

# Отношение эквивалентности

## Определение:

Бинарное отношение  $R$  на множестве  $X$  называется **отношением эквивалентности** (англ. *equivalence binary relation*), если оно обладает следующими свойствами:

- Рефлексивность:  $\forall x \in X : xRx$ .
- Симметричность:  $\forall x, y \in X$  : если  $xRy$ , то  $yRx$ .
- Транзитивность:  $\forall x, y, z \in X$  : если  $xRy$  и  $yRz$ , то  $xRz$ .

Отношение эквивалентности обозначают символом  $\sim$ . Запись вида  $a \sim b$  читают как " $a$  эквивалентно  $b$ ".

## Содержание

- 1 Примеры отношений эквивалентности
- 2 Классы эквивалентности
- 3 Примеры
- 4 См. также
- 5 Источники информации

## Примеры отношений эквивалентности

- Отношение *равенства* ( $=$ ) является тривиальным примером отношения эквивалентности на любом множестве.
- Отношение *равенства по модулю  $k$* :  $a \equiv b \pmod k$  на множестве целых чисел.
- Отношение *параллельности* прямых на плоскости.
- Отношение *подобия* фигур на плоскости.
- Отношение *равносильности* на множестве уравнений.
- Отношение *связности* вершин в графе.
- Отношение *быть одного роста* на множестве людей.

Следующие отношения не являются отношениями эквивалентности:

- Отношения *порядка*, так как они не являются симметричными.
- Отношение *быть знакомым* на множестве людей, так как оно не транзитивное.

## Классы эквивалентности

### Определение:

Система непустых подмножеств  $\{M_1, M_2, \dots, M_n, \dots\}$  множества  $M$  называется **разбиением** (англ. *partition*) данного множества, если:

- $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n \cup \dots$
- $M_i \cap M_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

Множества  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$  называются **классами** данного разбиения.

Примерами разбиений являются:

- Разбиение многоугольников на группы по числу вершин.
- Разбиение треугольников по свойствам углов (остроугольные, прямоугольные, тупоугольные).
- Разбиение учащихся школы по классам.

**Теорема:**

Если на множестве  $M$  задано отношение эквивалентности  $\sim$ , то оно порождает разбиение этого множества на **классы эквивалентности** такое, что:

- любые два элемента одного класса находятся в отношении  $\sim$
- любые два элемента разных классов не находятся в отношении  $\sim$

Семейство всех классов эквивалентности множества образует множество, называемое *фактор-множеством*, или *факторизацией* множества  $M$  по отношению  $\sim$ , и обозначаемое  $M/\sim$ .

## Примеры

- *Равенство* - классический пример отношения эквивалентности на любом множестве, в т. ч. вещественных чисел
- Равенство по модулю:  $a \equiv b \pmod{m}$
- В *Евклидовой геометрии*:
  - отношение подобия ( $\sim$ )
  - отношение параллельности: ( $\parallel$ )
  - отношение конгруэнтности: ( $\cong$ )
- Разбиение многоугольников по количеству вершин
- Отношение *равносильности* на множестве уравнений
- Отношение равномощности множеств
- Отношение *принадлежать к одному виду* на множестве животных
- Отношение *жить в одном городе* на множестве людей

## См. также

- Определение отношения
- Рефлексивное отношение
- Симметричное отношение
- Транзитивное отношение
- Отношение порядка

## Источники информации

- Wikipedia | Отношение эквивалентности ([http://ru.wikipedia.org/wiki/Отношение\\_эквивалентности](http://ru.wikipedia.org/wiki/Отношение_эквивалентности))
- Wikipedia | Equivalence relation ([http://en.wikipedia.org/wiki/Equivalence\\_relation](http://en.wikipedia.org/wiki/Equivalence_relation))
- Бинарные отношения. Отношение эквивалентности (<http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-3-html/1.htm>)

Источник — «[http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Отношение\\_эквивалентности&oldid=84486](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Отношение_эквивалентности&oldid=84486)»

- Эта страница последний раз была отредактирована 4 сентября 2022 в 19:07.