Электрические цепи при несинусоидальных токах. Понятие спектра. Свойства спектра.

Электрические цепи при несинусоидальных периодических токах

- **Гармоника** – это сигнал синусоидальной формы с частотой, кратной частоте рассматриваемого периодического сигнала.
- Периодический электрический сигнал любой формы сигнал состоит из суммы гармоник.
- Ряд Фурье

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k cosk\omega t + B_k sink\omega t)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \cos(k\omega t) dt, \qquad B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \sin(k\omega t) dt$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Свойства разложения Фурье

- Если функция симметрична относительно оси абсцисс, то $A_0 = 0$.
- Если функция нечетная, то $A_k = 0$.
- Если функция четная, то $B_k = 0$.

Можно записать ряд через сумму синусов с фазовым сдвигом:

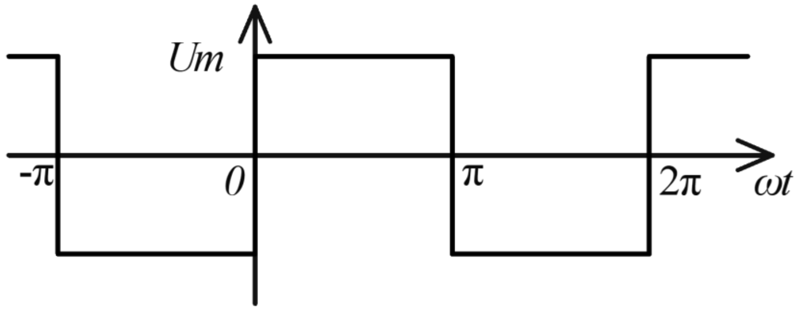
$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \qquad C_k = \sqrt{A^2{}_k + B^2{}_k}, \qquad \varphi_k = arctg\,\frac{A_k}{B_k}$$

Пример разложения Фурье

Найти коэффициенты ряда Фурье.

Из рассмотренных выше свойств $A_0 = 0$,

и $A_k = 0$. Вычислим коэффициенты B_k :



$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} U_m \sin kt\,dt + \int_{-\pi}^{0}(-U_m)\sin kt\,dt\right)$$

$$= \frac{U_m}{\pi k}\left(\cos kt\,|_0^{\pi} - \cos kt\,|_{-\pi}^{0}\right) = \frac{U_m}{\pi k}(1-(-1)-(-1)+1) = \frac{4U_m}{\pi k}$$

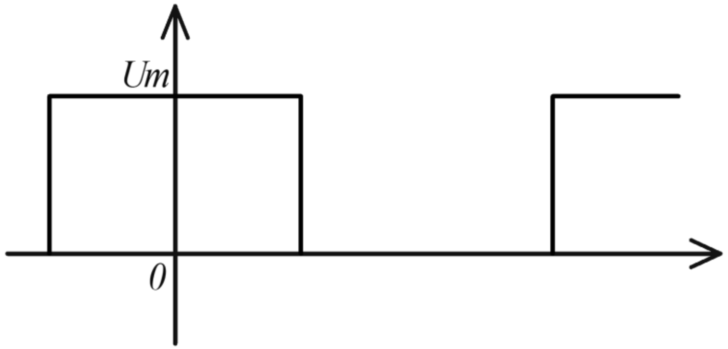
Коэффициент для четных гармоник равен нулю. Ряд можно записать следующим образом:

$$u(t) = \frac{4U_m}{\pi}\left(sin\omega t + \frac{1}{3}sin3\omega t + \frac{1}{5}sin5\omega t + \frac{1}{7}sin7\omega t + \cdots\right)$$

Пример разложения Фурье

Найти коэффициенты ряда Фурье последовательности однополярных импульсов при длительности равной половине периода. Из свойств разложения $B_k = 0$.

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_m\,dt = \frac{U_m}{2}$$



Вычислим коэффициенты A_k :

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_m\cos(k\omega t)\,dt = \frac{U_m}{k\pi}\sin(k\omega t)\,|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2U_m}{k\pi}$$

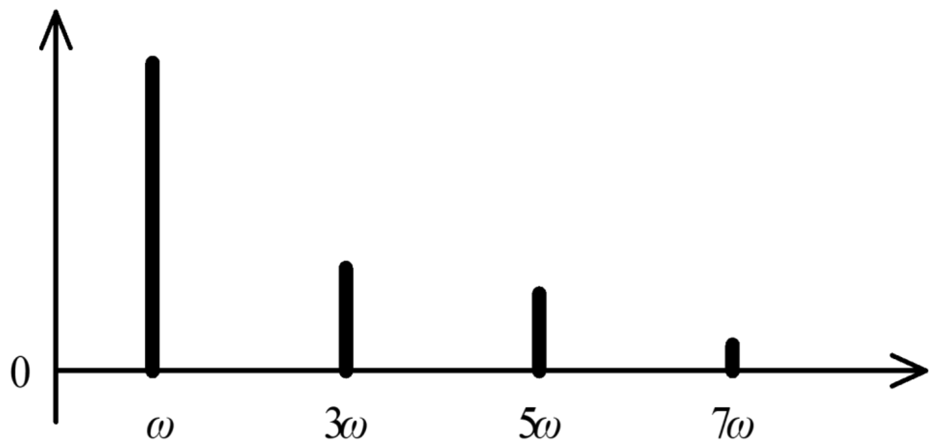
Коэффициенты ряда для четных гармоник равны нулю. Ответ :

$$u(t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi}\left(cos\omega t + \frac{1}{3}cos3\omega t + \frac{1}{5}cos5\omega t + \frac{1}{7}cos7\omega t + \cdots\right)$$

Спектральные диаграммы

По коэффициентам ряда Фурье строится графическое изображение зависимости величины амплитуды соответствующей гармоники от частоты.

Дискретная спектральная диаграмма



Мощность в цепях несинусоидального тока

$$I_{rms}{}^{2} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} i^{2}(t)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left[\sum_{k=0}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \varphi_k)\right]^{2} dt =$$

$$\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{T} I^{2}{}_{k}\sin^{2}(k\omega t + \varphi_k)\,dt \; + \frac{1}{T}\sum_{\substack{n=0\\ m=0\\ n\neq m}}^{\infty}\int_{0}^{T} I_n I_m \sin(n\omega t + \varphi_n)\sin(m\omega t + \varphi_m)\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{T} I^{2}{}_{k}\,[1 - cos(2k\omega t + \varphi_k)]dt$$

$$+\; \frac{1}{2T}\sum_{\substack{n=0\\ m=0\\ n\neq m}}^{\infty}\int_{0}^{T} I_n I_m[\cos\big((n-m)\omega t + \varphi_n - \varphi_m\big) - cos\big((n+m)\omega t + \varphi_n + \varphi_m\big)]\,dt$$

Мощность в цепях несинусоидального тока

$$I_{rms} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} {I^2}_{krms}}$$

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} U_m I_m cos\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} U_{krms} I_{krms} cos\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

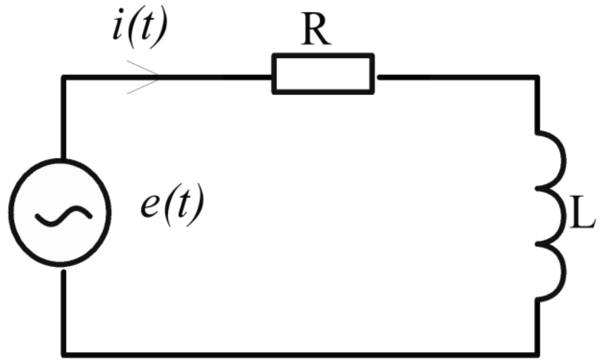
$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_{krms} I_{krms} sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$$

$$S = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_{krms}^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_{krms}^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Пример.

Определить величину ЭДС и мощность выделяющуюся на резисторе, если $R = 10\Omega$, $\omega L = 10\Omega$, а ток определяется выражением:

$$i(t) = 10\sqrt{2}sin\omega t + 5\sqrt{2}sin3\omega t + \sqrt{2}sin5\omega t$$



Величина импеданса для каждой гармоники:

$$Z(\omega) = 10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}, \qquad Z(3\omega) = 10 + j30 = 10\sqrt{10}e^{jarctg3},$$

$$Z(5\omega) = 10 + j50 = 10\sqrt{26}e^{jarctg5}$$

Пример.

Определим ЭДС как сумму гармоник, полученных умножением гармоник тока на величину импеданса соответствующего этой гармонике:

$$e(t) = 200sin(\omega t + 45°) + 100\sqrt{5}sin(3\omega t + arctg3) + 20\sqrt{13}sin(5\omega t + arctg5)$$

Определим активную мощность как сумму квадратов действующих значений тока (амплитудные деленные на $\sqrt{2}$), умноженных на величину сопротивления.

$$P = \left({I_1}^2 + {I_3}^2 + {I_5}^2\right)R = (100 + 25 + 1)10 = 1260 \text{ Вт}$$

Преобразование Фурье

Комплексная форма ряда Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega t} \qquad \dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t}\, dt$$

Приняв период непостоянным и меняющимся до бесконечности $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{d\omega}{2\pi}$

Подставим в формулу для коэффициента

$$\dot{C}_k = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

И в общую формулу для комплексной формы ряда, преобразовав сумму в интеграл:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{jk\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

Преобразование Фурье

Введем обозначение

$$\mathrm{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

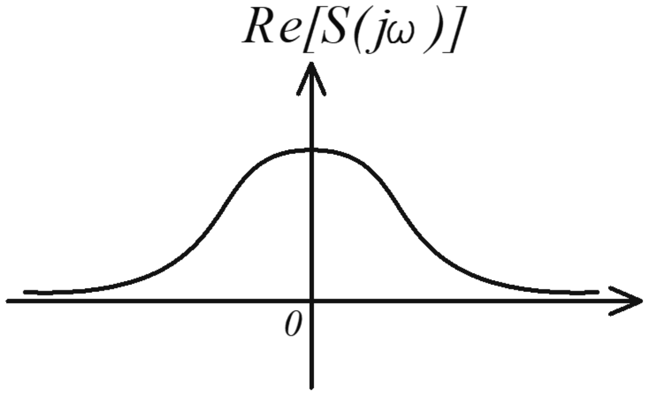
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

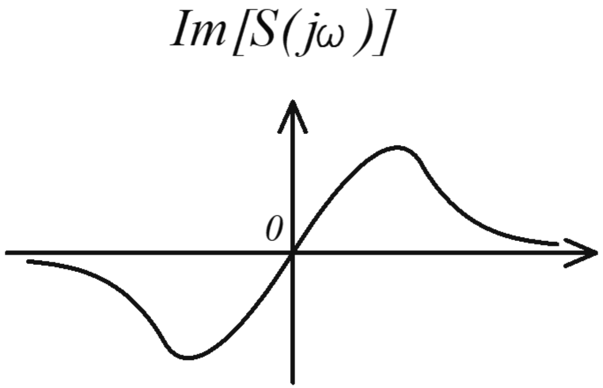
$S(j\omega)$ *- спектр сигнала.* **Спектр** – представление сигнала как бесконечной суммы элементарных гармоник с бесконечно малой разницей по частоте. Физический смысл отрицательных частот – по формуле обратного преобразования видно, что комбинация экспонент с мнимой степенью дает синусоидальные гармоники.

Свойства спектра.

Размерность спектра $S(j\omega) = \frac{f(t)}{\omega} = f(t) \cdot t$, равна размерности площади сигнала.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t - j\sin\omega t)dt = Re[S(\omega)] - jIm[S(\omega)]$$





Спектр четного сигнала – действительный, спектр нечетного полностью мнимый. Спектр - *комплексная функция частоты*. Спектр сопряженно симметричен относительно нуля:

$$S(-j\omega) = S^*(j\omega)$$

Амплитудный и фазовый спектры

Спектр можно представить в показательной форме:

$$S(j\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} \cdot e^{jarctg\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Спектр – представление сигнала как бесконечной суммы элементарных гармоник, модуль (амплитудный спектр) – амплитуды этих гармоник, а фаза (фазовый спектр) – начальные фазы этих гармоник. Амплитудный спектр четная функция, а фазовый нечетная.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))d\omega + j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))d\omega$$

Начальное значение спектра

Если смотреть строго, то амплитуды определяются как $\frac{A(\omega)d\omega}{2\pi}$, поэтому правильнее говорить о $A(\omega)$ и $S(j\omega)$ как о спектральных плотностях.

Начальное значение спектра (на нулевой частоте) равно площади сигнала:

$$S(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = S_f$$

Свойства преобразования Фурье.

$$f(\alpha t) <=> \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)$$

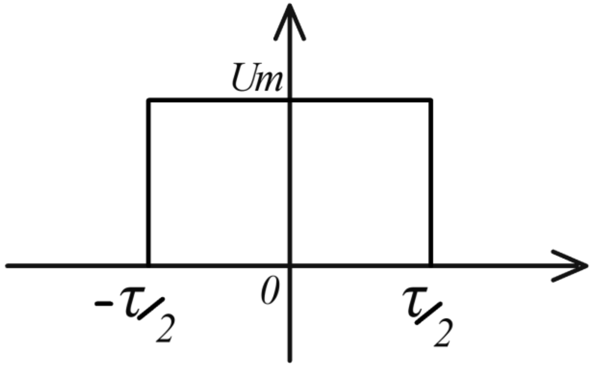
$$f(t-\tau) <=> e^{-j\omega\tau} S(j\omega)$$

$$\frac{df(t)}{dt} <=> j\omega S(j\omega)$$

$$\int_0^t f(t)dt <=> \frac{1}{j\omega} S(j\omega) + \mathrm{A}\delta(\omega)$$

Пример. Спектр одиночного прямоугольного импульса

Математическое выражение и графическое изображение одиночного прямоугольного импульса:

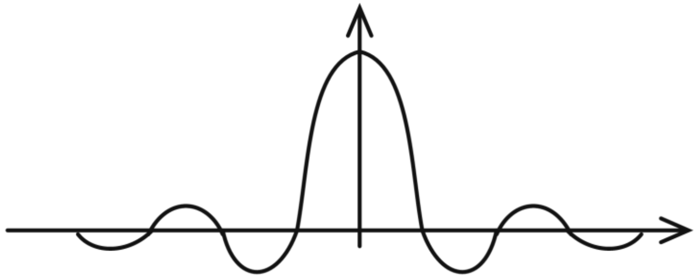


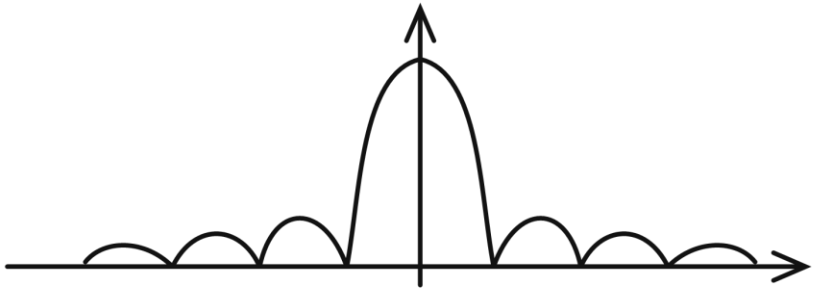
$$f(t) = \begin{cases} U_m, & {}^{\tau}/_{2} \le t \le {}^{\tau}/_{2} \\ 0, & t < -{}^{\tau}/_{2}, t > {}^{\tau}/_{2} \end{cases}$$

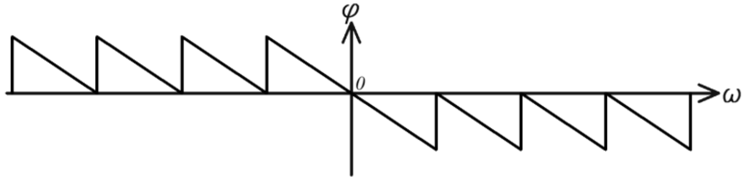
Спектр импульса:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-{}^{\tau}/_{2}}^{{}^{\tau}/_{2}} U_m e^{-j\omega t} dt = U_m \tau \frac{\sin {}^{\omega\tau}/_{2}}{{}^{\omega\tau}/_{2}}$$

Пример. Спектр одиночного прямоугольного импульса







Амплитудный и фазовый спектры:

$$A(\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \left| \sin\frac{\omega\tau}{2} \right|$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega\tau}{2} + Arg\left(\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Нули спектра:

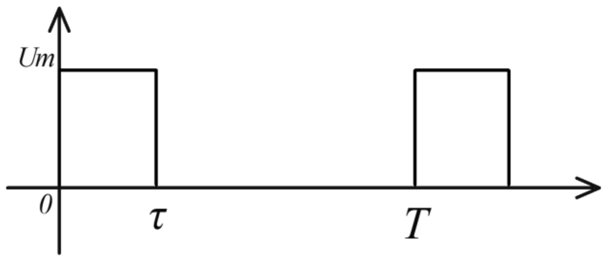
$$\omega = \pm\frac{2\pi}{\tau}k \;, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Начальное значение спектра (при замене на малых углах $\sin\frac{\omega\tau}{2} \to \frac{\omega\tau}{2}$):

$$A(0) = U_m\tau$$

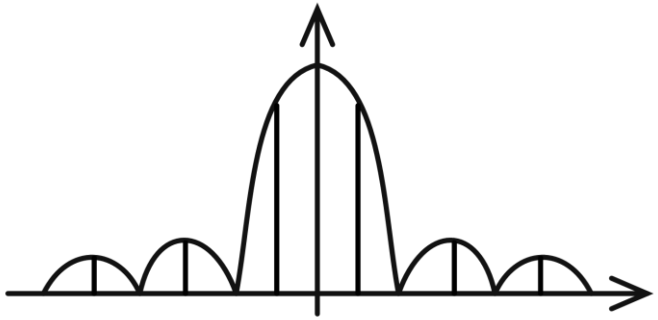
Связь дискретных и непрерывных спектров

Спектр одиночного импульса:



$$S(j\omega) = \int_0^{\tau} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{\omega_0}{2\pi}S(k\omega_0)$$



формирование периодической последовательности приводит к равномерной дискретизации непрерывного спектра одиночного импульса с интервалом частот

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Спектр произведения сигналов.

Еще одно свойство преобразования Фурье – спектр произведения сигналов. Пусть

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Тогда спектр произведения $s(t)\cdot g(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\theta)e^{j\theta t}d\theta\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\theta)\left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j(\omega-\theta)t}dt\right]d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\theta)S(\omega-\theta)d\theta$$

Спектр произведения определяется через свертку спектров с коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$.