (18.3)$$

$$\vec{j}(t) = \frac{1}{2} \left(\vec{j}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{к.с.} \right), \quad (18.4)$$

где индекс «*» означает комплексное сопряжение, а буквы «к.с.» — комплексно-сопряженные слагаемые. Отсюда

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1}{4} \left\langle \vec{E}(\omega) \vec{j}(\omega) e^{-2i\omega t} + \vec{E}(\omega) \vec{j}^*(\omega) + \text{к.с.} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4} \left(\vec{E}(\omega) \vec{j}^*(\omega) + \vec{E}^*(\omega) \vec{j}(\omega) \right) = \\ &= \frac{1}{4} (E_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^* E_\beta^* + E_\alpha^* \sigma_{\alpha\beta} E_\beta) = \frac{1}{4} (\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\alpha}^*) E_\alpha^* E_\beta.\end{aligned}\quad (18.5)$$

При выводе формулы (18.5) мы опустили быстроосциллирующие слагаемые и переобозначили некоторые индексы.

Будем обозначать эрмитовы и антиэрмитовы части тензоров индексами « H » и « A »:

$$a_{\alpha\beta}^H = \frac{a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}^*}{2}, \quad a_{\alpha\beta}^A = \frac{a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}^*}{2}, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^H + a_{\alpha\beta}^A. \quad (18.6)$$

Из (18.5) следует, что мощность диссипации волны определяется эрмитовой частью тензора проводимости:

$$Q = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}^H E_{\alpha}^* E_{\beta}. \quad (18.7)$$

В силу (3.9)

$$\sigma_{\alpha\beta}^H = \frac{\omega}{8\pi i} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta\alpha}^*) = \frac{\omega \varepsilon_{\alpha\beta}^A}{4\pi i}, \quad (18.8)$$

и мы получаем, что мощность диссипации также определяется антиэрмитовой частью тензора диэлектрической проницаемости:

$$Q = -\frac{i\omega}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta}^A E_{\alpha}^* E_{\beta}. \quad (18.9)$$

Формулами (18.7) и (18.9) можно пользоваться и для слабо затухающей волны, однако они, как и определение средней мощности диссипации, в этом случае теряют свой строгий смысл.

1.19 Энергия волны

По определению, энергией волны W считается разность между энергией возмущенной среды (с волной) и энергией невозмущенной среды (без волны). Энергия волны может быть как положительной, так и отрицательной (что случается, если среда не находится в термодинамическом равновесии). Это определение, как и само понятие энергии волны, имеет смысл только для медленно нарастающих или затухающих волн, когда амплитуда возмущения мало меняется в течение периода волны.

Энергия волны связана с мощностью диссипации. Действительно, рассмотрим бесконечную плоскую волну, затухающую с декрементом γ :

$$|\vec{E}| \propto e^{-\gamma t}. \quad (19.1)$$

Мощность диссипации, квадратичная по электрическому полю, убывает с удвоенным декрементом:

$$Q = Q_0 e^{-2\gamma t} \propto |\vec{E}|^2, \quad (19.2)$$

откуда следует баланс энергии в волне:

$$\frac{dW}{dt} = -Q = -Q_0 e^{-2\gamma t}. \quad (19.3)$$

Интегрируя (19.3), находим начальную энергию волны:

$$W_0 = \int_0^\infty Q dt = \frac{Q_0}{2\gamma}. \quad (19.4)$$

Значит, в любой момент времени

$$W = \frac{Q}{2\gamma}. \quad (19.5)$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, нужно знать декремент затухания волны. Найдем его из уравнения (4.5), полагая в последнем

$$\omega = \omega_0 - i\gamma, \quad \gamma \ll \omega_0. \quad (19.6)$$

Обозначим

$$L_{\alpha\beta}^0(\omega) = k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}^H. \quad (19.7)$$

Поскольку мы считаем волну слабозатухающей, а за затухание волны отвечает антиэрмитова часть $\varepsilon_{\alpha\beta}$, то в уравнении

$$\left(L_{\alpha\beta}^0(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}^A(\omega) \right) E_\beta = 0 \quad (19.8)$$

можно второе слагаемое в скобках считать малым и произвести разложение по малым параметрам. В нулевом порядке по малостям γ и $\varepsilon_{\alpha\beta}^A$ имеем

$$L_{\alpha\beta}^0(\omega_0) E_{0\beta} = 0, \quad (19.9)$$

откуда стандартным способом (п. 1.4) находим в первом приближении дисперсионное соотношение $\omega_0(\vec{k})$ и поляризацию волны \vec{E}_0 . Удержим теперь в уравнении (19.8) также слагаемые, содержащие малые параметры в первой степени:

$$\left(L_{\alpha\beta}^0(\omega_0) - i\gamma \frac{\partial L_{\alpha\beta}^0(\omega_0)}{\partial \omega_0} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}^A(\omega_0) \right) E_\beta = 0. \quad (19.10)$$

Свернем равенство (19.10) с вектором $E_{0\alpha}^*$. В силу эрмитовости $L_{\alpha\beta}^0(\omega_0)$ имеем

$$E_{0\alpha}^* L_{\alpha\beta}^0(\omega_0) E_\beta = E_\beta \cdot L_{\beta\alpha}^{H*}(\omega_0) E_{0\alpha}^* = 0, \quad (19.11)$$

что позволяет найти γ из (19.10):

$$\left(-i\gamma \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{\omega_0^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^H(\omega_0)}{c^2} \right) + \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}^A(\omega_0) \right) E_{0\alpha}^* E_\beta = 0,$$

$$\gamma = - \frac{i\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^A(\omega) E_\alpha^* E_\beta}{\left(\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^H(\omega)) \right) E_\alpha^* E_\beta}; \quad (19.12)$$

в уравнении (19.12) мы пренебрегли малым отличием между ω и ω_0 , \vec{E} и \vec{E}_0 .

Подставляя (19.12) и (18.9) в (19.5), получаем удобную и весьма универсальную формулу для нахождения энергии волны по диэлектрической проницаемости:

$$W = \frac{1}{16\pi\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^H(\omega)) \right) E_\alpha^* E_\beta. \quad (19.13)$$

В этой формуле сначала производится дифференцирование по ω , а затем, если нужно, подставляются дисперсионное соотношение $\omega(\vec{k})$ и поляризация для конкретной волны.

В качестве примера найдем энергию электромагнитной волны в диэлектрике с $\varepsilon = \text{const}$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon \delta_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^H. \quad (19.14)$$

Имеем

$$W = \frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial (\omega^2 \varepsilon \delta_{\alpha\beta})}{\partial \omega} E_\alpha^* E_\beta = \frac{2\omega\varepsilon}{16\pi\omega} E_\alpha^* E_\alpha = \frac{\varepsilon |\vec{E}|^2}{8\pi}. \quad (19.15)$$

1.20 Импульс волны

Волна характеризуется не только энергией, но и импульсом. Когда волна затухает, ее импульс передается среде. Изменение среднего импульса среды \vec{p} под действием электромагнитных сил описывается уравнением

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \left\langle \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] \right\rangle. \quad (20.1)$$

В случае плоской гармонической волны уравнение (20.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \left\langle \rho \vec{E} + \frac{1}{\omega} [\vec{j} \times [\vec{k} \times \vec{E}]] \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\rho - \frac{\vec{k} \vec{j}}{\omega} \right) \vec{E} + \frac{\vec{k}}{\omega} (\vec{j} \vec{E}) \right\rangle = \frac{\vec{k}}{\omega} Q, \end{aligned} \quad (20.2)$$

где разность в круглых скобках равна нулю в силу уравнения непрерывности. Поскольку импульс, отдаваемый затухающей волной среде, пропорционален отдаваемой энергии, то и полный импульс волны \vec{P} пропорционален ее полной энергии с тем же коэффициентом:

$$\vec{P} = \frac{\vec{k}}{\omega} W. \quad (20.3)$$

В формуле (20.3) энергия и импульс волны берутся в расчете на единицу объема, т. е. \vec{P} и W — плотности импульса и энергии волны.

Соотношение (20.3) позволяет рассматривать любую волну (не только электромагнитную) как совокупность отдельных квантов, каждый из которых имеет энергию $\hbar\omega$ и импульс $\hbar\vec{k}$, где \hbar — постоянная Планка.

1.21 Поток энергии волны

Плотность энергии W характеризует способность волны запастись энергией. Способность же волны переносить энергию характеризуется векторной величиной — плотностью потока энергии \vec{S} . Чтобы найти \vec{S} , рассмотрим стационарную слабозатухающую пространственно-неоднородную волну (т. е. волну, в которой поток энергии не зануляется по геометрическим соображениям и несложно вычисляется):

$$\frac{\partial |\vec{E}|}{\partial t} = 0, \quad \vec{E} \propto e^{-\alpha x} e^{ik_0 x - i\omega t}, \quad \alpha \ll k_0, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (21.1)$$

Поступаем по аналогии с разделом 1.19. Запишем баланс энергии в волне:

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = -Q = -Q_0 e^{-2\alpha x}, \quad (21.2)$$

откуда получаем

$$S_x = \frac{Q}{2\alpha}. \quad (21.3)$$

Декремент пространственного затухания α находим, разлагая (4.5) по малым параметрам. В нулевом приближении из уравнения

$$L_{\alpha\beta}^0(k_0) E_{0\beta} = 0 \quad (21.4)$$

получаем дисперсионное соотношение в форме $k_0 = k_0(\omega)$ и невозмущенную поляризацию волны \vec{E}_0 . В первом порядке по малостям имеем

$$\begin{aligned} \left(L_{\alpha\beta}^0(k_0 + i\varpi) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}^A(k_0) \right) E_\beta &= 0, \\ \left(L_{\alpha\beta}^0(k_0) + i\varpi \frac{\partial L_{\alpha\beta}^0}{\partial k_x} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}^A(k_0) \right) E_{0\alpha}^* E_\beta &= 0, \\ \varpi &= \frac{i\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^A E_\alpha^* E_\beta}{c^2 \frac{\partial L_{\alpha\beta}^0}{\partial k_x} E_\alpha^* E_\beta}, \end{aligned} \quad (21.5)$$

$$S_x = -\frac{c^2}{16\pi\omega} \left(\frac{\partial L_{\alpha\beta}^0}{\partial k_x} \right) E_\alpha^* E_\beta. \quad (21.6)$$

Обобщая (21.6) на две другие координаты (y и z), окончательно получаем выражение для вектора плотности потока энергии:

$$\vec{S} = -\frac{c^2}{16\pi\omega} \left(\frac{\partial L_{\alpha\beta}^0}{\partial \vec{k}} \right) E_\alpha^* E_\beta. \quad (21.7)$$

Как следует из вывода, при вычислении производной в (21.7) частоту ω следует рассматривать как не зависящий от \vec{k} параметр.

Известно, что локализованные волновые пакеты движутся с групповой скоростью \vec{v}_g , где

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}}. \quad (21.8)$$

Иными словами, групповая скорость определяет скорость перемещения энергии волны. Получим этот факт строго из уравнений (19.13) и (21.7). Пусть затухание мало, и ω и \vec{k} можно считать действительными. Из (4.5) имеем

$$L_{\alpha\beta}^0 E_\alpha^* E_\beta = 0. \quad (21.9)$$

Равенство (21.9) верно не для любых ω и \vec{k} , а только для связанных дисперсионным соотношением $\omega = \omega(\vec{k})$. При условии

$$d\omega = \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}} d\vec{k} \quad (21.10)$$

в полном дифференциале (21.9)

$$\left(\frac{\partial L_{\alpha\beta}^0}{\partial \vec{k}} d\vec{k} + \frac{\partial L_{\alpha\beta}^0}{\partial \omega} d\omega \right) E_\alpha^* E_\beta + L_{\alpha\beta}^0 \left(\frac{\partial E_\alpha^*}{\partial \vec{k}} E_\beta + E_\alpha^* \frac{\partial E_\beta}{\partial \vec{k}} \right) d\vec{k} = 0 \quad (21.11)$$

вторая скобка обращается в ноль в силу эрмитовости оператора $L_{\alpha\beta}^0$, а первая, после домножения на $c^2/(16\pi\omega)$, дает уравнение

$$\vec{S} d\vec{k} - W \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}} d\vec{k} = 0, \quad (21.12)$$

которое верно для любых $d\vec{k}$. Следовательно,

$$\vec{S} = \vec{v}_g W. \quad (21.13)$$

1.22 Переходное излучение

Заряженная частица, пролетая границу раздела двух сред, излучает. Это излучение называется переходным. Переходное излучение появляется вследствие изменения поляризации среды, а не ускорения или замедления частицы. Поэтому переходное излучение не зависит от массы пролетающей частицы.

Строгая теория переходного излучения довольно громоздка, поэтому рассмотрим частный случай перпендикулярного влета нерелятивистской частицы из вакуума в идеальный проводник (рис. 1.13,а). Воспользуемся методом изображений. Суммарный дипольный момент частицы и ее изображения

$$\vec{d}(t) = \begin{cases} 2q\vec{v}t, & t < 0, \\ 0, & t > 0, \end{cases} \quad (22.1)$$

где q — заряд частицы, \vec{v} — ее скорость, а время отсчитывается от момента входа частицы в среду. Производные от дипольного момента по времени равны

$$\dot{\vec{d}}(t) = \begin{cases} 2q\vec{v}, & t < 0, \\ 0, & t > 0; \end{cases} \quad (22.2)$$

$$\ddot{\vec{d}}(t) = -2q\vec{v}\delta(t) \quad (22.3)$$

(рис. 1.13,б). Спектральное распределение полной энергии дипольного излучения определяется фурье-образом $\ddot{\vec{d}}$:

$$\ddot{\vec{d}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\vec{d}}(t) e^{-i\omega t} dt = -\frac{2q\vec{v}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (22.4)$$

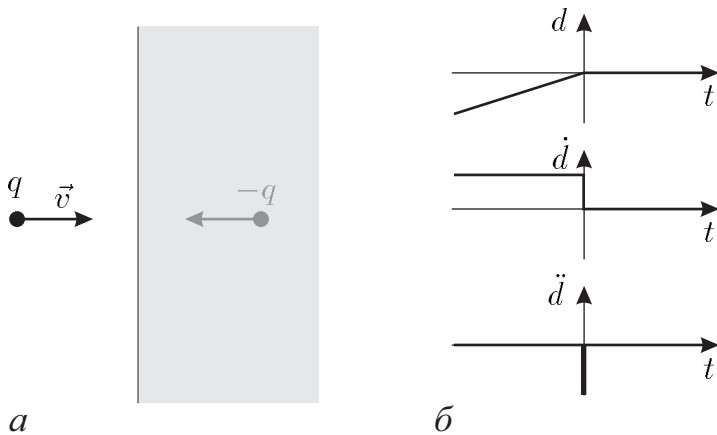


Рис. 1.13: Геометрия задачи о переходном излучении (а); дипольный момент системы и его производные (б)

Оно дается функцией

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2 \left(\ddot{d}(\omega) \right)^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{4q^2 v^2}{3\pi c^3}. \quad (22.5)$$

Множитель $1/2$ в формуле (22.5) появляется, поскольку излучение идет только в левую половину пространства, а множитель 2 — из-за вклада отрицательных частот (при записи спектральной интенсивности частота обычно подразумевается положительной).

Таким образом, при входе в проводник частица равномерно излучает в широком частотном диапазоне. Проблем с расходимостью полной излученной энергии при этом не возникает, поскольку при больших частотах

$$\varepsilon(\omega) \rightarrow 1, \quad \frac{dI}{d\omega} \rightarrow 0. \quad (22.6)$$

1.23 Черенковское излучение

Частица, которая движется в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в этой среде, излучает свет. Это излучение называется черенковским (П. А. Черенков, 1934).

Механизм возникновения черенковского излучения виден на следующем примере. Пусть в среде есть электромагнитная волна с электри-

ческим полем

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$$

и частица с зарядом q , движущаяся по закону $\vec{r} = \vec{v}t$ (рис. 1.14, а). Со стороны волны на частицу будет действовать сила

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{v}t, t) = q\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{v} - \omega)t}. \quad (23.1)$$

При условии

$$\omega = \vec{k}\vec{v} \quad (23.2)$$

эта сила не будет меняться со временем и обеспечит эффективный обмен энергией между волной и частицей: частица будет тормозиться или ускоряться в зависимости от фазы поля. Если до прилета частицы волн в среде не было, то они появятся, причем только такие, для которых выполняется условие черенковского резонанса (23.2).

Как следует из изложенного выше, черенковский механизм излучения может работать для любых волн, возможных в среде, а не только для электромагнитных. Черенковское излучение вызывается не ускорением частицы, потому оно не зависит от массы. Поскольку черенковское излучение не связано с диссипацией, то оно обратимо: частица может как излучать волну, так и поглощать ее (если волна была в среде до прилета частицы). Черенковское излучение невозможно в свободном пространстве, поскольку в вакууме волна всегда бежит со скоростью света, а частица — медленнее скорости света.

Для электромагнитной волны в изотропном диэлектрике с проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ условие (23.2) принимает вид

$$kv \cos \theta = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}. \quad (23.3)$$

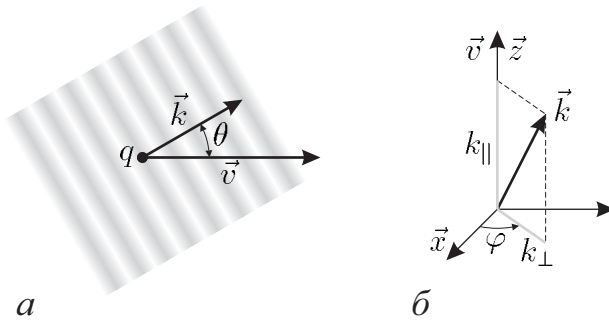


Рис. 1.14: Геометрия задачи о черенковском излучении (а); выбор переменных интегрирования по $d\vec{k}$ (б)

Следовательно, волны с частотой ω будут излучаться только при условии $v > c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ и под углом $\theta(\omega)$, таким что

$$\cos \theta(\omega) = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon(\omega)}}. \quad (23.4)$$

Найдем спектральную интенсивность черенковского излучения в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Для этого через преобразование Фурье найдем поле, создаваемое заряженной частицей в месте ее расположения, и вычислим работу этого поля над частицей.

Одиночная заряженная частица создает в среде ток

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{v}t); \quad (23.5)$$

его фурье-образ

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{v}t) e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} d\vec{r} dt = \\ &= \frac{q\vec{v}}{(2\pi)^2} \int e^{i(\omega - \vec{k}\vec{v})t} dt = \frac{q\vec{v}}{2\pi} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v}). \end{aligned} \quad (23.6)$$

Создаваемое частицей поле удовлетворяет уравнениям Максвелла в фурье-представлении, которые в данном случае принимают вид

$$[i\vec{k} \times \vec{E}] = \frac{i\omega}{c} \vec{B}, \quad (23.7)$$

$$[i\vec{k} \times \vec{B}] = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{k}, \omega). \quad (23.8)$$

Подстановка \vec{B} из (23.7) в (23.8) дает

$$[\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}]] = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \vec{E} + \frac{4\pi\omega}{ic^2} \vec{j}(\vec{k}, \omega), \quad (23.9)$$

$$\vec{k}(\vec{k}\vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \vec{E} + \frac{2q\omega\vec{v}}{ic^2} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v}). \quad (23.10)$$

Скалярно умножая (23.10) на \vec{k} , находим

$$\vec{k}\vec{E} = \frac{2q\vec{k}\vec{v}\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}{i\varepsilon\omega}, \quad (23.11)$$

подставляем это выражение в (23.10)

$$\left(-k^2 + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\right) \vec{E} = \frac{2q\omega}{ic^2} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v}) \left(\vec{v} - \frac{\vec{k}(\vec{k}\vec{v})c^2}{\varepsilon\omega^2}\right)$$

и получаем комплексную амплитуду отдельной плоской гармоник

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{2iq\omega \delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}{c^2(k^2 - \omega^2\varepsilon/c^2)} \left(\vec{v} - \frac{\vec{k}(\vec{k}\vec{v})c^2}{\varepsilon\omega^2} \right). \quad (23.12)$$

Обратное преобразование Фурье дает нам поле частицы:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d\vec{k} d\omega. \quad (23.13)$$

Полная мощность излучения I равна работе, совершаемой полем в единицу времени, взятой с обратным знаком:

$$I = -q\vec{v}\vec{E}(\vec{v}t, t), \quad (23.14)$$

или

$$I = -\frac{2iq^2}{4\pi^2c^2} \int \frac{\omega \delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}{k^2 - \omega^2\varepsilon/c^2} \left(v^2 - \frac{(\vec{k}\vec{v})^2c^2}{\varepsilon\omega^2} \right) e^{i(\vec{k}\vec{v} - \omega)t} d\vec{k} d\omega. \quad (23.15)$$

Чтобы найти распределение мощности излучения по спектру, нужно в выражении (23.15) провести интегрирование по всем возможным значениям волнового вектора. Для этого представим $d\vec{k}$ в виде

$$d\vec{k} = k_{\perp} dk_{\perp} dk_{\parallel} d\varphi = \frac{dk_{\perp}^2}{2} \frac{d(\vec{k}\vec{v})}{v} d\varphi \quad (23.16)$$

(рис. 1.14,б). Интегрирование по $d\varphi$ и $d(\vec{k}\vec{v})$ благодаря симметрии задачи и наличию δ -функции производится тривиально:

$$I = -\frac{iq^2}{2\pi c^2 v} \int \frac{\omega(v^2 - c^2/\varepsilon)}{k_{\perp}^2 + \omega^2/v^2 - \omega^2\varepsilon/c^2} dk_{\perp}^2 d\omega. \quad (23.17)$$

Интеграл (23.17) дает нам полную потерю энергии частицей. Эта потеря энергии может идти по двум каналам. Во-первых, энергия тратится на черенковское излучение. Во-вторых, энергия идет на нагрев, возбуждение или ионизацию частиц среды. Эти потери называют ионизационными даже если ионизации как таковой не происходит. Ионизационные потери сопровождаются диссипацией энергии поля, потому в формулах они учитываются через ненулевую мнимую часть диэлектрической проницаемости. Так как $\text{Im } \varepsilon \neq 0$ при $\omega > 0$ (раздел 1.13), то диссипация в среде есть всегда и черенковское излучение всегда сопровождается ионизационными потерями.

Можно, однако, разделить два канала потерь, формально устремив $\text{Im } \varepsilon$ к нулю в формуле (23.17). Получившийся интеграл будет описывать только черенковское излучение, не связанное с диссипацией. Сразу положить $\text{Im } \varepsilon = 0$ нельзя, поскольку тогда в выражении (23.17) появляется математическая неопределенность из-за неинтегрируемой особенности в знаменателе и четности подынтегрального выражения как функции ω . Обозначим

$$\text{Re } \varepsilon(\omega) = \varepsilon', \quad \text{Im } \varepsilon(\omega) = \varepsilon'' \quad (23.18)$$

и перейдем в (23.17) к интегрированию по положительным частотам, используя четность ε' и нечетность ε'' :

$$I = -\frac{iq^2}{2\pi c^2 v} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk_\perp^2 \sum_{\pm} \frac{\pm \omega (v^2 - c^2/(\varepsilon' \pm i\varepsilon''))}{k_\perp^2 + \omega^2/v^2 - \omega^2(\varepsilon' \pm i\varepsilon'')/c^2}. \quad (23.19)$$

Будем считать, что $\varepsilon'(\omega) \neq 0$ во всем интервале частот (тем самым из рассмотрения исключается черенковское возбуждение продольных волн, возможное в некоторых средах). Тогда можно пренебречь ε'' в числителе большой дроби в (23.19) и привести слагаемые к общему знаменателю:

$$\frac{A}{B - iC} - \frac{A}{B + iC} = \frac{2iAC}{B^2 + C^2},$$

так что выражение (23.19) примет вид

$$I = -\frac{iq^2}{2\pi c^2 v} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{2i\omega (v^2 - c^2/\varepsilon')(\omega^2 \varepsilon''/c^2) dk_\perp^2}{(k_\perp^2 + \omega^2/v^2 - \omega^2 \varepsilon'/c^2)^2 + (\omega^2 \varepsilon''/c^2)^2}. \quad (23.20)$$

В силу тождества

$$\frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \pi \delta(x) \quad (23.21)$$

при $\varepsilon'' \rightarrow 0$ имеем

$$I = \frac{q^2}{c^2 v} \int_0^\infty \omega \left(v^2 - \frac{c^2}{\varepsilon'} \right) d\omega \int_0^\infty \delta \left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2 \varepsilon'}{c^2} \right) dk_\perp^2. \quad (23.22)$$

При интегрировании δ -функции получается либо 0, либо 1 в зависимости от знака выражения $\omega^2/v^2 - \omega^2 \varepsilon'/c^2$. Поэтому для спектрального распределения интенсивности черенковского излучения получается следующая формула:

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{q^2 \omega}{vc^2} \left(v^2 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)} \right) \cdot \begin{cases} 1, & v > c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}, \\ 0, & v \leq c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}, \end{cases} \quad (23.23)$$

или

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{q^2 \omega v}{c^2} \sin^2 \theta, \quad \cos \theta = \frac{c}{v \sqrt{\varepsilon(\omega)}}. \quad (23.24)$$

Вся излученная энергия сосредоточена в конусе, раствор которого определяется равенством

$$\cos \theta_{max} = \frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_{max}}} \quad (23.25)$$

(рис. 1.15, *a*), где ε_{max} — максимальное значение диэлектрической проницаемости данной среды. Вдоль направления движения частицы черенковского излучения нет, что имеет простое объяснение. У поперечной электромагнитной волны, бегущей строго по оси системы, нет продольной компоненты электрического поля, которая бы тормозила частицу и забирала у нее энергию.

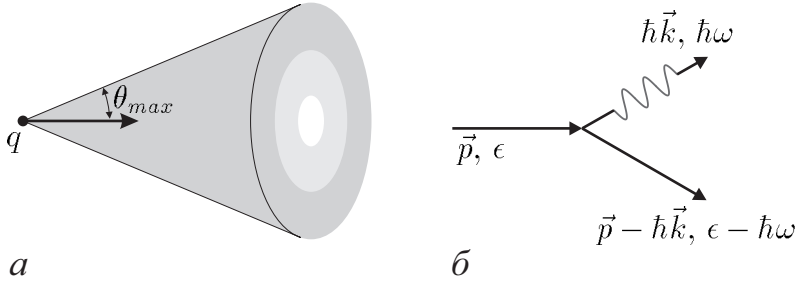


Рис. 1.15: Черенковский конус (*a*), излучение кванта отдельной частицей (*б*)

Черенковское излучение можно также представить как излучение квантов волны отдельными частицами (рис. 1.15, *б*). Условие черенковского резонанса в этом случае появляется как следствие сохранения энергии-импульса в единичном акте взаимодействия. Действительно, энергия ϵ и импульс \vec{p} частицы связаны как

$$\epsilon^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (23.26)$$

откуда

$$\omega = \frac{\Delta \epsilon}{\hbar} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} \frac{\hbar \vec{k}}{\hbar} = \frac{c^2 \vec{p}}{\epsilon} \vec{k} = \vec{k} \vec{v}. \quad (23.27)$$

1.24 Нелинейная проницаемость

Нелинейные поправки в зависимости $\vec{D}(\vec{E})$, даже будучи малыми по сравнению с линейными членами, могут существенно влиять на поведе-

ние волн, поскольку это влияние накапливается со временем и приводит к качественно новым эффектам. С учетом этих поправок связь между \vec{D} и \vec{E} в однородной стационарной среде будет такой:

$$\vec{D} = \vec{D}^{(1)} + \vec{D}^{(2)} + \vec{D}^{(3)} + \dots, \quad (24.1)$$

$$D_{\alpha}^{(1)}(\xi) = \int \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}(\xi - \xi_1) E_{\beta}(\xi_1) d\xi_1, \quad \xi = (\vec{r}, t), \quad (24.2)$$

$$D_{\alpha}^{(n)}(\xi) = \int \varepsilon_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\xi - \xi_1, \dots, \xi - \xi_n) \times \\ \times E_{\beta_1}(\xi_1) \dots E_{\beta_n}(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n. \quad (24.3)$$

По аналогии с линейной диэлектрической проницаемостью (3.5)

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(q) = \int \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}(\Delta\xi) e^{-iq\Delta\xi} d\Delta\xi, \quad q = (\vec{k}, -\omega) \quad (24.4)$$

можно ввести нелинейные проницаемости второго порядка

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(q_1, q_2) = \int \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\Delta\xi_1, \Delta\xi_2) e^{-iq_1\Delta\xi_1 - iq_2\Delta\xi_2} d\Delta\xi_1 d\Delta\xi_2 \quad (24.5)$$

и порядка n

$$\varepsilon_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}(q_1, \dots, q_n) = \int \varepsilon_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\Delta\xi_1, \dots, \Delta\xi_n) \times \\ \times e^{-iq_1\Delta\xi_1 - \dots - iq_n\Delta\xi_n} d\Delta\xi_1 \dots d\Delta\xi_n. \quad (24.6)$$

Этими нелинейными проницаемостями определяется характер взаимодействия между волнами.

1.25 Трехволновое взаимодействие

Трехволновое взаимодействие — эффект второго порядка по амплитуде поля. Следовательно, чтобы трехволновое взаимодействие было возможным, среда должна обладать либо пространственной дисперсией, либо зеркальной изомерией (за счет сложных молекул, сложной кристаллической решетки или внешнего магнитного поля).

Пусть в среде есть волна с электрическим полем

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{iq\xi} + \vec{E}_0^* e^{-iq\xi}. \quad (25.1)$$

Нелинейная добавка к электрической индукции будет иметь вид

$$\begin{aligned}
D_{\alpha}^{(2)} &= \int \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} (\xi - \xi_1, \xi - \xi_2) \times \\
&\quad \times (E_{0\beta} e^{iq\xi_1} + E_{0\beta}^* e^{-iq\xi_1}) (E_{0\gamma} e^{iq\xi_2} + E_{0\gamma}^* e^{-iq\xi_2}) d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= \int \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} (\xi - \xi_1, \xi - \xi_2) \left(E_{0\beta} E_{0\gamma} e^{iq(\xi_1 - \xi) + iq(\xi_2 - \xi) + 2iq\xi} + \right. \\
&\quad \left. + E_{0\beta} E_{0\gamma}^* e^{iq(\xi_1 - \xi) + iq(\xi - \xi_2)} + \text{к.с.} \right) d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= E_{0\beta} E_{0\gamma} e^{2iq\xi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(q, q) + E_{0\beta} E_{0\gamma}^* \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(q, -q) + \text{к.с.}, \quad (25.2)
\end{aligned}$$

где буквы «к.с.» означают комплексно сопряженные слагаемые. В уравнении Максвелла эта нелинейная добавка будет стоять на месте стороннего тока:

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}^{(1)}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{(2)}, \quad (25.3)$$

$$j_{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_{\alpha}^{(2)}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{2\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(q, q) E_{0\beta} E_{0\gamma} e^{2i\vec{k}\vec{r} - 2i\omega t} - \text{к.с.} \quad (25.4)$$

Если в данной среде может существовать волна с частотой 2ω , волновым вектором $2\vec{k}$ и электрическим полем, не перпендикулярным $\vec{j}^{(2)}$, то она раскачается нелинейным током (25.4). Этот эффект называется генерацией второй гармоники. Даже если нелинейные слагаемые малы, амплитуда второй гармоники может стать большой за счет большого времени раскачки. Если же волна $(2\vec{k}, 2\omega)$ запрещена дисперсионным соотношением или разрешена, но имеет поле $\vec{E} \perp \vec{j}^{(2)}$, то резонансной раскачки не будет и влияние нелинейных поправок останется малым.

Изменение энергии второй гармоники (W_2) за счет нелинейных процессов можно найти по аналогии с разделом 1.18 (формула (18.5) для работы тока):

$$\frac{dW_2}{dt} = \left\langle \vec{E}_2 \vec{j}^{(2)} \right\rangle = -\frac{i\omega}{2\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(q, q) E_{02\alpha}^* E_{0\beta} E_{0\gamma} + \text{к.с.}, \quad (25.5)$$

где

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{2iq\xi} + \vec{E}_{02}^* e^{-2iq\xi}$$

— поле второй гармоники. Поскольку $W_2 \propto |\vec{E}_{02}|^2$, то из (25.5) (после сокращения на E_{02}^*) следует линейность роста амплитуды второй гармоники со временем.

Аналогично, если изначально в среде было две волны (\vec{k}_1, ω_1) и (\vec{k}_2, ω_2) , то в результате трехволнового взаимодействия возникнут волны с комбинационными частотами $(\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \omega_1 + \omega_2)$, $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2, \omega_1 - \omega_2)$, $(2\vec{k}_1, 2\omega_1)$, $(2\vec{k}_2, 2\omega_2)$, если они могут существовать как свободные волны и их раскачка не запрещена неудачным направлением электрического поля.

Для описания трехволновых взаимодействий удобно ввести амплитуду волны $a(t)$ согласно определению:

$$|a(t)|^2 = N = \frac{W}{\hbar\omega}, \quad \vec{E}_0(t) = a(t)\vec{E}_p, \quad (25.6)$$

где N — число квантов волны в единице объема, а \vec{E}_p — постоянный вектор (не единичный), характеризующий специфику данной волны, т. е. ее поляризацию и коэффициент пропорциональности между $|\vec{E}_0|^2$ и W .

Пусть дисперсионными соотношениями разрешено только взаимодействие

$$(\vec{k}_1, \omega_1) + (\vec{k}_2, \omega_2) \longrightarrow (\vec{k}_3, \omega_3), \quad (25.7)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \quad (25.8)$$

По аналогии с генерацией второй гармоники для изменения амплитуды третьей волны имеем

$$\dot{a}_3 = V_3 a_1 a_2, \quad (25.9)$$

где точка означает производную по времени, а все не зависящие от времени коэффициенты обозначены V_3 . После появления третьей волны становятся возможными обратные к (25.7) процессы:

$$(\vec{k}_3, \omega_3) + (-\vec{k}_2, -\omega_2) \longrightarrow (\vec{k}_1, \omega_1), \quad (25.10)$$

$$(\vec{k}_3, \omega_3) + (-\vec{k}_1, -\omega_1) \longrightarrow (\vec{k}_2, \omega_2). \quad (25.11)$$

Они приводят к изменению амплитуд исходных волн:

$$\dot{a}_1 = V_1 a_3 a_2^*, \quad \dot{a}_2 = V_2 a_3 a_1^*, \quad (25.12)$$

где комплексно-сопряженные амплитуды появляются как коэффициенты перед $e^{-iq\xi}$.

Законы сохранения энергии и импульса требуют, чтобы создание одного кванта третьей волны тратилось по одному кванту исходных (рис. 1.16, а):

$$\Delta N_3 = -\Delta N_1 = -\Delta N_2. \quad (25.13)$$

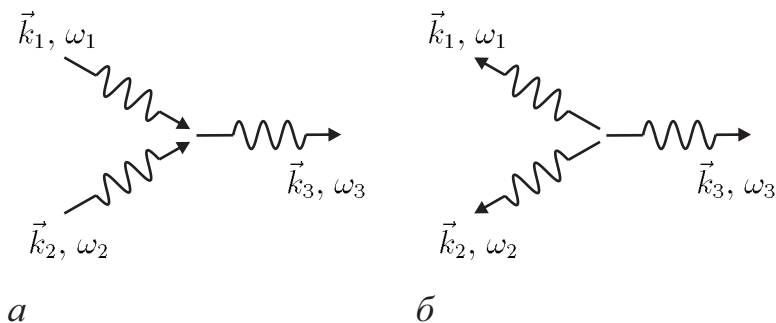


Рис. 1.16: Трехволновое взаимодействие как взаимодействие квантов волны: (а) все три волны имеют положительную энергию, (б) волна «3» имеет отрицательную энергию

Следствием этого факта являются соотношения

$$|a_1|^2 + |a_3|^2 = \text{const}, \quad (25.14)$$

$$|a_2|^2 + |a_3|^2 = \text{const}, \quad (25.15)$$

$$|a_1|^2 - |a_2|^2 = \text{const} \quad (25.16)$$

(соотношения Мэнли — Роу) и связь между коэффициентами V_1 , V_2 и V_3 . Чтобы получить эту связь, продифференцируем, например, равенство (25.14) по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a_1 a_1^* + a_3 a_3^*) &= \dot{a}_1 a_1^* + \dot{a}_3 a_3^* + \text{к.с.} = \\ &= V_1 a_3 a_2^* a_1^* + V_3 a_1 a_2 a_3^* + \text{к.с.} = a_1 a_2 a_3^* (V_3 + V_1^*) + \text{к.с.} = 0. \end{aligned} \quad (25.17)$$

Равенство (25.17) выполняется при любых амплитудах волн. Следовательно, $V_1 = -V_3^*$. Аналогично, из соотношения (25.15) имеем $V_2 = -V_3^*$. Мы получили, что нелинейная эволюция всех трех волн описывается только одним комплексным коэффициентом:

$$\dot{a}_1 = -V^* a_2^* a_3, \quad (25.18)$$

$$\dot{a}_2 = -V^* a_1^* a_3, \quad (25.19)$$

$$\dot{a}_3 = V a_1 a_2. \quad (25.20)$$

Уравнения (25.18–25.20) называются уравнениями Бломбергена. Они единообразно (с точностью до коэффициента V) описывают любые трехволновые взаимодействия в электродинамике сплошных сред.

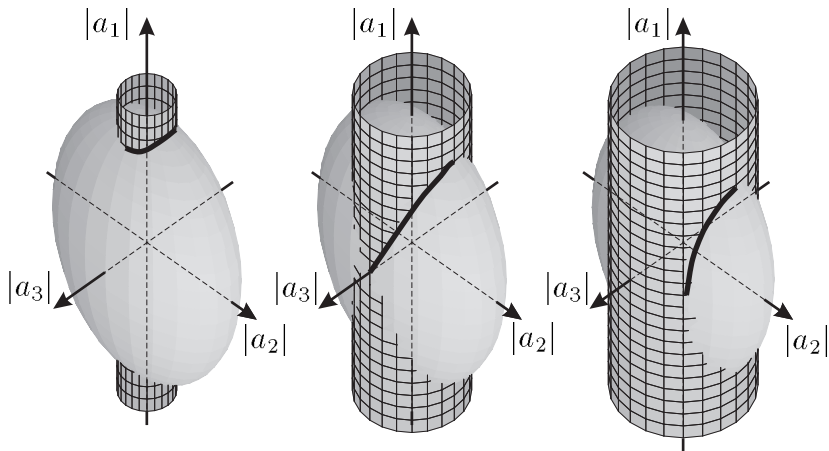


Рис. 1.17: Возможные состояния системы (толстые линии) при различных начальных соотношениях амплитуд. Все три волны имеют положительную энергию

Кроме величин (25.14–25.16) при трехволновом взаимодействии сохраняется также суммарная энергия волн:

$$\omega_1 |a_1|^2 + \omega_2 |a_2|^2 + \omega_3 |a_3|^2 = \text{const.} \quad (25.21)$$

Несложно убедиться, что из четырех выписанных выше инвариантов только два являются независимыми. Эти инварианты помогают определять характер трехволнового взаимодействия. Например, условие (25.21) задает в пространстве $(|a_1|, |a_2|, |a_3|)$ эллипсоид, а условие (25.16) — цилиндр (рис. 1.17). Пересечением этих двух поверхностей будет некая трехмерная кривая, которая и ограничивает возможные состояния системы (т. е. значения $|a_1|, |a_2|, |a_3|$) при данном взаимодействии.

Если одна из взаимодействующих волн имеет отрицательную энергию, то законы сохранения числа квантов меняются. Например, при отрицательной энергии волны «3» (рис. 1.16, б) имеем

$$\Delta N_1 = \Delta N_2 = \Delta N_3. \quad (25.22)$$

Соответственно, соотношения (25.14–25.21) слегка изменяются.

1.26 Самофокусировка

Самофокусировка — это эффект третьего порядка по амплитуде поля, одно из возможных проявлений четырехволнового взаимодействия. За самофокусировку отвечает нелинейная добавка к электрической индукции на частоте исходной волны. В терминах слияния отдельных волн самофокусировку можно представить как

$$(\vec{k}, \omega) + (\vec{k}, \omega) + (-\vec{k}, -\omega) \longrightarrow (\vec{k}, \omega). \quad (26.1)$$

Будучи эффектом третьего порядка, самофокусировка возможна в истинно изотропных средах без пространственной дисперсии. Рассмотрим далее именно такую среду. Тогда зависимость $\vec{D}(\vec{E})$ не будет содержать квадратичных по \vec{E} слагаемых и примет вид

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E} + \alpha(\omega) \left(\vec{E}\vec{E}^* \right) \vec{E} + \beta(\omega) \left(\vec{E}\vec{E} \right) \vec{E}^*. \quad (26.2)$$

Несложно убедиться, что других нелинейных членов, содержащих дважды \vec{E} (волны (\vec{k}, ω)) и один раз \vec{E}^* (волна $(-\vec{k}, -\omega)$), построить нельзя. Другие четырехволновые взаимодействия (генерация третьей гармоники) нас пока не интересуют, потому соответствующие им нелинейные слагаемые опущены.

Вектор \vec{E}^* , вообще говоря, не параллелен \vec{E} . Например, при круговой поляризации волны \vec{E}^* и \vec{E} вращаются в противоположные стороны:

$$\vec{E} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}^* \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26.3)$$

Это усложняет анализ самофокусировки. Однако в частных случаях линейной ($\vec{E} \parallel \vec{E}^*$) и круговой ($\vec{E}\vec{E} = 0$) поляризации волн векторы \vec{D} и \vec{E} всегда параллельны и можно считать

$$\vec{D} = \left(\varepsilon(\omega) + \eta(\omega)|\vec{E}|^2 \right) \vec{E}. \quad (26.4)$$

Далее рассмотрим именно такой случай. Также будем считать нелинейные добавки малыми:

$$|\eta(\omega)| \cdot |\vec{E}|^2 \ll \varepsilon(\omega). \quad (26.5)$$

Найдем закон изменения почти монохроматического локализованного пакета электромагнитных волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}, t) e^{ik_0 z - i\omega t}, \quad k_0 = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c}, \quad (26.6)$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ — медленно меняющаяся функция. Для этого исключим из уравнений Максвелла быстроосциллирующие экспоненты. Из (1.2) и (1.13) имеем

$$\text{rot rot } \vec{E} = \nabla \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}^{(3)}}{\partial t^2}. \quad (26.7)$$

Из уравнения

$$\text{div } \vec{D} = (\varepsilon + \eta |\vec{E}|^2) \text{div } \vec{E} + \vec{E} \nabla (\eta |\vec{E}|^2) = 0 \quad (26.8)$$

находим, что дивергенция \vec{E} содержит сразу два малых параметра (η и градиент от медленно меняющейся функции):

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{\eta \vec{E} \nabla |\vec{E}|^2}{\varepsilon + \eta |\vec{E}|^2}, \quad (26.9)$$

и потому в (26.7) слагаемым с $\text{div } \vec{E}$ можно пренебречь.

По определению лапласиана

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{E} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} = \\ &= \left[-\Delta_{\perp} \vec{E}_0 + k_0^2 \vec{E}_0 - 2ik_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial z^2} \right] e^{ik_0 z - i\omega t}, \end{aligned} \quad (26.10)$$

где

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (26.11)$$

Последним слагаемым в квадратной скобке в уравнении (26.10) можно пренебречь, так как оно имеет второй порядок малости (вторую производную от медленно меняющейся функции).

При вычислении правой части (26.7) нужно учесть, что локализованный волновой пакет не может быть строго монохроматическим. Для разных частотных гармоник его спектра проницаемость ε разная. Чтобы корректно учесть это обстоятельство (частотную дисперсию), разложим \vec{E}_0 на монохроматические гармоники до взятия производной:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}^{(1)}}{\partial t^2} &= \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varepsilon(\omega + \Delta\omega) \vec{E}_0(\Delta\omega) e^{-i\Delta\omega t} d\Delta\omega \cdot e^{ik_0 z - i\omega t} \right) = \\ &= -\frac{1}{c^2 \sqrt{2\pi}} \int \varepsilon(\omega + \Delta\omega) (\omega + \Delta\omega)^2 \vec{E}_0(\Delta\omega) e^{ik_0 z - i(\omega + \Delta\omega)t} d\Delta\omega. \end{aligned} \quad (26.12)$$

Поскольку амплитуда пакета меняется медленно, то его спектр узок ($\Delta\omega \ll \omega$), и можно разложить подынтегральное выражение в ряд, после чего заменить $\Delta\omega$ на $i\partial/\partial t$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}^{(1)}}{\partial t^2} &= -\frac{e^{ik_0 z - i\omega t}}{c^2 \sqrt{2\pi}} \int \left(\omega^2 \varepsilon(\omega) + \Delta\omega \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \right) \vec{E}_0(\Delta\omega) e^{-i\Delta\omega t} d\Delta\omega = \\
&= -\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \vec{E}_0 e^{ik_0 z - i\omega t} - \frac{i}{c^2} \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} e^{ik_0 z - i\omega t} = \\
&= \left(-k_0^2 \vec{E}_0 - i \frac{\partial k_0^2}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right) e^{ik_0 z - i\omega t} = \\
&= \left(-k_0^2 \vec{E}_0 - \frac{2ik_0}{v_g} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right) e^{ik_0 z - i\omega t}, \quad (26.13)
\end{aligned}$$

где $v_g = d\omega/dk_0$ — групповая скорость электромагнитной волны.

В производной от $\vec{D}^{(3)}$ удерживать малые дисперсионные поправки не нужно, поскольку $\vec{D}^{(3)}$ уже содержит малый параметр η :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}^{(3)}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \eta |\vec{E}|^2 \vec{E}_0 e^{ik_0 z - i\omega t}. \quad (26.14)$$

Подставляя (26.10), (26.13) и (26.14) в (26.7), имеем

$$\begin{aligned}
-\Delta_{\perp} \vec{E}_0 - 2ik_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial z} - \frac{2ik_0}{v_g} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} - \frac{\omega^2}{c^2} \eta |\vec{E}|^2 \vec{E}_0 &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{E}_0 &= -\frac{1}{2ik_0} \Delta_{\perp} \vec{E}_0 - \frac{\omega^2 \eta |\vec{E}_0|^2}{2ik_0 c^2} \vec{E}_0. \quad (26.15)
\end{aligned}$$

Комбинация производных в левой части (26.15) выражает собой тот факт, что возмущения амплитуды переносятся в направлении распространения волны с групповой скоростью. Первое слагаемое в правой части ответственно за дифракционное расширение пакета. Уравнение (26.15) с $\eta = 0$ известно как параболическое уравнение теории дифракции. По своей форме оно совпадает с уравнением диффузии (с мнимым коэффициентом диффузии $i/2k_0$).

Второе слагаемое в правой части (26.15) описывает нелинейную фокусировку ($\eta > 0$) или дефокусировку ($\eta < 0$) волны. При большой напряженности поля нелинейная фокусировка может полностью подавить дифракционную расходимость: фазовая скорость волны оказывается в области пучка меньшей, нежели на периферии, волновые фронты становятся сходящимися и энергия пучка концентрируется у оси

(рис. 1.18). Условие полного подавления дифракции можно получить, сравнив слагаемые в правой части (26.15):

$$\frac{E_0}{kR^2} < \frac{A\omega^2\eta E_0^3}{kc^2}, \quad (26.16)$$

где R — характерный радиус пучка, а A — коэффициент порядка единицы, зависящий от распределения энергии пучка по радиусу. Перепишав неравенство (26.16) в форме

$$\frac{E_0^2}{8\pi} R^2 c > \frac{c^3}{8\pi A\omega^2\eta},$$

легко видеть, что нелинейная фокусировка доминирует, когда мощность пучка превышает некое критическое значение:

$$P > P_{crit}. \quad (26.17)$$

Это явление и называется самофокусировкой.

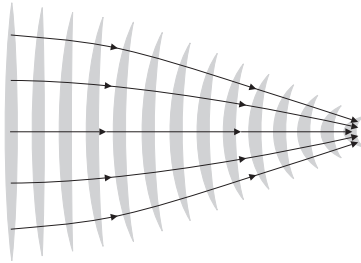


Рис. 1.18: Нелинейная самофокусировка пучка. Стрелками показано направление потока энергии

Глава 2

Гидродинамика

2.1 Уравнения идеальной гидродинамики

Гидродинамика — это наука о движении жидкостей и газов. Законы движения этих двух сред оказываются одинаковыми, потому далее мы будем говорить о жидкостях, имея в виду также и газы.

В гидродинамике жидкость всегда рассматривается как сплошная среда. Это значит, что, даже говоря о бесконечно малом элементе объема, мы подразумеваем объем с большим числом частиц. Соответственно, гидродинамикой описываются только явления с характерным масштабом, много большим расстояния между частицами и длины свободного пробега частиц.

Идеальной называется жидкость, в которой нет диссипативных процессов (вязкости и теплопроводности).

Состояние жидкости полностью характеризуется ее плотностью ρ , скоростью \vec{v} и давлением p как функциями координат (\vec{r}) и времени (t). Это возможно, если состояние системы близко к термодинамическому равновесию. Для выполнения этого условия и требуется малость длины свободного пробега по сравнению с масштабом задачи.

Движение жидкости подчиняется уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \rho v_\beta, \quad (1.1)$$

которое есть прямое следствие закона сохранения массы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \vec{v} d\vec{S}. \quad (1.2)$$

Здесь слева стоит изменение массы объема, а справа — масса вещества, пришедшего в объем.

Аналогично можно записать выражение для изменения α -компоненты импульса:

$$\frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho g_\alpha. \quad (1.3)$$

Здесь $\rho \vec{g}$ — это объемная сила (например, сила тяжести), действующая на единицу объема жидкости, а $\Pi_{\alpha\beta}$ — так называемый тензор плотности потока импульса, равный потоку α -компоненты импульса через единичную площадку, перпендикулярную направлению β .

Импульс в жидкости может переноситься двумя способами. Во-первых, он течет вместе с жидкостью. За единицу времени через единичную площадку ΔS_β проходит объем жидкости, равный v_β (рис. 2.1,а). Эта жидкость несет с собой импульс $v_\beta \cdot \rho \vec{v}$, в том числе его α -компоненту в количестве $\rho v_\alpha v_\beta$.

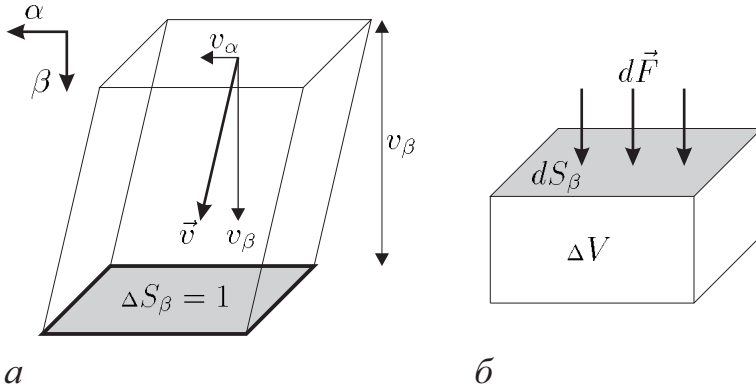


Рис. 2.1: К вычислению конвективной (а) и силовой (б) составляющих потока импульса

Во-вторых, передача импульса происходит за счет действия внутренних сил. Предположим, что на некий объем жидкости (ΔV) через площадку dS_β со стороны других частей жидкости действует сила $d\vec{F}$, и других сил нет (рис. 2.1,б). За время dt этот объем приобретет импульс $d\vec{F}dt$, чему соответствует поток импульса через единицу площади, равный $d\vec{F}/dS_\beta$.

На микроскопическом уровне появление «силовой» составляющей импульса можно проиллюстрировать так (рис. 2.2,а). Частица с импуль-

сом \vec{p}_0 отражается от границы рассматриваемого объема, меняет свой импульс на $-\vec{p}_0$ и отдает импульс $2\vec{p}_0$ объему.

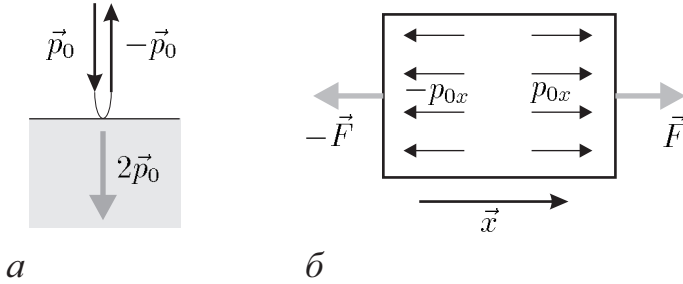


Рис. 2.2: Иллюстрации возникновения силовой составляющей потока импульса (а) и ненулевого потока импульса в покоящейся жидкости (б)

В идеальной жидкости между отдельными ее частями могут действовать только силы давления, потому тензор плотности потока импульса принимает вид

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + p \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.4)$$

Последнее слагаемое здесь означает, что на любую единичную площадку в жидкости действует сила, равная p и направленная по нормали к площадке.

В неидеальной жидкости выражение для импульса, передаваемого за счет внутренних сил, оказывается более сложным. Эту «силовую» составляющую тензора $\Pi_{\alpha\beta}$ называют либо тензором давления ($p_{\alpha\beta}$), либо тензором напряжений ($\pi_{\alpha\beta}$) в зависимости от знака перед ней:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + p_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta - \pi_{\alpha\beta}. \quad (1.5)$$

Интересно отметить, что импульс течет по жидкости даже тогда, когда вся жидкость покоится. Этот кажущийся парадокс связан с тем, что импульс — векторная величина. Например, когда частицы летят вправо (рис. 2.2,б), они переносят импульс p_{0x} в направлении \vec{x} , а когда влево — импульс $-p_{0x}$ в направлении $-\vec{x}$, так что вклады частиц, летящих «туда» и «обратно», складываются и суммарно переносятся импульс $2p_{0x}$ по \vec{x} или $-2p_{0x}$ в противоположном направлении, что одно и то же. Таким образом, в жидкости всегда есть поток импульса в любом направлении.

Уравнение сохранения импульса идеальной жидкости обычно записывают в иной, нежели (1.3), форме. Чтобы получить ее, подставим

(1.4) в (1.3), раскроем производные и воспользуемся уравнением непрерывности:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho v_\alpha v_\beta}{\partial x_\beta} - \frac{\partial p \delta_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho g_\alpha, \\ \rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial \rho v_\beta}{\partial x_\beta} + \rho v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} &= \\ &= \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \right) v_\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \rho g_\alpha. \quad (1.6)\end{aligned}$$

Комбинацию производных в круглых скобках традиционно называют полной или субстанциональной производной и обозначают d/dt . Если обычная производная $\partial/\partial t$ определяет изменение величины в фиксированной точке пространства, то полная производная определяет изменение величины в точке, движущейся вместе с жидкостью со скоростью \vec{v} :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla). \quad (1.7)$$

Полученное уравнение

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (1.8)$$

называется уравнением Эйлера и выражает собой простой факт: произведение массы единичного объема жидкости на его ускорение равно действующей на объем силе.

В отсутствие диссипации энтропия любого элемента жидкости не меняется со временем. В частности, для энтропии единицы массы s имеем

$$\frac{ds(\rho, p)}{dt} = 0. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.1), (1.8) и (1.9) полностью определяют характер движения идеальной жидкости.

Если в начальный момент времени энтропия s была одинакова во всех точках жидкости, то она останется везде одинаковой и неизменной и при дальнейшем движении жидкости. Такое движение называется изэнтропическим. Уравнение адиабатичности в этом случае принимает особенно простой вид:

$$s(\rho, p) = \text{const}, \quad \text{или} \quad p = p(\rho). \quad (1.10)$$

Всюду далее мы будем считать течение изэнтропическим.

Другое часто встречающееся упрощающее предположение — это предположение о несжимаемости жидкости:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (1.11)$$

Если в начальный момент плотность несжимаемой жидкости была всюду одинакова, то в дальнейшем

$$\rho = \text{const}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad p \neq 0. \quad (1.12)$$

Последнее неравенство здесь выражает тот факт, что давление нельзя считать постоянным, хотя из уравнения состояния (1.10) формально и следует $p = \text{const}$. Это объясняется тем, что приближение несжимаемой жидкости обычно работает, когда пренебрежимо малого изменения плотности достаточно для существенного изменения давления жидкости.

Найдем, когда жидкость можно считать несжимаемой в отсутствие объемных сил ($\vec{g} = 0$). Для этого оценим входящие в (1.1) слагаемые:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \sim \frac{\delta \rho}{\tau}, \quad (\vec{v} \nabla) \rho \sim \frac{v \delta \rho}{L}, \quad \rho \text{div } \vec{v} \sim \frac{\rho v}{L}, \quad (1.13)$$

где L и τ — характерные пространственный и временной масштабы изменения течения, v — скорость течения, $\delta \rho$ — возмущение плотности жидкости. Жидкость будет вести себя как несжимаемая, если оценка последнего слагаемого будет намного больше первых двух:

$$\frac{\rho v}{L} \gg \frac{\delta \rho}{\tau}, \quad \rho \gg \delta \rho. \quad (1.14)$$

Выполнение неравенств (1.14) означает, что возмущением плотности можно пренебречь, поскольку оно не влияет на движение жидкости.

Условия (1.14) можно переписать в более практичной форме. Для этого оценим $\delta \rho$ при помощи (1.8):

$$\begin{aligned} \rho v \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v}{L} \right) &\sim \frac{\delta p}{L} = \frac{\delta \rho}{L} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\delta \rho}{L} c_s^2, \\ \delta \rho &\sim \frac{\rho v L}{c_s^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v}{L} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Производная

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c_s^2, \quad (1.16)$$

как будет показано в разделе 2.8, равна квадрату скорости звука в среде. Подставляя (1.15) в (1.14), получаем

$$\frac{\rho v L}{\tau c_s^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v}{L} \right) \ll \frac{\rho v}{L}, \quad \frac{\rho v L}{c_s^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v}{L} \right) \ll \rho, \quad (1.17)$$

откуда следуют неравенства

$$L \ll c_s \tau, \quad v \ll c_s, \quad \frac{v L}{\tau c_s^2} \ll 1,$$

причем последнее из них есть следствие двух первых. Итак, жидкость можно считать несжимаемой, если скорость ее течения мала по сравнению со скоростью звука, а время изменения потока как целого велико по сравнению с L/c_s .

2.2 Лагранжевы переменные

Наряду с традиционным (или эйлеровым) описанием, состояние движущейся жидкости можно описывать величинами $\rho(\vec{r}_0, t)$, $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$ и $p(\vec{r}_0, t)$, где \vec{r}_0 — координаты элемента жидкости в начальный момент времени, а \vec{r} — его же координаты в момент времени t . Переменные (\vec{r}_0, t) называют лагранжевыми переменными. Если в эйлеровых переменных (\vec{r}, t) характеристики жидкости привязываются к определенной точке пространства, то в лагранжевых переменных привязка идет к самой жидкости. Лагранжев подход, однако, менее распространен, поскольку удобен только в одномерных задачах.

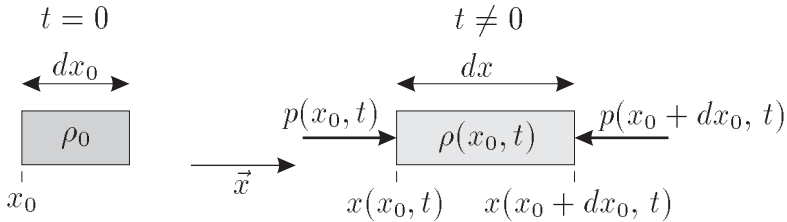


Рис. 2.3: К нахождению уравнений движения одномерной жидкости в лагранжевых переменных

Получим уравнения движения жидкости в одномерном случае в лагранжевых переменных (x_0, t) (рис. 2.3). Из закона сохранения массы

$$\rho_0 dx_0 = \rho(x_0, t) dx, \quad \rho_0 = \rho(x_0, 0) \quad (2.1)$$

следует одномерное уравнение непрерывности

$$\rho(x_0, t) = \rho_0 \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^{-1}. \quad (2.2)$$

Из второго закона Ньютона, записанного для элемента жидкости dx_0 ,

$$\rho_0 dx_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -(p(x_0 + dx_0, t) - p(x_0, t)) + \rho_0 dx_0 g \quad (2.3)$$

следует аналог уравнения Эйлера:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_0} + \rho_0 g. \quad (2.4)$$

Наконец, уравнение адиабатичности сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} s(p(x_0, t), \rho(x_0, t)) = 0. \quad (2.5)$$

2.3 Закон Бернулли

Можно показать, что в случае стационарного течения ($\partial/\partial t = 0$) некая величина остается неизменной вдоль линии тока жидкости (т. е. линии, всюду параллельной \vec{v}). Найдем эту величину. Для этого введем энтальпию единицы массы w , так что

$$dw = T ds + \frac{1}{\rho} dp \quad (3.1)$$

(объем единицы массы равен $1/\rho$). Из уравнения Эйлера имеем

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \vec{r}} + \vec{g}, \quad (3.2)$$

откуда путем тождественных преобразований при $\vec{g} = \text{const}$ получаем

$$\nabla \frac{v^2}{2} - [\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}] = -\nabla w + T \nabla s + \nabla(\vec{g}\vec{r}), \quad (3.3)$$

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w - \vec{g}\vec{r} \right) = [\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}] + T \nabla s. \quad (3.4)$$

Первое слагаемое в правой части (3.4) ортогонально вектору \vec{v} . Второе слагаемое также ортогонально \vec{v} в силу (1.9):

$$\frac{ds}{dt} = \vec{v} \nabla s = 0. \quad (3.5)$$

Таким образом, вдоль линии тока остается неизменной величина

$$\frac{v^2}{2} + w - \vec{g}\vec{r} = \text{const.} \quad (3.6)$$

Это утверждение и составляет закон Бернулли. Заметим, что при его выводе не предполагалась изэнтропичность жидкости во всем объеме, а только вдоль линии тока.

Чтобы пользоваться формулой (3.6), нужно выразить w через p и ρ . Здесь полезно предположение об изэнтропичности ($s = \text{const}$, $\nabla s = 0$). Для несжимаемой жидкости имеем

$$ds = 0, \quad dw = d\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad w = \frac{p}{\rho} + \text{const.} \quad (3.7)$$

Для идеального газа с показателем адиабаты γ из уравнений

$$p = A\rho^\gamma, \quad dw = \frac{dp}{\rho} = \frac{A\gamma\rho^{\gamma-1}}{\rho} d\rho \quad (3.8)$$

находим

$$w = \frac{A\gamma\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} + \text{const} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \text{const.} \quad (3.9)$$

С помощью закона Бернулли можно легко найти скорость v_{vac} истечения идеального газа в вакуум из объема с давлением p и плотностью ρ :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{v_{vac}^2}{2}, \quad v_{vac} = \sqrt{\frac{2\gamma p}{(\gamma-1)\rho}} = c_s \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (3.10)$$

где

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (3.11)$$

— скорость звука в газе.

2.4 Теорема Томсона

Введем циркуляцию скорости Γ по замкнутому контуру γ согласно определению

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \vec{v} d\vec{l}. \quad (4.1)$$

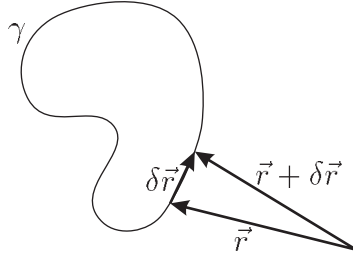


Рис. 2.4: К доказательству теоремы Томсона

Теорема Томсона гласит, что циркуляция скорости по жидкому контуру (т. е. по контуру, движущемуся вместе с жидкостью) при изэнтропическом течении не меняется со временем. Докажем это утверждение.

Представим элемент контура $d\vec{l}$ как разность координат точек контура $\delta\vec{r}$ (рис. 2.4) и вычислим производную

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\gamma} \vec{v} \delta\vec{r} = \oint_{\gamma} \frac{d\vec{v}}{dt} \delta\vec{r} + \oint_{\gamma} \vec{v} \frac{d\delta\vec{r}}{dt}. \quad (4.2)$$

Первое слагаемое в правой части (4.2) характеризует изменение потока со временем, а второе — изменение самого контура. По аналогии с (3.3) находим

$$\nabla s \equiv 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla w + \nabla(\vec{g}\vec{r}). \quad (4.3)$$

Поскольку дифференцирование по времени и по пространственной координате можно переставлять, имеем

$$\vec{v} \frac{d\delta\vec{r}}{dt} = \vec{v} \frac{\delta d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \delta \vec{v} = \frac{\delta v^2}{2}, \quad (4.4)$$

откуда

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{\gamma} \nabla(-w + \vec{g}\vec{r}) \cdot d\vec{l} + \oint_{\gamma} \delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0. \quad (4.5)$$

Теорема доказана.

2.5 Потенциальное течение

Потенциальным (или безвихревым) называется течение, в котором $\text{rot } \vec{v} \equiv 0$. Если в начальный момент времени течение было потенциальным, то и в дальнейшем оно останется потенциальным. Это следует

из теоремы Томсона, примененной к контуру, ограничивающему бесконечно малую площадку $d\vec{S}$:

$$\oint \vec{v} d\vec{l} = \text{rot } \vec{v} d\vec{S} = \text{const.} \quad (5.1)$$

Потенциальность течения, однако, нарушается на линиях тока, проходящих вблизи твердых тел (рис. 2.5). Теорема Томсона для таких линий тока не работает, поскольку их нельзя охватить жидким контуром.

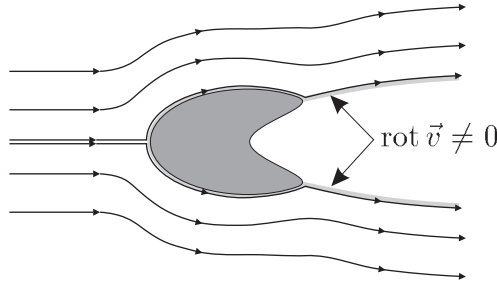


Рис. 2.5: Явление отрыва струй и линии тока, на которых нарушается потенциальность течения

Скорость потенциально движущейся жидкости можно представить в виде

$$\vec{v} = \nabla\varphi, \quad (5.2)$$

где скалярная величина φ называется потенциалом скорости.

Часто потенциальное течение можно считать также и несжимаемым. В этом случае уравнения идеальной гидродинамики получаются особенно простыми. Уравнение непрерывности переходит в уравнение

$$\text{div } \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0, \quad (5.3)$$

а уравнение Эйлера по аналогии с (3.3) принимает вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \nabla\varphi}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nabla(\vec{g}\vec{r}), \quad (5.4)$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \vec{g}\vec{r} = f(t), \quad (5.5)$$

где $f(t)$ — некая функция времени. Поскольку замена

$$\varphi \rightarrow \varphi + \int f(t) dt \quad (5.6)$$

не влияет на скорость течения, без ограничения общности можно считать $f(t)$ константой.

2.6 Потенциальное обтекание тела

Рассмотрим задачу о потенциальном обтекании несжимаемой жидкостью твердого тела. В общем случае обтекание тела не является потенциальным из-за явления отрыва струй (рис. 2.5), когда линии тока отделяются от поверхности тела и уходят вглубь жидкости. Но в случае тел особой «обтекаемой» формы картина течения мало отличается от потенциальной.

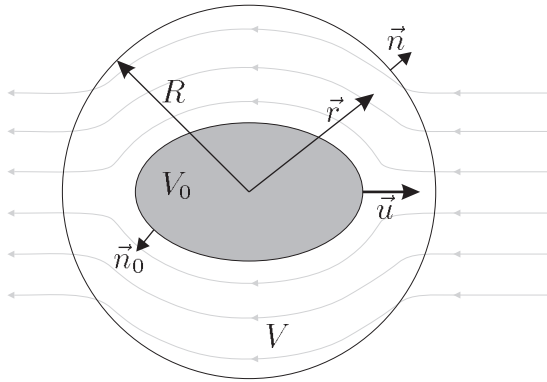


Рис. 2.6: Геометрия задачи о потенциальном обтекании тела

Пусть жидкость вдали от тела покоится, а само тело движется поступательно со скоростью \vec{u} (рис. 2.6). Движение жидкости определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$ с граничными условиями

$$\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (6.1)$$

$$\vec{u}\vec{n}_0 = \vec{v}\vec{n}_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial n_0} \quad \text{на поверхности тела}, \quad (6.2)$$

где вектор \vec{r} отсчитывается от какой-либо точки внутри тела, а \vec{n}_0 — нормаль к поверхности тела. Общее решение уравнения Лапласа, обращаемое в нуль на бесконечности, имеет вид

$$\varphi = \frac{a}{r} + \vec{A}\vec{\nabla}\frac{1}{r} + b_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{r} + \dots \quad (6.3)$$

Бесконечного ряда коэффициентов $a, \vec{A}, b_{ik}, \dots$ здесь достаточно, чтобы удовлетворить условию (6.2) на поверхности любого «обтекаемого» тела.

Характер движения жидкости вблизи тела существенно зависит от его формы. На больших же расстояниях все определяется первыми членами ряда (6.3), которые медленнее всего убывают с ростом r :

$$\vec{v} = \nabla\varphi = -\frac{a\vec{r}}{r^3} - \nabla\frac{\vec{A}\vec{r}}{r^3} = -\frac{a\vec{n}}{r^2} + \frac{3(\vec{A}\vec{n})\vec{n} - \vec{A}}{r^3}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (6.4)$$

Если объем тела V_0 неизменен, то $a = 0$, поскольку суммарный поток жидкости через сферу большого радиуса должен равняться нулю. Таким образом, поле скоростей вдали от тела определяется вектором \vec{A} . Из линейности уравнения Лапласа и граничных к нему следует, что $\vec{v} \propto \vec{u}$. Поэтому

$$A_i = \alpha_{ik}u_k, \quad (6.5)$$

где α_{ik} — постоянный тензор, зависящий от формы и ориентации тела.

Найдем полную кинетическую энергию жидкости E . Для этого, чтобы избежать математических трудностей, найдем энергию жидкости внутри сферы радиуса R и устремим R к бесконечности. В силу тождества

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((\varphi + \vec{u}\vec{r})(\vec{v} - \vec{u})) &= \\ &= (\vec{v} - \vec{u})\nabla(\varphi + \vec{u}\vec{r}) + (\varphi + \vec{u}\vec{r}) \operatorname{div}(\vec{v} - \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{u})(\vec{v} - \vec{u}) \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho}{2} \int_{V-V_0} v^2 dV = \frac{\rho}{2} \int_{V-V_0} (u^2 + (\vec{v} + \vec{u})(\vec{v} - \vec{u})) dV = \\ &= \frac{\rho u^2}{2} (V - V_0) + \frac{\rho}{2} \int_{V-V_0} \operatorname{div}((\varphi + \vec{u}\vec{r})(\vec{v} - \vec{u})) dV = \\ &= \frac{\rho u^2}{2} (V - V_0) + \frac{\rho}{2} \int_{S, S_0} (\varphi + \vec{u}\vec{r})(\vec{v} - \vec{u}) d\vec{S}, \quad (6.6) \end{aligned}$$

где в последнем слагаемом интегрирование ведется по поверхностям сферы S и тела S_0 . Интеграл по поверхности тела зануляется в силу условия (6.2):

$$(\vec{v} - \vec{u}) d\vec{S} = (\vec{u}\vec{n}_0 - \vec{v}\vec{n}_0) dS = 0, \quad (6.7)$$

а в интеграле по большой сфере достаточно оставить только первые ненулевые члены в выражениях для скорости и потенциала. Вводя элемент телесного угла $d\Omega$, преобразуем этот интеграл:

$$\begin{aligned}
 \int_S &= \int \left(-\frac{\vec{A}\vec{r}}{r^3} + \vec{u}\vec{r} \right) \left(\frac{3(\vec{A}\vec{n})\vec{n} - \vec{A}}{r^3} - \vec{u} \right) r^2 \vec{n} d\Omega = \\
 &= \int \left(-\frac{\vec{A}\vec{n}}{R^2} + R(\vec{u}\vec{n}) \right) \left(\frac{2(\vec{A}\vec{n})}{R^3} - \vec{u}\vec{n} \right) R^2 d\Omega \approx \\
 &\approx \int \left(-R^3(\vec{u}\vec{n})^2 + 3(\vec{A}\vec{n})(\vec{u}\vec{n}) \right) d\Omega = \\
 &= (-R^3 u_i u_k + 3A_i u_k) \int n_i n_k d\Omega. \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Интегрирование по $d\Omega$ эквивалентно усреднению подынтегрального выражения по всем направлениям вектора \vec{n} и умножению затем на 4π :

$$\int n_i n_k d\Omega = \frac{4\pi\delta_{ik}}{3}, \quad (6.9)$$

откуда

$$E = \frac{\rho u^2}{2} (V - V_0) + \frac{2\pi\rho}{3} \left(-R^3 u^2 + 3(\vec{A}\vec{u}) \right). \quad (6.10)$$

Большие слагаемые в (6.10) сокращаются, и мы получаем

$$E = \frac{\rho}{2} \left(4\pi\vec{u}\vec{A} - V_0 u^2 \right) = \frac{m_{ik} u_i u_k}{2}, \quad (6.11)$$

где тензор m_{ik} называется тензором присоединенных масс:

$$m_{ik} = 4\pi\rho\alpha_{ik} - \rho V_0 \delta_{ik}. \quad (6.12)$$

Можно показать, что он симметричен (доказательство этого факта можно найти в учебниках по классической гидродинамике).

Чтобы определить импульс \vec{P} движущейся жидкости, заметим, что изменение энергии dE и импульса $d\vec{P}$ связаны соотношением

$$dE = \vec{F} d\vec{l} = \vec{F}\vec{u} dt = \vec{u} d\vec{P}, \quad (6.13)$$

где \vec{F} — полная сила, действующая на жидкость со стороны тела, а $d\vec{l}$ — смещение тела за время dt . Следовательно,

$$u_i dP_i = dE = \frac{m_{ik} du_i u_k}{2} + \frac{m_{ik} u_i du_k}{2} = m_{ik} u_i du_k. \quad (6.14)$$

Равенства (6.14) верны при любом направлении скорости \vec{u} , поэтому

$$P_i = m_{ik}u_k, \quad \vec{P} = -\rho V_0 \vec{u} + 4\pi\rho \vec{A}. \quad (6.15)$$

Со стороны жидкости на тело действует сила \vec{F}_T :

$$F_{Ti} = -F_i = -\frac{dP_i}{dt} = -m_{ik}\frac{du_k}{dt}. \quad (6.16)$$

Интересно отметить, что при потенциальном течении полная сила, действующая на равномерно движущееся тело, равна нулю (так называемый парадокс Даламбера). Это есть следствие упрощенной модели обтекания. В действительности небольшая сила появляется из-за непотенциальности течения и неидеальности жидкости.

Уравнение движения тела в жидкости принимает вид

$$M\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f} + \vec{F}_T, \quad (6.17)$$

где M — масса тела, а \vec{f} — внешняя сила. Это уравнение можно переписать в форме

$$f_i = M\frac{du_i}{dt} + \frac{d}{dt}(m_{ik}u_k) = (M\delta_{ik} + m_{ik})\frac{du_k}{dt}, \quad (6.18)$$

откуда понятно происхождение термина «присоединенная масса»: при движении в жидкости масса тела как будто бы увеличивается на эту величину.

2.7 Вихревое движение жидкости

Пусть теперь $\text{rot } \vec{v} \neq 0$. Введем завихренность жидкости $\vec{\omega}$ согласно определению

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} \quad (7.1)$$

и найдем закон ее изменения в несжимаемой жидкости. Взяв ротор уравнения Эйлера в форме

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - [\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}] = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nabla(\vec{g}\vec{r}), \quad (7.2)$$

получаем

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot } [\vec{v} \times \vec{\omega}] = (\vec{\omega} \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \nabla) \vec{\omega}, \quad (7.3)$$

или

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \nabla) \vec{v}. \quad (7.4)$$

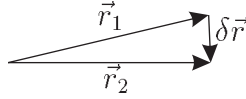


Рис. 2.7: Определение $\delta \vec{r}$

Уравнение вида (7.3) или (7.4) называется уравнением вмерзженности (величины $\vec{\omega}$ в жидкость). Чтобы выяснить свойства этого уравнения, найдем закон изменения расстояния $\delta \vec{r}$ между двумя близкими точками жидкости (рис. 2.7). Имеем

$$\frac{d\delta \vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (\delta \vec{r} \nabla) \vec{v}. \quad (7.5)$$

Итак, закон изменения завихренности $\vec{\omega}$ и элемента жидкой линии $\delta \vec{r}$ одинаков. Следовательно, если в начальный момент времени мы выберем $\delta \vec{r} \parallel \vec{\omega}$, то и в дальнейшем будет $\delta \vec{r} \parallel \vec{\omega}$, причем $|\vec{\omega}| \propto |\delta \vec{r}|$. Иными словами, если в начальный момент покрасить вихревую линию (т. е. линию, всюду параллельную $\vec{\omega}$), то и в дальнейшем вихревая линия будет совпадать с покрашенной кривой, причем завихренность будет пропорционально увеличиваться при удлинении этой кривой.

Проиллюстрируем действие уравнения вмерзженности на нескольких примерах. Для начала рассмотрим отдельный прямолинейный вихрь, т. е. такое течение жидкости, при котором $\vec{\omega} = \text{const}$ в некоторой цилиндрической области:

$$\begin{cases} \vec{\omega} = (0, 0, \omega_0), & r < a, \\ \vec{\omega} = 0, & r \geq a, \end{cases} \quad \omega_0 = \text{const} \quad (7.6)$$

(рис. 2.8, а). В силу симметрии задачи из (7.1) находим скорость течения:

$$\vec{v} = (0, v_\varphi, 0), \quad v_\varphi = \begin{cases} \frac{\omega_0 r}{2}, & r < a, \\ \frac{\omega_0 a^2}{2r}, & r \geq a. \end{cases} \quad (7.7)$$

Поскольку $\nabla v_\varphi \perp \vec{\omega}$, то

$$(\vec{\omega} \nabla) \vec{v} = 0, \quad (7.8)$$

и скорость течения не меняется со временем. Таким образом, собственное поле скоростей не влияет на прямолинейный вихрь.

Если на расстоянии $R \gg a$ друг от друга окажутся два параллельных друг другу прямолинейных вихря, различающихся только знаком,

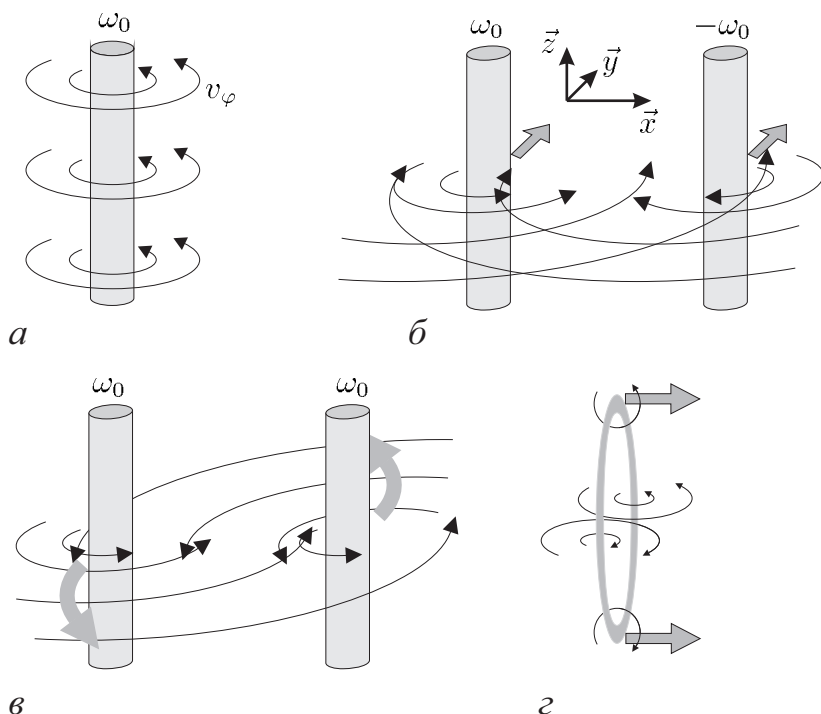


Рис. 2.8: Прямолинейный вихрь (а), два вихря противоположных знаков (б), два одинаковых вихря (в), вихревое кольцо (г)

то вихрь «1» будет крутиться как целое в собственном поле скоростей и смещаться по \vec{y} со скоростью

$$v_y = \frac{\omega_0 a^2}{2R} \quad (7.9)$$

в поле скоростей вихря «2» (рис. 2.8,б). В том же направлении и с той же скоростью будет двигаться и вихрь «2». Эта модель также описывает поведение отдельного вихря около плоской стенки. Вихрь взаимодействует с вихрем-изображением и движется вдоль стенки со скоростью (7.9).

Два одинаковых вихря, очевидно, будут крутиться друг вокруг друга (рис. 2.8,в) со скоростью (7.9).

Зная, как ведут себя отдельные прямолинейные вихри, можно понять качественную картину движения вихревого кольца (рис. 2.8,г). Противоположные участки кольца в данном случае выступают подобно

разноименным прямолинейным вихрям и создают поле скоростей, в котором кольцо движется как целое перпендикулярно своей плоскости.

2.8 Звук

Пусть в однородной идеальной жидкости есть малое возмущение. Будем обозначать невозмущенные величины индексом «0», а их возмущения — буквой δ :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \delta p, & \rho &= \rho_0 + \delta \rho, & s &= s_0 + \delta s, & \vec{v} &= \delta \vec{v}, \\ p_0 &= \text{const}, & \rho_0 &= \text{const}, & s_0 &= \text{const}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Уравнения идеальной жидкости (1.1), (1.8) и (1.9) после линеаризации (т. е. выбрасывания квадратичных по амплитуде возмущения слагаемых) принимают вид

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla \delta p}{\rho_0}, \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = 0. \quad (8.4)$$

В силу (8.4) имеем

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \delta \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \delta s = c_s^2 \delta \rho, \quad (8.5)$$

так что система (8.2), (8.3) сводится к волновому уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} &= -\rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho_0 \operatorname{div} \nabla \frac{\delta p}{\rho_0}, \\ \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta \rho &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Очевидно, такие же уравнения получаются для δp и \vec{v} .

Решением (8.6) является совокупность плоских волн с различными \vec{k} и частотами

$$\omega = \pm k c_s. \quad (8.7)$$

Из (8.3) и (8.5) находим, что в плоской волне

$$\vec{v} = \pm c_s \frac{\vec{k} \delta \rho}{k \rho}. \quad (8.8)$$

2.9 Энергия и импульс плоской звуковой волны

Найдем энергетические характеристики плоской монохроматической звуковой волны с заданным волновым вектором \vec{k} . С точностью до членов второго порядка малости, в присутствии волны энергия единицы объема жидкости изменяется на величину

$$\delta \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \left(\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \rho} \right)_s \delta \rho + \left(\frac{\partial^2 \rho \varepsilon}{\partial \rho^2} \right)_s \frac{\delta \rho^2}{2}. \quad (9.1)$$

Из термодинамического соотношения

$$d\varepsilon = T ds - p dV = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (9.2)$$

находим

$$\left(\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \rho} \right)_s = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w, \quad (9.3)$$

где w — энтальпия единицы массы. Ее дифференциал

$$dw = T ds + V dp = T ds + \frac{c_s^2}{\rho} d\rho, \quad (9.4)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial^2 \rho \varepsilon}{\partial \rho^2} \right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_s = \frac{c_s^2}{\rho}. \quad (9.5)$$

Итак, плотность энергии звуковой волны равна

$$W = \left\langle \frac{\rho_0 v^2}{2} + w_0 \delta \rho + \frac{c_s^2 \delta \rho^2}{2\rho_0} \right\rangle = \frac{\rho_0 \langle v^2 \rangle}{2} + \frac{c_s^2 \langle \delta \rho \rangle^2}{2\rho_0}, \quad (9.6)$$

где угловые скобки означают усреднение по периоду волны; линейное по амплитуде возмущения слагаемое при таком усреднении зануляется.

Из уравнения сохранения энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c_s^2 \delta \rho^2}{2\rho_0} \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \rho_0 \vec{v} \left(-\frac{\nabla \delta p}{\rho_0} \right) + \frac{c_s^2}{\rho_0} \delta \rho (-\rho_0 \operatorname{div} \vec{v}) \right\rangle = -\langle \operatorname{div} (\vec{v} \delta p) \rangle \end{aligned} \quad (9.7)$$

получаем выражение для плотности потока энергии звуковой волны:

$$\vec{S} = \langle \vec{v} \delta p \rangle. \quad (9.8)$$

В плоской монохроматической волне при $\omega = kc_s$

$$W = \langle \rho_0 v^2 \rangle, \quad \vec{S} = c_s W \frac{\vec{k}}{k}. \quad (9.9)$$

Как и можно было ожидать, энергия бежит со скоростью звука в направлении вектора \vec{k} .

Для импульса волны имеем

$$\vec{P} = \delta \langle \rho \vec{v} \rangle = \langle \delta \rho \vec{v} \rangle = \left\langle \frac{\vec{k} c_s^2 \delta \rho^2}{\omega \rho_0} \right\rangle = \left\langle \frac{\vec{k}}{\omega} \rho_0 v^2 \right\rangle = \frac{\vec{k}}{\omega} W. \quad (9.10)$$

Соотношение между энергией и импульсом волны оказывается таким же, как и в электродинамике сплошных сред. Отсюда, в частности, следует, что звуковую волну можно представлять как совокупность квантов с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\vec{k}$.

Коэффициент пропорциональности между потоками энергии и импульса, очевидно, будет таким же, что позволяет по аналогии с (9.10) выписать плотность потока импульса звуковой волны:

$$\Pi_{ik} = \frac{k_i}{\omega} S_k = \frac{k_i}{\omega} \cdot \frac{k_k}{k} c_s W = \frac{k_i k_k}{k^2} W. \quad (9.11)$$

2.10 Волны на разделе сред

Рассмотрим задачу о волнах на поверхности жидкости в поле тяжести. Пусть в невозмущенном состоянии одна жидкость располагается в области $z < 0$, имеет плотность ρ_2 и покоится. Другая жидкость заполняет полупространство $z > 0$, имеет плотность ρ_1 и движется со скоростью $\vec{u} \perp \vec{z}$ (рис. 2.9). Граница раздела двух жидкостей характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения α .

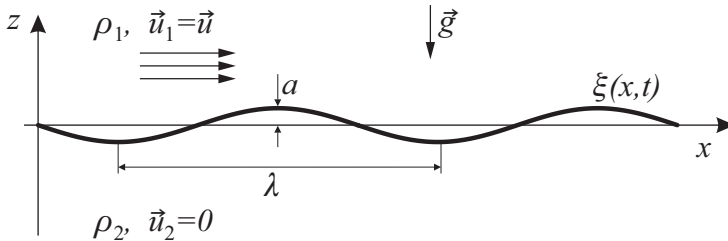


Рис. 2.9: Геометрия задачи о волнах на разделе сред

Предположим теперь, что граница искажилась, и по ней побежали волны с длиной λ и амплитудой $a \ll \lambda$. Обычно поверхностные волны бегут намного медленнее звуковых, поэтому мы можем пользоваться приближением несжимаемой жидкости $\rho_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$). Также будем считать движение жидкости потенциальным.

Сверху и снизу от границы раздела движение жидкости определяется цепочкой уравнений

$$\Delta\varphi = 0, \quad \vec{v} = \nabla\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (10.1)$$

В невозмущенном состоянии

$$\vec{v}_i = \vec{u}_i, \quad \varphi_i = \vec{u}_i \vec{r} + \text{const}, \quad p_i = p_0 - \rho_i gz, \quad i = 1, 2, \quad (10.2)$$

где p_0 — давление на невозмущенной границе, а константу в выражении для φ_i можно без потери общности положить равной нулю.

Возмущения величин будем обозначать значком δ . Поскольку невозмущенная система однородна в направлениях x и y и стационарна, то любое малое возмущение можно разложить на отдельные фурье-гармоники и рассматривать каждую гармонику по отдельности. Кроме того, выбором осей можно занулить y -компоненту волнового вектора и искать возмущение потенциала в виде

$$\delta\varphi_i = f_i(z)e^{ikx - i\omega t}. \quad (10.3)$$

Функции $f_i(z)$ находим из первого уравнения (10.1):

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{d^2 f_i}{dz^2} - k^2 f_i = 0, \quad (10.4)$$

$$f_{1,2} = A_{1,2} e^{\mp kz}. \quad (10.5)$$

При выборе решения уравнения (10.4) мы учли, что возмущение должно спадать при удалении от границы раздела. Второе уравнение (10.1) дает нам возмущение скорости:

$$\delta v_{i,x} = ik \delta\varphi_i, \quad \delta v_{i,y} = 0, \quad \delta v_{i,z} = \mp k \delta\varphi_i. \quad (10.6)$$

Тот факт, что x - и z -компоненты скорости оказались одинаковыми по модулю и сдвинутыми на четверть периода (множителем $\pm i$), означает, что движение элементов жидкости происходит по окружности. Третье уравнение (10.1) принимает вид

$$-i\omega\delta\varphi_i + \frac{u_i^2 + 2\vec{u}_i\delta\vec{v}_i + \delta v_i^2}{2} + \frac{p_0 - \rho_i gz + \delta p_i}{\rho_i} + gz = p_0. \quad (10.7)$$

Сокращаем в нем невозмущенные величины, пренебрегаем малостью второго порядка и находим возмущение давления:

$$\delta p_i = i\rho_i(\omega - ku_{i,x})\delta\varphi_i. \quad (10.8)$$

Таким образом, возмущение жидкости сверху и снизу выразилось через две константы A_1 и A_2 , которые нужно связать друг с другом на границе.

Между двумя жидкостями не возникает пустого пространства, поэтому нормальные компоненты скорости жидкостей на границе должны быть одинаковыми:

$$\vec{n}\vec{v}_1 = \vec{n}\vec{v}_2, \quad (10.9)$$

где \vec{n} — вектор нормали к границе раздела (рис. 2.10,а). Его компоненты выражаются через угол наклона границы γ , а он, в свою очередь, через смещение границы ξ :

$$\vec{n} = (-\sin \gamma, 0, \cos \gamma), \quad \gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial \xi}{\partial x} = ik\xi. \quad (10.10)$$

Из последнего равенства следует, что угол γ мал, порядка a/λ . Поэтому с точностью до первого порядка по этой малости

$$\vec{n} \approx (-\gamma, 0, 1) \approx (-ik\xi, 0, 1). \quad (10.11)$$

В нормальной компоненте скорости также пренебрегаем малостями второго порядка:

$$v_n = \vec{n}\vec{v}_i = -ik\xi(u_{i,x} + \delta v_{i,x}) + \delta v_{i,z} \approx -ik\xi u_{i,x} + \delta v_{i,z}. \quad (10.12)$$

Кроме того, нормальная компонента скорости жидкости примерно равна вертикальной скорости границы (рис. 2.10,б):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{v_n}{\cos \gamma} \approx v_n. \quad (10.13)$$

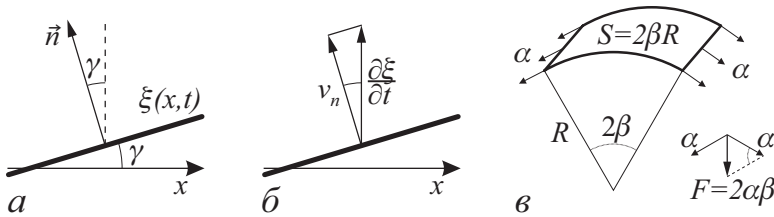


Рис. 2.10: К формулировке граничных условий: ориентация нормали (а), вычисление скорости границы (б) и влияние силы поверхностного натяжения (с)

Таким образом, получаем первое граничное условие:

$$-ik\xi u_x - k\delta\varphi_1 = k\delta\varphi_2 = -i\omega\xi. \quad (10.14)$$

При искривлении границы с радиусом кривизны R сила поверхностного натяжения обеспечивает разность давлений $F/S = \alpha/R$ (рис. 2.10, в). Радиус кривизны, отложенный снизу, определяется формой границы:

$$\frac{1}{R} \approx -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = k^2 \xi. \quad (10.15)$$

Итак, второе граничное условие

$$p_1(\xi) = p_2(\xi) + \alpha k^2 \xi, \quad (10.16)$$

или

$$-\rho_1 g \xi + i\rho_1(\omega - ku_x)\delta\varphi_1 = -\rho_2 g \xi + i\rho_2 \omega \delta\varphi_2 + \alpha k^2 \xi. \quad (10.17)$$

Условие разрешимости однородной системы линейных уравнений (10.14), (10.17) определяет искомое дисперсионное соотношение $\omega(k)$ для поверхностных волн. Для его получения выразим $\delta\varphi_i$ из (10.14) и подставим в (10.17):

$$\delta\varphi_1 = \frac{i(\omega - ku_x)}{k}\xi, \quad \delta\varphi_2 = -\frac{i\omega}{k}\xi, \quad (10.18)$$

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - 2\rho_1 ku_x \omega - (\rho_2 - \rho_1)kg + \rho_1 k^2 u_x^2 - \alpha k^3 = 0, \quad (10.19)$$

$$\omega = \frac{\rho_1 ku_x}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)kg + \alpha k^3}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2 k^2 u_x^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}}. \quad (10.20)$$

Рассмотрим несколько частных случаев решенной задачи. Если пренебречь плотностью верхней среды и ее движением, получим свободные волны на поверхности жидкости:

$$\vec{u} = 0, \quad \rho_1 \rightarrow 0 : \quad \omega = \pm \sqrt{kg + \frac{\alpha k^3}{\rho_2}}. \quad (10.21)$$

В пределе большой длины эти волны называют гравитационными:

$$k \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty : \quad \omega = \pm \sqrt{kg}. \quad (10.22)$$

Именно такие волны мы обычно наблюдаем на поверхности водоемов. Короткие волны называют капиллярными:

$$k \rightarrow \infty, \quad \lambda \rightarrow 0 : \quad \omega = \pm \sqrt{\alpha k^3 / \rho_2}. \quad (10.23)$$

Возвращающая сила в этом случае создается силой поверхностного натяжения. Граница между двумя предельными случаями определяется равенством слагаемых под корнем в (10.21):

$$k = k_0 \equiv \sqrt{\rho_2 g / \alpha}. \quad (10.24)$$

Для чистой воды она соответствует длине волны около 2 см.

Случай $\vec{u} = 0$, $\rho_1 \neq 0$ интересен возможностью так называемой неустойчивости Рэля — Тейлора, которая мешает разместить тяжелую жидкость поверх легкой. Действительно, при условии $\rho_1 > \rho_2$ выражение под корнем в (10.20) может быть отрицательным при малых k :

$$\vec{u} = 0, \rho_1 > \rho_2 : \quad \text{Im } \omega > 0 \quad \text{при} \quad k^2 < \frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\alpha}. \quad (10.25)$$

В случае неограниченной поверхности длина волны возмущения λ может быть сколь угодно большой, а значение k — сколь угодно малым, поэтому тяжелая жидкость не может устойчиво покоиться над легкой. Если же размер поверхности ограничен (например, стенками сосуда) и имеет характерный масштаб L , то имеется минимально возможное $k \sim L^{-1}$, и тяжелая жидкость будет покоиться над легкой при условии

$$L^2 \lesssim \frac{\alpha}{(\rho_1 - \rho_2)g}. \quad (10.26)$$

Эту ситуацию можно наблюдать в тонких капиллярах. Сила поверхностного натяжения препятствует искажению границы, и две жидкости не могут поменяться местами.

Если жидкость по обе стороны границы одинаковая, но различается скоростью движения, то у частоты ω всегда есть ненулевая мнимая часть, и мы имеем дело с неустойчивостью тангенциального разрыва, частным случаем неустойчивости Кельвина — Гельмгольца:

$$\rho_1 = \rho_2, \alpha = 0, \vec{u} \neq 0 : \quad \text{Im } \omega = \pm k u_x / 2. \quad (10.27)$$

Поэтому резкий перепад скорости не может долго сохраняться в идеальной жидкости. Инкремент неустойчивости формально стремится к бесконечности при увеличении k , что есть следствие выбранной идеализированной модели. В действительности область, в которой скорость изменяется от 0 до u , всегда имеет конечную толщину Δz . Нашей моделью можно пользоваться только при условии, что поперечный масштаб возмущения (равный k^{-1}) велик по сравнению с Δz . В противном случае изменение скорости нельзя считать резким, и выражение (10.27) для инкремента не применимо.

При $\rho_1 \ll \rho_2$ из выражения (10.20) можно получить условие возбуждения волн ветром:

$$kg + \frac{\alpha k^3}{\rho_2} - \frac{\rho_1 k^2 u_x^2}{\rho_2} < 0, \quad (10.28)$$

или

$$\vec{u} \neq 0, \quad \rho_1 \ll \rho_2 : \quad \text{Im } \omega > 0 \quad \text{при} \quad u_x^2 > \frac{\rho_2 g}{k \rho_1} + \frac{\alpha k}{\rho_1}. \quad (10.29)$$

Правая часть неравенства (10.29) как функция от k имеет минимум при $k = k_0$, которому соответствует скорость

$$u_x = u_{x0} \equiv (4\rho_2 \alpha g / \rho_1)^{1/4}. \quad (10.30)$$

Итак, на поверхности чистой воды легче всего возбудить волны с длиной около 2 см, и для этого нужна скорость ветра около 10 м/с. Изложенный механизм возбуждения волн, однако, редко реализуется в природе. Чаще скорость ветра при приближении к поверхности воды плавно обращается в ноль и работают более сложные механизмы возбуждения.

2.11 Вязкая жидкость

В вязкой жидкости тензор напряжений имеет вид

$$\pi_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}. \quad (11.1)$$

В нем появляется добавочное слагаемое $\sigma_{\alpha\beta}$, называемое тензором вязких напряжений и обусловленное силами внутреннего трения между слоями жидкости. Соответственно, компоненты полной силы, действующей в жидкости на единичную площадку dS , равны

$$F_\alpha = -\pi_{\alpha\beta} n_\beta = p n_\alpha - \sigma_{\alpha\beta} n_\beta, \quad (11.2)$$

где \vec{n} — внутренняя нормаль к площадке (рис. 2.11).

Сила внутреннего трения появляется при неоднородном движении жидкости. Величина этой силы линейно зависит от первых производных компонент скорости по координатам, так что

$$\sigma_{\alpha\beta} = A \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + B \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + C \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}, \quad (11.3)$$

где A , B и C — не зависящие от скорости коэффициенты. В рамках гидродинамики это утверждение принимается как постулат.

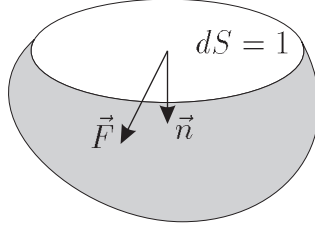


Рис. 2.11: Направление нормали

Внутреннего трения не возникает при вращении жидкости как целого с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Следовательно, при скорости

$$\vec{v} = [\vec{r} \times \vec{\Omega}], \quad v_\alpha = e_{\alpha ik} x_i \Omega_k \quad (11.4)$$

тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ должен тождественно зануляться. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= A e_{\alpha ik} \frac{\partial x_i}{\partial x_\beta} \Omega_k + B e_{\beta ik} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha} \Omega_k + C \delta_{\alpha\beta} e_{\gamma ik} \frac{\partial x_i}{\partial x_\gamma} \Omega_k = \\ &= A e_{\alpha\beta k} \Omega_k + B e_{\beta\alpha k} \Omega_k = (A - B) e_{\alpha\beta k} \Omega_k = 0, \end{aligned} \quad (11.5)$$

откуда $A = B$.

Традиционно тензор вязких напряжений записывают в форме

$$\sigma_{\alpha\beta} = \eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}. \quad (11.6)$$

Комбинация тензоров в круглых скобках удобна тем, что имеет нулевой след. Коэффициент η называют динамической вязкостью или просто вязкостью. Коэффициент ζ называют второй вязкостью. Можно показать, что η и ζ положительны (это следует из закона возрастания энтропии).

С учетом вязкости уравнение движения жидкости (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_\alpha}{dt} &= \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho g_\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \rho g_\alpha + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Коэффициенты η и ζ , вообще говоря, зависят от p и ρ . Но зачастую изменение этих коэффициентов незначительно, и их можно вынести из

под знака дифференцирования:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v}. \quad (11.8)$$

Уравнение (11.8) с $\vec{g} = 0$ называется уравнением Навье — Стокса. В несжимаемой жидкости оно принимает вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}, \quad (11.9)$$

где коэффициент $\nu = \eta/\rho$ называют кинематической вязкостью.

2.12 Закон подобия

Пусть u и L характерные скорость и пространственный масштаб некоторого стационарного течения (рис. 2.12). Если жидкость несжимаемая, а кинематическая вязкость $\nu = \text{const}$, то движение жидкости описывается уравнениями (1.12) и (11.9). В безразмерных переменных

$$\vec{r}' = \frac{\vec{r}}{L}, \quad \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{u}, \quad t' = \frac{ut}{L}, \quad p' = \frac{p}{\rho u^2} \quad (12.1)$$

эти уравнения принимают вид

$$\operatorname{div}' \vec{v}' = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \nabla') \vec{v}' = -\nabla' p' + \frac{\nu}{Lu} \Delta' \vec{v}' \quad (12.2)$$

(штрихи у операторов означают дифференцирование по безразмерным координатам). Решение системы (12.2) полностью определяется геометрией задачи и безразмерным параметром

$$\Re = \frac{Lu}{\nu}, \quad (12.3)$$

называемым числом Рейнольдса. Таким образом, течения одинакового типа с одинаковым числом Рейнольдса подобны (закон подобия).

В случае более сложного движения жидкости (нестационарного, в поле тяжести и т. п.) тип решения определяется бóльшим числом безразмерных параметров, тоже имеющих свои названия.

Законы подобия полезны тем, что позволяют применять результаты экспериментов над маленькими моделями к настоящим объектам при условии одинаковости безразмерных параметров.

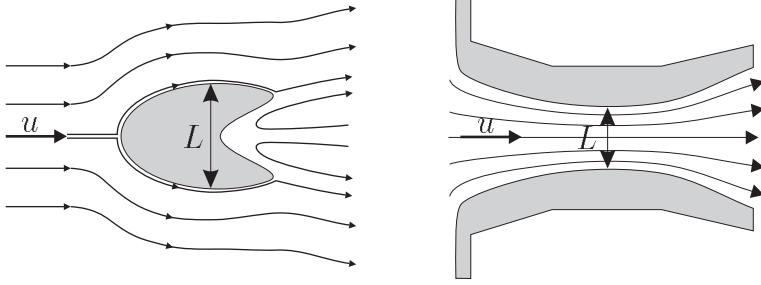


Рис. 2.12: Примеры характерных параметров течения

2.13 Уравнение теплопереноса

Пусть на жидкость не действуют внешние силы ($\vec{g} = 0$) и жидкость не нагревается внешними источниками тепла. Тогда, при наличии диссипативных процессов, уравнение баланса энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\rho v_\alpha \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) + v_\alpha p - \sigma_{\alpha\beta} v_\beta - \varkappa \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Здесь ε — внутренняя энергия единицы массы, T — температура, \varkappa — теплопроводность жидкости. Слагаемые в круглых скобках (в левой части уравнения) представляют собой полную энергию (кинетическую и внутреннюю) единицы объема. Слагаемые в квадратных скобках суть поток энергии, который складывается из конвективного переноса энергии вместе с жидкостью (первое слагаемое), работы внутренних сил (второе и третье слагаемые) и теплопроводности (четвертое слагаемое).

Выражение для работы внутренних сил требует пояснений. Пусть на объем dV через элемент его поверхности $d\vec{S}$ действует сила $d\vec{F}$. В единицу времени внутренние силы совершают над объемом работу

$$\begin{aligned} A = \int \vec{v} d\vec{F} = \int v_\beta dF_\beta = - \int v_\beta \pi_{\beta\alpha} dS_\alpha = \\ = \int v_\beta (p \delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}) dS_\alpha = \int (v_\alpha p - \sigma_{\alpha\beta} v_\beta) dS_\alpha, \end{aligned} \quad (13.2)$$

откуда и следует выписанное выше выражение.

С помощью уравнений непрерывности (1.1) и движения (1.3) можно из (13.1) исключить кинетическую энергию и получить уравнение

теплопереноса:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \operatorname{div} (\varkappa \nabla T). \quad (13.3)$$

Здесь в левой части стоит количество теплоты, полученной единицей объема в единицу времени, а справа — теплота, выделившаяся вследствие вязкой диссипации или пришедшая из соседних слоев жидкости в результате теплопереноса.

Строгий вывод (13.3) довольно громоздок, но его основные моменты можно понять из следующих соображений. Все слагаемые, не содержащие $\sigma_{\alpha\beta}$ и \varkappa , путем сложных преобразований группируются в левую часть (13.3), так что в идеальной жидкости уравнение (13.1) переходит в уравнение адиабатичности

$$\rho T \frac{ds}{dt} = 0. \quad (13.4)$$

Слагаемые, содержащие $\sigma_{\alpha\beta}$ и \varkappa , просто переписываются из правой части (13.1) в правую часть (13.3). Кроме того, в процессе исключения из (13.1) производной $\partial(\rho v^2)/\partial t$ используется уравнение движения

$$v_\alpha \frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t} = -v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho v_\alpha v_\beta + p \delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}), \quad (13.5)$$

вследствие чего в правой части (13.3) дополнительно появляется слагаемое $-v_\alpha \partial \sigma_{\alpha\beta} / \partial x_\beta$, которое дает

$$-v_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta} v_\beta}{\partial x_\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}. \quad (13.6)$$

Если жидкость можно считать несжимаемой, а коэффициенты η и \varkappa — константами, то уравнение теплопроводности существенно упрощается. Поскольку

$$\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} = \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (13.7)$$

имеем

$$\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2. \quad (13.8)$$

Левую часть (13.3) можно записать в виде

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{dQ}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (13.9)$$

где Q — количество теплоты, полученной единицей массы, а c_p — теплоемкость единицы массы. Поскольку при нагревании жидкости обычно

ничто не препятствует ее расширению, теплоемкость берется при постоянном давлении. Итак, уравнение теплопереноса принимает вид

$$\frac{dT}{dt} = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2, \quad \chi = \frac{\varkappa}{\rho c_p}. \quad (13.10)$$

Величина χ называется коэффициентом температуропроводности.

2.14 Поверхности разрыва

В принципе, гидродинамикой допускаются разрывные решения, при которых характеризующие жидкость величины (плотность, давление или скорость) меняются скачком. Однако потоки вещества, импульса и энергии через поверхность разрыва должны быть непрерывными. В идеальной гидродинамике эти условия непрерывности принимают вид

$$\{\rho v_x\} = 0, \quad (14.1)$$

$$\{p + \rho v_x^2\} = 0, \quad (14.2)$$

$$\{\rho v_x \vec{v}_t\} = 0, \quad (14.3)$$

$$\left\{ v_x \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + p v_x \right\} = \left\{ \rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right\} = 0, \quad (14.4)$$

где ось \vec{x} перпендикулярна поверхности разрыва, \vec{v}_t — тангенциальная компонента скорости, w — энтальпия единицы массы; фигурные скобки означают скачок величины при переходе через разрыв. Из уравнений (14.1–14.4) имеем:

$$\text{если } \rho v_x = 0, \quad \text{то } \{p\} = 0; \quad (14.5)$$

$$\text{если } \rho v_x \neq 0, \quad \text{то } \{\vec{v}_t\} = 0. \quad (14.6)$$

Поверхности разрыва классифицируются в зависимости от того, какая величина терпит разрыв:

$$\text{тангенциальный разрыв:} \quad \rho v_x = 0, \quad \{p\} = 0, \quad \{\vec{v}_t\} \neq 0,$$

$$\text{контактный разрыв:} \quad \rho v_x = 0, \quad \{p\} = 0, \quad \{\rho\} \neq 0,$$

$$\text{ударная волна:} \quad \rho v_x \neq 0, \quad \{p\} \neq 0, \quad \{\vec{v}_t\} = 0.$$

2.15 Ударная адиабата

Найдем, как соотносятся между собой давления и плотности с разных сторон ударной волны. Будем работать в системе отсчета, в которой разрыв покоится, $\vec{v}_t = 0$ и $v_x > 0$ (рис. 2.13,а). Без ограничения общности

поверхность разрыва можно считать плоской. Из уравнений (14.1–14.4) в нашем случае следует:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (v \equiv v_x), \quad (15.1)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (15.2)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + w_1 = \frac{v_2^2}{2} + w_2. \quad (15.3)$$

Введем объем единицы массы $V = 1/\rho$ и поток вещества через разрыв $j = \rho v$. Из (15.2) имеем

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2 = j^2 (V_2 - V_1), \\ \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} &= -j^2 < 0. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Из этого неравенства и требования возрастания энтропии (формула (15.13)) следует, что в ударной волне

$$p_2 > p_1, \quad V_2 < V_1, \quad (15.5)$$

т. е. вещество всегда переходит из области меньшего давления в область большего и сжимается при этом. Подставляя (15.4) в (15.3), получаем

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 &= \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \frac{j^2}{2} (V_1^2 - V_2^2), \\ w_2 - w_1 &= \frac{(p_2 - p_1)(V_1 + V_2)}{2}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

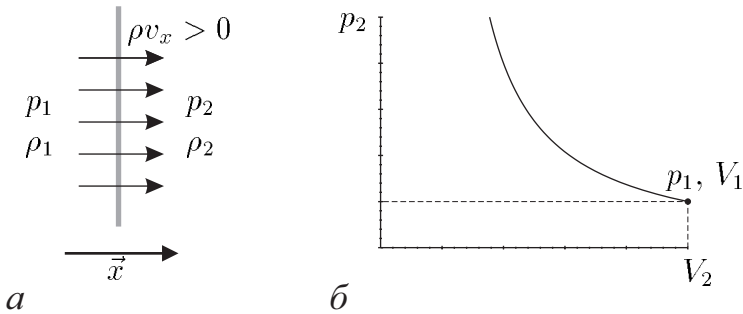


Рис. 2.13: Геометрия задачи (а); ударная адиабата для двухатомного газа (б)

Уравнение (15.6) называется ударной адиабатой, или адиабатой Гюгонио. Вместе с уравнением состояния вещества оно позволяет при заданных параметрах газа в одной области найти зависимость $p(V)$ в другой.

Для дальнейшего продвижения нужно конкретизировать уравнение состояния вещества. Наиболее практически важным является случай идеального газа с энтальпией

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pV + \text{const.} \quad (15.7)$$

После арифметических преобразований уравнения (15.6)

$$\begin{aligned} 2\gamma(p_2 V_2 - p_1 V_1) &= (\gamma - 1)(p_2 - p_1)(V_1 + V_2), \\ V_2(2\gamma p_2 + (\gamma - 1)(p_1 - p_2)) &= V_1(2\gamma p_1 + (\gamma - 1)(p_2 - p_1)) \end{aligned}$$

ударная адиабата для идеального газа принимает вид

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_1}{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1} = \frac{A_1}{A_2}, \quad (15.8)$$

где

$$A_1 = (\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_1, \quad (15.9)$$

$$A_2 = (\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1. \quad (15.10)$$

При заданных p_1 и V_1 зависимость $p_2(V_2)$ представляет собой гиперболу со смещенными относительно осей асимптотиками (рис. 2.13,б).

Интересно найти изменение энтропии газа при его прохождении через фронт ударной волны (энтропия не сохраняется даже в модели идеального газа). Для идеального газа имеем

$$s = c_v \ln(pV^\gamma) + \text{const}, \quad (15.11)$$

где c_v — теплоемкость единицы массы при постоянном объеме. Поскольку

$$\frac{1}{c_v} \frac{ds_2}{dp_2} = \frac{1}{p_2} + \gamma \frac{\partial \ln V_2}{\partial p_2} = \frac{1}{p_2} + \gamma \frac{\partial \ln A_1}{\partial p_2} - \gamma \frac{\partial \ln A_2}{\partial p_2}, \quad (15.12)$$

получаем

$$\frac{1}{c_v} \frac{ds_2}{dp_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{A_1} - \frac{\gamma(\gamma + 1)}{A_2} = \frac{(\gamma^2 - 1)(p_2 - p_1)^2}{p_2 A_1 A_2} > 0. \quad (15.13)$$

Итак, вторым законом термодинамики разрешены только ударные волны с $p_2 > p_1$, причем увеличение энтропии тем больше, чем больше разность давлений на разрыве.

Важной характеристикой ударной волны является скорость ее движения в неподвижном газе, т. е. в нашей системе отсчета — скорость v_1 . Найдем ее. Для этого воспользуемся (15.8) и (15.4):

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{A_1 - A_2}{A_2} = \frac{2(p_1 - p_2)}{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1}, \quad (15.14)$$

$$j^2 = \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1}{2V_1}, \quad (15.15)$$

откуда

$$v_1^2 = j^2 V_1^2 = \gamma p_1 V_1 \left(1 + \frac{(\gamma + 1)(p_2 - p_1)}{2\gamma p_1} \right). \quad (15.16)$$

Сумма, стоящая в скобке, всегда больше единицы. Следовательно, газ налетает на ударную волну (или ударная волна налетает на газ) со скоростью, большей скорости звука:

$$v_1 > c_{s1} = \sqrt{\gamma p_1 V_1}. \quad (15.17)$$

Аналогично можно показать, что позади ударной волны газ течет с дозвуковой скоростью:

$$v_2 < c_{s2} = \sqrt{\gamma p_2 V_2}. \quad (15.18)$$

Соотношения (15.17) и (15.18) помогают понять физику ударной волны на качественном уровне. С точки зрения менее газа «1» картина явления выглядит так (рис. 2.14, *а*). Плотный, с большим давлением газ «2» налетает на покоящийся газ «1» и «сминает» его подобно бульдозеру. Поскольку граница раздела движется быстрее скорости звука, газ «1» остается в покое до самого прихода фронта ударной волны (газ «узнает» о нем только тогда, когда фронт уже пришел).

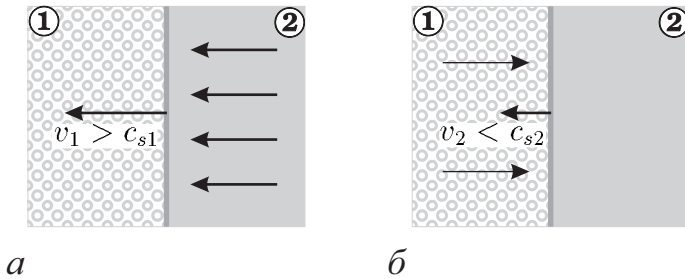


Рис. 2.14: Ударная волна с точки зрения редкого (*а*) и плотного (*б*) газов

С точки зрения плотного газа картина иная (рис. 2.14,б). Газ «2» находится в состоянии покоя, причем слева он удерживается за счет быстрого потока газа «1», который своим передаваемым импульсом уравнивает давление газа «2». Газ «1» при ударе о границу раздела сжимается, нагревается и становится газом «2», поэтому граница раздела движется влево с некоторой дозвуковой скоростью.

Полезно также рассмотреть предельные случаи сильной и слабой ударной волны. В случае сильной волны

$$\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (15.19)$$

так что степень сжатия газа при прохождении ударной волны оказывается ограниченной. Для воздуха (двухатомный газ, $\gamma = 7/5$) максимальная степень сжатия равна 6.

В случае слабой волны давление и плотность газа изменяются на малую величину:

$$p_2 = p_1 + \delta p \quad (\delta p \ll p_1), \quad \rho_2 = \rho_1 + \delta \rho \quad (\delta \rho \ll \rho_1), \quad (15.20)$$

связь между изменениями давления и плотности оказывается такой:

$$\frac{\delta \rho}{\rho_1} \approx -\frac{\delta V}{V_1} \approx \frac{\delta p}{\gamma p_1}, \quad \delta p = c_{s1}^2 \delta \rho, \quad (15.21)$$

а скорости газа примерно равны:

$$v_1 \approx v_2 \approx c_{s1} \approx c_{s2}. \quad (15.22)$$

Таким образом, в пределе малого скачка давления ударная волна переходит в суперпозицию обычных звуковых волн.

2.16 Истечение газа через сопло

Рассмотрим практически важную задачу о стационарном истечении газа из большого сосуда через узкое сопло с плавно меняющимся сечением S (рис. 2.15). Исходные давление p_0 и плотность ρ_0 газа, а также давление на выходе из сопла p_a заданы. Будем работать в рамках идеальной гидродинамики.

Из уравнения Бернулли (3.7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial l} \frac{v^2}{2} = -\frac{\partial w}{\partial l} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial l}, \quad (16.1)$$

где координата l отсчитывается вдоль линии тока. Из этой формулы следует, что скорость потока в сопле увеличивается, когда давление и плотность газа падают.

Поскольку сечение сопла меняется плавно, течение можно считать одномерным (т. е. все величины зависят только от l). Полный поток газа при этом равен

$$Q = \rho v S, \quad \text{откуда} \quad \rho v = \frac{Q}{S(l)}, \quad (16.2)$$

так что плотность потока ρv (масса вещества, прошедшего в единицу времени через единицу площади) есть известная функция от l .

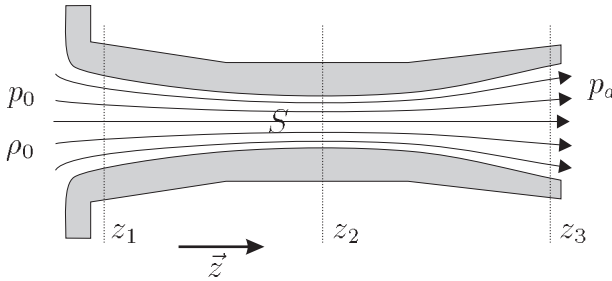


Рис. 2.15: Геометрия задачи об истечении газа через сопло

Из уравнения (16.2) легко находятся все параметры течения для произвольного сечения сопла $S(l)$. Например, для идеального газа выражаем все через плотность:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = p(\rho), \quad (16.3)$$

$$c_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = c_{s0}^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = c_s^2(\rho), \quad (16.4)$$

$$w = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma-1} = w(\rho), \quad (16.5)$$

$$\frac{v^2}{2} + w = w_0 \Rightarrow v = \sqrt{2(w_0 - w)} = v(\rho) \quad (16.6)$$

и из (16.2) находим зависимость $\rho(l)$.

Качественные особенности истечения газа легко понять, если продифференцировать плотность потока по l :

$$\frac{\partial \rho v}{\partial l} = \rho \frac{\partial v}{\partial l} - \frac{\rho v}{c_s^2} \frac{\partial v^2}{\partial l} = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c_s^2} \right) \frac{\partial v}{\partial l} \quad (16.7)$$

и с помощью этой формулы построить график функции $\rho v(v)$ (рис. 2.16). При малых v поток растет почти линейно (коэффициент перед $\partial v/\partial t$ почти константа), затем рост замедляется и при $v = c_s$ сменяется убыванием. Когда скорость v достигает скорости истечения газа в вакуум (3.10), поток обращается в ноль, так как в вакууме $\rho = 0$. Из рис. 2.16 следует, что чтобы скорость истечения на выходе из сопла могла превысить скорость звука, сопло должно сначала сужаться, а затем расширяться (так как $\rho v \propto 1/S$). Такое сверхзвуковое сопло называется соплом Лавала. Самая узкая часть сопла, в которой скорость газа равняется локальной скорости звука, называется критическим сечением, а скорость в ней (v_*) — критической скоростью.

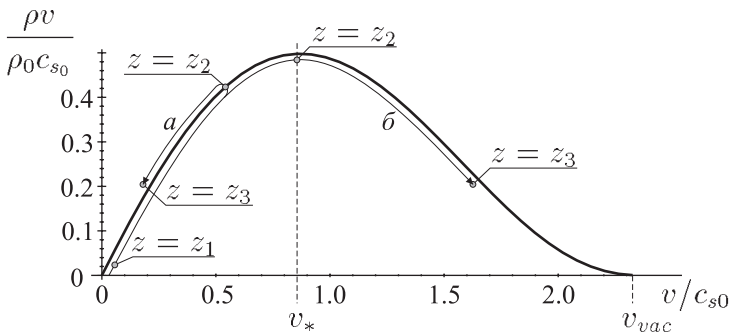


Рис. 2.16: Зависимость плотности потока от скорости газа для $\gamma = 7/5$

Характер истечения газа определяется выходным давлением p_a (рис. 2.17). Если перепад давления мал (p_a больше некоторого значения $p_1(p_0, \rho_0)$), то течение всюду дозвуковое, а расход газа зависит от p_a (вариант «а» на рис. 2.16). При уменьшении p_a в какой-то момент в самом узком месте сопла достигается скорость звука, после чего расход газа перестает зависеть от выходного давления. При сверхзвуковом течении (вариант «б») расходом газа однозначно определяются все параметры потока, в том числе и давление на выходе. Поэтому сверхзвуковое течение, описываемое нашей моделью, возможно только при определенном значении $p_a = p_2(p_0, \rho_0)$. Такое течение называется расчетным. Если $p_a < p_1$ и $p_a \neq p_2$, то реализуется нерасчетный режим истечения: в сопле появляются ударные волны и течение газа перестает быть одномерным и изэнтропическим.

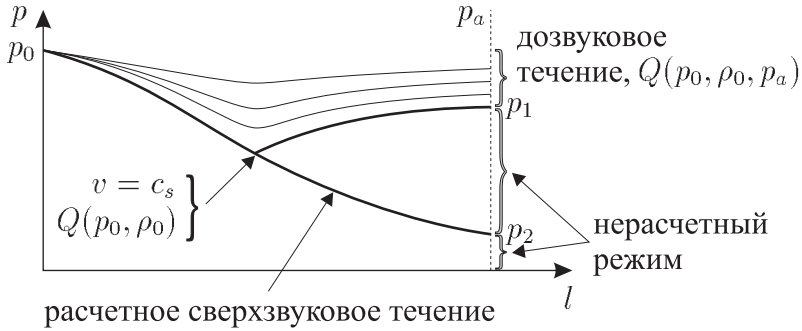


Рис. 2.17: Ход давления в сопле при различных значениях p_a

2.17 Простые волны

Простая волна — это одномерная звуковая волна конечной (не малой) амплитуды. Найдём закон движения такой волны.

В одномерном случае уравнения идеальной жидкости (1.1) и (1.8) имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (17.1)$$

течение мы считаем изэнтропическим:

$$s = \text{const}, \quad p = p(\rho). \quad (17.2)$$

Предположим, что между давлением, плотностью и скоростью жидкости есть взаимоднозначное соответствие:

$$\rho = \rho(v), \quad p = p(v). \quad (17.3)$$

Тогда уравнения (17.1) принимают вид

$$\rho' \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \rho' \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \rho' = \frac{d\rho}{dv}, \quad (17.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{c_s^2}{\rho} \rho' \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (17.5)$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{\rho}{\rho'} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (17.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{c_s^2 \rho'}{\rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (17.7)$$

Эта система имеет решение при условии

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{c_s^2 \rho'}{\rho}, \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{\rho'} = \pm c_s. \quad (17.8)$$

Заметим, что в обычной звуковой волне связь (8.8) между плотностью и скоростью жидкости такая же:

$$\frac{\rho}{\rho'} = \rho_0 \frac{v}{\delta \rho} = \pm c_s. \quad (17.9)$$

Подстановка (17.8) в (17.6) дает

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm c_s(v)) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (17.10)$$

Это уравнение сводится к известному уравнению Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = v \pm c_s(v) \quad (17.11)$$

путем домножения на du/dv .

Для решения (17.11) нужно конкретизировать зависимость $c_s(v)$. В случае идеального газа из (16.4) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_s^2} \frac{dc_s^2}{dv} &= \frac{\gamma - 1}{\rho} \frac{d\rho}{dv} = \pm \frac{\gamma - 1}{c_s}, & \frac{dc_s}{dv} &= \pm \frac{\gamma - 1}{2}, \\ c_s(v) &= c_{s0} \pm \frac{\gamma - 1}{2} v, & u(v) &= \frac{\gamma + 1}{2} v \pm c_{s0}, \end{aligned} \quad (17.12)$$

где c_{s0} — скорость звука в невозмущенном ($v = 0$) газе.

Решение уравнения Хопфа характеризуется тем, что каждая точка профиля волны движется со скоростью u , вследствие чего профиль волны искажается (рис. 2.18). В некоторый момент времени наступает опрокидывание волны (рис. 2.18, в), т. е. в некоторых точках производные dv/dx , $d\rho/dx$ и dp/dx обращаются в бесконечность. Физически опрокидывание простой волны означает появление разрывов (ударных волн) и нарушение предположения об изэнтропичности движения (рис. 2.18, г). После образования ударных волн возмущение постепенно затухает, так как в системе появляется диссипация.

Отметим, что искажение профиля гармонической волны можно также интерпретировать как результат нелинейного трехволнового взаимодействия, при котором наряду с волной (\vec{k}, ω) в спектре появляются высшие гармоники $(n\vec{k}, n\omega)$.

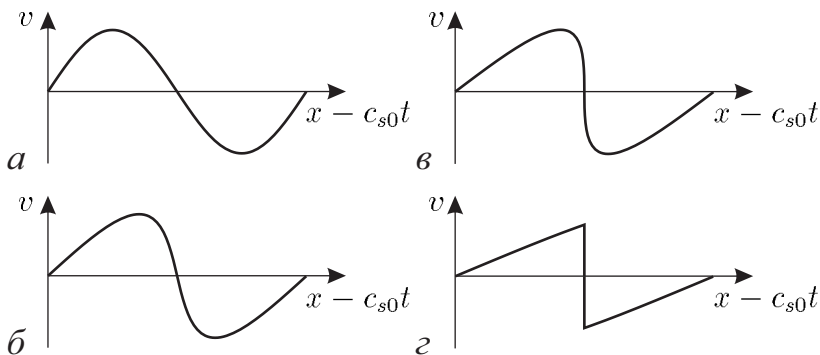


Рис. 2.18: Эволюция простой волны, бегущей в направлении x : до опрокидывания ($a, б$), момент опрокидывания ($в$), ударня волна ($г$)

2.18 Слабая ударная волна

Чтобы проследить эволюцию волны после опрокидывания, необходимо учесть диссипативные процессы. Аналитически это удастся сделать только в случае слабой диссипации и малой амплитуды волны:

$$\eta, \zeta, \varkappa — \text{малы,} \quad v \ll c_{s0}, \quad \delta\rho \ll \rho_0. \quad (18.1)$$

Таким образом, в задаче появляются два сорта малых параметров.

Движение вязкой жидкости описывается уравнениями (1.1), (11.8) и (13.3), которые в одномерном случае принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad (18.2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (18.3)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \sigma_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (18.4)$$

поскольку в волне изменение термодинамических параметров жидкости мало, коэффициенты η , ζ и \varkappa можно считать константами.

Линеаризуем уравнения (18.2–18.4), используя малость амплитуды волны:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (18.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial \delta s}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\end{aligned}\quad (18.6)$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho_0 T_0} \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2}.\quad (18.7)$$

Затем сведем эту систему к одному уравнению. Для этого продифференцируем (18.6) по времени и воспользуемся (18.5) и (18.7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} - \\ &\quad - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varkappa}{\rho_0 T_0} \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2} \right) = \\ &= c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} - \\ &\quad - \frac{\varkappa}{\rho_0^2 T_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \delta p + \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p \delta s \right).\end{aligned}\quad (18.8)$$

Содержащее δs слагаемое здесь имеет второй порядок по малости диссипации, потому его можно опустить:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_s \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_s \frac{\partial}{\partial x} \right) v &= \\ &= \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\varkappa}{\rho_0^2 T_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial^3 \delta p}{\partial x^3}.\end{aligned}\quad (18.9)$$

Термодинамические производные в (18.9) с помощью стандартной техники преобразования якобианов выражаются через теплоемкости:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s &= \frac{\partial(pV)}{\partial(sV)} \frac{\partial(Ts)}{\partial(ps)} \frac{\partial(pV)}{\partial(Ts)} = \\ &= \frac{\partial(pV)}{\partial(sV)} \frac{\partial(Ts)}{\partial(ps)} \left(\frac{\partial(ps)}{\partial(Ts)} \frac{\partial(VT)}{\partial(sT)} - \frac{\partial(pT)}{\partial(sT)} \frac{\partial(Vs)}{\partial(Ts)} \right) = \\ &= \frac{\partial(TV)}{\partial(sV)} - \frac{\partial(pT)}{\partial(ps)} = T \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right),\end{aligned}\quad (18.10)$$

где мы использовали равенства

$$\frac{\partial(Ts)}{\partial(pV)} = 1, \quad c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p, \quad c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V.\quad (18.11)$$

Уравнение (18.9) описывает обыкновенную звуковую волну, которая бежит со скоростью звука и медленно меняется из-за малой диссипации. Будем считать, что волна бежит в направлении x , тогда в ней

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx -c_s \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} - c_s \frac{\partial}{\partial x} \approx 2 \frac{\partial}{\partial t}, \quad \delta p \approx c_s^2 \delta \rho \approx \rho_0 c_s v \quad (18.12)$$

(для неизменного профиля волны равенства были бы точными). Тогда уравнение (18.9) принимает вид

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + c_s \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\varkappa}{\rho_0^2 c_s} \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \frac{\partial^3 \rho_0 c_s v}{\partial x^2 \partial t}, \end{aligned} \quad (18.13)$$

или, после интегрирования по времени,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_s \frac{\partial v}{\partial x} = \nu_{eff} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (18.14)$$

$$\nu_{eff} = \frac{1}{2\rho_0} \left(\frac{4\eta}{3} + \zeta + \frac{\varkappa(c_p - c_v)}{c_p c_v} \right). \quad (18.15)$$

Поскольку малые эффекты аддитивно складываются, при одновременном учете вязкости (этот раздел) и малой нелинейности волны (раздел 2.17) изменится только коэффициент перед $\partial v / \partial x$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u(v) \frac{\partial v}{\partial x} = \nu_{eff} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad u = v + c_s(v). \quad (18.16)$$

При слабой диссипации производная $du/dv \approx \text{const}$; домножением (18.16) на нее получаем уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu_{eff} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (18.17)$$

Это уравнение есть обобщение уравнения Хопфа (17.11). Им описывается как нелинейное искажение профиля волны, так и поведение жидкости в области ударной волны после момента опрокидывания.

Вблизи ударной волны решение уравнения Бюргерса можно искать в виде

$$u = u(x - c_{s0}t). \quad (18.18)$$

Оно оказывается таким:

$$u = c_{s0} - \delta u \operatorname{th} \left(\frac{\delta u(x - c_{s0}t)}{2\nu_{eff}} \right), \quad (18.19)$$

где δu характеризует разлнче величины u с двух сторон ударной волны (рис. 2.19).

В газах $\nu_{eff} \sim c_s \lambda$, где λ — длина свободного пробега. Отсюда можно оценить ширину ударной волны:

$$\Delta x \sim \frac{\nu_{eff}}{\delta u} \sim \frac{c_s}{\delta u} \lambda \gg \lambda. \quad (18.20)$$

Таким образом, чем слабее ударная волна, тем шире ее фронт. Из (18.20) также следует, что гидродинамическое описание внутренней структуры применимо только к слабым ударным волнам, в которых скачок скорости газа намного меньше скорости звука.

Вязкость — не единственный эффект, способный остановить нелинейное укрупнение фронта волны. Нелинейное укрупнение фронта может быть также скомпенсировано дисперсионным расплыванием волнового пакета. В этом случае профиль волны описывается другим известным уравнением математической физики — уравнением Кортевега — де Вриза.

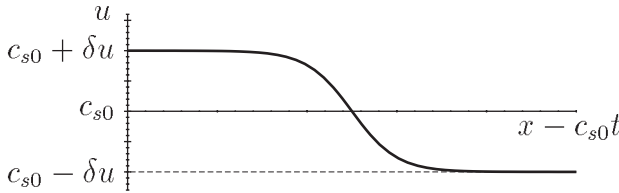


Рис. 2.19: Решение уравнения Бюргерса в области ударной волны

2.19 Турбулентность

Гидродинамическая турбулентность — это явление, наблюдаемое во многих течениях, при котором в жидкости образуются многочисленные вихри различных размеров и течение становится нерегулярным. Вихри влияют на свойства течения в целом: меняется сила сопротивления, способность переносить частицы и т. п.

Теория турбулентности сложна и далека от завершения. Из-за нерегулярности турбулентных движений приходится пользоваться статистическим описанием жидкости и даже получать результаты из соображений размерности.

Будем считать жидкость несжимаемой. Тогда характер течения (в частности, турбулентное оно или нет) будет определяться только чис-

лом Рейнольдса. В уравнении движения жидкости

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} \quad (19.1)$$

за возникновение вихрей и усложнение течения отвечает слагаемое $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$. Действительно, если бы его не было, то из (19.1) следовало бы уравнение

$$\frac{\partial \text{rot } \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \text{rot } \vec{v} \quad (19.2)$$

для завихренности, исключающее генерацию и нарастание в жидкости случайных вихрей. Поскольку

$$\frac{|(\vec{v} \nabla) \vec{v}|}{|\nu \Delta \vec{v}|} \sim \frac{uL}{\nu} = \Re, \quad (19.3)$$

турбулентность будет появляться при больших числах Рейнольдса.

Механизм возникновения турбулентности при увеличении \Re может быть разным в различных системах. Один из возможных вариантов такой (сценарий Ландау — Хопфа). При превышении числом Рейнольдса некоторого критического значения $\Re_{кр}$ «гладкое» (ламинарное) решение уравнения (19.1) становится неустойчивым. Это значит, что малое периодическое возмущение ламинарного течения быстро нарастает со временем и движение жидкости становится почти периодическим. При увеличении \Re это периодическое движение тоже становится неустойчивым, т. е. на него накладывается почти периодическое возмущение с каким-то другим периодом. При дальнейшем увеличении \Re у движения жидкости появляются все новые периоды и течение приобретает сложный и запутанный характер.

Интересно отметить, что безразмерная величина $\Re_{кр}$ может быть очень большой (до 50 000 в трубах с плавным входом).

Турбулентное течение можно представить как результат наложения движений (турбулентных пульсаций) различных масштабов (рис. 2.20). Самые крупномасштабные пульсации (основной или внешний масштаб турбулентности) имеют характерный размер порядка масштаба течения L , а скорость в них — порядка средней скорости потока u . На крупномасштабные пульсации накладываются пульсации меньших масштабов (λ). Изменение скорости жидкости на этих масштабах $v_\lambda \ll u$. Можно также ввести число Рейнольдса для этих масштабов:

$$\Re_\lambda = \frac{\lambda v_\lambda}{\nu}, \quad \text{причем} \quad \Re \gg \Re_\lambda \gg 1. \quad (19.4)$$

Наименьший масштаб пульсаций (λ_0), для которого число Рейнольдса $\Re_0 \sim 1$, называют внутренним масштабом турбулентности. На этом

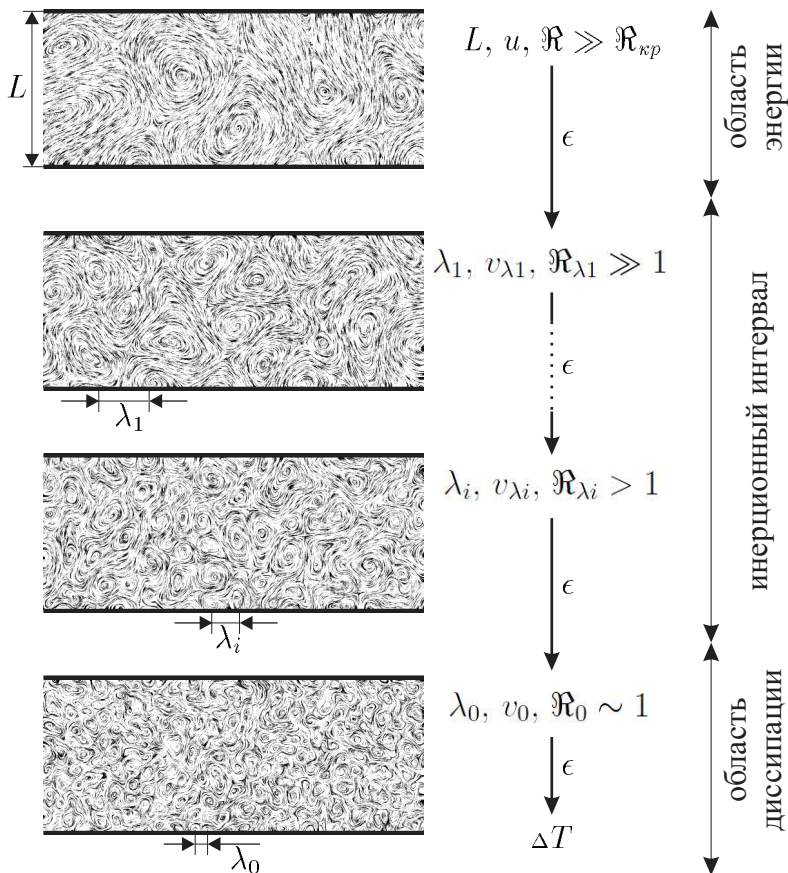


Рис. 2.20: Внутренняя структура турбулентности

масштабе вязкость становится существенной и происходит диссипация энергии.

Вихри меньших масштабов появляются в результате неустойчивости вихрей больших масштабов. Следовательно, в жидкости есть постоянный поток энергии от крупномасштабных к мелкомасштабным пульсациям. Энергия из масштабов $\lambda \sim L$ (область энергии) через промежуточные масштабы (инерционный интервал) идет в масштабы $\lambda \sim \lambda_0$ (область диссипации) и переходит там в тепло (рис. 2.20). Очевидно, при «стационарной» картине турбулентности в пульсации масштаба λ приходит такое же количество энергии ϵ (в единицу времени в расчете

на единицу массы), какое и уходит из них. Величину ϵ можно оценить из соображений размерности. Имеем

$$[\epsilon] = \frac{\text{эрг}}{\text{сек} \cdot \text{г}} = \frac{[u]^3}{[L]}. \quad (19.5)$$

Движение жидкости в пульсациях масштаба $\lambda \gg \lambda_0$ может характеризоваться только величинами λ , v_λ и ρ (вязкость играет роль только на внутреннем масштабе). Величину требуемой размерности из них можно составить единственным способом:

$$\epsilon \sim \frac{v_\lambda^3}{\lambda}. \quad (19.6)$$

Применяя эту оценку к внешнему масштабу, находим

$$\epsilon \sim \frac{u^3}{L}, \quad v_\lambda \sim (\lambda\epsilon)^{1/3} \sim u \left(\frac{\lambda}{L} \right)^{1/3} \quad (19.7)$$

(спектр Колмогорова — Обухова). Несмотря на нестрогий вывод, формула (19.7) дает правильную (подтверждаемую экспериментально) связь между масштабом вихря и величиной пульсационной скорости в нем.

Для внутреннего масштаба имеем

$$\Re_0 = \frac{\lambda_0 v_0}{\nu} \sim \frac{u \lambda_0^{4/3}}{\nu L^{1/3}} \sim \left(\frac{\lambda_0}{L} \right)^{4/3} \Re \sim 1, \quad (19.8)$$

откуда получаем оценку

$$\lambda_0 \sim L \Re^{-3/4}. \quad (19.9)$$

Из (19.7) следует, что в турбулентном потоке диссипация энергии не зависит от вязкости жидкости. Действительно, при уменьшении вязкости уменьшается внутренний масштаб турбулентности, что приводит к увеличению градиентов скорости.

2.20 Логарифмический профиль скоростей

Рассмотрим стационарное турбулентное течение несжимаемой жидкости по трубе (рис. 2.21) и найдем, как вблизи стенки ведет себя средняя (усредненная по времени) скорость потока $\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle$.

Пусть на единицу поверхности трубы со стороны жидкости действует в среднем сила трения σ , равная плотности потока x -компоненты

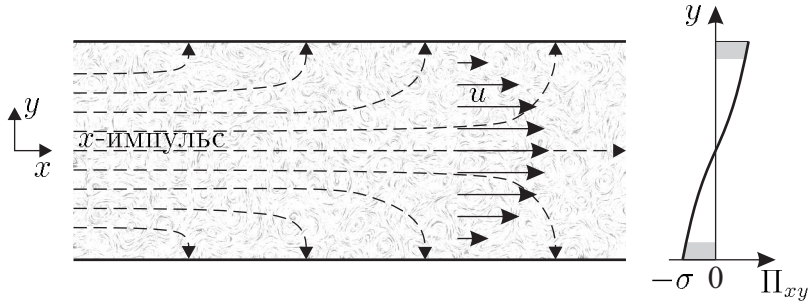


Рис. 2.21: К нахождению логарифмического профиля скоростей

импульса на стенку. Этот поток импульса обусловлен разностью давления на концах трубы. Характерный поперечный масштаб изменения Π_{xy} равен ширине трубы, поэтому вблизи стенки можно считать $|\Pi_{xy}| \approx \text{const} = \sigma$ (серые участки на рис. 2.21).

Средний поток импульса есть некоторая функция от градиента средней скорости du/dy , плотности жидкости ρ и расстояния до стенки y . Он не может напрямую зависеть ни от вязкости ν (при условии $y \gg \lambda_0$), ни от абсолютного значения скорости u . Но из du/dy , ρ и y можно построить величину требуемой размерности единственным способом, откуда получаем оценку

$$|\Pi_{xy}| \sim \rho y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (20.1)$$

Обращая эту формулу вблизи стенки, находим

$$\frac{du}{dy} \approx \frac{v_*}{\kappa y}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad (20.2)$$

где $\kappa \sim 1$ — численный коэффициент (постоянная Кармана). Интегрирование (20.2) дает

$$u \approx \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y}{C}. \quad (20.3)$$

Чтобы найти постоянную интегрирования C , нужно рассмотреть движение жидкости на очень малых расстояниях от стенки ($y \lesssim \lambda_0$), где начинает играть роль вязкость жидкости. Здесь

$$\sigma = -\Pi_{xy} = \sigma_{xy} = \eta \left\langle \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right\rangle = \rho \nu \frac{du}{dy}, \quad (20.4)$$

откуда

$$u = \frac{\sigma y}{\rho \nu} = \frac{v_*^2 y}{\nu}. \quad (20.5)$$

Формулы (20.3) и (20.5) должны переходить друг в друга на границе вязкой области. Эта граница ($y = y_0$) определяется из условия

$$\Re = \frac{uy_0}{\nu} \sim 1. \quad (20.6)$$

Подставляя (20.5) в (20.6), находим

$$y_0 \sim \frac{\nu}{u}, \quad u(y_0) \sim v_*, \quad \text{откуда} \quad C \sim \frac{\nu}{v_*}. \quad (20.7)$$

Более точные выражения для C и κ можно найти только из эксперимента:

$$u \approx \frac{v_*}{0.4} \ln \frac{v_* y}{0.13 \nu}. \quad (20.8)$$

Несмотря на нестрогий вывод, формулы (20.5) и (20.8) весьма точно описывают поведение средней скорости турбулентного потока вблизи стенки.

2.21 Достаточное условие отсутствия конвекции

При нагревании большинства жидкостей их плотность уменьшается. Поэтому если температура жидкости неодинакова по объему и холодные слои расположены над теплыми, то система может оказаться неустойчивой и самопроизвольно возникнет движение (конвекция), стремящееся перемешать жидкость и выровнять ее температуру.

Найдем, при каких условиях конвекция энергетически невыгодна. Пусть идеальная жидкость находится в механическом равновесии:

$$\vec{v} = 0, \quad \nabla p = \rho \vec{g}, \quad T = T(z). \quad (21.1)$$

Предположим, малый элемент жидкости переместился вверх из слоя «1» в слой «2» (рис. 2.22). Его плотность на новом месте стала $\rho(p_2, s_1)$, поскольку энтропия при движении идеальной жидкости сохраняется. Если плотность $\rho(p_2, s_2)$ окружающей жидкости окажется меньшей, то на элемент жидкости будет действовать сила (разность силы тяжести и силы Архимеда), стремящаяся вернуть его обратно. Таким образом, условие отсутствия конвекции имеет вид

$$\rho(p_2, s_2) < \rho(p_2, s_1) \quad (21.2)$$

или, в терминах удельного объема жидкости $V = 1/\rho$,

$$V(p_2, s_2) - V(p_2, s_1) > 0. \quad (21.3)$$

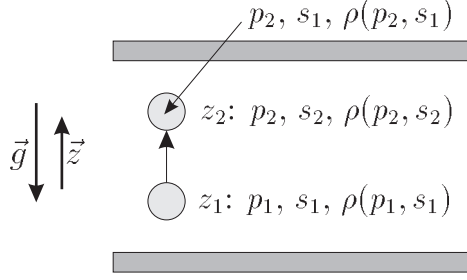


Рис. 2.22: К выводу условия отсутствия конвекции

Переходя к малым смещениям, получаем

$$\frac{V(p_2, s_2) - V(p_2, s_1)}{z_2 - z_1} \approx \left(\frac{dV}{ds} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \quad (21.4)$$

Производные в (21.4) выражаются через теплоемкость c_p и температурный коэффициент расширения

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dT} \right)_p. \quad (21.5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{ds} \right)_p &= \frac{\partial(Vp)}{\partial(sp)} = \frac{\partial(Vp)}{\partial(Tp)} \frac{\partial(Tp)}{\partial(sp)} = \\ &= \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dT} \right)_p \cdot \frac{1}{T} \left(\frac{dT}{ds} \right)_p \cdot VT = \frac{\beta VT}{c_p}, \end{aligned} \quad (21.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dz} &= \left(\frac{ds}{dp} \right)_T \frac{dp}{dz} + \left(\frac{ds}{dT} \right)_p \frac{dT}{dz} = -\rho g \frac{\partial(sT)}{\partial(pT)} \frac{\partial(Vp)}{\partial(sT)} + \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} = \\ &= \rho V \beta g + \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} = \beta g + \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz}. \end{aligned} \quad (21.7)$$

Обычно $\beta > 0$, так что выражение (21.6) положительно и система устойчива при условии $ds/dz > 0$. Итак, конвекция не может возникнуть при условии

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{\beta g T}{c_p}. \quad (21.8)$$

Отметим, что этим условием допускается медленное падение температуры по направлению снизу вверх (например, 1°C на 6.7 км для воды при 20°C и 1°C на 100 м для воздуха).

2.22 Свободная конвекция

При нарушении условия (21.8) конвекция не всегда возникает, поскольку в реальной жидкости есть диссипация, мешающая конвективному движению. Для определения необходимого и достаточного условия возникновения конвекции необходимо решить спектральную задачу, т. е. наложить на невозмущенное состояние жидкости малое возмущение и найти, когда это возмущение нарастает со временем. Проведем это на примере жидкости, заключенной между двумя плоскопараллельными пластинами (рис. 2.23).

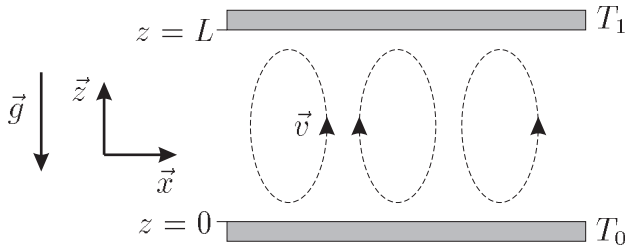


Рис. 2.23: Геометрия задачи о свободной конвекции

Пусть в жидкости возникло какое-то движение в плоскости (x, z) . Тогда все характеризующие жидкость величины можно представить как сумму трех слагаемых: значения величины при $z = 0$ (индекс «0»), зависящей только от z постоянной добавки (значок « δ ») и малого возмущения (штрих), вызванного движением жидкости, например:

$$p = p_0 + \delta p(z) + p'(x, z, t). \quad (22.1)$$

Будем считать, что относительное изменение параметров жидкости с высотой мало, а вызванные движением возмущения еще меньше ($p_0 \gg |\delta p| \gg |p'|$ и т. п.). Такая иерархия малостей позволяет нам линеаризовать уравнения вязкой жидкости по малости возмущения. Относительно же малого изменения параметров с высотой будем руководствоваться следующим правилом: содержащими « δ » слагаемыми можно пренебрегать, только если они складываются с заведомо большими слагаемыми.

Из уравнения непрерывности (1.1) имеем

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \nabla)(\delta \rho + \rho') \right), \quad (22.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} \sim \frac{\rho'}{\rho_0 \tau} + \frac{v(\delta\rho + \rho')}{\rho_0 L}, \quad (22.3)$$

где τ и L — временной и пространственный масштабы задачи. Слагаемые в правой части (22.3) малы по сравнению с отношением v/L (оценкой дивергенции $\operatorname{div} \vec{v}$): малость второго слагаемого очевидна, малость же первого будет обоснована позже. Следовательно, можно считать

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (22.4)$$

Несжимаемость жидкости (22.4) позволяет пользоваться уравнениями теплопереноса и движения вязкой жидкости в их простейших формах:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2, \quad (22.5)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (22.6)$$

Определим сначала невозмущенное состояние системы. В отсутствие возмущений ($\partial/\partial t = 0$, $\vec{v} = 0$) уравнение (22.5) принимает вид

$$\Delta T = \frac{d^2 \delta T}{dz^2} = 0, \quad (22.7)$$

откуда следует линейность невозмущенного распределения температуры:

$$T = T_0 + \delta T = T_0 + \frac{z(T_1 - T_0)}{L}. \quad (22.8)$$

Из (22.6) находим невозмущенное давление:

$$\frac{d\delta p}{dz} = -(\rho_0 + \delta\rho)g \approx -\rho_0 g, \quad (22.9)$$

$$p = p_0 + \delta p \approx p_0 - \rho_0 g z. \quad (22.10)$$

Зная изменение с высотой давления и температуры, можно найти изменение плотности жидкости:

$$\delta\rho = \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_T \delta p + \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_p \delta T. \quad (22.11)$$

По порядку величины

$$\left(\frac{d\rho}{dp} \right)_T \delta p \sim \frac{\rho g L}{c_s^2}, \quad \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_p \delta T \sim \rho \beta (T_1 - T_0). \quad (22.12)$$

Будем считать, что при всплывании жидкости ее плотность меняется, главным образом, за счет изменения температуры, т. е. второе слагаемое в правой части (22.11) намного больше первого. Это справедливо при условии

$$\nabla T \gg \frac{g}{\beta c_s^2}. \quad (22.13)$$

Тогда

$$\delta\rho = \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_p \delta T = -\rho_0 \beta \delta T, \quad (22.14)$$

и аналогично

$$\rho' = -\rho_0 \beta T'. \quad (22.15)$$

В первом порядке по амплитуде возмущения из уравнений (22.5) и (22.6) имеем

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v_z \frac{d\delta T}{dz} = \chi \Delta T', \quad (22.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{\nabla(\delta p + p')}{\rho_0 + \delta\rho + \rho'} + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} = \\ &= -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\rho' \nabla \delta p}{\rho_0^2} + \nu \Delta \vec{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - \vec{g} \beta T' + \nu \Delta \vec{v}. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Слагаемые с $\delta\rho$ в правой части (22.17) опущены, так как они заведомо малы на фоне слагаемых с ρ_0 . Слагаемое же с δT в левой части (22.16) необходимо оставить, так как рядом с ним нет заведомо больших слагаемых.

В нашей задаче удобно ввести функцию тока ψ , такую что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (22.18)$$

Эта замена часто используется при описании двумерных бездивергентных течений. Уравнение (22.4) при этом удовлетворяется тождественно, а (22.16) и (22.17) принимают вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi \Delta \right) T' = \frac{T_1 - T_0}{L} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (22.19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (22.20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \beta T'. \quad (22.21)$$

Решаем эту систему уравнений последовательным исключением неизвестных. Дифференцируя (22.20) и (22.21) по z и x соответственно, а затем складывая их, исключаем p' :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Delta\psi = -g\beta \frac{\partial T'}{\partial x}. \quad (22.22)$$

Дифференцируя (22.22) по x и пользуясь (22.19), исключаем ψ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi \Delta\right) \Delta T' = \frac{g\beta(T_0 - T_1)}{L} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}. \quad (22.23)$$

Поскольку рассматриваемая физическая система однородна по x и стационарна, то решение уравнения (22.23) можно искать в виде

$$T' \propto e^{\lambda t + i k x}. \quad (22.24)$$

Зависимость же от z в общем случае не будет экспоненциальной. Чтобы ее найти, нужно решить дифференциальное уравнение шестого порядка по z с надлежащими граничными условиями при $z = 0$ и $z = L$:

$$T' = 0, \quad (22.25)$$

$$v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ik\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} = 0; \quad (22.26)$$

в качестве же третьей пары граничных условий можно выбрать либо

$$v_x = 0, \quad (22.27)$$

что соответствует «прилипанию» жидкости, либо

$$\sigma_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^4 T'}{\partial z^4} = 0, \quad (22.28)$$

что соответствует «скользящим» границам. Условие (22.27) чаще реализуется на практике, но условие (22.28) приводит к более простому решению:

$$T' = A \sin \frac{\pi n z}{L} e^{\lambda t + i k x}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (22.29)$$

поэтому здесь выбираем его. Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция вида (22.29) удовлетворяет условиям (22.25), (22.26) и (22.28).

Подстановка (22.29) в (22.23) дает связь между k , λ и n :

$$(\lambda + \nu b)(\lambda + \chi b)b = \frac{g\beta k^2(T_0 - T_1)}{L}, \quad (22.30)$$

$$b = -\frac{\Delta T'}{T'} = k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \quad (22.31)$$

откуда

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{b(\nu + \chi)}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2(\nu + \chi)^2}{4} - \nu\chi b^2 + \frac{g\beta k^2(T_0 - T_1)}{bL}} = \\ &= -\frac{b(\nu + \chi)}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2(\nu - \chi)^2}{4} + \frac{g\beta k^2(T_0 - T_1)}{bL}}.\end{aligned}\quad (22.32)$$

Жидкость будет неустойчивой и возникнет конвективное движение, если при каких-либо k и n величина λ окажется положительной. Это возможно при условии

$$\frac{g\beta k^2(T_0 - T_1)}{bL} > \frac{b^2(\nu + \chi)^2}{4} - \frac{b^2(\nu - \chi)^2}{4} = b^2\nu\chi \quad (22.33)$$

или

$$R = \frac{g\beta(T_0 - T_1)L^3}{\nu\chi} > \frac{b^3L^4}{k^2} = \frac{(k^2L^2 + \pi^2n^2)^3}{k^2L^2}. \quad (22.34)$$

Безразмерную величину R называют числом Рэлея. В задаче о самопроизвольном возникновении конвекции оно играет ту же роль, что и число Рейнольдса в задаче о турбулентности.

Стоящая в правой части (22.34) безразмерная функция имеет абсолютный минимум при $n = 1$, $kL = \pi/\sqrt{2}$, что дает следующий критерий возникновения конвекции:

$$R > R_{кр} = \frac{27\pi^4}{4} \approx 658. \quad (22.35)$$

При выборе граничных условий (22.27) критерий оказывается еще более жестким:

$$R > R_{кр} \approx 1708. \quad (22.36)$$

Интересно отметить, что здесь, как и в задаче о возникновении турбулентности, реализуется редкая в физике ситуация, когда безразмерные коэффициенты складываются в большое число.

Как видно из формулы (22.32), на границе между устойчивым и неустойчивым состояниями $\partial/\partial t = \lambda = 0$, чем и оправдывается пренебрежение производной по времени в (22.2).

Если число Рэлея лишь ненамного превышает критическое значение, в системе могут нарастать только возмущения с $|\vec{k}| \approx \pi/(L\sqrt{2})$ и $n = 1$. В зависимости от малых эффектов, не учтенных в рамках нашей модели, могут нарастать либо одна (рис. 2.24,а), либо сразу несколько неустойчивых мод, различающихся направлением вектора \vec{k} (рис. 2.24,б,в). В экспериментах чаще всего реализуется гексагональная структура (ячейки Бенара, рис. 2.24,г).

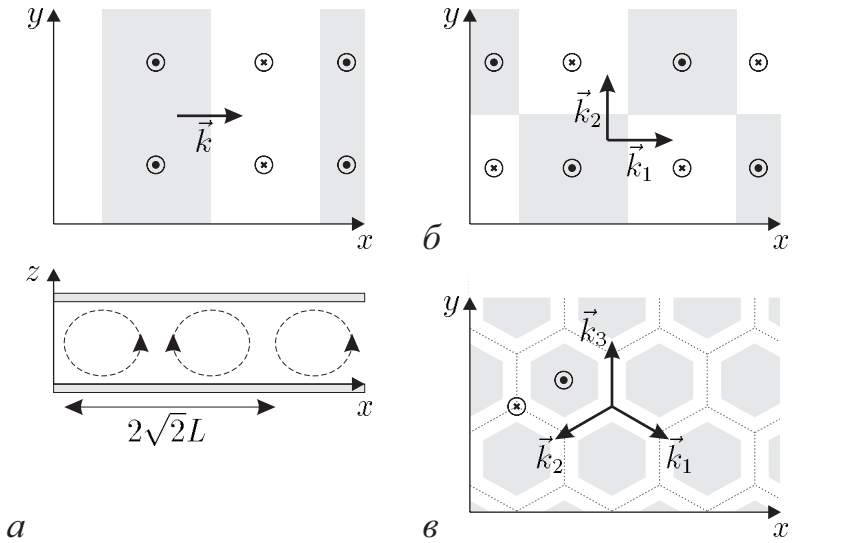


Рис. 2.24: Движение жидкости при слабой конвекции: одна (а), две (б) и три (в) неустойчивые моды

2.23 Мягкое и жесткое возбуждение конвекции

Определим качественную зависимость установившейся конвекции от приложенной разности температур. Интенсивность конвективного движения удобно характеризовать усредненной по объему кинетической энергией жидкости:

$$W = \left\langle \frac{\rho v^2}{2} \right\rangle. \quad (23.1)$$

Предположим, в жидкости появился слабо надкритический градиент температуры: $0 < R - R_{кр} \ll R_{кр}$. Кинетическая энергия жидкости будет постепенно возрастать:

$$\frac{dW}{dt} = f(W) = AW + BW^2 + CW^3 + \dots, \quad (23.2)$$

где $f(W)$ — некоторая функция, которую при малых W можно разложить в ряд Тейлора. Коэффициенты A , B и C здесь будут зависеть от разности температур, геометрии задачи и свойств жидкости. При

малых v имеем

$$W \approx \left\langle \frac{\rho_0 v^2}{2} \right\rangle \propto e^{2\lambda t} \Rightarrow A = 2\lambda > 0. \quad (23.3)$$

Установившееся состояние системы ($dW/dt = 0$) определяется знаком коэффициента B . Возможны два случая. Если $B < 0$, то рост энергии прекращается, когда первый член ряда (23.2) уравнивается вторым:

$$2\lambda W + BW^2 = 0 \Rightarrow W = -\frac{2\lambda}{B}. \quad (23.4)$$

Этот случай соответствует мягкому возбуждению конвекции (рис. 2.25, *a*), при котором энергия жидкости увеличивается непрерывно по мере увеличения разности температур.

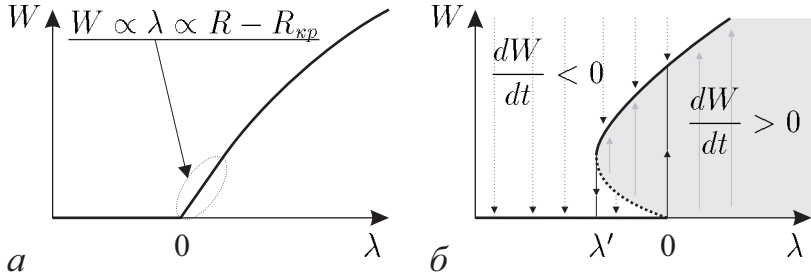


Рис. 2.25: Мягкий (*a*) и жесткий (*б*) режимы возбуждения конвекции. Стрелками показано направление изменения энергии со временем

Если $B \geq 0$, то для нахождения установившегося движения нужно учесть следующие члены ряда (23.2). Пусть для определенности $C < 0$. Тогда равновесная энергия определяется условием

$$2\lambda W + BW^2 + CW^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{CW^2}{2} - \frac{BW}{2}. \quad (23.5)$$

Это — жесткое возбуждение конвекции (рис. 2.25, *б*), при котором возмущение при $R > R_{кр}$ скачком возрастает до конечной амплитуды. Если жидкость находится в состоянии, попадающем в серую область на рис. 2.25, *б*, то ее энергия увеличивается, иначе — уменьшается. Следовательно, в некотором интервале $(\lambda', 0)$ состояние жидкости метастабильно, т. е. устойчиво по отношению к малым, но неустойчиво по отношению к большим возмущениям.

Отметим, что наличие разных режимов возбуждения есть общее свойство неустойчивостей. В частности, при возникновении турбулентности также возможны мягкий и жесткий режимы.

2.24 Конвективный перенос тепла

В отсутствие конвекции теплоперенос в жидкости определяется исключительно теплопроводностью, и для потока энергии можно записать

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \propto T_0 - T_1 \propto R. \quad (24.1)$$

С появлением конвекции к этому выражению добавляется слагаемое

$$\Delta q = \langle \rho c_p T' v_z \rangle, \quad (24.2)$$

представляющее собой дополнительную тепловую энергию ($\rho c_p T'$ в расчете на единицу объема), поток которой усредняется по горизонтальному сечению жидкости. Формулу (24.2) можно также строго получить из выражения для полного потока энергии (13.1). Поскольку

$$\Delta q \propto T' v \propto v^2 \propto W, \quad (24.3)$$

конвективная добавка к потоку тепла оказывается пропорциональной кинетической энергии жидкости (рис. 2.26).

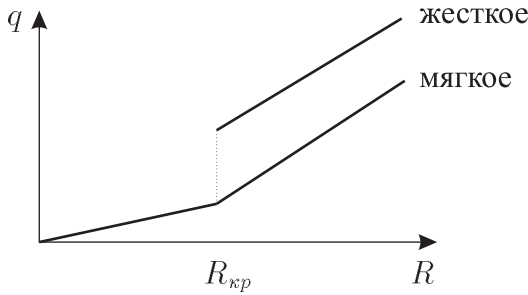


Рис. 2.26: Увеличение теплопереноса с ростом температуры при мягком и жестком возбуждении конвекции

Глава 3

Теория упругости

3.1 Тензор деформации

Значительную часть теории упругости составляет механика твердых тел и, в частности, изучение деформаций и возникающих при этом механических напряжений.

Пусть в результате деформации элемент тела, исходно имевший координаты \vec{r} , сместился на расстояние \vec{u} (вектор смещения) и оказался в точке

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r}). \quad (1.1)$$

Если до деформирования радиус-вектор между какими-либо близкими точками тела был $d\vec{x}$, а расстояние между ними равнялось $dl = \sqrt{dx_\alpha dx_\alpha}$ (по повторяющимся индексам производится суммирование), то после деформирования оно стало dl' , причем

$$\begin{aligned} (dl')^2 &= dx'_\alpha dx'_\alpha = \left(dx_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta \right)^2 = \\ &= dx_\alpha dx_\alpha + 2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma} dx_\beta dx_\gamma = dl^2 + 2u_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right) \quad (1.3)$$

— тензор деформации. Всюду далее будут рассматриваться только малые деформации, для которых

$$\left| \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right| \ll 1, \quad u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right). \quad (1.4)$$

По определению тензор деформации симметричен. Следовательно, его можно привести к главным осям, причем в разных точках тела направление главных осей может быть различным. Это значит, что любую деформацию можно представить как сжатие или растяжение по трем взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 3.1, а).

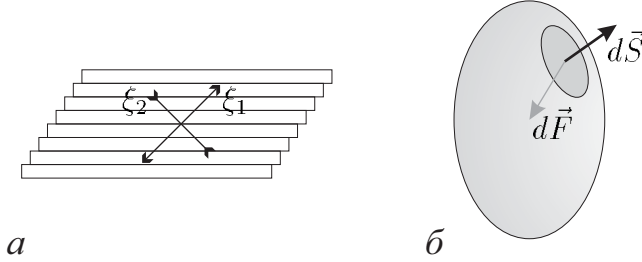


Рис. 3.1: Деформация сдвига как сжатие и растяжение по главным осям (а); к определению тензора напряжений (б)

Обозначим главные оси ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 . Если две близкие точки лежат на главной оси, то

$$d\xi'_i = \sqrt{1 + 2u_{ii}} d\xi_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

При деформации изменяется объем тела:

$$\begin{aligned} dV' &= d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = \sqrt{(1 + 2u_{11})(1 + 2u_{22})(1 + 2u_{33})} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \approx \\ &\approx (1 + u_{11} + u_{22} + u_{33}) dV, \end{aligned} \quad (1.6)$$

причем относительное изменение объема равно следу тензора деформации:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = u_{\alpha\alpha} = \operatorname{div} \vec{u}. \quad (1.7)$$

Тензор деформации можно тождественно переписать в виде

$$u_{\alpha\beta} = \left(u_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{3} u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.8)$$

Из такой записи видно, что любую деформацию можно представить как совокупность не изменяющей объем деформации сдвига (первое слагаемое в правой части (1.8)) и всестороннего сжатия (второе слагаемое).

3.2 Тензор напряжений

Тензор напряжений характеризует внутренние силы, возникающие между частями деформированного тела.

Выделим внутри тела некоторый объем. На этот объем через единичный элемент его поверхности $d\vec{S}$ действует упругая сила $d\vec{F}$ (рис. 3.1, б). По определению

$$dF_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} dS_\beta, \quad (2.1)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор напряжений. Можно показать, что он симметричен. Как видно, в теории упругости определение тензора напряжений такое же, как и в гидродинамике — это «силовая» составляющая тензора плотности потока импульса, взятая с обратным знаком. В частности, при всестороннем сжатии тела давлением p

$$\sigma_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta}. \quad (2.2)$$

Упругие силы по своей природе суть силы поверхностные, т. е. на выделенный объем они действуют только через границу этого объема. Однако можно представить их и в форме объемной силы. Действительно, для полной силы, действующей на объем V , имеем

$$F_\alpha = \int_S \sigma_{\alpha\beta} dS_\beta = \int_V \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV. \quad (2.3)$$

Следовательно, действие упругих сил эквивалентно действию силы

$$f_\alpha = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \quad (2.4)$$

на единицу объема тела.

Уравнение равновесия деформированного тела имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho g_\alpha = 0, \quad (2.5)$$

где $\rho \vec{g}$ — внешняя объемная сила. Граничными условиями для уравнения (2.5) будут

$$P_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} n_\beta, \quad (2.6)$$

где \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности тела, а \vec{P} — внешняя сила, действующая на единицу поверхности.

3.3 Закон Гука

В случае малых деформаций связь между тензором напряжений и тензором деформации можно считать линейной. Общий вид линейной связи между двумя тензорами 2-го ранга такой:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma\delta}, \quad (3.1)$$

где $\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — некий тензор 4-го ранга, зависящий только от свойств среды. В случае изотропной среды общий вид этого тензора можно построить из соображений тензорной размерности:

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = a\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + b\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + c\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} \quad (3.2)$$

(a , b и c здесь постоянные коэффициенты), откуда

$$\sigma_{\alpha\beta} = a\delta_{\alpha\beta}u_{\gamma\gamma} + (b+c)u_{\alpha\beta}. \quad (3.3)$$

Таким образом, упругие свойства изотропной среды характеризуются двумя независимыми коэффициентами.

Связь между $\sigma_{\alpha\beta}$ и $u_{\alpha\beta}$ обычно записывают в форме

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \left(u_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}u_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} \right) + Ku_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

(закон Гука). Коэффициент μ называют модулем сдвига, коэффициент K — модулем всестороннего сжатия. Формулу (3.4) легко обратить. Поскольку

$$\sigma_{\gamma\gamma} = 3Ku_{\gamma\gamma}, \quad (3.5)$$

имеем

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{9K}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} \right). \quad (3.6)$$

3.4 Простые деформации

Простыми называются деформации, при которых в тензоре напряжений отлична от нуля только одна компонента. Примером простой деформации может служить сжатие прямоугольного бруска двумя параллельными плоскостями (рис. 3.2).

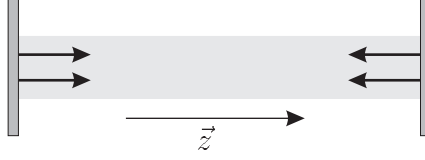


Рис. 3.2: Пример простой деформации

Пусть для определенности отлична от нуля только компонента σ_{zz} . Тогда в соответствии с (3.6)

$$u_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{9K} + \frac{\sigma_{zz}}{3\mu} \equiv \frac{\sigma_{zz}}{E}, \quad (4.1)$$

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma_{zz}}{9K} - \frac{\sigma_{zz}}{6\mu} \equiv -\sigma u_{zz}, \quad (4.2)$$

$$u_{xy} = u_{yx} = u_{xz} = u_{zx} = u_{yz} = u_{zy} = 0, \quad (4.3)$$

где, по определению,

$$E = \frac{9K\mu}{\mu + 3K} \quad (4.4)$$

— модуль Юнга,

$$\sigma = -\frac{2\mu - 3K}{18K\mu} E = \frac{3K - 2\mu}{2(\mu + 3K)} \quad (4.5)$$

— коэффициент Пуассона. Для описания простых деформаций пара коэффициентов E и σ оказывается более удобной. Сложением или вычитанием (4.1) и (4.2) легко получаются обратные формулы:

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{E} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{3K} = \frac{1}{E} - \frac{2\sigma}{E} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}. \quad (4.7)$$

Отметим, что для жидкости, если ее рассматривать как упругую среду,

$$\mu = 0, \quad K > 0, \quad E = 0, \quad \sigma = 1/2. \quad (4.8)$$

3.5 Энергия деформации

В отличие от жидкостей и газов, степень сжатия упругой среды нельзя характеризовать скалярным давлением. Вместо давления появляется

тензорная величина $\sigma_{\alpha\beta}$. Соответственно, изменяются выражения для термодинамических потенциалов.

Найдем изменение внутренней энергии элемента среды при его деформации. Для этого вычислим работу деформирующей внешней силы \vec{F} :

$$\delta A = \oint \delta \vec{u} d\vec{F} = \oint \delta u_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta} dS_{\beta}, \quad (5.1)$$

где $\delta \vec{u}$ — изменение вектора смещения, а интегрирование ведется по поверхности рассматриваемого объема среды. Перейдем к интегрированию по объему и будем считать, что деформация происходит медленно, и в любой момент времени любая часть среды находится почти в равновесии. Тогда

$$\begin{aligned} \delta A &= \int \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \delta u_{\alpha} dV = \int \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \delta u_{\alpha} dV + \int \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \delta u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} dV = \\ &= \int \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \delta u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} dV = \int \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{2} \left(\frac{\partial \delta u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \delta u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) dV = \\ &= \int \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha\beta} dV. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Таким образом, изменение внутренней энергии единицы объема равно

$$\delta \varepsilon = T \delta s + \delta A = T \delta s + \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha\beta}. \quad (5.3)$$

Изменение энтропии вещества при его деформации (δs) определить сложно, поэтому в качестве энергетической характеристики деформации удобнее пользоваться свободной энергией

$$F = \varepsilon - Ts, \quad \delta F = -s \delta T + \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha\beta}. \quad (5.4)$$

При помощи закона Гука упругую добавку к энергии можно представить в виде полного дифференциала:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha\beta} &= \left[2\mu \left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) + K u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \delta u_{\alpha\beta} = \\ &= \delta \left[\mu \left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3} \delta_{\alpha\beta} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{\gamma\gamma}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таким образом, энергия деформации равна

$$F_{def} = \mu \left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3} \delta_{\alpha\beta} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{\gamma\gamma}^2. \quad (5.6)$$

Если деформация происходит при постоянной температуре (что для медленных деформаций часто имеет место), то изменение свободной энергии среды равно энергии деформации.

В отсутствие деформации энергия должна быть минимальной. Следовательно,

$$\mu \geq 0, \quad K \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E \geq 0, \quad \sigma \leq 1/2. \quad (5.7)$$

Заметим также, что обычно $\sigma > 0$, т. е. подавляющее большинство веществ при растяжении в одном направлении сжимается в двух других.

3.6 Звук в твердом теле

Если на некоторый малый объем среды действуют нескомпенсированные упругие силы, то этот объем будет ускоряться по закону

$$\rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[2\mu \left(u_{\alpha\beta} - \frac{u_{\gamma\gamma}}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) + K u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right]. \quad (6.1)$$

Поскольку

$$\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{1}{2} \Delta u_\alpha + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \operatorname{div} \vec{u}, \quad (6.2)$$

имеем

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= \mu \Delta \vec{u} + \mu \nabla \operatorname{div} \vec{u} - \frac{2\mu}{3} \nabla \operatorname{div} \vec{u} + K \nabla \operatorname{div} \vec{u} = \\ &= \mu \Delta \vec{u} + \left(\frac{\mu}{3} + K \right) \nabla \operatorname{div} \vec{u}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Вектор смещения всегда можно представить в виде

$$\vec{u} = \vec{u}_t + \vec{u}_l, \quad \operatorname{div} \vec{u}_t = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{u}_l = 0. \quad (6.4)$$

Взяв дивергенцию уравнения (6.3), получаем уравнение на \vec{u}_l :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \operatorname{div} \vec{u}_l}{\partial t^2} &= \mu \Delta \operatorname{div} \vec{u}_l + \left(\frac{\mu}{3} + K \right) \Delta \operatorname{div} \vec{u}_l, \\ \operatorname{div} \left\{ \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - \left(\frac{4\mu}{3} + K \right) \Delta \vec{u}_l \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Поскольку ротор выражения в фигурных скобках также равен нулю, это выражение является гармонической функцией координат. Так как

в отсутствие деформаций (при $\vec{u}_l \equiv 0$) среда находится в покое, эта функция равна нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = c_l^2 \Delta \vec{u}_l, \quad c_l^2 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{4\mu}{3} + K \right). \quad (6.6)$$

Мы получили волновое уравнение, описывающее распространение продольного звука в упругой среде. Величина c_l называется продольной скоростью звука. В случае плоской монохроматической волны

$$\text{rot } \vec{u}_l = [i\vec{k} \times \vec{u}_l] = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_l \parallel \vec{k}, \quad (6.7)$$

отсюда и название.

Аналогично, взяв ротор (6.3), получаем волновое уравнение для поперечного звука:

$$\rho \frac{\partial^2 \text{rot } \vec{u}_t}{\partial t^2} = \mu \Delta \text{rot } \vec{u}_t, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = c_t^2 \Delta \vec{u}_t, \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (6.9)$$

где c_t — поперечная скорость звука. В плоской поперечной волне $\vec{u}_t \perp \vec{k}$. Заметим, что в силу (5.7) всегда

$$c_l > c_t. \quad (6.10)$$

3.7 Продольные колебания стержней

Скорость звуковой волны в ограниченном твердом теле может оказаться иной, нежели в неограниченном. Покажем это на примере продольной звуковой волны в тонком длинном стержне (рис. 3.3).

Пусть длина волны λ намного превышает поперечный размер стержня a , и на стержень с боков не действуют внешние силы:

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = 0 \quad \text{на границе.} \quad (7.1)$$

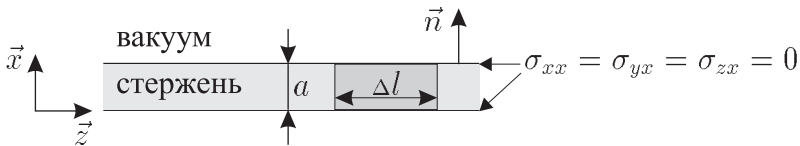


Рис. 3.3: К выводу продольных колебаний тонкого стержня

Направим ось \vec{z} вдоль стержня. На границе стержня в точках, где $\vec{n} \parallel \vec{x}$, компоненты σ_{xx} , σ_{yx} и σ_{zx} тензора напряжений в силу (7.1) обращаются в ноль. Но поскольку стержень тонкий ($a \ll \lambda$), то внутри него эти компоненты не успевают вырасти до большой величины и их всюду можно считать малыми. Аналогичными рассуждениями можно заключить, что внутри стержня малы все компоненты тензора напряжений, за исключением σ_{zz} . Таким образом, деформацию тонкого стержня при прохождении по нему продольной волны можно считать простой.

В случае простой деформации уравнение движения короткого участка стержня легко преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \rho S \Delta l \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= S (\sigma_{zz}(z + \Delta l) - \sigma_{zz}(z)) \approx S \Delta l \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \\ &= S \Delta l E \frac{\partial u_{zz}}{\partial z} = S \Delta l E \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \quad (7.2) \end{aligned}$$

где ρ — плотность стержня, S и Δl — сечение и длина рассматриваемого кусочка (рис. 3.3). Из (7.2) получается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \quad (7.3)$$

со скоростью звука, равной $\sqrt{E/\rho}$. Можно показать, что эта скорость звука всегда меньше c_l . Этот факт объясняется тем, что тонкий стержень при сжатии в продольном направлении расширяется в поперечном. Поэтому при одинаковой степени сжатия в стержне возникают меньшие напряжения, нежели в неограниченной среде.

3.8 Изгиб стержней

Найдем деформации и напряжения, возникающие в тонком длинном стержне при его слабом изгибе. Стержень можно считать тонким, если его толщина a мала с характерным масштабом изгиба λ (рис. 3.4, a). Для определенности будем считать, что изгиб происходит в одной плоскости под действием поперечной силы \vec{F} , приложенной к одному из концов (для других способов изгиба аналогичным способом получаются те же формулы).

Направим ось \vec{z} вдоль стержня, а ось \vec{x} расположим в плоскости изгиба (при слабом изгибе различие направлений \vec{x} и \vec{z} в разных сечениях стержня можно пренебречь). Рассуждениями, аналогичными проведенным в разделе 3.7, можно заключить, что деформация изогнутого стержня будет простой (только $\sigma_{zz} \neq 0$). Более строго это утверждение

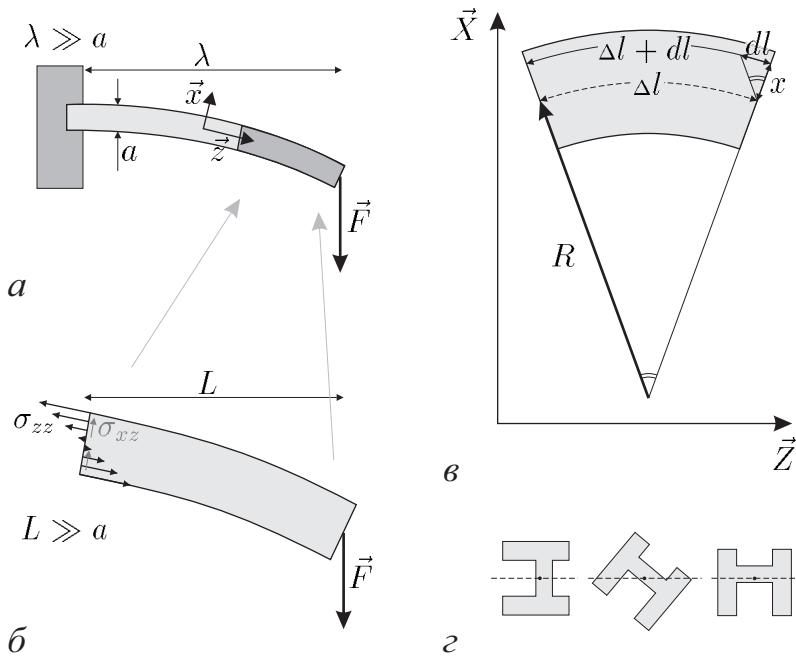


Рис. 3.4: Геометрия задачи об изгибе стержня (а); к оценке σ_{xz} (б); к вычислению деформации стержня (в); положение нейтральной поверхности при различной ориентации стержня (г)

получается из условий равновесия стержня. Например, для заштрихованного участка на рис. 3.4, а, б имеем

$$y\text{-момент:} \quad FL + \int \sigma_{zz} x dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} \sim \frac{FL}{a^3}, \quad (8.1)$$

$$x\text{-сила:} \quad -F + \int \sigma_{xz} dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xz} \sim \frac{F}{a^2}, \quad (8.2)$$

где интегрирование ведется по сечению стержня, откуда

$$\sigma_{xz} \sim \frac{a}{L} \sigma_{zz} \ll \sigma_{zz}. \quad (8.3)$$

При рассматриваемом изгибе верхняя часть стержня растягивается, а нижняя сжимается. Области растяжения и сжатия разделяет нейтральная поверхность; будем отсчитывать расстояние x от нее

(рис. 3.4, в). Участок стержня, отстоящий на расстояние x от нейтральной поверхности и имевший до изгиба длину Δl , вследствие изгиба удлиняется на величину

$$dl = \frac{x}{R} \Delta l, \quad (8.4)$$

где R — локальный радиус кривизны нейтральной поверхности. Отсюда находим ненулевые компоненты тензоров деформации и напряжений:

$$u_{zz} = \frac{dl}{\Delta l} = \frac{x}{R}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}, \quad \sigma_{zz} = E \frac{x}{R}. \quad (8.5)$$

Положение нейтральной плоскости находится из условия равновесия стержня:

$$z\text{-сила:} \quad \int \sigma_{zz} dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \int x dS = 0, \quad (8.6)$$

т. е. нейтральная плоскость проходит через центр тяжести сечения (рис. 3.4, г).

Изгиб стержня как целого удобно описывать координатой $X(Z)$ его нейтральной поверхности в некоторой «внешней» системе (X, Y, Z) с осью \vec{Z} , направленной вдоль стержня (рис. 3.4, в). Обозначая дифференцирование по Z штрихом, для слабого изгиба имеем

$$\frac{1}{R} = -X''(Z), \quad u_{zz} = -xX'', \quad \sigma_{zz} = -ExX''. \quad (8.7)$$

Формулы (8.7) легко обобщаются на случай трехмерного изгиба:

$$u_{zz} = -xX'' - yY'', \quad \sigma_{zz} = -ExX'' - EyY'', \quad (8.8)$$

где координаты x и y отсчитываются, соответственно, в направлениях \vec{X} и \vec{Y} от линии, проходящей по центру тяжести сечения (нейтральной линии).

Как видно из (8.1), способность стержня сопротивляться изгибу характеризуется моментом упругих сил. Найдем эту величину. По определению момента силы,

$$M_x = \int y \sigma_{zz} dS = -EI_{xy}X'' - EI_{yy}Y'', \quad (8.9)$$

$$M_y = - \int x \sigma_{zz} dS = EI_{xx}X'' + EI_{xy}Y'', \quad (8.10)$$

где

$$I_{\alpha\beta} = \int r_\alpha r_\beta dS \quad (8.11)$$

— тензор «момента инерции» сечения. Если направление осей \vec{X} и \vec{Y} совпадает с направлением главных осей сечения, то выражения для моментов упрощаются:

$$M_x = -EI_{yy}Y'', \quad M_y = EI_{xx}X''. \quad (8.12)$$

Из формул (8.9–8.12) ясно, почему для упрочнения стержней их профиль делается сложным (рис. 3.4, з): чтобы при заданной площади сечения получить больший момент инерции.

3.9 Поперечные колебания стержней

Пусть теперь стержень не находится в равновесии и может колебаться в поперечном направлении. Найдем закон малых поперечных колебаний в плоскости (\vec{Y}, \vec{Z}) (рис. 3.5, а). Будем считать, что на стержень с боков не действует внешняя сила. Тогда уравнение движения малого элемента стержня примет вид

$$\rho S \Delta l \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{F}(l + \Delta l) - \vec{F}(l), \quad (9.1)$$

где S — площадь сечения, ρ — плотность стержня, Δl — длина рассматриваемого кусочка, l — координата, отсчитываемая вдоль стержня, \vec{F} — полная упругая сила, действующая в поперечном сечении «справа налево» (рис. 3.5, а). Переходя к бесконечно малым Δl , получаем

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial l} = \rho S \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (9.2)$$

Силу \vec{F} можно разложить на продольную и поперечную компоненты:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}, \quad (9.3)$$

где

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{n} \int \sigma_{yz} dS, \quad \vec{F}_{\parallel} = \vec{\tau} \int \sigma_{zz} dS \equiv T \vec{\tau}, \quad (9.4)$$

а \vec{n} и $\vec{\tau}$ — единичные векторы в направлениях нейтральной линии и нормали к ней соответственно (рис. 3.5, б). Величина T (натяжение стержня) не зависит от l , поскольку в противном случае нескомпенсированная продольная сила вызвала бы продольное движение стержня. Будем считать натяжение стержня заданным.

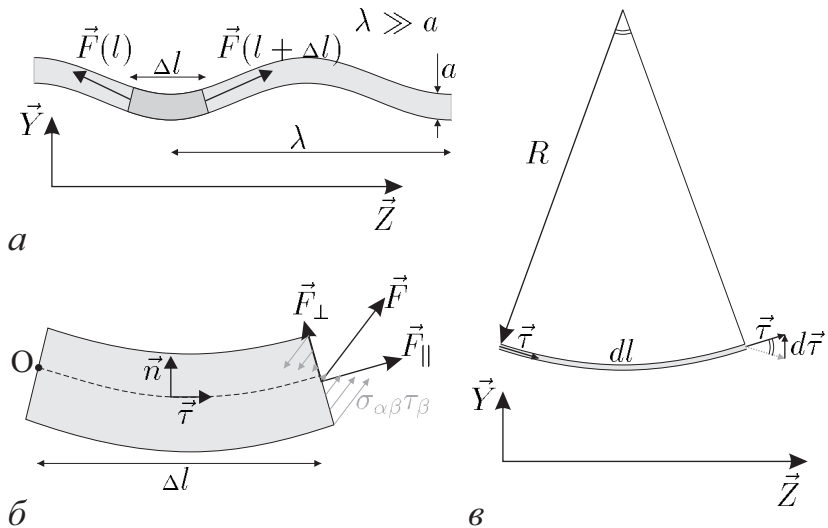


Рис. 3.5: Геометрия задачи о поперечных колебаниях стержня (а); действующие в сечении стержня силы (б); к нахождению производной $d\vec{\tau}/dl$ (в)

Заметим, что сила \vec{F} появляется вследствие отличия деформации от простой и наличия ненулевой тянущей силы. Оба эти эффекта являются в каком-то смысле малыми по сравнению с действием продольных напряжений, создающих момент упругих сил:

$$|\vec{F}_\perp| \ll |\sigma_{zz}|a^2, \quad |T| \ll |\sigma_{zz}|a^2. \quad (9.5)$$

Поэтому в предыдущем разделе мы пренебрегали силой \vec{F} и считали деформацию простой. Сейчас же нашей целью является анализ более тонких эффектов, поэтому мы учитываем малую силу \vec{F} и малое отличие направлений вектора $\vec{\tau}$ и оси \vec{Z} .

Обозначим $\vec{M}(l)$ момент упругих сил (8.9), (8.10), действующих «справа налево» в заданном сечении стержня (рис. 3.5, б). Поскольку при малых поперечных колебаниях движение элемента стержня с большой точностью является поступательным, полный момент сил (например, относительно точки «О»), приложенных к рассматриваемому ку-

сочку, должен равняться нулю:

$$\begin{aligned}\vec{M}(l + \Delta l) - \vec{M}(l) + \left[\vec{\tau} \Delta l \times \vec{F}(l + \Delta l) \right] &= 0, \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial l} + \left[\vec{\tau} \times \vec{F} \right] &= 0,\end{aligned}\tag{9.6}$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial l^2} + \left[\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial l} \times \vec{F} \right] + \left[\vec{\tau} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial l} \right] = 0.\tag{9.7}$$

Для вычисления производной $\partial \vec{\tau} / \partial l$ замечаем, что при смещении вдоль стержня на величину dl вектор $\vec{\tau}$ изменяется на величину $d\vec{\tau} \parallel \vec{n}$ (рис. 3.5, в). Из геометрии следует, что

$$\frac{dl}{R} = \frac{d\tau}{|\tau|} \Rightarrow \frac{d\tau}{dl} = \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial l} = \frac{\vec{n}}{R}.\tag{9.8}$$

Подставляя (8.9), (9.8) и (9.2) в x -компоненту (9.8) и замечая, что

$$u_y = Y, \quad \frac{1}{R} = Y'',\tag{9.9}$$

получаем

$$\begin{aligned}-EI_{yy} \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} + \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \left[\vec{n} \times \vec{F}_{\parallel} \right]_x + \rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} [\vec{\tau} \times \vec{n}]_x &= 0, \\ \rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= TY'' - EI_{yy} Y''''.\end{aligned}\tag{9.10}$$

В случае бесконечного стержня уравнением (9.10) допускается непрерывный спектр волн с дисперсионным соотношением

$$\rho S \omega^2 = Tk^2 + EI_{yy} k^4.\tag{9.11}$$

В случае стержня конечной длины спектр колебаний будет дискретным и зависящим от граничных условий на концах. Так как уравнение (9.10) — четвертого порядка по Z , то нужно четыре граничных условия (по два на каждом конце), например

$$\text{заделанный конец (рис. 3.6, а):} \quad Y = 0, \quad Y' = 0;\tag{9.12}$$

$$\text{шарнир (рис. 3.6, б):} \quad Y = 0, \quad Y'' = 0;\tag{9.13}$$

$$\text{свободный конец (рис. 3.6, в):} \quad Y'' = 0, \quad Y''' = 0.\tag{9.14}$$

Условия на вторые производные в (9.13) и (9.14) получаются из равенства нулю момента упругих сил (8.9) на конце. Условие на третью производную следует, в соответствии с (9.6), из отсутствия упругой силы \vec{F} на свободном конце.

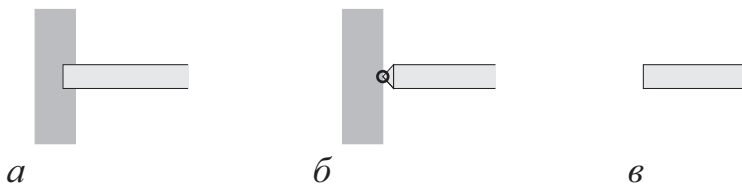


Рис. 3.6: Крепления стержней: заделанный конец (а), шарнир (б), свободный конец (в)

3.10 Устойчивость стержней (по Эйлеру)

Найдем, какую сжимающую нагрузку может выдержать тонкий стержень, не изгибаясь в поперечном направлении Y и не ломаясь (рис. 3.7). Очевидно, прямой стержень ($Y(Z) \equiv 0$) удовлетворяет уравнению равновесия (9.10) с нулевой левой частью. При малой сжимающей силе F это равновесие будет устойчивым, т. е. при небольшом изгибе стержня упругие силы будут возвращать его в прямое состояние. При большой силе равновесие будет неустойчивым, и случайно возникший изгиб стержня будет увеличиваться. Границей между устойчивым и неустойчивым равновесием является безразличное равновесие. Минимальная сила $F_{кр}$, при которой возможно безразличное равновесие стержня, и будет искомой.

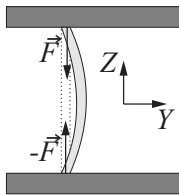


Рис. 3.7: К задаче об устойчивости стержня

При безразличном равновесии уравнение (9.10) с $T = -F$ имеет стационарное ненулевое решение:

$$FY'' + EI_{yy}Y'''' = 0, \quad Y(Z) \neq 0. \quad (10.1)$$

Общий вид решения уравнения (10.1)

$$Y = a + bZ + c \sin kZ + d \cos kZ, \quad k = \sqrt{\frac{F}{EI_{yy}}}. \quad (10.2)$$

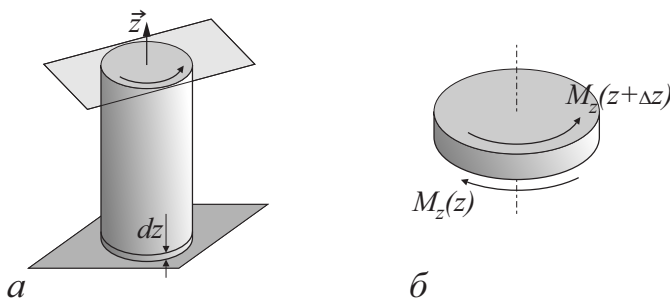


Рис. 3.8: Геометрия задачи о кручении стержня (а); моменты сил, действующих на тонкий слой (б)

Четыре граничных условия на двух концах стержня дают четыре уравнения на постоянные коэффициенты a, b, c, d . Эта однородная система уравнений имеет нетривиальное решение только при дискретных значениях k , минимальное из которых k_{\min} и определяет критическую силу

$$F_{\text{кр}} = EI_{yy} k_{\min}^2. \quad (10.3)$$

Нетривиальное решение $Y(Z)$, соответствующее этой силе, определяет, каким образом стержню легче всего изогнуться при заданном способе крепления.

3.11 Кручение стержней

Задача о кручении тонкого стержня имеет простое решение только для осесимметричного сечения. Этот случай мы и рассмотрим. Пусть сплошной круглый стержень радиуса a приклеен с торцов к плоскопараллельным пластинам и за счет их относительного вращения деформируется таким образом, что каждый его слой поворачивается на угол $\varphi(z)$ вокруг оси системы (рис. 3.8, а). Рассмотрим слой $z = dz$, расположенный близко (в пределе бесконечно близко) к сечению $z = 0$, которое считаем неподвижным. Для него

$$\varphi(dz) = \tau dz, \quad (11.1)$$

где величина

$$\tau = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (11.2)$$

характеризующая деформацию, называется углом кручения. Смещение элементов слоя при бесконечно малом повороте определяется формулой

$$\vec{u} = [\tau dz \vec{e}_z \times \vec{r}] \quad (11.3)$$

или

$$u_x = -\tau dz y, \quad u_y = -\tau dz x, \quad u_z = 0. \quad (11.4)$$

Заметим, что при кручения стержня произвольного сечения изначально плоские поперечные слои, вообще говоря, перестают быть плоскими, и появляются продольные смещения $u_z(x, y)$. Для круглых же стержней продольные смещения запрещены симметрией задачи. По определению тензора деформации (1.4) из выражений (11.4) находим

$$u_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau y/2 \\ 0 & 0 & \tau x \\ -\tau y/2 & \tau x/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

и из закона Гука (3.4) получаем, что в тензоре напряжений отличны от нуля только четыре компоненты:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu u_{xz} = -\mu\tau y, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu u_{yz} = \mu\tau x. \quad (11.6)$$

Соответственно, на элементарную площадку $d\vec{S} \parallel \vec{z}$ действует сила

$$d\vec{f}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} dS_\beta = \sigma_{\alpha z} dS. \quad (11.7)$$

Сдвиговые напряжения (11.6) создают момент упругих сил, имеющих только z -компоненту:

$$\begin{aligned} M_z &= \int_S [\vec{r} \times d\vec{f}] = \int_S (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz}) dS = \int_0^a (x^2 + y^2) \mu\tau 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi\mu\tau a^4}{2} = \mu\tau I_{zz} = \mathbb{C}\tau. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Здесь

$$I_{zz} = \int r^2 dS \quad (11.9)$$

— момент инерции сечения,

$$\mathbb{C} = M_z/\tau \quad (11.10)$$

— так называемая крутильная жесткость, мера «податливости» стержня скручивающим усилиям. Для сплошного стержня (трубы) выражение для I_{zz} будет другим, но связь

$$\mathbb{C} = \mu I_{zz} \quad (11.11)$$

останется.

Предположим теперь, что стержень не находится в равновесии, и вращающие моменты, действующие на слой толщины Δz сверху и снизу, не компенсируют друг друга (рис. 3.8,б). Под их действием угловая скорость слоя Ω будет меняться согласно уравнению

$$I \frac{\partial \Omega}{\partial t} = M_z(z + \Delta z) - M_z(z), \quad (11.12)$$

где $I = \rho I_{zz} \Delta z$ — момент инерции слоя, ρ — плотность стержня. Переходя к бесконечно тонкому слою, получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\mathbb{C}}{I} \frac{\partial \tau}{\partial z} \Delta z = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (11.13)$$

Таким образом, вращательные деформации описываются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (11.14)$$

и бегут вдоль стержня с поперечной скоростью звука (6.9). Для равновесия стержня, очевидно, необходимо $\tau(z) = \text{const}$.

Приложения

Приложение 1:

Дифференциальные операторы в цилиндрических координатах

Градиент:

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Дивергенция:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Ротор:

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{rot} \vec{A} \right)_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\ \left(\operatorname{rot} \vec{A} \right)_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \\ \left(\operatorname{rot} \vec{A} \right)_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Лапласиан скаляра:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Лапласиан вектора:

$$\begin{aligned} \left(\Delta \vec{A} \right)_r &= \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_r}{r^2}, \\ \left(\Delta \vec{A} \right)_\varphi &= \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2}, \\ \left(\Delta \vec{A} \right)_z &= \Delta A_z. \end{aligned}$$

Компоненты $(\vec{A}\nabla)\vec{B}$:

$$\begin{aligned}\left((\vec{A}\nabla)\vec{B}\right)_r &= A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\varphi B_\varphi}{r}, \\ \left((\vec{A}\nabla)\vec{B}\right)_\varphi &= A_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{A_\varphi B_r}{r}, \\ \left((\vec{A}\nabla)\vec{B}\right)_z &= A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Дивергенция тензора:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}\right)_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rT_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} - \frac{T_{\varphi\varphi}}{r}, \\ \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}\right)_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rT_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{T_{\varphi r}}{r}, \\ \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}\right)_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rT_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}$$

Приложение 2:

Дифференциальные операторы в сферических координатах

Градиент:

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Дивергенция:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Ротор:

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \vec{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}, \\ (\operatorname{rot} \vec{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi), \\ (\operatorname{rot} \vec{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Лапласиан скаляра:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Лапласиан вектора:

$$\begin{aligned} (\Delta \vec{A})_r &= \Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta A_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ (\Delta \vec{A})_\theta &= \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ (\Delta \vec{A})_\varphi &= \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Компоненты $(\vec{A} \nabla) \vec{B}$:

$$\begin{aligned} ((\vec{A} \nabla) \vec{B})_r &= A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{A_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi}{r}, \\ ((\vec{A} \nabla) \vec{B})_\theta &= A_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \varphi} + \\ &\quad + \frac{A_\theta B_r - \operatorname{ctg} \theta A_\varphi B_\varphi}{r}, \\ ((\vec{A} \nabla) \vec{B})_\varphi &= A_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \theta} + \frac{A_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \\ &\quad + \frac{A_\varphi B_r + \operatorname{ctg} \theta A_\varphi B_\theta}{r}. \end{aligned}$$

Дивергенция тензора:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \right)_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta r}) + \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\varphi\varphi}}{r}, \\ \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \right)_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta\theta}) + \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{T_{\theta r} - \operatorname{ctg} \theta T_{\varphi\varphi}}{r}, \\ \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \right)_\varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta\varphi}) + \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{T_{\varphi r} + \operatorname{ctg} \theta T_{\varphi\theta}}{r}. \end{aligned}$$

Учебное издание

Лотов Константин Владимирович

ФИЗИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Редактор *Я. О. Козлова*

Дизайн обложки *Е. В. Неклюдовой*

Подписано в печать 20.05.2018 г.

Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Уч.-изд. л. 8,5. Усл. печ. л. 7,9.

Тираж 160 экз. Заказ № 123.

Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2