

**Решение дифференциальных уравнений параболического типа, содержащих производную по координате первого порядка**

1. Постановка задачи

2. Явная разностная схема

*2.1. Исследование устойчивости*

*2.2. Порядок аппроксимации. Метод решения*

3. Неявная разностная схема

*3.1. Характеристика*

*3.2. Метод решения*

4. Разностная схема Кранка-Николсона

5. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате первого порядка центральной конечной разностью

*5.1. Характеристика*

*5.2. Метод решения*

6. Сравнительная характеристика изученных разностных схем

7. Задания для самоконтроля

## 1. Постановка задачи

В разделе "Примеры математических моделей, содержащих дифференциальные уравнения в частных производных" мы рассматривали математическую модель трубчатого реактора с продольным перемешиванием, в котором протекает простая необратимая реакция. Баланс по концентрации исходного реагента для нестационарного режима имеет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - k c,$$

где  $k$  – константа скорости химической реакции;  $c$  – концентрация исходного реагента;  $v$  – линейная скорость потока;  $x$  – координата по длине реактора;  $D_L$  – коэффициент диффузии.

Данное уравнение относится к дифференциальным уравнениям параболического типа. Однако оно отличается от уже изученных нами уравнений параболического типа наличием первой производной по координате. Рассмотрим влияние этой производной на характеристики и методику решения разностных схем, аппроксимирующих одномерное дифференциальное уравнение параболического типа.

Для простоты дальнейшего изложения мы будем рассматривать одномерные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие производную по координате первого порядка, в следующем общем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k u + f(t, x); \quad k \geq 0, \quad v > 0, \quad \sigma > 0. \quad (6.1)$$

Значение параметра  $v$  в общем случае может быть положительным или отрицательным. Напомним, что согласно правилу выбора конечной разности для аппроксимации производной первого порядка по координате при положительном  $v$  следует использовать левую конечную разность, при отрицательном  $v$  – правую конечную разность. Поэтому рассмотрим только случай  $v > 0$  (случай  $v < 0$  будет аналогичным при аппроксимации первой производной по координате левой конечной разностью). Также отдельно рассмотрим случай аппроксимации производной по координате первого порядка центральной конечной разностью.

Уравнение (6.1) следует дополнить начальным и граничными условиями (для определённости будем рассматривать граничные условия 1-го рода):

$$u(t = 0, x) = \xi(x), \quad u(t, x = 0) = \varphi_1(t), \quad u(t, x = l) = \varphi_2(t).$$

## 2. Явная разностная схема

### 2.1. Исследование устойчивости

Явная разностная схема для уравнения (6.1) имеет вид:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - k u_j^n + f(t^n, x_j). \quad (6.2)$$

Исследуем её устойчивость с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член  $f(t^n, x_j)$ , наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоники (3.7):

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} + v \frac{\lambda^n e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha(j-1)}}{h} = \sigma \frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^n e^{i\alpha j} + \lambda^n e^{i\alpha(j-1)}}{h^2} - k \lambda^n e^{i\alpha j}.$$

Далее, упрощаем полученное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha j}$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \frac{1 - e^{-i\alpha}}{h} = \sigma \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} - k.$$

Используя зависимости (3.9), (3.10), получаем формулу

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \frac{1 - e^{-i\alpha}}{h} = -\frac{\sigma}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - k,$$

из которой выражаем  $\lambda$ :

$$\lambda = 1 - v \frac{\Delta t}{h} - 4\sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - k \Delta t + v \frac{\Delta t}{h} e^{-i\alpha}.$$

Комплексный вид полученного выражения свидетельствует о том, что для устойчивости разностной схемы (6.2) согласно необходимому условию устойчивости разностных схем (3.8) требуется, чтобы собственные числа оператора перехода были расположены внутри или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости.

Введём следующие обозначения:

$$r = v \frac{\Delta t}{h} > 0, \quad q = v \frac{\Delta t}{h} + 4\sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \Delta t > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 - q + r e^{-i\alpha}.$$

Следовательно, собственные числа оператора перехода расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 - q; 0)$  и радиусом  $r$  (см. рисунок). Данная окружность не выходит за границы круга, соответствующего условию устойчивости (3.8), только при выполнении неравенства:

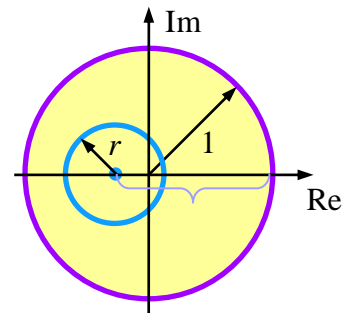
$$|1 - q| + r \leq 1 \quad \Rightarrow \quad r - 1 \leq 1 - q \leq 1 - r.$$

Так как  $r \leq q$ , правое условие выполняется автоматически.

Рассмотрим более подробно левое условие:

$$v \frac{\Delta t}{h} - 1 \leq 1 - v \frac{\Delta t}{h} - 4\sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - k \Delta t \quad \Rightarrow \quad v \frac{\Delta t}{h} + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} k \Delta t \leq 1.$$

Данное выражение содержит переменную величину – аргумент комплексного числа  $\alpha$ , определить интервал изменения которого невозможно. Чтобы гарантировать устойчивость



явной разностной схемы (6.2) независимо от значения  $\alpha$ , следует перейти к более строгому условию, задавая для  $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$  максимально возможное значение, равное 1:

$$v \frac{\Delta t}{h} + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + \frac{1}{2} k \Delta t \leq 1. \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) является условием устойчивости явной разностной схемы (6.2), аппроксимирующей дифференциальное уравнение (6.1).

## 2. Явная разностная схема

### 2.2. Порядок аппроксимации. Метод решения

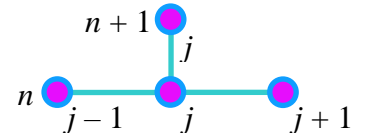
Для определения порядка аппроксимации явной разностной схемы (6.2) подставим в неё выражения (2.16)–(2.18), описывающие разложение значений  $u_j^{n+1}$ ,  $u_{j+1}^n$ ,  $u_{j-1}^n$  в ряд Тейлора относительно точки  $(t^n, x_j)$  на разностной сетке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \Delta t - v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n h &= \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + \frac{\sigma}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_j^n h^2 - k u_j^n + f(t^n, x_j) \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t) - v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + O(h) &= \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + O(h^2) - k u_j^n + f(t^n, x_j). \end{aligned}$$

Таким образом, явная разностная схема (6.2) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (6.1) с первым порядком и по времени, и по координате:

$$O(\Delta t) + O(h) \quad \text{или} \quad O(\Delta t, h).$$

Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий явную разностную схему (6.2), свидетельствует о том, что она содержит одну неизвестную величину – значение функции  $u$  на  $(n+1)$ -ом шаге по времени. Выражая эту величину из разностной схемы, получаем рекуррентное соотношение



$$u_j^{n+1} = u_j^n + v \frac{\Delta t}{h} (u_{j-1}^n - u_j^n) + \sigma \frac{\Delta t}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - k \Delta t u_j^n + \Delta t f(t^n, x_j), \quad (6.4)$$

позволяющее рассчитать все значения функции  $u$  на  $(n+1)$ -ом шаге по времени (при известных значениях функции  $u$  на  $n$ -ом шаге), кроме значений  $u_1^{n+1}, u_N^{n+1}$ , определяемых с помощью граничных условий. Если заданы граничные условия 1-го рода, то значения  $u_1^{n+1}, u_N^{n+1}$  определяются непосредственно из их разностной аппроксимации; если 2-го или 3-го рода, то – с помощью соотношений (4.4а) и (4.4б). Таким образом, алгоритм решения явной разностной схемы (6.2) аналогичен алгоритму решения явной разностной схемы (4.2), аппроксимирующей дифференциальное уравнение параболического типа, не содержащее производную по координате первого порядка.

### 3. Неявная разностная схема

#### 3.1. Характеристика

Неявная разностная схема для уравнения (6.1) имеет вид:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j). \quad (6.5)$$

Учитывая порядок аппроксимации разностных операторов, составляющих данную разностную схему, легко видеть, что она аппроксимирует дифференциальное уравнение (6.1) с первым порядком и по времени, и по координате:

$$O(\Delta t, h).$$

Исследуем устойчивость неявной разностной схемы (6.5) с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член  $f(t^n, x_j)$ , наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоники (3.7):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} + v \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h} = \\ = \sigma \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} + \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h^2} - k \lambda^{n+1} e^{i\alpha j}. \end{aligned}$$

Далее, упрощаем полученное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha j}$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \frac{\lambda - \lambda e^{-i\alpha}}{h} = \sigma \frac{\lambda e^{i\alpha} - 2\lambda + \lambda e^{-i\alpha}}{h^2} - k \lambda.$$

Используя зависимости (3.9), (3.10), получаем

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \frac{\lambda - \lambda e^{-i\alpha}}{h} = -\lambda \frac{\sigma}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - k \lambda.$$

Группируя члены, содержащие  $\lambda$ , в левой части уравнения, выразим величину, обратную  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \lambda \left( 1 + v \frac{\Delta t}{h} + 4 \sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \Delta t - v \frac{\Delta t}{h} e^{-i\alpha} \right) = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 + v \frac{\Delta t}{h} + 4 \sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \Delta t - v \frac{\Delta t}{h} e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

При этом необходимое условие устойчивости разностных схем (3.8) также преобразуем к виду:

$$|\lambda| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{\lambda} \right| \geq 1. \quad (6.6)$$

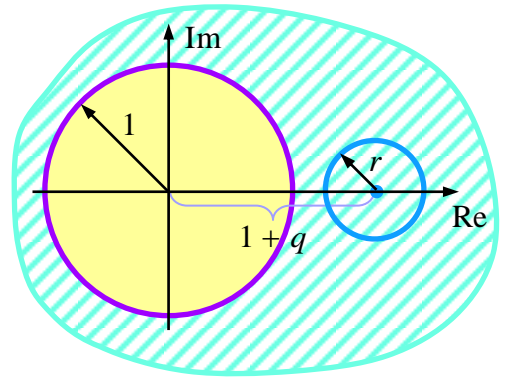
Комплексный вид полученного выражения свидетельствует о том, что для устойчивости разностной схемы (6.5) согласно условию (6.6) требуется, чтобы величины, обратные собственным числам оператора перехода, были расположены вне или на границе круга радиусом 1, центр которого находится в начале координат комплексной плоскости.

Введём следующие обозначения:

$$r = v \frac{\Delta t}{h} > 0, \quad q = v \frac{\Delta t}{h} + 4 \sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \Delta t > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 + q - r e^{-i\alpha}.$$

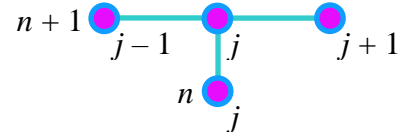
Следовательно, величины, обратные собственным числам оператора перехода, расположены на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1 + q; 0)$  и радиусом  $r$  (см. рисунок). Данная окружность находится вне круга, соответствующего условию устойчивости, при любом значении  $r$ . Это означает, что неявная разностная схема (6.5) абсолютно устойчива.



### 3. Неявная разностная схема

#### 3.2. Метод решения

Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий неявную разностную схему (6.5), свидетельствует о том, что она содержит три неизвестные величины – значения функции  $u$  на  $(n + 1)$ -ом шаге по времени. Следовательно, для решения данной разностной схемы необходимо использовать метод прогонки.



Приведём разностную схему (6.5) к виду (4.10), удобному для использования метода прогонки:

$$-\sigma \frac{\Delta t}{h^2} u_{j+1}^{n+1} + \left( 1 + v \frac{\Delta t}{h} + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t \right) u_j^{n+1} - \left( v \frac{\Delta t}{h} + \sigma \frac{\Delta t}{h^2} \right) u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \Delta t f(t^n, x_j).$$

Следовательно, коэффициенты, соответствующие уравнению (4.10), имеют вид:

$$a_j = -\sigma \frac{\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + v \frac{\Delta t}{h} + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t, \\ c_j = -v \frac{\Delta t}{h} - \sigma \frac{\Delta t}{h^2}, \quad \xi_j^n = u_j^n + \Delta t f(t^n, x_j).$$

Легко видеть, что для разностной схемы (6.5) достаточное условие сходимости прогонки (4.16) выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = v \frac{\Delta t}{h} + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} < 1 + v \frac{\Delta t}{h} + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t = |b_j|.$$

Алгоритм решения, а также методики определения прогоночных коэффициентов и решения на правой границе аналогичны описанным ранее.



#### 4. Разностная схема Кранка-Николсона

При описании методов решения дифференциальных уравнений параболического типа, не содержащих производную по координате первого порядка, рассматривалась разностная схема Кранка-Николсона, обладающая абсолютной устойчивостью и вторым порядком аппроксимации по времени (в отличие от явной и неявной разностных схем). Запишем разностную схему Кранка-Николсона для уравнения (6.1):

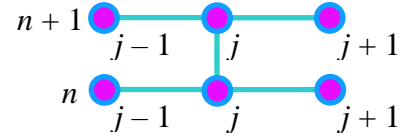
$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{v}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{v}{2} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \\ = \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Обратим внимание, что для сохранения второго порядка аппроксимации по времени производную по координате первого порядка необходимо представить также, как и производную по координате второго порядка, т.е. в виде суммы двух слагаемых, одно из которых аппроксимируется на  $(n+1)$ -ом шаге по времени, а другое – на  $n$ -ом шаге по времени.

Разностная схема (6.7) является абсолютно устойчивой (доказательство в силу сложности не приводится) и имеет порядок аппроксимации:

$$O(\Delta t^2, h).$$

Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий разностную схему (6.7), свидетельствует о том, что она содержит три неизвестные величины – значения функции  $u$  на  $(n+1)$ -ом шаге по времени. Следовательно, для её решения необходимо использовать метод прогонки.



Приведём разностную схему (6.7) к виду (4.10), удобному для использования метода прогонки:

$$\begin{aligned} -\sigma \frac{\Delta t}{2h^2} u_{j+1}^{n+1} + \left( 1 + v \frac{\Delta t}{2h} + \sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t \right) u_j^{n+1} - \left( v \frac{\Delta t}{2h} + \sigma \frac{\Delta t}{2h^2} \right) u_{j-1}^{n+1} = \\ = u_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{2h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - v \frac{\Delta t}{2h} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t f(t^n, x_j). \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты, соответствующие уравнению (4.10), имеют вид:

$$\begin{aligned} a_j = -\sigma \frac{\Delta t}{2h^2}, \quad b_j = 1 + v \frac{\Delta t}{2h} + \sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t, \quad c_j = -v \frac{\Delta t}{2h} - \sigma \frac{\Delta t}{2h^2}, \\ \xi_j^n = u_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{2h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - v \frac{\Delta t}{2h} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \Delta t f(t^n, x_j). \end{aligned}$$

Легко видеть, что для разностной схемы (6.7) достаточное условие сходимости прогонки (4.16) выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = v \frac{\Delta t}{2h} + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} < 1 + v \frac{\Delta t}{2h} + \frac{\sigma \Delta t}{h^2} + k \Delta t = |b_j|.$$

Алгоритм решения, а также методики определения прогоночных коэффициентов и решения на правой границе аналогичны описанным ранее.

## 5. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате первого порядка центральной конечной разностью

### 5.1. Характеристика

Неявная разностная схема для уравнения (6.1) при аппроксимации производной по координате первого порядка центральной конечной разностью имеет вид:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j). \quad (6.8)$$

Учитывая порядок аппроксимации разностных операторов, составляющих данную разностную схему, легко видеть, что она аппроксимирует дифференциальное уравнение (6.1) с первым порядком по времени, и со вторым - по координате:

$$O(\Delta t, h^2).$$

Исследуем устойчивость разностной схемы (6.8) с помощью спектрального метода. Для этого отбрасываем член  $f(t^n, x_j)$ , наличие которого, как известно, не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, и представляем решение в виде гармоник (3.7):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} + v \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{2h} = \\ = \sigma \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} + \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h^2} - k \lambda^{n+1} e^{i\alpha j}. \end{aligned}$$

Далее, упрощаем полученное выражение, деля левую и правую его части на  $\lambda^n e^{i\alpha j}$ :

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \frac{\lambda e^{i\alpha} - \lambda e^{-i\alpha}}{2h} = \sigma \frac{\lambda e^{i\alpha} - 2\lambda + \lambda e^{-i\alpha}}{h^2} - k \lambda.$$

Используя зависимости (3.9), (3.10), получаем

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + v \lambda \frac{2i \sin \alpha}{2h} = -\lambda \frac{\sigma}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - k \lambda.$$

Группируя члены, содержащие  $\lambda$ , в левой части уравнения, выразим величину, обратную  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \lambda \left( 1 + 4\sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \Delta t + v \frac{\Delta t}{h} i \sin \alpha \right) = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 + 4\sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \Delta t + v \frac{\Delta t}{h} i \sin \alpha. \end{aligned}$$

Определим модуль полученного комплексного числа:

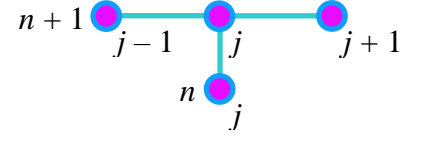
$$\left| \frac{1}{\lambda} \right| = \sqrt{\left( 1 + 4\sigma \frac{\Delta t}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \Delta t \right)^2 + \left( v \frac{\Delta t}{h} \sin \alpha \right)^2} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \leq 1.$$

Таким образом, собственные числа оператора перехода, удовлетворяют условию устойчивости разностных схем (3.8). Следовательно, неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате первого порядка центральной конечной разностью (6.8) абсолютно устойчива, причём вне зависимости от знака параметра  $v$ .

## 5. Неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате первого порядка центральной конечной разностью

### 5.2. Метод решения

Разностный шаблон (см. рисунок), характеризующий разностную схему (6.8), свидетельствует о том, что она содержит три неизвестные величины – значения функции  $u$  на  $(n+1)$ -ом шаге по времени. Следовательно, для решения данной разностной схемы необходимо использовать метод прогонки.



Приведём разностную схему (6.8) к виду (4.10), удобному для использования метода прогонки:

$$\left(v \frac{\Delta t}{2h} - \sigma \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t\right) u_j^{n+1} - \left(v \frac{\Delta t}{2h} + \sigma \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \Delta t f(t^n, x_j).$$

Следовательно, коэффициенты, соответствующие уравнению (4.10), имеют вид:

$$\begin{aligned} a_j &= v \frac{\Delta t}{2h} - \sigma \frac{\Delta t}{h^2}, & b_j &= 1 + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t, \\ c_j &= -v \frac{\Delta t}{2h} - \sigma \frac{\Delta t}{h^2}, & \xi_j^n &= u_j^n + \Delta t f(t^n, x_j). \end{aligned}$$

Легко видеть, что для случая

$$\left|v\right| \frac{\Delta t}{2h} \leq \sigma \frac{\Delta t}{h^2} \quad \Leftrightarrow \quad h \leq \frac{2\sigma}{|v|} \quad (6.9)$$

достаточное условие сходимости прогонки (4.16) для разностной схемы (6.8) выполняется:

$$|a_j| + |c_j| = \sigma \frac{\Delta t}{h^2} - \left|v\right| \frac{\Delta t}{2h} + \sigma \frac{\Delta t}{h^2} + \left|v\right| \frac{\Delta t}{2h} = 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} < 1 + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t = |b_j|.$$

Если же

$$\left|v\right| \frac{\Delta t}{2h} > \sigma \frac{\Delta t}{h^2} \quad \Leftrightarrow \quad h > \frac{2\sigma}{|v|},$$

то достаточное условие сходимости прогонки (4.16) для разностной схемы (6.8) выполняется только в случае справедливости неравенства:

$$\begin{aligned} |a_j| + |c_j| &= \left|v\right| \frac{\Delta t}{2h} - \sigma \frac{\Delta t}{h^2} + \sigma \frac{\Delta t}{h^2} + \left|v\right| \frac{\Delta t}{2h} = \left|v\right| \frac{\Delta t}{h} < 1 + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t = |b_j| \\ \Rightarrow \quad \left|v\right| \frac{\Delta t}{h} &< 1 + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + k \Delta t. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Таким образом, если величина шага по координате удовлетворяет условию (6.9), то ограничений на шаг по времени нет; если же величина шага по координате не удовлетворяет условию (6.9), то при выборе шага по времени необходимо учитывать условие (6.10). Отметим, что если условие (6.9) позволяет задать приемлемую величину шага по координате ( $h = 0,1$ ), то разностная схема (6.8) становится более предпочтительной по сравнению с разностной схемой (6.5) в силу большего порядка аппроксимации по координате.

Алгоритм решения, а также методики определения прогоночных коэффициентов и решения на правой границе аналогичны описанным ранее.

## 6. Сравнительная характеристика изученных разностных схем

В заключение приведём сравнительную характеристику разностных схем, аппроксимирующих одномерное дифференциальное уравнение параболического типа, содержащее производную по координате первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k u + f(t, x); \quad k \geq 0, \quad v > 0, \quad \sigma > 0.$$

### 1. Явная разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - k u_j^n + f(t^n, x_j).$$

- Имеет порядок аппроксимации  $O(\Delta t, h)$ .
- Условно устойчива  $v \frac{\Delta t}{h} + 2\sigma \frac{\Delta t}{h^2} + \frac{1}{2} k \Delta t \leq 1$ .
- Решается с помощью рекуррентного соотношения (6.4).

### 2. Неявная разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j).$$

- Имеет порядок аппроксимации  $O(\Delta t, h)$ .
- Абсолютно устойчива.
- Решается методом прогонки.

### 3. Разностная схема Кранка-Николсона

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{v}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{v}{2} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \\ = \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\sigma}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j). \end{aligned}$$

- Имеет порядок аппроксимации  $O(\Delta t^2, h)$ .
- Абсолютно устойчива.
- Решается методом прогонки.

Напомним, что в случае  $v < 0$  для аппроксимации производной по координате первого порядка следует использовать правую конечную разность.

Вне зависимости от знака параметра  $v$  (или в случае, когда  $v$  является знакопеременной величиной) может быть также использована неявная разностная схема с аппроксимацией производной по координате первого порядка центральной конечной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k u_j^{n+1} + f(t^n, x_j).$$

- Имеет порядок аппроксимации  $O(\Delta t, h^2)$ .
- Абсолютно устойчива.
- Решается методом прогонки, сходящейся при выполнении одного из условий: (6.9) или (6.10).

## Задания для самоконтроля

### 1. Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} = 2,5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 14u + 2t$$

аппроксимируется явной разностной схемой

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + 6 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 2,5 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 14u_j^n + 2n\Delta t.$$

Определите, какое из представленных ниже условий обеспечит устойчивость данной разностной схеме, если задан шаг по координате  $h = 0,1$ .

◁ А.	$\Delta t \leq 0,1$	◁ Г.	$\Delta t \leq \frac{1}{560} \approx 0,00178$
◁ Б.	$\Delta t \leq \frac{1}{60} \approx 0,0167$	◁ Д.	$\Delta t \leq \frac{1}{567} \approx 0,00176$
◁ В.	$\Delta t \leq \frac{1}{500} \approx 0,002$	◁ Е.	$\Delta t \leq \frac{1}{574} \approx 0,00174$

2. Из представленных ниже разностных соотношений выберите то, которое является разностной схемой Кранка-Николсона для следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u.$$

$$\diamond \text{ А. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 3 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^{n+1}$$

$$\diamond \text{ Б. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 3 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^{n+1}$$

$$\diamond \text{ В. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 3 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^{n+1}$$

$$\diamond \text{ Г. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} - \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 3 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^{n+1}$$

$$\diamond \text{ Д. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 3 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 2u_j^{n+1}$$

### 3. Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7u$$

аппроксимируется неявной разностной схемой

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 4 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 7u_j^{n+1}.$$

Выберите правильное решение задачи приведения данной разностной схемы к виду, удобному для использования метода прогонки, и определения сходимости прогонки (учитывая, что шаг по координате  $h$  следует задавать не больше 0,1).

◇ А.  $-\left(2 \frac{\Delta t}{h} + 3 \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} + 7 \Delta t\right) u_j^{n+1} - \left(2 \frac{\Delta t}{h} + 3 \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j-1}^{n+1} = u_j^n;$   
 $a_j = c_j = -2 \frac{\Delta t}{h} - 3 \frac{\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} + 7 \Delta t, \quad \xi_j^n = u_j^n;$   
 $|a_j| + |c_j| = 4 \frac{\Delta t}{h} + 6 \frac{\Delta t}{h^2} < 1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} + 7 \Delta t = |b_j| \Rightarrow \text{прогонка сходится при } \Delta t < \frac{h}{4-7h}.$

◇ Б.  $-\left(2 \frac{\Delta t}{h} + 3 \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_j^{n+1} - \left(2 \frac{\Delta t}{h} + 3 \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j-1}^{n+1} = u_j^n;$   
 $a_j = c_j = -2 \frac{\Delta t}{h} - 3 \frac{\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2}, \quad \xi_j^n = u_j^n;$   
 $|a_j| + |c_j| = 4 \frac{\Delta t}{h} + 6 \frac{\Delta t}{h^2} < 1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} = |b_j| \Rightarrow \text{прогонка сходится при } \Delta t < \frac{h}{4}.$

◇ В.  $-\left(2 \frac{\Delta t}{h} + 3 \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} + 7 \Delta t\right) u_j^{n+1} + \left(2 \frac{\Delta t}{h} - 3 \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j-1}^{n+1} = u_j^n;$   
 $a_j = -2 \frac{\Delta t}{h} - 3 \frac{\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} + 7 \Delta t, \quad c_j = 2 \frac{\Delta t}{h} - 3 \frac{\Delta t}{h^2}, \quad \xi_j^n = u_j^n;$   
 $h \leq 0,1 \Rightarrow \frac{1}{h} \leq \frac{1}{h^2} \Rightarrow 2 \frac{\Delta t}{h} \leq 3 \frac{\Delta t}{h^2} \Rightarrow |c_j| = 3 \frac{\Delta t}{h^2} - 2 \frac{\Delta t}{h};$   
 $|a_j| + |c_j| = 6 \frac{\Delta t}{h^2} < 1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} + 7 \Delta t = |b_j| \Rightarrow \text{прогонка сходится.}$

◇ Г.  $-\left(2 \frac{\Delta t}{h} + 3 \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} + 7 \Delta t\right) u_j^{n+1} + \left(2 \frac{\Delta t}{h} - 3 \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{j-1}^{n+1} = u_j^n;$   
 $a_j = -2 \frac{\Delta t}{h} - 3 \frac{\Delta t}{h^2}, \quad b_j = 1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} + 7 \Delta t, \quad c_j = 2 \frac{\Delta t}{h} - 3 \frac{\Delta t}{h^2}, \quad \xi_j^n = u_j^n;$   
 $h \leq 0,1 \Rightarrow \frac{1}{h} \leq \frac{1}{h^2} \Rightarrow 2 \frac{\Delta t}{h} \leq 3 \frac{\Delta t}{h^2} \Rightarrow |c_j| = 2 \frac{\Delta t}{h} - 3 \frac{\Delta t}{h^2};$   
 $|a_j| + |c_j| = 4 \frac{\Delta t}{h} < 1 + 6 \frac{\Delta t}{h^2} + 7 \Delta t = |b_j| \Rightarrow \text{прогонка сходится.}$

4. Из представленных ниже разностных схем выберите наиболее подходящую для решения следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 200 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,01 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9u.$$

$$\diamond \text{ А. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 200 \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0,01 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 9u_j^{n+1}$$

$$\diamond \text{ Б. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 200 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0,01 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 9u_j^{n+1}$$

$$\diamond \text{ В. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 200 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0,01 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 9u_j^{n+1}$$

$$\diamond \text{ Г. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 200 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0,01 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 9u_j^n$$

$$\diamond \text{ Д. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 200 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0,01 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 9u_j^n$$



5. Из представленных ниже разностных схем выберите наиболее подходящую для решения следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 0,5 \frac{\partial u}{\partial x} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,6u + 0,8x.$$

$$\diamond \text{ А. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 0,5 \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 1,6u_j^{n+1} + 0,8h(j-1)$$

$$\diamond \text{ Б. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 0,5 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 1,6u_j^{n+1} + 0,8h(j-1)$$

$$\diamond \text{ В. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 0,5 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 1,6u_j^{n+1} + 0,8h(j-1)$$

$$\diamond \text{ Г. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 0,5 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 3 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 1,6u_j^n + 0,8h(j-1)$$

$$\diamond \text{ Д. } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 0,5 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 3 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 1,6u_j^n + 0,8h(j-1)$$