Семинар 13 [07.11.2022]

Метод Фурье.

Задачи

Задача 1

Решить граничную задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

$$0 \le x \le 1, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

Рассмотреть частные случаи

а) $\varphi = 0$, $\psi = \sin(\pi k x)$;

б) $\psi = 0$,

$$\varphi = \begin{cases} x/x_0, & x < x_0, \\ (1-x)/(1-x_0), & x > x_0. \end{cases}$$

Задача 2

Решить граничную задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

$$0 \le x \le 1, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

Рассмотреть частный случай $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 1$.

Задача 3

Решить граничную задачу

$$u_t = u_{xx},$$

$$0 \le x \le 1, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

Рассмотреть случай

$$\varphi = \begin{cases} x, & x < 1/2, \\ 1-x, & x > 1/2. \end{cases}$$

Решения

Задача 1

Ищем решение в виде

$$u = X(x)\,T(t),$$

имеем:

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

где λ – произвольная постоянная. Общее решение уравнения

$$X'' = -\lambda X$$

имеет вид

$$X = c_+ e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_- e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Причем краевой задаче

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \Rightarrow \quad X(0) = X(1) = 0,$$

удовлетворяют только решения с $\lambda \geq 0$ и $\sqrt{\lambda} = \pi n$, тогда:

$$X_n = c_n \sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Уравнение на T имеет вид

$$T'' = -\pi^2 n^2 T,$$

откуда находим

$$T_n = A_n \sin(\pi n t) + B_n \cos(\pi n t), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Общее решение уравнение есть произвольная линейная комбинация решений, то есть

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sin(\pi n t) + b_n \cos(\pi n t)) \sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Можно проверить, что

$$\int_0^1 \sin(\pi n x) \sin(\pi k x)\, d\xi = \frac{1}{2}\delta_{nk}.$$

Тогда из начальных условий:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\pi n x) = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pi n \sin(\pi n x) = \psi(x),$$

получаем

$$b_n = 2\int_0^1 \sin(\pi n x)\,\varphi(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin(\pi n x)\,\psi(x)\,dx.$$

В случае а) имеем

$$u = \frac{1}{\pi k} \sin(\pi k t) \sin(\pi k x).$$

В случае б):

$$b_n = \frac{2}{x_0}\int\limits_0^{x_0} x\sin(\pi n x)\,dx + \frac{2}{1-x_0}\int\limits_{x_0}^{1}(1-x)\sin(\pi n x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{x_0}\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{x_0} x\frac{d}{dx}(\cos(\pi n x))\,dx - \frac{2}{1-x_0}\frac{1}{\pi n}\int\limits_{x_0}^{1}(1-x)\frac{d}{dx}(\cos(\pi n x))\,dx =$$

$$= \frac{2}{x_0}\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{x_0}\cos(\pi n x)\,dx - \frac{2}{1-x_0}\frac{1}{\pi n}\int\limits_{x_0}^{1}\cos(\pi n x)\,dx = \frac{2}{x_0(1-x_0)}\frac{1}{\pi^2 n^2}\sin(\pi n x_0),$$

и $a_n = 0$. В итоге, решение имеет вид

$$u = \frac{2}{\pi^2 x_0(1-x_0)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\pi n x_0)\cos(\pi n t)\sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Задача 2

Действуя аналогично тому, как в предыдущей задаче получаем

$$u = t + \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(\pi(2n+1)t)\cos(\pi(2n+1)x).$$

Задача 3

Действуя аналогично тому, как в предыдущей задаче получаем

$$u = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\exp\left[-\pi^2(2n+1)^2 t\right]\sin(\pi(2n+1)x).$$