Деревья.

Определение. Связный граф без циклов называется *деревом*.

Определение. Граф без циклов называется *лесом*.

Пусть дан граф $G=(V, E)$. Будем говорить, что граф $G_1=(V_1, E_1)$ получен из G добавлением висячей вершины, если $V_1 = V \cup \{v\}$, где $v \notin V$, и $E_1 = E \cup \{(v,u)\}$, для некоторой вершины $u \in V$.

Определение. Назовем граф *1-конструируемым,* если его можно построить из одновершинного графа последовательным добавлением висячих вершин.

Теорема. Следующие условия для графа $G = (V,E)$ равносильны:
(1) G — дерево;
(2) любые две вершины в G соединены ровно одним путем;
(3) G связен и $|E(G)| \leq |V(G)| - 1$;
(4) $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$ и G не имеет циклов;
(5) G является 1-конструируемым.

Следствие. Число ребер в дереве с n вершинами равно n-1.
Доказательство. Условие 3 и 4.

Следствие. Если в дереве не менее двух вершин, то в нем не менее двух висячих вершин.
Доказательство. Двухвершинный 1-конструируемый граф имеет две висячих вершины. Добавление висячей вершины и ребра не уменьшает количества висячих вершин.

Доказательство теоремы проведем методом математической индукции по количеству вершин.

База индукции.

При $|V| = 2$ граф единственный и утверждение очевидно.

Индукционный переход.

(5) $\Rightarrow$ (1)–(4).

Пусть утверждение справедливо для всех 1-конструируемых графов на k вершинах. Пусть G произвольный 1-конструируемый граф на k+1 вершине. Тогда он получен из некоторого 1-конструируемого k-вершинного графа (V,E) добавлением висячей вершины v и ребра (u,v).

I) G не имеет циклов. Цикл не может содержать ребро (u,v), так как вершина v висячая. Если цикл не содержит ребра (u,v), то он был в исходном графе, что противоречит предположению.

II) G — связный граф.

III) Любые две вершины соединены ровно одним путем.

IV) $|E(G)|=|E|+1$, и $|V(E)|=|V|+1$. По предположению индукции $|E|=|V|$-1 и, следовательно, $|E(G)|=|V(G)|$-1.

$(i) \Rightarrow (5)$.

Пусть любой граф на k вершинах, удовлетворяющий условию (i), удовлетворяет и условию (5). Обозначим G_{k+1} произвольный граф на $k+1$ вершине.

Случай 1. В графе есть висячая вершина v_{k+1}. Тогда граф, полученный из G_{k+1} удалением висячей вершины, также удовлетворяет свойству (i) и по предположению индукции является 1-конструируемым. Следовательно, G_{k+1} тоже 1-конструируемый.

Случай 2. В графе нет висячих вершин.

(i=1) Связный граф без висячих вершин содержит цикл, что противоречит условию 1.

(i=2) Граф снова связен, следовательно, содержит цикл, но любой цикл дает два различных связывающих пути для входящих в него вершин.

(i=3) По условию граф не содержит изолированных вершин. Т.е. для любой вершины $d(v) \geq 2$. По лемме о рукопожатиях

$$2\left|E\left(G_{k+1}\right)\right| = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2\left|V\left(G_{k+1}\right)\right| .$$

(i=4) По условию $|E(G_{k+1})| \geq |V(G_{k+1})| - 1$ b в графе есть хотя бы одно ребро. Удалим все изолированные вершины и получим граф без изолированных и висячих вершин, в котором всегда существует цикл. Противоречие.

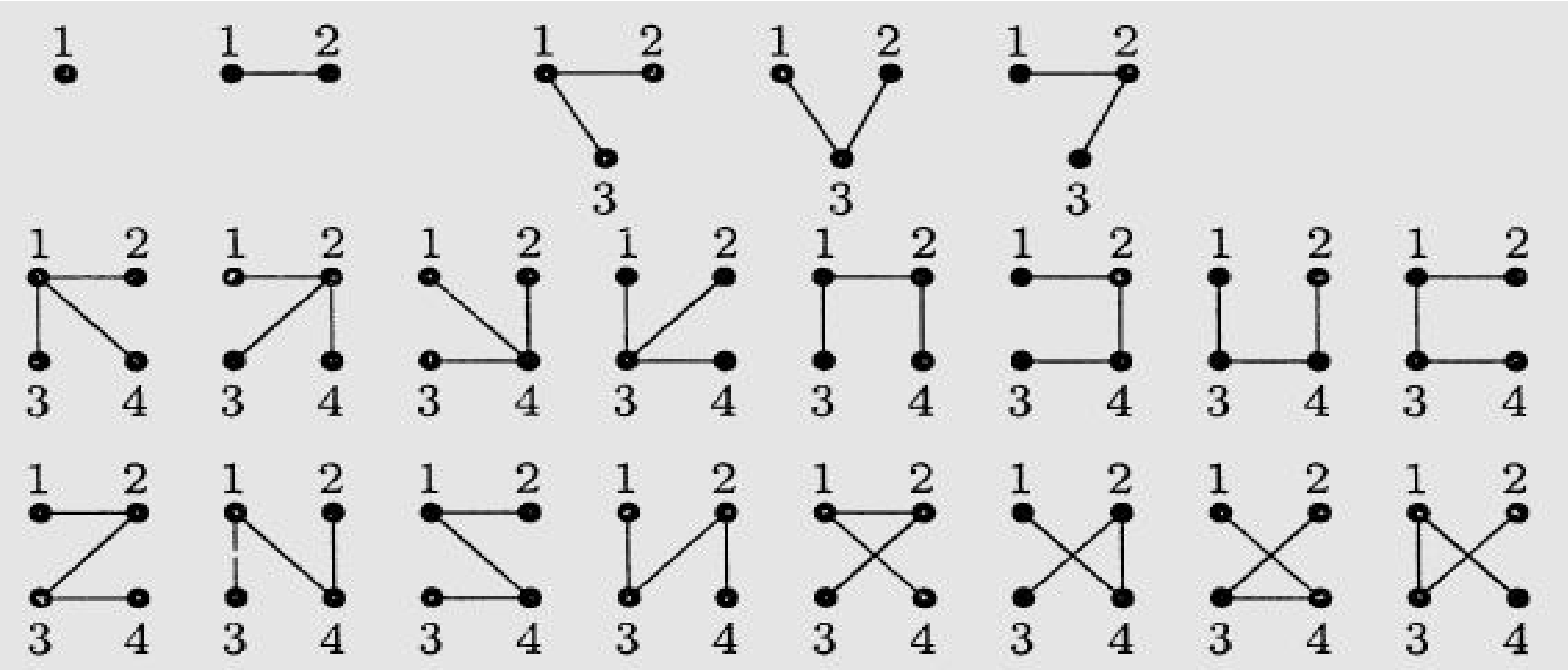
Следствие. Пусть граф G — лес. Тогда $|E(G)| \le |V(G)| - s$, где s − количество компонент связности графа G.

Доказательство. Обозначим n_i количество вершин в i-ой компоненте связности. Так как компонента связности является деревом, то количество рёбер в ней $m_i=n_i-1$. Тогда

$$\left|E(G)\right| = \sum_{i=1}^{s} m_i = \sum_{i=1}^{s} n_i - s = \left|V(G)\right| - s.$$

Код Прюфера.

Пример. Оценим количество деревьев с пронумерованными вершинами.



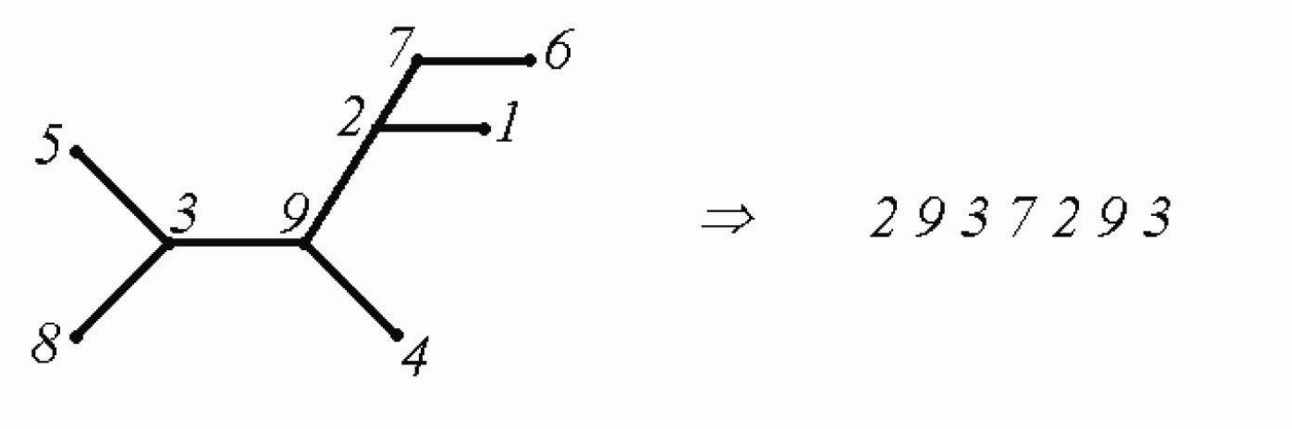
При n = 1, 2, 3 и 4 простым перебором получается, соответственно, 1, 1, 3 и 16 попарно различных деревьев.

Отметим, что для неизоморфных деревьев получаются значения 1, 1, 1, 2.

Определение. *Кодом Прюфера* называется последовательность номеров вершин дерева, полученная с помощью следующей рекурсивной процедуры: удаляем висячую вершину дерева с наименьшим номером и записываем в код номер ее соседа.

При этом для n-вершинного дерева T получится последовательность вершин $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ в которой $a_{n-1}=n$. Поэтому последний символ кода обычно опускают.

Пример.

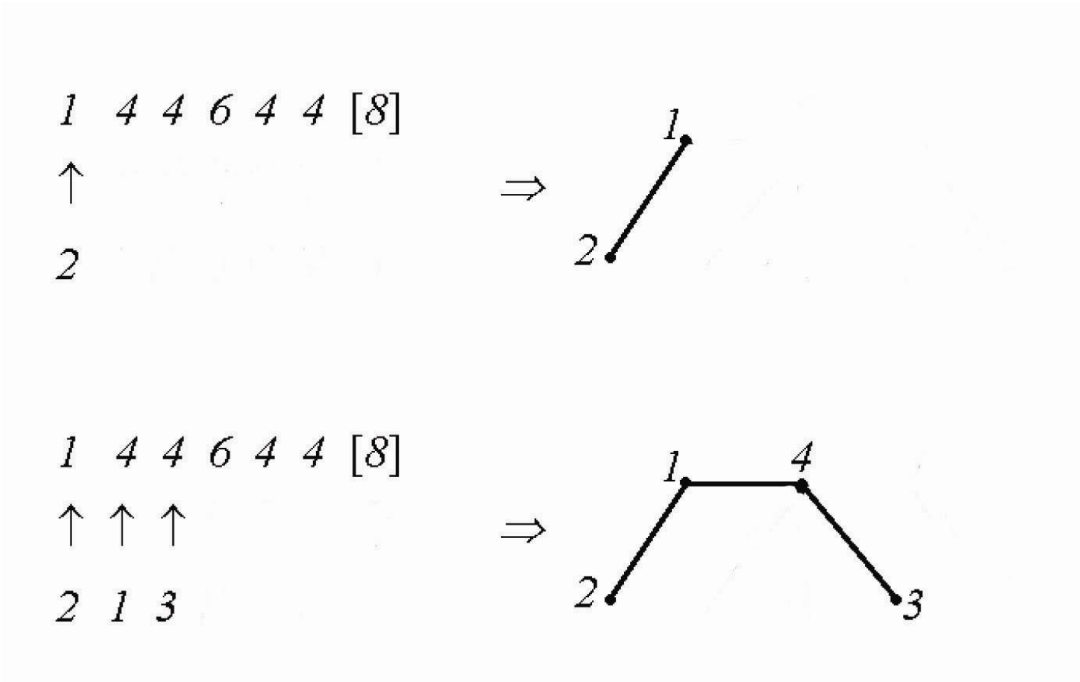


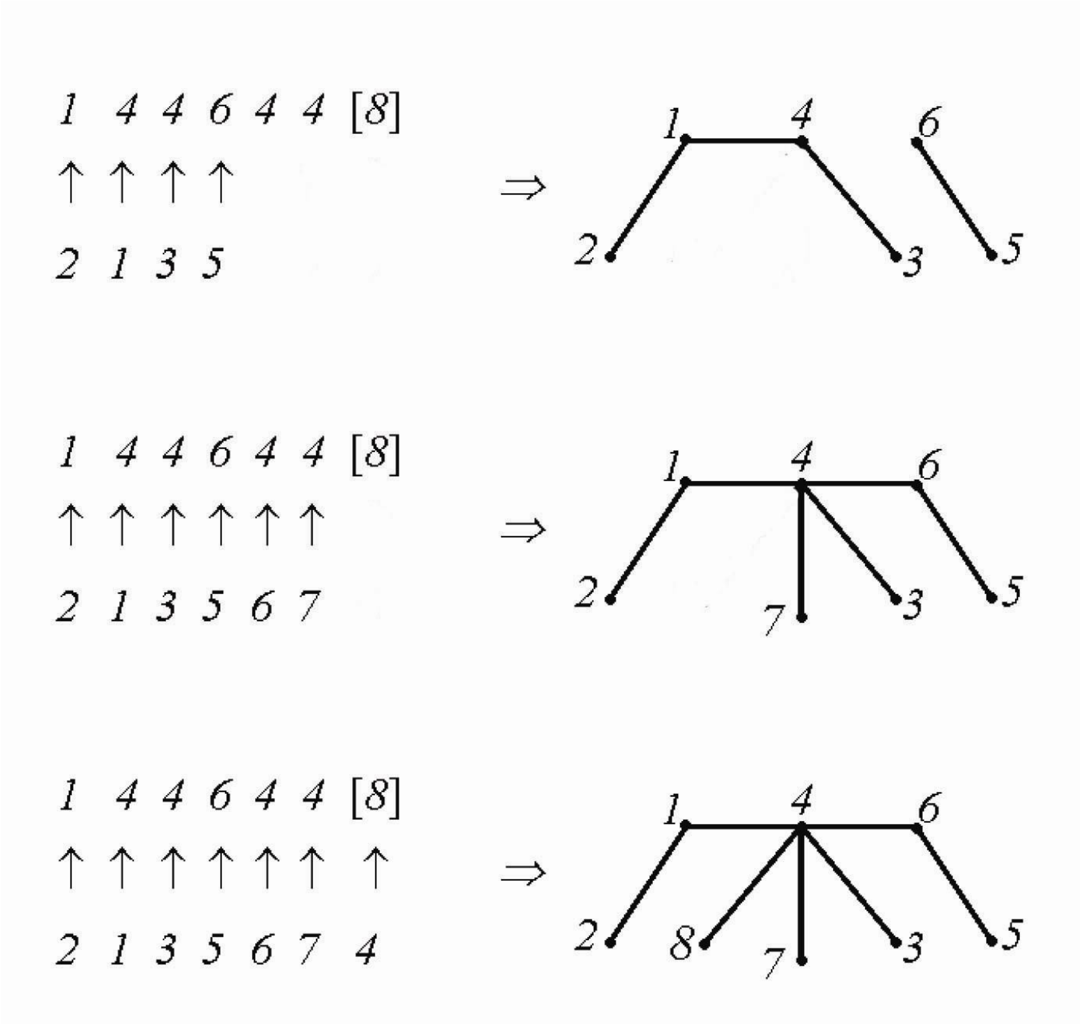
Утверждение. По последовательности $(a_1, a_2, \dots, a_{n\text{-}2})$ однозначно восстанавливается пронумерованное дерево T.

Доказательство. Обозначим b_i номер вершины удаленной из дерева на i-ом шаге построения кода Прюфера. Тогда

$$b_i = \min\left\{k \,/\, k \in \{1,\dots,n\},\ \ k \notin \{a_k,\dots,a_{n-2}\} \cup \{b_1,\dots,b_{k-1}\}\right\}.$$

Пример. Построить дерево по коду Прюфера (1, 4, 4, 6, 4, 4).




1 4 4 6 4 4 [8]
↑ ↑ ↑ ↑
2 1 3 5
⇒
1 4 6 2 3 5
1 4 4 6 4 4 [8]
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
2 1 3 5 6 7
⇒
1 4 6 2 7 3 5
1 4 4 6 4 4 [8]
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
2 1 3 5 6 7 4
⇒
1 4 6 2 8 7 3 5

Теорема. (теорема Кэли). Число n-вершинных деревьев с помеченными вершинами при n ≥ 2 равно n^{n-2}.

Доказательство теоремы Кэли. Количество различных пронумерованных деревьев совпадает с количеством слов длины n-2 в алфавите $\{1,\ldots,n\}$.

Следствие. Почти все графы не являются деревьями.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|T(n)|}{|G(n)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n-2}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}=\lim_{n\to\infty}2^{(n-2)\log_2 n-\frac{n(n-1)}{2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}2^{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2(n-2)}{n-1}\frac{\log_2 n}{n}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}2^x=0.$$

Определение. Обозначим t_n количество неизоморфных деревьев с n вершинами.

Определение. Обозначим T_n количество неизоморфных корневых деревьев с n вершинами.

Количество упорядоченных корневых деревьев на n вершинах задается числом Каталана. Неизоморфным деревьям соответствуют различные упорядоченные корневые деревья. Отсюда вытекает следующая грубая оценка на число деревьев с n вершинами:

$$t_n \le T_n \le c_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Утверждение. При n стремящемся к бесконечности верна следующая асимптотика

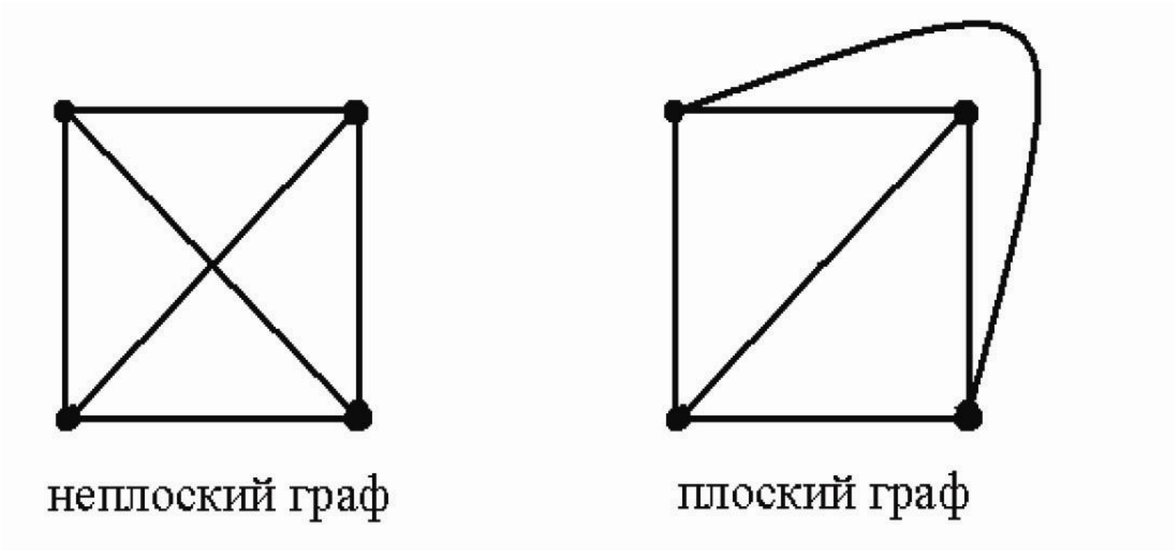
$$t_n \approx \frac{C\alpha^n}{\sqrt{n^5}}$$

где C и α определённые константы, $C = 0.534948\ldots$, $\alpha = 2.9557\ldots$.

Плоские графы.

Определение. Геометрический граф G=(V, E) называется *плоским*, если V — непустое конечное множество точек двумерного пространства, а E — множество простых кривых, удовлетворяющих следующим условиям:

1. каждая кривая множества E содержит ровно две точки множества V, которые являются ее граничными точками;
2. кривые множества E не имеют общих точек, за исключением точек из множества V.



Определение. *Гранью* плоского графа называется компонента связности множества $E^2 \setminus E$, т.е. максимальное по включению множество точек плоскости, каждые две из которых можно соединить жордановой кривой, не пересекающей ребер графа.
Множество граней плоского графа G обозначим через $F(G)$. Для плоского дерева T $|F(T)| = 1$.

Утверждение. Для любого дерева существует изоморфное ему плоское дерево.

Теорема Эйлера.

Теорема. Для всякого связного плоского графа G справедливо равенство $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$.

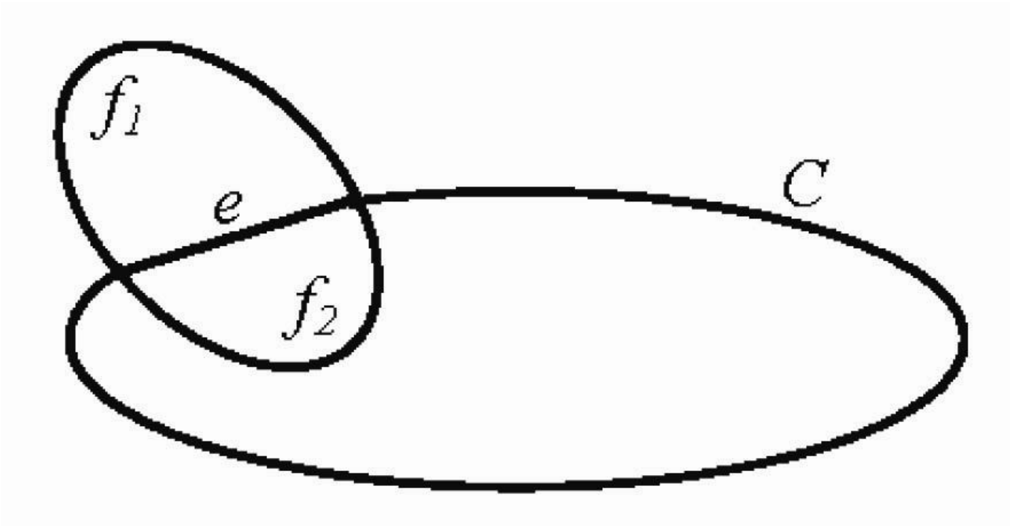
Доказательство.
Для дерева утверждение очевидно.

$$|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=|V(G)|-(|V(G)|-1)+1=2.$$

Пусть теорема неверна и G минимальный по количеству рёбер контрпример. Тогда в графе G есть цикл C. Рассмотрим граф G_1, полученный из графа G удалением произвольного ребра e из цикла C.
Тогда граф G_1 связен и из минимальности контрпримера следует, что

$$|V(G_1)|-|E(G_1)|+|F(G_1)|=2.$$

Грани, f_1 и f_2, инцидентные ребру e в G, различны, тогда как в графе G_1 они сливаются в одну грань.



Поэтому $F(G)= F(G_1)+1$ и, следовательно,

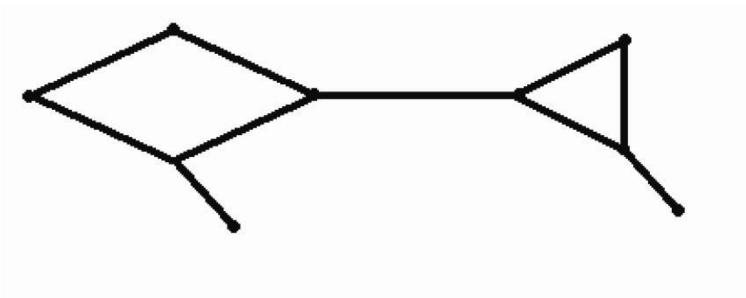
$$\left|V(G)\right|-\left|E(G)\right|+\left|F(G)\right|=\left|V(G_1)\right|-\left(\left|E(G_1)\right|+1\right)+\left(\left|F(G_1)\right|+1\right)=2.$$

Следствия из формулы Эйлера.

Определение. Ребро e графа называется *мостом*, если после его удаления граф становится несвязным.

Определение. Назовем *границей* грани f замкнутый маршрут, проходящий по ребрам, инцидентным грани. *Рангом* грани $r(f)$ назовем длину маршрута её границы.

Пример. Граф на рисунке имеет три грани с рангами 3, 4 и 13.



Утверждение. В границе грани дважды встречаются те, и только те рёбра, которые являются мостами.

Лемма. Сумма рангов граней любого связного плоского графа G равна удвоенному числу его ребер

$$\sum_{f \in F(G)} r(f) = 2|E(G)|.$$

Доказательство. Любое ребро, не являющееся мостом, входит в границу двух областей и учитывается в сумме дважды. Все мосты входят дважды в границу некоторой области и также дважды учитываются в сумме.

Следствие. Для любого связного плоского графа

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-4)+\sum_{f\in F(G)}(r(f)-4)=-8.$$

Доказательство.

По лемме о рукопожатиях

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-4)=2|E(G)|-4|V(G)|.$$

По лемме о рангах граней

$$\sum_{f\in F(G)}(r(f)-4)=2|E(G)|-4|F(G)|.$$

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-4)+\sum_{f\in F(G)}(r(f)-4)=2|E(G)|-4|V(G)|+2|E(G)|-4|F(G)|=$$

$$=-4(|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|)=-8.$$

Следствие. В любом плоском графе существует либо вершина степени не более 3, либо грань ранга 3.

Следствие. Для любого связного плоского графа

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(2r(f)-6)=-12.$$

Доказательство.

По лемме о рукопожатиях

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-6)=2|E(G)|-6|V(G)|.$$

По лемме о рангах граней

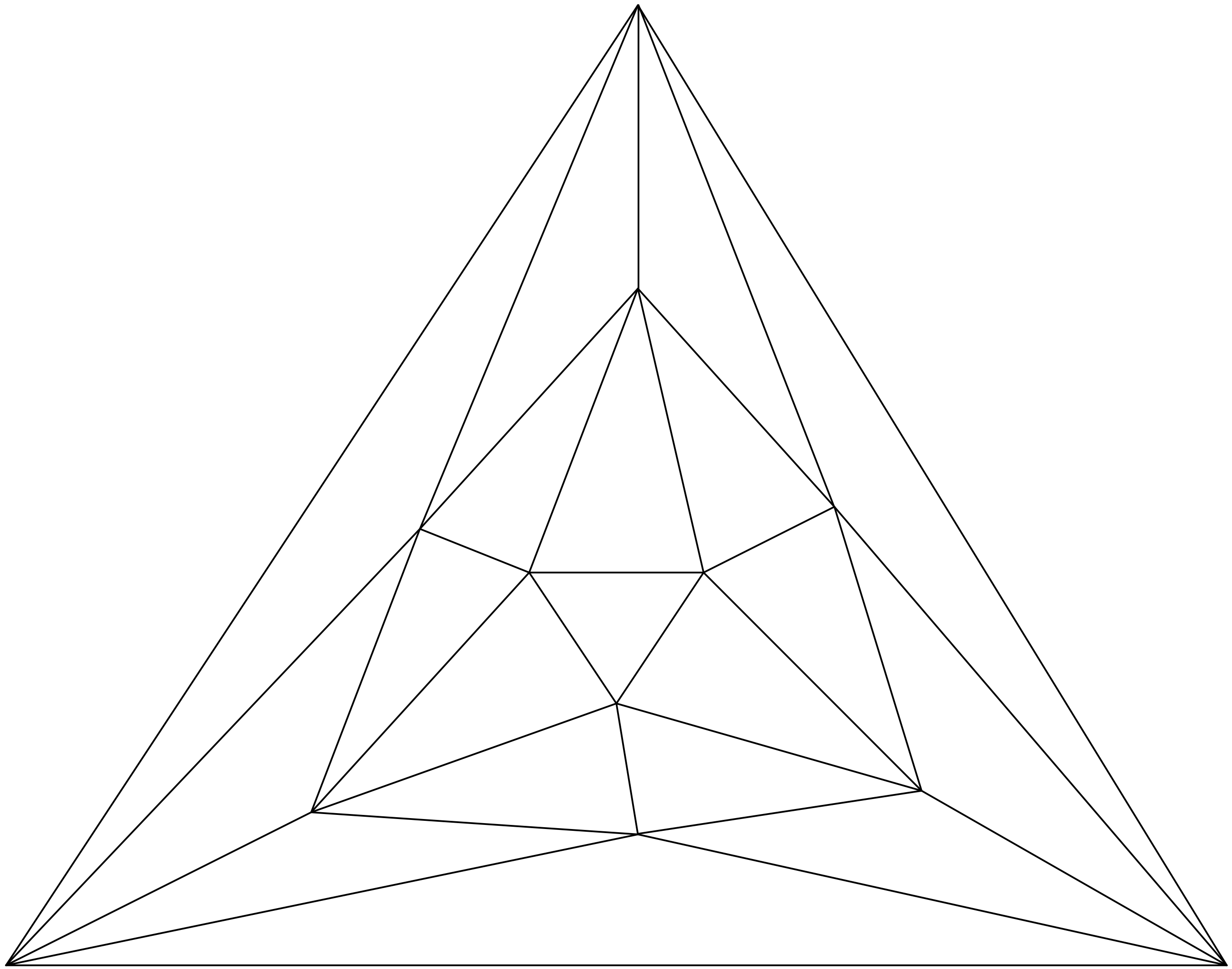
$$\sum_{f\in F(G)}(2r(f)-6)=2(2|E(G)|-3|F(G)|).$$

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(2r(f)-6)=2|E(G)|-6|V(G)|+4|E(G)|-6|F(G)|=$$

$$=-6(|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|)=-12.$$

Следствие. В любом плоском графе существует вершина степени не более 5.

Пример. Плоский граф изоморфный икосаэдру.



В плоских графах, как и в деревьях не так много ребер.

Следствие. Для плоских графов с тремя и более вершинами справедливо $|E(G)| \le 3|V(G)| - 6.$

Доказательство.

Поскольку $r(f) \ge 3$, то по лемме о сумме рангов граней

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} r(f) \ge 3|F(G)|.$$

Складывая с утроенной формулой Эйлера получим

$$2|E(G)| + 3\left(|V(G)| - |E(G)| + |F(G)|\right) \ge 3|F(G)| + 6.$$

Отсюда

$$3|V(G)| - |E(G)| \ge 6.$$

Следствие. Для плоских графов с тремя и более вершинами, не содержащих циклов длины 3 справедливо

$$|E(G)| \le 2|V(G)| - 4.$$

Доказательство.

Поскольку $r(f) \ge 4$, то по лемме о сумме рангов граней

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} r(f) \ge 4|F(G)|.$$

Складывая с формулой Эйлера, умноженной на 4 получим

$$2|E(G)| + 4(|V(G)| - |E(G)| + |F(G)|) \ge 4|F(G)| + 8.$$

Отсюда

$$4|V(G)| - 2|E(G)| \ge 8.$$

Пример. На плоскости расположено n кругов, любые два из которых не имеют общих внутренних точек. Доказать, что максимальное количество точек касания равно $3n$-6.