Самостоятельная работа к занятию 1

1. Найдите все решения уравнения $(1+y') \cdot e^{-y} = 1$.

2. Найдите все интегральные линии уравнения $x^2y' - 2xy = 3y$.

3. Найдите все решения уравнения $y' = 3y^{2/3}$, удовлетворяющие условию $y(2) = 0$.

4. Найдите общее решение уравнения $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; найдите решение, ограниченное при $x \to +\infty$.

5. Найдите общее решение уравнения $2xy' - y^2 = 1$; найдите решение задачи Коши с начальными данными $y(1) = 0$. Укажите область определения максимального решения, удовлетворяющего этому условию.

Ответы и указания

1. Общее решение $\ln|e^{-y} - 1| = x + C$ и $y \equiv 0$; это семейство решений также описывается формулой $y = -\ln(De^x + 1)$, причем решение $y \equiv 0$ получается при значении $D = 0$

2. Общее решение $y = Cx^2e^{-3/x}$ и $x = 0$

3. $y = (x-2)^3$, $y \equiv 0$, а также решения, полученные их склейкой:
$y(x) = \begin{cases} (x-C)^3, x < C \\ 0, x > C \end{cases}$ $(C < 2)$ и $y(x) = \begin{cases} 0, x < C \\ (x-C)^3, x > C \end{cases}$ $(C > 2)$

4. Общее решение $x^2 = \ln|y^3 - 8| + C$, или $y^3 = 8 + De^{x^2}$; при $D = 0$ получаем решение $y \equiv 2$, ограниченное при $x \to +\infty$.

5. Общее решение $2\operatorname{arctg} y = \ln|x| + C$, или $2\operatorname{arctg} y = \ln Dx$; решение задачи Коши $y = \operatorname{tg}\ln\sqrt{x}$, $x \in \left(e^{-\pi}; e^{\pi}\right)$