Нормальная система уравнений

$\vec{y}(t)$ — вектор-столбец с элементами $y_i(t)$.
$\vec{f}(t; \vec{y}(t))$ — вектор-столбец с элементами $f_i(t; y_1, ..., y_n)$, определенными в $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(t; \vec{y}(t)) \tag{1}$$

$\vec{y}_0$ — вектор-столбец из $\mathbb{R}^n$
Задача Коши — найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \tag{2}$$

Теорема

Если $f_i(t;\vec{y}) \in C(D)$ и $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(D)$, $(i, j = 1, ..., n)$, то для любой точки $(t_0; \vec{y}_0) \in D$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = f(t;\vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Задача Коши

для уравнения высокого порядка

$$y^{(n)}(t) = f(t;\, y(t);\, y'(t);\, y''(t); \ldots;\, y^{(n-1)}(t)) \qquad (3)$$

Сведем к системе, положив

$y_1 = y(t)$, $y_2 = y'(t)$, ..., $y_n = y^{(n-1)}(t)$

Задача Коши — найти решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям

$$y(t_0) = y_0;\;\; y'(t_0) = y_1;\;\; \ldots\; y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \qquad (4)$$

Нормальная система линейных уравнений

$A(t)$ — матрица $n \times n$ с элементами $a_{ij}(t)$
$\vec{f}(t)$ — вектор с элементами $f_i(t)$.

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \tag{5}$$

То есть для всех $i = 1, ..., n$

$$y\,'_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_j(t) + f_i(t)$$

Теорема

Если все $a_{ij}(t) \in C(a;b)$ и $f_i(t) \in C(a;b)$, то для любой точки $t_0 \in (a;b)$ и любого вектора $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \end{cases}$$

существует на всем $(a;b)$ и единственно.

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[A(\tau)\vec{y}(\tau) + \vec{f}(\tau)\right] d\tau$$

Введем оператор $Q : \varphi(t) \mapsto \psi(t)$, действующий по правилу

$$\vec{\psi}(t) = Q\vec{\varphi}(t) = \vec{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[A(\tau)\vec{\varphi}(\tau) + \vec{f}(\tau)\right] d\tau$$

последовательные приближения

$$\vec{y}_0(t) = \vec{y}_0,$$

$$\vec{y}_k(t) = Q\vec{y}_{k-1}(t) = \vec{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[A(\tau)\vec{y}_{k-1}(\tau) + \vec{f}(\tau)\right] d\tau,\ k \in N$$

$$\vec{y}_k(t) = [\vec{y}_k(t) - \vec{y}_{k-1}(t)] + \ldots + [\vec{y}_1(t) - \vec{y}_0(t)] + \vec{y}_0(t) = \sum_{j=0}^{k} \vec{z}_j(t),$$

где $\vec{z}_0(t) = \vec{y}_0$, $\vec{z}_j(t) = \vec{y}_j(t) - \vec{y}_{j-1}(t)$, $j \in \mathbb{N}$

Оценка в точке

Лемма. $||\vec{z}_j(t)|| \le M_0 K^{(j-1)} \frac{(\sqrt{n}|t-t_0|)^j}{j!}$, $j \in \mathbb{N}$

$||A(t)|| \le K$, $||\vec{f}(t)|| \le M$ на отрезке $[\alpha;\beta] \in (a;b)$

$$||\vec{z}_1(t)|| = ||\vec{y}_1(t)) - \vec{y}_0|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} \left[A(\tau)\vec{y}_0 + \vec{f}(\tau)\right] d\tau|| \le$$

$$\le \sqrt{n}|\int\limits_{t_0}^{t} \left(||A(\tau)|| \cdot ||\vec{y}_0|| + ||\vec{f}(\tau)||\right) d\tau| \le$$

$$\le \sqrt{n}|\int\limits_{t_0}^{t} \left(K \cdot ||\vec{y}_0|| + M\right) d\tau| \le M_0\sqrt{n}|t - t_0|$$

$$
\begin{aligned}
&||\vec{z}_{j+1}(t)|| = ||\vec{y}_{j+1}(t) - \vec{y}_j(t)|| \leq \\
&\leq \sqrt{n}\Big|\int\limits_{t_0}^{t} ||A(\tau)|| \cdot ||\vec{z}_j(\tau)||\, d\tau\Big| \leq \\
&\leq \sqrt{n}K\Big|\int\limits_{t_0}^{t} M_0 K^{j-1} \tfrac{(\sqrt{n}|t-t_0|)^j}{j!}\, d\tau\Big| \leq \\
&\leq M_0 K^j \tfrac{(\sqrt{n}|t-t_0|)^{j+1}}{(j+1)!}
\end{aligned}
$$

Равномерная оценка

$||\vec{z}_j(t)|| \leq M_0 K^{(j-1)} \frac{(\sqrt{n}|t-t_0|)^j}{j!}$, $j \in \mathbb{N}$, поэтому

$||\vec{z}_j(t)||_{C[\alpha;\beta]} \leq M_0 K^{(j-1)} \frac{(\sqrt{n}|\beta-\alpha|)^j}{j!} = \frac{M_0}{K} \frac{B^j}{j!}$, $j \in \mathbb{N}$,

следовательно, ряд $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \vec{z}_j(t)$ сходится равномерно на $[\alpha;\beta]$

Свойства решений

Принцип суперпозиции

Если $\vec{y}_k(t)$ — решение системы $\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}_k(t)$, то $\forall\ c_k \in \mathbb{R}$ функция $\vec{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\ \vec{y}_k(t)$ — решение системы $\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$ с правой частью $\vec{f}(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\ \vec{f}_k(t)$.

Следствия

Однородная система = система однородных уравнений ($\vec{f}(t) = \vec{0}$)

Если $\vec{y}_1(t)$ — решение системы с правой частью $\vec{f}_1(t)$, а $\vec{y}_0(t)$ — решение однородной системы, то $\vec{y}(t) = \vec{y}_1(t) + \vec{y}_0(t)$ — решение системы с правой частью $\vec{f}_1(t)$.

Если $\vec{y}_1(t)$ и $\vec{y}_2(t)$ — решения системы с одной и той же правой частью $\vec{f}(t)$, то $\vec{y}(t) = \vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)$ — решение однородной системы.

Структура множества решений

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} \qquad (5_0)$$

Решения однородной системы образуют линейное пространство.

- $\vec{y}(t) \equiv \vec{0}$ — решение системы (5_0)
- Если $\vec{y}_k(t)$ — решения системы (5_0), то для любого набора $c_k \in \mathbb{R}$ функция $\vec{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\, \vec{y}_k(t)$ — решение системы (5_0)

Размерность и базис пространства решений

Линейная независимость функций

Определение. Функции $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, ..., m$, линейно независимы на $(a; b)$, если

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \; \vec{y}_k(t) \equiv \vec{0} \Leftrightarrow \; \forall \; k = 1, ..., m \; (c_k = 0)$$

Пример. $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t \cdot |t|$ на $(-1; 1)$

Лемма. $\vec{y}_k(t),\ k = 1, ..., m$, — *решения* системы (5_0) на $(a; b)$. Если они линейно зависимы в точке $t_0 \in (a; b)$, то они линейно зависимы на $(a; b)$.

Критерий линейной независимости системы решений

Пусть $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, ..., m$, — решения системы (5_0) на $(a; b)$. $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, ..., m$, линейно независимы на $(a; b)$, если и только если $\exists\ t_0 \in (a; b)$ такая, что $\vec{\varphi}_k(t_0)$, $k = 1, ..., m$, линейно независимы

Теорема. Размерность пространства решений системы (5_0) равна n.

ФСР

Базис пространства решений системы (5_0) называется фундаментальной системой решений (5_0) (ФСР).

Критерий линейной независимости системы решений

Пусть $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, ..., n$, — решения системы (5_0) на $(a; b)$, $\Phi(t)$ — составленная из них матрица. Следующие утверждения равносильны:

- $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, ..., n$, линейно независимы
- $\forall\ t \in (a; b)\ \ \det \Phi(t) \neq 0$
- $\exists\ t_0 \in (a; b)\ \Big|\ \det \Phi(t_0) \neq 0$

Матрица $\Phi(t)$, столбцами которой являются векторы ФСР, называется *фундаментальной матрицей* решений системы.

$\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (5_0), если и только если $\frac{d}{dt}\Phi(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$ и
$\exists\ t_0 \in (a;b) \;\Big|\; \det\Phi(t_0) \neq 0$

Общее решение линейной однородной системы

Любое решение системы (5_0) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c},$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (5_0), а $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$

Решение задачи Коши

для линейной однородной системы

$\forall\ t_0 \in (a;b)$, $\forall\ \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ для системы (5_0) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{y}_0,$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (5_0)

Множество фундаментальных матриц

Пусть $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ - фундаментальные матрицы решений системы (5_0). Тогда существует невырожденная числовая матрица B такая, что $\Psi(t) = \Phi(t) \cdot B$.

$$\Psi(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\Psi(t_0)$$

Определитель Вронского системы вектор-функций

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} \vec{\varphi}_1(t) & \vec{\varphi}_2(t) & \dots & \vec{\varphi}_n(t) \end{bmatrix}$$

Формула Лиувилля-Остроградского

Пусть $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, ..., n$, — решения системы (5_0) на $(a; b)$, $\Phi(t)$ — составленная их них матрица.

Если $W(t) = \det \Phi(t)$, то

$$\frac{d}{dt} W(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot W(t)$$

$$\frac{d}{dt}W(t) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} & \cdots & y'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \cdots & y'_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1n} \\
y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\sum_{l=1}^{n} a_{1l} y_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{1l} y_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^{n} a_{1l} y_{ln} \\
y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

Следствие. В условиях предыдущей теоремы

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau\right)$$

Общее решение неоднородной линейной системы

Пусть $\vec{y}_*(t)$ — некоторое решение системы (5). Тогда любое решение системы (5) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c} + \vec{y}_*(t),$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (5_0), а $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Общее решение задачи Коши для неоднородной линейной системы

$\forall\ t_0 \in (a;b)$, $\forall\ \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ для системы (5) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{y}_0 + \vec{y}_*(t),$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (5_0), а $\vec{y}_*(t)$ — решение системы (5) такое, что $\vec{y}_*(t_0) = \vec{0}$

Общее решение задачи Коши для неоднородной линейной системы

$\forall\ t_0 \in (a;b)$, $\forall\ \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ для системы (5) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{y}_0 + \vec{y}_*(t),$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (5_0), а $\vec{y}_*(t)$ — решение системы (5) такое, что $\vec{y}_*(t_0) = \vec{0}$

Метод вариации постоянных

Ищем решение в виде $\vec{y}_*(t) = \Phi(t)\vec{c}(t)$

$$\frac{d}{dt}\vec{c}(t) = \Phi^{-1}(t)\vec{f}(t)$$

$$\vec{c}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

$$\vec{y}_*(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

Итоги

Если все $a_{ij}(t) \in C(a;b)$ и $f_i(t) \in C(a;b)$, то $\forall\ t_0 \in (a;b)$ и $\forall\ \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

(a;b)

определено $\forall\ t \in (a;b)$, единственно и представимо в виде

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{y}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau,$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы

Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}, \quad A \equiv const \tag{6}$$

$\forall\ t_0 \in \mathbb{R}, \forall\ \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ задача Коши $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ для системы (6) имеет единственное решение, которое определено в любой точке $t \in \mathbb{R}$ и бесконечно дифференцируемо.

Матричная экспонента

Определение. Матричной экспонентой $\exp(At)$ называется решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = A\mathbf{\Phi}(t), \\ \mathbf{\Phi}(0) = E \end{cases} \tag{7}$$

$\begin{bmatrix} | & | & | & | \end{bmatrix} = \Phi$

$\frac{d}{dt} y^{(k)} = A y^{(k)}$

$y^{(k)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}$$

Теорема. Матричная экспонента представима в виде ряда

Опр 2

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, = f(At)$$

равномерно сходящегося на любом отрезке $[a;\ b]$.

$$f'(At) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{l=0}^{\infty} A^l \frac{t^l}{l!} = A \cdot f(At) \qquad A^0 = E$$

Доказательство.

$$\Phi(t) = \overset{=E}{\Phi(0)} + \int_0^t A\Phi(\tau)\,d\tau = E + A\underbrace{\int_0^t \Phi^{(k)}(\tau)\,d\tau}_{=\,\varphi^{(k+1)}}$$

$$\Phi^{[0]}(t) = E;$$

$$\Phi^{[k+1]}(t) = E + A\int_0^t \Phi^{[k]}(\tau)\,d\tau$$

$$\Phi^{(1)}(t) = E + AEt = E + At$$

$$\Phi^{(2)} = E + A\int_0^t (E + A\tau)\,d\tau = E + At + A\frac{t^2}{2}$$

$$\Phi^{[1]}(t) = E + At,$$

$$\Phi^{[2]}(t) = E + At + A^2\frac{t^2}{2}, \ \ldots$$

$$\Phi^{[k]}(t) = \sum_{l=0}^{k} A^l \frac{t^l}{l!} \quad = P_k(t).$$

$$\sum_{l=0}^{k} \|A\|^l \frac{|t|^l}{l!}$$

$\ddot{x} + x = 0 \qquad y = \dot{x} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\dot{y} = -x$

$$\exp At = e^{At} \qquad A^2 = -E \qquad A^3 = -A, \quad A^4 = E = A^0, \quad A^5 = A, \quad A^6 = -E$$

$\overset{\parallel}{A}$

Пример. $e^{At} = E + At - E\frac{t^2}{2!} - A\frac{t^3}{3!} + E\frac{t^4}{4!} + A\frac{t^5}{5!} + \ldots - \ldots =$

$$= E\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots\right) + A\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots\right) =$$

$$= E \cdot \cos t + A \cdot \sin t = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \qquad t = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}}_{= e^{At}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Свойства матричной экспоненты

1. $A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} A^k \frac{t^k}{k!}$$

$$A \cdot S_n(t) = S_n(t) \cdot A$$

$$\downarrow n \to \infty$$

Свойства матричной экспоненты

2. $\det(e^{At}) = e^{\operatorname{tr} A \cdot t}$

$$\int_0^t \operatorname{tr} A\, d\tau = (\operatorname{tr} A) t$$

$$\operatorname{tr} \operatorname{diag} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k$$

$$\operatorname{tr} A = 0 \Rightarrow \det e^{At} = 1$$

A = кососимм.

$\Rightarrow e^{At}$ – орт.

Свойства матричной экспоненты

3. $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$

Доказательство.

$Y(t) = e^{A(t+s)}$ $\qquad Y(0) = e^{As} \qquad Y'(t) = A e^{A(t+s)} = AY(t)$

$Z(t) = e^{At} \cdot e^{As}$ $\qquad Z(0) = e^{As} \qquad Z'(t) = A e^{At} \cdot e^{As} = AZ(t)$

Свойства матричной экспоненты

Следствие. $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ $(s = -t)$ $e^{At} \cdot e^{A(-t)} = e^0 = E$

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Если все $f_i(t) \in C(a;b)$, то $\forall\ t_0 \in (a;b)$ и $\forall\ \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

определено $\forall\ t \in (a;b)$, единственно и представимо в виде

$$\vec{y}(t) = e^{At}\underbrace{e^{-At_0}}_{\Phi^{-1}(t_0)}\vec{y}_0 + e^{At}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)\,d\tau =$$

$e^{A(t-t_0)}$

$t=t_0$

$$= e^{A(t-t_0)}\vec{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

Свойства матричной экспоненты

4. $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} \Leftrightarrow AB = BA$

Доказательство.

$AB = BA \Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$

$Y(t) = e^{(A+B)}t;$

$Z(t) = e^{At} \cdot e^{Bt}$

Упр.

$$e^{(A+B)t} \stackrel{?}{=} e^{At} \cdot e^{Bt} \Rightarrow AB = BA$$

$(A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$

$e^{(A+B)t} = E + (A+B)t + (A+B)^2 \frac{t^2}{2} + \dots =$

$e^{At} \cdot e^{Bt} = \left(E + At + \frac{A^2t^2}{2} + \dots\right)\left(E + Bt + \frac{B^2t^2}{2} + \dots\right) =$

$= E + (A+B)t + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \dots$

$BA = AB$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = \underline{\begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^2 = 0$$

$$e^{Bt} = \underline{E + Bt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{(A+B)t} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = 2y \qquad y = D e^{2t}$$

$$\dot{x} = x + De^{2t} \qquad x = C \cdot e^{t} + \underline{De^{2t}}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\text{"}\Phi(t)$$

$$e^{(A+B)t} = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} - e^{t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

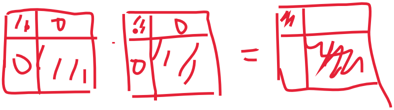
$$e^{At} \cdot e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Свойства матричной экспоненты

5. $A = diag\{A_1; A_2\} \Rightarrow e^{At} = diag\{e^{A_1 t}; e^{A_2 t}\}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{A}_1 t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \exp(\mathbf{A}_2 t) \end{pmatrix}.$$

В частности, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

то $\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$.

Свойства матричной экспоненты

6. $A = TDT^{-1} \Rightarrow e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$

$\det T \neq 0$

$z(0) = Te^{0}T^{-1} = TT^{-1} = E$

$= z(t)$

$z'(t) = TD\cdot e^{Dt}\cdot T^{-1} = \underbrace{TDT^{-1}}\underbrace{Te^{Dt}T^{-1}} = Az$

Пр. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+\varepsilon \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+\varepsilon \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1/\varepsilon \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix}$

$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$ $\varepsilon \neq 0$

$Te^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{(\lambda+\varepsilon)t} \\ 0 & \varepsilon e^{(\lambda+\varepsilon)t} \end{pmatrix} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$= e^{At}T$