

2. Электростатическое поле точечных зарядов и мультиполей

Программа позволяет получить наглядное представление электрического поля, созданного комбинацией точечных зарядов. Имеется возможность изменять величины и расположение зарядов, сопоставлять полученные картины с полями осесимметричных сферических мультиполей порядка 2^n .

2.1. Основные формулы

Потенциал U электростатического поля системы, состоящей из точечных зарядов, в точке с радиус-вектором \vec{R} определяется суперпозицией их кулоновских потенциалов:

$$U(\vec{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|}, \quad (1)$$

где q_i – величины зарядов, \vec{r}_i – их радиус-векторы, а $|\vec{R} - \vec{r}_i|$ – расстояние от точки наблюдения \vec{R} до каждого из зарядов. Электрическое поле \vec{E} этой системы зарядов находится дифференцированием данного потенциала: $\vec{E} = -\text{grad}(U)$, а полный поток поля по теореме Гаусса [1, § 6]:

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \sum_{i=1}^N q_i,$$

где i – номер, а N – полное число зарядов, оказавшихся внутри поверхности интегрирования.

Наглядное представление о структуре поля дают эквипотенциали - поверхности равного потенциала ($U(\vec{R}) = \text{const}$) и силовые линии.

Силовые линии [1, § 4, 6]:

а) или начинаются и заканчиваются на электрических зарядах, или одним своим концом уходят на бесконечность;

б) не могут быть замкнуты и пересекаться (кроме случая $\vec{E} = 0$);

в) поток электрического поля внутри "трубки" поля остается постоянным.

Электрические мультиполи [2, § 5]. В большинстве случаев прямое вычисление поля по формуле (1) затруднительно, поэтому для поля на достаточно большом расстоянии R часто применяют разложение формулы (1) в ряд Тейлора по малому параметру d/R (d - характерный размер системы):

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots,$$

где U_n имеет порядок $\propto (Q/R) \cdot (d/R)^n$ (Q - полный заряд системы).

Первый член разложения (кулоновский потенциал) совпадает с полем точечного заряда:

$$U_0 = Q / R .$$

Второй член разложения описывает поле диполя (дипольный потенциал):

$$U_1 = (\vec{D} \cdot \vec{R}) / R^3 ,$$

где вектор $\vec{D} = \sum_{i=1}^N (q_i \cdot \vec{r}_i)$ - дипольный момент.

Если полный заряд системы равен 0, то дипольный член играет основную роль и при этом дипольный момент \vec{D} не зависит от выбора начала отсчета координат.

Третий член разложения описывает поле квадруполья, потенциал которого имеет вид:

$$U_2 = \frac{1}{2R^5} \cdot \left[(3X^2 - R^2) \cdot D_{xx} + (3Y^2 - R^2) \cdot D_{yy} + (3Z^2 - R^2) \cdot D_{zz} + 6XY \cdot D_{xy} + 6XZ \cdot D_{xz} + 6YZ \cdot D_{yz} \right]$$

где тензор $D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N (x_{\alpha}^i x_{\beta}^i q_i - r_i^2 q_i \delta_{\alpha\beta} / 3)$ – тензор квадрупольного момента.

Если система зарядов симметрична относительно некоторой оси (например z), то выражение для поля квадруполья упрощается:

$$U_2 = \frac{D}{4R^3} \cdot (3 \cdot \cos^2 \Theta - 1) = \frac{D}{4R^3} \cdot P_2(\cos \Theta),$$

$$D = D_{zz} = -2D_{xx} = -2D_{yy}.$$

Метод изображений [3, § 3]. Метод изображений обычно применяется для нахождения поля от системы зарядов и проводников. Идея метода изображений состоит в подборе таких дополнительных фиктивных зарядов, которые вместе с заданными зарядами создавали бы поле, для которого поверхность заданного проводника совпадала бы с одной из эквипотенциалей поля. Простейший пример применения этого метода - определение поля, создаваемого точечным зарядом q , расположенным вне проводящей среды, заполняющей полупространство. В данном случае задача решается введением фиктивного заряда $q' = -q$, расположенного в точке, представляющей собой зеркальное отражение точки q в граничной плоскости проводящей среды.

2.2. Краткое описание программы ELS

Программа позволяет моделировать электростатические поля и потенциалы систем точечных зарядов, расположенных на прямой или лежащих в одной плоскости,

а также осесимметричных мультиполей. Кулоновское поле и потенциал рассчитываются в узлах сетки. Поле между узлами сетки рассчитывается методом двумерной линейной интерполяции.

После загрузки программы на экране дисплея высвечивается меню, содержащее следующие директивы:

Прямая	Плоскость	Мультиполь	Задания	Выход	О задаче
--------	-----------	------------	---------	-------	----------

ПРЯМАЯ. Заряды на прямой OZ. Заданная система зарядов может быть отражена симметрично (без изменения знака заряда) или антисимметрично (с изменением знака заряда) относительно плоскости XY. Таким образом происходит замена координаты $\vec{r}_i = (0, 0, z_i)$ на $\vec{r}_i' = (0, 0, -z_i)$, что отвечает зеркальному отражению заданной системы зарядов относительно плоскости XY $z_i \rightarrow -z_i$.

На дисплей выводится карта эквипотенциалей поля. При этом область, в которой потенциал изменяется в пределах задаваемой с терминала градации, закрашивается одним цветом. *Границы между цветовыми полями совпадают с эквипотенциалами.* Если при выводе выбрана неудачная градация картины поля (*линии слишком часты или редки*), то можно прервать вывод клавишей <Esc> и повторить вывод на дисплей без пересчета, задав другую величину градации.

Для зарядов, расположенных на прямой легко вычисляется поток электрического поля (см прил. 2.1), поэтому в данном случае возможен вывод карты электрического потока. При этом *каждое цветовое поле соответствует трубке равного потока, а границы между ними совпадают с силовыми линиями.*

ПЛОСКОСТЬ. Заряды на плоскости. Заданная система зарядов может быть отражена симметрично или антисимметрично относительно плоскостей XY и YZ. Вывод карты эквипотенциалей аналогичен предыдущему случаю

МУЛЬТИПОЛЬ. Вычисляются потенциалы и электрические поля осесимметричных мультиполей порядка 2ⁿ, которые образованы поверхностным зарядом, нанесенным на сферу специальным распределением (см прил. 2.2).

2.3. Примеры заданий

Геометрия электрического поля, силовые линии

1) Расположите заряды $q_1 = -1$ и $q_2 = +2$ на оси Z вблизи начала координат на небольшом расстоянии друг от друга. Постройте карту электрического поля:

- а) найдите точку, где $\vec{E} = 0$;
- б) найдите поверхность (сепаратрису), отделяющую силовые линии, уходящие на бесконечность, от силовых линий, замыкающихся между зарядами;
- в) объясните поведение поля на большом удалении от зарядов. Какой поток электрического поля уходит на бесконечность?

2) В условиях п.1 постройте эквипотенциали и объясните вид картины. Найдите точку, где $\vec{E} = 0$. Если поместить в эту точку пробный заряд, то будет ли его положение устойчивым?

3) Найдите "бессиловую конфигурацию" (т.е., когда сумма всех сил, действующих на каждый заряд, равняется нулю) пяти (или трех) электрических зарядов. Постройте эквипотенциали. Как убедиться, что заряд находится в равновесии? Устойчиво ли это положение равновесия?

4)* Исследуйте поля заряженной "нити", построенной из восьми одинаковых точечных зарядов расположенных на одной прямой на одинаковом расстоянии друг от друга. На каком удалении от этой цепочки зарядов эквипотенциали:

- а) становятся гладкими?
- б) принимают цилиндрическую форму?
- в) переходят в сферы?

5)* Расположите две противоположно заряженные одинаковые цепочки параллельно, на удалении, малом по сравнению с их длиной:

а) оцените поле в центре между цепочками по какой-либо простой формуле (поле от двух зарядов, поле двух бесконечных "нитей", поле плоского конденсатора и т.п.), сравните с точным значением;

б) оцените поле снаружи от цепочек по какой-либо простой формуле (поле от двух зарядов, поле двух бесконечных "нитей" и т.п.) и сравните с точным значением. Сравните напряженность поля в области между цепочками и снаружи;

в) чем полученная картина отличается от карты эквипотенциалей плоского конденсатора?

6)* Получите картину распределения потенциала однородного поля \vec{E}_0 ($U = -\vec{E}_0 \cdot \vec{z} = -\vec{E}_0 \cdot R \cos \Theta$). Получите картину распределения потенциала точечного диполя с дипольным моментом \vec{D} , расположенного в начале координат ($U = D \cdot \cos \Theta / r^2$). Получите картину суперпозиции двух предыдущих полей. Обратите внимание на поверхность нулевого потенциала - сферу радиуса $R = (D / E_0)^{1/3}$, центр которой находится в начале координат.

Мультиполи

7) Постройте эквипотенциали и силовые линии для зарядов $q_1 = +1$ и $q_2 = -1$, расположенных на оси Z на небольшом удалении друг от друга симметрично относительно начала координат (электрический диполь):

- а) как изменяется поле на больших удалениях?
- б) сопоставьте результаты с полем сферического диполя (меню "мультиполь"

$n=1$). Ср. прил. 2.4 задачи 1.27, 1.31, 1.33**.

8) Расположите на оси Z заряды $q_1 = q_2 = +1$ симметрично относительно начала координат. Убедитесь, что вдали от зарядов силовые линии принимают радиальное направление, а поток поля отвечает заряду +2. Для выяснения разницы между полученным полем системы двух зарядов и полем точечного заряда +2 поместите в начале координат заряд $q = -2$ и исследуйте поле получившейся нейтральной системы трех зарядов - линейного квадруполь (ср. прил. 2.4 задачи 1.42а, 1.43). Сопоставьте с

** Все задачи в приложении взяты из .4. с сохранением нумерации задачника.

полем осесимметричного сферического квадруполь (меню "мультиполь" $n = 2$). Какую характерную картину силовых линий и потенциала имеет поле линейного квадруполь?

9)* Дополните систему зарядов из предыдущей задачи еще тремя тесно сгруппированными зарядами для компенсации квадрупольного момента - результирующее поле на больших удалениях существенно уменьшится! Эта процедура иллюстрирует мультипольное разложение поля на удалении, большом по сравнению с размерами системы зарядов. Какую характерную картину силовых линий и потенциала имеет поле октополя?

10)* Поместив на оси Z равноотстоящие заряды $q_1 = -1$, $q_2 = +3$, $q_3 = -3$ и $q_4 = +1$ (линейный октополь, см. прил. 2.4 задача 1.44), проделайте исследование, аналогичное п.8.

11)* Расположив четыре заряда одинаковой величины с чередующимися знаками в вершинах квадрата, исследуйте поле этого плоского квадруполь.

12) Изобразите на экране дисплея и исследуйте поля сферических мультиполей более высокого порядка ($n \geq 3$). Определите число и форму нулевых эквипотенциалей, объясните зависимость вида картинки от порядка n .

13)* Каков порядок мультиполя, образованного шестью равными зарядами с чередующимися знаками, расположенными в вершинах правильного шестиугольника? А если шестиугольник неправильный?

Метод изображений

14) Задайте величины и расположение дополнительных зарядов так, чтобы имитировать поле от заряда, расположенного между двумя заземленными проводящими плоскостями (не на биссектрисе!). Плоскости образуют двугранный угол:

а) 90° ;

б) 60°

в) 45° ; (см. прил. 2.4 задача 2.24).

15) Задайте величину и расположение дополнительного заряда так, чтобы имитировать поле от заряда и проводящей сферы нулевого потенциала (см. прил. 2.4 задача 2.27).

16) То же для заряда и (трех!) его изображений в проводящей плоскости, имеющей полусферический выступ, причем реальный заряд расположен вертикально над вершиной полусферы (см. прил. 2.4 задача 2.32).

17)* То же для заряда, расположенного в стороне от оси симметрии этой системы (см. прил. 2.4 задача 2.34).

Приложение 2.1. Вычисление потока электрического поля для осесимметричных систем.

Пусть заряд q_i расположен на оси Z в точке с координатами $(0,0,z_i)$. Поток электрического поля через сферу с центром в точке расположения заряда по теореме Гаусса равен $4\pi q_i$. Поток электрического поля $\Psi_i(z,r)$ через круг радиуса r , расположенный перпендикулярно оси Z , с центром в точке $(0,0,z)$ равен потоку через

сегмент сферы, отсеченный этим кругом. Так как электрическое поле на сфере постоянно, то отношение потока Ψ_i к полному потоку $4\pi q_i$ равно отношению площади сегмента сферы к полной площади сферы. Учитывая знак потока, можно записать:

$$\Psi_i(z, r) = 4\pi q_i \cdot \frac{2\pi(1 - \cos \Theta_i)}{4\pi} \cdot \frac{(z - z_i)}{|z - z_i|} = 2\pi q_i \cdot \left(1 - \frac{(z - z_i)}{\sqrt{r^2 + (z - z_i)^2}} \right) \cdot \frac{(z - z_i)}{|z - z_i|}$$

Для системы зарядов, расположенных на оси Z, поток будет суперпозицией потоков от каждого заряда:

$$\Psi_i(z, r) = 2\pi \sum_{i=1}^N q_i \cdot \left(1 - \frac{(z - z_i)}{\sqrt{r^2 + (z - z_i)^2}} \right) \cdot \frac{(z - z_i)}{|z - z_i|}$$

Приложение 2.2. Поля мультиполей

В общем случае линейного осесимметричного мультиполя порядка 2^n потенциал U_n пропорционален $P_n(\cos \Theta) / r^{n+1}$ (r, Θ – сферические координаты, $P_n(\cos \Theta)$ – полином Лежандра порядка n). Такое поле может быть образовано поверхностным зарядом, нанесенным на сферу радиуса R . В этом случае поле внутри сферы пропорционально $P_n(\cos \Theta) / r^n$ (см., например, [5] стр. 89-94 и прил. 2.3). Сшивая решения для потенциала на поверхности сферы, а затем вычисляя скачок нормальной производной (т.е. \vec{E}_r), находим что плотность поверхностного заряда должна быть распределена по поверхности сферы по закону $\sigma(\Theta) = \sigma_0 \cdot P_n(\cos \Theta)$ (σ_0 – плотность заряда на верхнем полюсе сферы). Потенциал, соответственно, имеет вид:

$$U_n(r, \Theta) = \frac{4\pi\sigma_0 R^2}{2n+1} \cdot P_n(\cos \Theta) \cdot \left\{ \begin{array}{l} R^n / r^{n+1}, \text{ при } r > R - \text{снаружи сферы;} \\ r^n / R^{n+1}, \text{ при } r < R - \text{внутри сферы;} \end{array} \right\}$$

Именно по этой формуле происходит вычисление потенциалов мультиполей в программе.

Приложение 2.3. Полиномы Лежандра

Свойства полиномов Лежандра. Сферические функции Лежандра первого рода (полиномы Лежандра) определяются формулой:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right)$$

в частности: $P_0(x) = 1$,

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

$$(n+1) \cdot P_{n+1}(x) - (2n+1) \cdot x \cdot P_n(x) + n \cdot P_{n-1}(x) = 0,$$

$$P_n(1) = 1,$$

$$P_n(-1) = (-1)^n,$$

$$P_{2n+1}(0) = 0,$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2},$$

$$P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x).$$

Полиномы Лежандра являются ортогональными функциями:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \delta_{mn}.$$

Полиномы Лежандра в электродинамике. Потенциал вида:

$$U_n(r, \Theta) = \left(A \cdot r^n + \frac{B}{r^{n+1}} \right) \cdot P_n(\cos \Theta)$$

является решением уравнения Лапласа. При решении различных задач часто применяют разложение потенциала по гармоникам $U(r, \Theta)$. Так, например, потенциал точечного заряда, расположенного в точке $\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$, может быть записан в виде:

$$U_1 = \frac{q}{r_0^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot P_n(\cos \Theta), \quad \text{при} \quad r < r_0,$$

$$U_2 = q \cdot r_0^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos \Theta)}{r^{n+1}}, \quad \text{при} \quad r > r_0.$$

Фактически, потенциал представлен как разложение в ряд Тейлора по степеням r , коэффициенты которого есть полиномы Лежандра от $\cos(\Theta)$.

Приложение 2.4. Задачи [4]

1.27. Найти потенциал и напряженность поля диполя с дипольным моментом \vec{p} .

Ответ: $U = (\vec{p} \cdot \vec{r}) / r^3$, $\vec{E} = -\vec{p} / r^3 + 3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} / r^5$; вектор \vec{p} направлен от $-q$ к $+q$.

1.31. Найти уравнение силовых линий точечного диполя с дипольным моментом \vec{p} , помещенного в начале координат. Нарисовать примерный вид силовых линий.

Ответ: $r = c \cdot \sin^2 \Theta$.

1.33. Сфера радиуса R заряжена по поверхности по закону $\sigma = \sigma_0 \cos \Theta$. Найти потенциал U и электрическое поле \vec{E} во всем пространстве.

Ответ: $U = \frac{4\pi}{3} \cdot \sigma_0 \cdot r \cdot \cos \Theta$, $\vec{E} = -\frac{4\pi}{3} \cdot \sigma_0 \cdot \vec{z} / |z|$, при $r < R$;

$$U = \frac{4\pi}{3} \cdot \sigma_0 \cdot \frac{R^3}{r^2} \cdot \cos \Theta, \quad \vec{E} = \frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5}, \quad \text{при } r > R,$$

где $\vec{p} = \frac{4\pi}{3} \cdot \sigma_0 \cdot R^3 \cdot \vec{e}_z$.

1.42. Найти потенциал электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов:

а) заряды q , $-2q$, q расположены по оси Z на расстоянии d друг от друга (линейный квадруполь);

б) заряды $\pm q$ расположены в вершинах квадрата, стороны которого параллельны осям X и Y , так что соседние заряды имеют разные знаки, а в начале координат расположен заряд $+q$ (плоский квадруполь).

Ответ: а) $U(R, \Theta) = q \cdot \frac{d}{r^3} \cdot (3 \cos^2 \Theta - 1)$, при $R \gg d$,

$$\text{б) } U(R, \Theta) = \frac{3 \cdot q \cdot d^2}{2r^3} \cdot \sin^2 \Theta \cdot \sin 2\alpha, \text{ при } R \ll d.$$

1.43. Найти уравнение силовых линий линейного квадруполя и нарисовать примерную картину силовых линий.

Ответ: $R = c \sqrt{\sin^2 \Theta \cdot |\cos \Theta|}$.

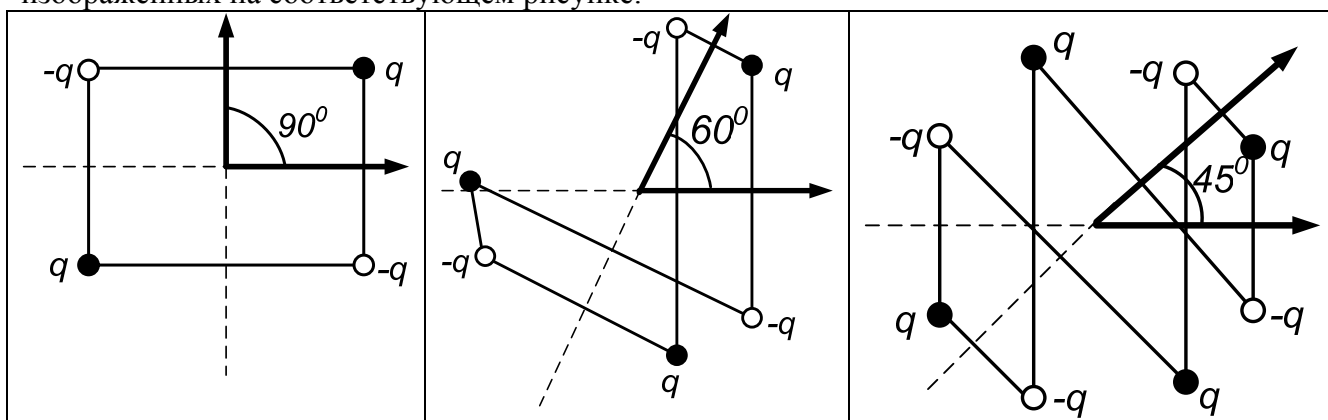
1.44. Найти потенциал электрического поля на больших расстояниях от линейного октуполя: заряды $-q$, $+3q$, $-3q$, $+q$ расположены на оси Z на расстояниях d друг от друга.

Ответ: $U = 3 \cdot (qd^3 / r^4) \cdot (5 \cos^2 \Theta - 3) \cdot \cos \Theta$, при $R \gg d$.

2.24. Двугранный угол между двумя заземленными проводящими плоскостями равен α . Внутри угла находится точечный заряд q . Найти электрическое поле в случаях:

а) $\alpha = 90^\circ$; б) $\alpha = 60^\circ$; в) $\alpha = 45^\circ$.

Ответ: Поле внутри двугранного угла создается системой зарядов, изображенных на соответствующем рисунке:



2.27. Заряд q находится вне заземленной проводящей сферы радиуса R на расстоянии d от ее центра. Найти распределение потенциала во всем пространстве, распределение и полный индуцированный заряд на сфере.

Ответ: Заряд снаружи, сфера изолирована:

$$U = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}, \quad \text{при } r > R; \quad U = 0, \quad \text{при } r < R;$$

$$\sigma_{\text{инд}}(r^*) = -\frac{q \cdot (d^2 - R^2)}{4\pi R r^{*3}}, \quad q_{\text{инд}} = -q \frac{R}{d},$$

$$r^* = (R^2 + d^2 - 2Rd \cos \Theta)^{1/2}.$$

Заряд - изображение q' равен $q \cdot R / d$ и находится на расстоянии R^2 / d от центра сферы с нулевым потенциалом,

$$r' = \left[(r^2 + (R^2 / d)^2 - 2r \cdot (R^2 / d) \cdot \cos \Theta) \right]^{1/2}.$$

2.32. Заземленная проводящая плоскость имеет выступ в форме полусферы радиуса R . Центр полусферы лежит на плоскости. На оси симметрии системы на расстоянии $d > R$ от плоскости находится точечный заряд q . Найти потенциал электрического поля, а также заряд Q , индуцированный на выступе.

Ответ: На оси Z четыре заряда: q , $+qR/d$, $-qR/d$, $-q$ с координатами соответственно $+d$, $+R^2/d$, $-R^2/d$, $-R$,

$$Q_{\text{ind}} = -q \left(1 - \frac{d^2 - R^2}{d\sqrt{d^2 + R^2}} \right).$$

2.34. В полупространстве, занятом металлом, имеется полусферический выступ радиуса R . Параллельно плоскости металла над выступом висит равномерно заряженное зарядом Q кольцо радиуса R , так что центр кольца O совпадает с высшей точкой O выступа. Найти плотность электрического заряда в точке O выступа.

Ответ: $\sigma = -\frac{5\sqrt{5}-1}{20\pi\sqrt{5}} \cdot \frac{Q}{R^2}.$