# Семинар 12 [31.10.2022]

Автомодельность. Бегущие волны.

## Задачи

### Задача 1

Уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty$$

описывает слабые ударные волны в среде с диссипацией энергии. Найти решение типа ударной волны, т.е. удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \to -\infty} u(x,t) = u_1, \quad \lim_{x \to +\infty} u(x,t) = u_2, \quad u_1 > u_2.$$

### Задача 2

Показать, что уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

имеет решение в виде бегущей волны. Найти частное решение, обращающееся на бесконечности в нуль вместе со своими первой и второй производными по $x$.

## Решения

### Задача 1

Сделаем замену переменных $\xi = e^x > 0$ и $\tau = e^t > 0$, тогда

$$\partial_t = \tau\partial_\tau, \quad \partial_x = \xi\partial_\xi,$$

и уравнение приводится к виду

$$\tau u_\tau + (u-\mu)\,\xi u_\xi = \mu\xi^2 u_{\xi\xi}.$$

Масштабные преобразования

$$\xi = \alpha\bar{\xi}, \quad \tau = \beta\bar{\tau}, \quad u = \nu\bar{u},$$

не меняют уравнения, если $\nu = 1$. Тогда сделаем подстановку типа бегущей волны[1]

$$g\left(u, \frac{\xi}{\tau^V}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad u = \tilde{f}\left(\frac{\xi}{\tau^V}\right) = f\,(x - Vt),$$

где $V$ – пока что произвольный параметр, который должен определяться из краевых условий. Подстановка дает

$$-V\frac{df}{d\eta} + f\frac{df}{d\eta} = \mu\frac{d^2 f}{d\eta^2},$$

где $\eta = x - Vt$. Интегрируя получившееся уравнение по $\eta$ от $-\infty$ до $+\infty$ и учитывая краевые условия:

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = \lim_{\eta\to-\infty} f\,(\eta) = u_1, \quad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = \lim_{\eta\to+\infty} f\,(\eta) = u_2,$$

получаем

$$-V\,(u_2 - u_1) + \frac{1}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad V = \frac{u_2 + u_1}{2}.$$

Далее, интегрируя по $\eta$ от $-\infty$ до $\eta$, имеем

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{1}{2\mu}(f - u_1)(f - u_2),$$

откуда

$$\frac{1}{2\mu}(\eta - \eta_0) = \int \frac{df}{(f-u_1)(f-u_2)} = \frac{1}{u_1 - u_2}\left(\int \frac{df}{f - u_1} - \int \frac{df}{f-u_2}\right) = \frac{1}{u_1-u_2}\ln\left[\frac{u_1 - f}{f - u_2}\right].$$

И в итоге, получаем

$$u = \frac{u_1 + u_2 \exp\left[\frac{u_1-u_2}{2\mu}\left(x - x_0 - \frac{u_1+u_2}{2}(t-t_0)\right)\right]}{1 + \exp\left[\frac{u_1-u_2}{2\mu}\left(x - x_0 - \frac{u_1+u_2}{2}(t-t_0)\right)\right]} =$$
$$= \frac{u_1+u_2}{2} - \frac{u_1-u_2}{2}\tanh\left[\frac{u_1-u_2}{4\mu}\left(x - x_0 - \frac{u_1+u_2}{2}(t-t_0)\right)\right].$$

---

[1] Можно убедиться, что при автомодельной подстановке общего вида $u = \tilde{f}\,(\zeta)$, где $\zeta = \xi/l\,(\tau)$ получим уравнение

$$-\frac{\tau}{l}\frac{dl}{d\tau}\frac{d\tilde{f}}{d\zeta} + \left(\tilde{f} - \mu\right)\frac{d\tilde{f}}{d\zeta} = \mu\zeta\frac{d^2\tilde{f}}{d\zeta^2}.$$

То есть нужно потребовать

$$\frac{\tau}{l}\frac{dl}{d\tau} = V = \mathrm{const}, \quad \Rightarrow \quad l \propto \tau^V,$$

что и соответствует подстановке в виде бегущей волны.

**Задача 2**

Подстановка

$$u = f\,(x - Vt)$$

дает

$$-V\frac{df}{d\eta} + 6f\frac{df}{d\eta} + \frac{d^3f}{d\eta^3} = 0.$$

Интегрируя по $\eta$ с учетом граничных условий, получаем

$$-Vf + 3f^2 + \frac{d^2f}{d\eta^2} = 0.$$

Далее умножим уравнение на $df/d\eta$ и еще раз проинтегрируем:

$$-V\frac{1}{2}f^2 + f^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 = 0.$$

Тогда

$$\frac{df}{f\sqrt{V-2f}} = \pm d\eta.$$

Вычисляя интеграл

$$\int \frac{df}{f\sqrt{V-2f}} = \left[\!\left[ z = \sqrt{1-\frac{2f}{V}} \right]\!\right] = \frac{2}{\sqrt{V}}\int\frac{dz}{z^2-1} = \\ = \frac{1}{\sqrt{V}}\int\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \frac{1}{\sqrt{V}}\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + \text{const},$$

получаем

$$\left|\frac{1-z}{1+z}\right| = \exp\left[\sqrt{V}\,(\eta_0 \pm \eta)\right], \quad z = \sqrt{1-\frac{2f}{V}}.$$

Пусть $u > 0$, тогда $z < 1$. Имеем:

$$u = \frac{V}{2}\left(\cosh\left[\frac{\sqrt{V}}{2}\,(x - x_0 - V\,(t-t_0))\right]\right)^{-2}.$$