МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

4-й семестр, задание № 3

Устойчивость. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Формула Лиувилля. Функция Грина. Задача Штурма — Лиувилля.

1. Нарисуйте картину интегральных линий уравнения $2t\dot{x} = x - x^3$ при $t \geq 1$ и исследуйте его стационарные решения на устойчивость (3 б).

2. Исследуйте на устойчивость решение задачи Коши (3б)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + e^{3t}y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = -2y + \ln(1+t^2), & y(0) = 0 \\ \dot{z} = e^t y - 2z, & z(0) = -1; \end{cases}$$

3. Исследуйте на устойчивость нулевые решения систем (по 2 б):

(а) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(x + z + \cos y) \\ \dot{y} = e^{x+2y-z} - e^{-x-y+2z} \\ \dot{z} = 3\sqrt[3]{x + y + e^{5z}} \end{cases}$ (б) $\begin{cases} \dot{x} = y + x\,(x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases}$

4. Найдите ФСР линейного уравнения с переменными коэффициентами (по 2 б):

(а) $(x^2+1)\,y'' - 2y = 0$; (б) $x^2 y'' - 2y = \sin\ln x$.

5. Найдите все значения параметра $\omega \in \mathbb{R}$, при которых краевая задача

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(x), \quad 0 < x < \pi, \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

однозначно разрешима при любой непрерывной функции $f(x)$ (1б). Для этих значений ω постройте функцию Грина краевой задачи (2б). Для остальных значений ω найдите ядро оператора краевой задачи и запишите условие ее разрешимости (1б).

6. Найдите полную систему собственных функций задачи Штурма — Лиувилля (3б)

$$\begin{cases} x^2 y'' = \lambda y, \quad 1 < x < e, \\ y(1) = 0, \quad y(e) = 0. \end{cases}$$

Сформулируйте т. Стеклова о разложении в ряд по собственным функциям (1б). В каком скалярном произведении ортогональны собственные функции этой задачи? (1б)