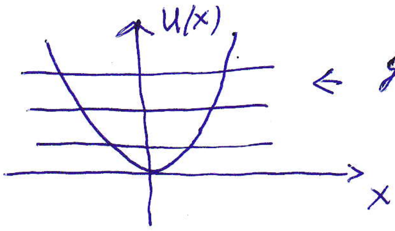
Лекция 8

Гармонический осциллятор

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$$



← дискретный спектр.

Из параметров $\hat{H}$ и $\hbar$ можно ~~[illegible]~~ определить

$x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ и $p_0 \equiv \sqrt{\hbar m\omega}$ — величины размерности длины и импульса.

$$p_0 x_0 = \hbar$$

Наша задача – найти стационарные состояния $|n\rangle$ и спектр (E_n) гамильтониана.

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

Определим оператор $\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{x_0} + i\frac{\hat{p}}{p_0}\right)$, тогда

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{x_0} - i\frac{\hat{p}}{p_0}\right).$$

Также, нам понадобится выражение для $\hat{x}$ и $\hat{p}$ через $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+) \qquad \hat{p} = \frac{ip_0}{\sqrt{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a})$$

Подставляем ~~эти~~ выражения в $\hat{H}$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left[-\frac{p_0^2}{2m}(\hat{a}^+ - \hat{a})^2 + \frac{m\omega^2 x_0^2}{2}(\hat{a} + \hat{a}^+)^2\right] = \frac{\hbar\omega}{2}\left[\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+\right]$$

Используя канон. коммутацион. соотношения $[\hat{x}\hat{p}] = i\hbar$

находим: $[\hat{a}\hat{a}^+] = \hat{1}$ или $\hat{a}\hat{a}^+ = \hat{a}^+\hat{a} + \hat{1}$

Тогда $\hat{H}$ можно представить в виде

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

Найдем $[\hat{H}, \hat{a}] = \hbar\omega[\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}, \hat{a}] = \hbar\omega[\hat{a}^+, \hat{a}]\hat{a} =$

$= -\hbar\omega\hat{a}$

а также $[\hat{H}, \hat{a}^+] = \hbar\omega\hat{a}^+$

Подействуем оператором $\hat{a}$ на равенство $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$.

Используя коммутаторы выше находим $\begin{cases} \hat{H}\hat{a} - \hat{a}\hat{H} = -\hbar\omega\hat{a} \\ \hat{H}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+ \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{a}\hat{H} = \hat{H}\hat{a} + \hbar\omega\hat{a} \Rightarrow$ $\underbrace{\hat{a}\hat{H}|n\rangle}_{=\hat{H}\hat{a}|n\rangle + \hbar\omega\hat{a}|n\rangle} = E_n\hat{a}|n\rangle$

$\hat{H}\hat{a}|n\rangle + \hbar\omega\hat{a}|n\rangle = E_n\hat{a}|n\rangle$

$\Rightarrow \hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)(\hat{a}|n\rangle) \Rightarrow$ состояние $\hat{a}|n\rangle$ – есть стационарное состояние с энергией $E = E_n - \hbar\omega$

Если мы подействуем оператором $\hat{a}^+$ на $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

$\hat{a}^+\hat{H}|n\rangle = E_n\hat{a}^+|n\rangle$

$\parallel$

$(\hat{H}\hat{a}^+ - \hbar\omega\hat{a}^+)|n\rangle$ $\Rightarrow \hat{H}(\hat{a}^+|n\rangle) = (E_n + \hbar\omega)(\hat{a}^+|n\rangle) \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{a}^+|n\rangle$ – состояние (стационарное) с энергией $E = E_n + \hbar\omega$

То есть,

$\hat{a}$ – понижающий оператор / оператор уничтожения

$\hat{a}^+$ – повышающий оператор / оператор рождения.

Существует состояние с наименьшей энергией $|0\rangle$ и потому $\hat{a}|0\rangle = 0$ и $\langle 0|\hat{a}^+ = 0$ – не существует стационарных состояний лежащих ниже по энергии.

Тогда $|n\rangle \sim (\hat{a}^+)^n |0\rangle$ и $\langle n| \sim \langle 0| \hat{a}^n$

↑ возбужденные состояния осциллятора

Определим

$$\langle 0| \hat{a}^n (\hat{a}^+)^n |0\rangle = \langle 0| n \hat{a}^{n-1} (\hat{a}^+)^{n-1} + a^{n-1} (\hat{a}^+)^n \cdot \underbrace{\hat{a} |0\rangle}_{\text{дает } 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n! \langle 0|0\rangle = n!$$

Считаем, что $\langle 0|0\rangle = 1$ – основное состоян. нормиров.

Итак нормиров. сост. $\langle n|n\rangle = 1$

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \frac{\hat{a}^+ (\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \sqrt{n+1} |0\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$$\hat{a} |n\rangle = \frac{\hat{a} (\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(n (\hat{a}^+)^{n-1} + \underbrace{(\hat{a}^+)^n a}_{\text{дает } 0} \right) |0\rangle = \sqrt{n} \frac{(\hat{a}^+)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |0\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

Посчитаем прямо энергии стационарных состояний, E_n

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad \hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^+ \hat{a} + \tfrac{1}{2})$$

$$\hat{a}^+ \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n}\, \hat{a}^+ |n-1\rangle = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} |n\rangle = n |n\rangle$$

$$\Rightarrow E_n = \hbar\omega (n + \tfrac{1}{2})$$

↑ $\frac{\hbar\omega}{2}$ – энергия основного состояния / энергия нулевых колебаний осциллятора.

Задание: показать, что $\langle m|n\rangle = 0$, если $m \neq n$

Волновые функции осциллятора

$\hat{a}|0\rangle = 0$ — в координатном представлении

это равенство имеет вид: $\hbar = x_0 \cdot p_0$

$$\cancel{\frac{x_0}{\sqrt{2}}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + \frac{\hbar}{p_0}\frac{d}{dx}\right)\psi_0(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{x_0} + \frac{d}{d\left(\frac{x}{x_0}\right)}\right)\Psi_0(x) = 0$$

Введём обозначение $\xi \equiv \frac{x}{x_0}$

$$\psi_0(\xi)\,\xi + \frac{d}{d\xi}\psi_0(\xi) = 0 \xRightarrow{\text{решаем уравнение}} \psi_0(\xi) = A\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

A — подбираем из условия нормировки $\langle 0|0\rangle = 1$

$$\langle 0|0\rangle = \int dx\ \psi_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right) = A^2 \cdot x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}\, x_0 A^2 = 1$$

$$\Rightarrow \psi_0\left(\frac{x}{\cancel{x_0}}\right) = \frac{1}{(\pi x_0^2)^{1/4}}\, e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$$ — волновая ф-ция основного состояния осциллятора в координатном представлении.

$$\psi_n(x) = (\sqrt{n})^{-1}\hat{a}^+\psi_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\underbrace{\left(\frac{x}{x_0} - \frac{d}{d\left(\frac{x}{x_0}\right)}\right)}_{\xi - \frac{d}{d\xi}}\psi_{n-1}(x) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2n}}\, e^{\xi^2/2}\frac{d}{d\xi}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot \psi_{n-1}(\xi)$$

Заменяем $\psi_{n-1} \to \psi_{n-2}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2n}}\, e^{\xi^2/2}\frac{d}{d\xi}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}\ \frac{-1}{\sqrt{2(n-1)}}\, e^{\xi^2/2}\frac{d}{d\xi}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}\ \psi_{n-2}(\xi) = \frac{(-1)^2}{\sqrt{2\cdot 2\cdot n\cdot(n-1)}}\ \cdot$$

$$\cdot\, e^{\xi^2/2}\frac{d^2}{d\xi^2}\, e^{-\xi^2/2}\,\psi_{n-2}$$

$$\psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \frac{d^n}{d\left(\frac{x}{x_0}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \underbrace{\psi_0(x)}_{\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}{(\pi x_0^2)^{1/4}}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}{(\pi x_0^2)^{1/4}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} e^{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \frac{d^n}{d\left(\frac{x}{x_0}\right)^n} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n(x) = \psi_0(x) \cdot \frac{H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n!}}$$ где $H_n(\xi)$ – полиномы Эрмита

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \Rightarrow H_n(-\xi) = (-1)^n H_n(\xi)$$

↑ чётность полиномов Эрмита

и $H_0 = 1$, $H_1 = 2\xi$, $H_2 = 4\xi^2 - 2$ – первые 3 низших полинома Эрмита.

<u>Задание</u> Показать, что

$$\int dx\, \psi_n(x) \psi_m(x) = \delta_{m,n}$$

Когерентные состояния

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^+} |0\rangle$$ где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ – комплексн. число.

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \hat{a}^{+n}}{n!} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

где $c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$ $\quad |c_n|^2 = \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} e^{-|\alpha|^2}$

$$\sum_n |C_n|^2 = 1 \qquad P_n = |C_n|^2 = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$$ – распределен. Пуассона

Задание: найти $\langle n^2 \rangle$ и $\langle \Delta n^2 \rangle$

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot n = \mu$$

$\Rightarrow$ В нашем случае $\langle n \rangle = \alpha \cdot \alpha^* = |\alpha|^2$

Найдём

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} \alpha^n \frac{\hat{a}(\hat{a}^+)^n |0\rangle}{n!} =$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0,1,\dots} \frac{\alpha^n}{n!} \Big(\underbrace{\hat{a}^{+n}\hat{a}}_{\text{даёт } 0} + n \cdot (\hat{a}^+)^{n-1} \Big) |0\rangle =$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha \cdot \sum_{n=1,2,\dots} \alpha^{n-1} \frac{(\hat{a}^+)^{n-1} |0\rangle}{(n-1)!} = \alpha\,|\alpha\rangle$$

Когерентное состояние $|\alpha\rangle$ является собственной функцией оператора уничтожения $\hat{a}$, с собственным значением – α.

Ранее мы находили, что $\hat{a}_H = \hat{a}\,e^{-i\omega t}$, $\hat{a}^+_H = \hat{a}^+ e^{i\omega t}$ $\Rightarrow |\alpha\rangle(t) = |\alpha(t)\rangle$, где $\alpha(t) = \alpha \cdot e^{-i\omega t}$

$$\bar{x} = \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+) | \alpha \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\alpha + \alpha^*) \underbrace{\langle \alpha | \alpha \rangle}_{=1} =$$

$$= \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\alpha + \alpha^*)$$

$$\langle \alpha | \hat{x}^2 | \alpha \rangle = \frac{x_0^2}{2} \langle \alpha | \underbrace{(\hat{a} + \hat{a}^+)^2}_{\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}} | \alpha \rangle = \frac{x_0^2}{2} \left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2\alpha\alpha^* + 1 \right)$$

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{x}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle^2 = \frac{x_0^2}{2}$$ – дисперсия не зависит от времени

$$\langle x \rangle(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \left(\alpha_1 \cdot 2\cos\omega t + 2\alpha_2 \sin\omega t \right)$$ – среднее движется по классической траектории в осцилл.

Задание   Показать, что

$$\bar{p} = \langle p \rangle = \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle = \frac{p_0}{\sqrt{2}}\, i(\alpha^* - \alpha)$$

$$\langle p^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{p}^2 | \alpha \rangle = \frac{p_0^2}{2}\left(2\alpha^*\alpha - \alpha^2 - \alpha^{*2} + 1\right)$$

$$\langle \Delta p^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{p_0^2}{2}$$ – не зависит от времени

Так, что

$$\langle \Delta p^2 \rangle \langle \Delta x^2 \rangle = \frac{(x_0 p_0)^2}{4} = \frac{\hbar^2}{4}$$ ← соответствует равенству в нерав. Гейзенберга

Найдем в координатном представлении волновую ф-цию когер. состояния

$\psi_\alpha(x) = \langle x | \alpha \rangle$ из условия

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + \frac{d}{d(x/x_0)}\right)\psi_\alpha(x) = \alpha\, \psi_\alpha(x)$$

В терминах переменной $\xi = \frac{x}{x_0}$

$$\frac{d}{d\xi}\psi_\alpha(\xi) + \xi\psi_\alpha(\xi) = \sqrt{2}\alpha\, \psi_\alpha(\xi) \Rightarrow \frac{d\psi_\alpha(\xi)}{\psi_\alpha(\xi)} = d\xi\,(\sqrt{2}\alpha - \xi)$$

$$\Rightarrow \psi_\alpha(\xi) = A \exp\left\{\sqrt{2}\alpha\xi - \frac{\xi^2}{2}\right\}$$

$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

$\bar{x} = \sqrt{2}\,\alpha_1 x_0 \quad \bar{p} = \sqrt{2}\,\alpha_2 p_0$

$\alpha_1 = \frac{\bar{x}}{x_0}\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha_2 = \frac{\bar{p}}{p_0\sqrt{2}}$

$$\psi_\alpha(\xi) = A \exp\left\{\frac{\bar{x}\xi}{x_0} + \frac{i\bar{p}\xi}{p_0} - \frac{\xi^2}{2}\right\} =$$

$$= A \exp\left\{\frac{i\bar{p}\cdot x}{\underbrace{p_0 x_0}_{\hbar}} + \frac{x\bar{x}}{x_0^2} - \frac{x^2}{2x_0^2}\right\} = A' \cdot \exp\left\{i\frac{\bar{p}x}{\hbar} - \frac{(x-\bar{x})^2}{2x_0^2}\right\}$$

A' – можно найти из условия нормировки

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \int dx\, |\psi_\alpha|^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad A' = \frac{1}{(\pi x_0^2)^{1/4}}$$