Семинар 23 [19.12.2022]

Метод перевала.

$$I(\lambda) = \int\limits_{\gamma} A(z)\, e^{\lambda S(z)} dz \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\, |S''(z_0)|}} A(z_0)\, e^{\lambda S(z_0) + i\phi}, \quad \lambda \to +\infty,$$

где z_0 – стационарная точка, ϕ – направление вдоль линии наискорейшего спуска.

Задачи

Задача 1

Найти секторы сходимости на бесконечности следующих интегралов:

$$F_1 = \int e^{-x^2} dx, \quad F_2 = \int e^{ix^3} dx, \quad F_3 = \int e^{x^n} dx,$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2

Качественно изобразить на комплексной плоскости линии уровня вещественных и мнимых частей функций

а) $w(z) = z$;
б) $w(z) = z^2$;
в) $w(z) = \ln z$;

Задача 3

Найти асимптотическое разложение функции Эйри

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i \left(\frac{t^3}{3} + xt \right) \right] dt$$

при а) $x \to -\infty$, б) $x \to +\infty$. Ограничиться главным вкладом. Использовать метод перевала.

Задача 4

Найти асимптотическое разложение интеграла

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i \left(\frac{t^3}{3} + xt \right) \right] \frac{t^2 dt}{1 + t^2}$$

при $x \to +\infty$. Ограничиться главным вкладом. Использовать метод перевала.

Решения

Задача 1

Подставляем $x = re^{i\theta}$, где r – новая переменная:

$$F_1 = e^{i\theta} \int e^{-r^2 e^{2i\theta}} dr, \quad F_2 = e^{i\theta} \int e^{ir^3 e^{3i\theta}} dr, \quad F_3 = e^{i\theta} \int e^{r^n e^{in\theta}} dr.$$

Интегралы сходиться при $r \to +\infty$, если

$$\begin{aligned} F_1 : &\quad \mathrm{Re}\left[-r^2 e^{2i\theta}\right] &< 0, \\ F_2 : &\quad \mathrm{Re}\left[ir^3 e^{3i\theta}\right] &< 0, \\ F_3 : &\quad \mathrm{Re}\left[r^n e^{in\theta}\right] &< 0. \end{aligned}$$

Откуда получаем условия

$$\begin{aligned} F_1 : &\quad \sin\left(2\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) &> 0, \\ F_2 : &\quad \sin(3\theta) &> 0, \\ F_3 : &\quad \sin\left(n\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) &< 0. \end{aligned}$$

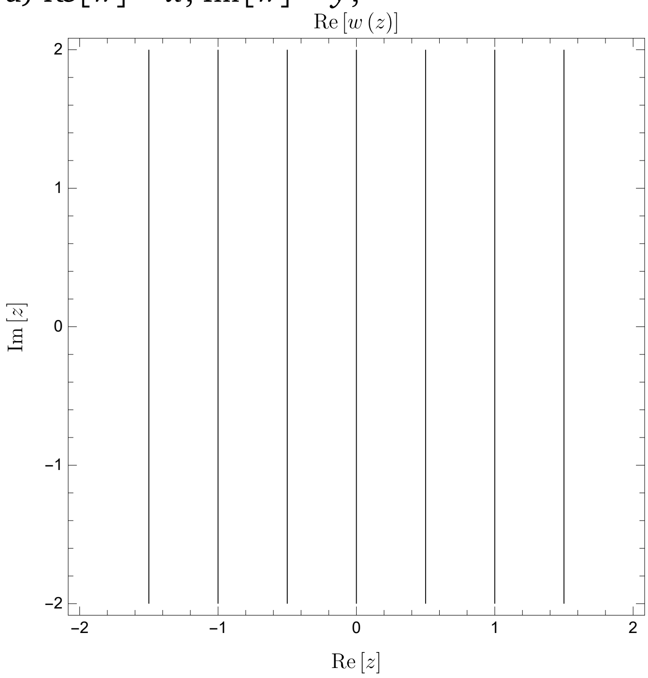
В итоге находим сектора сходимости:

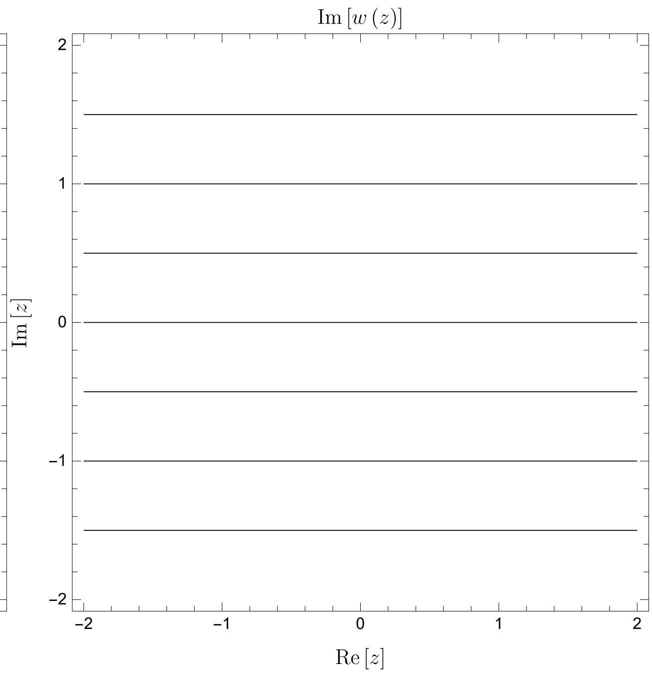
$$\begin{aligned} F_1 : &\quad \theta &\in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \\ F_2 : &\quad \theta &\in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \\ F_3 : &\quad \theta &\in \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}, \frac{3\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Задача 2

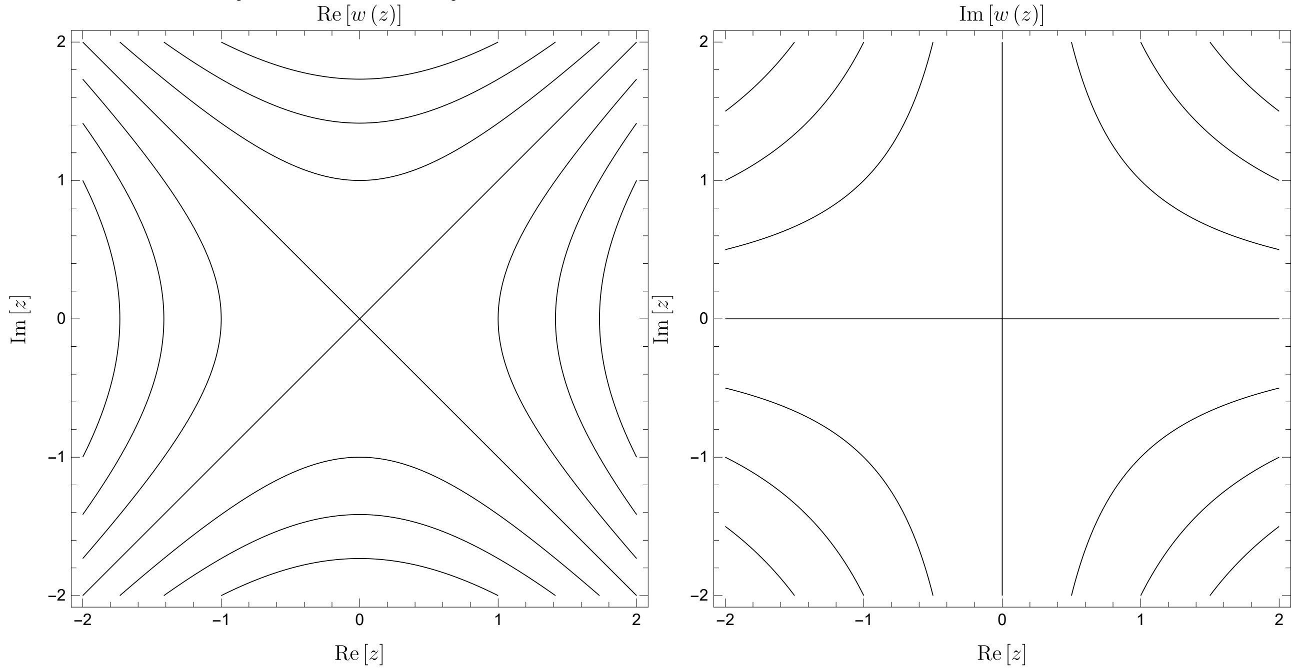
Нужно изобразить различные поверхности $\mathrm{Re}[w] = \mathrm{const}$ и $\mathrm{Im}[w] = \mathrm{const}$.

а) $\mathrm{Re}[w] = x$, $\mathrm{Im}[w] = y$;

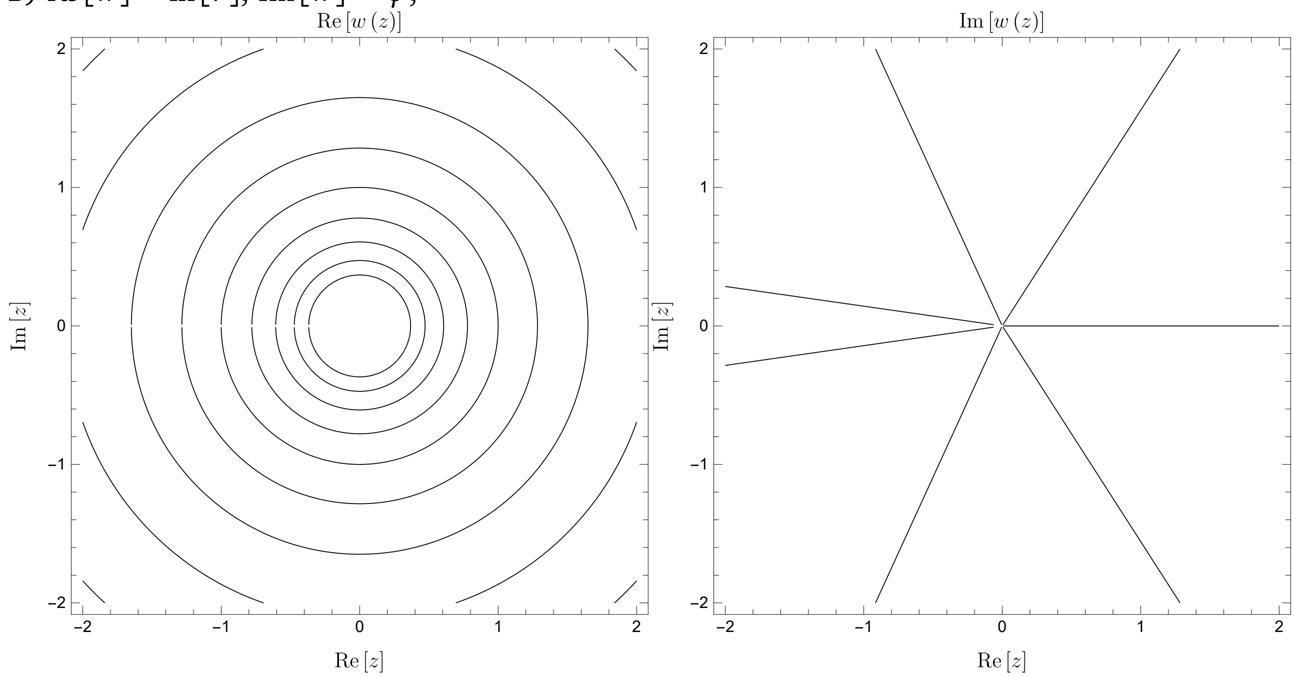




б) $\mathrm{Re}[w] = x^2 - y^2$, $\mathrm{Im}[w] = 2xy$;



в) $\mathrm{Re}[w] = \ln[r]$, $\mathrm{Im}[w] = \varphi$;



Задача 3

Случай а). Сделаем замену $t = \sqrt{|x|}z$:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} I, \quad I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda S(z)} dz, \quad \lambda = |x|^{3/2}, \quad S(z) = i\frac{z^3}{3} - iz.$$

Находим стационарные точки:

$$S'(z_\pm) = 0, \quad \Rightarrow \quad z_\pm = \pm 1.$$

Далее найдем секторы сходимости, где $\mathrm{Re}[S(z)] < 0$ при $|z| \to +\infty$. В пределе $|z| \to$

$+\infty$ имеем

$$\mathrm{Re}\left[S(z)\right] \sim \mathrm{Re}\left[i\frac{z^3}{3}\right] = -\mathrm{Im}\left[\frac{z^3}{3}\right] = -\frac{|z|^3}{3}e^{3i\varphi} = -\frac{|z|^3}{3}\sin(3\varphi).$$

Тогда секторы сходимости определяются из неравенства

$$\sin(3\varphi) > 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\pi + \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}\right).$$

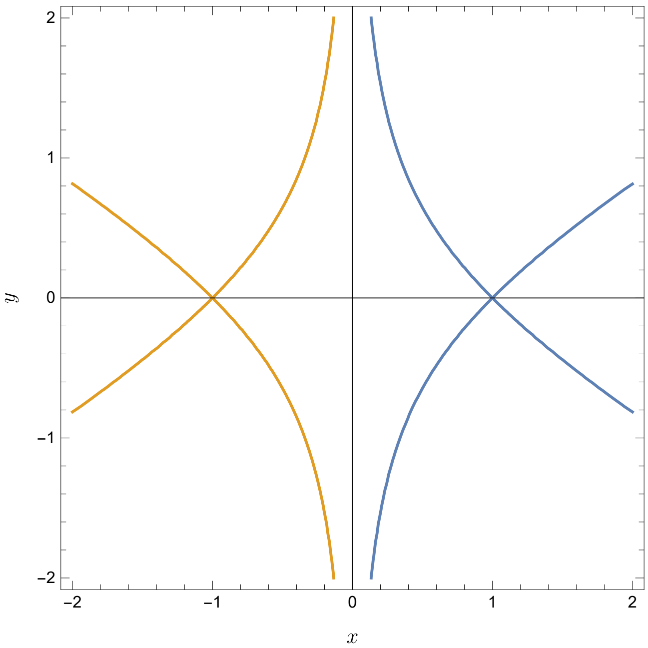
Теперь найдем линии Стокса, проходящие через стационарные точки:

$$\mathrm{Im}\left[S(z)\right] = \mathrm{Im}\left[S(z_\pm)\right].$$

Для этого подставим $z = x + iy$:

$$\frac{x^3}{3} - xy^2 - x \pm \frac{2}{3} = 0.$$

Это уравнение задает следующие пары кривых:



Таким образом в секторы сходимости попадают концы только двух линий Стокса из четырех. Вблизи стационарных точек имеем

$$S(z) \sim S(z_\pm) + \frac{(z - z_\pm)^2}{2}S''(z_\pm).$$

Сделаем замену $z - z_\pm = \xi e^{i\theta_\pm}$, чтобы найти наклон кривых Стокса вблизи стационарных точек. Угол наклона $\theta_\pm$ определяется из условий

$$\mathrm{Re}\left[e^{2i\theta_\pm}S''(z_\pm)\right] < 0, \quad \mathrm{Im}\left[e^{2i\theta_\pm}S''(z_\pm)\right] = 0.$$

Получаем:

$$\pm\mathrm{Re}\left[e^{2i\theta_\pm}i\right] < 0, \quad \mathrm{Im}\left[ie^{2i\theta_\pm}\right] = 0,$$
$$\Rightarrow$$
$$\pm\sin(2\theta_\pm) < 0, \quad \cos(2\theta_\pm) = 0,$$
$$\Rightarrow$$
$$\theta_\pm \pm \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом:

$$I \sim e^{\lambda S(z_+)+i\frac{\pi}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda \frac{\xi^2 e^{i\frac{\pi}{2}}}{2} S''(z_+)} d\xi + e^{\lambda S(z_-)-i\frac{\pi}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda \frac{\xi^2 e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} S''(z_-)} d\xi =$$

$$= e^{-i\left(\frac{2}{3}\lambda-\frac{\pi}{4}\right)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\xi^2} d\xi + e^{i\left(\frac{2}{3}\lambda-\frac{\pi}{4}\right)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\xi^2} d\xi = 2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cos\left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{\pi}{4}\right).$$

В итоге:

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{|x|}}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \to -\infty.$$

Случай б). Сделаем замену $t = \sqrt{x} z$:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi} I, \quad I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda S(z)} dz, \quad \lambda = x^{3/2}, \quad S(z) = i\frac{z^3}{3} + iz.$$

Находим стационарные точки:

$$S'(z_\pm) = 0, \quad \Rightarrow \quad z_\pm = \pm i.$$

Секторы сходимости, очевидно, те же самые

$$\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\pi + \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}\right).$$

Однако, линии Стокса уже другие:

$$\frac{y^2}{3} - x^2 = 1, \quad y = 0.$$

Только «верхняя» кривая Стокса проходит через одну из стационарных точек (через i), и при этом ее концы лежат в секторах сходимости. Наклон этой кривой в стационарной точке, очевидно, равен нулю, то есть даже не нужно поворачивать контур. Таким образом:

$$I \sim e^{\lambda S(z_+)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda \frac{\xi^2}{2} S''(z_+)} d\xi = e^{-\frac{2}{3}\lambda} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{2}{3}\lambda}.$$

В итоге

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sqrt{x}}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}, \quad x \to +\infty.$$