Семинар 1. *(5 сентября 2024 г.)*

Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Задача Коши

1. *Теорема о неявной функции*

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0; \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0, \end{cases} \qquad \text{или } F(x, y) = 0.$$

Теорема 1. *Если отображение $F : U \to \mathbb{R}^n$, определенное в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+n}$, таково, что*
1) $F \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$;
2) $F(x_0, y_0) = 0$;
3) Матрица частных производных $F'_y(x_0, y_0)$ невырождена, т.е.

$$\det F'_y(x_0, y_0) = \det \left. \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & & \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0,$$

то существует $(n+m)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^n \subset U$, где

$$I_x^m = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, |x - x_0| < \alpha\}, \ I_y^n = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y - y_0| < \beta\}$$

и такое отображение $f \in C^p(I_x^m, I_y^n)$, что для любой точки $(x, y) \in I_x^m \times I_y^n$ можно разрешить систему уравнений $F(x, y)$ относительно $y_1, \dots, y_n$, т.е.

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m); \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_m). \end{cases}$$

Далее нас будет интересовать случай $n = 1$, т.е. когда система состоит из одного уравнения.

2. *Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка*

Определение 1. *Уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(u, x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_1(x,u)u_{x_1} + \ldots + a_n(x,u)u_{x_n} = b(x,u), \qquad (1)$$

где $u(x_1, \dots, x_n)$ *— искомая функция,* $a_i(x,u) \in C^1(B)$*,* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$*, называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.*

Хотим свести уравнение (1) к линейному уравнению в частных производных, метод решения которого нам известен. Для этого введем функцию $v(x,u)$ такую, что $\left.\dfrac{\partial v}{\partial u}\right|_{u(x)} \neq 0$, где $u(x)$ — решение уравнения (1), и будем искать решение в виде неявно заданной функции $v(x,u) = F(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = 0$. Продифференцируем тождество $v(x, u(x) = 0)$ по каждой независимой переменной x_i:

$$\frac{dv}{dx_i} = \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0.$$

Выразим отсюда $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$:

$$u_{x_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_i}/\frac{\partial v}{\partial u} = -v_{x_i}/v_u.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (1) (*помним, что производная* $v_u|_{u(x)}$ *функции* $v(x,u)$ *на решении* $u(x)$ *не обращается в ноль*):

$$-a_1(x,u)v_{x_1}/v_u - \ldots - a_n(x,u)v_{x_n}/v_u = b(x,u).$$

Домножим это уравнение на $-v_u$ и перенесем всё в левую часть:

$$a_1(x,u)v_{x_1} + \ldots - a_n(x,u)v_{x_n} + b(x,u)v_u = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2), в котором $v(x,u)$ — искомая функция, является линейным уравнением в ЧП первого порядка. Чтобы решить его, вспомним алгоритм решения с прошлого семинара.

Шаг 1. Запишем для уравнения (2) характеристическую систему из n уравнений:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b} \tag{3}$$

Шаг 2. Найдем n независимых первых интегралов $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, решая уравнения системы:

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = C_1; \\ \ldots \\ \Phi_n(x) = C_n. \end{cases}$$

Независимость проверяем по определению, если она не очевидна.

Шаг 3. Решением уравнения (2) будет неявно заданная произвольная гладкая функция, зависящая от найденных первых интегралов, т.е.

$$v(x, u) = F(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) = 0.$$

Вспомним теорему о неявной функции и предположим, что в окрестности любой точки $F'_{\Phi_k} = \dfrac{\partial F}{\partial \Phi_k} \neq 0$. Тогда можно разрешить уравнение $F(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) = 0$ относительно Φ_k:

$$\Phi_k(x, u) = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}, \Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n),$$

где f принадлежит тому же классу гладкости, что и F. Можно записать ответ в виде $\Phi_k(x, u) = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}, \Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n)$ или попытаться выразить u, если это возможно.

Замечание. При решении квазилинейных уравнений не нужно каждый раз вводить функцию v. Достаточно записать характеристическую систему (3) и искать решение в виде неявно заданной функции $F(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, а потом в силу теоремы о неявной функции представить один первый интеграл как функцию, зависящую от всех остальных. Далее будем использовать сокращеный алгоритм решения.

3. *Разбор № 1200 из задачника А. Ф. Филиппова*

1200. Решить уравнение

$$yzz_x + xzz_y = xy.$$

Решение. Характеристическая система имеет вид:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Один первый интеграл можно найти из уравнения

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz}$$

Решая его, получим $\Phi_1 = x^2 - y^2 = C_1$. Аналогично, решая уравнение

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{xy},$$

получим второй первый интеграл $\Phi_2 = z^2 - x^2 = C_2$. Эти первые интегралы независимы.

Запишем общее решение:

$$F(\Phi_1, \Phi_2) = F(x^2 - y^2, z^2 - x^2) = 0.$$

где F — произвольная гладкая функция.

По теореме о неявной функции можно разрешить данное уравнение относительно Φ_2:

$$z^2 - x^2 = f(x^2 - y^2).$$

4. *Задача Коши для линейных уравнений в ЧП первого порядка*

Поставим задачу Коши для линейного уравнения в ЧП первого порядка:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = a_1(x) u_{x_1} + \ldots + a_n(x) u_{x_n} = b(x), \\ u|_S = \varphi(x), \end{cases} \tag{4}$$

где $S : \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = 0, \Phi \in C^1, \nabla\Phi|_S \neq 0\}$ — $(n-1)$-мерная поверхность класса C^1, заданная неявно уравнением $\Phi(x) = 0$.

Теорема 2. *Пусть $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in S$ и в этой точке поверхность S не касается характеристик уравнения. Тогда существует окрестность точки x^0, в которой задача Коши* (4) *имеет единственное решение $u(x)$ для любых функций $b(x), \varphi(x) \in C^1$.*

Определение 2. *Задача Коши называется корректной, если у нее существует единственное решение, которое непрерывно зависит от начальных данных.*

5. *Продолжение разбора №1200*

Решим задачу Коши для уравнения из №1200, т.е. найдем поверхность $z(x, y)$, проходящую через кривую $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Подставим начальные данные в общее решение $z^2 - x^2 = f(x^2 - y^2)$:

$$a^2 - y^2 - a^2 = f(a^2 - y^2) \Rightarrow f(a^2 - y^2) = -y^2.$$

Сделаем замену $a^2 - y^2 = s$, тогда

$$f(s) = s - a^2 \Rightarrow f(x^2 - y^2) = x^2 - y^2 - a^2 = z^2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - y^2 - z^2 = a^2.$$

(На семинаре решали № 1212 из задачника А. Ф. Филиппова и задачу Коши $u_x + y^2 u_y + u = 0,\ u|_{y=2} = x + 2$.)

Домашнее задание: № 1211, 1202, 1196, 1218 из того же задачника.