

# Транзитивное отношение

## Содержание

- 1 Определение
- 2 Свойства
- 3 Примеры транзитивных отношений
- 4 Примеры нетранзитивных отношений
- 5 Примеры антитранзитивных отношений
- 6 См. также
- 7 Источники информации

## Определение

Бинарное отношение  $R$  на множестве  $X$  называется *транзитивным*, если для любых трёх элементов  $a, b, c$  из выполнения отношений  $aRb$  и  $bRc$  следует выполнение отношения  $aRc$ .

### Определение:

Бинарное отношение  $R$ , заданное на множестве  $X$ , называется **транзитивным** (англ. *transitive binary relation*), если для  $\forall a, b, c \in X: (aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow (aRc)$ .

Если это условие соблюдается не для всех троек  $a, b, c$ , то такое отношение называется нетранзитивным. Например, не для всех троек  $a, b, c \in \mathbb{N}$  верно, что  $(a \nmid b) \wedge (b \nmid c) \Rightarrow (a \nmid c)$ .

### Определение:

Бинарное отношение  $R$ , заданное на множестве  $X$ , называется **нетранзитивным** (англ. *intransitive binary relation*), если  $\exists a, b, c \in X: (aRb) \wedge (bRc) \wedge \neg(aRc)$ .

Существует более "сильное" свойство — **антитранзитивность**. Под этим термином понимается, что для любых троек  $a, b, c$  отсутствует транзитивность. Антитранзитивное отношение, например — отношение **победить** в турнирах «на вылет»: если  $A$  победил игрока  $B$ , а  $B$  победил игрока  $C$ , то  $A$  не играл с  $C$ , следовательно, не мог его победить.

### Определение:

Бинарное отношение  $R$ , заданное на множестве  $X$ , называется **антитранзитивным** (англ. *antitransitive binary relation*), если для  $\forall a, b, c \in X$ :  $(aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow \neg(aRc)$ .

## Свойства

- Если отношение  $R$  транзитивно, то обратное отношение  $R^{-1}$  также транзитивно. Пусть  $aR^{-1}b$ ,  $bR^{-1}c$ , но по определению обратного отношения  $cRb$ ,  $bRa$ . Так как  $R$  транзитивно, то  $cRa$  и  $aR^{-1}c$ , что и требовалось доказать.
- Если отношения  $R$ ,  $S$  транзитивны, то отношение  $T = R \cap S$  транзитивно. Пусть  $aTb$ ,  $bTc \Rightarrow aRb$ ,  $aSb$ ,  $bRc$ ,  $bSc$ . Из транзитивности  $R$ ,  $S$  следует  $aRc$ ,  $aSc$ , но из определения пересечения отношений получаем  $aTc$ , что и требовалось доказать.

## Примеры транзитивных отношений

- Отношения **частичного порядка**:
  - строгое неравенство :  $(a < b), (b < c) \Rightarrow (a < c)$
  - нестрогое неравенство :  $(a \leq b), (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$
  - **включение подмножества**:
    - строгое подмножество :  $(A \subset B), (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$
    - нестрогое подмножество :  $(A \subseteq B), (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$
  - **делимость**:
    - $(a \mid b), (b \mid c) \Rightarrow (a \mid c)$
    - $(a \dot{\mid} b), (b \dot{\mid} c) \Rightarrow (a \dot{\mid} c)$
- **Равенство** :  $(a = b), (b = c) \Rightarrow (a = c)$
- **Эквивалентность** :  $(a \Leftrightarrow b), (b \Leftrightarrow c) \Rightarrow (a \Leftrightarrow c)$
- **Импликация** :  $(a \Rightarrow b), (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$
- **Параллельность** :  $(a \parallel b), (b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel c)$
- Отношение *подобия* геометрических фигур
- Являться предком

## Примеры нетранзитивных отношений

- Пищевая цепочка: это отношение не всегда является транзитивным (пример — волки едят оленей, олени едят траву, но волки не едят траву).
- *Быть предпочтительнее чем*. Если мы хотим яблоко вместо апельсина, а вместо яблока мы бы хотели арбуз, то это не значит, что мы предпочтём арбуз апельсину.
- Быть другом.
- Являться коллегой по работе.
- Быть подчиненным. Например, во времена феодального строя в Западной Европе была в ходу поговорка: *Вассал моего вассала — не мой вассал*.
- Быть похожим на другого человека.

## Примеры антитранзитивных отношений

- Быть сыном (отцом, бабушкой).

- Игра "Камень, ножницы, бумага". Камень побеждает ножницы, ножницы выигрывают у бумаги, но камень проигрывает бумаге и т. д.

## См. также

- Определение отношения
- Транзитивное замыкание
- Алгоритм Флойда-Уоршалла (построение транзитивного замыкания отношения)
- Транзитивный остов
- Отношение порядка
- Отношение эквивалентности

## Источники информации

- Wikipedia — Transitive relation
- Wikipedia — Intransitivity
- Wikipedia — Отношение эквивалентности
- Парадокс Кондорсе (<http://golovolomka.hobby.ru/books/gardner/gotcha/ch5/11.html>)
- Отношения на графах (<http://sarodom.ru/Statyi/002.htm>)
- Развитие понимания транзитивности и нетранзитивности (<http://www.hse.ru/data/2010/11/21/1209059687/intr.doc>)
- Бинарные отношения. Отношения эквивалентности (<http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-3-html/1.htm>) (очень хорошая статья про отношения, в ней суть раскрыта более подробно)

Источник — «[http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Транзитивное\\_отношение&oldid=84462](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Транзитивное_отношение&oldid=84462)»

- 
- Эта страница последний раз была отредактирована 4 сентября 2022 в 19:07.