СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
Лекция 13 Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Образовский Е. Г.

7 декабря 2022 г.

План лекции:

План лекции:

- **Уравнение Больцмана в τ-приближении.**

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

План лекции:

- **Уравнение Больцмана в τ-приближении.**
- **проводимость, теплопроводность**

Уравнение Больцмана в τ-приближении.
Интеграл столкновений $St[f]$ имеет довольно сложный вид, поэтому часто используют наиболее простое и естественное приближение, заменяя его выражением

$$St[f] \to -\frac{\delta f}{\tau}. \tag{1}$$

Величина τ имеет смысл времени релаксации функции распределения к своему равновесному значению. Действительно, пусть при $t = 0$ создано однородное возмущение функции распределения $\delta f(0)$. Тогда из уравнения Больцмана получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\delta f}{\tau}, \quad f = f_0 + \delta f \Rightarrow \delta f = \delta f(0) e^{-t/\tau}. \tag{2}$$

Газ электронов в металле

Рассмотрим электроны как свободные частицы, для которых энергия $\varepsilon = p^2/2m$. Главную роль играют электроны, энергия которых близка к энергии Ферми.

Будем считать, что электроны в металле упруго рассеиваются на примесях. Тогда интеграл столкновений выглядит гораздо проще:

$$I_{\text{уход}} = \int w(\mathbf{p} \to \mathbf{p}') f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p',$$

$$I_{\text{приход}} = \int w(\mathbf{p}' \to \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t), t) d^3p'.$$

Вероятности $w(\mathbf{p} \to \mathbf{p}')$, $w(\mathbf{p}' \to \mathbf{p})$ содержат $\delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}'))$, так что фактически в интеграле остается только интегрирование по углам.

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Записывая интеграл столкновений, мы не учли принцип Паули, который должен запретить переходы в состояния, уже занятые. Покажем, что учет принципа Паули не изменит вида интеграла столкновений. Тогда суммарный поток (- уход + приход):

$$-w(\mathbf{p} \to \mathbf{p}')\tilde{f}(\mathbf{p})(1 - \tilde{f}(\mathbf{p}')) + w(\mathbf{p}' \to \mathbf{p})\tilde{f}(\mathbf{p}')(1 - \tilde{f}(\mathbf{p}))$$

$$= w(\mathbf{p} \to \mathbf{p}') \cdot (\tilde{f}(\mathbf{p}') - \tilde{f}(\mathbf{p})),$$

так как вероятности $w(\mathbf{p} \to \mathbf{p}')$ и $w(\mathbf{p}' \to \mathbf{p})$ равны. Таким образом, принцип Паули одинаково подавляет переходы туда и обратно и оказывается “вне игры”.

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Убедимся, что для рассеяния на примесях интеграл столкновений действительно можно представить в виде $I = -\delta f/\tau$. Интеграл столкновений можно записать так:

$$I = n_0 \int v \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}' \to \mathbf{p}} \delta f(\mathbf{p}\prime) d\Omega' - n_0 \int v' \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p} \to \mathbf{p}'} \delta f(\mathbf{p}) d\Omega'$$

здесь $p' = p, v' = v$, а дифференциальное сечение рассеяния зависит от угла между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$.
Во втором слагаемом ($I_{\text{уход}}$) величину $\delta f(\mathbf{p})$ можно вынести из-под знака интеграла.

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

С первым слагаемым ($I_{\text{приход}}$)— сложнее. Кинетическое уравнение Больцмана в однородном постоянном поле **E**, направленном вдоль оси x, запишем

$$eE_x \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_x} = eE_x \mathbf{v}_x \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = I. \tag{3}$$

Ищем решение в виде

$$\delta f = \mathbf{E}_x \mathbf{v}_x F(\epsilon). \tag{4}$$

Тогда

$$I = E_x F(\epsilon) n_0 v \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{p}' \to \mathbf{p}} (v_x' - v_x) d\Omega'.$$

На время интегрирования выберем ось сферических координат вдоль вектора $\mathbf{p}$. Тогда $d\Omega' = \sin\theta' d\phi' d\theta'$,

$$v'_x E_x = E_x v[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi')].$$

После интегрирования по ϕ' остается $v'_x E_x = E_x v\cos\theta\cos\theta'$.

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Получаем

$$I = -E_x v_x F(\epsilon) n_0 v \int (1 - \cos\theta') \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega' = -\frac{\delta f}{\tau}$$

Итак,

$$\frac{1}{\tau} = n_0 \cdot v \int \frac{d\sigma}{d\Omega} (1 - \cos\theta)\, d\Omega = n_0 \cdot v\sigma_{tr},$$

где σ_{tr} — *транспортное сечение*; множитель $(1 - \cos\theta)$ приводит к подавлению вклада рассеяния на малые углы (которое мало меняет ток) и подчеркивает вклад рассеяния на большие углы (сильно ослабляющего ток).

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Если примеси заряженные (кулоновские центры), то вычисление $\sigma_{tr} \propto \int d\theta/\theta$ даст при малых углах логарифмическую расходимость. Результат окажется конечным, если учесть отличие поля примеси от кулоновского, обусловленное экранированием заряда. Рассеяние электронов на примесях, которое мы рассматривали, играет главную роль при низких температурах (это так называемое остаточное сопротивление). При высоких — существенно рассеяние на фононах (на колебаниях решетки). Число фононов при высоких температурах пропорционально T, поэтому и сопротивление содержит слагаемое, пропорциональное T.

Проводимость металла

Определим ток, текущий в металле под действием постоянного однородного электрического поля, которое естественно считать слабым. Будем рассматривать функцию распределения как и раньше: $f = f_0 + \delta f$. Интеграл столкновений представим в виде (τ–приближение)

$$I = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

Итак, пусть есть слабое электрическое поле вдоль оси x, а функция распределения не зависит ни от координат, ни от времени. Тогда сила: $F_x = eE$. Уравнение

$$eE\frac{\partial f_0}{\partial p_x} = -\frac{\delta f}{\tau}$$

сразу же разрешается:

$$\delta f = -eE\tau\frac{\partial f_0}{\partial p_x}, \tag{5}$$

так что можно выразить плотность тока:

$$j_x = e\int \delta f v_x d^3p = -e^2E\tau\int v_x\frac{\partial f_0}{\partial p_x}d^3p = \frac{e^2E\tau}{m}\int f_0 d^3p = \sigma E,$$

где

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad n = \int f_0 d^3p,$$

τ — время релаксации, n — концентрация электронов, σ — проводимость.

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Результат мгновенно обобщается на случай переменного поля: $\delta f, E \propto e^{-i\omega t}$. Тогда $\dfrac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$. При этом в левой части уравнения появляется $-i\omega\delta f$, поэтому достаточно сделать замену $-\delta f/\tau \to -\delta f\,(1/\tau - i\omega)$, то есть $\tau \to \tau/(1 - i\omega\tau)$. Значит, в переменном поле проводимость

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m(1 - i\omega\tau)}.$$

Далее диэлектрическая проницаемость,

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi\sigma}{\omega} i,$$

после чего можно получить выражение потерь, коэффициенты отражения для разных поляризаций и частот, толщину скин-слоя и т. п. — причем все выражается через один параметр τ, который к тому же входит в статическую проводимость. Для меди, например, такая совокупность формул справедлива до инфракрасного диапазона частот.

Теплопроводность электронного газа

Пусть в металле имеется градиент температуры, распределение температуры $T(x)$. Это следует понимать так, что в каждой “точке” есть свое, локальное равновесие и функция распределения — фермиевская, но с локальными значениями температуры. Кроме того, непременно есть отклонение функции распределения от равновесной за счет влияния “соседних” точек.

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0 + \delta f,$$

причем f_0 зависит от энергии и температуры, а следовательно, и от x, через комбинацию $z = (\varepsilon - \mu)/T(x)$. Будем также полагать, что градиент температуры мал.

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Исходное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\delta f}{\tau}. \tag{6}$$

Поскольку f не зависит от времени и $\mathbf{F}$=0, в левой части уравнения остается лишь слагаемое $v_x \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Учитывая, что

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f_0}{\partial z}\frac{1}{T},$$

получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\varepsilon - \mu}{T^2}\frac{dT}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\frac{\varepsilon - \mu}{T}\frac{dT}{dx}.$$

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Подставим $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в уравнение (6):

$$-v_x \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\varepsilon - \mu}{T} \frac{dT}{dx} = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

Отсюда определяется δf Мы не стали выписывать ещё одно слагаемое $-\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon} \dfrac{\partial \mu}{\partial T} \dfrac{dT}{dx}$. В металле электронный газ вырожденный, поэтому величина $\dfrac{\partial \mu}{\partial T} \sim \dfrac{T}{\mu}$ очень мала и неучтенное слагаемое отличается от учтенного в тексте множителем $\sim \dfrac{T}{\mu} \ll 1$. δf имеет такую же зависимость от углов, как и в задаче про проводимость. Значит, можно провести аналогичные преобразования, выразив ответ через транспортное сечение, так что τ – приближение в кинетическом уравнении и в задаче о теплопроводности можно считать вполне обоснованным.

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Запишем плотность потока тепла. Так как речь идет о переносимом тепле, надо учесть, что
$\delta Q = TdS = dE - \mu dN = (\varepsilon - \mu)dN$.
В процессе теплопроводности принимают участие электроны с энергиями, близкими к энергии Ферми, для которых
$\epsilon = |\varepsilon - \mu| \ll \mu$. Происходит перенос квазичастиц с энергией ϵ.
Как и в задаче о теплоемкости, мы проводим расчет в рамках картины частиц, отсчитывая энергию, переносимую электроном, от уровня Ферми.

$$q_x = \int v_x \delta f \, (\varepsilon - \mu) \, d^3p = \frac{\tau}{T} \, \frac{dT}{dx} \, \int (\varepsilon - \mu)^2 \, \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \, v_x^2 \, d^3p.$$

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Легко видеть, что v_x^2 под интегралом можно заменить на $v^2/3$, после чего можно записать

$$q_x = \frac{2\tau}{3mT}\,\frac{dT}{dx}\int(\varepsilon-\mu)^2\,\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\varepsilon\; d^3p.$$

Здесь

$$d^3p = \nu(\varepsilon)d\varepsilon,\;\; \nu(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon},\;\; A = \frac{3n}{2\mu^{3/2}}.$$

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Мы пришли к интегралу вида

$$J = \int F(\varepsilon)\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}d\varepsilon = -\int f_0\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}d\varepsilon,$$

(учтено, что $F(0) = f_0(\infty) = 0$). Применяя известную формулу, находим

$$J = -F(\mu) - \frac{\pi^2}{6}T^2F''(\mu). \qquad (7)$$

В нашем случае $F(\varepsilon) \propto (\varepsilon-\mu)^2\varepsilon\nu(\varepsilon)$, поэтому вклад в интеграл даст лишь второе слагаемое и притом оба дифференцирования должны быть применены к первому сомножителю.

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Итак,

$$q_x = -\frac{dT}{dx} \cdot \frac{2\tau}{3mT}\frac{\pi^2 T^2}{6}\nu(\mu) = -\frac{\pi^2 nT\tau}{3m}\frac{dT}{dx}$$

Множитель при $-dT/dx$ и есть коэффициент теплопроводности

$$\varkappa = \frac{\pi^2 nT\tau}{3m}.$$

Сравнивая коэффициент теплопроводности с проводимостью, получаем

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{\pi^2 T}{3e^2}.$$

Это соотношение, называемое законом Видемана – Франца.

Уравнение Больцмана в τ-приближении.

Число Лоренца $L = (\kappa/\sigma T) \times 10^8$ Вт Ом град$^{-2}$.

Элемент	$T = 0^o C$	$T = 100^o C$
Ag	2,31	2,37
Au	2,35	2,40
Cd	2,42	2,43
Cu	2,23	2,33
Ir	2,49	2,49
Mo	2,61	2,79
Pb	2,47	2,56
Pt	2,51	2,60
Sn	2,52	2,49
W	3,04	3,20
Zn	2,31	2,33

Теоретическое значение

$$L_{theory} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 = 2,45 \cdot 10^{-8} \text{ Вт Ом град}^{-2}.$$