Занятие 15

Автономные уравнения и системы второго порядка и их траектории. Линеаризация.

Система дифференциальных уравнений называется *автономной*, если в нее явно не входит независимая переменная. Мы будем рассматривать нормальные автономные системы, т.е системы вида $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y})$. Если трактовать переменную t как время, то автономность системы означает, что описываемый ею закон не меняется с течением времени, что часто бывает в физических задачах.

Каждому решению автономной системы можно поставить в соответствие кривую $\vec{y} = \vec{y}(t)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, называемую *траекторией*, и понимать решение системы как закон движения точки $\vec{y}$ по этой кривой, а саму траекторию — как «дорогу», по которой движется точка, или «след», который она оставляет за собой.

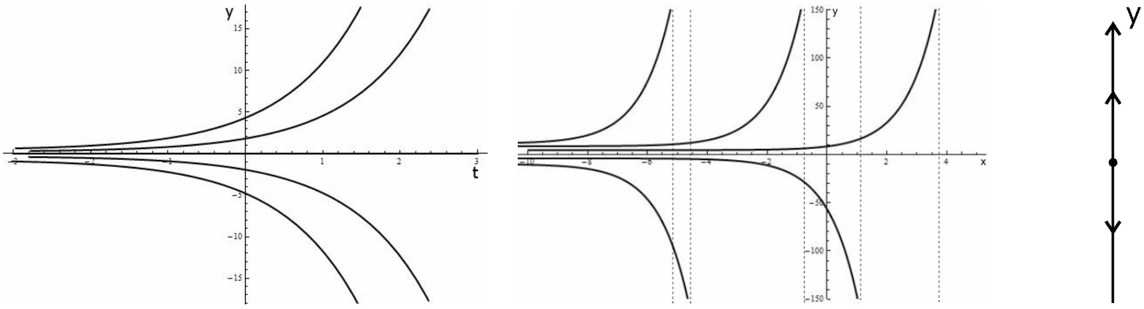
Хотя при рассмотрении траекторий закон движения отступает на второй план, картина их расположения в *фазовом пространстве* $\mathbb{R}^n$ — *фазовый портрет* системы — может быть не менее выразительной, чем картина интегральных линий, особенно если указать на траекториях направление движения точек при возрастании параметра t.

Как мы увидим далее, иногда построить фазовый портрет проще, чем найти закон движения. Тем не менее, даже если мы не можем проинтегрировать систему, фазовый портрет может многое рассказать о поведении решений.

Начнем в рассмотрения простейших примеров.

Пример 1. Рассмотрим два уравнения первого порядка: $\dot{y} = y$ и $\dot{y} = y^3$. Нетрудно найти общее решение каждого из них: $y = Ce^t$ и

$y^2 = -\dfrac{1}{2(t+C)}$ соответственно. Помимо этого, второе уравнение имеет частное решение $y \equiv 0$ (для первого уравнения решение $y \equiv 0$ получается из общей формулы при $C = 0$).



a) $\dot{y} = y$ b) $\dot{y} = y^3$ c)

Рис. 15.1. Иллюстрации к примеру 1.

Каждое непродолжаемое решение первого уравнения существует на всей прямой $(-\infty; +\infty)$, а для второго уравнения каждое непродолжаемое решение, кроме $y \equiv 0$, существует только на луче $(-\infty; -C)$ (рис. 15.1 *a* и 15.1 *b*).

Тем не менее, интегральные кривые этих уравнений имеют не только указанные различия, но и много общего. Так, прямая $y = 0$ делит плоскость $(t; y)$ на две полосы, в каждой из которых все интегральные кривые можно получить параллельным переносом одной из них вдоль оси t. Все линии «стягиваются» к прямой $y = 0$ при $t \to -\infty$ и удаляются от нее с ростом t.

Замеченное сходство в поведении решений станет еще более явным, если нарисовать движение точки $y(t)$ по оси Oy, указав направление движения при возрастании параметра t (рис. 15.1 *c*). Решению $y \equiv 0$ при этом соответствует единственная точка $y = 0$, а остальным решениям — лучи $(-\infty; 0)$ или $(0; +\infty)$, причем движение по этим лучам происходит в направлении *от* точки $y = 0$. Фактически, мы получили траектории, спроектировав интегральные линии на ось Oy.

Как видим, *фазовые портреты* рассматриваемых уравнений совпадают: имеется одна точка покоя, разбивающая фазовую прямую на два луча, движение по которым происходит в направлении *от* нее. Причем эту картину можно получить, не решая самих уравнений, а лишь рассматривая функции, стоящие в правой части каждого из них.

Действительно, если трактовать переменную t как время, то $\dot{y}(t)$ означает скорость движения точки по оси Oy. Заметим, что эта скорость в точке y определяется уравнением $\dot{y} = f(y)$, и, в силу его автономности, зависит только от значения y.

Так, если $f(a) = 0$, то уравнение имеет решение $y \equiv a$ и, при выполнении в окрестности точки a условия единственности решения задачи Коши, ни одно другое решение не может пройти через точку $y = a$. Таким образом, решения уравнения $f(y) = 0$ задают на фазовой прямой неподвижные точки, соответствующие решениям $y \equiv const$.

Если же во всех точках некоторого интервала $U \subset R$ функция $f(y)$ сохраняет знак, то этот интервал является частью траектории, вдоль которой все точки y смещаются в одном и том же направлении. Так, если $f(y) > 0$, то есть $\dot{y} > 0$, то движение происходит в сторону возрастания y. Если же $f(y) < 0$, то в сторону убывания y.

Нетрудно видеть, что функции $f(y) = y$ и $f(y) = y^3$ обращаются в ноль в одной и той же точке $y = 0$ и имеют одинаковые знаки на интервалах $y < 0$ и $y > 0$, что и определяет идентичность фазовых портретов рассмотренных уравнений. $\square$

Если уравнение имеет много изолированных точек покоя, то они разбивают прямую y на конечное или счетное множество интервалов $(a_i; a_{i+1})$, каждый из которых является целой траекторией (среди этих интервалов обязательно есть два луча). Можно говорить о характере отдельной точки покоя, так как каждая такая точка имеет окрестность, в которой она является единственной, и в этой окрестности фазовый портрет уравнения выглядит одним из четырех возможных образов (рис. 15.2

a–d).

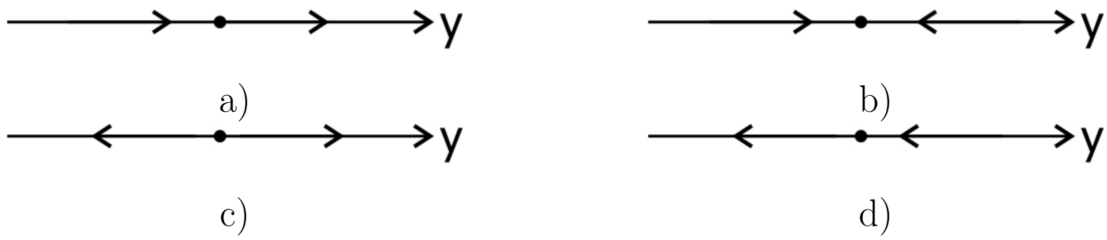


Рис. 15.2. Фазовый портрет уравнения в окрестности точки покоя.

Итак, фазовый портрет автономного уравнения первого порядка определяется набором и характером его неподвижных точек. Говорят, что два автономных дифференциальных уравнения $\dot{y} = f(y)$ *качественно эквивалентны*, если они имеют равное количество точек покоя одинакового характера, расположенных на фазовой прямой в одинаковом порядке.

Например, уравнения $\dot{y} = (y+1)^2$ и $\dot{y} = \operatorname{ch} y - 1$ качественно эквиваленты, а уравнения $\dot{y} = y^2 - 1$ и $\dot{y} = 1 - y^2$ — не являются качественно эквивалентным.

Как мы увидим далее, для автономных систем ситуация гораздо сложнее. Чтобы уверенно строить и «читать» их фазовые портреты, вспомним некоторые свойства траекторий автономных систем (в предположении выполнения условий теоремы существования и единственности задачи Коши).

1. Траектории, соответствующие разным решениям системы, либо не пересекаются, либо совпадают.

Действительно, если $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ — решение автономной системы с областью определения $t \in I$ и множеством значений $D \subset R^n$, то $\vec{y} = \vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t+C)$ при любом значении C также является решением этой системы с областью определения $t + C \in I$ и тем же множеством значений D.

Это означает, что интегральная кривая $\vec{y} = \vec{\psi}(t)$ получается из интегральной кривой $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ сдвигом по t на величину C. Поскольку через каждую точку полосы $D' = R \times D$ проходит только одна интегральная кривая, то все интегральные кривые в этой полосе можно получить сдвигом единственной кривой $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$.

Если существуют значения $t_1 \neq t_2$ такие, что $\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2)$, то $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t + C)$, где $C = t_2 - t_1$. Таким образом, точки, соответствующие решениям $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$, описывают одну и ту же траекторию, но с постоянной разницей во времени $C = t_2 - t_1$.

2. Если траектория пересекла саму себя, то есть $\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, то решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ определено при всех $t \in R$ и возможны только два взаимоисключающих случая:

1) $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{a} = const$,

2) существует $T > 0$, такое что $\vec{\varphi}(t + T) \equiv \vec{\varphi}(t)$, но $\vec{\varphi}(t_1) \neq \vec{\varphi}(t_2)$ при $|t_2 - t_1| < T$.

В первом случае точка $\vec{a}$ в фазовом пространстве представляет собой целую траекторию и называется *точкой покоя* (неподвижной точкой или положением равновесия системы).

Во втором случае решение является периодическим с периодом T и ему соответствует замкнутая траектория, называемая *циклом.*

Подведем итог: если в некоторой области $D \subset R^n$ для системы $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y})$ выполнены условия теоремы существования и единственности задачи Коши, то через каждую точку этой области проходит единственная траектория системы. Это может быть точка покоя или кривая без самопересечений (среди которых особо выделим замкнутые кривые, или циклы, соответствующие периодическим решениям системы).

Заметим, что в случае неавтономной системы также можно говорить о траектории как о проекции интегральной линии на фазовое пространство. Однако, в отличие от автономных систем, траектории могут, и как правило будут, пересекаться.

Пример 2. Рассмотрим систему $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2t \end{cases}$

Ее решение $x = t + C_1$, $y = t^2 + C_2$. Исключая t, получим уравнение траекторий $y = (x - C_1)^2 + C_2$. Любые две параболы этого семейства $y = (x - C_1)^2 + C_2$ и $y = (x - C_1')^2 + C_2'$ пересекаются в одной точке, если $C_1 \neq C_1'$ (рис. 15.3).

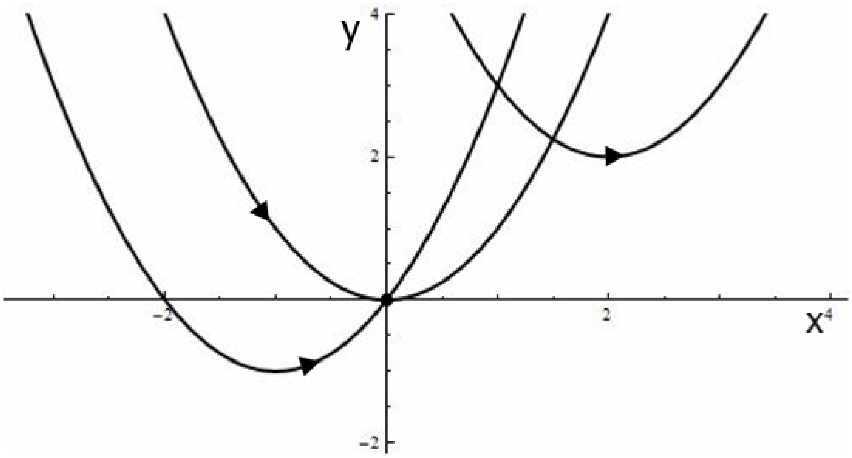


Рис. 15.3. Траектории неавтономных систем могут пересекаться (пример 2).

Интегральные линии в пространстве $(x; y; t)$ не пересекаются, поскольку выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Например, поставив задачу Коши $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, мы получим решение $x = t$, $y = t^2$. Траектория этого движения $y = x^2$ проходит через точку $(0; 0)$ на плоскости xOy. Но через эту же точку проходит траектория решения другой задачи Коши: $x(1) = 0$, $y(1) = 0$. Закон движения этой точки $x = t - 1$, $y = t^2 - 1$, а траектория описывается уравнением $y = (x + 1)^2 - 1$. $\square$

Теперь перейдем к системам второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x;y) \\ \dot{y} = Q(x;y) \end{cases} \tag{15.1}$$

На предыдущем занятии мы уже рассматривали простейшие автономные системы второго порядка — линейные однородные системы, и познакомились с их траекториями. Для нахождения траекторий произвольных автономных систем также удобно перейти от системы к уравнению $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x;y)}{P(x;y)}$, или в симметричной форме $P(x;y)dy = Q(x;y)dx$.

Между траекториями системы и интегральными кривыми уравнения существует определенная связь: каждая траектория системы целиком лежит на интегральной линии уравнения, хотя интегральная линия может состоять из нескольких траекторий.

Чтобы восстановить направление движения по траектории, нужно в произвольной ее точке $(x_0;y_0)$ построить вектор скорости $\vec{v} = (\dot{x};\dot{y}) = = (P;Q)\Big|_{(x_0;y_0)}$. Этот вектор является касательным к траектории и указывает направление движения при возрастании параметра t. $\square$

Пример 3. Рассмотрим две системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{x} = -y\sqrt{x^2+y^2} \\ \dot{y} = x\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Обе системы имеют одно и то же уравнение траекторий $xdx+ydy = 0$. Его общее решение дается формулой $x^2+y^2 = C^2$, которая описывает на плоскости $(x;y)$ семейство окружностей. Система имеет единственную точку покоя — начало координат. Следовательно, движение по окружностям имеет периодический характер. Соответствующие траектории являются замкнутыми. Точка $(0;0)$ для обеих систем является центром.

Однако закон движения по траекториям для этих систем различается. Из общего решения первой системы $\begin{cases} x = C\cos(t+\alpha) \\ y = C\sin(t+\alpha) \end{cases}$ видно, что период один и тот же для всех решений. Общее решение второй системы — $\begin{cases} x = C\cos(Ct+\alpha) \\ y = C\sin(Ct+\alpha) \end{cases}$. Отсюда видно, что период тем меньше, чем больше радиус окружности. $\square$

Пример 4. Нарисуем фазовый портрет системы $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x^3. \end{cases}$

Система сводятся к уравнению $2x^3dx + y\,dy = 0$, общее решение которого легко найти: $x^4 + y^2 = C$. При $C = 0$ мы получаем на фазовой плоскости $(x; y)$ точку покоя $(0; 0)$, а при $C > 0$ — семейство замкнутых кривых, каждая из которых является целой траекторией — циклом. Как и в случае линейных систем, точка покоя, имеющая такой фазовый портрет, называется *центром*.

Для определения направления движения выберем точку $(0; 1)$. В ней вектор скорости $\vec{v} = (1; 0)$, следовательно, движение по замкнутой траектории происходит по часовой стрелке (рис. 15.4).

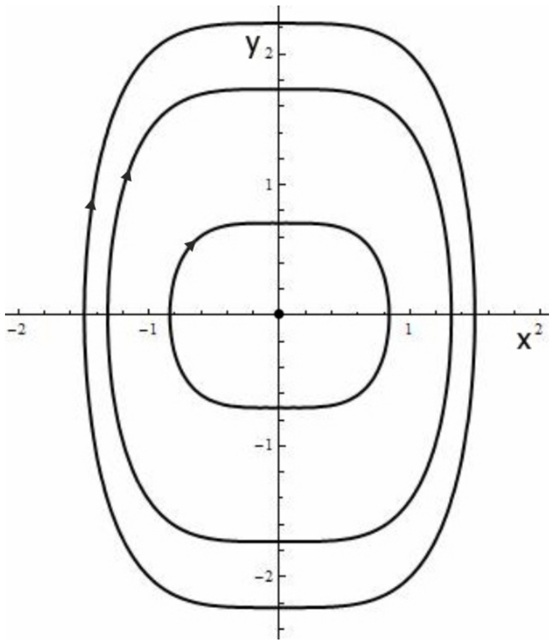


Рис. 15.4. Траектории в примере 4.

Зная общий интеграл системы $x^4 + y^2 = C$, можно было бы попытаться восстановить закон движения. Например, выразив из общего интеграла y через x, и подставив его в первое уравнение системы, получим уравнение $\dot{x} = \pm\sqrt{C - x^4}$, определяющее зависимость $x(t)$. Хотя мы получили уравнение с разделяющимися переменными, проинтегрировать его в элементарных функциях невозможно. Кроме того, при таком подходе довольно сложно разглядеть периодический характер решения.

Как видно из этого примера, сведя систему к уравнению и найдя его общий интеграл, мы смогли довольно быстро определить вид траекторий и направление движения по ним, а вот отыскать закон движения так легко и просто не удается. Поэтому разумно в таких случаях удовлетвориться только описанием фазового портрета. □

Фазовый портрет нелинейной системы может быть довольно сложным и вовсе не похожим на портрет линейной системы, даже если точка покоя всего одна.

Пример 5. Нарисуем фазовый портрет системы $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y^2. \end{cases}$

Приравняв правые части системы к нулю, мы видим, что система имеет единственную точку покоя $(0; 0)$.

Система сводится к уравнению с разделяющимися переменными $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y^2}$. Проинтегрировав его, получаем общее решение: $x = Ce^{-1/y}$ (прямая $x = 0$ входит в него при $C = 0$). Заметим, что прямая $y = 0$ также является интегральной линией этого дифференциального уравнения и делит плоскость $(x; y)$ на две полуплоскости, в которых картины интегральных линий принципиально различны (рис. 15.5)

Если $y > 0$, то $e^{-1/y} \to +0$ при $y \to +0$. Интегральные линии «веером» расходятся от точки $(0; 0)$ и картина в малой ее окрестности напоминает узел. Однако при больших значениях y картина отлична от

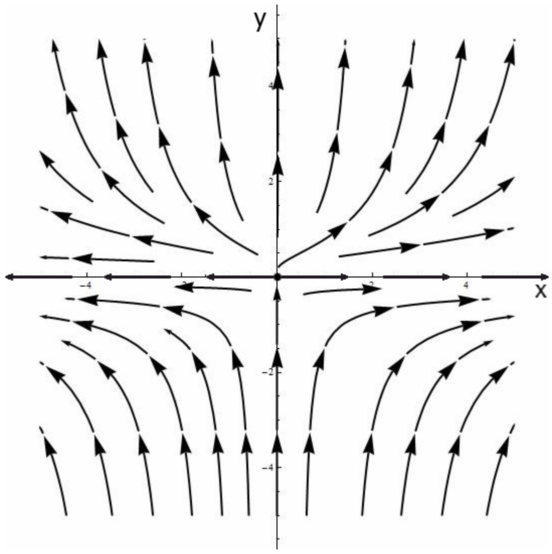


Рис. 15.5. Фазовый портрет системы в примере 5.

узла: $e^{-1/y} \to 1$ при $y \to +\infty$, и каждая кривая $x = Ce^{-1/y}$ имеет свою асимптоту $x = C$.

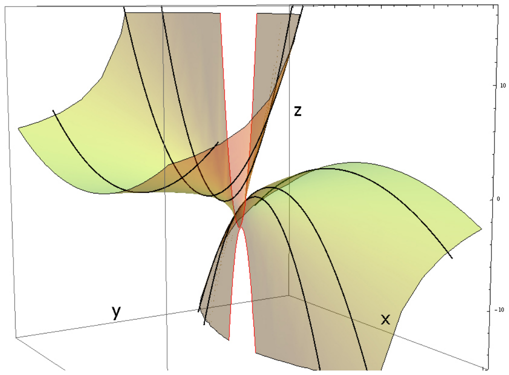
При $y \to -\infty$ кривая $x = Ce^{-1/y}$ также имеет асимптоту $x = C$. Но в малой окрестности точки $(0;0)$ картина интегральных линий напоминает седло, так как $e^{-1/y} \to +\infty$ при $y \to -0$.

Замечание: исходная система распадается на независимые уравнения, поэтому можно проинтегрировать их, восстановив таким образом закон движения, и убедиться в правильности сделанных выводов. $\square$

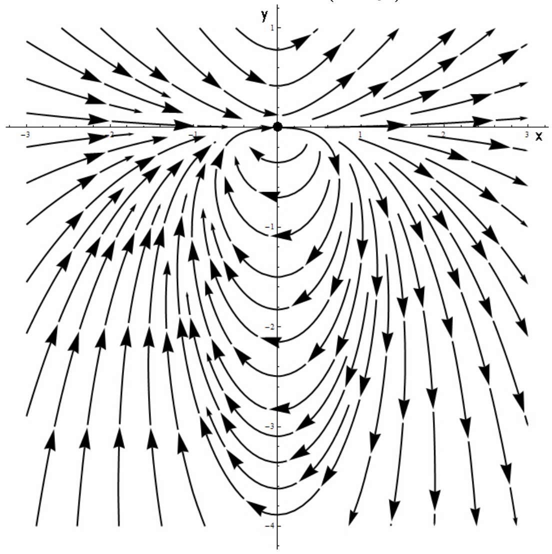
Пример 6. Нарисуем фазовый портрет системы $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$

Заметим, что $(0;0)$ — единственная точка покоя системы. Для поиска других траекторий решим уравнение $y\,dy + x^2dy - 2yx\,dx = 0$. Его нетрудно преобразовать к виду $y\,dy + (x^2dy - y\,dx^2) = 0$. Убедившись, что $y \equiv 0$ является решением, поделим это уравнение на y^2, и получим общее решение $\ln|y| - \dfrac{x^2}{y} = C$.

В отличие от предыдущих примеров, нарисовать это семейство кривых не так-то просто. Но нам поможет "выход в третье измерение". Поскольку интересующие нас кривые являются линиями уровня функции $F(x;y)=\ln|y|-\dfrac{x^2}{y}$, мы попробуем представить поверхность $z=F(x;y)$. Заметим, что относительно переменной x функция $F(x;y)$ является квадратичной, поэтому в каждом сечении $y=y_0$, за исключением $y=0$, мы увидим параболу (рис. 15.6 a). Теперь осталось представить сечение полученной поверхности плоскостями $z=C$ (рис. 15.6 b). $\square$



а) Сечения поверхности $z=F(x;y)$ плоскостями $y=y_0$



b) Фазовый портрет

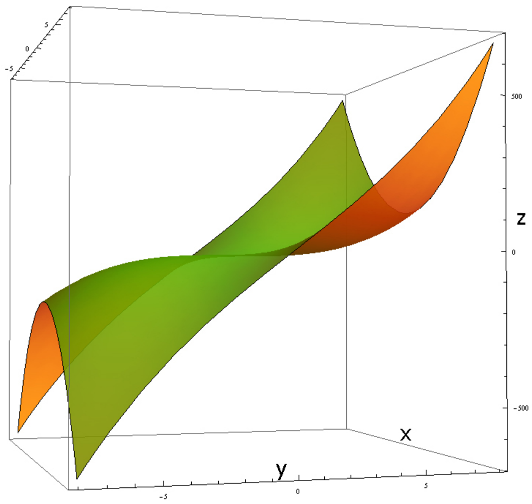
Рис. 15.6. Построение фазового портрета в примере 6.

Пример 7. Нарисуем фазовый портрет системы $\begin{cases}\dot{x}=1-x^2-y^2\\ \dot{y}=2xy.\end{cases}$

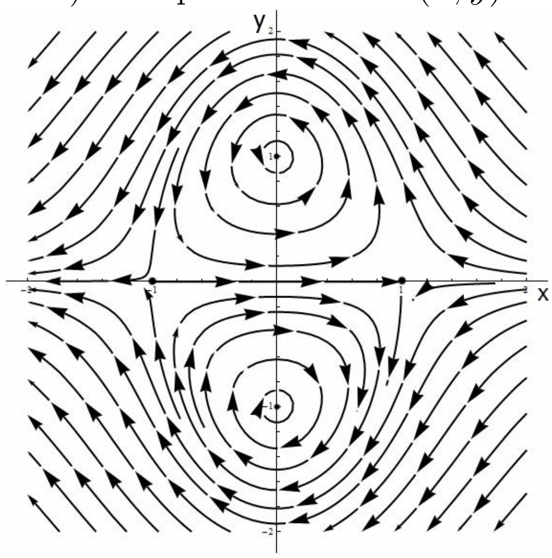
Решая систему $\begin{cases}1-x^2-y^2=0\\ 2xy=0\end{cases}$, мы обнаружим, что система имеет четыре точки покоя: $(\pm1;0)$ и $(0;\pm1)$.

Уравнение траекторий $(1-x^2-y^2)\,dy = 2xy\,dx$ является уравнением в полных дифференциалах, и в нем легко выделить интегрируемые комбинации: $(1-y^2)\,dy-(x^2\,dy+y\,dx^2) = 0$. Следовательно, общий интеграл имеет вид $(y-\frac{y^3}{3})-x^2y = C$.

Как и в предыдущем примере, можно представить поведение траекторий, рассматривая их как линии уровня функции $F(x;y) = x^2y+\frac{y^3}{3}-y$. Изобразить график этой функции нам помогут современные компьютерные программы (рис. 15.7 *a*). Проводя сечение полученной поверхности плоскостями $z = C$, мы получим следующую картину (рис. 15.7 *b*).



а) Поверхность $z = F(x;y)$



b) Фазовый портрет системы

Рис. 15.7. Построение фазового портрета в примере 7.

Обратим внимание на следующие особенности. Прямая $y = 0$ является решением уравнения траекторий $(1 - x^2 - y^2)\,dy = 2xy\,dx$. Однако точки покоя $(\pm 1; 0)$ разбивают ее на несколько траекторий. Также мы видим замкнутую линию, проходящую через точки $(\pm 1; 0)$, которая разбивается этими точками на две траектории, движение по каждой из них происходит от точки $(1; 0)$ к точке $(-1; 0)$. Это еще раз иллюстрирует тот факт, что линия уровня функции $F(x; y)$ может состоять из нескольких траекторий. Все описанные выше траектории лежат на линии $F(x; y) = x^2 y + \dfrac{y^3}{3} - y = 0$.

Отметим также, что локальные портреты точек $(\pm 1; 0)$ обладают всеми свойствами седла: две траектории входят в точку, две — выходят из нее, остальные точки сначала приближаются к точке покоя вдоль входящей траектории, а затем удаляются от точки покоя вдоль уходящей траектории. Поэтому точки $(\pm 1; 0)$ мы тоже назовем седлом.

Точки $(0; \pm 1)$ окружены замкнутыми траекториями, поэтому их локальный портрет мы назовем центром. $\square$

Как показывает последний пример, в нелинейном случае поведение траекторий в некоторой окрестности точки покоя может обладать теми же существенными чертами, какие мы отмечали у траекторий линейной системы, то есть выглядеть как седло, узел, фокус или центр (в таком случае говорят, что фазовые портреты точек покоя качественно эквиваленты). И это приводит нас к мысли, что можно попытаться заменить нелинейную автономную систему линейной, имеющей точку покоя того же типа.

Допустим для простоты, что система (15.1) имеет точку покоя $(0; 0)$. Если правые части системы можно записать в виде

$$P(x; y) = a_{11}x + a_{12}y + g_1(x; y), \qquad Q(x; y) = a_{21}x + a_{22}y + g_2(x; y),$$

где $g_i(x;y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ при $(x^2+y^2) \to 0$, то система

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{15.2}$$

называется *линеаризацией* системы (15.1) в точке $(0;0)$.

Линеаризацию системы можно провести в любой точке покоя $(x_0;y_0)$, введя локальные координаты $(\xi;\eta)$ по правилу $x = x_0+\xi$, $y = y_0+\eta$. При такой замене переменных точка покоя будет иметь координаты $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Более эффективным методом построения линеаризации является разложение правых частей системы по формуле Тейлора в окрестности точки покоя. Из этой формулы сразу следует, что матрица линеаризованной системы имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} \Bigg|_{(x_0;y_0)}$$

Теорема о линеаризации устанавливает связь фазового портрета нелинейной системы (15.1) в окрестности точки покоя с фазовым портретом линейной системы (15.2). Эта теорема утверждает, что в невырожденном случае ($\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$) их фазовые портреты качественно эквивалентны, если только точка покоя линеаризованной системы не является центром.

Другими словами, центр является единственным исключением. Если же точка покоя линеаризованной системы является седлом, узлом, вырожденным узлом или фокусом, то такой же характер имеет и точка покоя нелинейной системы.

Вернемся к примеру 7.

В точках $(\pm 1;0)$ линеаризованная система имеет матрицу

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mp 2 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$. И в той, и в другой точке собственные числа этой матрицы имеют разные знаки, следовательно, по теореме о линеаризации, у нелинейной системы каждая точка является седлом.

В точках $(0; \pm 1)$ линеаризованная система имеет матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$, и для нее эти точки являются центрами. В этом случае теорема не позволяет сделать вывод о характере поведения траекторий нелинейной системы. Хотя по линиям уровня первого интеграла $F(x; y)$ мы видели, что эти точки действительно являются центрами.

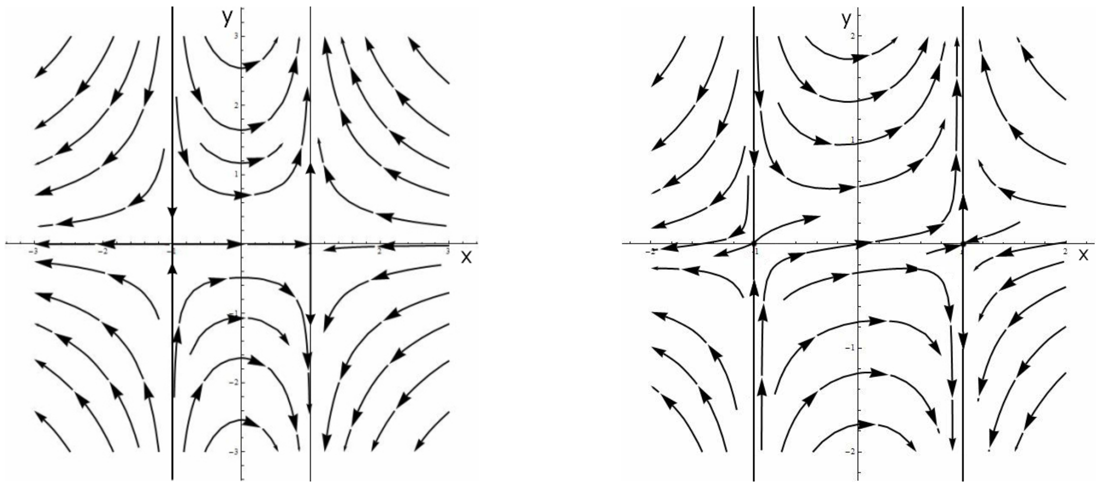
Вообще, изучение линий уровня первого интеграла — один из эффективных способов определения центра, поскольку линеаризация в таком случае не работает. Так, в примере 4 матрица линеаризованной системы в точке $(0; 0)$ имеет вид $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, но мы поняли, что точка покоя является центром, нарисовав линии уровня первого интеграла $F(x; y) = x^4 + y^2$.

Заметим, что даже зная локальные фазовые портреты всех точек покоя, не всегда можно однозначно нарисовать глобальный фазовый портрет системы.

Пример 8. Рассмотрим систему $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$

Она имеет две точки покоя $(\pm 1; 0)$. Выпишем матрицу линеаризованной системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0; y_0)} = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0; y_0)}$

Собственные числа матрицы $\mathbf{A}\Big|_{(1;0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ разных знаков, следовательно по теореме о линеаризации, точка $(1; 0)$ исходной системы является седлом. Аналогично, в точке $(-1; 0)$ линеаризованная система имеет матрицу $\mathbf{A}\Big|_{(-1;0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и точка $(-1;0)$ также является седлом.



a) b)

Рис. 15.8. Два фазовых портрета в примере 8.

Попробуем нарисовать глобальную картину поведения интегральных линий. Можно представить два фазовых портрета (рис. 15.8 *a* и 15.8 *b*), согласующихся с локальным поведением в точках $(\pm 1; 0)$. Однако эти картины качественно отличаются. Если на первой из них траектория, выходящая из точки $(-1;0)$, входит в точку $(1;0)$, то на второй эти траектории (сепаратрисы) не совпадают. И не существует взаимно однозначного непрерывного преобразования, переводящего эти портреты друг в друга.

Заметим, что в нашем случае $\dot{y} = 0$ при $y = 0$, и прямая $y = 0$ содержит целые траектории. Это означает, что рис. 15.7*a* дает качественно правильный глобальный портрет системы. $\square$

Автономное уравнение второго порядка $\ddot{x} = f(x;\dot{x})$ можно свести к автономной системе, положив $y = \dot{x}$. Фазовым пространством уравнения второго порядка, таким образом, следует считать плоскость $(x;\dot{x})$.

Пример 9. Нарисуем фазовый портрет уравнения

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Положив $y = \dot{x}$, перейдем к системе $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$

Точки покоя системы $(\pi k; 0)$, $k \in N$. Матрица линеаризованной системы в точке $(\pi k; 0)$ имеет вид $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \pi k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$.

Если k — нечетное число, то $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm 1$, следовательно, точка $(\pi k; 0)$ при нечетном k является седлом. Собственные векторы $\vec{u}^{[1]}\Big|_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{u}^{[2]}\Big|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. По этим направлениям траектории входят и выходят из точки покоя.

Если k — четное число, то $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Для линеаризованной системы точка покоя является центром, следовательно, определить характер этой точки для нелинейной системы таким способом нельзя.

Запишем уравнение траекторий: $ydy = -\sin x dx$. Его общий интеграл $y^2 - 2\cos x = C$ перепишем в виде $y^2 = C + 2\cos x$.

На рис. 15.9 изображены траектории рассматриваемого уравнения. Точки $(\pi k; 0)$ при четном k являются центром. $\square$

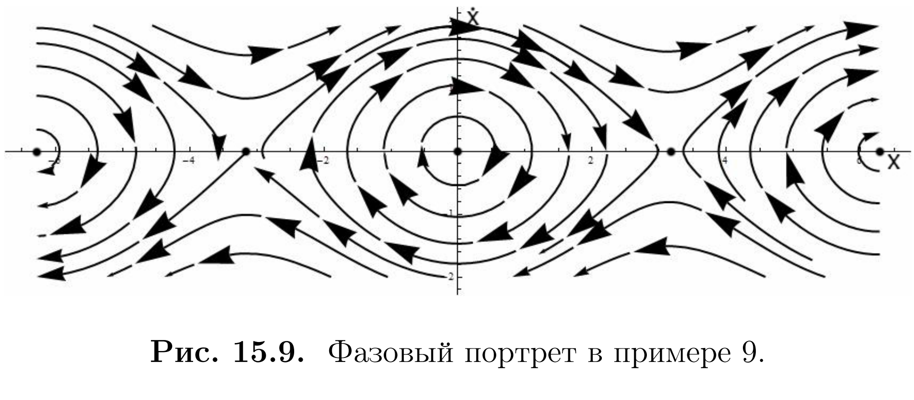


Рис. 15.9. Фазовый портрет в примере 9.

Самостоятельная работа

1. Найти стационарные решения и нарисовать траектории уравнения $\dot{x} = \sin x$

В задачах 2 и 3 определить характер точек покоя автономных систем с помощью линеаризации.

2. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2) \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$

В задачах 4 и 5 найти стационарные решения и указать их тип.

4. $\ddot{x} + e^{\dot{x}} - x^2 = 0$

5. $\ddot{x} - \cos\dot{x} + \sin x + 1 = 0$

6. Нарисовать траектории системы $\begin{cases} \dot{x} = -y^2 \\ \dot{y} = x^2. \end{cases}$

Ответы и указания к самостоятельной работе

1. Стационарные точки $x = \pi n$, $n \in Z$. Устойчивые при нечетных n и неустойчивые при четных n.

2. Точки покоя $(2;1)$; $(1;2)$ и $(-1;-2)$.

В точке $(2;1)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ неустойчивый узел

В точке $(1;2)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ седло

В точке $(-1;-2)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ устойчивый узел

3. Точки покоя $(0;1)$ и $(0;-1)$.

В точке $(0;1)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ седло

В точке $(0;-1)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ неустойчивый фокус

4. Уравнение сводится к системе $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 - e^y \end{cases}$

Стационарные решения $x = \pm 1$.

В точке $(1;0)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ седло

В точке $(-1;0)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ устойчивый фокус

5. Уравнение сводится к системе $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \cos y - 1 - \sin x \end{cases}$

Стационарные решения $x = \pi n$, $n \in Z$.

В точке $(\pi n; 0)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$

При нечетных n — седло, при четных n определить тип по линеаризации невозможно.

6. Точка покоя $(0;0)$. Система сводится к уравнению $-\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{x^2}$. Линии уровня первого интеграла $x^3 + y^3 = C$.