Annex

Роговский Юрий Анатольевич   i.rogovskii@g.nsu.ru   89095328257   14/16 задач

Одномерное движение. Центральное поле.   8.02.23

$f = f(\bar{r}, t, m, q, \ldots, \dot{r})$

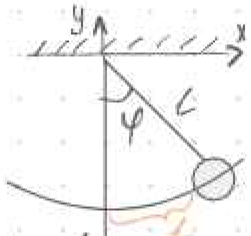
$\cancel{t}$ – стационарные силы
$\dot{r}$ – диссипативные силы
$A=0$ – консервативные (потенц) силы

$$\int \bar{f} \cdot d\bar{l} = A$$

$\Downarrow$

$$U(\bar{r}) = -\int_{-\infty}^{r} f(r')\,dr'$$

опр: однoм. движ. – для однозначного описания движ. требуется 1 параметр в любой момент времени



$x = l\cos\varphi$
$y = -l\sin\varphi$

1мерная задача: (как доказать ЗСЭ?)

$U(x)$ траекторию груза?

$$E = T + U(x) = \frac{m\bar{v}^2}{2} + U(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

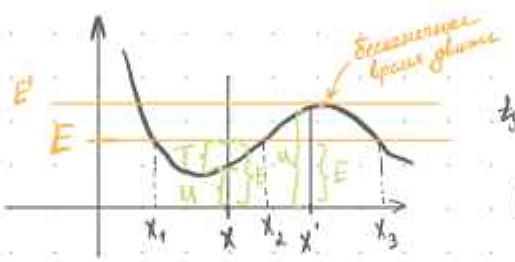
решение: ① $\sum_i F_i = m\bar{a}$ ② тело дв-ся в поле силы

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x'))}}$$

$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2E/k}}}$$

учитывает напр $\bar{v}$

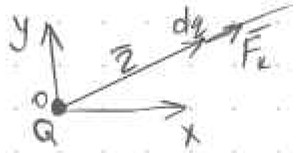


(x_1, x_2) финитное (x_3, ∞) инфинитное

x_1, x_2, x_3 – точки останова, поворота

$$\int_0^{t_{x_2}} dt = +\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$ – время, затраченное на дв. в этом потенц. ($\bar{v}$ вправо)

опр: центр. поле — сила, действующая вдоль радиуса в центр



$U(r)$: $-\frac{\alpha}{r}$; $\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$; $\frac{(\bar a \cdot \bar r)}{r^3}$ [зависимость от угла]

$-\nabla U(r) = \bar f$ — в сфер. коорд: $(f_r, 0, 0)$

$U(r) = \pm \frac{\alpha}{r}$ — кулоновское поле

задача: найти траекторию для $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha = GMm$

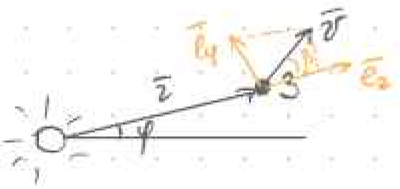
$$E = \frac{m\bar v^2}{2} + U(\bar r) = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{mr^2\dot\varphi^2}{2} + U(r) = \frac{m\dot r^2}{2} + \underbrace{\frac{M^2}{2mr^2} + U(r)}_{U_{эфф}}$$ (одномерная задача)

$\bar M = [\bar r \times \bar p]$ — момент импульса

$$\frac{d\bar M}{dt} = \left[\frac{d\bar r}{dt} \times p\right] + \left[r \times \frac{d\bar p}{dt}\right] = [\bar v \times m\bar v] + [r \times \bar f] = [\bar r \times \bar f] \overset{\text{в ц.п.}}{=} 0 \Rightarrow \bar M = const$$

⇓

поэтому из трехмерной задачи → двумерную



$\bar r = r \cdot \bar e_r$

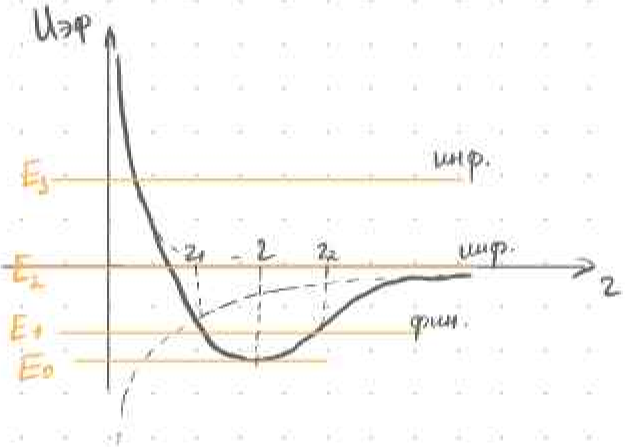
$\dot{\bar r} = \bar v = \dot r \bar e_r + (r\dot\varphi)\bar e_\varphi$

$\bar v^2 = \dot r^2 + (r\dot\varphi)^2$ ⊜

$v_r = \dot r$

$v_\varphi = r \cdot \dot\varphi$

$M = mr \cdot \underbrace{v\sin\beta}_{v_\varphi} = mr \cdot r\dot\varphi$



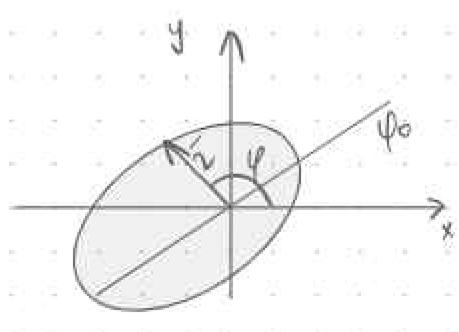
$$U_{эфф} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф})}} \quad \oplus \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}$$

$$d\varphi = \pm \frac{\frac{M}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф})}}$$

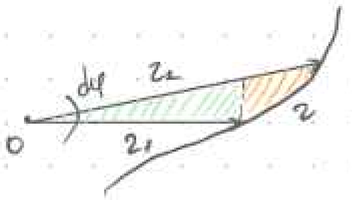
$$T = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф})}}$$

$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$ — траектория движения в поле Солнца



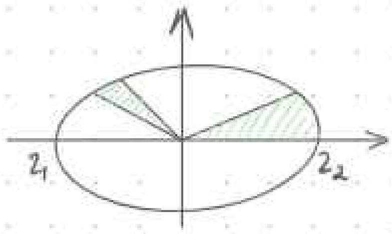
$p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$

$E>0:\quad e>1$ гипербола
$E=0:\quad e=1$ парабола
$E_0<E<0:\quad e<1$ эллипс
$E=E_0:\quad e=0$ окр-ть



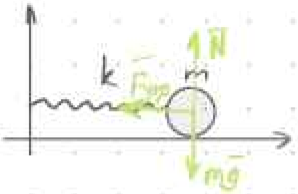
$$\frac{dS}{dt}=\frac{r\cdot r d\varphi}{2}=\frac{mr^2 d\varphi}{2m dt}$$

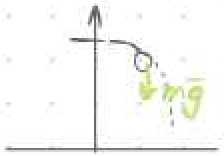
$$\frac{mr^2\dot\varphi}{2m}=\frac{M}{2m}=const$$



Функция Лагранжа и ур-е Лагранжа. Принцип Гамильтона.

22.02.23





① II з-н Ньютона: $m\cdot\bar{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{F}_i$

$m\ddot{x} = \sum F_{i_x}$

$\bar{F}_{упр} = -k\Delta\bar{l}$

– описать такую систему с помощью II з-н. Н. тяжело (ж)

задача Лагранжа: возможно ли прохождение за одинаковое время разных траекторий?

функция Лагранжа

$L(\dot{x},x) = \dfrac{m\vartheta^2}{2} - U(x) = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$

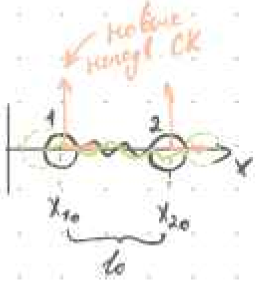
$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \dfrac{\partial L}{\partial x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} = F$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = \underbrace{m\ddot{x} - F(x)}_{\text{II з-н Ньютона}} = 0$

$\Downarrow$

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$ – ур-ние Эйлера-Лагранжа

вернемся к (ж):



$l = x_2 - x_1$

$\Delta l = l - l_0 = (x_2 - x_1) - (x_{20} - x_{10}) = (x_2 - \underbrace{x_{20}}_{0}) - (x_1 - \underbrace{x_{10}}_{0}) =$

$= x_2 - x_1$

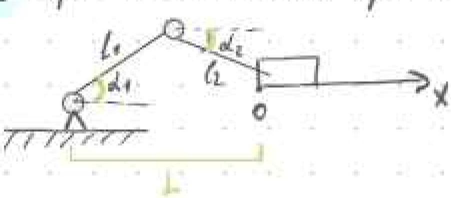
$U = \dfrac{k\Delta l^2}{2} = \dfrac{k(x_2 - x_1)^2}{2}$

$L_{(ж)} = \dfrac{m\dot{x}_1^2}{2} + \dfrac{M\dot{x}_2^2}{2} + \dfrac{2m\dot{x}_3^2}{2} + \dfrac{3M\dot{x}_4^2}{2} - \left(\dfrac{k(x_4 - x_3)^2}{2} + \dfrac{k(x_3 - x_2)^2}{2} + \dfrac{k(x_2 - x_1)^2}{2} + \dfrac{kx_1^2}{2}\right)$

4: $\dfrac{\partial L}{\partial x_4} = -\dfrac{k}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_4}(x_4 - x_3)^2 = -\dfrac{k}{2}\cdot 2(x_4 - x_3)\cdot 1$

$\dfrac{\partial L}{\partial x_4} = -\dfrac{k}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_4}(x_3 - x_4)^2 = -\dfrac{k}{2}\cdot 2(x_3 - x_4)(-1)$

! при написании ф. Лагранжа можно выбирать обобщенные координаты (независимые пар-ры, однозначно описывающие систему) любой размерности



$l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_2 - L = x$

$\dfrac{m\dot{x}^2}{2} = \dfrac{(l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_2 + L)'^2}{2} = T(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \alpha_1, \alpha_2)$

обобщ. скорости; обобщ. коорд.

$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

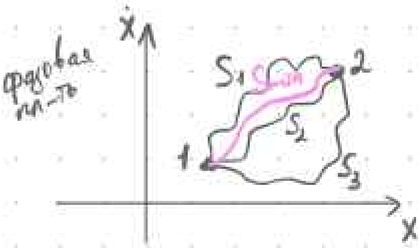
$$L = \frac{m v^2}{2} + \frac{\alpha}{r} = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{m r^2 \dot\varphi^2}{2} + \frac{\alpha}{r} = \frac{m\dot r^2}{2} + \underbrace{\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}}_{\text{эфф. потенциал радиального движения}} = L(\dot r, r)$$

$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$; $M = m r^2 \dot\varphi$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot r) - \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}\right) = 0$$

принцип Гамильтона:
(принцип наименьшего действия)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot q, q, t)\,dt$$ — величина действия



по разным путям пришли в 2 за одинак. время

- истинная траектория пути ≡ величина действия минимальна
- истинная траектория единственна
- $\delta S = 0$ (вариация действия = 0)

$q(t)$ — истинная
$\tilde q(t)$ — проварьированная: $\tilde q(t) = q(t) + \delta q$

$$L\left(\frac{d}{dt}q(t), q(t)\right) \qquad \tilde L\left(\frac{d}{dt}\tilde q(t), \tilde q(t)\right)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \tilde L\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\frac{d}{dt}(q+\delta q), q+\delta q\right)dt - \int_{t_1} L\left(\frac{d}{dt}q, q\right)dt =$$

$\frac{d}{dt}(q+\delta q) = \dot q + \frac{d}{dt}\delta q$

$$\int \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{dt}\delta q + L(\dot q, q) - \int L(\dot q, q)\,dt$$

$$\int \delta L\,dt, \quad \delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{u}\underbrace{\frac{d}{dt}\delta q}_{dv} =$$

$= d(u\cdot v) - du\cdot v$

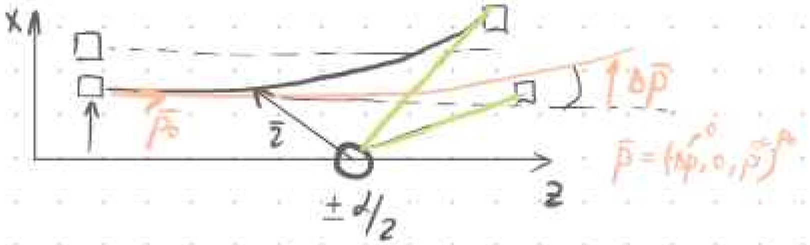
$$= \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q = \int \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q}_{\delta L}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]\delta q\,dt = \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}}^{\,0} + \int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]}_{=0\text{ — вариац. задача}}\delta q\,dt \equiv 0$$

д/з: физ. смысл величины действия

Сечение рассеяния на малые углы

сечение ~ вероятности рассеяться



$T \gg U_{взаим}$

$tg\theta = \frac{\Delta p}{p_0}$

$\bar z = \bar\rho + \bar v \cdot t$

$$\theta \approx \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\int F dt}{m v_0} = \frac{1}{m v_0}\int \frac{\partial U}{\partial x} dt = -\frac{2\rho}{m v_0^2}\int \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{\sqrt{z^2-\rho^2}} = 0$$

Функция Лагранжа в ЭМ поле. 1.03.23

1) $(\bar\nabla \cdot \bar D) = 4\pi\rho \quad (\operatorname{div}\bar D = 4\pi\rho)$

2) $(\bar\nabla \cdot \bar B) = 0$

3) $[\bar\nabla \times \bar E] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar B}{\partial t}$

4) $[\bar\nabla \times \bar H] = \frac{4\pi}{c}\bar j + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar D}{\partial t}$

– $q \rightarrow \bar F_л = q\left[\bar E + \frac{1}{c}[\bar v \times \bar B]\right]$

т.к. $\bar E = -\nabla\varphi(x,y,z) \Leftrightarrow \operatorname{rot}\bar E = 0$

но из 2) $\bar\nabla\cdot\bar B = 0 \Rightarrow \bar B = \operatorname{rot}\bar A \Rightarrow \bar E + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar A}{\partial t} = -\bar\nabla\varphi(x,y,z)$

- рассм. пост. стацион. эл. поля $\Leftrightarrow A(t)$
- рассм. случай, когда $A = A(x,y,z)$
- из этого следует $\Rightarrow F_л = q\bar E = q\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar A}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}[\bar v \times [\bar\nabla \times \bar A]]$

возьмем x-компоненту: $F_{л_x} =$

$$[v \times [\bar\nabla \times \bar A]]_x = v_y[\bar\nabla\times\bar A]_z - v_z[\bar\nabla\times\bar A]_y = v_y\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) -$$

$$- v_z\left(\frac{\partial}{\partial x}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_x\right)(-1) = v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} \pm v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} =$$

$$= \underbrace{\left(v_y\cdot\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)}_{(v_x, v_y, v_z)\frac{\partial}{\partial x}(A_x, A_y, A_z)} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} - \underbrace{v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}}_{\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t}} =$$

$$\bar{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\bar{A} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{A}\cdot\bar{v}) - \cancel{\bar{A}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}} \to 0$$

т.к. скорость от коорд. явно не зависит

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\bar{A}\cdot\bar{v}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$F_{\Lambda_x} = q\left(-\nabla\varphi_x - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t_x}\right) + \frac{q}{c}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{A}\cdot\bar{v}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right] =$$

$$= q\frac{\partial}{\partial x}\left(-\varphi + \frac{1}{c}\bar{A}\cdot\bar{v}\right) - \frac{q}{c}\frac{dA_x}{dt} =$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial v_x}(v\cdot A) = v_xA_x + v_yA_y + v_zA_z}$$

$$= q\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(-\varphi + \frac{1}{c}\bar{A}\cdot\bar{v}\right)}_{-\tilde{U}/q} - \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x}\left[\frac{1}{c}(\bar{A}\cdot\bar{v}) - \varphi\right]$$

$$F_{\Lambda_x} = -\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\dot{x}}$$

$$L(x,\dot{x},t) = T - U = T(\dot{x}) - U(x,\dot{x}) \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \varnothing = F$$

функция Лагранжа для частицы в эм. поле: $L = T - \varphi(x,y,z)q + \frac{q}{c}(\bar{v}\cdot\bar{A})$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}}(T - U - \tilde{U}) - \frac{\partial}{\partial x}(T - U - \tilde{U}) = 0$$

функция Лагранжа для релятивистской частицы в эм-поле: $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\bar{v}^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c}(\bar{v}\cdot\bar{A})$

$$S = \int L(q,\dot{q},t)\,dt \to \min$$

$$L \to L' = L + \frac{dF(q,\dot{q},t)}{dt}$$

$$S' = \int_1^2\left(L + \frac{dF}{dt}\right)dt = S + F\Big|_1^2$$

функция Лагранжа определена с точностью до:
1. константы
2. полной производ. по t от какой-то функции

$$\varphi \to \varphi' = \varphi + \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$A \to \bar{A}' = \bar{A} + \nabla f$$

Циклические координаты

1. интеграл движения – функция обобщ. координат скоростей и др. пар-в механич. системы, которая остается const

$E = \frac{m v^2}{2} + U(x)$, $M = m r^2 \dot{\varphi}$

1) если $L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \cancel{q_2}, \ldots, q_n, t) \Rightarrow q_2$ – циклическая координата

и $\dot{p}_2 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 0 \Rightarrow p_2 = const$, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ – обобщ. импульс

сохраняется

$\dot{q}_2 = \frac{d}{dt} q$ – обобщ. скорость

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

2) если $L(q_1, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_N, \cancel{t}) \Rightarrow \sum p_i \dot{q}_i - L = const$ – лагранжева энергия системы

Движение, ограниченное связями. Классификация. 15.03.23

механическая связь – ограничение, накладываемое на координаты и скорости механической системы, которые должны вып-ся при ее движении.

связи не наложены → свободная
имеется хоть одна связь → несвободная

В общем случае ур-ние связи задается как: $f(t, \bar{r}_k, \bar{v}_k) = 0$, $k = 1, \dots, N$
f – функция от $(6N+1)$ аргументов
предп-ся, $f \in C^2$

- если связь в виде ур-я (*), то связь → двухсторонняя (удерживающая)
- если связь в виде $f(t, \bar{r}_k, \bar{v}_k) \geq 0$ → односторонняя (неудерживающая), причем когда пол-ся „=" → связь напряжена

! рассм-ют только удерживающие связи, т.к. неудерживающие можно разбить на участки: а) есть напряжение → удерж. связь
б) нет напряжения → св. дв. сист

классификация типов связей

1) $f = f(t, \bar{r})$ ⇒ голономная (геометрич-ная)
2) $f = f(t, \bar{r}, \bar{v})$ ⇒ кинематическая (дифф-ная)

1) $f = f(r(t), v(t))$ → склерономные
2) $f = f(t, \bar{r}, \bar{v})$ → реономные

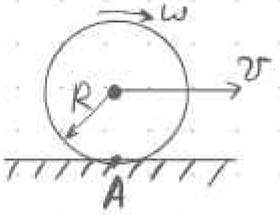
Следствие:

а) при геометр. связи сист-ма не может в $\forall t$ занимать $\forall$ положение в пр-ве
конечная геометр-кая связь накладывает ограничения на возможные положения

б) при дифф-й связи система в $\forall t$ может нах-ся в произвольном полож. в пространстве, однако скорости уже не произвольны

<u>примеры</u>

голономная



катится бз проскальзываний

A – мгновенная ось вр-я
$v_A = 0$, $v_0 = \omega R$

$\dot{x}_0 = \dot{\varphi} \cdot R \Rightarrow x_0(t) = \varphi(t) R + C$

$x_0(t) - \varphi(t) R - C = 0$

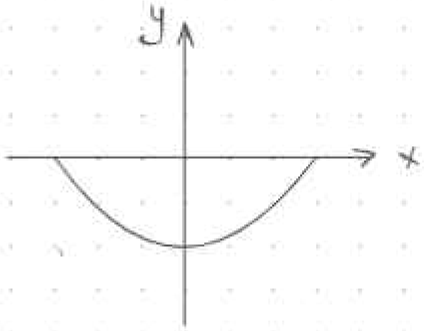
кинематическая

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left[f(t,\bar r_k(t))=0\right]}_{1} \Rightarrow \underbrace{\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum\frac{\partial f}{\partial r_k}\cdot\frac{\partial \bar r_k}{\partial t}=0}_{2\text{: интегрируемая дифф-ная связь}}$$

не эквивалентны т.к. в 2 можно $f(t, r_k) = const$

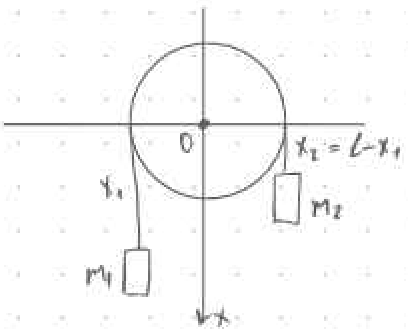
Связи приносят в решение задач механики нек. особенности:

- силы реакции связи чаще неизвестны, их надо искать
- $\frac{dp_i}{dt} = m_i\ddot{\bar r}_i = \bar F_i^{ext} + \underbrace{\sum_j \bar F_{ji}}_{\text{внутр. силы между телами}}$



Примеры построения Лагранжиана (со связями)

а) машина Атвуда



$$T=\frac{m_1\dot x_1^2}{2}+\frac{m_2\dot x_2^2}{2}, \text{ связь: } x_1+x_2=l \Rightarrow T=\frac{(m_1+m_2)\dot x_1^2}{2}$$

$$U=-mgx_1-m_2gx_2=-m_1gx_1-m_2g(l-x_2)$$

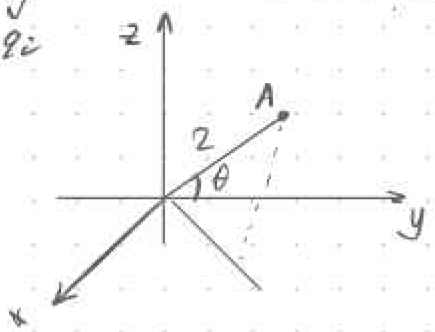
$$L=\frac{m_1+m_2}{2}\dot x_1^2+m_1gx_1+m_2g(l-x_1)=L(x,\dot x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=(m_1-m_2)g, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot x_1}=(m_1+m_2)\dot x_1 \Rightarrow \ddot x_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\cdot g$$

$$T=\sum \frac{m_i v_i^2}{2} \xrightarrow[r_i \to q_i]{\text{переход}} r_1 = r_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0$$

22.03.23

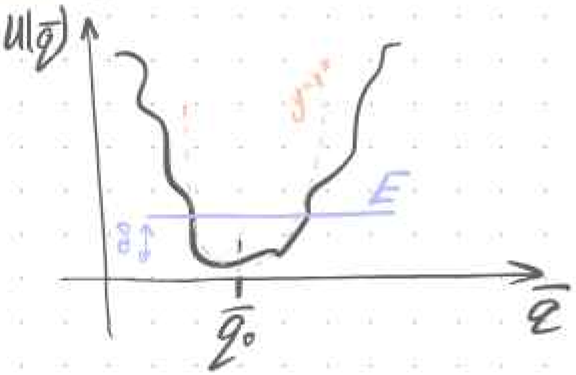
замечание к прошлой лекции



$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$f(x, r, \theta) = x - r\sin\theta\cos\theta = 0$

Ортогональность и нормальные координаты



$$U(\bar q) = U(q_0) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U(q_0)}{\partial q_i}(\bar q_i - \bar q_0) + \sum_{l,m=1}^{N} \frac{\partial^2 U(q_0)}{\partial q_l \partial q_m}(q_l - q_0)(q_m - q_0)$$

$$T = \sum \frac{a_{ij}(\bar q)\dot q_i \dot q_j}{2} = \sum \frac{a_{0ij}\dot q_i \dot q_j}{2}$$

замена: $\bar x = \bar q - \bar q_0$

$$L(x, \dot x) = \frac{1}{2}(\dot{\bar x}, \hat m \dot{\bar x}) - \frac{1}{2}(\bar x, \hat k \bar x), \quad \left[\begin{matrix} m_{ij} \geq 0 \\ k_{ij} \geq 0 \end{matrix}\right.$$

$\hat m \ddot{\bar x} + \hat k \bar x = 0$ => чтобы решить это необходимо: $\|-\omega^2 \hat m - \hat k\| = 0$

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

=> $\omega_i \to i = 1, \dots, N$ – кол-во тел

$(-\omega_i^2 \hat m + \hat k)A_i = 0$ => $\bar A_i$ – в-ра, соотв-е частотам

$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \bar A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ – полное решение ур-ния

предположим: • $\omega_i, \bar A_i$ и $\omega_j, \bar A_j$, $i \neq j$ => $A_j \,|\, \omega_i^2 \hat m \bar A_i = \hat k \bar A_i$; $A_i \,|\, \omega_j^2 \hat m \bar A_j = \hat k \bar A_j$ => $\omega_i^2(\bar A_j, \hat m \bar A_i) = (\bar A_j, \hat k \bar A_i)$; $\omega_j^2(\bar A_i, \hat m \bar A_j) = (\bar A_i, \hat k \bar A_j)$

$\hat k \bar A_i, A_j$; $\hat k^T = \hat k$

$$\underbrace{(\omega_i^2 - \omega_j^2)}_{\neq 0}\underbrace{(\bar A_j, m\bar A_i)}_{0} = 0 \Rightarrow$$

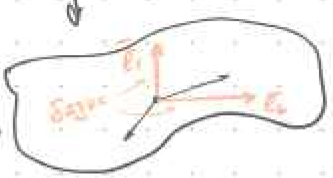
$A_i \perp A_j$ в метрике масс или жесткостей

• если $i \neq j$, но $\omega_i = \omega_j$

$(\alpha_1 A_1, \alpha_2 A_2)\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

1) Ортогонализуем в-ра из подпр-ва и подставим в общее решение

подп-во векторов



$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \bar{A}_i \underbrace{\alpha_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)}_{Q_i \text{ - нм. обобщ. коорд.}}$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\sum \bar{A}_i \cdot \dot{Q}_i,\ \hat{m} \sum A_j \dot{Q}_j\right) - \frac{1}{2}\left(\sum A_i Q_i,\ \hat{k} \sum A_j Q_j\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \underbrace{(\bar{A}_i, m\bar{A}_j)}_{0,\ i\neq j} \dot{Q}_i \dot{Q}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j} \underbrace{(\hat{A}_i, \hat{k}A_j)}_{0,\ i\neq j} Q_i Q_j = \sum_i \frac{1}{2} \underbrace{(A_i, \hat{m}A_i)}_{\hat{m}_i} \dot{Q}_i^2 - \frac{1}{2} \underbrace{(A_i, \hat{k}A_i)}_{\hat{k}_i} Q_i^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} \hat{m}_i \dot{Q}_i^2 - \frac{1}{2} \hat{k}_i Q_i^2$$

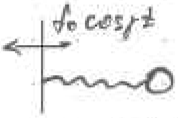
нормальные колебания — колебания с одинаковой частотой, но с разной амплитудой

Вынужденные колебания

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + x \cdot f(x,t) \longrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{f(x,t)}{m}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega t) + \int \frac{f(\tau)\sin(\omega(t-\tau))}{m\omega} dt$$

Пусть $f = f(t) = f_0 \cos\gamma t$



будем искать $x = A\cos\Omega t \Rightarrow -\Omega^2 A\cos\Omega t + \omega^2 \cos\Omega t \cdot A = \frac{f_0}{m}\cos\gamma t$

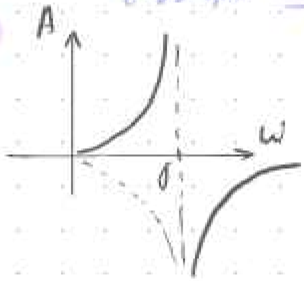
$$(-\Omega^2 + \omega^2) A \cos\Omega t = \frac{f_0}{m}\cos\gamma t$$

равны в $\forall t$ врем

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{f_0/m}{\omega^2 - \gamma^2} \\ \Omega = \gamma \end{cases}$$

пренебрегаем, рассм-я устан. стацион. сист.

$$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi) + \frac{f_0/m}{\omega^2 - \gamma^2}\cos\gamma t$$



$$L(\dot{\bar{x}}, x, t) = \frac{1}{2}(\dot{\bar{x}}, \hat{m}\dot{\bar{x}}) - \frac{1}{2}(\bar{x}, k\bar{x}) + \bar{x}\cdot\bar{F}(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum \underbrace{(\bar{A}_i, \hat{m}\bar{A}_i)}_{\tilde{m}_i} \dot{Q}_i^2 - \sum \underbrace{(\bar{A}_i, \hat{k}\bar{A}_i)}_{\tilde{k}_i} Q_i^2 + \sum_i \underbrace{(\bar{A}_i \cdot \bar{F})}_{f_i} Q_i =$$

$$\ddot{Q}_i + \overbrace{\frac{\tilde{k}_i}{\tilde{m}_i}}^{\tilde{\omega}_i^2} Q_i = \frac{f_i}{m}$$

пусть $F = F_0 \cdot \cos\gamma t$: $\quad Q_i = \dfrac{f_{i0}/\tilde{m}_i}{\omega_i^2 - \gamma^2}\cos\gamma t$

$$\bar{x}_i = \sum_{i=1}^{N} \bar{A}_i Q_i = \sum_i \frac{(\bar{A}_i, \bar{F}_0)\, A_i \cdot \cos\gamma t}{(\omega_i^2 - \gamma^2)(A_i, \hat{m}A_i)}$$

$\hat S \bar x : \begin{pmatrix}\tilde x_1\\ \tilde x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$x_2 \to -x_1$
$x_1 \to -x_2$

$\hat S\cdot\hat S = \hat I$

допустим нашли одно решение $\bar x$: $\hat S\bar x = \underset{?}{c}\cdot\bar x \Rightarrow$

$$\hat S(\hat S\bar x) = \hat S(c\cdot\bar x) = c\hat S x = c^2\bar x$$
$$\hat I\bar x = c^2\bar x \Rightarrow c^2=1$$

$\hat S\bar x = \pm\bar x$: если а) „+" – симм-ное
б) „–" – антисим-ное

если мы нашли решение $x=A\cos(\omega t+\varphi)$, где A – нетривиальный, невырожд. в-р амплитуд, соответств. частоте $\omega\neq0$, тогда $\hat S\bar x$ – тоже решение

следствия:

а) если $\omega\ne0$, тогда $\bar x$ и $\hat S\bar x$ могут отличаться только на константу

б) если $\omega=0$, тогда $(\bar x\pm\hat S\bar x)$ – тоже решения

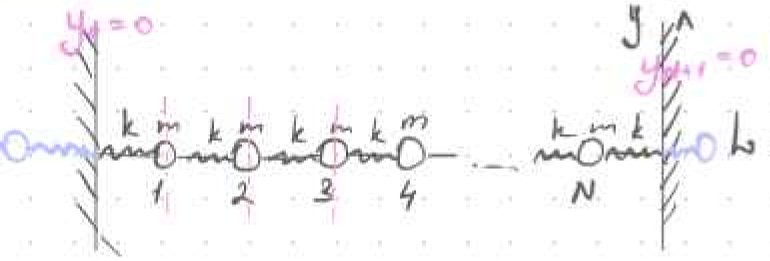
в) если на систему действует сила $\bar F(t)$ и она симм-на (т.е. $\hat S\bar F=\bar F$), тогда, если у нас есть антисимм-е решение $\bar x_a$ (т.е. $\hat S\bar x_a=-\bar x_a$) $\Rightarrow$

$(\hat S\bar F,\hat S\bar x_a) = (\bar F,-\bar x_a) = -(\bar F,\bar x_a)$, но также $(\hat S\bar F, S\bar x_a) = (S^T(SF),\bar x_a) = (S^TS\bar F,\bar x_a) = (\bar F_a, x_a)$

$\Rightarrow (\bar F,\bar x_a)=0$, т.е. симметричная сила не раскачивает антисимм-е кол-я и наоборот

Колебания линейных цепочек

29.03.23.



$y_i(t) = ?$ $\quad \bar k \overset{?}{=} \frac{k}{l}$

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i\dot y_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\bar k(y_{i+1}-y_i)^2}{2} - \frac{ky_1^2}{2} - \frac{ky_N^2}{2}$$

удлинение пружин: $\Delta_i = \sqrt{l^2-y_i^2} - l = l^2\left(1+\left(\frac{y_i}{l}\right)^2\right)^{1/2} - l = l\left(1+\frac12\frac{y_i^2}{l^2}\right)-l = \frac{y_i^2}{2l}$

$f_{i+1} = k\cdot\Delta_i \Rightarrow (f_{i+1})_y = k\Delta_i\sin\alpha_i = [\alpha_i\ll1] = k\Delta_i\alpha_i = \frac{ky_i^2}{2l}\cdot\frac{y_i}{l} = ?$

введем гран. условия:

$$L = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{m_i\dot y_i^2}{2} - \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{k(y_{i+1}-y_i)^2}{2} \Rightarrow m_i\ddot y_i + k(2y_i-y_{i+1}-y_{i-1}) = 0 \quad (1)$$

ищем решение $y_n(t) = Re[A_n\cdot e^{-i\omega t}] = A_n\cos\omega t$ (если $Im A_n = 0$) (2)

$f_{n+1} = \underbrace{C}_{\text{содержит фазовый сдвиг}} \cdot f_n = C \cdot (C \cdot f_{n-1}) = C \cdot C \cdot (C \cdot f_{n-2}) = C^n \cdot f_1$

подставим 2 в 1: $Re\left[-m_i f_i \omega^2 e^{i\omega t} + k(2 \cdot f_n e^{i\omega t} - f_{n+1} e^{i\omega t} - f_{n-1} e^{i\omega t})\right] = 0$

$Re\left[e^{i\omega t} \cdot f_n \left(-m\omega^2 + k(2 - C - \frac{1}{C})\right)\right] = 0$

$-m\omega^2 + k(2 - c - \frac{1}{c}) = 0$

$-m\omega^2 + \frac{k(2c - c^2 - 1)}{c} = 0$

$-\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{c}(2c - c^2 - 1) = 0$

$-\omega^2 c + \omega_0^2(2c - c^2 - 1) = 0$

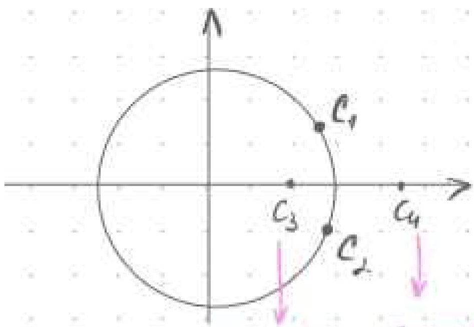
$-\omega^2 c + 2c\omega_0^2 - \omega_0^2 c^2 - \omega_0^2 = 0$

$c(2\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^2 c^2 - \omega_0^2 = 0$

$c^2 + \left(\frac{\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2}\right) c + 1 = 0$

$c^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2\right) c + 1 = 0 \quad \Rightarrow$

- $C_1 \cdot C_2 = 1$
- $C_{1,2} = \underbrace{\left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}\right)}_{\cos\varphi} \pm \underbrace{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}\right)^2 - 1}}_{i\sin\varphi}$
- $C_1 + C_2 = -\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2\right)$



- $|C_1| = |C_2|$
- $C_1 = C_2^* = e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}\right) < 1$

$C = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

$1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} = \cos\varphi \Rightarrow 1 - \cos\varphi = \frac{\omega^2}{2\omega_0} = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$

$\omega = \omega_0^2 \cdot 4\sin^2\frac{\varphi}{2}$ – дисперсионное ур-е

наше решение: $y_n(t) = Re\left[f_n \cdot e^{i\omega t}\right] =$

$y_n(t) = Re\left[A \cdot e^{i\omega t + in\varphi} + B e^{i\omega t - in\varphi}\right] = A e^{i\omega t} \frac{e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}}{2i}$

$y_0 = 0 = Re\left[A \cdot e^{i\omega t + i0t} + B e^{i\omega t - i0\varphi}\right] \Rightarrow A = -B$

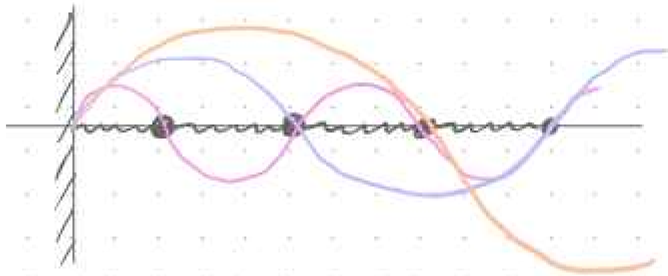
$y_{n+1} = 0 = Re\left[(A e^{i(N+1)\varphi} - A e^{-i(N+1)\varphi}) e^{i\omega t}\right] \Rightarrow e^{i(N+1)\varphi} - e^{-i(N+1)\varphi} = 0 \Rightarrow \sin[(N+1)\varphi] = 0 \; (N+1)\varphi = \pi k \Rightarrow \varphi_k = \frac{\pi k}{N+1}$

$\omega_k^2 = \omega_0^2 4\sin^2\left(\frac{\varphi_k}{2}\right)$

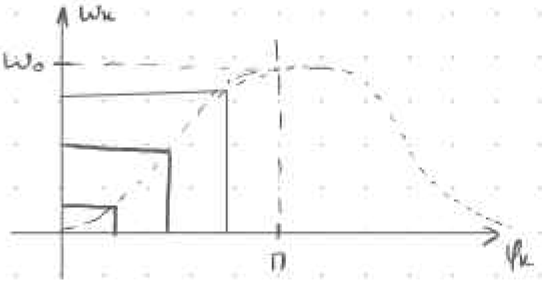
$y_n = \sum_{k=1}^{1} Re\left[\underbrace{A \cdot 2i}_{\tilde{A}e^{i\psi}} \cdot \sin(n\varphi_k) \cdot e^{i\omega_k t}\right] = \sum_k \tilde{A}\sin(n\varphi_k)\cos(\omega_k t + \psi)$

по аналогии с $\alpha_k \bar{A}^{(k)} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$:

$$\begin{pmatrix} A_1^k \\ \vdots \\ A_N^k \end{pmatrix} = \bar{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} \sin\varphi_k \\ \sin 2\varphi_k \\ \vdots \\ \sin N\varphi_k \end{pmatrix}$$



k	0 (не подходит)	1	2		N−1	N	N+1	N+2	N+3
φ_k	0	$\frac{\pi}{N+1}$	$\frac{2\pi}{N+1}$	...	$\frac{\pi(N-1)}{N+1} = \pi - \frac{2\pi}{N+1}$	$\frac{\pi N}{N+1}$	$\frac{\pi(N+1)}{N+1}$	$\frac{\pi(N+1+1)}{N+1} = \pi + \frac{\pi}{N+1}$	$\pi + \frac{2\pi}{N+1}$
ω_k	0	ω_1	ω_2		ω_{N-1}	ω_N	ω_{N+1} ω_0	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right)$	



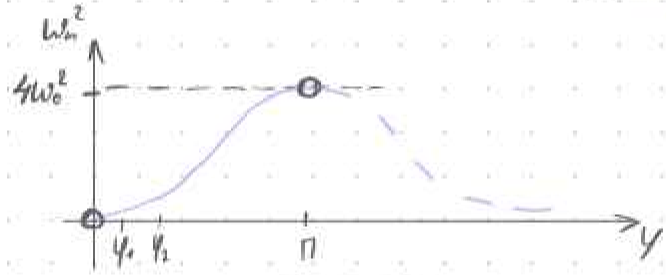
продолжение:

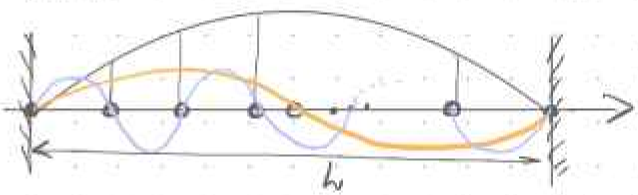
5.04.23.

$\omega_n^2 = 2\omega_0^2 \sin^2\frac{\varphi_n}{2}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $n = 1, \dots, N$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N} \underset{\text{нач.усл}}{\alpha_k} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\varphi_n \\ \sin 2\varphi_n \\ \vdots \\ \sin N\varphi_n \end{pmatrix}}_{\bar{A}^n,\ \bar{\omega}} \cdot \cos(\omega_n t + \underset{\text{нач.усл}}{\xi_n})$$

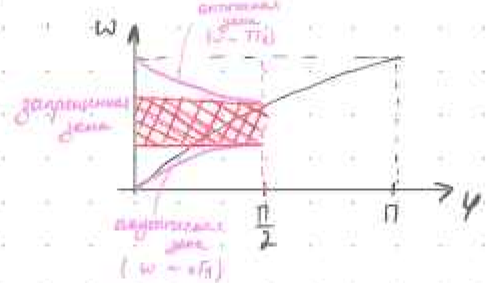
$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi}{\varphi_n / L} = \frac{2L}{n}$

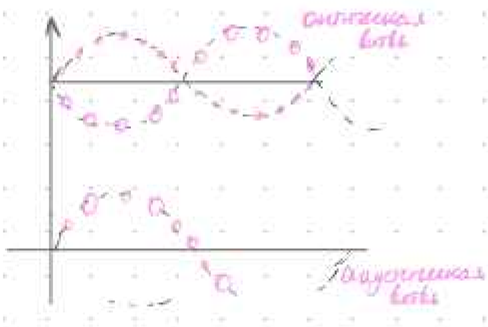




? простейшая модель твердого тела – беск. цепочка

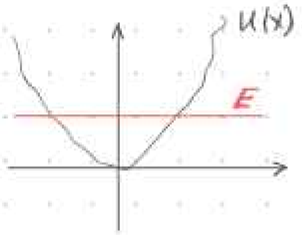
другая модель с симметрией:





Ангармонические колебания (поправки к частоте)

$$L = \frac{m\dot x^2}{2} - U(x) = \frac{m\dot x^2}{2} - U(x_0) - U'(x_0)(x-x_0) - \frac{U''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \underbrace{\delta U_1(x)}_{\frac{m\alpha x^3}{3!}} + \underbrace{\delta U_2(x)}_{\frac{m\beta x^4}{4!}}$$



переобозначим: $(x-x_0) = x$ (перенесли н.к. в полож. равн.), считаем $\alpha, \beta \ll 1$

$$L = \frac{m\dot x^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + \frac{m\alpha x^3}{3!} + \frac{m\beta x^4}{4!} = \frac{m\dot x^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + \frac{m\alpha x^3}{3} + \frac{m\beta x^4}{4} + \ldots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot x + kx - m\alpha x^2 - m\beta x^3 = 0$$

$$\ddot x + k/m\, x = \alpha x^2 + \beta x^3 \quad (*)$$

нет нелинейности → $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$

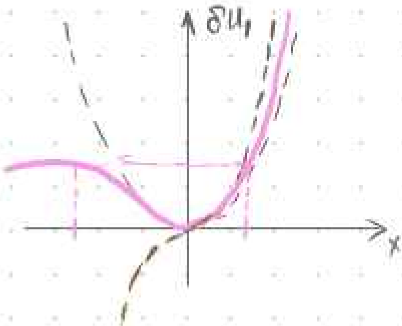
есть нелинейность → решение ангармоническое, период: $T = T(E)$

введем меру малости колебаний: (нелинейные силы по сравнению с линейными)

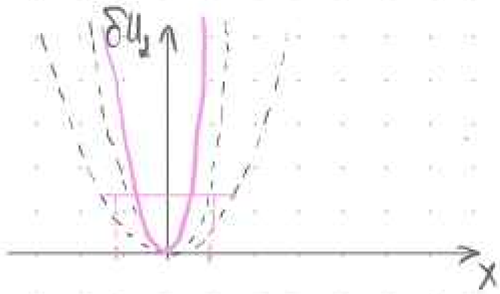
$$\frac{\delta U_1}{U_{гарм}} = \frac{m\alpha\frac{x^3}{3}}{kx^2/2} = \frac{2}{3}\frac{\alpha x^3}{k/m\, x^2} \sim \frac{\alpha x}{\omega_0^2} \le \underbrace{\frac{\alpha \cdot a}{\omega_0^2}}_{\varepsilon_1} \ll 1 \ !$$ (a – амплитуда колебания)

$$\frac{\delta U_2}{U_{гарм}} = \underbrace{\frac{\beta a^2}{\omega_0^2}}_{\varepsilon_2} \ll 1 \Rightarrow \varepsilon_1^2 \sim \varepsilon_2$$

поправка к частоте: $\omega = \omega_0 + \underbrace{C_1 \cdot \varepsilon_1}_{\delta\omega_1 < 0} + \underbrace{C_2 \cdot \varepsilon_2}_{\delta\omega_2 > 0}$



путь >>
время движения >>
ω <<



время <<
путь <<
ω >>

$$F = -\frac{\partial U_1}{\partial x} = -m\alpha x^2$$

Метод решения диффура (*):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

$x(t) \approx a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \ldots$, где $\omega = \omega_0 + \delta\omega_1 + \delta\omega_2$

$$F = -\frac{\partial U_1}{\partial x} = +m\alpha x^2 = +m\alpha(a_1\cos\omega t)^2 = +m\alpha a_1^2 \cdot \frac{1+\cos 2\omega t}{2} = +\frac{m\alpha a_1^2}{2} + \frac{m\alpha a_1^2}{2}\cos 2\omega t$$

$$\ddot x + \frac{k}{m}x = \frac{\alpha a_1^2}{2} + \frac{\alpha a_1^2}{2}\cdot\cos 2\omega t$$

$$\dot x(t) = -a_1\omega\sin\omega t - 2a_2\omega\sin 2\omega t - 3a_3\omega\sin 3\omega t$$

$$\ddot x(t) = -a_1\omega^2\cos\omega t - 4a_2\omega^2\sin 2\omega t - 9\omega^2 a_3\sin 3\omega t$$

$-a_1\omega^2\cos\omega t - 4a_2\omega^2\cos 2\omega t - 9a_3\omega^2\cos 3\omega t + \omega_0^2(a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + a_3\cos 3\omega t) = \frac{\alpha a_1^2}{2} + \frac{\alpha a_1^2}{2}\cos 2\omega t$

$$\left[\begin{array}{l} -4a_2\omega^2 + \omega_0^2 a_2 = \frac{\alpha a_1^2}{2} \Rightarrow (\omega_0^2 - 4\omega^2)a_2 = \frac{\alpha a_1}{2} \Rightarrow (\omega_0 + 2\omega)(\omega_0 - 2\omega)a_2 = \frac{\alpha a^2}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{\alpha a^2}{2\cdot 3(\omega_0 - 2\omega)} \\ a_3 = 0\ ? \\ -a_1\omega^2 + a_1\omega_0^2 = 0 \Rightarrow a_1(\omega^2 - \omega_0^2) = 0 \Rightarrow \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow a_1\underbrace{(\omega + \omega_0)}_{2\omega_0}\underbrace{(\omega - \omega_0)}_{\delta\omega_1 = 0} \Rightarrow \delta\omega_1 = 0 \\ a_0\omega_0^2 = \frac{\alpha a_1^2}{2} \Rightarrow a_0 = \frac{\alpha a_1^2}{2\omega_0^2} = \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} = \frac{a\varepsilon_1}{2} \\ -9a_3\omega^2 + \omega_0^2 a_3 = 0 \Rightarrow (-9\omega^2 - \omega_0^2)a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \end{array}\right.$$

$\omega_0 - 2\omega_0 = \omega_0 - 2\omega_0 = -\omega_0$ (с учетом $\delta\omega_1 = 0$) $\Rightarrow a_2 = -\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} = -\frac{a\varepsilon_1}{6} \sim \varepsilon_1 a$

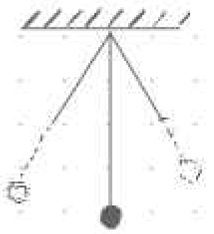
$$F_2 = -\frac{\partial \delta U_2}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{m\beta x^4}{4}\right) = m\beta x^3 = m\beta a_1\cos\omega t\left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right)a_1^2 =$$
$$= \frac{m\beta a_1^3}{2}\left[\cos\omega t + \ldots \cos 2\omega t \ldots\right]$$

общее решение: $x(t) = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + a\cos\omega t + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t + \left(\frac{\beta a^3}{32\omega_0^2} + \frac{\alpha^2 a^3}{48\omega_0^2}\right)\cos 3\omega t + \ldots$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8}\frac{\beta a^2}{\omega_0} - \frac{5}{12}\frac{\alpha^2 a^2}{\omega^3} + \ldots$$

12.04.23

Параметрический резонанс. Ур-ние Матье, Хилла.



$$L = \frac{m l^2(t)\dot\varphi^2}{2} - \frac{m g l(t)\varphi^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(l^2(t)\frac{d\varphi}{dt}\right) - g\cdot l(t)\varphi = 0$$

$$dt' = dt/l^2(t) \Rightarrow \ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0, \text{ где } \omega^2(t) = g\cdot l^3(t)$$

ур-ние Хилла: $\ddot\varphi + \omega^2(t)\varphi = 0$

$\omega^2(t) = \omega^2(t+T)$, где ее период не обязательно совпадает с T колебаний

рассм-м свойства ур-я Хилла:

- если x_1 и x_2 - два разных решений $W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot x_1 & \dot x_2 \end{vmatrix} \neq 0$

1) $W = const$, т.е. $\frac{dW}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(x_1\dot x_2 - \dot x_1 x_2) = \dot x_1\dot x_2 - \ddot x_2 x_1 - \ddot x_1 x_2 - \dot x_2\dot x_1 = 0$

$x_1(-\omega^2 x_2) - x_2(-\omega^2 x_1) = 0$

2) $\dot{\bar x} = A(t)\bar x$, пусть $\begin{array}{l}\dot x = p \\ \dot p = -\omega^2 x\end{array}$: $\begin{pmatrix}\dot x \\ \dot p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p\end{pmatrix}$

лемма 1: если $\bar x = (x_1, .., x_n)$ - решения , $W(x_1, ..., x_n) \neq 0$

лемма 2: если $\bar x = (x_1, .., x_n)$, $y = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$ - тоже решения

Теорема Флоке: если $\dot{\bar{x}} = A(t)\cdot\bar{x}$, $A(t) = A(t+T)$, $\Phi(t)$ – ФМР

а) $\psi(t) = \Phi(t+T)$ – тоже решение

б) $\Phi(t+T) = C\,\Phi(t)$

в) $\underset{\Phi(t+T)}{\underset{\parallel}{\psi(t)}} = S(t)\cdot \exp(t\cdot B)$, где $B \backsim \Phi(t)$, $S(t)$ – T-период. матрица

3) если $x(t)$ – решение Ч.Х. $\to$ $x(t+T)$ – тоже решение

4) следствие из 3): $\begin{pmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \underset{\text{после диагонал.}}{\Longrightarrow} \tilde{x}_i(t+T) = \mu_i \tilde{x}_i(t)$,
x_i – решения ЧХ, где μ_i – с. з. „A“

5) $W(x_1(t+T), x_2(t+T)) = \mu_1\cdot\mu_2 W(x_1, x_2) \underset{\text{по п.1.}}{\Longrightarrow} \mu_1\cdot\mu_2 = 1$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^2 - (a_{11}+a_{22})\mu + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{1} = \mu^2 + \mathrm{Tr}A\cdot\mu + 1 = 0$$

$$\mu_{12} = \frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{\frac{(a_{11}+a_{12})^2}{4} - 1} = \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A}_{\cos y} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\mathrm{Tr}^2 A - 1} = \cos y \pm i\sqrt{1-\cos^2 y} = e^{\pm iy}$$

$\mu_1\cdot\mu_2 = 1$; $\frac{1}{2}\mathrm{tr}A = \cos y < 1$, $\mu_1 = \mu_2^*$; $\tilde{x}_i(t+T) = \tilde{x}_i\cdot\mu$

$\frac{1}{2}\mathrm{tr}A = \cos y > 1$, – нараст. или убывание амплитуды. $|\mu| < 1$ или $|\mu| > 1$

6) если $x(t)$ – решение, $x(t+T) = \mu\cdot x(t) \Rightarrow x(t+\underset{\text{кол-во оборотов}}{nT}) = \mu^{t/T}\cdot \Pi(t)$, $\Pi(t)$ – период. функ

Ур-ние Матье – частный случай ур-я Хилла:

$\omega^2 = \omega_0^2(1+h\cos\gamma t)$, $h \ll 1$, $\ddot{x} + \omega_0^2(1+h\cos\gamma t)x = 0$

– если $h=0$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow x = \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$x(t) = a\cdot e^{i\omega_0 t} = a e^{i(\omega_0 \pm \gamma)t} = \underbrace{e^{i(\omega_0-\gamma)t}}_{\mu^{t/T}} \underbrace{e^{i\gamma t}\cdot a}_{\Pi(t)}$$

$$e^{i(\omega_0-\gamma)t} = \mu^{t/T} \Rightarrow \mu = e^{i(\omega_0-\gamma)T} = e^{i(\omega_0-\gamma)\frac{2\pi}{\gamma}} = e^{i\left(\frac{\omega_0}{\gamma}\cdot 2\pi\right)} \underbrace{e^{-i2\pi}}_{=1}$$

$$\mu = e^{-i\pi\left(\frac{2\omega_0}{\gamma}\right)} = e^{z}$$

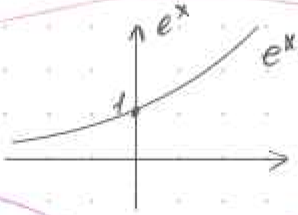
z	μ	$2\omega_0/\gamma$
$i\pi$	-1	$1/2$
$2i\pi$	1	$2\cdot 1/2 = 1$
$3i\pi$	-1	$3/2$
$4i\pi$	1	$4\cdot 1/2 = 1$

$\Rightarrow \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{n}{2}$ – μ такое, что колебания неустойчивы рассм-м $n=1$: $\gamma = 2\omega_0$ и $\mu = -1$

изучим далее ε-окр-ть : $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \omega_0$

$\frac{1}{2} \operatorname{tr} A > 1$; будем искать решение УМ как и УХ:

$$x = \mu^{t/T} \Pi(t), \quad \Pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\gamma t}$$



$\mu < -1$: 

$\mu = -e^{sT}$, где s – малый пар-р

$\mu = e^{-i\pi} e^{st}$

$$x = e^{(sT - i\pi)t/T} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\gamma t} = e^{st} \sum a_n e^{in\gamma t - i\gamma\frac{t}{2}} =$$

$$x = e^{st} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\gamma t(2n-1)/2}$$

добавим трение:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2(1 + h\underbrace{\cos\gamma t}_{= \frac{e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t}}{2}})x = 0 \leftarrow x(t) = e^{st} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma t(2n-1)/2} \cdot a_n$$

$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$

$$\left(\omega^2 + \left[s + i(2n-1)\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2\right) a_n + 2\lambda\left(s + i(2n-1)\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) a_n + \omega_0^2 h \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0$$

$s, \lambda, h \ll 1$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \underbrace{\frac{A}{2} e^{i\varphi}}_{a_{+1} \sim h^0} e^{i\omega_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2} e^{-i\varphi}}_{a_{-1} \sim h^0} e^{-i\omega_0 t}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \underbrace{(1 + h\cos\gamma t)}_{T\text{-период. ф.}} x + \underbrace{2\lambda\dot{x}}_{\text{трение}} = 0$$

19.04.23

$x(t) = \mu^{t/T} \cdot \Pi(t)$ и $|\mu| > 1 \Rightarrow$ происходит нарастание

$\Pi(t) = \sum a_n e^{in\gamma t}$, $\mu^{T/T} = e^{sT - i\pi}$

$$\omega_0^2 + s^2 + 2si(2n-1)(\omega_0^2 + \varepsilon/2) - (2n-1)^2(\omega_0 + \varepsilon/2)^2 \big] a_n + 2\lambda(s + i(2n-1)(\varepsilon/2 + \omega_0)) a_n + \frac{\omega_0^2 h}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0$$

$h \sim s$, $s \sim \lambda \ll 1$

основное решение: $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} a(e^{i\omega_0 t + \varphi} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}) =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} a e^{i\varphi} e^{i\omega_0 t}}_{A^+} + \underbrace{\frac{1}{2} a e^{-i\varphi} e^{-i\omega_0 t}}_{A^-}$$

A^+, A^- – самые большие

$a_{-1}, a_{+1} \sim h^0$

$a_{-2}, a_{+2} \sim h^1$

$n = 0$: $a_0 = -2i\omega_0(s + \lambda) - \omega_0 \cdot \varepsilon) + \frac{h\omega_0^2}{2}(a_{-1} + a_{+1}) = 0$

$n = 1$: $a_1(2\omega_0(s + \lambda) - \omega_0\varepsilon) + \frac{h\omega_0^2}{2}(a_0 + a_2) = 0$

$n=-1: \quad -8\omega_0^2 a_{-1} + 3\omega_0 \varepsilon a_{-1} - 2i\omega_0(s+\lambda)a_{-1} + \frac{h\omega_0^2}{2}(a_{-2}+a_2) = 0 \Rightarrow a_{-1} = \frac{ha_0}{16}$

$n=2: \quad -8\omega_0^2 a_2 - 3\omega_0 \varepsilon a_2 + 2i\cdot 3\omega_0(s+\lambda)a_2 + \frac{h\omega_0^2}{2}(a_1+a_3) = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{ha_1}{16}$

$$[-2i\omega_0(s+\lambda) - \omega_0\varepsilon]a_0 + \frac{h\omega_0^2}{16}\cdot\frac{h}{2}a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2}a_1 = 0$$

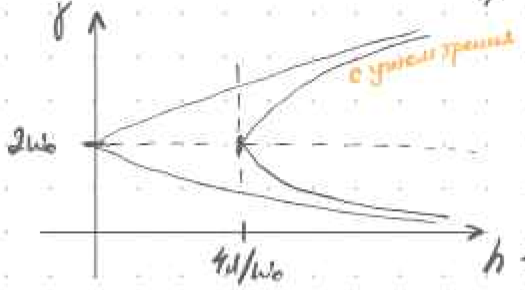
$$[2i\omega_0(s+\lambda) a_1 - \omega_0\varepsilon]a_1 + \frac{h\omega_0^2}{16}\cdot\frac{h}{2}a_1 + \frac{h\omega_0^2}{2}a_2 = 0$$

опустим их

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow (s+\lambda) = \pm\frac{1}{4}\sqrt{h^2\omega_0^2 - 4\varepsilon^2}$$

$$S = -\lambda \pm \sqrt{h^2\omega_0^2 - 4\varepsilon^2} \Rightarrow S \geq 0: \ -\sqrt{\ } < \varepsilon < \sqrt{\frac{h^2\omega_0^2}{2} - 4\lambda^2}$$

$\det = 4\omega_0^2(s+\lambda)^2 + \omega_0^2\varepsilon^2 - \frac{h^2\omega_0^4}{4} = 0 \qquad \gamma = 2\omega_0 + \varepsilon = 2\omega_0 \pm \frac{h\omega_0}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{4\lambda}{h\omega_0}\right)^2}$



Гамильтонов подход в механике

пусть $F = F(u_1, u_2, \dots, u_N)$

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i} \xrightarrow[\text{Гессиан} \neq 0]{} u_i = u_i(v_i)$$

$$F = 3u^2, \quad v = \frac{\partial F}{\partial u} = 6u \Rightarrow u(v) = \frac{v}{6}$$

составим $G = \sum_i u_i v_i - F(u_i) = G(v_i)$

$$\delta G(v_i) = \sum_i \frac{\partial G}{\partial v_i}\delta v_i$$

$\parallel$

$$\delta\left(\sum u_i v_i - F(u_i)\right) = \sum \delta u_i v_i + \sum u_i \delta v_i - \sum \frac{\partial F(u_i)}{\partial u_i}\delta u_i = \sum\underbrace{\left(v_i - \frac{\partial F}{\partial u_i}\right)}_{=0 \text{ по опр.}}\delta u_i + \sum u_i \delta v_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial v_i} = u_i, \quad \frac{\partial F}{\partial u_i} = v_i, \quad \frac{\partial F}{\partial w_j} = -\frac{\partial G}{\partial w_j}$$

$$F = F(u_1, u_2, \dots; w_1, w_2 \dots)$$

$$L = L(q_1, q_2, \dots, \dot q_1, \dot q_2, \dots, t)$$

пассивные пер-ные „W"

активные перем.

1) введем $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

2) составим $H(p, q, t) = \sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$

3) из п.1. выразим $\dot{q}_i(p_i)$ и подставим в п.2.

4) получим $H = H(p, q, t)$ – функция Гамильтона

5) бонусы: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$,

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

проверим эквивалентность методов:

$$\delta S = \delta \int (H - \sum p_i \dot{q}_i)\, dt = \int [\delta H - \sum (\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i)]\, dt = \sum \int [\frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k -$$

$$- \dot{q}_k \delta p_k - p_k \delta \dot{q}_k]\, dt = \sum \int [(\frac{\partial H}{\partial p_k} - \dot{q}_k) \delta p_k + (\frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k) \delta q_k]\, dt = 0$$

$$- \int p_k \delta \dot{q}_k\, dt = \int \dot{p}_k \delta q_k\, dt = -p_k$$

Скобки Пуассона

26.04.23

$H(p,q,t)$ и $\begin{matrix} f(p,q,t) \\ g(p,q,t) \end{matrix} \Rightarrow \{f,g\} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}$

мех. система

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\underbrace{\frac{dp}{dt}}_{-\frac{\partial H}{\partial q}} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{\frac{\partial H}{\partial p}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\}$$

- тождество Якоби: $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} = 0$
- теорема Пуассона: $\begin{matrix} f(p,q,t) = C_1 \\ g(p,q,t) = C_2 \end{matrix} \Rightarrow \{f,g\} = C_3$

док-во: $\{H,\{f,g\}\} + \{f,\underbrace{\{g,H\}}_{\partial g/\partial t}\} + \{g,\underbrace{\{H,f\}}_{-\partial f/\partial t}\} = 0 \ominus$

if $f = const \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\}$

$$\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\} - \{g,\frac{\partial f}{\partial t}\} = \{f,\frac{\partial g}{\partial t}\} + \{\frac{\partial f}{\partial t},g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}$$

$$\ominus\ \{H,\{f,g\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \frac{d}{dt}\{f,g\} \Rightarrow \{f,g\} = const$$

- $\left.\begin{matrix} f(p,q,t) = const \\ H(p,q,\cancel{t}) \Rightarrow E = const \Rightarrow H = const \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0 = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{0} + \underbrace{\underbrace{\{\underbrace{H}_{const},\underbrace{f}_{const}\}}_{const}}_{0}$

св-ва скобок Пуассона:

1) $\{\alpha f,g\} = \alpha\{f,g\}$
2) $\{\alpha,f\} = 0$
3) $\{f\cdot g,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$
4) $\{f(q_1,q_2,q_n,p_1,p_2,p_n),q_k\} = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial q_k}{\partial q_s} - \frac{\partial q_k}{\partial p_s}\frac{\partial f}{\partial q_s} = \frac{\partial f}{\partial p_k}$
5) $\{f,p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}$
6) $\{p_i,p_j\} = 0$
7) $\{p_i,q_j\} = \delta_{ij}$

Производящая функция

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$p = \dot{x} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \dot{x} = p + \alpha x^3 p \\ \dot{p} = -\omega^2 x \end{matrix}\right.$

$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$

$H(r, \psi, \theta, p_r, \underset{\text{const-ые}}{p_\psi}, p_\theta) \Rightarrow \dot{q}_\psi = \dfrac{\partial H}{\partial p_\psi} = 0 \Rightarrow q_\psi = const$

$M = mr^2\dot{\psi}$

$$(p, q) - (P, Q) \rightarrow \tilde{H}(P, Q) \rightarrow \underbrace{\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} \oplus \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}}_{\text{тоже выполняются в новых координатах}} \quad (*)$$

$$\delta S = \delta \int L dt = \delta(p\dot{q} - H(p, q, t))dt = 0$$

$$\delta \tilde{S} = \delta S = \delta \int P\dot{Q} - \tilde{H}(P, Q, t)dt = 0$$

Запишем для одномерного случая: $p\dot{q} - H = P\dot{Q} - \tilde{H} + \frac{d}{dt}F(p, q, P, Q)$, где $F \equiv 0$ на границах интегр-ния, но по принципу Г-на это вып-ся всегда

$$pdq - Hdt - PdQ + \tilde{H}dt = dF$$

$\pm d(pq)$

$pdq - PdQ + (\tilde{H} - H)dt = dF(q, Q, t)$ – производящая функция (производит преобразования координат)

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad \tilde{H}(P, Q) = H(p, q) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

теперь потребуем $\tilde{H}(P, Q, t) = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix}\dot{P} = 0 \\ \dot{Q} = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}P(p, q, t) = const \\ Q(p, q, t) = const\end{matrix}$

$$-d(pq) + pdq - PdQ + (\tilde{H} - H)dt = d(\overbrace{F_1 - pq}^{F_2})$$

$$-qdp - pdq + pdq - PdQ + (\tilde{H} - H)dt = dF_2(p, Q, t) \Rightarrow -F_2 = pq - F_1$$

$H = p\dot{q} - L$

$F_3(P, q)$

$F_4(P, Q)$

пример №1.

$$F_1(q, Q) = \sum_k q_k Q_k$$

$$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} = Q_k$$

$$P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} = -q_k$$

пример 2.

$$F_2(q, P) = \sum_k q_k P_k$$

$$p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k} = P_k$$

$$Q_k = \frac{\partial F}{\partial P_k} = q_k$$

точечное преобразование

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 mq}{2} + \alpha x^3$$

$$F_3(q, P) = qP + \alpha P^3 + bq^2P$$

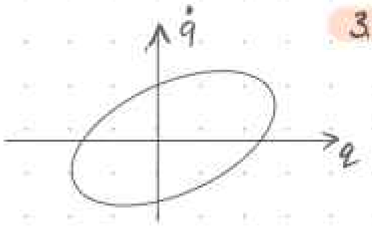
3.05.23

пример: $F_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \operatorname{ctg}\theta$

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$ – осциллятор

$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2}$

$\Rightarrow q(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$

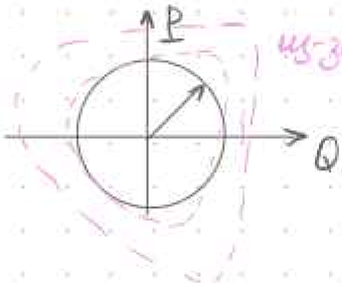


$p = m\omega q \operatorname{ctg} Q$

$q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}} \sin Q$

$\tilde{H} = \omega \cdot P^{\sim E}$

$\Rightarrow$



из-за нелинейности dx^2

пример 1: пусть $F_2(q, P, t) = q \cdot P + \delta\tau H(P, q, t)$

$$dF_2 = +p\,dq + Q\,dP \Rightarrow p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

$$p = P + \delta\tau \frac{\partial H(P, q, t)}{\partial q}, \quad Q(t) = q + \delta\tau \frac{\partial H(P, q, t)}{\partial P}$$

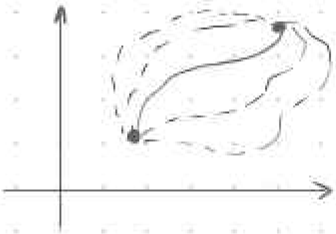
$$\Downarrow$$

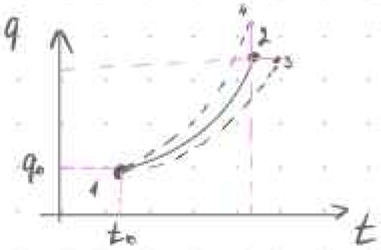
$$P(t) = p - \delta\tau \cdot \frac{\partial H(P, q, t)}{\partial q}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\tilde{H}(P, Q, t) - H(p, q, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = H - \frac{\partial H(P, q, t)}{\partial t}\delta\tau$$

$$S(\ ) = \int L(q, \dot{q}, t)\,dt$$





$S_{12} = S$

$S_{13} = \dots$

$S_{14} = \dots$

$$S_{13} = S_{12} + S_{23} = S_{12} + \int_2^3 (-H)\,dt \Rightarrow S_{13} - S_{12} = \int (-H)\,dt$$

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = \frac{S(q, t+dt) - S(q, t)}{dt} = \frac{\int (-H)\,dt}{dt}$$