Домашняя работа к занятию 1

Для каждого из уравнений **1.1 — 2.2**

1) найдите формулу общего решения (или общего интеграла) уравнения,

2) решите поставленную задачу Коши и укажите максимальный интервал существования данного решения,

3) нарисуйте интегральные линии уравнения и выясните, является ли решение $y = \varphi(x)$ особым.

1.1 $\begin{cases} y\,' = \dfrac{\sqrt{y}}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

$\varphi(x) \equiv 0$

1.2 $\begin{cases} y\,' = \dfrac{y^2}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

$\varphi(x) \equiv 0$

1.3 $\begin{cases} y\,' = \dfrac{y^3}{x^2} \\ y(-1) = -1 \end{cases}$

$\varphi(x) \equiv 0$

1.4 $\begin{cases} y\,' = e^{x-y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\varphi(x) = x$

2.1 $\begin{cases} 2x^2y\,' = \cos 2y - 1 \\ y(1) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

$\varphi(x) = \pi n$, $n \in Z$

2.2 $\begin{cases} y\,' = \sqrt[3]{2x + y - 1} - 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\varphi(x) = 1 - 2x$

2.3 Согласно закону излучения тепла скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающего воздуха, то есть изменение температуры тела описывается уравнением $\dot{x} = -k(x - a)$, где $x = x(t)$ — температура тела в момент времени t, a — температура воздуха, k — положительный коэффициент.

Камень был нагрет до температуры 40^oC, после чего в течение часа его температура снизилась до 30^oC. Через сколько часов температура камня снизится до 21^oC, если температура окружающего воздуха равна 20^oC?

2.4 Эффективность рекламной кампании можно оценить, используя уравнение $\dot{x} = kx(N - x)$, где $x(t)$ — число людей, знающих о товаре в момент времени t, N — количество потенциальных покупателей, коэффициент k положителен. Обоснуйте расхожую сентенцию «если новость знают двое, то вскоре узнают все».

3.1 Приведите примеры уравнений первого порядка, для которых непродолжаемое решение задачи Коши с начальными данными $y(1) = 1$ определено на интервале а) $(0; +\infty)$ б) $(0; a)$ в) $(a; b)$.

3.2 В области $(x > 0; y > 0)$ исследуйте поведение интегральных кривых уравнения $y' = -\dfrac{f(y)}{g(x)}$, если $f(y)$ непрерывна при $y \geqslant 0$, $f(0) = 0$ и $f(y) > 0$ при $y > 0$, $g(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, $g(0) = 0$ и $g(x) > 0$ при $x > 0$.

3.3 Докажите, что если функция $f(y)$ непрерывна, то все решения уравнения $y' = f(y)$ монотонны.

Ответы и указания

1.1 1) $y = \dfrac{1}{4}\ln^2 Cx$ или $x = Ce^{2\sqrt{y}}$; решение $y \equiv 0$ не описывается формулой общего решения
2) $y = \dfrac{(\ln x + 2)^2}{4}$, $x \in (e^{-2}; +\infty)$ 3) $y \equiv 0$ — особое

1.2 1) $y = -\dfrac{1}{\ln Cx}$ или $x = Ce^{-1/y}$; решение $y \equiv 0$ не описывается формулой общего решения
2) $y = (1 - \ln x)^{-1}$ или $x = e^{\frac{y-1}{y}}$, $x \in (0; e)$ 3 $y \equiv 0$ — не особое

1.3 1) $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{2}{x} + C$; решение $y \equiv 0$ не описывается формулой общего решения

2) $y = -\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}$, $x \in (-\infty; -2/3)$ 3) $y \equiv 0$ — не особое

1.4 1) $e^y = e^x + C$ 2) $y = x$, $x \in (-\infty; +\infty)$

3) $y = x$ — не особое, получается из общего решения при $C = 0$

2.1 1) $\operatorname{ctg} y = -\dfrac{1}{x} + C$; решения $y = \pi n$, $n \in Z$, не описываются формулой общего решения;

2) $y(1) = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow C = 0$ и $x = -\operatorname{tg} y$. Разрешаем относительно y с учетом условия $y(1) = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow y = \pi - \operatorname{arctg} x$, $x \in (0; +\infty)$

3) $y = \pi n$, $n \in Z$, — не особые

2.2 1) $(2x + y - 1)^{2/3} = \dfrac{2}{3}x + C$; решение $y = 1 - 2x$ не описывается формулой общего решения

2) $y = 1 - 2x - (\dfrac{2}{3}x + 1)^{3/2}$, $x \in (-\infty; -\dfrac{3}{2})$ 3) $y = 1 - 2x$ — особое

2.3 *Указание*: Решение уравнения $x - a = (x_0 - a)e^{-kt}$. Подставим числовые значения: $10 = 20e^{-k}$, следовательно $k = \ln 2$.

Ответ: $t = \log_2 20$

2.4 *Указание*: Пусть в начальный момент времени о товаре знают N_0 человек ($N_0 < N$). Решите задачу Коши $\begin{cases} \dot{x} = kx(N - x) \\ x(0) = N_0 \end{cases}$

Общее решение $\dfrac{x(t)}{N - x(t)} = Ce^{kNt}$. Из начальных условий $C = \dfrac{N_0}{N - N_0}$, следовательно $x(t) = \dfrac{N_0 N}{N_0 + (N - N_0)e^{-kNt}}$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = N$.