

## *XII*

*Устойчивость  
равновесия  
продольно  
сжатых  
стержней.*

Стержень (рис. XII.1а.), оставаясь прямолинейным, удерживает на себе небольшой груз (б). Если бесконечно малое внешнее воздействие (в) отклонит его и исчезнет, стержень снова вернёт себе прямолинейную форму (г). В этом случае прямолинейная форма стержня **устойчива**

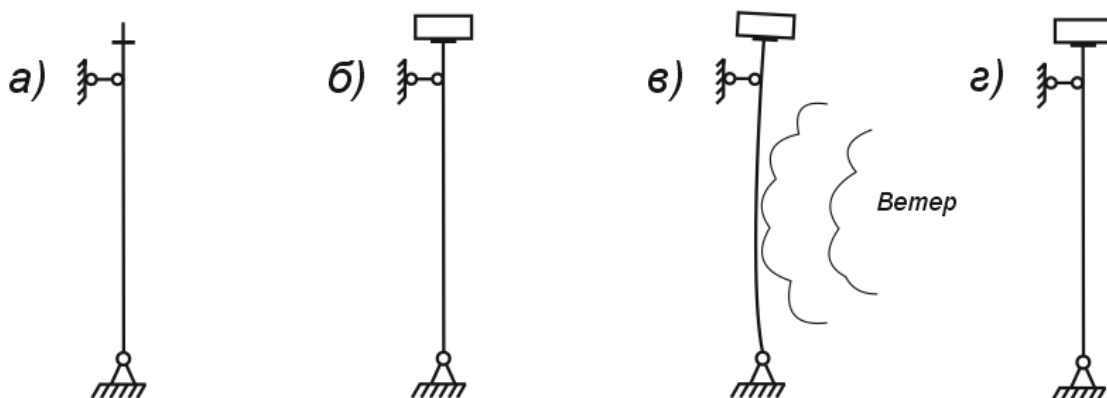


Рис. XII.1.

Большой груз стержень удержит, только будучи прямолинейным (рис. XII.2б.). Любое малое отклонение (в) приводит к нарастанию прогибов (г). В этом случае прямолинейная форма стержня **неустойчива**

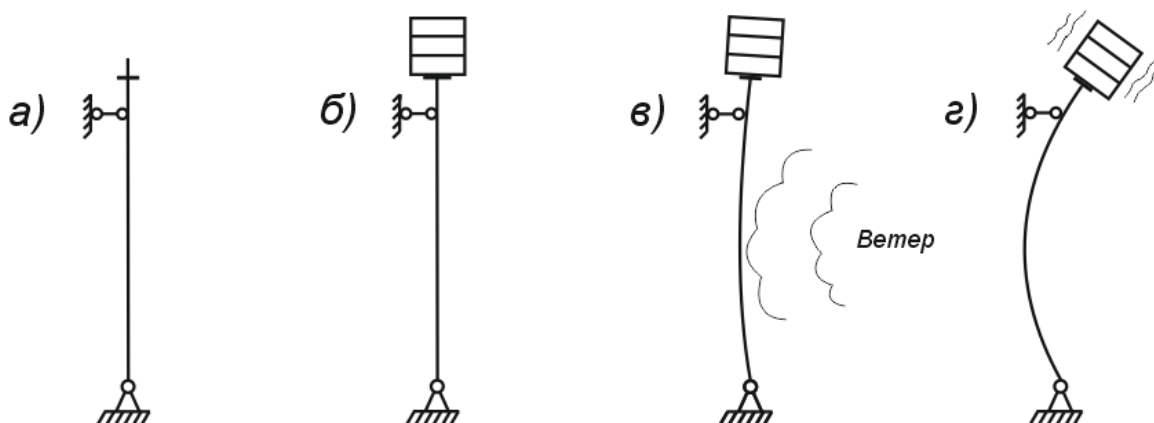






Рис. XII.2.

Между устойчивым  и неустойчивым  состояниями существует также **состояние безразличного равновесия**  : груз можно подобрать таким образом, что при малом отклонении (рис. XII.3б.) стержень уже не вернётся в прямолинейное состояние, но ещё не будет наращивать эти прогибы самопроизвольно. Попросту замрёт в этом положении (в). При таком значении веса груза и слегка отклонённая форма так же является для стержня равновесной  :

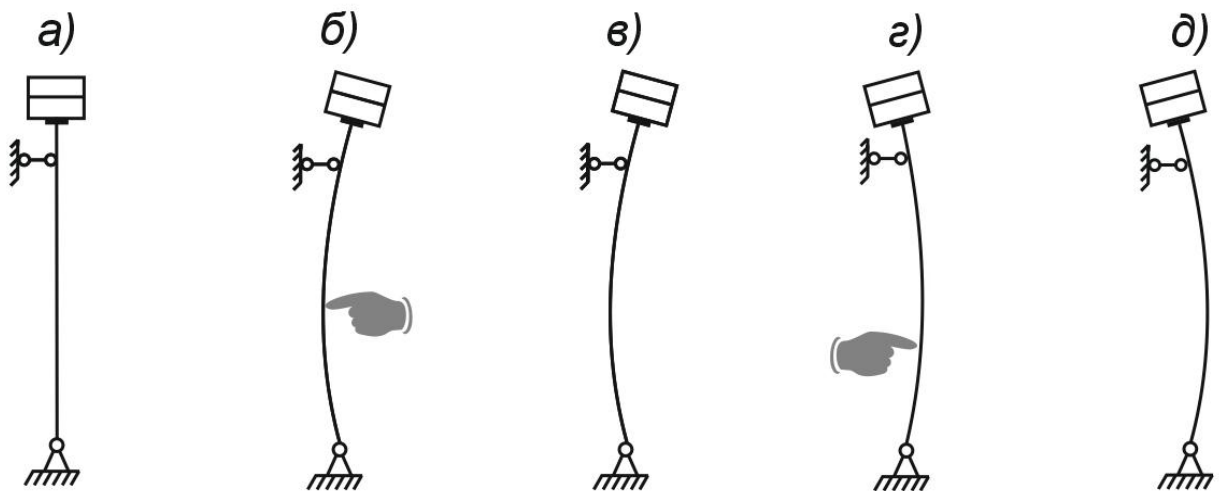


Рис. XII.3.

Можно отклонить стержень в другую сторону (г), он также останется в равновесном состоянии (д).

Продольная нагрузка, приводящая стержень в состояние безразличного равновесия, называется **критической**.

В состоянии безразличного равновесия внешние возмущения уже могут выводить прямой стержень (рис. XII.4а,б.) в слабоизогнутые формы (в), именуемые **формами потери устойчивости**, которые при превышении нагрузкой критического значения развиваются с большой скоростью в форму сильно изогнутого стержня (г).

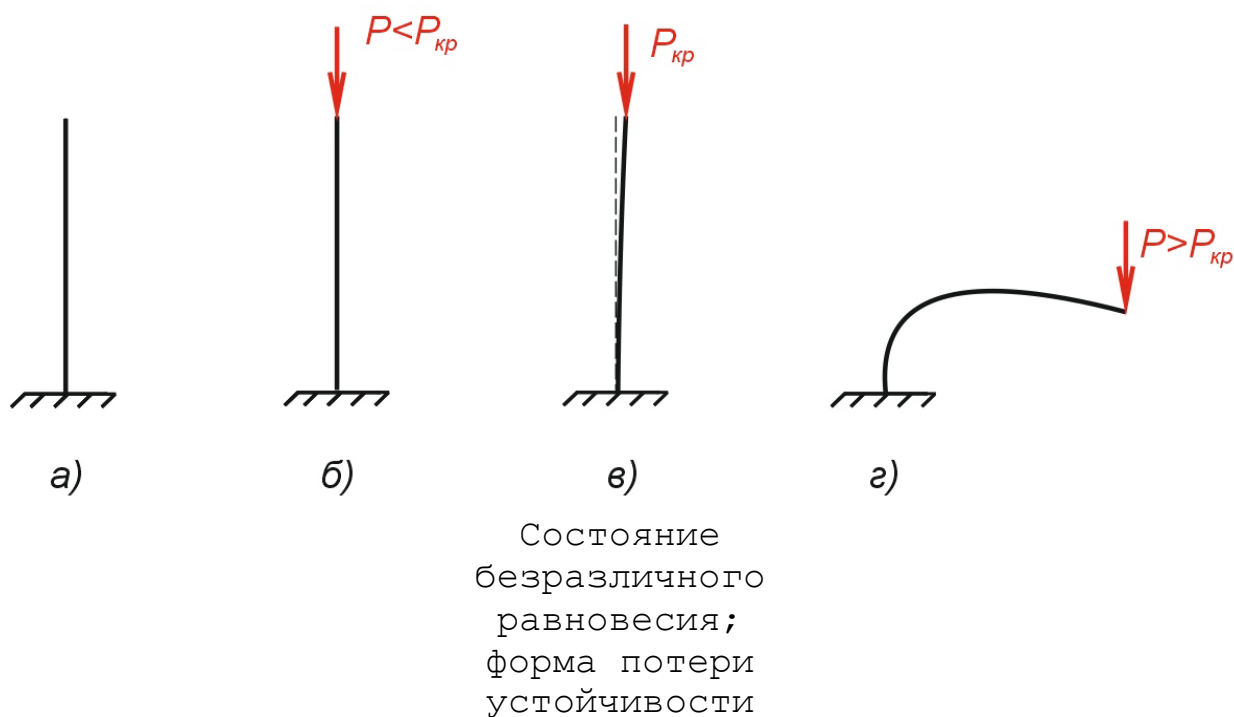


Рис. XII.4.

Тем не менее, состояние безразличного равновесия – это всё ещё равновесное состояние. А, значит, здесь ещё можно применить уравнения статического равновесия всего стержня и его частей.

Следует помнить, что «**потеря устойчивости**» – это не процесс быстрого развития больших прогибов (рис. XII.2в→г, рис. XII.4в→г), а потеря стержнем способности возвращать себе исходную форму после бесконечно малого отклонения внешним воздействием. Например, стержни, изображенные на рис. XII.2б. и рис. XII.3а. устойчивость уже потеряли. Просто на практике одно немедленно следует за другим (рис. XII.2б→в→г).

Как правило, на устойчивость рассчитываются тонкостенные конструкции, поддерживающие некоторый груз. Поэтому при расчёте на устойчивость стержни называются **стойками** и изображаются, чаще всего, вертикально.

При расчёте стоек на устойчивость (поиск критической нагрузки) используются два метода:

- точный;
- энергетический.

В обоих методах нужно предварительно угадать форму потери устойчивости (исходя из профессионального или, просто, житейского опыта это, как правило, не трудно). С этого расчёт и начинается.

Результатом расчёта на устойчивость является **коэффициент запаса по устойчивости**:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} \quad (XII.1)$$

где

$P_{кр}$  – критическая нагрузка;

$P$  – действующая нагрузка.

## Бифуркация форм равновесия

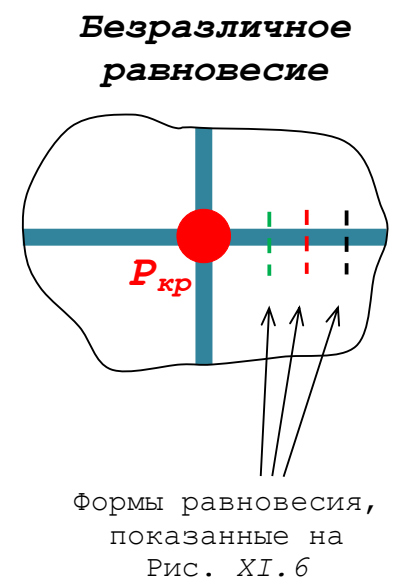
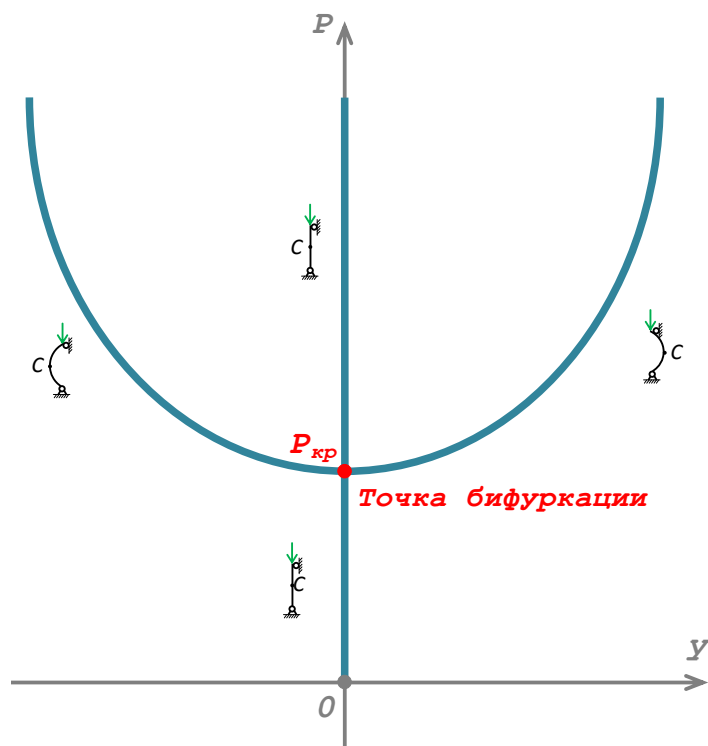
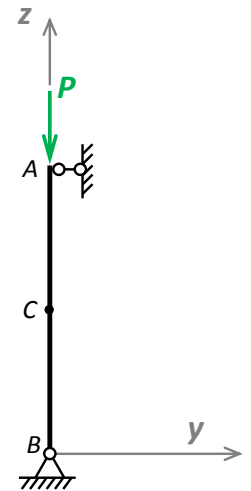
Отметим на рассмотренной выше стойке какую-либо точку С (например, посередине между опорами, не суть важно) и рассмотрим точно исполненный экспериментальный график зависимости горизонтального смещения  $y$  этой точки от значения возрастающей силы  $P$ , которой стойка нагружена (рис. XII.5.).

Сначала, пока  $0 \leq P < P_{кр}$ , пребывать в равновесии стойка может, оставаясь в одной-единственной форме – прямой (рис. XII.1.).

По достижении  $P_{кр}$  однозначность теряется, возникает **бифуркация форм равновесия** – явление, при котором одной нагрузке соответствуют несколько равновесных форм – прямая (рис. XII.3а.), изогнутая влево (рис. XII.3в.) или вправо (рис. XII.3д.) с различной амплитудой.

При дальнейшем увеличении силы  $P$  прямая форма останется прямой, искривлённая будет нелинейно наращивать амплитуду.

Точка на диаграмме прогибов, соответствующая началу её неоднозначности называется **точкой бифуркации**.



Формы равновесия,  
показанные на  
Рис. XI.6

Рис. XII.5.

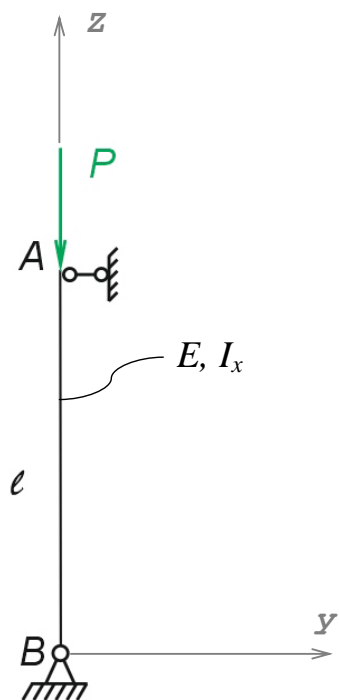
## Точный метод

Исходит из того, что слабоизогнутая форма потери устойчивости стержня (рис. XII.3в,д, рис. XII.4в.) равновесна, ибо в каждой точке упругой оси внутренний изгибающий момент  $M_{изг}$  уравновешен моментом внутренней осевой силы  $N$  на плече прогиба  $y$ . Интегрируется дифференциальное уравнение упругой оси, ищется продольная нагрузка, способная создать силу  $N$ , удерживающую стержень в подобном положении:

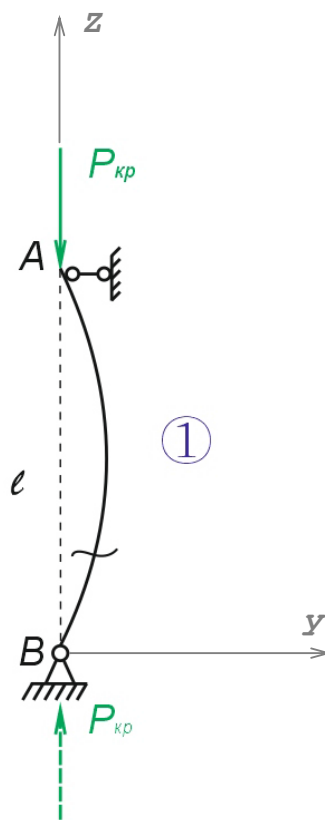
- 1) Стойку разбивают на участки;
- 2) Угадывают форму потери устойчивости (не обязательно точно, направление прогиба знать достаточно);
- 3) Записывают ДУ изогнутой оси для каждого из участков;
- 4) Для каждого дифференциального уравнения записывают его решение с неизвестными, пока, константами интегрирования; если точка приложения осевой силы смещается в поперечном направлении, смещение это обозначают (например, « $f$ ») и так же считают неизвестной, наряду с константами; неизвестными так же считаются реакции, не выражающиеся через внешнюю нагрузку;
- 5) Записывают граничные условия (Г.У.) задачи, ровно столько, сколько в задаче неизвестных; в качестве Г.У. нужно отметить
  - а) нулевое перемещение  $y$  в опорах и заделках;
  - б) перемещение  $y=f$  в точке приложения продольной силы (если она может смещаться);
  - в) нулевой угол поворота  $y'$  в заделках;
  - г) условия стыковки перемещений  $y$  и углов поворота  $y'$  на границах участков;
- 6) Подставляя общие интегралы в Г.У., получают систему уравнений для определения неизвестных;
- 7) Систему не решают! Нетривиальные решения она может иметь только при равенстве нулю определителя; из этого *одного* условия получают *один* результат: значение критической нагрузки  $P_{кр}$ .

Пример XII.1 :

Стойка Эйлера: плоский идеально прямой стержень с шарнирами по краям. Линия действия силы  $P$  совпадает с упругой осью стержня.

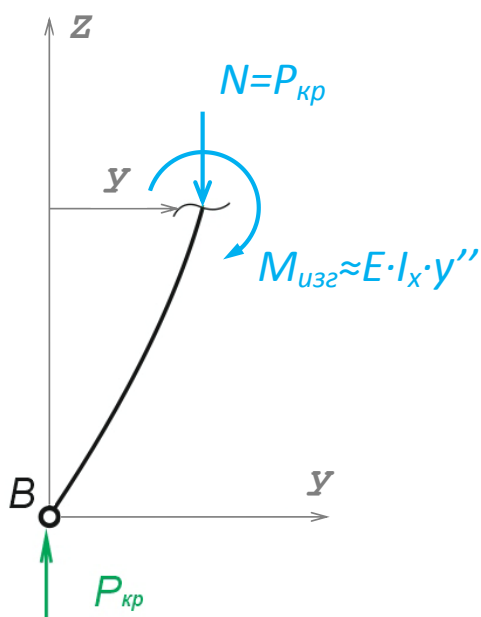


Исходное состояние  
(расчётная схема)



Форма потери устойчивости  
(состояние безразличного  
равновесия)

Разбиваем стержень на участки: ①



$$\sum M_B = 0 = -M_{изг} - P_{кр} \cdot y$$

$$E \cdot I_x \cdot y'' + P_{кр} \cdot y = 0$$

$$y'' + \frac{P_{кр}}{E \cdot I_x} \cdot y = 0$$

$$\alpha^2 \triangleq \frac{P_{кр}}{E \cdot I_x}$$

$$y'' + \alpha^2 \cdot y = 0$$

Д.У. изогнутой  
оси стержня



Решение (общий интеграл) такого Д.У. :

$$y = C_1 \cdot \sin \alpha z + C_2 \cdot \cos \alpha z$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  определяем из граничных условий (Г.У.):

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ z=0, \ y=0: \quad C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \\ 2) \ z=\ell, \ y=0: \quad C_1 \cdot \sin \alpha \ell + C_2 \cdot \cos \alpha \ell = 0 \end{array} \right\} (*)$$

Система уравнений (1) в матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальные решения необходимо, чтобы её определитель был равен нулю:

$$\det = 0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell \end{vmatrix} = 0 \cdot \cos \alpha \ell - 1 \cdot \sin \alpha \ell = -\sin \alpha \ell$$

$$\sin \alpha \ell = 0$$

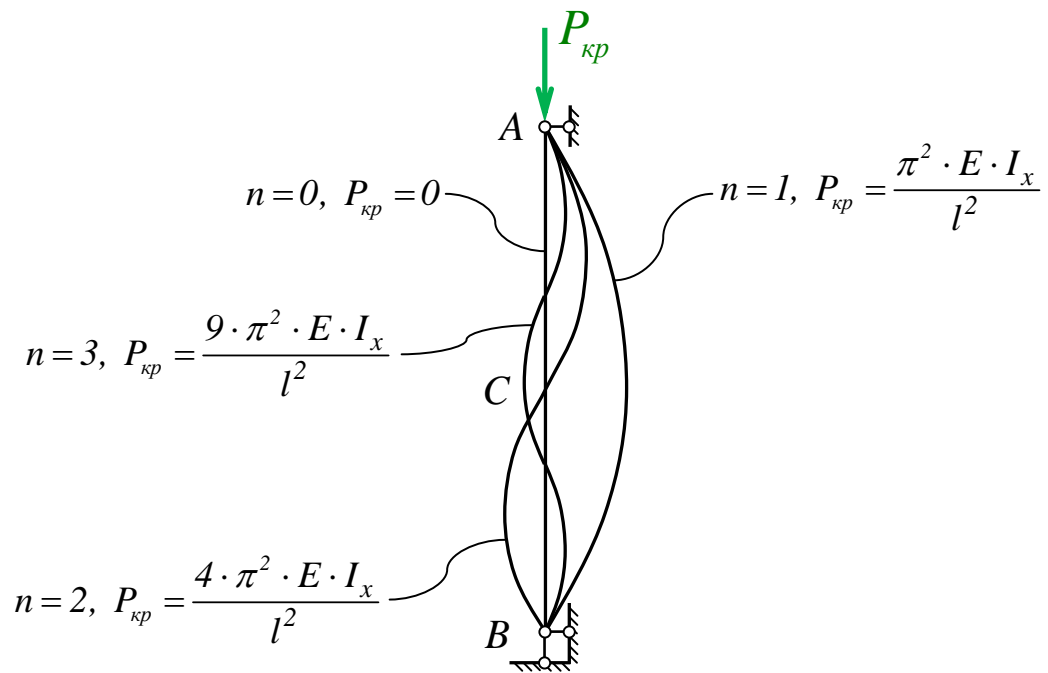
$$\alpha \cdot \ell = \pi \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sqrt{\frac{P_{кр}}{E \cdot I_x}} = \alpha = \frac{\pi \cdot n}{\ell}$$

$$\boxed{P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot n^2 \cdot E \cdot I_x}{(1 \cdot \ell)^2}} - \text{формула Эйлера (XII.2)}$$

$\mu = 1$  – коэффициент приведения длины.

Формы потери устойчивости:



Реальный объект постоянно подвержен внешним воздействиям, поэтому на практике конструкция теряет несущую способность уже при минимальной критической нагрузке ( $n=1$ ):

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{l^2}$$

Вторая ( $n=2$ ), третья ( $n=3$ ) и т.д. формы потери устойчивости представляют чисто академический интерес.



В формуле Эйлера для вычисления  $P_{кр}$  отсутствует амплитуда прогиба. Действительно, в состоянии безразличного равновесия равновесной будет именно форма с любой достаточно малой амплитудой:



*Рис. XII.6.*

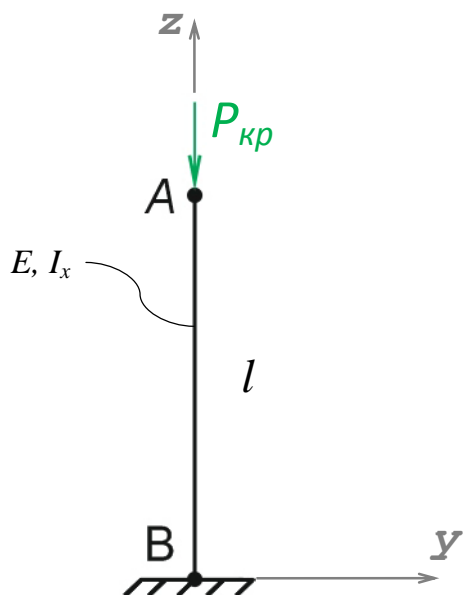
Всем этим амплитудам  
соответствует одна и та же

$$P_{кр}.$$

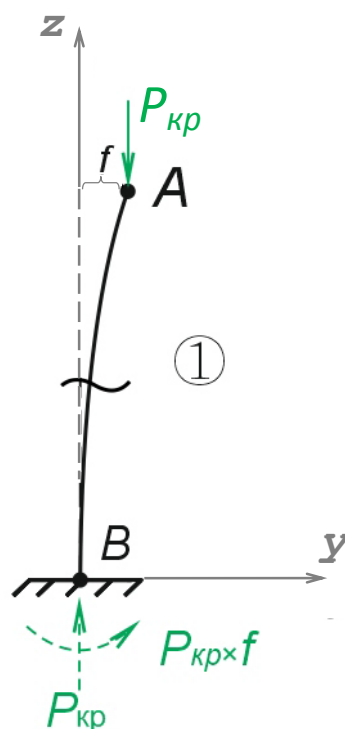
Все они являются решениями  
системы (\*)



Пример XII.2 :

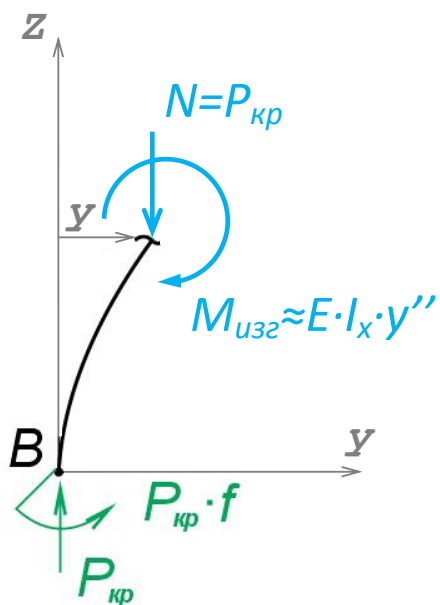


Исходное состояние  
(расчётная схема)



Форма потери устойчивости  
(состояние безразличного  
равновесия)

Стержень разбиваем на участки: ①



$$\sum M_B = 0 = -E \cdot I_x \cdot y'' - P_{kp} \cdot y + P_{kp} \cdot f$$

$$E \cdot I_x \cdot y'' + P_{kp} \cdot y = P_{kp} \cdot f$$

$$y'' + \frac{P_{kp}}{E \cdot I_x} \cdot y = \frac{P_{kp}}{E \cdot I_x} \cdot f$$

$$\alpha^2 \triangleq \frac{P_{kp}}{E \cdot I_x}$$

$$y'' + \alpha^2 \cdot y = \alpha^2 \cdot f$$

Решение:  $y = \underbrace{C_1 \cdot \sin \alpha z + C_2 \cdot \cos \alpha z}_{\text{общее решение однородного Д.У.}} + \underbrace{f}_{\text{частное решение неоднородного Д.У.}}$

$$y' = \alpha \cdot C_1 \cdot \cos \alpha z - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin \alpha z$$

Г.У.:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ z=0, \ y=0: \quad C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + f = 0 \\ 2) \ z=\ell, \ y'=0: \quad \alpha \cdot C_1 \cdot 1 - C_2 \cdot 0 = 0 \\ 3) \ z=\ell, \ y=f: \quad C_1 \cdot \sin \alpha \ell + C_2 \cdot \cos \alpha \ell + \cancel{f} = \cancel{f} \end{array} \right\} (*)$$

*угол поворота*

Система уравнений (\*) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Условие наличия нетривиального решения:

$$\det = 0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \cos \alpha \ell & 0 \end{vmatrix} - \alpha \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos \alpha \ell & 0 \end{vmatrix} + \sin \alpha \cdot \ell \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha \cdot \cos \alpha \ell$$

$$\cos \alpha \ell = 0$$

$$\alpha \cdot \ell = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n = \pi \cdot \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

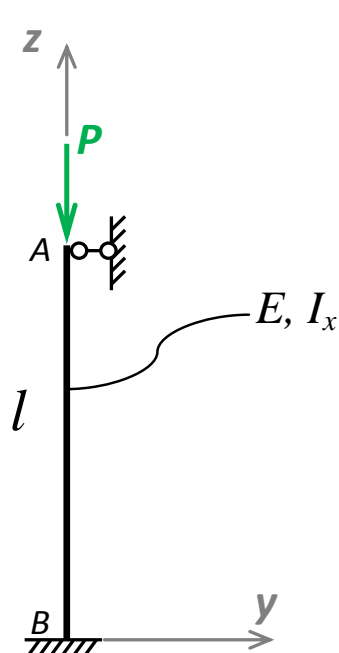
$$\alpha = \sqrt{\frac{P_{кр}}{E \cdot I_x}} = \frac{\pi \cdot \left( n + \frac{1}{2} \right)}{\ell}$$

$$\boxed{P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(2 \cdot \ell)^2}}_{(n=0)} \quad (XII.3)$$

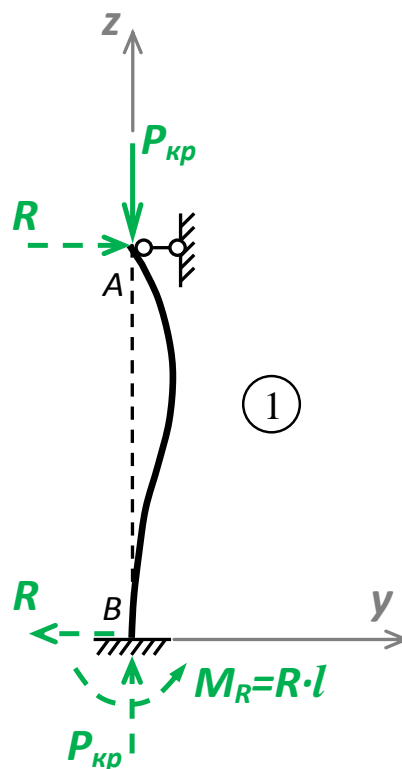
$\mu = 2$  – коэффициент приведения длины.



Пример XII.3 :

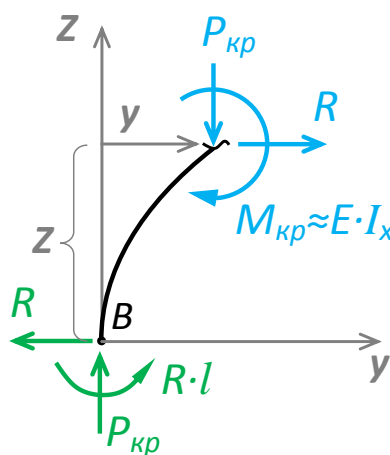


Расчетная схема



Потеря устойчивости  
(состояние безразличного равновесия)

Стержень разбиваем на участки: ①



$$\sum M_B = 0 = R \cdot \ell - E \cdot I_x \cdot y'' - R \cdot z - P_{kp} \cdot y$$

$$E \cdot I_x \cdot y'' + P_{kp} \cdot y = R \cdot (\ell - z)$$

$$y'' + \frac{P_{kp}}{E \cdot I_x} \cdot y = \frac{R}{E \cdot I_x} \cdot (\ell - z) = \frac{P_{kp}}{E \cdot I_x} \cdot \frac{R}{P_{kp}} \cdot (\ell - z)$$

$$y'' + \alpha^2 \cdot y = \alpha^2 \cdot \frac{R}{P_{kp}} \cdot (\ell - z)$$

Решение:  $y = C_1 \cdot \sin \alpha z + C_2 \cdot \cos \alpha z + \frac{R}{P_{kp}} \cdot (\ell - z)$

$$y' = \alpha \cdot C_1 \cdot \cos \alpha z - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin \alpha z - \frac{R}{P_{kp}}$$

Неизвестные:  $C_1$ ,  $C_2$  и  $R$ .

Г.У.:

$$\left. \begin{aligned} 1) \ z=0, \ y=0 : \quad C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{R}{P_{кр}} \cdot \ell &= 0 \\ 2) \ z=0, \ y'=0 : \quad \alpha \cdot C_1 \cdot 1 - \alpha \cdot C_2 \cdot 0 - \frac{R}{P_{кр}} &= 0 \\ 3) \ z=\ell, \ y=0 : \quad C_1 \cdot \sin \alpha \ell + C_2 \cdot \cos \alpha \ell &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Система уравнений (\*) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{\ell}{P_{кр}} \\ \alpha & 0 & -\frac{1}{P_{кр}} \\ \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

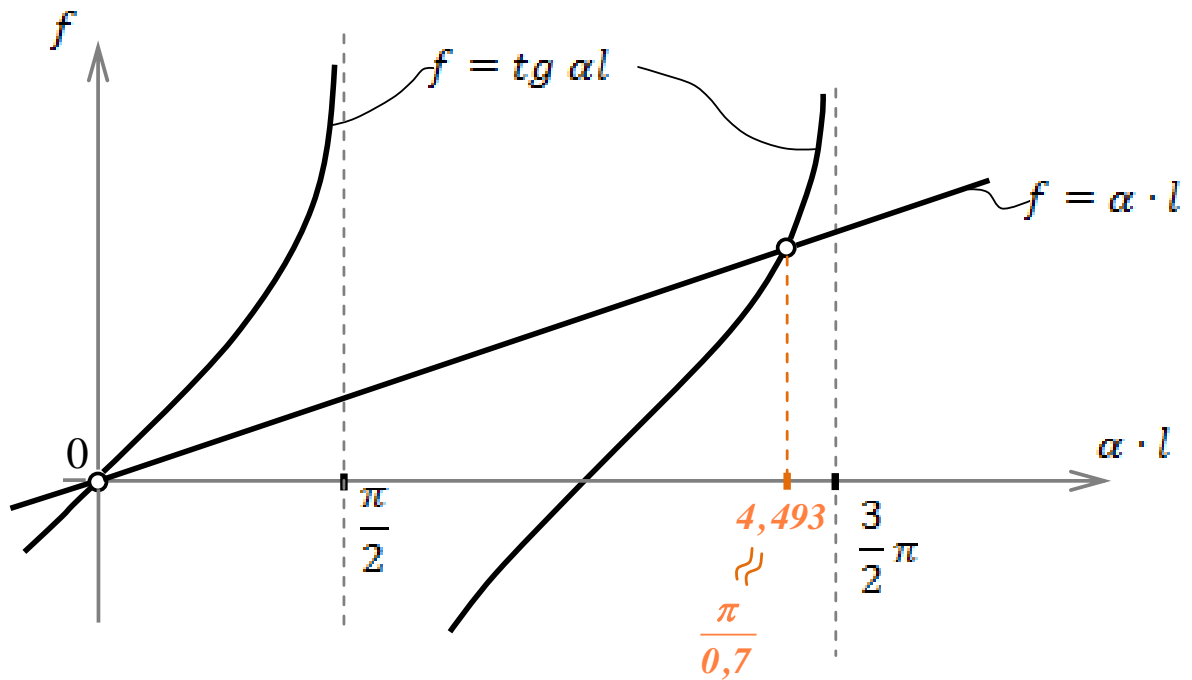
Условие существования нетривиального решения:

$$\begin{aligned} \det = 0 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{\ell}{P_{кр}} \\ \alpha & 0 & -\frac{1}{P_{кр}} \\ \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{P_{кр}} \\ \cos \alpha \ell & 0 \end{vmatrix} - \alpha \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{\ell}{P_{кр}} \\ \cos \alpha \ell & 0 \end{vmatrix} + \sin \alpha \ell \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{\ell}{P_{кр}} \\ 0 & -\frac{1}{P_{кр}} \end{vmatrix} = \\ &= \alpha \cdot \ell \cdot \cos \alpha \ell - \sin \alpha \ell \end{aligned}$$

$$\alpha \cdot \ell \cdot \cos \alpha \ell = \sin \alpha \ell$$

$$\alpha \cdot \ell = \operatorname{tg} \alpha \ell \quad (**)$$

Уравнение (\*\*) решаем графически. Нас интересует первая форма потери устойчивости – наименьший нулевой корень:



$$\alpha \cdot \ell = \frac{\pi}{0,7}$$

$$\alpha^2 = \frac{P_{кр}^2}{E \cdot J_x} = \frac{\pi^2}{(0,7 \cdot \ell)^2}$$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_x}{(0,7 \cdot \ell)^2}$$

$\mu = 0,7$  – коэффициент приведения длины.





Как видим, стойки разные, а структура формулы  $P_{кр}$  та же. И при расчёте стойки другого вида мы снова придём к подобной формуле. Расчёты показывают: критическая сила для любой стойки выражается формулой:

$$P_{кр\min} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(\mu \cdot \ell)^2} \quad (XII.4)$$

где

$\mu$  – **коэффициент приведения длины** – число, показывающее во сколько раз стойка Эйлера с той же критической силой длиннее рассматриваемого стержня. Другая интерпретация:  $\mu = \frac{1}{n}$ , где  $n$  – число полуволн в первой форме потери устойчивости стержня.

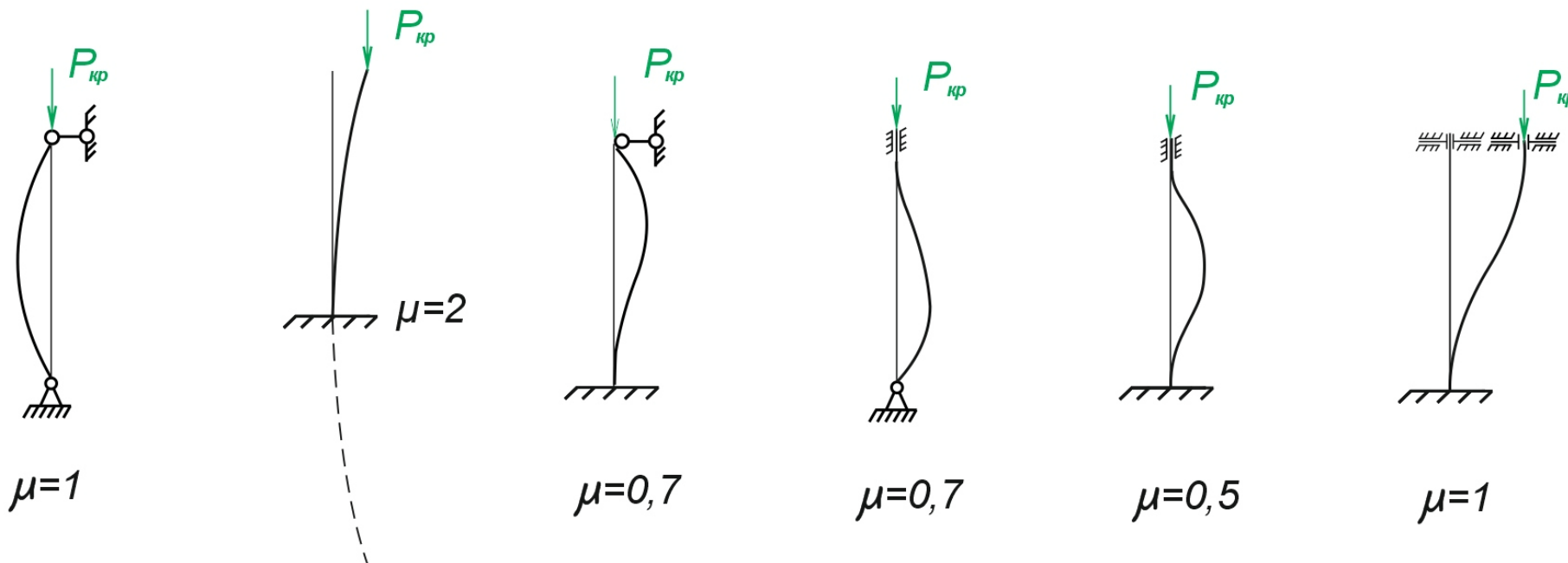
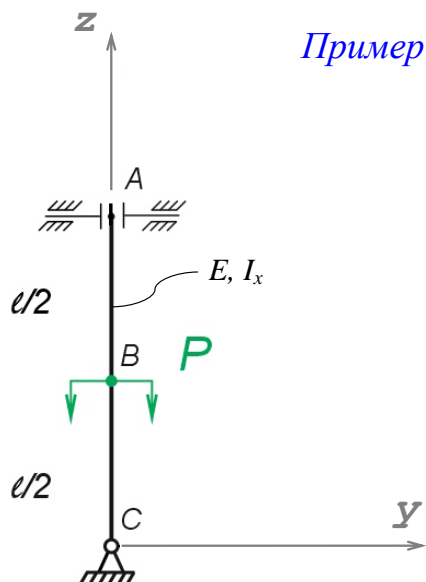
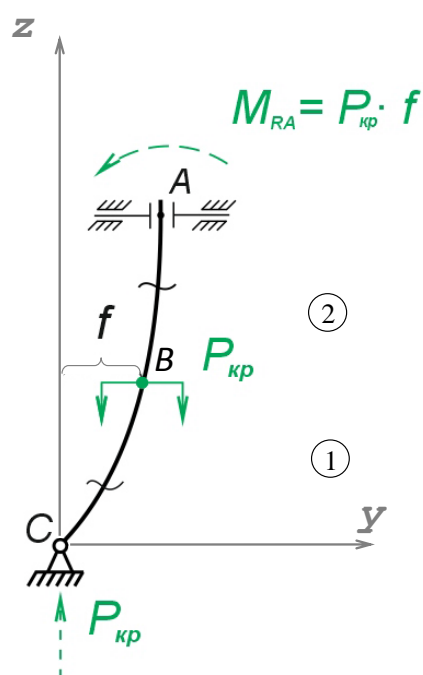


Рис.XII.7.

Пример XII.4 :

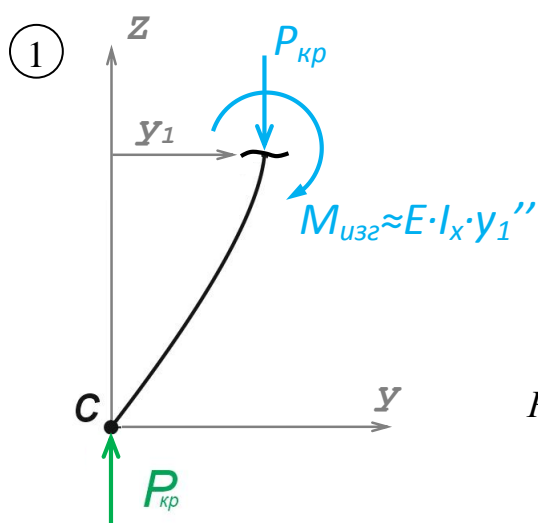


Исходное состояние  
(расчётная схема)



Форма потери устойчивости  
(состояние безразличного  
равновесия)

Стержень разбиваем на участки: ① и ② :



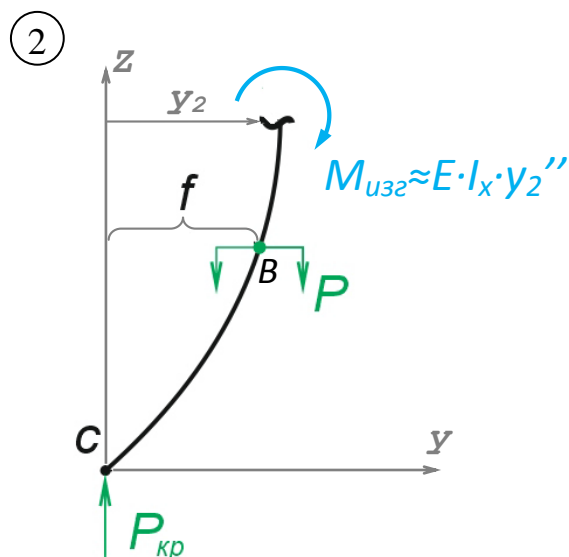
$$\sum M_C = 0 = -M_{u32_1} - P_{kp} \cdot y_1$$

$$y_1'' + \frac{P_{kp}}{E \cdot I_x} \cdot y_1 = 0$$

$$y_1'' + \alpha^2 \cdot y_1 = 0$$

Решение:  $y_1 = C_1 \cdot \sin \alpha z + C_2 \cdot \cos \alpha z$

$$y_1' = \alpha \cdot C_1 \cdot \cos \alpha z - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin \alpha z$$



$$\sum M_C = 0 = -M_{u32_2} - P_{kp} \cdot f$$

$$E \cdot I_x \cdot y_2'' + P_{kp} \cdot f = 0$$

$$y_2'' = -\alpha^2 \cdot f$$

$$y_2' = -\alpha^2 \cdot f \cdot z + C_3$$

$$y_2 = -\alpha^2 \cdot f \cdot \frac{z^2}{2} + C_3 \cdot z + C_4$$

Г.У.:

$$\left. \begin{aligned} 1) z=0, y_1=0 : C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 &= 0 \\ 2) z=\frac{\ell}{2}, y_1=f : C_1 \cdot \sin \alpha \frac{\ell}{2} + C_2 \cdot \cos \alpha \frac{\ell}{2} &= f \\ 3) z=\frac{\ell}{2}, y_2=f : -\alpha^2 \cdot f \cdot \frac{\ell^2}{8} + C_3 \cdot \frac{\ell}{2} + C_4 &= f \\ 4) z=\frac{\ell}{2}, y'_1=y'_2 : \alpha \cdot C_1 \cdot \cos \alpha \frac{\ell}{2} - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin \alpha \frac{\ell}{2} &= -\alpha^2 \cdot f \cdot \frac{\ell}{2} + C_3 \\ 5) z=\ell, y'_2=0 : -\alpha^2 \cdot f \cdot \ell + C_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

Система уравнений (\*) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha \frac{\ell}{2} & \cos \alpha \frac{\ell}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\ell}{2} & 1 & -\left(1 + \frac{\alpha^2 \cdot \ell^2}{8}\right) \\ \alpha \cdot \cos \alpha \frac{\ell}{2} & -\alpha \cdot \sin \alpha \frac{\ell}{2} & -1 & 0 & \alpha^2 \cdot \frac{\ell}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha^2 \cdot \ell \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Условие наличия нетривиального решения:

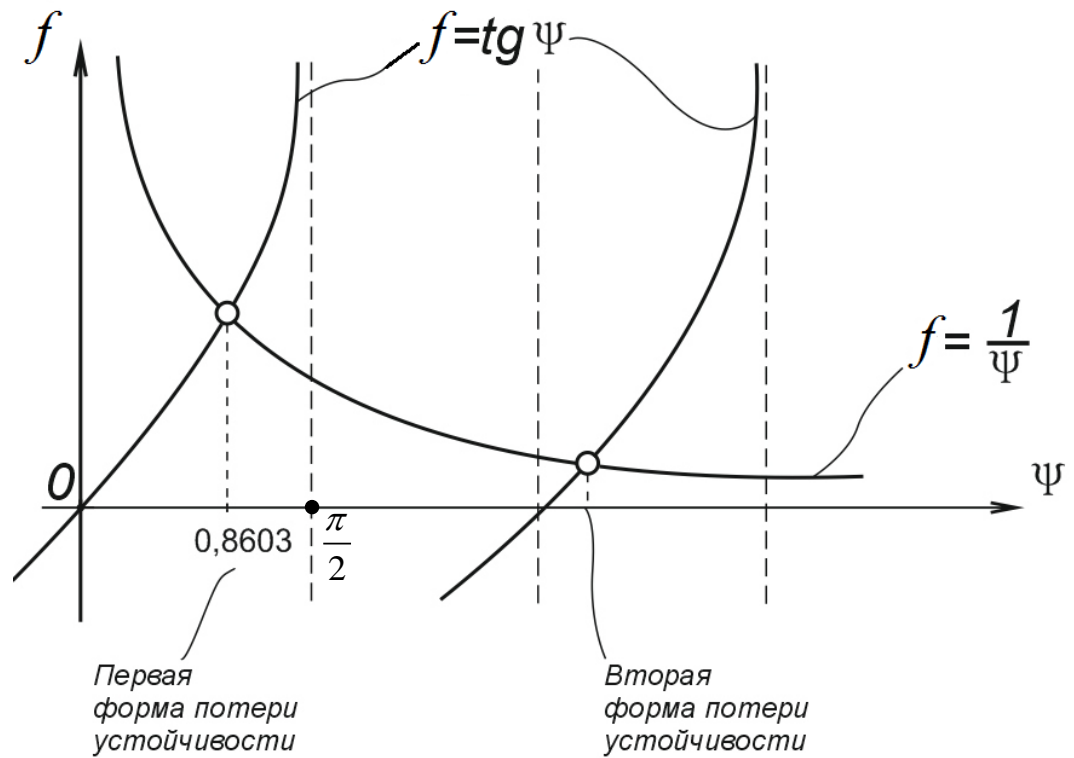
$$\det = 0$$

$\Downarrow$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha \cdot \ell}{2} = \frac{2}{\alpha \cdot \ell} \quad (**)$$

Уравнение (\*\*) **трансцендентное**, то есть его решение невозможно выразить через элементарные функции ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\lg$  и т.д.). Решить его можно численно. Например, графически:

$$\psi \triangleq \frac{\alpha \cdot \ell}{2}$$



$$\left. \frac{\alpha \cdot \ell}{2} \right|_{\min} = 0,8603$$

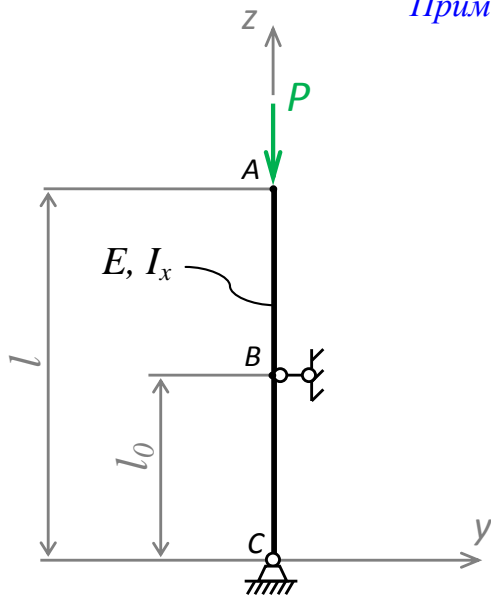
$$\alpha_{\min}^2 = \frac{P_{кр}}{E \cdot I_x} = \left( \frac{2 \cdot 0,8603}{\ell} \right)^2 = \frac{\pi^2}{(1,826 \cdot \ell)^2}$$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(1,826 \cdot \ell)^2}$$

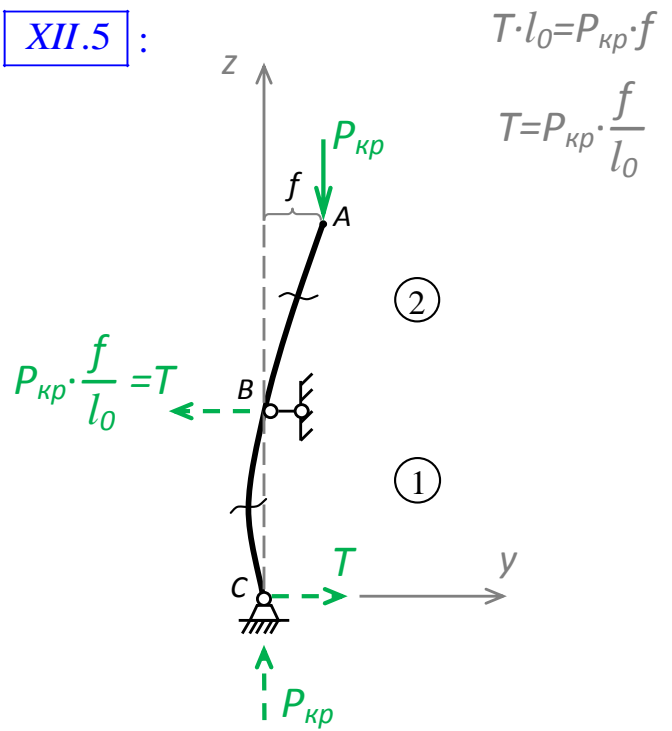
$\mu = 1,826$  – коэффициент приведения длины (0,548 полуволны).



Пример XII.5 :

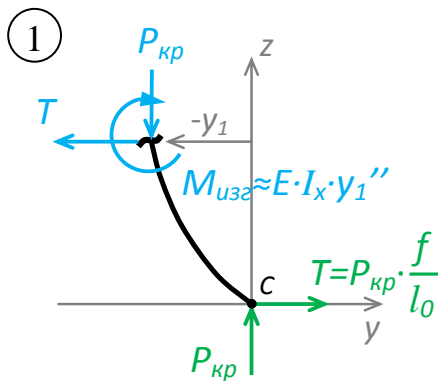


Расчётная схема



Форма потери устойчивости  
(состояние безразличного равновесия)

Стержень разбиваем на участки: ① и ②



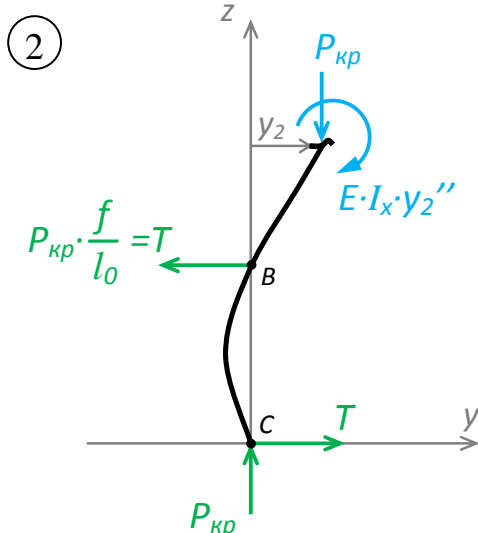
$$\sum M_C = 0 = -P_{kp} \cdot y_1 - E \cdot I_x \cdot y_1'' + P_{kp} \cdot \frac{f}{l_0} \cdot z$$

$$E \cdot I_x \cdot y_1'' + P_{kp} \cdot y_1 = P_{kp} \cdot \frac{f}{l_0} \cdot z$$

$$y_1'' + \alpha^2 \cdot y_1 = \alpha^2 \cdot \frac{f}{l_0} \cdot z$$

Решение:  $y_1 = C_1 \cdot \sin \alpha z + C_2 \cdot \cos \alpha z + \frac{f}{l_0} \cdot z$

$$y_1' = \alpha \cdot C_1 \cdot \cos \alpha z - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin \alpha z + \frac{f}{l_0}$$



$$\sum M_C = 0 = T \cdot \ell_0 - P_{kp} \cdot y_2 - E \cdot I_x \cdot y_2''$$

$$y_2'' + \alpha^2 \cdot y_2 = \alpha^2 \cdot f$$

Решение:  $y_2 = C_3 \cdot \sin \alpha z + C_4 \cdot \cos \alpha z + f$

$$y_2' = \alpha \cdot C_3 \cdot \cos \alpha z - \alpha \cdot C_4 \cdot \sin \alpha z$$

Г.У.:

$$\left. \begin{aligned} 1) z=0, y_1=0: & \quad C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \\ 2) z=\ell_0, y_1=0: & \quad C_1 \cdot \sin \alpha \cdot \ell_0 + C_2 \cdot \cos \alpha \cdot \ell_0 + f = 0 \\ 3) z=\ell_0, y_2=0: & \quad C_3 \cdot \sin \alpha \cdot \ell_0 + C_4 \cdot \cos \alpha \cdot \ell_0 + f = 0 \\ 4) z=\ell_0, y'_1=y'_2: & \quad \alpha \cdot C_1 \cdot \cos \alpha \cdot \ell_0 - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin \alpha \cdot \ell_0 + \frac{f}{\ell_0} - \\ & \quad - \alpha \cdot C_3 \cdot \cos \alpha \cdot \ell_0 + \alpha \cdot C_4 \cdot \sin \alpha \cdot \ell_0 = 0 \\ 5) z=\ell, y'_2=f: & \quad C_3 \cdot \sin \alpha \cdot \ell + C_4 \cdot \cos \alpha \cdot \ell + f = f \end{aligned} \right\} (*)$$

Система этих уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha \ell_0 & \cos \alpha \ell_0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sin \alpha \ell_0 & \cos \alpha \ell_0 & 1 \\ \alpha \cdot \cos \alpha \ell_0 & -\alpha \cdot \sin \alpha \ell_0 & -\alpha \cdot \cos \alpha \ell_0 & \alpha \cdot \sin \alpha \ell_0 & \frac{1}{\ell_0} \\ 0 & 0 & \sin \alpha \ell & \cos \alpha \ell & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Условие наличия нетривиального решения:

$$\det = 0$$

из чего получаем уравнение, находим наименьший действительный корень

$\alpha$  и т.д. Например, при  $\frac{\ell}{\ell_0} = 2$ :

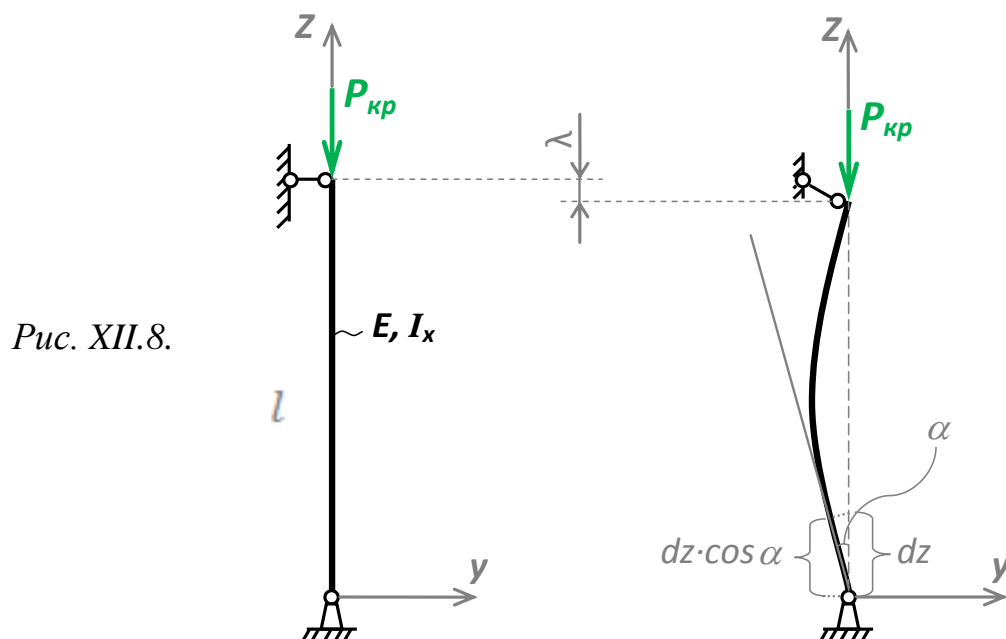
$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(1,348 \cdot \ell)^2}$$



## Энергетический метод

Энергетический метод основан на принципе возможных перемещений.

При  $P=P_{кр}$  переход стойки из прямолинейной формы в слабоизогнутую (рис. XII.3а→б) можно рассматривать, как бесконечно малое возможное перемещение в рамках одного и того же состояния безразличного равновесия. При этом работа критической силы в точности должна быть равна работе сил внутренних. А работа внутренних сил – это потенциальная энергия изгиба:



Перемещение точки приложения силы:

$$\lambda = \int_0^{\ell} (dz - dz \cdot \cos \alpha) = \int_0^{\ell} (1 - \cos \alpha) \cdot dz = \left| \begin{array}{l} \text{Для малых углов:} \\ \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots \\ \alpha \approx y' \end{array} \right| = \int_0^{\ell} \left[ 1 - 1 + \frac{(y')^2}{2} \right] \cdot dz =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ell} (y')^2 \cdot dz$$

Упругая энергия изгиба:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_{изг}^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot I_x} = \int_0^{\ell} \frac{(E \cdot I_x \cdot y'')^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot I_x} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ell} E \cdot I_x \cdot (y'')^2 \cdot dz$$

Работа критической силы

Упругая энергия изгиба

$$P_{кр} \cdot \lambda = U \quad (XII.5)$$

$$P_{кр} = \frac{U}{\lambda} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ell} E \cdot I_x \cdot (y'')^2 \cdot dz}{\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ell} (y')^2 \cdot dz} - \text{для стойки Эйлера} \quad (XII.6)$$

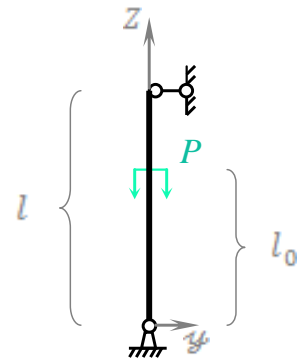
В общем же случае для стоек с одной сжимающей силой:

$$P_{кр} = \frac{\int_0^{\ell} E \cdot I_x \cdot (y'')^2 \cdot dz}{\int_0^{\ell_0} (y')^2 \cdot dz} \quad (XII.7)$$

здесь

$\ell$  - полная длина стойки;

$\ell_0$  - длина участка стойки,  
сжатого силой.



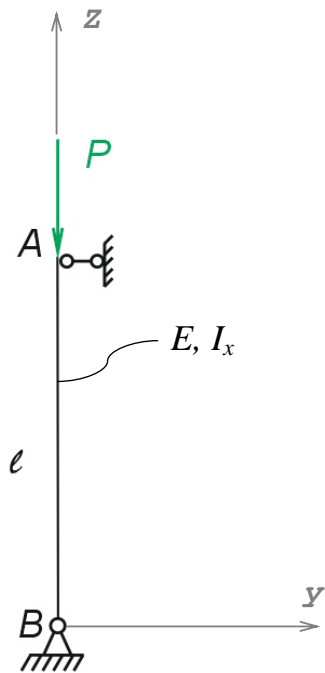
Задаёмся точной формой потери устойчивости в виде графика функции  $y(z)$ , стараясь удовлетворить граничным условиям закрепления стойки; подсчитываем числитель и знаменатель в формуле (XII.7) и таким образом находим  $P_{кр}$ .

Какое  $y(z)$  зададим, такую  $P_{кр}$  и получим. Чем больше форма графика  $y(z)$  будет похожа на реальную форму потери устойчивости, тем ближе к истине будет  $P_{кр}$ .

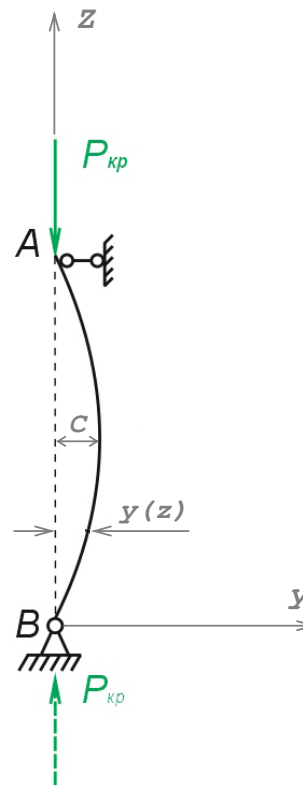
Обратите внимание! В отличие от точного метода в методе энергетическом функция  $y(z)$  всегда одна, ни на какие участки стержень не разбивается. В ГУ, соответственно, отсутствуют условия стыковки.



Пример XII.6 Стойка Эйлера:



Исходное состояние  
(расчётная схема)



Форма потери устойчивости  
(состояние безразличного  
равновесия)

Краевые (граничные)  
условия:

- 1)  $z = 0 : y = 0$
- 2)  $z = \ell : y = 0$
- 3)  $z = 0 : y'' = 0$
- 4)  $z = \ell : y'' = 0$

Задаёмся уравнением упругой линии:

$$\left. \begin{aligned} y &= C \cdot \sin \frac{\pi}{\ell} z \\ y' &= \frac{\pi}{\ell} \cdot C \cdot \cos \frac{\pi}{\ell} z \\ y'' &= -\frac{\pi^2}{\ell^2} \cdot C \cdot \sin \frac{\pi}{\ell} z \end{aligned} \right\} \text{Функция } y(z) \text{ удовлетворяет всем четырём ГУ.}$$

$C$  – неопределённый множитель (амплитуда прогиба); потом он сократится, ибо роли в расчёте не играет (см. рис. XII.5.).

Числитель:

$$\begin{aligned}\int_0^{\ell} E \cdot I_x \cdot (y'')^2 \cdot dz &= \frac{E \cdot I_x \cdot \pi^4 \cdot C^2}{\ell^4} \cdot \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi z}{\ell} \cdot dz = \\&= \frac{E \cdot I_x \cdot \pi^4 \cdot C^2}{\ell^4} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ell} \left( 1 - \cos \frac{2\pi z}{\ell} \right) \cdot dz \right] = \\&= \frac{E \cdot I_x \cdot \pi^4 \cdot C^2}{2 \cdot \ell^4} \cdot \left[ \int_0^{\ell} dz - \frac{\ell}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\ell} \cos \frac{2\pi z}{\ell} \cdot d \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot z}{\ell} \right) \right] = \\&= \frac{E \cdot I_x \cdot \pi^4 \cdot C^2}{2 \cdot \ell^4} \cdot \left[ \ell - \frac{\ell}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ \sin \frac{2\pi z}{\ell} \right\} \Big|_0^{\ell} \right] = \\&= \frac{E \cdot I_x \cdot \pi^4 \cdot C^2}{2 \cdot \ell^4} \cdot \left[ \ell - \frac{\ell}{2 \cdot \pi} \cdot \overbrace{\{ \sin 2\pi - \sin 0 \}}^0 \right] = \\&= \frac{E \cdot I_x \cdot \pi^4 \cdot C^2}{2 \cdot \ell^3}\end{aligned}$$

Знаменатель:

$$\begin{aligned}\int_0^{\ell} (y')^2 \cdot dz &= \frac{\pi^2 \cdot C^2}{\ell^2} \cdot \int_0^{\ell} \cos^2 \frac{\pi z}{\ell} \cdot dz = \frac{\pi^2 \cdot C^2}{\ell^2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ell} \left( 1 + \cos \frac{2\pi z}{\ell} \right) \cdot dz \right] = \\&= \frac{\pi^2 \cdot C^2}{2 \cdot \ell^2} \cdot \left[ \int_0^{\ell} dz + \int_0^{\ell} \cos \frac{2\pi z}{\ell} \cdot dz \right] = \frac{\pi^2 \cdot C^2}{2 \cdot \ell}\end{aligned}$$

Значение критической силы:

$$P_{кр} = \frac{E \cdot I_x \cdot \pi^4 \cdot C^2}{2 \cdot \ell^3} \cdot \frac{2 \cdot \ell}{\pi^2 \cdot C^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{\ell^2}$$

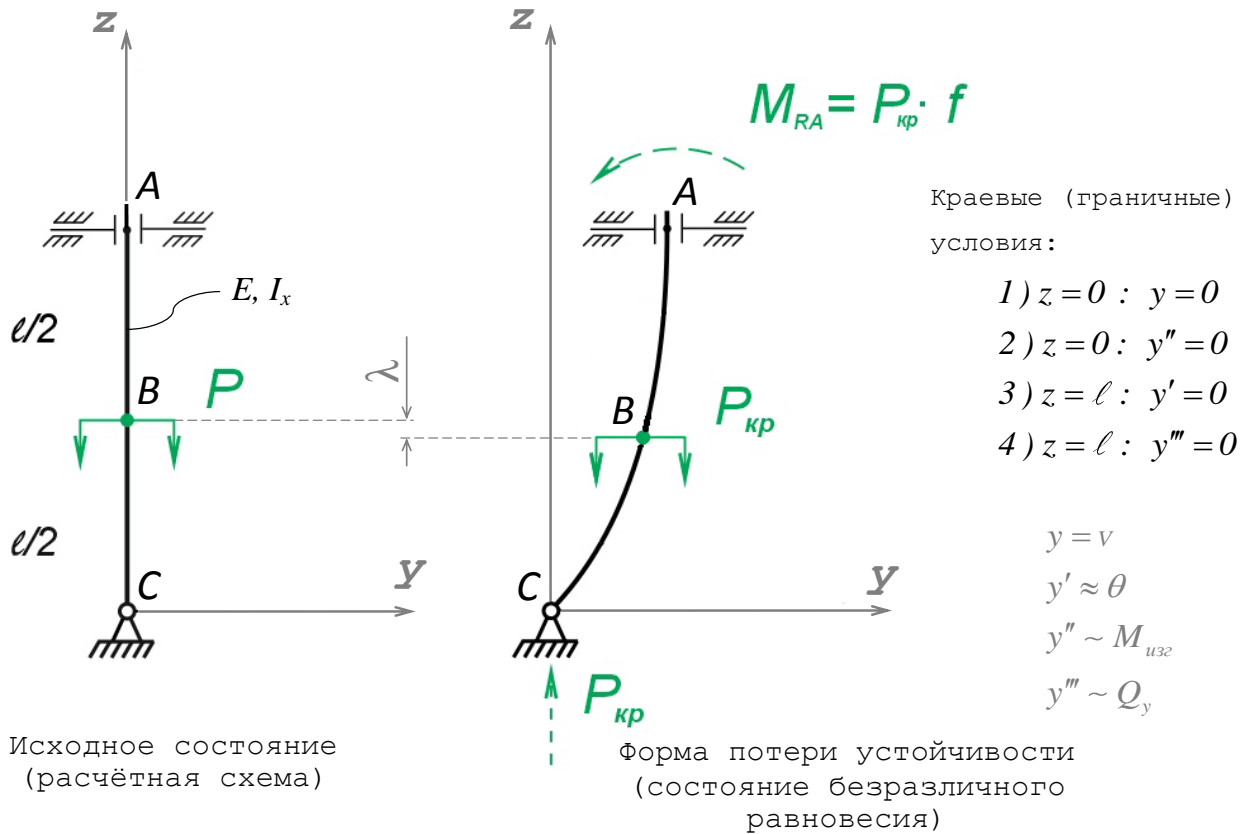


Полное совпадение результатов в примерах XII.1 и XII.6

показывает, что пробная функция прогиба  $y = C \cdot \sin \frac{\pi}{\ell} z$  выбрана удачно – стойка Эйлера действительно изгибается по синусоиде.

В большинстве же реальных задач определить точно форму потери устойчивости не удаётся. Тогда её приближенно представляют универсальной пробной функцией - полиномом, степень которого равна количеству учитываемых граничных условий задачи. Чем больше граничных условий учтено, тем ближе результат к результату точного метода решения

Пример XII.7



Упругую ось стойки задаём полиномом  $y(z)$ , коэффициенты которого находятся из граничных условий (ГУ) для полинома.

Чем больше ГУ учтём, тем выше будет точность результата, степень полинома и объём вычислений. Наиболее важны ГУ с низкими степенями производных. Учтём первые три ГУ. Соответственно полином  $y(z)$  возьмем третьей степени:

$$y = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z^3$$

$$y' = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot z + 3 \cdot a_3 \cdot z^2$$

$$y'' = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot z$$

ГУ:

$$1) z=0, y=0: 0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$2) z=0, y''=0: 0 = 2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$3) z=l, y'=0: 0 = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot l + 3 \cdot a_3 \cdot l^2 \Rightarrow a_1 = -3 \cdot a_3 \cdot l^2$$

Итак:

$$y = a_1 \cdot z + a_3 \cdot z^3 = -3 \cdot a_3 \cdot \ell^2 \cdot z + a_3 \cdot z^3 = \underbrace{a_3 \cdot (z^3 - 3 \cdot \ell^2 \cdot z)}_{\substack{\text{кубическая парабола} \\ \text{и линейная зависимость}}}$$

$$y' = 3 \cdot a_3 \cdot (z^2 - \ell^2)$$

$$y'' = 6 \cdot a_3 \cdot z$$

Роль неопределённого множителя (амплитуды формы потери устойчивости) здесь играет  $a_3$ .

Числитель:

$$\int_0^{\ell} E \cdot I_x \cdot (y'')^2 \cdot dz = \int_0^{\ell} E \cdot I_x \cdot (6 \cdot z \cdot a_3)^2 \cdot dz = 36 \cdot a_3^2 \cdot E \cdot I_x \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^{\ell} = 12 \cdot a_3^2 \cdot E \cdot I_x \cdot \ell^3$$

Знаменатель:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} (y')^2 \cdot dz &= \int_0^{\ell/2} \left[ 3 \cdot a_3 \cdot (z^2 - \ell^2) \right]^2 \cdot dz = 9 \cdot a_3^2 \cdot \int_0^{\ell/2} (z^4 - 2 \cdot z^2 \cdot \ell^2 + \ell^4) \cdot dz = \\ &= 9 \cdot a_3^2 \cdot \left( \frac{z^5}{5} - 2 \cdot \ell^2 \cdot \frac{z^3}{3} + \ell^4 \cdot z \right) \Big|_0^{\ell/2} = 9 \cdot a_3^2 \cdot \ell^5 \cdot \left( \frac{1}{32 \cdot 5} - \frac{2}{8 \cdot 3} + \frac{1}{2} \right) \approx \\ &\approx 3,806 \cdot a_3^2 \cdot \ell^5 \end{aligned}$$

Значение критической силы:

$$P_{кр} = \frac{12 \cdot \cancel{a_3^2} \cdot E \cdot I_x \cdot \ell^3}{3,806 \cdot \cancel{a_3^2} \cdot \ell^5} = 3,153 \cdot \frac{E \cdot I_x}{\ell^2} \approx \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(1,769 \cdot \ell^2)}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi^2}{3,153}} \approx 1,769$$

Точное решение (пример [XII.4](#)) даёт большее значение коэффициента приведения длины  $\mu = 1,826$  (разница  $\Delta \approx 3,1\%$ ) и, соответственно, меньшую силу  $P_{кр}$ .

### З а м е ч а н и е:

Еще более точное значение  $P_{кр}$  ( $\mu = 1,788$  ;  $\Delta = 2\%$ ) можно получить, используя не три, а все четыре ГУ и полином четвертой степени:

$$y = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z^3 + a_4 \cdot z^4$$

Как видим, коэффициент  $\mu$  , вычисленный энергетическим методом всегда меньше, либо равен своему точному значению. Следовательно, в большинстве случаев, энергетический метод даёт завышенное значение критической нагрузки  $P_{кр}$  и никогда – заниженный.

Объясняется это тем, что, задаваясь приближенной формой упругой линии, мы как бы дополнительно отклоняем стержень от точной формы, увеличивая  $U$ .

Однако, даже 3,5% ошибки для инженерной деятельности – вполне приличный результат, а трудозатраты на получение результата существенно ниже. Точным методом (численным его вариантом) считают компьютеры, энергетический более удобен для ручных вычислений.

## Пределы применимости формулы Эйлера

В точном и энергетическом методах рассчитываемые стержни предполагаются

- а) длинными
- и
- б) линейно упругими (рис. II.8, участок O-A).

Сила, выводящая длинный стержень из состояния устойчивого равновесия, относительно невелика, сжимающим её действием на стержень можно пренебречь, учитывать только действие внутреннего изгибающего момента  $M_{изг}$ :

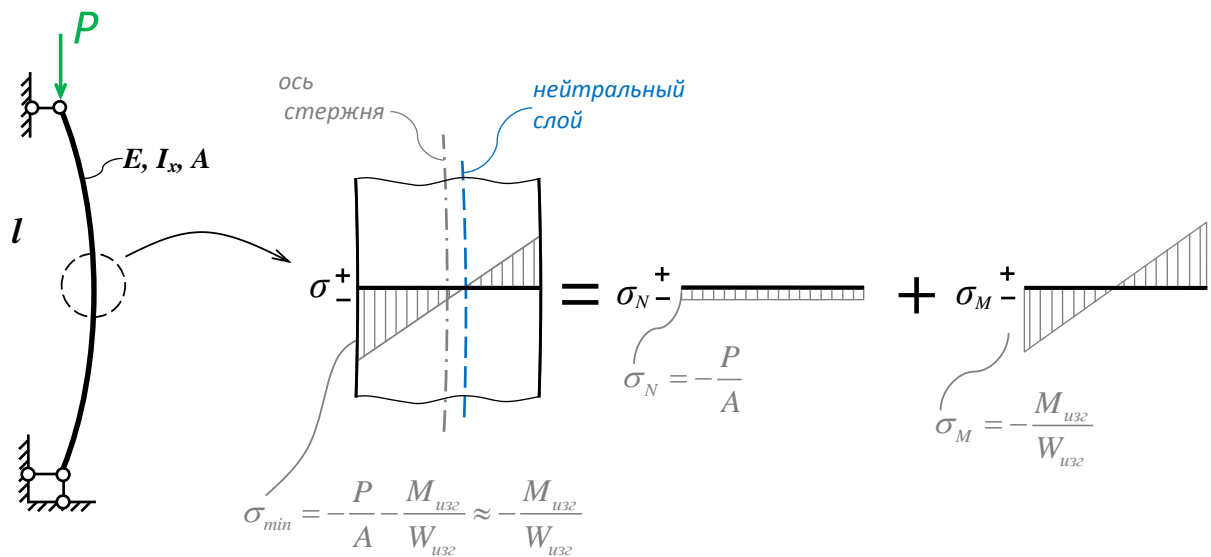


Рис XII.9.

Поэтому в примерах XII.1 ... XII.5 не учитываются смещения вдоль оси z, а в примерах XII.6 и XII.7 учитывается только потенциальная энергия изгиба.

Для приведения короткого стержня в состояние безразличного равновесия, требуется уже большая продольная сила:

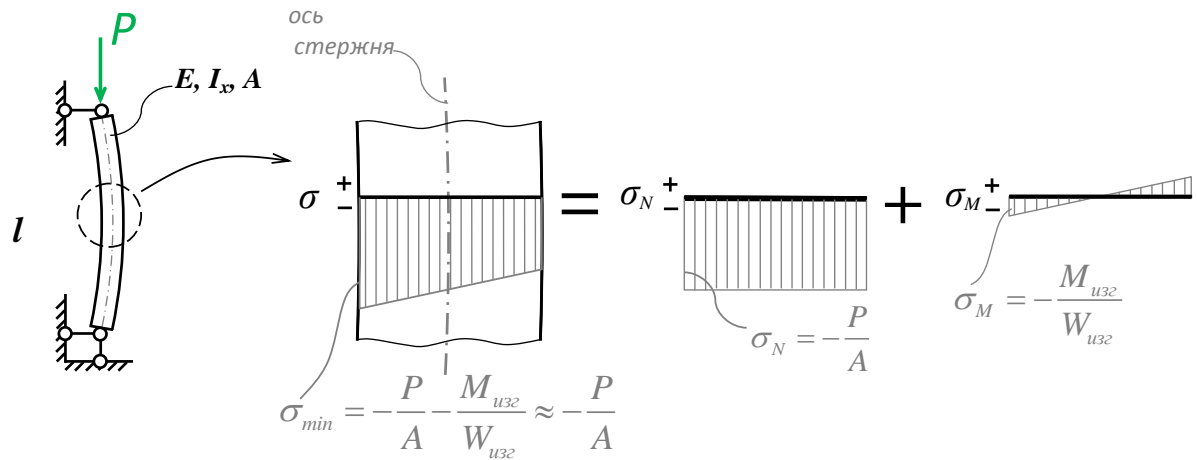


Рис. XII.10.

Настолько большая, что сжатый материал стержня может “выйти” за пределы линейной упругости, и тогда большинство формул, используемых ранее, теряют смысл. Короткие стержни рассчитываются по эмпирическим и полуэмпирическим формулам.

Как различить “длинные” и “короткие” стержни?

Вводится понятие **гибкости**:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i} \quad (\text{XII.8})$$

где:

$\lambda$  – гибкость стержня (безразмерная величина);

$\mu$  – коэффициент приведения длины (безразмерный);

$\ell$  – длина стержня, м;

$i = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$  – радиус инерции поперечного сечения, м;

$I_x$  – момент инерции поперечного сечения, м<sup>4</sup>;

$A$  – площадь поперечного сечения, м<sup>2</sup>.



Стержни с большой гибкостью (*рис XII.9.*) остаются линейно упругими и после потери устойчивости рассчитываются по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(\mu \cdot \ell)^2}$$

Материал стержней с малой гибкостью (*рис. XII.10.*) становится нелинейно упругим ещё до потери устойчивости. Критическую силу, в этом случае, можно вычислить по приближенным формулам:

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{нц}) \cdot \left( \frac{\lambda}{\lambda_{нц}} \right)^2 \quad (XII.9)$$

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$$

где:

$\lambda$  – гибкость рассчитываемого стержня;

$\lambda_{нц}$  – гибкость стержня, в котором потеря устойчивости ( $P=P_{кр}$ ) происходит одновременно с выходом материала за пределы линейной упругости ( $\sigma_{кр} = \sigma_{нц}$ ).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{кр} &= \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(\mu \cdot \ell)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{(\mu \cdot \ell)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_{нц}^2} = \sigma_{нц} \\ \Downarrow \\ \lambda_{нц} &= \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нц}}} \end{aligned} \right\} \quad (XII.10)$$

Рис. XII.11.

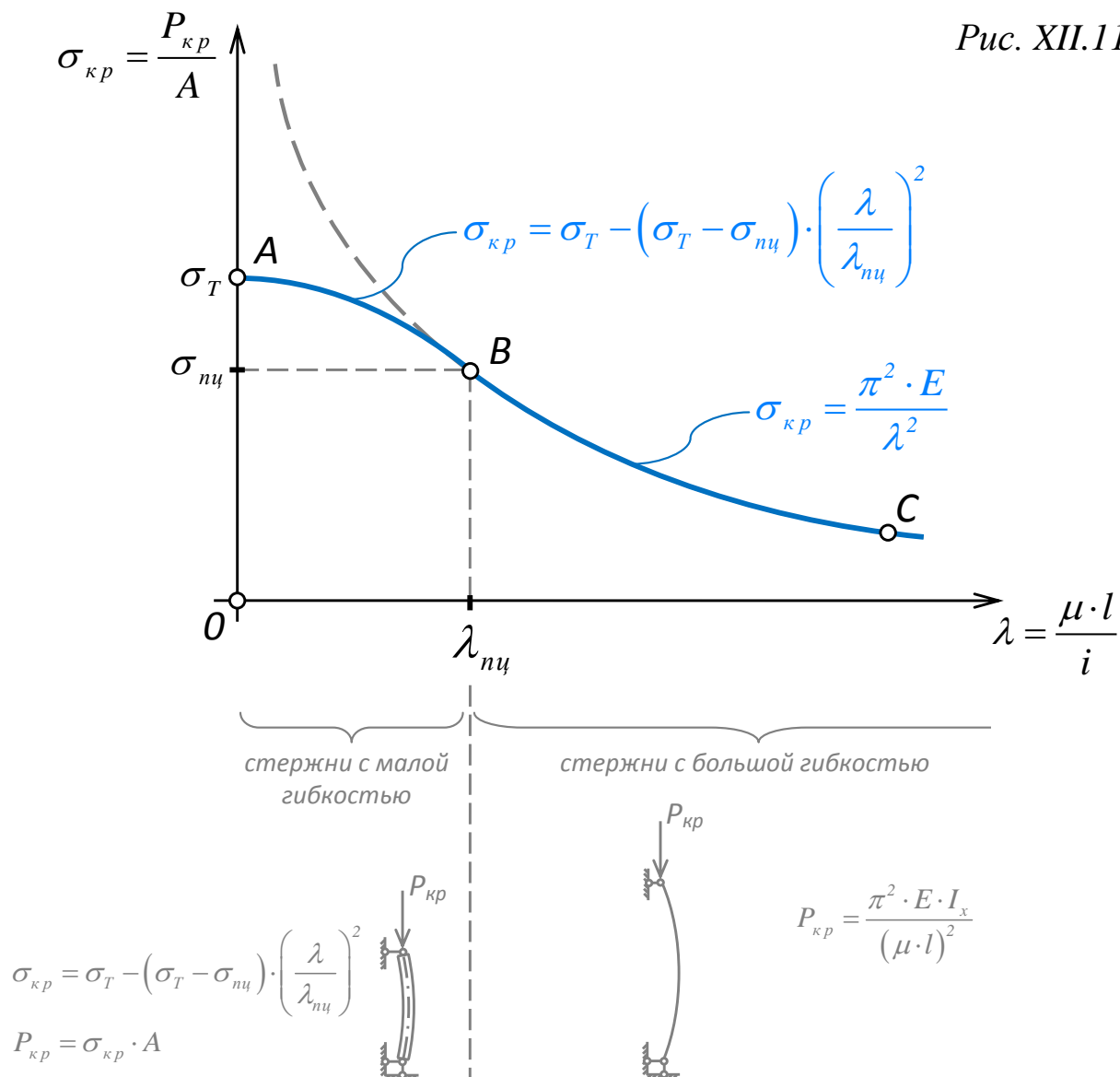
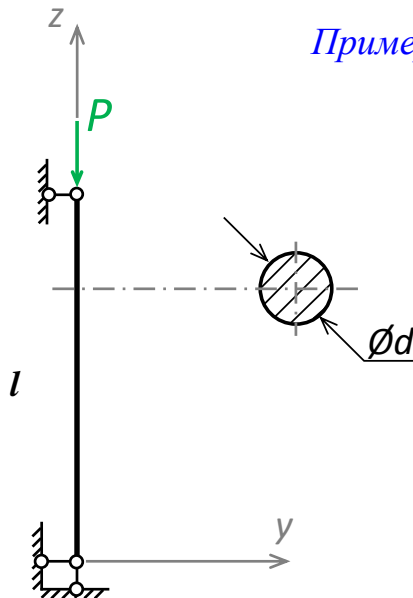


Таблица XII.1

Материал	$\sigma_{нц}$ , МПа	$\sigma_T$ , МПа	$\lambda_{нц}$
Ст. 2	190	220	105
Ст. 3	220	280	96
Ст. 4, 20	230	260	94
Ст. 5, 35, 35Л	240	280	92
Ст. 45Л	270	320	86
Ст. 45	305	360	82
Ст. 50	320	380	80
Дерево	—	—	70

Модуль упругости первого рода  $E$  для сталей:  $(1,95 \dots 2,1) \cdot 10^5$  МПа.

Пример XII.8



Материал: Ст. 45л.

Принимаем:  $E=2 \cdot 10^5$  МПа

Дано:  $l = 1$  м

а)  $d=4$  см

б)  $d=5$  см

$\sigma_{ny}=270$  МПа,  $\sigma_T=320$  МПа

Найти:  $P_{кр} = ?$

Решение:

$$\text{а) } \left. \begin{aligned} I_x &= \frac{\pi \cdot d^4}{64} \\ A &= \frac{\pi \cdot d^2}{4} \end{aligned} \right\} i = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d^2}} = \frac{d}{4}$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{0,04} = 100$$

$$\lambda_{ny} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{ny}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{270 \cdot 10^6}} \approx 85,5$$

$\lambda > \lambda_{ny} \Rightarrow$  стержень с большой гибкостью

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{\ell^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0,04^4}{1 \cdot 64} = 248050 \text{ Н} \approx 250 \text{ кН}$$

$$\text{б) } \lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i} = \frac{\mu \cdot \ell \cdot 4}{d} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{0,05} = 80;$$

$\lambda < \lambda_{ny} \Rightarrow$  стержень с малой гибкостью;

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{ny}) \cdot \left( \frac{\lambda}{\lambda_{ny}} \right)^2 = 320 - (320 - 270) \cdot \left( \frac{80}{85,5} \right)^2 \approx 276 \text{ МПа}$$

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = \sigma_{кр} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 276 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 542368 \text{ Н} \approx 540 \text{ кН}$$

## Устойчивость сжатых стержней за пределами упругости

Стержень, напряжения в котором достигли предела текучести ( $\sigma_{сж} = \sigma_T$ ), устойчивым не может быть по определению: устойчивость – способность возвращаться в исходное состояние после отклонения бесконечно малым внешним воздействием – подразумевает наличие в стержне только упругих (обратимых) деформаций.

Любое догружение изгибом материала, уже нагруженного до предела текучести, порождает пластические (необратимые!) деформации. После исчезновения внешнего воздействия вернуться обратно стержень уже не может.

На практике это выглядит так: образуется пластический шарнир и стержень теряет несущую способность (рис. XII.12.).

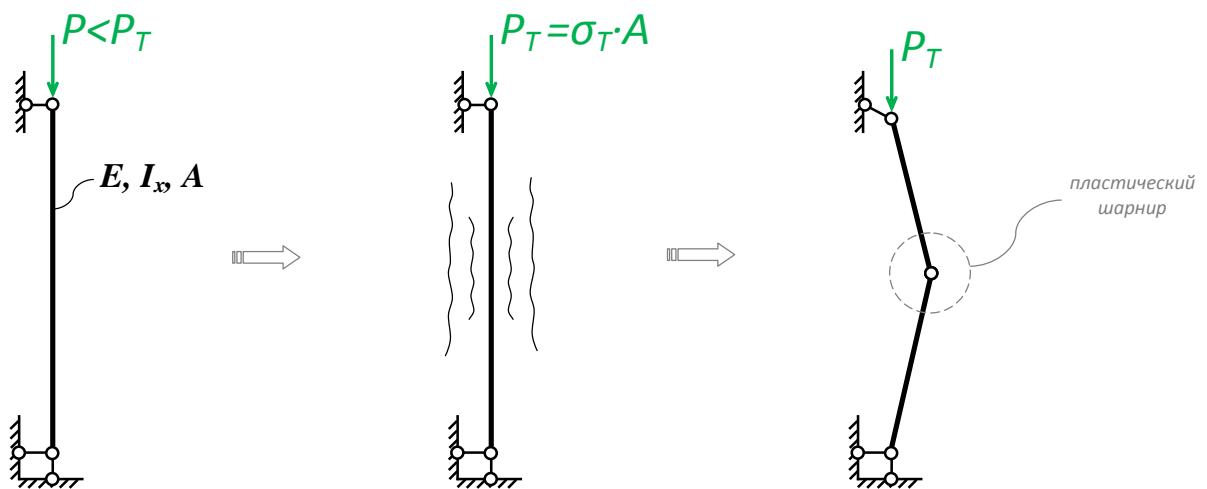


Рис. XII.12.

## Расчёт по коэффициенту понижения допускаемых напряжений

Быстрота расчётов исключительно важна в работе инженера-прочниста.

Если стойки простые и их много (так бывает, например, в авиа-, ракето- или мостостроении), то не оптимально всякий раз тратить время на выбор метода расчёта, поиск в справочниках модуля упругости  $E$ , предела пропорциональности  $\sigma_{nc}$ , нормативного коэффициента запаса прочности по устойчивости  $[n]_y$  и т.д. И, кроме того, каждый раз требуется определяться, по каким формулам вести расчёт критической силы – для гибких стержней и для стержней малой гибкости они, как мы уже видели, разные.

Проще заранее насчитать таблицы результатов с учётом  $[n]_y$ , и выразить их через то, что у инженера всегда под рукой – допускаемое напряжение на прочность при сжатии  $[\sigma]_c = \frac{\sigma_{TC}}{[n]}$ , а при расчёте быстро “доставать” из таблиц нужные коэффициенты. Такой способ особенно удобен при проверочном расчёте.

На практике это выглядит так: кривая  $ABC$  (рис. XII.9.), делённая на  $[n]_y$

$$[\sigma]_{кр} = \frac{\sigma_{кр}}{[n]_y} = \frac{P_{кр}}{A \cdot [n]_y}$$

для стержней разной гибкости заносится в таблицу в виде долей от  $[\sigma]_c$ :

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{кр}}{[\sigma]_c} = \frac{[n]}{[n]_y} \cdot \frac{P_{кр}}{A \cdot \sigma_{TC}} - \text{коэффициент понижения}$$

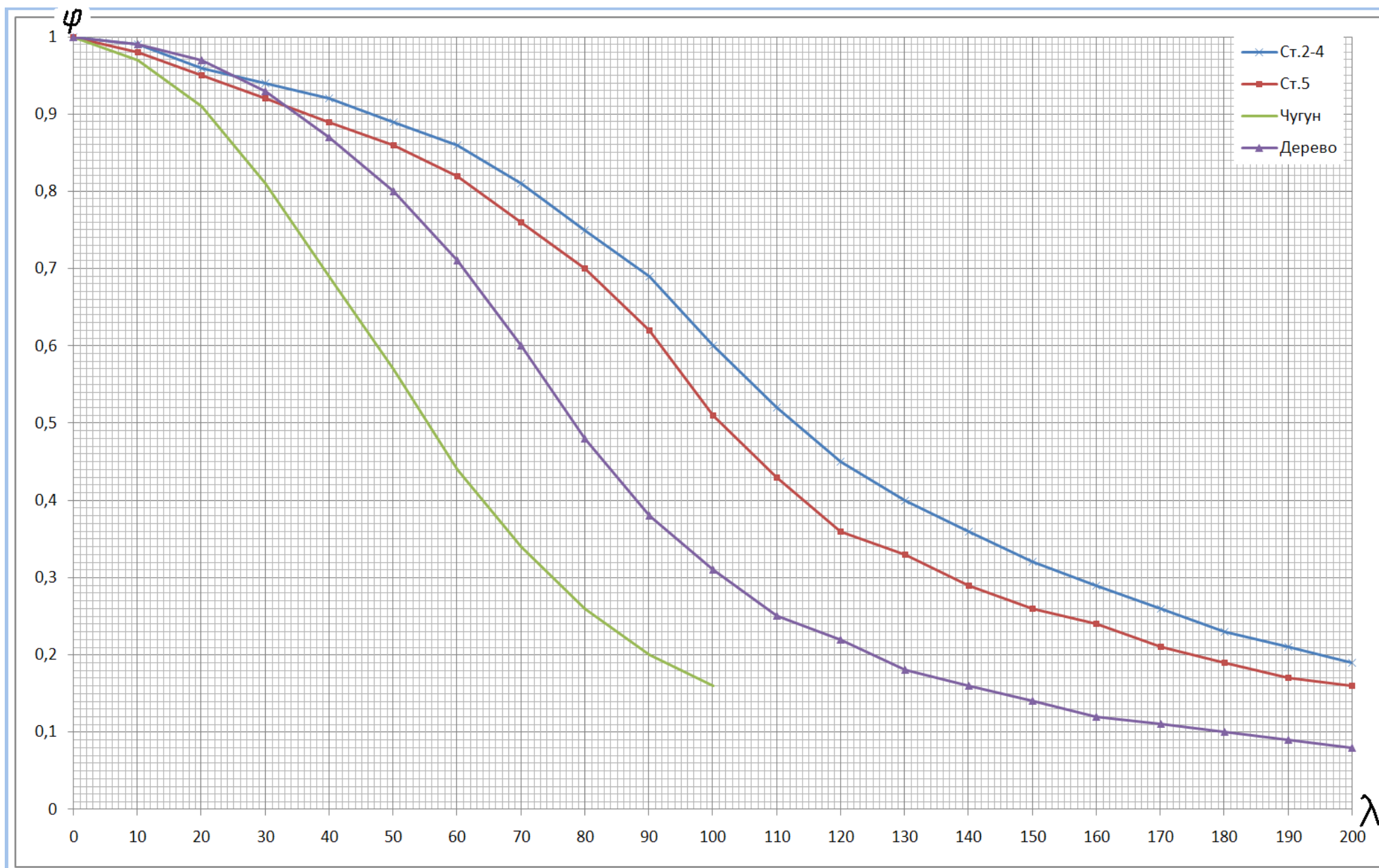
допускаемых напряжений.

(XII.13)

Таблица XII.2

Гибкость	Коэффициент $\varphi$ для			
	Ст.2, Ст.3, Ст.4	Ст.5	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	0,25
120	0,45	0,36	—	0,22
130	0,40	0,33	—	0,18
140	0,36	0,29	—	0,16
150	0,32	0,26	—	0,14
160	0,29	0,24	—	0,12
170	0,26	0,21	—	0,11
180	0,23	0,19	—	0,10
190	0,21	0,17	—	0,09
200	0,19	0,16	—	0,08

Графически таблица XII.1 выглядит так (рис. XII.11., делённый на свои для каждого материала  $[n]_y$  и  $[\sigma]_c$ ):



Естественно,  $\varphi$  не может быть больше единицы:  $\varphi \leq 1$ . Стержень может, сохраняя прочность, терять устойчивость, но не наоборот.

Таблица XII.3

Материал	$[\sigma]_c = \frac{\sigma_T}{[n]}, \text{ МПа}$
Ст.2	150
Ст.3	160
Ст.4, 20	175
Ст.5, 35, 35л	190
Ст.45л	210
Ст.45	240
Ст.50	255
Дерево	10

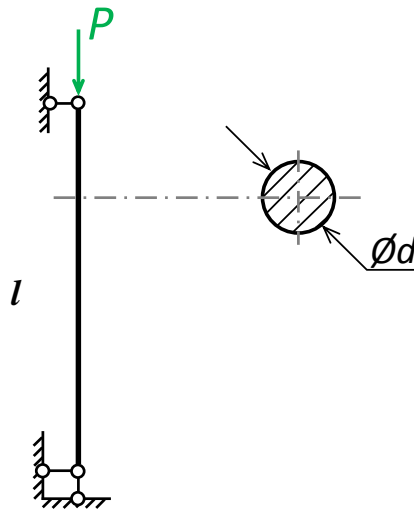
**Проверочный** расчет весьма прост: знаем размеры сечения, (а, значит, знаем  $I_x$  и  $A$ ) и знаем  $\ell$ ; далее

$$\left. \begin{array}{l} I_x \\ A \\ \ell \end{array} \right\} i \left\} \lambda \rightarrow \varphi \rightarrow [\sigma]_{кр} \rightarrow [P]_{кр}$$

**Проектировочный** расчёт сложнее: длина стержня  $\ell$  неизменна; подбираем размеры сечения так, чтобы  $[P]_{кр}$  для него была немного больше, либо равна силе  $P$ , действующей на стержень.



Пример XII.9 проверочный расчёт:



Дано: материал – Ст. 45л

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$$

$$l = 1 \text{ м}$$

а)  $d = 4 \text{ см}$

б)  $d = 5 \text{ см}$

$$[\sigma]_C = 210 \text{ МПа}$$

Найти:  $[P]_{кр} = ?$

Решение:

$$\text{а) } \left. \begin{aligned} I_x &= \frac{\pi \cdot d^4}{64} \\ A &= \frac{\pi \cdot d^2}{4} \end{aligned} \right\} i = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{d}{4}$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{0,04} = 100$$

$$\varphi = 0,51 \text{ (табл. XII.2, графа «Ст. 5, ..., 45л»)}$$

$$[\sigma]_{кр} = \varphi \cdot [\sigma]_C = 0,51 \cdot 210 \cdot 10^6 = 107 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$[P]_{кр} = [\sigma]_{кр} \cdot A = [\sigma]_{кр} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 107 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 0,04^2}{4} \approx 134460 \text{ Па} = 134 \text{ кПа}$$

Сравнить с примером XII.8, там  $P_{кр} = 250 \text{ кН}$ .

$$\text{б) } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{0,05} = 80$$

$$\varphi = 0,7$$

$$[\sigma]_{кр} = \varphi \cdot [\sigma]_C = 0,7 \cdot 210 \cdot 10^6 = 147 \cdot 10^6 \text{ МПа}$$

$$[P]_{кр} = [\sigma]_{кр} \cdot A = 147 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} \approx 290000 = 290 \text{ кН}$$

Сравнить с примером XII.8, там  $F_{кр} = 540 \text{ кН}$ .

### Замечание:

Как видите, расчёт стержней по коэффициенту понижения допускаемых напряжений выполняется по одним и тем же простым формулам и для стоек высокой гибкости и для стоек малой гибкости. Вообще разделение их по такому критерию отсутствует.

Разница в результатах примера XII.8 и примера XII.9 вполне естественна: в первом случае определялись теоретические значения критической силы, во втором – допустимые значения (то есть, уже с учётом нормативного коэффициента запаса по устойчивости  $[n]_y$ ):

$$\text{а) } \frac{P_{кр}}{[P]_{кр}} = \frac{250 \text{ кН}}{134 \text{ кН}} = 1,86$$

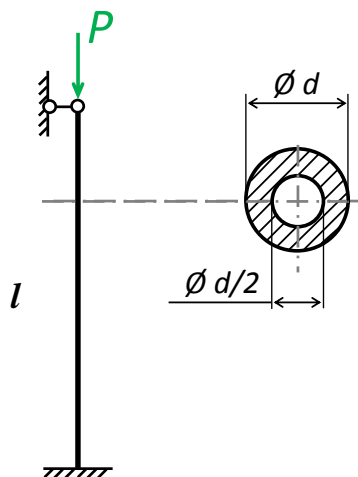


$$1,86 = \frac{P_{кр}}{[P]_{кр}} = \frac{\overbrace{A \cdot \sigma_T \cdot \cancel{[n]_y}}^{\text{формула (XI.9)}}}{\cancel{[n]} \cdot \underbrace{\frac{\sigma_T}{[n]} \cdot A}_{[\sigma]_c}} = [n]_y$$



$$\text{б) } \frac{P_{кр}}{[P]_{кр}} = \frac{540 \text{ кН}}{290 \text{ кН}} = 1,86$$

Пример XII.10 проективный расчёт:



Дано: материал – Ст. 5

$$P_{кр} = 200 \text{ кН}$$

$$\ell = 2 \text{ м}$$

$$\mu = 0,7$$

$$\sigma_{ny} = 320 \text{ МПа}$$

$$\sigma_T = 380 \text{ МПа}$$

$$[n] = 1,3$$

$$E \approx 2,05 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

Найти:  $d \pm 0,5 \text{ мм}$  (т.е с точностью до 1 мм)

Решение:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} - \frac{\pi \cdot (d/2)^2}{4} = \frac{3}{16} \cdot \pi \cdot d^2 = \frac{9,4}{16} \cdot d^2 = 0,5890 \cdot d^2$$

$$I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d/2}{d} \right)^4 \right] = \frac{15}{1024} \cdot \pi \cdot d^4 = 0,04602 \cdot d^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{0,04602 \cdot d^4}{0,589 \cdot d^2}} = 0,2795 \cdot d$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i} = \frac{0,7 \cdot 2}{0,2795 \cdot d} = \frac{5,009}{d} \approx \frac{5}{d}$$

$$[\sigma]_c = \frac{\sigma_T}{[n]} = \frac{380 \cdot 10^6}{1,3} = 292,31 \cdot 10^6 \approx 292 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

*Подбираем:*

$d=1 \text{ см}$ :  $A=0,589 \cdot 0,01^2=58,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$

$$\lambda = 5/0,01=500$$

$\varphi=???$  В таблице нет  $\varphi$  для столь высоких  $\lambda$ . Значит, на практике такие стержни не применяются.

$d=4 \text{ см}$ :  $A=0,589 \cdot 0,04^2=942,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$

$$\lambda = 5/0,04=125$$

$$\varphi=0,345$$

$$[\sigma]_{кр} = \varphi \cdot [\sigma]_c = 0,345 \cdot 292 \cdot 10^6 = 100,7 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$[P]_{кр} = \underbrace{100,7 \cdot 10^6}_{[\sigma]_{кр}} \cdot \underbrace{942,4 \cdot 10^{-6}}_A = 94937 \text{ Н} = 94,9 \text{ кН}$$

$$\underline{d=6 \text{ см:}} \quad A=0,589 \cdot 0,06^2=2120 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$\lambda = \frac{5}{0,06} = 83,33$$

$$\varphi=0,676$$

$$[\sigma]_{кр} = \varphi \cdot [\sigma]_C = 0,676 \cdot 292 \cdot 10^6 = 197 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$[P]_{кр} = 197 \cdot 10^6 \cdot 2120 \cdot 10^{-6} = 418471 \text{ Н} = 418 \text{ кН}$$

$$\underline{d=5 \text{ см:}} \quad A=0,589 \cdot 0,05^2=1473 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$\lambda = \frac{5}{0,05} = 100$$

$$\varphi=0,51$$

$$[\sigma]_{кр} = \varphi \cdot [\sigma]_C = 0,51 \cdot 292 \cdot 10^6 = 148,9 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$[P]_{кр} = 148,9 \cdot 10^6 \cdot 1473 \cdot 10^{-6} = 219359 \text{ Н} = 219 \text{ кН}$$

Дальше можно идти с шагом 1 мм.

$$\underline{d=4,9 \text{ см:}} \quad A=0,589 \cdot 0,049^2=1414 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$\lambda = \frac{5}{0,049} = 102$$

$$\varphi=0,49$$

$$[\sigma]_{кр} = \varphi \cdot [\sigma]_C = 0,49 \cdot 292 \cdot 10^6 = 143,1 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$[P]_{кр} = 143,1 \cdot 10^6 \cdot 1414 \cdot 10^{-6} = 202343 \text{ Н} = \textcircled{202 \text{ кН}}$$

Итак, наружный диаметр  $d$  поперечного сечения стойки за 5 итераций подобран с точностью до миллиметра:

$$d = 49 \text{ мм}$$

При этом  $[P]_{кр}=202 \text{ кН}$  будет незначительно превышать заданную  $P_{кр}=200 \text{ кН}$ , но это не существенно (погрешность укладывается в инженерную точность 4%). Главное: при нагрузках меньших, либо равных  $P_{кр}$  стойка с таким размером сечения будет гарантировано работоспособна.