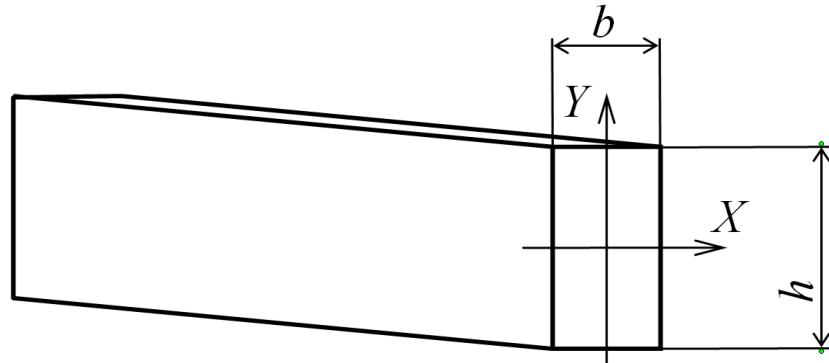


VIII

*Упруго –
пластический
изгиб.*

Стержень прямоугольного поперечного сечения

Рассмотрим прямой чистый изгиб стержня прямоугольного поперечного сечения



Стержень выполнен из идеального упруго-пластического материала:

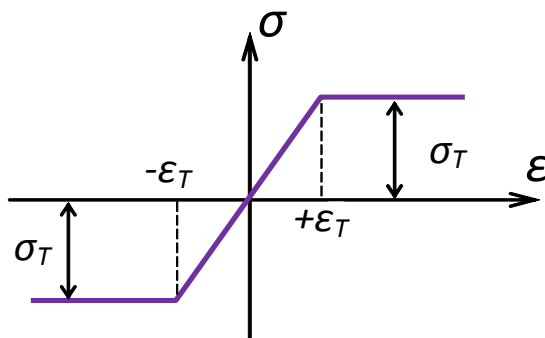
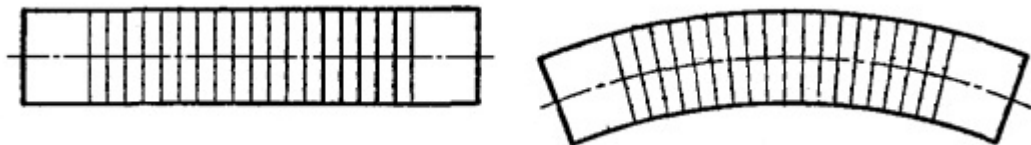


Рис. VIII.1.

Выполняется гипотеза плоских сечений:



С увеличением внутреннего изгибающего момента эпюры напряжений и деформаций в поперечном сечении стержня меняются следующим образом (см. рис. VIII.2.):

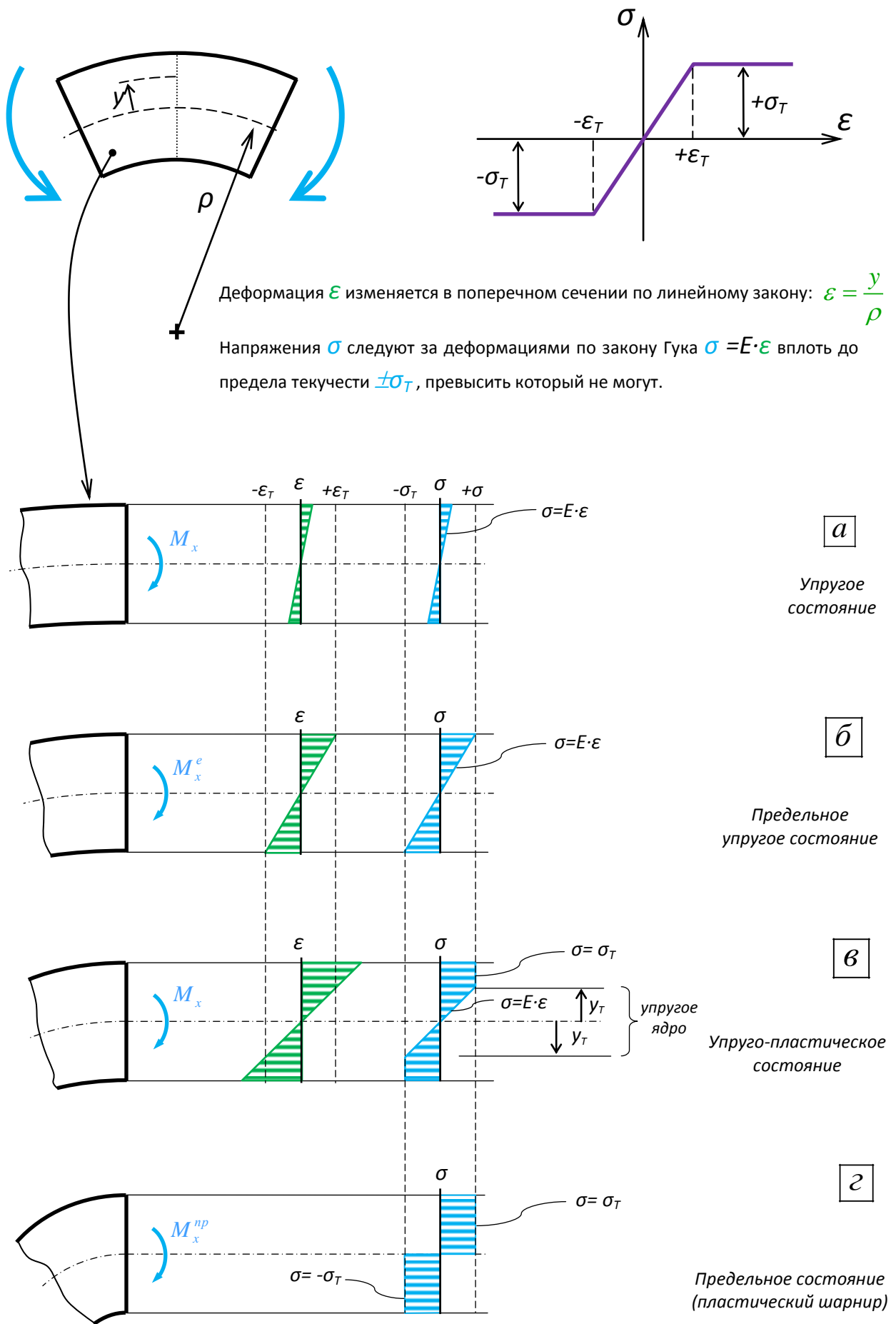


Рис. VIII.2.

a Упругое состояние:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon ;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} ; \quad \text{где} \quad W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} .$$

б Предельное упругое состояние:

Верхние и нижние точки поперечного сечения готовы потечь:

$$\sigma_{\max} = \sigma_T, \quad \sigma_{\min} = -\sigma_T .$$

Внутренний изгибающий момент M_x , вызывающий такое состояние, называется **предельным упругим** внутренним моментом

M_x^e :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_T = \frac{M_x^e}{W_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_x^e = \sigma_T \cdot W_x} \quad (\text{VIII.1})$$

в Упруго - пластическое состояние:

$$\sigma = \begin{cases} +\sigma_T & , \quad \varepsilon \geq \varepsilon_T \\ E \cdot \varepsilon & , \quad \varepsilon_T \geq \varepsilon \geq -\varepsilon_T \\ -\sigma_T & , \quad \varepsilon \leq -\varepsilon_T \end{cases}$$

y_T - граница упругой и пластической зон сечения:

$$\varepsilon_T = \frac{y_T}{\rho} \quad \Rightarrow \quad y_T = \varepsilon_T \cdot \rho = \frac{\sigma_T}{E} \cdot \rho \quad (\text{VIII.2})$$

Чем больше M_x , тем больше кривизна, меньше ρ , и ниже граница y_T .

2 **Предельное состояние:**

$y_T = 0$ – пластическая зона охватила всё поперечное сечение стержня.

$$\sigma = \begin{cases} +\sigma_T, & \text{в верхней половине сечения;} \\ -\sigma_T, & \text{в нижней половине сечения.} \end{cases}$$

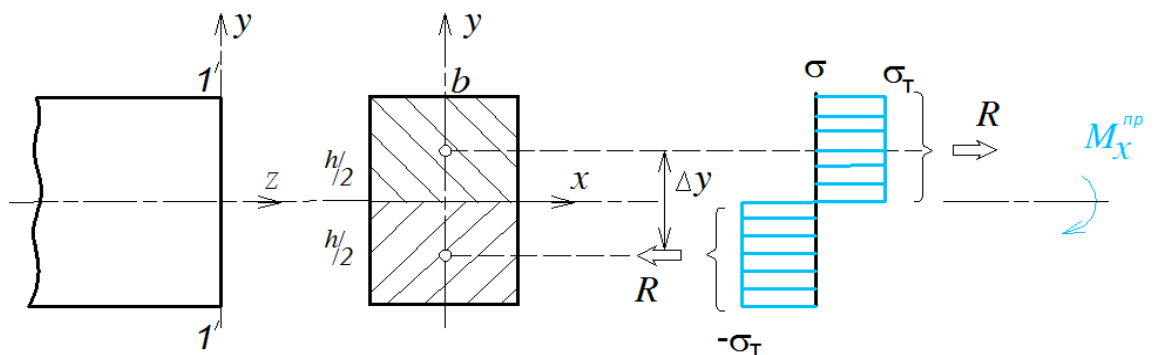
Внутренний изгибающий момент M_x , вызывающий такое состояние называется **предельным**.

$$M_x^{np} = M_{np} = \sigma_T \cdot W_x^{nl} \quad (VIII.3)$$

где

$$W_x^{nl} = \frac{b \cdot h^2}{4} \quad - \quad \text{пластический момент сопротивления изгибу прямоугольного сечения.} \quad (VIII.4)$$

Формулы (VIII.3) и (VIII.4) выводятся следующим образом:



$$R = \left(b \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot \sigma_T \quad - \text{ равнодействующая.}$$

$$M_x^{np} = R \cdot \Delta y = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_T \cdot \frac{h}{2} = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_T \quad - \text{ момент пары сил } R.$$

$$W_x^{nl}$$

Внутренний момент M_x не может быть больше предельного значения M_x^{np} . Материал не способен его удержать, ибо напряжения при любых деформациях не могут превзойти отметку σ_T (рис. VIII.1.).

Если внешняя нагрузка столь велика, что требует развития внутреннего изгибающего момента большего M^{np} , то начинается динамический процесс пластического деформирования: конструкция необратимо формоизменяется во времени.

Стержень произвольного поперечного сечения

Стадии деформирования стержня с поперечным сечением произвольной формы при чистом упруго-пластическом изгибе аналогичны рис. VIII.2. за одним исключением: в процессе упруго-пластического деформирования нейтральный слой постепенно смещается от оси $x_{упр}$ к оси $x_{пласт}$ и в предельном состоянии ($x_{пласт}$) делит поперечное сечение на две части, равные по площади:

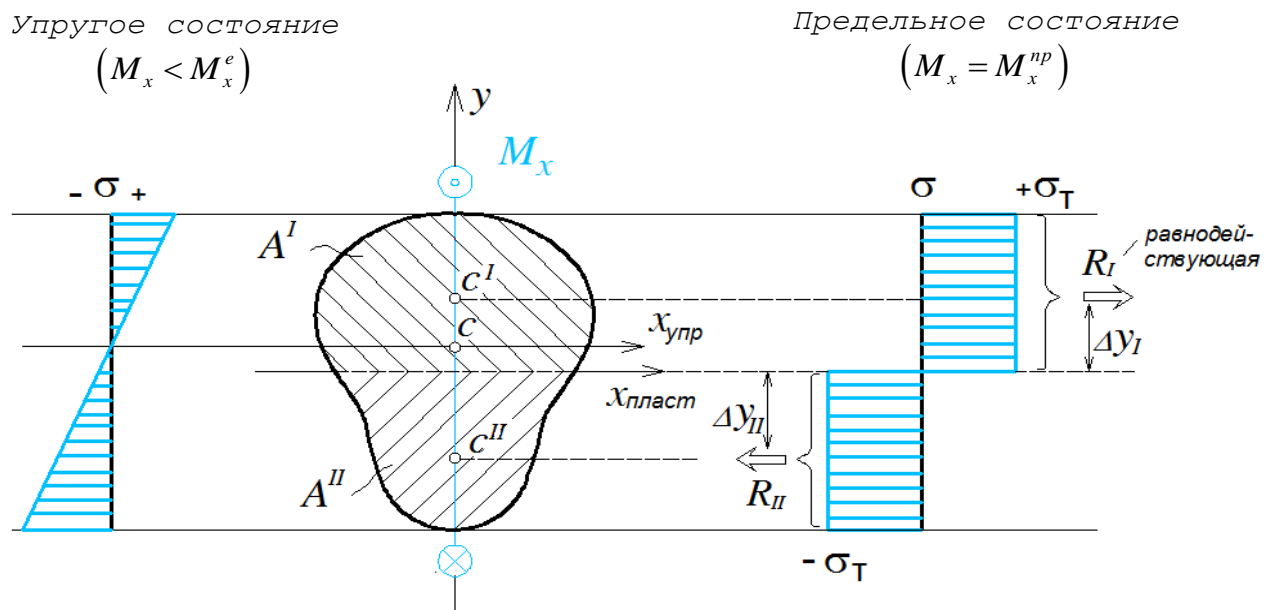


Рис. VIII.3.

статический
момент A^II относительно
оси $x_{пласт}$

$$M_x^{np} = R_I \cdot \Delta y_I + R_{II} \cdot \Delta y_{II} = \sigma_T \cdot (S_{x_{пласт}}^I + S_{x_{пласт}}^{II})$$

$$M_x^{np} = \sigma_T \cdot (S_{x_{пласт}}^I + S_{x_{пласт}}^{II})$$

(VIII.5)

$$N = 0 \Rightarrow R_I = R_{II} \Rightarrow \cancel{\sigma_T} \cdot A^I = \cancel{\sigma_T} \cdot A^{II}$$

$$A^I = A^{II}$$

(VIII.6)

Остаточные напряжения

После упруго - пластического изгиба и последующего снятия нагрузки в поперечных сечениях стержня действуют остаточные напряжения.

Закон разгрузки (*рис. II.10.*) одинаково применим ко всем параметрам упруго-пластического деформирования: деформациям, напряжениям, перемещениям, кривизнам и внутренним силовым факторам.

Для нахождения остаточных напряжений следует из эпюры полных напряжений вычесть эпюру напряжений в идеально упругом материале при той же нагрузке:

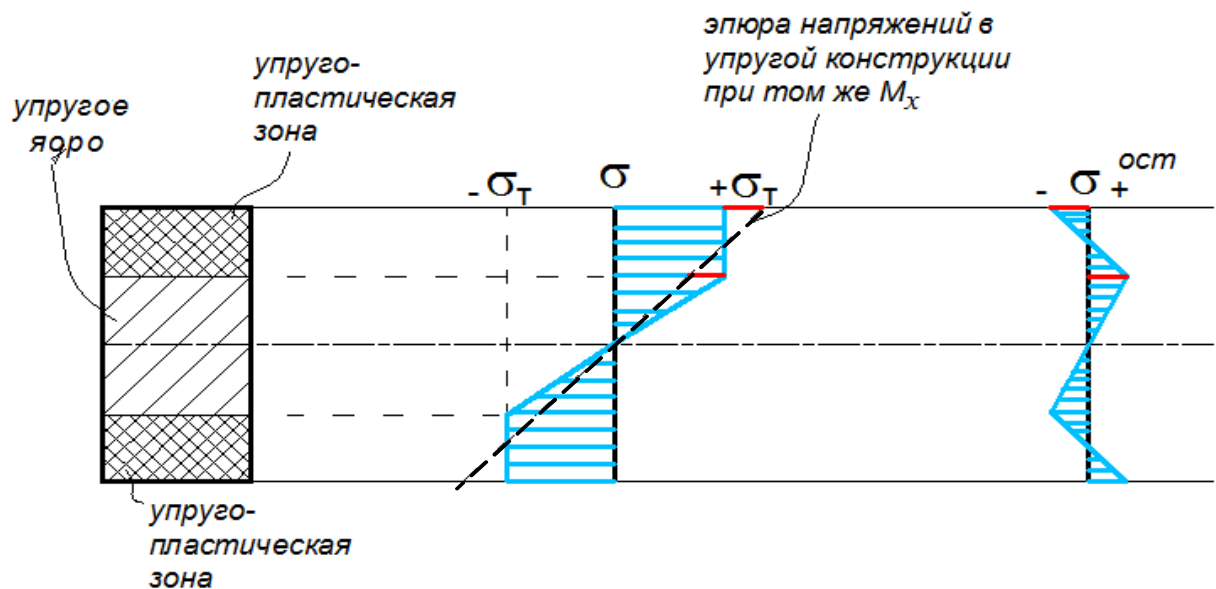


Рис.VIII.4.

Упругая конструкция жёстче упруго-пластической.

При той же нагрузке перемещения в ней будут меньше, меньше будет и наклон эпюры упругих напряжений.

Пластический шарнир

При возрастании внешней нагрузки, в стержневой системе возрастает внутренний изгибающий момент M_x (рис. VIII.5a...в) и её поперечные сечения проходят стадии, указанные на рис. VIII.2.

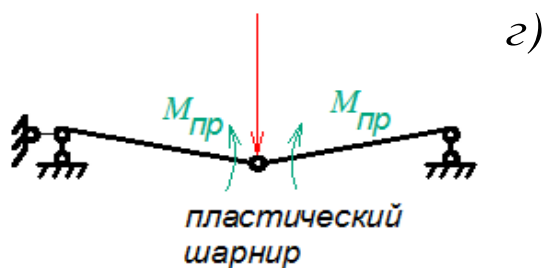
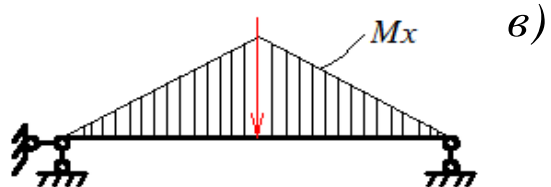
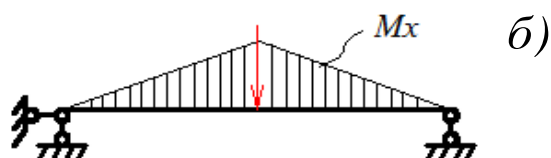
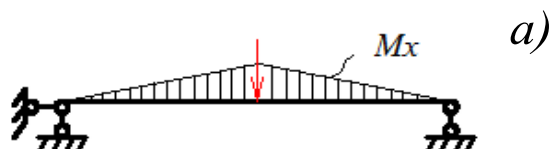


Рис. VIII.5.

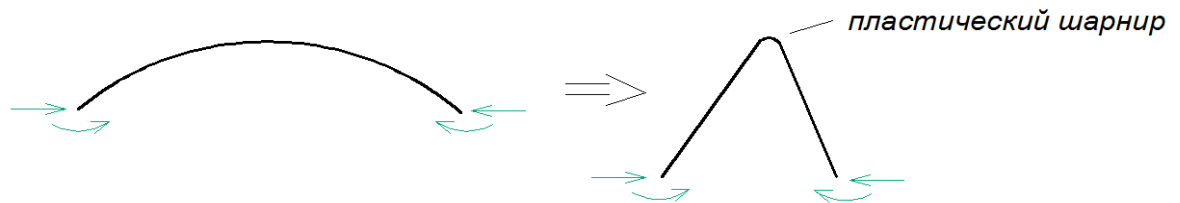
Сечение, в котором M_x максимален первым достигает стадии, близкой к предельной (рис. VIII.2.г).

И тут всё меняется.

Неспособный более воспринимать возрастающую нагрузку, материал в окрестности сечения интенсивно течёт, ось стержня значительно искривляется, образуется локальная пластическая зона, именуемая **пластическим шарниром**, ибо ведёт она себя, как врезанный в стержень шарнир с постоянным моментом трения $M_x^{пр}$, сопротивляющимся перемещению.

Перемещения в конструкции, вызванные образованием пластических шарниров значительно превосходят перемещения от упругих деформаций стержня и, поэтому, при рассмотрении схем с пластическими шарнирами, стержни считаются абсолютно жёсткими.

Эффект образования пластического шарнира может наблюдать каждый из нас, кто двумя руками попытается изогнуть металлический прут. Равномерной дугой прут будет гнуться только в самом начале процесса изгиба, потом же перегнётся в локальной области:



В зависимости от нагрузки и закреплений, пластический шарнир в конструкции может быть один или их может быть несколько; они могут образоваться синхронно или поочерёдно и так далее.

Возникновения одного пластического шарнира уменьшает степень статической неопределимости конструкции на единицу, а статически определимую конструкцию превращает в механизм. Нагрузка, превышение которой приводит этот механизм в движение, называется **предельной**.

Порядок расчёта статически неопределимых балок по предельным нагрузкам

1) Для заданного поперечного сечения:

- а) Определяется местоположение оси пластического изгиба $X_{\text{пласт}}$ (рис. VIII.3.) из условия:

$$A^I = A^{II}$$

- б) Вычисляется значение предельного внутреннего изгибающего момента:

$$M_{\text{пр}} = \sigma_T \cdot (S_{X_{\text{пласт}}}^I + S_{X_{\text{пласт}}}^{II})$$

2) Перебираем схемы возможных образований пластических шарниров, для каждой схемы рассчитывается значение предельной нагрузки. Расчёт предельной нагрузки ведётся двумя методами:

4

- а) Составлением уравнений равновесия и совместным их решением. Для балки со степенью статической неопределимости $n=1$ реакции в опорах и критическая нагрузка находятся из следующей системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M = 0 ; \sum F_y = 0 ; \sum F_z = 0 \text{ – для всей балки} \\ \sum M = 0 \text{ – для крайних участков.} \end{array} \right.$$

- б) Использованием теоремы Лагранжа (принцип возможных перемещений).

3) На практике реализуется та схема, которой соответствует наименьшая предельная нагрузка (это утверждает так называемая **кинематическая теорема** теории пластичности).

Замечания:

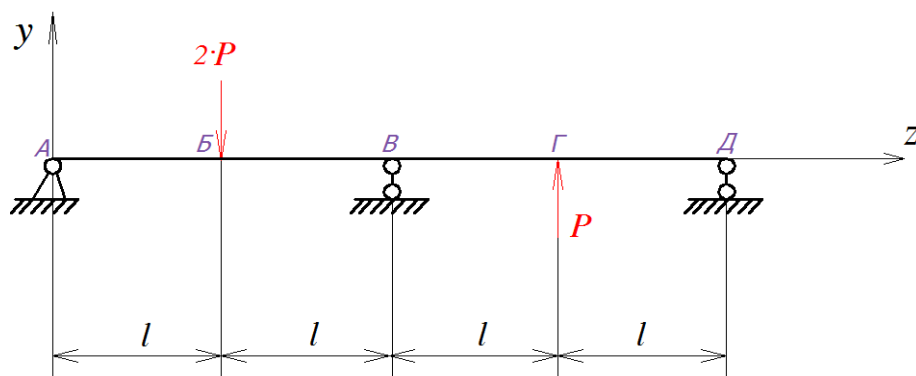
I) Количество пластических шарниров в схеме должно на единицу превышать степень статической неопределимости балки.

II) Места образования пластических шарниров:

- над промежуточными опорами;
- в заделке;
- под сосредоточенными силами;
- на участках стержня, находящихся под действием распределённой нагрузки (в этом случае локальная координата z_i пластического шарнира находится из систем уравнений).

III) Упругими деформациями участков балки пренебрегаем.

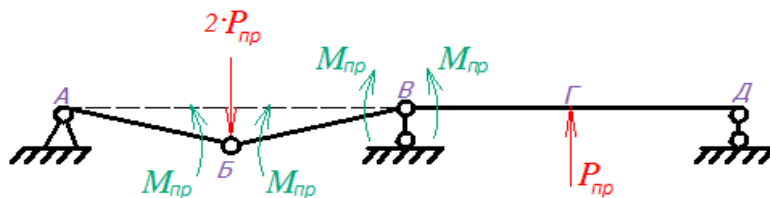
Пример VIII.1 :



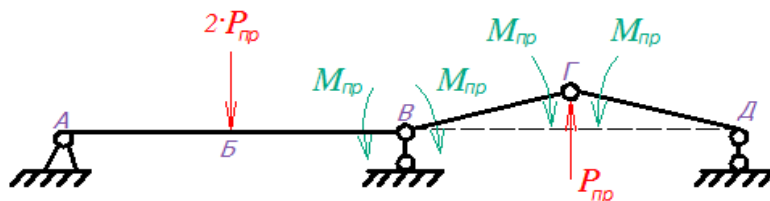
Решение

1) ... $M_{пр} = \dots$

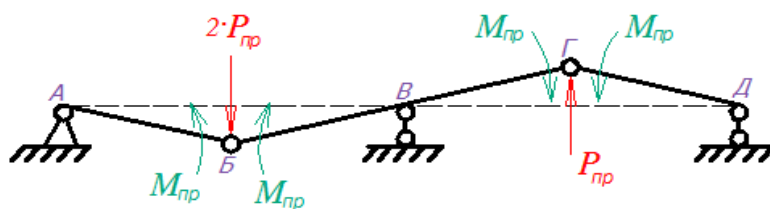
2) $n=1 \Rightarrow$ 2 шарнира в точках Б, В или Г. Возможные варианты возникновения пластических шарниров:



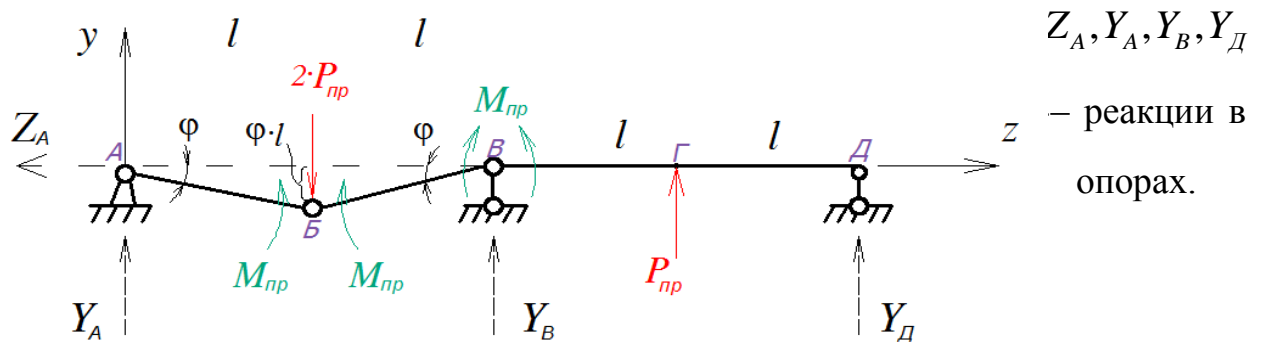
Точки Б и В



Точки В и Г



Точки Б и Г



а) Из уравнений равновесия:

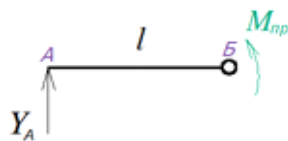
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = -2 \cdot P_{np} \cdot l + Y_B \cdot 2 \cdot l + P_{np} \cdot 3 \cdot l + Y_D \cdot 4 \cdot l \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2 \cdot P_{np} + Y_B + P_{np} + Y_D \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \quad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



$$\sum M_B = 0 = M_{np} - Y_A \cdot l \quad (4)$$



$$\sum M_C = 0 = Y_D \cdot 2 \cdot l + M_{np} + P_{np} \cdot l \quad (5)$$

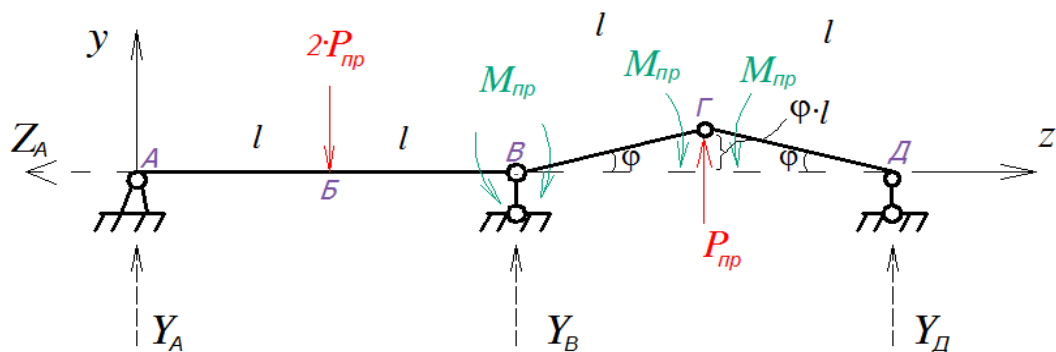
Решая совместно (1), (2), (3), (4) и (5), находим Z_A, Y_A, Y_B, Y_D и P_{np} :

$$P_{np} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_{np}}{l}$$

б) Принцип возможных перемещений:

$$M_{np}^B \cdot \varphi + M_{np}^B \cdot \varphi + M_{np}^B \cdot \varphi = 2 \cdot P_{np} \cdot \varphi \cdot l$$

$$P_{np} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_{np}}{l}$$



а) Из уравнений равновесия:

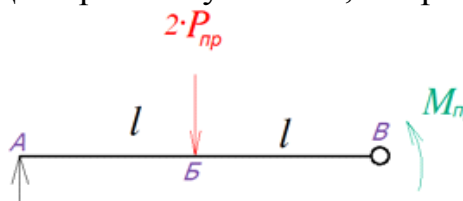
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = -2 \cdot P_{np} \cdot l + Y_B \cdot 2 \cdot l + P_{np} \cdot 3 \cdot l + Y_D \cdot 4 \cdot l \quad (1)$$

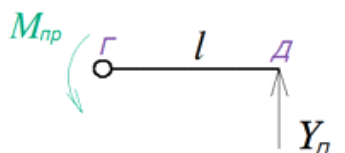
$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2 \cdot P_{np} + Y_B + P_{np} + Y_D \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \quad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



$$\sum M_B = 0 = M_{np} + 2 \cdot P_{np} \cdot l - Y_A \cdot 2 \cdot l \quad (4)$$



$$\sum M_\Gamma = 0 = M_{np} + Y_D \cdot l \quad (5)$$

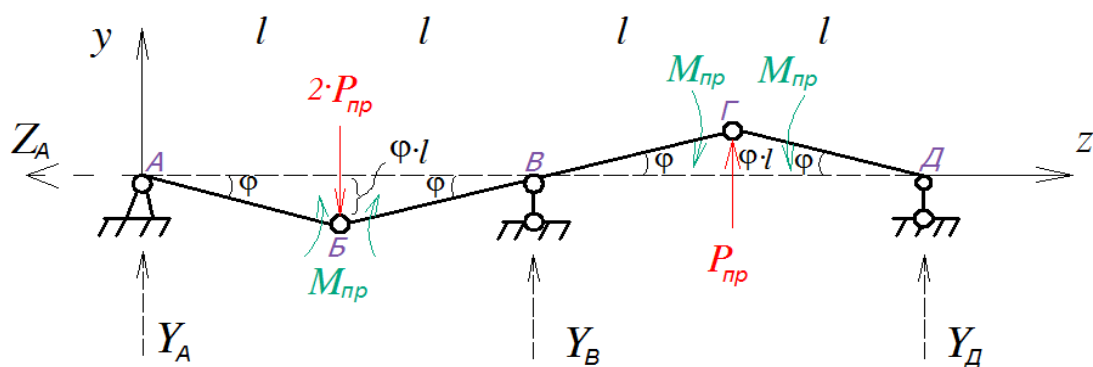
Решая совместно (1), (2), (3), (4) и (5), находим Z_A, Y_A, Y_B, Y_D и P_{np} :

$$P_{np} = 3 \cdot \frac{M_{np}}{l}$$

б) Принцип возможных перемещений:

$$M_{np}^B \cdot \varphi + M_{np}^\Gamma \cdot \varphi + M_{np}^\Gamma \cdot \varphi = P_{np}^\Gamma \cdot \varphi \cdot l$$

$$P_{np} = 3 \cdot \frac{M_{np}}{l}$$



а) Из уравнений равновесия:

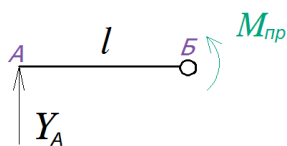
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = -2 \cdot P_{np} \cdot l + Y_B \cdot 2 \cdot l + P_{np} \cdot 3 \cdot l + Y_D \cdot 4 \cdot l \quad (1)$$

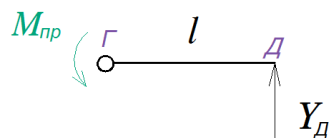
$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2 \cdot P_{np} + Y_B + P_{np} + Y_D \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \quad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



$$\sum M_B = 0 = M_{np} - Y_A \cdot l \quad (4)$$



$$\sum M_\Gamma = 0 = M_{np} + Y_D \cdot l \quad (5)$$

Решая совместно (1), (2), (3), (4) и (5), находим Z_A, Y_A, Y_B, Y_D и P_{np} :

$$P_{np} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{np}}{l}$$

б) Принцип возможных перемещений:

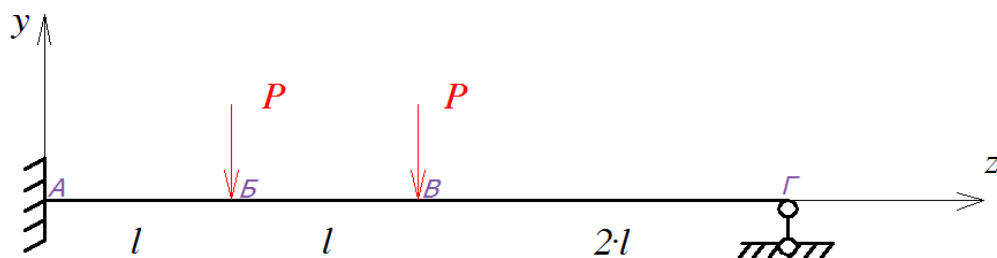
$$M_{np}^B \cdot \varphi + M_{np}^B \cdot \varphi + M_{np}^\Gamma \cdot \varphi + M_{np}^\Gamma \cdot \varphi = 2 \cdot P_{np} \cdot \varphi \cdot l + P_{np} \cdot \varphi \cdot l$$

$$P_{np} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{np}}{l}$$

- 3) Из всех возможных схем потери несущей способности на практике реализуется та, у которой предельная нагрузка наименьшая:

$$P_{np} = \min \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{M_{np}}{l}, 3 \cdot \frac{M_{np}}{l}, \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{np}}{l} \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{np}}{l}$$

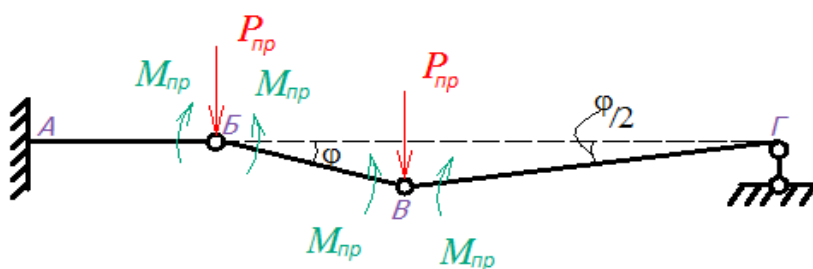
Пример VIII.2 :



Решение

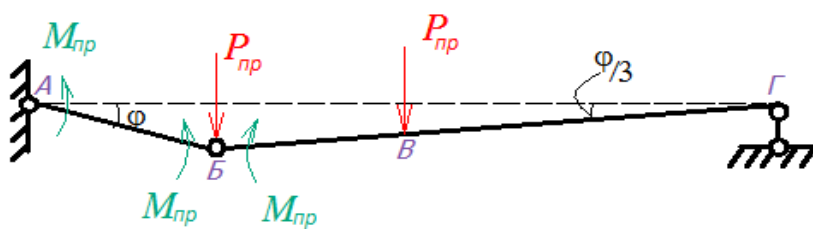
1) ... $M_{np} = \dots$

2) $n=1 \Rightarrow$ 2 шарнира в точках А, Б или В. Возможные варианты возникновения пластических шарниров:

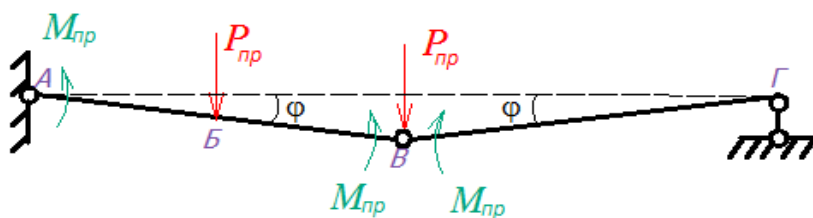


Точки Б и В

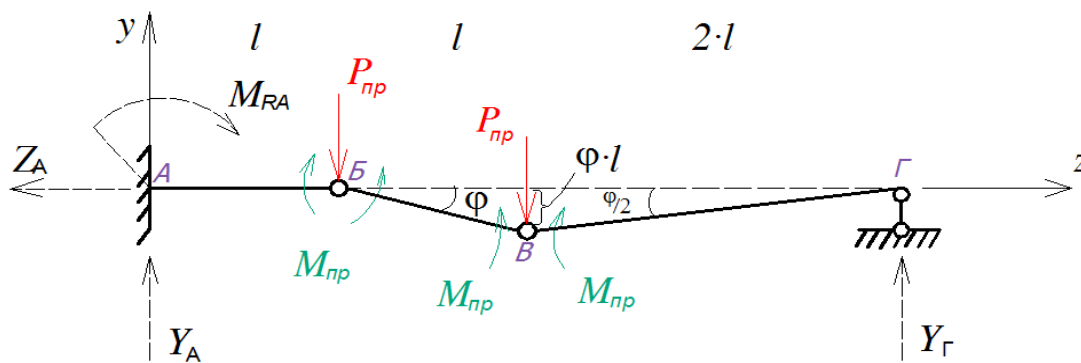
Схема неестественная (под силой в т. Б обратный прогиб), что приведёт к несовпадению результатов расчётов по уравнениям равновесия и по теореме Лагранжа.



Точки А и Б



Точки А и В



а) Из уравнений равновесия:

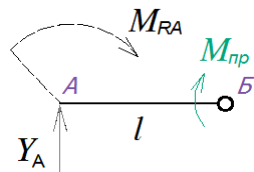
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = -M_{RA} - P_{np} \cdot l - P_{np} \cdot 2 \cdot l + Y_G \cdot 4 \cdot l \quad (1)$$

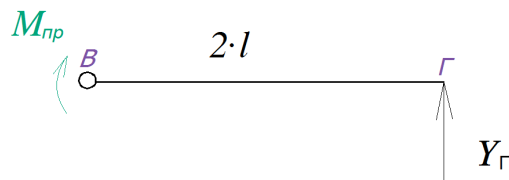
$$\sum M_G = 0 = -M_{RA} + P_{np} \cdot 3 \cdot l + P_{np} \cdot 2 \cdot l - Y_A \cdot 4 \cdot l \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \quad (3)$$

Для крайних участков:



$$\sum M_B = 0 = -M_{np} - M_{RA} - Y_A \cdot l \quad (4)$$



$$\sum M_B = 0 = -M_{np} + Y_G \cdot 2 \cdot l \quad (5)$$

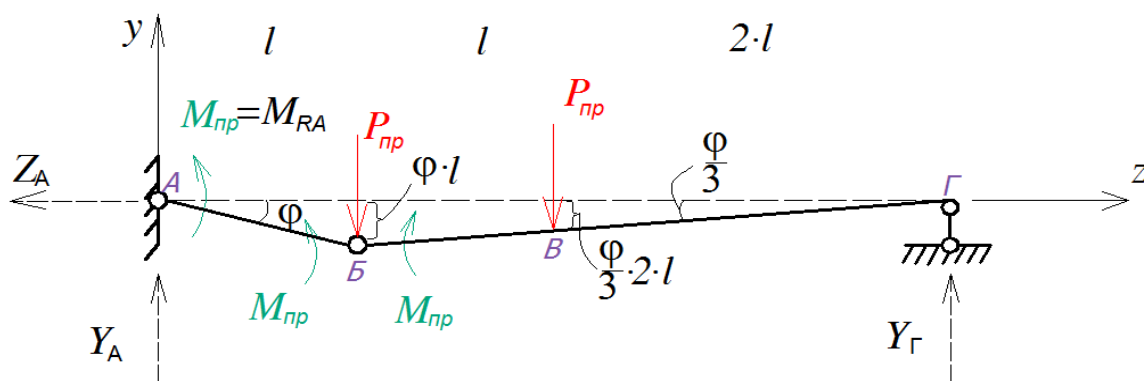
Решая совместно (1) ... (5), находим Z_A , Y_A , M_{RA} , Y_G и P_{np} :

$$P_{np} = \frac{2}{3} \cdot \frac{M_{np}}{l}$$

б) Принцип возможных перемещений:

$$M_{np}^B \cdot \varphi + M_{np}^B \cdot \varphi + M_{np}^B \cdot \frac{\varphi}{2} = P_{np} \cdot \varphi \cdot l$$

$$P_{np} = \frac{5}{2} \cdot \frac{M_{np}}{l}$$



а) Из уравнений равновесия:

Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = M_{np} - P_{np} \cdot l - P_{np} \cdot 2 \cdot l + Y_{\Gamma} \cdot 4 \cdot l \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2 \cdot P_{np} + Y_{\Gamma} \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \quad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:

$$\sum M_B = 0 = -M_{np} - P_{np} \cdot l + Y_{\Gamma} \cdot 3 \cdot l \quad (4)$$

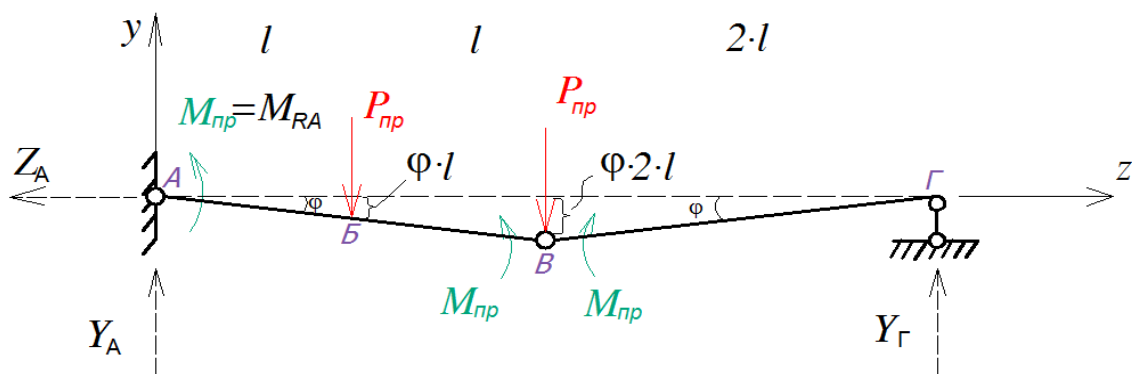
Решая совместно (1) ... (4), находим Z_A , Y_A , Y_{Γ} и P_{np} :

$$P_{np} = \frac{7}{5} \cdot \frac{M_{np}}{l}$$

б) Принцип возможных перемещений:

$$M_{np}^A \cdot \varphi + M_{np}^B \cdot \varphi + M_{np}^{\Gamma} \cdot \frac{\varphi}{3} = P_{np} \cdot \varphi \cdot l + P_{np} \cdot \frac{\varphi}{3} \cdot 2 \cdot l$$

$$P_{np} = \frac{7}{5} \cdot \frac{M_{np}}{l}$$



а) Из уравнений равновесия:

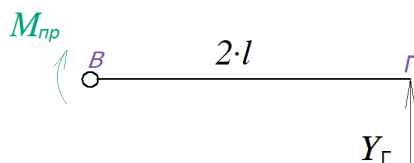
Для всей балки:

$$\sum M_A = 0 = M_{np} - P_{np} \cdot l - P_{np} \cdot 2 \cdot l + Y_G \cdot 4 \cdot l \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - 2 \cdot P_{np} + Y_G \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \quad (3)$$

Для крайних участков, опирающихся на шарниры:



$$\sum M_B = 0 = -M_{np} + Y_G \cdot 2 \cdot l \quad (4)$$

Решая совместно (1) ... (4), находим Z_A , Y_A , Y_G и P_{np} :

$$P_{np} = \frac{M_{np}}{l}$$

б) Принцип возможных перемещений:

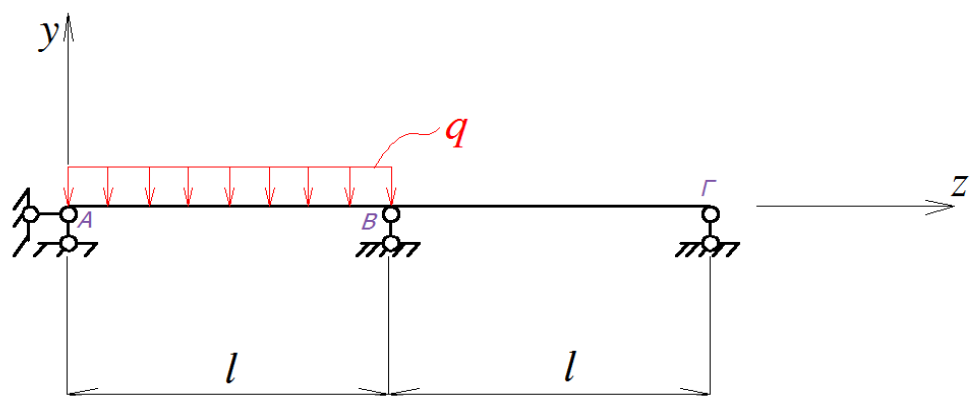
$$M_{np}^A \cdot \varphi + M_{np}^B \cdot \varphi + M_{np}^B \cdot \varphi = P_{np} \cdot \varphi \cdot l + P_{np} \cdot \varphi \cdot 2 \cdot l$$

$$P_{np} = \frac{M_{np}}{l}$$

3)

$$P_{i\delta} = \min\left(\frac{7}{5} \cdot \frac{M_{i\delta}}{l}, \frac{M_{i\delta}}{l}\right) = \frac{M_{i\delta}}{l}$$

Пример VIII.3 :

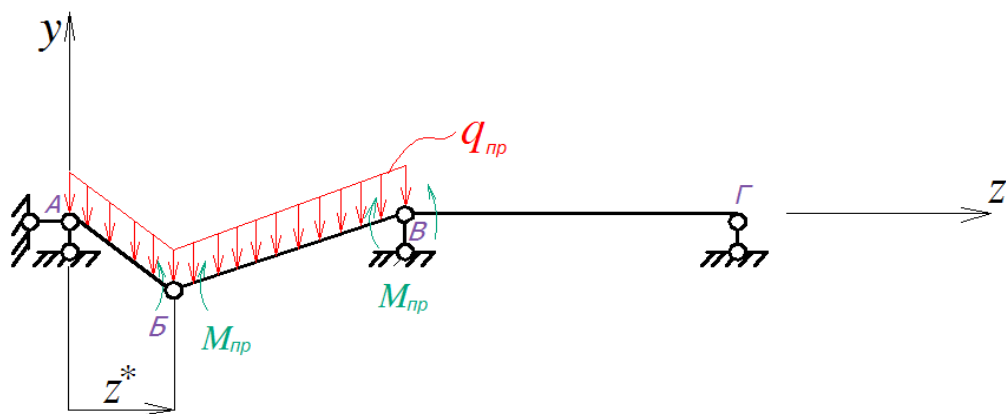


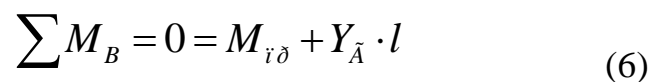
Решение

1) ... $M_{np} = \dots$

2) $n = 1 \Rightarrow 2$ шарнира.

Единственный возможный вариант появления пластических шарниров в данном случае - т. В и т. Б под распределённой нагрузкой.





Решая совместно систему уравнений (1)...(6) находим Y_A , Y_Γ , Y_B , Z_A , q_{np} и z^* :

$$\begin{aligned} z^* &\approx 0,414 \cdot l \\ q_{np} &\approx 11,7 \cdot \frac{M_{np}}{l^2} \end{aligned}$$

б) Принцип возможных перемещений:

$$M_{np}^B \cdot \varphi + 2 \cdot M_{np}^{B,B} \cdot \varphi \cdot \frac{z^*}{l - z^*} = q_{np} \cdot S = q_{np} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \varphi \cdot z^*$$

⇓

$$q_{np} = \frac{2 \cdot M_{np}}{l} \cdot \left[\frac{l + z^*}{z^* \cdot (l - z^*)} \right] \quad (\alpha)$$

Согласно кинематической теореме теории пластичности, действительной предельной нагрузкой будет минимальная из всех, определяемой формулой (α) Значит:

$$\frac{dq_{np}}{dz^*} = 0$$

⇓

$$z^{*2} + 2 \cdot l \cdot z^* - l^2 = 0$$

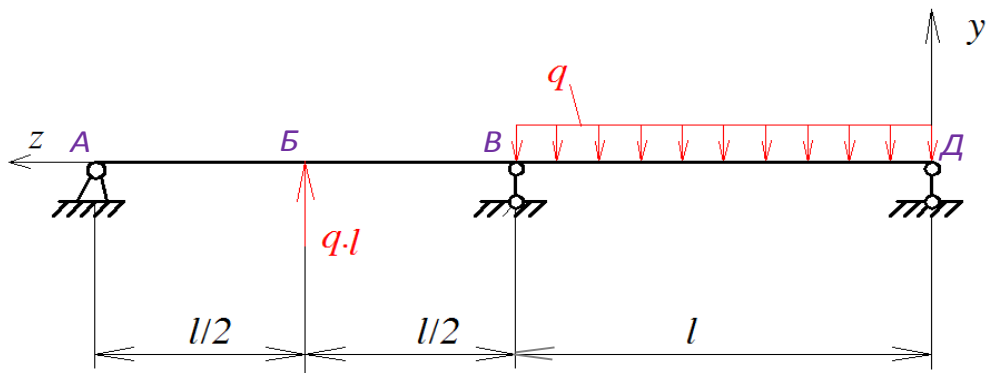
⇓

$$z^* \approx 0,414 \cdot l$$

$$q_{np} = \frac{2 \cdot M_{np}}{l} \cdot l \cdot \left[\frac{1 + 0,414}{0,414 \cdot (1 - 0,414)} \right] \approx 11,657 \cdot \frac{M_{np}}{l}$$

$$\begin{aligned} z^* &\approx 0,414 \cdot l \\ q_{np} &\approx 11,657 \cdot \frac{M_{np}}{l^2} \end{aligned}$$

Пример VIII.4 (только схемы образования пластических шарниров):



Решение

1) ... $M_{пр} = \dots$

2) $n=1 \Rightarrow$ 2 шарнира в точках Б, В и Г. Возможные варианты возникновения пластических шарниров:

