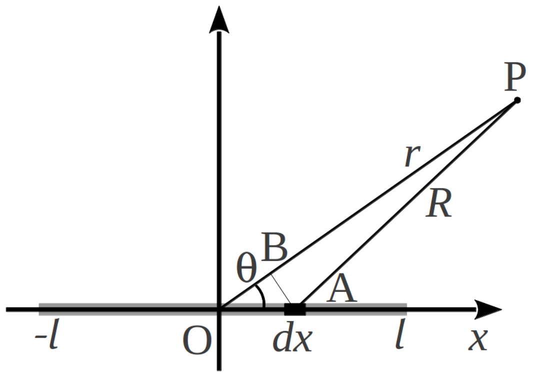
Задача.
Исследовать излучение полуволнового вибратора в волновой зоне.
Решение.
Общее выражение для тока через вибратор имеет вид

$$I(x,t) = I_0 \frac{\sin k(l-|x|)}{\sin kl}\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\,.$$



Для полуволнового вибратора $kl = \frac{\pi}{2}$ и тогда

$$I(x,t) = I_0 \cos kx\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\,.$$

Поскольку размеры излучающей системы сравнимы с длиной волны, приближение дипольного излучения не выполняется. Поэтому выделим элементарный отрезок dx антенны в окрестности точки x. Вектор-потенциал $d\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ от элементарного отрезка, формируемый в волновой зоне, получается как результат разложения запаздывающего потенциала по малому параметру $\frac{x}{r}$ с оставлением дипольного члена:

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\mathbf{j}(x,t-R/c)}{R}dV = \frac{\mathbf{I_0}\cos kx\, \mathrm{e}^{i(\omega R/c-\omega t)}}{cR}dx = \frac{\mathbf{I_0}\cos kx\, \mathrm{e}^{i(kR-\omega t)}}{cR}dx$$

Здесь R=AP – расстояние от рассматриваемого элемента вибратора до точки наблюдения.

$$R = OP - OA\cos\theta = r - x\cos\theta,\ \frac{1}{R} \approx \frac{1}{r}.$$

Тогда выражение для вектор-потенциала от элементарного отрезка принимает вид

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \approx \frac{\mathbf{I_0}\cos kx}{cr}\, \mathrm{e}^{i(kr-kx\cos\theta-\omega t)}\, dx$$

Согласно принципу суперпозиции вектор-потенциал от всего вибратора равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{I_0}}{cr}\, \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} \int\limits_{-l}^{l} \cos kx\, \mathrm{e}^{-ikx\cos\theta}\, dx$$

Неопределенный интеграл берется по частям и равен

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\, \mathrm{e}^{ax}$$

В нашем случае $a = -ik\cos\theta,\ b = k$:

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx dx = \frac{\sin kx - i\cos\theta\cos kx}{k(-\cos^2\theta+1)}\, \mathrm{e}^{-ikx\cos\theta} = \frac{\sin kx - i\cos\theta\cos kx}{k\sin^2\theta}\, \mathrm{e}^{-ikx\cos\theta}$$

Подставим пределы интегрирования и вычислим вектор-потенциал:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{I_0}}{cr}\, \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\, \frac{\sin kx - i\cos\theta\cos kx}{k\sin^2\theta}\, \mathrm{e}^{-ikx\cos\theta}\Big|_{kx=-kl=-\pi/2}^{kx=kl=\pi/2} = \frac{\mathbf{I_0}}{cr}\, \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\, \frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi\cos\theta}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi\cos\theta}{2}}}{k\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{\mathbf{I_0}}{cr}\, \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\, \frac{2\cos\frac{\pi\cos\theta}{2}}{k\sin^2\theta}$$

Магнитное поле в волновой зоне равно *

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = [\nabla\times\mathbf{A}] = \frac{2\cos\frac{\pi\cos\theta}{2}}{ckr\sin^2\theta}\left[i\mathbf{k}\times\mathbf{I_0}\right]\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} = i\frac{2\cos\frac{\pi\cos\theta}{2}}{cr\sin^2\theta}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\left[\mathbf{n}\times\mathbf{I_0}\right]$$

В волновой зоне $E_r \propto \frac{1}{r^2}$ и им пренебрегают по сравнению с

$$E_\theta(r,t) = [\mathbf{B}\times\mathbf{n}]$$

Локально получается линейно поляризованная плоская монохроматическая волна.

Средняя по времени интенсивность излучения в единицу телесного угла равна

$$\left\langle\frac{dJ}{d\Omega}\right\rangle = \frac{c}{4\pi}r^2|B|^2\left\langle\cos^2\omega(t-r/c)\right\rangle = \frac{cr^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{2I_0\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{cr\sin^2\theta}\right]^2 = \frac{I_0^2}{2\pi c}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2$$

Излучение аксиально симметрично с максимумом при $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\left\langle\frac{dJ}{d\Omega}\right\rangle_{max} = \frac{I_0^2}{2\pi c}$$

При $\theta\to 0$ $\left\langle\frac{dJ}{d\Omega}\right\rangle \to 0$

Средний по времени поток энергии в полный телесный угол равен

$$\langle J\rangle = \frac{I_0^2}{c}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}{1-\xi^2}d\xi,$$

где $\xi = \cos\theta$.

Интеграл не выражается через элементарные функции и приблизительно равен 1,22. В итоге

$$\langle J\rangle = 1.22\frac{I_0^2}{c}.$$

Сопротивление излучения в единицах СГС равно

$$R_{ir} = \frac{2.44}{c}$$

В единицах СИ $R_{ir} \approx \frac{2.44\cdot 9\cdot 10^{11}}{3\cdot 10^{10}} = 73$ Ом.

*Использовано тождество $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left[\nabla\xi\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi}\right]$, где $\xi = i(kr-\omega t)$. Кроме того, отброшено слагаемое $\sim\frac{1}{r^2}$.