Лекция 4

Методы расчета электрических цепей:

Примеры.

Частотно-зависимые цепи.

Логарифмические

амплитудно-частотные характеристики.

Фильтры.

Цепи переменного тока

Возвращаясь к цепям переменного тока имеем следующую запись для комплексных сопротивлений резистора, индуктивности и электрического конденсатора:

- Сопротивление R: $Z_R = R$
- Индуктивность L: $Z_L = j\omega L$
- Емкость C: $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

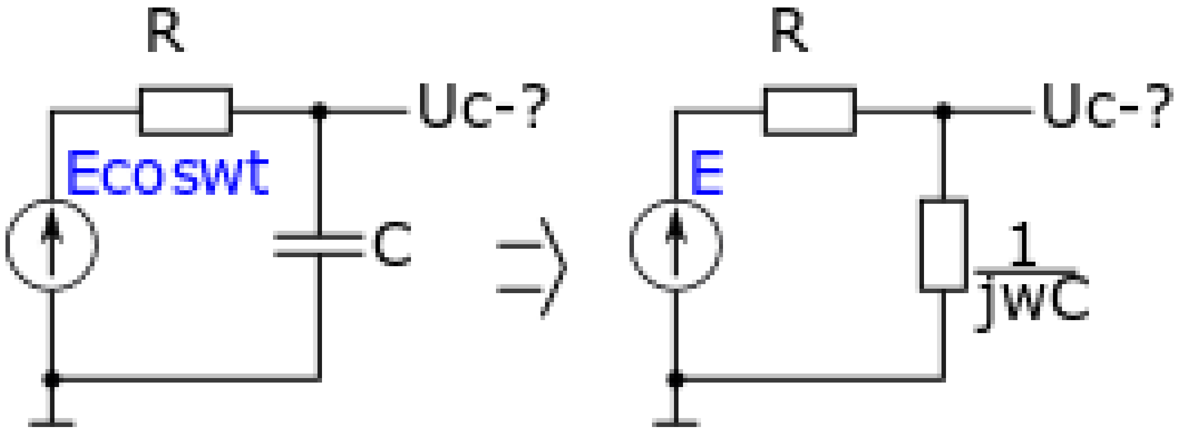
Мощность в цепи переменонго тока

Вспомним как в комплексном виде можно представить мощность

- Комплексная мощность $\hat{S} = \widehat{U} \cdot \hat{I}^* = \hat{I}^2 Z = \frac{\widehat{U}^2}{Z^*}$
- ***Полная мощность:*** $\boldsymbol{S = \left|\widehat{S}\right|}$
- ***Активная мощность:*** $\boldsymbol{P = S cos\varphi = Re\left(\widehat{S}\right)}$
- ***Реактивная мощность:*** $\boldsymbol{Q = S sin\varphi = Im\left(\widehat{S}\right)}$

Пример: RC цепочка

Снова посмотрим схему из источника резистора и конденсатора:



$$\widehat{U_c} = E\,\frac{{}^{1}\!/_{j\omega C}}{R + {}^{1}\!/_{j\omega C}} = E\,\frac{1 - j\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} = \frac{E}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}\,\boldsymbol{e^{i\varphi}}$$

где $\boldsymbol{\varphi = -\mathrm{arctg}}(\omega RC)$

Пример: RC цепочка

Мы получили комплексную запись напряжения на конденсаторе. Таким же образом мы можем найти любую величину тока и напряжения в данной схеме в комплексном виде. Но нам бы хотелось понять: а какое там напряжение в реальности? Это ведь некая вещественная измеримая величина (изменяющаяся во времени по гармоническому закону).

Вспомним как изначально появились векторные диаграммы. Реальная величина представлялась проекцией вращающегося с постоянной частотой комплексного вектора.

Это соответствует взятию реальной части комплексного числа.

Тогда напряжение на конденсаторе в реальности будет:

$$\mathrm{Re}[\widehat{U}_c e^{i\omega t}] = \frac{E}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} \cos(\omega t - arctg(\omega RC))$$

Фильтры

$$U_c(t) = \frac{E}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} \cos(\omega t - arctg(\omega RC))$$

Что мы тут видим – мы видим что и у фазы и у амплитуды найденного напряжения есть зависимость от частоты источника ЭДС.

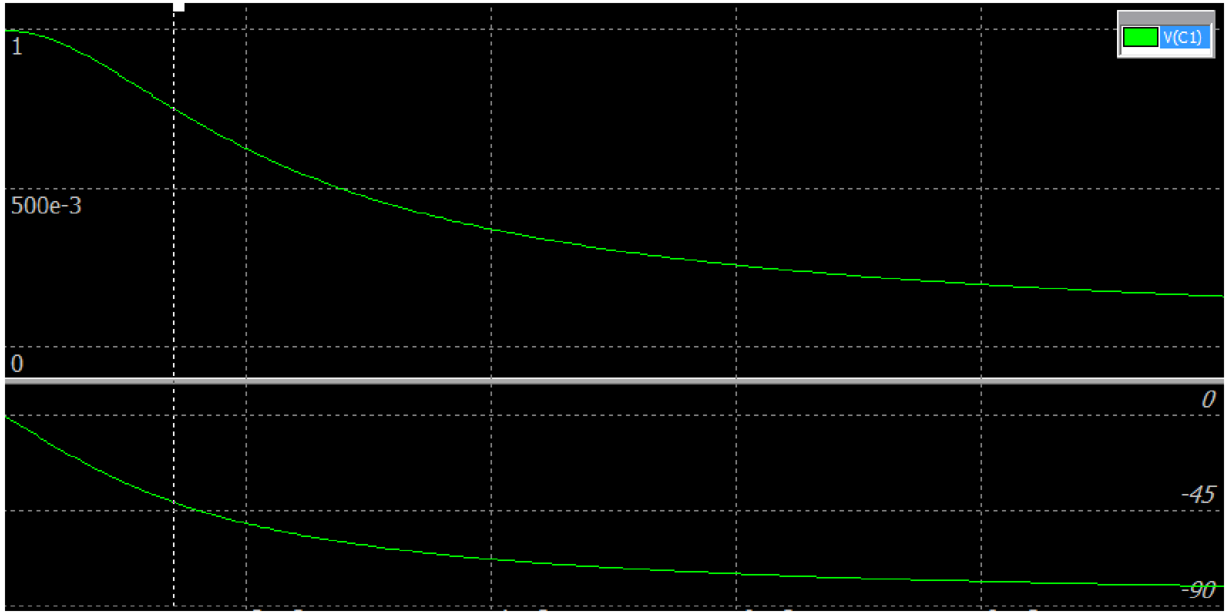
Для низких частот напряжение почти равно Е, фаза около нуля

Для высоких частот напряжение стремится к нулю,

фаза стремится к $-\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

Фильтры

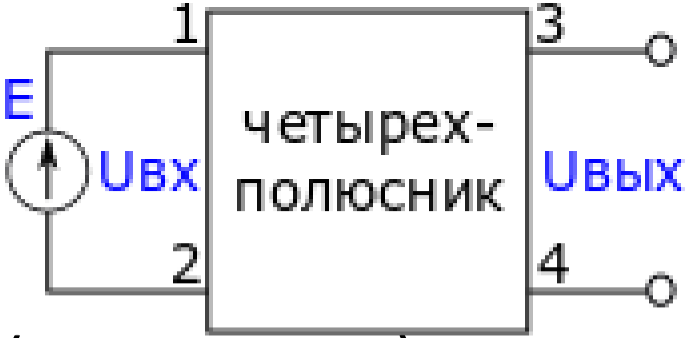
Если рисовать график **модуля амплитуды** и **аргумента** напряжения U_cв зависимости от частоты, то получится следующая картинка:



Линия проведена на частоте среза $\omega = 1/RC$, модуль нормирован

Фильтры

Если вынести входной источник ЭДС то схему можно изобразить так:



Такая схема с входом (клеммы 1,2) и выходом (клеммы 3,4) есть четырехполюсник. Выделим один ее характеризующий параметр: **коэффициент пропускания (коэффициент усиления)** $k = \frac{|U_{\text{вых}}|}{|U_{\text{вх}}|}$

Фильтры

Коэффициент пропускания обычно выражают в логарифмической (степенной) шкале: $k(\text{дБ}) = 20log\frac{|U_{\text{вых}}|}{|U_{\text{вх}}|}$,

Таким образом единичный коэффициент – это 0 дБ

Ослабление в 10 раз – это k= -20дБ

Ослабление в 100 раз – это k= -60дБ

Усиление в 10 раз – это k=20дБ

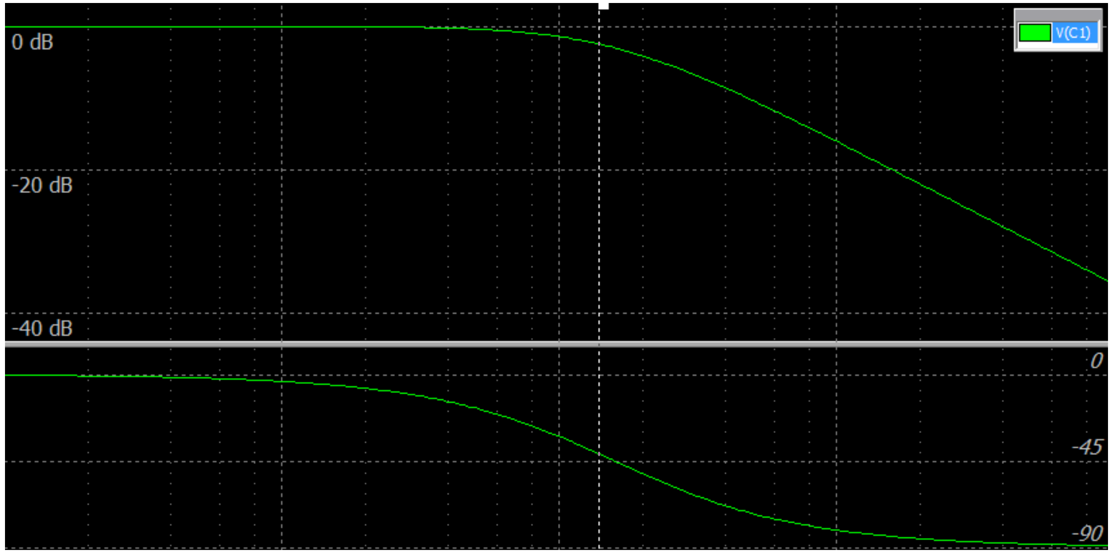
Обратная величина $20log\frac{|U_{\text{вх}}|}{|U_{\text{вых}}|}$ называется **коэффициентом ослабления**

Фильтры

Построим теперь график коэффициента пропускания в логарифмическом масштабе.

По оси абсцисс будем откладывать порядок частоты $(1 = 10^1, 2 = 10^2, \text{т. д.})$,

По оси ординат –коэффициент пропускания в децибелах



Фильтры

Что видно:

- В таком масштабе график имеет постоянный коэффициент до частоты среза (-3дБ) , а потом наклон.
- При этом наклон этот постоянный 20 дБ/декаду. Декада – изменение частоты в 10 раз – одно деление в логарифмическом масштабе.

Характеристика зависимости модуля коэффициента пропускания от частоты, выполненная в указанном логарифмическом масштабе называется **ЛАЧХ – логарифмической амлитудно-частотной характеристикой.**

Фильтры

По типу характеристики фильтры можно разделить на

- **Фильтры низких частот** (ФНЧ) – ЛАЧХ имеет постоянный уровень для частот ниже частоты среза, зачем начинается спад.
- **Фильтры высоких частот** (ФВЧ) – ЛАЧХ имеет подъем для частот ниже частоты среза, выше переходит на постоянный уровень
- **Полосовые фильтры** – ЛАЧХ имеет постоянный уровень для диапазона частот $\Delta\Omega$, на частотах ниже идет подъем до данного уровня, на частотах выше начинается спад. Диапазон частот $\Delta\Omega$ называется полосой пропускания.
- **Заградительные (режекторные) фильтры** – имеющие постоянный уровень ЛАЧХ вне полосы частот $\Delta\Omega$, и пониженный уровень в этой полосе частот

Фильтры

Наклон ЛАЧХ фильтра (20дБ/дек, 40дБ/дек, 60дБ/дек, и т.д.) определяет характеристику, которая называется **порядком фильтра**.

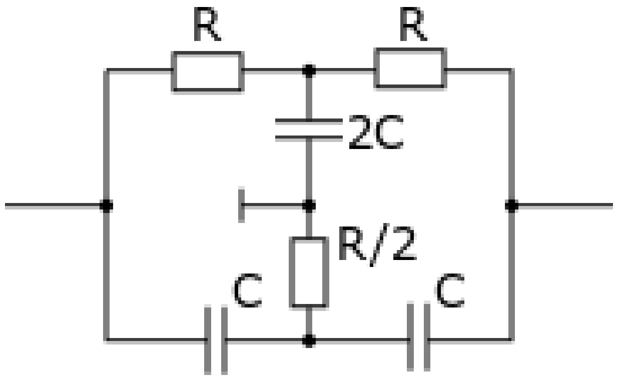
20дБ/дек – фильтр 1 порядка

40дБ/дек – фильтр 2 порядка

Чем выше порядок фильтра, тем выше его фильтрующая способность.

Пример режекторного фильтра

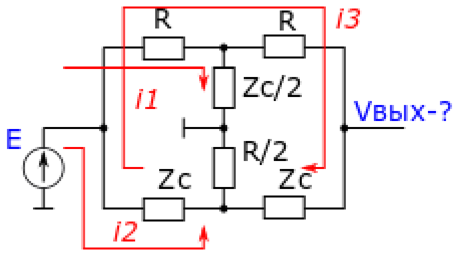
Двойной Т-фильтр



Пример режекторного фильтра

Перейдем к комплексным обозначениям. В схеме три независимых контура , отсюда получим систему для токов: (Zc=Z)

$$\begin{cases} (i1+i3)R+\frac{i1Z}{2}=E \\ (i2-i3)Z+\frac{i2R}{2}=E \\ (i3+i1)R+i3R+i3Z+(i3-i2)Z=0 \end{cases}$$



$$V\text{вых}=\frac{i1Z}{2}-i3R$$

Запишем в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} R & -Z & 2R+2Z \\ 0 & Z+R/2 & -Z \\ R+Z/2 & 0 & R \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i1 \\ i2 \\ i3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ E \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к диагональному виду

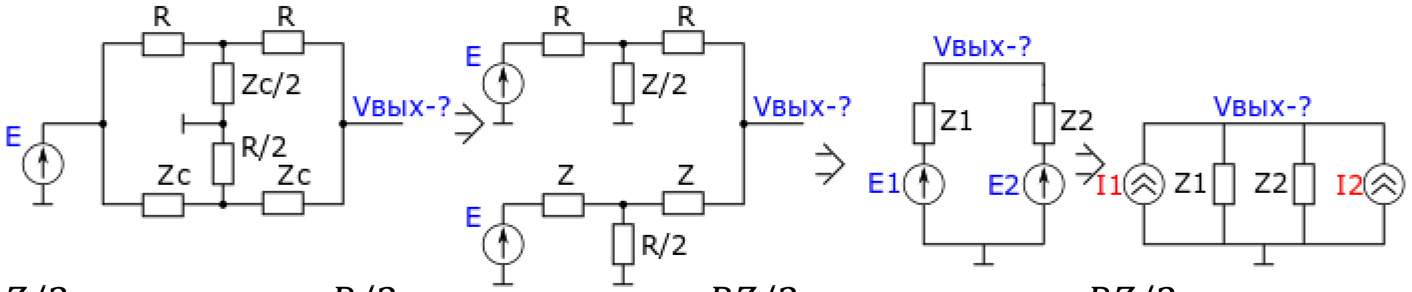
$$\begin{bmatrix} R & -Z & 2R+2Z \\ 0 & Z+R/2 & -Z \\ 0 & 0 & R-\frac{\left(R+\frac{Z}{2}\right)(2R+2Z)}{R}+\frac{Z\left(R+\frac{Z}{2}\right)}{R\left(Z+\frac{R}{2}\right)}Z \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i1 \\ i2 \\ i3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ E\left(1-\frac{Z\left(R+\frac{Z}{2}\right)}{R\left(Z+\frac{R}{2}\right)}\right) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i3=\frac{E}{2}\left(\frac{R^2-Z^2}{R^2\left(R+\frac{Z}{2}\right)+Z^2\left(Z+\frac{R}{2}\right)-2(R+Z)\left(R+\frac{Z}{2}\right)}\right), i1=\frac{E-i3R}{R+Z/2}$$

Теперь надо все это расписать и в итоге мы получим решение. Это долгий путь решения в лоб.

Пример режекторного фильтра

Однако, эту же задачу можно решить и преобразованиями схемы методами эквивалентного генератора (быстро и с минимальной вероятностью ошибиться):



Где $E1 = E\frac{Z/2}{R+Z/2}, E2 = E\frac{R/2}{Z+R/2}, \ Z1 = R + \frac{RZ/2}{R+Z/2}, Z2 = Z + \frac{RZ/2}{Z+R/2}$

$$I1 = \frac{E1}{Z1}, I2 = \frac{E2}{Z2}$$

Отсюда получаем $V\text{вых} = \frac{E1Z2+E2Z1}{Z1+Z2} = \frac{E}{2} * \frac{R^2+Z^2}{R^2+Z^2+RZ}$

Теперь вспомним что есть Z: $Z = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow Z^2 = \frac{-1}{\omega^2 C^2} = -X_c^2$ получаем при $\omega = \frac{1}{RC} \Rightarrow X_c = R \Rightarrow$ Vвых=0