XOR-SAT

Задача:

XORSAT *(англ. XOR-satisfiability) выполнимость функции — задача распределения аргументов в булевой КНФ функции, записанной в виде XOR-КНФ, таким образом, чтобы результат данной функции был равен* 1.

Содержание

Описание

Одним из особых случаев SAT является класс задач, где каждый конъюнкт содержит операции $\oplus$ (т. е. исключающее или), а не (обычные) $\vee$ операторы.Формально, обобщенная КНФ с тернарным булевым оператором R работает только если 1 или 3 переменные дают `true` в своих аргументах. Конъюнкты, имеющие более 3 переменных могут быть преобразованы в сочетании с формулой преобразования с сохранением выполнимости булевой функции, т. е. $\mathrm{XOR\text{-}SAT}$ может быть снижена до $\mathrm{XOR\text{-}3\text{-}SAT}$[1]

Это задача P-класса, так как $\mathrm{XOR\text{-}SAT}$ формулу можно рассматривать как систему линейных уравнений по модулю 2, которая, в свою очередь, может быть решена за $O(n^3)$ методом Гаусса [2].Такое представление возможно на основе связи между Булевой алгеброй и Булевым кольцом [3] и том факте, что арифметика по модулю 2 образует конечное поле [4].

Пример решения XORSAT

Пример

Красные пункты могут быть добавлены для возможности представления КНФ-функции в виде $\mathrm{XOR\text{-}SAT}$.

$(a \oplus b \oplus c) \wedge (b \oplus \neg c \oplus d) \wedge (a \oplus b \oplus \neg d) \wedge (a \oplus \neg b \oplus \neg c)$	$\wedge(\neg a \oplus b \oplus c)$

Решение XOR-SAT задачи методом Гаусса

Система уравнений	
Переменные	**Значение**
$a \oplus c \oplus d$	$= 1$
$b \oplus \neg c \oplus d$	$= 1$
$a \oplus b \oplus \neg d$	$= 1$
$\neg a \oplus \neg b \oplus \neg c$	$= 1$
$\neg a \oplus b \oplus c$	$= 1$

(«1» означает «`true`», «0» означает «`false`»)

Каждый конъюнкт ведет к одному уравнению.

Нормированная система уравнений	
Переменные	**Значение**
$a \oplus c \oplus d$	$= 1$
$b \oplus c \oplus d$	$= 0$
$a \oplus b \oplus d$	$= 0$
$a \oplus b \oplus c$	$= 1$
$a \oplus b \oplus c$	$= 0$

Используя свойства Булевых колец

($\neg x = 1 \oplus x, x \oplus x = 1$),
избавимся от отрицаний в нашей системе

Матрица соответствующих коэффициентов					
a	b	c	d		**Строка**
1	0	1	1	1	A
0	1	1	1	0	B
1	1	0	1	0	C
1	1	0	1	1	D

Составим матрицу по следующему правилу:

Если переменная присутствовала в данном конъюнкте ставим в ячейку 1, иначе 0

Преобразования, чтобы сформировать верхнюю треугольную матрицу					
a	b	c	d		**Операция**
1	0	1	1	1	A
1	1	0	1	0	C
1	1	1	0	1	D
0	1	1	1	0	B

Поменяем местами строки $B,\ C,\ D$,

чтобы упростить получение верхней треугольной матрицы.

1	0	1	1	1	A
0	1	1	0	1	$E = C \oplus A$
0	1	0	1	0	$F = D \oplus A$
0	1	1	1	0	B

Т.к. операция $\oplus$ даёт 0 при одинаковых аргументах,

применим её для строк $A,\ C = E$ и $A,\ D = F$,
чтобы получить 0 в 1-м столбце.

1	0	1	1	1	A
0	1	1	0	1	E
0	0	1	1	1	$G = F \oplus E$
0	0	0	1	1	$H = B \oplus E$

Теперь применим $\oplus$ для строк $E,\ F = G$ и $B,\ E = H$,

чтобы получить 0 в 2-м и 3-м столбцах.

Преобразования, чтобы сформировать диагональную матрицу

a	b	c	d		**Операция**
1	0	1	0	0	$I = A \oplus H$
0	1	1	0	1	E
0	0	1	0	0	$J = G \oplus H$
0	0	0	1	1	H

Чтобы получить основную диагональную матрицу,

сделаем $\oplus A,\ H = I$ и $G,\ H = J$,
чтобы получить 0 в 4-м столбце выше диагонали.

1	0	0	0	0	$K = I \oplus J$
0	1	0	0	1	$L = E \oplus J$
0	0	1	0	0	J
0	0	0	1	1	H

Осталось сделать $\oplus I,\ J = K$ и $E,\ J = L$,

потому что они отличаются в 1-м и 2-м столбцах.

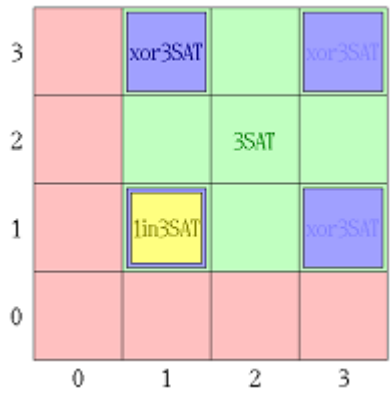
Решение

Если красный пункт присутствует: *Решений нет*
Иначе:
$a = 0 = \texttt{false}$

$b = 1 = \texttt{true}$
$c = 0 = \texttt{false}$
$d = 1 = \texttt{true}$

Вычислительная сложность

Поскольку $a \oplus b \oplus c$ принимает значение $\texttt{true}$, если и только если 1 из 3 переменных $\{a,\ b,\ c\}$ принимает значение $\texttt{true}$, каждое решение в 1-in-3-SAT задачи для данной КНФ-формулы является также решением XOR-3-SAT задачи, и, в свою очередь, обратное также верно.
Как следствие, для каждой КНФ-формулы, можно решить XOR-3-SAT-задачу и на основании результатов сделать вывод, что либо 3-SAT задача решаема или, что 1-in-3-SAT-задача нерешаема.
При условии, что P- и NP-классы не равны, ни 2-, ни Хорн-, ни XOR-SAT не являются задачи NP-класса, в отличии от SAT.



Формула с 2-мя дизъюнктами может быть неудовлетворена(красный), 3-SAT(зелёный), XOR-3-SAT (синий), или/и 1-in-3-SAT, в зависимости от количества переменных со значением $\texttt{true}$ в 1-м (горизонтальном) и втором (вертикальном) конъюнкте.

См. также

- Специальные формы КНФ
- 2SAT
- NP-полнота задачи о выполнимости булевой формулы в форме 3-КНФ

Примечания

1. *Alfred V. Aho; John E. Hopcroft; Jeffrey D. Ullman.*The Design and Analysis of Computer Algorithms. Addison-Wesley.; здесь: Thm.10.4, 1974.
2. Метод Гаусса (https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81%D0%B0)
3. Связь между Булевой алгеброй и Булевым кольцом (https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_algebra_(structure)#Boolean_rings)
4. Конечное поле (https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%B5)

Источники информации

- Википедия — Boolean satisfiability problem (https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_satisfiability_problem)
- *Cook, Stephen A.*Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing: 151–158, 1971.

Источник — «http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=XOR-SAT&oldid=85875»

- Эта страница последний раз была отредактирована 4 сентября 2022 в 19:42.