Семинар 24 [20.12.2022]

Метод усреднения.

Задачи

Задача -1

Найти асимптотическое разложение интеграла

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right] \frac{t^2 dt}{1+t^2}$$

при $x \to +\infty$. Ограничиться главным вкладом. Использовать метод перевала.

Задача 0

Вывести усредненные по периоду осцилляций уравнения для медленных переменных слабо нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + x = -\epsilon f(x, \dot{x}).$$

Задача 1

Найти нелинейный сдвиг частоты ангармонического осциллятора

$$\ddot{x} + x = -\epsilon x^3.$$

Задача 2

Найти закон затухания амплитуды колебаний осциллятора

а) с вязким трением

$$\ddot{x} + x = -2\gamma \dot{x},$$

б) с сухим трением

$$\ddot{x} + x = -2\gamma \operatorname{sgn}(\dot{x}).$$

Задача 3

Найти и исследовать на устойчивость предельный цикл уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + x = \epsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x}, \quad \epsilon > 0.$$

Решения

Задача -1

Сделаем замену $t = \sqrt{x}z$:

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi} I, \quad I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda S(z)} \frac{z^2 dz}{z_0^2 + z^2}, \quad \lambda = x^{3/2}, \quad z_0 = \lambda^{-1/3}, \quad S(z) = i\frac{z^3}{3} + iz,$$

причем $0 < z_0 < 1$. Здесь появляются полюсы $z = \pm i z_0$. Заметим, что в этом случае, при деформации контура к линии Стокса, мы «зацепляемся» за верхний полюс $z = iz_0$. Чтобы учесть вклад в интеграл от этого полюса, нужно обойти его снизу. Это даст дополнительный вклад в интеграл

$$I_0 = \int\limits_{\gamma(z_0)} e^{\lambda S(z)} \frac{z^2 dz}{z_0^2 + z^2} = 2\pi i e^{\lambda S(z_0)} \frac{z_0^2}{z_0 + z_0} = i\pi z_0 e^{\lambda S(z_0)} = -\frac{\pi}{\lambda^{1/3}} e^{\frac{1}{3} - \lambda^{2/3}}.$$

Вклад от перевальной точки

$$I_+ = \frac{z_+^2}{z_0^2 + z_+^2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{2}{3}\lambda} = \frac{1}{1 - \lambda^{-2/3}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{2}{3}\lambda}.$$

Тогда, учитывая, что вклад стационарной точки экспоненциально мал, получаем

$$I \sim I_0 + I_+ \sim I_0 \sim -\frac{\pi}{\lambda^{1/3}} e^{\frac{1}{3} - \lambda^{2/3}}.$$

В итоге

$$F(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{3} - x}, \quad x \to +\infty.$$

Задача 1

Невозмущенному уравнению

$$\ddot{x} + x = 0,$$

соответсвует функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{p^2 + x^2}{2},$$

где $p = \dot{x}$. Соответсвующие уравнения Гамильтона

$$\dot{x} = \partial_p \mathcal{H} = p, \quad \dot{p} = -\partial_x \mathcal{H} = -x,$$

имеют решения

$$x = I\cos(t + \phi), \quad p = -I\sin(t + \phi). \tag{1}$$

Теперь рассмотрим возмущенную задачу

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -x - \epsilon f(x, p). \tag{2}$$

Выберем в качестве новых переменных (I, ϕ), полагая, что соотношения (1) задают переход $(x, p) \to (\phi, I)$. Это есть так называемое преобразование Боголюбова-Крылова, то есть переход к переменным, представляющим из себя интегралы движения для невозмущенной задачи. Также сразу заметим, что при $\epsilon \to 0$ производные новых «медленных» переменных стремятся к нулю: $\dot{\phi} \to 0$, $\dot{I} \to 0$, то есть представляют из себя малость по ϵ. Дифференцируя выражения (1), получаем

$$\dot{x} = \dot{I}\cos(t+\phi) - \left(1+\dot{\phi}\right) I \sin(t+\phi),$$
$$\dot{p} = -\dot{I}\sin(t+\phi) - \left(1+\dot{\phi}\right) I \cos(t+\phi).$$

Тогда, учитывая также (1), уравнения возмущенной задачи (2) выражаются в новых переменных следующим образом:

$$\dot{I}\cos(t+\phi) - \dot{\phi} I \sin(t+\phi) = 0,$$
$$\dot{I}\sin(t+\phi) + \dot{\phi} I \cos(t+\phi) = \epsilon f\left(I\cos(t+\phi), -I\sin(t+\phi), t\right).$$

Эта линейная система разрешима относительно $\dot{\phi}$ и $\dot{I}$:

$$\dot{\phi} = \epsilon I^{-1} f\left(I\cos(t+\phi), -I\sin(t+\phi), t\right)\cos(t+\phi), \tag{3}$$
$$\dot{I} = \epsilon f\left(I\cos(t+\phi), -I\sin(t+\phi), t\right)\sin(t+\phi). \tag{4}$$

Отсюда сразу видно, что $\dot{\phi}, \dot{I} \sim \epsilon$. Обратим внимание на то, что мы до сих пор не пользовались никакими приближениями, а только лишь сделали переход $(x,p) \to (I,\phi)$.

Теперь усредним уравнения (3) и (4) по периоду $\Delta t = 2\pi$ невозмущенной системы:

$$\left\langle \dot{\phi} \right\rangle = \left\langle \epsilon I^{-1} f\left(I\cos(t+\phi), -I\sin(t+\phi)\right)\cos(t+\phi) \right\rangle,$$
$$\left\langle \dot{I} \right\rangle = \left\langle \epsilon f\left(I\cos(t+\phi), -I\sin(t+\phi)\right)\sin(t+\phi) \right\rangle,$$

где

$$\langle g(t) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t}^{t+2\pi} g\left(t'\right) dt'.$$

В первом приближении по ϵ при усреднении, можно считать медленные переменные (ϕ, I) почти постоянными на периоде, и заменить их средними величинами:

$$\theta = \langle \phi \rangle = \phi + \mathcal{O}(\epsilon), \quad J = \langle I \rangle = I + \mathcal{O}(\epsilon),$$

причем

$$\left\langle \dot{\phi} \right\rangle = \dot{\theta} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right), \quad \left\langle \dot{I} \right\rangle = \dot{J} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right).$$

Таким образом, с точностью линейной по ϵ, получаем

$$\dot{\theta} = \frac{\epsilon}{2\pi J}\int\limits_0^{2\pi} f\left(J\cos\varphi, -J\sin\varphi\right)\cos\varphi \, d\varphi, \tag{5}$$

$$\dot{J} = \frac{\epsilon}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(J\cos\varphi, -J\sin\varphi\right)\sin\varphi \, d\varphi. \tag{6}$$

Задача 1

По формулам (5) и (6), полученным в предыдущей задаче, имеем

$$\dot{\theta} = \frac{\epsilon}{2\pi J}\int\limits_0^{2\pi} J^3 \cos^4\varphi \, d\varphi,$$

$$\dot{J} = \frac{\epsilon}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} J^3 \cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi.$$

Сразу видно, что $\dot{J} = 0$, что есть следствие гамильтоновости системы. Вычисляем

$$\dot{\theta} = \frac{\epsilon J^2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3\epsilon J^2}{8}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\epsilon J^2}{8} t + \theta_0.$$

То есть поправка к частоте есть

$$\delta\omega = \frac{3\epsilon J^2}{8}.$$

Задача 2

В случае а) имеем

$$\dot{\theta} = -\frac{\gamma}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = 0,$$

$$\dot{J} = -2\gamma J \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = -\gamma J.$$

Тогда

$$J = J_0 e^{-\gamma t}.$$

В случае б):

$$\dot{\theta} = \frac{\gamma}{\pi J} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(-J\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi,$$

$$\dot{J} = \frac{\gamma}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(-J\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

Без ограничения общности можно считать $J > 0$, тогда $\dot{\theta} = 0$ и

$$\dot{J} = -\frac{\gamma}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi = -\frac{4\gamma}{\pi}.$$

Тогда

$$J = \begin{cases} J_0 - \frac{4\gamma t}{\pi}, & t < \frac{\pi J_0}{4\gamma}, \\ 0, & t > \frac{\pi J_0}{4\gamma}. \end{cases}$$

Задача 3

Имеем $f(\alpha, \beta) = \left(\alpha^2 - 1\right)\beta$, тогда

$$\dot{\theta} = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi \left(J^2\cos^2\varphi - 1\right)\cos\varphi d\varphi = 0,$$

$$\dot{J} = -\frac{\epsilon J}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(J^2\cos^2\varphi - 1\right)\sin^2\varphi d\varphi.$$

Вычисляем:

$$\dot{J} = -\frac{\epsilon J}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(J^2\cos^2\varphi - 1\right)\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= -\epsilon J\left(\frac{J^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\right) = \frac{\epsilon J}{8}\left(4 - J^2\right).$$

Имеется три стационарные точки, в которых $\dot{J} = 0$, а именно $J = \{-2, 0, 2\}$.

Поскольку $\dot{\theta} = 0$, без ограничения общности можно считать, что $J \geq 0$. Рассматривая уравнение вблизи точки $J = 0$, получаем неустойчивое решение

$$\dot{J} \sim \frac{\epsilon J}{2}, \quad \Rightarrow \quad J \sim J_0 e^{\epsilon t/2}.$$

Аналогично при $J = 2$ имеем устойчивое решение

$$\dot{J} \sim -\epsilon(J-2), \quad \Rightarrow \quad J \sim 2 + e^{-\epsilon t}.$$

Такое поведение соответствует устойчивому предельному циклу.

Вводя обозначения $\eta = J/2$, $\xi = \epsilon t/2$, перепишем уравнение в виде

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta\left(1-\eta^2\right), \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\eta_0^2 + \left(1-\eta_0^2\right)e^{-2\xi}}}.$$

Фазовая диаграмма решения в переменных $(x(t), p(t))$ задается параметрически следующим образом:

$$x^2 + p^2 \simeq J^2 = \frac{J_0^2}{(J_0/2)^2 + \left(1 - (J_0/2)^2\right)e^{-\epsilon t}}.$$