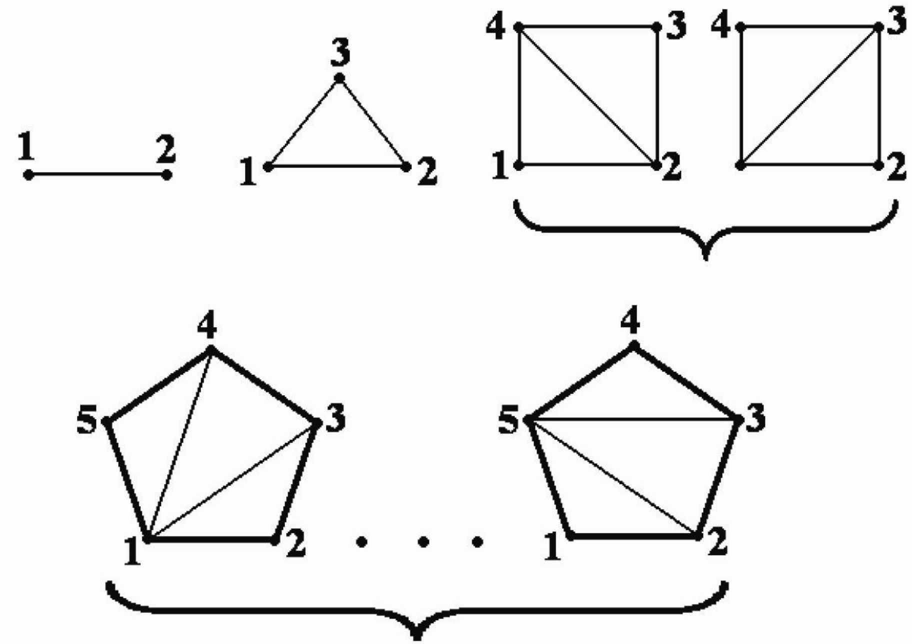
Числа Каталана.

Определение *Числа Каталана* — это рекурсивная последовательность, определенная следующим образом.

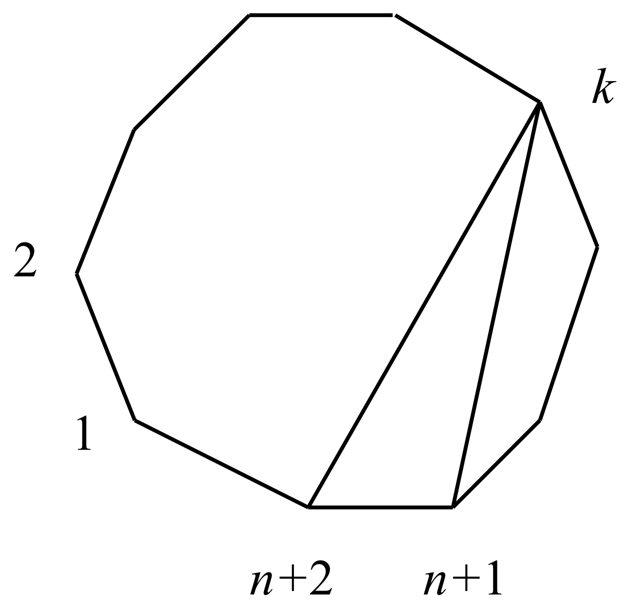
$$c_0 = 1; \quad c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} c_0 = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} c_{n-i}.$$

Утверждение. Количество различных триангуляций диагоналями выпуклых (n+2)-угольников с помеченными вершинами равно c_n.



Доказательство. Воспользуемся обобщенным принципом математической индукции. Назовем триангуляцию триангуляцией k-ого типа, если она содержит треугольник (k, n+1, n+2).

После выделения треугольника (k, n+1, n+2) остается разбить диагоналями (k+1)-угольник с вершинами (1, 2,…, k, n+2) и (n+2-k)-угольник с вершинами (k, k+1,…, n+1). По предположению индукции триангуляций k-ого типа $c_{k-1}c_{n-k}$. Поскольку триангуляции различных типов не пересекаются, то достаточно взять их сумму при k={1,…,n}.



Пример 2. Обозначим r_n количество способов, которым можно задать порядок выполнения n операций умножения матриц $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n+1}$. Эта задача равносильна задаче *расстановки n пар скобок между n+1 сомножителями*, так чтобы внутри каждой скобки было ровно 2 сомножителя.

Замечание. Трудоемкость перемножения матриц зависит от порядка выполнения операций.

Если размерности умножаемых матриц $i\times j$ и $j\times k$,то для их умножения требуется $ik(2j-1)$ элементарных операций умножения и сложения.

Пусть матрицы A_1, A_2, A_3 имеют размерности 10×100, 100×1000 и 1000×10.

Умножение $(A_1\cdot(A_2\cdot A_3))$ требует 1999000+19900 элементарных операций сложения и умножения.

Умножение $((A_1\cdot A_2)\cdot A_3)$ требует 1990000+199900 элементарных операций сложения и умножения.

Утверждение. Количество различных расстановок пар скобок между n+1 сомножителем выражается числом Каталана $r_n = c_n$.

Доказательство. Индукция по количеству пар скобок.
База индукции. $r_0 = r_1 = 1$.

Индукционный переход. Пусть для всех $i<n$ утверждение верно. Рассмотрим произведение n+1 сомножителей. Назовем произведением k-ого типа, если последним выполняется k-ое умножение. Тогда перед этим надо перемножить матрицы $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k$ и матрицы $A_{k+1} \cdot A_{k+2} \cdot \ldots \cdot A_{n+1}$.

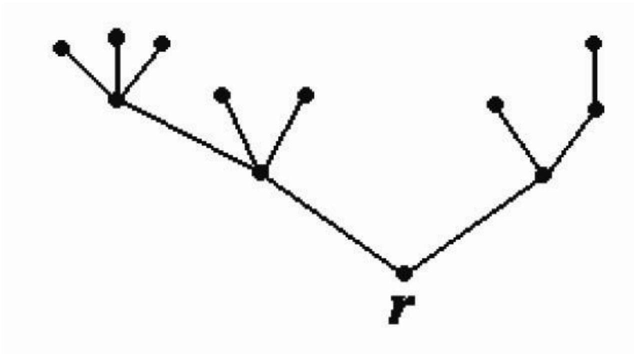
По предположению индукции это можно сделать c_{k-1} и c_{n-k} способами.

Отсюда следует, что произведений k-ого типа $c_{k-1}c_{n-k}$ и по правилу суммы

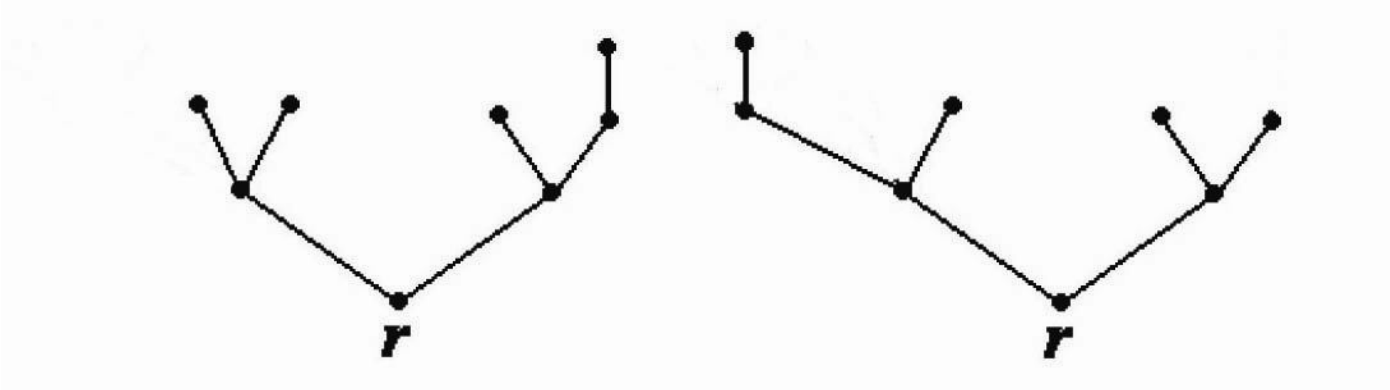
$$r_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1}c_{n-i} = c_n.$$

Плоские корневые деревья.

Определение. *Плоское корневое дерево* — это дерево с единственной выделенной вершиной, называемой *корнем*, расположенное на плоскости так, что *потомки* каждой вершины лежат выше нее.

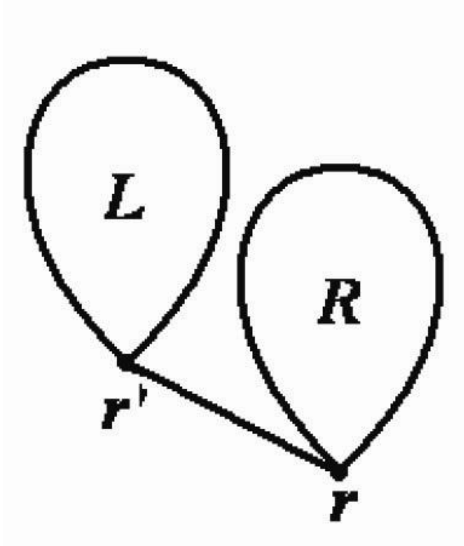


Деревья, отличающиеся порядком потомков, считаются различными.



Теорема. Количество t_m различных плоских корневых деревьев с *m* ребрами равно c_m.

Доказательство проведем индукцией по количеству ребер.
При *m* равном 0 и 1 утверждение очевидно.
Пусть утверждение верно при любом *i*<*m*. Рассмотрим дерево *T* с *m* ребрами. Поскольку m больше 0, то у корня есть хотя бы один потомок. Обозначим r' самого левого потомка корня. Тогда дерево *T* можно разбить на поддерево *L* с корнем r' и поддерево *R* с корнем *r.*

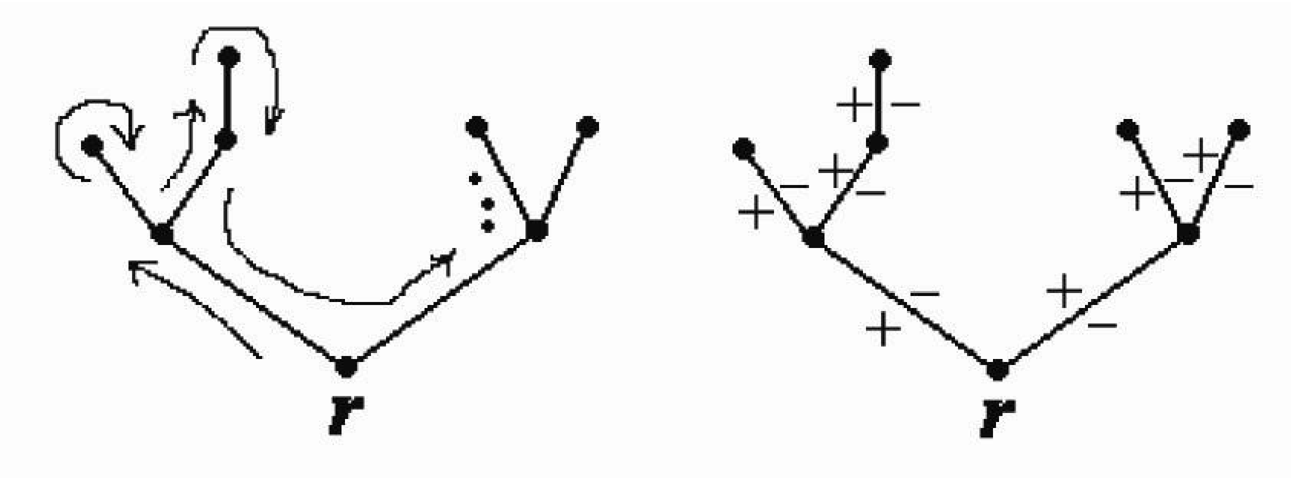


По построению суммарное количество ребер в деревьях *L* и *R* равно *m*-1. Отнесем к *k*-ому типу деревья *T*, у которых поддерево *L* содержит *k* рёбер. По предположению индукции имеется $c_k c_{m-1-k}$ деревьев *k*-ого типа. Поэтому

$$t_m = \sum_{i=0}^{m-1} c_i c_{m-i-1} = \sum_{i=1}^{m} c_{i-1} c_{m-i} = c_m .$$

Формула для чисел Каталана.

Сопоставим каждому плоскому корневому дереву T с m вершинами последовательность, состоящую из m «+» и m «-» следующим образом.



(++−++−−−++−+−−).

Определение. Последовательность из m плюсов и m минусов назовем *хорошей*, если на любом ее начальном отрезке количество «+» больше либо равно количества «−». Множество хороших последовательностей обозначим через $X(m,m)$, а *плохих* (m,m)-последовательностей — через $П(m,m)$.

Утверждение. Количество корневых деревьев с m ребрами равно количеству хороших (m,m) последовательностей.

Следствие. $c_n = |X(n,n)|$.

Теорема. $\left|\Pi(n,n)\right| = C_{2n}^{n-1}$.

Доказательство. Установим взаимно-однозначное соответствие между плохими (n,n) последовательностями и (n-1,n+1) последовательностями.

Для любой плохой последовательности существует номер i для которого в начальном участке последовательности длины i количество «–» больше количества «+». Наименьшее из таких чисел обязательно нечетное. Назовем его момент «грехопадения» и обозначим 2k+1. В последовательности длины 2k+1 ровно k+1 минусов. Инвертировав хвост плохой последовательности после 2k+1, получим некоторую (n-1,n+1) последовательность.

Разным плохим последовательностям соответствуют разные (n-1,n+1) последовательности.

У любой (n-1,n+1) последовательности тоже существует момент «грехопадения». Инвертировав хвост последовательности, получим плохую (n,n) последовательность.

Следствие. $c_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$

Доказательство.

$$c_n = \left| X(n,n) \right| = C_{2n}^n - \left| \Pi(n,n) \right| = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} =$$

$$C_{2n}^n - \frac{n}{n+1} C_{2n}^n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Формула включений и исключений.

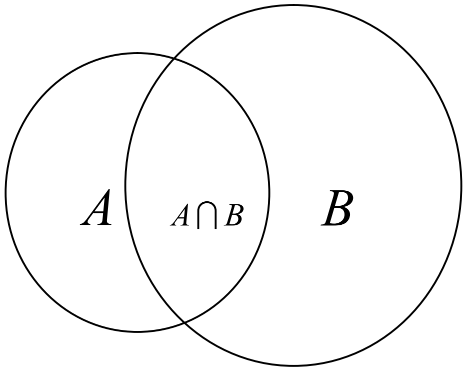
Пример. $\left|A \bigcup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \bigcap B\right|$.

Доказательство.

$$\left|A \bigcup B\right| = \left|A \bigcup \left(B \setminus A\right)\right| = \left|A\right| + \left|B \setminus A\right|$$

и

$$\left|B\right| = \left|\left(A \bigcap B\right) \bigcap \left(B \setminus A\right)\right| = \left|A \bigcap B\right| + \left|B \setminus A\right|.$$



Теорема. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ конечные множества. Тогда

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, |I|=i} \left|\bigcap_{k \in I} A_k\right|.$$

Доказательство. Пусть элемент *a* входит ровно в *t* множеств, тогда в правое слагаемое равенства он входит $C_t^1 - C_t^2 + \ldots + (-1)^{t-1} C_t^t$ раз. Но эта сумма равна 1, поскольку

$$0 = (1-1)^t = C_t^0 - C_t^1 + C_t^2 - \ldots + (-1)^t C_t^t = 1 - \left(C_t^1 - C_t^2 + \ldots + (-1)^{t-1} C_t^t\right).$$

Следствие. Пусть дано конечное множество *A* и семейство его подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_n$. Будем считать что $\bigcap_{i \in \varnothing} A_i = A$. Тогда

$$\left|A \setminus \left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right)\right| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, |I|=i} \left|\bigcap_{k \in I} A_k\right|.$$

Пример. Задача о беспорядках.

Определение. Назовем перестановку $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ *беспорядком*, если для любого номера $i_k \neq k$.

Подсчитать количество беспорядков D_n.

Решение. Обозначим A_k перестановки, для которых $i_k = k$.

Тогда для любого набора $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ множество перестановок оставляющих на месте все элементы из I есть $\bigcap\limits_{k \in I} A_k$.

$$\left| \bigcap_{k \in I} A_k \right| = (n - |I|)!.$$

Количество i-элементных подмножеств равно C_n^i.

По теореме включений и исключений.

$$|D_n| = |A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| = P_n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I| = i} \left| \bigcap_{k \in I} A_k \right| =$$

$$P_n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (n-i)! C_n^i = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \cong n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^i \frac{1}{i!} + \dots \right) = \frac{n!}{e}.$$

Еще одно тождество для чисел Стирлинга.

Утверждение.

$$S(m,n)=\frac{1}{n!}\left(n^m-(n-1)^m C_n^1+(n-2)^m C_n^2+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\right).$$

Доказательство.

Количество отображений $f:X\to Y$ произвольного типа равно n^m, а сюръекций — $S(m,n)\cdot n!$. Обозначим A_i множество отображений, для которых $y_i\notin f(X)$ и A множество всех отображений. Отображение $f:X\to Y$ не является сюръекцией только если $f\in A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$.

Для любого $I\subset Y$ существует $(n-|I|)^m$ отображений избегающих элементов из I.

По формуле включений и исключений

$$S(m,n)\cdot n!=\left|A\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_n)\right|=n^m-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{I\subset\{1,\ldots,n\},|I|=i}\left|\bigcap_{k\in I}A_k\right|=$$

$$n^m-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(n-i)^m C_n^i.$$

Формулы для чисел Стирлинга.

$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + n \cdot S(m-1,n) \ .$$

$$S(m,n) = \sum_{i=1}^{m-n+1} C_{m-1}^{i-1} S(m-i,n-1) \ .$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_m^k \cdot S(m,k) = m^n .$$

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\left(n^m - (n-1)^m C_n^1 + (n-2)^m C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}\right) .$$