Занятие 4

Уравнения в полных дифференциалах

Мы уже убедились ранее, что запись дифференциального уравнения первого порядка в виде

$$M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0 \tag{4.1}$$

является весьма удобной, поскольку переменные x и y входят в уравнение «на равных правах», и мы не акцентируем внимание на том, что x является независимой переменной, а y — функцией от нее. Как правило, в таком случае семейство решений мы получаем в виде общего интеграла $F(x;y;C) = 0$.

Уравнение (4.1) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$, то есть

$$dU = M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy. \tag{4.2}$$

Общий интеграл такого уравнения имеет вид $U(x;y) = C$.

Как определить, является ли уравнение вида (4.1) уравнением в полных дифференциалах? Понятно, что если выполнено условие (4.2), то функции $M(x;y)$ и $N(x;y)$ являются частными производными функции $U(x;y)$, а именно:

$$M(x;y) = \frac{\partial U}{\partial x} \text{ и } N(x;y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Если функция $U(x;y)$ дважды дифференцируема, то ее вторые смешанные производные должны совпадать:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x;y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x;y)}{\partial x}.$$

И следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{\partial M(x;y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x;y)}{\partial x} \tag{4.3}$$

Имеет место следующая

Теорема. Если функции $M(x;y)$, $N(x;y)$, $\dfrac{\partial M(x;y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N(x;y)}{\partial x}$ непрерывны в области $G : a < x < b$, $c < y < d$, и в области G выполнено условие (4.3), то через каждую точку $(x_0; y_0) \in G$ проходит единственная интегральная линия уравнения (4.1), и эта интегральная линия задается уравнением $U(x;y) = C$.

Посмотрим, как можно быстро найти функцию $U(x;y)$.

Пример 1. Решим уравнение $e^{-y}dx = (2y + xe^{-y})\, dy$.

Приведем уравнение к виду (4.1): $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})\, dy = 0$.

Проверим выполнения условия (4.3): $\dfrac{\partial e^{-y}}{\partial y} = -e^{-y} = \dfrac{\partial(-2y - xe^{-y})}{\partial x}$.

Остальные условия теоремы также выполнены во всей плоскости xOy, поэтому существует такая функция $U(x;y)$, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{-y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y - xe^{-y}.$$

Проинтегрируем первое равенство по x, считая y параметром:

$$U(x;y) = x \cdot e^{-y} + C(y).$$

Тогда $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -xe^{-y} + C'(y)$. С другой стороны $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -2y - xe^{-y}$, поэтому $C'(y) = -2y$ и $C(y) = -y^2 + C$, откуда $U(x;y) = x \cdot e^{-y} - y^2 + C$.

Таким образом, мы восстановили функцию $U(x;y)$ по ее дифференциалу, и можем записать общий интеграл уравнения:

$$xe^{-y} - y^2 = C. \quad \square$$

Если условие (4.3) не выполнено, то уравнение (4.1) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако, его можно сделать таковым, умножив на некоторую функцию $\mu(x;y)$. Эту функцию называют *интегрирующим множителем.* Известно, что такой множитель существует, и не один, но найти его не так-то просто.

Допустим, что после умножения (4.1) на некоторую функцию $\mu(x;y)$ мы получим уравнение в полных дифференциалах

$$\mu(x;y)M(x;y)\,dx + \mu(x;y)N(x;y)\,dy = 0.$$

Тогда его коэффициенты должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot M) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot N).$$

Выполнив дифференцирование и перегруппировав слагаемые, мы увидим, что интегрирующий множитель должен являться решением линейного уравнения в частных производных:

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(-\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}) \tag{4.4}$$

Алгоритм решения этого уравнения подразумевает, что на определенном этапе нужно решить уравнение (4.1). Казалось бы, круг замкнулся...

Выход из этого положения заключается в том, что нам не нужно находить множество *всех* решений уравнения (4.4), а достаточно найти хотя бы *одно* решение $\mu(x;y)$. Поэтому можно, исходя из различных наводящих соображений, искать интегрирующий множитель специального вида.

Чаще всего подбирают множитель $\mu(x;y)$, зависящий от некоторой комбинации переменных x и y, то есть $\mu = \mu(t)$, где $t = t(x;y)$. Поскольку в этом случае μ является функцией от одной переменной, то уравнение (4.4) существенно упростится:

$$M \cdot \mu'_t t'_y - N \cdot \mu'_t t'_x = \mu(-M'_y + N'_x).$$

Отсюда

$$\frac{\mu'_t}{\mu} = (\ln \mu)'_t = \frac{-M'_y + N'_x}{M \cdot t'_y - N \cdot t'_x}.$$

Очевидно, что интегрирующий множитель указанного вида будет существовать, только если правая часть этого уравнения является функцией от t. В таблице приведены некоторые виды интегрирующих множителей и условия, при которых они существуют.

$\mu = \mu(t)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = f(t)$
$\mu = \mu(x)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = \frac{-M'_y + N'_x}{-N} = f(x)$
$\mu = \mu(y)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = \frac{-M'_y + N'_x}{M} = f(y)$
$\mu = \mu(x+y)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = \frac{-M'_y + N'_x}{M - N} = f(x+y)$
$\mu = \mu(xy)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = \frac{-M'_y + N'_x}{xM - yN} = f(xy)$

Пример 2. Решим уравнение $(x + y^2)\,dx + (x^2 - \frac{x^2}{y})\,dy = 0.$

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как $M = x + y^2$, $N = x^2 - \frac{x^2}{y}$, и $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - \frac{2x}{y}$.

Отсюда $-M'_y + N'_x = -2y + 2x - \frac{2x}{y}$. Перебирая предложенные варианты, мы придем к тому, что можно искать интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x+y)$. Тогда

$$\frac{\mu'_t}{\mu} = (\ln \mu)'_t = \frac{-2}{x+y} = \frac{-2}{t}.$$

Следовательно $\mu = t^{-2} = (x+y)^{-2}$ и уравнение

$$\frac{x+y^2}{(x+y)^2}\,dx + \frac{x^2 - \frac{x^2}{y}}{(x+y)^2}\,dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Далее действуем по уже знакомому алгоритму. Требуется найти такую функцию $U(x;y)$, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x+y^2}{(x+y)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2 - \frac{x^2}{y}}{(x+y)^2}.$$

Интегрируем первое равенство по x, считая y параметром. Заметим, что

$$\frac{x+y^2}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)+(y^2-y)}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{y^2-y}{(x+y)^2},$$

поэтому

$$U(x;y) = \ln|x+y| - \frac{y^2-y}{x+y} + C(y).$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{x+y} - \frac{(2y-1)(x+y)-(y^2-y)}{(x+y)^2} + C\,'(y) = \frac{(x^2 - \frac{x^2}{y})}{(x+y)^2}.$$

Отсюда $C\,'(y) = 1 - \dfrac{1}{y}$ и $C(y) = y - \ln y$. Итак, общий интеграл имеет вид:

$$\ln|\frac{x+y}{y}| - \frac{y^2-y}{x+y} + y = C.$$

Заметим, что при делении на $(x+y)^2$ мы могли потерять решение $x+y=0$. Подстановкой в исходное уравнение убедимся, что функция $y=-x$ действительно является его решением. Мы не будем здесь обсуждать вопрос, является ли это решение особым, но очевидно, что оно не может быть получено из общего интеграла, поэтому его следует записать отдельно. $\square$

Метод «интегрируемых комбинаций»

Умножая уравнение (4.1) на интегрирующий множитель, мы приводим его к виду $dU(x;y) = 0$ и получаем общий интеграл $U(x;y) = C$. Однако, как мы убедились, поиск такого множителя — довольно трудоемкий процесс.

Тем не менее, часто в уравнении можно выделить группу слагаемых, которая является дифференциалом какого-то выражения. Обозначив это выражение одной буквой, то есть введя новую переменную, иногда удается упростить уравнение, и в итоге — решить его.

Запомните следующие комбинации:

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$d(u^2 + v^2) = 2u\,du + 2v\,dv$$

$$f\,'(u)du = df$$

Пример 3. Решим уравнение $(x + x^2 + y^2)\,dx + y\,dy = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $(x^2 + y^2)\,dx + (x\,dx + y\,dy) = 0$.

Введем новую функцию $u = x^2 + y^2$, тогда $du = 2(x\,dx + y\,dy)$, и уравнение приобретает очень простой вид:

$$2u\,dx + du = 0.$$

Его интеграл $2x + \ln|u| = C$, или $2x + \ln(x^2 + y^2) = C$.

Заметим, что решая уравнение с разделяющимися переменными $2u\,dx + du = 0$, мы делили его на u. Нетрудно догадаться, что функция $u^{-1} = (x^2 + y^2)^{-1}$ является интегрирующим множителем исходного уравнения. $\square$

Пример 4. Решим уравнение $(xy^3-1)\,dx+x^2y^2\,dy=0$.

Группируем слагаемые одинаковой степени однородности:

$$xy^2(y\,dx+x\,dy)=dx, \text{ или } xy^2d(xy)=dx.$$

Умножаем обе части уравнения на x и полагаем $u=xy$. Уравнение приобретает вид $u^2du=xdx$, откуда $\dfrac{u^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}=C$. Возвращаясь к переменным $(x;y)$, запишем общий интеграл: $2x^3y^3-3x^2=C$.

В процессе решения мы умножали уравнение на x — это и есть интегрирующий множитель уравнения.

Заметим также, что умножая уравнение на x, мы могли приобрести постороннее решение $x\equiv 0$ (оно входит в общий интеграл при $C=0$). Однако проверка показывает, что эта функция является решением исходного уравнения. $\square$

Пример 5. Решим уравнение $(x^2-\sin^2 y)\,dx+x\sin 2y\,dy=0$.

Заметим, что $d(\sin^2 y)=2\sin y\cos y dy=\sin 2y dy$. Поэтому положим $u=\sin^2 y$, и уравнение примет вид

$$x^2\,dx-u\,dx+x\,du=0.$$

Разделив его на x^2, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$dx+\frac{x\,du-u\,dx}{x^2}=0, \text{ или } dx+d\left(\frac{u}{x}\right)=0.$$

Общий интеграл этого уравнения $x+\dfrac{u}{x}=C$, или $x^2+\sin^2 y=Cx$. Также при делении на x^2 было потеряно решение $x\equiv 0$, которое невозможно получить из общего интеграла ни при каком значении C. $\square$

Несомненно, метод интегрируемых комбинаций не является алгоритмическим, а требует проявления смекалки и наработки определенного опыта. Однако даже однородные и линейные уравнения, имеющие четкие алгоритмы решения, можно эффективно решить с помощью этого метода.

Пример 6. Решить уравнение $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

Это уравнение однородное, но метод интегрируемых комбинаций быстрее приведет нас к цели. Перегруппируем слагаемые: $x^2\,dx + (x\,dy^2 - y^2\,dx) = 0$, и разделим уравнение на x^2. Получим уравнение в полных дифференциалах $dx + d(\frac{y^2}{x}) = 0$.

Его общий интеграл $x + \dfrac{y^2}{x} = C$, или $x^2 + y^2 = Cx$. При делении было потеряно частное решение $x \equiv 0$. $\square$

Пример 7. Решим уравнение $(x^2y^3 + y)\,dx + (x^3y^2 - x)\,dy = 0$.

Здесь хорошо видны две группы слагаемых одинаковой степени однородности:

$$(x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy) + (y\,dx - x\,dy) = 0.$$

$$x^2y^2\,d(xy) + y^2 d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Поделив уравнение на xy и положив $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$u\,du + \frac{dv}{v} = 0.$$

Его общий интеграл $u^2 + \ln v^2 = C$, или $x^2y^2 + \ln\dfrac{x^2}{y^2} = C$.

При делении на xy были потеряны решения $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$. $\square$

Для выделения интегрируемых комбинаций не обязательно переходить от производных к дифференциалам и записывать уравнение в симметричной форме. Можно выделять выражения, являющиеся полными производными.

Пример 8. Решим уравнение $y\,'\sin x + y\cos x = \sin^2 x$.

Это уравнение линейное, но мы заметим, что его левая часть является полной производной: $y\,'\sin x + y\cos x = (y\sin x)\,'$, поэтому

$$(y\sin x)\,' = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad y\sin x = \int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$y = \frac{C}{\sin x} + \frac{x}{2\sin x} - \frac{\cos x}{2} \quad \square$$

Замечание: так же легко можно решить задачи 1 и 5 из самостоятельной работы предыдущего занятия.

Пример 9. Решим уравнение $xy\,' = y + x^2$.

Перепишем уравнение в виде $\dfrac{xy\,' - y}{x^2} = 1$, или $(\dfrac{y}{x})\,' = 1$.

Следовательно $\dfrac{y}{x} = x + C$, $y = Cx + x^2$. $\square$