Урок 14

Энергия поля, Давление. Силы

1. (Задача 2.47) Внутри плоского конденсатора с площадью пластин S и расстоянием d между ними находится пластинка из стекла, целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Диэлектрическая проницаемость стекла – ε. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластинку? Решить задачу при условиях: а) конденсатор все время присоединен к батарее с эдс $\mathcal{E}$; б) конденсатор был сначала подсоединен к той же батарее, а затем отключен и только после этого пластинка была удалена. Найти механическую работу, которая затрачивается на удаление пластинки в том и другом случае.

Решение а) $\Delta W = \frac{(1-\varepsilon)CU^2}{2}$; б) $\Delta W = \frac{(1-\varepsilon)Q^2}{2\varepsilon C}$, $A = \Delta W$, $C = \frac{S}{4\pi d}$.

2. (Задача 2.48) Найти энергию электростатического поля заряженного равномерно по объему шара через плотность энергии и через плотность заряда и потенциал. Заряд шара Q, радиус R.

Решение Энергия электростатического поля может быть подсчитана по двум эквивалентным формулам:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{ED})\, dV \qquad (1)$$

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\, dq = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV\,, \qquad (2)$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ – векторы электрической напряженности и электрической индукции поля, φ – потенциал поля в месте нахождения заряда dq. Первый интеграл берется по всему объему, где $\mathbf{E} \neq 0$, во втором интеграле интегрирование ведется по всем зарядам системы.

Найдем энергию электростатического поля шара, равномерно заряженного с плотностью ρ. Используя распределение поля для заряженного шара (см. 1.23) и полагая $\varepsilon = 1$, находим

$$W = \frac{1}{8\pi}\left[\int_0^a \left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^2 R^2 \cdot 4\pi R^2\, dR + \int_a^\infty \left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^2 \frac{a^6}{R^4} \cdot 4\pi R^2\, dR\right] = \frac{3}{5}\,\frac{Q^2}{a}\,,$$

где $Q = \frac{4}{3}\pi a^3\rho$ – полный заряд шара.

Распределение потенциала внутри шара

$$\varphi(R) = \frac{Q}{a} + \frac{Q}{2a}\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) \qquad \text{при} \qquad R \leqslant a\,.$$

Подставляя потенциал в формулу (2), получаем

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left[\frac{Q}{a} + \frac{Q}{2a}\Big(1 - \frac{R^2}{a^2}\Big)\right] \rho \cdot 4\pi R^2\, dR = \frac{3}{5}\,\frac{Q^2}{a}.$$

Энергию можно найти и как работу, которую нужно совершить, чтобы «слепить» равномерно заряженный шар. Если уже «слепили» шар радиуса R, то, чтобы нарастить его на dR, нужно добавить к нему заряд $dQ = \rho \cdot 4\pi R^2\, dR$. Работа, которую следует совершить, чтобы преодолеть силу отталкивания при наращивании слоя толщиной dR, равна

$$dA = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{R} \cdot \rho \cdot 4\pi R^2\, dR = \frac{3Q^2 R^4}{a^6}\, dR\,.$$

Интегрируя по всем слоям, находим

$$W = A = \frac{3Q^2}{a^6}\int\limits_0^a R^4\, dR = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{a}\,.$$

3. (Задача 2.50) Диполь с моментом $\mathbf{p}_1$ находится в начале координат, а другой диполь с моментом $\mathbf{p}_2$ – в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$. Найти энергию взаимодействия этих диполей и действующую между ними силу. При какой ориентации диполей эта сила максимальна?

Решение Напряженность электрического поля, создаваемого диполем $\mathbf{p}_1$ в точке $\mathbf{r}$

$$\mathbf{E} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{p}_1}{r^3}\right) = -\frac{\mathbf{p}_1}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}\,(\mathbf{r}\mathbf{p}_1)}{r^5}$$

Потенциальная энергия взаимодействия диполей $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$

$$U\,(\mathbf{r}) = -\,(\mathbf{p}_2\mathbf{E})\,.$$

или

$$U\,(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}{r^3} - \frac{3\,(\mathbf{p}_1\mathbf{r})(\mathbf{p}_2\mathbf{r})}{r^5} = \frac{p_2 p_1}{r^3}\,(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi - 2\cos\theta_1\cos\theta_2)\,,$$

где $\theta_1 = (\widehat{\mathbf{r}\mathbf{p}}_1)$, $\theta_2 = (\widehat{\mathbf{r}\mathbf{p}}_2)$, φ – угол между плоскостями $(\mathbf{p}_1\mathbf{r})$ и $(\mathbf{p}_2\mathbf{r})$.

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{3p_2 p_1\,(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi - 2\cos\theta_1\cos\theta_2)}{r^4} = \frac{3U}{r}.$$

Очевидно, что выражение в скобках, зависящее от углов, имеет максимальное значение при $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Это значение равно -2, тогда

$$F_{\max} = -\frac{6p_1p_2}{r^4} \text{ (притяжение!)},$$

и это имеет место когда диполи параллельны.

4. (Задача 2.51) Электрический диполь с моментом $\mathbf{p}$ находится в однородном диэлектрике вблизи плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти потенциальную энергию взаимодействия диполя с индуцированными зарядами, силу и вращательный момент, приложенные к диполю. Расстояние a, проницаемость диэлектрика ε.

Решение

$$U = -(\mathbf{pE})$$

если p и E независимы, $p \sim E$, то $\frac{1}{2}$.

$$r = 2a$$

$$U = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}{r^3\varepsilon} - \frac{3(\mathbf{p}_2\mathbf{r})(\mathbf{p}_1\mathbf{r})}{r^5\varepsilon}\right\} = \frac{p^2\cos^2\theta}{r^3\varepsilon} - \frac{3p^2r^2\cos^2\theta}{r^5\varepsilon} =$$
$$= \frac{p^2}{r^3\varepsilon}\left(\cos 2\theta - 3\cos^2\theta\right) = -\frac{p^2}{8a^3\varepsilon}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

$W = -\frac{p^2}{16\varepsilon a^3}\left(1+\cos^2\theta\right)$, где $\theta = (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{e}_z})$; $F_z = -\frac{3W}{a}$,
$N_\theta = -\frac{p^2\sin 2\theta}{16\varepsilon a^3}$.

5. (Задача 2.52) Электрический диполь $\mathbf{p}_0$ находится в однородном диэлектрике на расстоянии r от центра заземленного проводящего шара радиуса R. Найти энергию взаимодействия диполя с шаром, силу и вращательный момент, приложенные к диполю. Рассмотреть случай $r \to R$ $(r > R)$.

Решение $W = -\frac{Q(\mathbf{p}_0\mathbf{r}^*)}{2\varepsilon r^{*3}} + \frac{(\mathbf{p}_0\mathbf{p})}{2\varepsilon r^{*3}} - \frac{3(\mathbf{p}_0\mathbf{r}^*)(\mathbf{p}\mathbf{r}^*)}{2\varepsilon r^{*5}}$, где заряд изображения $Q = \frac{(\mathbf{pr})}{r^3}R$ и диполь изображения $\mathbf{p} = -\mathbf{p}_0\frac{R^3}{r^3} + 2\frac{(\mathbf{p}_0\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2}\frac{R^3}{r^3}$ отстоят от диполя $\mathbf{p}_0$ на расстояние $r^* = r - R^2/r$, а $\mathbf{r}, \mathbf{r}^*$ – радиус-векторы положения диполя $\mathbf{p}_0$ и его изображений соответственно.

Если $\theta = (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}})$, то $W = -\frac{p_0^2R\left(R^2+r^2\cos^2\theta\right)}{2\varepsilon\left(r^2-R^2\right)^3}$, $F_r = -\frac{p_0^2Rr}{\varepsilon}\frac{\left(R^2+2r^2\right)\cos^2\theta+3R^2}{\left(r^2-R^2\right)^4}$, $N_\theta = -\frac{p_0^2Rr^2\sin 2\theta}{2\varepsilon\left(r^2-R^2\right)^3}$.

6. (Задача 2.54) Плоский конденсатор (подключен к батарее, эдс $\mathcal{E}$) с вертикально расположенными пластинами опущен в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Плотность жидкости ρ, расстояние между пластинами d. На какую высоту поднимется жидкость внутри конденсатора?

Решение

$$D = \varepsilon E_0$$

$$\frac{\varepsilon E_0^2}{8\pi} = \frac{E_0^2}{8\pi} + \rho g h$$

$$E_0 = \frac{\mathcal{E}}{d}$$

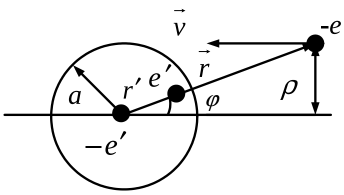
$$\frac{(\varepsilon - 1)\,E_0^2}{8\pi\rho g} = h,$$

или

$$h = \frac{(\varepsilon - 1)\,\mathcal{E}^2}{8\pi\rho g d^2}.$$

7. (Задача 2.60) Найти сечение захвата электронов (заряд – e, масса – m, скорость на бесконечности – υ_0) абсолютно проводящей нейтральной закрепленной сферой радиуса a.

Решение Движение электрона в поле индуцированных зарядов сферы эквивалентно движению в поле двух зарядов: $e' = ea/r$ и $(-e')$, расположенных соответственно в центре и на расстоянии $r' = a^2/r$, где r– расстояние от центра сферы до летящего электрона.



При движении электрона заряды изображения и электрон будут находиться на одной прямой, проходящей через центр сферы, поэтому можно считать, что электрон движется в центрально-симметричном поле. В центрально-симметричных полях сохраняется момент количества движения и, значит, движение частицы плоское.

Выбирая полярную систему координат в плоскости движения электрона с началом в центре сферы, запишем закон сохранения энергии

$$U + \frac{m\upsilon_r^2}{2} + \frac{m\upsilon_\varphi^2}{2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\,, \tag{1}$$

где υ_r, υ_φ – проекции скорости электрона на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ и на перпендикулярное к нему направление, U – энергия взаимодействия электрона со сферой

$$U = -\frac{e^2 a^3}{2r^2(r^2 - a^2)}\,.$$

Исключив скорость υ_φ из уравнения (1), воспользовавшись выражением для момента количества движения $M = m\upsilon_\varphi r$, получим

$$\frac{m\upsilon_r^2}{2} + U_{\text{эф}} = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\,, \tag{2}$$

где

$$U_{\text{эф}} = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{e^2a^3}{2r^2(r^2-a^2)} \tag{3}$$

есть эффективное поле, в котором происходит одномерное (по r) движение электрона.

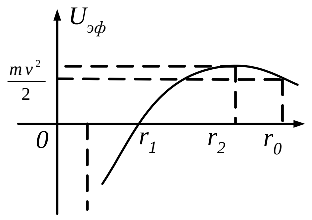


График функции $U_{\text{эф}}$ показан на рисунке. Из этого графика и из уравнения (2) следует, что если энергия электрона, равная $m\upsilon_0^2/2$, меньше, чем максимальное значение эффективной энергии $\Big(U_{\text{эф}}\Big)_{max}$, то минимальное расстояние r_0, на которое может подойти электрон, определяется равенством

$$U_{\text{эф}}(r_0) = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\,.$$

Если энергия электрона больше $\Big(U_{\text{эф}}\Big)_{max}$, то электрон упадет на сферу. Найдем $\Big(U_{\text{эф}}\Big)_{max}$ при некотором моменте M электрона.

Дифференцируя по r выражение (3) и приравнивая производную нулю $\frac{dU_{\text{эф}}}{dr} = 0$, находим

$$M^2r^4 - 2r^2X + a^2X = 0\,, \tag{4}$$

где введено обозначение $X = M^2a^2 + m\,e^2a^3$. Решая уравнение (4), получаем

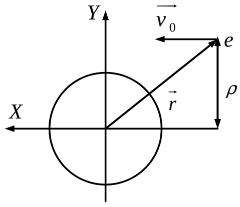
$$r^2 = r_1^2 \pm r_1\frac{\sqrt{me^2a^3}}{M}\,, \tag{5}$$

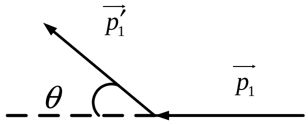
где

$$r_1^2 = a^2 + \frac{me^2a^3}{M^2}$$

есть расстояние, на котором обращается в нуль $U_{\text{эф}}$, $\Big(U_{\text{эф}}(r_1) = 0\Big)$. В соотношении (5) нужно выбрать знак «+», иначе $r < a$. Итак,

$$r_2^2 = r_1^2 + r_1\sqrt{\frac{me^2a^3}{M^2}}\,, \qquad \Big(U_{\text{эф}}\Big)_{max} = U_{\text{эф}}(r_2)\,.$$





Подставляя r_2 в уравнение

$$U_{\text{эф}}(r_2) = \frac{mv_0^2}{2}\,, \tag{6}$$

находим предельное значение момента M_0, а с ним и прицельного параметра ρ_0 $(M_0 = mv_0\rho_0)$, такое, что при $M < M_0$ электроны захватываются сферой.

После несложных арифметических преобразований уравнения (6) получим промежуточное уравнение

$$\frac{mv_0}{M_0}\left(r_1 + \sqrt{\frac{me^2a^3}{M}}\right) = 1,$$

откуда следует

$$\frac{M_0^2}{m^2v_0^2} - \frac{2\sqrt{me^2a^3}}{mv_0} = a^2. \tag{7}$$

Заменяя в уравнении (7) M_0 на $mv_0\rho_0$, окончательно находим

$$\rho_0^2 = a^2\left(1 + 2\sqrt{\frac{e^2/a}{mv_0^2}}\right),$$

сечение захвата

$$\sigma = \pi\rho_0^2 = \pi a^2\left(1 + 2\sqrt{\frac{e^2/a}{mv_0^2}}\right).$$

8. (Задача 2.61) Найти сечение рассеяния на малые углы электронов (заряд – e, масса – m, скорость на бесконечности – v_0), пролетающих с большим прицельным параметром ρ мимо шара радиуса a, если: а) шар проводящий и заземлен; б) шар проводящий и изолирован; в) шар диэлектрический с проницаемостью ε; г) шар диэлектрический с поляризуемостью $\backsim E^2$.

Решение Рассеяние на малые углы означает, что рассматриваются столкновения на больших прицельных расстояниях, где поле соответственно будет слабое. Выберем оси (X,Y) так, как показано на рисунке. Пусть $\mathbf{P}_1$ – импульс частицы до рассеяния, $\mathbf{P}_1'$ – после рассеяния, тогда $\sin\theta = P_{1y}'/P_1'$. Поскольку при малых углах $\sin\theta \approx \theta$, $P_1' \approx P_1 = mv_0$, то $\theta \approx P_{1y}'/mv_0$. С другой стороны,

$$P_{1y}' = \int_0^\infty F_y\, dt.$$

Переходя от интегрирования по t к интегрированию по r и используя приближенные соотношения

$$dt \simeq \frac{dx}{v_0}\,, \qquad r^2 \simeq x^2 + \rho^2\,, \qquad dx \simeq \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}},$$

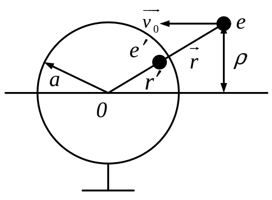
$$F_y = F_r \cdot \frac{\rho}{r}\,,$$

получаем

$$\theta \simeq \frac{2\rho}{mv_0^2}\int_\rho^\infty F_r \frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,. \tag{1}$$

а) Проводящий шар заземлен.

В этом случае рассеяние происходит в поле заряда $e' = -ea/r$, находящегося на расстоянии $r' = a^2/r$ от центра. Сила, действующая на электрон:



$$F_r = \frac{-e^2 ar}{(r^2-a^2)^2}\,.$$

Подставляя силу в уравнение (1) и используя при малых углах неравенство $r \gg a$, получаем

$$\theta \approx \frac{\pi a e^2}{2mv_0^2\rho^2}\,,$$

откуда

$$\rho^2 \approx \frac{\pi a^2 e^2}{2mv_0^2\theta}\,. \tag{2}$$

Связь дифференциального эффективного сечения $d\sigma$ с прицельным параметром ρ имеет вид $d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\,d\rho$. Деля обе части этого равенства на элемент телесного угла $d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta \approx 2\pi\theta\,d\theta$ и делая несложные преобразования, получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\rho^2}{\partial\theta}\right|\frac{d\theta}{\theta}\,. \tag{3}$$

Окончательно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\pi a e^2}{4 m v_0^2} \frac{1}{\theta^3} .$$

б) Проводящий шар изолирован.

В этом случае сила, действующая на электрон,

$$F_r \approx \frac{2e^2 a^3}{r^5} .$$

Подставим выражение для силы в формулу (1), получим связь угла рассеяния с прицельным параметром

$$\theta \approx \frac{3\pi a^3 e^2}{4 m v_0^2 \rho^4} .$$

Откуда

$$\rho^2 \approx \sqrt{\frac{3\pi a^3 e^2}{4 m v_0^2}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} ,$$

и дифференциальное эффективное сечение рассеяния (3) для электронов на изолированном проводящем шаре

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\pi a^2}{8} \sqrt{\frac{3e^2/a}{\pi m v_0^2}} \, \theta^{-5/2} .$$

в) Шар диэлектрический с проницаемостью ε.

В этом случае

$$F_r = -e^2(\varepsilon - 1) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell(\ell+1)}{(\varepsilon\ell + \ell + 1)} \frac{a^{2\ell+1}}{r^{2\ell+3}} .$$

Ограничимся первым слагаемым, поскольку $r \gg a$, тогда

$$F_r = -e^2 \frac{2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 2)} \frac{a^3}{r^5} ,$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \frac{a^3 e^2}{m v_0^2} \frac{(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 2)} \frac{1}{\rho^4} ,$$

и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi a^2}{8} \left(\frac{3}{4} \frac{e^2/a}{m v_0^2} \frac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon + 2)} \right)^{1/2} \theta^{-5/2} .$$