

Урок 6. Соотношение неопределенностей

1. (Задача 2.24.) Пользуясь соотношением неопределенностей, оценить размер области, в которой применимо понятие луча в оптике.

Решение Геометрическая оптика рассматривает распространение волн как распространение лучей. В каждой точке волне приписывается вполне определенное направление распространения и значение волнового вектора. Таким свойством обладают плоские волны. Однако в общем случае электромагнитные волны в среде не являются плоскими. Тем не менее, волны оптического диапазона рассматривают как плоские в каждом небольшом участке пространства. Но, с другой стороны, волна, занимающая конечную область пространства ℓ , не может иметь вполне определенный волновой вектор \mathbf{k} , а представляет собой суперпозицию плоских волн с волновыми векторами, лежащими в некотором интервале Δk , для которого справедливо соотношение неопределенностей

$$\ell \cdot \Delta k \geq 1. \quad (1)$$

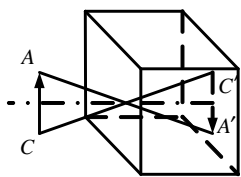
Для того, чтобы можно было говорить о волне с волновым вектором \mathbf{k} , должно выполняться условие

$$\Delta k \ll k. \quad (2)$$

Поскольку $k \sim 1/\lambda$, а $\Delta k \sim 1/\ell$ (что следует из уравнения (1)), то выражение (2) равносильно $\ell \gg \lambda$. Понятие луча применимо, если длина волны много меньше характерного размера области распространения волн.

2. (Задача 2.25.) Оценить диаметр отверстия камеры-обскуры длиной ℓ , при котором изображение получится самым резким (длина волны λ).

Решение Камера-обскура — это ящик с маленьким отверстием на одной из стенок. Изображение получается на стенке, расположенной напротив отверстия. Лучи света, испускаемые различными точками объекта AC , распространяются во все стороны, но в камеру попадают только те, которые могут пройти через отверстие. Так, точка A дает светлое пятно в точке A' , точка C в C' и т. д. Совокупность таких пятен, получающихся от различных мест



объекта AC , и есть изображение. Если свет распространяется строго прямолинейно, то светлое пятно от каждой точки имеет размер не менее диаметра отверстия. Но из соотношения неопределенностей следует, что если пучок света имеет конечную ширину, то направление распространения света в таком пучке не может быть везде строго одинаковым. При падении света на отверстие (например, перпендикулярно) оно ограничивает в своей плоскости ширину пучка, и у пучка в плоскости

отверстия появляется разброс волновых векторов в соответствии с соотношением неопределенностей: $\Delta k_{\perp} d \geq 2\pi$, откуда $\Delta k_{\perp} \geq \frac{2\pi}{d}$. Принимая $\Delta k_{\perp} \sim 2\pi/d$ и учитывая что $d \gg \lambda$, получаем $\Delta k_{\perp} \ll k$ и угол $\theta \simeq \frac{\Delta k_{\perp}}{k} = \frac{\lambda}{d}$.

Размер пятна в камере определяется двумя факторами: размером отверстия и расширением волны вследствие ограничения пучка, т. е.

$$D = d + \ell\theta = d + \ell\frac{\lambda}{d},$$

где ℓ — длина камеры.

Если величина d очень малая, то второе слагаемое очень большое, а если велико d , то велико первое слагаемое. Взяв производную dD/dd и приравняв ее к нулю, получим размер отверстия, при котором размер пятна D наименьший. Условие минимума

$$\frac{\partial D}{\partial d} = 1 - \frac{\ell\lambda}{d^2} = 0.$$

Тогда $d \sim \sqrt{\lambda\ell}$. При таком размере отверстия изображение объекта, являющееся наложением пятен от различных точек объекта, будет наиболее резкое, потому что эти пятна будут предельно перекрываться. Кстати, размер пятна в этом случае будет в 2 раза больше диаметра отверстия $D = 2\sqrt{\lambda\ell}$. Множитель 2 не следует понимать буквально, потому что мы оцениваем порядок величины и можно считать $D \simeq \sqrt{\lambda\ell}$.

Расстояние до фотографируемого объекта обычно много больше длины камеры ℓ , поэтому мы пренебрегли отклонением угла падения света для различных точек объекта от нормального. Наклонное падение света на щель рассмотрено в задаче 3.

3. (Задача 2.26.) Плоская волна падает на щель в экране шириной d , образуя угол θ с нормалью к плоскости экрана. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину световой полосы на втором экране, расположенном на расстоянии ℓ от первого. Длина волны λ .

Решение Фронт волны, проходящей через щель шириной d_0 , имеет протяженность $d = d_0 \cos \theta_0$. Из соотношения неопределенностей (см. решение задачи 2.) у волны появляется разброс волновых векторов Δk в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, такой что $\Delta k d \sim 2\pi$ и $\Delta k \sim 2\pi/d$. Откуда расхождение пучка $\theta \sim \frac{\Delta k}{k} \frac{\lambda}{d_0 \cos \theta_0}$ и уширение пятна за счет расходимости пучка $\frac{\ell}{\cos \theta_0} \cdot \frac{\theta}{\cos \theta_0} = \frac{\ell\lambda}{d_0 \cos^3 \theta_0}$. Окончательно

$$D = d_0 + \ell\lambda/(d_0 \cos^3 \theta_0).$$

4. (Задача 2.27.) Оценить минимальный размер светового пятна на Луне от луча лазера, расположенного на Земле (длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^3 \text{ \AA}$).

Решение Аналогично камеры обскуры

$$\lambda = 5 \cdot 10^3 \text{ \AA}$$

$$D \sim \sqrt{\lambda L}$$

$$L = 4 \cdot 10^5 \text{ км}$$

$$D = \sqrt{5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 10^5} = \sqrt{2} \cdot 10^3 \approx 10 \text{ м}$$

но при этом

$$d \sim 10 \text{ м}$$

Где же взять такой лазер? Для лазера с разумным размером апертуры

$$d = 1 \text{ см}$$

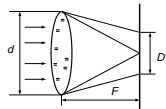
$$d = -\frac{D}{2} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4} - l\lambda}$$

$$D = 1 + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}}{1} \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \sim 2 \cdot 10^6 \text{ см} = 20 \text{ км}$$

$$d \simeq \sqrt{\lambda L} \simeq 14 \text{ км.}$$

5. (Задача 2.28) Используя соотношения неопределенностей, оценить размер пятна на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы (фокусное расстояние F) диаметра d , собравшую параллельный пучок лазерного света с длиной волны λ , падающего на линзу вдоль ее главной оптической оси.

Решение

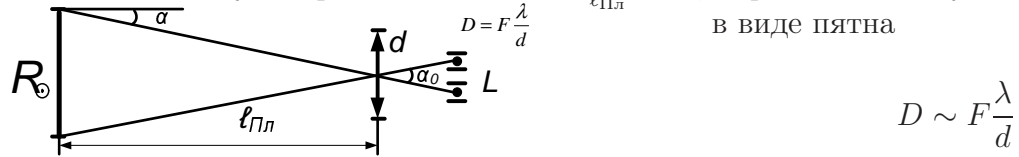


$$\delta k_{\perp} \sim \frac{2\pi}{d}, \quad \delta \theta \sim \frac{\delta k_{\perp}}{k} \sim \frac{\lambda}{d}. \quad \text{Тогда, } D \simeq \lambda F/d.$$

6. (Задача 2.29) Используя соотношение неопределенностей и вводя размер своего зрачка d , оценить: в виде кружка или яркой звезды Вы увидели бы Солнце с орбиты Плутона ($\ell_{\text{средн}} \sim 6 \cdot 10^9 \text{ км}$). Угловой размер Солнца на Земле $\theta_{\odot} \simeq 0,01$, расстояние между Солнцем и Землей $\ell_{\odot} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}$. Средняя длина световой волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$.

Решение

Поскольку размер Плутона много меньше расстояния от него до Солнца, то можно считать, что от каждой точки Солнца на Плутон идет параллельный пучок света. Поскольку его расходимость $\alpha \sim \frac{d}{\ell_{\text{Пл}}} \ll 1$, параллельный пучок изобразится



Две точки, находящиеся на разных концах Солнца, будут разнесены на расстояние $L \approx F \alpha_0$. Тогда

$$\alpha_0 = \frac{2R_{\odot}}{\ell_{\text{Пл}}}, \quad \alpha_0 \gg \alpha.$$

Если $L \gg D$, то Солнце – кружок. $\alpha_0 F \gg F \frac{\lambda}{d}$, $\alpha_0 \gg \frac{\lambda}{d}$.

$$d \sim 1 \text{ см}, \quad \alpha_0 = \frac{2R_{\odot}}{\ell_{\text{Пл}}} = \frac{\ell_{\odot} \theta_{\odot}}{\ell_{\text{Пл}}} = \frac{1,5 \cdot 10^8 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^9} = 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{1} = 5 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha_0 \gg \frac{\lambda}{d}$$

видим как кружок!

7. (Задача 2.30.) Оценить максимальную длину волн, на которых возможны: а) радиовещание; б) телевидение.

Решение а) Частоты слышимых звуковых волн лежат в диапазоне $20 \div 20\,000 \text{ Гц}$ и относятся к низким частотам. Для передачи речи или музыки требуются частоты от 100 Гц до нескольких тысяч. Например, частота самой высокой ноты около $4\,000 \text{ Гц}$. Но непосредственная передача низкочастотных сигналов радиоволнами тех же частот невозможна из-за трудности их генерации. Дело в том, что для передачи сигналов используют излучающие антенны. Это замкнутые провода или системы проводов, по которым текут переменные токи. Мощность же излучения пропорциональна четвертой степени частоты ω^4 . Поэтому антенны, по которым текут низкочастотные токи, излучают слабо. Кроме того, длина антенны должна быть порядка длины волны, что для частоты, например, $1\,000 \text{ Гц}$ составляет $\ell \sim \lambda = c/\nu \sim 300 \text{ км}$.

Антенну такой длины весьма трудно построить. Кроме того, строго монохроматическая волна, имеющая везде одинаковую амплитуду, не годится для передачи сигналов. Чтобы передать информацию, сигнал должен иметь некоторые границы во времени. Этого можно добиться, например, с помощью модулирования амплитуды волны. Поэтому в радиовещании передачи осуществляются волнами высокой частоты в диапазоне $10^5 \div 10^8$ Гц модулированными низкочастотными сигналами. При амплитудной модуляции волны имеют вид

$$E = E_0(1 + A \sin(\Omega t)) \sin(\omega t),$$

где несущая частота ω — из диапазона $10^5 \div 10^8$ Гц, а Ω — звуковая частота. Эта волна на самом деле состоит из трех монохроматических волн с частотами $\omega - \Omega$, ω , $\omega + \Omega$ (см. задачу Р.13).

Если звуковая частота $\Omega \ll \omega$, что на самом деле имеет место, то длина волны, соответствующая самой малой частоте $\omega - \Omega$, незначительно отличается от длины волны несущей частоты. Максимальная длина волны определяется минимальной несущей частотой 10^5 Гц, $\lambda = (3 \cdot 10^8 \text{ м/с}) / 10^5 \text{ 1/с} = 3 \cdot 10^3 \text{ м}$.

б) Оценим количество команд, которые нужно передать электронному пучку при его движении по экрану. На экране размером $50 \text{ см} \times 50 \text{ см}$ на расстоянии 1 мм друг от друга можно разместить $250\,000$ управляемых точек. Луч к каждой точке экрана должен возвращаться через $\sim \frac{1}{25}$ сек с командой «загореться» или «потухнуть», потому что изображение должно воспроизводиться 25 раз в секунду. Таким образом, сам луч получает в секунду $25 \cdot 250\,000$ команд и, значит, длительность τ каждой команды (импульса в антенне) не должна превышать 10^{-7} с . Чтобы сформировать импульс такой длительности, необходим диапазон частот $\Delta\nu \sim \tau^{-1} \geq 10^7 \text{ Гц}$, так как $\Delta\nu \cdot \tau \geq 1$. Несущая частота для телевизионного канала лежит в диапазоне $40 \div 200 \text{ МГц}$. Отсюда максимальная длина волны

$$\lambda \sim \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{(40 \div 30) \cdot 10^6 \text{ Гц}} = 10 \text{ м}.$$