# Урок 4. Волновой пакет

1. (Задача 2.9.) Найти групповую скорость волнового пакета, состоящего из двух плоских волн с близкими частотами $\omega_0 \pm \Delta\omega$ , распространяющихся в диспергирующей среде.

**Решение** Пусть в направлении оси $Z$ распространяются две плоские волны с одинаковой поляризацией, одинаковой амплитудой $E_0$ и различными частотами $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$. Волновые числа равны $k_1$ и $k_2$ соответственно. Напряженность результирующего поля равна сумме напряженностей обеих волн в силу принципа суперпозиции

$$E = E_0\cos(\omega_1 t + k_1 z) + E_0\cos(\omega_2 t - k_2 z + \alpha) =$$

$$= 2E_0\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t - \frac{k_2-k_1}{2}z + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t - \frac{k_2+k_1}{2}z + \frac{\alpha}{2}\right). \qquad (1)$$

Каждая из волн является решением волнового уравнения, для которой $k = \frac{\omega}{c}n$, где $n$ — показатель преломления среды. Если среда обладает дисперсией, тогда показатель преломления $n$ зависит от частоты и естественно предположить, что $n_1 = n_0 - \Delta n_1$, $n_2 = n_0 + \Delta n_2$ ($n_0$ — показатель преломления при частоте $\omega_0$), $\Delta n_1 \approx \Delta n_2 = \Delta n$, $\Delta n \ll n_0$, так как $\Delta\omega \ll \omega_0$. Тогда, отбрасывая величины второго порядка малости, получаем $\frac{\omega_2-\omega_1}{2} = \Delta\omega$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \omega_0$, $\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{n_0\omega_0}{2} = k_0$, $\frac{k_2-k_1}{2} \approx \frac{n_0\Delta\omega}{c} + \frac{\Delta n\omega_0}{c} = \Delta k$ и выражение (1) примет вид

$$E = 2E_0\cos\left(\Delta\omega t - \Delta k z + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\omega_0 t - k_0 z + \frac{\alpha}{2}\right). \qquad (2)$$

Эту результирующую волну можно рассматривать как волну с частотой $\omega_0$ и волновым числом $k_0$, но с медленно и притом непериодически меняющейся амплитудой $A = 2E_0\cos(\Delta\omega t - \Delta k z + \frac{\alpha}{2})$. Волна (2), строго говоря, уже не будет гармонической, но при $\Delta\omega \ll \omega_0$ и $\Delta k \ll k_0$ изменение модулированной амплитуды $A$ в пространстве и во времени происходит за период $T_A = 2\pi/\Delta\omega$ и на длине $\lambda_A = 2\pi/\Delta k$, которые много больше периода $T_0 = 2\pi/\omega_0$ и длины волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ соответственно. Для определения скорости перемещения фазы волны (2) выберем какое-нибудь значение фазы, положив

$$\omega_0 t - k_0 z + \frac{\alpha}{2} = \text{const}\,. \qquad (3)$$

Переписывая выражение (3) в виде

$$z = \frac{2\,\text{const} + \alpha}{2k_0} + \frac{\omega_0}{k_0}t,$$

заключаем, что точка, где находится значение выбранной нами фазы, движется со скоростью $v = \omega_0/k_0$. Чему равна скорость перемещения данного значения амплитуды? Амплитуда $A$ будет постоянной, если постоянен аргумент под косинусом в $A$, т. е.

$$\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot z + \frac{\alpha}{2} = \mathrm{const},$$

или

$$z = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t + \alpha - \frac{2\,\mathrm{const}}{2\Delta k}.$$

Отсюда видно, что точка, где находится значение выбранной амплитуды, движется со скоростью $v = \Delta\omega/\Delta k$, называемой групповой скоростью.

2. (Задача 2.10.) Найти волновой пакет для момента времени $t = 0$, если его амплитудная функция имеет гауссовский вид

$$a(k) = a_0 \exp\left\{ -\left(\frac{k - k_0}{\Delta k}\right)^2 \right\}.$$

**Решение** Волновой пакет — это результирующее поле, полученное путем наложения гармонических волн с непрерывно меняющимся волновым вектором **k**. В нашем случае закон изменения $k$ дается в условии задачи выражением $a(k)$, поэтому

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(\omega t - kz)} \mathrm{d}k.$$

При $t = 0$ имеем

$$E(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{-ikz} \mathrm{d}k = a_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k-k_0}{\Delta k}\right)^2 - ikz} \mathrm{d}k. \tag{1}$$

Делая в уравнении (1) замену

$$\xi = \frac{k - k_0}{\Delta k} + i\frac{\Delta k z}{2},$$

получаем

$$E(z,0) = a_0 e^{-ik_0 z} e^{-z^2 \Delta k^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = a_0 \Delta k \sqrt{\pi} e^{\frac{-z^2 \Delta k^2}{4}} e^{-ik_0 z}.$$

3. (Задача 2.11.) Определить форму и движение волнового пакета, состоящего из плоских волн одинаковой амплитуды и с волновыми векторами, лежащими в области $|\mathbf{k_0}-\mathbf{k}|\leqslant q$. Дисперсия среды линейна: $\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\big|_{k=k_0} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k_0})$.

**Решение** Выражение $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k_0}}$ — это вектор с компонентами $\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\Big|$, $\frac{\partial\omega}{\partial k_y}\Big|$, $\frac{\partial\omega}{\partial k_z}\Big|$. Тогда зависимость частоты $\omega$ от $\mathbf{k}$ будет

$$\omega(\mathbf{k}) \cong \omega_0 + u_x(k_x - k_{0x}) + u_y(k_y - k_{0y}) + u_z(k_z - k_{0z}), \tag{1}$$

где $\omega_0 = \omega(k_0)$. Сложная зависимость $\omega$ от $k$ возникает в связи с тем, что диэлектрическая проницаемость вещества, а с ней и показатель преломления $n$ зависят от частоты волны или от $k$. Для каждой плоской волны выполняется соотношение $\omega = \frac{ck}{n(k)}$. Видом этой функции определяется закон дисперсии волны. Учтем, что в нашем случае дисперсия среды линейна. Тогда волновой пакет, являющийся суперпозицией плоских волн с одинаковыми амплитудами $a_0$ и различными частотами, удовлетворяющими соотношению (1), запишется так:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \int e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}\mathrm{d}\mathbf{k} = a_0 \int e^{i\{[\omega_0 + \mathbf{u}(\mathbf{k}-\mathbf{k_0})]t - (\mathbf{kr})\}}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z. \tag{2}$$

Интеграл (2) — трехмерный по области $|\mathbf{k}-\mathbf{k_0}|\leqslant q$. Учитывая, что $(\mathbf{uk}) = u_xk_x + u_yk_y + u_zk_z$ и вводя вектор $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$, запишем

$$E(\mathbf{r}, t) = a_0 e^{i(\omega_0 t - \mathbf{rk_0})} \int e^{-i\rho(\mathbf{k}-\mathbf{k_0})}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z. \tag{3}$$

Перейдем от интегрирования по $\mathbf{k}$ в декартовой системе координат к интегрированию в сферической системе координат с полярной осью вдоль вектора $\rho$ и с началом в точке $\mathbf{k_0}$. Получим

$$E(\mathbf{r}, t) = a_0 e^{i(\omega_0 t - \mathbf{rk_0})} \int_0^q \int_0^\pi e^{-i\rho k'\cos\theta} 2\pi k'^2 \mathrm{d}k' \sin\theta \mathrm{d}\theta, \tag{4}$$

где $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{k_0}$. Интегрируя правую часть уравнения (4) по $\theta$, получаем

$$E(\mathbf{r}, t) = 4\pi a_0 e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k_0 r})} \cdot \frac{1}{\rho} \int_0^q \sin\rho k' \cdot k'\mathrm{d}k'.$$

Окончательно

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi a_0 q}{\rho^2} \left( \frac{\sin\rho q}{\rho q} - \cos\rho q \right) e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k_0 r})}. \tag{5}$$

Выражение (5), описывающее результирующее поле, можно представить в виде произведения двух сомножителей:

$$A(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi a_0 q}{\rho^2}\left(\frac{\sin\rho q}{\rho q} - \cos\rho q\right) \quad \text{и} \quad e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k_0 r})}.$$

Второй из них представляет бегущую волну, однородную в пространстве со средней частотой $\omega_0$ и волновым вектором $\mathbf{k_0}$. Множитель $A(\mathbf{r},t)$ можно рассматривать как амплитуду результирующей волны, которая заметно отлична от нуля только в пространственной области $\rho q \leqslant 1$ и одинакова при равных $\rho q$ (напомним, что $q = \mathrm{const} \neq 0$ и варьируется только $\rho$). Например, при $\rho q = 0$, т. е. $\rho = 0$, амплитуда максимальна и равна $4\pi a_0 q^3/3$. Но $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{u}t|$ равно нулю в точке $\mathbf{r} = 0$ в момент времени $t = 0$ и в последующие моменты времени в точках, определяемых радиусом вектором $\mathbf{r} = \mathbf{u}t$. Таким образом, результирующее поле в действительности представляет волновой пакет, т. е. ограниченное в пространстве возмущение, которое движется как целое без изменения формы с групповой скоростью $\mathbf{u} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$.

4. (Задача 2.13.) Исследовать «расплывание» одномерного волнового пакета с гауссовской амплитудной кривой $a(k) = a_0 \exp\{-\alpha(k - k_0)^2\}$, учитывая и квадратичные члены в дисперсии.

**Решение** В задаче 3. рассмотрено движение волнового пакета, когда квадратичные члены в дисперсии не учитывались. Получено, что волновой пакет движется, не «расплываясь». Исследуем этот вопрос в случае, когда в законе дисперсии присутствует квадратичный член, т. е. $\omega(k) = \omega_0 + u(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2$, где $u = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{(k=k_0)}$, $\beta = \left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{(k=k_0)}$.

Волновой пакет выразится интегралом

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(\omega t - kz)} \mathrm{d}k =$$

$$= a_0 e^{i(\omega_0 t_0 - kz)} \int e^{-[(k-k_0)^2(\alpha - i\beta t) + i(k-k_0)(z-\omega t)]} \mathrm{d}k.$$

Обозначим $\gamma = \alpha - i\beta t$, $\quad \xi = z - ut$. Делая замену $k_1 = k - k_0$ и дополняя до полного квадрата показатель экспоненты, получаем

$$E(z,t) = a_0 a e^{i(\omega_0 t_0 - kz) - \frac{\xi^2}{4\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_1\sqrt{\gamma} + \frac{i\xi}{2\sqrt{\gamma}})^2} \mathrm{d}k' =$$

$$= a_0 e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}} e^{i(\omega_0 t_0 - kz)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}.$$

Окончательно

$$E(z,t) = a_0\sqrt{\frac{\pi}{\alpha - i\beta t}}e^{-\frac{(z-ut)^2}{4(\alpha-i\beta t)}}e^{i(\omega_0 t_0 - kz)}.$$

Поскольку амплитуда волны

$$E(z,t) = a_0\sqrt{\frac{\pi}{\alpha - i\beta t}}e^{-\frac{(z-ut)^2}{4(\alpha-i\beta t)}}$$

комплексна, то проще исследовать характер зависимости пакета от $z$ и $t$, образовав квадрат модуля амплитуды, так как именно он определяет интенсивность волны:

$$|E(z,t)|^2 = |E_0(z,t)|^2 = \frac{\pi a_0^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2 t^2}}\exp\left[-\frac{\alpha(z-ut)^2}{2(\alpha^2+\beta^2t^2)}\right]. \tag{6}$$

Из этого выражения видно, что полуширина кривой интенсивности растет со временем по закону $\Delta z = \sqrt{2(\alpha^2+\beta^2t^2)/\alpha}$, а высота убывает как $1/\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2}$. Волновой пакет расплывается, но для времени $t \ll \alpha/\beta$ пакет мало деформируется, и можно говорить о его распространении со скоростью

$$u = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{(k=k_0)},$$

называемой групповой.

5. (Задача 2.14.) Волновой пакет длиной $\ell$ входит в среду с дисперсией

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g\cdot(k-k_0) + \frac{a^2}{2}(k-k_0)^2.$$

Оценить его размер после прохождения слоя толщиной $d$.

**Решение** Используя решение задачи 4. (формула 1), для модуля амплитуды волнового пакета находим

$$|E_0(z,t)| = \frac{\sqrt{\pi}a_0}{(\alpha^2+\beta^2t^2)^{1/4}}\exp\left\{-\frac{\alpha(z-ut)^2}{4(\alpha^2+\beta^2t^2)}\right\}.$$

Из этого выражения видно, что полуширина волнового пакета (расстояние, на котором амплитуда уменьшается в $e$ раз) определяется множителем в показателе экспоненты, равном

$$\Delta z(t) \approx \sqrt{4(\alpha^2+\beta^2t^2)/\alpha},$$

а сам пакет движется с групповой скоростью $u$. Пусть при $t = 0$ $\Delta z(0) = 2\sqrt{\alpha} = \ell/2$, тогда через интервал времени $\Delta t$, равный времени прохождения слоя ширины $d$, $\Delta t = d/u$, размер пакета

$$\Delta S = \left[\ell^2 + \left(\frac{16\beta d}{u\ell}\right)^2\right]^{1/2} = \ell \cdot \left[1 + \left(\frac{16\beta d}{u\ell^2}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Если второе слагаемое под корнем много больше единицы, размер пакета можно оценить как $\Delta S \approx 16\beta d/(u\ell)$.