

V

Изгуб.

Изгибом называется такой вид нагружения стержня, при котором в его поперечных сечениях остаётся не равным нулю ~~только~~ внутренний изгибающий момент.

Прямым изгибом называется нагружение, при котором балка изгибается в плоскости действия внутреннего изгибающего момента;
косыми изгибом называется нагружение, при котором балка выходит из этой плоскости.

Таблица V.1.

Виды изгиба (x, y – главные центральные оси поперечного сечения). Серым цветом показаны плоскости, в которых происходит смещение точек оси:

	Прямой		Косой
Чистый			
Поперечный			

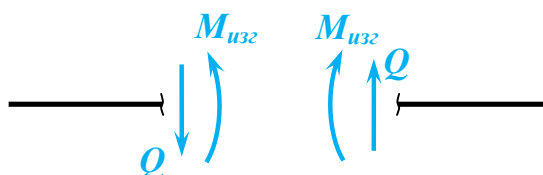
Эти случаи мы далее будем изучать в качестве примеров прямого изгиба.

Стержень, работающий на изгиб – **балка**;

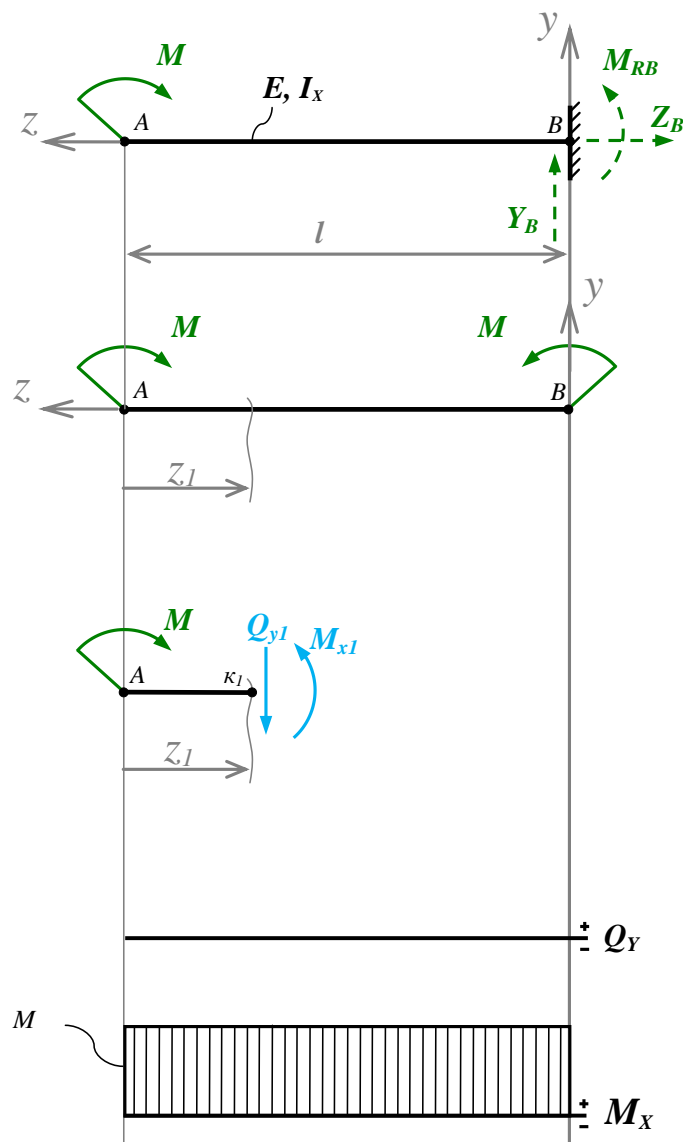
Балка, заделанная на одном конце – **консоль**;



При решении задач *положительные* направления внутреннего изгибающего момента и внутренней перерезывающей силы определяют по правилу знаков:



Пример V.1 :



Реакции опор:

$$\sum F_z = 0 = -Z_B \Rightarrow Z_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 = Y_B$$

$$\sum M_B = 0 = -M + M_{RB} \Rightarrow M_{RB} = M$$

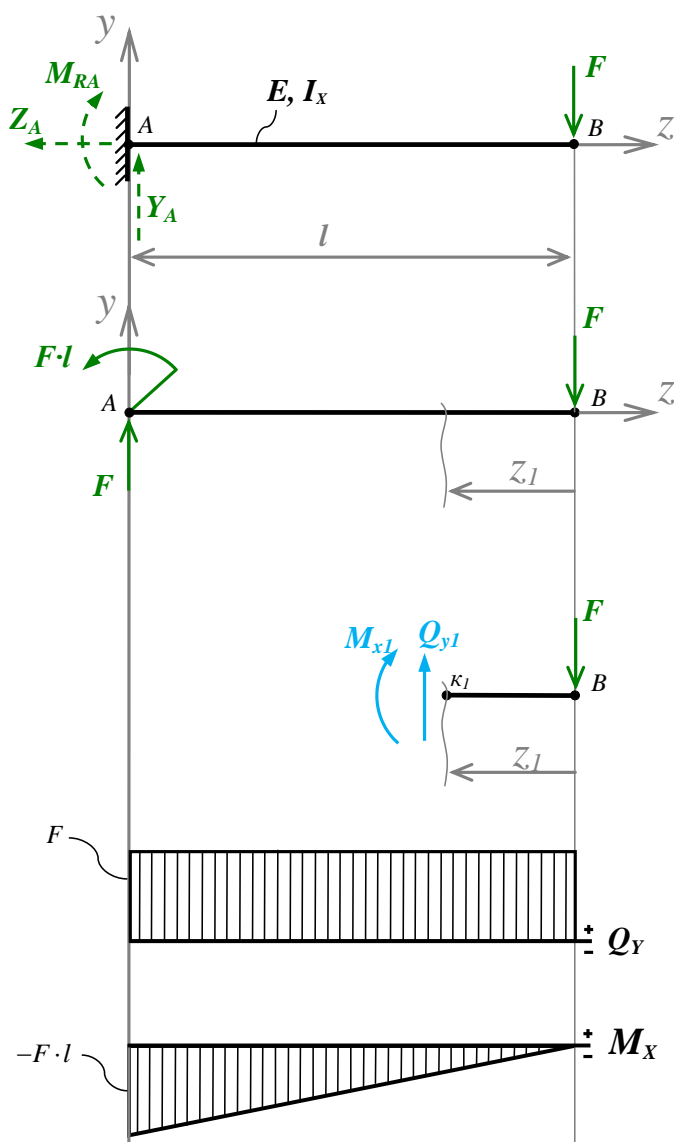
Результаты:

$$\sum F_{y_1} = 0 = -Q_{y_1} \Rightarrow Q_{y_1} = 0$$

$$\sum M_{K_1} = 0 = -M + M_{x_1} \Rightarrow M_{x_1} = M$$

$Q_y = 0 \Rightarrow$ чистый изгиб

Пример V.2 :



Реакции опор:

$$\begin{aligned}\sum F_z = 0 = -Z_A &\Rightarrow Z_A = 0 \\ \sum F_y = 0 = Y_A - F &\Rightarrow Y_A = F \\ \sum M_A = 0 = -M_{RA} - F \cdot l & \\ M_{RA} &= -F \cdot l\end{aligned}$$

ПОЗУ:

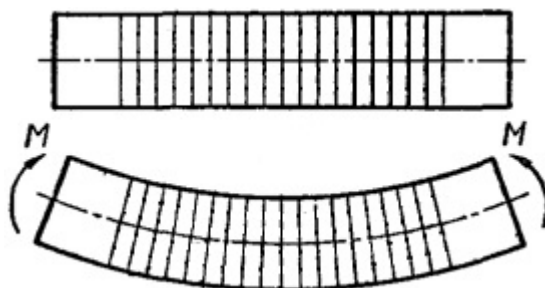
$$\begin{aligned}\sum F_{y_l} = 0 = Q_{y_l} - F &\Rightarrow Q_{y_l} = F \\ \sum M_{K_l} = 0 = -F \cdot z_l - M_{x_l} & \\ M_{x_l} &= -F \cdot z_l \\ \partial . B : z_l = 0 : M_{x_l} &= 0 \\ \partial . A : z_l = l : M_{x_l} &= -F \cdot l\end{aligned}$$

$Q_y \neq 0 \Rightarrow$ поперечный изгиб

Гипотезы

Для упрощения расчётных формул (без внесения существенной погрешности в результаты) используют следующие гипотезы:

- 1) **Гипотеза плоских сечений** – плоские сечения, перпендикулярные оси балки до нагружения, остаются плоскими и перпендикулярными оси балки и после нагружения:



- 2) **Гипотеза о ненадавливании продольных слоёв** – при изгибе продольные слои балки друг на друга не давят:

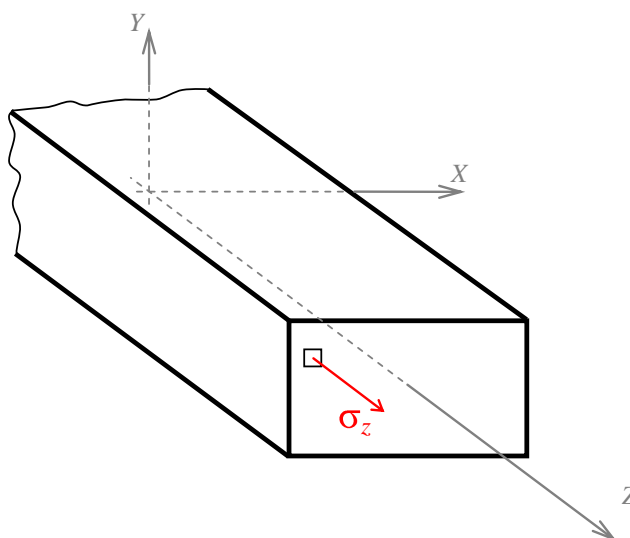


Рис. V.1.

Применение этих гипотез позволяет в формулах изгиба учитывать действие только осевых нормальных напряжений σ_z (рис V.1.), остальными напряжениями пренебречь. Таким образом, напряжённое состояние точек стержня в состоянии чистого изгиба такое же, как и у точек стержня растянутого (сжатого) – одноосное.

Именно поэтому, например, волокна дерева протянуты вдоль ствола – по направлению действия наибольших напряжений.

Напряжения σ_z (далее – просто σ) при изгибе переменны по сечению. Максимальное по модулю напряжение в поперечном сечении пропорционально действующему в нём изгибающему моменту $M_{изг}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{изг}}{W_{изг}} \quad (V.1)$$

где

$W_{изг}$ – **момент сопротивления сечения при изгибе**, $[м^3]$.

Прямой чистый изгиб

Деформации слоёв балки при её чистом изгибе в плоскости рисунка возникают в результате взаимного поворота плоских поперечных сечений:

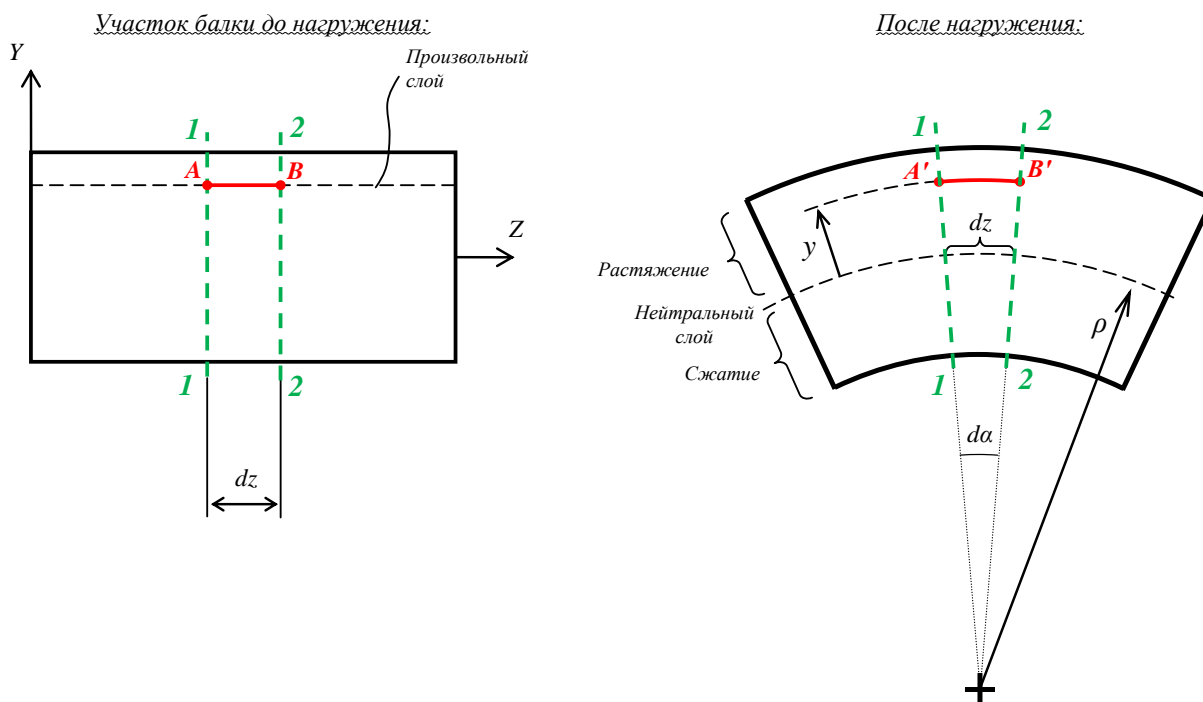


Рис. V.2.

Часть продольных слоёв балки растягивается, часть – сжимается. Их разделяет **нейтральный слой**, длина которого остаётся неизменной.

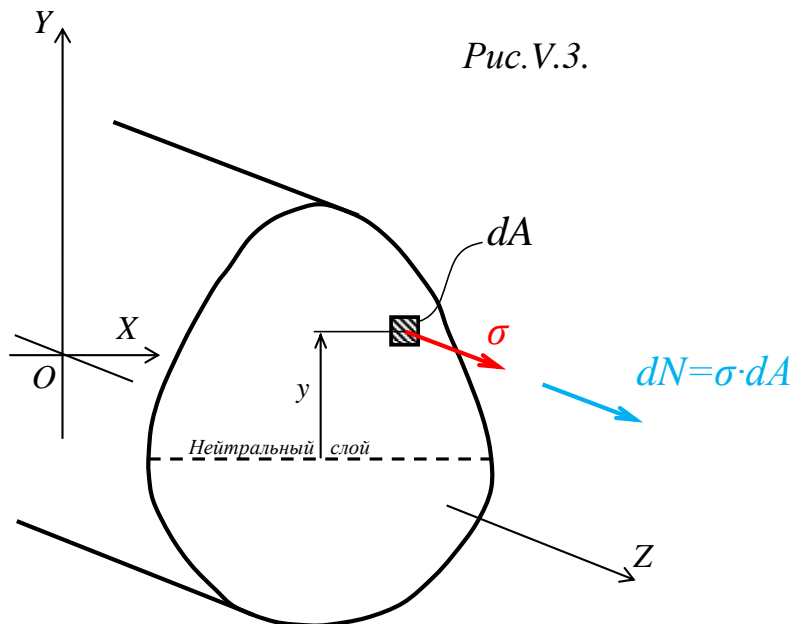
Бесконечно близкие поперечные сечения **1-1** и **2-2** (рис V.2.) взаимно поворачиваются, оставаясь плоскими.

Продольная деформация ε в произвольном слое на расстоянии y от нейтрального:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{d\alpha \cdot (\rho + y) - d\alpha \cdot \rho}{d\alpha \cdot \rho} = \frac{y}{\rho} \quad (V.2)$$

По закону Гука для одноосного напряжённого состояния $\sigma = E \cdot \varepsilon$, значит:

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (V.3)$$



Внутренний изгибающий момент M_x (его вектор направлен вдоль оси OX (рис. V.3.) есть интегральная сумма действующих в поперечном сечении усилий:

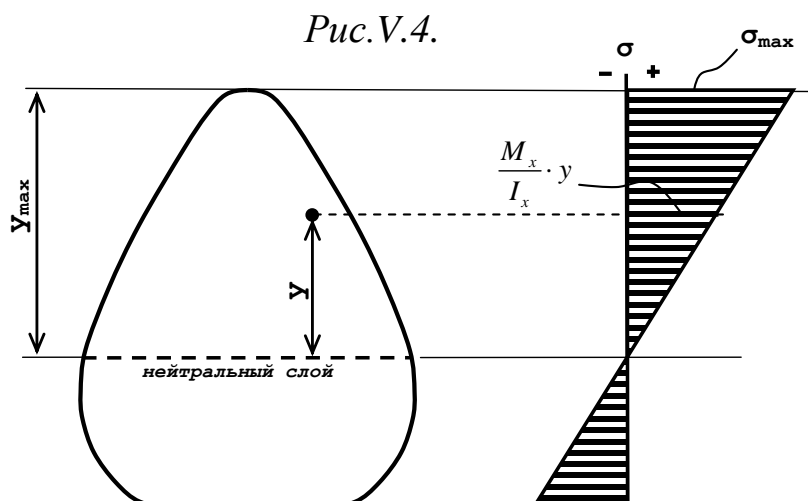
$$M_x = \int_A \overset{\text{Плечо}}{y} \cdot \overset{\text{Сила}}{dN} = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = \int_A y \cdot E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_x$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}} \quad \begin{array}{l} \text{Связь между внутренним изгибающим} \\ \text{моментом и кривизной оси бруса} \end{array} \quad (V.4)$$

Подставляя (V.4) в (V.3) получим:

$$\boxed{\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y} \quad \begin{array}{l} \text{Для точки поперечного сечения,} \\ \text{отстоящей от нейтрального слоя на } y. \end{array} \quad (V.5)$$

То есть напряжения по высоте поперечного сечения изменяются линейно:



$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max}$$

\Downarrow

$$\boxed{W_{\text{изг}} = W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}} \quad (V.6)$$

Положение нейтральной линии:

При изгибе внутренняя осевая растягивающая сила N отсутствует:

$$N = 0 = \int_A dN = \int_A \sigma \cdot dA = \frac{M_x}{I_x} \cdot \int_A y \cdot dA = \frac{M_x}{I_x} \cdot S_x$$

$M_x \neq 0, I_x \neq 0 \Rightarrow S_x = 0 = y_c \cdot A \Rightarrow y_c = 0$ нейтральный слой,
от которого отсчитывается координата y **проходит через центр тяжести поперечного сечения стержня.**

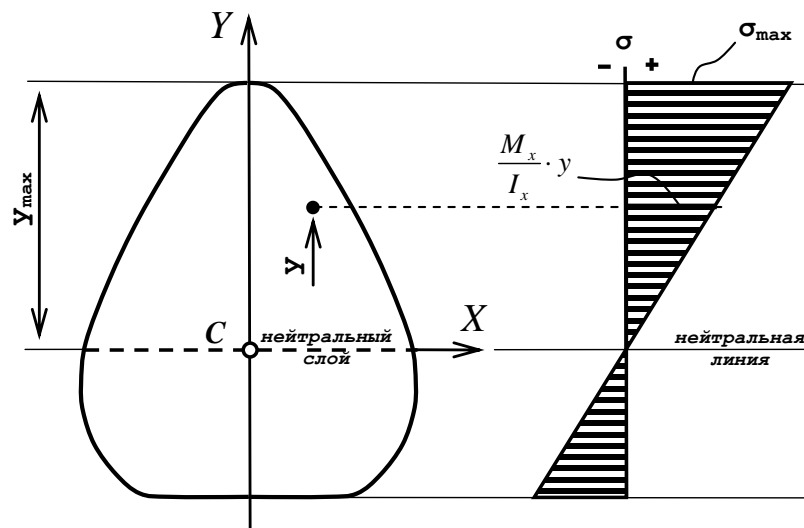


Рис.V.5.

Условие существования прямого изгиба

Докажем утверждение о том, что прямой изгиб возможен только в том случае, когда плоскость действия внутреннего изгибающего момента $M_{изг}$ совпадает с одной из главных плоскостей поперечного сечения (см. табл. V.1) – плоскостью XZ или плоскостью YZ .

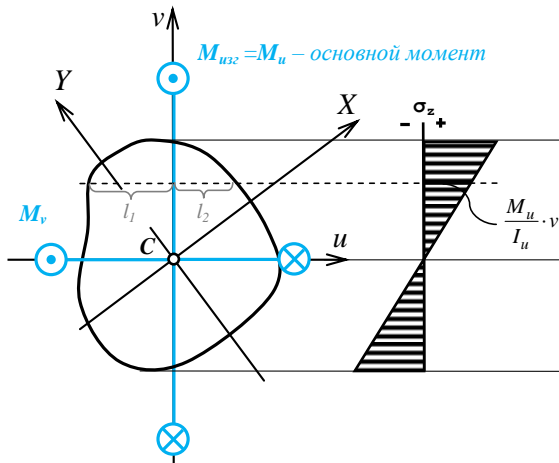


Рис.V.6.

Всякий внутренний изгибающий момент $M_{изг}$ стремится развернуть плоские сечения именно в своей плоскости (рис. V.2.), и создать эпюру нормальных напряжений, показанную на рис. V.5. Допустим (рис. V.6.), вектор внутреннего изгибающего момента $M_{изг}=M_u$ направлен вдоль центральной оси u . Прямой изгиб будет тогда, когда

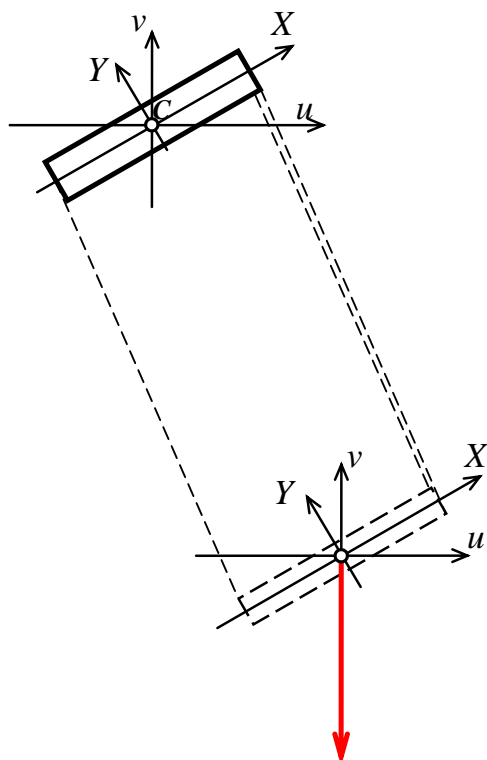
это неравномерное распределение напряжений, накладываясь на геометрию сечения будет самоуравновешено – момент M_v от этих напряжений относительно ортогональной оси v будет равен нулю. Посмотрим условие, при котором это происходит.

$$M_v = 0 = \int_A \sigma \cdot dA \cdot v = \int_A \frac{M_u}{I_u} \cdot v \cdot u \cdot dA = \frac{M_u}{I_u} \cdot \int_A u \cdot v \cdot dA = \frac{M_u}{I_u} \cdot I_{uv} \Rightarrow I_{uv} = 0$$

Равенство нулю центробежного момента – признак главных осей. Значит, дополнительный момент равен нулю (прямой изгиб) только тогда, когда центральные оси u и v совпадают с главными центральными осями X и Y поперечного сечения.

Убедиться в этом можно, например, изгибая подвешенными на конце грузами консоль прямоугольного поперечного сечения (обычную металлическую линейку):

а) Оси u и v не совпадают с главными центральными осями x и y поперечного сечения.



б) Оси u и v совпадают с главными центральными осями x и y поперечного сечения.

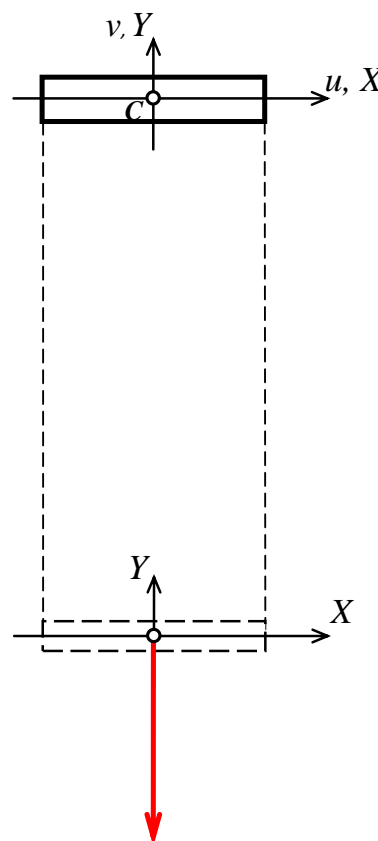


Рис.V.7.

Сложные процессы, возникающие в том случае, когда $I_{uv} \neq 0$ и приводящие, в конце концов, к возникновению косоуго изгиба, рассматривать не будем. Задача данной главы – сформулировать условие, при котором они даже не начинаются.

Рациональные поперечные сечения

Из рис. V.5. видно, что наибольшие напряжения действуют на удалении от центра тяжести поперечного сечения.

Очевидно, именно там и нужно сосредоточить основное количество материала стержня. Подобная форма позволит при том же весе стержня увеличить момент инерции его поперечных сечений I_x :

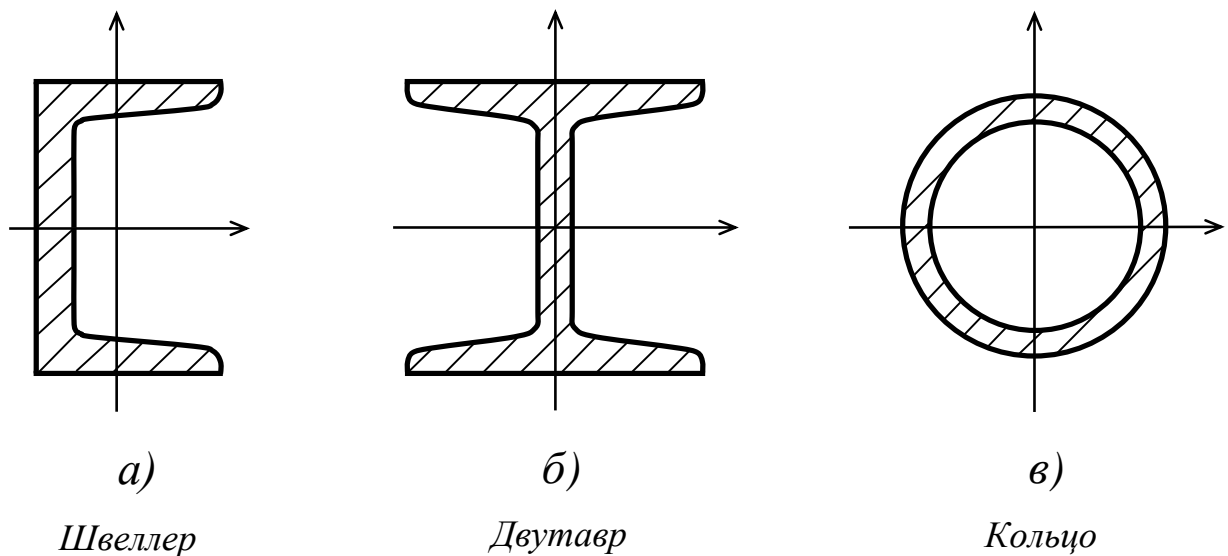


Рис. V.8.

Кольцевое поперечное сечение имеют, например, стебли трав.

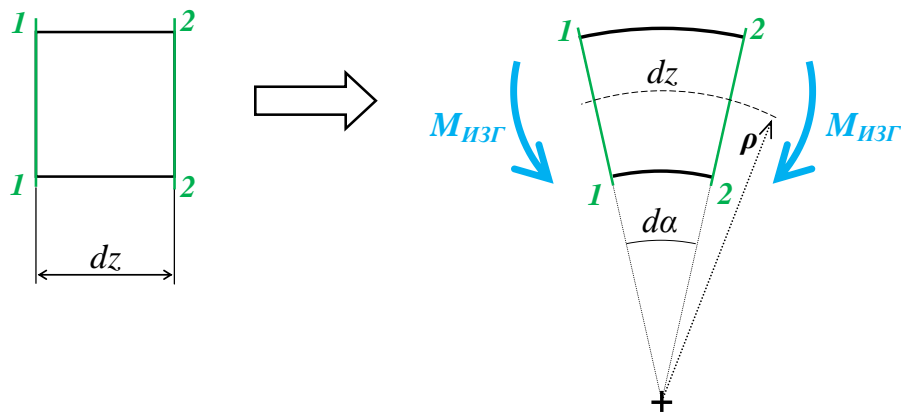
Потенциальная энергия

Как и раньше, считаем потенциальную энергию упругой деформации равной работе, которую внутренние усилия совершают на перемещениях точек тела при нагружении.

При изгибе это - работа внутренних изгибающих моментов на поворотах поперечных сечений.

Например, взаимно развернув поперечные сечения 1-1 и 2-2 на угол $d\alpha$ внутренний изгибающий момент M_x накопил потенциальную энергию в материале между ними:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M_{u_{32}} \cdot d\alpha = \frac{1}{2} \cdot M_{u_{32}} \cdot \frac{dz}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot M_{u_{32}} \cdot \frac{M_{u_{32}}}{E \cdot I_x} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{u_{32}}^2}{E \cdot I_x} \cdot dz$$



Полная потенциальная энергия, накопленная в стержне при чистом изгибе есть интеграл по его длине:

$$U = \int \frac{M_{u_{32}}^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot I_x} \quad (V.7)$$

Расчёт на прочность при изгибе

В точках изогнутого стержня, так же как и при растяжении – сжатии, реализуется одноосное напряжённое состояние:

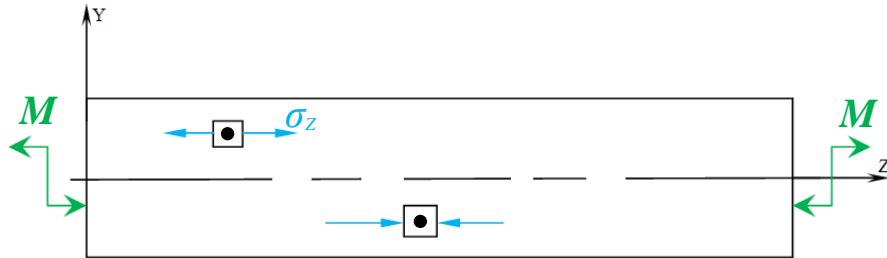


Рис.V.9.

От растяжения (сжатия) (рис.II.4.) изгиб отличаются только тем, что напряжения по поперечному сечению распределены неравномерно (рис.V.5.).

Поэтому, расчёт на прочность при изгибе почти идентичен расчёту на прочность при растяжении (сжатии) – формулы (II.11), (II.12), (II.13) и (II.14) - за исключением двух моментов:

- 1) Если предел текучести при растяжении равен пределу текучести при сжатии ($\sigma_{TP} = \sigma_{TC}$) то в качестве σ_{\max} берётся максимальное по модулю напряжения в сечении.
- 2) Если $\sigma_{TP} \neq \sigma_{TC}$ (или $\sigma_{BC} \neq \sigma_{BP}$ для хрупких материалов), то коэффициенты запаса прочности считаются отдельно для сжатой и для растянутой частей поперечного сечения и выбирается меньший из них.

Поперечный изгиб

При этом виде нагружения в поперечных сечениях стержня возникает не только внутренний изгибающий момент, но и внутренняя перерезывающая сила:

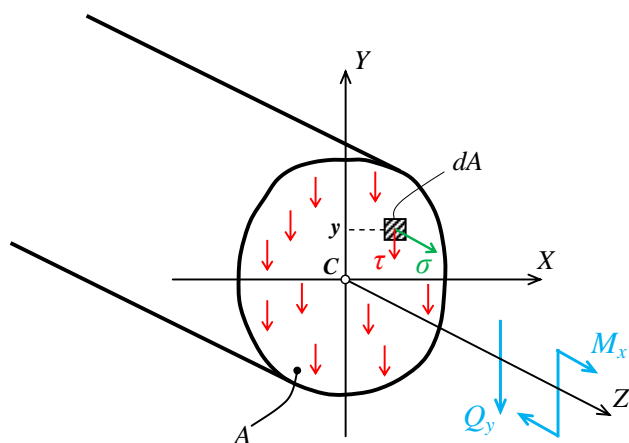


Рис. V.10.

Q_y – суммарный результат действия касательных напряжений τ ; M_x – результат действия нормальных напряжений σ :

$$Q_y = \int_A \tau \cdot dA$$

$$M_x = \int_A \sigma \cdot dA$$

Распределены эти напряжения по сечению неравномерно:

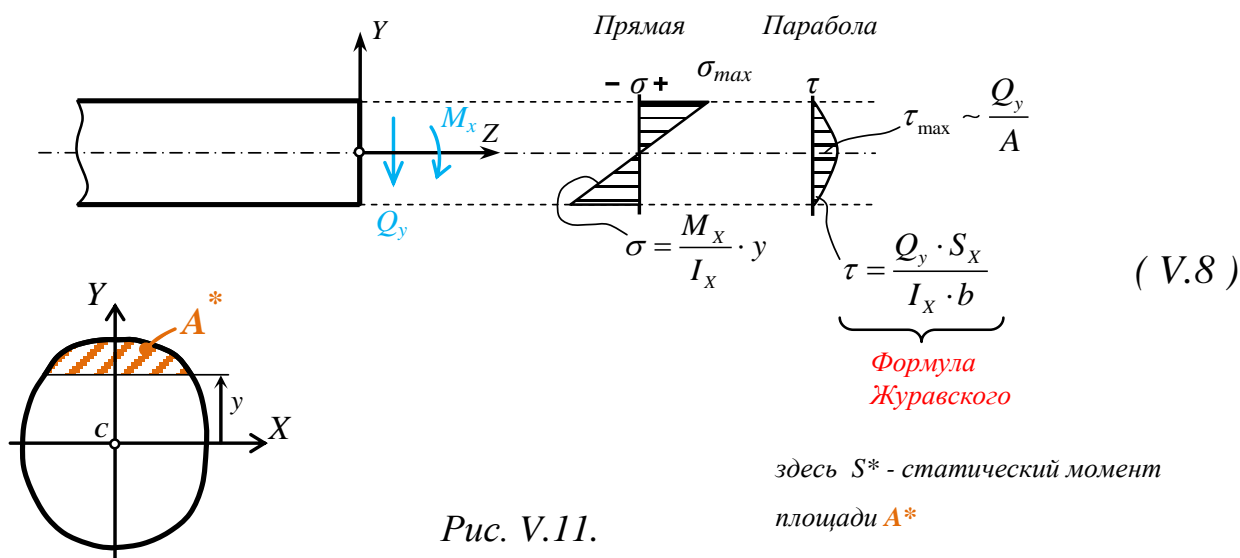
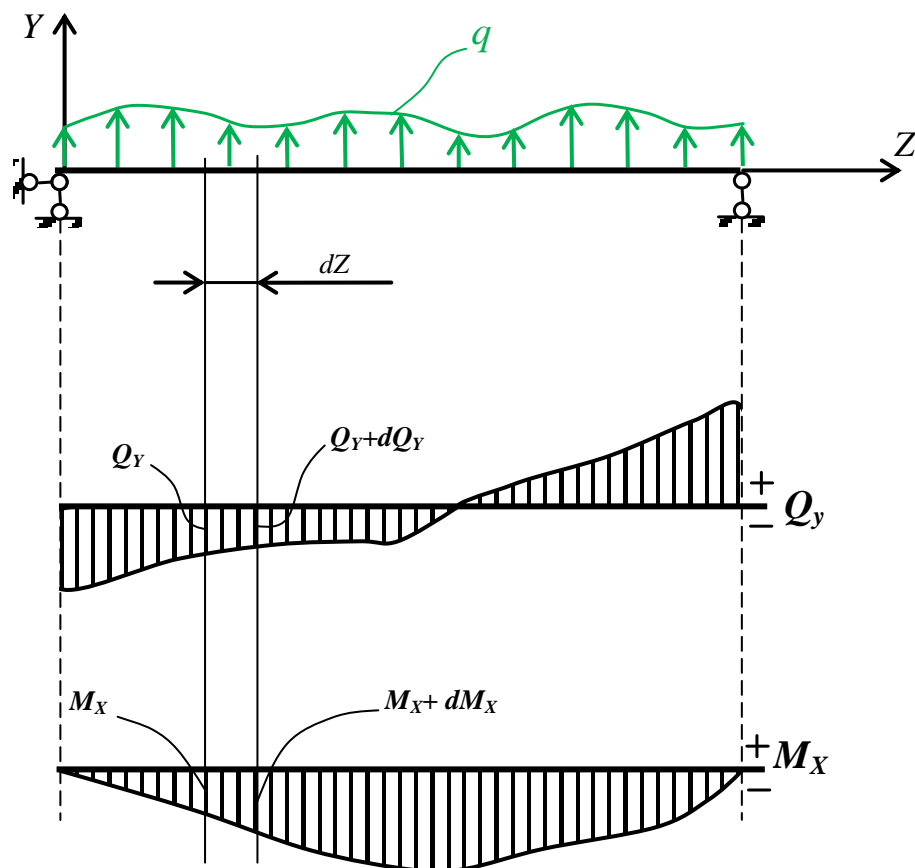


Рис. V.11.

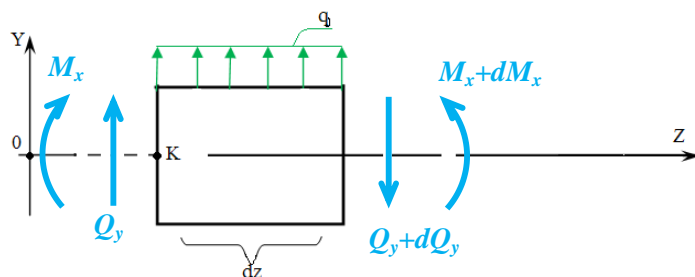
В длинных стержнях $\tau_{\max} \ll \sigma_{\max}$, кроме того, максимума касательные напряжения достигают у нейтрального слоя, а нормальные – по краям поперечного сечения (рис. V.11.) и их воздействия не суммируются.

Поэтому при расчёте перемещений точек стержня и запасов прочности действием касательных напряжений τ пренебрегают. Расчёт ведут точно так же, как и для чистого изгиба.

Связь внешней нагрузки и внутренних силовых факторов:



Уравнения равновесия кусочка стержня:



$$\sum F_y = 0 = Q_y + q \cdot dz - Q_y - dQ_y$$

$$\boxed{\frac{dQ_y}{dz} = q}$$

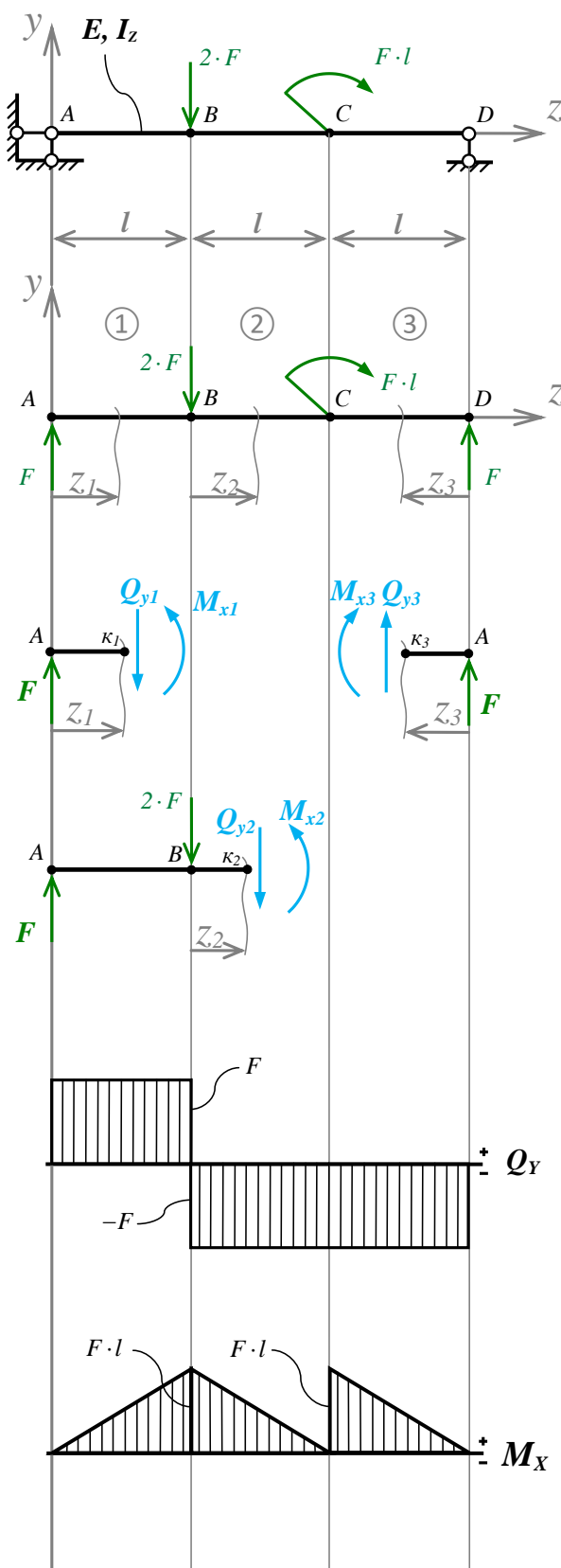
(V.9)

$$\sum M_k = 0 = q \cdot dz \cdot \underbrace{\frac{dz}{2}}_{\approx 0} - Q_y \cdot dz - \underbrace{dQ_y \cdot dz}_{\approx 0} + M_x + dM_x - M_x$$

$$\boxed{\frac{dM_x}{dz} = Q_y}$$

(V.10)

Пример V.3 :



Реакции опор:

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \Rightarrow Z_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 = -\overbrace{2 \cdot F \cdot l}^B - \overbrace{F \cdot l}^C + \overbrace{Y_D \cdot 3 \cdot l}^D$$

$$Y_D = F$$

$$\sum M_D = 0 = -\overbrace{Y_A \cdot 3 \cdot l}^A + \overbrace{2 \cdot F \cdot 2 \cdot l}^B - \overbrace{F \cdot l}^C$$

$$Y_A = F$$

Проверка:

$$\sum F_y = \overbrace{F}^A - \overbrace{2 \cdot F}^B + \overbrace{F}^D = 0$$

Результаты:

$$\sum F_{y_1} = 0 = F - Q_{y_1} \Rightarrow Q_{y_1} = F$$

$$\sum M_{K_1} = 0 = -F \cdot z_1 + M_{x_1}$$

$$M_{x_1} = F \cdot z_1$$

$$m.A : z_1 = 0 : M_{x_1} = 0$$

$$m.B : z_1 = l : M_{x_1} = F \cdot l$$

$$\sum F_{y_2} = 0 = F - 2 \cdot F - Q_{y_2} \Rightarrow Q_{y_2} = -F$$

$$\sum M_{K_2} = 0 = -F \cdot (l + z_2) + 2 \cdot F \cdot z_2 + M_{x_2}$$

$$M_{x_2} = F \cdot (l - z_2)$$

$$m.B : z_2 = 0 : M_{x_2} = F \cdot l$$

$$m.C : z_2 = l : M_{x_2} = 0$$

$$\sum F_{y_3} = 0 = Q_{y_3} + F \Rightarrow Q_{y_3} = -F$$

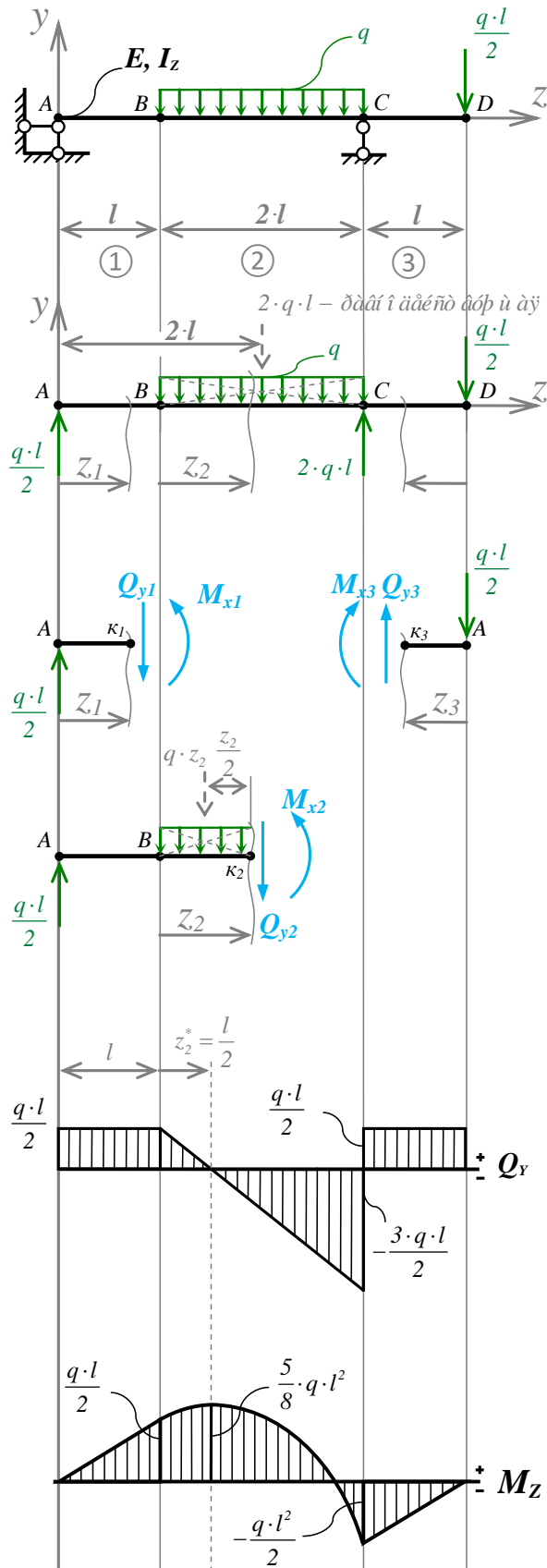
$$\sum M_{K_3} = 0 = -M_{x_3} + F \cdot z_3$$

$$M_{x_3} = F \cdot z_3$$

$$m.D : z_3 = 0 : M_{x_3} = 0$$

$$m.C : z_3 = l : M_{x_3} = F \cdot l$$

Пример V.4 :



Реакции опор:

$$\sum F_z = 0 = -Z_A \Rightarrow Z_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 = -\overbrace{2ql \cdot 2l}^{BC} + \overbrace{Y_C \cdot 3 \cdot l}^C - \overbrace{\frac{q \cdot l}{2} \cdot 4 \cdot l}^D$$

$$Y_C = 2 \cdot q \cdot l$$

$$\sum M_C = 0 = -\overbrace{Y_A \cdot 3 \cdot l}^A + \overbrace{2ql \cdot l}^{BC} - \overbrace{\frac{q \cdot l}{2} \cdot l}^D$$

$$Y_A = \frac{q \cdot l}{2}$$

Проверка:

$$\sum F_y = \overbrace{\frac{q \cdot l}{2}}^A - \overbrace{2 \cdot q \cdot l}^{BC} + \overbrace{2 \cdot q \cdot l}^C - \overbrace{\frac{q \cdot l}{2}}^D = 0$$

Результаты:

$$\sum F_{y_i} = 0 = \overbrace{\frac{q \cdot l}{2}}^A - Q_{y_i} \Rightarrow Q_{y_i} = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$\sum M_{K_i} = 0 = -\overbrace{\frac{q \cdot l}{2} \cdot z_i}^A + M_{x_i}$$

$$M_{x_i} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot z_i$$

$$m.A : z_i = 0 : M_{x_i} = 0$$

$$m.B : z_i = l : M_{x_i} = \frac{q \cdot l^2}{2}$$

$$\sum F_{y_2} = 0 = \overbrace{\frac{q \cdot l}{2}}^A - q \cdot z_2 - Q_{y_2}$$

$$Q_{y_2} = \frac{q}{2} \cdot (l - 2 \cdot z_2)$$

$$m.B : z_2 = 0 : Q_{y_2} = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$m.C : z_2 = 2 \cdot l : Q_{y_2} = -\frac{3 \cdot q \cdot l}{2}$$

$$\sum M_{K_2} = 0 = -\overbrace{\frac{q \cdot l}{2} \cdot (l + z_2)}^A + \overbrace{q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}}^{BC} + M_{x_2}$$

$$M_{x_2} = \frac{q}{2} \cdot (l^2 + l \cdot z_2 - z_2^2)$$

$$m.B : z_2 = 0 : M_{x_2} = \frac{q \cdot l^2}{2}$$

$$m.C : z_2 = 2 \cdot l : M_{x_2} = -\frac{q \cdot l^2}{2}$$

$$\sum F_{y_3} = 0 = Q_{y_3} - \frac{q \cdot l}{2} \Rightarrow Q_{y_3} = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$\sum M_{K_3} = 0 = -M_{x_3} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot z_3 \Rightarrow M_{x_3} = -\frac{q \cdot l}{2} \cdot z_3 \quad \begin{cases} m.D: z_3 = 0: M_{x_3} = 0 \\ m.C: z_3 = l: M_{x_3} = -\frac{q \cdot l^2}{2} \end{cases}$$

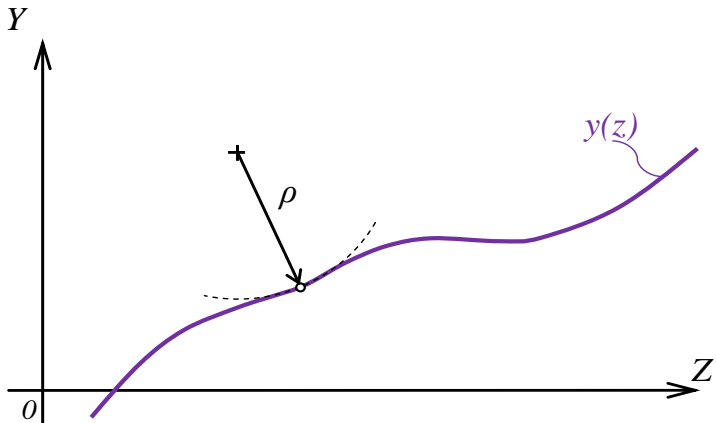
Экстремум параболы:

$$Q_{y_2}(z_2^*) = 0 = \frac{q}{2} \cdot (l - 2 \cdot z_2^*) \Rightarrow z_2^* = \frac{l}{2}$$

$$M_{x_2}(z_2^*) = M_{x_2}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot \left(l^2 + l \cdot \frac{l}{2} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l^2$$

Дифференциальное уравнение оси изогнутого стержня

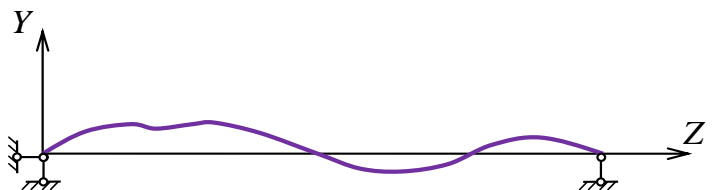
Из математики известна формула для вычисления кривизны \varkappa произвольной функции $y(z)$:



$$\varkappa = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (V.11)$$

Рис. V.12.

Упругая ось изогнутого под внешней нагрузкой стержня также представляет собой функцию $y(z)$, кривизна которой, как уже было установлено ранее (V.4) определяется внутренним изгибающим моментом M_x :



$$\varkappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение упругой оси стержня в общем случае нагружения:

$$\frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{E \cdot I_x} \quad (V.12)$$

В линейных задачах, которыми занимается курс «Сопротивление материалов», прогибы по определению невелики и тангенс угла наклона оси y' немногим больше нуля.

$$y' \approx 0 \Rightarrow (y')^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}} \rightarrow 1$$

$$\boxed{y'' \approx \frac{M_x}{E \cdot I_x}} \quad (V.13)$$

(V.13) – **приближённое дифференциальное уравнение упругой оси стержня.**

Если по длине стержня известны $M_x(z)$, $E(z)$ и $I_x(z)$, то интегрируя дважды уравнения (V.13), можно получить, как функцию прогибов

$$v = y(z)$$

так и функцию углов поворота

$$\theta \approx y'(z)$$

(предполагается, что тангенс малого угла приближённо равен самому углу).

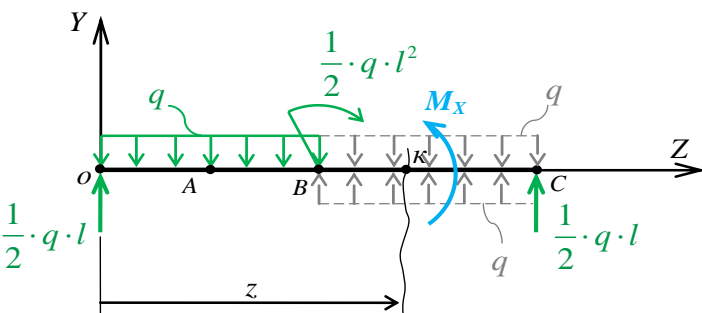
Такой метод вычислений прогибов и углов поворота точек упругой оси стержня называется **методом Коши-Крылова.**

Метод Коши-Крылова имеет несколько вариантов реализации. Для примера разберём простейший из них, применимый только к прямым стержням постоянного поперечного сечения. Правила расчёта:

- 1) Распределённая нагрузка продолжается до конца стержня. Там, где её не было, вводится компенсирующая распределённая нагрузка;
- 2) Уравнение момента M_x составляется в глобальной системе координат $OXYZ$ для текущего сечения последнего от начала координат участка балки;
- 3) Сосредоточенный внешний момент умножается на скобку в нулевой степени, внутри которой стоит разность глобальной координаты z и координаты точки приложения момента;
- 4) Интегрировать, не раскрывая скобок;
- 5) При определении прогиба сечения используются только те слагаемые, внутри скобок которых образуется положительное число.

В результате интегрирования $ДУ$ мы получаем две произвольные постоянные C и D – угол поворота и прогиб в начале координат, умноженные на изгибную жёсткость $E \cdot I_x$. Эти постоянные определяются из граничных условий ($ГУ$) на опорах.

V.5



$$y_B = ? \quad \theta_B = ?$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Z_0 = 0$$

$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow Y_C = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \ell$$

$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow Y_0 = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \ell$$

$$E \cdot I_x \cdot y'' = \underbrace{M_x(z)}_{q \text{ верхнее}} = -\frac{q \cdot z^2}{2} + \underbrace{\frac{q \cdot (z - \ell)^2}{2}}_{q \text{ нижнее}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot q \cdot \ell \cdot z}_{m.O} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot q \cdot \ell^2 \cdot (z - \ell)^0}_{m.B}$$

$$E \cdot I_x \cdot y' = -\frac{q \cdot z^3}{6} + \frac{q \cdot (z - \ell)^3}{6} + \frac{q \cdot \ell \cdot z^2}{4} + \frac{q \cdot \ell^2 \cdot (z - \ell)}{2} + \tilde{N}$$

$$E \cdot I_x \cdot y = -\frac{q \cdot z^4}{24} + \frac{q \cdot (z - \ell)^4}{24} + \frac{q \cdot \ell \cdot z^3}{12} + \frac{q \cdot \ell^2 \cdot (z - \ell)^2}{4} + \tilde{N} \cdot z + D$$

$$1) \ z=0, \ y=0: \ 0 = -\cancel{\frac{q \cdot 0^4}{24}} + \frac{q \cdot (0-\ell)^4}{24} + \cancel{\frac{q \cdot \ell \cdot 0^3}{12}} + \frac{q \cdot \ell^2 \cdot (0-\ell)^2}{4} + C \cdot 0 + D$$

$$D = 0$$

$$2) \quad z = 2 \cdot \ell, \quad y = 0: \quad 0 = -\frac{q \cdot (2 \cdot \ell)^4}{24} + \frac{q \cdot (2 \cdot \ell - \ell)^4}{24} + \frac{q \cdot \ell \cdot (2 \cdot \ell)^3}{12} + \\ + \frac{q \cdot \ell^2 \cdot (2 \cdot \ell - \ell)^2}{4} + C \cdot 2 \cdot \ell + D$$

$$C = -\frac{7}{48} \cdot q \cdot \ell^3$$

Окончательные формулы:

$$y = \frac{q}{48 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left[-2 \cdot z^4 + 2 \cdot (z - \ell)^4 + 4 \cdot \ell \cdot z^3 + 12 \cdot \ell^2 \cdot (z - \ell)^2 - 7 \cdot \ell^3 \cdot z \right]$$

$$y' = \frac{q}{48 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left[-8 \cdot z^3 + 8 \cdot (z - \ell)^3 + 12 \cdot \ell \cdot z^2 + 24 \cdot \ell^2 \cdot (z - \ell) - 7 \cdot \ell^3 \right]$$

Прогиб и угол поворота упругой оси в т. А:

$$y_A = y \left(z = \frac{\ell}{2} \right) =$$

$$= \frac{q}{48 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left[-2 \cdot \left(\frac{\ell}{2} \right)^4 + 2 \cdot \overbrace{\left(\frac{\ell}{2} - \ell \right)^4}^{(<0)} + 4 \cdot \ell \cdot \left(\frac{\ell}{2} \right)^3 + 12 \cdot \ell^2 \cdot \overbrace{\left(\frac{\ell}{2} - \ell \right)}^{(<0)} - 7 \cdot \ell^3 \cdot \frac{\ell}{2} \right] =$$

$$= -\frac{25 \cdot q \cdot \ell^4}{384 \cdot E \cdot I_x}, [м]$$

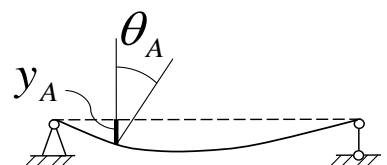
$y_A < 0 \Rightarrow$ перемещение вниз;

$$\theta_A = y' \left(z = \frac{\ell}{2} \right) =$$

$$= \frac{q}{48 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left[-8 \cdot \left(\frac{\ell}{2} \right)^3 + 8 \cdot \overbrace{\left(\frac{\ell}{2} - \ell \right)^3}^{(<0)} + 12 \cdot \ell \cdot \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + 24 \cdot \ell^2 \cdot \overbrace{\left(\frac{\ell}{2} - \ell \right)}^{(<0)} - 7 \cdot \ell^3 \right] =$$

$$= -\frac{5 \cdot q \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_x}, [рад]$$

$\theta_A < 0$ — поворот по часовой стрелке;



Прогиб и угол поворота упругой оси стержня в т. B :

$$y_B = y(z = \ell) =$$

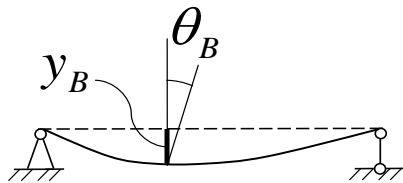
$$= \frac{q}{48 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left[-2 \cdot \ell^4 + 2 \cdot (\cancel{\ell - \ell})^4 + 4 \cdot \ell \cdot \ell^3 + 12 \cdot \ell^2 \cdot (\cancel{\ell - \ell}) - 7 \cdot \ell^3 \cdot \ell \right] =$$

$$= -\frac{5 \cdot q \cdot \ell^4}{48 \cdot E \cdot I_x}, \quad [м]$$

$$\theta_B \approx y'(z = \ell) =$$

$$= \frac{q}{48 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left[-8 \cdot \ell^3 + 8 \cdot (\cancel{\ell - \ell})^3 + 12 \cdot \ell \cdot \ell^2 + 24 \cdot \ell^2 \cdot (\cancel{\ell - \ell}) - 7 \cdot \ell^3 \right] =$$

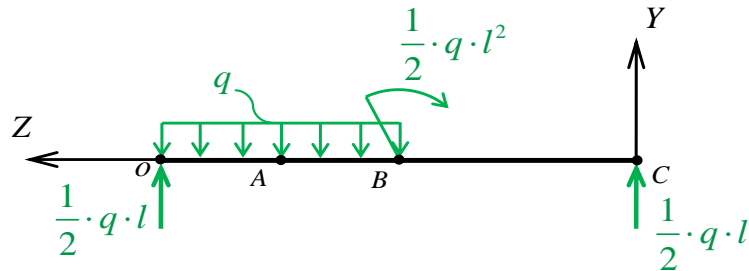
$$= -\frac{3 \cdot q \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_x} = -\frac{q \cdot \ell^3}{16 \cdot E \cdot I_x}, \quad [рад]$$



Примечание:

Распределённая нагрузка продолжается до конца стержня. При этом неважно, где она начинается.

Если бы в разобранным примере система координат начиналась на другом конце стержня,



то продлевать распределённую нагрузку и вводить компенсирующую не требовалось бы вовсе.

Следует, однако, помнить: при таком развороте системы координат, вычисленные углы θ меняют знак.

Косой изгиб

Косым называют вид изгиба, при котором направление вектора внутреннего изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных центральных осей поперечного сечения:

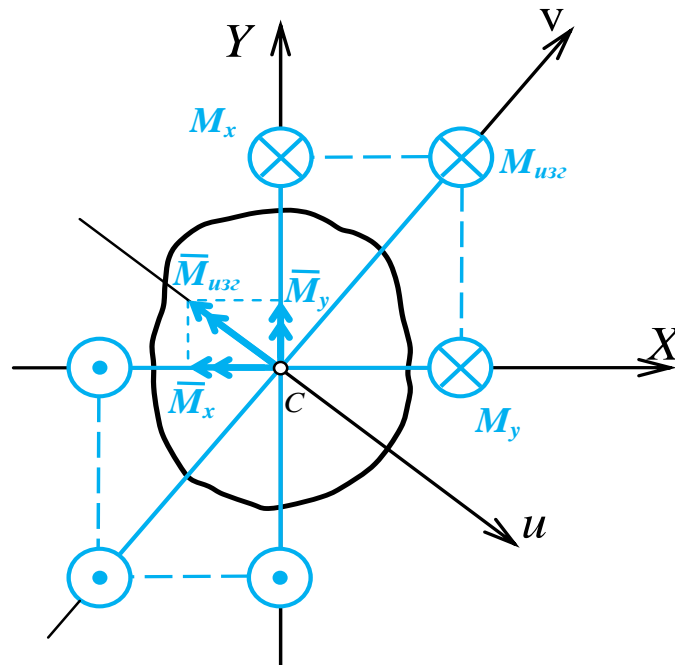


Рис. V.13.

Расчёт ведётся путём рассмотрения косого изгиба, как суммы двух прямых: вектор изгибающего момента раскладывается по главным центральным осям

$$\bar{M}_{изг} = \bar{M}_x + \bar{M}_y \quad (V.14)$$

Как решается задача прямого изгиба, мы уже знаем.

Напряжение σ в любой точке поперечного сечения с координатами (x, y) в главных центральных осях, рассматривают, как сумму напряжений от действия моментов M_x и M_y :

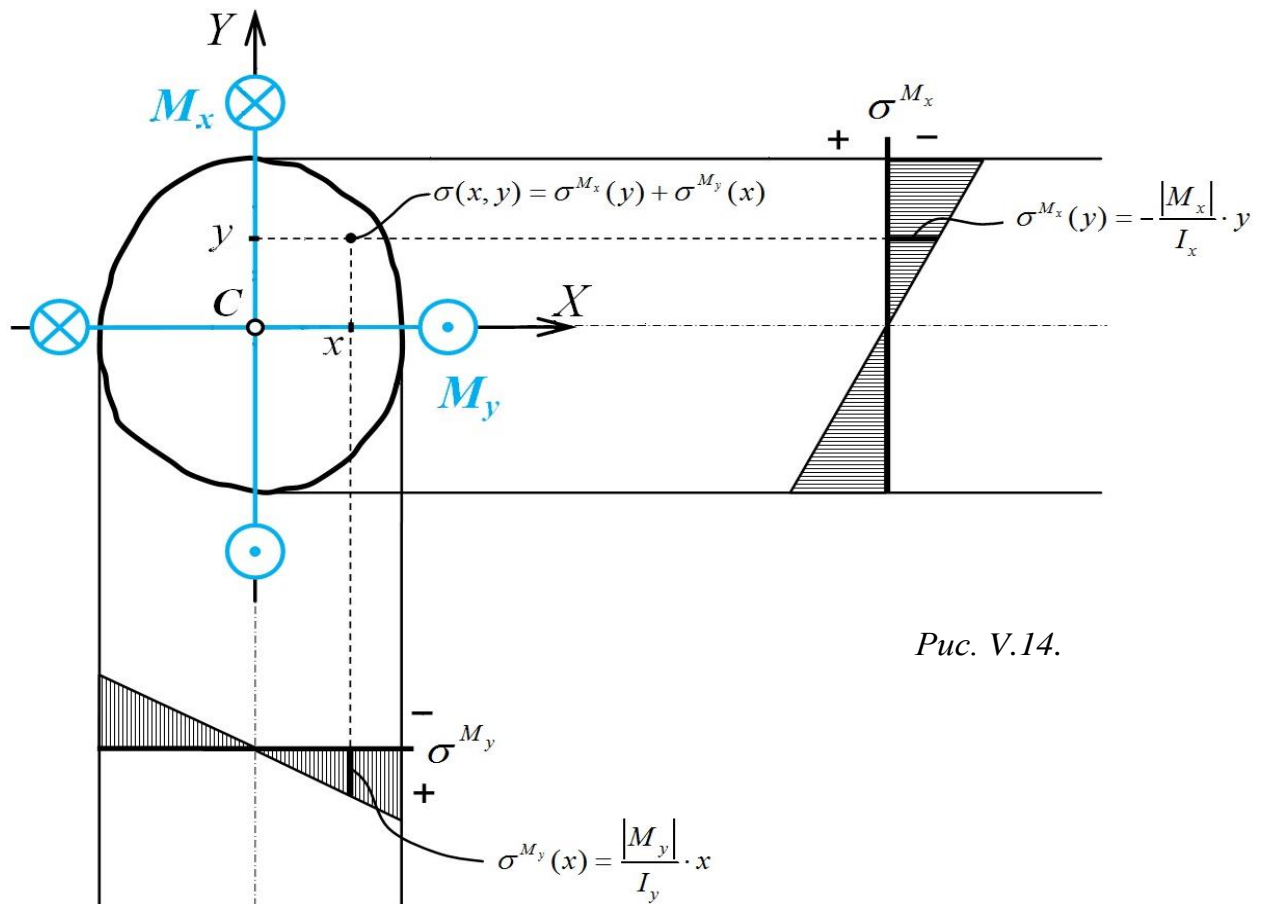


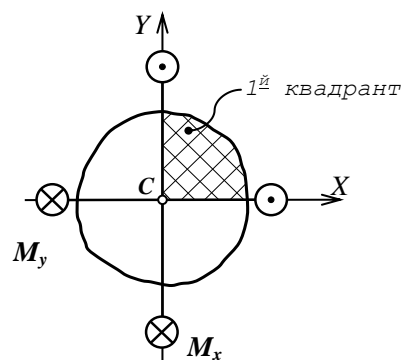
Рис. V.14.

$$\sigma = \sigma^{M_x} + \sigma^{M_y}$$

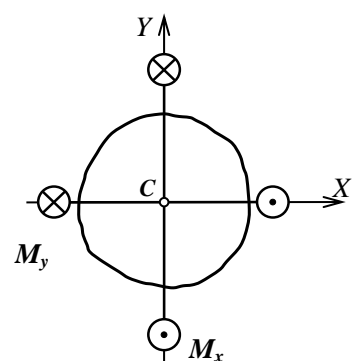
или, вспоминая формулу (V.5):

$$\sigma = \pm \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y \pm \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x \quad (V.15)$$

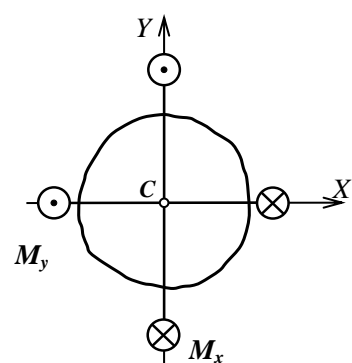
здесь знаки слагаемых соответствуют знакам напряжений, порождаемых соответствующими моментами M_x или M_y в первом квадранте главных центральных осей:



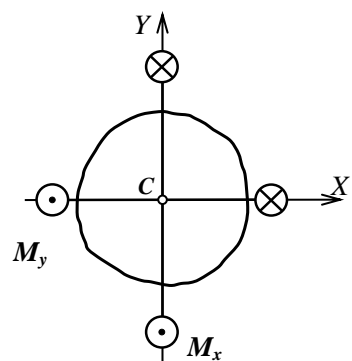
$$\sigma = + \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y + \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x$$



$$\sigma = - \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y + \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x$$



$$\sigma = + \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y - \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x$$



$$\sigma = - \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y - \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x$$

Нейтральный слой при косом изгибе остается плоским. На поперечном сечении он виден отрезком – частью прямой, именуемой **нейтральная линия** (н.л.), (рис. V.16.).

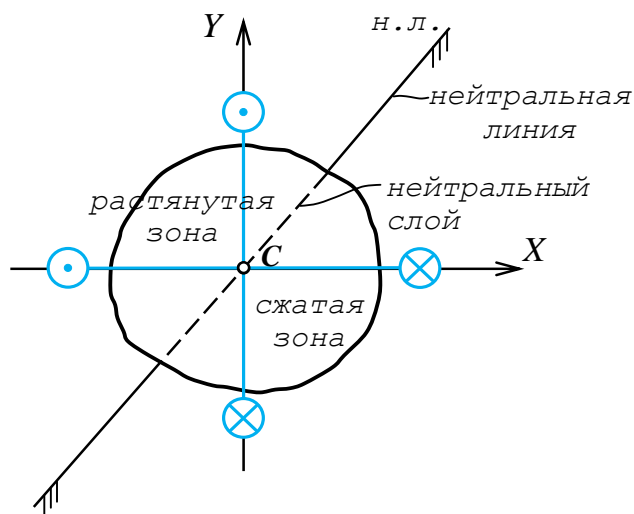


Рис. V.16.

Нейтральная линия разделяет сжатую зону поперечного сечения и растянутую (всегда отделяет кресты от точек, рис. V.16.), её уравнение в координатах CXY находят из того условия, что напряжения в нейтральном слое равны нулю:

$$\sigma = 0 = \pm \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y \pm \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x \quad (V.16)$$

При косом изгибе нейтральная линия всегда проходит через точку C – центр тяжести поперечного сечения. Напряжения при косом изгибе распределяются по сечению линейно, принимая экстремальные значения в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (рис. V.17).

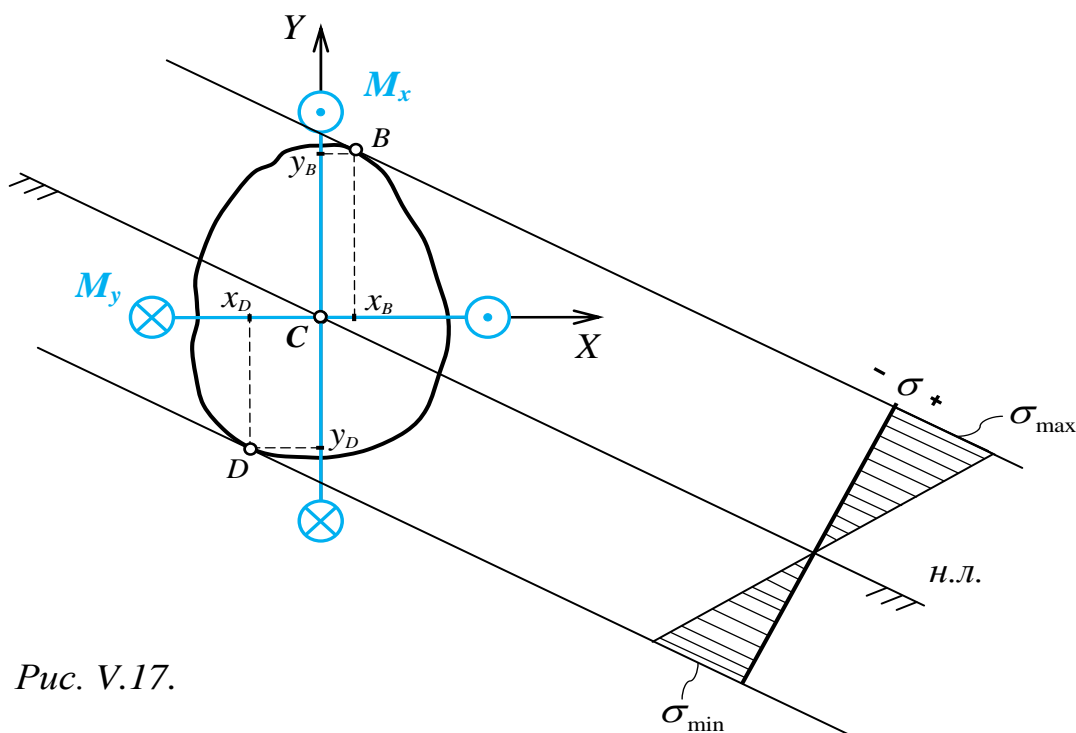


Рис. V.17.

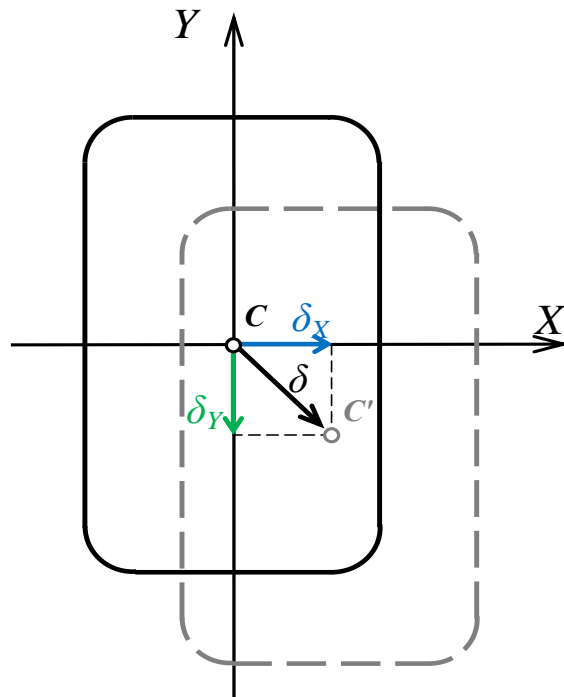
Для изгиба, показанного на *рис. V.17*, экстремальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = + \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y_B + \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x_B ;$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = + \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y_D + \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x_D .$$

Значения внутренних изгибающих моментов M_x и M_y берутся по модулю, координаты точек x_B , y_B , x_D , y_D — с учётом знака.

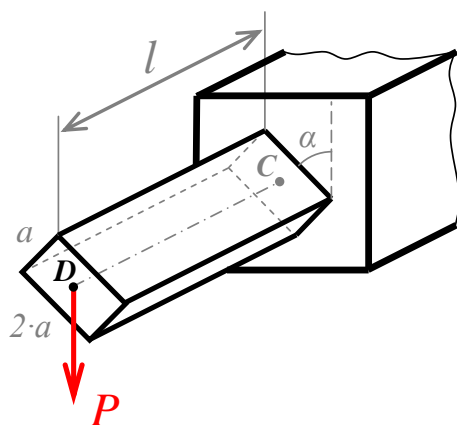
Полное перемещение поперечного сечения стержня при косом изгибе δ находят, как геометрическую сумму перемещений δ_x и δ_y от каждого из двух прямых изгибов:



$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} \quad (V.17)$$

Рис. V.18.

Пример V.6 :

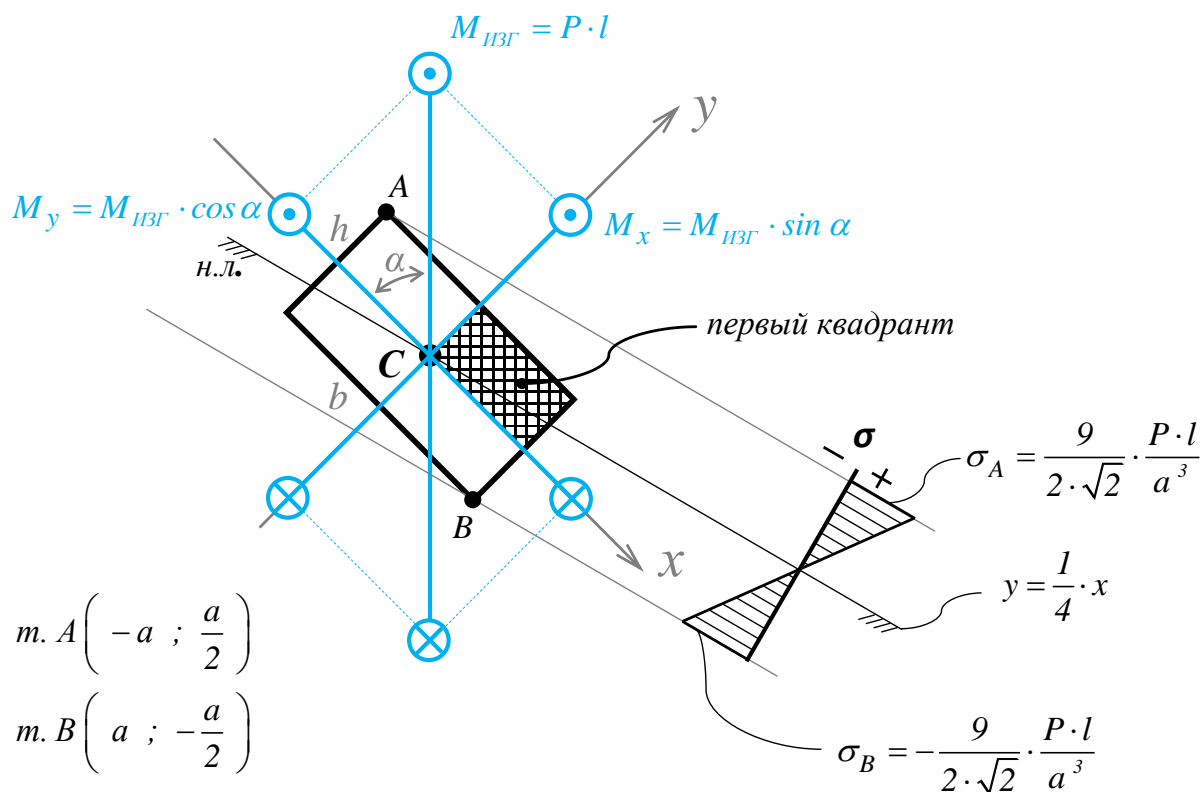


Консольный брус прямоугольного поперечного сечения $a \times 2a$ длиной l повёрнут на угол $\alpha = 45^\circ$ и нагружен на конце вертикальной силой P .

Построить эпюру нормальных напряжений σ в корневом сечении бруса; найти перемещение δ точки приложения силы.

Решение

Сила P создаёт в корневом поперечном сечении бруса наибольший внутренний изгибающий момент $M_{изг} = P \cdot l$ (сжаты нижние волокна):



Определяемся с центром тяжести C поперечного сечения бруса (он находится на пересечении осей симметрии) и с его главными центральными осями x и y (совпадают с осями симметрии). Все последующие вычисления проводятся в системе координат Cxy .

Уравнение нейтральной линии:

M_x растягивает
волокна в первом
квадранте

$$0 = + \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y + \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x$$

$$M_x = M_{изг} \cdot \sin \alpha = \frac{P \cdot l}{\sqrt{2}}$$

$$M_y = M_{изг} \cdot \cos \alpha = \frac{P \cdot l}{\sqrt{2}}$$

M_y сжимает
волокна в первом
квадранте

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{(2 \cdot a) \cdot a^3}{12} = \frac{1}{6} \cdot a^4$$

$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{(2 \cdot a)^3 \cdot a}{12} = \frac{4}{6} \cdot a^4$$

$$0 = + \frac{\cancel{\frac{P \cdot l}{\sqrt{2}}}}{\cancel{\frac{1}{6} \cdot a^4}} \cdot y - \frac{\cancel{\frac{P \cdot l}{\sqrt{2}}}}{4 \cdot \cancel{\frac{1}{6} \cdot a^4}} \cdot x$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot x$$

— уравнение нейтральной
линии в координатах Sx .

Проводим на чертеже корневого сечения нейтральную линию, подписываем её «н.л.», концы подштриховываем.

На нейтральной линии нормальные напряжения σ равны нулю. По мере удаления от нейтральной линии они возрастают линейно. Наиболее удалёнными от нейтральной линии являются точки A и B поперечного сечения, следовательно, наибольшие по модулю напряжения возникнут именно в этих точках:

$$\sigma(x, y) = + \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y - \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x = \frac{\frac{P \cdot l}{\sqrt{2}}}{\frac{a^4}{6}} \cdot y - \frac{\frac{P \cdot l}{\sqrt{2}}}{\frac{4 \cdot a^4}{6}} \cdot x = \frac{3 \cdot P \cdot l}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot a^4} \cdot [4 \cdot y - x]$$

$$m. A \left(-a ; \frac{a}{2} \right)$$

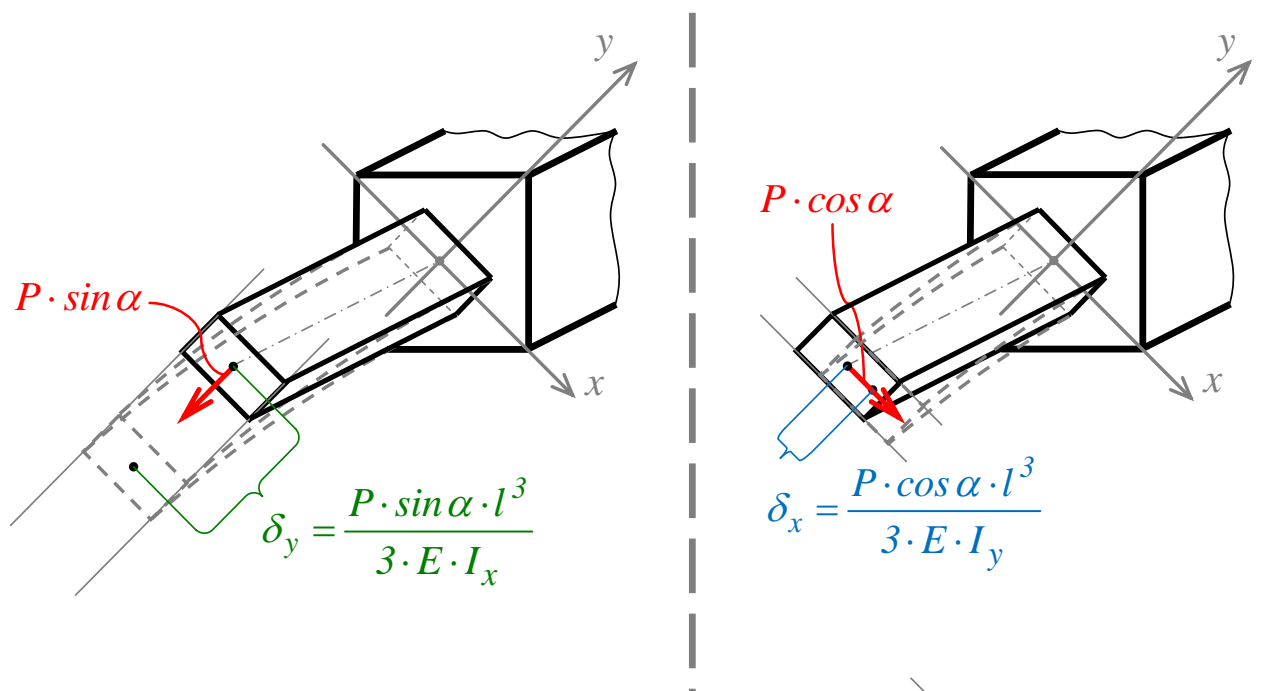
$$\sigma_A = \sigma \left(-a, \frac{a}{2} \right) = \frac{3 \cdot P \cdot l}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot a^4} \cdot \left[4 \cdot \frac{a}{2} - (-a) \right] = \frac{9 \cdot P \cdot l}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot a^3}$$

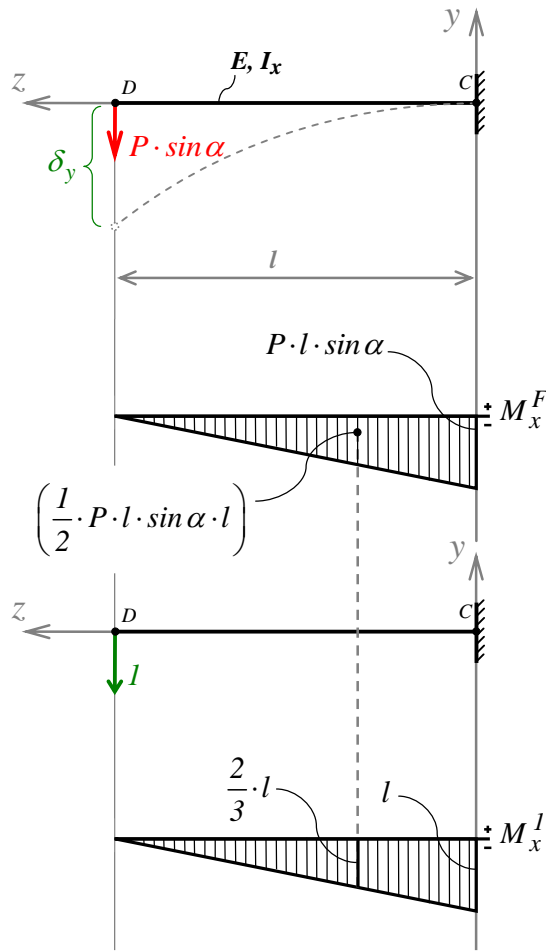
$$m. B \left(a ; -\frac{a}{2} \right)$$

$$\sigma_B = \sigma \left(a, -\frac{a}{2} \right) = \frac{3 \cdot P \cdot l}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot a^4} \cdot \left[4 \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) - a \right] = -\frac{9 \cdot P \cdot l}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot a^3}$$

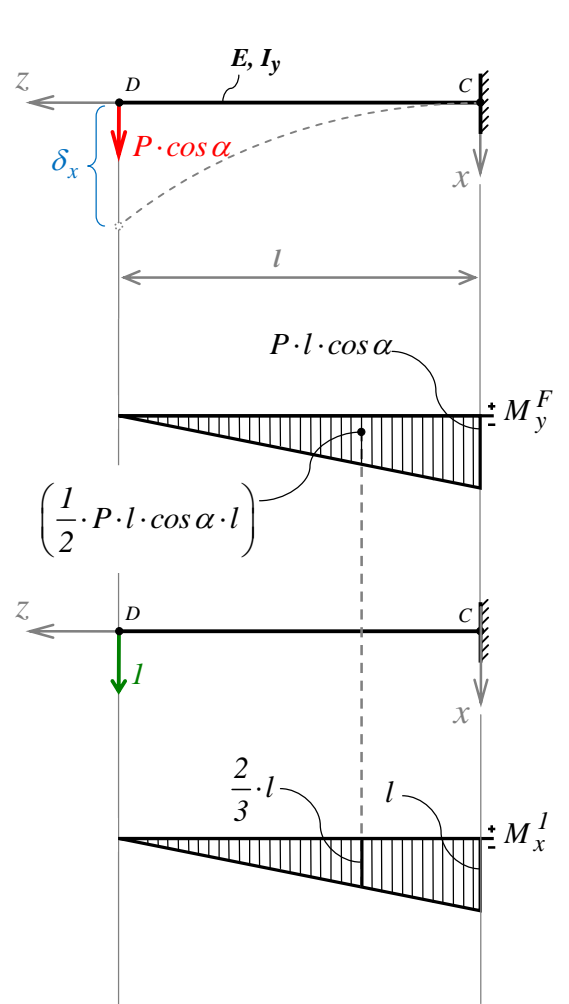
На чертеже корневого сечения строим эпюру σ - прямую линию между крайними значениями σ_A и σ_B .

Перемещения точки D приложения силы рассчитываются по отдельности для каждого из двух прямых изгибов и потом геометрически складываются:





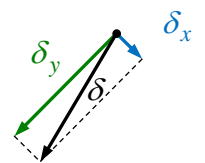
$$\begin{aligned}\delta_y &= \frac{M_x^F \cdot M_x^I}{E \cdot I_x} = \\ &= \frac{l}{E \cdot I_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot P \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] = \\ &= \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_x} \cdot \sin \alpha = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot E \cdot I_x}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\delta_x &= \frac{M_y^F \cdot M_y^I}{E \cdot I_y} = \\ &= \frac{l}{E \cdot I_y} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot P \cdot l \cdot \cos \alpha \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] = \\ &= \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_y} \cdot \cos \alpha = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot E \cdot I_y}\end{aligned}$$

δ_y - перемещение точки D под действием внутреннего изгибающего момента M_x ; δ_x - перемещение точки D под действием момента M_y ; суммарное перемещение точки D вычисляем геометрическим сложением:

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_x^2} = \frac{P \cdot l^3 \cdot 6}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot E \cdot a^4} \cdot \sqrt{\frac{17}{16}} = \sqrt{\frac{17}{8}} \cdot \frac{P \cdot l^3}{E \cdot a^4}.$$



Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренным растяжением (сжатием) называют такой вид нагружения стержня, при котором ось действующей на стержень внешней продольной силы (или результирующей системы продольных сил) не совпадает с его упругой осью:

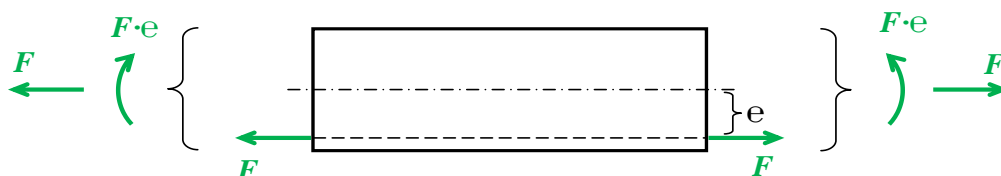


Рис. V.19.

Действие такой силы (или группы сил) на стержень эквивалентно действию на него осевой растягивающей силы и изгибающего момента (рис. V.17.).

А изгибающий момент можно разложить по главным центральным осям (V.14), получив косой изгиб с растяжением (сжатием):

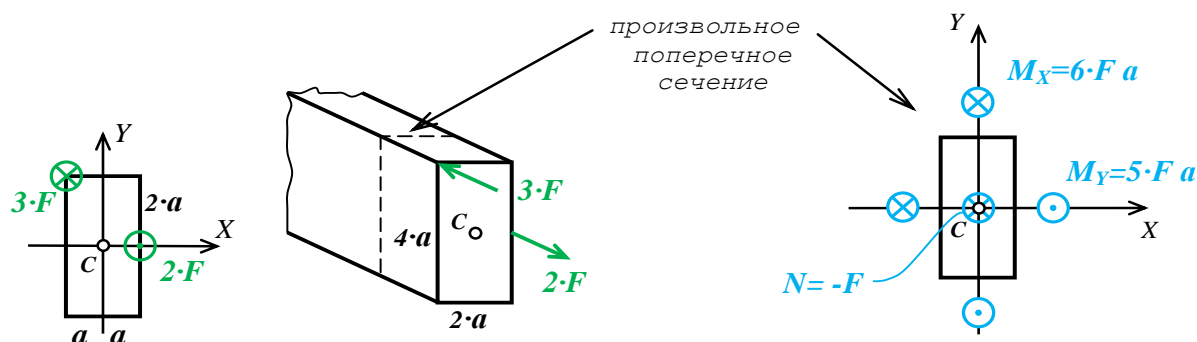


Рис. V.20.

Напряжение в точке поперечного сечения с координатами (x, y) в главных центральных осях вычисляется по формуле:

$$\sigma = \pm \frac{|M_x|}{I_x} \cdot y \pm \frac{|M_y|}{I_y} \cdot x + \frac{N}{A} \quad (V.18)$$

где A – площадь поперечного сечения.

M_x и M_y подставляются по модулю, N , x и y – с учётом знака.
 Знаки перед первыми двумя слагаемыми определяются по тому же правилу, что и для косо́го изгиба.

Уравнение нейтральной линии:

$$0 = \pm \frac{|M_x|}{I_x} y \pm \frac{|M_y|}{I_y} x + \frac{N}{A} \quad (V.19)$$

При внецентренном растяжении (сжатии) нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения:

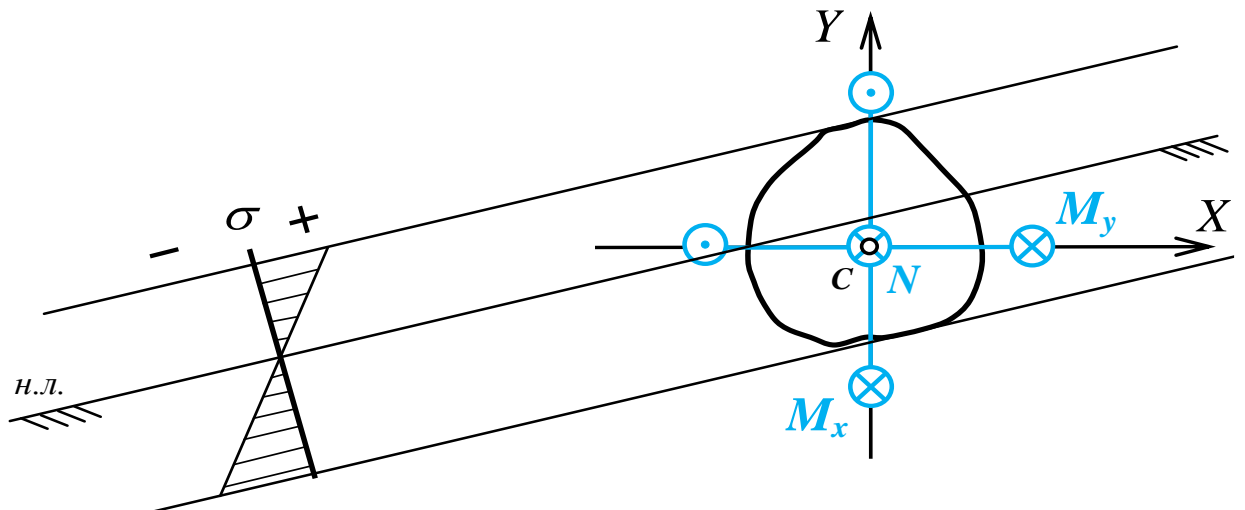


Рис. V.21.