1. Волны в пространстве-времени

Урок 2. Граничные условия. Формулы Френеля

1.1. (Задача 1.16.) Вывести граничные условия для полей электромагнитной волны. Используя их, получить законы отражения и преломления, а также доказать равенство частот в отраженной и преломленной волнах.

Решение Электромагнитное поле характеризуется величинами $\mathbf{E}, \mathbf{D}$, $\mathbf{H}, \mathbf{B}$: $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{D}$ — электрическая индукция, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция. Векторы поля $\mathbf{E}, \mathbf{D}$, $\mathbf{H}, \mathbf{B}$ являются в общем случае функциями координат и времени и связаны между собой соотношениями $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Величина ε называется диэлектрической проницаемостью, а μ — магнитной проницаемостью сред. Диэлектрическая и магнитная проницаемости являются функциями координат, при некоторых постановках они могут зависеть от времени.

Поля $\mathbf{E}, \mathbf{D}$, $\mathbf{H}, \mathbf{B}$ подчиняются законам, которые формируются в виде системы уравнений Максвелла. Здесь мы будем пользоваться интегральной формой уравнений Максвелла. В Гауссовой системе единиц они имеют вид

$$\oint \mathbf{E} d\boldsymbol{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\int \mathbf{B} dS,$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint \mathbf{H} d\boldsymbol{\ell} = \frac{4\pi}{c}\int\int \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\int \mathbf{D} d\mathbf{S},$$

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi\int\int\int \rho dv,$$

где ρ — объемная плотность зарядов, $\mathbf{j}$ — плотность тока ($\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$, где γ — проводимость), c — скорость света в вакууме. Для случая электромагнитных волн в непроводящей среде $\mathbf{j} = 0$, и при отсутствии зарядов ($\rho = 0$) уравнения примут вид

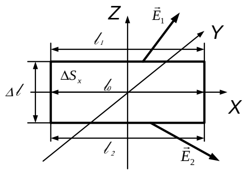
$$\oint \mathbf{E} d\boldsymbol{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\oint \mathbf{B} d\mathbf{S}; \tag{1}$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0; \tag{2}$$

$$\oint \mathbf{H} d\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\int \mathbf{D} d\mathbf{S}; \tag{3}$$

$$\oint \mathbf{D} \mathrm{d}\mathbf{S} = 0. \tag{4}$$

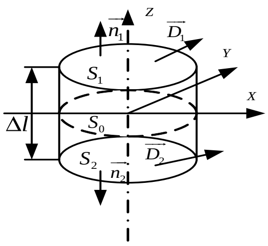
Выясним, как изменяются векторы электромагнитного поля на границе раздела двух сред с различными свойствами. Пусть одна среда характеризуется проницаемостями ε_1 и μ_1, вторая — соответственно ε_2 и μ_2, а границей



является плоскость $Z = 0$. Применим уравнение (1) к контуру, ограничивающему малую площадку ΔS_x, пересекающую границу раздела и нормальную к ней. На рисунке эта площадка расположена в плоскости рисунка. Левая часть уравнения — интеграл по замкнутому выбранному контуру. Под интегралом стоит скалярное произведение векторов $\mathbf{E}$ и $d\boldsymbol{\ell}$, где $d\boldsymbol{\ell}$ — вектор элементарного приращения, длина которого равна элементарному приращению длины контура $d\ell$, а направление совпадает с направлением касательной к контуру в соответствующей точке. Это скалярное произведение равно произведению проекции вектора $\mathbf{E}$ на направление вектора $d\boldsymbol{\ell} - \mathbf{E}_{\tau x}$ и длины $d\boldsymbol{\ell}$, т. е. $(\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}) = E_{\tau x}\mathrm{d}\ell$. Площадка ΔS_x пересекает поверхность раздела по длине ℓ_0. Пусть стороны площадки ℓ_2 и ℓ_1 параллельны поверхности раздела, а $\Delta\ell$ — длина сторон площадки, пересекающих поверхность раздела. Если $\Delta\ell$ стремится к нулю: $\Delta\ell \to 0$, то ℓ_1 и ℓ_2 будут стремиться к ℓ_0, а площадь ΔS_x будет стремиться к нулю. Левая часть уравнения (1) при $\Delta\ell \to 0$ (с точностью до величин второго порядка малости) будет равна $\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = (E_{1\tau x} - E_{2\tau x}) \cdot \ell_0$, где $E_{1\tau x}$ и $E_{2\tau x}$ — касательные составляющие вектора $\mathbf{E}$ соответственно в первой и второй средах и лежащие в плоскости площадки ΔS_x. Длина ℓ_0 выбрана настолько малой, что можно пренебречь изменением E_τ на этом отрезке.

Правая часть уравнения (1), представляющая изменение во времени потока вектора $\mathbf{B}$ через площадку ΔS_x, пропорциональна площади ΔS_x и сведется к нулю при $\Delta S_x \to 0$, поскольку B конечно. Получим $(E_{1\tau x} - E_{2\tau x}) \cdot \ell_0 = 0$, откуда $E_{1\tau x} \mid= E_{2\tau x} \mid$. Если применить уравнение (1) к площадке ΔS_y, перпендикулярной рассмотренной и границе раздела, и провести рассуждения, аналогичные произведенным, то получим $E_{1\tau y} \mid= E_{2\tau y} \mid$, где $E_{1\tau y} \mid$ и $E_{2\tau y} \mid$ — касательные к поверхности раздела, составляющие вектора $\mathbf{E}$ соответственно в первой и второй средах, лежащие в плоскости площадки ΔS_y. Итак, доказана непрерывность проекций на два взаимно перпендикулярных направления касательной к поверхности раздела, составляющей $\mathbf{E}$, значит, непрерывна полная касательная, составляющая $\mathbf{E}_\tau$, т. е. $\mathbf{E}_{1\tau} \mid= \mathbf{E}_{2\tau} \mid$.

Аналогично, из уравнения (3) следует непрерывность касательных или тангенциальных составляющих вектора $\mathbf{H}$ при переходе через границу раздела двух сред (если на границе раздела нет поверхностных токов): $\mathbf{H}_{1\tau} \mid= \mathbf{H}_{2\tau} \mid$.



Покажем, что из уравнения (4) следует непрерывность нормальных к поверхности раздела составляющих вектора электрической индукции $\mathbf{D}$. Рассмотрим малый цилиндр с образующими $\Delta\ell$, перпендикулярными к поверхности раздела. Этот цилиндр вырезает из поверхности элемент S_0 столь малый, что его можно считать плоским. Основания цилиндра площади S_1 и S_2 параллельны поверхности раздела. Вычислим поток вектора $\mathbf{D}$ через поверхность цилиндра:

$$\oint \mathbf{D}\mathrm{d}\mathbf{S} = D_1\cos(\widehat{\mathbf{D_1 n_1}})S_1 + D_2\cos(\widehat{\mathbf{D_2 n_2}})S_2 + \Phi,$$

где D_1 и D_2 – значения вектора $\mathbf{D}$ на соответствующих основаниях цилиндра; $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$ – внешние нормали к этим основаниям; Φ – поток через боковую поверхность цилиндра. Если уменьшить высоту цилиндра $\Delta\ell$, не изменяя при этом S_0, то площадь боковой поверхности цилиндра и поток Φ вектора $\mathbf{D}$ через эту поверхность будет стремиться к нулю. Учитывая, что

$$D_1\cos(\widehat{\mathbf{D_1 n_1}}) = D_{1n}, \qquad D_2\cos(\widehat{\mathbf{D_2 n_2}}) = -D_{2n},$$

поток вектора $\mathbf{D}$ через поверхность цилиндра в пределе при $\Delta \to 0$ будет равен

$$\lim_{\Delta\ell\to 0}\oint \mathbf{D}\mathrm{d}\mathbf{S} = (D_{1n}| - D_{2n}|)S_0,$$

где D_{1n} и D_{2n} — нормальные составляющие вектора $\mathbf{D}$ к поверхности раздела со стороны первой и второй сред, $D_{1n}|$, $D_{2n}|$ — нормальные составляющие вектора $\mathbf{D}$ на основаниях цилиндра. Из уравнения (4) поток равен нулю, поэтому $(D_{1n}| - D_{2n}|)S_0 = 0$, откуда $D_{1n}| = D_{2n}|$.

Применяя аналогичные рассуждения к уравнению (2), получаем

$$B_{1n}| = B_{2n}|.$$

Итак, на границе раздела должны выполняться граничные условия

$$E_{1\tau}| = E_{2\tau}|, \quad H_{1\tau}| = H_{2\tau}|; \tag{5}$$

$$D_{1n}| = D_{2n}|, \quad B_{1n}| = B_{2n}|. \tag{6}$$

Рассмотрим прохождение электромагнитной волны через границу двух непроводящих сред. В случае однородной среды $\varepsilon = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$ из уравнений Максвелла, взятых в дифференциальной форме, можно получить уравнения второго порядка для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0, \quad \Delta\mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} = 0.$$

Эти уравнения допускают частные решения в виде монохроматических плоских волн

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} e^{\pm i(\omega t - \mathbf{kr})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H_0} e^{\pm i(\omega t - \mathbf{kr})}, \tag{7}$$

где $\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}$ — константы, называемые амплитудами волны; ω — циклическая частота волны; $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — длина волнового вектора, а направление волнового вектора $\mathbf{k}$ совпадает с направлением распространения волны. Векторы $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему, причем

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega}[\mathbf{k} \times \mathbf{E}]. \tag{8}$$

Можно показать, что для монохроматических полей (7) условия (6) выполняются автоматически, если выполняются условия (5). Кроме того, для каждой волны $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны соотношением (8). Поэтому одновременно удовлетворить условию (8) и двум граничным условиям (5) можно только допустив, что падающая волна частично проходит во вторую среду, а частично отражается от поверхности раздела. Особенно просто это можно проиллюстрировать на примере падения волны по направлению, перпендикулярному плоскости раздела. Тогда у падающей волны есть только тангенциальные составляющие векторов $\mathbf{E_1}$ и $\mathbf{H_1}$. Если существует только проходящая волна, то из граничных условий (5) у этой волны те же вектора $\mathbf{E_1}$ и $\mathbf{H_1}$, что и у падающей, т. е. $E_1 = E_2 = E, \quad H_1 = H_2 = H$. С другой стороны, учитывая (8), $H_1 = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}E_1$, а $H_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\mu_1}E_2$, что противоречит равенству $H_1 = H_1$.

Покажем, что у всех волн — падающей, отраженной и прошедшей — частота ω одинакова и равна частоте падающей волны. Пусть на плоскую границу раздела $z = 0$ падает плоская волна

$$\mathbf{E}^{(\ell)} = \mathbf{E_0}^{(\ell)} e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})},$$

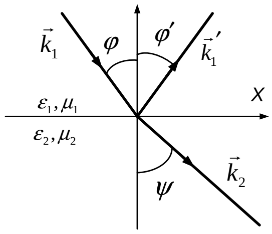
а отраженную и прошедшую, или преломленную, волны запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(r)} &= \mathbf{R} e^{-i(\omega_r t - \mathbf{k_1'r})}, \\ \mathbf{E}^{(d)} &= \mathbf{D} e^{-i(\omega_d t - \mathbf{k_2'r})}. \end{aligned} \tag{9}$$

Граничные условия (5) должны выполняться для всех точек границы раздела. Любое из условий (5) для произвольной точки поверхности раздела $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$, можно записать в виде

$$A(\mathbf{r_0})e^{-i\omega t} + B(\mathbf{r_0})e^{-i\omega_r t} + C(\mathbf{r_0})e^{-i\omega_d t} = 0. \tag{10}$$

Константы $A(\mathbf{r_0}), \ B(\mathbf{r_0}), \ C(\mathbf{r_0})$ отличны от нуля, если отраженная и прошедшая волны действительно существуют. Этому условию при всех t можно удовлетворить, если только $\omega = \omega_r = \omega_d$.



Найдем связь между волновыми векторами падающей $\mathbf{k_1}$, отраженной $\mathbf{k_1'}$ и прошедшей $\mathbf{k_2}$ волн. Ось z направим в сторону второй среды. Плоскость раздела $z = 0$ будет плоскостью XY. За ось X возьмем линию пересечения плоскости раздела сред с плоскостью падения. Напомним, что плоскость падения — это плоскость, в которой лежат волновой вектор падающей волны $\mathbf{k_1}$ и нормаль к плоскости раздела, в нашем случае ось z. В выражениях (9) скалярное произведение вида $\mathbf{kr}$, записанное для плоскости раздела, представлено в виде $\mathbf{kr} = k_x x + k_y y$. Тогда любое из условий (5) с учетом равенства частот при $y = y_0$ запишется в виде

$$A(y_0)e^{ik_{1x}x} + B(y_0)e^{ik'_{1x}x} + C(y_0)e^{ik_{2x}x} = 0,$$

где $A(y_0), B(y_0), C(y_0)$ — постоянные и притом отличные от нуля, если только отраженная и прошедшая волны действительно существуют. Поскольку это равенство должно выполняться при всех x, то должно быть

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}.$$

Мы выбрали расположение осей X, Y такими, что у падающей волны имеется только x-я и z-я компоненты волнового вектора k_{1x}, k_{1z}, а $k_{1y} = 0$. Покажем, что тогда $k'_{1y} = k_{2y} = 0$. Записав условия (5) для $x = x_0$, получим

$$A(x_0) + B(x_0)e^{ik'_{1y}y} + C(x_0)e^{ik_{2y}y} = 0;$$

$A(x_0), B(x_0), C(x_0)$ отличны от нуля. Чтобы это равенство выполнялось для всех y, нужно положить $k'_{1y} = k_{2y} = 0$. Таким образом, получаем, что волновые векторы отраженной $\mathbf{k_1'}$ и прошедшей волн $\mathbf{k_2}$ лежат в плоскости падения, а величины их проекций на границу раздела одинаковы и равны соответствующей проекции падающей волны. Найдем связь между углами падения, отражения и преломления. Поскольку величина волнового вектора определяется свойствами среды и частотой, то отсюда следует, что $k_1 = k'_1$, так как падающая и отраженная волны распространяются в одной среде $k = k'_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\omega/c$. Учитывая, что $k_{1x} = k'_{1x}$, заключаем, что угол отражения φ' (см. рис. на с. 30) равен углу падения φ. Далее

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \pm\sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2}, \quad k_{1z} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2}.$$

Знак «минус» перед корнем для k_{1z} взят потому, что отраженная волна распространяется в сторону уменьшения z. Если $k_2^2 > k_{1x}^2$, то перед корнем для k_{2z} следует взять знак «плюс», это будет означать, что волна преломления распространяется в сторону возрастания z. Если ψ — угол преломления, то, учитывая, что

$$k_{1x} = k_1 \sin\varphi = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\frac{\omega}{c}\sin\varphi,$$

$$k_{2x} = k_2 \sin\psi = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\frac{\omega}{c}\sin\psi,$$

$$k_{1x} = k_{2x},$$

получаем

$$\sin\varphi/\sin\psi = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} = n_2/n_1,$$

где $n_i = \sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$ называется показателем преломления i-й среды.

Для случая $k_2^2 < k_{1x}^2$, k_{2z} — чисто мнимая величина и зависит от z, определяется действительным множителем $e^{\pm|k_{2z}|z}$. Понятно, что нужно взять знак «минус», т. е. положить $k_{2z} = i\sqrt{k_{1x}^2 - k_2^2}$, иначе амплитуда прошедшей волны будет неограниченно возрастать по мере удаления от границы раздела, чего не может быть из-за закона сохранения энергии. Волна во второй среде неоднородная:

$$\mathbf{E}^{(d)} = \mathbf{D}e^{-z|k_{2z}|}e^{-i(\omega t - k_{1x}x)}.$$

1.2. (Задача 1.17.) Найти коэффициенты отражения и прохождения для электромагнитной волны, падающей нормально на плоскую границу между вакуумом и средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ.

Решение Пусть плоскостью раздела будет плоскость $z = 0$ с осью Z, направленной вниз, в сторону второй среды. Тогда по условию задачи волновой вектор падающей волны направлен вдоль положительного направления оси Z. Поскольку в плоской волне векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перпендикулярны волновому вектору $\mathbf{k}$, то направление оси X можно выбрать по направлению вектора $\mathbf{E}$. Тогда для падающей волны имеем

$$E_x^\ell = E_0^\ell e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad E_y^\ell = 0, \quad E_z^\ell = 0;$$

$$H_y^\ell = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_0^\ell e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad H_x^\ell = 0, \quad H_y^\ell = 0,$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}.$$

Для получения величины напряженности магнитного поля в волне использовано соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega}[\mathbf{k}\mathbf{E}]. \tag{1}$$

Для отраженной волны имеем аналогично

$$E_x^r = Re^{-i(\omega t + k_1 z)}, \quad E_y^r = E_z^r = 0,$$

$$H_y^r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} Re^{-i(\omega t + k_1 z)}, \quad H_z^r = H_y^r = 0.$$

Для преломленной волны

$$E_x^d = De^{-i(\omega t - k_2 z)}, \quad E_y^d = E_z^d = 0$$

$$H_y^d = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} De^{-i(\omega t - k_2 z)}, \quad H_z^d = H_y^d = 0,$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}.$$

Здесь учтено, что частоты падающей, отраженной и преломленной волн равны друг другу (см. решение задачи 1.1.). Запишем условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов **E** и **H**. В первой среде есть волна падающая и отраженная, во второй — прошедшая, поэтому, полагая $z = 0$, получаем

$$E_0^\ell + R = D, \qquad \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_0^\ell - R) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} D.$$

Отсюда

$$R = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} E_0^\ell,$$

$$D = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} E_0^\ell.$$

Коэффициент отражения $\rho^{(r)}$ есть отношение потоков энергии, отраженной и падающей волн, а коэффициент прохождения $\rho^{(d)}$ — отношение потоков энергии прошедшей и падающей волн. Найдем распределение энергии в падающей волне. Известно, что плотность энергии электромагнитного поля в среде

$$W = \frac{\mathbf{D}^\ell \cdot \mathbf{E}^\ell}{8\pi} + \frac{\mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{H}^\ell}{8\pi} = \frac{\varepsilon_1 (E^\ell)^2}{8\pi} + \frac{\mu_1 (H^\ell)^2}{8\pi}.$$

Здесь E^ℓ и H^ℓ действительные:

$$E^\ell = E_0^\ell \cos(\omega t - k_1 z), \quad H^\ell = H_0^\ell \cos(\omega t - k_1 z).$$

В силу соотношения (1), энергии магнитного и электрического полей в среде, так же как и в вакууме, равны между собой $\mu_1 (H^\ell)^2/8\pi = \varepsilon_1 (E^\ell)^2/8\pi$, поэтому

$$W = \frac{\varepsilon_1}{4\pi}(E_0^\ell)^2 \cos^2(\omega t - k_1 z). \tag{2}$$

Если зафиксировать время, то формула (2) даст распределение энергии в пространстве. Поскольку волна в среде движется со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$, вместе с волной движется и энергия, запасенная в электромагнитном поле. Чтобы найти энергию, проходящую через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени, усредним энергию W (2) по z, взяв в качестве интервала усреднения характерную для волны величину, например длину волны λ, т. е. $\Delta z = \lambda_1 = 2\pi/k_1$. Тогда

$$\langle W \rangle = \frac{1}{\lambda_1} \int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda_1} W(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi} \int\limits_{\omega t - kz_0 - 2\pi}^{\omega t - kz_0} \cos^2 \xi \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi}.$$

Средняя по координате плотность энергии не зависит от времени (это будет означать, что и средняя по времени плотность энергии будет равна той же величине

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi}).$$

Зная среднее значение энергии, находим ее поток. Через единичную площадку, взятую перпендикулярно направлению распространения волны, в единицу времени пройдет энергия Π, запасенная в параллелепипеде длиной, равной скорости волны $v = c/\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ и с площадью основания, равной единице, т. е.

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi} v = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_0^\ell)^2.$$

Это и есть средний по времени вектор Пойнтинга $\bar{S}^\ell$ для падающей волны.(На самом деле речь конечно идет о длине вектора. Чтобы не делать формулы слишком громоздкими, мы будем опускать знак модуля в промежуточных математических выкладках. С учетом сделанного уточнения одинаковые обозначения для средних величин и векторов не должны вызывать недоразумений). Если **E** и **H** записаны в комплексном виде, то средний вектор Пойнтинга

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi}|\overline{[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]}| = \frac{1}{2}Re\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2.$$

Аналогично для энергии отраженной и преломленной волн имеем

$$|\bar{S}^r| = \frac{c}{8\pi}Re[\mathbf{E}^r\times\mathbf{H}^{r*}] = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}R^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}\right)^2\cdot|\bar{S}^\ell|,$$

$$|\bar{S}^d| = \frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}\cdot|\bar{S}^\ell|.$$

Тогда

$$\rho^{(r)} = \frac{\bar{S}^r}{\bar{S}^\ell} = \frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2},\quad \rho^{(d)} = \frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}.$$

Если первая среда вакуум, то $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ и, полагая $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\mu_2 = \mu$, получаем

$$\rho^{(r)} = \frac{(1-\sqrt{\varepsilon/\mu})^2}{(1+\sqrt{\varepsilon/\mu})^2},\quad \rho^{(d)} = \frac{4\sqrt{\varepsilon/\mu}}{(1+\sqrt{\varepsilon/\mu})^2}.$$

Если $\varepsilon = \mu$, то отражательная способность среды обращается в нуль $\rho^{(r)} = 0$ и вся энергия проходит во вторую среду: $\rho^{(d)} = 1$.

1.3. (Задача 1.19.) На плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления n падает под углом φ к нормали к пластинке плоская линейно поляризованная монохроматическая световая волна. Плоскость поляризации волны образует угол β с нормалью к плоскости падения. Найти угол между плоскостью поляризации и нормалью к плоскости падения после прохождения света через пластинку (многократными отражениями внутри пластинки пренебречь).

Решение Плоскость падения есть плоскость волнового вектора **k** и нормали к границе раздела, а плоскость поляризации — плоскость, в которой лежат векторы электрического поля **E** и волнового вектора **k**. Плоскость падения для всех волн — падающей, отраженной и преломленной — одна и та же, что следует из равенства тангенциальных составляющих этих волн. Если β — угол между плоскостью поляризации падающей волны и нормалью к плоскости падения, то, учитывая, что вектор $\mathbf{E}^\ell$ перпендикулярен вектору $\mathbf{k}$, проекции вектора $\mathbf{E}$ на плоскость падения и перпендикуляр к ней, обозначаемые соответственно $\|$, $\perp$, будут равны

$$E_\| = E\sin\beta, \quad E_\perp = E\cos\beta. \tag{1}$$

Аналогично для преломленной волны E_1^d, если вторая среда занимает все полупространство,

$$E_\|^d = E^d\sin\beta_1, \quad E_\perp^d = E^d\cos\beta_1, \tag{2}$$

где β_1 — угол между плоскостью поляризации преломленной волны и нормалью к плоскости падения. Поскольку многократными отражениями можно пренебречь, считаем, что волна (2) является падающей на вторую (нижнюю) плоскость пластинки и связи $E_\|^d$ с $E_\|$, $E_\perp^d$ с $E_\perp$ определяются формулами Френеля:

$$\frac{E_\|^d}{E_\|} = \frac{2\cos\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}, \quad \frac{E_\perp^d}{E_\perp} = \frac{2\cos\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}, \tag{3}$$

где ψ — угол преломления.

Из формул (1)–(3) следует, что

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{E_\|^d}{E_\perp^d} = \frac{1}{\cos(\varphi-\psi)}\frac{E_\|}{E_\perp} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos(\varphi-\psi)}. \tag{4}$$

Волна E^d на второй границе будет падать под углом ψ, а преломится под углом φ. Поэтому

$$\operatorname{tg}\beta^* = \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\cos(\varphi-\psi)}, \tag{5}$$

где β^* — угол между плоскостью поляризации и нормалью к плоскости падения в прошедшей через пластинку волне. Значит,

$$\operatorname{tg}\beta^* = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos^2(\varphi-\psi)}.$$

Найдем $\cos(\varphi-\psi)$. Так как $\sin\psi = \sin\varphi/n$, а $\cos\psi = \sqrt{1-(\frac{\sin\varphi}{n})^2}$, то

$$\cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cdot\cos\psi + \sin\varphi\cdot\sin\psi = \frac{1}{n}(\cos\varphi\sqrt{n^2-\sin^2\varphi} + \sin^2\varphi)$$

и

$$\operatorname{tg}\beta^* = \frac{n^2\operatorname{tg}\beta}{(\sin^2\varphi + \cos\varphi\sqrt{n^2-\sin^2\varphi})^2}.$$

1.4. (Задача 1.21.) На диэлектрическую пленку с показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ по нормали к поверхности падает монохроматическая волна. Толщина пленки $d \ll \lambda$. Найти коэффициент отражения волны.

Решение Направим ось Z перпендикулярно слою вниз, так что верхняя поверхность пленки занимает плоскость $z = 0$, а нижняя — плоскость $z = d$. При падении волны на слой в пространстве возникает волновое поле в зависимости от координат и времени, в общем случае отличное от поля падающей волны. Для того чтобы найти это поле, нужно решить волновые уравнения, написанные для каждой из областей $z \leqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant d$, $z > d$, и на плоскостях $z = 0$ и $z = d$ удовлетворить граничным условиям (см. решение задачи 1.1.). Частным решением волнового уравнения является плоская волна. Понятно, что для $z < 0$ кроме падающей волны

$$\mathbf{E}^{\ell} = \mathbf{E}_0^{\ell} e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad z \leqslant 0$$

может распространяться и отраженная волна, являющаяся результатом многократных отражений от верхней и нижней границ слоя и их интерференции, которую обозначим

$$\mathbf{E}^{r} = \mathbf{R} e^{-i(\omega t + k_1 z)}, \quad z \leqslant 0.$$

Внутри слоя $0 \leqslant z \leqslant d$ поле $\mathbf{E_2}$ по тем же причинам, что и для $z \leqslant 0$, будет состоять из полей двух плоских волн, распространяющихся в двух взаимно противоположных направлениях, которое представимо в виде

$$\mathbf{E_2} = \mathbf{E}_{20} e^{-i(\omega t - k_2 z)} + \mathbf{E}'_{20} e^{-i(\omega t + k_2 z)}, \quad 0 \leqslant z \leqslant d.$$

За слоем $z \geqslant d$ может распространяться только прошедшая через слой волна. Запишем ее в виде

$$\mathbf{E^d} = \mathbf{D} e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad z \geqslant d.$$

В приведенных выше формулах учтено, что волны распространяются вдоль оси Z, поскольку падающая волна не имеет тангенциальной составляющей волнового вектора $\mathbf{k}$ по условию задачи. В каждой из волн напряженность магнитного поля связана с напряженностью электрического поля соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\omega\mu}[\mathbf{k} \times \mathbf{E}]. \tag{1}$$

Поскольку ось X лежит в плоскости верхней границы слоя, то, не умаляя общности, при нормальном падении можно считать, что вектор $\mathbf{E}^{\ell}$ направлен по X, тогда векторы напряженностей электрических полей всех остальных волн направлены по X, а напряженности магнитных полей по Y. При переходе через границу двух сред остаются непрерывными тангенциальные составляющие (т. е. проекции на границу раздела) напряженностей электрического и магнитного полей (см. решение задачи 1.1.).

Чтобы записать граничные условия, мы должны в один момент времени зафиксировать поля на границе с обеих сторон границы и приравнять их. Поскольку в нашем случае тангенциальные составляющие напряженностей являются полными напряженностями, то непрерывность электрического поля и непрерывность магнитного поля при $z = 0$ с учетом уравнения (1) выразятся следующим образом:

$$E_0^\ell + R = E_{20} + E'_{20}; \tag{2}$$

$$k_1(E_0^\ell - R) = k_2(E_{20} - E'_{20}). \tag{3}$$

А при $z = d$ будем иметь

$$E_{20}e^{ik_2d} + E'_{20}e^{-ik_2d} = De^{ik_1d}; \tag{4}$$

$$k_2(E_{20}e^{ik_2d} - E'_{20}e^{-ik_2d}) = k_1De^{ik_1d}. \tag{5}$$

При написании соотношений (2)–(5) учтено, что для всех сред $\mu = 1$.

Коэффициент отражения ρ^r есть отношение энергии, переносимой отраженной волной через единичную площадку в единицу времени, к энергии, переносимой падающей волной через единичную площадку в единицу времени. Эти энергии равны средним значениям векторов Пойнтинга соответствующих волн (см. решение задачи 1.2.). Используя результаты этой задачи, имеем: среднее значение вектора для Пойнтинга падающей волны равно

$$\bar{S}^\ell = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}(E_0^\ell)^2,$$

где амплитуда падающей волны E_0^ℓ — действительная величина. Для отраженной волны амплитуда R может быть комплексной, тогда вектор Пойнтинга выразится следующим образом:

$$|\bar{S}^r| = \frac{c}{8\pi}|Re[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]| = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}c}{8\pi}RR^* = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}|R|^2.$$

Здесь учтено, что $H^r = -c\sqrt{\varepsilon_1}Re^{-i(\omega t + k_1 z)}$.

Окончательно, коэффициент отражения таков:

$$\rho^r = \frac{|\bar{S}^r|}{|\bar{S}^\ell|} = \frac{|R|^2}{(E_0^\ell)^2}. \tag{6}$$

Из уравнений (2)–(5) выразим R через E_0^ℓ. Опуская простые арифметические вычисления, приводим окончательное выражение для R:

$$R = \frac{(k_2^2 - k_1^2)[e^{i2k_2d} - 1]E_0^\ell}{(k_2 + k_1)^2 - (k_2 - k_1)^2 e^{i2k_2d}}.$$

Поскольку

$$k_i = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_i} = \frac{\omega}{c} n_i,$$

где ε_i – диэлектрическая проницаемость, n_i – показатель преломления i-й среды, и, вводя относительный показатель преломления $n = n_2/n_1$, получаем

$$R = \frac{(n^2 - 1)(e^{i2k_2d} - 1)E_0^\ell}{(n+1)^2 - (n-1)^2 e^{i2k_2d}};$$

R представляет собой отношение комплексных чисел. Модуль такого выражения проще найти как отношение модулей числителя и знаменателя, поскольку

$$|(n^2 - 1)(e^{-i2k_2d} - 1)|^2 = (n^2 - 1)^2 4 \sin^2 k_2 d$$

и

$$|(n+1)^2 - (n-1)^2 e^{-i2k_2d}|^2 = (4n)^2 + 4(n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2 d,$$

тогда

$$|R|^2 = \frac{(n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2 d}{4n^2 + (n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2 d} (E_0^\ell)^2.$$

Для коэффициента отражения получим выражение

$$\rho^r = \frac{(n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2 d}{4n^2 + (n^2 - 1)^2 \sin^2 k_2 d}.$$

При решении задачи мы нигде не учитывали, что толщина слоя много меньше длины падающей волны λ, поэтому полученный коэффициент отражения справедлив и для толстых слоев. При $k_2 d = m\pi$ или $d = (\lambda_2/2)m$, где m — целое положительное число, λ_2 — длина волны в слое, $\rho = 0$, пленка становится прозрачной. Если пленка тонкая, так что $k_2 d \ll 1$, что соответствует $\frac{2\pi}{\lambda} n_2 d \ll 1$, то $\sin^2 k_2 d \approx (k_2 d)^2$, а в знаменателе вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым, тогда

$$\rho^r = \frac{(n^2 - 1)^2}{4n^2} \cdot \frac{4\pi^2 n^2 d^2}{\lambda^2} = \pi^2 (n^2 - 1)^2 \frac{d^2}{\lambda^2}.$$

1.5. (Задача 1.22.) Вывести формулы Френеля и найти выражение коэффициентов отражения и прохождения через заданные угол падения φ и коэффициент преломления n . Рассмотреть случай полного внутреннего отражения.

Решение Для $E_\perp$ – волны (1 – отраженная, 2 – преломленная; индексы $\perp$ и $\|$ относятся к перпендикулярным и параллельным компонентам поля, лежащим в плоскости падения волны):

$$E_1^\perp = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \varphi)} E_0^\perp = \frac{\cos\varphi - \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}}{\cos\varphi + \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}} E_0^\perp;$$

$$E_2^\perp = \frac{2\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\psi + \varphi)} E_0^\perp = \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi + \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}} E_0^\perp.$$

Для $E_\|$-волны:

$$E_1^\| = \frac{\operatorname{tg}(\psi - \varphi)}{\operatorname{tg}(\psi + \varphi)} E_0^\| = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} - n^2\cos\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} + n^2\cos\varphi} E_0^\|;$$

$$E_2^\| = \frac{2\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\psi + \varphi)\cos(\psi - \varphi)} E_0^\| = \frac{2n\cos\varphi}{n^2\cos\varphi + \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}} E_0^\|.$$

В этих формулах φ – угол преломления ($\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{n}$). Коэффициенты отражения R и прохождения T равны соответственно $R = \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^2$, $T = n\left(\frac{E_2}{E_0}\right)^2$, при этом $R + T\left(\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\right) = 1$, где косинусы учитывают сечения пучков.

В случае полного внутреннего отражения выражение под корнем отрицательно, а $\psi = \pi/2$. Коэффициенты отражения и прохождения по амплитуде оказываются комплексными, т. е. отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей.

1.6. (Задача 1.23.) При каком угле падения волна с произвольной поляризацией после отражения от плоской границы диэлектриков становится линейно поляризованной?

Решение Для определения амплитуд отраженной и проходящей волн используются граничные условия: непрерывность проекций на плоскость раздела двух сред векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ возникающего волнового поля. При этом электрическое поле каждой волны разлагают на две составляющие. Одна из них лежит в плоскости падения, другая перпендикулярна этой плоскости. Они обозначаются символами $\|$ и $\perp$

соответственно. Отношение амплитуд соответствующих проекций отраженной R и падающей $\mathcal{E}$ волн, называемые коэффициентами Френеля, равны

$$\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp} = \frac{n_1 \cos\phi - n_2 \cos\psi}{n_1 \cos\phi + n_2 \cos\psi}, \quad \frac{R_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} = \frac{n_2 \cos\phi - n_1 \cos\psi}{n_2 \cos\phi + n_1 \cos\psi},$$

где n_1, n_2 — показатели преломления первой и второй среды соответственно, ϕ, ψ — угол падения и преломления. Углы отсчитываются от нормали к плоскости раздела, волна падает из первой среды во вторую. Поскольку $n_1 \sin\phi = n_2 \sin\psi$ (см. решение задачи 1.1.), то коэффициенты Френеля можно представить в виде

$$\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp} = -\frac{\sin(\phi - \psi)}{\sin(\phi + \psi)}, \quad \frac{R_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} = \frac{\mathrm{tg}(\phi - \psi)}{\mathrm{tg}(\phi + \psi)}.$$

При $\phi + \psi = \frac{\pi}{2}$ знаменатель $\mathrm{tg}(\phi + \psi)$ во второй формуле обращается в бесконечность. В этом случае $R_\parallel = 0$. Это значит, что при некотором угле падения отражение волны исчезает, если электрический вектор падающей волны лежит в плоскости падения. Отношение $R_\perp/\mathcal{E}_\perp$ никогда не обращается в нуль, за исключением случая

$$\mathrm{tg}\,\phi = \sqrt{\mu_2(\mathcal{E}_2\mu_1 - \mathcal{E}_1\mu_2)/\mu_1(\mathcal{E}_1\mu_1 - \mathcal{E}_2\mu_2)}, \quad \mu \neq 1.$$

Найдем угол ϕ_B (угол Брюстера), при котором $R_\parallel = 0$. Поскольку $\phi_B + \psi_B = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\phi_B = \sin\psi_B = n_1 \sin\phi_B/n_2$, откуда $\mathrm{tg}\,\phi_B = n_2/n_1$. Если волна с произвольной поляризацией падает под углом ϕ_B, то составляющая с электрическим вектором $E_\parallel$ отражаться не будет. В отраженной волне будет только составляющая $R_\perp$, т. е. волна окажется линейно поляризованной и притом перпендикулярна плоскости падения.

1.7. (Задача 1.24.) Показать, что после полного внутреннего отражения от границы диэлектрика линейно поляризованная волна приобретает в общем случае эллиптическую поляризацию. При каких условиях поляризация будет круговой?

Решение

При полном внутреннем отражении коэффициенты Френеля комплексны и для $R_\perp/\mathcal{E}_\perp$ и $R_\parallel/\mathcal{E}_\parallel$ имеют вид *

$$\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp} = \frac{\cos\phi + i\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}{\cos\phi - i\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}, \quad \frac{R_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} = \frac{n^2\cos\phi + i\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}{n^2\cos\phi - i\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}, \tag{1}$$

*При этом предполагается, что амплитуда падающей волны имеет вид $E_0(\mathbf{r}, t) = E_0\,\mathrm{e}^{i(k_{x0}x + k_{z0}z - \omega t)}$. Ту же волну можно описывать как $E_0(\mathbf{r}, t) = E_0\,\mathrm{e}^{i(-k_{x0}x - k_{z0}z + \omega t)}$ – тогда в коэффициентах Френеля знаки при квадратном корне изменятся на противоположные.

где $n = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления, ϕ — угол падения, причем $\sin\phi > n$. Комплексность выражений (1) означает, что при полном отражении фаза каждой из волн испытывает скачок. Действительно, комплексные коэффициенты можно представить как

$$R_\perp/\mathcal{E}_\perp = Ae^{i\delta_\perp/2}/Ae^{-i\delta_\perp/2} = e^{i\delta_\perp},$$

$$R_\parallel/\mathcal{E}_\parallel = Be^{i\delta_\parallel/2}/Be^{-i\delta_\parallel/2} = e^{i\delta_\parallel},$$

где $A, B, \delta_\perp, \delta_\parallel$ — величины вещественные, причем

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}{\cos\phi}, \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_\parallel}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}{n^2\cos\phi}. \tag{2}$$

Отраженную волну $\mathbf{E}^r$ можно записать в виде

$$\mathbf{E}^\mathbf{r} = (R_\parallel \mathbf{e}_\xi + R_\perp \mathbf{e}_\eta)e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},$$

где $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ — единичные векторы, направленные вдоль составляющих напряженности электрического поля, лежащих соответственно в плоскости падения $\mathbf{R}_\parallel$ и перпендикулярного к этой плоскости $\mathbf{R}_\perp$, или

$$\mathbf{E}^\mathbf{r} = \mathcal{E}_\parallel e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\delta_\parallel)}\mathbf{e}_\xi + \mathcal{E}_\perp e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\delta_\perp)}\mathbf{e}_\eta. \tag{3}$$

Амплитуды $\mathcal{E}_\parallel$, $\mathcal{E}_\perp$ падающей волны вещественные, так как по условию она линейно поляризована. Таким образом, отраженная волна (3) есть суперпозиция двух линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях и сдвинутых по фазе на величину $\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp$ волн. Для выяснения характера поляризации отраженной волны запишем ее в действительном виде в проекциях на оси ξ, η, выбранных соответственно вдоль $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^r_\xi &= \mathcal{E}_\parallel \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \delta_\parallel), \\ \mathcal{E}^r_\eta &= \mathcal{E}_\perp \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \delta_\perp). \end{aligned} \tag{4}$$

Как видим, величины проекций в каждой точке пространства меняются со временем по гармоническому закону. Чтобы найти, какую траекторию описывает конец вектора $\mathbf{E}^\mathbf{r}$, исключим в выражениях (4) время t. Для этого представим выражение (4) в виде

$$\mathcal{E}^r_\xi/\mathcal{E}_\parallel = \cos(\mathbf{kr} - \omega t)\cos\delta_\parallel - \sin(\mathbf{kr} - \omega t)\sin\delta_\parallel; \tag{5}$$

$$\mathcal{E}^r_\eta/\mathcal{E}_\perp = \cos(\mathbf{kr}-\omega t)\cos\delta_\perp - \sin(\mathbf{kr}-\omega t)\sin\delta_\perp. \tag{6}$$

Умножив уравнение (5) на $\cos\delta_\perp$, а уравнение (6) на $\cos\delta_\parallel$, вычтем одно из другого и получим

$$\frac{\mathcal{E}^r_\xi}{\mathcal{E}_\parallel}\cos\delta_\perp - \frac{\mathcal{E}^r_\eta}{\mathcal{E}_\perp}\cos\delta_\parallel = -\sin(\mathbf{kr}-\omega t)\sin(\delta_\parallel-\delta_\perp). \tag{7}$$

Аналогично, исключая $\sin(\mathbf{kr}-\omega t)$ из уравнений (5) и (6), получаем

$$\frac{\mathcal{E}^r_\xi}{\mathcal{E}_\parallel}\sin\delta_\perp - \frac{\mathcal{E}^r_\eta}{\mathcal{E}_\perp}\sin\delta_\parallel = -\cos(\mathbf{kr}-\omega t)\sin(\delta_\parallel-\delta_\perp). \tag{8}$$

Возведя в квадрат обе части уравнений (7), (8) и сложив их, получаем

$$\left(\frac{\mathcal{E}^r_\xi}{\mathcal{E}_\parallel}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}^r_\eta}{\mathcal{E}_\perp}\right)^2 - 2\frac{\mathcal{E}^r_\xi\mathcal{E}^r_\eta}{\mathcal{E}_\parallel\mathcal{E}_\perp}\cos(\delta_\parallel-\delta_\perp) = \sin^2(\delta_\parallel-\delta_\perp). \tag{9}$$

В общем случае это уравнение эллипса с главными осями, повернутыми относительно осей ξ,η на некоторый угол. Значит, конец вектора, вращаясь, описывает эллипс. Такую волну называют эллиптически поляризованной.

Если сдвиг фаз $\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp = \frac{\pi}{2}$ и $\mathcal{E}_\parallel = \mathcal{E}_\perp = \mathcal{E}$, эллипс превращается в окружность

$$\left(\frac{\mathcal{E}^r_\xi}{\mathcal{E}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}^r_\eta}{\mathcal{E}}\right)^2 = 1$$

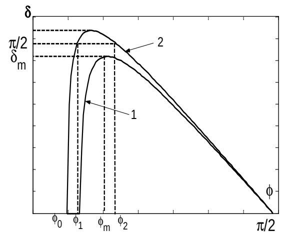
и поляризация будет круговой. Найдем, какой величины должен быть показатель преломления диэлектрической среды, чтобы мог осуществиться сдвиг фаз $\delta = \frac{\pi}{2}$.

С помощью формул (2) найдем

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\phi\sqrt{\sin^2\phi - n^2}}{\sin^2\phi}. \tag{10}$$

При полном отражении угол ϕ меняется от ϕ_0, определяемом из уравнения $\sin\phi_0 = n$, до $\pi/2$. При этом из соотношения (10) видно, что на концах этого интервала $\delta = 0$, а внутри – положительная функция. Значит, внутри интервала $[\phi = \phi_0,\ \ \phi = \pi/2]$ $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$, а с ним и δ достигает максимума.

Максимальный сдвиг δ_m для конкретного диэлектрика может и не



достигать значения $\pi/2$ ни при каком угле падения. Тогда на таком диэлектрике нельзя получить круговую поляризацию для отраженной волны (см. рисунок, кривая 1). В то же время, если $\delta_m > \pi/2$, то есть два угла падения – ϕ_1, ϕ_2 – для данного диэлектрика, при которых сдвиг фаз равен $\pi/2$ (кривая 2).

Найдем из уравнения (10) угол $\phi = \phi_m$, при котором δ достигает значения δ_m, а затем, подставляя $\cos\phi_m$ и $\sin\phi_m$ в это уравнение и приравнивая δ_m значению $\pi/2$, находим условие для n.

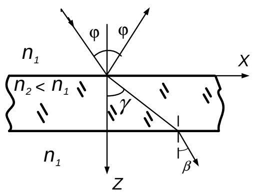
Чтобы найти угол ϕ_m, достаточно от правой части уравнения (10) взять производную по ϕ и приравнять ее нулю. Опустив простые выкладки, напишем результат:

$$\cos\phi_m = \left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_m}{2} = \frac{1-n^2}{2n}, \quad n = \frac{n_2}{n_1},$$

откуда $(1-n^2)/2n = tg(\pi/4) = 1$ и, значит, $n = \sqrt{2}-1 = 0,414$. Среда 2 оптически менее плотная $n_2 < n_1$. В справочниках, как правило, даются показатели преломления n' веществ относительно вакуума. Считая вторую среду вакуумом, для показателя преломления первой среды n'_1 получаем условие $n'_1 = 1/n_1 > 1/0,414 = 2,41$.

1.8. (Задача 1.25.) Луч света падает на поверхность плоскопараллельной пластинки толщиной d, под углом ϕ, большим угла полного внутреннего отражения. Найти интенсивность света, прошедшего через пластинку. Электрическое поле волны параллельно поверхности пластинки.

Решение Поскольку электрическое поле параллельно поверхности пластинки, то можно считать, что оно направлено по оси Y (см. рисунок), т. е. существует только одна составляющая поля, перпендикулярная плоскости падения (z, x). Обозначим диэлектрические проницаемости среды и пластинки соответственно ε_1 и ε_2. Магнитные проницаемости положим $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Падающую ℓ, отраженную r и прошедшую d через пластинку волны запишем в следующем виде:



$$E^\ell = E_0^\ell e^{i(\omega t - k_1 x \sin\phi - k_1 z\cos\phi)}, \quad z \leqslant 0,$$
$$E^r = Re^{i(\omega t - k_1 x \sin\phi + k_1 z\cos\phi)}, \quad z \leqslant 0,$$
$$E^d = Re^{i(\omega t - k_1 x \sin\beta - k_1 z\cos\beta)}, \quad z \geqslant 0.$$

Поле внутри пластинки (см. решение задач 1.1., 1.4.)

$$E_2 = A_1 e^{i(\omega t - k_2 x\sin\gamma - k_2 z\cos\gamma)} + A_2 e^{i(\omega t - k_2 x\sin\gamma + k_2 z\cos\gamma)}, \quad 0 \leqslant z \leqslant d.$$

Здесь угол γ – это комплексная величина, отвечающая соотношениям $k_2 \sin\gamma = k_1 \sin\phi$, $\quad k_2 \cos\gamma = ik_1\sqrt{\sin^2\phi - (n_2/n_1)^2}$. При этом действительная часть γ равна $\pi/2$, а мнимая тем больше, чем сильнее угол падения превышает угол полного внутреннего отражения. Для всех волн $\mathbf{H} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k} \times \mathbf{E}]$, k_1 — значение волнового вектора волн в среде, k_2 — в слое. Обозначения углов понятны из рисунка. Из граничных условий для $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ на верхней границе пластинки $z = 0$ следует

$$E_0^\ell e^{i(\omega t - k_1 x \sin\phi)} + Re^{i(\omega t - k_1 x\sin\phi)} = A_1 e^{i(\omega t - k_2 x \sin\gamma)} + A_2 e^{i(\omega t - k_2 x \sin\gamma)},$$

или с учетом $k_1 \sin\phi = k_2 \sin\gamma$

$$E_0^\ell + R = A_1 + A_2; \tag{1}$$

$$k_1 \cos\phi(E_0^\ell - R) = k_2 \cos\gamma(A_1 - A_2). \tag{2}$$

При $z = d$ граничные условия дают

$$A_1 e^{-ik_2 d\cos\gamma} + A_2 e^{ik_2 d\cos\gamma} = De^{-ik_1 d\cos\phi}; \tag{3}$$

$$k_2\cos\gamma(A_1 e^{-ik_2 d\cos\gamma} - A_2 e^{ik_2 d\cos\gamma}) = k_1 D\cos\phi e^{-ik_1 d\cos\phi}. \tag{4}$$

При написании условий (3), (4) использовано $\beta = \phi$, потому что $k_1 \sin\phi = k_2 \sin\gamma = k_1 \sin\beta$. Из уравнений (1)–(4) после несложных преобразований найдем

$$\frac{D}{E_0^\ell} = \frac{2i\alpha\varkappa e^{i\alpha d}}{(\alpha^2 - \varkappa^2)\operatorname{sh}\varkappa d + 2i\alpha\varkappa\operatorname{ch}\varkappa d}.$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = k_1\cos\phi = \frac{\omega}{c} n_1 \cos\phi,$$

$$\varkappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\sin^2\phi - n_2^2}.$$

Поскольку $n_2 < n_1$, то

$$k_2\cos\gamma = \frac{\omega}{c} n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\phi} = i\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\sin^2\phi - n_2^2},$$

т. е. $k_2\cos\gamma = i\varkappa$. Если пластинка — это вакуумный слой, а у среды диэлектрическая проницаемость ε, то $n_1^2 = \varepsilon$, $n_2^2 = 1$ и

$$\varkappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\sin^2\phi - 1}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\cos\phi.$$

Интенсивность света, прошедшего через слой, найдем (см. решение задачи 1.4.) из

$$\frac{I}{I_0} = \frac{|D|^2}{|E_0^\ell|^2} = \frac{|2i\alpha\varkappa e^{i\alpha d}|^2}{|(\alpha^2 - \varkappa^2)\operatorname{sh}\varkappa d + 2i\alpha\varkappa \operatorname{ch}\varkappa d|^2} =$$

$$= \frac{4\varkappa^2\alpha^2}{4\varkappa^2\alpha^2 \operatorname{ch}^2\varkappa d + (\varkappa^2 - \alpha^2)^2 \operatorname{sh}^2\varkappa d}.$$

Окончательно

$$I = I_0\left[\operatorname{ch}^2\varkappa d + \left(\frac{\varkappa^2 - \alpha^2}{2\varkappa\alpha}\right)^2 \operatorname{sh}^2\varkappa d\right].$$

1.9. (Задача 1.28.) Плоская монохроматическая линейно поляризованная волна падает по нормали на проводящую бесконечно тонкую пластину, для которой имеет место закон Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, где $\mathbf{j}$ — ток через единицу длины, а σ — соответствующая проводимость. Найти коэффициент прохождения волны.

Решение Пусть проводящая поверхность будет плоскостью (X, Y). Поскольку волна падает по нормали, то напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ лежит в плоскости (X, Y) и, не умаляя общности, ось X можно направить вдоль $\mathbf{E}$. Тогда магнитное поле будет направлено по оси Y. Граничные условия в этой ситуации будут следующими: тангенциальная составляющая напряженности электрического поля остается непрерывной, тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ (что следует из третьего уравнения системы уравнений Максвела задачи Р. 1.1.) будет терпеть разрыв $H_{1y}| - H_{2y}| = \frac{4\pi}{c}j$, потому что по проводящей поверхности вдоль оси X потекут токи $j = \sigma E$.

Если обозначить значками ℓ, r, d соответственно падающую, отраженную и прошедшую волны, то граничные условия (см. решение задач 1.2., 1.4.) будут иметь вид

$$E^\ell + E^r = E^d,$$

$$E^\ell - E^r - E^d = \frac{4\pi\sigma}{c}(E^\ell + E^r),$$

откуда

$$\frac{|E^d|^2}{|E^\ell|^2} = \frac{1}{(1 + 2\pi\sigma/c)^2}.$$