

*XVI*

*З а д а ч а*

*Л я м э*

*( т о л с т о с т е н н ы е  
т р у б ы )*

Толстостенной считается труба, толщина стенки которой больше одной десятой среднего радиуса поперечного сечения:

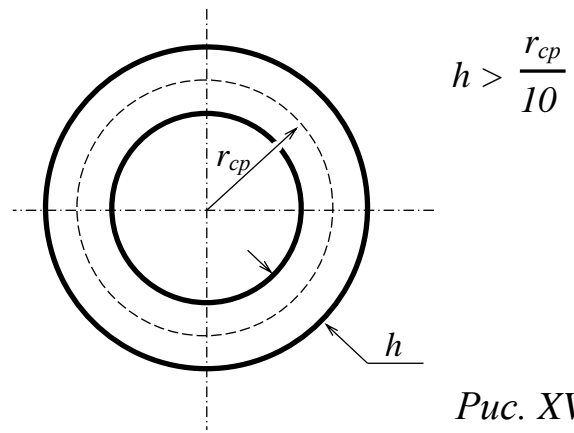


Рис. XVI.1.

Используются такие трубы, в основном, для транспортирования или хранения под давлением жидкостей и газов под высоким давлением. Или, наоборот, для прохождения сквозь камеры высокого давления.

В некоторых случаях высокая толщина стенки напрямую не связана с давлением. Например, изготовить тонкую трубку ещё и тонкостенной технологически непросто. Или: устанавливать промежуточные опоры для множества трубок в конструкции негде, проще придать трубкам достаточную жёсткость, утолщая их стенки (рис. XVI.2).

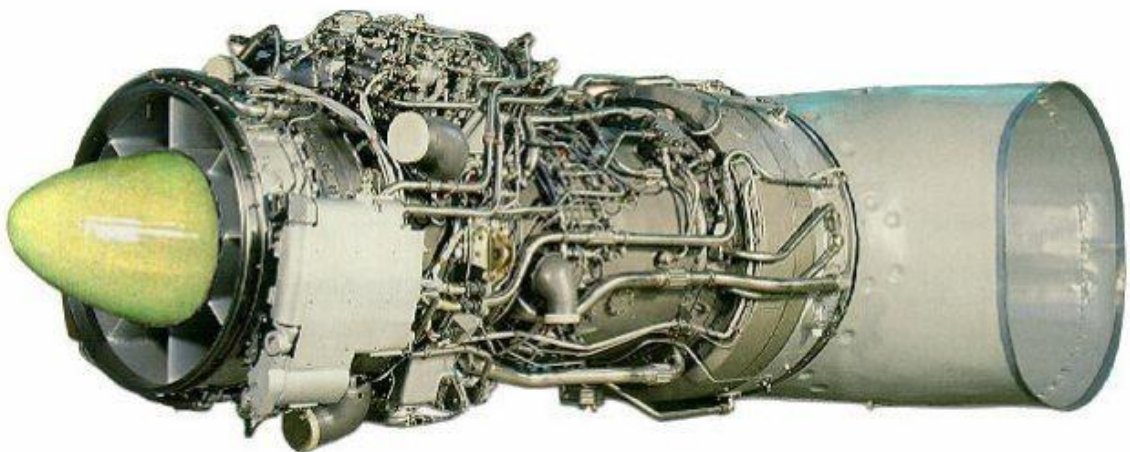
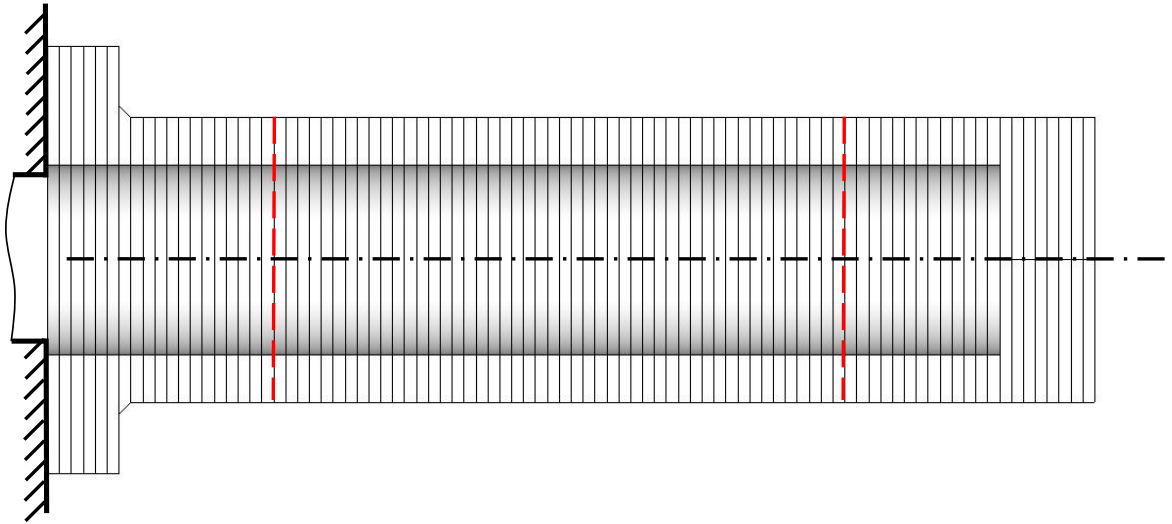


Рис. XVI.2.

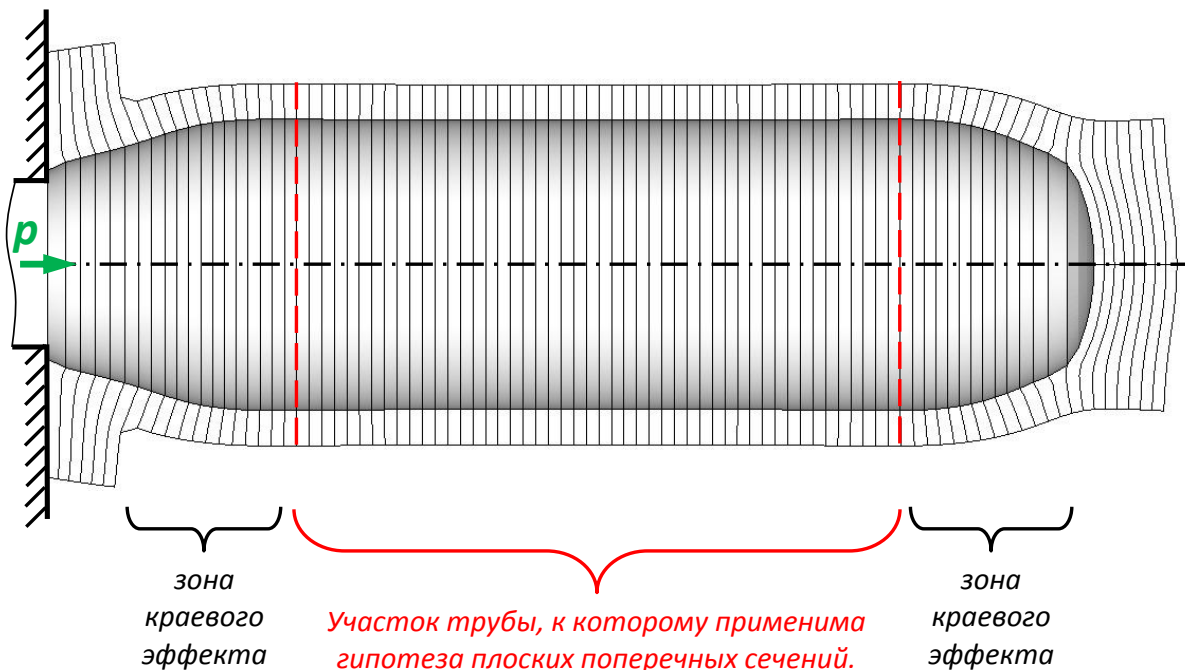
## Объект исследования

Методика расчёта толстостенных труб (Габриэль Лямэ, начало XIX века) базируется на гипотезе плоских поперечных сечений. То есть, речь идёт о цилиндре - участке трубы вне зон краевого эффекта (например, *рис. XVI.3.*).

*а) Толстостенная труба не нагружена. Показаны поперечные сечения, равноотстоящие друг от друга.*



*б) Труба нагружена внутренним давлением (масштаб перемещений увеличен).*



*Рис. XVI.3.*

Задача осесимметрична: угловые координаты  $\varphi$  точек цилиндра (рис. XVI.4.) при нагружении не меняются; точки, смещаясь, остаются в тех же радиальных плоскостях.

Если

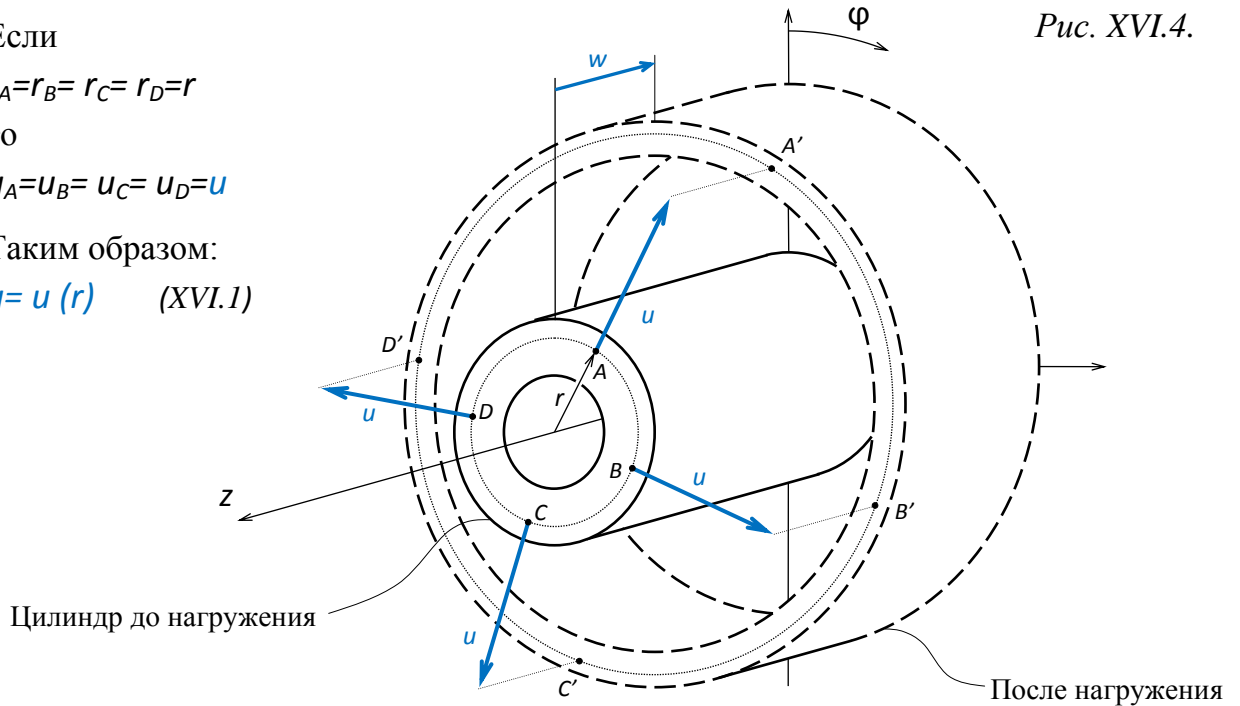
$$r_A = r_B = r_C = r_D = r$$

то

$$u_A = u_B = u_C = u_D = u$$

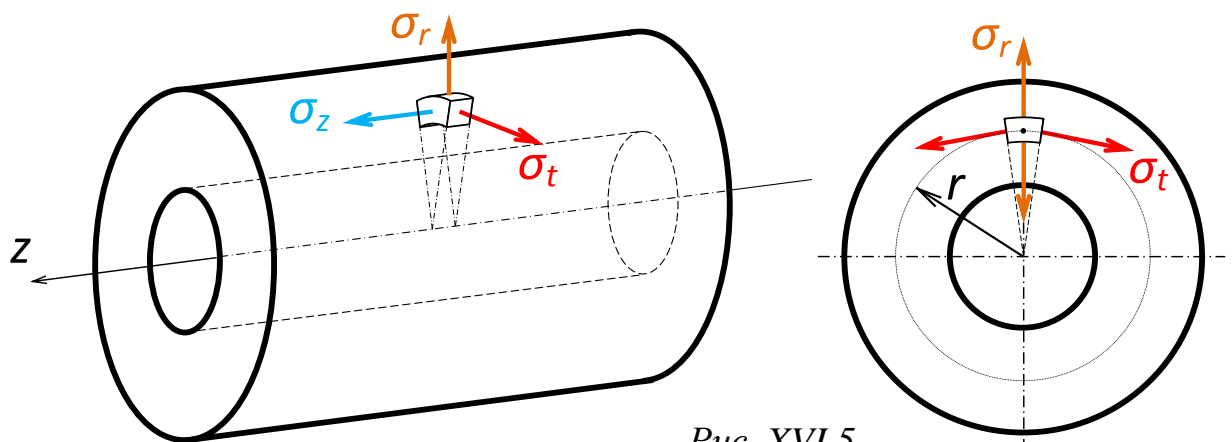
Таким образом:

$$u = u(r) \quad (\text{XVI.1})$$



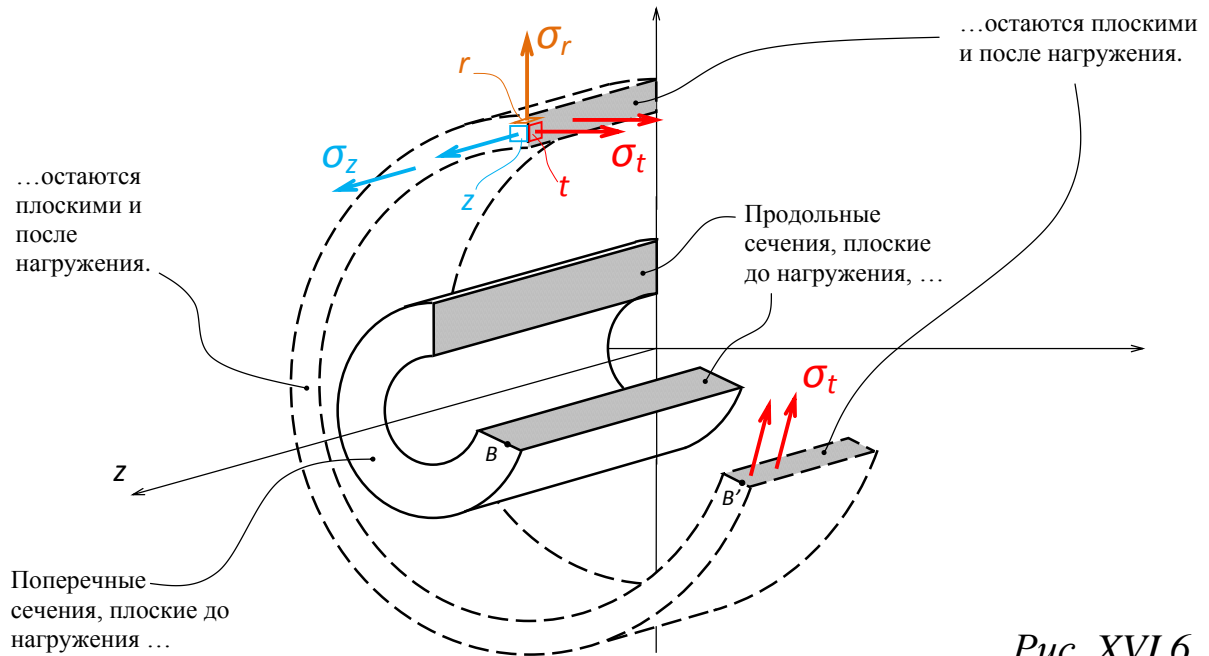
Осевое перемещение  $w$  точек цилиндра интерес представляет небольшой, а радиальное  $u$  – наоборот, рассчитывается тщательно.  $u$  точки считается положительным, если при нагружении точка смещается наружу (см. рис. XVI.4.), и отрицательным – если внутрь, к оси.

Ориентация главных напряжений в точке цилиндра определяется сразу: осевое напряжение  $\sigma_z$ , радиальное  $\sigma_r$  и окружное  $\sigma_t$  (см. рис. XVI.5.).



Доказать это просто. Исходим из того, что плоская часть ненагруженной детали при нагружении остаётся плоской, если в площадках, совпадающих с ней, отсутствуют касательные напряжения.

В силу осесимметричности задачи продольные сечения цилиндра после нагружения меняют размеры, но остаются плоскими (см. *рис. XVI.6.*). Значит, в площадке  $t$  касательных напряжения отсутствуют. Это первая главная площадка.



*Рис. XVI.6.*

Гипотезу плоских поперечных сечений мы приняли ранее (*рис. XVI.3.*). Значит площадка  $z$  вторая главная. Третья главная площадка  $r$  перпендикулярна первым двум.

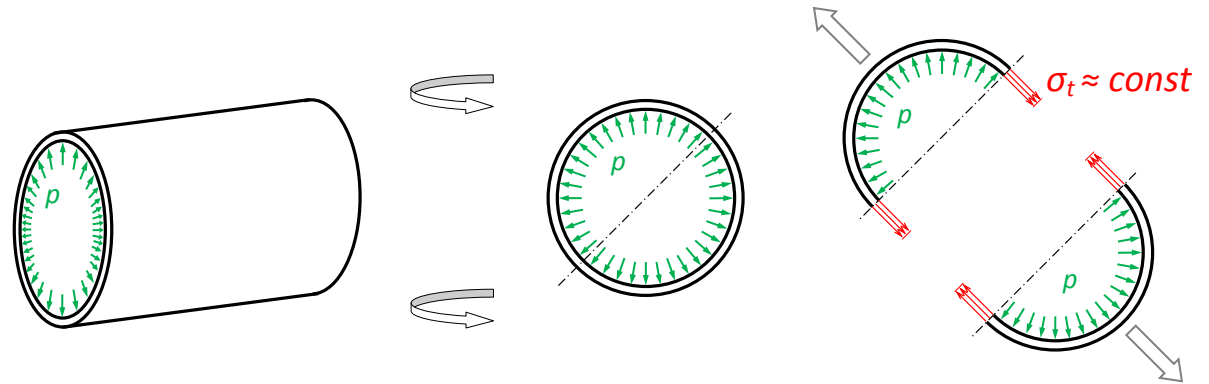
Напряжённое состояние так же осесимметрично: в точках слоя радиусом  $r$  (*рис. XVI.5.*) напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  своих значений не изменяют; эти напряжения меняются только при переходе от слоя к слою; напряжение  $\sigma_z$  во всех точках цилиндра одинаково:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_r(r) \\ \sigma_t &= \sigma_t(r) \\ \sigma_z &= \text{const}\end{aligned}\tag{XVI.2}$$

Рассчитывать напряжённое состояние толстостенного цилиндра по относительно простым котельным формулам или применить уравнение Лапласа, как мы это делали в случае осесимметричных оболочек и тонкостенных трубок (примеры *S-03* и *T-02* библиотеки задач) нельзя по двум причинам:

Причина первая:

Окружное напряжение  $\sigma_t$  в стенке тонкостенного цилиндра меняется незначительно. В расчётах оно принимается постоянным по высоте стенки.



Окружное напряжение по высоте стенки толстостенного цилиндра заметно изменяется от слоя к слою (иногда от внутреннего к внешнему в несколько раз).

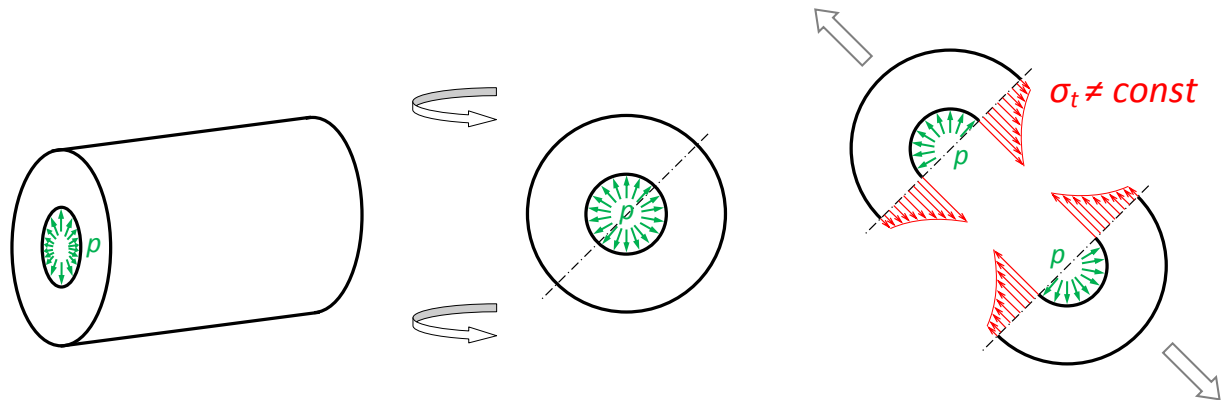


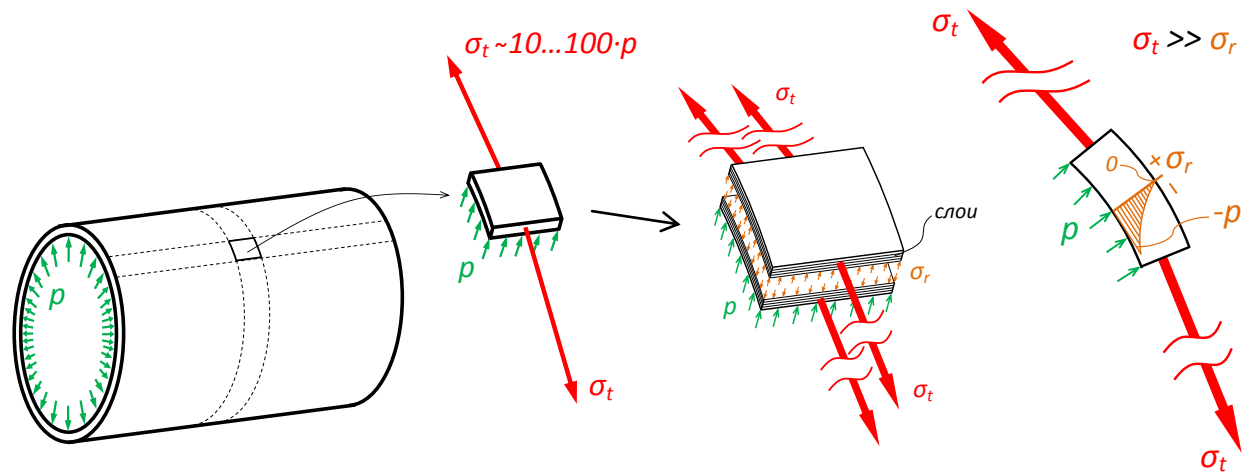
Рис. XVI.7.

Вывод 1: пренебрегать неравномерностью распределения окружного напряжения  $\sigma_t$  по высоте стенки толстостенного цилиндра нельзя.

### Причина вторая:

Окружное напряжение  $\sigma_t$  в тонкостенных конструкциях на порядок–два больше давления, его вызвавшего, а радиальное напряжение  $\sigma_r$ , с которым слои давят друг на друга, является величиной того же порядка, что и давление.

$\sigma_t \gg p$ ,  $\sigma_r \sim p \Rightarrow$  действием  $\sigma_r$  пренебрегают.



В толстостенном цилиндре радиальные напряжения  $\sigma_r$  распределяются по толщине стенки, в принципе, так же, НО! окружное напряжение, распределяясь по толстой стенке уменьшается и тоже становится величиной порядка  $p$ .

$\sigma_t \sim p$ ,  $\sigma_r \sim p \Rightarrow$  действием  $\sigma_r$  пренебречь нельзя.

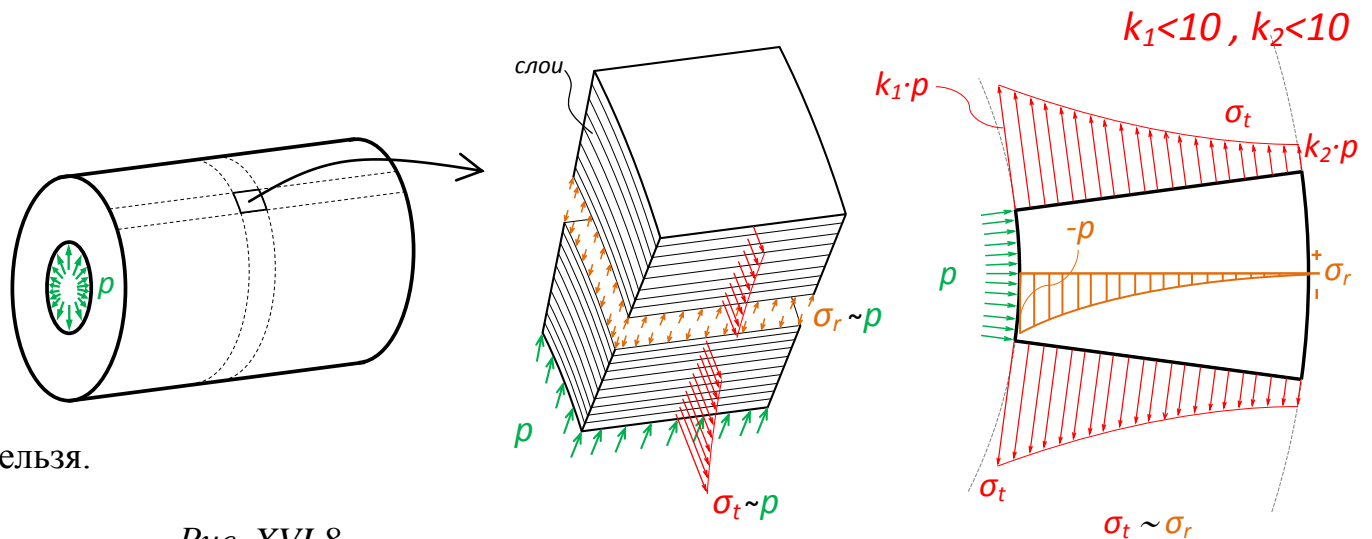


Рис. XVI.8.

Вывод 2: окружное  $\sigma_t$  и радиальное  $\sigma_r$  напряжения в толстостенном цилиндре есть величины одного порядка, оба эти напряжения должны быть учтены в расчётных формулах.

Для этого, собственно, трубы и делают толстостенными – чтобы уменьшить окружное напряжение  $\sigma_t$ .

Придётся для толстостенных труб разрабатывать свою методику расчёта напряжений и перемещений, более сложную, чем для оболочек, оперирующую уже не только уравнениями равновесия, но также уравнениями совместности деформаций.



## Постановка задачи

Полый цилиндр равномерно нагружен внутренним давлением, внешним давлением, а так же осевой нагрузкой, создающей в цилиндре наперёд известное осевое напряжение.

Требуется найти окружное и радиальное напряжения в цилиндре, а так же радиальные перемещения его точек.

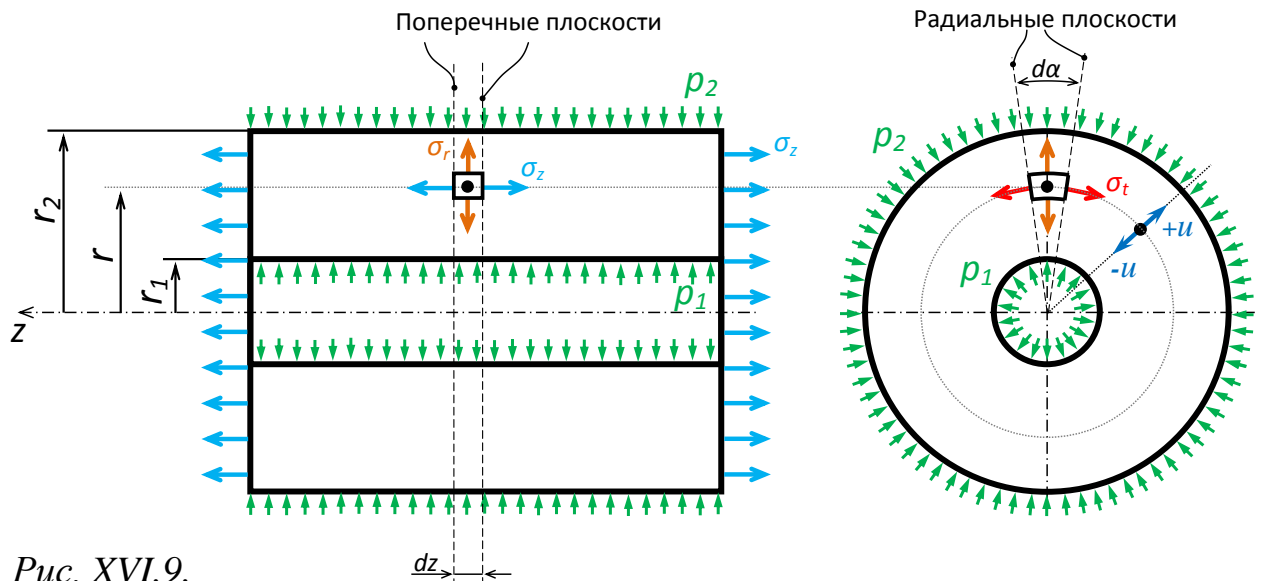


Рис. XVI.9.

В расчётах приняты следующие обозначения (рис. XVI.9.):

*Геометрия цилиндра:*

$r_1$  – внутренний радиус;

$r_2$  – наружный радиус;

$r$  – текущий радиус рассматриваемого слоя;

*Нагрузка:*

$p_1$  – внутреннее давление;

$p_2$  – наружное давление;

$\sigma_z$  – осевое напряжение;

*Неизвестные:*

$u(r)$  – радиальное перемещение рассматриваемой точки;

$\sigma_r(r)$  – радиальное напряжение в точке;

$\sigma_t(r)$  – окружное напряжение в точке.

## Вывод формул

Формулы расчёта толстостенных труб идентичны формулам расчёта дисков. Отсутствуют центробежные силы и температурные деформации, но присутствует осевое напряжение  $\sigma_z$ .

### а) Геометрические соотношения:

Под действием нагрузки цилиндр осесимметрично деформируется. Пусть перемещения  $u$  всех его точек положительны (цилиндр расширяется). Поперечными и радиальными плоскостями, а также цилиндрическими поверхностями мысленно выделим бесконечно малый элемент (рис. XVI.9.):

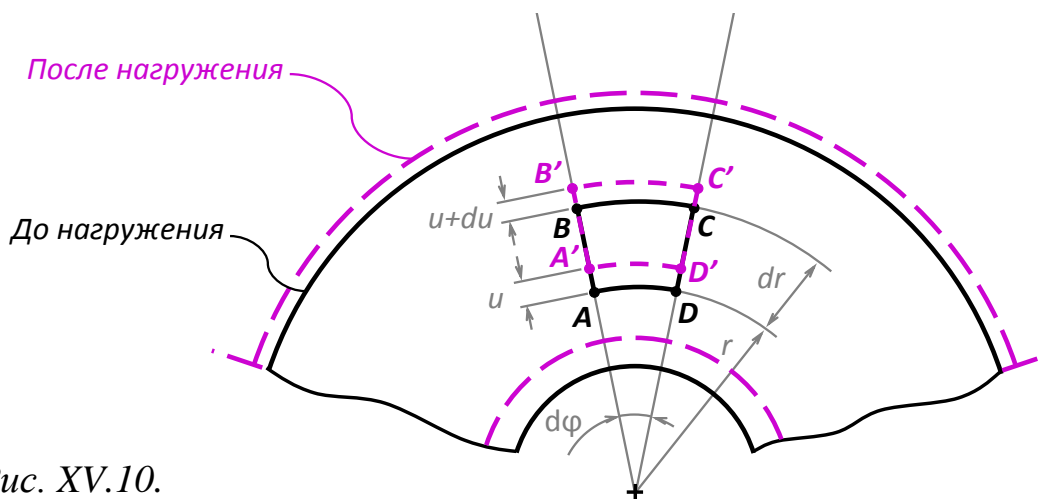


Рис. XV.10.

Деформация элемента в радиальном направлении:

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{[dr + (u + du) - u] - dr}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (\text{XVI.3})$$

Деформация элемента в окружном направлении:

$$\varepsilon_t = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{[r + u] \cdot d\varphi - r \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{u}{r} \quad (\text{XVI.4})$$

Исключая  $u$  из уравнений, получим:

$$\varepsilon_r = \frac{d(\varepsilon_t \cdot r)}{dr} \quad \text{уравнение совместности деформаций} \quad (\text{XVI.5})$$

б) Соотношения равновесия:

Тот же элемент под действием сил на его гранях находится в равновесии:

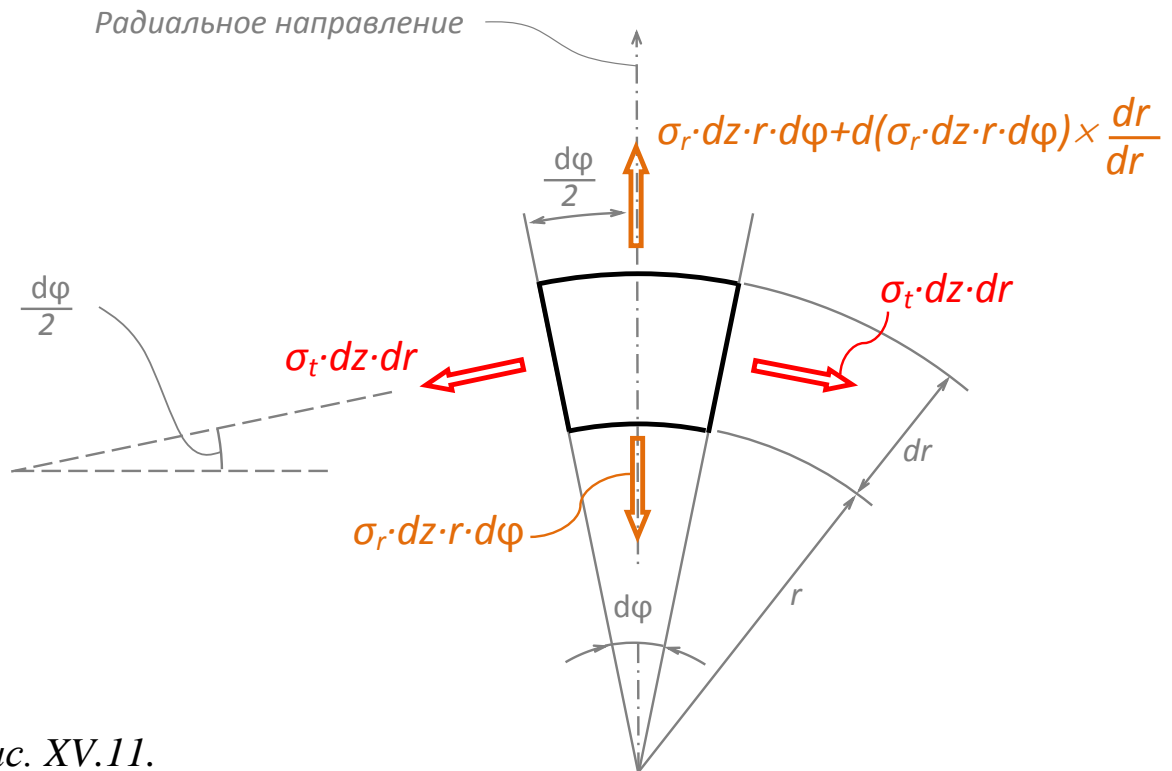


Рис. XV.11.

Проекция всех сил на радиальное направление ( $\sigma_z$  проецируется в нуль и в уравнения не входит):

$$\Sigma F_r = 0 = \cancel{-\sigma_r \cdot dz \cdot r \cdot d\varphi} + \cancel{\sigma_r \cdot dz \cdot r \cdot d\varphi} + \frac{d}{dr} \left( \overset{const}{\sigma_r} \cdot \overset{const}{dz} \cdot r \cdot d\varphi \right) \cdot dr -$$

$$- 2 \cdot \sigma_t \cdot dz \cdot dr \cdot \underbrace{\sin \frac{d\varphi}{2}}_{\approx \frac{d\varphi}{2}}$$

$$\cancel{dz \cdot d\varphi \cdot dr} \cdot \frac{d}{dr} (\sigma_r \cdot r) - \cancel{\sigma_t \cdot dz \cdot dr \cdot d\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = 0 \text{ уравнение равновесия (XV.6)}$$

в) Обобщение уравнений:

Итак, разрешающие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d(\varepsilon_t \cdot r)}{dr} - \varepsilon_r = 0 \\ \frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = 0 \end{cases} \quad (XVI.7)$$

Одно из этих уравнений записано в деформациях, другое в напряжениях. Неудобно.

Для пересчёта деформаций первого уравнения системы (XVI.7) в напряжения используем обобщённый закон Гука для изотропного материала:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_r - \nu \cdot (\sigma_t + \sigma_z)] ;$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_z)] .$$

Получим:

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_t - \nu \cdot \left( \sigma_r + \underset{const}{\sigma_z} \right) \right] \cdot r \right\} - \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_r - \nu \cdot \left( \sigma_t + \underset{const}{\sigma_z} \right) \right] = 0 \\ \frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left\{ \left[ \sigma_t - \nu \cdot \left( \sigma_r + \underset{const}{\sigma_z} \right) \right] \cdot r \right\} - \left[ \sigma_r - \nu \cdot \left( \sigma_t + \underset{const}{\sigma_z} \right) \right] = 0 \\ \frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dr} \{ [\sigma_t - \nu \cdot \sigma_r] \cdot r \} - [\sigma_r - \nu \cdot \sigma_t] = 0 \\ \frac{d}{dr} (\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dr} \{ \sigma_t \cdot r \} - \nu \cdot \frac{d}{dr} \{ \sigma_r \cdot r \} - \sigma_r + \nu \cdot \sigma_t = 0 \\ \overbrace{\frac{d}{dr} (\sigma_r \cdot r) - \sigma_t}^{\nearrow} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dr} \{ \sigma_t \cdot r \} - \cancel{\nu \cdot \sigma_t} - \sigma_r + \cancel{\nu \cdot \sigma_t} = 0 \\ \frac{d}{dr} (\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = 0 \end{array} \right.$$

Таким образом, уравнение совместности деформаций и уравнение равновесия для произвольной точки нагруженного цилиндра, оба выраженные через напряжения, выглядят так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dr} \{ \sigma_t \cdot r \} - \sigma_r = 0 \\ \frac{d}{dr} (\sigma_r \cdot r) - \sigma_t = 0 \end{array} \right. \quad (XVI.8)$$

Решение системы уравнений (XVI.8):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_t &= A + \frac{B}{r^2} \end{aligned} \quad (XVI.9)$$

где

$A, B$  – константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

По формулам (XVI.9) вычисляются радиальное и окружное напряжения в слое радиусом  $r$  (см. рис. XVI.5.).

Формулы (XVI.9) чаще записываются в компактном виде:

$$\boxed{\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}} \quad (XVI.10)$$

Радиальное перемещение  $u$  точек слоя радиусом  $r$  находим через окружную деформацию по формуле (XVI.4):

$$\begin{aligned} u = \varepsilon_t \cdot r &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_z)] \cdot r = \\ &= \frac{r}{E} \cdot \left[ \left\{ A + \frac{B}{r^2} \right\} - \nu \cdot \left( \left\{ A - \frac{B}{r^2} \right\} + \sigma_z \right) \right] = \\ &= \frac{r}{E} \cdot \left[ A + \frac{B}{r^2} - \nu \cdot A + \nu \cdot \frac{B}{r^2} - \nu \cdot \sigma_z \right] = \\ &= \frac{1}{E} \cdot \left[ A \cdot (1 - \nu) \cdot r + B \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{1}{r} - \nu \cdot \sigma_z \cdot r \right] \end{aligned}$$

Итак:

$$\boxed{u = \frac{1}{E} \cdot \left[ A \cdot (1 - \nu) \cdot r + B \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{1}{r} - \nu \cdot \sigma_z \cdot r \right]} \quad (XVI.11)$$

г) Определение констант интегрирования::

Граничные условия (рис. XVI.9. ; при  $r_1$  и при  $r_2$  радиальные напряжения сжимающие, поэтому они отрицательные):

$$1) \ r=r_1: \ \sigma_r = -p_1 \Rightarrow -p_1 = A - \frac{B}{r_1^2}$$

$$2) \ r=r_2: \ \sigma_r = -p_2 \Rightarrow -p_2 = A - \frac{B}{r_2^2}$$

Из этих двух уравнений получаем две неизвестные:

$$A = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$B = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot (p_1 - p_2)$$

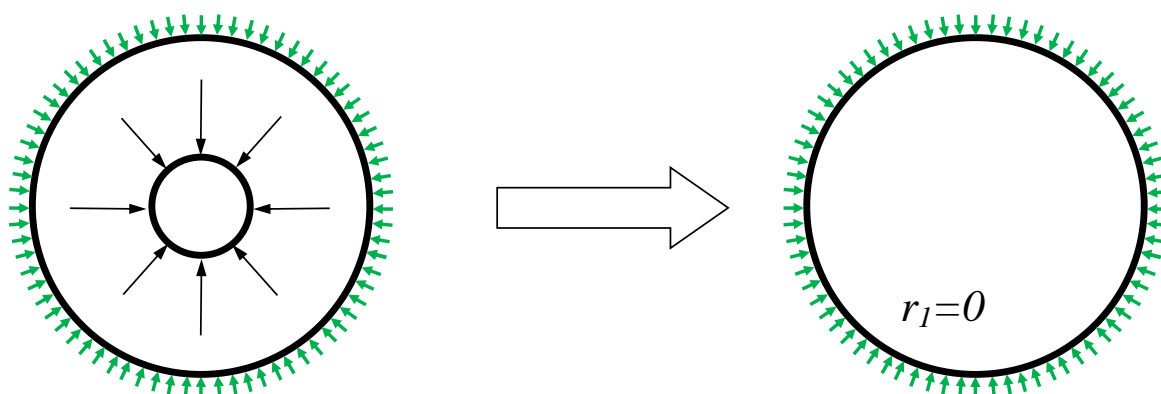
Тогда формулы (XVI.10) и (XVI.11) окончательно примут вид:

$$\sigma_r = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (XVI.12)$$

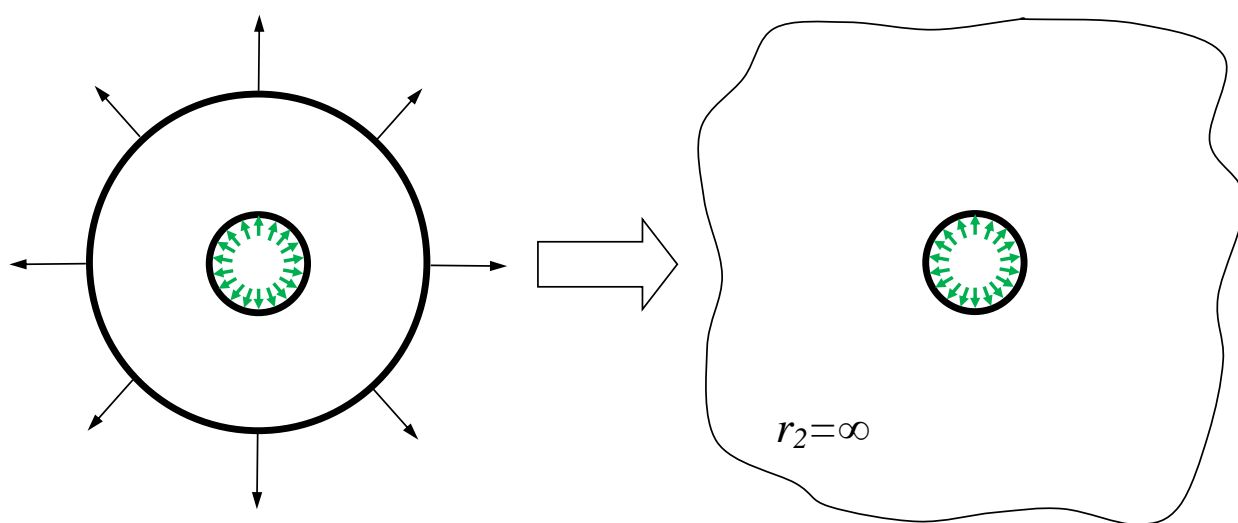
$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\nu \cdot \sigma_z \cdot r}{E} \quad (XVI.13)$$

*Примечание:*

Формулы Лямэ находят применение и в задачах, вроде бы, с трубами не связанных. Например, круглый штырь, нагруженный наружным давлением, можно рассматривать, как предельный случай: толстостенную трубу с нулевым внутренним радиусом



а плиту с отверстием, в котором действует давление - как другой предельный случай: толстостенную трубу с бесконечным наружным радиусом



Напряжения, порождённые давлением в отверстии, практически затухают уже на расстоянии пяти диаметров от его центра (*рис. XVI.18*), так что для инженера разницы нет между отверстием в бесконечной плите или отверстиями в реальной плите на таких расстояниях друг от друга.



Пример XVI.1 :

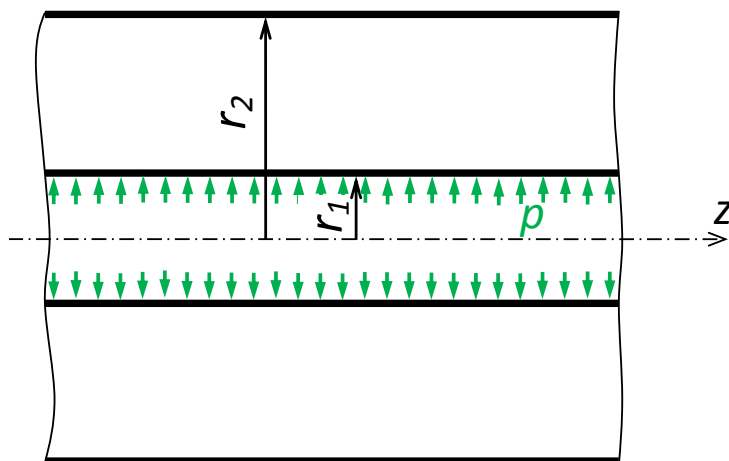


Рис. XVI.12.

Цилиндр под действием  
внутреннего давления:

Дано:

$$r_2 / r_1 = 3 ;$$

$$p_1 = p ;$$

$$\nu = 0,25 ;$$

$$\sigma_z = 0$$

Найти:

$$\sigma_r = ? , \sigma_t = ? , u = ? .$$

*Решение:*

Пользуемся формулами (XVI.12) и (XVI.13).  $p_2 = 0$ , значит:

Радиальное напряжение: 
$$\sigma_r = \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} ;$$

Внутри :  $r = r_1$  : 
$$\sigma_r^e = \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{p \cdot (r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} = -p ;$$

Снаружи:  $r = r_2$  : 
$$\sigma_r^H = \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 0 ;$$

Зависимость гиперболическая: 
$$\sigma_r \sim -\frac{1}{r^2} .$$

Окружное напряжение: 
$$\sigma_t = \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} ;$$

Внутри :  $r = r_1$  : 
$$\sigma_t^e = \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{p \cdot (r_1^2 + r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{5}{4} \cdot p ;$$

Снаружи:  $r = r_2$  : 
$$\sigma_t^H = \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{p \cdot 2 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{1}{4} \cdot p ;$$

Зависимость гиперболическая: 
$$\sigma_t \sim +\frac{1}{r^2} .$$

Радиальное перемещение:  $u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}$  ;

$$\begin{aligned} \text{Внутри : } r = r_1 : u^e &= \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r_1 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \\ &= \frac{p \cdot r_1}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot [(1-\nu) \cdot r_1^2 + (1+\nu) \cdot r_2^2] = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{E} \cdot r_1 \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Снаружи : } r = r_2 : u^h &= \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2}{r_2^2 - r_1^2} = \\ &= \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot [(1-\nu) + (1+\nu)] = \\ &= \frac{2 \cdot p_1 \cdot r_1^2 \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{E} \cdot r_1 \quad ; \end{aligned}$$

Зависимость гиперболическая :  $\sigma_t \sim r + \frac{1}{r}$  .

Эпюры напряжений и перемещений, построенные по произведенным расчётам выглядят так:

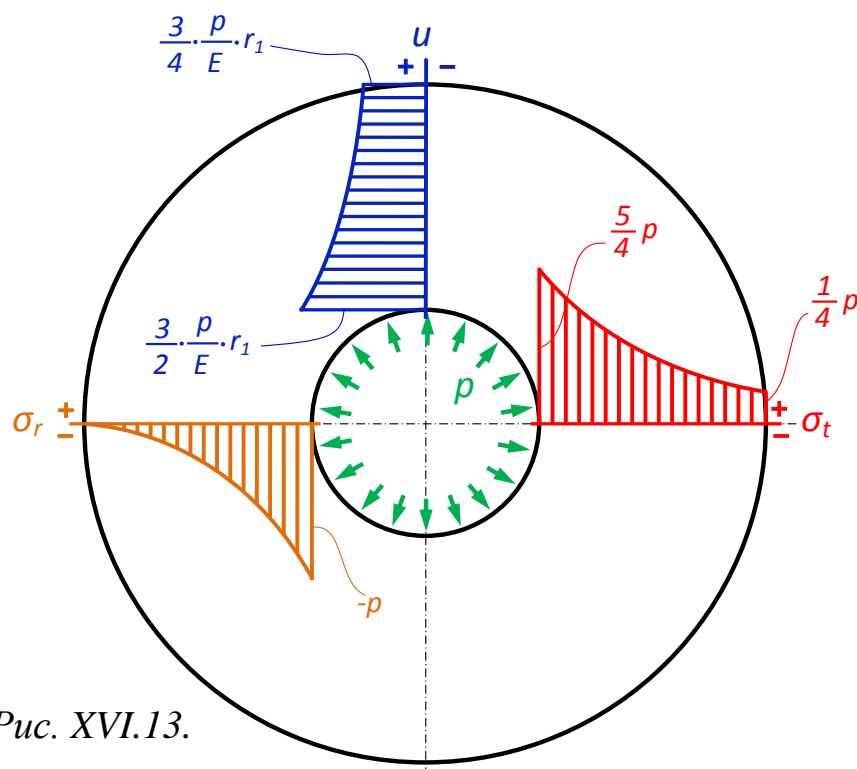


Рис. XVI.13.

Пример XVI.2 :

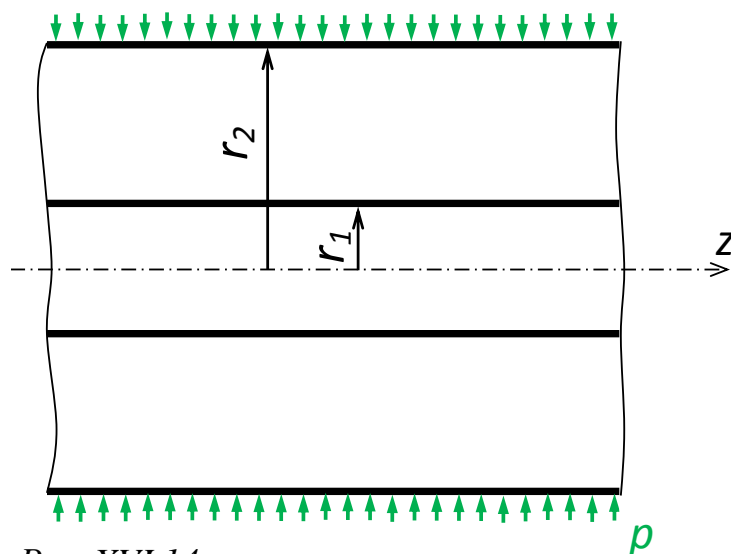


Рис. XVI.14.

Цилиндр под действием  
наружного давления:

Дано:

$$r_2 / r_1 = 3 ;$$

$$p_2 = p ;$$

$$\nu = 0,25 ;$$

$$\sigma_z = 0$$

Найти:

$$\sigma_r = ? , \sigma_t = ? , u = ? .$$

*Решение:*

Пользуемся формулами (XVI.12) и (XVI.13).  $p_1 = 0$ , значит:

Радиальное напряжение: 
$$\sigma_r = -\frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} ;$$

Внутри :  $r = r_1$  : 
$$\sigma_r^e = -\frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{p \cdot (r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} = 0 ;$$

Снаружи:  $r = r_2$  : 
$$\sigma_r^H = -\frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{p \cdot (r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} = -p ;$$

Зависимость гиперболическая: 
$$\sigma_r \sim +\frac{1}{r^2} .$$

Окружное напряжение: 
$$\sigma_t = -\frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} ;$$

Внутри :  $r = r_1$  : 
$$\sigma_t^e = -\frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{2 \cdot p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{9}{4} \cdot p ;$$

Снаружи:  $r = r_2$  : 
$$\sigma_t^H = -\frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p \cdot (r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{5}{4} \cdot p ;$$

Зависимость гиперболическая: 
$$\sigma_t \sim -\frac{1}{r^2} .$$

Радиальное перемещение:  $u = \frac{\nu - 1}{E} \cdot \frac{p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r - \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}$  ;

Внутри :  $r = r_1$  :  $u^e = \frac{\nu - 1}{E} \cdot \frac{p \cdot r_2^2 \cdot r_1}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r_1 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} =$   
 $= -\frac{2 \cdot p \cdot r_2^2 \cdot r_1}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} = -\frac{9}{4} \cdot \frac{p}{E} \cdot r_1$  ;

Снаружи :  $r = r_2$  :  $u^n = \frac{\nu - 1}{E} \cdot \frac{p \cdot r_2^3}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r_1^2 \cdot r_2}{r_2^2 - r_1^2} =$   
 $= \frac{p \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot [(\nu - 1) \cdot r_2^2 - (1 + \nu) \cdot r_1^2] =$   
 $= \frac{3 \cdot p \cdot r_1}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot [(\nu - 1) \cdot 9 \cdot r_1^2 - (1 + \nu) \cdot r_1^2] =$   
 $= \frac{6 \cdot p \cdot r_1^3}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot [4 \cdot \nu - 5] = -\frac{12}{4} \cdot \frac{p}{E} \cdot r_1$  ;

Зависимость гиперболическая :  $\sigma_t \sim r - \frac{1}{r}$  .

Эпюры напряжений и перемещений, построенные по произведенным расчётам выглядят так:

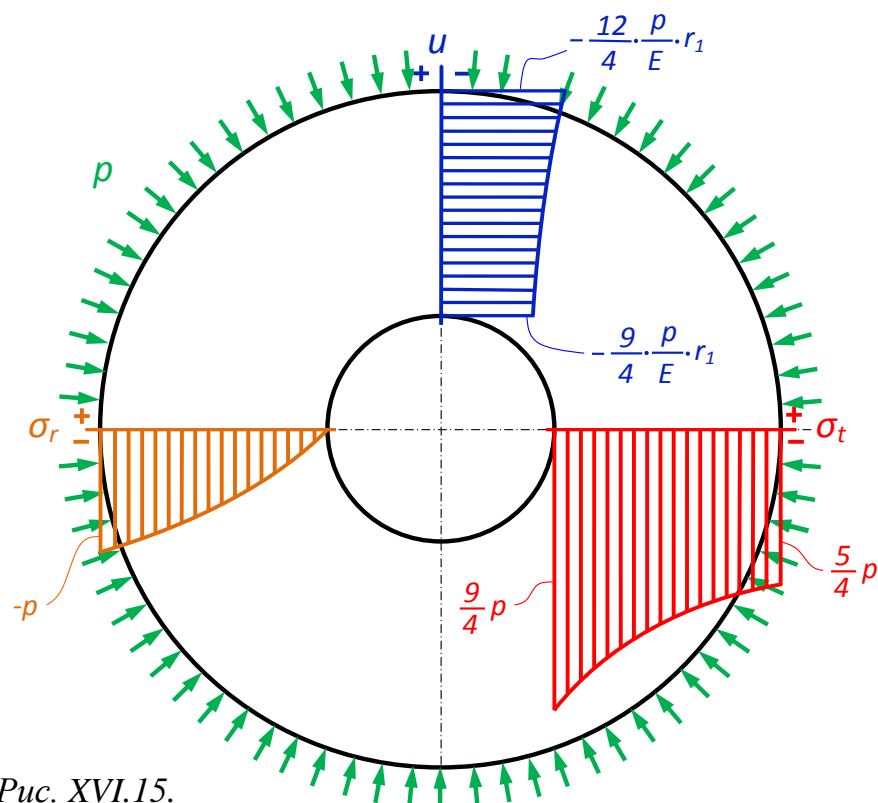


Рис. XVI.15.

Пример XVI.3 :

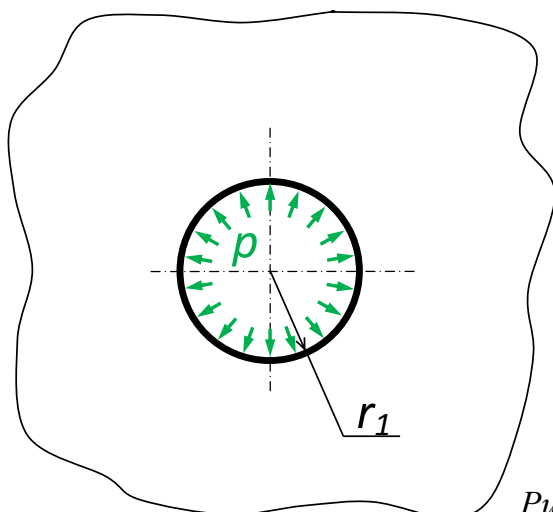


Рис. XVI.16.

Бесконечная плита под действием внутреннего давления:

Дано:

$$p_1 = p ;$$

$$\nu = 0,25 ;$$

Найти:

$$\sigma_r = ? , \sigma_t = ? , u = ? .$$

Решение:

$r_2 = \infty$ , значит воспользоваться формулами (XVI.12) и (XVI.13) в таком виде нельзя. Неопределённость получается. Преобразуем их:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \\ &= \frac{p_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - p_2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \mp \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \cdot \frac{1}{r^2} ; \end{aligned} \quad (XV.14)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\nu \cdot \sigma_z \cdot r}{E} = \\ &= \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - p_2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\nu \cdot \sigma_z \cdot r}{E} ; \end{aligned} \quad (XVI.15)$$

$p_2 = 0$ , значит:

Радиальное напряжение: 
$$\sigma_r = \frac{p \cdot \left(\frac{r_l}{\infty}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_l}{\infty}\right)^2} - \frac{p \cdot r_l^2}{1 - \left(\frac{r}{\infty}\right)^2} \cdot \frac{1}{r^2} = -p \cdot \left(\frac{r_l}{r}\right)^2 ;$$

У края отверстия:  $r = r_l : \sigma_r^e = -p ;$

На удалении пяти диаметров:  $r = 10 \cdot r_l : \sigma_r^{5d} = -\frac{p}{100} = 1\% \cdot \sigma_r^e ;$

Зависимость гиперболическая:  $\sigma_r \sim \frac{1}{r^2} .$

Окружное напряжение: 
$$\sigma_t = +p \cdot \left(\frac{r_l}{r}\right)^2 .$$

Плоское ( $\sigma_z=0$ ) напряжённое состояние, при котором на гранях элементарного объёма, выделенного в окрестности исследуемой точки, появляются равные по модулю и противоположные по знаку нормальные напряжения называется *чистым сдвигом* (см. конспект [«Кручение»](#), стр. 13). При «повороте» объёма на  $45^\circ$  на его гранях пропадают нормальные напряжения, появляются такие же по модулю касательные (рис. XVI.17.).

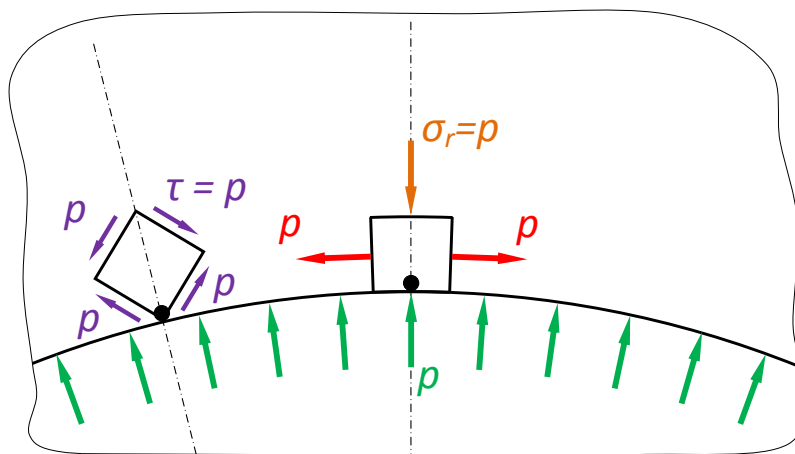


Рис. XVI.17.

Получается, точки плиты с отверстием пребывают в том же напряжённом состоянии, что и точки скручиваемого стержня круглого поперечного сечения. Только в стержне интенсивность касательных напряжений линейно падает от максимума на краю *поперечного сечения* до нуля в его центре, а в

плите падает по гиперболическому закону от максимума на краю *отверстия* до нуля на бесконечном от него расстоянии.

Радиальное перемещение:

$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p_1 \cdot \left(\frac{r_1}{\infty}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{\infty}\right)^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2}{1 - \left(\frac{r_1}{\infty}\right)^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{5 \cdot p}{4 \cdot E} \cdot r_1^2 \cdot \frac{1}{r} ;$$

На краю отверстия :  $r = r_1 : u^s = +\frac{5}{4} \cdot \frac{p}{E} \cdot r_1$

На удалении пяти диаметров :  $r = 10 \cdot r_1 :$

$$u^{5d} = +\frac{5}{4} \cdot \frac{p}{E} \cdot r_1^2 \cdot \frac{1}{10 \cdot r_1} = \frac{5}{40} \cdot \frac{p}{E} \cdot r_1 = 10\% \cdot u^s$$

Зависимость гиперболическая :  $\sigma_t \sim +\frac{1}{r}$

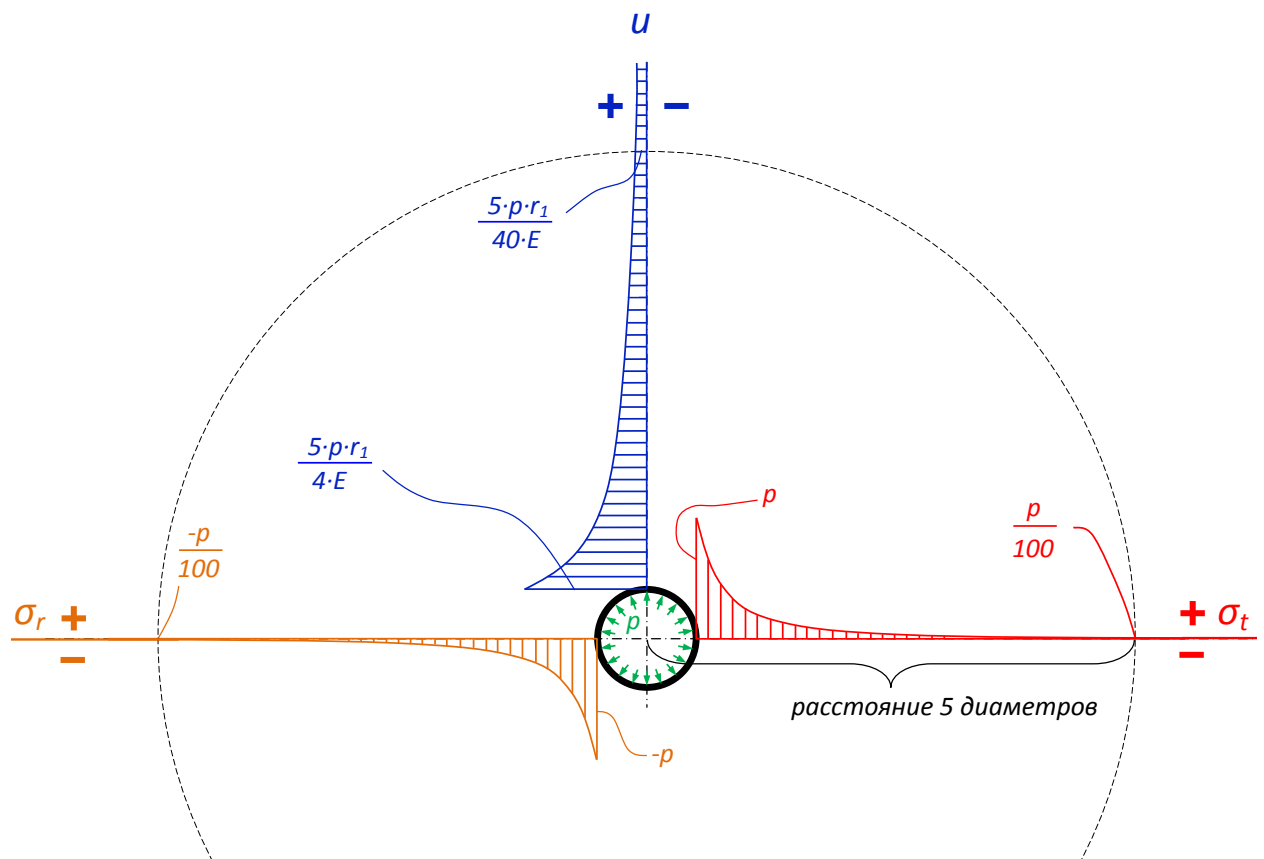
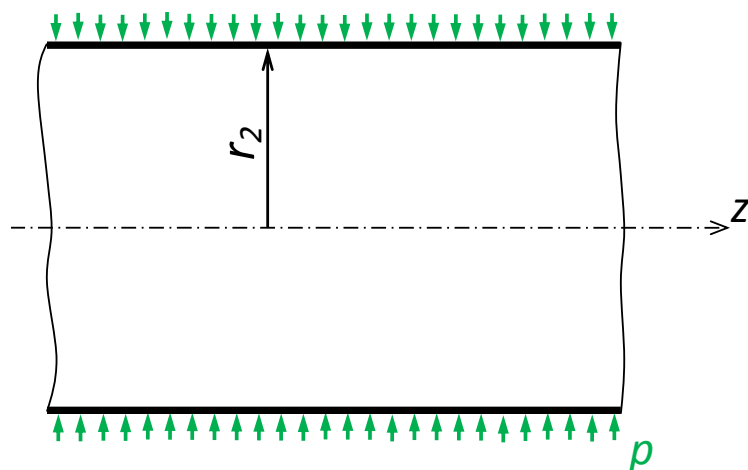


Рис. XVI.18.

Пример XVI.4 :



Вал, нагруженный давлением:

Дано:

$$p_2 = p ;$$

$$\nu = 0,25 ;$$

$$\sigma_z = 0$$

Найти:

$$\sigma_r = ? , \sigma_t = ? , u = ? .$$

Рис. XVI.19.

Решение:

Пользуемся формулами (XVI.12) и (XVI.13).  $p_1 = 0, r_1 = 0$ , значит:

Радиальное напряжение:  $\sigma_r = -p ;$

Окружное напряжение:  $\sigma_t = -p ;$

Радиальное перемещение:  $u = -(1 - \nu) \cdot \frac{p}{E} \cdot r$

Эпюры напряжений и перемещений выглядят так:

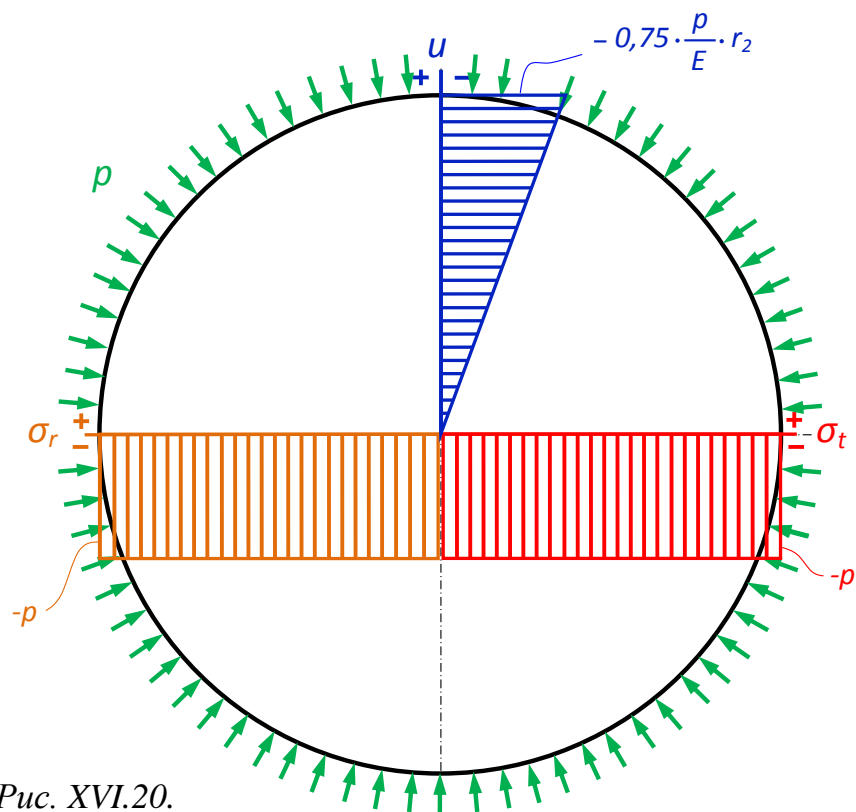


Рис. XVI.20.



### Примечание:

Равенство друг другу двух главных напряжений в любой точке вала, сжатого давлением по боковой поверхности, говорит о том, что такое же точно напряжение  $-p$  будет действовать в любой его точке на любой площадке, параллельной оси вала:

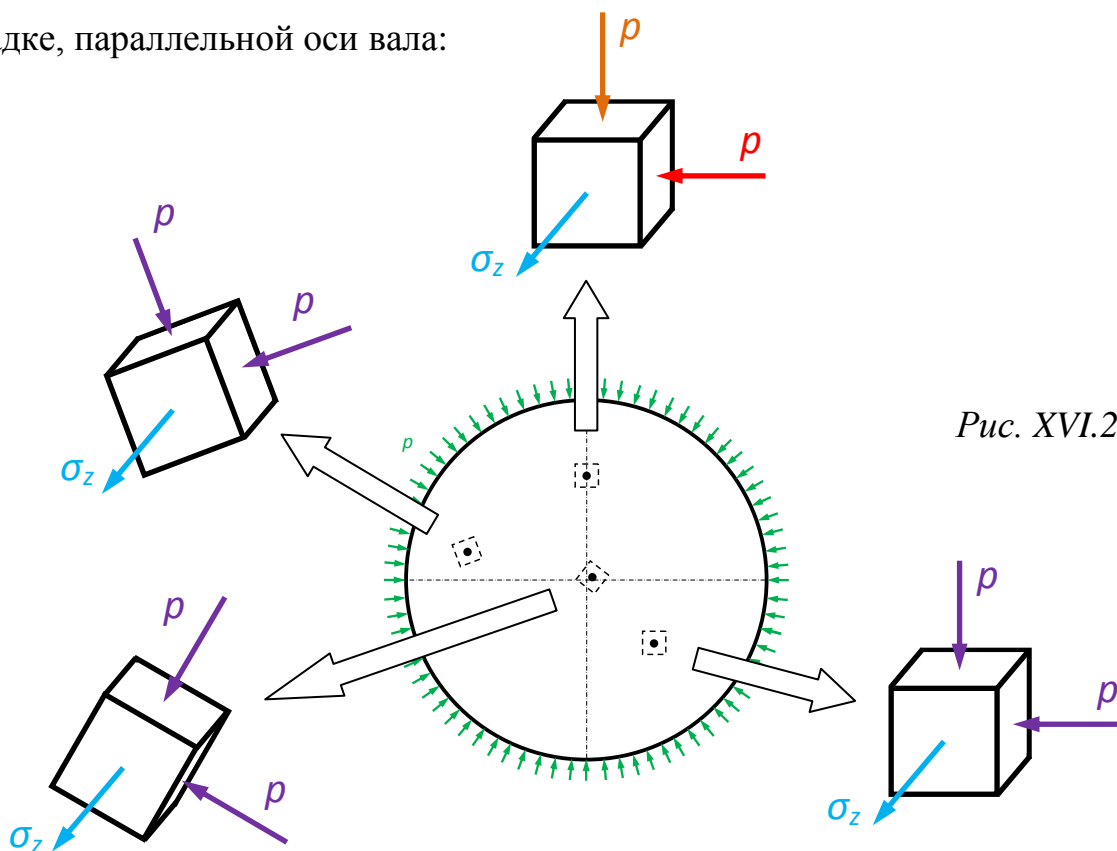


Рис. XVI.21.

Эллипсоид напряжений в любой точке вала представляет собой тело вращения (рис. IX.8), длиной  $2 \cdot \sigma_z$ . Если осевое напряжение отсутствует ( $\sigma_z = 0$ ), эллипсоид вырождается в окружность на плоскости 2-3.

В том случае, когда осевое напряжение тоже сжимающее и равно по модулю  $\sigma_z = -p$ , напряжённым состоянием точек вала будет всестороннее сжатие (рис. IX.9., рис. IX.16.б) и ориентация в пространстве элементарного объёма, выделенного в окрестности произвольной точки вала, вообще не имеет значения: на всех его гранях будет одно и то же сжимающее напряжение  $-p$ :

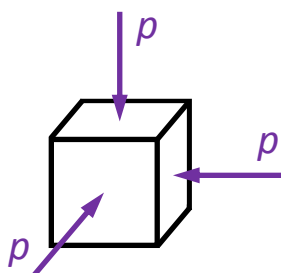


Рис. XVI.22.

Пример **XVI.5** :

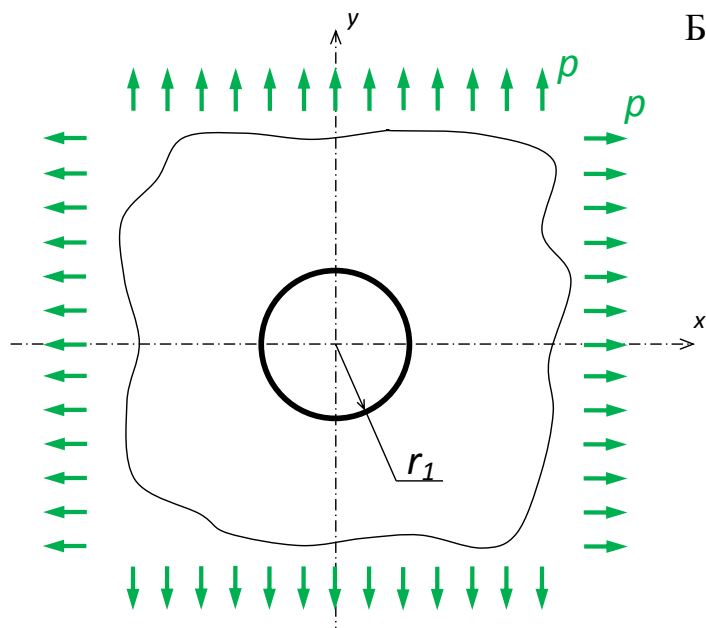


Рис. XVI.23.

Бесконечная равномерно растянутая  
плита с отверстием:

Дано:

$$\sigma_x = \sigma_y = p ;$$

$$\nu = 0,25 ;$$

Найти:

$$\sigma_r = ? ,$$

$$\sigma_t = ? ,$$

$$u = ? .$$

*Решение:*

Каким образом в плите создаётся равномерное растяжение (плоское, в нашем случае  $\sigma_z = 0$ ) совершенно неважно. В любой площадке, перпендикулярной плоскости равномерно растянутой плиты без отверстия, напряжение будет равно  $+p$  (рис. XVI.24.). Эквивалентное (например, по

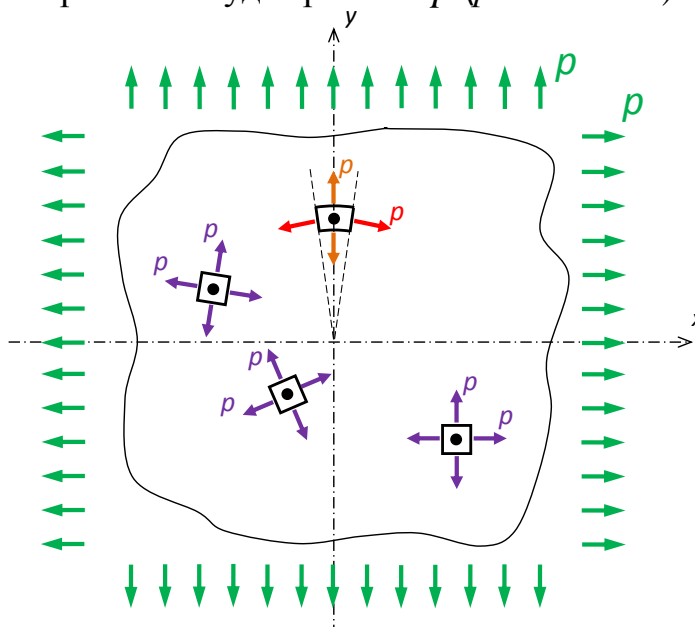


Рис. XVI.24.

теории максимального касательного напряжения) напряжение в точках плиты без отверстия назовём

номинальным:

$$\sigma_1 = p ;$$

$$\sigma_2 = p ;$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = 0 .$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{НОМ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = p ;$$

А с отверстием (рис. XVI.23.)?

Воспользуемся формулами (XVI.14) и (XVI.15) при  $p_1 = 0$ ,  $r_2 = \infty$ , и  $p_2 = -p$ :

$$\sigma_r = -p_2 + p_2 \cdot \frac{r_1^2}{r^2} = p \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] ;$$

У края отверстия:  $r = r_1 : \sigma_r^e = 0 ;$

На удалении пяти диаметров:  $r = 10 \cdot r_1 : \sigma_r^{5d} = \frac{99}{100} \cdot p = 99\% \cdot \sigma_r^e ;$

Зависимость гиперболическая:  $\sigma_r \sim +1 - \frac{1}{r^2} .$

$$\sigma_t = -p_2 - p_2 \cdot \frac{r_1^2}{r^2} = p \cdot \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] ;$$

У края отверстия:  $r = r_1 : \sigma_r^e = 2 \cdot p ;$

На удалении пяти диаметров:  $r = 10 \cdot r_1 : \sigma_r^{5d} = \frac{101}{100} \cdot p = 101\% \cdot \sigma_r^e ;$

Зависимость гиперболическая:  $\sigma_r \sim +1 + \frac{1}{r^2} .$

$$u = -\frac{1-\nu}{E} \cdot p_2 \cdot r - \frac{1+\nu}{E} \cdot p_2 \cdot \frac{r_1^2}{r} = \frac{p}{E} \cdot \left[ 0,75 \cdot r + 1,25 \cdot \frac{r_1^2}{r} \right] ;$$

На краю отверстия :  $r = r_1 : u^e = +2 \cdot \frac{p}{E} \cdot r_1$

На удалении пяти диаметров :  $r = 10 \cdot r_1 : u^{5d} = +7,625 \cdot \frac{p}{E} \cdot r_1$

Зависимость гиперболическая :  $\sigma_t \sim +r + \frac{1}{r}$



Примечание:

Примеры XVI.3 и XVI.5 наглядно показывают, что упрочнять трубу только путём увеличения толщины её стенки можно лишь до некоторого предела. Даже при бесконечно большой толщине стенки эквивалентное напряжение будет равно  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}} = 2 \cdot p$ , не важно, внутреннее это давление или внешнее.

## Составные трубы

*Общие сведения:*

Увеличением толщины стенки можно понизить максимальное эквивалентное напряжение в трубе только до  $2 \cdot p$ . А, если даже это значение превышает  $\sigma_{02}$  материала трубы? Менять материал? Более прочный, как правило, более дорогой. Кроме того, толщина стенки  $\leftrightarrow$  вес конструкции.

Примеры [XVI.1](#) и [XVI.3](#) расчёта трубы, нагруженной внутренним давлением, показывают значительную неравномерность распределения напряжений по её слоям: во внутренних слоях напряжения больше, во внешних слоях напряжения растут медленнее.

Что, если заранее создать растягивающие окружные напряжения в наружных слоях (рис. XVI.26а.)? Тогда они контактным давлением  $p_k$  (б) сожмут слои внутренние (в.). Конструкция готова к нагружению. При нагружении возрастающее внутреннее давление  $p$  сначала уменьшит растягивающие напряжения во внутренних слоях (г), потом разгрузит внутренние слои (д) и только потом нагрузит их растяжением (е). При этом, возрастающее давление  $p$  также будет догружать внешние слои, но, как уже указывалось, напряжения во внутренних слоях растут медленно.

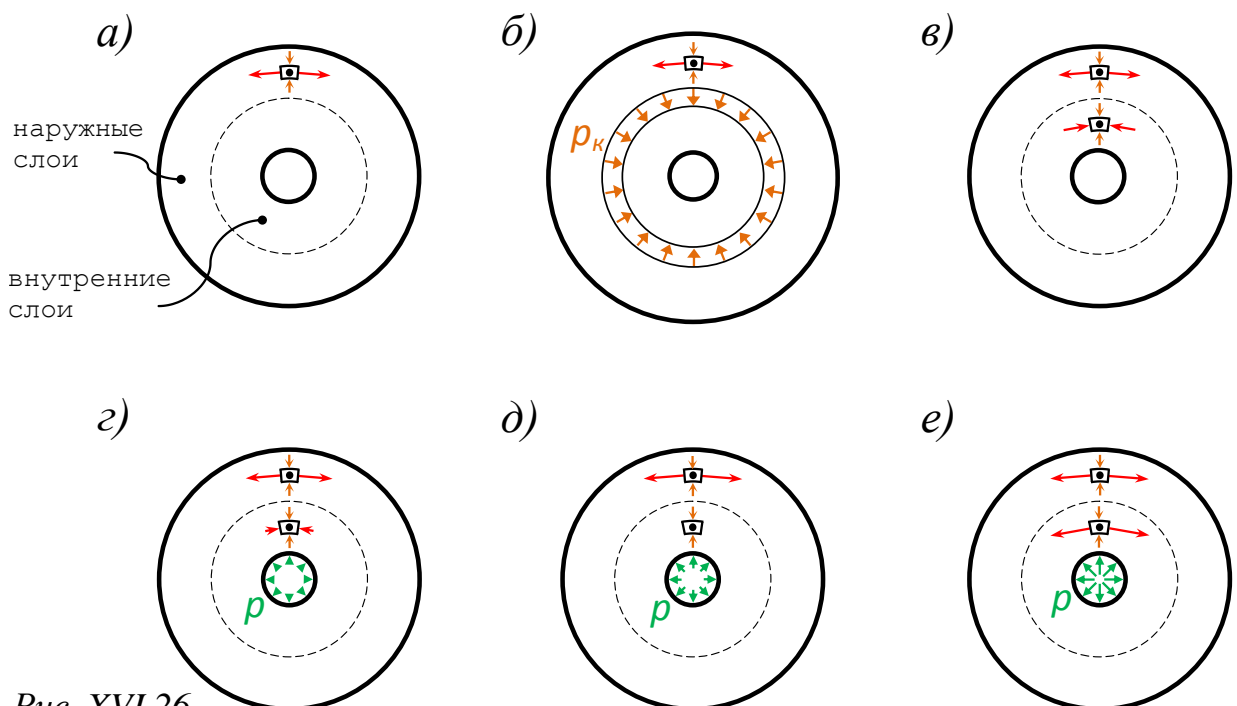


Рис. XVI.26.

Таким образом мы заставляем материал конструкции работать эффективно: интенсивнее задействуем в задаче по удержанию внутреннего давления наружные частицы трубы, за счёт этого разгружаем частицы внутренние. Равномернее распределяя окружное напряжение по продольным сечениям, мы уменьшаем его пиковое значение.

Можно рассчитать функцию окружных напряжений  $\sigma_t(r)$  предварительное создание которых в слоях трубы даст наилучший эффект. Однако задача создания в каждом бесконечно тонком слое трубы своё, наперёд рассчитанное окружное напряжение при сегодняшнем уровне техники практически невыполнима.

Выбирают нечто среднее между теоретическим оптимумом и практической простотой реализации: берут две трубы разных диаметров и надевают одну на другую.

Для того, чтобы получился эффект растянутости слоёв наружной трубы и сжатости слоёв трубы внутренней (рис. XVI.26е.), сопрягаемые радиусы труб подбирают с некоторым натягом  $\Delta$ . Наружную трубу нагревают, внутреннюю – охлаждают и надевают друг на друга. После выравнивания температур создаётся требуемое напряжённое состояние (рис. XVI.27.).

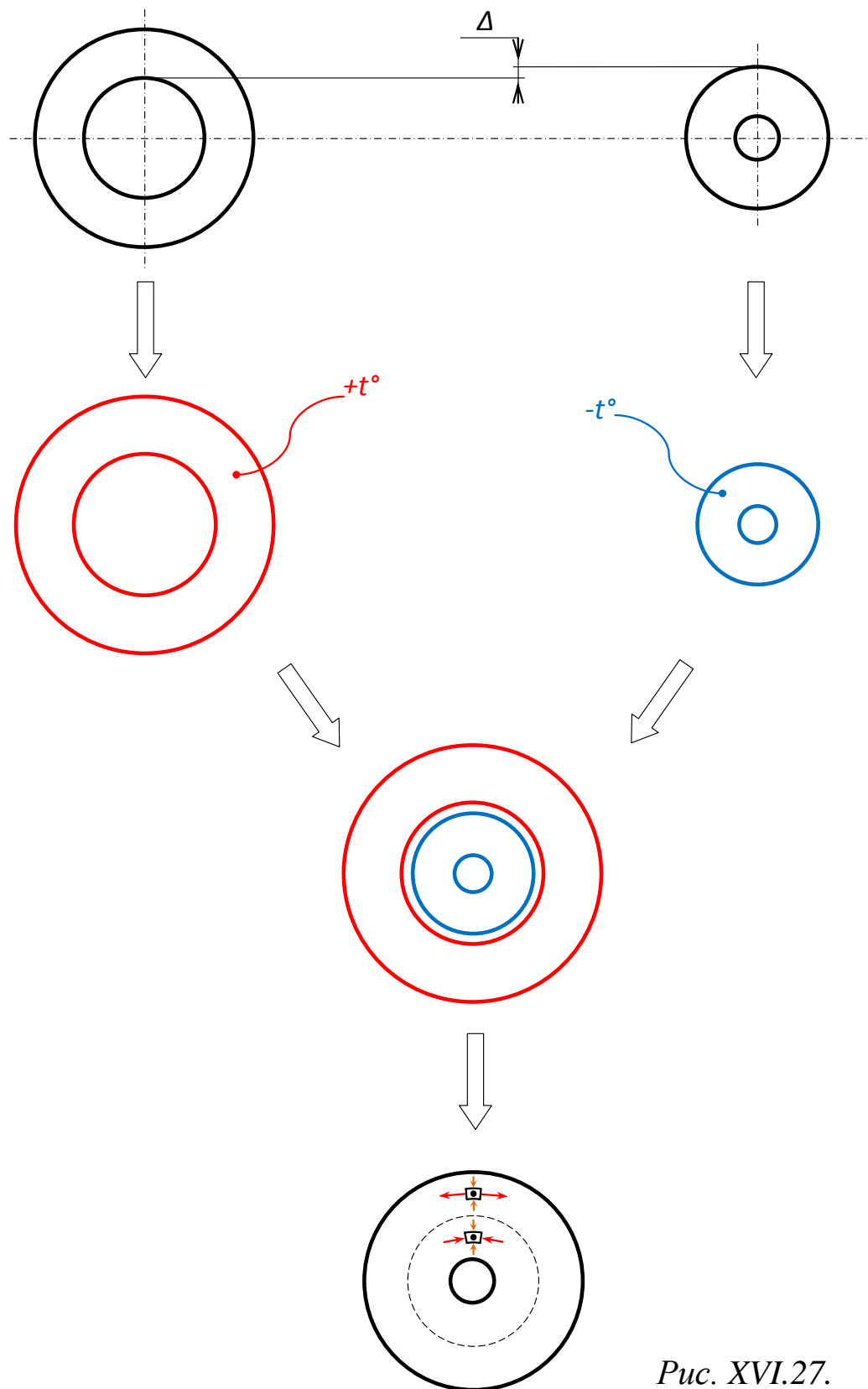


Рис. XVI.27.



Расчёты:

Для начала выведем зависимость между первоначальным натягом  $\Delta$  (рис. XVI.27.) и контактным давлением  $p_k$  (рис. XVI.26б.):

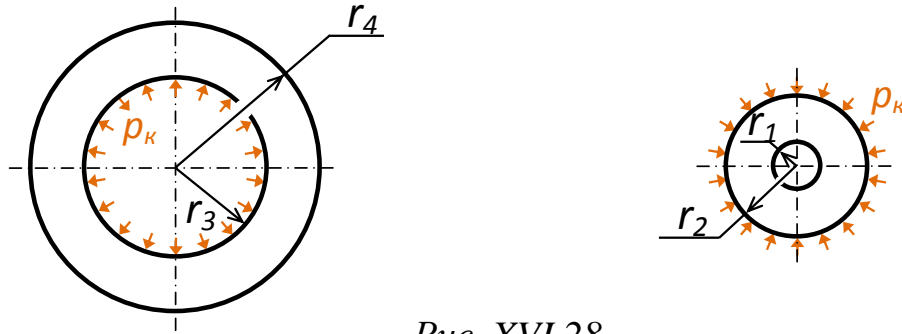


Рис. XVI.28.

Предположим, что цилиндры изготовлены из одного и того же материала, модули упругости  $E$  и коэффициенты Пуассона  $\nu$  у них одинаковы.

Радиальное перемещение (оно положительное – поверхность смещается наружу) внутреннего слоя наружного цилиндра под действием контактного давления возьмём из примера [XVI.1](#) :

$$u^{вн} = \frac{p_k \cdot r_3}{E \cdot (r_4^2 - r_3^2)} \cdot \left[ (1 - \nu) \cdot r_3^2 + (1 + \nu) \cdot r_4^2 \right] \quad (XV.16)$$

Радиальное перемещение (оно отрицательное – поверхность смещается вовнутрь) наружного слоя внутреннего цилиндра под действием контактного давления возьмём из примера [XVI.2](#) :

$$\begin{aligned} u^{нв} &= \frac{p_k \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot \left[ (\nu - 1) \cdot r_2^2 - (1 + \nu) \cdot r_1^2 \right] = \\ &= -\frac{p_k \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot \left[ (1 - \nu) \cdot r_2^2 + (1 + \nu) \cdot r_1^2 \right] \end{aligned} \quad (XV.17)$$

После посадки поверхности совпадают, значит сумма перемещений будет равна натягу:

$$u^{вн} + |u^{нв}| = \Delta \quad (XV.18)$$

$$\frac{P_{\kappa} \cdot r_3}{E \cdot (r_4^2 - r_3^2)} \cdot [(1 - \nu) \cdot r_3^2 + (1 + \nu) \cdot r_4^2] +$$

$$+ \frac{P_{\kappa} \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_l^2)} \cdot [(1 - \nu) \cdot r_2^2 + (1 + \nu) \cdot r_l^2] = \Delta$$

$$\frac{(1 - \nu) \cdot r_3^3 + (1 + \nu) \cdot r_4^2 \cdot r_3}{(r_4^2 - r_3^2)} + \frac{(1 - \nu) \cdot r_2^3 + (1 + \nu) \cdot r_l^2 \cdot r_2}{(r_2^2 - r_l^2)} = \frac{\Delta \cdot E}{P_{\kappa}}$$

$$\frac{(1 - \nu) \cdot r_3^3 + (1 + \nu) \cdot r_4^2 \cdot [r_2 - \Delta]}{(r_4^2 - [r_2 - \Delta]^2)} + \frac{(1 - \nu) \cdot r_2^3 + (1 + \nu) \cdot r_l^2 \cdot r_2}{(r_2^2 - r_l^2)} = \frac{\Delta \cdot E}{P_{\kappa}}$$

Металл – материал жёсткий, за то и ценится. Большие упругие напряжения приводят к совершенно незаметным перемещениям точек конструкции (пружины сейчас не рассматриваем). И, наоборот, для создания больших напряжений достаточно ничтожно малых натягов (микроны):

$$\Delta \ll r_2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(1 - \nu) \cdot r_2^3 + (1 + \nu) \cdot r_4^2 \cdot r_2}{(r_4^2 - r_2^2)} + \frac{(1 - \nu) \cdot r_2^3 + (1 + \nu) \cdot r_l^2 \cdot r_2}{(r_2^2 - r_l^2)} = \frac{\Delta \cdot E}{P_{\kappa}}$$

$$(r_2^2 - r_l^2) \cdot [(1 - \nu) \cdot r_2^3 + (1 + \nu) \cdot r_4^2 \cdot r_2] + (r_4^2 - r_2^2) \cdot [(1 - \nu) \cdot r_2^3 + (1 + \nu) \cdot r_l^2 \cdot r_2] =$$

$$= \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_4^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_l^2)}{P_{\kappa}}$$

$$\cancel{(1 - \nu) \cdot r_2^5} + (1 + \nu) \cdot r_4^2 \cdot r_2^3 - (1 - \nu) \cdot r_2^3 \cdot r_l^2 - \cancel{(1 + \nu) \cdot r_4^2 \cdot r_2 \cdot r_l^2} +$$

$$+ (1 - \nu) \cdot r_2^3 \cdot r_4^2 + \cancel{(1 + \nu) \cdot r_l^2 \cdot r_2 \cdot r_4^2} - \cancel{(1 - \nu) \cdot r_2^5} - (1 + \nu) \cdot r_l^2 \cdot r_2^3 =$$

$$= \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_4^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_l^2)}{P_{\kappa}}$$

$$(1 + \nu) \cdot r_4^2 \cdot r_2^3 - (1 - \nu) \cdot r_2^3 \cdot r_1^2 + (1 - \nu) \cdot r_2^3 \cdot r_4^2 - (1 + \nu) \cdot r_1^2 \cdot r_2^3 =$$

$$= \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_4^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{p_k}$$

$$r_4^2 \cdot r_2^3 + \cancel{\nu \cdot r_4^2 \cdot r_2^3} - r_2^3 \cdot r_1^2 + \cancel{\nu \cdot r_2^3 \cdot r_1^2} + r_2^3 \cdot r_4^2 - \cancel{\nu \cdot r_2^3 \cdot r_4^2} - r_1^2 \cdot r_2^3 - \cancel{\nu \cdot r_1^2 \cdot r_2^3} =$$

$$= \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_4^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{p_k}$$

$$2 \cdot r_4^2 \cdot r_2^3 - 2 \cdot r_2^3 \cdot r_1^2 = \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_4^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{p_k}$$

Таким образом, зависимость контактного давления  $p_k$  между цилиндрами от натяга  $\Delta$  с которым они насаживаются друг на друга, имеет вид:

$$p_k = \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_4^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{2 \cdot r_2^3 \cdot (r_4^2 - r_1^2)} \quad (XV.19)$$

При этом в ещё ненагруженной трубе возникают напряжения, показанные на *рис. XVI.29а*.

При нагружении составной трубы внутренним давлением  $p$  оба цилиндра работают, как единое целое и на первоначальные напряжения (*рис. XVI.29а*.) накладываются напряжения, от внутреннего давления (*рис. XVI.29б*.). Получается картина напряжений, показанная на *рис. XVI.29в*.

Задача конструктора – подобрать такой натяг  $\Delta$ , чтобы конструкция была по возможности *равнопрочной*. В данном случае это означает: эквивалентные напряжения в наиболее нагруженных (внутренних) слоях внутреннего и наружного цилиндров должны быть равны между собой: эквивалентное напряжение в точке *A* должно быть равно эквивалентному напряжению в точке *B* (*рис. XVI.29в*.).

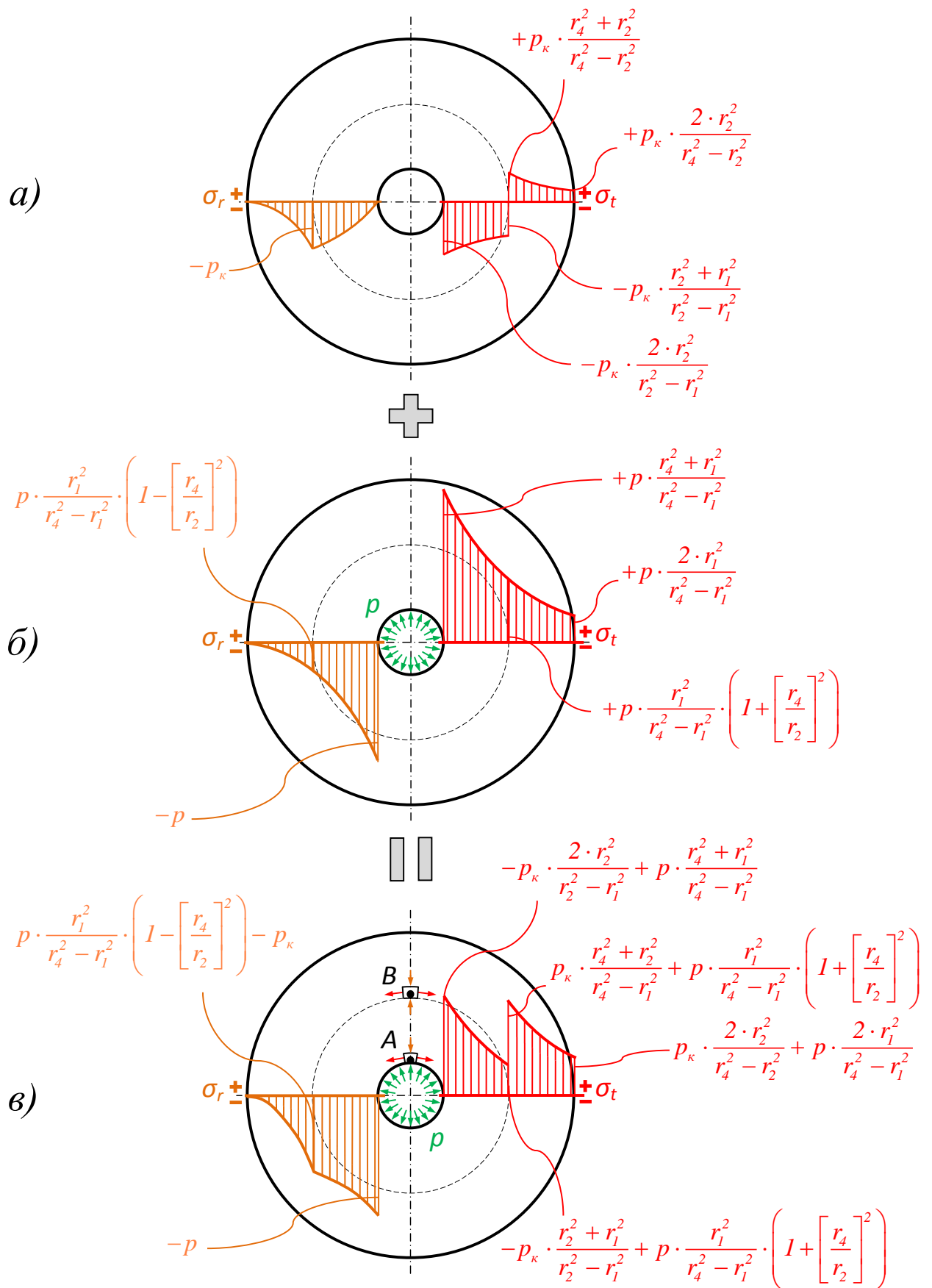
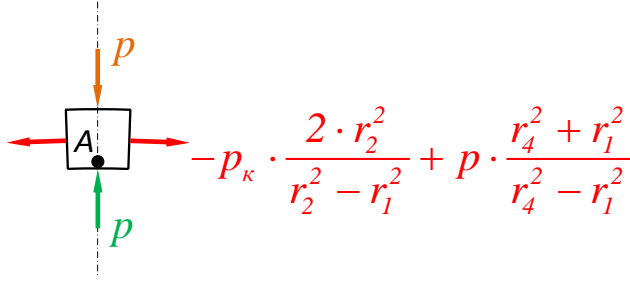


Рис. XVI.29.

Расчёт а) выполнен по схемам рисунка. XVI.28. и формулам примеров

[XVI.1](#) и [XVI.2](#), с допущением:  $r_3 \approx r_2$ .

Точка А:



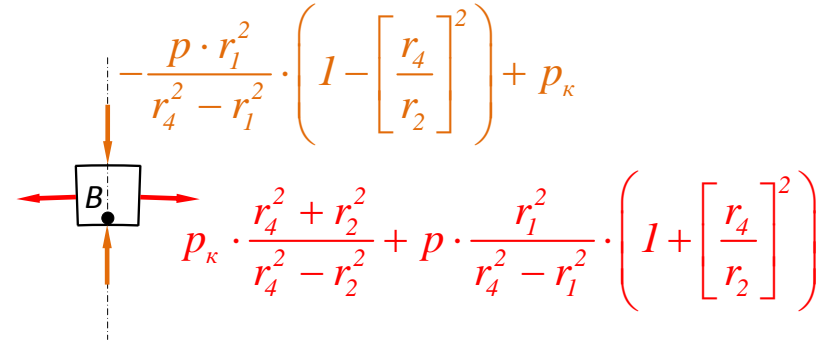
$$\sigma_1 = \sigma_t = p \cdot \frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} - p_\kappa \cdot \frac{2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = -p$$

$$\sigma_{\text{эКВ}}^A = \sigma_1 - \sigma_3 = p \cdot \frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} - p_\kappa \cdot \frac{2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p \quad (\text{XV.20})$$

Точка В:



$$\sigma_1 = \sigma_t = p \cdot \frac{r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \cdot \left( 1 + \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right) + p_\kappa \cdot \frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_2^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = \frac{p \cdot r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \cdot \left( 1 - \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right) - p_\kappa$$

$$\sigma_{\text{эКВ}}^B = \sigma_1 - \sigma_3 = p \cdot \frac{r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \cdot \left( 1 + \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right) + p_\kappa \cdot \frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_2^2} -$$

$$- p \cdot \frac{r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \cdot \left( 1 - \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right) + p_\kappa \quad (\text{XV.21})$$

Условие равнопрочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^A = \sigma_{\text{ЭКВ}}^B$$

$$\begin{aligned}
 & p \cdot \frac{r_4^2 + r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} - p_{\kappa} \cdot \frac{2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_l^2} + p = \\
 & = p \cdot \frac{r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} \cdot \left( 1 + \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right) + p_{\kappa} \cdot \frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_2^2} - p \cdot \frac{r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} \cdot \left( 1 - \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right) + p_{\kappa} \\
 & p \cdot \left\{ \frac{r_4^2 + r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} + 1 - \frac{r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} \cdot \left( 1 + \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right) + \frac{r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} \cdot \left( 1 - \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right) \right\} = \\
 & = p_{\kappa} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_l^2} + \frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_2^2} + 1 \right\} \\
 & \frac{p}{r_4^2 - r_l^2} \cdot \left\{ r_4^2 + \cancel{r_l^2} + r_4^2 - \cancel{r_l^2} - \cancel{r_l^2} - r_l^2 \cdot \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 + \cancel{r_l^2} - r_l^2 \cdot \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right\} = \\
 & = p_{\kappa} \cdot \left\{ \frac{r_4^2 + \cancel{r_l^2}}{r_4^2 - r_l^2} + \frac{2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_l^2} + \frac{r_4^2 - \cancel{r_l^2}}{r_4^2 - r_2^2} \right\} \\
 & \frac{\cancel{r_l^2} \cdot p}{r_4^2 - r_l^2} \cdot \left\{ r_4^2 - r_l^2 \cdot \left[ \frac{r_4}{r_2} \right]^2 \right\} = \cancel{r_l^2} \cdot p_{\kappa} \cdot \left\{ \frac{r_4^2}{r_4^2 - r_2^2} + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_l^2} \right\} \\
 & p \cdot \frac{r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2)}{r_2^2 \cdot (r_4^2 - r_l^2)} = p_{\kappa} \cdot \left\{ \frac{r_4^2}{r_4^2 - r_2^2} + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_l^2} \right\} \\
 & p \cdot \frac{r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2)}{r_2^2 \cdot (\cancel{r_4^2 - r_l^2})} = \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_4^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_l^2)}{2 \cdot r_2^3 \cdot (\cancel{r_4^2 - r_l^2})} \cdot \left\{ \frac{r_4^2}{r_4^2 - r_2^2} + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_l^2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$p \cdot \frac{r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2)}{r_2^2} = \frac{\Delta \cdot E \cdot \cancel{(r_4^2 - r_2^2)} \cdot \cancel{(r_2^2 - r_l^2)}}{2 \cdot r_2^3} \cdot \frac{r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2) + r_2^2 \cdot (r_4^2 - r_2^2)}{\cancel{(r_4^2 - r_2^2)} \cdot \cancel{(r_2^2 - r_l^2)}}$$

Таким образом, предварительный натяг, обеспечивающий максимально возможную степень равнопрочности конструкции, вычисляется по формуле:

$$\Delta = p \cdot \frac{2 \cdot r_2 \cdot r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2)}{E \cdot [r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2) + r_2^2 \cdot (r_4^2 - r_2^2)]} \quad (\text{XV.22})$$

Попробуем обеспечить минимум эквивалентного напряжения в опасных точках равнопрочной конструкции А и В (рис. XVI.29.). Например, воспользуемся формулой (XV.20):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}}^A &= p \cdot \frac{r_4^2 + r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} - p_{\kappa} \cdot \frac{2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_l^2} + p = \\ &= p \cdot \frac{r_4^2 + r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} - \Delta \cdot \frac{E \cdot (r_4^2 - r_2^2) \cdot \cancel{(r_2^2 - r_l^2)}}{\cancel{\mathbb{X}} \cdot r_2^{\cancel{\mathbb{X}}} \cdot (r_4^2 - r_l^2)} \cdot \frac{\cancel{\mathbb{X}} \cdot \cancel{r_2^2}}{\cancel{r_2^2 - r_l^2}} + p = \\ &= p \cdot \frac{r_4^2 + r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} - \Delta \cdot \frac{E \cdot (r_4^2 - r_2^2)}{r_2 \cdot (r_4^2 - r_l^2)} + p = \\ &= p \cdot \frac{r_4^2 + r_l^2}{r_4^2 - r_l^2} - p \cdot \frac{2 \cdot \cancel{\pi}_2 \cdot r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2)}{\cancel{\mathbb{X}} \cdot [r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2) + r_2^2 \cdot (r_4^2 - r_2^2)]} \cdot \frac{\cancel{\mathbb{X}} \cdot (r_4^2 - r_2^2)}{\cancel{\pi}_2 \cdot (r_4^2 - r_l^2)} + p = \\ &= \frac{p}{r_4^2 - r_l^2} \cdot \left\{ r_4^2 + \cancel{r_l^2} - \frac{2 \cdot r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2) \cdot (r_4^2 - r_2^2)}{[r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2) + r_2^2 \cdot (r_4^2 - r_2^2)]} + r_4^2 - \cancel{r_l^2} \right\} = \\ &= p \cdot \frac{2 \cdot r_4^2}{r_4^2 - r_l^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{(r_2^2 - r_l^2) \cdot (r_4^2 - r_2^2)}{[r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_l^2) + r_2^2 \cdot (r_4^2 - r_2^2)]} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p \cdot \frac{2 \cdot r_4^2}{r_4^2 - r_1^2} \cdot \left\{ \frac{r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_1^2) + r_2^2 \cdot (r_4^2 - r_2^2) - (r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_4^2 - r_2^2)}{r_4^2 \cdot (r_2^2 - r_1^2) + r_2^2 \cdot (r_4^2 - r_2^2)} \right\} = \\
&= p \cdot \frac{2 \cdot r_4^2}{r_4^2 - r_1^2} \cdot \left\{ \frac{\cancel{r_4^2 \cdot r_2^2} - \cancel{r_4^2 \cdot r_1^2} + r_2^2 \cdot r_4^2 - \cancel{r_2^4} - \cancel{r_4^2 \cdot r_2^2} + \cancel{r_2^4} + \cancel{r_4^2 \cdot r_1^2} - r_1^2 \cdot r_2^2}{r_4^2 \cdot r_2^2 - r_4^2 \cdot r_1^2 + r_2^2 \cdot r_4^2 - r_2^4} \right\} = \\
&= p \cdot \frac{2 \cdot r_4^2}{\cancel{r_4^2} - r_1^2} \cdot \left\{ \frac{r_2^2 \cdot (\cancel{r_4^2} - r_1^2)}{2 \cdot r_2^2 \cdot r_4^2 - r_2^4 - r_4^2 \cdot r_1^2} \right\} = p \cdot \frac{2 \cdot r_4^2 \cdot r_2^2 \cdot}{2 \cdot r_2^2 \cdot r_4^2 - r_2^4 - r_4^2 \cdot r_1^2}
\end{aligned}$$

При каком значении  $r_2$  максимальное эквивалентное напряжение в конструкции будет минимально? Ищем экстремум:

$$\frac{d\sigma_{\text{экв}}^A}{dr_2} = 0$$

$$\frac{d}{dr_2} \left\{ \frac{2 \cdot r_4^2 \cdot r_2^2 \cdot}{2 \cdot r_2^2 \cdot r_4^2 - r_2^4 - r_4^2 \cdot r_1^2} \right\} = 0$$

$$\frac{[2 \cdot r_4^2 \cdot r_2^2 \cdot]' \cdot [2 \cdot r_2^2 \cdot r_4^2 - r_2^4 - r_4^2 \cdot r_1^2] - [2 \cdot r_4^2 \cdot r_2^2] \cdot [2 \cdot r_2^2 \cdot r_4^2 - r_2^4 - r_4^2 \cdot r_1^2]'}{[2 \cdot r_2^2 \cdot r_4^2 - r_2^4 - r_4^2 \cdot r_1^2]^2} = 0$$

$$4 \cdot r_4^2 \cdot r_2 \cdot [2 \cdot r_2^2 \cdot r_4^2 - r_2^4 - r_4^2 \cdot r_1^2] - [2 \cdot r_4^2 \cdot r_2^2] \cdot [4 \cdot r_2 \cdot r_4^2 - 4 \cdot r_2^3] = 0$$

$$\cancel{8 \cdot r_2^3 \cdot r_4^4} - 4 \cdot r_2^5 \cdot r_4^2 - 4 \cdot r_1^2 \cdot r_2 \cdot r_4^4 - \cancel{8 \cdot r_2^3 \cdot r_4^4} + 8 \cdot r_2^5 \cdot r_4^2 = 0$$

$$r_4^2 \cdot r_1^2 = r_2^4$$

Таким образом, минимальные напряжения будут в равнопрочной конструкции, радиус сопряжения цилиндров которой:

$$\boxed{r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_4}} \quad (\text{XV.23})$$



При этом значении  $r_2$  максимальные эквивалентные напряжения в равнопрочной конструкции будут во внутренних слоях внутреннего и наружного цилиндров (точки  $A$  и  $B$ , *рис. XVI.29*):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{экв}}^{\text{max}} = \sigma_{\text{экв}}^A = \sigma_{\text{экв}}^B &= p \cdot \frac{2 \cdot r_4^2 \cdot r_2^2 \cdot}{2 \cdot r_2^2 \cdot r_4^2 - r_2^4 - r_4^2 \cdot r_1^2} = \\
 &= p \cdot \frac{2 \cdot r_4^2 \cdot r_1 \cdot r_4}{2 \cdot r_1 \cdot r_4 \cdot r_4^2 - r_1^2 \cdot r_4^2 - r_4^2 \cdot r_1^2} = \\
 &= p \cdot \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{r_4} \cdot r_4^\beta}{\cancel{2} \cdot \cancel{r_1} \cdot r_4^\beta - \cancel{r_1^2} \cdot \cancel{r_4^2} \cdot \cancel{r_1^2}} = \\
 &= p \cdot \frac{r_4}{r_4 - r_1}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}} = p \cdot \frac{r_4}{r_4 - r_1}$$

(XV.24)

*Вывод:*

Для эффективного использования материала толстостенной трубы лучше всего делать её составной равнопрочной. Если наперёд известны

$p$  – внутреннее рабочее давление;

$E$  – модуль упругости материала трубы;

$r_1$  – внутренний радиус трубы;

$r_4$  – наружный радиус трубы;

то можно по формуле (XV.24) рассчитать максимальное значение эквивалентного напряжения  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}}$  в равнопрочной составной трубе. По  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}}$  находим коэффициент запаса прочности  $n$ :

$$n = \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}}}$$

Если коэффициент запаса прочности недостаточен, можно увеличить значение  $r_4$  и повторить расчёт.

Когда со значением  $r_4$  определились, вычисляем параметры конструкции:

$r_2$  – наружный радиус внутреннего цилиндра, формула (XV.23);

$\Delta$  – значение требуемого натяга, формула (XV.22);

$r_3 = r_2 - \Delta$  – внутренний радиус наружного цилиндра;

Значение контактного давления  $p_K$  (XV.19) иногда знать нужно, но, чаще всего, это промежуточная величина.

## Автофретирование

Допустим, у нас есть металлическая полоска, выполненная из идеального упруго-пластического материала (рис. XVI.30.). Попробуем кинематически её растянуть и отпустить. Что мы будем наблюдать?

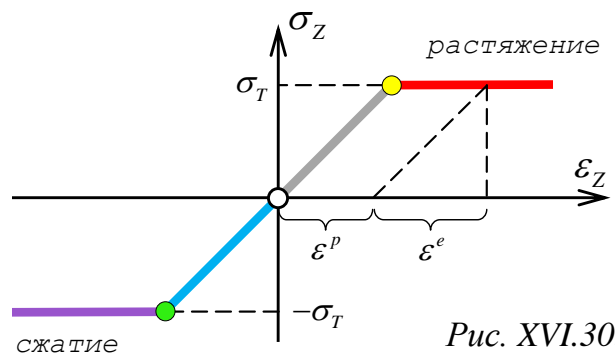


Рис. XVI.30.

Сначала стержень будет деформироваться упруго (рис. XVI.31а.). Если сейчас его отпустить, он вернётся в исходное положение (рис. XVI.31б.). Если продолжать растягивать, материал полоски «потечёт» - напряжения достигнут предела текучести  $\sigma_T$  (рис. XVI.31в.) и превысить его не смогут, далее расти будут только деформации (рис. XVI.31г.). Если после этого полосу разгрузить, снимутся только упругие деформации  $\epsilon^e$ , пластические деформации  $\epsilon^p$  останутся и в свои прежние размеры полоска не вернётся, отныне она стала длиннее (рис. XVI.31д.).

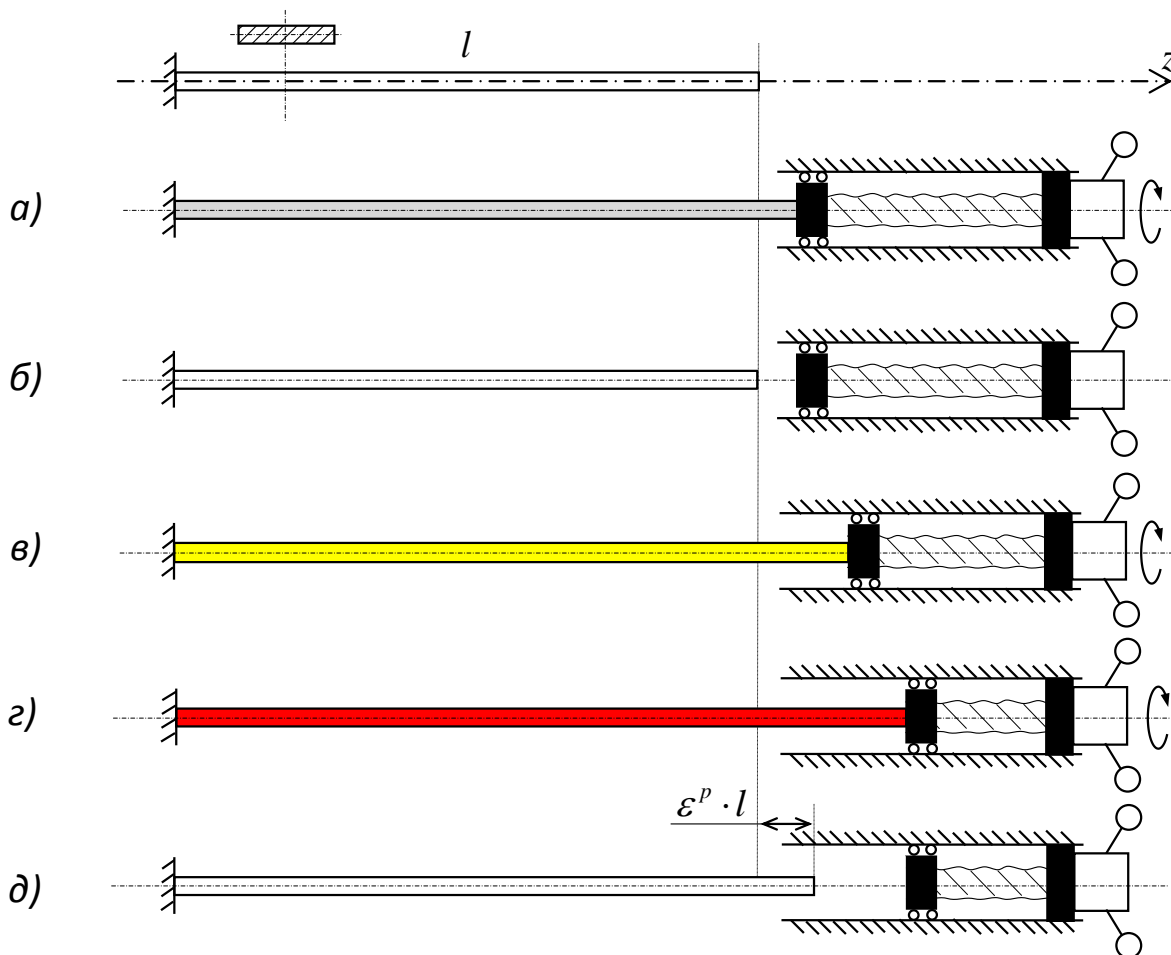


Рис. XVI.31. Цветом указана деформация.

Если помимо растяжения на полоску будет действовать ещё и поперечное давление  $\sigma_r$ , то качественно ничего не изменится. Просто поведение материала (рис. XVI.30.) будет зависеть не от осевого напряжения  $\sigma_z$ , а от напряжения эквивалентного:  $\sigma_{\text{экр}} = \sigma_z + |\sigma_r|$ .

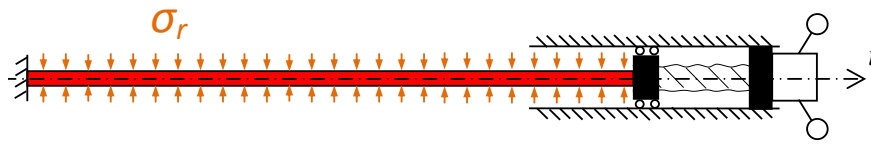


Рис. XVI.32.

Теперь представьте, что такие полосы, свёрнутые в кольца, это слои толстостенной трубы (рис. XVI.33а.).

Нагрузим трубу опрессовочным давлением  $p_o$  - давлением, превышающим то, которое труба способна выдержать, оставаясь целиком упругой. Напряжения в слоях трубы распределяются неравномерно (рис. XVI.13.), внутренние слои потекут, наружные останутся упругими (рис. XVI.33б.). После разгрузки потёкшие внутренние слои так и не восстановят свой первоначальный радиус: остаточные деформации  $\epsilon^p$  помешают. Они станут шире. А наружные слои, оставшиеся упругими, будут стремиться восстановить свои первоначальные размеры, сжимая при этом расширившиеся слои внутренние (рис. XVI.33в.). Получится тот же эффект, что и при надевании друг на друга труб с натягом (рис. XVI.26в.).

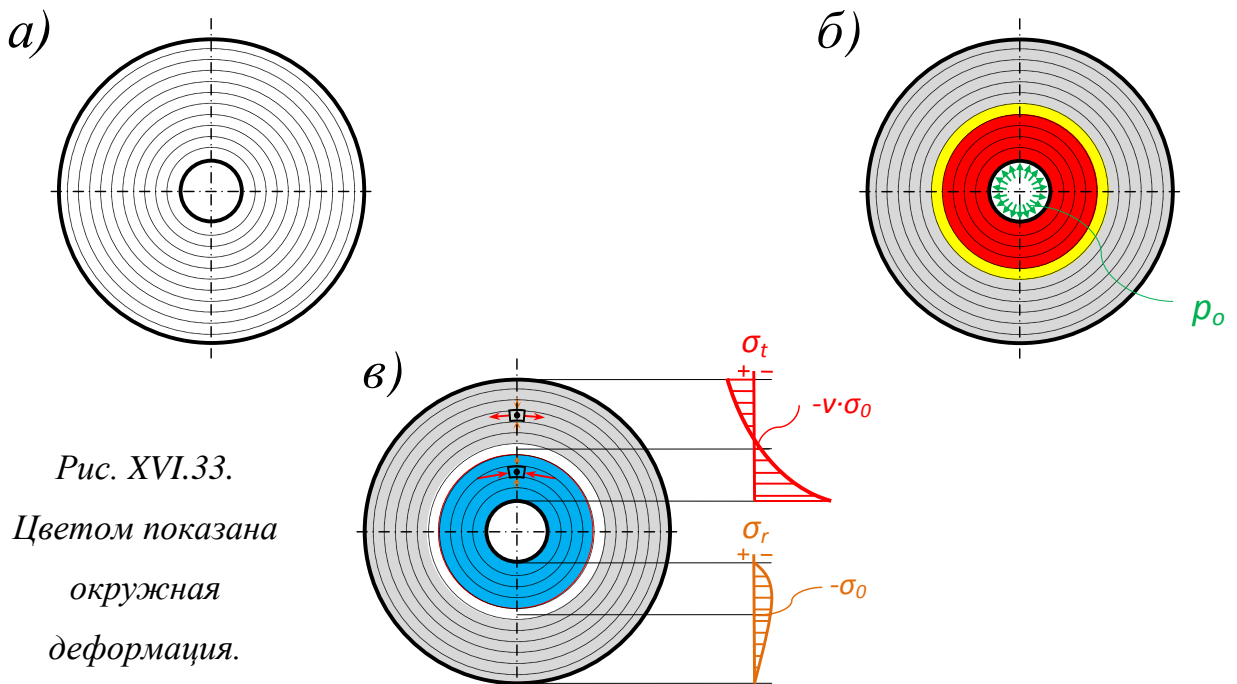


Рис. XVI.33.

Цветом показана  
окружная  
деформация.

Получившаяся труба может работать без образования пластических деформаций с внутренними давлениями, не превышающими давление опрессовки.