Занятие 14

Траектории линейных систем второго порядка.

Рассмотрим систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{14.1}$$

Если трактовать переменную t как время, то решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ описывает закон движения точки $(x; y)$ на плоскости xOy, называемой *фазовой плоскостью*. Кривая, по которой движется точка, называется *траекторией*, а уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$ задают параметризацию этой кривой.

Система (14.1) имеет тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$. Это означает, что если в момент времени $t = t_0$ точка находилась в начале координат, то с течением времени она не меняет своего положения. Таким образом, точка $(0; 0)$ представляет собой целую траекторию, которая называется точкой покоя или положением равновесия.

Наша ближайшая цель — описать все возможные виды траекторий системы (14.1) в случае $\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$. В силу невырожденности матрицы $\mathbf{A}$ других точек покоя у системы (14.1) нет. Поэтому точка, в момент времени $t = t_0$ находившаяся не в начале координат, начинает свое движение по некоторой траектории на плоскости xOy.

Пример 1. Пусть система (14.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases} \qquad (\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0.)$$

По сути, система распалась на два независимых уравнения, и выписать ее общее решение не представляет труда: $x = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $y = C_2 e^{\lambda_2 t}$.

Значениям $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ соответствует точка покоя $(0; 0)$.

Если $C_1 = 0$, $C_2 > 0$, то точка $(x; y)$ движется по лучу $x = 0$, $y > 0$. Направление движения определяется знаком λ_2: при $\lambda_2 > 0$ с ростом t точка удаляется от начала координат, а при $\lambda_2 < 0$ — приближается к нему. Причем, при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка пробегает весь луч.

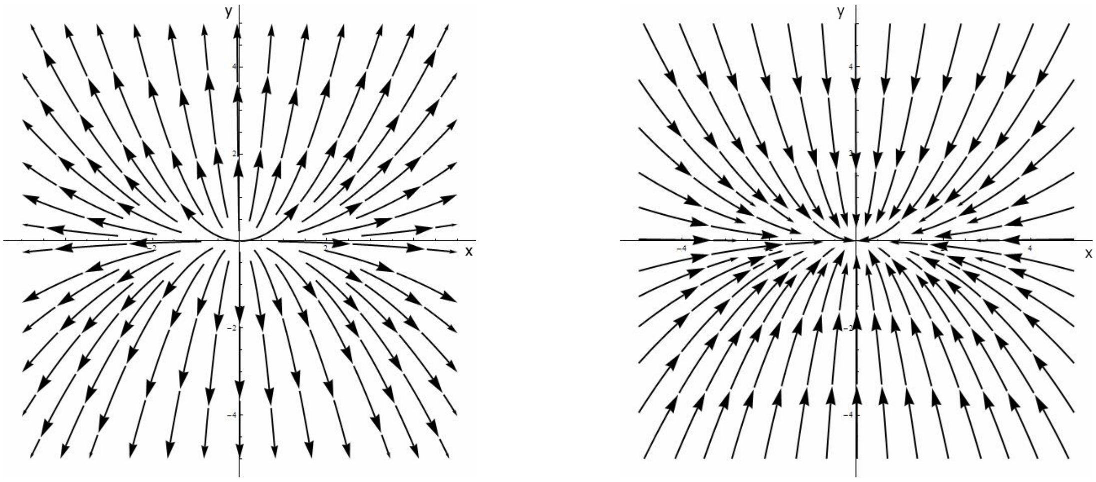
Аналогично, если $C_1 = 0$, $C_2 < 0$, то точка $(x; y)$ движется по лучу $x = 0$, $y < 0$. Таким образом, прямая $x = 0$ состоит из трех непересекающихся траекторий — точки покоя и двух открытых лучей.

Значения $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$ дают нам еще две траектории-луча, лежащих на прямой $y = 0$.

Если же $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, исключая из уравнений движения параметр t, мы получим уравнение траекторий в виде $y = Cx^{\lambda_2/\lambda_1}$. Графики этих степенных функций имеют существенные различия в зависимости от знака показателя λ_2/λ_1.

Пусть λ_1 и λ_2 имеют одинаковый знак ($\lambda_2 \cdot \lambda_1 > 0$), тогда $\lambda_2/\lambda_1 > 0$. График функции $y = Cx^{\lambda_2/\lambda_1}$ проходит через точку $(0; 0)$ и касается в этой точке оси Ox при $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, либо оси Oy при $|\lambda_2| < |\lambda_1|$. Точка $(0; 0)$ разбивает каждую параболу на две траектории.

На рис. 14.1a, 14.1b изображены траектории рассматриваемой системы в случае $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Стрелками указано направление движения точки при возрастании параметра t. Такую картину траекторий и точку $(0; 0)$

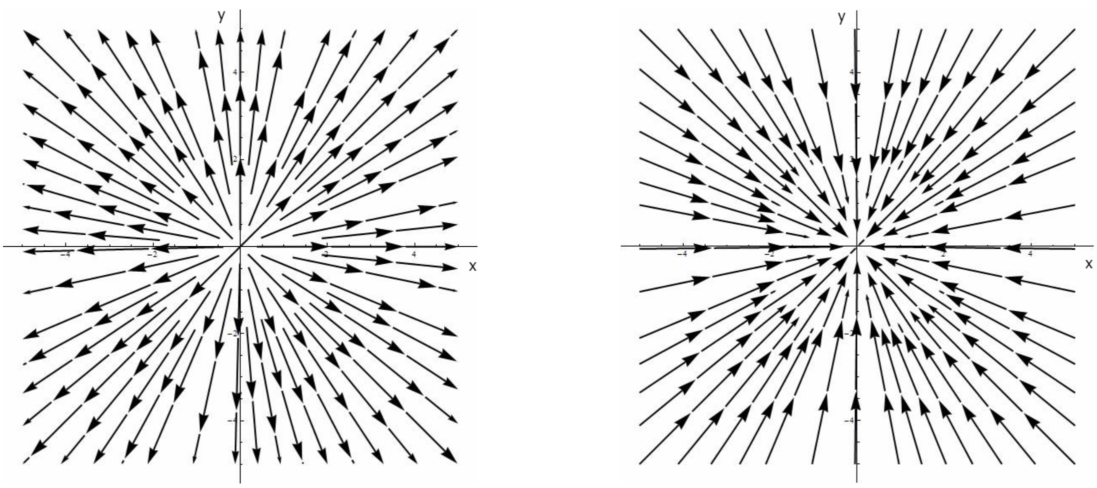


a) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ b) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Рис. 14.1. Траектории в примере 1 (собственные значения одного знака).

называют узлом. В случае $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ узел называется неустойчивым (рис. 14.1a), в случае $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ — устойчивым (рис. 14.1b).

Точная формулировка понятия устойчивости будет дана позднее, сейчас же нам достаточно интуитивного понимания того, что в первом случае точки, отличные от $(0;0)$, с ростом времени удаляются от начала координат, а во втором случае — притягиваются к нему.

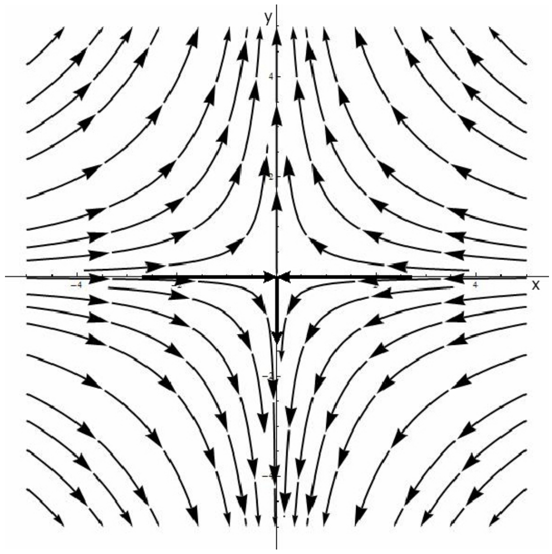


a) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ b)$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

Рис. 14.2. Траектории в примере 1 (равные собственные значения).

В частном случае $\lambda_1 = \lambda_2$ все траектории, отличные от положения равновесия, являются лучами. Такая картина траекторий называется дикритическим или звездным узлом (рис 14.2a, 14.1b).

Если λ_1 и λ_2 разных знаков ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$), то графиком функции $y = Cx^{\lambda_2/\lambda_1}$ является гипербола с асимптотами $x = 0$ и $y = 0$.



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Рис. 14.3. Траектории в примере 1 (собственные значения разных знаков).

На рис. 14.3 изображены траектории в случае $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. При движении по траектории $y = 0$ ($x > 0$ или $x < 0$) точка приближается к началу координат. При движении по остальным траекториям при $t \to +\infty$ точка удаляется от точки покоя. В такой ситуации точка $(0;0)$ называется седлом. $\square$

Пример 2. Нарисовать траектории системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \qquad (\lambda \neq 0). \tag{14.2}$$

Мы не будем искать решения этой системы $x = x(t)$, $y = y(t)$, а сразу получим уравнение траекторий. Для этого исключим параметр t, деля одно уравнение системы на другое:

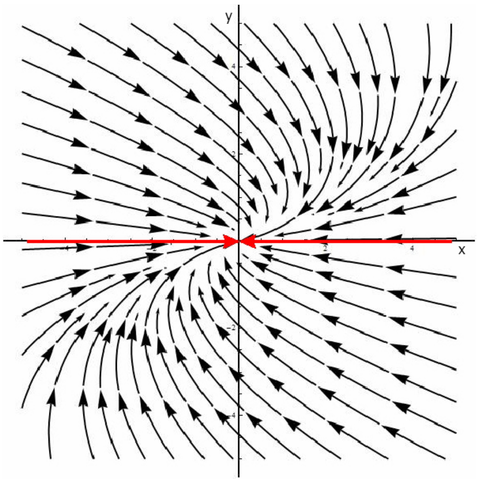
$$\frac{dx}{dy} = \frac{\lambda x + y}{\lambda y}.$$

Перепишем это уравнение в виде

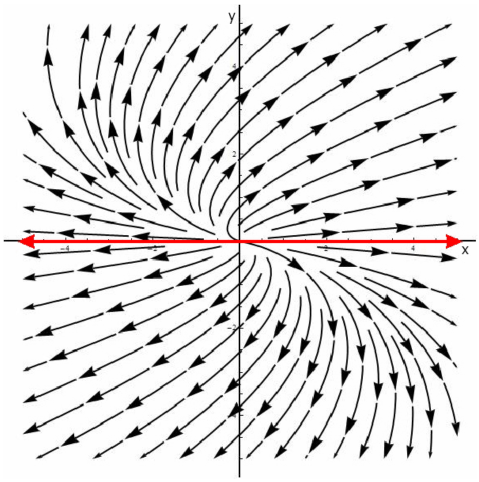
$$\lambda y\,dx = (\lambda x + y)\,dy \quad \text{или} \quad \lambda(y\,dx - x\,dy) = y\,dy.$$

Отсюда либо $y \equiv 0$, либо $\lambda \dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \dfrac{dy}{y}$, то есть $\lambda\, d(\dfrac{x}{y}) = d(\ln|y|)$.

Общее решение этого уравнения $\lambda \dfrac{x}{y} = \ln|y| + C$ можно переписать в виде $x = \dfrac{y}{\lambda} \ln Cy$ и построить траекторию как график функции $x = x(y)$ (рис. 14.4).



a) $\lambda < 0$



b)$\lambda > 0$

Рис. 14.4. Траектории в примере 2.

В точке $(0;0)$ все траектории касаются оси Ox. Определить направление движения по траектории можно из первого уравнения системы: в точке $(x;0)$ вектор скорости $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix}$

Точка $(0;0)$ называется вырожденным узлом: устойчивым, если $\lambda < 0$, и неустойчивым, если $\lambda > 0$. $\square$

Пример 3. Нарисовать траектории системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases} \qquad \beta \neq 0. \tag{14.3}$$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$ имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Исключим параметр t из уравнений (14.3):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha x + \beta y}{-\beta x + \alpha y}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(-\beta x + \alpha y)\, dx = (\alpha x + \beta y)\, dy \qquad \text{или}$$

$$\alpha(y\, dx - x\, dy) = \beta(x\, dx + y\, dy).$$

Перейдем в полярную систему координат, положив $\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi. \end{cases}$

Тогда $\rho^2 = x^2 + y^2$ и

$$x\, dx + y\, dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} d\rho^2 = \rho\, d\rho$$

$$y\, dx - x\, dy = -x^2 \cdot d(\frac{y}{x}) = -\rho^2 \cos^2\varphi \cdot (\operatorname{tg}\varphi)' d\varphi = -\rho^2 d\varphi$$

Подставляя эти выражения в уравнение, получим

$$-\alpha\rho^2 d\varphi = \beta\rho d\rho.$$

Решение $\rho = 0$ — это точка покоя $(0; 0)$. Если же $\rho > 0$, то

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{\beta}\rho \qquad \Rightarrow \qquad \rho = Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi}.$$

Траектории, соответствующие этим решениям, являются спиралями. Если $\alpha/\beta > 0$, то с ростом φ расстояние ρ от точки на траектории до начала координат уменьшается, то есть спираль сужается при движении по ней в направлении против часовой стрелки. Если $\alpha/\beta < 0$, то спираль расширяется.

Чтобы определить направление движения точки при возрастании параметра t, вспомним, что решение системы (14.3) можно записать через матричную экспоненту:

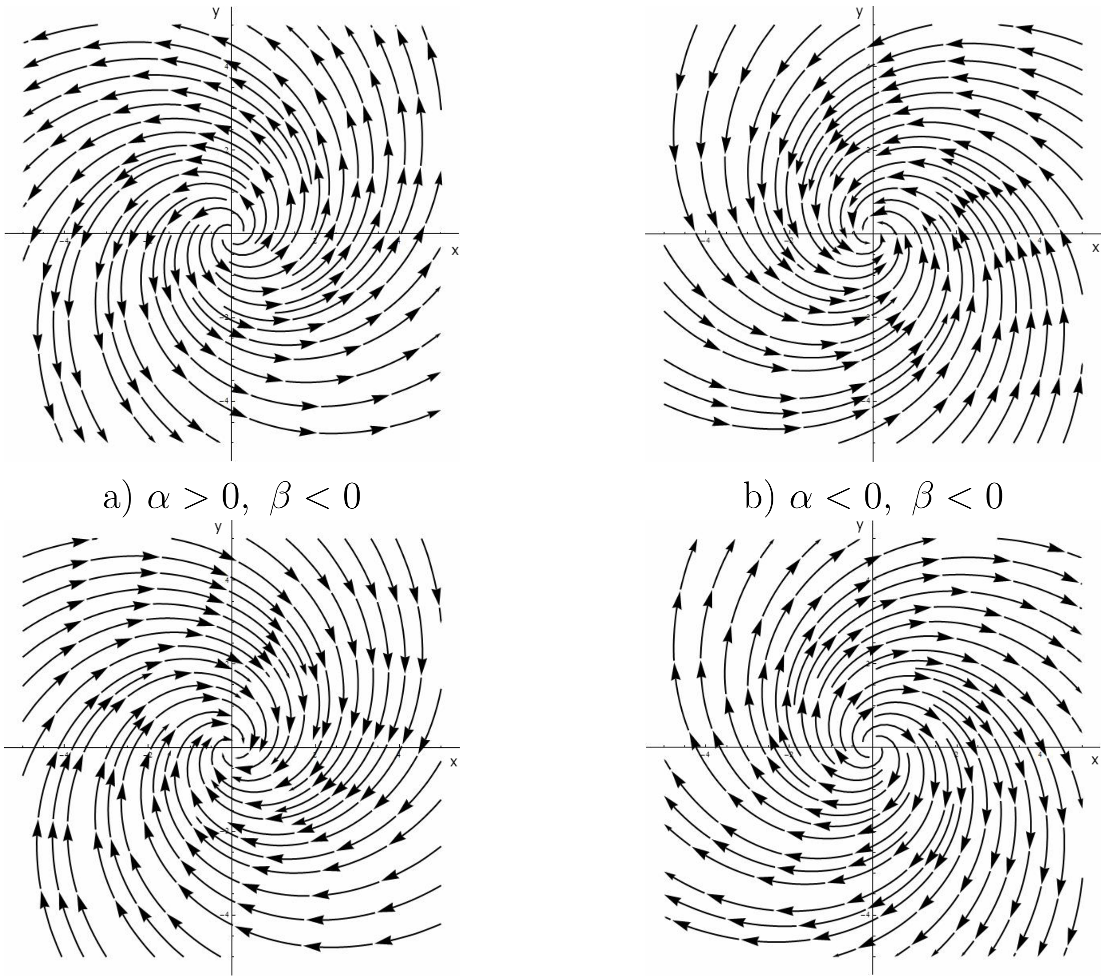
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Множитель $e^{\alpha t}$ показывает, что точка $(x; y)$, двигаясь по траектории, с ростом t удаляется от положения равновесия, если $\alpha > 0$, и приближается к нему, если $\alpha < 0$. На рис. 14.5 ($a - d$) изображены траектории системы (14.3) при различных значениях α и β. Точка $(0; 0)$ в таком случае называется фокусом, устойчивым, если $\alpha < 0$, или неустойчивым, если $\alpha > 0$. $\square$

Пример 4. Нарисовать траектории системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y \\ \dot{y} = -\beta x \end{cases} \qquad \beta \neq 0. \tag{14.4}$$

Можно рассматривать ее как частный случай системы (14.3), однако проще сразу получить уравнение траекторий



a) $\alpha > 0,\ \beta < 0$

b) $\alpha < 0,\ \beta < 0$

c) $\alpha < 0,\ \beta > 0$

d) $\alpha > 0,\ \beta > 0$

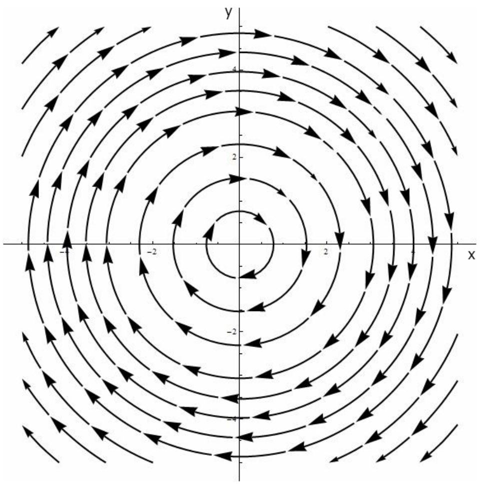
Рис. 14.5. Траектории в примере 3.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-x} \qquad \text{или} \qquad x\,dx + y\,dy = 0.$$

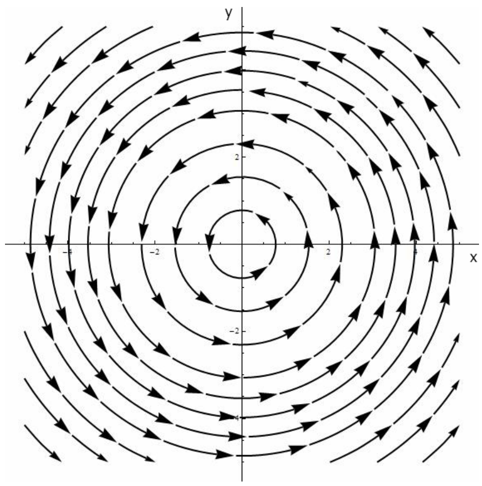
Таким образом, все траектории являются окружностями $x^2 + y^2 = C$. Причем, как видно из общего решения системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

движение имеет периодический характер, и точка пробегает окружность бесконечно много раз. Соответствующие траектории являются замкнутыми. Точка $(0;0)$ для системы (14.3) называется центром.



a) $\alpha = 0,\ \beta > 0$



b) $\alpha = 0,\ \beta < 0$

Рис. 14.6. Траектории в примере 4.

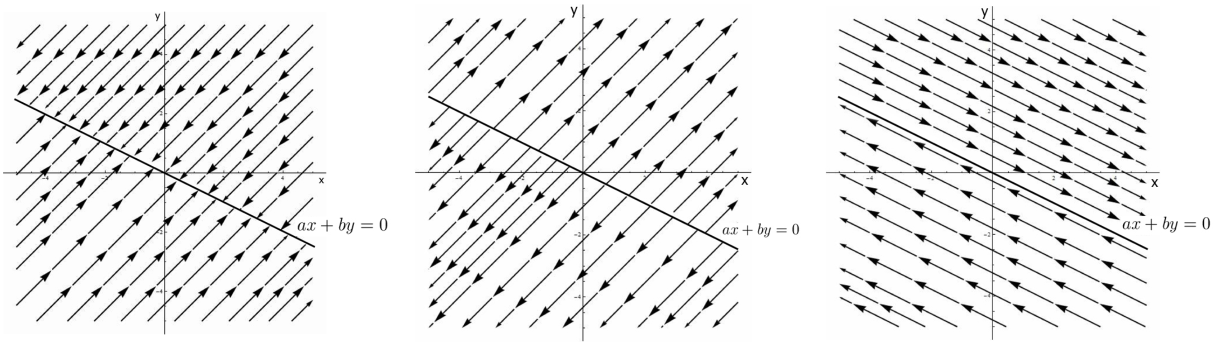
Направление движения по окружностям определяется знаком β. Чтобы увидеть это направление, построим вектор скорости в произвольной точке, например $x = 0$, $y > 0$. Из системы (14.4) получаем $\dot{x} = \beta y$, $\dot{y} = 0$, то есть движение происходит против часовой стрелки, если $\beta > 0$, и по часовой стрелке, если $\beta < 0$ (рис. 14.6a и 14.6b). $\square$

Рассмотренные примеры охватывают все разнообразие поведения траекторий, если $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Если же $\det \mathbf{A} = 0$, но $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 1$, то система (14.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1(ax+by) \\ \dot{y} = k_2(ax+by) \end{cases}.$$

Все точки, лежащие на прямой $ax + by = 0$, являются точками покоя. Уравнение траекторий $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{k_1}{k_2}$ имеет общее решение $k_1 y - k_2 x = C$.



a) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 < 0$ b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$ c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Рис. 14.7. Примеры траекторий в случае вырожденной матрицы $\mathbf{A}$.

На рис. 14.7 показано, как могут выглядеть траектории системы в зависимости от собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$.

Далее мы рассмотрим, как можно определить характер точки покоя для произвольной системы вида (14.1).

Пример 5. Нарисовать траектории системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Следовательно, матрица $\mathbf{A}$ подобна диагональной. Найдем собственные векторы: $\vec{u}^{[1]}\Big|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{u}^{[2]}\Big|_{\lambda=5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Составим из этих векторов матрицу перехода $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и сделаем замену переменных $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}.$$

Итак, в базисе из собственных векторов система распалась на два уравнения. И мы знаем, как должны выглядеть траектории в новой системе координат — это неустойчивый узел (см. пример 1, рис. 14.1а). Линейная замена переменных всего лишь осуществляет поворот и растяжение плоскости, поэтому в старой системе координат картина траекторий будет выглядеть похожим образом. Отметим ее основные черты.

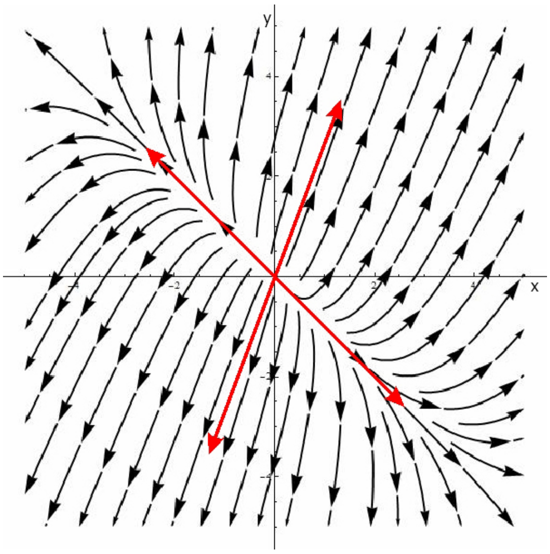


Рис. 14.8. Траектории в примере 5.

Новые координатные оси, если их изобразить в исходной системе координат, направлены вдоль собственных векторов $\vec{u}^{[1]}$ и $\vec{u}^{[2]}$. Прямолинейные траектории, исходящие из начала координат в направлении собственных векторов, остаются прямолинейными. Остальные траектории в точке $(0; 0)$ касаются направления, соответствующего меньшему по модулю собственному числу. Картина траекторий рассматриваемой системы показана на рис. 14.8. $\square$

Пример 6. Нарисовать траектории системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Собственные векторы: $\vec{u}^{[1]}\Big|_{\lambda=3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{u}^{[2]}\Big|_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

В базисе из собственных векторов система распадется на два уравнения, и картина траекторий в новой системе координат — это седло (см. пример 1, рис. 14.3). Прямолинейные траектории, входящие и исходящие из начала координат, направлены вдоль собственных векторов $\vec{u}^{[1]}$ и $\vec{u}^{[2]}$: положительному собственному числу соответствует уходящая траектория, отрицательному — входящая. Направление движения по остальным траекториям восстанавливается без труда (рис. 14.9). $\square$

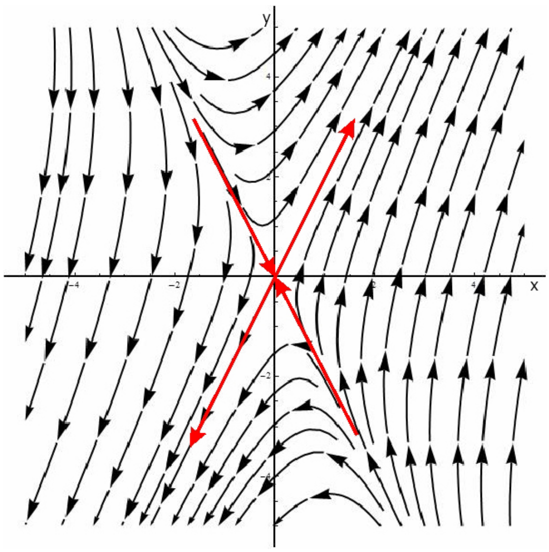


Рис. 14.9. Траектории в примере 6.

Пример 7. Нарисовать траектории системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $P(\lambda) = (\lambda - 3)^2$ имеет кратный корень $\lambda_{1,2} = 3$, причем $\operatorname{rank}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 1$. Это означает, что мы можем найти только один собственный вектор $\vec{u}\Big|_{\lambda=3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. В курсе линейной алгебры доказывается, что матрица $\mathbf{A}$ подобна жордановой клетке $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, и можно найти базис, в котором система примет вид (14.2) (см. пример 2).

Однако мы не будем этого делать. Мы знаем, что картина траекторий — вырожденный неустойчивый узел. Прямолинейные траектории, исходящие из начала координат, направлены вдоль собственного вектора. Осталось только выяснить, в какую сторону закручены остальные траектории. Для этого достаточно построить вектор скорости. Например, в точке $(0; 1)$ он равен $(1; 4)$ (рис. 14.10). $\square$

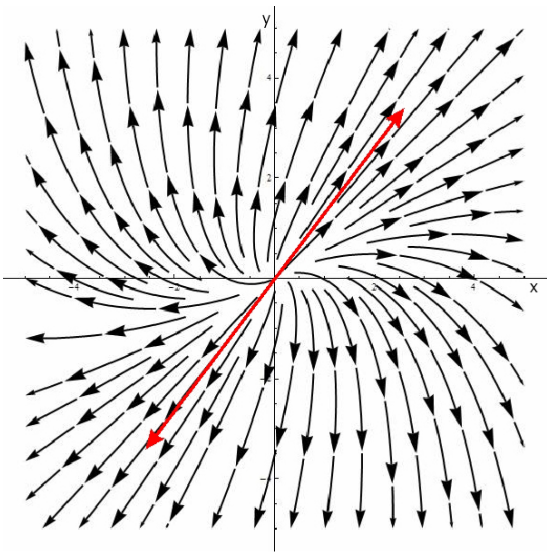


Рис. 14.10. Траектории в примере 7.

Пример 8. Нарисовать траектории системы $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Это означает, что существует невырожденное линейное преобразование, приводящее нашу систему к виду (14.3) с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

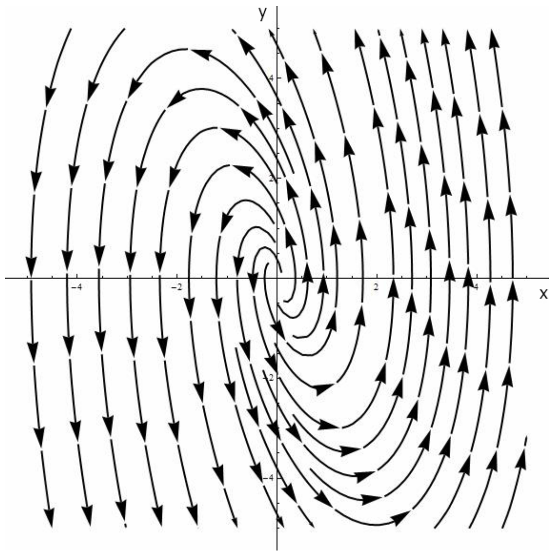


Рис. 14.11. Траектории в примере 8.

Следовательно, точка $(0;0)$ является неустойчивым фокусом, а траектории будут спиралями. Нам достаточно выяснить ориентацию этих спиралей — в каком направлении они закручиваются. И опять на помощь нам придет вектор скорости. Например, в точке $(1;0)$ он равен $(0;5)$, в точке $(0;1)$ — $(-1;7)$ (рис. 14.11). □

Пример 9. Нарисовать траектории системы $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

В случае чисто мнимых собственных чисел точка $(0;0)$ является цен-

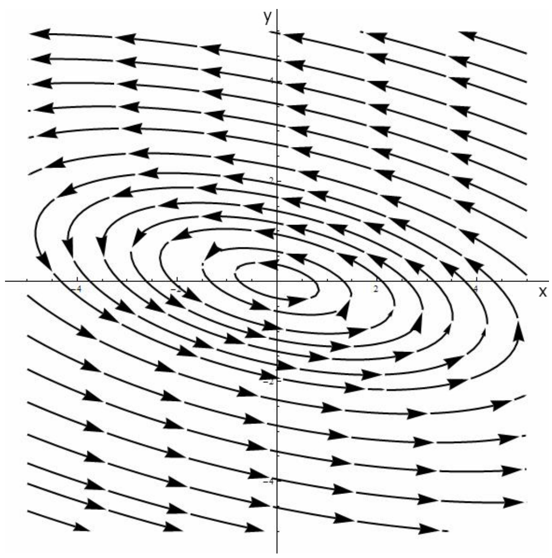


Рис. 14.12. Траектории в примере 9.

тром, то есть в должным образом выбранной системе координат траектории являются окружностями. Следовательно, в исходной системе координат траектории будут эллипсами. Мы не будем уточнять, как расположены оси этих эллипсов. Достаточно построить вектор скорости в какой-либо точке, чтобы выяснить направление движения по этим эллипсам. Например, в точке $(0; 1)$ он равен $(-5; 1)$ (рис. 14.12). □

Наконец, рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y}, \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0. \qquad (14.5)$$

Точка $(0; 0)$ является для него особой, поскольку в этой точке уравнение не определяет значение производной y'. Можно сопоставить этому уравнению систему вида (14.1), введя параметр t следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_2 x + b_2 y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1 x + b_1 y \end{cases}$$

Как мы видели, точка $(0; 0)$ является точкой покоя этой системы, а интегральные линии уравнения (14.5) содержат в себе целые траектории системы. Таким образом, вместе с классификацией точки покоя системы (14.1) мы получили классификацию особой точки для уравнения (14.5). Заметим только, что на интегральных линиях уравнения не имеет смысла определять направление движения, поскольку параметр t был введен произвольно и может быть заменен параметром $\tau = -t$.

Самостоятельная работа

Определить вид особой точки, нарисовать фазовый портрет системы.

1. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$

Ответы к самостоятельной работе

1. Узел

2. Седло

3. Вырожденный узел

4. Фокус

5. Центр