Самостоятельная работа к занятию 2

1. Найдите общее решение уравнения $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$ и решите задачу Коши $y(-1)=0$. Укажите область существования соответствующего непродолжаемого решения.

2. Найдите общее решение уравнения $y^2 + x^2y\,' = xy \cdot y\,'$. Можно ли для этого уравнения решить задачу Коши $y(1)=1$?

3. Найдите общее решение уравнения $xy\,' = y - x \cdot e^{y/x}$.

4. Укажите замену, которая приведет уравнение $2x^2y\,' = y^3 + xy$ к однородному.

5. Решите задачу Коши $\begin{cases} (y+\sqrt{xy})\,dx = x\,dy \\ y(-1) = -1 \end{cases}$ и укажите область существования соответствующего непродолжаемого решения.

Ответы и указания

1. Общее решение $y = Cx - x\ln|x|$ и $x=0$;
решение задачи Коши $y = -x\ln(-x)$, $x \in (-\infty; 0)$

2. Общее решение $\dfrac{y}{x} = \ln|y| + C$ или $x = \dfrac{y}{\ln Dy}$;

Замечание: в точках прямой $y = x$ дифференциальное уравнение невозможно разрешить относительно производной $y\,'$, однако в этих точках из уравнения можно определить производную $x' = 0$.

Указание: нарисуйте интегральную линию, проходящую через точку $(1;1)$. Ее уравнение $x = \dfrac{y}{1+\ln y}$. Можно ли однозначно разрешить это уравнение относительно y в окрестности точки $(1;1)$?

3. Общее решение $e^{-y/x} = \ln Cx$

4. Замена $y = \sqrt{z}$ приводит уравнение к виду $x^2z' = z^2 + xz$

5. Общее решение $2\sqrt{\frac{y}{x}} = \operatorname{sgn} x \cdot \ln Cx$; решение задачи Коши $2\sqrt{-y} = \sqrt{-x}\bigl(2 - \ln(-x)\bigr)$, где $x \in (-e^2; 0)$.