Семестровые задания.

Задание 1.

(Сдать к 13 октября)

1. Тензор $\mathbf{P}$ и вектор $\mathbf{a}$ заданы равенствами
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (9, 7, 2).$$
Вычислить $\mathbf{a} \otimes \mathbf{P}$, $\mathbf{P} \otimes \mathbf{a}$ и полную свертку тензора $\mathbf{P}$.

2. Тензор задан в базисе $\mathbf{e}$:
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Записать тензор P в базисе $\mathbf{e}'$, где $\mathbf{e}' = A\mathbf{e}$,
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Записать тензор
$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
в главных осях. Выписать главные направления так, чтобы они составляли правый ортонормированный базис.

4. Тензор моментов инерции системы задан соотношениями
$$\begin{pmatrix} 2a^2(m+M) & 2a^2(m-M) & 0 \\ 2a^2(m-M) & 2a^2(m+M) & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix}$$
Найти инварианты тензора. Записать тензор в главных осях.

5. Пусть A — невырожденное преобразование. Доказать, что если
$$A(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = A\mathbf{x} \times A\mathbf{y},$$
где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ произвольные вектора, то A — ортогональное преобразование.

6*. Определить главные моменты инерции для молекул с массой μ (состоящих из атомов с массой m_a), рассматриваемых как системы частиц, находящихся на одной прямой и неизменных расстояниях друг от друга. Расстояние между атомами a и b равно l_{ab}.

7*. Определить главные моменты инерции кругового конуса массы μ с высотой h и радиусом основания R.

Задание 2.

(Сдать к 24 ноября)

1. Какие из следующих отображений $T : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ являются тензорами? Если T — тензор, найти его координаты.
   а) $T(u, v) = u^1v^1 - u^2u^3 + u^3v^3$;
   б) $T(u, v) = 2u^1v^2 + u^1v^3 - 5u^3v^2$;
   в) $T(u, v) = u^2v^1 - 3u^3v^2 + v^1 - v^3$.

2. Тензоры a_{ij}, b^i_j, c_{ij} имеют такие координаты
$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad (c_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$
$$b^1_1 = 2, \quad b^2_1 = 1, \quad b^1_2 = 3, \quad b^2_2 = 1.$$
Вычислить $a_{ij}b^j_k + c_{ik}$

3. Тензор a^{ij}_{kl} задан равенствами
$$a^{11}_{11} = 8, \quad a^{11}_{21} = 6, \quad a^{11}_{12} = 4, \quad a^{11}_{22} = 2,$$
$$a^{21}_{11} = -3, \quad a^{21}_{21} = -4, \quad a^{21}_{12} = -1, \quad a^{21}_{22} = 2,$$
$$a^{12}_{11} = 3, \quad a^{12}_{21} = -4, \quad a^{12}_{12} = -1, \quad a^{12}_{22} = -2,$$
$$a^{22}_{11} = 7, \quad a^{22}_{21} = 5, \quad a^{22}_{12} = 3, \quad a^{22}_{22} = 1.$$

Найти $a_{kl}^{[ij]}$, $a_{(kl)}^{ij}$.

4. В некотором базисе метрический тензор и тензор T_{ij} имеют следующие матрицы координат.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислить $T_{i\cdot}^{\cdot k}$.

5. В аффинной правой системе координат $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ дан метрический тензор

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

и заданы векторы $\mathbf{u} = -\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_3}$, $\mathbf{v} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$. Вычислить контравариантные компоненты вектора $\mathbf{w}$, где $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

6*. Доказать, что при $(\vec{B} \cdot \vec{E}) + (B^2 - E^2)^2 \neq 0$ всегда найдется преобразование Лоренца, переводящее $\vec{B}$ и $\vec{E}$ в параллельные векторы ($\vec{E}' \times \vec{B}' = 0$). [*Указание.* Рассмотреть векторы $\vec{v} = \alpha(\vec{E} \times \vec{B})$ и попытаться подобрать значение параметра α.]

7*. Найти длину 4-вектора $A = (A^1, A^2, A^3, A^4)$ в координатах $(t+x, t-x, y, z)$.

Задание 3.

(Сдать к 15 декабря.)

1. В криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) в точке $(0, \pi/4, 6)$ тензор t имеет координаты $(t_i^j) = 3\mathbf{e^1} \otimes \mathbf{e_1} - \mathbf{e^1} \otimes \mathbf{e_2} + 2\mathbf{e^2} \otimes \mathbf{e_2}$ $-3\mathbf{e^2} \otimes \mathbf{e_3} - 2\mathbf{e^3} \otimes \mathbf{e_1} + \mathbf{e^3} \otimes \mathbf{e_2} + \mathbf{e^3} \otimes \mathbf{e_3}$.

   Найти координаты $t_{i'}^{j'}$ в системе координат $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ связанной с (x^1, x^2, x^3) соотношениями $x^{1'} = \mathrm{e}^{x^1} \sin x^2$, $x^{2'} = x^3$, $x^{3'} = \mathrm{e}^{x^1} \cos x^2$.

2. Вычислить компоненты метрического тензора для трехмерной криволинейной системы координат, связанной с декартовой соотношениями

$$x = x^3 - \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2}, \quad y = 2x^1, \quad z = x^3 + \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2}.$$

3. Для криволинейной системы координат, связанной с декартовой соотношениями
$$x = \sqrt{u+v}, \quad y = \sqrt{u-v}$$
вычислить (g_{ij}) и $\Gamma_{i,jk}$.

4. Тензор T имеет компоненты:
$$\begin{array}{ll} T_1^1 = x^1, & T_1^2 = 1 \\ T_2^1 = 0, & T_2^2 = x^1 - 2x^2. \end{array}$$
Вычислить $\nabla_1 T$, если $\Gamma^1_{11} = (x^2)^2$; $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = x^1$; $\Gamma^1_{22} = x^1 x^2$; $\Gamma^2_{11} = 0$; $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = (x^1)^2 + (x^2)^2$; $\Gamma^2_{22} = \dfrac{x^2}{x^1}$.

5. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и ковариантные компоненты $\mathbf{rot}\,\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (\sin x^1 - \cos x^1, x^3 - 2x^2 \sin x^1, x^3/2 - x^2)$, а координаты $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ связаны с декартовыми соотношениями
$$x = x^1, \quad y = x^2 + \sqrt{(x^2)^2 + x^3}, \quad z = -x^2 + \sqrt{(x^2)^2 + x^3}.$$

6*. Записать в явном виде компоненты тензора электромагнитного поля F. Доказать, что уравнения
$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0, \qquad F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^\alpha,$$
где $J^\alpha = (\rho, \vec{J})$ - плотность 4-тока, сводятся к уравнениям Максвелла
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho,$$
$$\vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = -4\pi \vec{J}.$$

7*. Доказать, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля в отсутствие зарядов имеет нулевую дивергенцию (т.е. $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$).