

1. Волны в пространстве-времени

Урок 1

Кинематика электромагнитных волн

1.1. (Задача 1.1.)¹ 1) Доказать поперечность любой электромагнитной волны, имеющей вид

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \left(t - x \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \right)$. Показать, что $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$. 2) Найти поток энергии, плотность импульса и момента импульса электромагнитной волны. 3) Записать векторы напряженности плоской монохроматической волны: а) плоскополяризованной; б) поляризованной по кругу; в) эллиптически поляризованной.

Решение

1) Прежде чем решать эту задачу, вспомним уравнения Максвелла в области, где отсутствуют заряды и токи.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Поскольку потенциалы определяются не однозначно, выберем дополнительные условия на потенциалы $\varphi = 0, \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Тогда

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Волновое уравнение, которому удовлетворяет электромагнитное поле (каждая из декартовых компонент электрического и магнитного поля, а также векторного потенциала имеет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \Delta f = 0$$

Рассмотрим это уравнение для векторного потенциала \mathbf{A} в случае зависимости всех переменных волны от одной пространственной переменной (это и называется плоской волной)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид $f_1(t - \frac{x}{c'}) + f_2(t + \frac{x}{c'})$, где $c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — скорость плоской волны в среде.

¹В круглых скобках дана нумерация задач по книге Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах: Учебное пособие: В 2 ч. Изд. 2-е, испр. и доп. / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. Ч. 2. Электродинамика частиц и волн. 158 с.

Из условия $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ следует

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0.$$

Тогда из волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const}.$$

Поскольку $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, отличная от нуля компонента A_x означает отличное от нуля продольное электрическое поле, но оно не имеет отношения к электромагнитной волне, поэтому можно выбрать $A_x = 0$, т.е. \mathbf{A} перпендикулярен направлению распространения волны. Тогда из формул

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

введя переменную $\xi = t - x/c'$, находим

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] = e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k = e_{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} A_k = \left[\nabla \left(t - \frac{x}{c'} \right) \cdot \mathbf{A}' \right] = -\frac{1}{c'} [\mathbf{n} \mathbf{A}'],$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{A}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c'} [\mathbf{n} \mathbf{A}'] = \sqrt{\varepsilon \mu} [\mathbf{n} \mathbf{E}],$$

откуда следует

$$\sqrt{\mu} \mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon} [\mathbf{n} \mathbf{E}].$$

Из этого равенства следует соотношение для модулей:

$$\sqrt{\mu} H = \sqrt{\varepsilon} E.$$

Вектор Пойнтинга в вакууме

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} [\mathbf{n} \mathbf{E}]] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} E^2 = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} H^2$$

$$(\mathbf{n} \mathbf{E}) = 0$$

$$W = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$$

$$\mathbf{S} = c W \mathbf{n}$$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \left(\frac{W}{c} \right) \mathbf{n}$$

2) Поскольку в плоской волне все вектора (поля и потенциал) - 2-мерные вектора, то можем заменить рассмотрение векторов комплексными числами. Если определить комплексную функцию $A = A_x + iA_y$, то для плоской волны, распространяющейся вдоль оси z

$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad (\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Записав $\text{rot } \mathbf{A}$ тоже как комплексную функцию и используя выведенные соотношения

$$\text{rot } \mathbf{A} = (\text{rot } A)_x + i(\text{rot } A)_y = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + i\frac{\partial A_x}{\partial z} = i\frac{\partial A}{\partial z},$$

получаем, что вместо вычисления ротора можно использовать производную от комплексной функции. Плоская монохроматическая волна

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - wt)},$$

где E_0 — действительная величина.

$$w = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

Волна с круговой поляризацией

$$E(z, t)_{\text{круг}} = E_0 e^{i(kz - wt)},$$

где E_0 — комплексная величина.

$$\begin{aligned} E_{\text{круг}} &= E_0 e^{i(kz - wt)} = (E_{0x} + iE_{0y}) [\cos(kz - wt) + i \sin(kz - wt)] = \\ &= (E_{0x} \cos(kz - wt) - E_{0y} \sin(kz - wt)) + i [E_{0x} \sin(kz - wt) + E_{0y} \cos(kz - wt)], \end{aligned}$$

введя величину $\psi = (kz - wt)$, получим

$$E_{\text{круг}} = E \{ (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) \},$$

где

$$E = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{E_{0x}}{E},$$

$$\sin \varphi = \frac{E_{0y}}{E},$$

$$\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi = \cos (kz - wt + \varphi),$$

$$\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi = \sin (kz - wt + \varphi).$$

Тогда

$$E_{\text{крг}} = E \{ \cos (kz - wt + \varphi) + i \sin (kz - wt + \varphi) \}.$$

Очевидно, что

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

Конец вектора E описывает правую спираль, если смотреть вдоль \mathbf{n} . Левая спираль получается если

$$E e^{-i(kz-wt)}.$$

Произвольное поле

$$A = A_n e^{i(kz-wt)} + A_\lambda e^{-i(kz-wt)}.$$

Плоская поляризация

$$A_1(z, t) = A_0 \cos(kz - wt).$$

1.2. (Задача 1.3.) Вычислить напряженности электрического и магнитного полей для солнечного света, если в одну минуту на 1 см^2 падает в среднем две калории солнечной энергии ($1 \text{ кал} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ эрг}$).

Решение Для плоской волны в вакууме $E = H$ поскольку $\varepsilon = \mu = 1$. Вектор Пойнтинга (поток энергии)

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} E^2.$$

Для условий нашей задачи

$$\bar{S} = \frac{2 \cdot 4,2 \cdot 10^7}{60} = 1,4 \cdot 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{с}}.$$

Тогда

$$\sqrt{E^2} = \sqrt{\frac{4\pi}{c} \bar{S}} \simeq \sqrt{5,8 \cdot 10^{-4}} = 0,024 \text{ CGSE (стат-Вольт/см)}.$$

$$E \simeq 7,2 \text{ В/см}; H \simeq 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ Эрстед} = 2,4 \cdot 10^{-2} / (4\pi) 10^3 \text{ А/м} = 1,9 \text{ А/м}.$$

1.3. (Задача 1.6.) Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частоты распространяются вдоль оси Z . Одна с амплитудой a поляризована по оси X , а другая с амплитудой b — по оси Y , причем опережает первую по фазе на χ . Какова поляризация результирующей волны? Рассмотреть случай равных амплитуд.

Решение Пусть комплексные амплитуды исходных волн $\mathbf{E}_1 = a\mathbf{e}_x$, $\mathbf{E}_2 = be^{i\chi}\mathbf{e}_y$, тогда

$$\mathbf{E}_0 = a\mathbf{e}_x + be^{i\chi}\mathbf{e}_y.$$

Удобно сдвинуть начало отсчета фаз так, чтобы в 2 -х взаимно перпендикулярных направлениях получились колебания, сдвинутые по фазе на $\pi/2$

$$\mathbf{E}'_0 = \mathbf{E}_0 e^{-i\alpha} = \mathbf{E}' - i\mathbf{E}''$$

и потребуем, чтобы векторы \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' были вещественными и $\mathbf{E}' \perp \mathbf{E}''$. Тогда

$$\mathbf{E}'_0 = (a\mathbf{e}_x + be^{i\chi}\mathbf{e}_y) e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}\mathbf{e}_x + be^{i(\chi-\alpha)}\mathbf{e}_y = \mathbf{E}' - i\mathbf{E}'',$$

откуда

$$\mathbf{E}' = a \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_x + b \cos (\alpha - \chi) \cdot \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{E}'' = a \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_x + b \sin (\alpha - \chi) \cdot \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'' = 0.$$

Раскрывая скалярное произведение, получим

$$a^2 \cos \alpha \sin \alpha + b^2 \cos (\alpha - \chi) \sin (\alpha - \chi) = 0,$$

и используя известные тригонометрические соотношения

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

$$\sin 2(\alpha - \chi) = \sin 2\alpha \cos 2\chi - \cos 2\alpha \sin 2\chi,$$

можно получить выражение

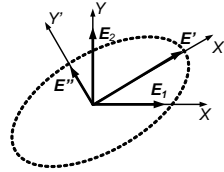
$$\frac{a^2}{2} \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{b^2}{2} \left\{ \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cos 2\chi - \sin 2\chi \right\}$$

откуда, делая простые преобразования, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2\chi}{a^2 + b^2 \cos^2 \chi}.$$

Введя новые оси $\mathbf{e}_{x'} \parallel \mathbf{E}'$ и $\mathbf{e}_{y'} \parallel \mathbf{E}''$ получим

$$\begin{aligned} E_{x'} &= E' \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha), \\ E_{y'} &= E'' \sin(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha). \end{aligned}$$



Из полученного выражения очевидно, что в новой системе координат конец вектора электрического поля \mathbf{E} описывает в новой системе координат эллипс. Это следует из следующего очевидного соотношения

$$\frac{E_{x'}^2}{E'^2} + \frac{E_{y'}^2}{E''^2} = 1,$$

что является уравнением эллипса.

1.4. (Задача 1.7.) Две монохроматические волны одной частоты поляризованы по кругу в противоположных направлениях и, имея одинаковые фазы, распространяются в одном направлении. Найти зависимость поляризации результирующей волны, от отношения E_l/E_r амплитуд соответственно правополяризованной и левополяризованной волн.

Решение

$$\mathbf{E}_1 = E_r \{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y\}$$

$$\mathbf{E}_2 = E_l \{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y\}$$

$$\mathbf{E} = (E_r + E_l)\mathbf{e}_x + (E_r - E_l)i\mathbf{e}_y$$

$$E_x = (E_r + E_l) \cos \omega t$$

$$E_y = (E_r - E_l) \sin \omega t$$

$$\frac{E_x^2}{(E_r + E_l)^2} + \frac{E_y^2}{(E_r - E_l)^2} = 1.$$

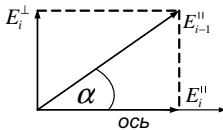
Если $E_r > E_l$ или $E_r < E_l$ — поляризация эллиптическая, если $E_r = E_l$ — поляризация линейная, если $E_r = 0$ или $E_l = 0$ — поляризация круговая.

1.5. (Задача 1.8.) Большое число $(N+1)$ поляроидов уложено в стопку. Ось каждого последующего поляроида составляет угол α с осью предыдущего, так что ось последнего образует с осью первого угол $\theta = N\alpha$. Найти интенсивность света на выходе из стопки, если на вход падает линейно поляризованный свет интенсивности I_0 , направление плоскости поляризации которого совпадает с осью первого поляроида. Поляроиды считать идеальными, потерями на отражение света пренебречь. Оценить интенсивность при $\theta = 90^\circ$ и $N = 50$.

Решение Поляроиды — это искусственно приготовляемые коллоидные пленки, служащие для получения поляризованного света. У поляроидов есть выделенное направление, называемое оптической осью поляроида. Они обладают способностью сильно поглощать световые лучи, у которых электрический вектор перпендикулярен к оптической оси, и пропускать без поглощения лучи, у которых электрический вектор \mathbf{E} параллелен оси.

После прохождения первого поляроида интенсивность волны не изменится, поскольку по условию задачи у падающей волны вектор \mathbf{E}_0 направлен вдоль оптической оси поляроида. Пусть амплитуда падающей волны будет E_0 , тогда $E_1^{\parallel} = E_0$, где E_1^{\parallel} — амплитуда волны после прохождения первого поляроида. У второго поляроида ось направлена под углом α по отношению к \mathbf{E}_1^{\parallel} . Представляя волну с вектором \mathbf{E}_1^{\parallel} в виде суперпозиции двух волн, одна из которых имеет вектор \mathbf{E} , параллельный оптической оси \mathbf{E}_2^{\parallel} , другая — в перпендикулярном направлении \mathbf{E}_2^{\perp} , заключаем, что после второго поляроида волна будет иметь амплитуду

$$E_2 = E_2^{\parallel} = E_1^{\parallel} \cos \alpha = E_0 \cos \alpha.$$



Понятно, что прохождение через каждый последующий поляроид добавляет в качестве множителя к напряженности электрического поля падающей волны $\cos \alpha$. После прохождения i -го поляроида $E_i = E_0 (\cos \alpha)^{i-1}$. При $i = N + 1$, $E_{N+1} = E_0 (\cos \alpha)^N$. Так как интенсивность падающей волны $I_0 = \frac{c}{4\pi} E_0^2$, то интенсивность света, проходящего стопку поляроидов,

$$I_{N+1} = \frac{c}{4\pi} E_{N+1}^2 = I_0 (\cos \alpha)^{2N}.$$

При $\theta = 90^\circ$ и $N = 50$ $\alpha = \theta/N = 1,8^\circ \approx 3 \cdot 10^{-2}$ рад. Как видим, $\alpha \ll 1$, тогда для вычисления степени косинуса малого угла воспользуемся его разложением в ряд Тейлора. Поэтому

$$I_{51} = I_0 (\cos(3 \cdot 10^{-2}))^{100} \approx I_0 [1 - \frac{100}{2} \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2] = I_0 (1 - 0,05) = 0,95 I_0.$$

Урок 2

Граничные условия. Формулы Френеля

1.6. (Задача 1.16.) Вывести граничные условия для полей электромагнитной волны. Используя их, получить законы отражения и преломления, а также доказать равенство частот в отраженной и преломленной волнах.

Решение Электромагнитное поле характеризуется величинами \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} : \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{D} — электрическая индукция, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{B} — магнитная индукция. Векторы поля \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} являются в общем случае функциями координат и времени и связаны между собой соотношениями $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Величина ε называется диэлектрической проницаемостью, а μ — магнитной проницаемостью сред. Диэлектрическая и магнитная проницаемости являются функциями координат, при некоторых постановках они могут зависеть от времени.

Поля \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} подчиняются законам, которые формируются в виде системы уравнений Максвелла. Здесь мы будем пользоваться интегральной формой уравнений Максвелла. В Гауссовой системе единиц они имеют вид

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} d\mathbf{S}, \\ \oint \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0, \\ \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{4\pi}{c} \iint \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{D} d\mathbf{S}, \\ \oint \mathbf{D} d\mathbf{S} &= 4\pi \iiint \rho dv,\end{aligned}$$

где ρ — объемная плотность зарядов, \mathbf{j} — плотность тока ($\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$, где γ — проводимость), c — скорость света в вакууме. Для случая электромагнитных волн в непроводящей среде $\mathbf{j} = 0$, и при отсутствии зарядов ($\rho = 0$) уравнения примут вид

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} d\mathbf{S}; \quad (1)$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0; \quad (2)$$

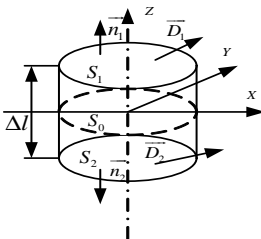
$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{D} d\mathbf{S}; \quad (3)$$

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = 0. \quad (4)$$

Выясним, как изменяются векторы электромагнитного поля на границе раздела двух сред с различными свойствами. Пусть одна среда характеризуется проницаемостями ε_1 и μ_1 , вторая — соответственно ε_2 и μ_2 , а границей является плоскость $Z = 0$. Применим уравнение (1) к контуру, ограничивающему малую площадку ΔS_x , пересекающую границу раздела и нормальную к ней. На рисунке эта площадка расположена в плоскости рисунка. Левая часть уравнения — интеграл по замкнутому выбранному контуру. Под интегралом стоит скалярное произведение векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{l}$, где $d\mathbf{l}$ — вектор элементарного приращения, длина которого равна элементарному приращению длины контура $d\mathbf{l}$, а направление совпадает с направлением касательной к контуру в соответствующей точке. Это скалярное произведение равно произведению проекции вектора \mathbf{E} на направление вектора $d\mathbf{l}$ — $E_{\tau x}$ и длины $d\mathbf{l}$, т. е. $(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = E_{\tau x} d\mathbf{l}$. Площадка ΔS_x пересекает поверхность раздела по длине ℓ_0 . Пусть стороны площадки ℓ_2 и ℓ_1 параллельны поверхности раздела, а $\Delta\ell$ — длина сторон площадки, пересекающих поверхность раздела. Если $\Delta\ell$ стремится к нулю: $\Delta\ell \rightarrow 0$, то ℓ_1 и ℓ_2 будут стремиться к ℓ_0 , а площадь ΔS_x будет стремиться к нулю. Левая часть уравнения (1) при $\Delta\ell \rightarrow 0$ (с точностью до величин второго порядка малости) будет равна $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = (E_{1\tau x} - E_{2\tau x}) \cdot \ell_0$, где $E_{1\tau x}$ и $E_{2\tau x}$ — касательные составляющие вектора \mathbf{E} соответственно в первой и второй средах и лежащие в плоскости площадки ΔS_x . Длина ℓ_0 выбрана настолько малой, что можно пренебречь изменением E_{τ} на этом отрезке.

Правая часть уравнения (1), представляющая изменение во времени потока вектора \mathbf{B} через площадку ΔS_x , пропорциональна площади ΔS_x и сведется к нулю при $\Delta S_x \rightarrow 0$, поскольку B конечно. Получим $(E_{1\tau x} - E_{2\tau x}) \cdot \ell_0 = 0$, откуда $E_{1\tau x} = E_{2\tau x}$. Если применить уравнение (1) к площадке ΔS_y , перпендикулярной рассмотренной и границе раздела, и провести рассуждения, аналогичные произведенным, то получим $E_{1\tau y} = E_{2\tau y}$, где $E_{1\tau y}$ и $E_{2\tau y}$ — касательные к поверхности раздела, составляющие вектора \mathbf{E} соответственно в первой и второй средах, лежащие в плоскости площадки ΔS_y . Итак, доказана непрерывность проекций на два взаимно перпендикулярных направления касательной к поверхности раздела, составляющей \mathbf{E} , значит, непрерывна полная касательная, составляющая \mathbf{E}_{τ} , т. е. $\mathbf{E}_{1\tau} = \mathbf{E}_{2\tau}$.

Аналогично, из уравнения (3) следует непрерывность касательных или тангенциальных составляющих вектора \mathbf{H} при переходе через границу раздела двух сред (если на границе раздела нет поверхностных токов): $\mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{H}_{2\tau}$.



Покажем, что из уравнения (4) следует непрерывность нормальных к поверхности раздела составляющих вектора электрической индукции \mathbf{D} . Рассмотрим малый цилиндр с образующими $\Delta\ell$, перпендикулярными к поверхности раздела. Этот цилиндр вырезает из поверхно-

сти элемент S_0 столь малый, что его можно считать плоским. Основания цилиндра площади S_1 и S_2 параллельны поверхности раздела. Вычислим поток вектора \mathbf{D} через поверхность цилиндра:

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = D_1 \cos(\widehat{\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_1}) S_1 + D_2 \cos(\widehat{\mathbf{D}_2 \mathbf{n}_2}) S_2 + \Phi,$$

где D_1 и D_2 — значения вектора \mathbf{D} на соответствующих основаниях цилиндра; \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — внешние нормали к этим основаниям; Φ — поток через боковую поверхность цилиндра. Если уменьшить высоту цилиндра $\Delta\ell$, не изменяя при этом S_0 , то площадь боковой поверхности цилиндра и поток Φ вектора \mathbf{D} через эту поверхность будет стремиться к нулю. Учитывая, что

$$D_1 \cos(\widehat{\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_1}) = D_{1n}, \quad D_2 \cos(\widehat{\mathbf{D}_2 \mathbf{n}_2}) = -D_{2n},$$

поток вектора \mathbf{D} через поверхность цилиндра в пределе при $\Delta \rightarrow 0$ будет равен

$$\lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = (D_{1n}| - D_{2n}|) S_0,$$

где D_{1n} и D_{2n} — нормальные составляющие вектора \mathbf{D} к поверхности раздела со стороны первой и второй сред, $D_{1n}|$, $D_{2n}|$ — нормальные составляющие вектора \mathbf{D} на основаниях цилиндра. Из уравнения (4) поток равен нулю, поэтому $(D_{1n}| - D_{2n}|) S_0 = 0$, откуда $D_{1n}| = D_{2n}|$.

Применяя аналогичные рассуждения к уравнению (2), получаем

$$B_{1n}| = B_{2n}|.$$

Итак, на границе раздела должны выполняться граничные условия

$$\mathbf{E}_{1\tau}| = \mathbf{E}_{2\tau}|, \quad \mathbf{H}_{1\tau}| = \mathbf{H}_{2\tau}|; \quad (5)$$

$$D_{1n}| = D_{2n}|, \quad B_{1n}| = B_{2n}|. \quad (6)$$

Рассмотрим прохождение электромагнитной волны через границу двух непроводящих сред. В случае однородной среды $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ из уравнений Максвелла, взятых в дифференциальной форме, можно получить уравнения второго порядка для \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = 0.$$

Эти уравнения допускают частные решения в виде монохроматических плоских волн

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{\pm i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (7)$$

где $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ — константы, называемые амплитудами волны; ω — циклическая частота волны; $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — длина волнового вектора, а направление волнового вектора \mathbf{k} совпадает с направлением распространения волны. Векторы $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему, причем

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]. \quad (8)$$

Можно показать, что для монохроматических полей (7) условия (6) выполняются автоматически, если выполняются условия (5). Кроме того, для каждой волны \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны соотношением (8). Поэтому одновременно удовлетворить условию (8) и двум граничным условиям (5) можно только допустив, что падающая волна частично проходит во вторую среду, а частично отражается от поверхности раздела. Особенно просто это можно проиллюстрировать на примере падения волны по направлению, перпендикулярному плоскости раздела. Тогда у падающей волны есть только тангенциальные составляющие векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 . Если существует только проходящая волна, то из граничных условий (5) у этой волны те же вектора \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 , что и у падающей, т. е. $E_1 = E_2 = E$, $H_1 = H_2 = H$. С другой стороны, учитывая (8), $H_1 = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} E_1$, а $H_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\mu_1} E_2$, что противоречит равенству $H_1 = H_2$.

Покажем, что у всех волн — падающей, отраженной и прошедшей — частота ω одинакова и равна частоте падающей волны. Пусть на плоскую границу раздела $z = 0$ падает плоская волна

$$\mathbf{E}^{(\ell)} = \mathbf{E}_0^{(\ell)} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})},$$

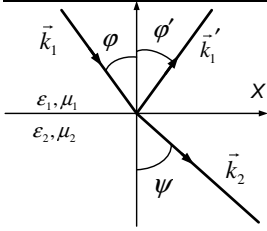
а отраженную и прошедшую, или преломленную, волны запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(r)} &= \mathbf{R} e^{-i(\omega_r t - \mathbf{k}'_1 \mathbf{r})}, \\ \mathbf{E}^{(d)} &= \mathbf{D} e^{-i(\omega_d t - \mathbf{k}'_2 \mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия (5) должны выполняться для всех точек границы раздела. Любое из условий (5) для произвольной точки поверхности раздела $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, можно записать в виде

$$A(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega t} + B(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega_r t} + C(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega_d t} = 0. \quad (10)$$

Константы $A(\mathbf{r}_0)$, $B(\mathbf{r}_0)$, $C(\mathbf{r}_0)$ отличны от нуля, если отраженная и прошедшая волны действительно существуют. Этому условию при всех t можно удовлетворить, если только $\omega = \omega_r = \omega_d$.



Найдем связь между волновыми векторами падающей \vec{k}_1 , отраженной \vec{k}'_1 и прошедшей \vec{k}_2 волн. Ось z направим в сторону второй среды. Плоскость раздела $z = 0$ будет плоскостью XY . За ось X возьмем линию пересечения плоскости раздела сред с плоскостью падения. Напомним, что плоскость падения — это плоскость, в которой лежат волновой вектор падающей волны

\vec{k}_1 и нормаль к плоскости раздела, в нашем случае ось z . В выражениях (9) скалярное произведение вида $\vec{k}\mathbf{r}$, записанное для плоскости раздела, представлено в виде $\vec{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y$. Тогда любое из условий (5) с учетом равенства частот при $y = y_0$ запишется в виде

$$A(y_0)e^{ik_{1x}x} + B(y_0)e^{ik'_{1x}x} + C(y_0)e^{ik_{2x}x} = 0,$$

где $A(y_0), B(y_0), C(y_0)$ — постоянные и притом отличные от нуля, если только отраженная и прошедшая волны действительно существуют. Поскольку это равенство должно выполняться при всех x , то должно быть

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}.$$

Мы выбрали расположение осей X, Y такими, что у падающей волны имеется только x -я и z -я компоненты волнового вектора k_{1x}, k_{1z} , а $k_{1y} = 0$. Покажем, что тогда $k'_{1y} = k_{2y} = 0$. Записав условия (5) для $x = x_0$, получим

$$A(x_0) + B(x_0)e^{ik'_{1y}y} + C(x_0)e^{ik_{2y}y} = 0;$$

$A(x_0), B(x_0), C(x_0)$ отличны от нуля. Чтобы это равенство выполнялось для всех y , нужно положить $k'_{1y} = k_{2y} = 0$. Таким образом, получаем, что волновые векторы отраженной \vec{k}'_1 и прошедшей волн \vec{k}_2 лежат в плоскости падения, а величины их проекций на границу раздела одинаковы и равны соответствующей проекции падающей волны. Найдем связь между углами падения, отражения и преломления. Поскольку величина волнового вектора определяется свойствами среды и частотой, то отсюда следует, что $k_1 = k'_1$, так как падающая и отраженная волны распространяются в одной среде $k = k'_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\omega/c$. Учитывая, что $k_{1x} = k'_{1x}$, заключаем, что угол отражения φ' (см. рис. на с. 30) равен углу падения φ . Далее

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \pm \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2}, \quad k_{1z} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2}.$$

Знак «минус» перед корнем для k_{1z} взят потому, что отраженная волна распространяется в сторону уменьшения z . Если $k_2^2 > k_{1x}^2$, то перед корнем для k_{2z} следует

взять знак «плюс», это будет означать, что волна преломления распространяется в сторону возрастания z . Если ψ — угол преломления, то, учитывая, что

$$k_{1x} = k_1 \sin \varphi = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{\omega}{c} \sin \varphi,$$

$$k_{2x} = k_2 \sin \psi = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \frac{\omega}{c} \sin \psi,$$

$$k_{1x} = k_{2x},$$

получаем

$$\sin \varphi / \sin \psi = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} / \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = n_2 / n_1,$$

где $n_i = \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$ называется показателем преломления i -й среды.

Для случая $k_2^2 < k_{1x}^2$, k_{2z} — чисто мнимая величина и зависит от z , определяется действительным множителем $e^{\pm |k_{2z}|z}$. Понятно, что нужно взять знак «минус», т. е. положить $k_{2z} = i\sqrt{k_{1x}^2 - k_2^2}$, иначе амплитуда прошедшей волны будет неограниченно возрастать по мере удаления от границы раздела, чего не может быть из-за закона сохранения энергии. Волна во второй среде неоднородная:

$$\mathbf{E}^{(d)} = \mathbf{D} e^{-z|k_{2z}|} e^{-i(\omega t - k_{1x}x)}.$$

1.7. (Задача 1.17.) Найти коэффициенты отражения и прохождения для электромагнитной волны, падающей нормально на плоскую границу между вакуумом и средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ .

Решение Пусть плоскостью раздела будет плоскость $z = 0$ с осью Z , направленной вниз, в сторону второй среды. Тогда по условию задачи волновой вектор падающей волны направлен вдоль положительного направления оси Z . Поскольку в плоской волне векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны волновому вектору \mathbf{k} , то направление оси X можно выбрать по направлению вектора \mathbf{E} . Тогда для падающей волны имеем

$$E_x^\ell = E_0^\ell e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad E_y^\ell = 0, \quad E_z^\ell = 0;$$

$$H_y^\ell = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_0^\ell e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad H_x^\ell = 0, \quad H_z^\ell = 0,$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}.$$

Для получения величины напряженности магнитного поля в волне использовано соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu \omega} [\mathbf{kE}]. \quad (1)$$

Для отраженной волны имеем аналогично

$$E_x^r = R e^{-i(\omega t + k_1 z)}, \quad E_y^r = E_z^r = 0,$$

$$H_y^r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} R e^{-i(\omega t + k_1 z)}, \quad H_z^r = H_y^r = 0.$$

Для преломленной волны

$$E_x^d = D e^{-i(\omega t - k_2 z)}, \quad E_y^d = E_z^d = 0$$

$$H_y^d = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} D e^{-i(\omega t - k_2 z)}, \quad H_z^d = H_y^d = 0,$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}.$$

Здесь учтено, что частоты падающей, отраженной и преломленной волн равны друг другу (см. решение задачи 1.6.). Запишем условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов **Е** и **Н**. В первой среде есть волна падающая и отраженная, во второй — прошедшая, поэтому, полагая $z = 0$, получаем

$$E_0^\ell + R = D, \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_0^\ell - R) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} D.$$

Отсюда

$$R = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} E_0^\ell,$$

$$D = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} E_0^\ell.$$

Коэффициент отражения $\rho^{(r)}$ есть отношение потоков энергии, отраженной и падающей волн, а коэффициент прохождения $\rho^{(d)}$ — отношение потоков энергии прошедшей и падающей волн. Найдем распределение энергии в падающей волне. Известно, что плотность энергии электромагнитного поля в среде

$$W = \frac{\mathbf{D}^\ell \cdot \mathbf{E}^\ell}{8\pi} + \frac{\mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{H}^\ell}{8\pi} = \frac{\varepsilon_1 (E^\ell)^2}{8\pi} + \frac{\mu_1 (H^\ell)^2}{8\pi}.$$

Здесь E^ℓ и H^ℓ действительные:

$$E^\ell = E_0^\ell \cos(\omega t - k_1 z), \quad H^\ell = H_0^\ell \cos(\omega t - k_1 z).$$

В силу соотношения (1), энергии магнитного и электрического полей в среде, так же как и в вакууме, равны между собой $\mu_1(H^\ell)^2/8\pi = \varepsilon_1(E^\ell)^2/8\pi$, поэтому

$$W = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} (E_0^\ell)^2 \cos^2(\omega t - k_1 z). \quad (2)$$

Если зафиксировать время, то формула (2) даст распределение энергии в пространстве. Поскольку волна в среде движется со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$, вместе с волной движется и энергия, запасенная в электромагнитном поле. Чтобы найти энергию, проходящую через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени, усредним энергию W (2) по z , взяв в качестве интервала усреднения характерную для волны величину, например длину волны λ , т. е. $\Delta z = \lambda_1 = 2\pi/k_1$. Тогда

$$\langle W \rangle = \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_0}^{z_0+\lambda_1} W(z) dz = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi} \int_{\omega t - k z_0 - 2\pi}^{\omega t - k z_0} \cos^2 \xi d\xi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi}.$$

Средняя по координате плотность энергии не зависит от времени (это будет означать, что и средняя по времени плотность энергии будет равна той же величине

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi}.$$

Зная среднее значение энергии, находим ее поток. Через единичную площадку, взятую перпендикулярно направлению распространения волны, в единицу времени пройдет энергия Π , запасенная в параллелепипеде длиной, равной скорости волны $v = c/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ и с площадью основания, равной единице, т. е.

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi} v = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_0^\ell)^2.$$

Это и есть средний по времени вектор Пойнтинга \bar{S}^ℓ для падающей волны. Если \mathbf{E} и \mathbf{H} записаны в комплексном виде, то средний вектор Пойнтинга

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} |\overline{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}| = \frac{1}{2} Re \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2.$$

Аналогично для энергии отраженной и преломленной волн имеем

$$|\bar{S}^r| = \frac{c}{8\pi} Re[\mathbf{E}^r \times \mathbf{H}^{r*}] = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} R^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} \right)^2 \cdot |\bar{S}^\ell|,$$

$$|\bar{S}^d| = \frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2} \cdot |\bar{S}^\ell|.$$

Тогда

$$\rho^{(r)} = \frac{\bar{S}^r}{\bar{S}^\ell} = \frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}, \quad \rho^{(d)} = \frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}.$$

Если первая среда вакуум, то $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ и, полагая $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\mu_2 = \mu$, получаем

$$\rho^{(r)} = \frac{(1 - \sqrt{\varepsilon/\mu})^2}{(1 + \sqrt{\varepsilon/\mu})^2}, \quad \rho^{(d)} = \frac{4\sqrt{\varepsilon/\mu}}{(1 + \sqrt{\varepsilon/\mu})^2}.$$

Если $\varepsilon = \mu$, то отражательная способность среды обращается в нуль $\rho^{(r)} = 0$ и вся энергия проходит во вторую среду: $\rho^{(d)} = 1$.

1.8. (Задача 1.19.) На плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления n падает под углом φ к нормали к пластинке плоская линейно поляризованная монохроматическая световая волна. Плоскость поляризации волны образует угол β с нормалью к плоскости падения. Найти угол между плоскостью поляризации и нормалью к плоскости падения после прохождения света через пластинку (многократными отражениями внутри пластинки пренебречь).

Решение Плоскость падения есть плоскость волнового вектора \mathbf{k} и нормали к границе раздела, а плоскость поляризации — плоскость, в которой лежат векторы электрического поля \mathbf{E} и волнового вектора \mathbf{k} . Плоскость падения для всех волн — падающей, отраженной и преломленной — одна и та же, что следует из равенства тангенциальных составляющих этих волн. Если β — угол между плоскостью поляризации падающей волны и нормалью к плоскости падения, то, учитывая, что вектор \mathbf{E}^ℓ перпендикулярен вектору \mathbf{k} , проекции вектора \mathbf{E} на плоскость падения и перпендикуляр к ней, обозначаемые соответственно \parallel , \perp , будут равны

$$E_{\parallel} = E \sin \beta, \quad E_{\perp} = E \cos \beta. \quad (1)$$

Аналогично для преломленной волны E_1^d , если вторая среда занимает все полупространство,

$$E_{\parallel}^d = E^d \sin \beta_1, \quad E_{\perp}^d = E^d \cos \beta_1, \quad (2)$$

где β_1 — угол между плоскостью поляризации преломленной волны и нормалью к плоскости падения. Поскольку многократными отражениями можно пренебречь, считаем, что волна (2) является падающей на вторую (нижнюю) плоскость пластинки и

связи E_{\parallel}^d с E_{\parallel} , E_{\perp}^d с E_{\perp} определяются формулами Френеля:

$$\frac{E_{\parallel}^d}{E_{\parallel}} = \frac{2 \cos \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}, \quad \frac{E_{\perp}^d}{E_{\perp}} = \frac{2 \cos \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad (3)$$

где ψ — угол преломления.

Из формул (1)–(3) следует, что

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{E_{\parallel}^d}{E_{\perp}^d} = \frac{1}{\cos(\varphi - \psi)} \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos(\varphi - \psi)}. \quad (4)$$

Волна E^d на второй границе будет падать под углом ψ , а преломится под углом φ . Поэтому

$$\operatorname{tg} \beta^* = \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\cos(\varphi - \psi)}, \quad (5)$$

где β^* — угол между плоскостью поляризации и нормалью к плоскости падения в прошедшей через пластинку волне. Значит,

$$\operatorname{tg} \beta^* = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2(\varphi - \psi)}.$$

Найдем $\cos(\varphi - \psi)$. Так как $\sin \psi = \sin \varphi / n$, а $\cos \psi = \sqrt{1 - (\frac{\sin \varphi}{n})^2}$, то

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos \varphi \cdot \cos \psi + \sin \varphi \cdot \sin \psi = \frac{1}{n} (\cos \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sin^2 \varphi)$$

и

$$\operatorname{tg} \beta^* = \frac{n^2 \operatorname{tg} \beta}{(\sin^2 \varphi + \cos \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi})^2}.$$

1.9. (Задача 1.21.) На диэлектрическую пленку с показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ по нормали к поверхности падает монохроматическая волна. Толщина пленки $d \ll \lambda$. Найти коэффициент отражения волны.

Решение Направим ось Z перпендикулярно слою вниз, так что верхняя поверхность пленки занимает плоскость $z = 0$, а нижняя — плоскость $z = d$. При падении волны на слой в пространстве возникает волновое поле в зависимости от координат и времени, в общем случае отличное от поля падающей волны. Для того чтобы найти это поле, нужно решить волновые уравнения, написанные для каждой из областей

$z \leq 0$, $0 \leq z \leq d$, $z > d$, и на плоскостях $z = 0$ и $z = d$ удовлетворить граничным условиям (см. решение задачи 1.6.). Частным решением волнового уравнения является плоская волна. Понятно, что для $z < 0$ кроме падающей волны

$$\mathbf{E}^\ell = \mathbf{E}_0^\ell e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad z \leq 0$$

может распространяться и отраженная волна, являющаяся результатом многократных отражений от верхней и нижней границ слоя и их интерференции, которую обозначим

$$\mathbf{E}^r = \mathbf{R} e^{-i(\omega t + k_1 z)}, \quad z \leq 0.$$

Внутри слоя $0 \leq z \leq d$ поле \mathbf{E}_2 по тем же причинам, что и для $z \leq 0$, будет состоять из полей двух плоских волн, распространяющихся в двух взаимно противоположных направлениях, которое представимо в виде

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} e^{-i(\omega t - k_2 z)} + \mathbf{E}'_{20} e^{-i(\omega t + k_2 z)}, \quad 0 \leq z \leq d.$$

За слоем $z \geq d$ может распространяться только прошедшая через слой волна. Запишем ее в виде

$$\mathbf{E}^d = \mathbf{D} e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad z \geq d.$$

В приведенных выше формулах учтено, что волны распространяются вдоль оси Z , поскольку падающая волна не имеет тангенциальной составляющей волнового вектора \mathbf{k} по условию задачи. В каждой из волн напряженности магнитного поля связана с напряженностью электрического поля соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\omega \mu} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]. \quad (1)$$

Поскольку ось X лежит в плоскости верхней границы слоя, то, не умаля общности, при нормальном падении можно считать, что вектор \mathbf{E}^ℓ направлен по X , тогда векторы напряженностей электрических полей всех остальных волн направлены по X , а напряженности магнитных полей по Y . При переходе через границу двух сред остаются непрерывными тангенциальные составляющие (т. е. проекции на границу раздела) напряженностей электрического и магнитного полей (см. решение задачи 1.6.).

Чтобы записать граничные условия, мы должны в один момент времени зафиксировать поля на границе с обеих сторон границы и приравнять их. Поскольку в нашем случае тангенциальные составляющие напряженностей являются полными напряженностями, то непрерывность электрического поля и непрерывность магнитного поля при $z = 0$ с учетом уравнения (1) выразятся следующим образом:

$$E_0^\ell + R = E_{20} + E'_{20}; \quad (2)$$

$$k_1(E_0^\ell - R) = k_2(E_{20} - E_{20}'). \quad (3)$$

А при $z = d$ будем иметь

$$E_{20}e^{ik_2d} + E_{20}'e^{-ik_2d} = De^{ik_1d}; \quad (4)$$

$$k_2(E_{20}e^{ik_2d} - E_{20}'e^{-ik_2d}) = k_1De^{ik_1d}. \quad (5)$$

При написании соотношений (2)–(5) учтено, что для всех сред $\mu = 1$.

Коэффициент отражения ρ^r есть отношение энергии, переносимой отраженной волной через единичную площадку в единицу времени, к энергии, переносимой падающей волной через единичную площадку в единицу времени. Эти энергии равны средним значениям векторов Пойнтинга соответствующих волн (см. решение задачи 1.7.). Используя результаты этой задачи, имеем: среднее значение вектора для Пойнтинга падающей волны равно

$$\bar{S}^\ell = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_1} (E_0^\ell)^2,$$

где амплитуда падающей волны E_0^ℓ — действительная величина. Для отраженной волны амплитуда R может быть комплексной, тогда вектор Пойнтинга выразится следующим образом:

$$|\bar{S}^r| = \frac{c}{8\pi} |Re[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]| = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}c}{8\pi} RR^* = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_1} |R|^2.$$

Здесь учтено, что $H^r = -c\sqrt{\varepsilon_1}Re^{-i(\omega t + k_1 z)}$.

Окончательно, коэффициент отражения таков:

$$\rho^r = \frac{|\bar{S}^r|}{|\bar{S}^\ell|} = \frac{|R|^2}{(E_0^\ell)^2}. \quad (6)$$

Из уравнений (2)–(5) выразим R через E_0^ℓ . Опуская простые арифметические вычисления, приведем окончательное выражение для R :

$$R = \frac{(k_2^2 - k_1^2)[e^{i2k_2d} - 1]E_0^\ell}{(k_2 + k_1)^2 - (k_2 - k_1)^2 e^{i2k_2d}}.$$

Поскольку

$$k_i = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_i} = \frac{\omega}{c} n_i,$$

где ε_i — диэлектрическая проницаемость, n_i — показатель преломления i -й среды, и, вводя относительный показатель преломления $n = n_2/n_1$, получаем

$$R = \frac{(n^2 - 1)(e^{i2k_2d} - 1)E_0^\ell}{(n + 1)^2 - (n - 1)^2 e^{i2k_2d}};$$

R представляет собой отношение комплексных чисел. Модуль такого выражения проще найти как отношение модулей числителя и знаменателя, поскольку

$$|(n^2 - 1)(e^{-i2k_2d} - 1)|^2 = (n^2 - 1)^2 4 \sin^2 k_2d$$

и

$$|(n + 1)^2 - (n - 1)^2 e^{-i2k_2d}|^2 = (4n)^2 + 4(n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2d,$$

тогда

$$|R|^2 = \frac{(n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2d}{4n^2 + (n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2d} (E_0^\ell)^2.$$

Для коэффициента отражения получим выражение

$$\rho^r = \frac{(n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2d}{4n^2 + (n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2d}.$$

При решении задачи мы нигде не учитывали, что толщина слоя много меньше длины падающей волны λ , поэтому полученный коэффициент отражения справедлив и для толстых слоев. При $k_2d = m\pi$ или $d = (\lambda_2/2)m$, где m — целое положительное число, λ_2 — длина волны в слое, $\rho = 0$, пленка становится прозрачной. Если пленка тонкая, так что $k_2d \ll 1$, что соответствует $\frac{2\pi}{\lambda} n_2 d \ll 1$, то $\sin^2 k_2d \approx (k_2d)^2$, а в знаменателе вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым, тогда

$$\rho^r = \frac{(n^2 - 1)^2}{4n^2} \cdot \frac{4\pi^2 n^2 d^2}{\lambda^2} = \pi^2 (n^2 - 1)^2 \frac{d^2}{\lambda^2}.$$

1.10. (Задача 1.22.) Вывести формулы Френеля и найти выражение коэффициентов отражения и прохождения через заданные угол падения φ и коэффициент преломления n . Рассмотреть случай полного внутреннего отражения.

Решение Для E_\perp — волны (1 — отраженная, 2 — преломленная; индексы \perp и \parallel относятся к перпендикулярным и параллельным компонентам поля, лежащим в плоскости падения волны):

$$E_1^\perp = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \varphi)} E_0^\perp = \frac{\cos \varphi - \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} E_0^\perp;$$

$$E_2^\perp = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\psi + \varphi)} E_0^\perp = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} E_0^\perp.$$

Для $E_{||}$ -волны:

$$E_1^{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\psi - \varphi)}{\operatorname{tg}(\psi + \varphi)} E_0^{\parallel} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - n^2 \cos \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + n^2 \cos \varphi} E_0^{\parallel};$$

$$E_2^{\parallel} = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\psi + \varphi) \cos(\psi - \varphi)} E_0^{\parallel} = \frac{2n \cos \varphi}{n^2 \cos \varphi + \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} E_0^{\parallel}.$$

В этих формулах φ — угол преломления ($\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{n}$). Коэффициенты отражения R и прохождения T равны соответственно $R = \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^2$, $T = n \left(\frac{E_2}{E_0}\right)^2$, при этом $R + T \left(\frac{\cos \psi}{\cos \varphi}\right) = 1$, где косинусы учитывают сечения пучков.

1.11. (Задача 1.23.) При каком угле падения волна с произвольной поляризацией после отражения от плоской границы диэлектриков становится линейно поляризованной?

Решение Для определения амплитуд отраженной и проходящей волн используются граничные условия: непрерывность проекций на плоскость раздела двух сред векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} возникающего волнового поля. При этом электрическое поле каждой волны разлагают на две составляющие. Одна из них лежит в плоскости падения, другая перпендикулярна этой плоскости. Они обозначаются символами \parallel и \perp соответственно. Отношение амплитуд соответствующих проекций отраженной R и падающей \mathcal{E} волн, называемые коэффициентами Френеля, равны

$$\frac{R_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} = \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \psi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi}, \quad \frac{R_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} = \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \psi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \psi},$$

где n_1 , n_2 — показатели преломления первой и второй среды соответственно, φ , ψ — угол падения и преломления. Углы отсчитываются от нормали к плоскости раздела, волна падает из первой среды во вторую. Поскольку $n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \psi$ (см. решение задачи 1.6.), то коэффициенты Френеля можно представить в виде

$$\frac{R_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad \frac{R_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}.$$

При $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ знаменатель $\operatorname{tg}(\varphi + \psi)$ во второй формуле обращается в бесконечность. В этом случае $R_{\parallel} = 0$. Это значит, что при некотором угле падения отражение волны исчезает, если электрический вектор падающей волны лежит в плоскости падения. Отношение $R_{\perp}/\mathcal{E}_{\perp}$ никогда не обращается в нуль, за исключением случая

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\mu_2(\mathcal{E}_2 \mu_1 - \mathcal{E}_1 \mu_2) / \mu_1(\mathcal{E}_1 \mu_1 - \mathcal{E}_2 \mu_2)}, \quad \mu \neq 1.$$

Найдем угол φ_B (угол Брюстера), при котором $R_{\parallel} = 0$. Поскольку $\varphi_B + \psi_B = \frac{\pi}{2}$, то $\cos \varphi_B = \sin \psi_B = n_1 \sin \varphi_B / n_2$, откуда $\tan \varphi_B = n_2 / n_1$. Если волна с произвольной поляризацией падает под углом φ_B , то составляющая с электрическим вектором E_{\parallel} отражаться не будет. В отраженной волне будет только составляющая R_{\perp} , т. е. волна окажется линейно поляризованной и притом перпендикулярна плоскости падения.

1.12. (Задача 1.24.) Показать, что после полного внутреннего отражения от границы диэлектрика линейно поляризованная волна приобретает в общем случае эллиптическую поляризацию. При каких условиях поляризация будет круговой?

Решение При полном внутреннем отражении коэффициенты Френеля комплексны и для $R_{\perp}/\mathcal{E}_{\perp}$ и $R_{\parallel}/\mathcal{E}_{\parallel}$ имеют вид

$$\frac{R_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} = \frac{\cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}, \quad \frac{R_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} = \frac{n^2 \cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}, \quad (1)$$

где $n = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления, φ — угол падения, причем $\sin \varphi > n$. Комплексность выражений (1) означает, что при полном отражении фаза каждой из волн испытывает скачок. Действительно, комплексные коэффициенты можно представить как

$$\begin{aligned} R_{\perp}/\mathcal{E}_{\perp} &= A e^{i\delta_{\perp}/2} / A e^{-i\delta_{\perp}/2} = e^{i\delta_{\perp}}, \\ R_{\parallel}/\mathcal{E}_{\parallel} &= B e^{i\delta_{\parallel}/2} / B e^{-i\delta_{\parallel}/2} = e^{i\delta_{\parallel}}, \end{aligned}$$

где $A, B, \delta_{\perp}, \delta_{\parallel}$ — величины вещественные, причем

$$\tan \frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi}, \quad \tan \frac{\delta_{\parallel}}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cos \varphi}. \quad (2)$$

Отраженную волну \mathbf{E}^r можно записать в виде

$$\mathbf{E}^r = (R_{\parallel} \mathbf{e}_{\xi} + R_{\perp} \mathbf{e}_{\eta}) e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)},$$

где \mathbf{e}_{ξ} , \mathbf{e}_{η} — единичные векторы, направленные вдоль составляющих напряженности электрического поля, лежащих соответственно в плоскости падения \mathbf{R}_{\parallel} и перпендикулярного к этой плоскости \mathbf{R}_{\perp} , или

$$\mathbf{E}^r = \mathcal{E}_{\parallel} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \delta_{\parallel})} \mathbf{e}_{\xi} + \mathcal{E}_{\perp} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \delta_{\perp})} \mathbf{e}_{\eta}. \quad (3)$$

Амплитуды \mathcal{E}_{\parallel} , \mathcal{E}_{\perp} падающей волны вещественные, так как по условию она линейно поляризована. Таким образом, отраженная волна (3) есть суперпозиция двух

линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях и сдвинутых по фазе на величину $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$ волн. Для выяснения характера поляризации отраженной волны запишем ее в действительном виде в проекциях на оси ξ, η , выбранных соответственно вдоль $\mathbf{e}_{\xi}, \mathbf{e}_{\eta}$.

$$\mathcal{E}_{\xi}^r = \mathcal{E}_{\parallel} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \delta_{\parallel}), \quad (4)$$

$$\mathcal{E}_{\eta}^r = \mathcal{E}_{\perp} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \delta_{\perp}).$$

Как видим, величины проекций в каждой точке пространства меняются со временем по гармоническому закону. Чтобы найти, какую траекторию описывает конец вектора \mathbf{E}^r , исключим в выражениях (4) время t . Для этого представим выражение (4) в виде

$$\mathcal{E}_{\xi}^r / \mathcal{E}_{\parallel} = \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \cos \delta_{\parallel} - \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \sin \delta_{\parallel}; \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_{\eta}^r / \mathcal{E}_{\perp} = \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \cos \delta_{\perp} - \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \sin \delta_{\perp}. \quad (6)$$

Умножив уравнение (5) на $\cos \delta_{\perp}$, а уравнение (6) на $\cos \delta_{\parallel}$, вычтем одно из другого и получим

$$\frac{\mathcal{E}_{\xi}^r}{\mathcal{E}_{\parallel}} \cos \delta_{\perp} - \frac{\mathcal{E}_{\eta}^r}{\mathcal{E}_{\perp}} \cos \delta_{\parallel} = -\sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \sin(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}). \quad (7)$$

Аналогично, исключая $\sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ из уравнений (5) и (6), получаем

$$\frac{\mathcal{E}_{\xi}^r}{\mathcal{E}_{\parallel}} \sin \delta_{\perp} - \frac{\mathcal{E}_{\eta}^r}{\mathcal{E}_{\perp}} \sin \delta_{\parallel} = -\cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \sin(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}). \quad (8)$$

Возведя в квадрат обе части уравнений (7), (8) и сложив их, получаем

$$\left(\frac{\mathcal{E}_{\xi}^r}{\mathcal{E}_{\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_{\eta}^r}{\mathcal{E}_{\perp}}\right)^2 - 2\frac{\mathcal{E}_{\xi}^r \mathcal{E}_{\eta}^r}{\mathcal{E}_{\parallel} \mathcal{E}_{\perp}} \cos(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}) = \sin^2(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}). \quad (9)$$

В общем случае это уравнение эллипса с главными осями, повернутыми относительно осей ξ, η на некоторый угол. Значит, конец вектора, вращаясь, описывает эллипс. Такую волну называют эллиптически поляризованной.

Если сдвиг фаз $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp} = \frac{\pi}{2}$ и $\mathcal{E}_{\parallel} = \mathcal{E}_{\perp} = \mathcal{E}$, эллипс превращается в окружность

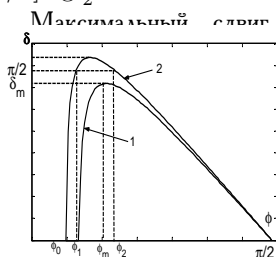
$$\left(\frac{\mathcal{E}_{\xi}^r}{\mathcal{E}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_{\eta}^r}{\mathcal{E}}\right)^2 = 1$$

и поляризация будет круговой. Найдем, какой величины должен быть показатель преломления диэлектрической среды, чтобы мог осуществиться сдвиг фаз $\delta = \frac{\pi}{2}$.

С помощью формул (2) найдем

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi}. \quad (10)$$

При полном отражении угол φ меняется от φ_0 , определяемом из уравнения $\sin \varphi_0 = n$, до $\pi/2$. При этом из соотношения (10) видно, что на концах этого интервала $\delta = 0$, а внутри — положительная функция. Значит, внутри интервала $[\varphi = \varphi_0, \varphi = \pi/2]$ $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$, а с ним и δ достигает максимума.



Максимальный сдвиг δ_m для конкретного диэлектрика может и не достигать значения $\pi/2$ ни при каком угле падения. Тогда на таком диэлектрике нельзя получить круговую поляризацию для отраженной волны (см. рисунок, кривая 1). В то же время, если $\delta_m > \pi/2$, то есть два угла падения — φ_1, φ_2 — для данного диэлектрика, при которых сдвиг фаз равен $\pi/2$ (кривая 2).

Найдем из уравнения (10) угол $\varphi = \varphi_m$, при котором δ достигает значения δ_m , а затем, подставляя $\cos \varphi_m$ и $\sin \varphi_m$ в это уравнение и приравнявая δ_m значению $\pi/2$, находим условие для n .

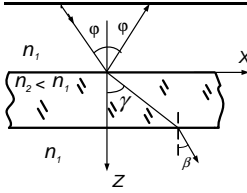
Чтобы найти угол φ_m , достаточно от правой части уравнения (10) взять производную по φ и приравнять ее нулю. Опустив простые выкладки, напомним результат:

$$\cos \varphi_m = \left(\frac{1 - n^2}{1 + n^2} \right)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_m}{2} = \frac{1 - n^2}{2n}, \quad n = \frac{n_2}{n_1},$$

откуда $(1 - n^2)/2n = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ и, значит, $n = \sqrt{2} - 1 = 0,414$. Среда 2 оптически менее плотная $n_2 < n_1$. В справочниках, как правило, даются показатели преломления n' веществ относительно вакуума. Считая вторую среду вакуумом, для показателя преломления первой среды n'_1 получаем условие $n'_1 = 1/n_1 > 1/0,414 = 2,41$.

1.13. (Задача 1.25.) Луч света падает на поверхность плоскопараллельной пластинки толщиной d , под углом φ , большим угла полного внутреннего отражения. Найти интенсивность света, прошедшего через пластинку. Электрическое поле волны параллельно поверхности пластинки.

Решение Поскольку электрическое поле параллельно поверхности пластин-



ки, то можно считать, что оно направлено по оси Y (см. рисунок), т. е. существует только одна составляющая поля, перпендикулярная плоскости падения (z, x) . Обозначим диэлектрические проницаемости среды и пластинки соответственно ε_1 и ε_2 . Магнитные проницаемости положим $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Падающую ℓ , отраженную r и прошедшую

d через пластинку волны запишем в следующем виде:

$$E^\ell = E_0^\ell e^{i(\omega t - k_1 x \sin \varphi - k_1 z \cos \varphi)}, \quad z \leq 0,$$

$$E^r = R e^{i(\omega t - k_1 x \sin \varphi + k_1 z \cos \varphi)}, \quad z \leq 0,$$

$$E^d = R e^{i(\omega t - k_1 x \sin \beta - k_1 z \cos \beta)}, \quad z \geq 0.$$

Поле внутри пластинки (см. решение задач 1.6., 1.9.)

$$E_2 = A_1 e^{i(\omega t - k_2 x \sin \gamma - k_2 z \cos \gamma)} + A_2 e^{i(\omega t - k_2 x \sin \gamma + k_2 z \cos \gamma)}, \quad 0 \leq z \leq d.$$

Для всех волн $\mathbf{H} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]$, k_1 — значение волнового вектора волн в среде, k_2 — в слое. Обозначения углов понятны из рисунка. Из граничных условий для \mathbf{E} , \mathbf{H} на верхней границе пластинки $z = 0$ следует

$$E_0^\ell e^{i(\omega t - k_1 x \sin \varphi)} + R e^{i(\omega t - k_1 x \sin \varphi)} = A_1 e^{i(\omega t - k_2 x \sin \gamma)} + A_2 e^{i(\omega t - k_2 x \sin \gamma)},$$

или с учетом $k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \gamma$

$$E_0^\ell + R = A_1 + A_2; \quad (1)$$

$$k_1 \cos \varphi (E_0^\ell - R) = k_2 \cos \gamma (A_1 - A_2). \quad (2)$$

При $z = d$ граничные условия дают

$$A_1 e^{-ik_2 d \cos \gamma} + A_2 e^{ik_2 d \cos \gamma} = D e^{-ik_1 d \cos \varphi}; \quad (3)$$

$$k_2 \cos \gamma (A_1 e^{-ik_2 d \cos \gamma} - A_2 e^{ik_2 d \cos \gamma}) = k_1 D \cos \varphi e^{-ik_1 d \cos \varphi}. \quad (4)$$

При написании условий (3), (4) использовано $\beta = \varphi$, потому что $k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \gamma = k_1 \sin \beta$. Из уравнений (1)–(4) после несложных преобразований найдем

$$\frac{D}{E_0^\ell} = \frac{2id\kappa e^{i\alpha d}}{(\kappa^2 - \alpha^2) \operatorname{sh} \kappa d + 2i\alpha \kappa \operatorname{ch} \kappa d}.$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = k_1 \cos \varphi = \frac{\omega}{c} n_1 \cos \varphi,$$

$$\varkappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi - n_2^2}.$$

Поскольку $n_2 < n_1$, то

$$k_2 \cos \gamma = \frac{\omega}{c} n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \varphi} = i \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi - n_2^2},$$

т. е. $k_2 \cos \gamma = i \varkappa$. Если пластинка — это вакуумный слой, а у среды диэлектрическая проницаемость ε , то $n_1^2 = \varepsilon$, $n_2^2 = 1$ и

$$\varkappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \sin^2 \varphi - 1}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \cos \varphi.$$

Интенсивность света, прошедшего через слой, найдем (см. решение задачи 1.9.) из

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{|D|^2}{|E_0^\ell|^2} = \frac{|2i\alpha\varkappa e^{i\alpha d}|^2}{|(\varkappa^2 - \alpha^2) \operatorname{sh} \varkappa d + 2i\alpha\varkappa \operatorname{ch} \varkappa d|^2} = \\ &= \frac{4\varkappa^2 \alpha^2}{4\varkappa^2 \alpha^2 \operatorname{ch}^2 \varkappa d + (\varkappa^2 - \alpha^2)^2 \operatorname{sh}^2 \varkappa d}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$I = I_0 / [\operatorname{ch}^2 \varkappa d + (\frac{\varkappa^2 - \alpha^2}{2\varkappa\alpha})^2 \operatorname{sh}^2 \varkappa d].$$

1.14. (Задача 1.28.) Плоская монохроматическая линейно поляризованная волна падает по нормали на проводящую бесконечно тонкую пластину, для которой имеет место закон Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, где \mathbf{j} — ток через единицу длины, а σ — соответствующая проводимость. Найти коэффициент прохождения волны.

Решение Пусть проводящая поверхность будет плоскостью (X, Y) . Поскольку волна падает по нормали, то напряженность электрического поля \mathbf{E} лежит в плоскости (X, Y) и, не умаляя общности, ось X можно направить вдоль \mathbf{E} . Тогда магнитное поле будет направлено по оси Y . Граничные условия в этой ситуации будут следующими: тангенциальная составляющая напряженности электрического поля остается непрерывной, тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля \mathbf{H} (что следует из третьего уравнения системы уравнений Максвелла задачи Р. 1.6.) будет терпеть разрыв $H_{1y} - H_{2y} = \frac{4\pi}{c} j$, потому что по проводящей поверхности вдоль оси X потекут токи $j = \sigma E$.

Если обозначить значками ℓ, r, d соответственно падающую, отраженную и прошедшую волны, то граничные условия (см. решение задач 1.7., 1.9.) будут иметь вид

$$E^\ell + E^r = E^d,$$

$$E^\ell - E^r - E^d = \frac{4\pi\sigma}{c}(E^\ell + E^r),$$

откуда

$$\frac{|E^d|^2}{|E^\ell|^2} = \frac{1}{(1 + 2\pi\sigma/c)^2}.$$

Урок 3

Фурье-анализ

Разложение в интеграл Фурье по плоским монохроматическим волнам:

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int f_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3 k d\omega, \quad (1)$$

где

$$f_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3 r dt.$$

Разложение по монохроматическим волнам (спектральное разложение):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

где

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{i\omega t} dt - \text{спектр волны.}$$

Разложение по плоским волнам:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 k. \quad (3)$$

1.15. (Задача 2.2.) Найти спектры следующих сигналов:

а) $f(t) = \cos(\omega_0 t)^2$;

б) $f(t) = \exp(-\beta^2 t^2)$;

в) $f(t) = 0$ при $|t| > \frac{\tau}{2}$ и $f(t) = 1$ при $|t| \leq \frac{\tau}{2}$;

г) $f(t) = 0$ при $|t| > \frac{\tau}{2}$ и $f(t) = \cos(\frac{\pi t}{\tau})$ при $|t| \leq \frac{\tau}{2}$;

д) $f(t) = 0$ при $|t| > \frac{\tau}{2}$, $1 + 2\frac{t}{\tau}$ при $-\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0$ и $1 - 2\frac{t}{\tau}$ при $t \leq \frac{\tau}{2}$.

Решение

$$\begin{aligned} \text{а) } f_{\omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{i\omega t} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]; \end{aligned}$$

²Здесь и далее используется следующая форма прямого и обратного преобразования Фурье соответственно: $f_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$, $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega$.

$$\begin{aligned}
6) f_{\omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta^2 t^2) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-[\beta^2 t^2 - i\omega t]\} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta^2 \left[t^2 - 2i\frac{\omega}{2\beta^2}t + \left(\frac{i\omega}{2\beta^2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2\beta^2}\right)^2\right]\right\} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta^2 \left[\left(t - i\frac{\omega}{2\beta^2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2\beta^2}\right)^2\right]\right\} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\beta^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta^2 \left(t - i\frac{\omega}{2\beta^2}\right)^2\right\} dt.
\end{aligned}$$

Введя под интегралом новую переменную $z = \beta \left(t - i\frac{\omega}{2\beta^2}\right)$, и используя табличное значение интеграла $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$, получаем после преобразования

$$f_{\omega} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} e^{-\omega^2/4\beta^2};$$

$$\begin{aligned}
в) f_{\omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi i\omega} [e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2}] = \\
&= \frac{\tau}{2\pi} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \equiv \frac{\tau}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
г) f_{\omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left[\frac{e^{i\pi t/\tau} + e^{-i\pi t/\tau}}{2}\right] e^{i\omega t} dt = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [e^{i(\pi/\tau + \omega)t} + e^{-i(\pi/\tau - \omega)t}] dt = \\
&= \frac{1}{4\pi i} \left\{ \frac{\exp[i(\pi/\tau + \omega)t]}{\pi/\tau + \omega} - \frac{\exp[-i(\pi/\tau - \omega)t]}{\pi/\tau - \omega} \right\} \Bigg|_{t=-\tau/2}^{t=\tau/2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[\pi/2 + \omega\tau/2]}{\pi/\tau + \omega} + \frac{\sin[\pi/2 - \omega\tau/2]}{\pi/\tau - \omega} \right\} = \\
&= \frac{\cos(\omega\tau/2)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi/\tau + \omega} - \frac{1}{\pi/\tau - \omega} \right\} = \frac{\tau}{2\pi^2} \frac{\cos(\omega\tau/2)}{1 - \left(\frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{\omega\tau}{2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{д) } f_\omega &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\tau/2}^0 \left[1 + 2\frac{t}{\tau} \right] e^{i\omega t} dt + \int_0^{\tau/2} \left[1 - 2\frac{t}{\tau} \right] e^{i\omega t} dt \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{2e^{-i\tau\omega/2} (1 - e^{i\tau\omega/2})^2}{i\tau\omega^2} = \frac{\tau}{4\pi} \left(\frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} \right)^2.
\end{aligned}$$

1.16. (Задача 2.3.) Записать уравнения Максвелла относительно компонент Фурье полей и потенциалов в однородной изотропной диспергирующей среде (при разложении на монохроматические, плоские и плоские монохроматические волны).

Решение Перед тем, как продолжить вычисления, вычислим некоторые выражения: Фурье-образ (разложение на монохроматические волны) производной от времени

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right]_\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{H} e^{i\omega t}] - i\omega \mathbf{H} e^{i\omega t} \right\} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ [\mathbf{H} e^{i\omega t}]|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} e^{i\omega t} dt \right\} = -i\omega \mathbf{H}_\omega;
\end{aligned}$$

тогда

$$\text{а) } \operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H}_\omega, \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E}_\omega = 4\pi\rho_\omega, \operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E}_\omega + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\omega, \operatorname{div} \mu \mathbf{H}_\omega = 0.$$

Фурье-образ (точнее, разложение по плоским волнам) div и rot вектора

$$[\operatorname{rot} \mathbf{A}]_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\} d^3r$$

$$\text{б) } i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}}] = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}, i(\mathbf{k} \mathbf{D}_{\mathbf{k}}) = 4\pi\rho_{\mathbf{k}},$$

$$i[\mathbf{k} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}}] = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{k}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\mathbf{k}}, (\mathbf{k} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}) = 0.$$

$$\text{в) } [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}] = -\frac{\omega\mu}{c} \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}, i(\mathbf{k} \mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega}) = 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega},$$

$$i[\mathbf{k} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}] = \frac{i\omega}{c} \mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}, (\mathbf{k} \mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega}) = 0.$$

1.17. (Задача 2.4.) Найти связь между компонентами Фурье полей и потенциалов (при разложении на монохроматические, плоские и плоские монохроматические волны).

Решение а) $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi_\omega(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$.

б) $\mathbf{E}_\mathbf{k}(t) = -i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}(t) - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{k}(t)$, $\mathbf{H}_\mathbf{k}(t) = i[\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\mathbf{k}(t)]$.

в) $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}\omega} + \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = i[\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}]$.

1.18. (Задача 2.5.) а) Разложить по плоским волнам кулоновский потенциал неподвижного точечного заряда; б) то же для векторного потенциала прямого тока J (плотность тока $J = j\delta(x)\delta(y)$).

Решение а) Рассмотрим потенциал точечного заряда, помещенного в начало координат. Этот потенциал удовлетворяет уравнению:

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}).$$

Разложим φ в пространственный интеграл Фурье (разложение по плоским статическим волнам):

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_\mathbf{k} d^3k,$$

при этом

$$\varphi_\mathbf{k} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}) dV.$$

Взяв Фурье-образ от Лапласиана, получим

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_\mathbf{k} d^3k,$$

откуда следует, что

$$(\Delta\varphi)_\mathbf{k} = -k^2 \varphi_\mathbf{k}.$$

Вычислив Фурье-образ от правой части уравнения Пуассона, получим

$$(\Delta\varphi)_\mathbf{k} = -4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV = -4\pi e.$$

Сравнивая оба выражения, получим

$$\varphi_\mathbf{k} = \frac{e}{2\pi^2 k^2}.$$

б) Аналогично получаем для векторного потенциала

$$(A_z)_{\mathbf{k}} = J/(\pi c k^2).$$

1.19. (Задача 2.6.) а) Разложить по плоским волнам поле \mathbf{E} неподвижного точечного заряда; б) то же для поля \mathbf{H} поля прямого тока J .

Решение а) $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{ie\mathbf{k}}{2\pi^2k^2}$, б) $\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i[\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}] = \frac{iJ}{\pi c} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z]}{k^2}$.

1.20. (Задача 2.7.) Точечный заряд движется в вакууме равномерно и прямолинейно. Разложить его поля и потенциалы на плоские монохроматические волны.

Решение Уравнение для потенциала поля заряда, движущегося вдоль прямой равномерно имеет вид

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t).$$

Умножая левую и правую части на $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и интегрируя по объему, получим с одной стороны

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV = -4\pi e \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t},$$

а с другой стороны

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\varphi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV.$$

Беря этот интеграл два раза по частям и учитывая, что потенциал и поле на бесконечности равны нулю, получим

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV = -k^2 \varphi_{\mathbf{k}}.$$

Тогда дифференциальное уравнение для $\varphi_{\mathbf{k}}$ примет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \varphi_{\mathbf{k}}}{dt^2} + k^2 \varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi e \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}.$$

Ищем решение для $\varphi_{\mathbf{k}}$ в виде

$$\varphi_{\mathbf{k}} = B_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}.$$

Тогда

$$\left\{ k^2 - \left[\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c} \right]^2 \right\} B_{\mathbf{k}} = 4\pi e,$$

откуда

$$\varphi_{\mathbf{k}} = B_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t} = \frac{4\pi e}{k^2 - \left[\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c} \right]^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}.$$

Вычислим Фурье-образ (по времени) от полученного уравнения

$$\varphi_{\mathbf{k},\omega} = \frac{4\pi e}{k^2 - \left[\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c} \right]^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t} e^{i\omega t} dt = \frac{4\pi e}{k^2 - \left[\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c} \right]^2} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega).$$

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e}{2\pi^2} \frac{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \omega^2/c^2}, \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e\mathbf{v}}{2\pi^2 c} \frac{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \omega^2/c^2};$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = i \frac{e}{2\pi^2} \frac{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \omega^2/c^2} \left(-\mathbf{k} + \frac{\omega\mathbf{v}}{c^2} \right), \quad \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = i \frac{e}{2\pi^2 c} [\mathbf{k} \times \mathbf{v}] \frac{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

Урок 4

Волновой пакет

1.21. (Задача 2.9.) Найти групповую скорость волнового пакета, состоящего из двух плоских волн с близкими частотами $\omega_0 \pm \Delta\omega$, распространяющихся в диспергирующей среде.

Решение Пусть в направлении оси Z распространяются две плоские волны с одинаковой поляризацией, одинаковой амплитудой E_0 и различными частотами $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$. Волновые числа равны k_1 и k_2 соответственно. Напряженность результирующего поля равна сумме напряженностей обеих волн в силу принципа суперпозиции

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(\omega_1 t + k_1 z) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z + \alpha) = \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}z + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t - \frac{k_2 + k_1}{2}z + \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Каждая из волн является решением волнового уравнения, для которой $k = \frac{\omega}{c}n$, где n — показатель преломления среды. Если среда обладает дисперсией, тогда показатель преломления n зависит от частоты и естественно предположить, что $n_1 = n_0 - \Delta n_1$, $n_2 = n_0 + \Delta n_2$ (n_0 — показатель преломления при частоте ω_0), $\Delta n_1 \approx \Delta n_2 = \Delta n$, $\Delta n \ll n_0$, так как $\Delta\omega \ll \omega_0$. Тогда, отбрасывая величины второго порядка малости, получаем $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \Delta\omega$, $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0$, $\frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{n_0 \omega_0}{2} = k_0$, $\frac{k_2 - k_1}{2} \approx \frac{n_0 \Delta\omega}{c} + \frac{\Delta n \omega_0}{c} = \Delta k$ и выражение (1) примет вид

$$E = 2E_0 \cos\left(\Delta\omega t - \Delta k z + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega_0 t - k_0 z + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (2)$$

Эту результирующую волну можно рассматривать как волну с частотой ω_0 и волновым числом k_0 , но с медленно и притом неперiodически меняющейся амплитудой $A = 2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k z + \frac{\alpha}{2})$. Волна (2), строго говоря, уже не будет гармонической, но при $\Delta\omega \ll \omega_0$ и $\Delta k \ll k_0$ изменение модулированной амплитуды A в пространстве и во времени происходит за период $T_A = 2\pi/\Delta\omega$ и на длине $\lambda_A = 2\pi/\Delta k$, которые много больше периода $T_0 = 2\pi/\omega_0$ и длины волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ соответственно. Для определения скорости перемещения фазы волны (2) выберем какое-нибудь значение фазы, положив

$$\omega_0 t - k_0 z + \frac{\alpha}{2} = \text{const}. \quad (3)$$

Переписывая выражение (3) в виде

$$z = \frac{2 \text{const} + \alpha}{2k_0} + \frac{\omega_0}{k_0} t,$$

заключаем, что точка, где находится значение выбранной нами фазы, движется со скоростью $v = \omega_0/k_0$. Чему равна скорость перемещения данного значения амплитуды? Амплитуда A будет постоянной, если постояен аргумент под косинусом в A , т. е.

$$\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot z + \frac{\alpha}{2} = \text{const},$$

или

$$z = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t + \alpha - \frac{2 \text{const}}{2\Delta k}.$$

Отсюда видно, что точка, где находится значение выбранной амплитуды, движется со скоростью $v = \Delta\omega/\Delta k$, называемой групповой скоростью.

1.22. (Задача 2.10.) Найти волновой пакет для момента времени $t = 0$, если его амплитудная функция имеет гауссовский вид

$$a(k) = a_0 \exp \left\{ - \left(\frac{k - k_0}{\Delta k} \right)^2 \right\}.$$

Решение Волновой пакет — это результирующее поле, полученное путем наложения гармонических волн с непрерывно меняющимся волновым вектором \mathbf{k} . В нашем случае закон изменения k дается в условии задачи выражением $a(k)$, поэтому

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(\omega t - kz)} dk.$$

При $t = 0$ имеем

$$E(z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{-ikz} dk = a_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k-k_0}{\Delta k}\right)^2 - ikz} dk. \quad (1)$$

Делая в уравнении (1) замену

$$\xi = \frac{k - k_0}{\Delta k} + i \frac{\Delta k z}{2},$$

получаем

$$E(z, 0) = a_0 e^{-ik_0 z} e^{-z^2 \Delta k^2 / 4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = a_0 \Delta k \sqrt{\pi} e^{-\frac{z^2 \Delta k^2}{4}} e^{-ik_0 z}.$$

1.23. (Задача 2.11.) Определить форму и движение волнового пакета, состоящего из плоских волн одинаковой амплитуды и с волновыми векторами, лежащими в области $|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}| \leq q$. Дисперсия среды линейна: $\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right|_{k=k_0} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$.

Решение Выражение $\left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right|_{k=k_0}$ — это вектор с компонентами $\left. \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right|, \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right|, \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right|$.

Тогда зависимость частоты ω от \mathbf{k} будет

$$\omega(\mathbf{k}) \cong \omega_0 + u_x(k_x - k_{0x}) + u_y(k_y - k_{0y}) + u_z(k_z - k_{0z}), \quad (1)$$

где $\omega_0 = \omega(k_0)$. Сложная зависимость ω от k возникает в связи с тем, что диэлектрическая проницаемость вещества, а с ней и показатель преломления n зависят от частоты волны или от k . Для каждой плоской волны выполняется соотношение $\omega = \frac{ck}{n(k)}$. Видом этой функции определяется закон дисперсии волны. Учтем, что в нашем случае дисперсия среды линейна. Тогда волновой пакет, являющийся суперпозицией плоских волн с одинаковыми амплитудами a_0 и различными частотами, удовлетворяющими соотношению (1), запишется так:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \int e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})} d\mathbf{k} = a_0 \int e^{i\{\omega_0 + \mathbf{u}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\}t - (\mathbf{k} \mathbf{r})} dk_x dk_y dk_z. \quad (2)$$

Интеграл (2) — трехмерный по области $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \leq q$. Учитывая, что $(\mathbf{u} \mathbf{k}) = u_x k_x + u_y k_y + u_z k_z$ и вводя вектор $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$, запишем

$$E(\mathbf{r}, t) = a_0 e^{i(\omega_0 t - \mathbf{r} \mathbf{k}_0)} \int e^{-i\rho(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)} dk_x dk_y dk_z. \quad (3)$$

Перейдем от интегрирования по \mathbf{k} в декартовой системе координат к интегрированию в сферической системе координат с полярной осью вдоль вектора ρ и с началом в точке \mathbf{k}_0 . Получим

$$E(\mathbf{r}, t) = a_0 e^{i(\omega_0 t - \mathbf{r} \mathbf{k}_0)} \int_0^q \int_0^\pi e^{-i\rho k' \cos \theta} 2\pi k'^2 dk' \sin \theta d\theta, \quad (4)$$

где $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. Интегрируя правую часть уравнения (4) по θ , получаем

$$E(\mathbf{r}, t) = 4\pi a_0 e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})} \cdot \frac{1}{\rho} \int_0^q \sin \rho k' \cdot k' dk'.$$

Окончательно

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi a_0 q}{\rho^2} \left(\frac{\sin \rho q}{\rho q} - \cos \rho q \right) e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})}. \quad (5)$$

Выражение (5), описывающее результирующее поле, можно представить в виде произведения двух сомножителей:

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi a_0 q}{\rho^2} \left(\frac{\sin \rho q}{\rho q} \right) \text{ и } e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})}.$$

Второй из них представляет бегущую волну, однородную в пространстве со средней частотой ω_0 и волновым вектором \mathbf{k}_0 . Множитель $A(\mathbf{r}, t)$ можно рассматривать как амплитуду результирующей волны, которая заметно отлична от нуля только в пространственной области $\rho q \leq 1$ и одинакова при равных ρq . Например, при $\rho q = 0$, т. е. $\rho = 0$, амплитуда максимальна и равна $2\pi a_0 q^3$. Но $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{u}t|$ равно нулю в точке $\mathbf{r} = 0$ в момент времени $t = 0$ и в последующие моменты времени в точках, определяемых радиусом вектором $\mathbf{r} = \mathbf{u}t$. Таким образом, результирующее поле в действительности представляет волновой пакет, т. е. ограниченное в пространстве возмущение, которое движется как целое без изменения формы с групповой скоростью $\mathbf{u} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$.

1.24. (Задача 2.13.) Исследовать «расплывание» одномерного волнового пакета с гауссовской амплитудной кривой $a(k) = a_0 \exp\{-\alpha(k - k_0)^2\}$, учитывая и квадратичные члены в дисперсии.

Решение В задаче 1.23. рассмотрено движение волнового пакета, когда квадратичные члены в дисперсии не учитывались. Получено, что волновой пакет движется, не «расплываясь». Исследуем этот вопрос в случае, когда в законе дисперсии присутствует квадратичный член, т. е. $\omega(k) = \omega_0 + u(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2$, где $u = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{(k=k_0)}$, $\beta = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{(k=k_0)}$.

Волновой пакет выразится интегралом

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(\omega t - kz)} dk = \\ &= a_0 e^{i(\omega_0 t_0 - kz)} \int e^{-[(k - k_0)^2(\alpha - i\beta t) + i(k - k_0)(z - \omega t)]} dk. \end{aligned}$$

Обозначим $\gamma = \alpha - i\beta t$, $\xi = z - \omega t$. Делая замену $k_1 = k - k_0$ и дополняя до полного квадрата показатель экспоненты, получаем

$$\begin{aligned} E(z, t) &= a_0 a e^{i(\omega_0 t_0 - kz) - \frac{\xi^2}{4\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_1 \sqrt{\gamma} + \frac{i\xi}{2\sqrt{\gamma}})^2} dk' = \\ &= a_0 e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}} e^{i(\omega_0 t_0 - kz)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$E(z, t) = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha - i\beta t}} e^{-\frac{(z-ut)^2}{4(\alpha - i\beta t)}} e^{i(\omega_0 t_0 - kz)}.$$

Поскольку амплитуда волны

$$E(z, t) = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha - i\beta t}} e^{-\frac{(z-ut)^2}{4(\alpha - i\beta t)}}$$

комплексна, то проще исследовать характер зависимости пакета от z и t , образовав квадрат модуля амплитуды, так как именно он определяет интенсивность волны:

$$|E(z, t)|^2 = |E_0(z, t)|^2 = \frac{\pi a_0^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} \exp \left[-\frac{\alpha(z - ut)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)} \right]. \quad (6)$$

Из этого выражения видно, что полуширина кривой интенсивности растет со временем по закону $\Delta z = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}/\alpha$, а высота убывает как $1/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}$. Волновой пакет расплывается, но для времени $t \ll \alpha/\beta$ пакет мало деформируется, и можно говорить о его распространении со скоростью

$$u = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{(k=k_0)},$$

называемой групповой.

1.25. (Задача 2.14.) Волновой пакет длиной ℓ входит в среду с дисперсией

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g \cdot (k - k_0) + \frac{a^2}{2} (k - k_0)^2.$$

Оценить его размер после прохождения слоя толщиной d .

Решение Используя решение задачи 1.24. (формула 1), для модуля амплитуды волнового пакета находим

$$|E_0(z, t)| = \frac{\sqrt{\pi} a_0}{(\alpha^2 + \beta^2 t^2)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{\alpha(z - ut)^2}{4(\alpha^2 + \beta^2 t^2)} \right\}.$$

Из этого выражения видно, что полуширина волнового пакета (расстояние, на котором амплитуда уменьшается в e раз) определяется множителем в показателе экспоненты, равном

$$\Delta z(t) \approx \sqrt{4(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}/\alpha,$$

а сам пакет движется с групповой скоростью u . Пусть при $t = 0$ $\Delta z(0) = 2\sqrt{\alpha} = \ell/2$, тогда через интервал времени Δt , равный времени прохождения слоя ширины d , $\Delta t = d/u$, размер пакета

$$\Delta S = \left[\ell^2 + \left(\frac{16\beta d}{u\ell} \right)^2 \right]^{1/2} = \ell \cdot \left[1 + \left(\frac{16\beta d}{u\ell^2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Если второе слагаемое под корнем много больше единицы, размер пакета можно оценить как $\Delta S \approx 16\beta d/(u\ell)$.

Урок 5

Фазовая и групповая скорость

1.26. (Задача 2.18.) Вычислить групповую скорость для различных законов дисперсии (v — фазовая скорость): а) $v = \text{const}$ — звук в воздухе; б) $v = a\sqrt{\lambda}$ — гравитационные волны на воде; в) $v = a/\sqrt{\lambda}$ — капиллярные волны; г) $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}$ — электромагнитные волны в ионосфере (c — скорость света; λ — длина волны в среде); д) $v = c\omega/\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - c^2\alpha^2}$ — электромагнитные волны в прямолинейном волноводе, заполненном диспергирующей средой с $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$; c — скорость света в вакууме, α — геометрический фактор волновода.

Решение а) $v = \frac{\omega}{k}$ — групповая скорость $u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v$, поскольку $v = \text{const}$.

б) $\omega = vk = ka\lambda = ka\sqrt{\frac{2\pi}{k}} = \sqrt{2\pi}a\sqrt{k}$; $v = \sqrt{2\pi}a/\sqrt{k}$, $u = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\pi}/\sqrt{2k} = v/2$.

в) $v = a/\sqrt{\lambda} = a\sqrt{k/2\pi}$, $\omega = a\sqrt{k^3/2\pi}$, $u = (3/2)a\sqrt{k/2\pi} = 3v/2$.

г) $\omega = vk$, $u = \frac{d\omega}{dk} = v + k \cdot \frac{dv}{dk}$, $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2} = \sqrt{c^2 + b^2(\frac{2\pi}{k})^2}$.

$$u = v - \frac{1}{v} \left(\frac{2\pi b}{k} \right)^2 = c^2/v.$$

д) $v = c\omega/\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - c^2\alpha^2}$, $\omega = kv = \sqrt{k^2c^2 + \alpha^2c^2}/\varepsilon\mu$,

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{k^2c^2 + \alpha^2c^2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{k^2c^2 + \alpha^2c^2} \frac{d(\varepsilon\lambda)}{(\varepsilon\mu)^{3/2}d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dk}.$$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{c^2}{[1 + (\omega/2\varepsilon\mu) \cdot d(\varepsilon\mu)/d\omega]v}.$$

1.27. (Задача 2.19.) Найти фазовую и групповую скорости волн в среде, диэлектрическая проницаемость которой имеет вид $\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$ где ω_p и ω_0 — константы. Ограничиться случаями $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$, ($\mu = 1$).

Решение Фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c \left[1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Для нахождения групповой скорости выражение (1) запишем в виде

$$k^2c^2 = \omega^2(1 + \omega_p^2/(\omega_0^2 - \omega^2))$$

и обе части продифференцируем по k .

После несложных преобразований получим

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega} \left[1 + \frac{\omega_p^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right]^{-1}. \quad (2)$$

Подставляя в уравнение (2) выражение для k через ω из формулы (1), для групповой скорости $u = \frac{d\omega}{dk}$ получаем

$$u = c \cdot \left[1 + \omega_p^2 / (\omega_0^2 - \omega^2) \right]^{1/2} / \left[1 + \omega_p^2 \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \right]. \quad (3)$$

Для нахождения поведения групповой скорости при $\omega \ll \omega_0$ выражение (3) запишем в виде

$$u = c \cdot \frac{\left[1 + \frac{\omega_p^2 / \omega_0^2}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} \right]^{1/2}}{1 + \frac{\omega_p^2 / \omega_0^2}{(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2}}$$

и разложим правую часть в ряд Тейлора по малой величине ω^2 / ω_0^2 . Ограничиваясь первым порядком малости, получаем

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\varepsilon_0 \omega_0^4} \right), \quad \omega \ll \omega_0,$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(\omega = 0) = 1 + \omega_p^2 / \omega_0^2$.

Поступая аналогичным образом, для фазовой скорости при $\omega \ll \omega_0$ из уравнения (1) получим

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\varepsilon_0 \omega_0^4} \right), \quad \omega \ll \omega_0.$$

Для нахождения групповой скорости при $\omega \gg \omega_0$ выражение (3) запишем в виде

$$u = c \cdot \frac{\left[1 + \frac{\omega_p^2 \omega_0^2}{\omega_0^2 \omega^2} / \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \right]^{1/2}}{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^2 / \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^2}$$

и разложим в ряд Тейлора по малой величине ω_0^2 / ω^2 . Ограничиваясь, как и прежде, первым порядком малости, получим

$$u = c \cdot \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right].$$

Поступая аналогичным образом для фазовой скорости при $\omega \gg \omega_0$, находим $v = c \cdot (1 + \omega_p^2 / 2\omega^2)$.

Урок 6

Соотношение неопределенностей

1.28. (Задача 2.24.) Пользуясь соотношением неопределенностей, оценить размер области, в которой применимо понятие луча в оптике.

Решение Геометрическая оптика рассматривает распространение волн как распространение лучей. В каждой точке волне приписывается вполне определенное направление распространения и значение волнового вектора. Таким свойством обладают плоские волны. Однако в общем случае электромагнитные волны в среде не являются плоскими. Тем не менее, волны оптического диапазона рассматривают как плоские в каждом небольшом участке пространства. Но, с другой стороны, волна, занимающая конечную область пространства ℓ , не может иметь вполне определенный волновой вектор \mathbf{k} , а представляет собой суперпозицию плоских волн с волновыми векторами, лежащими в некотором интервале Δk , для которого справедливо соотношение неопределенностей

$$\ell \cdot \Delta k \geq 1. \quad (1)$$

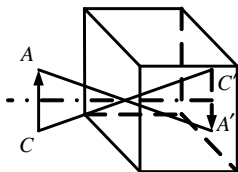
Для того, чтобы можно было говорить о волне с волновым вектором \mathbf{k} , должно выполняться условие

$$\Delta k \ll k. \quad (2)$$

Поскольку $k \sim 1/\lambda$, а $\Delta k \sim 1/\ell$ (что следует из уравнения (1)), то выражение (2) равносильно $\ell \gg \lambda$. Понятие луча применимо, если длина волны много меньше характерного размера области распространения волн.

1.29. (Задача 2.25.) Оценить диаметр отверстия камеры-обскуры длиной ℓ , при котором изображение получится самым резким (длина волны λ).

Решение Камера-обскура — это ящик с маленьким отверстием на одной из стенок. Изображение получается на стенке, расположенной напротив отверстия. Лучи света, испускаемые различными точками объекта AC , распространяются во все стороны, но в камеру попадают только те, которые могут пройти через отверстие. Так, точка A дает светлое пятно в точке A' , точка C в C' и т. д. Совокупность таких пятен, получающихся от различных мест объекта AC , и есть изображение. Если свет распространяется строго прямолинейно, то светлое пятно от каждой точки имеет размер не менее диаметра отверстия. Но из соотношения неопределенностей следует, что если пучок света имеет конечную ширину, то направление распространения света в таком пучке не может быть везде строго одинаковым. При падении света на отверстие (например, перпендикулярно) оно ограничивает в своей плоскости ширину пучка, и у пучка в плоскости отверстия появляется разброс волновых векторов в соответствии



с соотношением неопределенностей: $\Delta k_{\perp} d \geq 2\pi$, откуда $\Delta k_{\perp} \geq \frac{2\pi}{d}$. Принимая $\Delta k_{\perp} \sim 2\pi/d$ и учитывая что $d \gg \lambda$, получаем $\Delta k_{\perp} \ll k$ и угол $\theta \simeq \frac{\Delta k_{\perp}}{k} = \frac{\lambda}{d}$.

Размер пятна в камере определяется двумя факторами: размером отверстия и расширением волны вследствие ограничения пучка, т. е.

$$D = d + \ell\theta = d + \ell\frac{\lambda}{d},$$

где ℓ — длина камеры.

Если величина d очень малая, то второе слагаемое очень большое, а если велико d , то велико первое слагаемое. Взяв производную dD/dd и приравняв ее к нулю, получим размер отверстия, при котором размер пятна D наименьший. Условие минимума

$$\frac{\partial D}{\partial d} = 1 - \frac{\ell\lambda}{d^2} = 0.$$

Тогда $d \sim \sqrt{\lambda\ell}$. При таком размере отверстия изображение объекта, являющееся наложением пятен от различных точек объекта, будет наиболее резкое, потому что эти пятна будут предельно перекрываться. Кстати, размер пятна в этом случае будет в 2 раза больше диаметра отверстия $D = 2\sqrt{\lambda\ell}$. Множитель 2 не следует понимать буквально, потому что мы оцениваем порядок величины и можно считать $D \simeq \sqrt{\lambda\ell}$.

Расстояние до фотографируемого объекта обычно много больше длины камеры ℓ , поэтому мы пренебрегли отклонением угла падения света для различных точек объекта от нормального. Наклонное падение света на щель рассмотрено в задаче 1.30.

1.30. (Задача 2.26.) Плоская волна падает на щель в экране шириной d , образуя угол θ с нормалью к плоскости экрана. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину световой полосы на втором экране, расположенном на расстоянии ℓ от первого. Длина волны λ .

Решение Фронт волны, проходящей через щель шириной d_0 , имеет протяженность $d = d_0 \cos \theta_0$. Из соотношения неопределенностей (см. решение задачи 1.29.) у волны появляется разброс волновых векторов Δk в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, такой что $\Delta k d \sim 2\pi$ и $\Delta k \sim 2\pi/d$. Откуда расходжение пучка $\theta \sim \frac{\Delta k}{k} \frac{\lambda}{d_0 \cos \theta_0}$ и уширение пятна за счет расходимости пучка $\frac{\ell}{\cos \theta_0} \cdot \frac{\theta}{\cos \theta_0} = \frac{\ell\lambda}{d_0 \cos^3 \theta_0}$. Окончательно

$$D = d_0 + \ell\lambda/(d_0 \cos^3 \theta_0).$$

1.31. (Задача 2.27.) Оценить минимальный размер светового пятна на Луне от луча лазера, расположенного на Земле (длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^3 \text{ \AA}$).

Решение Аналогично камеры обскуры

$$\lambda = 5 \cdot 10^3 \text{ \AA}$$

$$D \sim \sqrt{\lambda L}$$

$$L = 4 \cdot 10^5 \text{ км}$$

$$D = \sqrt{5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 10^5} = \sqrt{2} \cdot 10^3 \approx 10 \text{ м}$$

но при этом

$$d \sim 10 \text{ м}$$

Где же такой лазер. Если разумный лазер

$$d = 1 \text{ см}$$

$$d = -\frac{D}{2} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4} - l\lambda}$$

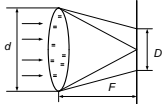
$$D = 1 + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}}{1} \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \sim 2 \cdot 10^6 \text{ см} = 20 \text{ км}$$

$$d \simeq \sqrt{\lambda L} \simeq 14$$

км.

1.32. (Задача 2.28) Используя соотношения неопределенностей, оценить размер пятна на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы (фокусное расстояние F) диаметра d , собравшую параллельный пучок лазерного света с длиной волны λ , падающего на линзу вдоль ее главной оптической оси.

Решение

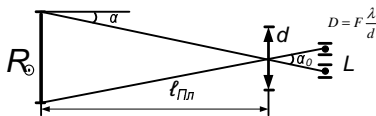


$$\delta k_{\perp} \sim \frac{2\pi}{d}, \quad \delta \theta \sim \frac{\delta k_{\perp}}{k} \sim \frac{\lambda}{d}. \quad \text{Тогда, } D \simeq \lambda F/d.$$

1.33. (Задача 2.29) Используя соотношение неопределенностей и вводя размер своего зрачка d , оценить: в виде кружка или яркой звезды Вы увидели бы Солнце с орбиты Плутона ($\ell_{\text{средн}} \sim 6 \cdot 10^9 \text{ км}$). Угловой размер Солнца на Земле $\theta_{\odot} \simeq 0,01$, расстояние между Солнцем и Землей $\ell_{\odot} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}$. Средняя длина световой волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$.

Решение

От каждой точки Солнца идет параллельный пучок света. Поскольку



его расходимость $\alpha \sim \frac{d}{\ell_{\text{Пл}}} \ll 1$. Параллельный пучок изобразится в виде пятна

$$D \sim F \frac{\lambda}{d}$$

Две точки, находящиеся на разных концах солнца, будут разнесены на расстояние $L \approx F \alpha_0$. Тогда

$$\alpha_0 = \frac{2R_{\odot}}{\ell_{\text{Пл}}}, \quad \alpha_0 \gg \alpha.$$

Если $L \gg D$, то Солнце — кружок. $\alpha_0 F \gg F \frac{\lambda}{d}$, $\alpha_0 \gg \frac{\lambda}{d}$.

$$d \sim 1 \text{ см}, \quad \alpha_0 = \frac{2R_{\odot}}{\ell_{\text{Пл}}} = \frac{\ell_{\odot} \theta_{\odot}}{\ell_{\text{Пл}}} = \frac{1,5 \cdot 10^8 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^9} = 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{1} = 5 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha_0 \gg \frac{\lambda}{d}$$

видим как кружок!

1.34. (Задача 2.30.) Оценить максимальную длину волн, на которых возможны: а) радиовещание; б) телевидение.

Решение а) Частоты слышимых звуковых волн лежат в диапазоне $20 \div 20\,000$ Гц и относятся к низким частотам. Для передачи речи или музыки требуются частоты от 100 Гц до нескольких тысяч. Например, частота самой высокой ноты около 4 000 Гц. Но непосредственная передача низкочастотных сигналов радиоволнами тех же частот невозможна из-за трудности их генерации. Дело в том, что для передачи сигналов используют излучающие антенны. Это замкнутые провода или системы проводов, по которым текут переменные токи. Мощность же излучения пропорциональна четвертой степени частоты ω^4 . Поэтому антенны, по которым текут низкочастотные токи, излучают слабо. Кроме того, длина антенны должна быть порядка длины волны, что для частоты, например, 1 000 Гц составляет $\ell \sim \lambda = c/\nu \sim 300$ км. Антенну такой длины весьма трудно построить. Кроме того, строго монохроматическая волна, имеющая везде одинаковую амплитуду, не годится для передачи сигналов. Чтобы передать информацию, сигнал должен иметь некоторые границы во времени. Этого можно добиться, например, с помощью модулирования амплитуды волны. Поэтому в радиовещании передачи осуществляются волнами высокой частоты в диапазоне $10^5 \div 10^8$ Гц модулированными низкочастотными сигналами. При амплитудной модуляции волны имеют вид

$$E = E_0(1 + A \sin(\Omega t)) \sin(\omega t),$$

где несущая частота ω — из диапазона $10^5 \div 10^8$ Гц, а Ω — звуковая частота. Эта волна на самом деле состоит из трех монохроматических волн с частотами $\omega - \Omega$, ω , $\omega + \Omega$ (см. задачу Р. 1.21.).

Если звуковая частота $\Omega \ll \omega$, что на самом деле имеет место, то длина волны, соответствующая самой малой частоте $\omega - \Omega$, незначительно отличается от длины волны несущей частоты. Максимальная длина волны определяется минимальной несущей частотой $10^5 \Gamma_{\text{ц}}$, $\lambda = (3 \cdot 10^8 \text{ м/с}) / 10^5 \text{ 1/с} = 3 \cdot 10^3 \text{ м}$.

б) Оценим количество команд, которые нужно передать электронному пучку при его движении по экрану. На экране размером $50 \times 50 \text{ см}$ на расстоянии 1 мм друг от друга можно разместить $250\,000$ управляемых точек. Луч к каждой точке экрана должен возвращаться через $\sim \frac{1}{25} \text{ с}$ с командой «загореться» или «потухнуть», потому что изображение должно воспроизводиться 25 раз в секунду. Таким образом, сам луч получает в секунду $25 \cdot 250\,000$ команд и, значит, длительность τ каждой команды (импульса в антенне) не должна превышать 10^{-7} с . Чтобы сформировать импульс такой длительности, необходим диапазон частот $\Delta\nu \sim \tau^{-1} \geq 10^7 \Gamma_{\text{ц}}$, так как $\Delta\nu \cdot \tau \geq 1$. Несущая частота для телевизионного канала лежит в диапазоне $40 \div 200 \text{ м}\Gamma_{\text{ц}}$. Отсюда максимальная длина волны

$$\lambda \sim \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{(40 \div 30) \cdot 10^6 \Gamma_{\text{ц}}} = 10 \text{ м}.$$

Урок 7

Резонаторы и волноводы

1.35. (Задача 2.32.) Показать, что в прямоугольном волновом с идеально проводящими стенками не могут распространяться чисто поперечные волны. Найти связь между поперечными компонентами полей и продольной составляющей электрического поля E_z для монохроматической Е-волны (или ТМ-волны), распространяющейся вдоль прямоугольного пустого волновода. Найти уравнение для составляющей поля E_z . То же для Н-волны (или ТЕ-волны).

Решение Волновод представляет собой полость неограниченной длины. Распространение электромагнитных волн в волновом принципиально отличается от распространения неограниченных в пространстве плоских волн. Пусть длины сторон прямоугольного сечения равны a и b , ось Z направлена вдоль волновода, а среда, заполняющая волновод, характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями соответственно ε и μ .

Если в начале волновода (при $z = 0$) попытаться возбудить монохроматическую плоскую волну, то естественно допустить, что в волновом возникает бегущая вдоль Z волна, для которой зависимость E и H от z дается множителем $e^{-ik_z z}$ с постоянным k_z , т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (1)$$

Волновые уравнения для E и H имеют вид

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Подставляя соотношения (1) в уравнения (2), (3), получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial y^2} = -\kappa^2 \mathbf{E}_0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial y^2} = -\kappa^2 \mathbf{H}_0, \quad (5)$$

где $\kappa^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_z^2$. Связь между векторами E и H определяется уравнениями

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6)$$

Записывая эти уравнения по компонентам и подставляя в них решение в виде выражений (1), получаем

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{x0} = -ik_z E_{y0} - \frac{\partial E_{z0}}{\partial y}; \quad (7)$$

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{y0} = ik_z E_{x0} + \frac{\partial E_{z0}}{\partial x}; \quad (8)$$

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{z0} = \frac{\partial E_{x0}}{\partial y} - \frac{\partial E_{y0}}{\partial x}; \quad (9)$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{x0} = ik_z H_{y0} + \frac{\partial H_{z0}}{\partial y}; \quad (10)$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{y0} = -ik_z H_{x0} - \frac{\partial H_{z0}}{\partial x}; \quad (11)$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{z0} = \frac{\partial H_{x0}}{\partial y} - \frac{\partial H_{y0}}{\partial x}. \quad (12)$$

Формулы (7)–(12) позволяют выразить компоненты векторов E_{x0} , E_{y0} , H_{x0} , H_{y0} через E_{z0} и H_{z0} :

$$E_{x0} = -\frac{1}{\varkappa^2} \left(ik_z \frac{\partial E_{z0}}{\partial x} + \frac{i\omega\mu}{c} \frac{\partial H_{z0}}{\partial y} \right); \quad (13)$$

$$E_{y0} = -\frac{1}{\varkappa^2} \left(ik_z \frac{\partial E_{z0}}{\partial y} - \frac{i\omega\mu}{c} \frac{\partial H_{z0}}{\partial x} \right); \quad (14)$$

$$H_{x0} = \frac{1}{\varkappa^2} \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} \frac{\partial E_{z0}}{\partial y} - ik_z \frac{\partial H_{z0}}{\partial z} \right); \quad (15)$$

$$H_{y0} = -\frac{1}{\varkappa^2} \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} \frac{\partial E_{z0}}{\partial x} + ik_z \frac{\partial H_{z0}}{\partial y} \right). \quad (16)$$

Как известно, для плоских волн векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны направлению распространения, т. е. если волна распространяется вдоль оси Z , как в нашем случае, то для такой волны $E_z = 0$ и $H_z = 0$. Из полученных формул (13)–(16) ясно, что E_{z0} и H_{z0} одновременно не могут быть равны нулю, поскольку в этом случае все компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} будут равны нулю, если только $\varkappa \neq 0$. Если $\varkappa = 0$, что означает $\omega^2 = v^2 k_z^2$ и имеет место для плоской монохроматической волны в неограниченной среде, то тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial y^2} = 0.$$

Магнитное поле в этом случае удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа с таким граничным условием, что на сторонах прямоугольника $x = 0, a$; $y = 0, b$ поле направлено вдоль границы. Решением такой краевой задачи, как известно, служит $\mathbf{H} = 0$. Но если отсутствует магнитное поле, то равно нулю и электрическое поле. Таким образом, чисто поперечные электромагнитные волны не могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками. Следует заметить, что этот вывод относится к любым волноводам, выполненным в виде простой трубы любого сечения, поскольку в процессе вывода мы нигде не использовали явный вид формы сечения.

Для E -волны, т.е. для волны, у которой

$$H_z = 0, E_z = E_{z0} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)},$$

из уравнений (13)–(16) получаем

$$E_{x0} = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, E_{y0} = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, H_{x0} = \frac{i\varepsilon\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, H_{y0} = -\frac{i\varepsilon\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Компонента E_{z0} удовлетворяет уравнению

$$\Delta_2 E_{z0} + \kappa^2 E_{z0} = 0,$$

где $\kappa^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - k_z^2$, $v^2 = c^2/(\varepsilon\mu)$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Для H -волны в приведенных выше формулах следует сделать замены $E \leftrightarrow H$ и $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$.

1.36. (Задача 2.33.) Показать, что для E -волны (H -волны), распространяющейся вдоль прямоугольного пустого волновода, граничные условия для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} выполнены, если на стенках волновода $E_z = 0$ ($\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$).

Решение Если $E_z = 0$ везде на границе, то согласно решению предыдущей задачи, в котором записаны связь между E_{x0} , E_{y0} и E_z , если $E_z = 0$ для стенок, у которых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ ($x = 0, x = a, y = 0, y = b$), то получается $E_\tau = 0$ и $H_n = 0$. Следовательно, для E -волны условие $E_z|_\Gamma = 0$ эквивалентно условию $E_\tau|_\Gamma = 0$ и $H_n|_\Gamma = 0$. Аналогичный результат получается для H -волны: из условия $\frac{\partial H_z}{\partial n}|_\Gamma = 0$ следует выполнение на границе условий $E_\tau|_\Gamma = 0$ и $H_n|_\Gamma = 0$.

1.37. (Задача 2.34.) Определить E -волны (H -волны), которые могут распространяться вдоль пустого волновода прямоугольного сечения $a \times b$. Найти критическую (наименьшую) частоту этих волн.

Решение Компонента поля $E_z(x, y)$ подчиняется двумерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \kappa^2 E_z = 0$$

и граничному условию

$$E_z|_{\Gamma} = 0.$$

Будем решать это уравнение методом разделения переменных для чего предположим, что $E_z = X(x) \cdot Y(y)$. Подставляя это в волновое уравнение, получим

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \varkappa^2 XY = 0.$$

разделим обе части уравнения на произведение $X \cdot Y$, получим

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \varkappa^2 = 0.$$

Поскольку сумма функции только от x и функции только от y равна константе во всей области определения, это возможно только тогда, когда каждая из них равна константе. Положим

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k_x^2, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -k_y^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} X(x) &= A \sin k_x x + B \cos k_x x, \\ Y(y) &= C \sin k_y y + D \cos k_y y. \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия $E_z(x = 0, y) = 0$, что эквивалентно условию $X(0) = 0$ и $E_z(x, y = 0) = 0$, что эквивалентно $Y(0) = 0$, получим

$$E_z(x, y) = A \sin k_x x \cdot \sin k_y y,$$

где k_x и k_y удовлетворяют условию

$$\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2, \text{ или, другими словами, } \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Для удовлетворения условий на границах $x = a$ и $y = b$

$$k_{x, n_x} a = n_x \pi, \quad k_{y, n_y} b = n_y \pi,$$

где

$$n_x = 1, 2, 3, \dots, n_y = 1, 2, 3, \dots$$

Общее решение тогда запишется в виде

$$E_z(x, y) = \sum_{n_x, n_y} A_{n_x, n_y} \sin \frac{n_x \pi}{a} x \sin \frac{n_y \pi}{b} y$$

$$\frac{n_x^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n_y^2 \pi^2}{b^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = 0,$$

$$n_x \neq 0, n_y \neq 0,$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + \left(\frac{n_x \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{b} \right)^2.$$

$$\omega_{\min}^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

Для H -волны, поскольку $H \sim \cos \frac{n_x \pi x}{a} \cos \frac{n_y \pi y}{b}$ минимальное значение частоты

$$\omega_{\min} = \frac{c\pi}{a}.$$

1.38. (Задача 2.35.) Найти распределение тока в стенках пустого волновода прямоугольного сечения $a \times b$, в котором распространяется E_{11} -волна (H_{10} -волна).

Решение Для H_{10} -волны: в боковых стенках $\eta_x = \eta_z = 0$ и $\eta_y = \pm H_z|_{x=0, a}$; на «крыше» и «дне» — $\eta_y = 0$, $\eta_x = \pm \frac{cH_z(x)}{4\pi}|_{y=0, b}$, $\eta_z = \mp \frac{c}{4\pi} H_x(x)|_{y=0, b}$, где H_x, H_z — компоненты поля в волноводе.

Для E_{11} -волны: в боковых стенках $\eta_x = \eta_y = 0$ и $\eta_z = \pm \frac{c}{4\pi} H_y(y)|_{x=0, a}$; на «крыше» и «дне» $\eta_x = \eta_y = 0$, и $\eta_z = \mp \frac{c}{4\pi} H_x(x)|_{y=0, b}$, где H_x, H_y — компоненты поля в волноводе, η — поверхностная плотность тока.

1.39. (Задача 2.36.) На какой волне должен работать излучатель, чтобы возбудить один тип волны в прямоугольном волноводе с $a = 5$ см, $b = 3$ см?

Решение Для решения этой задачи необходимо определить какая из минимальных частот (для E -волны или для H -волны) меньше и длина волны излучения должна соответствовать зазору между наименьшей $\omega_{\min 1}$ и следующей за ней частотой $\omega_{\min 2}$, т.е.

$$\omega_{\min 1} < \omega < \omega_{\min 2}.$$

Дисперсионное уравнение для прямоугольного волновода имеет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{n_x \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{b} \right)^2.$$

Отсюда следует, что для E -волны минимальное значение частоты

$$\omega_{Emin} = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2},$$

а минимальное значение частоты для H -волны

$$\omega_{Hmin} = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{a}\right)^2} = \frac{\pi c}{a}.$$

Таким образом ясно, что минимальная допустимая частота излучателя должна быть больше $\omega > \omega_{Hmin} = \omega_{H10}$, но при этом возникает вопрос, каково ограничение сверху. Для решения этого вопроса надо сравнить 2-ые частоты для E -волны и H -волны. Очевидно, что для $a > b$ частота $\omega_{H01} < \omega_{E11} < \omega_{H20}$ и, следовательно,

$$\omega_{min} < \omega < \omega_{H01},$$

$$\omega_{H01} = \frac{c\pi}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1.67\omega_{min}$$

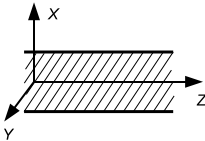
$$\omega_{min} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 3,14}{5} = 2 \cdot 10^{10} \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

В волноводе возбуждается только H_{10} -волна, когда

$$\omega_{min} \leq \omega \leq 1,67\omega_{min}, \quad \omega_{min} = 1,9 \cdot 10^{10} \text{ рад/сек.}$$

1.40. (Задача 2.38.) Показать, что бесконечно протяженный диэлектрический слой с проницаемостями ε и μ , заполняющий в вакууме область $-a \leq x \leq a$, действует как волновод. Определить типы волн, которые могут распространяться в таком волноводе (ограничиться случаем, когда векторы поля не зависят от координаты y).

Решение Волны в системе, показанной на рисунке, удовлетворяют волновому уравнению



$$\Delta \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Будем рассматривать гармонические волны с частотой ω , распространяющиеся вдоль оси z , т.е. искать решения в виде $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)}$ и $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)}$. Тогда для E -волны Волны электрического типа:

а) Четные решения

$$(E_x(x) = E_x(-x) = H_y(-x), E_z(x) = -E_z(-x)) :$$

для $|x| > a$ $E_z = A \operatorname{sign} x \cdot \exp(-s|x|)$, $E_x = A \frac{ik}{s} \exp(-s|x|)$, $H_y = A \frac{i\omega}{cs} \exp(-s|x|)$; для $|x| \leq a$ $E_z = B \sin x \cdot \exp(\kappa x)$, $E_x = B \frac{ik}{\kappa} \cos(\kappa x)$, $H_y = B \frac{i\omega\epsilon}{c\kappa} \cos(\kappa x)$, где $A = B e^{sa} \sin(\kappa a)$, κ, s определяется из уравнений: $(\kappa a)^2 + (sa)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} (\epsilon\mu - 1)$ (1), $sa = \frac{1}{\epsilon} \kappa a \operatorname{tg}(\kappa a)$ (2).

б) Нечетные решения

$$(E_x(x) = -E_x(-x), H_y(x) = -H_y(-x), E_z(x) = E_z(-x)) :$$

для $|x| > a$ $E_z = A \exp(-s|x|)$, $E_x = \frac{ik}{s} \operatorname{sign} x \cdot \exp(-s|x|)$, $H_y = A \frac{i\omega}{cs} \operatorname{sign} x \cdot \exp(-s|x|)$; для $|x| \leq a$ $E_z = B \cos(\kappa x)$, $E_x = -B \frac{ik}{\kappa} \sin(\kappa x)$, $H_y = -B \frac{i\omega\epsilon}{c\kappa} \sin(\kappa x)$, где $A = B e^{sa} \cos(\kappa a)$, κ, s определяются из уравнений (1) и $sa = -\frac{1}{\epsilon} \kappa a \cdot \operatorname{ctg}(\kappa a)$ (3). Волны магнитного типа рассматриваются аналогично. Волноводные свойства слоя следуют из того, что поле бегущей волны, как видно из результата, концентрируется в основном внутри слоя.

1.41. (Задача 2.39.) На вход в волновод подается сигнал $E(t) \cos(\omega_* t)$, где частотный спектр функции $E(t)$ — в пределах $(0, \omega_0)$, а ω_* — критическая частота волновода. Найти границы спектра на выходе волновода.

Решение Рассмотрим гармонику с максимальной частотой

$$\cos(\omega_* t) \cdot \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2} [\sin(\omega_* + \omega_0)t + \sin(\omega_* - \omega_0)t].$$

Отсюда следует, что спектр сигнала на выходе $\omega_* \leq \omega \leq \omega_* + \omega_0$.

Урок 8

Резонаторы

1.42. (Задача 2.44.) Определить собственные электромагнитные колебания в полом ($\varepsilon = \mu = 1$) резонаторе, имеющем форму параллелепипеда с ребрами $a \times b \times c$.

Решение Каждое собственное колебание описывается векторным потенциалом

$$\mathbf{A} : A_x = N_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-i\omega t},$$

$$A_y = N_2 \sin(k_1 x) \cos(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-i\omega t},$$

$$A_z = N_3 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \cos(k_3 z) e^{-i\omega t},$$

где $k_i = \frac{\pi n_i}{a_i}$, $n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots$; $k_1 N_1 + k_2 N_2 + k_3 N_3 = 0$; $a_1, a_2, a_3 \equiv a, b, c$.

1.43. (Задача 2.45.) Определить минимальную частоту собственных колебаний электромагнитного поля внутри резонатора из задачи 2.44 с размерами $1 \times 10 \times 20 \text{ см}^3$.

Решение $\omega_{\min} = \frac{\pi c}{a_2 a_3} \sqrt{a_2^2 + a_3^2} \simeq 10^{10} \text{ с}^{-1}$. (Стороны резонатора ($a_1 < a_2 < a_3$.)

1.44. (Задача 2.47.) В резонаторе, имеющем форму куба с ребром a , возбуждена основная мода колебаний, в которой отлична от нуля x -компонента электрического поля. Найти величину и направление сил, действующих на стенки резонатора, если полная энергия электромагнитного поля в резонаторе равна W .

Решение Для нахождения электромагнитного поля в пустом пространстве, ограниченном идеально проводящими стенками, достаточно решить волновое уравнение для \mathbf{E}

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad (17)$$

и уравнение

$$\text{div} \mathbf{E} = 0 \quad (18)$$

с граничным условием $E_\tau = 0$ на поверхности стенок. Магнитное поле находится из уравнения

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (19)$$

Выберем оси X, Y, Z по трем ребрам куба с началом в углу куба. Решением уравнений (17), (18) с граничным условием $E_\tau = 0$ будет

$$E_x = A \cos k_z x \cdot \sin k_y y \sin k_z z e^{i\omega t}.$$

В общем случае $k_x = \frac{\pi}{an_1}$, $k_y = \frac{\pi}{an_2}$, $k_z = \frac{\pi}{an_3}$, где n_1, n_2, n_3 — целые положительные числа и $\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$. Поскольку в резонаторе возбуждена основная мода колебаний (колебание с наименьшей частотой), то $k_x = 0, k_y = k_z = \frac{\pi}{a}$, $\omega = c\frac{\pi}{a}\sqrt{2}$ и

$$E_x = A \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) e^{i\omega t}. \quad (20)$$

Компоненты поля **H** найдем из уравнения (19). Получим

$$H_y = i\frac{\pi}{a}\frac{c}{\omega}A \cos\frac{\pi}{a}z \cdot \sin\frac{\pi}{a}y \cdot e^{i\omega t},$$

$$H_z = -i\frac{\pi}{a}\frac{c}{\omega}A \sin\frac{\pi}{a}z \cdot \cos\frac{\pi}{a}y \cdot e^{i\omega t}.$$

В элементе объема dV находится среднее по времени количество энергии

$$dW = \frac{1}{8\pi}(\overline{E^2} + \overline{H^2})dV,$$

где

$$\overline{E^2} = \overline{E_z^2} = A^2 \sin^2 \frac{\pi}{a}y \cdot \sin^2 \frac{\pi}{a}z \cos^2 \omega t = \frac{A^2}{2} \sin^2 \frac{\pi}{a}y \cdot \sin^2 \frac{\pi}{a}z,$$

$$\overline{H^2} = \overline{H_y^2} + \overline{H_z^2} =$$

$$= \left(\frac{\pi c A}{a\omega}\right)^2 \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{a}z \cdot \sin^2 \frac{\pi}{a}y + \left(\frac{\pi c A}{a\omega}\right)^2 \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{a}z \cdot \cos^2 \frac{\pi}{a}y.$$

Интегрируя по всему объему резонатора, получаем

$$W = \frac{a}{8\pi} \int_0^a \int_0^a (\overline{E^2} + \overline{H^2}) dy dz =$$

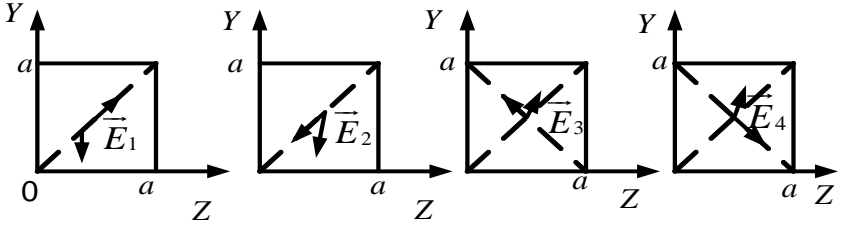
$$= \frac{a}{8\pi} \left[\frac{A^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi c A}{a\omega}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot 2 \right] = \frac{a^3 A^2}{32\pi},$$

откуда $A^2 = \frac{32\pi}{a^3}W$.

Для нахождения давления на стенки резонатора представим E_x в виде суперпозиции плоских волн

$$E_x = A \frac{e^{i\frac{\pi}{a}y} - e^{-i\frac{\pi}{a}y}}{2i} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{a}z} - e^{-i\frac{\pi}{a}z}}{2i} \cdot e^{i\omega t} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4,$$

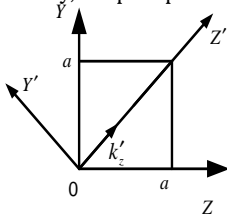
где $E_1 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}y - \frac{\pi}{a}z)}$, $E_2 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t + \frac{\pi}{a}y + \frac{\pi}{a}z)}$, $E_3 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}y + \frac{\pi}{a}z)}$, $E_4 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t + \frac{\pi}{a}y - \frac{\pi}{a}z)}$.



Волны E_1 и E_2 , E_3 и E_4 распространяются во взаимно противоположных направлениях. Волновые векторы для каждой из волн лежат в плоскости Y, Z . На рисунках приведены направления распространения волн

Векторы $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ направлены вдоль оси X . Волны падают только на стенки, расположенные перпендикулярно оси Z и оси Y , и оказывают на них давление. Например, волны E_1 и E_4 , падая на сторону $z = a$, формируют отраженные волны E_2 и E_3 .

Поскольку углы падения и отражения одинаковы для всех волн, то, для того чтобы найти давление на стенку $z = a$, достаточно найти передаваемый импульс на эту стенку, например волной E_1 , и результат учетверить.



Чтобы найти импульс, передаваемый волной E_1 , запишем ее в новой системе координат с осью Z' , направленной вдоль волнового вектора этой волны, и осью X' вдоль X . Получим

$$E_1 = -\frac{A}{4} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a} \sqrt{2} z')},$$

$$H_{y'} = \frac{A}{4} \frac{c}{\omega} k'_z e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a} \sqrt{2} z')} = -\frac{A}{4} e^{i(\omega t - k'_z z')},$$

где $k'_z = \frac{\pi}{a} \sqrt{2}$. В направлении Z' волна движется со скоростью, равной скорости света. Импульс, переносимый в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси Z' , $p_{z'} = \frac{1}{c} S_{z'}$, где $S_{z'}$ — вектор Пойнтинга, равный

$$\mathbf{S}_{z'} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{y'}^*] = \frac{c}{8\pi} \frac{A^2}{16}.$$

На стенку $z = a$ попадает импульс, который проходит через площадь $\Delta S = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$, расположенную нормально к Z' . Но этот импульс направлен под углом 45° к стенке. Таким образом, нормальная составляющая импульса будет равна

$$p_z = \frac{S_{z'}}{c} \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ = S_z \cdot a^2 / 2c.$$

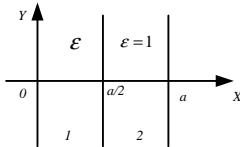
Полная сила, действующая на стенку,

$$F_z = 4p_z = \frac{A^2}{32} \frac{a^2}{8\pi} = \frac{W}{2a}.$$

Такая же сила действует на стенку $z = 0$ и стенку $y = 0$, $y = a$, т. е. $F_y = \frac{W}{2a}$. Сила $F_x = 0$, поскольку на стенки $x = 0$, $x = a$ импульс не переносится.

1.45. Между двумя параллельными, идеально проводящими пластинками, расстояние между которыми равно a , возбуждается стоячая электромагнитная волна. На сколько изменится минимальная частота стоячей волны, если приложить к одной из пластин слой диэлектрика толщиной $a/2$, доходящей до ее краев? Диэлектрическая проницаемость вещества слоя $\varepsilon = 4$.

Решение



выглядят как

Сразу можем написать (см. рисунок)

$$E_{1y}(x) = E_1 \sin k_1 x, \text{ где } k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon}/c,$$

$$E_{2y}(x) = E_2 \sin k_2(a - x),$$

где $k_2 = \omega/c$, ω — частота, $E_x \equiv 0$. Из закона Фарадея следует, что $H_z \propto \partial E_y / \partial x$. Граничные условия

$$E_1 \sin \frac{k_1 a}{2} = E_2 \sin \frac{k_2 a}{2},$$

$$k_1 E_1 \cos \frac{k_1 a}{2} = -k_2 E_2 \cos \frac{k_2 a}{2}$$

$$(E_{1y}|_{x=a/2} = E_{2y}|_{x=a/2}, \quad H_{1z}|_{x=a/2} = H_{2z}|_{x=a/2}).$$

Поделив первое уравнение на второе, получим

$$(1/k_1) \operatorname{tg}(k_1 a/2) = (-1/k_2) \operatorname{tg}(k_2 a/2),$$

причем $k_1/k_2 = \sqrt{\varepsilon} = 2$.

$$\operatorname{tg}(\sqrt{\varepsilon} \omega a/2c) = -\sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg}(\omega a/2c) \text{ или } \operatorname{tg}(\omega a/2c) = -2 \operatorname{tg} \frac{\omega a}{2c}.$$

Отсюда $\operatorname{tg} 2\theta = 2 \operatorname{tg} \theta / (1 - \operatorname{tg}^2 \theta) = -2 \operatorname{tg} \theta$, где $\theta = \omega a/2c$. Сократив на $2 \operatorname{tg} \theta \neq 0$, получим $1 = -1 + \operatorname{tg}^2 \theta$, $\operatorname{tg}^2 \theta = 2$, $\theta = \omega a/2c = \arctg \sqrt{2} \simeq 0,95$.

Минимальная частота до введения пластинки

$$\omega_{min}^{(0)} = \pi c/a = 3,14c/a$$

между пластинками укладывается половина длины волны. С пластинкой

$$\omega_{min}^{(\varepsilon)} = (2c/a) \arctg \sqrt{2} = 1,91c/a.$$

Таким образом, искомое изменение частоты

$$\Delta\omega = (3,14 - 1,91)c/a = 1,23c/a.$$

Урок 9

Контрольная работа по электродинамике 2

1.46. 1. По бесконечно длинному идеальному пустому волноводу, сечение которого — квадрат со стороной a , вдоль оси z бегут одновременно две ТЕ-волны одинаковой частоты $\omega = 2\pi c/a$. В момент времени $t = 0$ распределение продольной компоненты магнитного поля в плоскости $z = 0$ имеет вид:

$$H_z(x, y)|_{z=0} = H_{z0} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{2a}\right)$$

Найти распределение $H_z(x, y, z)$ в тот же нулевой момент времени. (5 б)

Решение Общее решение для ТЕ-волны в идеальном волноводе имеет вид

$$H_z = A(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)},$$

где

$$A(x, y) = \sum_{n,m} A_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right). \quad (1)$$

Заданную функцию распределения компоненты H_z на входе в волновод можно представить в виде

$$\sin^2\left(\frac{\pi y}{2a}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right),$$

то есть

$$H_z(x, y) = \frac{H_{z0}}{2} \left\{ \cos\frac{\pi x}{a} - \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{a} \right\}. \quad (2)$$

Сравнивая выражение (1) с (2), видим, что бегущая в волноводе ТЕ-волна представима в виде $H = H_{10} + H_{11}$. Тогда для H_{10} дисперсионное уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + (k_z)_{10}^2, \\ (k_z)_{10} &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

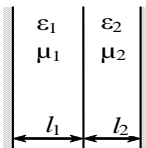
Для H_{11} аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} &= 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + (k_z)_{11}^2, \\ (k_z)_{11} &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Окончательно z -компонента магнитного поля имеет вид

$$H_z(x, y, z) = H_{z0} \left\{ \frac{1}{2} \cos\frac{\pi x}{a} e^{-ik_z z_{10}} - \frac{1}{2} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{a} e^{-ik_z z_{11}} \right\}.$$

1.47. 2. Найти собственные колебания и частоты в резонаторе, образованном двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, пространство между которыми заполнено двумя слоями вещества с проницаемостями ε_1 , μ_1 и ε_2 , μ_2 , соответственно. Рассмотреть случай $\varepsilon_1/\mu_1 = \varepsilon_2/\mu_2$. (5 б)



Решение В силу независимости решения от координат вдоль границ резонатора будем искать решение в виде $\mathbf{E}(x)$, направив ось x перпендикулярно стенкам резонатора. Тогда из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ получаем условие

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0,$$

откуда следует, что $E_x = \text{const}$. Поскольку это постоянное значение нас не интересует, то будем искать только такое решение, вектор \mathbf{E} которого параллелен стенкам резонатора. Выберем ось y в направлении вектора E и тогда уравнение для вектора электрического поля примет вид

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} E_y = 0, \quad (1)$$

в каждой из областей со своими коэффициентами. Введя обозначения

$$\kappa_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad \kappa_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2},$$

можно записать решение в каждой из областей в виде $E_y^{(i)} = A \sin \kappa_i x + B \cos \kappa_i x$. Учитывая граничные условия на стенках резонатора ($E_y = 0$), очевидно, что решение можно записать в виде

$$E_y^{(1)} A \sin \kappa_1 x,$$

$$E_y^{(2)} = B \sin [\kappa_2 (x - l_1 - l_2)].$$

Граничные условия на границе раздела сред Γ

$$E_\tau^{(1)}|_\Gamma = E_\tau^{(2)}|_\Gamma,$$

$$H_\tau^{(1)}|_\Gamma = H_\tau^{(2)}|_\Gamma.$$

Из первого граничного условия сразу получим

$$A \sin \frac{\omega}{c} l_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = -B \sin \frac{\omega}{c} l_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \quad (2)$$

Для удовлетворения второго граничного условия обратимся к уравнениям Максвелла (закону Фарадея)

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_z = -\frac{i\omega}{c} B_z = \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

или

$$H_z = \frac{ic}{\mu\omega} \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Тогда второе граничное условие можно переписать в виде

$$\left. \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial x} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial E_y^{(2)}}{\partial x} \right|_{\Gamma},$$

или

$$A \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\mu_1} \cos\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} l_1\right) = B \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\mu_2} \cos\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} l_2\right) \quad (3)$$

Разделив правые и левые части уравнения (2) на соответствующие выражения уравнения (3), получим дисперсионное уравнение

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} l_1\right) = -\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} l_2\right), \quad (4)$$

решение которого даст дискретный набор частот ω_n . Если $\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}$, то уравнение (4) примет вид

$$\operatorname{tg}(\alpha) = -\operatorname{tg}(\beta).$$

Это уравнение имеет решение

$$\frac{\omega_n}{c} \left(\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} l_1 + \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} l_2 \right) = n\pi,$$

откуда получаем для частот

$$\omega_n = \frac{n c \pi}{\left(\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} l_1 + \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} l_2 \right)}.$$

1.48. 3. В волноводе с металлическими стенками квадратного сечения $a \times a$ область $z < 0$ заполнена диэлектриком с $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$, а область $z > 0$ — диэлектриком с $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$. По диэлектрику ε_1 к плоской границе идёт волна H_{10} . В каком диапазоне частот $\omega_1 \div \omega_2$ должна находиться частота волны, чтобы произошло полное отражение волны. (3 б)

Решение Общее решение для H_{10} -волны имеет вид

$$H_{10} \simeq \cos \frac{\pi x}{a}.$$

Тогда дисперсионные соотношения в левой ($z < 0$) и правой ($z > 0$) половинах волновода будут иметь вид

$$3\varepsilon_0 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (k_z)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 0,$$

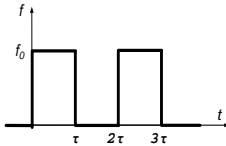
$$\varepsilon_0 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (k_z)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 0,$$

откуда, минимальные частоты для прохождения волны в левой и правой половинах имеют вид $\omega_{\min}^{(2)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\pi}{a}$, $\omega_{\min}^{(1)} = \frac{c}{\sqrt{3\varepsilon}} \frac{\pi}{a}$. Поскольку $\omega_{\min}^{(1)} < \omega_{\min}^{(2)}$, то частота, с которой H_{10} -волна будет отражаться от границы раздела должна удовлетворять неравенству

$$\frac{c}{\sqrt{3\varepsilon}} \frac{\pi}{a} < \omega < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\pi}{a}.$$

1.49. 4. Для сигнала, заданного функцией $f(t)$ (см. рис.) найти спектральную плотность f_ω . (2 б)

Решение Сигнал представляет собой два прямоугольных импульса, показанных на рис. Можно, конечно, записать преобразование Фурье в виде интеграла и вычислить его, но эффективнее использовать линейность преобразования и теорему о сдвиге.



$$\begin{aligned} f_\omega &= f_\omega^{(1)} + f_\omega^{(2)} = e^{i\omega\frac{\tau}{2}} f_\omega^0 + e^{i\omega\frac{5\tau}{2}} f_\omega^0 = \\ &= e^{i\omega\frac{\tau}{2}} (1 + e^{2i\omega\tau}) f_\omega^0 = e^{i\omega\frac{\tau}{2}} e^{i\omega\tau} \frac{(e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau})}{2} f_\omega^0 = \\ &= 2e^{\frac{3}{2}i\omega\frac{\tau}{2}} \cos \omega\tau f_\omega^0, \end{aligned}$$

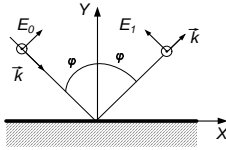
где f_ω^0 - Фурье-образ одного центрального импульса.

$$f_\omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{i\omega} \frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega}{2}\tau} \tau = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right).$$

$$f_\omega = \frac{2f_0\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{3}{2}i\omega\frac{\tau}{2}} \cos \omega\tau \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)$$

1.50. 5. На идеально проводящее полупространство $y \leq 0$ из пустоты падает плоская монохроматическая ТМ-волна с амплитудой E_0 и частотой ω под углом ϕ к оси y (yx — плоскость падения). Найти распределение поверхностной плотности зарядов $\sigma(x, t)$ и тока $i_0(x, t)$ на поверхности проводника. (3 б)

Решение В плоской падающей волне амплитуды электрического и магнитного



поля равны, т.е. $E_0 = H_0$. В идеально проводящем пространстве электрическое и магнитное поле равны 0, поэтому граничные условия на границе раздела вакуум-металл будут иметь вид

$$B_{1n} = 0,$$

которое выполняется автоматически (ТМ-волна и, следовательно, магнитное поле касательно поверхности). Из-за поворота вектора электрического поля при отражении (иначе нельзя удовлетворить граничным условиям при нормальном падении) нормальная составляющая электрического поля на границе ($y = 0$) испытывает скачок. Вектор электрического поля в падающей плоской волне имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)},$$

а скачок нормальной составляющей электрического поля

$$\Delta E_{1n} = 2E_0 \sin \varphi \cdot e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} x \sin \varphi)}.$$

Если скачок нормальной составляющей не равен нулю, то на поверхности будет поверхностная плотность заряда σ , которая находится из уравнений

$$\Delta E_{1n} = 4\pi\sigma/$$

Тогда

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} 2E_0 \sin \phi \cos \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \phi}{c} \right) \right].$$

Скачок касательной составляющей магнитного поля приводит к появлению поверхностного тока i , который определяется из граничных условий

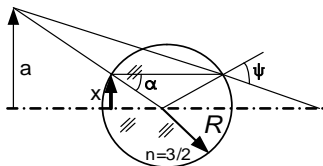
$$\mathbf{H}_{2\tau} - \mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{H}_{1\tau}|_{y=0} = -\mathbf{e}_z E_0 e^{i(\omega t - k_x x)} = \mathbf{e}_y \times \mathbf{i} \frac{4\pi}{c},$$

откуда

$$\mathbf{i} = \frac{c}{4\pi} E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c} \sin \varphi)} \mathbf{e}_x.$$

1.51. 6. Внутри стеклянного шарика с показателем преломления $3/2$ вблизи поверхности находится мелкий предмет. Найти увеличение предмета, если его рассматривать с обратной стороны шарика. (3 б)

Решение Задачу можно решать как матричным методом, так и геометрическим



построением (см. рисунок). Так как предмет находится внутри стекла, то луч, проведенный из конца предмета параллельно оси дойдет до границы шара изнутри и преломится. При этом для углов α и ψ будет выполняться соотношение (закон Снелиуса) $n \sin \alpha = \sin \psi$, или, используя параксиальное приближение, $n\alpha = \psi$. Продолжение этого луча влево даст одну из линий для

построения мнимого изображения предмета. Луч, проведенный из центра шара через вершину рассматриваемого предмета не преломляется (поскольку это луч - нормаль к поверхности шара) и его пересечение с проведенным ранее лучом даст мнимое изображение предмета длиной a . Используя очевидные соотношения для углов $\alpha = \frac{x}{R}$ и $\frac{a}{L} = \psi - \alpha$ и выполняя очевидные преобразования, получим

$$\frac{a}{L - R - \frac{x}{\psi - \alpha}} = \alpha,$$

$$\frac{a}{L - R - \frac{xR}{(n-1)x}} = \frac{x}{R},$$

$$\frac{a}{L} = \psi - \alpha = (n-1) \frac{x}{R},$$

$$L = \frac{a \cdot R}{(n-1)x},$$

$$aR = x \left\{ \frac{aR}{(n-1)x} - R - \frac{R}{n-1} \right\}$$

$$a = x \left\{ \frac{a}{(n-1)x} - \left(-\frac{n}{n-1} \right) \right\}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{(n-1)x} = -\frac{n}{n-1}$$

$$\frac{a}{x} \left(1 - \frac{1}{n-1} \right) = -\frac{n}{n-1}$$

$$\frac{a}{x} \frac{n-2}{n-1} = -\frac{n}{n-1}.$$

В результате получим увеличение

$$\frac{a}{x} = \frac{n}{2-n} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3.$$

2. Когерентность, интерференция, дифракция

Урок 10

Интерференция. Схема Юнга и Ллойда

Интерференция — это взаимодействие 2-х и более волн, когда они взаимодействуют друг с другом. Суммарная амплитуда двух волн

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Плотность энергии

$$w = w_1 + w_2 + w_{12}; \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_{12},$$

где

$$w_i = \frac{\varepsilon |E_i|^2 + \mu |H_i|^2}{8\pi}, \quad \mathbf{S}_i = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i].$$

Интерференционные члены имеют вид

$$w_{12} = \frac{1}{4\pi} [\varepsilon (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2) + \mu (\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2)], \quad \mathbf{S}_{12} = \frac{c}{4\pi} ([\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] + [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1]).$$

При использовании комплексных амплитуд

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|e^{i\varphi}, \quad \mathbf{b} = |\mathbf{b}|e^{i(\varphi+\theta)}, \quad \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = |a| \cdot |b| \cos \theta + i|a| \cdot |b| \sin \theta = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i[\mathbf{a} \times \mathbf{b}],$$

откуда

$$w_{12} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{Re}(E_1 E_2^*), \quad S_{12} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \text{Im}(E_1 E_2^*).$$

При наблюдении интенсивности всегда осуществляется усреднение по некоторому времени τ_0

$$I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} S(\mathbf{r}, t') dt' \equiv \overline{S}.$$

Перекрестный член в выражении для интенсивности интерферирующих 2-х плоских монохроматических волн одинаковой частоты

$$\begin{aligned} I_{12} = S_{12} &= \frac{c}{2\pi} \text{Re} \left[E_0 E_1 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)} - i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \varphi_1) \right] = \\ &= \frac{c}{2\pi} E_0 E_1 \text{Re} \left(e^{i(\varphi_0 - \varphi_1)} \right) = \frac{c}{2\pi} E_0 E_1 \cos(\Delta\varphi). \end{aligned}$$

Полная интенсивность равна

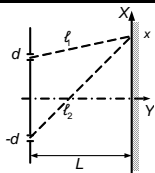
$$I_{\Sigma} = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi).$$

2.1. (Задача 3.1.) Два узких щелевых монохроматических источника света (длина волны λ)

расположены на расстоянии L от экрана и на расстоянии $2d$ друг от друга. Найти расстояние между полосами на экране.

Решение

Предполагая $2d \ll L$ получим для интенсивности в точке x



$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(x).$$

Разность фаз определяется из геометрических соотношений

$$\varphi(x) = k(\ell_2 - \ell_1).$$

Из прямоугольных треугольников получаем

$$\ell_1^2 = L^2 + (x + d)^2, \quad \ell_2^2 = L^2 + (x - d)^2.$$

Тогда

$$\ell_2^2 - \ell_1^2 = 4xd, \quad \ell_2 - \ell_1 = \frac{4xd}{\ell_1 + \ell_2} \approx \frac{2xd}{L} = x \cdot \alpha$$

где α — угол, под которым видна область $2d$ между щелями из центра экрана ($x = 0$).

Разность фаз

$$\phi(x) = \frac{2kxd}{L},$$

и интенсивность в точке x

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi(x).$$

Учитывая, что

$$I_1 = I_2 = I_0$$

получим

$$I(x) = 2I_0(1 + \cos \phi(x)) = 4I_0 \cos^2 \frac{kxd}{L}.$$

Расстояние между полосами (расстояние между максимумами \cos^2) определяется соотношением

$$\frac{k\Delta x d}{L} = \pi, \quad \Delta x = \lambda L / (2d).$$

2.2. (Задача 3.3.) Определить показатель преломления стекла, если интерференционные полосы в схеме Юнга смещаются на величину Δx при помещении стеклянной пластинки толщиной h перед одной из щелей установки, расстояние между щелями d .

Решение Если расстояние между щелями d и во второе (для примера) плечо поместили стеклянную пластину, то оптическая разность путей

$$(\ell_2 - \ell_1)_{\text{опт}} = \frac{xd}{L} + h(n - 1),$$

а разность фаз

$$\varphi_1(x) = k \left\{ \frac{xd}{L} + h(n - 1) \right\}.$$

Условия максимумов на экране без пластины

$$\frac{kx_m d}{L} = m\pi,$$

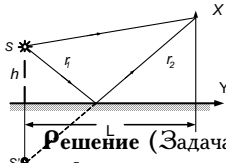
а эти же максимумы при помещении пластины будут расположены в точках

$$\frac{kx'_m d}{L} + kh(n - 1) = m\pi.$$

Тогда, если определить $\Delta x = x_m - x'_m$, получим

$$\frac{kd}{L} \Delta x = kh(n - 1) \Rightarrow \frac{\Delta x \cdot d}{Lh} + 1 = n.$$

2.3. В схеме зеркала Ллойда найти распределение интенсивности на экране. Источник света — узкий, щелевой, монохроматический.



Решение (Задача 3.4.) Вместо того, чтобы в лоб рассчитывать разность хода в схеме Ллойда, удобнее изобразить мнимый источник в зеркале (изображение источника S) станет очевидно, что разность хода в схеме Ллойда такая же, как и в схеме Юнга, за исключением того, что надо добавить изменение фазы отраженного луча на π в связи с отражением от более плотной среды. Тогда

$$\varphi(x) = \frac{2kxh}{L} + \pi.$$

Используя решение задачи 3.1 и используя соотношение

$$\cos^2 \left(\frac{kxh}{L} + \frac{\pi}{2} \right) = \sin^2 \frac{kxh}{L},$$

получим для распределения интенсивности на экране

$$I(x) = 4I_0 \sin^2 \frac{kxh}{L},$$

где I_0 — интенсивность источника.

2.4. (Задача 3.6.) В схеме зеркала Ллойда (см. задачу 3.4) используется немонохроматический источник (диапазон длин волн $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$). Оценить, при каком значении x интерференционная картина на экране пропадет. Получить отсюда выражение для продольной (временной) длины когерентности.

Решение Задачу можно решать как оценку, а можно попытаться получить «точное» решение.

а) Оценка

Если мы имеем немонохроматический источник, то имеется разброс частот

$$\Delta\omega = \frac{2\pi c\Delta\lambda}{\lambda^2}.$$

Из соотношения неопределенности следует, что при таком разбросе частот имеется цуг волн длиной $c\Delta t = c2\pi/\Delta\omega = \lambda^2/\Delta\lambda$.³ Интерференция будет иметь место, т.е. полосы будут различимы, если разность хода лучей (отраженного и основного, см. решение задачи 3.4) будет меньше длины цуга волн. Тогда получаем условие

$$\frac{2xh}{L} + \lambda/2 \lesssim \lambda^2/\Delta\lambda.$$

Пренебрегая величиной $\lambda/2$ по сравнению с $\lambda^2/\Delta\lambda$ получим, что интерференция будет видна до величины

$$x \lesssim \lambda^2/\Delta\lambda \frac{L}{2h}.$$

б) «Точное» решение

Для примера рассмотрим точечный источник в схеме Ллойда, причем мощность излучения распределена равномерно во всем диапазоне от $k - \Delta k/2$ до $k + \Delta k/2$. Тогда интенсивность излучения в этом диапазоне можно записать в виде

$$dI(k, x) = \frac{dI_1}{dk} dk + \frac{dI_2}{dk} dk + \frac{dI_{12}}{dk} dk.$$

Пусть 1-й и 2-й источники (основной и отраженный) имеют равные интенсивности, тогда

$$\frac{dI_1}{dk} dk = \frac{dI_2}{dk} dk = \frac{I_0}{\Delta k} dk.$$

Интерференционный член имеет вид

$$\frac{dI_{12}}{dk} = 2\sqrt{\frac{dI_1}{dk} \frac{dI_2}{dk}} \cos \varphi(x) = 2\frac{I_0}{\Delta k} \cos \left[\frac{2kx}{L} + \pi \right],$$

³Если в этой формуле принять $\Delta\omega\Delta t \lesssim \pi$, то и в ответе результат будет отличаться в 2 раза.

$$I_{12} = -2 \frac{I_0}{\Delta k} \int_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2} \cos \left[\frac{2k h x}{L} \right] dk = -4 \frac{I_0}{\Delta k} \frac{L}{2 h x} \cos \left[k \frac{2 h x}{L} \right] \sin \left[\Delta k \frac{h x}{L} \right].$$

Полную интенсивность можно записать в виде

$$I(x) = 2I_0 \left[1 - \cos \left(k \frac{2 h x}{L} \right) \frac{\sin \eta}{\eta} \right],$$

где $\eta = \Delta k \frac{h x}{L}$. Уже из этой формулы видно, что интерференционные полосы будут видны для x , удовлетворяющего условиям

$$|\eta| \lesssim \pi, \quad |x| \lesssim \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \frac{L}{2h},$$

или, используя определение числа полос m , уместяющегося на расстоянии x , получим соотношение

$$m \lesssim \frac{\lambda}{\Delta \lambda}.$$

Можно здесь же ввести понятие видности

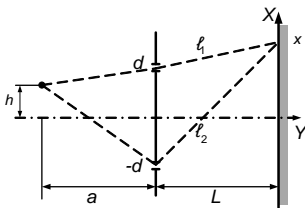
$$V(x) = \left| \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \right| = \left| \frac{\sin \eta}{\eta} \right|.$$

Продольной длиной когерентности называется величина

$$\ell_{\parallel} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}.$$

2.5. (Задача 3.7.) Схема Юнга (см. задачу 3.2) освещается двумя узкими щелевыми монохроматическими источниками (длина волны — λ), расположенными на прямой, параллельной экрану со щелями на расстоянии a от него. При каком расстоянии $2h$ между источниками интерференционная картина на экране пропадет? Оценить отсюда выражение для поперечной длины когерентности.

Решение Прежде чем приступить к решению задачи, выведем формулу, которая



будет полезна в дальнейшем и для решения других задач. Определим разность хода между двумя лучами, исходящими из точки, не находящейся на оси, а отстоящей от оси на величину h (см. рис.). Эта разность хода (в тех же приближениях, что и использовались ранее, т.е. $x, h \ll a, L$ определяется выражением

$$\phi_1(x) = \frac{2k x d}{L} + \frac{2k d h}{a} \quad (1)$$

Очевидно, что разность фаз от второго источника, находящегося в точке $-h$,

$$\phi_2(x) = \frac{2kxd}{L} - \frac{2kdh}{a}$$

1. Когерентные источники

$$I_{\text{сумм}} = 2I [1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)] = 2I \left(1 + \cos \frac{4kdh}{a} \right),$$

интерференционных полос нет никогда.

2. Некогерентные источники. В этом случае необходимо складывать интенсивности, точнее интерференционные картины, которые создает каждый из источников отдельно.

$$I_{\text{сумм}} = 2I + 2I \cos \phi_1 + 2I + 2I \cos \phi_2 = 4I + 2I(\cos \phi_1 + \cos \phi_2),$$

или, подставляя выражения для фаз, получим

$$I_{\text{сумм}} = 4I \left(1 + \cos \frac{2kxd}{L} \cos \frac{2kdh}{a} \right).$$

Полосы исчезают при

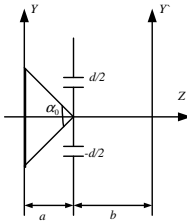
$$\frac{2kdh}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Когерентность, интерференция, дифракция

Урок 11

Видность

3.1. (Задача 3.12.) На экране наблюдается картина интерференции от двух параллельных щелей, расположенных на расстоянии d друг от друга в постановке опыта Юнга. Источник некогерентного света находится на большом расстоянии $a \gg d$ от щелей и представляет собой равномерно светящуюся полосу углового размера $\alpha_0 \ll 1$ (см. рисунок), параллельную щелям. Расстояние от экрана до щелей — $b \gg d$, длина волны — λ . Найти зависимость видности $V = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$ от d для интерференционных полос на экране.



Решение Рассмотрим результат прихода в точку P экрана с координатой y' (расположенную под углом β к оси Z) двух лучей, вышедших из точки S полосы с координатой y (расположенную под углом α к оси Z). С учетом малости поперечных размеров по сравнению с продольными $y, y' \ll a, b$ имеем для путей r_1, r'_1 и r_2, r'_2 следующие соотношения:

$$r_1 \approx a - \alpha d/2; \quad r'_1 \approx a + \alpha d/2;$$

$$r_2 \approx b - \beta d/2; \quad r'_2 \approx b + \beta d/2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_p &= E_0 \left(e^{ik(r_1+r'_1)} + e^{ik(r_2+r'_2)} \right) = E_0 e^{ik(a+b)} \left(e^{ik(\alpha+\beta)/2} + e^{-ik(\alpha+\beta)/2} \right) = \\ &= 2E_0 e^{ik(a+b)} \cos[kd(\alpha + \beta)/2]. \end{aligned}$$

Поскольку излучение полосы некогерентное, надо складывать интенсивности:

$$\begin{aligned} dI_p &= |E_p|^2 d\alpha / \alpha_0 = 4E_0^2 \cos^2[kd(\alpha + \beta)/2] d\alpha / \alpha_0 = \\ &= 2I_0 (1 + \cos[kd(\alpha + \beta)]) d\alpha / \alpha_0, \end{aligned}$$

$$I_p = \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} dI_p = 2I_0 \left(1 + \sin \left[kd \left(\frac{\alpha_0}{2} + \beta \right) \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\sin \left[kd \left(-\frac{\alpha_0}{2} + \beta \right) \right] / k\alpha_0 d = \\
& = 2I_0 \left(1 + \frac{\sin u}{u} \cos kd\beta \right),
\end{aligned}$$

где $u = kd\alpha_0/2 = \pi d\alpha_0/\lambda$.

Максимальное значение $\cos kd\beta = +1$, а минимальное значение $\cos kd\beta = -1$.
Отсюда

$$I_{Pmax} = 2I_0(1 + \sin u/u),$$

$$I_{Pmin} = 2I_0(1 - \sin u/u).$$

Таким образом,

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \left| \frac{\sin u}{u} \right| = \left| \frac{\sin \pi d\alpha_0/\lambda}{\pi d\alpha_0/\lambda} \right|.$$

В частности, $V = 0$ при $u = \pi$, т. е. при $\alpha_0 = \lambda/d$. Отсюда виден способ измерения малых угловых величин.

3.2. (Задача 3.18.) Звездный интерферометр Майкельсона представляет собой интерференционную схему Юнга, в которой расстояние d между отверстиями может изменяться. Найти зависимость видности интерференционных полос в интерферометре Майкельсона от расстояния между отверстиями и длины волны λ при наблюдении:
а) двойной звезды с угловым размером α (каждая компонента двойной звезды может рассматриваться как точечный источник, светимости обеих компонент одинаковы);
б) звезды с большим угловым размером α (рассматривать ее как равномерно излучающий диск или даже как полосу, исправив результат).

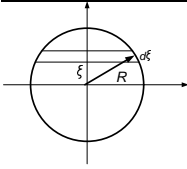
Решение а) Двойная звезда с угловым размером α . Этому случаю соответствует решение задачи 3.7 для двух некогерентных источников. Для получения соответствующей формулы необходимо в выражении для интенсивности из задачи 3.7 заменить $2d$ на d , а $2h/a$ заменить на угол α . Тогда интенсивность запишется в виде

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos \frac{kdx}{L} \cos \frac{k d \alpha}{2} \right).$$

Видность по определению

$$V = \left| \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \right| = \cos \left| \frac{k d \alpha}{2} \right| = \cos \left| \frac{2\pi d \alpha}{2\lambda} \right| = \cos \left| \frac{\pi d \alpha}{\lambda} \right|.$$

б) Звезда с большим угловым размером α . Для вычисления суммарной интен-



сивности от круга рассмотрим его как последовательность полос, находящихся на расстоянии ξ от центра и шириной $d\xi$ (см. рис.). Тогда интенсивность от 2-х таких симметричных полос (см. пункт а)) можно записать в виде

$$dI = 4 \frac{I_0}{\pi R^2} \left(1 + \cos \frac{kdx}{L} \cos \frac{k d\xi}{a} \right) 2 \sqrt{R^2 - \xi^2} d\xi,$$

где a — расстояние до звезды, а R — ее радиус.

$$I = 4 \frac{I_0}{\pi R^2} \left\{ 4R^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt + 4R^2 \int_0^1 \cos \frac{kdx}{L} \cos \frac{k dR}{a} t \sqrt{1-t^2} dt \right\}.$$

Первый интеграл равен $\pi/4$, а второй интеграл рассмотрим отдельно

$$I = 4 \frac{I_0}{\pi R^2} \left\{ \pi R^2 + 4R^2 \cos \frac{kdx}{L} \int_0^1 \cos \frac{k dR t}{a} \sqrt{1-t^2} dt \right\}.$$

Вспомяная определение функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{2n-1}{2}} \cos(xt) dt,$$

мы видим, что второе слагаемое можно свести к этой функции с $n = 1$

$$\int_0^1 \cos \frac{k dR t}{a} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{2 \frac{k dR}{2a}} J_1 \left(\frac{k dR}{a} \right) = \frac{\pi/2}{\pi d\alpha/\lambda} J_1 \left(\frac{\pi d\alpha}{\lambda} \right).$$

Собирая вместе оба члена, получим

$$I = 4I_0 \left\{ 1 + \frac{2\lambda}{\pi d\alpha} J_1 \left(\frac{\pi d\alpha}{\lambda} \right) \cos \frac{kdx}{L} \right\}.$$

Тогда видность

$$V = \left| \frac{2\lambda}{\pi d\alpha} J_1 \left(\frac{\pi d\alpha}{\lambda} \right) \right|$$

а) $V = \left| \cos \frac{\pi \alpha d}{\lambda} \right|$; б) $V = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\alpha d} J_1 \left(\frac{\pi \alpha d}{\lambda} \right)$, где J_1 — функция Бесселя.

3.3. (Задача 3.19.) В звездном интерферометре Майкельсона при наблюдении: а) двойной звезды (система Капелла на расстоянии 44,6 световых лет) и б) красного гиганта (α -Бетельгейзе на расстоянии 652 световых года) видность интерференционных полос при увеличении расстояния между отверстиями ослабевает и при $D = D_0$ обращается в нуль. Определить: а) расстояние ρ_0 между компонентами двойной звезды ($D_0 = 70,8$ см, $\lambda = 5\,000\text{ \AA}$) и б) диаметр красного гиганта ($D_0 = 720$ см, $\lambda = 6\,000\text{ \AA}$).

Указание: первый корень функции Бесселя $J_1(x)$ равен $x_1 = 3,83\dots$,

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t - x \sin t) dt.$$

Решение

$$dI = 2I_0 (1 + \cos \phi(x, \xi)) \xi \cdot d\xi$$

$$\cos \phi(x, \xi) = \cos \left[\left(\frac{x}{L} + \frac{\xi}{a} \right) kd \right]$$

$$\xi = 2\sqrt{R^2 - r^2} dr$$

$$I = 2I_0 \left\{ \frac{R^2}{2} 2\pi + 2\pi \int_{-R}^R \cos \left[kd \left(\frac{x}{L} + \frac{\xi}{a} \right) \right] \xi d\xi \right\}$$

$$I = 2I_0 \left(\pi R^2 + \frac{2R^2}{\pi R^2} \int_{-R}^R \cos \left[kd \left(\frac{x}{L} + \frac{\xi}{a} \right) \right] \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2}} d\xi \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-R}^R \cos \left(kd \frac{x}{L} \right) \cos \frac{kd\xi}{a} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2}} \frac{d\xi}{R} - \int_{-R}^R \sin \left(kd \frac{x}{L} \right) \sin \frac{kd\xi}{a} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2}} d\xi =$$

$$= \frac{4}{\pi} R \int_0^1 (1 - t^2) \cos \frac{kdR}{a} t dt \cdot \cos \frac{kd x}{L} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cos \frac{kd x}{L} \frac{a}{kd} \frac{\frac{kdR}{a}}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot J_1\left(\frac{kdR}{a}\right)$$

$$J_n(x) = \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{2n-1}{2}} \cos xt dt$$

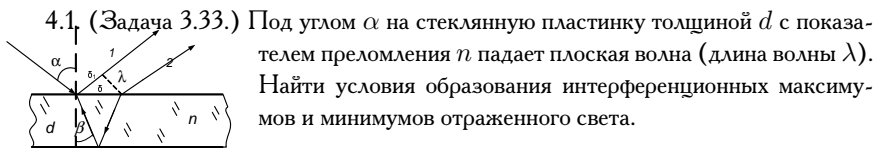
$$V = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\alpha d} J_1\left(\frac{\pi \alpha d}{\lambda}\right)$$

а) $1,6 \cdot 10^6$ км; б) $6,2 \cdot 10^8$ км.

4. Когерентность, интерференция, дифракция

Урок 12

Линии равного наклона и толщины



Решение Разность оптических путей между двумя лучами 1 и 2 перед их приходом на линзу (с учетом сдвига на $\lambda/2$ оптического пути волны 1 при отражении от более плотной среды) будет равна

$$\Delta = 2 \frac{d}{\cos \beta} n - (\delta_1 - 0.5\lambda),$$

где

$$\delta = 2d \operatorname{tg} \beta; \quad \delta_1 = \delta \sin \alpha = 2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha.$$

Учитывая закон Снеллуса $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$, получим

$$\Delta = 2 \frac{dn}{\cos \beta} - 2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha - 0.5\lambda = \frac{2dn}{\cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) = 2dn \cos \beta + 0.5\lambda.$$

Условие максимума (разность хода равна целому числу длин волн)

$$\Delta = 2dn \cos \beta + 0.5\lambda = m\lambda,$$

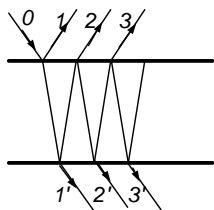
или

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \lambda(m - 0.5).$$

где $m = 1, 2, \dots$

4.2. (Задача 3.34.) Принимая интенсивность падающего пучка за единицу, найти интенсивность проходящего и отраженного пучков при многократной интерференции на плоскопараллельной пластинке (поглощение света отсутствует).

Решение Падает луч света интенсивностью I_0 и отражается от границы с коэффициентом отражения (энергетическим) R . Тогда интенсивности прошедших лучей выразятся в виде



$$I_{1'} = (1 - R)^2 I_0,$$

$$I_{2'} = R^2 (1 - R)^2 I_0,$$

$$I_{3'} = R^4 (1 - R)^2 I_0 \dots$$

А соответствующие амплитуды

$$\begin{aligned}a_{1'} &= (1 - R) a_0, \\a_{2'} &= R(1 - R) a_0, \\a_{3'} &= R^2(1 - R) a_0 \dots\end{aligned}$$

Разность хода между двумя соседними пучками $\Delta = 2dn \cos \psi$, а разность фаз $\varphi = k \cdot \Delta = \frac{4\pi}{\lambda} dn \cos \psi$. Амплитуда прошедшей волны есть сумма

$$a_{\text{прош}} = a_0 (1 - R) [1 + \text{Re}^{-i\varphi} + R^2 e^{-2i\varphi} + \dots],$$

которая есть сумма членов геометрической прогрессии с модулем меньше 1. Считая прогрессию бесконечной

$$a_{\text{прош}} = \frac{1 - R}{1 - \text{Re}^{-i\varphi}} a_0.$$

Тогда суммарная прошедшая интенсивность $I_{\text{прош}}$ пропорциональна квадрату модуля амплитуды

$$\begin{aligned}I_{\text{прош}} &= \frac{(1 - R)^2}{|1 - \text{Re}^{-i\varphi}|^2} a_0^2 = a_0^2 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} = \\&= \frac{a_0^2 (1 - R)^2}{1 - 2R + R^2 + 2R(1 - \cos \varphi)} = \frac{a_0^2 (1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)}.\end{aligned}$$

При выводе использовалось тригонометрическое равенство

$$1 - \cos \varphi = \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \left(-\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Максимум прошедшей интенсивности достигается при равенстве нулю члена с $\sin \varphi$ в знаменателе. т.е. при

$$\frac{\varphi}{2} = m\pi.$$

Рассчитаем коэффициент отражения. Интенсивности в отраженных лучах

$$I_1 = RI_0, I_2 = R(1 - R)^2 I_0, I_3 = R^3 \cdot R(1 - R)^2 I_0 \dots,$$

а амплитуды, соответственно,

$$a_1 = \sqrt{R} a_0, a_2 = -\sqrt{R}(1 - R)^2 a_0, a_3 = -\sqrt{R} \cdot R(1 - R) a_0.$$

Учитывая сдвиги фаз при сложении, получим

$$\begin{aligned} a_{\text{отр}} &= \sqrt{R} \cdot a_0 - \sqrt{R} (1 - R) a_0 e^{-i\varphi} [1 + R \cdot e^{-i\varphi} + R^2 e^{-2i\varphi} + \dots] = \\ &= \sqrt{R} \cdot a_0 \left[1 - \frac{(1-R)e^{-i\varphi}}{1-R \cdot e^{-i\varphi}} \right] = \sqrt{R} \cdot a_0 \frac{1-R \cdot e^{-i\varphi} - e^{-i\varphi} + R \cdot e^{-i\varphi}}{1-R \cdot e^{-i\varphi}} = \\ &= \sqrt{R} \cdot a_0 \frac{1-e^{-i\varphi}}{1-R \cdot e^{-i\varphi}}. \end{aligned}$$

Минус перед вторым членом в сумме связан с изменением фазы волны при отражении от более плотного материала.

$$\begin{aligned} I_{\text{отр}} &= |a_{\text{отр}}|^2, \\ I_{\text{отр}} &= \frac{R a_0^2 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \\ I_{\text{прош}} &= \frac{a_0^2 (1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Максиму прохождения

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} dn \cos \psi = m\pi, \quad \frac{2dn}{\lambda} \cos \psi = m,$$

таким образом видно, что максимум прохождения волны и минимум отражения определяются тем же условием, что и при учете однократного отражения.

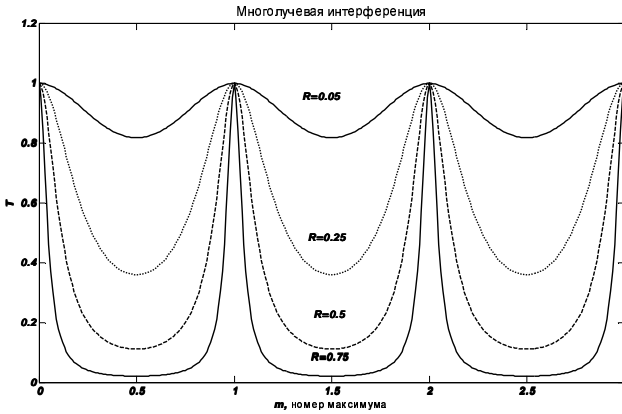
1) Рассмотрим случай $R \ll 1$

$$\begin{aligned} I_{\text{прош}} &= 1 - 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - 2R (1 - \cos \varphi), \\ I_{\text{отраж}} &= 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2R (1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Но это тоже самое, что и при учете 1 луча.

2) Рассмотрим случай $1 - R \ll 1$. Разность полос характеризуется их полушириной. Полуширина - расстояние между точками по обе стороны максимума, в которых интенсивность составляет половину максимальной величины. В окрестности максимума m -го порядка

$$\begin{aligned} \varphi &= m\pi + \phi \\ (I_{\text{max}} = I_0 = a_0^2) \\ \sin^2 \frac{\varphi}{2} &\approx \frac{\phi^2}{4} \\ I_{\text{прошед}} &= \frac{I_{\text{max}}}{1 + \frac{R\phi^2}{(1-R)^2}} \end{aligned}$$



Если

$$\frac{R\phi^2}{(1-R)^2} = 1,$$

то

$$I_{\text{прошед}} = \frac{I_{\text{max}}}{2}.$$

Полуширина

$$\delta\varphi = 2\phi = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

Многолучевая спектроскопия обычно используется для исследования структуры тонких спектральных линий. Рассмотрим разрешающую способность, т.е. наименьшее расстояние между близкими спектральными линиями, которые можно увидеть как отдельные линии (по длине волны). Пусть эти 2 линии имеют длину волны λ и $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ соответственно. Если сдвиг полос (максимумов) мал, то линии не разрешить. Допустим, что сдвиг равен полуширине. В точке 0

$$\frac{1}{2}I_{\text{max}} + \frac{1}{2}I_{\text{max}} = I_{\text{max}}$$

В точке A значение $\phi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$, $\frac{R\phi^2}{(1-R)^2} = 4$, поэтому

$$I_{\text{max}} = \frac{1}{5}I_{\text{max}}.$$

а значит $I_{\text{max}} + 0.2I_{\text{max}} = 1.2I_{\text{max}}$ - видно 2 линии.

Условие спектральной разрешимости - расстояние между максимумами должно отстоять на расстоянии более полуширины. Определим теперь $\delta\lambda = \lambda - \lambda'$ (n - показатель преломления считаем не зависящим от λ - для Фабри-Перро - в зазоре воздух). В точке A (максимум для длины волны λ') $\phi' = 2m\pi$, а для λ

$$\phi = 2m\pi + \frac{(1-R)}{\sqrt{R}}.$$

Тогда

$$\phi' - \phi = \delta\phi = \frac{(1-R)}{\sqrt{R}}$$

$$\phi = \frac{4\pi dn \cos \beta}{\lambda}.$$

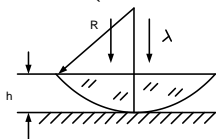
$$\frac{\delta\phi}{\phi} = \left| \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right|$$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{R}}{(1-R)} m = m.$$

При $R = 0,95$

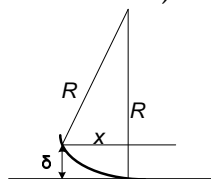
$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = m122,5.$$

4.3. (Задача 3.37.) Найти радиусы интерференционных колец (колец Ньютона)



в проходящем (а) и отраженном (б) свете на воздушном клине между зеркалом и плоско-выпуклой линзой (ее радиус $R \gg h$ - толщины линзы). Длина волны - λ .

Решение а) Разность хода между лучом прошедшим и лучом дважды отразившимся и прошедшим потом равна $\Delta = 2\delta$, где δ показана на рисунке. Из прямоугольного треугольника получаем



$$(R - \delta)^2 + x^2 = R^2,$$

откуда, пренебрегая δ^2 по сравнению с x^2 и приводя подобные члены, получим

$$\delta = \frac{x^2}{2R},$$

$$\Delta = \frac{x^2}{R}.$$

Условия того, что кольца будут светлыми

$$\Delta = m\lambda.$$

Радиус светлого m -го кольца

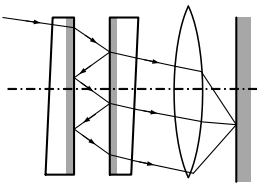
$$X_m = \sqrt{m\lambda R} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}} \sqrt{2m}.$$

Радиус m -го темного кольца

$$X_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda R} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}} \sqrt{2m - 1}.$$

б) Картина в проходящем свете будет дополнительной по отношению к картине в отраженном свете потому, что в зазоре происходит нечетное число отражений и фаза сдвигается еще на $\lambda/2$.

4.4. (Задача 3.44.) Эталон Фабри—Перо представляет собой плоскопараллельную пластину, обычно воздушную, образующуюся между двумя плоскими поверхностями



тщательно отшлифованных и отполированных стеклянных или кварцевых пластинок, установленных так, чтобы поверхности, обращенные друг к другу, были строго параллельны. Интерференционные полосы при этом имеют вид концентрических колец. а) Как располагаются полосы различных порядков? б) Как зависит ширина полосы

от порядка интерференции, длины волны, толщины эталона h ?

Решение а) $m\lambda = 2h \cos \varphi$, где φ — угол между выходящими лучом и нормалью к пластинке, т. е. с ростом m полосы стягиваются к центру; б) $\Delta\varphi = \lambda / (2h \sin \varphi)$, т. е. ширина полос возрастает при увеличении λ , порядка интерференции и уменьшается с ростом h .

Урок 13

Зоны Френеля. Дифракция Френеля

1. (Задача 3.53.) Найти радиус ρ_n n -й зоны Френеля. Чему он будет равен, если падающая волна плоская? Доказать, что площади зон Френеля равны. Найти вклад в амплитуду колебания в точке B от n -й зоны Френеля.

Решение Расстояние между центром сферы и точкой P — $SP = a_1 + a_2$.

Тогда

$$E(P) = \frac{1}{iL} \int E_0 \frac{e^{ika_1}}{a_1} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cos \psi dS.$$

Для вычисления интеграла разобьем сферическую поверхность на кольцевые зоны с центром в точке P и радиусом $r_n = a_2 n \frac{\lambda}{2}$, где $n = 1, 2, \dots$ — целые числа.

Найдем радиусы кольцевых границ этих зон и их площади $\triangle S_n = S_n - S_{n-1}$, где S_n — площадь сферического сегмента ($S_n = 2\pi a_1 h_n$).

Выразим ρ_n^2 из $\triangle SAB$ и $\triangle BAP$:

$$a_1^2 - (a_1 - h_n)^2 = \left(a_2 + n \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (a_2 + h_n)^2.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$a_1^2 - a_1^2 + 2a_1 h_n - h_n^2 = a_2^2 + n \frac{\lambda^2}{4} + na_2 \lambda - a_2^2 - h_n^2 - 2a_2 h_n.$$

Пренебрегая слагаемым $n^2 \frac{\lambda^2}{4}$ ($a_{1,2} \gg \lambda$), получаем

$$h_n = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{n\lambda}{2} \quad \text{и} \quad S_n = 2\pi h_n a_1 = \pi \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \lambda n = n S_1.$$

Площадь любой кольцевой зоны

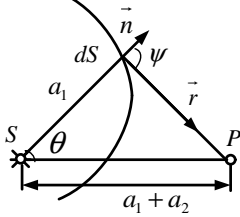
$$\triangle S_n = S_n - S_{n-1} = \pi \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \lambda$$

не зависит от n и мала (пропорциональна λ). Радиус зоны

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sqrt{a_1^2 - (a_1 - h_n)^2} = \sqrt{(2a_1 - h_n)h_n} \cong \sqrt{2a_1 h_n} = \\ &= \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \lambda n} = \sqrt{n} \rho_1. \end{aligned}$$

При $a_1 \rightarrow \infty$ $\rho_n \rightarrow \sqrt{a_2 \lambda n}$, при $a_1 = a_2 = a$ $\rho_n = \sqrt{2a \lambda n}$. Например, при $a_2 = a_1 = 1$ м, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см $= 5 \cdot 10^{-7}$ м $\rho_1 = \sqrt{2 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 0,1$ см. Для $a_1 \rightarrow \infty$ и $a_2 = 1$ м $\rho_1 = \sqrt{5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2} = \frac{0,1}{\sqrt{2}}$ см $\approx 0,07$ см $\approx 0,7$ мм. Зоны для видимого света очень узки.

Для определения вклада в амплитуду колебаний в точке B от n -ой зоны Френеля используем интеграл Кирхгофа для точечного источника монохроматического излучения с длиной волны λ в виде $E = \int \int \frac{E_0 e^{ikr}}{i\lambda r} \cos \psi dS$.



Границы зоны $a_2 + (n-1)\frac{\lambda}{2}$ и $a_2 + n\frac{\lambda}{2}$. Расстояние между источником и наблюдателем $SP = a_1 + a_2$. Вклад от n -й зоны:

$$E_n = \frac{E_0}{i\lambda} \int \frac{e^{ika_1}}{a_1} \cos \psi_n \frac{e^{ikr}}{r} 2\pi a_1^2 \sin \theta d\theta,$$

$$r^2 = a_1^2 + (a_1 + a_2)^2 - 2a_1(a_1 + a_2) \cos \theta.$$

Найдем дифференциал этого соотношения: $2rdr = 2a_1(a_1 + a_2) \sin \theta d\theta$, откуда

$$\sin \theta d\theta = \frac{rdr}{a_1(a_1 + a_2)}.$$

Подставим в интеграл:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{E_0}{i\lambda} \int_{a_2 + (n-1)\frac{\lambda}{2}}^{a_2 + n\frac{\lambda}{2}} \frac{e^{ika_1}}{a_1} \cos \psi_n \frac{e^{ikr}}{r} 2\pi a_1^2 \cdot \frac{rdr}{a_1(a_1 + a_2)} = \\ &= E_0 \frac{e^{ika_1} 2\pi}{i\lambda(a_1 + a_2)} \int_{a_2 + (n-1)\frac{\lambda}{2}}^{a_2 + n\frac{\lambda}{2}} \cos \psi_n e^{ikr} dr. \end{aligned}$$

Заменим переменные: $r = r' + a_2$, тогда из-под интеграла уйдет множитель e^{ika_2} и упростятся пределы интегрирования.

Кроме того, учитывая узость зоны и слабую зависимость $\cos \psi_n$ от угла в пределах зоны, заменим $\cos \psi_n$ на его среднее значение $\overline{\cos \psi_n}$ и вынесем из-под интеграла эту константу:

$$E_n = \frac{E_0 e^{ik(a_1 + a_2)}}{(a_1 + a_2)} \frac{\overline{\cos \psi_n} 2\pi}{i\lambda} \int_{(n-1)\lambda/2}^{n\lambda/2} e^{ikr} dr,$$

$$J_n = \int_{(n-1)\lambda/2}^{n\lambda/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} r} dr = \frac{\lambda}{2\pi i} \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda} n\frac{\lambda}{2}} - e^{i\frac{2\pi}{\lambda} (n-1)\frac{\lambda}{2}} \right),$$

$$J_n = \frac{\lambda}{2\pi} \left(e^{i\pi n} - e^{i\pi(n-1)} \right) = \frac{\lambda 2(-1)^n}{2\pi i},$$

так как

$$e^{i\pi n} - e^{i\pi(n-1)} = 2(-1)^n.$$

Таким образом,

$$E_n = \frac{2E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1+a_2)} (-1)^{n+1} \overline{\cos \psi_n}.$$

В частности, $E_1 = \frac{2E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{a_1+a_2}$, т. е. в 2 раза больше амплитуды при полностью открытом фронте $E = \frac{E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{a_1+a_2}$. Кроме того, видно, что вклады зон образуют знакопередающийся ряд со слабо падающей, но падающей с ростом n зависимостью от n , обусловленной падением $\overline{\cos \psi_n}$.

2. (Задача 3.54.) Получить оценку вклада в колебание в точке B (см. рисунок к задаче 3.53) при открытии и закрытии произвольного числа зон Френеля. В частности, когда: а) закрыты все зоны, кроме первой; б) закрыты все четные зоны; в) фаза всех четных зон изменена на π .

Решение Если E — амплитуда в B при полностью открытом фронте, то а) $E_1 \simeq 2E$; б) $E_n^* \simeq \sum_{i=1}^n E_{2i-1} > E_1$, где n — число открытых нечетных зон; в) $E_n \simeq \sum_{i=1}^n E_1 \simeq 2E_n^*$, где n — число открытых зон.

3. (Задача 3.55) Определить максимальное фокусное расстояние зонной пластинки Френеля, если ее m -й радиус равен r_m ($m = 5$, длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см; $r_5 = 1,5$ мм). Что произойдет, если пространство между зонной пластинкой и экраном заполнено средой с показателем преломления n ($n > 1$)?

Решение Радиус m -ой зоны Френеля определяется соотношением

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda.$$

Эту формулу можно преобразовать к виду формулы тонкой линзы

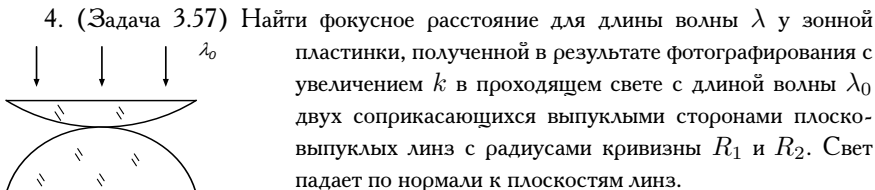
$$\frac{m\lambda}{r_m^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

величина f и есть фокус зонной пластинки

$$f = \frac{r_m^2}{m\lambda} \rightarrow \max$$

$$\frac{r_5^2}{5\lambda} = \frac{(15 \cdot 10^{-2})}{5 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 90 \text{ см.}$$

При наличии за зонной пластинкой среды с $n > 1$ в приведенных выше формулах необходимо заменить расстояние b на оптический путь, т.е. $b' = nb$ и, следовательно, второй член в формуле «линзы» уменьшится, а, значит, фокусное расстояние f увеличится.



Решение Оптические пути при наличии двух соприкасающихся выпуклых поверхностей (аналогично расчету колец Ньютона) равны

$$\delta_{m_1} = \frac{r^2 m}{2R_1}, \quad \delta_{m_2} = \frac{r^2 m}{2R_2}.$$

Суммарная разность хода в схеме будет

$$\Delta_m = 2(\delta_{m_1} + \delta_{m_2}) = m\lambda_0.$$

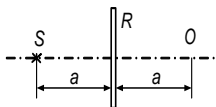
Равенство разности ходов целому числу длин волн определяет условие (радиусы) максимумов получаемых колец Ньютона.

$$r_m^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = m\lambda_0, \quad \text{откуда } r_m = \sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} m\lambda_0.$$

$$R_m = kr_m = k \sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} m\lambda_0$$

$$F = \frac{R_m^2}{m\lambda} = \frac{k^2 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \lambda_0$$

5. (Задача 3.67.) Посередине между точечным источником и экраном помещен непрозрачный



диск радиусом R . Плоскость диска параллельна экрану, а его ось проходит через источник. На экране в точке O — светлое пятно. В центре диска сделали круглое отверстие. При каком минимальном радиусе отверстия в точке O будет темно? Каким при этом должен быть радиус диска?

Решение Интеграл Кирхгофа в общем виде можно записать как

$$E(p) = \frac{k}{2\pi i} \iint \frac{E(S)}{R} e^{i(KR - \omega t)} dS$$

Сначала решаем задачу об интенсивности света на оси круглого отверстия в экране как функции расстояния z . Интеграл Кирхгофа в параксиальном приближении (расходящиеся сферические волны).

$$E(p) = \frac{k}{2\pi i z} \exp \left\{ i \left(kz - \omega t + k \frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{2z} \right) \right\} dx dy$$

$$x, x_p, y, y_p \ll z$$

Тогда на оси $x_p = y_p = 0$ интеграл Кирхгофа перепишется в виде

$$E^{(1)}(z) = \frac{k}{2\pi i z_p} E_0 \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} e^{\frac{ikr^2}{2z_p}} r dr d\varphi = -E_0 \left(e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} - 1 \right)$$

$$\left| E^{(1)}(z) \right| = 2E_0 \left| \sin \frac{\pi \rho^2}{2\lambda z} \right|.$$

По теории Бабина

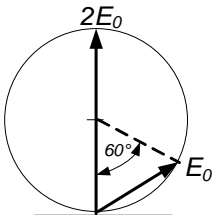
$$E^{(1)}(p) + E^{(2)}(p) = E_0,$$

где $E^{(1)}(p)$ — амплитуда в точке P от отверстия, а $E^{(2)}(p)$ — амплитуда от экрана. Тогда от экрана

$$E = E_0 \exp \left\{ \frac{ik\rho^2}{2z} \right\}$$

$$I(z) = I_0$$

безотносительно радиуса экрана. Чтобы погасить E_0 необходимо получить половину вклада центральной зоны, а это значит на векторной диаграмме необходимо выбрать угол 60° (см. рисунок), что соответствует $\frac{1}{3}$ площади первой зоны.

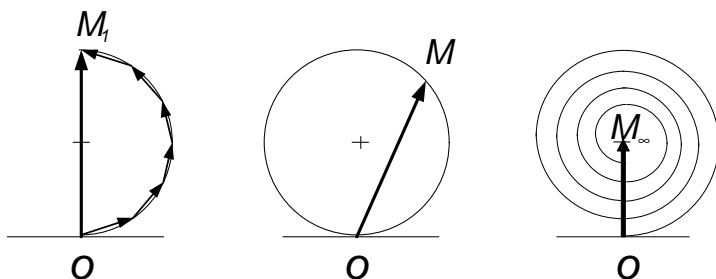


$$S_{\text{отв}} = \frac{1}{3} S_0, \quad \pi R_{\text{отв}}^2 = \frac{1}{3} \pi \frac{a\lambda}{2}, \quad R_{\text{отв}} = \sqrt{\frac{a\lambda}{6}}.$$

Таким образом, минимальный радиус отверстия $r_{\min} \simeq \sqrt{a\lambda/6}$; радиуса же диска при этом (чтобы амплитуды гасились) должен удовлетворять условию

$$R \simeq \sqrt{a\lambda(n \pm 1/3)},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ (для $n = 0$ только знак «+»).



Урок 14

Геометрическое представление зон Френеля

1. (Задача 3.134.) Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Используя геометрическое представление вкладов зон Френеля, аналогичное спирали Корню, определить какова интенсивность I за экраном в точке, для которой отверстие равно: а) 1-й зоне Френеля; б) внутренней половине 1-й зоны; в) 1-й зоне, половина которой перекрыта по диаметру; г) полутора первым зонам; д) одной трети 1-й зоны?

Решение Используя вычисления, проведенные в решении задачи 3.53, можно представить амплитуду вклада от различных зон Френеля как комплексное число, изображаемое на комплексной плоскости в виде вектора с началом в начале координат O (см. рисунок выше).

На этой плоскости они будут представляться в виде векторов, модуль которых пропорционален амплитуде самих величин, а ориентация которых (угол по отношению к горизонтальной действительной оси) будет определяться значением их фазы (показатель мнимой экспоненты; он в точности характеризует набег фазы на соответствующей части зоны). Таким образом, если разбить зону на много малых равных частей, то вклад каждой из них будет представляться векторами одинаковой длины, каждый из которых, начинаясь в конце предшествующего вектора, будет повернут относительно него на дополнительный угол, пропорциональный набегу фазы на этой части зоны. Следовательно, при разбиении зоны на неограниченное число частей концы векторов, отвечающих за вклад каждой части, будут описывать дугу окружности. Поскольку набег фаз при прохождении одной зоны в точности равен π , то вклад каждой целой зоны будет изображаться половиной дуги окружности. Таким образом, вклад первой зоны изображает вектор \vec{OM}_1 .

Аналогично, разбиение второй зоны на неограниченное число частей на рассматриваемой диаграмме описывается второй полуокружностью, начинающейся в M_1 и заканчивающейся в O . Поэтому вектор, описывающий действие второй зоны, также

будет чисто мнимым, но направленным в противоположную сторону по отношению к $\overrightarrow{OM_1}$ так что суммарное действие двух первых зон будет равно нулю. Суммарное действие n зон (если пренебречь слабой зависимостью от номера n вклада от каждой зоны), в зависимости от четности или нечетности n , будет либо нулевым, либо совпадать с действием только первой зоны. Действие же необязательно целого числа зон будет описываться вектором \overrightarrow{OM} , оканчивающимся на уже образованной первыми двумя зонами окружности с центром, лежащим на мнимой оси (см. рисунок).

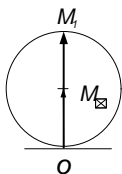
Учтем теперь медленное уменьшение вклада очередной зоны по мере роста ее номера (оно определяется как постепенным уменьшением площади зоны, так и сопровождающимся падением коэффициента наклона). На диаграмме этот процесс проявится, естественно, в постепенном уменьшении радиуса полуокружности, «отвечающей» за эту зону; так как каждая из них начинается в конце предшествующей, то конец вектора \overrightarrow{OM} будет описывать свертывающуюся спираль (см. рисунок)¹. Ясно, что центр спирали M_∞ будет совпадать с центром уже построенной окружности, определяющей действие первых двух зон. В соответствии со смыслом диаграммы вектор $\overrightarrow{OM}_\infty$ будет описывать действие полностью открытого волнового фронта.

Отсюда очевидный и уже известный со времен Френеля результат: действие небольшого нечетного числа открытых зон в 2 раза по амплитуде U и в 4 раза по интенсивности $I \propto U^2$ превышает действие открытого фронта. Рассмотрим теперь часто встречающуюся ситуацию с прохождением волнового фронта через прозрачную среду с показателем преломления $n \neq 1$. Понятно, что построение зон Френеля в этом случае будет таким же, но следует учесть дополнительный продольный набег фазы, равный $\Delta\varphi = knL$ и описываемый в выражении для волнового поля фазовым множителем $e^{i\Delta\varphi}$ (здесь L — путь, проходимый в среде; при введении графического представления зон этот множитель был несуществен и не принимался во внимание).

Геометрическое представление комплексных величин означает, что на диаграмме Френеля вектор \overrightarrow{OM} , описывающий действие какой-либо части фронта без учета продольного набега фазы, должен быть просто повернут на некоторый угол в направлении против часовой стрелки (соответствующем увеличению фазы). При равенстве набега фазы 2π вектор \overrightarrow{OM} должен остаться неизменным (т.к. $e^{2\pi} = 1$), т.е. угол его поворота также равен 2π . Следовательно, при произвольной величине продольного набега фазы соответствующий угол β поворота вектора \overrightarrow{OM} равен дробной (по модулю 2π) части этого набега фазы: $\beta = \Delta\varphi \pmod{2\pi}$.

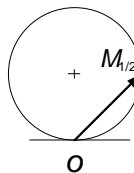
а) Решение задачи в этом случае приведено выше. Поскольку точка M_1 на

¹Далее в решениях многих задач будет использоваться это представление, не получившее, к сожалению, как, например, спираль Корню, собственного имени. Необходимость частых ссылок, требует его наличия, и нам представляется справедливым использовать в этих случаях имя диаграмма или спираль Френеля, а для охватывающей ее окружности - окружность Френеля.



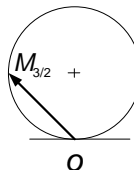
окружности Френеля, соответствующая первой зоне, лежит на верхнем конце ее вертикального диаметра (см. рисунок), так что действие отверстия, описываемое длиной вектора $\overrightarrow{OM_1}$, вдвое превышает действие полностью открытого фронта. Следовательно, $I = 4I_0$.

б) Точка $M_{1/2}$, описывающая действие половины 1-й зоны, находится, естественно, на окружности Френеля посередине между O и M_1 (см. рисунок), так что длина вектора $\overrightarrow{OM_{1/2}}$ в $\sqrt{2}$ превышает R_F , и поэтому $I = 2I_0$.

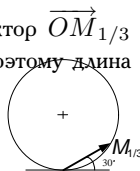


в) Из вычисления действия n -й зоны было видно, что в нем производится суммирование действия элементов зоны по азимутальному углу α (в пределах от 0 до 2π). Если же часть зоны по углу α перекрыта, то действие зоны уменьшается пропорционально. Таким образом, если первая зона перекрыта наполовину по диаметру, то ее действие уменьшится вдвое и будет описываться вектором $\frac{1}{2}\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_\infty M_1}$ т.е. станет равным действию полностью открытого фронта. Следовательно, $I = I_0$.

г) Ясно, что точка $M_{3/2}$ будучи на окружности Френеля, должна лежать посередине между точками M_1 и M_2 , описывающих действие первой и второй зон, т. е. находится на левом конце горизонтального диаметра (см. рисунок). Следовательно длина вектора $\overrightarrow{OM_{3/2}}$ в $\sqrt{2}$ превышает R_F и поэтому $I = 2I_0$.



д) Точка $M_{1/3}$ находится на окружности Френеля и вектор $\overrightarrow{OM_{1/3}}$ должен составлять с горизонтальной осью угол 30° (см. рисунок). Поэтому длина вектора $\overrightarrow{OM_{1/3}}$ будет совпадать с R_F , так что $I = I_0$.

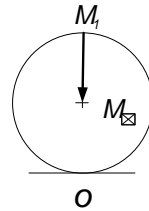


2. (Задача 3.135.) Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения 1-ю зону Френеля. а) Какова интенсивность I в точке наблюдения? Какой она стала после того как у диска удалили б) половину (по диаметру); в) половину (по диаметру) внешней половины 1-й зоны?

Решение В силу принципа Бабинне действие волнового поля в случае, когда его часть перекрыта экраном, описывается вектором, равным разности векторов $\overrightarrow{OM_\infty}$ (действие полностью открытого фронта) и \overrightarrow{OM} (действие перекрывающего экрана). Применим этот принцип.

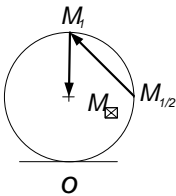
а) Ясно, что длина вектора $\overrightarrow{M_1 M_\infty}$ (см. рисунок) равна R_F , и поэтому $I = I_0$.

б) Удаление половины (по диаметру) перекрывающего диска означает открытие соответствующей части фронта (в рассматриваемом случае — половины 1-й зоны). По принципу Бабиня к вектору $\overrightarrow{M_1 M_\infty}$ из предыдущего случая следует добавить вектор, описывающий действие вновь открытой части фронта. Таковым является, как показано в решении задачи 1., вектор $\overrightarrow{M_\infty M_1}$. Следовательно, $I = 0$.



в) Как ясно из рассмотрения предыдущего случая, необходимо найти сначала действие половины (по диаметру) внешней половины 1-й зоны. На диаграмме Френеля действие половины 1-й зоны описывается вектором $\overrightarrow{OM_{1/2}}$ (см. рисунок); следовательно, вектор $\overrightarrow{M_{1/2} M_1}$ описывает действие внешней половины 1-й зоны.

Таким образом, искомому действию соответствует сумма векторов $\overrightarrow{M_1 M_\infty}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{M_{1/2} M_1}$ (множитель $1/2$ появляется потому, что внешняя половина 1-й зоны открыта наполовину). Таким образом, $I \propto \left| \overrightarrow{M_1 M_\infty} + \frac{1}{2}\overrightarrow{M_{1/2} M_1} \right|^2$. Тривиальные вычисления (конечно, с учетом угла между складываемыми векторами) дают искомый результат: $I = I_0/2$.

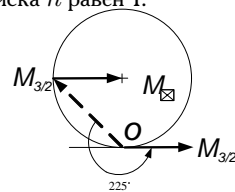


3. (Задача 3.136.) Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на прозрачный, стеклянный диск толщины h с показателем преломления n , размер которого соответствует полутора зонам Френеля для некоторой точки наблюдения. При какой минимальной толщине диска интенсивность в этой точке будет максимальной? Какова эта интенсивность?

Решение Ясно, что части волнового фронта, не занятой диском, на диаграмме Френеля соответствует вектор $\overrightarrow{M_{3/2} M_\infty}$, направленный вдоль горизонтальной оси от начальной точки $M_{3/2}$, лежащей на левом конце горизонтального диаметра окружности Френеля. В эту же точку $M_{3/2}$ «смотрит» вектор $\overrightarrow{OM_{3/2}}$, описывающий действие полутора зон в случае, если показатель преломления диска n равен 1.

Для $n > 1$ при прохождении через диск волнового фронта его фаза дополнительно возрастает на величину $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$, что означает доворот вектора $\overrightarrow{OM_{3/2}}$ на угол $\beta = \Delta\varphi \bmod 2\pi$ в направлении против часовой стрелки. Поскольку полная амплитуда в точке наблюдения определяется суммой волнового поля,

прошедшего вне и через собственно диск, то максимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор $\overrightarrow{OM_{3/2}}$ станет сонаправленным вектору $\overrightarrow{M_{3/2} M_\infty}$.

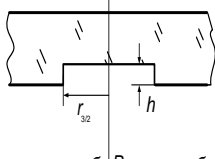


Таким образом, вектор $\vec{OM}_{3/2}$ должен быть повернут на угол $\beta = 225^\circ = 5\pi/4$ (см. рисунок). Следовательно, $h_{min} = \frac{5}{8} \frac{\lambda}{n-1}$. Легко также найти и значение максимума, т. к. длины векторов $\vec{M}_{3/2}\vec{M}_\infty$ и $\vec{OM}_{3/2}$ равны соответственно R_F и $\sqrt{2}R_F$, то $I_{max} = (1 + \sqrt{2})^2 I_0 = (3 + 2\sqrt{2})I_0$.

4. (Задача 3.137.) Как изменится интенсивность в точке экрана, на который падает монохроматическая плоско поляризованная волна интенсивности I_0 , если на пути света поставить прозрачный диск, перекрывающий полторы зоны Френеля и поворачивающий плоскость поляризации света на 90° ?

Решение Поскольку свет, прошедший мимо диска (1-я «компонента»), не изменит направления своей поляризации, а свет, прошедший через него (2-я «компонента»), приобретет поперечное направление поляризации, то в точке наблюдения нужно складывать интенсивности этих компонент. Для первой из них имеем, как всегда, значение I_0 , т.к. ей на диаграмме Френеля соответствует вектор длины R_F . Поскольку для 2-й компоненты открыто полторы зоны, то ей на диаграмме соответствует вектор длины $\sqrt{2}R_F$. Поэтому ее интенсивность будет составлять $2I_0$, следовательно, полная интенсивность равна $3I_0$.

5. (Задача 3.138.) Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ и интенсивностью

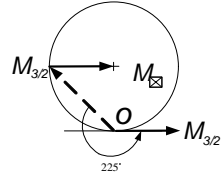


I_0 падает нормально на стеклянную пластинку с показателем преломления n . На противоположной стороне пластинки сделана выемка, соответствующая по размеру полутора зонам Френеля для некоторой точки наблюдения P (см. рисунок). При какой глубине h выемки интенсивность света в точке наблюдения будет а) максимальной; б) минимальной; в) равной интенсивности падающего света? Каковы будут интенсивности в точке наблюдения в этих случаях?

Решение Волновому фронту, проходящему через не занятую выемкой часть пластинки, на диаграмме Френеля соответствует вектор $\vec{M}_{3/2}\vec{M}_\infty$, направленный вниз под углом 45° от начальной точки $M_{3/2}$, лежащей на левом конце горизонтального диаметра окружности Френеля. В эту же точку $M_{3/2}$ «смотрел» бы вектор $\vec{OM}_{3/2}$, описывающий действие полутора зон, если бы выемка в пластинке отсутствовала. Ее наличие означает для проходящего через нее света отставание по фазе по сравнению со светом, идущим через пластинку с показателем преломления $n > 1$. Величина возникшей разности фаз равна $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$, и ей соответствует поворот на диаграмме Френеля вектора $\vec{OM}_{3/2}$ на угол $\beta = \Delta\varphi \bmod 2\pi$ в направлении, соответствующем уменьшению фазы волны, т. е. по часовой стрелке. Полная амплитуда в точке наблюдения определяется, естественно, суммой волнового

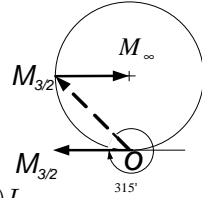
поля, прошедшего вне и через выемку. Теперь нетрудно рассмотреть интересные нас случаи.

а) Максимум интенсивности будет иметь место тогда, когда вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ станет сонаправленным вектору $\overrightarrow{M}_{3/2}M_\infty$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ должен быть повернут на угол $\beta = 135^\circ + 360^\circ m = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$ (см. рисунок). Следовательно, $h = \left(\frac{3}{8} + m\right) \frac{\lambda}{n-1}$.



Легко также найти и значение максимума, т. к. длины векторов $\overrightarrow{M}_{3/2}M_\infty$ и $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ равны соответственно R_F и $\sqrt{2}R_F$, то $I_{max} = (1 + \sqrt{2})^2 I_0 = (3 + 2\sqrt{2})I_0$.

б) Минимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ станет противоположно направленным вектору $\overrightarrow{M}_{3/2}M_\infty$, т.е. вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ должен быть повернут на угол $\beta = 315^\circ + 360^\circ m = \frac{7\pi}{4} + 2\pi m$ (см. рисунок). Следовательно, аналогично предыдущему случаю получаем, что $h = \left(\frac{7}{8} + m\right) \frac{\lambda}{n-1}$ и $I_{min} = (1 - \sqrt{2})^2 I_0 = (3 - 2\sqrt{2})I_0$.



в) Наконец интенсивность в точке наблюдения останется равной I_0 , если вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ будет повернут на угол $\beta = 270^\circ + 360^\circ m = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$. Следовательно, $h = \left(\frac{3}{8} + m\right) \frac{\lambda}{n-1}$.

Урок 15

Дифракция Фраунгофера. Дифракционные решетки

1. (Задача 3.72.) Найти угловое распределение интенсивности света при дифракции Фраунгофера на экране: а) с одной щелью шириной b ; б) с двумя щелями ширины b и расстоянием a между ними. В случае «а» оценить относительные интенсивности максимумов, ближайших к главному.

Решение а) Если на плоскость падает нормально плоская волна, то все точки в отверстии (щели) являются синфазными источниками плоских волн во все стороны. Рассмотрим сумму всех плоских волн, которые излучаются с линии отверстия (щели) под углом φ . Разность хода между точкой с координатами x_1 и точкой x_2 будет $\Delta = k(x_2 - x_1) \sin \varphi$. Тогда очевидно, что следующий после нулевого максимума (который расположен при $\varphi = 0$, определяется условием

$$\frac{b}{2} \sin \varphi_1 = \lambda,$$

поскольку каждой точке в левой половине щели будет соответствующая ей точка в правой половине с такой разностью фаз, а, значит, амплитуды всех волн сложатся. Между $\varphi = 0$ — главным максимумом и $\varphi = \varphi_1$ — первым максимумом будет минимум, который определяется условием

$$\frac{b}{2} \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}.$$

Таким образом можно получить выражения для всех углов минимумов и максимумов, но наша задача — найти распределение интенсивности для всех углов. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля (в приближении Фраунгофера) каждый участок щели является источником плоских волн вида

$$dE = \frac{E_0}{b} dx e^{i(\omega t - k\Delta)}, \quad \text{где } \Delta = x \sin \varphi.$$

Амплитуда суммарного поля от щели под углом φ , которое для наблюдения на экране собирается линзой в плоскости изображения, равна

$$E_{\Sigma} = \frac{E_0}{b} \int_0^b e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx = \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \left. \frac{e^{-ikx \sin \varphi}}{-ik \sin \varphi} \right|_0^b = \frac{E_0}{b} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ik \sin \varphi}.$$

Интенсивность

$$I \sim |E|^2 \sim \left| \frac{e^{-\frac{ikb \sin \varphi}{2}} \left(e^{\frac{-ikb \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{ikb \sin \varphi}{2}} \right)}{\frac{2ik \sin \varphi}{2}} \right|^2 = \frac{\sin^2 \left(\frac{bk \sin \varphi}{2} \right)}{\left(\frac{bk \sin \varphi}{2} \right)^2},$$

или

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{b\pi \sin \varphi}{\lambda} \right)}{\left(\frac{b\pi \sin \varphi}{\lambda} \right)^2} = \text{sinc}^2 \left(\frac{b\pi \sin \varphi}{\lambda} \right).$$

Для малых углов φ

$$I \approx I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{b\pi\varphi}{\lambda} \right)}{\left(\frac{b\pi\varphi}{\lambda} \right)^2} = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{b\pi\varphi}{\lambda} \right).$$

Если условие минимумов интенсивности можно записать точно (это условие равенству нуля синусов в числителе, т.е. $b \sin \varphi = m\lambda$, $m = 1, 2, \dots$), то для максимумов требуется более аккуратный анализ. Первый максимум функции $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ соответствует $x = 0$. Приближенно можно считать, что максимум этой функции соответствует максимуму синуса в числителе и тогда получается $x_{max} = m\pi + \frac{\pi}{2}$. Так, для первого максимума

$$\frac{b\pi \sin \varphi}{\lambda} = \pi + \frac{\pi}{2} = 1.5\pi,$$

но это приближенное значение. Точное же решение 1.43. Попробуем получить уравнение для точного условия максимума. Беря производную от функции и приравнявая ее нулю, получим

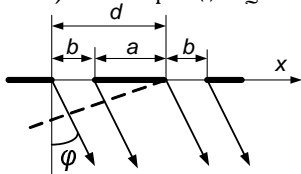
$$\frac{d}{dx} I(x) = \frac{2 \sin x \cos x \cdot x^2 - 2x \sin^2 x}{x^4} = 0$$

$$x \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = 0, \text{ откуда } \text{tg } x = x.$$

Это точное уравнение для нахождения максимума! Как было указано выше, первый максимум достигается при значении $\frac{b\pi}{\lambda} \sin \varphi = 1.43\pi$. Возникает вопрос — каково отношение интенсивностей в главном (нулевом) и первом максимуме. Очевидно, что

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{1}{\frac{1}{(1.43\pi)^2}} \approx 1 : \frac{1}{20} = 1 : 0.05.$$

б) Рассмотрим две щели шириной b каждая и расстоянием a между краями щели,



как это показано на рисунке. Попробуем качественно определить положение минимумов и максимумов. Старые минимумы (минимумы от каждой из щелей), определяемые условиями

$$\frac{b}{2} \sin \varphi = \frac{\lambda}{2} + m\lambda, \quad b \sin \varphi = (2m + 1)\lambda,$$

Новые минимумы, определяемые расстоянием $d = a + b$, т.е. условием

$$d \sin \varphi = \frac{\lambda}{2} + m\lambda.$$

Главные максимумы будут удовлетворять условию

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим теперь как выглядит зависимость интенсивности от параметров задачи. Суммарная амплитуда определяется теперь интегралом не по одной, а по 2 щелям, т.е.

$$E(\varphi) \sim \int_0^b e^{-ikx \sin \varphi} dx + \int_d^{d+b} e^{-ikx \sin \varphi} dx.$$

Делая во втором интеграле очевидную замену переменных $x' = x - d$ и вынося общий множитель за скобку выражение для поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} E(\varphi) &\sim (1 + e^{-ikd \sin \varphi}) \int_0^b e^{-ikx \sin \varphi} dx = \\ &= 2e^{-ikd \sin \varphi / 2} \cos\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right) e^{-ikb \sin \varphi / 2} b \frac{\sin(kb \sin \varphi / 2)}{kb \sin \varphi / 2}. \end{aligned}$$

Вычисляя квадрат модуля амплитуды и вспоминая выражение для I_0 из предыдущего пункта получим окончательное выражение

$$I(\varphi) = 4I_0 \sin^2\left(\frac{bk \sin \varphi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right).$$

2. (Задача 3.73.) Найти угловое распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера в случае нормального падения света на решетку из N щелей с периодом d . Ширина щели b ($d = a + b$).

Решение Решение этой задачи отличается от решения пункта б) предыдущей задачи только тем, что здесь необходимо вычислить сумму по N щелям. Запишем суммарную амплитуду с помощью интеграла Кирхгофа, учитывая, что при расчетах цилиндрических волн (т.е. когда отверстие, на котором происходит дифракция, бес-

конечная щель и множитель перед интегралом Кирхгофа

$$\begin{aligned}
 E(x_p) &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} e^{i(kz - \omega t)} \sum_{n=0}^N \int_{nd}^{nd+b} E_0 e^{-ik_x x} dx = \\
 &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} e^{i(kz - \omega t)} E_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i}{k_x} e^{-ik_x (nd+b)} - e^{ik_x nd} = \\
 &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} e^{i(kz - \omega t)} \frac{E_0 i}{k \sin \theta} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-iknd \sin \theta} (e^{-ikb \sin \theta} - 1) = \\
 &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} \frac{E_0}{(-ik \sin \theta)} \left[e^{i(kz - \omega t)} \right] (e^{-ikb \sin \theta} - 1) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-iknd \sin \theta}.
 \end{aligned}$$

Тогда интенсивность, которая равна вектору Пойнтинга, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 I(X_p) &= \frac{c}{4\pi} \frac{k E_0^2 b^2}{2\pi F} \left| \frac{e^{-ikb \sin \theta} - 1}{2 \frac{ikb \sin(\theta)}{2}} \right|^2 \left| \frac{e^{-ikNd \sin(\theta)} - 1}{e^{-ikd \sin \theta} - 1} \right|^2 = \\
 &= \frac{c}{8\pi^2} \frac{kb^2 E_0^2 N^2}{F} \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2,
 \end{aligned}$$

где $U = \frac{kb \sin \theta}{2}$, $\alpha = \frac{kd \sin \theta}{2}$. Для малых θ $U = \frac{kb\theta}{2}$, $\alpha = \frac{kd\theta}{2}$.

В точках, где $\alpha_m = m\pi$, $\theta_m = \frac{2m\pi}{ka} = m \frac{\lambda}{a}$ расположены главные максимумы. Их величина зависит от m следующим образом

$$I_m = I_0 \left(\frac{\sin U_m}{U_m} \right) \sim \frac{I_0}{m^2}.$$

Между этими главными максимумами имеются вторичные максимумы, которые определяются условиями

$$N\alpha_n = (2n+1) \frac{\pi}{2}.$$

Интенсивность в этих вторичных максимумах $I_n \sim I_0 N^2 U_n^2$, где $U_n = \frac{b\alpha_n}{d}$, $\alpha_n \sim n\pi$.

Ширина главного максимума у основания (расстояние между минимумами, соседними с главным максимумом) определяется условием

$$N(\alpha_m + \Delta\alpha) = Nm\pi + \pi,$$

$$\Delta\alpha = \pm\pi/N.$$

Поскольку обычно $N \gg 1$, эта величина очень мала и, следовательно, и мала величина углового размера максимума $\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd}$.

Величина Nd - апертура решетки (поперечный размер решетки). Относительная угловая ширина главного максимума

$$\frac{\Delta\theta_m}{\theta_m} = \frac{1}{mN}.$$

3. (Задача 3.75.) Как изменится угловое распределение интенсивности, если на решетку из задачи 3.73 свет падает под углом α ? Под каким углом проходит максимальное излучение?

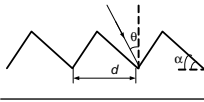
Решение

$$E(x, y, z = 0) = E_0 e^{ik_x^0 x} = E_0 e^{ikx\theta_0}$$

$$I(x_p) \sim \left| \sum \int e^{i(k_x^0 - k_x)x} dx \right|^2 = \left| \sum \int e^{ikx(\sin \alpha - \sin \theta)} dx \right|^2.$$

Интенсивность в этом случае $I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{b p p}{2}\right) \cdot \left(\sin \frac{N k p d}{2} / \sin \frac{k p d}{2}\right)^2$, где $p = \sin \theta - \sin \alpha$. Максимальное излучение проходит под углом $\varphi = \alpha$.

4. (Задача 3.76.) На дифракционную отражающую решетку, параметры которой даны на рисунке, свет падает под углом θ . Каков порядок спектра, имеющего максимальную интенсивность? Какая ширина $\Delta\lambda$ спектра (при длине волны λ) может быть получена при этом без перекрытия спектров соседних



порядков?

Решение

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi i F}} \sum_{n=0}^N \int_{nd}^{(n+1)d} e^{-ik\theta x} e^{ik2\alpha(x-nd)} dx = \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi i F}} \sum_{n=0}^N e^{ik2\alpha nd} \int_{nd}^{(n+1)d} e^{-ikx(\theta-2\alpha)} dx = \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi i F}} \sum_{n=0}^N e^{-ik2\alpha nd} \int_0^d e^{-ikt(\theta-2\alpha)} dt \cdot e^{-ik(\theta-2\alpha)nd} = \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi i F}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iknd\theta} \int_0^d e^{-ikt(\theta-2\alpha)} dt = \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi i F}} \left[\frac{e^{-ikd(\theta-2\alpha)} - 1}{-ik(\theta-2\alpha)} \right] \cdot \frac{1 - e^{-ikNd\theta}}{1 - e^{-ikd\theta}}. \end{aligned}$$

Тогда интенсивность

$$I_p \sim |E_p|^2 = I_0 \left| \frac{\sin^2 \frac{kd(\theta-2\alpha)}{2}}{\left[\frac{kd(\theta-2\alpha)}{2} \right]^2} \right| \left(\frac{\sin N \frac{kd\theta}{2}}{N \sin \frac{kd\theta}{2}} \right)^2.$$

Если углы не малы, то (ЭТО ВСЕ НАДО ПРОВЕРИТЬ)

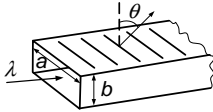
$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{kpd}{2} \right) \cdot \left(\sin \frac{Nkp_1d}{2} \middle/ \sin \frac{kp_1d}{2} \right)^2,$$

где $p_1 = \sin(\varphi - \alpha) - \sin(\alpha + \theta)$, $p = \sin \varphi - \sin \alpha$.

$$\Delta\lambda \simeq \lambda^2 / [2d \cdot \sin(\theta + 2\alpha)].$$

Главный максимум интенсивности наблюдается в порядке $m = 2\alpha d/\lambda$ под углом дифракции $\varphi \simeq \theta + 2\alpha$.

5. (Задача 3.78.) В длинном с прямоугольным сечением $a \times b$ волноводе возбуждается волна типа H_{10} с длиной λ . В узкой стенке (a) волновода прорезаны N поперечных узких щелей $N \gg 1$ с периодом d . Найти направление максимального излучения получившейся антенны.



Решение Предположив, что зависимость \mathbf{E} и \mathbf{H} от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$, получим уравнения Максвелла в волноводе (в пустоте) в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}.$$

Граничные условия на поверхности идеального проводника

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad H_n = 0.$$

Используя известное выражение для $\text{rot } \mathbf{a}$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_i = e_{ikl} \frac{\partial a_l}{\partial x_k},$$

где e_{ikl} — символ Леви-Чивита, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, вычислим выражение

$$\begin{aligned} \text{rot}[(\text{rot } \mathbf{a})]_j &= e_{jpr} \frac{\partial}{\partial x_p} \left[e_{rkl} \frac{\partial a_l}{\partial x_k} \right] = e_{jpr} e_{rkl} \frac{\partial^2 a_l}{\partial x_p \partial x_k} = \\ &= (\delta_{jk} \delta_{pl} - \delta_{jl} \delta_{pk}) \frac{\partial^2 a_l}{\partial x_p \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial a_p}{\partial x_p} - \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_p \partial x_p}. \end{aligned}$$

Или, в обычных векторных выражениях

$$\text{rot}[(\text{rot } \mathbf{a})] = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}.$$

Тогда для каждого из векторов поля (\mathbf{E} или \mathbf{H}) получаем систему уравнений

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0.$$

Рассматривая волны, бегущие вдоль волновода (вдоль оси z в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y) e^{-i\omega t + ik_z z}$$

можно показать, что в односвязных волноводах могут быть волны двух типов: либо волны, у которых $H_z = 0$, — волны электрического типа, или E -волны, либо волны, у которых $E_z = 0$, волны магнитного типа, или H -волны

В данной задаче нас интересует H -волна, у которой все компоненты магнитного и электрического полей выражаются через компоненту H_z .

$$E_x = \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$E_y = -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

а для H_z необходимо решить уравнение

$$\Delta H_z + \kappa^2 H_z = 0$$

с граничным условием

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$$

на границе контура сечения волновода.

Запишем решение, удовлетворяющее всем условиям

$$H_z = C \cdot \cos k_x \cdot x \cdot \cos k_y \cdot y,$$

где

$$\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right),$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + \varkappa^2 = k^2.$$

Заданная в условии задача H_{10} волна ($n_x = 1$, $n_y = 0$) имеет компоненты

$$H_z = C \cdot \cos \frac{\pi}{a} x, \quad E_z = 0, \quad E_x = 0, \quad E_y = A \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$$

Таким образом, единственная компонента электрического поля внутри волновода

$$E_y = A \cdot \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\omega t + i k_z z}.$$

Рассматривая каждую из щелей как точечный источник в плоскости $Z - Y$ получаем задачу, аналогичную дифракционной решетке, только с очень узкими (точечными) щелями и не с постоянным вдоль Z значением электрического поля, а с распределением вдоль волновода в соответствии с полученным решением. Тогда под углом θ к нормали (т.е. к оси Y) можно записать сумму полей от каждой из щелей в виде

$$E_y = \sum_{j=1}^N e^{i(k_z d - k d \sin \theta) \cdot j} \approx \frac{1}{1 - e^{-i\Delta}}.$$

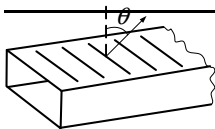
При выводе этой формулы использовалось, что координата j -го источника $z_j = j d$, величина в показателе степени экспоненты $\Delta = k_z d - k d \sin \theta$. Модуль волнового вектора $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, а интенсивность вдоль направления θ , пропорциональная квадрату модуля электрического поля

$$|E_y|^2 \sim \frac{1}{\sin^2 \frac{\Delta}{2}} \rightarrow \max \quad \text{при} \quad \Delta = 0$$

Из этого условия получаем

$$\sin \theta_{\max} = \frac{k_z}{k} = \frac{\sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}$$

6. (Задача 3.79.) В прямоугольном волноводе с размерами $a \times b$ ($a > b$) распро-



страняется слабо затухающая волна H_{10} с частотой ω и длиной затухания δ . В боковой узкой стенке прорезаны узкие параллельные щели с периодом d . Найти угловое распределение $I(\theta)$ излучения из щелей. Какое количество щелей эффективно участвует в излучении?

Решение Скорость затухания амплитуды волны выражается множителем e^{-z}/δ . Тогда дифракционная сумма, аналогичная предыдущей задаче, запишется в виде

$$E_y \sim \sum_{j=1}^{\infty} e^{i(k_z d - kd \sin \theta + id/\delta)} = \frac{1}{1 - e^{i\Delta - d/\delta}}.$$

Интенсивность излучения вдоль направления θ пропорциональна

$$\begin{aligned} I \sim |E_y|^2 &= \frac{1}{(1 - e^{i\Delta - d/\delta})(1 - e^{-i\Delta - d/\delta})} = \\ &= \frac{1}{1 + e^{-2d/\delta} - e^{-d/\delta}(e^{i\Delta} + e^{-i\Delta})} = \\ &= \frac{1}{1 + e^{-2d/\delta} - 2e^{-d/\delta} \cos \Delta} = \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-d/\delta})^2 - 2e^{-d/\delta}(1 + \cos \Delta)} \end{aligned}$$

Таким образом

$$I = \frac{I_0}{(1 - e^{-\alpha})^2 + 4e^{-\alpha} \sin^2 \frac{\Delta}{2}},$$

где $\alpha = \delta/d$ — затухание волны на периоде решетки, $\Delta = k_z d - kd \sin \theta$. Здесь для H_{10} -волны $k_z = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$; $k = \omega/c$. В излучении эффективно участвует $N \simeq d/\delta$ щелей.

7. (Задача 3.88.) В дифракционной решетке $N \gg 1$ щелей. Пропускная способность каждой последующей щели по амплитуде в $k = 2$ раз меньше, чем у предыдущей, а фазы при прохождении соседних щелей различаются на $\alpha = \pi$. Размер щели мал. Расстояние между щелями — d . Найти интенсивность света в зависимости от угла дифракции θ . Свет с длиной волны λ падает на решетку по нормали. Интенсивность света, прошедшего через первую щель, равна I_0 .

Решение Для обычной дифракционной решетки имеем

$$E_\theta = \frac{E_0}{a} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nd}^{nd+a} e^{ik_x x} dx = \frac{E_0}{a} \int_0^a e^{ik_x x} dx \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{ik_x nd} =$$

$$= E_0 e^{ik_x a/2} \cdot \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1 - e^{ik_x N d}}{1 - e^{ik_x d}},$$

где

$$u = \frac{k_x a}{2} = \frac{\pi \sin \theta}{\lambda}.$$

Напомним, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

Тогда

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N v}{\sin v} \right)^2,$$

$$v = \frac{k_x d}{2} = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

В нашем случае из-за узости щели $u \approx 0$ можно положить $\frac{\sin u}{u} \approx 1$, а знаменатель прогрессии

$$q = \frac{e^{i\pi}}{2} \cdot e^{ik_x d} = -\frac{1}{2} e^{ik_x d}.$$

Поскольку $N \gg 1$, то

$$\frac{1 - q^N}{1 - q} \approx \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 + e^{ik_x d}/2}.$$

Отсюда

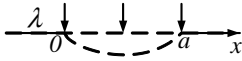
$$I(\theta) = I_0 / \left(1 + \frac{1}{2} e^{ik_x d} \right) \left(1 + \frac{1}{2} e^{-ik_x d} \right),$$

$$I(\theta) = \frac{I_0}{\frac{5}{4} + \cos \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}}.$$

Урок 16

Фазовые решетки и другие задачи

1. (Задача 3.99.) На щель шириной a перпендикулярно плоскости экрана падает плоская



волна. Длина волны — λ . На щель нанесли прозрачное покрытие, которое изменяет амплитуду проходящей волны по закону $E = E_0 \sin(\frac{\pi x}{a})$, где x отсчитывается от края щели. Найти интенсивность $I(\theta)$ волны, прошедшей через щель под углом θ к первоначальному направлению.

Решение

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^a E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{ikx \sin \theta} dx = E_0 \int_0^a \frac{e^{\frac{i\pi x}{a}} - e^{\frac{-i\pi x}{a}}}{2i} \cdot e^{ikx \sin \theta} dx = \\ &= \frac{E_0}{2i} \left\{ \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\right)a} - 1}{i\left(\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\right)} - \frac{e^{-i\left(\frac{\pi}{a} - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\right)a} - 1}{i\left(\frac{\pi}{a} - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\right)} \right\} = \\ &= \frac{E_0}{2i} \left\{ -\frac{e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \sin \theta \cdot a} + 1}{i\left(\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\right)} + \frac{e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \sin \theta \cdot a} + 1}{i\left(\frac{\pi}{a} - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\right)} \right\} = \\ &= \frac{E_0}{2} e^{\frac{\pi i}{\lambda} a \sin \theta} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi i a}{\lambda} \sin \theta} + e^{\frac{-\pi i a}{\lambda} \sin \theta}}{i\left(\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\right)} + \frac{e^{\frac{\pi i a}{\lambda} \sin \theta} + e^{\frac{-\pi i a}{\lambda} \sin \theta}}{i\left(\frac{\pi}{a} - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\right)} \right\} = \\ &= E_0 e^{\frac{\pi i}{\lambda} a \sin \theta} \cos\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right) \left\{ -\frac{\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta}{\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta} \right\} \end{aligned}$$

$$I = |E|^2 = E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right) \frac{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta}{\left(\frac{\pi^2 \lambda^2}{a^2} - \frac{4\pi^2 \cdot a^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta\right)^2}$$

$$\begin{aligned} E_0 \int_0^a e^{ikx \sin \theta} \sin \frac{\pi x}{a} dx &= \frac{E_0}{2i} \int_0^a e^{ikx \sin \theta} \left\{ e^{\frac{i\pi x}{a}} - e^{-\frac{i\pi x}{a}} \right\} dx = \\ &= \frac{E_0}{2i} \int_0^a \left\{ \exp[ikx \sin \theta + i\frac{\pi x}{a}] - \exp[ikx \sin \theta - i\frac{\pi x}{a}] \right\} dx = \\ &= \frac{E_0}{2i} \left\{ \frac{e^{i\pi a \left(\frac{2 \sin \theta}{\lambda} + \frac{1}{a}\right)} - 1}{i\pi \left(\frac{2 \sin \theta}{\lambda} + \frac{1}{a}\right)} - \frac{e^{i\pi a \left(\frac{2 \sin \theta}{\lambda} - \frac{1}{a}\right)} - 1}{i\pi \left(\frac{2 \sin \theta}{\lambda} - \frac{1}{a}\right)} \right\} = \\ &= \frac{E_0}{2} \left\{ \frac{e^{\frac{i2\pi a}{\lambda} \sin \theta} + 1}{\pi \left(\frac{2 \sin \theta}{\lambda} + \frac{1}{a}\right)} - \frac{e^{\frac{i2\pi a}{\lambda} \sin \theta} + 1}{\pi \left(\frac{2 \sin \theta}{\lambda} - \frac{1}{a}\right)} \right\} = \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \left[\left(e^{\frac{i2\pi a}{\lambda} \sin \theta} + 1 \right) \cdot \left\{ \frac{1}{\left(\frac{2 \sin \theta}{\lambda} + \frac{1}{a}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{2 \sin \theta}{\lambda} - \frac{1}{a}\right)} \right\} \right] = \\ &= \frac{2E_0}{\pi a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2} - \frac{1}{a^2}\right)} \cdot e^{\frac{i\pi a}{\lambda} \sin \theta} \cdot \frac{e^{\frac{i\pi a}{\lambda} \sin \theta} + e^{\frac{-i\pi a}{\lambda} \sin \theta}}{2} = \\ &= \frac{2E_0}{\frac{4\pi a}{a^2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\lambda^2} - \frac{1}{4}\right)} \cdot e^{\frac{i\pi a}{\lambda} \sin \theta} \cos\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right) \end{aligned}$$

$$I = ||^2 = \frac{E_0^2 a^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi a}{\lambda} \theta}{\left(\frac{a^2 \theta^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4}\right)^2}$$

$$I(\theta) \simeq I_0 \frac{\cos^2(\pi a \theta / \lambda)}{(1/4 - a^2 \theta^2 / \lambda^2)^2}.$$

2. (Задача 3.100.) Определить дифракционную картину при нормальном падении света на фазовую синусоидальную решетку конечной апертуры.

Решение Распределение поля на экране определяется с помощью интеграла Кирхгофа в приближении Фраунгофера

$$E(\varphi) = \frac{E_0}{b} \int_0^b T(x) \cdot \exp[-ikx \sin(\varphi)] dx,$$

где $T(x) = \exp[im \sin(\omega_0 x)/2]$. Используя представление функции $T(x)$ в виде ряда из задачи 3.84, (это представление называется формулой Якоби-Ангера, см. Г.Бейтмен и А. Эрдей, Высшие трансцендентные функции, ч. II. М:Наука, 1974, стр.15) и имеет вид:

$$e^{ia \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) e^{in\varphi}$$

запишем интеграл в виде

$$E(\varphi) = \frac{E_0}{b} \int_0^b \exp[-ikx \sin(\varphi)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) \exp[in\omega_0 x] dx,$$

или преобразуя это выражение, получим

$$E(\varphi) = \frac{E_0}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^b \exp[-ix(k \sin(\varphi) - n\omega_0)] dx.$$

Вычисляя этот интеграл, получим

$$E(\varphi) = \frac{E_0}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) \frac{\exp[-ib(k \sin(\varphi) - n\omega_0)] - 1}{-i(k \sin \varphi - n\omega_0)}$$

Учитывая, что интенсивность пропорциональна квадрату модуля поля, получим

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= E(\varphi) E^*(\varphi) = \\ &= I_0 \sum_{n,p=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) J_p\left(\frac{m}{2}\right) e^{-i\psi_n} e^{i\psi_p} \frac{(e^{-i\psi_n} - e^{i\psi_n})(e^{i\psi_p} - e^{-i\psi_p})}{-4\psi_n \psi_p}, \end{aligned}$$

где $\psi_n = b(k \sin \varphi - n\omega_0)/2$. Следует отметить, что $bn\omega_0/2 = Nn\pi$, $bp\omega_0/2 = Np\pi$, N — целое число.

Подставив эти значения, приведем двойную сумму к виду

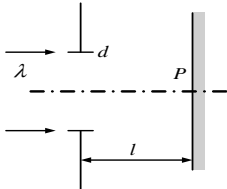
$$I(\varphi) = E(\varphi)E^*(\varphi) = \\ = -I_0 \sum_{n,p=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) J_p\left(\frac{m}{2}\right) e^{i\pi N(p-n)} \operatorname{sinc}(\psi_p) \operatorname{sinc}(\psi_n),$$

Поскольку разность аргументов у функций sinc , входящих в сумму при $n \neq p$ равна $N(n-p)\pi$, то даже при $n-p = \pm 1$ разность аргументов не меньше $N\pi$, а это значит, что максимум одной функции находится в области N -го максимума второй функции, величина которого порядка $1/(N\pi)$, а значит их произведением можно пренебречь. Таким образом сумма превращается в одинарную, поскольку значимо отличны от нуля только члены с равными аргументами. Тогда

$$I_\varphi = I_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2\left(\frac{m}{2}\right) \operatorname{sinc}^2 \frac{b(k \sin \varphi - n\omega_0)}{2},$$

где J_n — функция Бесселя. *Указание.* Функцию пропускания решетки $T(x)$ взять в виде $T(x) = \exp[im \sin(\omega_0 x)/2]$. Решетка помещена в щель шириной b ; воспользоваться также разложением для $\exp(ia \sin \omega_0 x)$, приведенном в указании к задаче 3.84.

3. (Задача 3.104.) На экран с отверстием диаметром d падает свет от Солнца, пропущенный через светофильтр (длина волны — λ). На втором экране точка P — центр

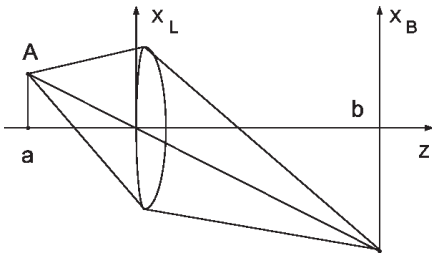


светлого кружка. Расстояние между экранами ℓ . С целью компенсировать разность фаз, создаваемую разностью хода от разных точек отверстия до точки P экрана, в отверстие поместили прозрачное покрытие с толщиной, плавно спадающей от оси к периферии. Пренебрегая возникшим при этом отражением от покрытия, оценить, во сколько раз увеличилась освещенность в точке P . Угловой размер Солнца α_\odot невелик.

Решение $I_2 \simeq I_1 \left(\frac{d}{\ell}\right)^2 \left(\frac{1+\ell\lambda/d^2}{d_\odot+\lambda/d}\right)^2 \simeq I_1 \left(\frac{d}{\alpha_\odot \ell}\right)^2$.

4. (Задача 3.105.) Во сколько раз возрастает освещенность, если свет от Солнца концентрируется линзой с относительным отверстием $d/f = 0,2$?

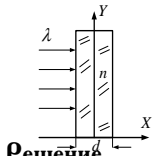
Решение $I_n \simeq I_0 \left(\frac{d}{\alpha_\odot f}\right)^2 \simeq 1600 I_0$.



Урок 17

Фурье оптика и голография

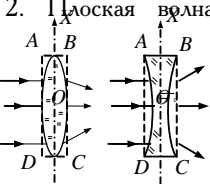
1. Плоская волна падает на прямоугольный плоский сосуд с газом, плотность которого с высотой y падает, так что показатель преломления меняется по закону: $n(y) = n_0(1 - \frac{y^2}{2L^2})$. Ширина сосуда — d . На каком расстоянии от сосуда произойдет фокусировка пучка?



Решение

$$f = L^2 / (n_0 d).$$

2. Плоская волна падает на тонкую собирающую или рассеивающую линзу с радиусами кривизны R_1 и R_2 и показателем преломления n . Длина волны — λ , угол между волновым вектором и оптической осью линзы мал. Найти зависимость от X фазового сдвига, приобретаемого волной в плоском слое $ABCD$, часть которого занята линзой.



Решение $\Delta\varphi \approx \pm \frac{\pi x^2}{\lambda f} = \pm kx^2 / (2f)$, где f — фокусное расстояние линзы: $f^{-1} = (n - 1) (1/R_1 + 1/R_2)$; знак «+» («-») для рассеивающей (фокусирующей) линзы.

3. Найти, используя интеграл Кирхгофа (обобщенный принцип Гюйгенса), изображение предмета, расположенного на расстоянии a от тонкой линзы (фокусное расстояние f ; изображение получается с помощью параксиального пучка света на расстоянии b , удовлетворяющем формуле линзы $1/a + 1/b = 1/f$).

Решение

Рассмотрим задачу о получении изображения точки A , которая находится слева от плоскости линзы на расстоянии a . Найдем поле в плоскости линзы (перед линзой).

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{k}{2\pi iz} \iint_S E(S) \exp \left\{ i \left(kz - \omega t + k \frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{2z} \right) \right\} dx dy,$$

здесь z — расстояние от плоскости интегрирования (предмета) до линзы. В нашем случае $z = a$, а поле $E(S)$ в плоскости предмета $E(S) = E_0 S_0 \delta(x - x_A) \delta(y)$. Тогда после интегрирования по плоскости изображения получим

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{k S_0}{2\pi i a} E_0 \exp \left\{ i k \left(a + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} \right) \right\}.$$

Поле в плоскости $z = b$ определяется фазовым множителем линзы и интегралом Кирхгофа по апертуре линзы.

$$E_b = \frac{k}{2\pi i b} e^{ikb} \iint_D E(x_L, y_L, 0) \exp \left\{ i k \frac{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2}{2b} - i k \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F} dx_L dy_L \right\}$$

Подставив выражение для $E(x_L, y_L, 0)$, получим

$$E_b = -\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 a b} E_0 \iint_D e^{i\varphi(x_L, y_L)} dx_L dy_L,$$

где

$$\varphi(x_L, y_L) = k \left\{ (a + b) + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} + \frac{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2}{2b} - \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F} \right\}.$$

$$\varphi(x_L, y_L) = k(a + b) - k \cdot x_L \left\{ \frac{x_A}{a} + \frac{x_B}{b} \right\} - k \cdot y_L \frac{y_B}{b} + \frac{k}{2} \left\{ \frac{x_B^2 + y_B^2}{b} + \frac{x_A^2}{a} \right\}$$

Квадратичные по x_L и y_L члены выражения взаимно сократились в связи с тождеством $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$.

После вычисления интеграла по апертуре линзы (считая линзу квадратной, $\pm D/2$ по обеим координатам), и вычисления квадрата модуля амплитуды, получим для интенсивности в плоскости $z = b$

$$I_B = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 a b} D^2 E_0 \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_x}{U_x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_y}{U_y} \right)^2,$$

где

$$U_x = \frac{kD}{2} \left(\frac{x_A}{a} + \frac{x_B}{b} \right); \quad U_y = \frac{kD}{2} \cdot \frac{y_B}{b}.$$

Из приведенного результата видно, что максимум интенсивности изображения приходится на точку, в которой $U_x = U_y = 0$; $x_{B0} = -x_A/a * b$; $y_{B0} = y_A = 0$, что соответствует законам геометрической оптики. А «размытие» пятна точечного источника определяется соотношением $U_x \sim U_y \sim \pi$, что соответствует $\Delta x_B \sim \Delta y_B \sim \frac{\lambda}{D} b$.

4. Показать, что если предмет расположен в передней фокальной плоскости линзы, то распределение амплитуд поля в задней фокальной плоскости представляет собой фурье-образ функции пропускания предмета. Рассмотреть, что получится, если предмет расположен вплотную к линзе.

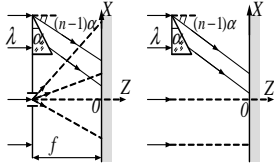
5. Найти создаваемое линзой конечной апертуры изображение точечного источника, находящегося на оси линзы (ограничиться приближением Фраунгофера).

Решение В плоскости изображения $I(\alpha) = I_0 \frac{J_1^2(\alpha D/\lambda)}{\alpha^2}$, где I_0 — интенсивность в апертуре линзы; D — ее диаметр; J_1 — функция Бесселя. *Указание.* Воспользоваться при вычислениях разложением из задачи 3.84.

6. На длиннофокусную собирающую линзу с ирисовой диафрагмой падает параллельный пучок монохроматического света. На расстоянии a от линзы помещен экран, на котором наблюдаются дифракционные кольца. При каких радиусах диафрагмы центр колец будет темным и при каких светлым, если фокусное расстояние линзы равно f ?

Решение $R = \sqrt{\frac{ma\lambda f}{|a-f|}}$: светлые при нечетном и темный при четном m .

7. Найти распределение интенсивности I по поверхности голограммы, полученной при перекрытии опорной плоской волны (попавшей на голограмму после прохождения тонкой призмы с углом преломления $\alpha \ll 1$ и показателем преломления n), и а) предметной сферической волны от точечного источника, расположенного на расстоянии f от голограммы; б) плоской предметной волны.



Решение а) $I(x) = A_0^2 + A^2(x) + 2A_0A(x) \cos\left(\beta x + \frac{kx^2}{2f}\right)$, где $A_0(A(x))$ — амплитуда опорной плоской (предметной сферической) волны, $\beta = k\alpha(n-1)$; б) $I(x) = A_0^2 + A^2 + 2A_0A \cos k\theta x$, где $A_0(A)$ — амплитуда опорной плоской (предметной плоской) волны, θ — угол между опорной и предметной волнами.

8. Найти пропускание T голограмм, полученных в предыдущей задаче (голограммы проявлены до коэффициента контрастности $\gamma = -2$, где $T \sim I^{-\gamma/2}$; считать, что при экспонировании голограмм интенсивность опорной волны была много больше интенсивности предметной волны). Найти волновое поле за голограммами в обоих случаях при освещении ее нормально падающей плоской волной (той же длины волны).

Решение а) Поле за голограммой:

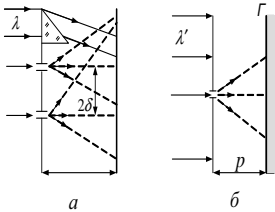
$$U(x) \simeq (A_0^2 + A^2) e^{ikz} + A_0 A e^{ikz} \cdot e^{i\left(\beta x + \frac{kx^2}{2f}\right)} + A_0 A e^{ikz} \cdot e^{-i\left(\beta x + \frac{kx^2}{2f}\right)};$$

первый член описывает плоский неотклоненный пучок, второй (третий) действует как комбинация призмы, отклоняющей вверх (вниз), и рассеивающей (собирающей) линзы с фокусным расстоянием f , т. е. описывает изображение предмета; б) Поле за голограммой

$$U(x) = A_0 a e^{ikz} + A_0 e^{i(kz + \theta x)} + A_0 b e^{i(kz - \theta x)},$$

где $a = A_0^2 + \frac{\gamma}{2} A^2$, $b = 2\gamma A_0 A$; первый член описывает неотклоненный центральный пучок, а второй (третий) — пучок первого порядка, отклоненный на θ ($-\theta$).

9. Найти распределение интенсивности по поверхности голограммы, полученной при перекрытии плоского опорного и двух сферических предметных пучков (отверстия находятся в плоскости призмы на расстоянии 2δ друг от друга). Голограмма проявлена до коэффициента контрастности $\gamma = -2$. Изображение восстанавливается с помощью точечного источника, размещенного на расстоянии p от голограммы и имеющего другую длину волны λ' . Найти волновое поле за голограммой и описать физический смысл получившихся выражений. Показать, что: а) действительное изображение находится на расстоянии q от голограммы, таком, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\lambda'}{\lambda f}$; б) линейное увеличение равно $M = \frac{2\Delta}{2\delta} = 1 + \frac{q}{p}$.

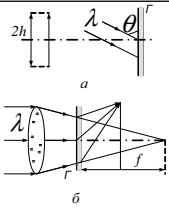


ной при перекрытии плоского опорного и двух сферических предметных пучков (отверстия находятся в плоскости призмы на расстоянии 2δ друг от друга). Голограмма проявлена до коэффициента контрастности $\gamma = -2$. Изображение восстанавливается с помощью точечного источника, размещенного на расстоянии p от голограммы и имеющего другую длину волны λ' . Найти волновое поле за голограммой и описать физический смысл получившихся выражений. Показать, что: а) действительное изображение находится на расстоянии q от голограммы, таком, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\lambda'}{\lambda f}$; б) линейное увеличение равно $M = \frac{2\Delta}{2\delta} = 1 + \frac{q}{p}$.

Решение $U(x) = A_0^2 + A^2 \left(1 + \cos \frac{2kx\delta}{f}\right) +$

$$+ A_0 A e^{i\beta x} \left[e^{\frac{ik(x-\delta)^2}{2f}} + e^{\frac{ik(x+\delta)^2}{2f}} \right] + A_0 A e^{-i\beta x} \left[e^{\frac{-ik(x-\delta)^2}{2f}} + e^{\frac{-ik(x+\delta)^2}{2f}} \right].$$

10. Голограмму экспонировали по схеме голографии Френеля.



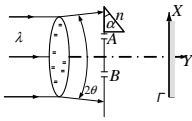
Опорный угол — θ , расстояние от предмета с поперечным размером $2h$ до фотопластинки — l (см. рисунок а). Голограмму восстанавливают в лазерном пучке света, сфокусированном на расстоянии f от нее (см. рисунок б). Найти расстояние от изображения до голограммы и его размер.

Решение $l' = lf / (l + f)$; увеличение равно l' / l .

11. Рассмотреть предыдущую задачу при восстановлении изображения с помощью расходящегося пучка света.

Решение В ответе предыдущей задачи нужно сменить знак f .

12. Голограмму экспонируют по схеме Френеля в пучке света длиной волны λ , расходящемся в конусе с углом θ . Найти расстояние между изображениями двух точечных источников A и B при восстановлении голограммы с помощью плоского пучка.



Решение См. ответ к задаче 3.117.

13. Голограмма точечного источника S экспонируется по схеме Френеля. Разрешение фотоматериала $\delta \gtrsim \lambda$ (длины волны излучения). Какой минимальный размер фотопластинки нужно выбрать, чтобы зря не расходовать фотоматериалы и записать (с учетом конечного разрешения δ) максимальную информацию об объекте? Где при этом должен быть центр пластинки? Найти распределение плотности почернения по поверхности голограммы $I(x, y)$.

Решение $R \leq \lambda l / \delta$. Координаты центра пластинки: $x = 0, y = l \sin \theta$.

$$I(x, y) = I_0 + \alpha \sqrt{I_0} \cos^2 \left(\frac{kR^2}{2l} + \varphi \right), \quad \varphi = kl - ky \sin \theta \quad \text{и} \\ R^2 = x^2 + (y - l \sin \theta)^2 - l^2 \sin^2 \theta.$$

14. Фурье-голограмму точечного предмета регистрируют на фотопластинке в пучке света длиной волны λ , а восстанавливают в пучке света длиной волны λ' . Найти изображение, если предмет и опорный пучок отстояли на расстоянии Δ . Рассмотреть безлинзовый и линзовый варианты.

Решение Указание. Опорное и «предметное» отверстия можно рассматривать как интерференционную схему Юнга.

15. Голограмма Фурье точечного предмета при проявлении получила переменную толщину чувствительного слоя $d(x) = d_0 - \kappa x^2$. Как изменится изображение предмета при восстановлении?

Решение Изображение будет сфокусировано на расстоянии $1/(2 \cdot \kappa)$ от голограммы.

16. Сравнить разрешающие способности голограммы Френеля и Фурье (рассмотреть схемы, использованные в задачах 3.112 и 3.118).

Решение Разрешающая способность голограммы Френеля ограничена зернистостью фотоэмульсии, а голограмма Фурье — полным размером голограммы.

17. Голограмма получена при экспонировании толстослойной эмульсии (голограмма Денисюка), на которую под углом α падает опорный плоский пучок (длина волны — λ), а под углами β_i ($i = 1, 2$) — две «предметных» плоских волны. а) Под каким углом следует освещать голограмму при восстановлении? б) Какова при этом разница между действительным и мнимым изображениями? в) Что будет, если при восстановлении голограмму освещать белым светом?

Решение а) Голограмму следует освещать пучком, падающим под углом α (угол падения опорного пучка); при этом восстанавливается полное мнимое изображение «предмета». б) При освещении голограммы пучком под углом β_i (один из «предметных» пучков) восстанавливается лишь часть действительного изображения предмета. *Указание.* Учесть, что голограмма Денисюка представляет собой систему зеркальных слоев серебра фотоэмульсии, расстояние между которыми равно $d_i = \lambda / \left[2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta_i}{2} \right) \right]$ для каждого из «предметных» пучков.

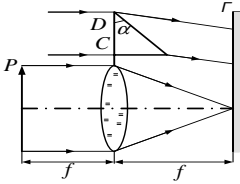
18. Голограмма Денисюка (см. предыдущую задачу) экспонирована последовательно в свете трех лазеров (с разными λ). Найти изображение, полученное при восстановлении в белом свете.

Решение Восстанавливается цветное изображение предмета.

19. Найти функцию пропускания голограммы при голографировании объекта, колеблющегося с амплитудой a и частотой ω , такой, что время экспозиции голограммы $T \gg 2\pi/\omega$. Колебания происходят вдоль оси, перпендикулярной плоскости голограммы.

Решение а) $T(x) \sim J_0^2(k\alpha a)$, где $\alpha = x/l \ll 1$, l — расстояние до голограммы, J_0 — функция Бесселя. *Указание.* Записать «предметную» плоскую волну, отражающуюся от объекта в момент времени t .

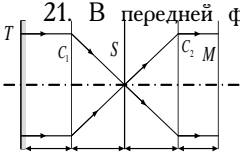
20. Предмет P (функция пропускания $G_0(x, y)$) находится в передней



фокальной плоскости линзы C , расположенной в одной плоскости с призмой D (преломляющий угол α). Предмет и призма освещены плоским когерентным пучком света. Найти функцию пропускания голограммы, расположенной в задней фокальной плоскости линзы (получение фильтра, согласованного с предметом). Указание:

использовать результаты задач 3.107 и 3.111.

Решение $T(x) \sim g^2 + a_0 g e^{ik\theta x} + a_0 g^* e^{-ik\theta x}$, где $g(x)$ — Фурье-образ функции пропускания предмета G_0 ; a_0 — амплитуда опорной волны; θ — угол преломления одного пучка призмой.



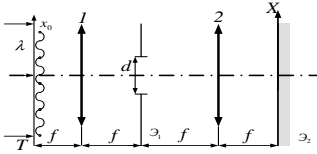
21. В передней фокальной плоскости линзы C_1 находится транспарант T с функцией пропускания $F_0(x_0, y_0)$; в задней фокальной плоскости этой линзы размещен фильтр S , согласованный с фрагментом $G_0(x_0, y_0)$ изображения на транспаранте (см. предыдущую задачу). Транспарант освещен плоским когерентным пучком. Найти изображение в задней фокальной плоскости объектива C_2 , расположенного так, что фильтр S находится в передней фокальной плоскости этого объектива.

Решение В плоскости M под соответствующим углом наблюдается изображение транспаранта T ; на месте фрагмента G наблюдается светящаяся «точка», размер которой близок к размеру фрагмента. *Указание.* Разделить функцию пропускания из предыдущей задачи на искомый фрагмент и остальную часть.

22. Найти спектр пространственных частот при прохождении плоской волны длиной λ через фильтр с функцией пропускания $T(x) = T_0 + \tau \cos(\kappa x)$, ($T_0 + \tau \lesssim 1$).

Решение $F(k) \sim T_0 \delta(k) + \frac{\tau}{2} [\delta(k + \kappa) + \delta(k - \kappa)]$, т. е. после фильтра имеется неотклоненный пучок и два пучка, идущих под углами $\pm \kappa \lambda / (2\pi)$ к оси системы.

23. Найти распределение интенсивности по экрану \mathcal{E}_2 , если пропускание транспаранта $T(x) = T_0 + \tau \cos(\kappa x)$, а размер щели в экране \mathcal{E}_1 $d < \kappa \lambda f / \pi$. Расстояния между экранами, одинаковыми линзами 1 и 2 и транспарантом равны фокусному расстоянию f линз.



Решение Экран равномерно освещен.

24. В установке, рассмотренной в предыдущей задаче, в качестве транспаранта использована полупрозрачная фотография, сделанная в снегопад. Каким должен быть

размер щели d , чтобы «убрать» изображение падающего снега в плоскости экрана \mathcal{E}_2 ? Чем определяется разрешение «исправленной» фотографии?

Решение $d < \lambda f / (\pi a)$, где a — характерный размер изображения снежинки на фотографии, $\Delta x_{\min} \gtrsim a$. *Указание.* Изображение снега на фотографии в плоскости экрана \mathcal{E}_1 описывается пространственной частотой $\varkappa \sim 1/a$.

25. Разрешение «исправленной» фотографии при «очистке от снега» (см. предыдущую задачу) можно улучшить, если в плоскости транспаранта T поместить еще один транспарант с функцией пропускания $T_1(x) = T'_0 + \tau' \cos(\varkappa_1 x_0)$, ($\tau' \ll T'_0$, $\tau_1 + T' \approx 1$). Как нужно выбрать \varkappa_1 , чтобы добиться этого улучшения? Чем теперь определяется разрешение?

Решение $\frac{1}{a} - \frac{\pi d}{\lambda f} < \varkappa_1 < \frac{1}{a} + \frac{\pi d}{\lambda f}$, $\Delta x_{\min} \approx \frac{1}{|\varkappa_1 - 1/a|} < a$. *Указание.* Фильтр T_1 в плоскости экрана \mathcal{E}_1 преобразует спектр пространственных частот: $\varkappa \rightarrow \pm(\varkappa \pm \varkappa_1)$, где \varkappa — пространственная частота снега.

26. В установке, рассмотренной в задаче 3.130, вместо транспаранта помещена решетка из взаимно перпендикулярных нитей толщиной d и расстоянием a между осями нитей. Щель в экране \mathcal{E}_1 параллельна одному из двух направлений нитей. Как будет меняться изображение на экране \mathcal{E}_2 по мере уменьшения размера щели? (Опыт Аббе—Портера.)

Решение Если $d \lesssim \lambda f / (\pi a)$, то изображение нитей, параллельных щели, исчезнет.

5. ИЗЛУЧЕНИЕ

Урок 18

Дипольное излучение При наличии токов и зарядов потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}, & \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -4\pi\mu \mathbf{j}/c, & \square \varphi(\mathbf{r}, t) &= -4\pi\rho(\mathbf{r}, t)/\varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

Калибровочное условие

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

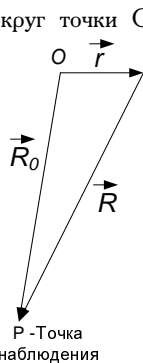
Решение приведенной выше системы неоднородных линейных уравнений есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Определим это частное решение

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y, z, t) &= \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t - \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} R)}{R} dx' dy' dz', \\ \varphi(x, y, z, t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} R)}{R} dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (2)$$

где $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$.

Пусть система зарядов находится в ограниченной области вокруг точки О (см. рис.) и \mathbf{r} вектор в какой-нибудь из зарядов. нас интересует поле в точке на расстоянии $R_0 \gg r$ много большем характерного размера этой области. Тогда можно записать $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \approx R_0 - \mathbf{n}\mathbf{r}$. Подставив это приближение в (2), можно записать приближенные выражения для скалярного и векторного потенциала

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{R_0} \int \rho_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{n}}{c}} dV, \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{n}}{c}} dV. \end{aligned}$$



Если поле можно рассматривать как плоскую волну (для этого необходимо не только $R_0 \gg r$, но и $R_0 \gg \lambda$), то это волновая зона и для нее справедливы соотношения плоской волны

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} [[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}] \mathbf{n}].$$

Временным запаздыванием $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$ можно пренебречь, если распределение зарядов за это время мало меняется. Пусть T — характерное время изменения распределения заряда. Излучение будет обладать этим же периодом ($\omega \sim 1/T$), a — характерный

размер системы, т.е. $\mathbf{r}\mathbf{n}/c \sim a/c$. Требуется чтобы система изменялась мало

$$\frac{a}{c} \ll T, \quad a \ll cT, \quad a \ll \lambda, \quad T \sim a/v, \quad \lambda \sim ca/v, \rightarrow v \ll c.$$

В волновой зоне

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} dV, \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \quad t' = t - R_0/c.$$

Для системы дискретных зарядов

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \sum e \mathbf{v}, \quad \sum e \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e \mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}}, \quad \text{все при } t'.$$

Окончательно получаем расчетные формулы для дипольного приближения

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} [[\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n}] \mathbf{n}].$$

5.1. (Задача 4.7.) Найти: а) угловое распределение интенсивности излучения $\frac{dI}{d\theta}$ от диполя; б) полное излучение $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ от дипольного излучателя.

Решение

Интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega$ определяется как количество энергии, протекающее в единицу времени через элемент площади $df = R_0^2 d\Omega$. Поток энергии определяется вектором Пойнтинга

$$S = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} [[\mathbf{H}\mathbf{n}]\mathbf{H}] = c \frac{H^2}{4\pi} \mathbf{n}.$$

Тогда интенсивность

$$dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n}]^2 d\Omega.$$

Выбирая ось z вдоль направления $\ddot{\mathbf{d}}$, можно записать

$$dI = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\Omega = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^3 \theta 2\pi d\theta.$$

Или другими словами

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{\sin^3 \theta}{2c^3} \left| \ddot{\mathbf{d}} \left(t - \frac{R_0}{c} \right) \right|^2.$$

Поскольку полный поток энергии (во все стороны) равен изменению энергии системы

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -I = \frac{-1}{2c^3} |\ddot{\mathbf{d}}|^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\cos \theta = -\frac{2}{3} \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{c^3}.$$

5.2. (Задача 4.9.) Заряд движется с малой скоростью \mathbf{v} и ускорением $\dot{\mathbf{v}}$ в ограниченной области размера a . Найти электромагнитное поле частицы в точках, расстояние до которых $r \gg a$. Определить границы квазистационарной и волновой зон.

Решение Точное выражение для потенциалов одиночного движущегося заряда (потенциалы Лиенара-Вихерта, см., например, Мешков, Чириков, часть 2, стр. 119) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{cR}}, \quad \mathbf{A} = \varphi \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Тогда электрическое и магнитное поля выражаются следующим образом

$$\mathbf{E} = \frac{e \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2 \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3} \left[\mathbf{R} \left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) \dot{\mathbf{v}}\right]\right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R} [\mathbf{R}\mathbf{E}]$$

Нерелятивистское приближение (с точностью до членов $\frac{v}{c}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{\left(R^3 - 3R^2 \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2 \left(R^3 - 3R^2 \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)} \left\{ [\mathbf{R} [\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}]] - R \left[\mathbf{R} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \dot{\mathbf{v}}\right]\right] \right\} = \\ &= \frac{e}{\left(R^3 - 3R^2 \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)} \mathbf{R} - \frac{e\mathbf{v}R}{R^3} + \frac{e}{c^2} \frac{[\mathbf{R} [\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}]]}{\left(R^3 - 3R^2 \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)} - \frac{e}{c^2} \frac{R}{R^3} \left[\mathbf{R} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \dot{\mathbf{v}}\right]\right] = \\ &= \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \left(1 + 3\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{Rc}\right) - \frac{e}{R^2} \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{e}{c^2} \frac{[\mathbf{R} [\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}]]}{R^3} \Big|_{t'=t-R/c}. \end{aligned}$$

Тогда магнитное поле определяется по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R} [\mathbf{R}\mathbf{E}] = -\frac{e}{R^3} \frac{[\mathbf{R}\mathbf{v}]}{c} + \frac{e}{c^2 R^2} [\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R}] \Big|_{t'=t-R/c}.$$

Граница между квазистационарной (ближней) и волновой зонами определяется из условия $\frac{e}{R_{\text{тп}}^2} \simeq \frac{e\dot{v}}{c^2 R_{\text{тп}}}$.

5.3. (Задача 4.9.) Найти угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полное излучение заряда, рассмотренного в предыдущей задаче.

Решение В волновой зоне

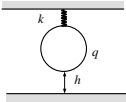
$$\mathbf{S} = c \frac{H^2}{4\pi} \mathbf{n} = \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2} [\dot{\mathbf{v}}\mathbf{n}]^2 \mathbf{n}.$$

$$dI = \mathbf{S} \mathbf{n} d\sigma = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\dot{\mathbf{v}} \mathbf{n}]^2 d\Omega,$$

где \mathbf{n} — орт в направлении излучения.

$$I = \frac{e^2}{4\pi c^3} 2\pi \int \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^3 \theta d\theta = \frac{e^2}{2c^3} \dot{\mathbf{v}}^2 \int \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^2.$$

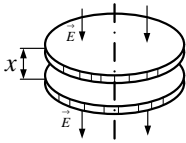
5.4. (Задача 4.16.) На высоте h над проводящим полупространством на пружинке



с жесткостью k подвешено тело с зарядом q . Найти интенсивность излучения как функцию высоты h при малых колебаниях заряженного малого тела массой m .

Решение $I = \frac{8}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \left(\frac{k}{m} - \frac{q^2}{2mh^3} \right)^2$, где a — амплитуда малых колебаний. Указание. Рассмотреть движение заряженного тела под действием притяжения со стороны изображения и возвращающей силы упругости пружины.

5.5. (Задача 4.17.) Расстояние между двумя соприкасающимися концентрическими тонкими металлическими дисками радиуса R , помещенными в однородное электрическое поле \mathbf{E} , изменяется по закону $x = a(1 - \cos \omega t)$, \mathbf{E} параллельно оси дисков. Найти среднюю интенсивность дипольного излучения системы. Считать, что $a \ll R$.



Решение При движении металлических дисков на них наводится заряд такой, чтобы поле между дисками было равно 0. Это дает условие для определения заряда на каждом из дисков:

$$4\pi\sigma = E, \text{ откуда } Q = R^2\pi\sigma = \frac{ER^2}{4}.$$

Дипольный момент системы $d = Qx$, а вторая производная $\ddot{d} = Q\ddot{x}$. Среднее (по периоду) от квадрата второй производной дипольного момента запишется в виде

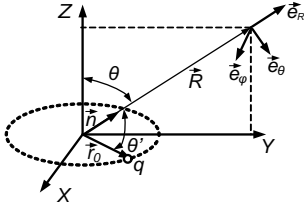
$$\overline{|\ddot{d}|^2} = Q^2 \overline{|\ddot{x}|^2} = Q^2 a^2 \omega^4 \frac{1}{2}.$$

Тогда средняя интенсивность излучения

$$\bar{I} = \frac{2}{3c^3} \overline{|\ddot{d}|^2} = E^2 R^4 a^2 \omega^4 / 48c^3.$$

5.6. (Задача 4.18.) Найти электромагнитное поле, угловое распределение и полную интенсивность, а также исследовать поляризацию при равномерном движении по окружности радиуса a с частотой ω нерелятивистской частицы заряда q ($v \ll c$).

Решение Пусть частица вращается в плоскости $X - Y$, а направление на точку



наблюдения поля выберем в плоскости $Y - Z$. Это не сужает полученное решение, потому что итоговое решение (средняя интенсивность) не может зависеть от выбора угла φ . Что касается поляризации, то ее характер тоже вряд ли зависит от этого угла. Впрочем, это лучше проверить потом. Вторую производную от дипольного момента $\mathbf{d} = q\mathbf{r}_0$ вращающейся частицы

можно записать в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{d}}_x &= -\omega^2 qa \cos \omega t' \\ \ddot{\mathbf{d}}_y &= -\omega^2 qa \sin \omega t' \\ \ddot{\mathbf{d}}_z &= 0\end{aligned}$$

Тогда интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega$ определяется равенством

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} = \frac{q^2 \omega^4 a^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta'(t').$$

Теперь главная проблема - вычислить угол θ' . Для этого рассмотрим скалярное произведение

$$\frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{n}}{r_0} = \cos \theta' = \frac{r_{0y} n_y}{r_0} = \sin \theta \sin \omega t',$$

откуда

$$\sin^2 \theta' = 1 - \cos^2 \theta' = 1 - \sin^2 \theta \sin^2 \omega t'.$$

Окончательно, для средней интенсивности можно записать

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{q^2 \omega^4 a^2}{4\pi c^3} \overline{(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \omega t')} = \frac{q^2 \omega^4 a^2}{8\pi c^3} (2 - \sin^2 \theta) = \frac{q^2 \omega^4 a^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta).$$

Для вычисления полной средней интенсивности необходимо взять интеграл

$$\int (1 + \cos^2 \theta) d\varphi \sin \theta d\theta = \frac{16}{3} \pi.$$

Окончательно получаем

$$\bar{I} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2 \omega^4}{c^3}.$$

Для определения поляризации необходимо найти значение поля (лучше \mathbf{E} , но можно и \mathbf{H}). Обычно все утверждения относительно поляризации делаются относительно \mathbf{E} , но поскольку в каждый момент времени в вакууме $\mathbf{E} = \mathbf{H}$, и только они повернуты в пространстве друг относительно друга на $\pi/2$, то надо это учесть при окончательном выводе. Итак, магнитное поле в нашем случае выражается формулой

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R} [\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n}],$$

или, в координатной записи

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \ddot{d}_x & \ddot{d}_y & 0 \\ 0 & n_y & n_z \end{vmatrix} = \left\{ \ddot{d}_y n_z \mathbf{i} - \ddot{d}_x n_z \mathbf{j} + \ddot{d}_x n_y \mathbf{k} \right\}.$$

Подставляя вычисленные ранее значения $\ddot{\mathbf{d}}$, получим для компонент магнитного поля

$$\begin{aligned} H_x &= -q\omega^2 a \sin \omega t' \cos \theta, \\ H_y &= q\omega^2 a \cos \omega t' \cos \theta, \\ H_z &= -q\omega^2 a \cos \omega t' \sin \theta. \end{aligned}$$

Для определения поляризации необходимо вычислить магнитное поле в локальной сферической системе координат, т.е. найти компоненты H_R, H_θ, H_φ , что легко сделать в выбранной системе координат (см. рисунок).

$$\begin{aligned} H_R &= H_z \cos \theta + H_y \sin \theta = q\omega^2 a \cos \omega t' (-\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta) = 0, \\ H_\theta &= H_y \cos \theta - H_z \sin \theta = q\omega^2 a \cos \omega t' (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = q\omega^2 a \cos \omega t', \\ H_\varphi &= -H_x = q\omega^2 a \sin \omega t' \cos \theta. \end{aligned}$$

Как видно из записанного решения, вращение вектора \mathbf{H} происходит в плоскости $\theta - \varphi$. Эти компоненты связаны соотношением

$$\left(\frac{H_\theta}{q\omega^2 a} \right)^2 + \left(\frac{H_\varphi}{q\omega^2 a \cos \theta} \right)^2 = 1.$$

Отсюда видно, что излучение в верхней (нижней) полусфере влево (вправо) эллиптически поляризовано; в экваториальной плоскости поляризация линейная; при $\theta = 0(\pi)$ поляризация круговая левая (правая).

5.7. (Задача 4.19.) За какое время частица, движущаяся по круговой орбите, упадет на заряженный центр из-за потерь на электромагнитное излучение. Получить

численную оценку для «атома водорода» в модели Резерфорда. $a = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см, $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ CGSE, $m = 0,9 \cdot 10^{-27}$ г.

Решение Излучаемая (теряемая атомом) мощность

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2 \mathbf{a}^2}{c^3}.$$

По закону Ньютона $m|\mathbf{a}| = e^2/r^2$, т. е. $|\mathbf{a}| = e^2/mr^2$. Из $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$ получаем, сократив на r и поделив на 2, что кинетическая энергия на витке радиуса r равна $\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2r}$.

Отсюда энергия

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Поэтому $d\mathcal{E} = e^2 dr/2r^2$.

Переходя в выражении для мощности от $d\mathcal{E}$ к dr , получаем, подставив выражение \mathbf{a} , дифференциальное уравнение

$$r^2 dr = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} dt,$$

где r изменяется от a до 0.

Отсюда время

$$t = \frac{a^3 m^2 c^3}{4e^4} = 1,3 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

5.8. (Задача 4.21.) По орбите радиуса a движется пучок нерелятивистских частиц. Заряд пучка — Q , ток — J . Пучок имеет форму кольца с вырезанным углом $\alpha \ll 2\pi$. Найти излучаемую мощность в дипольном приближении. Что покажет прибор, регистрирующий постоянную составляющую напряженности электрического поля, в волновой зоне на оси пучка?

Решение Дополним полный ток недостающим участком α с той же плотностью заряда и двигающийся с той же скоростью, а также таким же участком с противоположным зарядом. Таким образом мы не изменим условие задачи, но полный ток можно не рассматривать — он дает нулевой вклад в дипольное излучение ($\mathbf{d} = 0$). Излучение будет определяться движением маленького участка с зарядом $q = Q\alpha/2\pi$. Скорость движения этого участка определяется формулой

$$v = J/\rho = \frac{2\pi a J}{Q}.$$

Угловая скорость вращения (частота) $\omega = v/a$. Подставляя все в формулу для полной интенсивности излучения из задачи 4.18, получим

$$\bar{I} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2 \omega^4}{c^3} = \frac{8\pi}{3} \frac{\pi \alpha^2 a^2 J^4}{c^3 Q^2}; \quad E \simeq \frac{Q}{r^2}.$$

5.9. (Задача 4.23.) Определить излучение диполя (с дипольным моментом \mathbf{p}), вращающегося в плоскости с постоянной угловой скоростью Ω .

Решение Как только записать проекции дипольного момента на оси X и Y , получим выражения, аналогичные в задаче 4.18. Единственное отличие, величину qa надо заменить на p , а частоту ω заменить на Ω . Тогда

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{p_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta),$$

а полная средняя интенсивность

$$\bar{I} = \frac{2}{3} \frac{p_0^2 \Omega^4}{c^3}.$$

5.10. (Задача 4.26.) Найти излученную энергию при свободном «схлопывании» под действием собственного поля пластин плоского конденсатора. Каждая пластина имеет массу M , площадь S , величину заряда Q . Начальный зазор между пластинами d_0 , конечный — d .

Решение Уравнение движения 1 пластины в системе центра масс (т.е. посередине между ними) имеет вид

$$M\ddot{x} = F = Q \frac{U}{d}.$$

Емкость конденсатора $C = \frac{S}{4\pi d}$. Разность потенциалов $U = Q/C$. Тогда

$$M\dot{v} = \frac{Q^2}{Cd} = \frac{Q^2 4\pi}{S}.$$

Ускорение $\dot{v} = Q^2/4\pi SM = \text{const}$ постоянно, и, следовательно, пластины движутся равноускоренно. Пройденный путь обеими пластинами $d_0 - d = \dot{v}t^2/2$, откуда

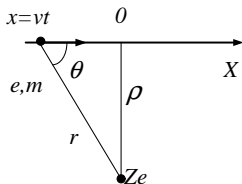
$$t = \sqrt{\frac{2(d_0 - d)}{\dot{v}}} = \sqrt{\frac{2(d_0 - d)SM}{4\pi Q^2}}.$$

Полные потери энергии $\Delta\mathcal{E} = It$. Подставляя в это выражение значение для полной интенсивности, получим

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3c^3} (\ddot{p})^2 t = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{Q^3 4\pi}{SM} \right)^2 \sqrt{\frac{2(d_0 - d)SM}{4\pi Q^2}} = \frac{8}{3} \frac{Q^2}{c^3} \sqrt{d_0 - d} \left(\frac{2\pi Q^2}{MS} \right)^{3/2}.$$

5.11. Оценить энергию излучения электрона, пролетающего на большом расстоянии от тяжелого ядра с зарядом Ze ($v \ll c$).

Решение



Отсюда

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 Z^2 e^4}{m^2 c^3 r^4}.$$

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^2} = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3} J,$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^2} = \frac{\rho}{\rho^4 v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(vt/\rho)}{(1 + (vt/\rho)^2)^2} = \frac{1}{\rho^3 v} \int_0^\pi \frac{\sin^4 \theta d\theta}{\sin^2 \theta},$$

$$vt/\rho = \operatorname{ctg} \theta.$$

Тогда

$$1/(1 + \operatorname{ctg}^2 \theta)^2 = \sin^4 \theta; \quad d(\operatorname{ctg} \theta) = -d\theta / \sin^2 \theta.$$

$$J = \frac{1}{\rho^3 v} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2\rho^3 v}.$$

Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3} \cdot \frac{\pi}{2\rho^3 v} = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 \rho^3 v} \quad \text{при} \quad \frac{Ze^2}{\rho m v^2} \ll 1.$$

Можно получить подобный результат и с помощью оценок. Движение частицы без отклонения от прямолинейной траектории описывается уравнением

$$\frac{mdv}{dt} = F \approx \frac{Ze^2}{\rho^2}, \quad \dot{v} \approx \frac{Ze^2}{m\rho^2}.$$

Тогда

$$I \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{v})^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{Z^2 e^4}{m^2 \rho^4} = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Используя оценку $\Delta t \sim \frac{\rho}{v}$, получим

$$\Delta E \sim \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 \rho^3 v}.$$

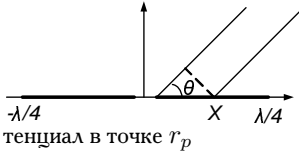
6. Излучение

Урок XXI

Оценка мультипольного излучения, антенны

6.1. (Задача 4.37.) Найти сопротивление излучения симметричного полуволнового вибратора.

Решение Рассмотрим излучатель как набор диполей, каждый из которых излучает со своей амплитудой и фазой и будем учитывать, что излучение от каждого элемента антенны будет достигать конечной точки за разное время, т.е. с разными фазами. Дипольный точечный излучатель длины dx с указанным током создает векторный потенциал в точке r_p



$$d\mathbf{A}(r_p, t) = \frac{\mathbf{e}_x}{cr_p} e^{-i\omega(t-r_p/c) - i\varphi(x)} I_0 \cos kx dx,$$

где фаза (см. рис.)

$$\varphi(x) = kx \cos \theta.$$

Тогда векторный потенциал дипольного излучения

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) = \mathbf{e}_x \frac{I_0}{cr_p} e^{-i\omega(t-r_p/c)} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{-ikx \cos \theta} \cos kx dx.$$

Для вычисления интеграла введем переменную $\xi = kx$. Тогда интеграл

$$I_{nt} = \frac{1}{2k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\xi \cos \theta} (e^{i\xi} + e^{-i\xi}) d\xi = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{k \sin^2 \theta},$$

а векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x \frac{2I_0}{ckr_p} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} e^{-i\omega\left(t - \frac{r_p}{c}\right)}.$$

Магнитное поле определяется соотношением

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_x) \frac{2I_0}{r_p} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} e^{-i\omega\left(t - \frac{r_p}{c}\right)}.$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}.$$

$$|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_x| = \sin \theta.$$

$$|\mathbf{H}| = \frac{2I_0}{cr_p} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}$$

Среднее по периоду от интенсивности

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{c}{4\pi} r_p^2 |\mathbf{H}|^2 \left\langle \cos^2 \omega \left(t - \frac{r_p}{c} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{c}{4\pi} r_p^2 \frac{4I_0^2}{c^2 r_p^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \frac{1}{2} = \\ &= \frac{I_0^2}{2\pi c} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2. \end{aligned}$$

Интенсивность аксиально-симметрична (вокруг \mathbf{e}_x) и имеет максимум $\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\max} = \frac{I_0^2}{2\pi c}$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ и обращается в 0 при $\theta \rightarrow 0$. Для точечного диполя

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle \sim \sin^2 \theta.$$

Полный поток энергии

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{I_0^2}{c} \int_{-1}^1 \frac{\cos^2(\pi\xi/2)}{1-\xi^2} d\xi = \frac{I_0^2}{c} \int_{-1}^1 \cos^2(\pi\xi/2) \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-\xi} + \frac{1}{1+\xi} \right] d\xi = \\ &= \frac{I_0^2}{2c} \left[\int_{-1}^1 \cos^2(\pi\xi/2) \frac{1}{1-\xi} d\xi + \int_{-1}^1 \cos^2(\pi\xi/2) \frac{1}{1+\xi} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Заменяя во втором интеграле ξ на $-\xi$ и используя четность косинуса, получим

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{I_0^2}{2c} 2 \int_{-1}^1 \cos^2(\pi\xi/2) \frac{1}{1-\xi} d\xi = \frac{I_0^2}{2c} 2 \int_0^2 \cos^2(\pi/2 - \pi\eta/2) \frac{d\eta}{\eta} = \\ &= \frac{I_0^2}{2c} \int_0^2 2 \sin^2(\pi\eta/2) \frac{d\eta}{\eta} = \frac{I_0^2}{2c} 2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\zeta/2) \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ &= \frac{I_0^2}{2c} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos \zeta}{\zeta} d\zeta = \frac{I_0^2}{2c} \{C + \ln 2\pi - C_i(2\pi)\} = \frac{I_0^2}{c} \cdot 1.22, \end{aligned}$$

где $C = 0.5772$ – постоянная Эйлера, $\ln 2\pi = 1.837$, $C_i(2\pi) = 0.02$. Сопротивление излучения антенны равно

$$R_{\text{изл}} = \langle P_{\text{изл}} \rangle / \langle I^2 \rangle,$$

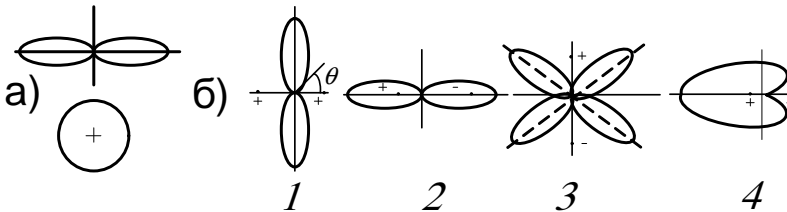
где $P_{\text{изл}}$ – средняя излучаемая мощность, $\langle I^2 \rangle$ – среднеквадратичное значение тока. Тогда

$$R_{\text{изл}} = 2 \langle I \rangle / I_0^2 = \frac{2,44}{c},$$

или переходя в систему Си, $R_{\text{изл}} = \frac{2,44 \cdot 9 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^{10}} \approx 72 \text{ Ом}$.

6.2. (Задача 4.38.) а) Построить полярную диаграмму направленности для излучения диполя в плоскости, проходящей через ось диполя, и в плоскости, перпендикулярной оси. б) Нарисовать качественно вид полярной диаграммы направленности для антенны, состоящей из двух полуволновых вибраторов, параллельных друг другу, если расстояние между ними: 1) $a = \frac{\lambda}{2}$, токи совпадают по фазе; 2) $a = \frac{\lambda}{2}$, токи в противофазе; 3) $a = \lambda$, токи в противофазе; 4) $a = \frac{\lambda}{4}$, токи сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$.

Решение В экваториальной плоскости $I(\theta) \sim \cos^2\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\pi d}{l} \cos \theta\right)$, где Δ –



сдвиг фаз между диполями, а l – расстояние между ними.

6.3. (Задача 4.40.) Найти поляризацию, угловое распределение и полную интенсивность излучения системы двух электрических диполей с частотой ω и одинаковой амплитудой p_0 , направленных под углом φ друг к другу и сдвинутых по фазе на $\pi/2$.

Решение $H_\theta = \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} [\sin \alpha + i \sin(\alpha - \varphi)] e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}$

$H_\alpha = \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} [\cos \alpha + i \cos(\alpha - \varphi)] \cos \theta e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}$, где ось X направлена вдоль диполя, опережающего другой по фазе; плоскость XY совпадает с плоскостью обоих диполей.

$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3} \{2 - [\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha - \varphi)] \sin^2 \theta\}$, $\bar{I} = \frac{2}{3} \frac{p_0^2 \omega^4}{c^3}$. Поляризация, вообще говоря, эллиптическая. Поляризация круговая в направлениях, определяемых уравнением $|\cos \theta| = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ при $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ или $\alpha = \frac{\varphi}{2} + \pi$ и $|\cos \theta| = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ при $\alpha = \frac{\varphi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$.

6.4. (Задача 4.41.) Найти поляризацию, угловое распределение и интенсивность излучения системы двух нерелятивистских одинаковых зарядов, вращающихся равномерно с частотой ω по круговой орбите радиуса a и остающихся при этом на противоположных концах диаметра.

Решение Электроны вращаются по круговой орбите и расположены на диаметрально противоположных концах. Очевидно, что $\mathbf{d} = 0$. Магнитный момент

$$\mathbf{M}_c = \frac{1}{2c} \sum \mathbf{r} \times e_i \mathbf{v}_i = 2 \frac{e}{2c} \mathbf{e}_z \omega a^2 = \frac{\omega a^2 e}{c} \mathbf{e}_z = \text{const},$$

и, следовательно, $\dot{\mathbf{M}} = 0$. Поэтому единственное излучение в этом случае - квадрупольное.

$$x_{1,2} = \pm a \sin \omega t$$

$$y_{1,2} = \pm a \cos \omega t$$

Введя величину $\varphi = \omega t$, можно записать неравные нулю компоненты квадрупольного тензора

$$\begin{aligned} D_{xx} &= -2ea^2 \{3 \sin^2 \varphi - 1\} = -ea^2 \{6 \sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi\} = \\ &= -ea^2 \{1 - 3 \cos 2\varphi\}, \end{aligned}$$

$$D_{xy} = D_{yx} = -2ea^2 \{3 \sin \varphi \cos \varphi\} = -3ea^2 \sin 2\varphi,$$

$$D_{yy} = -ea^2 \{1 + 3 \cos 2\varphi\},$$

$$D_{zz} = 2ea^2.$$

Третьи производные от этих компонент

$$\ddot{D}_{xx} = 24ea^2 \omega^3 \sin 2\varphi,$$

$$\ddot{D}_{xy} = 24ea^2 \omega^3 \cos 2\varphi,$$

$$\ddot{D}_{yx} = \ddot{D}_{xy},$$

$$\ddot{D}_{yy} = -24ea^2 \omega^3 \sin 2\varphi,$$

$$\ddot{D}_{zz} = 0.$$

Третьи производные от вектора \mathbf{D}

$$\ddot{D}_x = \ddot{D}_{xx} n_x + \ddot{D}_{xy} n_y = 24ea^2 \omega^3 \{\sin 2\varphi n_x + \cos 2\varphi n_y\},$$

$$\ddot{D}_y = \ddot{D}_{xy} n_x + \ddot{D}_{yy} n_y = 24ea^2 \omega^3 \{\cos 2\varphi n_x - \sin 2\varphi n_y\},$$

$$\ddot{D}_z = \ddot{D}_{zz} n_z.$$

Магнитное поле определяется соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}] = \frac{\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{6c^3 r}.$$

Используя правила векторного умножения, получим

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{24ea^2\omega^3}{6cr} \{\cos 2\varphi n_x n_z - \sin 2\varphi n_y n_z\} \\ H_y &= -\frac{24ea^2\omega^3}{6cr} \{\sin 2\varphi n_x n_z + \cos 2\varphi n_y n_z\} \\ H_z &= \frac{24ea^2\omega^3}{6cr} \{\sin 2\varphi n_x n_y + \cos 2\varphi n_y^2 - \cos 2\varphi n_x^2 + \sin 2\varphi n_x n_y\} \\ &= \frac{24ea^2\omega^3}{6cr} \{\sin 2\varphi n_x n_y + \cos 2\varphi (n_y^2 - n_x^2)\}. \end{aligned}$$

Для определения поляризации необходимо перейти в локальную (в точке наблюдения) сферическую систему координат и определить компоненты вектора \mathbf{H} или \mathbf{E} в этой системе координат. В принципе это можно сделать в общем виде, используя матрицу перехода из одной системы координат в другую. Для полноты картины приведем здесь эту матрицу.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_\rho \\ H_\theta \\ H_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \alpha & \cos \theta \sin \alpha & -\sin \theta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}.$$

Используя систему координат из задачи 4.18, и замечая, что $n_x = 0, n_y = \sin \theta, n_z = \cos \theta$ можно упростить полученные выше формулы, после чего использовать упрощенный вариант приведенных выше соотношений (для $\alpha = \pi/2$

$$\begin{aligned} H_\rho &= H_z \cos \theta + H_y \sin \theta, \\ H_\theta &= H_y \cos \theta - H_z \sin \theta, \\ H_\alpha &= -H_x. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\mathbf{H} = -\frac{4ea^2\omega^3}{c^3 r} [\cos(2\omega t') \mathbf{e}_\theta + \cos \theta \sin(2\omega t') \mathbf{e}_\alpha] \sin \theta,$$

Тогда, введя $H_0 = \frac{4ea^2\omega^3}{c^3 r}$, получим

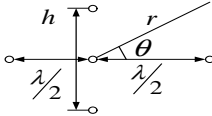
$$\left(\frac{H_\theta}{H_0 \sin \theta} \right)^2 + \left(\frac{H_\alpha}{H_0 \sin \theta \cos \theta} \right)^2 = 1,$$

откуда следует, что поляризация для $\theta \neq 0, \pi/2, \pi$ — эллиптическая.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi} |\mathbf{H}|^2 = \frac{2e^2 a^4 \omega^6}{\pi c^5} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta),$$

$$\bar{I} = \frac{32}{5} \frac{e^2 a^4 \omega^6}{c^5}.$$

6.5. (Задача 4.49.) Антенна из четырех полуволновых вибраторов возбуждена так, что токи



в проводниках имеют одинаковые амплитуды и фазы. Найти распределение интенсивности от угла $I(\theta)$ в плоскости, ортогональной проводникам, если $h \ll \frac{\lambda}{2}$.

Решение Поскольку $h \ll \lambda$, можно считать, что средние вибраторы размещены в центре на прямой, соединяющей левый и правый вибраторы. Поле, создаваемое всеми ими в месте наблюдения $E \sim e^{-i\omega t}$. Будем отсчитывать нулевую фазу от крайнего левого вибратора. Тогда

$$E_{\Sigma} \sim e^{-i\omega t} (1 + 2e^{i\psi_2 k} + e^{i\psi_1 k}),$$

где $\psi_2 = \frac{\lambda}{2 \cos \theta}$, а $\psi_1 = \frac{\lambda}{\cos \theta}$.

$$E \sim \left(1 + 2e^{\frac{ik\lambda}{2 \cos \theta}} + e^{\frac{ik\lambda}{\cos \theta}}\right) = \left(1 + e^{\frac{ik\lambda}{2 \cos \theta}}\right)^2 =$$

$$= 4e^{\frac{ik\lambda}{2 \cos \theta}} \left(\frac{e^{-\frac{ik\lambda}{4 \cos \theta}} + e^{\frac{ik\lambda}{4 \cos \theta}}}{2}\right)^2 = 4e^{\frac{i\pi}{\cos \theta}} \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right).$$

Тогда распределение интенсивности

$$|E|^2 \sim \frac{dI}{d\theta} = \cos^4 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right).$$

6.6. (Задача 4.51.) Как изменится диаграмма направленности решетки из равноотстоящих синфазных вибраторов, расположенных и ориентированных вдоль одной прямой, если убрать каждый третий из них?

Решение Стандартное излучение (все вибраторы на месте) записывается как излучение от дифракционной решетки

$$E \sim \sum_{j=0}^{\infty} e^{ikdj \cos \theta} = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - e^{ikd \cos \theta}} = \frac{1}{e^{\frac{ikd}{2} \cos \theta} \left\{ e^{-\frac{ikd}{2} \cos \theta} - e^{\frac{ikd}{2} \cos \theta} \right\}}.$$

Интенсивность

$$I \sim \left| \frac{1}{e^{\frac{ikd}{2} \cos \theta} \left\{ e^{-\frac{ikd}{2} \cos \theta} - e^{\frac{ikd}{2} \cos \theta} \right\}} \right|^2 = \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{kd \cos \theta}{2} \right)},$$

а максимум интенсивности направлен под углами

$$\begin{aligned} \frac{kd \cos \theta}{2} &= m\pi, \\ \frac{\pi d \cos \theta}{\lambda} &= m\pi, \\ d \cos \theta &= m\lambda. \end{aligned}$$

Запишем, такую же последовательность, когда каждый третий вибратор отсутствует

$$\begin{aligned} E &\sim 1 + e^{ikd \cos \theta} + e^{ikd3 \cos \theta} + e^{ikd4 \cos \theta} + \dots = \\ &= (1 + e^{ikd \cos \theta}) + e^{ikd3 \cos \theta} (1 + e^{ikd \cos \theta}) + \dots = \\ &= (1 + e^{ikd \cos \theta}) \sum_{j=0}^{\infty} e^{ikd3 \cos \theta} = \frac{1 + e^{ikd \cos \theta}}{1 - e^{ikd3 \cos \theta}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I \sim |E|^2 \sim \frac{\cos^2 \frac{kd \cos \theta}{2}}{\sin^2 \frac{3kd \cos \theta}{2}}.$$

Условие максимумов

$$\begin{aligned} \frac{3kd \cos \theta}{2} &= m\pi \\ 3d \cos \theta &= m\lambda \end{aligned}$$

6.7. (Задача 4.55.) Определить поле излучения на больших расстояниях от антенны, по которой идет ток $J = J_0 e^{i(kx - \omega t)}$, $|x| \leq a$.

Решение $H_\alpha = -\frac{2J_0}{cr} \sin \theta \frac{\sin[ka(1 - \cos \theta)]}{1 - \cos \theta} \exp \{-i(\omega t - kr)\}$.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{J_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2 \theta \sin^2 [ka(1 - \cos \theta)]}{(1 - \cos \theta)^2},$$

$$\bar{I} = \frac{J_0^2}{c} \left[C - 1 + \frac{8\pi a}{\lambda} + \operatorname{sinc} \frac{8\pi a}{\lambda} - C_i \left(\frac{8\pi a}{\lambda} \right) \right],$$

где $C = 0,577$ — постоянная Эйлера, а $C_i(x)$ — интегральный косинус. *Указание.* Рассматривать каждый элемент антенны как диполь с моментом $dp = qdx$, где q — его заряд, равный $J(x)/i\omega$ ($J(x)$ — амплитуда тока в этом элементе антенны).

6.8. (Задача 4.56.) Найти угловое распределение и полное излучение линейной антенны длиной ℓ , в которой возбуждена стоячая волна тока с узлами на концах антенны (амплитуда — J_0 , число полувольт тока на длине антенны — m).

Решение Ток в антенне

$$I_z = I_0 e^{-i\omega t} \sin \frac{m\pi x}{\ell}.$$

Векторный потенциал (в дипольном приближении, см. задачу 4.37) выражается в виде интеграла

$$\mathbf{A}_z(\mathbf{r}_p, t) = \mathbf{e}_z \frac{I_0}{cr_p} e^{-i\omega(t - \frac{r_p}{c})} \int_0^\ell e^{-ikx \cos \theta} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx$$

Выражение для магнитного поля можно получить, используя связь между векторным потенциалом и магнитным полем.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\sin \theta \mathbf{e}_\alpha}{cr_p} i\omega \int I_0 e^{-i\omega(t - \frac{r_p}{c})} \sin \frac{m\pi x}{\ell} e^{-ikx \cos \theta} = \\ &= \sin \theta \mathbf{e}_\alpha \frac{i\omega I_0}{cr_p} e^{-i\omega(t - \frac{R_0}{c})} \int_0^\ell e^{-ikx \cos \theta} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл отдельно, введя переменную $\xi = kx$.

$$\begin{aligned} Int &= \frac{1}{k} \int_0^{k\ell} e^{-i\xi \cos \theta} \left\{ e^{\frac{im\pi\xi}{k\ell}} - e^{-\frac{im\pi\xi}{k\ell}} \right\} d\xi = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{k\ell} e^{-i\xi(\cos \theta - \frac{m\pi}{k\ell})} - e^{-i\xi(\cos \theta + \frac{m\pi}{k\ell})} d\xi = \\ &= \frac{1}{k} \left\{ \frac{e^{-i\xi(\cos \theta - \frac{m\pi}{k\ell})}}{\cos \theta - \frac{m\pi}{k\ell}} \Big|_0^{k\ell} - \frac{e^{-i\xi(\cos \theta + \frac{m\pi}{k\ell})}}{\cos \theta + \frac{m\pi}{k\ell}} \Big|_0^{k\ell} \right\} = \\ &= \frac{1}{k} \left\{ \frac{[(-1)^m e^{-ik\ell \cos \theta} - 1]}{\cos \theta - \frac{m\pi}{k\ell}} - \frac{[(-1)^m e^{-ik\ell \cos \theta} - 1]}{\cos \theta + \frac{m\pi}{k\ell}} \right\} = \\ &= \frac{2m\pi}{k^2\ell} \frac{[(-1)^m e^{-ik\ell \cos \theta} - 1]}{\left[\cos^2 \theta - \left(\frac{m\pi}{k\ell} \right)^2 \right]}. \end{aligned}$$

$$H_\alpha = \frac{2iI_0 e^{-i(\omega t - kr_p)}}{cr_p \sin \theta} f(\theta);$$

$$f(\theta) = \begin{cases} i \sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) & \text{при } m \text{ четном,} \\ \cos\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) & \text{при } m \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{J_0^2 f^2(\theta)}{2\pi c \sin^2 \theta};$$

$$\bar{I} = \frac{J_0^2}{2c} [\ln(2\pi m) + C - C_i(2\pi m)],$$

где C и C_i определены в предыдущей задаче.

6.9. (Задача 4.58.) Вычислить в омах сопротивление излучения рамочной антенны, имеющей форму круглого витка радиуса a и питаемого током $J = J_0 \cos \omega t$. Длина волны $\lambda \gg a$.

Решение Магнитный момент антенны

$$m(t) = JS/c = (\pi a^2 J_0 \cos \omega t)/c = m_0 \cos \omega t.$$

Излучаемая магнитным полем мощность

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\omega^4}{c^3} m_0^2 \cos^2 \left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Средняя за период мощность

$$\overline{\frac{d\mathcal{E}}{dt}} = \frac{m_0^2 \omega^4}{3c^3} = R_{\text{изл}} \cdot \overline{J^2}.$$

Найдем средний квадрат тока $\overline{J^2}$, выраженный через $\overline{m^2}$:

$$\overline{J^2} = \frac{c^2}{S^2} \overline{m^2} = \frac{m_0^2 \cdot c^2}{2(\pi a^2)^2} = \frac{J_0^2}{2}.$$

Наконец находим сопротивление излучения:

$$R_{\text{изл}} = \frac{\overline{d\mathcal{E}/dt}}{\overline{J^2}} = \frac{m_0^2 \omega^4}{3c^3},$$

$$\frac{J_0^2}{2} = \frac{m_0^2 \omega^4}{3c^3} \cdot \frac{2\pi^2 a^4}{m_0^2 c^2} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{\omega^4 a^4}{c^5}.$$

Так как $\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то

$$R_{\text{изл}} = \frac{2\pi^2}{3c} \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4 = \frac{2}{9 \cdot 10^9} \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4 \text{ CGSE} = 200 \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4 \text{ Ом.}$$

Урок XXII

Рассеяние волн. Давление света Дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\langle dI/d\Omega \rangle}{\langle S_0 \rangle},$$

где $\langle dI/d\Omega \rangle$ - угловое распределение интенсивности вынужденного излучения, а $\langle S_0 \rangle$ - среднее значение вектора Пойнтинга падающего излучения.

5.21. (Задача 4.66.) Определить эффективное сечение рассеяния свободным зарядом поляризованной волны с поляризацией: а) линейной; б) круговой; в) эллиптической.

Решение а) Пусть плоская гармоническая волна летит вдоль направления z , так что электрическое поле направлено вдоль оси x . Тогда движение свободной частицы в поле такой волны описывается уравнением

$$m\ddot{x} = eE_0 e^{-i\omega t}.$$

В дипольном приближении средний поток энергии излучения частицы в единицу телесного угла (интенсивность)

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^4}{4\pi c^3 m^2} \langle |E_0 e^{-i\omega t}|^2 \rangle \sin^2 \theta = \frac{e^4}{4\pi c^3 m^2} \frac{E_0^2}{2} \sin^2 \theta,$$

откуда, используя выражение для $\langle S_0 \rangle = \frac{c}{4\pi} E_0^2/2$, получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta,$$

где θ — угол между электрическим полем \mathbf{E} падающей волны и направлением рассеяния;

б) и в) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{[\mathbf{A} \times \mathbf{n}]^2 + [\mathbf{B} \times \mathbf{n}]^2}{A^2 + B^2}$, где \mathbf{E} — поле падающей волны, взятое в виде $\mathbf{E} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B} \sin(\omega t + \alpha)$, а векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} ортогональны. Случай $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ описывает рассеяние волны, поляризованной по кругу.

5.22. (Задача 4.67.) Линейно поляризованная волна падает на изотропный гармонический осциллятор. Скорость электрона $v \ll c$. Найти дифференциальное $d\sigma/d\Omega$ и полное σ сечение рассеяния волны с учетом силы лучистого трения.

Решение Гармонический осциллятор в поле плоской волны

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t}.$$

Есть еще сила трения. Позже будет показано, что

$$f_T = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}.$$

Тогда полное уравнение движения с учетом силы трения имеет вид

$$\ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{r_e}{c} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t},$$

где $r_e = e^2/m_0 c^2$. Будем искать установившееся решение этого уравнения в виде $Ae^{i\omega t}$. Тогда

$$x(t) = -\frac{\frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega^3 \frac{2r_e}{3c}}$$

$$\ddot{d} = \frac{\omega^2 \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega^3 \frac{2r_e}{3c}}.$$

Тогда сечение рассеяния согласно определению

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\langle \frac{dI}{d\Omega} \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2 \theta \cdot 8\pi}{4\pi c^3 E_0^2 c} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\ddot{d} \cdot \ddot{d}^* \right) \frac{2}{c^4 E_0^2} = \frac{\frac{e^4}{m^2} E_0^2}{c^4 E_0^2} \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{4}{9} \left(\frac{r_e}{c} \right)^2 \omega^6} \\ \sigma &= F(\omega, \omega_0) \cdot \frac{8}{3} \cdot \pi r_e^2 = \sigma_T F(\omega, \omega_0) \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned} \omega &\gg \omega_0 \\ F &\approx \frac{1}{1 + \frac{4}{9} \frac{r_e^2}{c^2} \omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{4}{9} \left(\frac{r_e 2\pi}{\lambda} \right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{4}{9} \left(\frac{r_e}{\lambda} \right)^2} \approx 1 \\ \sigma &= \sigma_T \end{aligned}$$

Но силой торможения можно воспользоваться только

$$\lambda \gg r_e$$

2.

$$\begin{aligned} \omega &\approx \omega_0 \\ F &= \frac{9}{4} \frac{\lambda_0^2}{r_e^2} \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{9}{4} \frac{4}{3} 2\pi \lambda_0^2 = 6\pi \lambda_0^2 \gg \sigma_T$$

3.

$$\omega \ll \omega_0$$

$$F \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

$$\sigma = \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \ll \sigma_T$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \text{ где } \gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3} - \text{фактор, учитывающий силу}$$

лучистого трения, взятую в виде $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -m\gamma\dot{\mathbf{r}}$.

5.23. (Задача 4.69.) Найти дифференциальное сечение рассеяния плоской линейно поляризованной монохроматической волны на маленьком шаре ($\lambda \gg a$). В поле электромагнитной волны у шара возникают дипольный электрический $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}$ и магнитный $\mathbf{m} = \beta \mathbf{H}$ моменты.

Решение

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}$$

$$\mathbf{m} = \beta \mathbf{H}$$

$$E_x = E_0 e^{ikz - i\omega t}$$

$$H_y = E_0 e^{ikz - i\omega t}$$

$$d_x = \alpha E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{d}_x = -\alpha E_0 \omega^2 e^{-i\omega t}$$

$$m_y = \beta E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{m}_y = -\beta E_0 \omega^2 e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{H}_d = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_d \times \mathbf{n} = \frac{1}{c^2 r_p} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$$

$$\mathbf{H}_m = \frac{1}{c^2 r_p} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$$

$$(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \parallel \ddot{\mathbf{d}}.$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_m = \frac{1}{c^2 r_p} \left\{ \ddot{\mathbf{d}} + \ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} \right\} \times \mathbf{n}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\alpha + \beta)^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \sin^2 \theta$, где θ — угол между электрическим полем падающей волны и направлением рассеяния.

5.24. (Задача 4.71.) Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией и длиной волны λ рассеивается на двух электронах, находящихся на расстоянии $\lambda/4$ друг от друга. Волна идет вдоль линии, соединяющей электроны. Найти поляризацию и отношение интенсивностей в продольном и поперечном направлениях.

Решение Для 1-го заряда

$$E_x = E_0 \cos \omega t$$

$$E_y = E_0 \sin \omega t$$

$$\mathbf{H}_d^{(1)} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n} = \frac{1}{c^2 r_p} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$$

$$\ddot{d}_x = -\omega^2 \frac{e^2}{m} E_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{d}_y = -\omega^2 \frac{e^2}{m} E_0 \sin \omega t$$

$$H_x = \ddot{d}_y$$

$$H_y = \ddot{d}_x$$

2-ой заряд

$$H_x = E_0 \cos \left(\omega t - k \frac{\lambda}{4} \right) = E_0 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = E_0 \sin \omega t$$

$$H_y = E_0 \sin \left(\omega t - k \frac{\lambda}{4} \right) = E_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = E_0 \cos \omega t$$

Вдоль оси Z при сложении $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$ надо учесть еще и запаздывание возбужденной волны, как раз равно запаздыванию возбуждения.

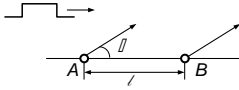
$$H_x^{(1)}(\omega t) + H_x^{(2)} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

поперек наблюдения (вдоль x , например) есть только запаздывание возбуждения.

$$H_z = n_x \ddot{d}_y,$$

то есть поляризация линейная. $I_{\parallel}/I_{\perp} = 4$. В продольном направлении поляризация круговая, а в поперечном — линейная.

5.25. (Задача 4.75.) Волновой пакет длиной ct с несущей частотой ω_0 налетает на два



свободных электрона, расстояние между которыми $AB = l \lesssim c\tau$. Пакет амплитуды E_0 образован линейно поляризованными электромагнитными волнами, волновой вектор которых направлен вдоль AB , а электрическое поле перпендикулярно плоскости рассеяния волн. Найти спектр излучения, рассеянного под углом θ к первоначальному направлению.

Решение

$$E_\omega = \int_0^\tau e^{-i\omega t} e^{i\omega_0 t} E(t) dt = \int_0^\tau e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} - 1}{\omega_0 - \omega}$$

$$= e^{i(\omega_0 - \omega)\frac{\tau}{2}} \left[\frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - \omega)\frac{\tau}{2}} \right] \tau$$

$$E^{(1)} \sim e^{-i\omega t}$$

$$E^{(2)} \sim e^{-i\omega(t + \frac{l \cos \theta}{c} - \frac{l}{c})}$$

$$E \sim e^{i(\omega_0 - \omega)\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} \left(1 + e^{il(1 - \cos \theta)} \right) \sin c = \cos \left[\frac{kl}{2} (1 - \cos \theta) \right]$$

$$E_\omega(\theta) \sim E_0 \operatorname{sinc} \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \cos \frac{kl(1 - \cos \theta)}{2}.$$

6. Излучение релятивистской частицы

Урок XXIII

Преобразование полей. Инварианты поля Контравариантные координаты 4-вектор события $x^i = (x_0, x^1, x^2, x^3)$, $x^i = (ct, x, y, z)$. Декартова система A' движется вдоль оси x' , совпадающей с осью x , со скоростью v . Тогда контравариантные координаты вектора события в этих системах связаны преобразованием Лоренца

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$. Сокращенно это соотношение можно записать $x'^i = \Lambda^i_k x^k$, где по повторяющимся индексам (один из которых сверху, другой расположен внизу) подразумевается суммирование. Иными словами, предыдущая запись означает, что

$$x'^i = \sum_{k=0}^3 \Lambda^i_k x^k. \quad (2)$$

Матрица обратного преобразования $\Lambda(\beta)^{-1} = \Lambda(-\beta)$.

Контравариантные компоненты некоторых 4-векторов:

потенциал $A^i = (\varphi, A^1, A^2, A^3) = (\varphi, \mathbf{A})$;

ток $j^i = (c\rho, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, \mathbf{j})$;

волновой вектор $k^i = (\frac{\omega}{c}, k^1, k^2, k^3) = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$;

энергия-импульс $p^i = (\frac{\mathcal{E}}{c}, p^1, p^2, p^3)$.

Величина

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

называется метрическим тензором. Контравариантные и ковариантные компоненты метрического вектора связаны соотношением

$$g^{ik} = g_{ik} = g_{ik}^{-1}.$$

Метрический тензор используется для поднятия и опускания индекса

$$A_i = g_{ik} A^k; \quad A^i = g^{ik} A_k.$$

Скалярное произведение 2-х произвольных 4-векторов a и b есть

$$ab = g_{ik}a^ib^k = a_kb^k = a^ib_i = g^{ik}a_ib_k. \quad (4)$$

Скалярное произведение инвариантно относительно преобразования Лоренца. Интервал

$$(ds)^2 = g_{ik}dx^idx^k = dx_k \cdot dx^k. \quad (5)$$

$$ds = cdt\sqrt{1 - \beta^2} = cdt/\gamma = cd\tau, \quad (6)$$

где τ — собственное время.

Эффект Доплера — преобразование частоты и угла:

$$\begin{aligned} k^i &= \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c} \cos \theta, \frac{\omega}{c} \sin \theta, 0 \right), \\ k'^i &= \left(\frac{\omega'}{c}, \frac{\omega'}{c} \cos \theta', \frac{\omega'}{c} \sin \theta', 0 \right), \\ k'^i &= \Lambda^i_k k^k. \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразование частоты

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta) = \omega \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (8)$$

Аберрация

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)}. \quad (9)$$

Продольный эффект Доплера:

$$\theta' = 0 \text{ или } \theta' = \pi \Rightarrow \sin \theta' = \sin \theta = 0.$$

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta) = \omega\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (10)$$

Поперечный эффект Доплера:

$\theta' = \pi/2$, тогда

$$\omega' = \gamma(1 - \beta^2)\omega = \frac{\omega}{\gamma} = \omega\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (11)$$

4-вектор скорости⁴

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma(c, \mathbf{v}) = \gamma c(1, \beta). \quad (12)$$

⁴В некоторых учебниках, в частности в «Теории поля» Ландау Л.Д. при определении 4-вектора скорости используется безразмерное определение $u^i = \frac{dx^i}{ds} = \gamma(1, \frac{\mathbf{v}}{c}) = \gamma(1, \beta)$.

4-вектор ускорения

$$a^i = \frac{du^i}{d\tau} = \gamma \frac{du^i}{dt} = \gamma^2 \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \gamma^2(0, \mathbf{a}); \quad u_i a^i = 0. \quad (13)$$

Свободная релятивистская частица.

$$\text{Импульс } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{энергия } \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc^2, \quad \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{v}}{c^2},$$

$$\mathcal{E}^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Заряженная релятивистская частица. Сила Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (14)$$

Уравнение движения заряженной релятивистской частицы в электромагнитном поле в ковариантном виде

$$m \frac{du^i}{ds} = \frac{q}{c} F^{ik} u_k. \quad (15)$$

Контравариантные компоненты тензора электромагнитного поля имеют вид

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}. \quad (16)$$

F^{ik} — антисимметричный тензор, $F^{ik} = -F^{ki}$:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -H_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Преобразование Лоренца для F^{ik} :

$$F'^{ik} = \Lambda^i_m \Lambda^k_n F^{mn}. \quad (18)$$

Преобразование полей

$$\begin{aligned} H_x &= H'_x, & E_x &= E'_x, \\ H_y &= \gamma(H'_y - \beta E'_z), & E_y &= \gamma(E'_y + \beta H'_z), \\ H_z &= \gamma(H'_z + \beta E'_y), & E_z &= \gamma(E'_z - \beta H'_y). \end{aligned} \quad (19)$$

Иногда эти формулы удобнее записать не в $x - y - z$ координатах, а в терминах параллельных (вектору скорости) и перпендикулярных компонент. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{E}'_{\parallel}, & \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}'_{\perp} - [\beta \times \mathbf{H}'_{\perp}]), \\ \mathbf{H}_{\parallel} &= \mathbf{H}'_{\parallel}, & \mathbf{H}_{\perp} &= \gamma(\mathbf{H}'_{\perp} + [\beta \times \mathbf{E}'_{\perp}]). \end{aligned}$$

Инварианты поля:

1. $F_{ik} \tilde{F}^{ik} = -2E^2 + 2H^2 = \text{inv} \Rightarrow E^2 - H^2 = \text{inv}$.
2. $F_{ik} \tilde{F}^{ik} = 4\mathbf{E}\mathbf{H} = \text{inv} \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \text{inv}$.

Система уравнений Максвелла в вакууме в ковариантной форме :

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0. \quad (21)$$

Излученный 4-импульс:

$$\Delta p^i = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^5} \int (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) dx^i, \quad (22)$$

в частности, излученная энергия

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]\}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\mathbf{v})^2}{1 - v^2/c^2} dt. \quad (23)$$

Торможение излучением нерелятивистской частицы

$$\mathbf{F} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}},$$

для ультрарелятивистской частицы

$$\mathbf{F} = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \beta \gamma^2 |\mathbf{E}_{\perp} + [\beta \times \mathbf{H}]|^2.$$

6.1. (Задача 5.1.) Оси координат двух инерциальных систем отсчета параллельны между собой, относительная скорость систем направлена вдоль оси X , и при $t = t' = 0$ начала координат O и O' совпадают. Используя известные формулы преобразования Лоренца координат и времени для этих систем, найти матрицу $\Lambda_{.k}^i$ такую, что $x'^i = \Lambda_{.k}^i x^k$ ⁵.

Решение В соответствии с правилами преобразования координат и времени при переходе из лабораторной системы координат в движущуюся

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t - \frac{\beta}{c} x, \\ x' &= \gamma x - c\gamma \beta t, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned}$$

⁵Иногда используется другое определение 4-вектора: $x_i = (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (\mathbf{r}, ict)$. Мнимая единица $i = \sqrt{-1}$, фигурирующая в определении компоненты $x_4 = ict$, физического смысла не несет и позволяет, используя стандартное определение скалярного произведения, получить правильные знаки получающихся выражений. При этом необходимо иначе определить матрицу Λ_{ik} .

где введены условные обозначения

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Эти преобразования можно записать в матричном виде

$$x'^i = \Lambda^i_{.k} x^k,$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

если матрица Λ имеет вид

$$\Lambda^i_{.k} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2. (Задача 5.2.) Используя матрицу $\Lambda^i_{.k}$ преобразований Лоренца, найденную в предыдущей задаче, записать формулы преобразования для следующих 4-векторов: $P^i = (\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p})$ (4-вектор энергии-импульса), $k^i = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ (волновой 4-вектор), $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$ (4-вектор потенциала), $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$ (4-вектор плотности тока).

Решение Любой из перечисленных далее векторов

$$P^i = \left\{ \frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right\},$$

$$k^i = \left\{ \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right\},$$

$$A^i = \{ \varphi, \mathbf{A} \},$$

$$j^i = \{ c\rho, \mathbf{j} \}$$

преобразуется по правилу

$$A'^i = \Lambda^i_{.k} A^k.$$

При необходимости выразить компоненты вектора в лабораторной системе координат через компоненты вектора в собственной системе отсчета можно использовать очевидное свойство матрицы Λ

$$\Lambda^{-1} = \Lambda(-\beta),$$

т.е.

$$\begin{aligned}A^0 &= \gamma (A'^0 + \beta A'^1), \\A^1 &= \gamma (\beta A'^0 + A'^1), \\A^2 &= A'^2, \\A^3 &= A'^3,\end{aligned}$$

где A^i — любой из данных векторов.

6.3. (Задача 5.4.) Точечный заряд q покоится в системе K' в точке $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. Система K' движется относительно K со скоростью \mathbf{v} вдоль оси X . Найти: а) скалярный и векторный потенциалы в системе K ; б) электрическое и магнитное поля, используя найденные значения потенциалов. Установить связь между значениями полей в системах K' и K .

Решение В системе K заряд покоится и, следовательно, мы имеем кулоновское статическое поле, для которого

$$\varphi' = \frac{q}{R'} = \frac{q}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}, \quad \mathbf{A}' = 0.$$

Преобразование потенциалов имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\varphi = \gamma\varphi', \quad A_x = \beta\gamma\varphi', \quad A_y = A_z = 0.$$

При этом следует иметь в виду, что при переходе из одной системы координат в другую необходимо в функциональной зависимости подставить вместо независимых переменных $\{ct', \mathbf{r}'\}$ преобразованные величины $\{ct, \mathbf{r}\}$. Тогда получаем

$$\varphi = \gamma \frac{q}{R'} = \gamma \frac{q}{\sqrt{\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2}}} = \frac{q}{R^*},$$

$$A_x = \beta \frac{q}{R^*},$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^* &= \left\{ x - vt, \frac{y}{\gamma}, \frac{z}{\gamma} \right\}, \\ R^* &= \sqrt{(x - vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2}}.\end{aligned}$$

Электрическое поле в лабораторной системе координат выражается формулой

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi.$$

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial R^*} \frac{\partial R^*}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial R^*} \frac{\partial R^*}{\partial x} = -\frac{\beta}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial R^*} \frac{\partial R^*}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial R^*} \frac{\partial R^*}{\partial x} = \\ &= -\frac{\partial \varphi}{\partial R^*} \left[\frac{\beta}{c} \frac{\partial R^*}{\partial t} + \frac{\partial R^*}{\partial x} \right] = \frac{q}{R^{*2}} \left\{ \frac{\beta}{c} \left(\frac{1}{2} \frac{2(x-vt)}{R^*} (-v) \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{2(x-vt)}{R^*} \right) \right\} = \\ &= \frac{q}{R^{*2}} \frac{1}{R^*} \{ (x-vt) (1-\beta^2) \} = \frac{q \mathbf{R}_x^*}{\gamma^2 R^{*3}}. \end{aligned}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial R^*} \frac{\partial R^*}{\partial y} = \frac{y q}{\gamma R^{*3}},$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial R^*} \frac{\partial R^*}{\partial z} = \frac{z q}{\gamma R^{*3}},$$

$$\mathbf{H} = [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}].$$

6.4. Используя закон преобразования 4-вектора $\{\omega/c, \mathbf{k}\}$ найти формулы для релятивистского эффекта Доплера.

Решение Пусть источник покоится в лабораторной системе отсчета и излучает с частотой ω , а его волновой вектор имеет отличную от нуля компоненту $k_x = -\omega/c$ в системе K , наблюдатель движется навстречу источнику со скоростью v вдоль оси x (поэтому у вектора k_x отрицательный знак. Тогда преобразование 4-вектора $\{\omega/c, \mathbf{k}\}$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \frac{\omega}{c} - \beta \gamma k_x = \gamma \frac{\omega}{c} (1 + \beta).$$

Продольный эффект Доплера имеет нерелятивистский предел при $\beta = v/c$

ll1

$$\omega' \approx \omega (1 + \beta).$$

Он наблюдается не только с электромагнитными волнами, но и, например, звуковыми. Гудок движущегося навстречу наблюдателю паровоза имеет более высокую частоту, а при удалении от наблюдателя — более низкую. Рассмотрим теперь поперечный эффект Доплера. При этом у источника $k_x = 0$, $k_y \omega / c$. Тогда

$$\omega' = \gamma \omega.$$

Из полученного результата видно, что это эффект сугубо релятивистский, поскольку при разложении γ по степеням β мы получим квадратичную поправку.

$$\omega' \approx \omega \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right).$$

6.5. С какой скоростью должен ехать автомобилист, чтобы спутать красный светофор с зеленым (анекдот о Вуде)? Считать, что длина красного света $\lambda_{\text{кр}} = 6,6 \cdot 10^{-7}$ м, а зеленого $\lambda_{\text{зел}} = 5,1 \cdot 10^{-7}$ м.

Решение В соответствии с предыдущей задачей

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Возводя в квадрат обе части уравнения и перенося члены с β в одну сторону, получим

$$\beta = \frac{(\omega'/\omega)^2 - 1}{(\omega'/\omega)^2 + 1} = \frac{0,675}{2,675} \approx 0,25.$$

Таким образом Вуд (по его же собственному утверждению) ехал со скоростью $v = 0,25 c \approx 7,5 \cdot 10^4$ км/с и, следовательно, должен был быть оштрафован не за переезд на красный свет, а за превышение скорости.

Урок XXIV

Излучение релятивистской частицы. Синхротронное излучение

6.6. (Задача 5.24.) Переходом из системы, где частица покоится, а ускорение её \mathbf{a} , в систему, где её скорость $v \sim c$, получить формулу полного излучения 4-импульса:

$$\Delta p^i = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^5} \int (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) dx^i.$$

В частности,

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2 - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^3} dt$$

или

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{\mathbf{E} + [\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}]\}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \mathbf{v})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Решение В системе координат, в которой частица покоится, дипольное излучение приводит к изменению энергии и импульса, которые можно записать в виде классических уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a_0^2, \\ \frac{d\mathbf{p}_0}{dt_0} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь индексом "0" обозначены значения величин в собственной системе координат частицы. Производная от импульса равна нулю в силу симметрии излучения. Направим ось X вдоль скорости частицы и применим к полученным соотношениям правила преобразования при переходе из системы координат в систему координат. Преобразование 4х-вектора из собственной системы координат в лабораторную запишем в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathcal{E}}{c} \\ dp_x \\ dp_y \\ dp_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\mathcal{E}_0}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} dp_x &= \frac{\gamma v}{c^2} d\mathcal{E}_0, \\ d\mathcal{E} &= \gamma d\mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Вспоминая, что $dt = \gamma dt_0$, получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0}.$$

Пусть движение (ускорение) частицы в собственной системе координат определяется внешним электрическим полем в этой же системе координат.

$$\mathbf{a}_0 = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0,$$

так как скорость равна 0 и $\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0 = 0$.

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0\parallel} + \mathbf{E}_{0\perp} = \mathbf{E}_{\parallel} + \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + [\beta \times \mathbf{H}]),$$

где индексы \parallel и \perp означает параллельность и перпендикулярность вектору \mathbf{v} . Квадрат ускорения можно записать через компоненты электромагнитного поля в лабораторной системе отсчета в виде

$$\begin{aligned} a_0^2 &= \frac{e^2}{m^2} \left\{ \mathbf{E}_{\parallel}^2 + \gamma^2 (\mathbf{E}_{\perp} + [\beta \times \mathbf{H}])^2 + \gamma^2 E_{\parallel}^2 - \gamma^2 E_{\parallel}^2 \right\} = \\ &= \frac{e^2}{m^2} \gamma^2 \left\{ \mathbf{E}^2 + [\beta \times \mathbf{H}]^2 + 2\mathbf{E}_{\perp} \cdot [\beta \times \mathbf{H}] + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} \mathbf{E}_{\parallel}^2 \right\} = \\ &= \frac{e^2}{m^2} \gamma^2 \left\{ (\mathbf{E} + [\beta \times \mathbf{H}])^2 - (\beta \mathbf{E})^2 \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, полная интенсивность излучения

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_0}{dt_0} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \gamma^2 \left\{ (\mathbf{E} + [\beta \times \mathbf{H}])^2 - (\beta \mathbf{E})^2 \right\},$$

а полные потери энергии на излучение

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2}{3} r_e^2 c \gamma^2 \int \left\{ (\mathbf{E} + [\beta \times \mathbf{H}])^2 - (\beta \mathbf{E})^2 \right\} dt.$$

6.7. (Задача 5.26.) Найти мгновенное угловое распределение интенсивности излучения $dI/d\Omega$, полную мгновенную интенсивность излучения I и суммарную (по всем направлениям) скорость потери энергии $(-d\mathcal{E}/dt')$ релятивистской частицы, скорость которой \mathbf{v} параллельна её ускорению $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w}$ (в момент $t' = t - r/c$). Показать, что ультрарелятивистская частица излучает главным образом внутри конуса с углом раствора $\theta \sim 1/\gamma$.

Решение Поле релятивистской частицы, движущейся в лабораторной системе отсчета со скоростью \mathbf{v} и ускорением \mathbf{w} на больших расстояниях от нее (приближение

волновой зоны для потенциала Лиенара-Вихерта см., например, Мешков, Чириков , т.2 стр.120) имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R_p} \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{w}]]}{(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c})^3}.$$

Используя условие $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$ и выбирая ось z вдоль скорости (ускорения) запишем интенсивность излучения в угол $d\Omega$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 w^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^6},$$

где θ — угол между \mathbf{v} и \mathbf{n} (направлением излучения) . Полная мгновенная интенсивность излучения

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_0^\pi \frac{e^2 w^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^6} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2 v^2}{c^3} \frac{1 + \beta^2/5}{(1 - \beta^2)^4}. \end{aligned}$$

Для нахождения угла, в котором достигается максимум мгновенной интенсивности возьмем производную от $dI/d\Omega$ по θ и приравняем ее 0.

$$\frac{d}{d\theta} \frac{dI}{d\Omega} \sim \frac{d}{d\theta} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} = 0,$$

откуда

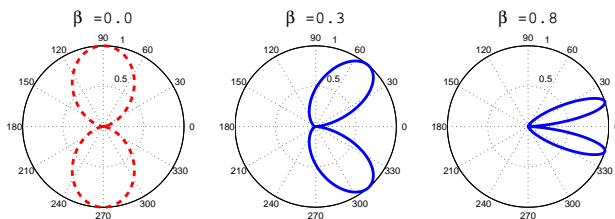
$$\theta_{max} = \text{Arccos} \frac{\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1}{4\beta}.$$

При $\beta \rightarrow 1$ угол $\theta_{max} \rightarrow 1 - \frac{1-\beta}{5}$. Очевидно, что при $\beta = 1$ угол $\theta_{max} = 0$, тогда можно вблизи $\theta_{max} \sim 0$ записать

$$1 - \frac{\theta_{max}^2}{2} \approx 1 - \frac{1 - \beta}{5}, \text{ т.е. } \theta_{max}^2 \approx \frac{2}{5}(1 - \beta),$$

и учитывая, что при β близких к 1 можно заменить в этом выражении $2 \approx (1 + \beta)$, а $1 - \beta^2 = 1/\gamma^2$, окончательно получаем

$$\theta_{max} \approx \frac{1}{\sqrt{5}\gamma} \sim \frac{1}{\gamma}.$$

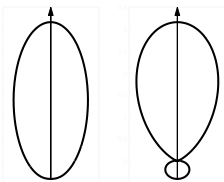


Зависимость распределения интенсивности по углу от β

6.8. То же, что и в предыдущей задаче в случае, когда скорость \mathbf{v} и ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ частицы перпендикулярны друг другу.

Решение Если \mathbf{v} направлена вдоль оси Z , а $\dot{\mathbf{v}}$ — вдоль оси X , то

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 \dot{v}^2 - (1 - \beta^2) \dot{v}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha}{(1 - \beta \cos \theta)^6}.$$



Диаграммы направленности в плоскостях YZ и XZ показаны на рисунке. Отношение интенсивностей излучения вперед-назад равно $[(1 + \beta) / (1 - \beta)]^4 \simeq 2^8 \gamma^8$.

6.9. (Задача 5.41.) Определить полное излучение релятивистской частицы с зарядом e , пролетающей на прицельном расстоянии ρ без изменения траектории в следующих полях: а) ядра Ze ; б) монополя Дирака с магнитным зарядом $g \simeq 70 e$; в) точечного электрического диполя \mathbf{p} , перпендикулярного траектории; г) бесконечного тока J , перпендикулярного траектории. Получить ограничения на параметры неискривляющейся траектории. Найти нерелятивистский предел.

Решение Рассмотрим подробно решение первого пункта. а) Согласно решению задачи 5.24 полные потери на излучение при пролете релятивистской частицы в элек-

ромагнитном поле

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3}r_e^2 c\gamma^2 \int \left\{ (\mathbf{E} + [\beta \times \mathbf{H}])^2 - (\beta\mathbf{E})^2 \right\} dt.$$

Поскольку в данном варианте в лабораторной системе магнитное поле отсутствует, то формулу потерь можно переписать в виде

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3}r_e^2 c\gamma^2 \int \left\{ (\mathbf{E})^2 - (\beta\mathbf{E})^2 \right\} dt = \frac{2}{3}r_e^2 c\gamma^2 \int \left\{ \mathbf{E}_\perp^2 + \mathbf{E}_\parallel^2(1 - \beta^2) \right\}.$$

Поскольку по условию задачи траектория частицы остается неизменной — это прямая с прицельным параметром ρ , то при нахождении частицы на расстоянии x от точки наибольшего сближения кулоновское поле ядра имеет компоненты

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\parallel &= Ze \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}}, \\ \mathbf{E}_\perp &= Ze \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Заменяв в интеграле интегрирование по времени на интегрирование по расстоянию x с помощью соотношения $dt = \frac{dx}{v}$, т.е. считая что скорость частицы не меняется и равна v , получим

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_\perp &= \frac{2}{3\beta} r_e^2 \gamma^2 Z^2 e^2 \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \rho^2)^3} = A \gamma^2 \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{X^3}, \\ \Delta\mathcal{E}_\parallel &= \frac{2}{3\beta} r_e^2 Z^2 e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \rho^2)^3} = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{X^3}. \end{aligned}$$

Интеграл в выражении для $\Delta\mathcal{E}_\perp$ вычисляется по известным правилам и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4\rho^2(\rho^2 + x^2)^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{3x}{8\rho^4(\rho^2 + x^2)} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{3 \operatorname{arctg}(x/\rho)}{8\rho^5} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{3}{8} \frac{\pi}{\rho^5}.$$

Интеграл для $\Delta\mathcal{E}_\parallel$ вычисляется аналогичным образом с использованием приведенных выше формул. Тогда, подставляя все константы, получаем

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{12} \frac{Z^2 e^2 (e^2/mc^2)^2}{\rho^3 \beta} \frac{4 - \beta^2}{1 - \beta^2};$$

в нерелятивистском пределе ($\beta \ll 1$) $\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 \rho^3 v}$;

б) $\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{q^2 \gamma^2 v}{c \rho^3}$; в нерелятивистском пределе ($\gamma \simeq 1$);

в) $\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{8} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\gamma^2 p^2}{\beta \rho^5} \left(7 - \frac{15}{8} \beta^2 \right)$ при $\gamma \simeq 1$ $\Delta\mathcal{E} = \frac{7}{8} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{p^2 c}{v \rho^5}$;

г) $\Delta\mathcal{E} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{J^2 \gamma^2 \beta}{c^2 \rho}$.

Во всех случаях отклонение на заметный угол возможно лишь при $\rho \sim \mathcal{E}/mc^2$, где \mathcal{E} — энергия взаимодействия частицы с «рассеивателем».