

2SAT

Задача:

2SAT (*2-satisfiability*) выполнимость функции — задача распределения аргументов в булевой КНФ функции, записанной в виде 2-КНФ (КНФ Крома), таким образом, чтобы результат данной функции был равен 1.

Содержание

- 1 Алгоритм решения
- 2 Примеры решения 2SAT
 - 2.1 Первый пример
 - 2.2 Второй пример
- 3 Использование 2SAT
- 4 См. также
- 5 Примечания
- 6 Источники информации

Алгоритм решения

Рассмотрим любой дизъюнкт функции: $a \vee b$. Несложно заметить, что это равнозначно записи $(\bar{a} \rightarrow b \wedge \bar{b} \rightarrow a)$.

Построим ориентированный граф, где вершинами будут аргументы и их отрицание, а ребрами будут ребра вида: $\bar{a} \rightarrow b$ и $\bar{b} \rightarrow a$ для каждого дизъюнкта функции $a \vee b$.

Теорема:

Для того, чтобы данная задача **2SAT** имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для любой переменной x из вершины x нельзя достичь \bar{x} и из вершины \bar{x} нельзя достичь x одновременно. $(\bar{x} \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow \bar{x})$.

Доказательство:

▷

(\Rightarrow) Докажем необходимость: Пусть **2SAT** имеет решение. Докажем, что не может быть такого, чтобы для любой переменной x из вершины x можно достичь \bar{x} и из вершины \bar{x} можно достичь x одновременно. $((\bar{x} \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow \bar{x}))$. Тогда чтобы из \bar{x} достичь x ($\bar{x} \rightarrow x$ было верным), x должен быть равен 1. С другой стороны для того, чтобы из x достичь \bar{x} ($x \rightarrow \bar{x}$ было верным), x должен быть равен 0. Отсюда следует противоречие.

(\Leftarrow) Докажем достаточность: Пусть для любой переменной x из вершины x нельзя достичь \bar{x} и из вершины \bar{x} нельзя достичь x одновременно. Докажем, что этого достаточно, чтобы **2SAT** имело

решение. Пусть из \bar{x} можно достичь x , но из вершины x нельзя достичь \bar{x} . Докажем, что из x не достижимо такой y , что из y достижимо \bar{y} . (т.е. $x \rightarrow y \rightarrow \bar{y}$ ($x = 1, y = 0$)). Если из $x \rightarrow y$, то $\bar{x} \vee y$, отсюда следует $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$. Тогда $x \rightarrow y \rightarrow \bar{y} \rightarrow \bar{x}$. Следовательно $x \rightarrow \bar{x}$. Противоречие.

<

Теперь мы можем собрать весь алгоритм воедино:

1. Построим граф импликаций.
2. Найдём в этом графе компоненты сильной связности за время $O(N + M)$, где N — количество вершин в графе (удвоенное количество переменных), а M — количество ребер графа (удвоенное количество дизъюнктов).
3. Пусть $comp[v]$ — это номер компоненты сильной связности, которой принадлежит вершине v . Проверим, что для каждой переменной x вершины x и \bar{x} лежат в разных компонентах, т.е. $comp[x] \neq comp[\bar{x}]$. Если это условие не выполняется, то вернуть *решение не существует*.
4. Если $comp[x] > comp[\bar{x}]$, то переменной x выбираем значение **true**, иначе — **false**.

Компоненты сильной связности найдем за $O(N + M)$, затем проверим каждую из N переменных за $O(N)$. Следовательно асимптотика $O(N + M)$.

Примеры решения 2SAT

Первый пример

Рассмотрим следующую функцию: $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (\bar{b} \vee c) \wedge (\bar{b} \vee a)$

Данная функция эквивалентна функции

$$\bar{a} \rightarrow b \wedge \bar{b} \rightarrow a \wedge \bar{a} \rightarrow c \wedge \bar{c} \rightarrow a \wedge b \rightarrow c \wedge \bar{c} \rightarrow \bar{b} \wedge \bar{a} \rightarrow \bar{b} \wedge a \rightarrow b.$$

Построим ориентированный граф со следующими множествами вершинам и ребер: множество вершин

$V = \{a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, множество ребер

$$E = \{(\bar{a}, b), (\bar{b}, a), (\bar{a}, c), (\bar{c}, a), (b, c), (\bar{c}, \bar{b}), (\bar{a}, \bar{b}), (b, a)\}.$$

Рассмотрим в графе следующие пути:

- $\bar{a} \rightarrow b \rightarrow a$
- $\bar{a} \rightarrow \bar{b} \rightarrow a$
- $\bar{c} \rightarrow a$
- $a \rightarrow c$
- $\bar{a} \rightarrow b \rightarrow c$.

Т.к. $\bar{a} \rightarrow a$, то $a = 1, \bar{a} = 0$.

Т.к. $a \rightarrow c$ и $a = 1$, то $c = 1, \bar{c} = 0$.

Значения b может быть любым, т.к. все вершины, из которых можно добраться в b имеют значение ноль.

Ответ: $a = 1, b = 0, c = 1$ или $a = 1, b = 1, c = 1$.

Второй пример

Рассмотрим следующую функцию: $(\bar{a} \vee c) \wedge (\bar{c} \vee \bar{a}) \wedge (a \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a)$

Данная функция эквивалентна функции

$$a \rightarrow c \wedge \bar{c} \rightarrow \bar{a} \wedge c \rightarrow \bar{a} \wedge a \rightarrow \bar{c} \wedge \bar{a} \rightarrow b \wedge \bar{b} \rightarrow a \wedge b \rightarrow a \wedge \bar{b} \rightarrow \bar{a}$$

Построим ориентированный граф со следующими множествами вершин и ребер: множество вершин

$V = \{a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, множество ребер

$$E = \{(a, c), (\bar{c}, \bar{a}), (c, \bar{a}), (a, \bar{c}), (\bar{a}, b), (\bar{b}, a), (b, a), (\bar{b}, \bar{a})\}.$$

Заметим следующий путь: $a \rightarrow c \rightarrow \bar{a} \rightarrow b \rightarrow a$.

Отсюда следует, что $a \rightarrow \bar{a} \rightarrow a$.

Следовательно по ранее доказанной теореме, у данной функции решений нет.

Ответ: Решений нет.

Использование 2SAT

Решение 2SAT может потребоваться в следующих задачах:

- латинские квадраты^[1],
- квазигруппы^[2],
- числа Рамсея^[3],
- система Штейнера^[4],
- проектирование протоколов (пример: для сетевых коммуникаций),
- электронная коммерция (Электронные аукционы и автоматизированные брокеры,
- теории кодирования, криптографии,
- проектирование и тестирование лекарств (мед. препаратов).

См. также

- NP-полнота задачи о выполнимости булевой формулы в форме 3-КНФ

Примечания

1. Википедия — Латинские квадраты (https://ru.wikipedia.org/wiki/Латинский_квадрат)
2. Википедия — Квазигруппы ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Квазигруппа_\(социология\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Квазигруппа_(социология)))
3. Википедия — Числа Рамсея (https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Рамсея#.D0.A7.D0.B8.D1.81.D0.BB.D0.B0_.D0.A0.D0.B0.D0.BC.D1.81.D0.B5.D1.8F)
4. Википедия — Система Штейнера (https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_Штейнера)

Источники информации

- MAXimal :: algo :: Задача 2SAT (2-CNF) (http://e-maxx.ru/algo/2_sat)
- Википедия — 2-satisfiability (<https://en.wikipedia.org/wiki/2-satisfiability>)

Источник — «<http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=2SAT&oldid=85338>»

- Эта страница последний раз была отредактирована 4 сентября 2022 в 19:29.