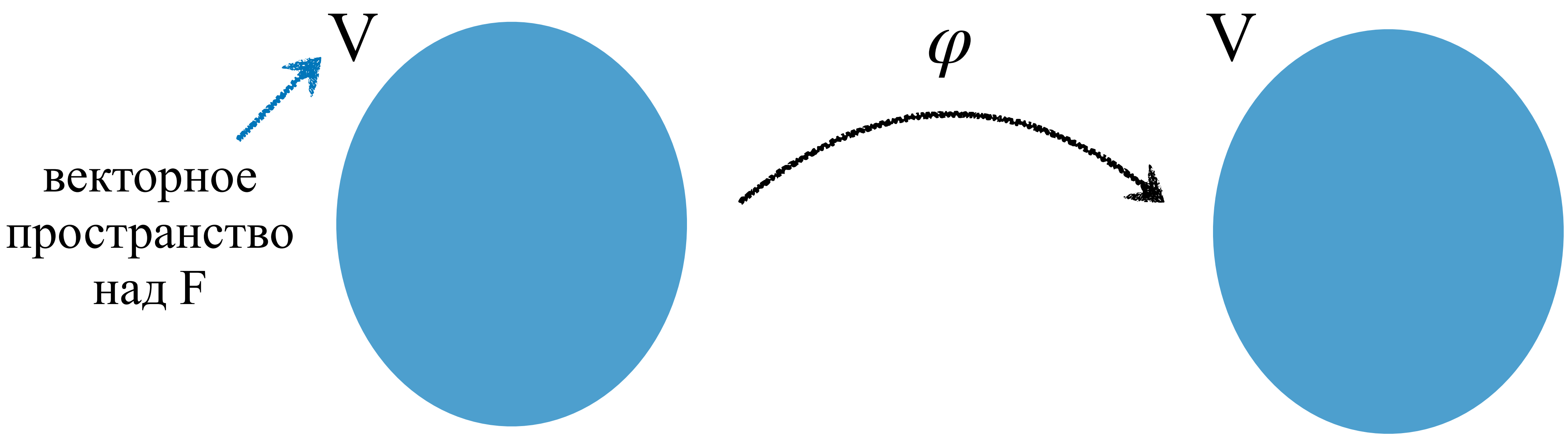
Собственные числа и вектора

Линейный оператор

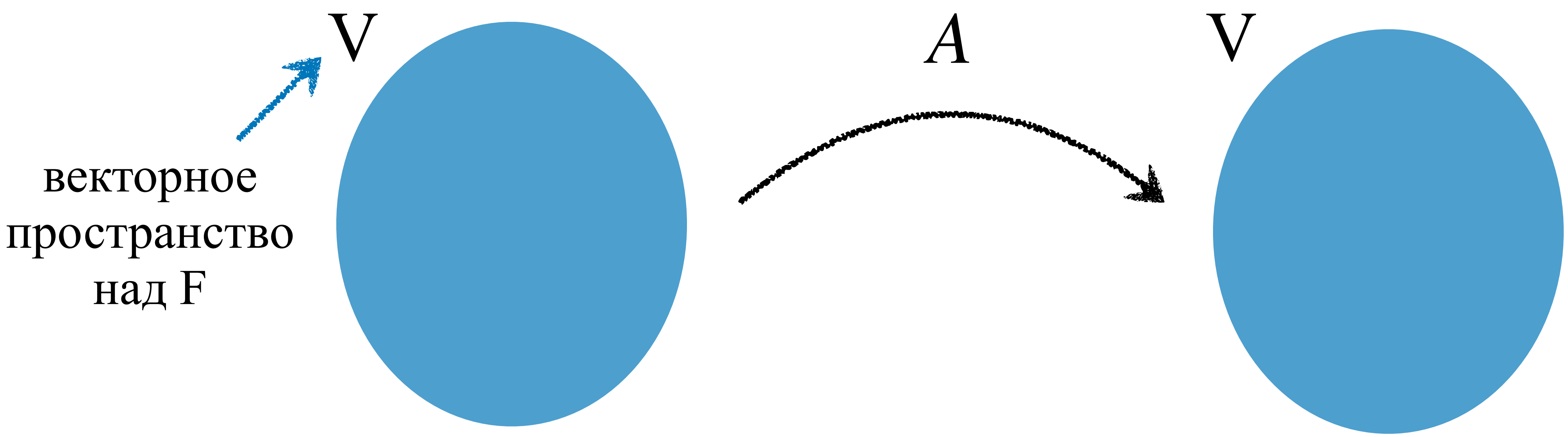


$$\varphi : V \to V$$

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \text{ для всех } x, y \in V \text{ и } \alpha, \beta \in F$$

Линейный оператор

Матрица A квадратная



$$A : V \to V$$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \text{ для всех } x, y \in V \text{ и } \alpha, \beta \in F$$

Теория

Собственный вектор

Собственное число

$$Av = \lambda v, \; v \neq 0$$

Теория

Собственный вектор

Собственное число

$$Av = \lambda v, \; v \neq 0$$

$$(A - \lambda E)v = 0$$

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

$$\chi_A(\lambda) = 0$$

$$\lambda$$

Ты нашёл меня!

Теория

Собственный вектор

Собственное число

$$Av = \lambda v, \; v \neq 0$$

$$(A - \lambda E)v = 0$$

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

$$\chi_A(\lambda) = 0$$

λ Ты нашёл меня!

v Моя очередь!

$$(A - \lambda E)v = 0$$

СЛУ

Практика

Задачка

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda^2 - \lambda \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{= \mathrm{tr}A} + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{= \det A} =$$

$\mathrm{tr}A$ – – след матрицы

$$= \lambda^2 - \mathrm{tr}A \cdot \lambda + \det A$$

Задача 1

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 1

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathrm{tr}A = 5, \ \det A = 6$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 2$$

$$\det(A - \lambda E) = \\ = \lambda^2 - \mathrm{tr}\, A \ \lambda + \det A$$

Задача 1

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathrm{tr}A = 5, \ \det A = 6$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 2$

$\det(A - \lambda E) =$
$= \lambda^2 - \mathrm{tr}\, A \ \lambda + \det A$

Нужно решить систему
$(A - \lambda E)v = 0$

2) $\lambda_1 = 3$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow v_1 = (-3, \ 2)^T$$

$\lambda_2 = 2$

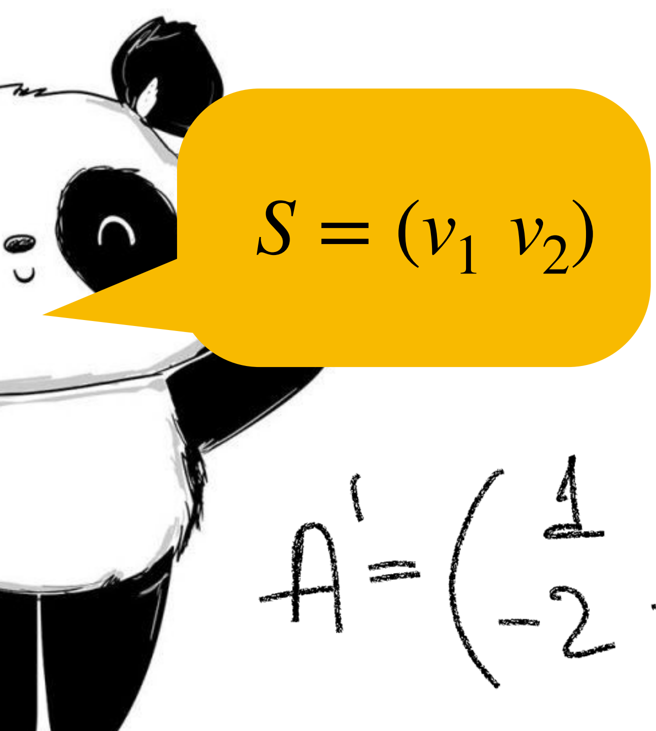
$$A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow v_2 = (-2, \ 1)^T$$

Задача 1

$$A: \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 3,\ v_1 = (-3,\ 2)_e^T \Rightarrow Av_1 = 3v_1 \\ \lambda_2 = 2,\ v_2 = (-2,\ 1)_e^T \Rightarrow Av_2 = 2v_2 \end{array}$$

«старый» базис

$$e_1,\ e_2 \xrightarrow{S} v_1,\ v_2$$



$$S = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = S^{-1} A\ S$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 1

$$A: \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 3,\ v_1 = (-3,\ 2)_e^T \Rightarrow \\ \lambda_2 = 2,\ v_2 = (-2,\ 1)_e^T \Rightarrow \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} Av_1 = 3v_1 \\ Av_2 = 2v_2 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A'v_1 = 3v_1 \\ A'v_2 = 2v_2 \end{matrix}}$$

«старый» базис

$$e_1,\ e_2 \xrightarrow{S} v_1,\ v_2$$

$$S = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = S^{-1} A\ S$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 2

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A\ \lambda^2 - I_2\lambda + \det A$$

$$I_2 = M_{11} + M_{22} + M_{33}$$

Найти собственные числа и собственные в

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr} A = 9,$

$I_2 = 18 - 24 + 6 = 0,$

$\det A = -108$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 108$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = 0$$

Схема Горнера

Дано:

Делимое: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

Делитель: $x - c$

Найти:

Частное: $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$

Остаток: b_n

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x-c)\left(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}\right) + b_n$$

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_1 &= b_1 - cb_0 \\ a_2 &= b_2 - cb_1 \\ &\ldots \\ a_n &= b_n - cb_{n-1} \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= cb_0 + a_1 \\ b_2 &= cb_1 + a_2 \\ &\ldots \\ b_n &= cb_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = 0$

Схема Горнера

Дано
- Делимое: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$
- Делитель: $x - c$

Найти
- Частное: $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$
- Остаток: b_n

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x - c)\,(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + b_n$$

	1	-9	0	108
6	1	-3	-18	0

$(\lambda - 6)(\lambda^2 - 3\lambda - 18) = 0$

$b_0 = a_0 = 1$

$b_1 = cb_0 + a_1 = 6 \cdot 1 + (-9)$

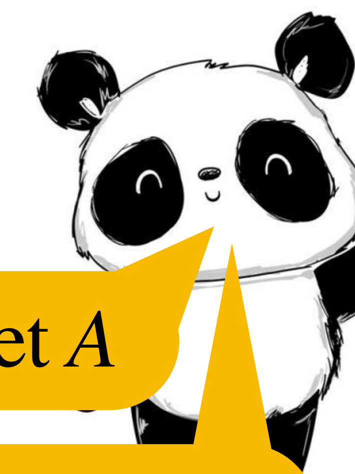
$b_2 = cb_1 + a_2 = 6 \cdot (-3) + 0$

$\ldots$

$b_n = cb_{n-1} + a_n$

$b_4 = 6 \cdot (-18) + 108 = 0$

Задача 2



$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A\ \lambda^2 - I_2\lambda + \det A$$

$$I_2 = M_{11} + M_{22} + M_{33}$$

Найти собственные числа и собственные в

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr} A = 9,$

$I_2 = 18 - 24 + 6 = 0,$

$\det A = -108$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 108$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda^2 - 3\lambda - 18) = 0$$

$\lambda_1 = 6$ или $\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$

$\lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = -3$

Задача 2

$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A\ \lambda^2 - I_2\lambda + \det A$

$I_2 = M_{11} + M_{22} + M_{33}$

Найти собственные числа и собственные в

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 108$

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 6,\ \lambda_3 = -3$

2) $\lambda_{1,2} = 6$

$$A - 6E = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$v_1 = (1, 3, 0)^T$

$v_2 = (4, 0, 3)^T$

Задача 2

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A\ \lambda^2 - I_2\lambda + \det A$$

$$I_2 = M_{11} + M_{22} + M_{33}$$

Найти собственные числа и собственные в

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 108$

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 6,\ \lambda_3 = -3$

2) $\lambda_{1,2} = 6:\ v_1 = (1,\ 3,\ 0)^T, v_2 = (4,\ 0,\ 3)^T$

$\lambda_3 = -3$

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -3 & 10 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_3 = (-2, -1, 1)^T$$

Задача 2

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A\ \lambda^2 - I_2\lambda + \det A$$

$$I_2 = M_{11} + M_{22} + M_{33}$$

Найти собственные числа и собственные в

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 108$

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 6,\ \lambda_3 = -3$

2) $\lambda_{1,2} = 6:\ v_1 = (1,\ 3,\ 0)^T, v_2 = (4,\ 0,\ 3)^T$

$\lambda_3 = -3:\ v_3 = (-2, -1,\ 1)^T$

Задача 2

Найти собственные числа и собственные в

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 108$

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 6,\ \lambda_3 = -3$

2) $\lambda_{1,2} = 6:\ v_1 = (1,\ 3,\ 0)^T, v_2 = (4,\ 0,\ 3)^T$

$\lambda_3 = -3:\ v_3 = (-2, -1,\ 1)^T$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача 3

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A\ \lambda^2 - I_2\lambda + \det A$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$

$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = -1$

2) $\lambda_1 = 3 : v_1 = (1,\ 2,\ 2)^T$

$\lambda_{2,3} = -1 : v_2 = (1,\ 2,\ 1)^T$

Задача 3

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A\ \lambda^2 - I_2\lambda + \det A$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$

$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = -1$

2) $\lambda_1 = 3 : v_1 = (1,\ 2,\ 2)^T$

$\lambda_{2,3} = -1 : v_2 = (1,\ 2,\ 1)^T$

Вывод 1

Матрица диагонализируема

$$\Updownarrow$$

Существует базис из собственных векторов

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} A'v_1 &= \alpha v_1 \\ A'v_2 &= \beta v_2 \\ A'v_3 &= \gamma v_3 \end{aligned} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 - \text{собств для } A.$$

Задача 4

Можно ли данную матрицу привести к диагональному виду?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Можно ли данную матрицу привести к диагональному виду?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{tr}A = 5, \\ &I_2 = -20 - 11 + 48 = 17, \\ &\det A = 13 \end{aligned}$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 + 3i,\ \lambda_3 = 2 - 3i$$

Задача 4

Можно ли данную матрицу привести к диагональному виду?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{tr} A = 5, \\ &I_2 = -20 - 11 + 48 = 17, \\ &\det A = 13 \end{aligned}$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13$

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$ Над $\mathbb{R}$ ❌

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$

Задача 4

Можно ли данную матрицу привести к диагональному виду?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr} A = 5,$

$I_2 = -20 - 11 + 48 = 17,$

$\det A = 13$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13$

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 + 3i,\ \lambda_3 = 2 - 3i$

Над $\mathbb{R}$

Над $\mathbb{C}$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3i \end{pmatrix}$$

Вывод 2

Матрица A диагонализируема над F

$$\Downarrow$$

Все корни $\chi_A(\lambda)$ принадлежат F

Критерий диагонализации

Матрица A диагонализируема над F

$$\Updownarrow$$

Все корни $\chi_A(\lambda)$ принадлежат F, и

геометрическая кратность = алгебраическая кратность
для каждого корня

Следствие

Матрица A диагонализируема над F

$$\Uparrow$$

Все корни $\chi_A(\lambda)$ принадлежат F и различны

Задача 3

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$

$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = -1$

2) $\lambda_1 = 3 : v_1 = (1,\ 2,\ 2)^T$

$\lambda_{2,3} = -1 : v_2 = (1,\ 2,\ 1)^T$

Задание 5 (сдать до до 8 марта)
Вариант 1

1. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,3,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,-1,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,0]^\top.$$

2. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\},$$
$$\{t+t^2, t^3, 1-5t-t^3, (1-t)^3\}$$

является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

3. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [4,4,-1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [-2,5,6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-3,2,-2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,-1,0]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

4. Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ — подпространства симметричных, кососимметричных и нижнетреугольных матриц в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц порядка n.

(a) Доказать, что суммы подпространств $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}$ прямые и что эти суммы совпадают.

(b) Найти проекции матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

на $\mathcal{L}$ параллельно $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ параллельно $\mathcal{S}$.

5. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ трёхмерного пространства с условием $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, плоскость L с нормалью $\mathbf{n}$. Отображение P_a – это проектирование на $\langle \mathbf{a} \rangle$ параллельно L, P_b – проектирование на $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно L.

1) Записать формулой отображение P_a, проверить его линейность;
2) Найти ядро и образ отображения $P_a + P_b$.

6. Найти базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -6 & 8 & 3 \\ 6 & -6 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

при необходимости пользуясь комплексными векторами.

8*. Пусть $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ – это подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathcal{V}$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) ~~Найти собственные~~ числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathcal{V}$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

$$\exists K \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^K = 0$$