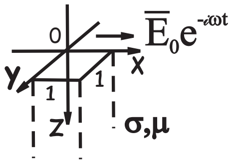
1. Квазистационарные явления

Урок 26

Скин-эффект. Базовые решения - плоскость, шар, цилиндр

1.1. (Задача 6.76) Полупространство $Z \geqslant 0$ заполнено проводником с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ. Параллельно плоскости $Z = 0$ имеется электрическое поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$. Найти: а) поле в полупространстве; б) среднюю за период мощность $\overline{W} = \int_0^\infty (\overline{\mathbf{jE}}) dz$, выделяющуюся в бесконечном столбике от нуля до ∞ по Z и с единичной площадью сечения (1×1).



Решение Поскольку плотность токов смещения в проводящей среде мала по сравнению с током проводимости, то уравнения Максвелла, описывающие распределение переменных полей и токов в проводниках, принимают вид

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,,$$

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\,\mathbf{E}\,,$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0,$$

$$\text{div}\,\mathbf{D} = 0,$$

$$\mathbf{j} = \sigma\,\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}, \tag{1}$$

где σ – проводимость среды. Используя эти уравнения, можно получить дифференциальное уравнение, содержащее только вектор напряженности электрического или магнитного полей:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{2}$$

Из симметрии рассматриваемой задачи ясно, что $\mathbf{E}$ может зависеть только от координаты z и времени. Граничное условие для электрического поля на поверхности проводника очевидно из первого уравнения системы (1): $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. В силу этого условия электрическое поле в проводнике у его поверхности равно $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\,\exp(-i\omega\,t)$. В переменном поле с частотой ω зависимость всех величин от времени описывается множителем $\exp(-i\omega\,t)$. Тогда уравнение (2) для напряженности электрического поля, зависящей только от координат, примет вид

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} + k^2\mathbf{E} = 0\,,$$

где

$$k = \sqrt{-\frac{4\pi\mu\sigma\omega\, i}{c^2}} = \pm\frac{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}{c}(1-i) = \pm\frac{1-i}{\delta}\,, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}\,.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $z \to \infty$, пропорционально $\exp\big(-(1-i)z/\delta\big)$. Учитывая граничное условие при $z = 0$, получаем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{-i(\omega\, t - \frac{z}{\delta})}, \qquad \mathbf{j} = \sigma\, \mathbf{E_0}\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{-i(\omega\, t - \frac{z}{\delta})}.$$

Таким образом, по мере проникновения в глубь проводника амплитуда напряженности электрического поля, а с ней и амплитуда тока убывает по экспоненциальному закону. При этом основная часть тока сосредоточена в поверхностном слое толщиной δ. Величина скин-слоя δ уменьшается с частотой $\delta \sim 1/\sqrt{\omega}$. Условие применимости макроскопических уравнений поля, о которых говорилось выше, требует, чтобы δ было велико по сравнению с длиной свободного пробега электронов проводимости. При увеличении частоты это условие в металлах нарушается первым.

Средняя по времени энергия $\overline{dW}$, диссипируемая в элементе объема dv проводника в единицу времени, равна

$$\overline{dW} = \overline{(\mathbf{j}\,\mathbf{E})}\, dv = \sigma\, \overline{E^2}\, dv\,,$$

где черта означает усреднение по времени. Здесь $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ вещественные.

Энергия, выделяемая в бесконечном столбике с единичной площадью сечения:

$$\overline{W} = \int\limits_0^\infty \sigma\, \overline{E^2}\, dz\,.$$

Если $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ взять в комплексном виде, то среднее по времени значение их произведения можно вычислить так:

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \mathcal{R}e\,(\mathbf{j}\,\mathbf{E}^{\,*})\, dz = \frac{\sigma\, E_0^2}{2}\int\limits_0^\infty e^{-2z/\delta}\, dz = \frac{E_0^2\sigma\,\delta}{4}.$$

1.2. (Задача 6.77) Полупространство $Z \geqslant 0$ заполнено проводником с проводимостью σ. Параллельно плоскости $Z = 0$ включено переменное электрическое поле, представляющее собой сумму двух полей с разными амплитудами E_0 и E_1. Частоты различаются на порядок ω и 10ω соответственно. Найти среднюю за большой период мощность $\overline{W}$, выделяющуюся в бесконечном столбике по Z от нуля до бесконечности с единичной площадью сечения.

Решение Основное уравнение, описывающее скин-эффект, имеет вид

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

и граничное условие

$$\mathbf{E}(0,t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t}.$$

Легко убедиться, что решение в виде линейной комбинации удовлетворяет как исходному уравнению, так и граничным условиям.

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 e^{-z/\delta_0} e^{-i\omega t - z/\delta_0} + \mathbf{E}_1 e^{-z/\delta_1} e^{-i\omega t - z/\delta_1}.$$

Плотность тока подчиняется закону Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Тогда средняя мощность, выделяющаяся в единице объема

$$\overline{W} = \sigma \int\limits_0^\infty \overline{(\mathbf{E})^2} \mathrm{d}z.$$

Среднее от квадрата поля можно записать в виде

$$\overline{(\mathbf{E})^2} = \frac{1}{2}\left[E_0^2 e^{-2z/\delta_0} + E_1^2 e^{-2z/\delta_1}\right] + 2E_0E_1\overline{\cos[(\omega_0-\omega_1)t]}.$$

Поскольку среднее по большому интервалу времени от косинуса равно нулю, получим

$$\overline{W} = \frac{\sigma}{2}\int\limits_0^\infty \left[E_0^2 e^{-2z/\delta_0} + E_1^2 e^{-2z/\delta_1}\right]\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\sigma\left(E_0^2\delta_0 + E_1^2\delta_1\right),$$

где $\delta_i = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega_i}$, $i = 0,1$ и $\omega_1 = 0,1\omega_0$.

1.3. (Задача 6.79) Найти активное сопротивление тонкого цилиндрического проводника (длина – ℓ, радиус – a, проводимость – σ; $\mu = 1$) в предельных случаях слабого и сильного скин-эффекта.

Решение Внутри провода ввиду его осевой симметрии в цилиндрической системе координат с осью Z вдоль оси провода поле $\mathbf{E}$ имеет лишь z-компоненту и зависит только от координаты r. Для периодического поля с частотой ω получаем уравнение (см. задачу 6.76) Бесселя

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + k^2 E = 0,$$

где
$$k = \pm\frac{1-i}{\delta}\,, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}\,, \qquad E = E_z\,.$$

Общим решением этого уравнения будет выражение
$$E_z = A_1\,\mathcal{I}_0(kr) + A_2\,Y_0(kr)\,,$$
где $\mathcal{I}_0(kr)$, $Y_0(kr)$ — цилиндрические функции нулевого порядка соответственно первого и второго рода. Так как E не может обратиться в бесконечность на оси провода, то A_2 следует положить равным нулю: $A_2 = 0$, поскольку $Y_0(0) = \infty$. Таким образом, $E_z = A_1\,\mathcal{I}_0(kr)$.

Используя разложение функции Бесселя при $kr \ll 1$, что соответствует предельному случаю малых частот ($a/\delta \ll 1$),
$$\mathcal{I}_0(kr) = 1 - \frac{(kr/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(kr/2)^4}{(2!)^2} - \ldots$$
для напряженности электрического поля получаем
$$E_z \simeq A_1\left[1 - \frac{i}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right]e^{-i\omega t}\,.$$

По такому же закону распределена плотность тока $j_z = \sigma E_z$. Сопротивление проводника переменному току силы J найдем как отношение среднего количества энергии $\overline{W}$, выделяемой в проводнике за единицу времени, к среднему за период значению квадрата силы тока $\overline{J^2}$:
$$R = \frac{\overline{W}}{\overline{J^2}}\,,$$
$$\overline{W} = \frac{\sigma\,\ell}{2}\int\limits_0^a \mathcal{R}e\,(E_z\cdot E_z{}^*)\,2\pi r\,dr \simeq \frac{\pi a^2\ell\,\sigma\,A_1^2}{2}\left(1 + \frac{1}{24}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4\right).$$
Найдем полный ток, текущий по проводнику:
$$J = \int\limits_0^a j_z\,2\pi r\,dr = \pi a^2\,\sigma\,A_1\left[1 - \frac{i}{4}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{48}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4\right]e^{-i\omega t}.$$

Тогда средний квадрат тока:
$$\overline{J^2} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\,(JJ^*) = \frac{\pi^2 a^4\,\sigma^2\,A_1^2}{2}\left(1 + \frac{1}{48}\,\frac{a^4}{\delta^4}\right)$$

и сопротивление:

$$R=\frac{\ell}{\pi a^2\,\sigma}\left(1+\frac{1}{48}\,\frac{a^4}{\delta^4}\right)=\frac{\ell}{\pi a^2\,\sigma}\left(1+\frac{1}{12}\,\left(\frac{\pi\,\sigma\,\omega\,a^2}{c}\right)^2\right)\text{при}\,\delta\gg a.$$

При больших частотах ($\delta \ll a$) можно считать поверхность плоской. Поэтому (см. 6.76)

$$E_z=A_1\,e^{-\frac{a-r}{\delta}}\,e^{-i\left(\omega\,t-\frac{a-r}{\delta}\right)}.$$

Поступая далее так же, как и в случае малых частот, находим

$$\overline{W}=\frac{\pi al\,\sigma\,\delta A_1^2}{2}\,,\qquad \overline{J^2}=\pi^2a^2\,\sigma^2\,\delta^2\,A_1^2\,.$$

И значит,

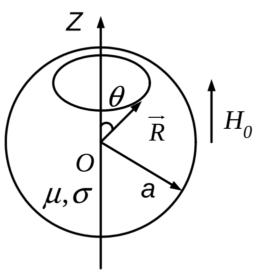
$$R=\frac{\overline{W}}{\overline{J^2}}=\frac{\ell}{2\pi a\,\sigma\,\delta}\qquad\text{при}\qquad\delta\ll a\,.$$

1.4. (Задача 6.81) Широкая плита с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ, ограниченная плоскостями $x=\pm h$, обмотана проводом, по которому течет ток $J=J_0e^{-i\omega t}$. Провод тонкий, число витков на единицу длины n, витки намотаны параллельно друг другу. Пренебрегая краевыми эффектами, определить вещественную амплитуду магнитного поля внутри плиты. Исследовать предельные случаи слабого ($\delta\gg h$) и сильного ($\delta\ll h$) скин-эффекта.

Решение $H\left(x\right)=H_0\sqrt{\left[\left(\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{\delta}+\cos^2\frac{x}{\delta}\right)\big/\left(\mathrm{sh}^2\,\frac{h}{\delta}+\cos^2\frac{h}{\delta}\right)\right]}$, где $H_0=4\pi J_0n/c$. При слабом скин-эффекте ($\delta\gg h$) $H\left(x\right)\simeq H_0$; при сильном скин-эффекте ($\delta\ll h$) $H\left(x\right)\simeq H_0e^{-(h-|x|)/\delta}$.

1.5. (Задача 6.82) Металлический шар радиуса a проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ помещен в однородное переменное магнитное поле $H(t)=H_0e^{-i\omega t}$. Считая частоту малой, найти в первом неисчезающем приближении распределение вихревых токов в шаре и среднюю поглощаемую им мощность.

Решение



Если частота ω изменения поля мала, т. е. глубина проникновения δ велика по сравнению с размерами тела, тогда распределение магнитного поля в каждый момент времени будет таким, каким оно было бы в статическом случае при заданном значении внешнего поля вдали от тела. Действительно, в этом случае правую часть уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{4\pi i \mu \sigma\, \omega}{c^2}\, \mathbf{H}$$

можно заменить нулем. Используя решение задачи 5.7, получаем, что поле внутри шара в нулевом (по частоте) приближении равно

$$\mathbf{H} = \frac{3}{\mu + 2} \mathbf{H}_0\, e^{-i\omega\, t}\,.$$

Выберем сферическую систему координат (R, θ, α) с началом в центре шара. Угол θ будем отсчитывать от оси Z, направленной вдоль $\mathbf{H}_0$. Из свойств симметрии системы ясно, что вихревое электрическое поле, согласно уравнению

$$\text{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

будет лежать в плоскостях, перпендикулярных $\mathbf{H}_0$, и направлено по касательным к окружностям с центром на оси Z. Оно зависит только от величины радиусов этих окружностей. Так же будут направлены и токи: $j_\alpha = \sigma E_\alpha$. Нужно заметить, что в нулевом по частоте приближении поле $\mathbf{E}$ отсутствует, что следует из уравнения

$$\text{rot}\ \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\, \mathbf{E} = 0\,.$$

Воспользуемся интегральным аналогом уравнения (1)

$$\oint E_l\, dl = -\frac{1}{c}\, \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,,$$

где Φ — поток вектора магнитной индукции через поверхность, натянутую на контур, по которому берется циркуляция вектора $\mathbf{E}$ в левой стороне уравнения. Взяв интеграл по окружности радиуса $R \sin\theta$, найдем

$$E_\alpha = \frac{3\mu\, i}{2\,(\mu + 2)}\ \frac{H_0 R \omega \sin\theta}{c}\ e^{-i\omega\, t}$$

и, значит,

$$j_\alpha = \frac{3\mu}{2\,(\mu + 2)}\ \frac{H_0 R\, \sigma\, \omega \sin\theta}{c}\ e^{-i(\omega\, t - \pi/2)}\,.$$

Отбрасывая мнимую часть, получаем

$$j_\alpha = \frac{3\mu\,\sigma\,\omega\,H_0 R}{2\,(\mu+2)\,c}\sin\theta\,\sin\omega t\,.$$

Количество тепла, выделяемое в единицу времени в элементе объема $dv = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta\, dR$, равно

$$dW = \frac{j^2}{\sigma}\,2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta\, dR\,.$$

Интегрируя это выражение по объему шара, получаем

$$W(t) = \frac{6\pi}{5}\left(\frac{\mu\,\omega\,H_0}{(\mu+2)\,c}\right)^2 \sigma\, a^5 \sin^2\omega\, t\,.$$

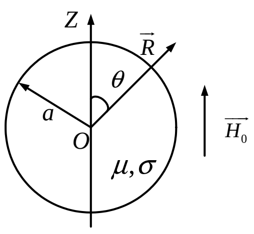
Тогда среднее количестно тепла, выделяемое в единицу времени, будет

$$\overline{W} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T W(t)\,dt = \frac{3\pi}{5}\frac{\mu^2\omega^2\,\sigma H_0^2 a^5}{c^2(\mu+2)^2} \quad \text{при} \quad \delta \gg a\,.$$

Поглощаемая мощность энергии при малых частотах пропорциональна ω^2.

1.6. (Задача 6.83.) Металлический шар помещен в однородное магнитное поле, меняющееся с частотой ω. Найти результирующее поле и среднюю поглощаемую шаром мощность при больших частотах. Радиус шара – a, магнитная проницаемость – μ, проводимость – σ. *Указание.* При определении поля вне шара считать, что внутри шара поле равно нулю (т. е. пренебречь глубиной проникновения δ по сравнению с радиусом шара a). При определении поля внутри шара, считать его поверхность плоской.

Решение При больших частотах магнитное поле проникает лишь в тонкий поверхностный слой проводника. Глубина проникновения $\delta \ll a$. Для вычисления поля вне проводника можно пренебречь толщиной этого слоя, т. е. считать, что внутрь тела магнитное поле не проникает. По шару будут течь поверхностные токи. Эти токи создадут магнитный момент шара $\mathbf{m} = b\mathbf{H}_0$, так что поле вне шара согласно результатам задачи 6.9 можно записать как



$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{\mathbf{m}}{R^3} + \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{m}\,\mathbf{R})}{R^5} \qquad \text{при} \qquad R > a\,.$$

Из условия непрерывности нормальной составляющей вектора магнитной индукции на поверхности шара $B_R\big|_{R=a} = 0$ получим

$$H_0 \cos\theta - \frac{bH_0 \cos\theta}{a^3} + \frac{3bH_0 \cos\theta}{a^3} = 0\,,$$

откуда $\mathbf{m} = -\mathbf{H}_0 a^3/2\,,\ b = -a^3/2$— магнитная поляризуемость шара при сильном скин-эффекте. Значит,

$$\mathbf{H}(R=a) = -\frac{3}{2} H_0 \sin\theta\, \mathbf{n}_\theta\,,$$

где $\mathbf{n}_\theta$ — единичный вектор, соответствующий углу θ в сферической системе координат $(R,\ \theta,\ \alpha)$. Нахождение истинного распределения поля в поверхностном слое шара можно упростить, рассматривая небольшие участки поверхности как плоские с известным значением поля на поверхности. Тогда (см. 6.76)

$$\mathbf{H} = -\frac{3}{2} H_0 \sin\theta\, e^{-\frac{h}{\delta}}\, e^{-i\left(\omega t - \frac{h}{\delta}\right)}\, \mathbf{n}_\theta\,,$$

$$H_R = H_\alpha = 0\,,$$

где $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$, а h отсчитывается от поверхности по нормали в глубь шара. Среднюю поглощаемую шаром энергию можно найти как среднее количество энергии поля, втекающей извне внутрь проводника в единицу времени, т. е. интеграл от среднего по времени вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$, взятый по поверхности шара:

$$\overline{W} = \int (\overline{\mathbf{S}}\, d\mathbf{s}) = \frac{c}{4\pi} \int \Big(\overline{[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]}\cdot d\mathbf{s}\Big).$$

Из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\sigma\,\mathbf{E}/c$ найдем

$$\mathbf{E} = \frac{c\,(1-i)}{4\pi\,\sigma\,\delta}[\mathbf{H}\times\mathbf{n}],$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный поверхности и направленный внутрь шара.

Найдем средний вектор Пойнтинга на поверхности шара:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi}\overline{[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]} = \frac{c}{8\pi}\mathcal{R}e\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] =$$

$$= \frac{c}{32\pi^2\,\sigma\,\delta}\mathcal{R}e\left((1-i)\Big[[\mathbf{H}\times\mathbf{n}]\times\mathbf{H}^\star\Big]\right) = \frac{9}{128}\,\frac{c^2\,H_0^2\,\sin^2\theta}{\pi^2\,\sigma\,\delta}\,\mathbf{n}\,.$$

Интегрируя $\overline{\mathbf{S}}$ по поверхности, окончательно получаем

$$\overline{W} = \int_0^{\pi} \overline{S}\, 2\pi\, a^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{3}{8}\, H_0^2 a^2 c \sqrt{\frac{\mu\,\omega}{2\pi\,\sigma}} \qquad \text{при} \qquad \delta \ll a\,.$$

Таким образом, диссипация энергии при больших частотах пропорциональна $\sqrt{\omega}$.