Семинар 21 [09.12.2022]

Интеграл Лапласа.

$$I(\lambda) = \int\limits_a^b A(x)\, e^{\lambda S(x)} dx, \quad \lambda \to +\infty.$$

1. $S'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$:

$$I(\lambda) \sim \left. \frac{A(x)\, e^{\lambda S(x)}}{\lambda S'(x)} \right|_a^b + \mathcal{O}\left[\lambda^{-2}\right].$$

2. $\exists! x_0 \in (a, b)$: $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) < 0$:

$$I(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(x_0)}} A(x_0)\, e^{\lambda S(x_0)} + \mathcal{O}\left[\lambda^{-3/2}\right].$$

Задачи

Задача 1

Найти собственные функции и числа уравнения Шредингера для линейного осциллятора.

Задача 2

Найти асимптотическое разложение функции ошибок

$$\mathrm{Erfc}(x) = \int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

при $x \to +\infty$.

Задача 3

Найти асимптотическое разложение Γ-функции Эйлера

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$$

при $x \to +\infty$. Ограничиться первыми двумя членами в разложении.

Задача 4

Найти асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(nt)\, e^{x \cos t} dt$$

при $x \to +\infty$. Ограничиться главным вкладом.

Задача 5

Найти асимптотическое разложение модифицированной функции Макдональда

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu t - x\cosh t}\,dt$$

при $x > 0$ и $\nu \to +\infty$. Ограничиться главным вкладом.

Решения

Задача 1

Уравнение для осциллятора имеет вид

$$-\psi'' + x^2\psi = k^2\psi.$$

У него имеется одна особая точка $x \to \infty$, асимптотика в ней $\psi \sim e^{\pm x^2/2}$. Подставим $\psi = x^n e^{-x^2/2} u\left(x^2\right)$, полагая n целым неотрицательным[1]:

$$zu'' + \left[n + \frac{1}{2} - z\right]u' - \frac{2n+1-k^2}{4}u = 0.$$

Таким образом

$$u \propto F\left(\frac{2n+1-k^2}{4}; n + \frac{1}{2}; x^2\right).$$

Условие обрыва ряда приводит к

$$\frac{2n+1-k^2}{4} = -m,$$

где m неотрицательное целое число. Для уровней энергии имеем

$$E = \frac{k^2}{2} = 2m + n + \frac{1}{2} = N + \frac{1}{2},$$

где мы положили $N = 2m + n$. Для $n = 0$ получаем все четные решения ψ_N с $N = 2m$:

$$\psi_{2m} \propto e^{-x^2/2} F\left(-m; \frac{1}{2}; x^2\right),$$

для $n = 1$ получаем все нечетные:

$$\psi_{2m+1} \propto x e^{-x^2/2} F\left(-m; \frac{3}{2}; x^2\right).$$

Замечание: можно было бы искать четные и нечетные решения по-отдельности, делая подстановки в виде $\psi = e^{-x^2/2} u\left(x^2\right)$ для четных и $\psi = x e^{-x^2/2} v\left(x^2\right)$ для нечетных. Мы бы получили уравнения

$$u \propto F\left(\frac{1-k^2}{4}; \frac{1}{2}; x^2\right),$$
$$v \propto F\left(\frac{3-k^2}{4}; \frac{3}{2}; x^2\right).$$

и, следовательно

$$\frac{1-k^2}{4} = -n, \quad \frac{3-k^2}{4} = -m.$$

Уровни энергий для четных и для нечетных имели бы вид:

$$E = \frac{1}{2} + 2n, \quad E = \frac{1}{2} + 2m + 1,$$

что опять сводилось бы к

$$E = \frac{1}{2} + N.$$

[1] Можно убедиться, что $x^n e^{-x^2/2}$ также будет асимптотикой в $x \to \infty$.

Задача 2

Интегрируем по частям

$$\operatorname{Erfc}(x)=\int\limits_x^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int\limits_x^{+\infty}\frac{1}{-2t}\left(e^{-t^2}\right)'dt=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\int\limits_x^{+\infty}\frac{1}{2t^2}e^{-t^2}dt=$$

$$=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\frac{e^{-x^2}}{4x^3}+\int\limits_x^{+\infty}\frac{3}{4t^4}e^{-t^2}dt=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\frac{e^{-x^2}}{4x^3}+\frac{3e^{-x^2}}{8x^5}-\int\limits_x^{+\infty}\frac{15}{8t^6}e^{-t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2x}\left(1-\frac{1}{x^2}\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{x^6}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\right)+\ldots\right)e^{-x^2}=\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi}x}\sum_{n=0}^{+\infty}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(-1)^n}{x^{2n}}.$$

Задача 3

Имеем

$$\Gamma(x+1)=\int\limits_0^{+\infty}e^{S(t)}dt,\quad S(t)=x\ln t-t.$$

Вычисляем

$$S'(t)=\frac{x}{t}-1,\quad S''(t)=-\frac{x}{t^2},\quad S'''(t)=\frac{2x}{t^3},\quad S''''(t)=-\frac{6x}{t^4}.$$

Находим точку максимума $t_0=x$. Тогда

$$S(t)\simeq S(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2}S''(t_0)+\frac{(t-t_0)^3}{6}S'''(t_0)+\frac{(t-t_0)^4}{24}S''''(t_0)=$$

$$=x\ln x-x-\frac{(t-x)^2}{2x}+\frac{(t-x)^3}{3x^2}-\frac{(t-x)^4}{4x^3}.$$

Сделаем замену $z=(t-x)/\sqrt{2x}$ и получим

$$\Gamma(x+1)\sim e^{x\ln x-x}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{2x}+\frac{(t-x)^3}{3x^2}-\frac{(t-x)^4}{4x^3}\right]dt=$$

$$=\sqrt{2x}e^{x\ln x-x}\int\limits_{-\sqrt{x/2}}^{+\infty}\exp\left[-z^2+\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{x}}z^3-\frac{1}{x}z^4\right]dz.$$

Нижний предел можно заменить на $-\infty$ с экспоненциальной точностью, а также разложить экспоненту по малости $1/x$:

$$\int\limits_{-\sqrt{x/2}}^{+\infty} \exp\left[-z^2+\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{x}}z^3-\frac{1}{x}z^4\right]dz \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-z^2\right]\exp\left[\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{x}}z^3-\frac{1}{x}z^4\right]dz \sim$$

$$\sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{x}}z^3-\frac{1}{x}z^4+\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{x}}z^3\right)^2\right)dz =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\left(1-\frac{1}{x}z^4+\frac{4}{9x}z^6\right)dz = \sqrt{\pi}\left(1+\frac{1}{12x}\right).$$

В итоге получаем

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1+\frac{1}{12x}+\mathcal{O}\left[x^{-2}\right]\right).$$

При натуральных $x=N$:

$$\Gamma(N+1) = N! \simeq \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N.$$

или

$$\ln N! \simeq N\ln N - N.$$

Задача 4

Интеграл достигает максимума в граничной точке, поэтому интегрировать по частям нельзя. Тем не менее, мы можем разложиться в точке максимума и интегрировать по полу бесконечному интервалу. Имеем

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(nt)\, e^{x\cos t}dt \sim \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{(nt)^2}{2!}+\ldots\right)\exp\left[x\left(1-\frac{t^2}{2!}+\ldots\right)\right]dt.$$

Далее сделаем замену $z = t\sqrt{x/2}$

$$I_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}}\frac{e^x}{\pi}\int\limits_0^{\pi\sqrt{x/2}}\left(1-\frac{1}{x}(nz)^2+\ldots\right)\exp\left[-z^2+\ldots\right]dz.$$

Далее заменяем верхний предел на $+\infty$ с экспоненциальной точностью:

$$I_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}}\frac{e^x}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2}\left(1-\frac{1}{x}(nz)^2+\ldots\right)dz \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1+\mathcal{O}\left[x^{-1}\right]\right).$$

Задача 5

Имеем

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{S(t)}dt, \quad S(t) = -\nu t - x\cosh t.$$

Вычисляем

$$S'(t) = -\nu - x\sinh t, \quad S''(t) = -x\cosh t.$$

Находим максимум

$$\nu + x\sinh t_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad t_0 = \ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{\nu}{x}\right)^2} - \frac{\nu}{x}\right] \simeq -\ln\left[\frac{2\nu}{x}\right].$$

Тогда

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} e^{\nu\ln\left[\frac{2\nu}{x}\right]-\nu} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\left(\frac{2\nu}{ex}\right)^\nu.$$