# Задания по дискретной математике

**Задание 1** (*сдать до 15 октября*)

1. Построив таблицы соответствующих функций, выяснить, эквивалентны ли формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

$\mathfrak{A} = (\overline{x} \vee y) \to ((y|\overline{z}) \to (x \sim x \cdot z))$,

$\mathfrak{B} = xy \vee (\overline{x \to x\overline{y}} \to z)$.

2. Используя основные эквивалентности доказать эквивалентность формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

$\mathfrak{A} = (x \cdot y \vee (\overline{x} \to y \cdot z)) \sim ((\overline{x} \to \overline{y}) \to z)$,

$\mathfrak{B} = (x \to y) \oplus (y \oplus z)$.

3. Найти полином Жегалкина для функции $\overline{x_1 \downarrow x_2 \to x_1 x_3}$. В этом задании нельзя использовать метод треугольника.

4. Показать, что $f \in [A]$, выразив $f$ формулой над множеством $A$:

$f = x \oplus y \oplus z, \quad A = \{\overline{x}, xy \vee yz \vee zx\}$,

$f = xy, \quad A = \{x \vee y, x \oplus y\}$.

5. Выяснить, является ли линейной функция $f$, заданная векторно

$\alpha_{f_1} = (01110011)$,

$\alpha_{f_2} = (10100110)$.

В этом задании нельзя использовать метод треугольника.

6. Определить количество всех булевых функций от двух переменных. Для каждой булевой функции от двух переменных определить каким классам Поста она принадлежит.

7. Из полной в $P_2$ системы $A$ выделить всевозможные базисы: $A = \{0, x \oplus y, x \to y, xy \sim xz\}$.

8. Построить минимальную функциональную схему в базисе $\{\neg, \&, \vee\}$, моделирующую сложение по модулю 2. Доказать минимальность.

9. На множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел рассмотрим предикаты $S^3$ и $M^3$, где $S^3(x, y, z)$ истинно если и только если $x + y = z$, а $M^3(x, y, z)$ истинно если и только если $x * y = z$. Выразить наименьшее общее кратное двух чисел через $S^3$ и $M^3$. Записать предикат "х — простое число" через $S^3$ и $M^3$.

**Задание 2** (*сдать до 15 ноября*)

1. Упростить выражения:
а) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^{n-k}$, б) $\sum\limits_{k=2}^{n} k^2 C_n^k$.

2. В корзине лежит 4 красных шара, 5 синих и 6 желтых. Сколько можно выбрать различных множеств из 5 шаров. (Шары одного цвета считать одинаковыми)

3. Сколькими способами можно расставить $n$ нулей и $k$ единиц так, чтобы между любыми двумя единицами находилось не менее $m$ нулей.

4. Пусть $U$ — множество из $n$ ($n \geq 3$) элементов.

1) Найти число пар $(X, Y)$ таких подмножеств множества $U$, что $X \subseteq Y$.

2) Найти число таких пар $(X, Y)$, что $X \subseteq U, Y \subseteq U$ и $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1, |X \cap Y| = 1$.

5. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих $n = 30m$ и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15.

6. Найти $a_n$ по рекуррентным соотношениями начальным условиям: $a_{n+2} - 2\cos\alpha a_{n+1} + a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = \cos\alpha$.

7. Найти производящую функцию $f(t)$ для последовательности $\{a_n\}$, если:

1) $a_n = 2n$;

2) $a_n = n^2$.

**Задание 3** (*сдать до 15 декабря*)

1. Доказать, что в любом дереве существует не менее двух висячих вершин.

2. Выяснить сколько существует попарно неизоморфных графов без петель и кратных ребер, имеющих 7 вершин и 18 ребер.

3. Восстановить дерево по его коду Прюфера:
$(1, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 10)$.

4. Сколько существует различных 5-вершинных лесов на множестве вершин $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

5.Доказать, что в каждом планарном графе без петель и кратных ребер есть вершина степени, не большей чем 5.

6. Доказать, что граф Петерсена не имеет реберной 3-раскраски.

7. Если на званом обеде каждый знаком не менее, чем с половиной присутствующих, то всем можно рассесться за круглым столом так, что по обе стороны от каждого будут сидеть его знакомые. Доказать.

8. (а) Дан граф $G = (V, E)$. Доказать, что задача существования гамильтонова пути из вершины $s$ в вершину $t$ является NP–полной.

(б) Дан граф $G = (V, E)$ с весами ребер $c : E \to \mathbb{Z}$. Доказать, что задача поиска минимального по весу пути из вершины $s$ в вершину $t$ является NP–трудной.

Программу и задания по дискретной математике составили:
д.ф.-м.н. О.В.Бородин, к.ф.-м.н. М.Г. Пащенко, к.ф.-м.н. П.А. Кононова