Кратные интегралы

Методическое пособие

В пособии изложены теоретические сведения, необходимые для решения задач по теме "Кратные интегралы", приведены примеры решения задач, снабженные методическими указаниями, а также подобраны задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначается для студентов II курса ФИТ НГУ.

Составитель Е. Д. Доманова.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение и основные свойства

Определение. Множество $I = \{x \in R^n : \ a_i \leq x_i \leq b_i, \ 1 \leq i \leq n\}$ называется стандартным брусом в R^n (n-мерным промежутком). Число $|\,I\,| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ называется n-мерным объемом бруса.

Таким образом, стандартный брус в R^n есть декартово произведение отрезков, лежащих на координатных осях. Если размерность пространства ясна из контекста, слово "n-мерный"будем опускать.

Разбиения T_i координатных отрезков $[\,a_i,\, b_i\,], \ 1 \leq i \leq n$, с диаметрами $\lambda\,(T_i)$ порождают разбиение бруса I на более мелкие брусы I^k, каждый из которых является декартовым произведением отрезков из разбиений T_i, $1 \leq i \leq n$.

Определение. Пусть T – разбиение бруса I. Диаметром разбиения T называется величина $\lambda\,(T) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda\,(T_i)$.

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{K}$ – совокупность точек ξ_k, таких что $\xi_k \in I^k$; функция $f : I \to R$ ограничена на множестве I.

Определение. Функция f называется интегрируемой по Риману на промежутке I, если существует предел при $\lambda\,(T) \to 0$ интегральных сумм $\sum_{k=1}^{K} f\,(\xi_k)|\,I^k|$. Указанный предел называется интегралом Римана от функции f по промежутку I и обозначается $\int\limits_I f\,(x)\,dx$.

Заметим, что указанный предел не зависит от выбора разбиений T и точек $\{\xi_k\}_{k=1}^{K}$. Чтобы подчеркнуть, что речь идет об интеграле от функции многих (двух, трех) переменных, говорят, что это кратный (двойной, тройной) интеграл, и используют более развернутые обозначения, например, $\int\limits_I f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$.

Замечание. Данное определение аналогично определению интеграла Римана в одномерном случае. Однако для функции одной переменной имеет смысл как символ $\int\limits_a^b f\,dx$, так и символ $\int\limits_b^a f\,dx = -\int\limits_a^b f\,dx$, то есть интеграл определяется по направленному промежутку. В пространстве $R^n,\ n \geq 2$, понятие направленного промежутка не вводится.

Положим $\quad m_k = \inf\limits_{x \in I^k} f(x), \quad M_k = \sup\limits_{x \in I^k} f(x), \quad 1 \leq k \leq K,$

$$s(T,f) = \sum_{k=1}^{K} m_k \cdot |\,I^k|, \quad S(T,f) = \sum_{k=1}^{K} M_k \cdot |\,I^k|,$$

$$\underline{\Im} = \sup_T s(T,f), \quad \overline{\Im} = \inf_T S(T,f).$$

Числа $\underline{\Im}$ и $\overline{\Im}$ называются нижним и верхним интегралами Дарбу. Для ограниченной функции $f : I \to R$ имеет место неравенство $\underline{\Im} \leq \overline{\Im}$.

Критерий Дарбу. Функция $f : I \to R$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и $\underline{\Im} = \overline{\Im}$.

Определение. Множество $M \subset R^n$ называется множеством меры нуль (в смысле Лебега), если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества M не более чем счетной системой n-мерных промежутков $\{I^k\}$, сумма объемов которых $\sum_{k=1}^{K} |\,I^k|$ не превышает ε.

Свойства множеств меры нуль

1. Объединение конечного или счетного семейства множеств меры нуль есть множество меры нуль. В частности, всякое не более чем счетное множество точек есть множество меры нуль.

2. Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

3. Пусть P – замкнутое ограниченное множество в R^n и функция f непрерывна на P. Тогда график функции $y = f(x)$ на P, то есть множество $M = \{\,(x,y) : x \in P,\ y = f(x)\}$ есть множество меры нуль.

Замечание. Никакое открытое множество не является множеством меры нуль.

Определение. Характеристической функцией множества $D \subset R^n$ называется функция $\chi_D : R^n \to R$ такая, что $\chi_D = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$

Определение. Множество $D \subset R^n$ называется жордановым, если оно ограничено и его характеристическая функция интегрируема на любом промежутке I, содержащем D. Величина $\int\limits_I \chi_D \, dx$ называется жордановой мерой (объемом) множества D и обозначается $|\, D \,|$.

Можно показать, что величина $|\, D \,|$ не зависит от выбора промежутка I, следовательно, определение корректно.

Брус $I \subset R^n$ является жордановым множеством, и определенный выше его объем $|\, I \,| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ совпадает с мерой $|\, I \,| = \int\limits_I \chi_I \, dx$.

Можно показать, что множество является жордановым, если и только если оно ограничено и множество его граничных точек является множеством меры нуль в смысле Лебега.

Свойства жордановых множеств

1. Объединение и пересечение конечного числа жордановых множеств есть жорданово множество.

2. Дополнение жорданова множества до любого содержащего его бруса есть жорданово множество.

3. Если D – жорданово множество объема нуль, то любое его подмножество есть жорданово множество объема нуль.

4. Если D – замкнутое жорданово множество, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны и $\varphi(x) \le \psi(x)$ на D, то множество $M = \{\, (x, y) : x \in D,$ $\varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ жорданово. В частности, график функции $\varphi(x)$ на D есть жорданово множество объема нуль.

5. Множество $D \subset R^2$, границей которого является спрямляемая (в частности, кусочно-гладкая) замкнутая кривая без самопересечений, и множество $G \subset R^3$, границей которого является кусочно-гладкая замкнутая поверхность без самопересечений, являются жордановыми множествами.

6. Если D – жорданово множество, то его замыкание $\overline{D}$ и внутренность D^o также жордановы и объемы всех указанных множеств равны.

Определение. Функция $f : R^n \to R$ называется интегрируемой по Риману на множестве $D \subset R^n$, если D – жорданово множество и функция $f \cdot \chi_D$ интегрируема по Риману на промежутке I, содержащем D. Число $\int\limits_I f \cdot \chi_D \, dx$ называется интегралом Римана от функции f по множеству D и обозначается $\int\limits_D f(x)\, dx$.

Можно показать, что существование интеграла $\int\limits_D f(x)\, dx$ и его величина не зависят от выбора промежутка I, если $D \subset I$.

Замечание. Из определения и свойства 6 жордановых множеств следует, что функция f интегрируема или нет на всех трех множествах D, $\overline{D}$ и D^o одновременно.

Критерий Лебега интегрируемости по Риману. Пусть D – жорданово множество. Функция $f : D \to R$ интегрируема по Риману на множестве D тогда и только тогда, когда f ограничена и множество ее точек разрыва имеет меру нуль (в смысле Лебега).

Следствие 1. Ограниченная функция, имеющая не более чем счетное множество точек разрыва на жордановом множестве, интегрируема по Риману на этом множестве.

Следствие 2. Если функция f интегрируема на жордановом множестве, то она интегрируема на любом его жордановом подмножестве.

Свойства интеграла Римана (D и D_i – жордановы множества).

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на множествах D_1 и D_2, то она интегрируема и на их объединении $D_1 \bigcup D_2$; если при этом множества D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек (не перекрываются), то

$$\int\limits_{D_1 \bigcup D_2} f(x)\,dx = \int\limits_{D_1} f(x)\,dx + \int\limits_{D_2} f(x)\,dx \quad \text{(аддитивность).}$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на множестве D. Тогда

2. для любых чисел a и b функция $a\,f(x) + b\,g(x)$ интегрируема на множестве D и

$$\int\limits_{D} (a\,f(x) + b\,g(x))\,dx = a\int\limits_{D} f(x)\,dx + b\int\limits_{D} g(x)\,dx \quad \text{(линейность);}$$

3. произведение $f \cdot g$ является интегрируемой на D функцией;

4. если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in D$, то

$$\int\limits_{D} f(x)\,dx \le \int\limits_{D} g(x)\,dx \quad \text{(монотонность);}$$

5. функция $|f(x)|$ интегрируема на множестве D и

$$\Big|\int\limits_{D} f(x)\,dx\Big| \le \int\limits_{D} |f(x)|\,dx\,;$$

6. если $g(x) \ge 0$ для любого $x \in D$, $m = \inf\limits_{D} f(x)$, $M = \sup\limits_{D} f(x)$, то

$$m\int\limits_{D} g(x)\,dx \le \int\limits_{D} (f \cdot g)(x)\,dx \le M\int\limits_{D} g(x)\,dx\,.$$

В частности, если $g(x) = 1$, $|\,D\,|$ – мера множества D, то

$$m\,|\,D\,| \le \int\limits_{D} f(x)\,dx \le M\,|\,D\,|\,.$$

Если множество D связно и функция $f(x)$ непрерывна на нем, то найдется точка $\xi \in D$ такая, что

$$\int\limits_D (f \cdot g)\,(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_D g\,(x)\,dx \quad \text{(теорема о среднем)}.$$

Теорема Фубини. Пусть X – брус в R^n, Y – брус в R^m и функция f интегрируема по Риману на множестве $X \times Y$. Определим функцию $\Psi\,(x)$, равную $\int\limits_Y f\,(x,y)\,dy$ для тех значений $x \in X$, для которых этот интеграл существует, и равную произвольному числу из отрезка $[\,\underline{\Im}\,(\,f\,(x,y)),\, \overline{\Im}\,(\,f\,(x,y))\,]$ для тех $x \in X$, для которых указанный интеграл не существует. Определим функцию $\Phi\,(y)$, равную $\int\limits_X f\,(x,y)\,dx$ для тех значений $y \in Y$, для которых этот интеграл существует, и равную произвольному числу из отрезка $[\,\underline{\Im}\,(\,f\,(x,y)),\, \overline{\Im}\,(\,f\,(x,y))\,]$ для тех $y \in Y$, для которых указанный интеграл не существует. Тогда функция $\Psi\,(x)$ интегрируема по Риману на множестве X, функция $\Phi\,(y)$ интегрируема по Риману на множестве Y и

$$\int\limits_{X \times Y} f\,(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_Y \Phi\,(y)\,dy = \int\limits_X \Psi\,(x)\,dx\,.$$

В отличие от кратного интеграла по $(n+m)$-мерному промежутку $X \times Y$, последовательно вычисляемые интегралы $\int\limits_Y \Phi\,(y)\,dy$ и $\int\limits_X \Psi\,(x)\,dx$ принято называть повторными интегралами от функции $f\,(x,y)$ и обозначать соответственно

$$\int\limits_Y dy \int\limits_X f\,(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_X dx \int\limits_Y f\,(x,y)\,dy.$$

Если $n = m = 1$, то теорема Фубини сводит вычисление двойного интеграла к последовательному вычислению двух однократных интегралов. В общем случае применение этой теоремы сводит вычисление кратного интеграла к последовательному вычислению $n+m$ однократных интегралов. Такой переход называют расстановкой пределов интегрирования в определенном порядке.

Формулировка теоремы Фубини для произвольного жорданова множества становится довольно громоздкой, поэтому ограничимся частным, но наиболее часто встречающимся в задачах случаем.

Теорема 1. Пусть D – замкнутое жорданово множество, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на D и $\varphi(x) \le \psi(x)$. Функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $M = \{(x,y) : x \in D,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$. Тогда

$$\int\limits_M f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Заметим, что в условиях теоремы множество M жорданово (свойство 4 жордановых множеств), интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$ существует для всех точек x из множества D и является непрерывной на множестве D функцией, поэтому все указанные в теореме интегралы существуют.

Следствие 1. Пусть $x \in R^1$, $y \in R^n$, жорданово множество $D \subset R^{n+1}$ представимо в виде $[a,b] \times D_x$, где множество $D_x = \{y : (x,y) \in D\}$ жорданово при любом $x \in [a,b]$. Функция $f : D \to R$ зависит только от переменной x, то есть $f(x,y) = f^*(x)$. Тогда в силу теоремы Фубини

$$\int\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{D_x} f^*(x)\,dy.$$

Так как функция $f^*(x)$ не зависит от переменной интегрирования y, то

$$\int\limits_{D_x} f^*(x)\,dy = f^*(x) \int\limits_{D_x} dy = f^*(x) \cdot |\,D_x\,|.$$

Итак, в данном случае кратный интеграл сводится к однократному :

$$\int\limits_D f\,(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b f^*(x)\cdot |\,D_x\,|dx.$$

Следствие 2. Если $f(x_1,...,x_n) = f_1(x_1)\cdot ...\cdot f_n(x_n)$ и f_i непрерывны на $[\,a_i,\,b_i\,]$ для всех i от 1 до n, то на брусе $I = \prod_{i=1}^n [\,a_i,\,b_i\,]$

$$\int\limits_I f\,(x)\,dx = \prod_{i=1}^n \int\limits_{a_i}^{b_i} f_i\,(x_i)\,dx_i.$$

Следствие 3. Пусть $x\in R^n$, $y\in R^1$, жорданово множество $D\subset R^{n+1}$ симметрично относительно гиперплоскости $y=0$, то есть вместе с каждой точкой (x,y) оно содержит и точку $(x,-y)$. Если интегрируемая на множестве D функция $f(x,y)$ нечетна по переменной y, то есть $f(x,-y) = -f(x,y)$, то

$$\int\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Если функция $f(x,y)$ четна по переменной y, то есть $f(x,y) = f(x,-y)$, и $D_+ = D\,\bigcap\,\{\,y\geq 0\,\}$, то

$$\int\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\int\limits_{D_+} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Двойной интеграл

Функцию $f\,:\,R^2\,\rightarrow\,R^1$ будем обозначать $f\,(x,y)$; двумерный брус будем называть прямоугольником, а двумерный объем – площадью.

Определение. Пусть функции $\varphi\,(x)$ и $\psi\,(x)$ непрерывны на промежутке $[\,a,\,b\,]$ и $\varphi\,(x) < \psi\,(x)$ для всех x из интервала $(\,a,\,b\,)$. Множество

$G = \{ (x, y) : \ a < x < b \ , \ \varphi (x) < y < \psi (x) \}$ будем называть областью, стандартной относительно оси Ox.

Стандартная относительно той или иной оси область является жордановым множеством. Геометрически область G, стандартная относительно оси Ox, характеризуется следующим образом: проекцией G на ось Ox является интервал $(\, a,\, b\,)$ и для любой точки x_0 из этого интервала прямая $x = x_0$ пересекает область G по единственному интервалу $\{ (x, y) : x = x_0 \ , \ \varphi (x_0) < y < \psi (x_0) \}$.

Если интегрирование ведется по замыканию стандартной (относительно оси Ox) области, то задача перехода от двойного интеграла к повторному решается при помощи следующего варианта теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $D = \{ (x, y) : \ a \le x \le b \ , \ \varphi (x) \le y \le \psi (x) \}$, где функции $\varphi (x)$ и $\psi (x)$ непрерывны на $[\, a,\, b]$, и $\varphi (x) \le \psi (x)$. Функция $f (x, y)$ непрерывна на множестве D. Тогда

$$\int\limits_D f (x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi (x)}^{\psi (x)} f (x, y)\, dy.$$

Этот переход от двойного интеграла к повторному можно описать так: считая x параметром, вычисляем интеграл по переменной y в пределах от $\varphi (x)$ до $\psi (x)$, затем полученную функцию $J(x)$ интегрируем по интервалу $(a,\, b)$ изменения переменной x. Таким образом, для расстановки пределов интегрирования необходимо описать множество D, стандартное относительно той или иной оси, системой неравенств специального вида: $\{ a \le x \le b \ , \ \varphi (x) \le y \le \psi (x) \}$ или $\{ c \le y \le d \ , \ \alpha (y) \le x \le \beta (y) \}$.

Пример. Область D ограничена кривыми $y = x^2$ и $y = x$. Расставим в интеграле $\int\limits_D f (x, y)\, dx\, dy$ пределы интегрирования.

Замечание. Если множество D описано как "область, ограниченная данными линиями", то эта область должна быть ограниченной, то есть должна лежать в некотором квадрате, и ее граница должна содержать невырожденные дуги всех указанных кривых, то есть ни одна кривая в условии не должна быть лишней. Если этими требованиями область однозначно не определяется, то задается расположение области относительно осей координат либо указывается точка, принадлежащая рассматриваемой области.

Решение. Множество D является замыканием области, стандартной как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy, и его можно описать системами неравенств специального вида:

$$\overline{D} = \{\, 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x \,\} = \{\, 0 \le y \le 1,\ y \le x \le \sqrt{y} \,\}.$$

Тогда по теореме 2

$$\int\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dy.$$

Если множество D не является замыканием стандартной области, то следует представить его в виде конечного объединения неперекрывающихся (без общих внутренних точек) множеств D_k, $1 \le k \le K$, каждое из которых является замыканием стандартной области. Тогда

$$\int\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Желательно, чтобы количество компонент D_k было минимальным, но на практике важнее то, что функции $\varphi(x)$, определяющие пределы интегрирования, задаются достаточно простыми аналитическими выражениями. Это может привести к необходимости дополнительного разбиения множеств D_k.

Пример. Область D лежит в полуплоскости $x \geq 0$ и ограничена кривыми $3\,|\,y\,| = x^2$ и $x^2 + y^2 = 4$. В интеграле $\int\limits_D f\,(x,y)\,dx\,dy$ расставим пределы интегрирования в том и другом порядке.

Решение. Опишем множество D системой неравенств:

$$\overline{D} = \{\, x \geq 0,\ -x^2 \leq 3y \leq x^2,\ x^2 + y^2 \leq\ 4\}.$$

Приведем полученные неравенства к стандартному виду:

$$\overline{D} = \{\, 0 \leq x \leq 2,\ \varphi\,(x) \leq y \leq \psi(x)\,\}, \quad \text{где}$$

$$\varphi\,(x) = \max\,\{\, -x^2/3\,;\, -\sqrt{4-x^2}\,\}\,,\ \psi\,(x) = \min\,\{\, x^2/3\,;\, \sqrt{4-x^2}\,\},$$

$$\text{или} \quad \overline{D} = \{\, -1 \leq y \leq 1,\ \sqrt{|3y|} \leq y \leq \sqrt{4-y^2}\,\}.$$

Разобьем интервалы изменения первой координаты так, чтобы границы изменения второй координаты записывались простыми аналитическими выражениями, а именно:

$$\overline{D} = \{\, 0 \leq x \leq \sqrt{3},\ -x^2/3 \leq y \leq x^2/3\}\bigcup$$

$$\bigcup\{\, \sqrt{3} \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$$\text{или} \quad \overline{D} = \{\, -1 \leq y \leq 0,\ \sqrt{-3y} \leq y \leq \sqrt{4-y^2}\,\}\bigcup$$

$$\bigcup\{\, 0 \leq y \leq 1,\ \sqrt{3y} \leq y \leq \sqrt{4-y^2}\,\}.$$

Теперь расставим пределы интегрирования:

$$\int\limits_D f\,(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{-x^2/3}^{x^2/3} f\,(x,y)\,dy\, + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\,(x,y)\,dy\ =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{-3y}}^{\sqrt{4-y^2}} f\,(x,y)\,dx\, + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{4-y^2}} f\,(x,y)\,dx\,.$$

Пример. Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,.$$

Замечание. Для решения этой задачи сначала перейдем от заданного повторного интеграла к двойному, затем в полученном двойном интеграле расставим пределы интегрирования в нужном порядке:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\,.$$

Решение. Опишем множество D системой неравенств:

$$D = \{\, 0 \le y \le \sqrt{2}\,,\ y \le x \le \sqrt{4-y^2}\ \}.$$

Обращая функции $x(y)$, перепишем эту систему в виде

$$D = \{\, 0 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le \min\{\, x,\ \sqrt{4-x^2}\,\}\,\} =$$

$$= \{\, 0 \le x \le \sqrt{2}\,,\ 0 \le y \le x\,\} \bigcup \{\, \sqrt{2} \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\,\}\,.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dy\,.$$

Перемена порядка интегрирования в повторном интеграле иногда существенно упрощает его вычисление.

Пример. Изменив порядок интегрирования, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \sqrt[4]{1-y^2}\,dy\,.$$

Замечание. Внутренний интеграл не является элементарной функцией от x.

Решение. Пределы интегрирования в данном повторном интеграле определяют треугольник $D = \{ (x, y) : 0 \le x \le 1, \ x \le y \le 1\}$, который можно задать и неравенствами $D = \{ (x, y) : 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le y\}$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \sqrt[4]{1-y^2}dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y \sqrt[4]{1-y^2}dx =$$

$$= \int\limits_0^1 y\sqrt[4]{1-y^2}dy = 1/2 \int\limits_0^1 \sqrt[4]{1-t}dt = 2/5.$$

Отметим наиболее характерные ошибки при расстановке пределов интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

1. Неверно, если при некоторых значениях $x \in [a, b]$ нижний предел во внутреннем интеграле становится больше верхнего.

2. Неверно, если границы внутреннего интеграла зависят не только от x, но и от y. Границы внешнего интеграла не могут зависеть от переменных интегрирования.

3. Нередко ошибочно вместо функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в пределах интегрирования указывают значения $\min\varphi(x)$ и $\max\psi(x)$, $x \in [a, b]$, то есть границы проекции области D на ось Oy. Следует четко усвоить, что не зависящие от x пределы интегрирования во внутреннем интеграле означают, что одна или обе функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ являются константами, то есть соответствующая граница множества D параллельна оси Ox.

4. Нельзя применять следствие 3 из теоремы Фубини, если множество D симметрично относительно одной из координатных осей, но функция $f(x,y)$ не является четной или нечетной относительно соответствующей переменной.

5. Если множество D проще представить не в виде объединения, а в виде разности стандартных относительно той или иной оси областей: $D = D_1 \setminus D_2$, то, вообще говоря, нельзя представлять интеграл по множеству D в виде разности

$$\int\limits_{D} f\,(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{D_1} f\,(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_{D_2} f\,(x,y)\,dx\,dy\,,$$

поскольку из интегрируемости функции $f(x)$ на множестве D не следует ее интегрируемость на более широком множестве D_1. Однако, если из условия задачи ясно, что функция $f(x)$ интегрируема на множестве D_1, то такое представление возможно.

Тройной интеграл

Функцию $f : R^3 \to R^1$ будем обозначать $f(x,y,z)$. Вычисляя тройной интеграл с помощью теоремы Фубини, мы можем представить пространство R^3 в виде декартова произведения двух пространств меньшей размерности: $R^3 = R^2 \times R^1$ или $R^3 = R^1 \times R^2$. Сформулируем теорему Фубини при специальных условиях на множество интегрирования и интегрируемую функцию, поскольку именно этот вариант чаще всего применяется при решении задач.

Теорема 3 ($R^3 = R^2 \times R^1$). Пусть D – замкнутое жорданово множество в пространстве $R^2_{(x,y)}$, функции $\varphi\,(x,y)$ и $\psi\,(x,y)$ непрерывны на D и $\varphi\,(x,y) \le \psi\,(x,y)$. Функция $f\,(x,y,z)$ непрерывна на множестве

$M = \{\,(x,y,z): \ (x,y)\in D,\ \varphi(x,y)\le z\le \psi(x,y)\}$. Тогда

$$\int\limits_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_D dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Заметим, что в условиях теоремы множество M жорданово (свойство 4 жордановых множеств), интеграл

$$\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

существует для всех точек $(x,y)\in D$ и является непрерывной на D функцией, следовательно, все интегралы, входящие в равенство, имеют смысл.

Теорема 4 ($R^3 = R^1\times R^2$). Пусть область D ограничена кусочно-гладкой замкнутой поверхностью без самопересечений, интервал (p,q) есть ортогональная проекция области D на ось Oz; для $z\in(p,q)$ множество $D_z = \{\,(x,y): (x,y,z)\in D\}$, функция $f(x,y,z)$ непрерывна на замыкании области D. Тогда

$$\int\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_p^q dz \int\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy.$$

Отметим, что в условиях теоремы множества D_z, $z\in(p,q)$ ограничены кусочно–гладкими замкнутыми кривыми без самопересечений (связность D_z не обязательна), следовательно, являются жордановыми множествами так же, как и область D (свойство 5 жордановых множеств); интеграл $\int\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$ представляет собой интегрируемую (не обязательно непрерывную) функцию на интервале (p,q), следовательно, все интегралы, входящие в равенство, имеют смысл.

Пример. Множество D ограничено поверхностями $z = 0$, $y = x$, $x = 1$ и $z = xy$. Расставим пределы интегрирования в интеграле

$$\int\limits_D f\,(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Решение. Поверхности $z = xy$, $y = x$ и $x = 1$ отсекают в плоскости $z = 0$ треугольник $G = \{\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$. Для каждой точки $(x, y) \in G$ переменная z изменяется от 0 до xy, то есть множество D можно представить в виде $D = \{\,(x, y, z)\ :\ (x, y) \in G,\ 0 \le z \le xy\,\}$. Тогда по теореме 3

$$\int\limits_D f\,(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_G dx\,dy \int\limits_0^{xy} f\,(x, y, z)\,dz.$$

Сводя двойной интеграл по области G к повторному, получаем ответ

$$\int\limits_D f\,(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} f\,(x, y, z)\,dz.$$

Тот же результат можно получить, применяя теорему 4. Проекцией множества D на ось Ox является отрезок $0 \le x \le 1$. Сечение множества D плоскостью $x = const$ представляет собой треугольник D_x, ограниченный прямыми $y = x$, $z = 0$ и $z = xy$, то есть при фиксированном значении x переменная y изменяется от 0 до x, а переменная z – от 0 до xy. Таким образом, множество D можно представить в виде

$$D = \{\,(x, y, z) :\ 0 \le x \le 1,\ (y, z) \in D_x\},$$

$$D_x = \{\,(y, z) :\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy\}.$$

Тогда по теореме 4

$$\int\limits_D f\,(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{D_x} f\,(x, y, z)\,dy\,dz.$$

Сводя интеграл по области D_x к повторному, получаем тот же ответ.

Пример. Область D ограничена круговыми цилиндрами $x^2+z^2=a^2$ и $y^2+z^2=a^2$. Сведем тройной интеграл

$$\int\limits_D f(z)\,dx\,dy\,dz$$

к однократному.

Решение. Подынтегральная функция зависит только от z, поэтому по теореме 4 данный интеграл можно представить в виде

$$\int\limits_p^q dz \int\limits_{D_z} f(z)\,dx\,dy = \int\limits_p^q f(z)\,dz \int\limits_{D_z} dx\,dy.$$

Так как область D лежит внутри обоих цилиндров, то координаты ее точек (x,y,z) удовлетворяют неравенствам $x^2+z^2 \le a^2$ и $y^2+z^2 \le a^2$. Отсюда следует, что проекцией области D на ось Oz является интервал $(-a,a)$ и область D может быть представлена в виде

$$D = \{\,(x,y,z):\ -a \le z \le a,\ (x,y) \in D_z\},$$

где при каждом фиксированном z множество D_z является квадратом

$$D_z = \{\,(x,y)\ :\ |x| \le \sqrt{a^2-z^2}\,,\ |y| \le \sqrt{a^2-z^2}\ \}.$$

Итак, по теореме 4

$$\int\limits_D f(z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-a}^{a} dz \int\limits_{D_z} f(z)\,dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a} f(z)\,dz \int\limits_{D_z} dx\,dy.$$

Величина $\int\limits_{D_z} dx\,dy$ есть площадь квадрата D_z, таким образом,

$$\int\limits_D f(z)\,dx\,dy\,dz = 4\int\limits_{-a}^{a} f(z)\,(a^2-z^2)\,dz.$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Определение. Пусть $D \subset R^n$. Взаимно однозначное отображение $\omega : D \to G,\ G = \omega\,(D)$, называется регулярным отображением множества D, или диффеоморфизом, если отображение ω непрерывно дифференцируемо на множестве D и якобиан ω (определитель матрицы линейного отображения ω') не обращается в нуль на множестве D.

Свойства регулярного отображения

Пусть ω – регулярное отображение области D. Тогда

1. если $\overline{M} \subset D$, то внутренние точки множества M переходят во внутренние точки множества $\omega\,(M)$, граничные точки множества M – в граничные точки множества $\omega\,(M)$ (отсюда следует, в частности, что образом открытого множества является открытое множество, а образом замкнутого множества – замкнутое множество);

2. если $\overline{M} \subset D$ и M – жорданово множество, то $\omega\,(M)$ – жорданово множество;

3. обратное отображение $\omega^{-1} : G \to D$ регулярно.

Теорема о замене переменных в кратном интеграле.

Пусть ω – регулярное отображение области $D \subset R^n$ переменных t на область $G \subset R^n$ переменных x. Если M_x – жорданово множество, $\overline{M_x} \subset G$, и функция f интегрируема по Риману на множестве M_x, тогда функция $f\,(\omega\,(t))$ интегрируема на множестве $M_t = \omega^{-1}(M_x)$ и

$$\int\limits_{M_x} f\,dx = \int\limits_{M_t} (\,f \circ \omega) \cdot |\,\omega'(t)\,|\;dt\,.$$

На практике довольно часто возникает необходимость замены переменных при помощи отображения, которое не является регулярным на всей области D. В этом случае может быть применена обобщенная теорема о замене переменных в кратном интеграле.

Теорема. Пусть ω – отображение жорданова множества $M_t \subset R^n$ в жорданово множество $M_x \subset R^n$. Если существуют множества меры нуль $S_t \subset M_t$ и $S_x \subset M_x$ такие, что

1. $M_t \setminus S_t$ и $M_x \setminus S_x$ открытые множества,
2. отображение $\omega: \ M_t \setminus S_t \to M_x \setminus S_x$ регулярно,
3. якобиан J отображения ω определен и ограничен на M_t,

то для любой функции f, интегрируемой по Риману на множестве M_x, функция $(f \circ \omega) \cdot |\,\omega'(t)\,|$ интегрируема по Риману на множестве M_t и

$$\int\limits_{M_x} f\,dx = \int\limits_{M_t} (f \circ \omega) \cdot |\,\omega'(t)\,|\; dt\,.$$

Отметим, что в обеих теоремах утверждается не только равенство исходного и преобразованного интегралов, но и существование преобразованного интеграла, в частности то, что множество изменения новых переменных жорданово. Однако на практике существование обоих интегралов зачастую легко установить непосредственно. В этом случае используется следующая теорема.

Теорема. Пусть D и G – открытые множества в R^n, отображение $\omega: D \to G$ взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на множестве D. Если для множества $M \subset D$ оба интеграла $\int\limits_{\omega(M)} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{M} f(\omega(t)) \cdot |\,\omega'(t)\,|\,dt$ существуют, то они равны.

Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных приводит к изменению как подынтегрального выражения, так и множества, по которому ведется интегрирование. Как правило, основное внимание при выборе зависимости $x = \omega(t)$ уделяется упрощению вида области интегрирования. В отличие от одномерного интеграла, где связь двух промежутков интегрирования устанавливается довольно легко, найти множество изменения новых переменных в кратном интеграле гораздо труднее.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда границами области интегрирования являются линии уровня функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, то есть $D = \{(x,y) : a < \varphi(x,y) < b,\ c < \psi(x,y) < d\}$, причем отображение $\theta : u = \varphi(x,y),\ v = \psi(x,y)$ регулярно. В этом случае θ переводит множество D в промежуток $I = \{(u,v) : a < u < b,\ c < v < d\}$.

Пример. $D = \{(x,y) : 2 < xy < 3,\ 0 < x < y < 2x\}$. Вычислим интеграл

$$\int\limits_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Решение. Рассмотрим отображение $\theta : u = xy,\ v = y/x$ и обратное к нему отображение $\omega : x = \sqrt{u/v},\ y = \sqrt{uv}$. Множество D лежит в первом квадранте и отделено от координатных осей, следовательно, существует область G, содержащая D, в которой отображение θ взаимно-однозначно. Геометрически это означает, что прямая $y/x = const$ (линия уровня функции v) и гипербола $xy = const$ (линия уровня функции u) при условии $x > 0, y > 0$ пересекаются только в одной точке. Образом множества D при отображении θ является прямоугольник $I = \{(u,v) : 2 < u < 3,\ 1 < v < 2\}$. Якобиан отображения ω равен $1/(2v)$ и не обращается в нуль на множестве I, следовательно, отображение ω регулярно и

$$\int\limits_D (y^2 + x^2)\, dx\, dy = \int\limits_I \frac{uv + u/v}{2v}\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_2^3 u\, du \int\limits_1^2 \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) dv = 15/8.$$

Замечание. В рассмотренном примере довольно легко были получены явные выражения для зависимости переменных (x, y) от (u, v), а затем вычислен якобиан отображения ω. Однако если связь переменных задана соотношениями вида $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, то для вычисления якобиана $\det \omega'$ в некоторых случаях проще вычислить якобиан обратного отображения θ и воспользоваться равенством $\det \omega' = (\det \theta')^{-1}$.

Пример. Множество D ограничено прямыми $x = 2 - 2y$, $2x = 4 - y$, $y = x$, $y = 2x$. Вычислим интеграл $\int\limits_D 1/y \; dx\, dy$.

Решение. Граница области D составлена из линий уровня функций $u = x/y$ и $v = (2 - x)/y$, то есть

$$D = \{\, (x, y) : 1/2 < x/y < 1,\ 1/2 < (2 - x)/y < 2\}.$$

Образом области D при отображении $\theta : u = x/y,\ v = (2-x)/y$ является прямоугольник $G = \{\, (u, v) : 1/2 < u < 1,\ 1/2 < v < 2\}$. Не выражая явно переменные (x, y) через (u, v) , вычислим якобиан отображения $\omega :$ $(u, v) \to (x, y)$, равный $(\det \theta')^{-1}$. Так как $\det \theta' = -2/y^3$, а $u + v = 2/y$, то $|\det \omega'| = 4/(u + v)^3$ и

$$\int\limits_D \frac{dx\, dy}{y} = \int\limits_G \frac{2\, du\, dv}{(u + v)^2} = \int\limits_{1/2}^{2} dv \int\limits_{1/2}^{1} \frac{2\, du\, dv}{(u + v)^2} = 2 \ln(5/4).$$

Пример. Область D ограничена линиями $x^2 y = 1$, $x^2 y = 4$, $y = x - 1$, $y = x + 1$. Вычислим интеграл

$$\int\limits_D (x^3 - 3xy^2 + 2y^3)/(xy)\, dx\, dy.$$

Решение. Граница области D составлена из линий уровня функций $u = yx^2$ и $v = x - y$:

$$D = \{\, (x, y) : 1 < yx^2 < 4,\ -1 < x - y < 1\}.$$

Отображение $\theta : u = yx^2,\ v = x - y$ области D на прямоугольник

$$G = \{\,(u, v) : 1 < u < 4,\ -1 < v < 1\}$$

взаимно-однозначно. Не выражая явно переменные (x, y) через (u, v), найдем якобиан отображения $\omega : (u, v) \to (x, y)$, равный $(\det \theta')^{-1}$. Так как $\det \theta' = -x(x + 2y)$, то

$$\int\limits_D \frac{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}{xy}\, dx\, dy = \int\limits_D \frac{(x-y)^2(x+2y)}{xy}\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_G \frac{v^2}{u}\, du\, dv = \int\limits_{-1}^{1} v^2\, dv \int\limits_{1}^{4} \frac{du}{u} = \frac{2}{3} \ln 4.$$

Полярная система координат

При переходе к полярным координатам на плоскости, то есть при отображении $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, нахождение прообраза множества D облегчается простым геометрическим смыслом параметров r и φ. А именно, r есть длина радиус-вектора точки (x, y), то есть $r \geq 0$, а φ – угол между этим вектором и положительным направлением оси Ox. Чтобы указанное отображение было взаимно-однозначным, угол φ должен изменяется в интервале длины не более 2π. В зависимости от расположения множества D обычно выбирают интервалы $[0; 2\pi)$ или $[-\pi; \pi)$. Якобиан отображения $(r, \varphi) \to (x, y)$ равен r.

Как правило, зависимость $r(\varphi)$ аналитически выражается проще, чем $\varphi(r)$, поэтому расстановку пределов интегрирования в полярных координатах обычно делают в виде

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g\,(r,\, \varphi) dr.$$

Заметим, что отображение $(x, y) \to (r, \varphi)$ можно рассматривать как переход к согласованной с декартовой полярной системе координат, а не как преобразование множества D. Поэтому для множества изменения переменных (r, φ) не вводят новое обозначение, а рассматривают множество D как в виде $D = \{(x, y)\}$, так и в виде $D = \{(r,\, \varphi)\}$.

Пример. $D = \{\, a^2 < x^2 + y^2 < 2ay,\; a > 0\}$. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в интеграле

$$\int\limits_D f\,(x,\, y)\, dx\, dy.$$

Решение. Условия на координаты точек множества D в переменных (r, φ) принимают вид $a^2 < r^2 < 2ar\sin\varphi$. В силу условия $r \geq 0$ получаем $a < r < 2a\sin\varphi$. Отсюда следует, что $2\sin\varphi > 1$, следовательно, множество D расположено в секторе $\pi/6 < \varphi < 5\pi/6$. При каждом значении φ из этого промежутка величина r изменяется от a до $2a\sin\varphi$. Итак, $D = \{\,(r, \varphi):\; \pi/6 < \varphi < 5\pi/6,\; a < r < 2a\sin\varphi\}$ и

$$\int\limits_D f\,(x,\, y)\, dx\, dy = \int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_{a}^{2a\sin\varphi} f\,(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

Обобщенными полярными координатами в R^2 называется пара чисел (r, φ), связанная с координатами (x, y) формулами

$$x = a\, r\cos^p\varphi,\;\; y = b\, r\sin^p\varphi.$$

При этом $r \geq 0$, а промежуток изменения переменной φ выбирается так, чтобы функции $\cos^p\varphi$ и $\sin^p\varphi$ имели смысл, и отображение $\varphi \to (\cos^p\varphi, \sin^p\varphi)$ было взаимно-однозначным на этом промежутке, за исключением его концов. Последнее условие означает, что равенства $\cos^p\varphi_1 = \cos^p\varphi_2$ и $\sin^p\varphi_1 = \sin^p\varphi_2$ одновременно выполняются только при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 2\pi$ $(\varphi_1 = -\pi,\; \varphi_2 = \pi)$ или $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$

соответственно. Таким образом, φ пробегает либо промежуток $[0, 2\pi]$ ($[-\pi, \pi]$), либо промежуток $[0, \pi/2]$ в зависимости от значения параметра p. Якобиан перехода к обобщенным полярным координатам равен $abp\, r\, \cos^{p-1}\varphi\, \sin^{p-1}\varphi$.

Так как обобщенные полярные координаты не имеют наглядного геометрического смысла, то границы их изменения для точек данного множества D определяются аналитически.

Пример. Вычислим площадь области D, лежащей в первом квадранте ($x \geq 0,\ y \geq 0$) и ограниченной осями координат и кривой

$$(x/2 + y/3)^4 = 4x^2 + y^2.$$

Решение. Положим $x = 2r\cos^2\varphi$, $y = 3r\sin^2\varphi$, тогда уравнение заданной кривой примет вид $r^2 = 16\cos^4\varphi + 9\sin^4\varphi$. Функции $\cos^2\varphi$ и $\sin^2\varphi$ имеют смысл при любом $\varphi \in [0, 2\pi]$, но, чтобы их значения не повторялись, необходимо сузить интервал изменения φ до $[0, \pi/2]$. Обозначая функцию $(16\cos^4\varphi + 9\sin^4\varphi)^{1/2}$ через $g(\varphi)$, получаем

$$|D| = \int\limits_D dx\, dy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{g(\varphi)} 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r\cos\varphi\sin\varphi\, dr =$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} g^2(\varphi)\sin 2\varphi\, d\varphi = 3\int\limits_0^{\pi/2} (16\cos^4\varphi + 9\sin^4\varphi)\, \sin 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi/2} (16\,(1+\cos 2\varphi)^2 + 9\,(1-\cos 2\varphi)^2)\sin 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{8}\int\limits_{-1}^{1} (16\,(1+t)^2 + 9\,(1-t)^2)\, dt = 25.$$

Замечание. Если $p < 1$, то при переходе к обобщенным полярным координатам нарушается не только взаимная однозначность отображения, но и его гладкость. В этом случае, применяя обобщенную теорему о замене переменных, получаем, вообще говоря, несобственный интеграл по жорданову множеству G от неограниченной функции. Несобственные кратные интегралы мы рассмотрим ниже, а здесь заметим только, что в данном случае этот интеграл имеет смысл и равен повторному интегралу, причем интеграл по переменной φ будет несобственным. Аналогично и в общем случае, когда при замене $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ прообразом жорданова множества $D = \{(x, y)\}$ является жорданово множество $G = \{(u,\ v)\}$, но гладкость отображения $G \to D$ нарушается на множестве объема нуль, формула замены переменных остается справедливой, хотя оба интеграла в повторном могут быть несобственными.

Замена переменных в тройном интеграле

Как и в двойном интеграле, основной проблемой при замене переменных в тройном интеграле является нахождение множества значений новых переменных. Рассмотрим наиболее часто применяющиеся преобразования переменных в тройном интеграле.

Пусть границами множества D являются поверхности уровня достаточно гладких функций $\varphi_i\,(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, то есть

$$D = \{\,(x, y, z) : a_i < \varphi_i\,(x, y, z) < b_i\},$$

и отображение $\theta : u = \varphi_1(x, y, z),\ v = \varphi_2(x, y, z),\ w = \varphi_3(x, y, z)$ регулярно. Тогда образом множества D при отображении θ является промежуток $I = \{\,a_1 < u < b_1,\ a_2 < v < b_2,\ a_3 < w < b_3\}$.

Цилиндрическая система координат

Цилиндрическими координатами точки (x, y, z) называется тройка чисел (r, φ, h), связанная с числами (x, y, z) формулами

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h.$$

Якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен r. Этот переход практически не отличается от перехода к полярным координатам в двумерном случае. Фактически переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле

$$\int\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

– это переход к полярным координатам в двойном интеграле

$$\int\limits_{D_z} f(x, y, z)\, dx\, dy,$$

если тройной интеграл представлен в виде

$$\int\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_p^q dz \int\limits_{D_z} f(x, y, z)\, dx\, dy,$$

или в двойном интеграле

$$\int\limits_G F(x, y)\, dx\, dy,$$

если тройной интеграл представлен в виде

$$\int\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_G dx\, dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz = \int\limits_G F(x, y)\, dx\, dy.$$

Следует лишь отметить, что если переход совершается в интеграле вида

$$\int\limits_{D_z} f(x, y, z)\, dx\, dy,$$

то пределы интегрирования по r и φ, вообще говоря, зависят от z.

Пример. Область D ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, параболоидом $2(x^2 + y^2) = 3az$ и плоскостью $z = 0$. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\int\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Решение. Координаты точек $(x, y, z) \in D$ удовлетворяют неравенствам $x^2+y^2+z^2 < a^2,\ 0 < 3az < 2(x^2+y^2)$. В координатах (r, φ, h) эти неравенства принимают вид $r^2 + h^2 < a^2,\ 0 < 3ah < 2r^2$. Поверхности $r^2 + h^2 = a^2$ и $2r^2 = 3ah$ пересекаются при $h = a/2$, $r = a\sqrt{3}/2$. Выражая r как функцию от h или, наоборот, h как функцию от r, получим представления области D в виде

$$D = \{\, 0 < h < a/2, \sqrt{3ah/2} < r < \sqrt{a^2 - h^2}\} \quad \text{или}$$

$$D = \{\, 0 < r < a\sqrt{3}/2, 0 < h < \frac{2r^2}{3a}\}\bigcup$$
$$\bigcup\{\, a\sqrt{3}/2 < r < a, 0 < h < \sqrt{a^2 - h^2}\}.$$

Ограничивающие область D поверхности являются поверхностями вращения относительно оси Oz, поэтому дополнительных ограничений на координату φ не возникает и $0 \le \varphi < 2\pi$.

Переходя от тройного интеграла по области D к последовательному вычислению трех определенных интегралов, получим

$$\int\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a/2} dh \int\limits_{\sqrt{3ah/2}}^{\sqrt{a^2-h^2}} f^*(r, \varphi, h)\, r\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{3}/2} r\, dr \int\limits_0^{2r^2/(3a)} f^*(r, \varphi, h)\, dh +$$

$$+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sqrt{3}/2}^{a} r\,dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} f^*(r,\varphi,h)\,dh.$$

Пример. Область D ограничена поверхностями $(z-1)^2 = x^2+y^2$ и $z=0$. Вычислим тройной интеграл

$$\int_D ((x+y)^2 - z)\,dx\,dy\,dz.$$

Решение. Область D можно представить в виде

$$D = \{\,(x,y,z) : (x,y) \in K\,,\ 0 < z < 1 - \sqrt{x^2+y^2}\},$$

где K – круг $x^2+y^2 < 1$. При переходе к координатам (r,φ) прообразом круга K является прямоугольник $P = \{0 < r < 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$, а прообразом области D – призма $G = \{\,(r,\varphi) \in P\,,\ 0 < h < 1-r\}$. В соответствии с данным представлением области G расставляем пределы интегрирования:

$$\int_D ((x+y)^2 - z)\,dx\,dy\,dz = \int_G (r^2(1+\sin 2\varphi) - h)\,r\,dr\,d\varphi\,dh =$$

$$= \int_P dr\,d\varphi \int_0^{1-r} (r^2(1+\sin 2\varphi) - h)\,r\,dh =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{1-r} (r^2(1+\sin 2\varphi) - h)\,r\,dh = \pi/60.$$

Рассматриваемая задача допускает и другое решение. Представление области D в виде $D = \{\,(x,y,z) : 0 < z < 1,\ (x,y) \in K_z\}$, где K_z – круг $x^2+y^2 < (1-z)^2$, приводит к изменению порядка интегрирования:

$$\int_D ((x+y)^2 - z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dh \int_{K_z} (r^2(1+\sin 2\varphi) - h)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^1 dh \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1-h} (r^2(1+\sin 2\varphi) - h)\, r\, dr = \pi/60.$$

Сферическая система координат

Сферическими координатами точки (x, y, z) в пространстве R^3 называется тройка чисел (r, φ, ψ), связанная с числами (x, y, z) формулами

$$x = r\cos\varphi\sin\psi,\ \ y = r\sin\varphi\sin\psi,\ \ z = r\cos\psi.$$

Якобиан перехода к сферическим координатам равен $r^2\sin\psi$.

Сферические координаты имеют простой геометрический смысл: r – длина радиус-вектора точки (x, y, z), ψ – угол, образуемый этим вектором с положительным направлением оси Oz, φ – угол, образуемый проекцией радиус-вектора на плоскость XY с положительным направлением оси Ox. Следовательно, $0 \le r,\ 0 \le \psi \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$.

Отображение ω "полуполосы"$I = \{\ 0 \le r,\ 0 \le \psi \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$ на все пространство R^3 не является взаимно-однозначным, например, образом целой грани $I \bigcap \{r = 0\}$ является единственная точка – начало координат. Якобиан отображения ω обращается в нуль при $\psi = 0$, $\psi = \pi$ или $r = 0$. Таким образом, для произвольного жорданова множества отображение ω не удовлетворяет условиям первой теоремы о замене переменных.

Для обоснования перехода к сферическим координатам в кратном интеграле отметим следующие свойства отображения ω :

1. множество I^* точек "полуполосы"I, в которых якобиан отображения ω обращается в нуль, есть множество меры нуль;

2. $\omega\,(I^*)$ есть множество меры нуль;

3. отображение $\omega : \{I \setminus I^*\} \to \{R^3 \setminus \omega\,(I^*)\}$ регулярно;

4. для любого $a > 0$ образом жорданова множества $I_a = I \bigcap \{r < a\}$ является открытое жорданово множество $B_a = \{\ x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$;

5. множество $I_a^* = I^* \bigcap \{r \leq a\}$ замкнуто, следовательно, в силу непрерывности отображения ω, множество $\omega\left(I_a^*\right)$ замкнуто и множество $B_a^* = B_a \setminus \omega\left(I_a^*\right)$ открыто.

Если множество M жорданово, а значит ограничено, то найдется открытый шар $B_a = \{\ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$, содержащий M. Положим $g\left(x, y, z\right) = f\left(x, y, z\right)$ при $(x, y, z) \in M$ и $g\left(x, y, z\right) = 0$ при $(x, y, z) \in B_a \setminus M$. Тогда

$$\int\limits_M f\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{B_a} g\, dx\, dy\, dz.$$

Из свойств отображения ω следует, что множество B_a и отображение $\omega : I_a \to B_a$ удовлетворяют условиям обобщенной теоремы о замене переменных. Следовательно,

$$\int\limits_M f\left(x, y, z\right) dx\, dy\, dz = \int\limits_{B_a} g\left(x, y, z\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\limits_{I_a} g^*\left(r, \varphi, \psi\right) r^2 \sin\psi\, dr\, d\varphi\, d\psi =$$

$$= \int\limits_{\omega^{-1}(M)} f^*\left(r, \varphi, \psi\right) r^2 \sin\psi\, dr\, d\varphi\, d\psi,$$

где

$$g^*\left(r, \varphi, \psi\right) = g\left(r \cos\varphi \sin\psi, r \sin\varphi \sin\psi, r \cos\psi\right),$$

$$f^*\left(r, \varphi, \psi\right) = f\left(r \cos\varphi \sin\psi, r \sin\varphi \sin\psi, r \cos\psi\right).$$

Все предыдущие рассуждения остаются в силе, если угол φ изменяется не от 0 до 2π, а на интервале $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ при любом α, в частности, от $-\pi$ до π.

Замечание. Иногда сферические координаты задают формулами $x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi$. В этом случае якобиан перехода равен $r^2\cos\psi$, а угол ψ отсчитывается от плоскости XY и может изменяться от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Пример. Область D ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Вычислим тройной интеграл

$$\int\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz.$$

Решение. Область D представляет собой шар, ограниченный сферой $x^2+y^2+(z-1/2)^2 = 1/4$. Таким образом, координаты точек множества D удовлетворяют неравенству $x^2+y^2+(z-1/2)^2 \le 1/4$ или $x^2+y^2+z^2 \le z$. Подставляя выражения (x, y, z) через (r, φ, ψ) в последнее соотношение, получаем ограничение $r^2 \le r\cos\psi$, которое в силу условия $r \ge 0$ равносильно неравенству $r \le \cos\psi$. Отсюда следует, что $\cos\psi \ge 0$, то есть $0 \le \psi \le \pi/2$. Дополнительных ограничений на значение φ не возникает, поскольку множество D является телом вращения относительно оси Oz.

Итак, прообразом области D при переходе к сферическим координатам является множество

$$G = \{\, (r, \varphi, \psi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \psi \le \pi/2,\ 0 \le r \le \cos\psi\},$$

следовательно,

$$\int\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \int\limits_G r^3 \sin\psi\, dr\, d\psi\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\psi \int\limits_0^{\cos\psi} r^3 \sin\psi\, dr = \pi/10.$$

Пример. $D = \{ (x, y, z) : (x^2 + y^2 + z^2)^2 < 4xyz,\ x > 0,\ y > 0\}$. Вычислим объем области D.

Решение. В сферических координатах область D описывается системой неравенств: $r^4 < 4r^3 \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\psi \cos\psi$, $r \cos\varphi \sin\psi > 0$, $r \sin\varphi \sin\psi > 0$. Поскольку $r \geq 0$, $\sin\psi \geq 0$, эта система равносильна следующей: $r < 2\sin 2\varphi \sin^2\psi \cos\psi$, $\cos\varphi > 0$, $\sin\varphi > 0$. Из последних двух неравенств находим, что $0 < \varphi < \pi/2$, а первое неравенство имеет решения только при условии $\cos\psi > 0$, то есть $0 < \cos\psi < \pi/2$. Обозначим $2\sin 2\varphi \sin^2\psi \cos\psi$ через $g(\varphi, \psi)$. Таким образом,

$$V(D) = \int\limits_D dx\,dy\,dz = \int\limits_G r^2 \sin\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\psi\,d\psi \int\limits_0^{g(\varphi,\psi)} r^2\,dr =$$

$$= 8/3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^7\psi \cos^3\psi\,d\psi = 2/45.$$

Обобщенными сферическими координатами точки (x, y, z) называется тройка чисел (r, φ, ψ), связанная с числами (x, y, z) формулами

$$x = a\,r\cos^p\varphi \sin^q\psi,\ y = b\,r\sin^p\varphi \sin^q\psi,\ z = c\,r\cos^q\psi.$$

При этом $r \geq 0$, угол φ меняется в промежутке $[0,\ 2\pi]$ или $[0,\ \pi/2]$, угол ψ – в промежутке $[0,\ \pi]$ или $[0,\ \pi/2]$ в зависимости от параметров p и q (как и в двумерном случае). Якобиан перехода к обобщенным сферическим координатам равен $abc\,pq\,r^2 \cos^{p-1}\varphi \sin^{p-1}\varphi \cos^{q-1}\psi \sin^{q-1}\psi$.

Пример. Область D лежит в первом октанте $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$ и ограничена координатными плоскостями и поверхностью

$$(x/a + y/b + z/c)^2 = x/h - y/k.$$

Вычислить интеграл

$$\int\limits_D z\,dx\,dy\,dz.$$

<u>Решение</u>. Положим

$$x = a\,r\cos^2\varphi\sin^2\psi,\;\; y = b\,r\sin^2\varphi\sin^2\psi,\;\; z = c\,r\cos^2\psi.$$

В переменных (r,φ,ψ) уравнение данной поверхности примет вид

$$r = (\frac{a}{h}\cos^2\varphi - \frac{b}{k}\sin^2\varphi)\sin^2\psi.$$

Угол φ должен удовлетворять условию $(a/h\;\cos^2\varphi - b/k\;\sin^2\varphi) > 0$, поскольку $r > 0$. Кроме того, $x,\; y,\; z > 0$, поэтому $\varphi \in [0,\,\pi/2]$, $\psi \in [0,\,\pi/2]$. Итак, прообразом области D при переходе к обобщенным сферическим координатам является множество

$$G = \{\,(r,\varphi,\psi) : 0 \le \psi \le \pi/2,\;\; 0 \le \varphi \le \varphi_0,\;\; 0 \le r \le r\,(\varphi,\psi)\},$$

где через $r\,(\varphi,\psi)$ обозначена функция $(a/h\;\cos^2\varphi - b/k\;\sin^2\varphi)\sin^2\psi$, а через φ_0 – решение уравнения $a/h\;\cos^2\varphi - b/k\;\sin^2\varphi = 0$, принадлежащее интервалу $(0,\,\pi/2)$. В соответствии с полученным представлением множества G получаем

$$\int\limits_D z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\psi \int\limits_0^{\varphi_0} d\varphi \int\limits_0^{r\,(\varphi,\psi)} 4abc^2 r^3\cos^3\psi\sin^3\psi\cos\varphi\sin\varphi\,dr =$$

$$= 4abc^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\psi\sin^3\psi\,d\psi\int\limits_0^{\varphi_0}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{r\,(\varphi,\psi)} r^3\,dr =$$

$$= abc^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\psi\sin^{11}\psi\,d\psi\int\limits_0^{\varphi_0}(a/h\;\cos^2\varphi - b/k\;\sin^2\varphi)^4\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= abc^2/168\int\limits_0^{\varphi_0}(a/h\;\cos^2\varphi - b/k\;\sin^2\varphi)^4\,d(\sin^2\varphi) = \frac{a^2bc^2k}{840(ak+bh)}.$$

В заключение рассмотрим систему координат, связанную с тором

$$T = \{\,(x, y, z) : (x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 < 4b^2(x^2 + y^2),\ b > a > 0\}.$$

Зададим параметрически полуплоскость, проходящую через ось Oz: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geq 0$, угол φ фиксирован. Сечение тора T этой плоскостью определяется неравенством $(r^2+z^2+b^2-a^2)^2 < 4b^2r^2$, которое равносильно неравенству $r^2+z^2+b^2-a^2 < 2br$ или $(r-b)^2+z^2 < a^2$. Таким образом, сечение представляет собой круг радиуса a с центром в точке $r = b$, $z = 0$. В этом круге введем полярные координаты $r - b = \rho\cos\psi$, $z = \rho\sin\psi$. Новые координаты (ρ, φ, ψ) введем по формулам $x = (b + \rho\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + \rho\cos\psi)\sin\varphi$, $z = \rho\sin\psi$, тогда прообразом тора будет параллелепипед

$$P = \{0 < \rho < a,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \psi < 2\pi\}.$$

Якобиан перехода равен $\rho(b + \rho\cos\psi)$.

Вычислим, например, интеграл от функции $f = |\,z\,|$ по тору T.

$$\int\limits_T |\,z\,|\,dx\,dy\,dz = \int\limits_P \rho(b + \rho\cos\psi)\,|\,\rho\sin\psi\,|\,d\rho\,d\psi\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} \rho^2\,d\rho \int\limits_0^{2\pi} (b + \rho\cos\psi)\,|\,\sin\psi\,|\,d\psi = 8\pi b a^3/3.$$

НЕСОБСТВЕННЫЙ КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение. Последовательность жордановых множеств $D_m \in R^n$, $m = 1, ..., \infty$, называется исчерпанием множества $D \subset R^n$, если

$$D_1 \subset ... \subset D_m \subset D_{m+1} ... \subset D \quad \text{и} \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = D.$$

Определение. Если для любого исчерпания $\{D_m\}$ множества D функция $f : D \to R$ интегрируема в смысле Римана на каждом множестве $\{D_m\}$ и существует

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{D_m} f \, dx \ ,$$

то этот предел называется несобственным интегралом от функции f по множеству D и обозначается символом $\int\limits_D f \, dx$. В этом случае говорят, что функция f интегрируема на множестве D в несобственном смысле или что несобственный интеграл $\int\limits_D f \, dx$ сходится.

Если же существует такое исчерпание $\{D_m\}$ множества D, что функция f интегрируема по Риману на любом из множеств D_m, но предел

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{D_m} f \, dx$$

не существует, тогда говорят, что интеграл $\int\limits_D f \, dx$ расходится.

Замечание. Чтобы определение было корректным, следовало бы добавить требование независимости величины предела от выбора исчерпания $\{D_m\}$. Однако это требование излишне, так как если для двух исчерпаний $\{D_m\}$ и $\{G_m\}$ существуют несовпадающие пределы

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{D_m} f \, dx \quad \text{и} \quad \lim_{m \to \infty} \int\limits_{G_m} f \, dx \ ,$$

то найдется такое исчерпание $\{H_m\}$, для которого предел

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{H_m} f\,dx \quad \text{не существует.}$$

Пример. Пусть $D = \{(x,y) : 1 \le x,\ |y| \le 1\}$. Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_D \frac{y}{x}\,dx\,dy.$$

Решение. Рассмотрим два семейства множеств:

$$D_m = \{\,(x,y) : 1 \le x \le m,\ |y| \le 1\,\}\ ,$$

$$G_m = \ D_m \bigcup \{\,(x,y) : m \le x \le 2m,\ 0 \le y \le 1\,\}\ .$$

Функция $f(x,y) = y/x$ интегрируема по Риману на каждом из множеств D_m и G_m. Но для исчерпания D_m

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{D_m} \frac{y}{x}\,dx\,dy = \lim_{m\to\infty} \int\limits_1^m \frac{dx}{x} \int\limits_{-1}^1 y\,dy = 0\ ,$$

в то время как для исчерпания G_m

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{G_m} \frac{y}{x}\,dx\,dy = \lim_{m\to\infty} \left[\int\limits_{D_m} \frac{y}{x}\,dx\,dy + \int\limits_m^{2m} \frac{dx}{x} \int\limits_0^1 y\,dy \right] = \frac{1}{2}\ln 2\ .$$

Несовпадение этих пределов уже говорит о том, что исследуемый интеграл расходится. Покажем, однако, как построить такое исчерпание $\{H_m\}$, для которого последовательность интегралов

$$I_m = \int\limits_{H_m} y/x\,dx\,dy$$

не имеет предела.

Рассмотрим семейство множеств $\{H_m\} : H_{2m-1} = D_{2^m}$, $H_{2m} = G_{2^m}$, являющееся исчерпанием множества D. Функция $f = y/x$ интегрируема по Риману на каждом из множеств H_m, но последовательность чисел I_m, очевидно, предела не имеет.

Замечание. Если функция f интегрируема по Риману на множестве D, то для любого исчерпания $\{D_m\}$ множества D предел

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{D_m} f\,dx$$

существует и равен $\int\limits_D f\,dx$. Таким образом, понятие несобственного интеграла является обобщением понятия интеграла Римана.

Как и в одномерном случае, неинтегрируемость по Риману функции f на множестве D может быть обусловлена только двумя причинами: или множество D не жорданово, в частности, неограничено, или функция f неограничена на D.

Сравнивая определения кратного и одномерного несобственного интегралов, можно заметить, что в одномерном случае в качестве множества интегрирования берется только промежуток (интервал) и его исчерпание производится только промежутками. Выделение более узкого класса исчерпаний приводит в одномерном случае к более широкому классу функций, интегрируемых в несобственном смысле, а именно, появляется понятие условно сходящегося интеграла. В многомерном же случае имеет место следущая теорема.

Теорема. Если для функции $f : D \to R$, $D \subset R^n$, $(n \geq 2)$ сходится интеграл $\int\limits_D f\,dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_D |f|\,dx$.

Таким образом, понятия сходимости и абсолютной сходимости несобственного кратного интеграла совпадают. Поэтому все дальнейшие свойства этого интеграла формулируются для неотрицательных функций $f : D \to R^+$, $D \subset R^n$.

Теорема. Если $f \geq 0$, то из существования предела $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{D_m} f\,dx$ для некоторого исчерпания $\{D_m\}$ множества D следует его существование для любого другого исчерпания, то есть сходимость несобственного интеграла $\int\limits_D f\,dx$.

Теорема сравнения (мажорантный признак). Если функции $f \geq 0$ и $g \geq 0$ интегрируемы на одних и тех же подмножествах множества D и $f(x) \leq g(x)$, $x \in D$, то из сходимости интеграла $\int\limits_D g\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_D f\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_D f\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_D g\,dx$.

Пример. Пусть $D = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$, функция f непрерывна на множестве D и для всех точек $(x,y) \in D$ удовлетворяет неравенствам $0 < M_1 \leq |f(x,y)| \leq M_2$. Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_D \frac{f(x,y)\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{M_1}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{|f(x,y)|}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{M_2}{(x^2+y^2)^p}\ ,$$

то рассматриваемый интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}\ .$$

Последовательность $D_m = \{1/m^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ является исчерпанием множества D. Переходя к полярным координатам, получаем, что

$$\int\limits_{D_m} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1/m}^{1} \frac{dr}{r^{2p-1}} = 2\pi \int\limits_{1/m}^{1} \frac{dr}{r^{2p-1}}\ .$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{D_m} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p} = \lim_{m\to\infty} 2\pi \int\limits_{1/m}^{1} \frac{dr}{r^{2p-1}}\ .$$

Поэтому исходный интеграл сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Теорема о замене переменных. Пусть множества $D \subset R^n$, $G \subset R^n$ и отображение $\omega : D \to G$ удовлетворяют условиям:

1. множества D и G – открытые,

2. существуют множества D_1 и G_1 меры нуль такие, что множества $D \setminus D_1$ и $G \setminus G_1$ – открытые и $\omega : D \setminus D_1 \to G \setminus G_1$ – диффеоморфизм.

Тогда для функции $f : G \to R^+$ из сходимости интеграла $\int\limits_G f(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_D (f\circ\omega)|\,\omega'\,|\,dt$ и их равенство.

Пример. $D = \{(x,y) : 0 < |x| + |y| < 1\}$. Выяснить, при каких значениях параметров p и q сходится интеграл

$$\int\limits_D \frac{dx\,dy}{|x|^p + |y|^q}.$$

Решение. В силу симметрии множества D и четности подынтегральной функции по каждому из аргументов сходимость рассматриваемого интеграла эквивалентна сходимости интеграла

$$\int\limits_{D_1} \frac{dx\,dy}{|x|^p + |y|^q}\ ,$$

где $D_1 = \{(x, y) : 0 < x + y < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. Если хотя бы одно из чисел p и q неположительно, то подынтегральная функция непрерывна и ограничена на жордановом множестве D_1, следовательно, интегрируема в смысле Римана на D_1.

Рассмотрим данный интеграл при условии $p > 0$, $q > 0$. Для любой такой пары (p, q) существует число $a > 0$ такое, что кривая $|x|^p + |y|^q = a$ лежит в множестве D. Пусть $G = \{(x, y) : x^p + y^q < a,\ x > 0,\ y > 0\}$. Так как для (x, y) из $D_1 \setminus G$ выполняется условие $|x|^p + |y|^q \geq a$, то функция

$$\frac{1}{|x|^p + |y|^q}$$

интегрируема в смысле Римана на $D_1 \setminus G$, следовательно, сходимость рассматриваемого интеграла эквивалентна сходимости интеграла

$$\int\limits_G \frac{dx\,dy}{x^p + y^q}\ .$$

Переходя к обобщенным полярным координатам $x = (r\cos^2\varphi)^{1/p}$, $y = (r\sin^2\varphi)^{1/q}$, получаем, что

$$\int\limits_G \frac{dx\,dy}{x^p + y^q} = \frac{2}{pq}\int\limits_H r^{-2+1/p+1/q}(\cos\varphi)^{-1+2/p}(\sin\varphi)^{-1+2/q}d\varphi\,dr\ ,$$

где $H = \{(r, \varphi) : 0 < \varphi < \pi/2,\ 0 < r \leq a\}$.

Последовательность $\quad H_n = \{(r, \varphi) : \dfrac{1}{n} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n} \leq r \leq a\}$

является исчерпанием множества H. Так как

$$\int\limits_{H_n} (\cos\varphi)^{-1+2/p}(\sin\varphi)^{-1+2/q} r^{-2+1/p+1/q} d\varphi\,dr =$$

$$= \int\limits_{1/n}^{\pi/2-1/n} (\cos\varphi)^{-1+2/p}(\sin\varphi)^{-1+2/q}d\varphi \int\limits_{1/n}^{a} r^{-2+1/p+1/q}dr\ ,$$

то $$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{H_n}(\cos\varphi)^{-1+2/p}(\sin\varphi)^{-1+2/q}r^{-2+1/p+1/q}d\varphi\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{-1+2/p}(\sin\varphi)^{-1+2/q}d\varphi\int\limits_0^a r^{-2+1/p+1/q}dr\ .$$

Первый сомножитель является сходящимся интегралом для любой пары (p,q), такой что $p>0$, $q>0$. Для второго сомножителя необходимым и достаточным условием сходимости является выполнение неравенства $1/p+1/q>1$.

Итак, исходный интеграл сходится, если $\min(p,q)>0$ и $1/p+1/q>1$ либо $\min(p,q)\le 0$, и расходится, если $\min(p,q)>0$ и $1/p+1/q\le 1$.

Определение. Повторный интеграл

$$\int\limits_G dx\int\limits_{G_x} f(x,y)\,dy$$

называется сходящимся, если внутренний интеграл $\int\limits_{G_x} f(x,y)\,dy$ сходится для $x\in G\setminus E$, где E – множество меры нуль, и интеграл $\int\limits_G J(x)\,dx$, где $J(x)=\int\limits_{G_x} f(x,y)\,dy$ для $x\in G\setminus E$ и $J(x)=0$ для $x\in E$, сходится.

Теорема о переходе от кратного интеграла к повторному. Пусть $D=\{(x,y): x\in G,\ y\in G_x\}$ и $f(x,y)\ge 0$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\int\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_G dx\int\limits_{G_x} f(x,y)\,dy\ ,$$

то есть либо кратный и повторный интегралы одновременно расходятся, либо одновременно сходятся и равны по величине.

Таким образом, для неотрицательной функции переход от кратного интеграла к повторному позволяет или вычислить кратный интеграл, или установить его расходимость.

Если же функция $f(x, y)$ на множестве D не сохраняет знака, то расходимость повторного интеграла указывает, что и кратный интеграл расходится, а сходимость повторного интеграла показывает только то, что в случае сходимости кратного интеграла его величина равна величине повторного. Поэтому в таком случае надо убедиться в сходимости кратного интеграла. Поскольку сходимость кратного интеграла эквивалентна его абсолютной сходимости, то надо исследовать сходимость интеграла от неотрицательной функции $|f(x, y)|$. Как указывалось выше, это можно сделать, сводя кратный интеграл к повторному или применяя мажорантный признак.

Пример. Пусть $D = \{(x, y) : x + y > 1\}$. Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_D \frac{\cos(x+y)}{(x^2+y^2)^p} dx\, dy.$$

Решение. Сделаем поворот плоскости так, чтобы косинус стал функцией одного аргумента: $x + y = u\sqrt{2}$, $x - y = v\sqrt{2}$. При этом множество D преобразуется в множество $G = \{(u, v) : u > \sqrt{2}/2, v \in R\}$ и

$$\int\limits_D \frac{\cos(x+y)}{(x^2+y^2)^p} dx\, dy = \int\limits_G \frac{\cos(\sqrt{2}u)}{(u^2+v^2)^p} du\, dv.$$

Последний интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_G \frac{|\cos(\sqrt{2}u)|}{(u^2+v^2)^p} du\, dv = \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\infty} |\cos(\sqrt{2}u)|\, du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(u^2+v^2)^p}.$$

Сделав замену $v = u \tan t$, получим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(u^2+v^2)^p} = \frac{1}{u^{2p-1}} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2p-2} t\, dt.$$

Этот интеграл сходится тогда и только тогда, когда $2-2p<1$, то есть $p>1/2$. Обозначим $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2p-2} t\,dt$ через $K(p)$, тогда

$$\int\limits_G \frac{|\cos(\sqrt{2}u)|}{(u^2+v^2)^p} du\,dv = K(p) \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{+\infty} \frac{|\cos(\sqrt{2}u)|}{u^{2p-1}}\,du.$$

Этот интеграл сходится тогда и только тогда, когда $2p-1>1$, то есть $p>1$. Таким образом, исходный интеграл сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Замечание. Установить, что при $p>1$ исходный интеграл сходится, можно, используя мажорантный признак ($|\cos(x+y)|\le 1$). Но таким образом нельзя установить, что при $p\le 1$ исходный интеграл расходится, так как мажорантный признак дает только достаточное условие сходимости.

Пример. Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_{R^2} \sin(x^2+y^2)^2\,dx\,dy.$$

Решение. Рассмотрим интеграл от функции $|\sin(x^2+y^2)^2|$. Выберем последовательность множеств $D_k=\{x^2+y^2\le k^2\},\ k\in N$, исчерпывающую R^2. Тогда

$$I-k = \int\limits_{D_k} |\sin(x^2+y^2)^2|\,dx\,dy =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^k r\,|\sin r^4|\,dr = \pi/2 \int\limits_0^{k^4} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} dt.$$

Последний интеграл, как известно, расходится, поэтому последовательность I_k имеет бесконечный предел. Таким образом, исходный интеграл расходится.

Пример. Пусть $D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$. Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_D \sin x \ \exp\left(-x^2(y^2+z^2)\right) dx\, dy\, dz.$$

Решение. Рассмотрим повторный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} (\sin x)\, dx \int\limits_{y,\, z>0} \exp\left(-x^2(y^2+z^2)\right) dy\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} (\sin x)\, dx \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-x^2 r^2\right) r\, dr = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\pi \sin x}{4x^2} dx.$$

Последний интеграл расходится в точке $x = 0$, следовательно, исходный интеграл расходится.

Пример. Докажем сходимость интеграла

$$I = \int\limits_{R^2} \exp\left(-(x^2+y^2)\right) dx\, dy$$

и с его помощью вычислим интеграл

$$\int\limits_R \exp\left(-x^2\right) dx.$$

Решение. Подынтегральная функция $\exp\left(-(x^2+y^2)\right)$ положительна, поэтому для доказательства сходимости достаточно использовать какую-либо одну последовательность исчерпывающих множеств. Рассмотрим последовательность $D_k = \{x^2 + y^2 \le k^2\},\ k \in N$, исчерпывающую R^2. Переходя к полярным координатам, находим

$$I_k = \int\limits_{D_k} \exp\left(-(x^2+y^2)\right) dx\, dy = 2\pi \int\limits_0^k \exp\left(-r^2\right) r\, dr = \pi(1 - \exp(-k^2).$$

Поэтому $I = \pi$. Теперь рассмотрим последовательность квадратов $G_k = \{|\,x\,| < k,\ |\,y\,| < k\},\ k \in N$, исчерпывающую R^2. Тогда

$$I_k = \int\limits_{G_k} \exp\left(-(x^2+y^2)\right) dx\, dy =$$

$$= (\int\limits_{-k}^{k} \exp(-x^2)\, dx)(\int\limits_{-k}^{k} \exp(-y^2)\, dy) = (\int\limits_{-k}^{k} \exp(-x^2)\, dx)^2.$$

$$\text{Отсюда} \quad \int\limits_{R} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}.$$

ЗАДАЧИ

Расстановка пределов интегрирования и замена переменных в двойном интеграле.

Буквенные параметры считаются положительными.

Для указанной области D в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке (функция $f(x,y)$ непрерывна в области D). В этом же интеграле перейти к полярным координатам (r,φ) и записать интеграл в виде

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)\,dr.$$

1. D – треугольник с вершинами $O(0;0)$, A, B.

1) $A(1;0)$, $B(0;1)$ 2) $A(1;0)$, $B(1;1)$ 3) $A(2;1)$, $B(2;-1)$

2. D – круг 1) $x^2+y^2<a^2$ 2) $x^2+y^2<2ay$

3. $D=\{(x,y) : \max\{\,|\,x\,|,\,|\,y\,|\,\}<1\}$

4. $D=\{(x,y) : a^2<x^2+y^2<b^2\}$

5. $D=\{(x,y) : 2ax<x^2+y^2<4ax\}$

6. $D=\{(x,y) : x^2+y^2<a^2,\ x^2+y^2<2ay\}$

7. $D=\{(x,y) : x^2+y^2<9,\ x^2+y^2+8y>9\}$

8. $D=\{(x,y) : x^2+y^2>1,\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$

9. $D=\{(x,y) : x^2+y^2+1>2x+2y,\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$

10. $D=\{(x,y) : x^2+y^2+1>2x+2y,\ x^2+y^2<1\}$

11. $D=\{(x,y) : x^2+y^2<1,\ |x+y|>1\}$

12. $D=\{(x,y) : |\,x\,|+|\,y\,|<1\}$

13. $D = \{(x, y) : |\,x - 1\,| + |\,y\,| < 1\}$

14. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 2|\,x\,|,\ 0 < y < 1\}$

15. $D = \{(x, y) : x^2 - y^2 < 1,\ 2|\,y\,| < x\}$

16. $D = \{(x, y) : -\sqrt{a^2 - x^2} < y < a^2 - x^2\}$

D – область, ограниченная кривыми

17. $x = |\,y\,|$ и $y^2 = 4(x - 1)$, $M(1/2; 0) \in D$.

18. $ay = x^2$ и $y = a$.

19. $y = 3x^2$ и $y = 6x - 3$.

20. $y = x^2$ и $2y = x^2 + 1$.

21. $y = x^2$ и $2y = x^3$.

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

22. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x, y)\, dy$

23. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x, y)\, dy$

24. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy$

25. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2y - y^2} f(x, y)\, dx$

26. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x - x^2}} f(x, y)\, dy$

27. $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\, dy$

Вычислить интегралы, изменив порядок интегрирования.

28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2}\, dy$

29. $\int\limits_0^{\pi} dy \int\limits_y^{\pi} \dfrac{\sin x}{x}\, dx$

30. $\int\limits_0^{a} dx \int\limits_x^{a} (a^2-y^2)^p\, dy$

31. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt[3]{|x|}}^{1} (1-y^2)^p\, dy$

32. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{y}} \sqrt{1-x^3}\, dx$

33. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{1} y^2\sqrt{y^4-x^2}\, dy$

34. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 \exp{(x^2)}\, dx$

35. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} \exp{(2x-x^2)}\, dx$

Вычислить интегралы:

36. $\iint\limits_D \dfrac{x\, dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, где $D = \{(x,y) : \max\{\,|\,x\,|,\,|\,y\,|\,\} < 1\}$

37. $\iint\limits_D \sqrt{|\,y-x^2\,|}\, dx\, dy$, где $D = \{(x,y) :\ |\,x\,| < 1,\ 0 < y < 2\}$.

38. $\iint\limits_D xy^2\, dx\, dy$, область D ограничена параболой $y^2 = 2ax$ и прямой $x = a/2$.

39. $\iint\limits_D x\, dx\, dy$, область D ограничена параболой $y = 3x^2$ и прямой $y = 6-3x$.

40. $\iint\limits_D y/x^2\, dx\, dy$, область D ограничена параболами $y = x^2$ и $y = x^3$.

41. $\iint\limits_D x^2\, dx\, dy$, где $D = \{(x,y) : |\,x\,| + |\,y\,| < 1\}$

42. $\iint\limits_D \sqrt{y^2-x^2}\, dx\, dy$, область D ограничена прямыми $y = 1$, $y = x$ и $y = -x$.

В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, перейти к полярным координатам и записать интеграл в виде

$$\int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)\,dr.$$

43. $D = \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4,\ x/2 < y < x\}$

44. $D = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 < 1,\ x^2 + (y-1)^2 < 1\}$

45. $D = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 < 1,\ 0 < x < 1\}$

46. $D = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 < 1,\ x^2 + y^2 > 1\}$

47. $D = \{(x,y) : (x^2 + y^2)^2 < a^2xy\}$

48. $D = \{(x,y) : a^2 < x^2 + y^2 < a(y + \sqrt{x^2 + y^2})\}$

49. $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 3ax,\ x^2 + y^2 < a(x + \sqrt{x^2 + y^2})\}$

50. $D = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 < 8a^2,\ x^2 - y^2 > 2a^2,\ x > 0\}$

51. $D = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 < 16a^2,\ x^2 - y^2 < a^2,\ y > 0\}$

52. D – область, лежащая внутри кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

53. D – область, лежащая вне окружности $x^2 + y^2 = a^2$ и внутри кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2a(3x^2y - y^3)$.

В следующих интегралах перейти к полярным координатам (r,φ) и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

54. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$

55. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(x,y)\,dy$

56. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy$

57. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$

Переходя к полярным координатам, заменить двойные интегралы однократными.

58. $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$.

59. $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): |\,y\,|<|\,x\,|<1\}$.

60. $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): 0<x<1,$

$$\sqrt{3}x/3<y<\sqrt{3}x\}.$$

61. $\iint\limits_D f(y/x)\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): x^2+y^2<x\}$.

62. $\iint\limits_D f(y/x)\,dx\,dy$, где D - область, ограниченная петлей

$$x^3+y^3=3xy.$$

63. $\iint\limits_D f(\frac{xy}{x^2+y^2})\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): \sqrt{|\,x\,|}<y<1\}$.

Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы.

64. $\iint\limits_D |\,xy\,|\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): a^2<x^2+y^2<4a^2\}$.

65. $\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): x^2+y^2<a^2\}$.

66. $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): x^2+y^2<a^2\}$.

67. $\iint\limits_D (x^3+y^3)\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): x^2+y^2<a^2,\ y>0\}$.

68. $\iint\limits_D |\,y\,|\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): x^2+4y^2<16,\ 1<x^2+y^2\}$.

69. $\iint\limits_D (2-x-y)\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): 2y<x^2+y^2<4\}$.

70. $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 2,\ x^2 - y^2 < 1,\ x > 0\}$.

71. $\iint\limits_D \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2)\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}$.

72. $\iint\limits_D x^2y^2\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : xy < 1,\ x^2 - 3xy + 2y^2 < 0,\ y > 0\}$.

73. $\iint\limits_D \dfrac{x^2\,dx\,dy}{x^2 + y^2}$, где $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < ax\}$.

74. $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < ay\}$.

75. $\iint\limits_D y^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < a^2\}$.

76. $\iint\limits_D \dfrac{x\,dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, где $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < ax\}$.

77. $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : 0 < ay < x^2 + y^2 < a^2\}$.

Перейти к новым переменным (u,v) в следующих интегралах:

78. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{2-y}^{3-y} f(x,y)\,dx$, если $u = x + y$, $v = x - y$.

79. $\int\limits_a^b dx \int\limits_{px}^{qx} f(x,y)\,dy$, если $u = x$, $v = y/x$.

Произведя подходящие замены переменных, заменить двойные интегралы однократными.

80. $\iint\limits_D (x - y)^2 f(x + y)\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$.

81. $\displaystyle\iint\limits_D f(x+y)\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : |\,x\,| + |\,y\,| < 1\}$.

82. $\displaystyle\iint\limits_D f(ax+by)\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

83. $\displaystyle\iint\limits_D f(xy)\,dx\,dy$, где D – область, ограниченная кривыми

$$xy = 1,\ xy = 2,\ y = x,\ y = 4x,\ (x > 0,\ y > 0).$$

84. $\displaystyle\iint\limits_D f(x)\,dx\,dy$, где D – область, ограниченная кривыми

$$y = x,\ y = 2x,\ y = 2.$$

Вводя новые переменные, вычислить следующие интегралы:

85. $\displaystyle\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : |\,x+2y\,| < 3,\ |\,x-y\,| < 3\}$.

86. $\displaystyle\iint\limits_D (|\,x\,| + |\,y\,|)\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : |\,x\,| + |\,y\,| < 1\}$.

87. $\displaystyle\iint\limits_D |\,xy\,(x+y)\,|\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : |\,x\,| + |\,y\,| < 1\}$.

88. $\displaystyle\iint\limits_D (x^2 - y^2)^2\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : |\,x\,| < y < 1\}$.

89. $\displaystyle\iint\limits_D \exp\,(x+y)^2\,dx\,dy$, где $D = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1-x\}$.

90. $\displaystyle\iint\limits_D (x^2 - y^2)\sin(\pi(x-y)^2)\,dx\,dy$, где

$$D = \{(x,y) : |\,y\,| < x < 1 - |\,y\,|\}.$$

91. $\displaystyle\iint\limits_D (x^4 - y^4)\,dx\,dy$, где

$$D = \{(x,y) : 1 < xy < 2,\ 1 < x^2 - y^2 < 2,\ x > 0\}.$$

92. $\iint\limits_D (xy)^{-2}\,dx\,dy$, где область D ограничена прямыми
$$y = 3x,\ 3y = x,\ 5x + y = 4,\ x + y = 4.$$

93. $\iint\limits_D x^2\,dx\,dy$, где область D ограничена астроидой
$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

94. $\iint\limits_D |\,xy\,|\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) : x^4 + y^4 < 1\}$.

95. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) : x^4 + y^4 < 1\}$.

96. $\iint\limits_D (x + y)\,dx\,dy$, где D – область, ограниченная кривыми
$$y^2 = 2x,\ x + y = 4,\ x + y = 12.$$

97. $\iint\limits_D (x + y)\,dx\,dy$, где область D ограничена кривой $x^2 + y^2 = x + y$.

98. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где область D ограничена кривыми
$$xy = a^2,\ x + y = 2.5a.$$

99. $\iint\limits_D y^2(x^2 + 1)\,dx\,dy$, $D = \{(x, y) : 1 < xy < 2,\ 0 < x < y < 3x\}$.

100. $\iint\limits_D \dfrac{(x + y)^2}{x}\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) : 1 < x + y < 3,\ x < 2y < 4x\}$.

101. $\iint\limits_D (x^3 + y^3)\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) : x^2 < y < 3x^2,\ 1 < 2xy < 3\}$.

102. $\iint\limits_D xy\,|\,x + y\,|\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) : 1 < xy < 2,\ |\,x - y\,| < 1\}$.

103. $\iint\limits_D x^2\,dx\,dy$, где $D = \{(x, y) : x^3 < y < 2x^3,\ x < 2y < 6x\}$.

104. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): ax^3<y<bx^3,\ px<y^2<qx\}$.

105. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где $D=\{(x,y): ax^2<y^3<bx^2,\ px<y<qx\}$.

106. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где область D ограничена петлей кривой

$$(x^2+y^2)^2=x^2y,\ x>0.$$

107. Пусть $f(u)$ - непрерывная на $[0;1]$ функция, а D - треугольник с вершинами $(0;0),\ (1;0),\ (0;1)$. Доказать, что

$$1)\qquad \iint\limits_D f(x+y)\,x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy = B(p,q)\int\limits_0^1 f(u)\,u^{p+q-1}\,du$$

$$2)\qquad \iint\limits_D x^py^q(1-x-y)^r x^py^q\,dx\,dy=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+1)}$$

Вычислить площадь области, ограниченной следующими кривыми:

108. $(2x-3y)^2+x^2=3$

109. $(x-y)^2+x^2=a^2$

110. $x+y=a,\ x+y=b,\ y=cx,\ y=dx\ (0<a<b,\ 0<c<d)$

111. $xy=a^2,\ xy=2a^2,\ y=x,\ y=2x\ (x>0,\ y>0)$

112. $y^2=2px,\ y^2=2qx,\ x^2=2ry,\ x^2=2sy\ (0<p<q,\ 0<r<s)$

113. $y^2=2px+p^2,\ y^2=-2qx+q^2$

Переходя к полярным или обобщенным полярным координатам, вычислить площадь области, ограниченной следующими кривыми:

114. $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$

115. $(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2)$

116. $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^4+y^4)$

117. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$

118. $(a^2x^2+b^2y^2)^2 = c^2xy$

119. $a^2x^2+b^2y^2 = hx+ky$

120. $(a^2x^2+b^2y^2)^2 = x^2+y^2$

121. $(a^2x^2+b^2y^2)^2 = c^2x^2$

122. $(a^2x^2+b^2y^2)^3 = c^5x^4y$

123. $a^4x^4+b^4y^4 = c^3x^2y$

124. $(ax+by)^2 = ax-by,\ y=0$

125. $(ax+by)^3 = h^2x^2$

126. $(ax+by)^5 = c^4x^2y^2$

127. $\sqrt{ax}+\sqrt{by} = 1,\ x=0,\ y=0$

128. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),\ x^2+y^2=a^2\ (x^2+y^2>a^2)$

129. $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy,\ x^2+y^2=a^2\ (x^2+y^2<a^2)$

130. $(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2,\ x>0,\ y>0$

131. $a^3x^3+b^3y^3 = h^2x^2+k^2y^2,\ x=0,\ y=0$

132. $(ax+by)^4 = h^2x^2+k^2y^2\ (x>0,\ y>0)$

133. $(ax+by)^4 = h^2x^2-k^2y^2\ (x>0,\ y>0)$

Найти площадь одной петли кривой:

134. $(x+y)^4 = ax^2y$

135. $(x+y)^3 = axy$

136. $(x+y)^5 = ax^2y^2$

Вычисление объемов при помощи двойного интеграла

Пусть G – жорданово множество, функция $f(x,y)$ непрерывна и $f(x,y)>0$ на множестве G. Объем части цилиндра $D=\{(x,y,z):(x,y)\in G,\ z\in R\}$, ограниченной снизу плоскостью $z=0$, а сверху поверхностью $z=f(x,y)$, вычисляется по формуле $V=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$.

Вычислить объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

137. $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

138. $x+y+z=a,\ x^2+y^2=r^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (a>r\sqrt{2})$

139. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0$

140. $z = xy,\ x + y + z = 1,\ z = 0$

141. $z = xy,\ z = 0,\ y = x^2,\ 2y = x^2,\ x = y^2,\ 2x = y^2$

142. $z = \ln(1 + x^2 + y^2),\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 2$

143. $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}),\ z = 0,\ x^2 + y^2 = \pi^2$

Расстановка пределов интегрирования и замена переменных в тройном интеграле.

В тройном интеграле изменить порядок интегрирования и расставить пределы интегрирования различными способами в декартовой системе координат. Функция $f(x, y, z)$ предполагается непрерывной в соответствующей области.

144. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z)\, dz.$

145. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z)\, dz.$

146. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x} dy \int_0^{y} f(x, y, z)\, dz.$

147. $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} f(x, y, z)\, dz.$

148. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{2} dy \int_0^{1-|y-1|} f(x, y, z)\, dz.$

149. $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{3} dy \int_0^{2-|x-1|} f(x, y, z)\, dz.$

В интеграле $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dV$ расставить различными способами пределы интегрирования в цилиндрической системе координат:

150. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2<a^2,\ 0<z<H\}$.

151. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2<a^2z^2,\ 0<z<H\}$.

152. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2<z,\ 0<z<H\}$.

153. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2<a^2,\ x^2+y^2+z^2<4a^2\}$.

154. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<2az,\ x^2+y^2<z^2\}$.

155. $V=\{(x,y,z):y^2+z^2<x^2,\ x^2+y^2<1,\ x>0\}$.

156. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<4a^2,\ z>a\}$.

157. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<4a^2,\ x^2+y^2<2ax\}$.

В интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV$ расставить различными способами пределы интегрирования в сферической системе координат:

158. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<a^2,\ z>a/3\}$.

159. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<4az,\ x^2+y^2<3z^2\}$.

160. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<4az,\ x^2+y^2+z^2>az,$
$x^2+y^2<3z^2/3\}$.

161. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<a^2,\ x^2+y^2+z^2<2az\}$.

162. $V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2>a^2,\ x^2+y^2+z^2<2az\}$.

163. $V=\{(x,y,z):y^2+z^2<x^2,\ x^2+y^2<1,\ x>0\}$.

Проверить, что

164. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y f(x,\,y,\,z)\,dz=\int\limits_0^a dz\int\limits_z^a dy\int\limits_y^a f(x,\,y,\,z)\,dx.$

165. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x} dy\int\limits_0^{a-x-y} f(x,\,y,\,z)\,dz=\int\limits_0^a dz\int\limits_0^{a-z} dy\int\limits_0^{a-z-y} f(x,\,y,\,z)\,dx.$

Свести интеграл к однократному или сумме однократных:

166. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y f(z)\,dz.$

167. $\int\limits_0^a dx \int\limits_x^a dy \int\limits_y^a f(z)\,dz.$

168. $\int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} dv \int\limits_0^{u+v} f(w)\,dw.$

169. $\iiint\limits_D f(z)\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена плоскостями

$$y = x,\ y = 0,\ z = x + y,\ x = 1,\ z = 0.$$

170. $\iiint\limits_D f(x + y + z)\,dx\,dy\,dz,$

где $D = \{(x, y, z) : x + y + z < a,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$.

171. $\iiint\limits_D y\,f(z)\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2x,\ z = y,\ z > 0.$$

172. $\iiint\limits_D f(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < z^2 < 2 - x^2 - y^2,\ z > 0\}.$$

173. $\iiint\limits_D f(\frac{z^2}{x^2 + y^2})\,dx\,dy\,dz,$

$$D = \{(x, y, z) : z^2 < x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}.$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

174. $\iiint\limits_D (xy)^2\,dx\,dy\,dz$, где $D = \{(x, y, z) : 0 < x < y < z < 1\}$

175. $\iiint\limits_D (x + y + z)\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена поверхностями

$$x^2+y^2=1,\ x+y+z=2,\ z=0.$$

176. $\iiint\limits_D (x^2-z^2)\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена плоскостями
$$y=-x,\ z=x,\ z=y,\ z=1.$$

177. $\iiint\limits_D (x-y+z)\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена поверхностями
$$az=x^2+y^2,\ z^2=x^2+y^2.$$

178. $\iiint\limits_D xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена поверхностями
$$z=xy,\ y=x,\ x=1,\ z=0.$$

179. $\iiint\limits_D \dfrac{dx\,dy\,dz}{x(1+x^2y^2z^2)}$, область D ограничена поверхностями
$$1=xyz,\ y=x,\ x=2,\ y=1,\ z=0.$$

180. $\iiint\limits_D xyz\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена поверхностями
$$z=xy,\ y=x^2,\ x=y^2,\ z=0.$$

181. $\iiint\limits_D xy^2z^2\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена поверхностями
$$z=4,\ y=0,\ x^2+y^2=z^2.$$

182. $\iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена поверхностями
$$h^2(x^2+y^2)=R^2z^2,\ z=h.$$

183. $\iiint\limits_D xyz\,dx\,dy\,dz$, где D – часть шара $x^2+y^2+z^2<1$, лежащая в первом октанте.

184. $\iiint\limits_D (x^2-y^2)\,dx\,dy\,dz$,

где $D=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2<a^2,\ \ y>0,\ \ z>0\}$.

185. $\displaystyle\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $D=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2<z\}$.

186. $\displaystyle\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, область D ограничена поверхностями

$$y+z=R,\ y-z=R,\ x^2+y^2=R^2.$$

187. $\displaystyle\iiint\limits_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$,

где $D=\{(x,y,z): 0<z<\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2<R^2\}$.

188. $\displaystyle\iiint\limits_D \frac{(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $D=\{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2}<z<a\}$.

189. $\displaystyle\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$,

где $D=\{x^2+y^2<a^2,\ az<x^2-y^2,\ z>0\}$.

190. $\displaystyle\iiint\limits_D \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

где $D=\{x^2+y^2+z^2<R^2,\ h\sqrt{x^2+y^2}<az\}$.

191. $\displaystyle\iiint\limits_D \frac{|\,xy\,|\,dx\,dy\,dz}{z^2}$, где $D=\{x^2+y^2+z^2<1,\ x^2+y^2<z^2\}$.

192. $\displaystyle\iiint\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где $D=\{x^2+y^2<2x,\ 0<z<y\}$.

Несобственный кратный интеграл.

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

193. $\displaystyle\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \exp(-xy)\sin x\,dx\,dy$.

194. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy.$

195. $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$, где

1) $D = \{(x,\, y):\ 0 < x < y < 1\}$.

2) $D = \{(x,\, y):\ 1 < x < y\}$.

3) $D = \{(x,\, y):\ 0 < x < 1,\ 1 < y\}$.

196. $\displaystyle\iint\limits_{R^2} \sin{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy$

197. $\displaystyle\iint\limits_{R^2} \sin{(x^4+y^4)}\,dx\,dy$

198. $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$, где $D = \{(x,\, y):\ x^2+y^2 > 1\}$.

199. $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{dx\,dy}{(x^2-xy+y^2)^p}$, где $D = \{(x,\, y):\ x^2+y^2 < 1\}$.

200. $\displaystyle\iint\limits_{R^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+xy+y^2)^p}.$

201. $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{dx\,dy}{(|\,x\,|^p+|\,y\,|^q)}$, где $D = \{(x,\, y):\ |\,x\,|+|\,y\,| > 1\}$.

202. $\displaystyle\iint\limits_{R^2} \frac{dx\,dy}{(1+|\,x\,|^p)(1+|\,y\,|^q)}.$

203. $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{x^2\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)}$, где $D = \{(x,\, y):\ |\,y\,| < 1\}$.

204. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$, где $D=\{(x,\,y):\ y>1+x^2\}$.

205. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$, где $D=\{(x,\,y):\ y>0,\ x-y>1\}$.

206. $\displaystyle\iint\limits_D y/x\ dx\,dy$, где $D=\{(x,\,y):\ x>1,\ |\,xy\,|<1\}$.

207. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^3-y^3}{x^5+y^5}dx\,dy$, где $D=\{(x,\,y):\ x>0,\ y>0,\ x+y>1\}$.

208. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^3-y^3}{x^6+y^6}dx\,dy$, где $D=\{(x,\,y):\ x>0,\ y>0,\ x+y>1\}$.

209. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^3+y}{x^6+y^2}dx\,dy$, где $D=\{(x,\,y):\ 0<ax<y<bx\},\ 0<a$.

210. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^3+y}{x^6+y^2}dx\,dy$, где $D=\{(x,\,y):\ 0<x,\ 0<y\}$.

Список литературы

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высш. шк., 1999.

2. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1991.

3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977.

4. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1984.

5. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие для вузов. Санкт-Петербург, 1994.

6. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие для вузов/ под ред. Бутузова В. Ф. М.: Высш. шк., 1988.

Содержание: