Семинар 1. *(2 сентября 2024 г.)*

Линейные уравнения в частных производных первого порядка

1. *Повторение теории об автономных системах из курса ОДУ*

Рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \ldots, x_n); \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{1}$$

или $\quad \dfrac{dx}{dt} = a(x),$ где $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad a(x) = \begin{pmatrix} a_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ a_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$

Здесь и далее будем полагать $\quad a(x),\ \dfrac{\partial a_i}{\partial x_i} \in C(B),\ B \subseteq \mathbb{R}^n.$

Запишем систему (1) в симметрической форме, исключив dt:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} \tag{2}$$

Определение 1. *Функция $\Phi(x(t)) \not\equiv const$ называется первым интегралом для системы* (2)*, если на любом решении $\tilde{x}(t)$ системы* (2) *она обращается в постоянную функцию, т.е. $\Phi(\tilde{x}(t)) = const$ или $\dfrac{d\Phi(\tilde{x}(t))}{dt} \equiv 0.$*

Теорема 1. *Пусть $\Phi(x(t)) \in C^1(B)$. Функция $\Phi(x(t))$ является первым интегралом системы* (2) *тогда и только тогда, когда $\Phi(x(t))$ — решение уравнения*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} a_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} a_n = 0.$$

Идея доказательства: Вычислим полную производную функции Φ в силу системы:

$$\frac{d\Phi(\tilde{x}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} a_i(x).$$

Теорема 2. *Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ — первые интегралы автономной системы* (1)*, $F(s_1, \ldots, s_k) \in C^1(B)$. Тогда $F(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ — тоже первый интеграл той же системы.*

Определение 2. $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ — *независимые первые интегралы системы* (1) *, если*

$$rank\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \\ \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k$$

Далее будем работать с системой вида (2). (*Что изменится в формулировках для системы вида* (1)*?*)

Теорема 3. *Пусть точка* $x_0 \in \bar{B}$*. Тогда существует окрестность точки* x_0*, в которой система* (2) *имеет* $n-1$ *независимых первых интегралов* $\Phi_1(x), \dots \Phi_{n-1}(x)$*. Пусть* $\Phi_n(x)$ *— первый интеграл системы* (2)*. Тогда* $\Phi_n(x) = F(\Phi_1(x) \dots, \Phi_{n-1}(x))$*.*

2. *Однородные уравнения в частных производных первого порядка*

Сначала рассмотрим линейное однородное уравнение в ЧП 1-го порядка:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_1(x) u_{x_1} + \dots + a_n(x) u_{x_n} = 0, \tag{3}$$

где $u(x_1, \dots, x_n)$ — искомая функция, $a_i(x) \in C^1(B)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

Определение 3. *Система вида* (1) *или* (2) *называется характеристической системой для уравнения* (3)*. Характеристиками уравнения* (3) *называются фазовые траектории системы* (1) *или интегральные кривые системы* (2)*.*

Теорема 4. *Пусть* $h = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ *— характеристика уравнения* (3)*,* $\tilde{u}(x)$ *— решение уравнения* (3)*. Тогда решение постоянно вдоль характеристики, т.е.* $\tilde{u}|_h \equiv const$*.*

Метод решения уравнения (3) основан на теоремах, приведенных выше.

Шаг 1. Запишем характеристическую систему для уравнения (3):

$$\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}$$

(*В данной системе* $n-1$ *уравнений!*) Наша задача — найти непрерывно дифференцируемую функцию, у которой полная производная в силу характеристической системы (*а это в точности и будет уравнение* (3)) равна нулю (см. Теорему 1), т.е. нужно найти первый интеграл. Но одного первого интеграла нам недостаточно, поскольку так мы получим не всё семейство решений.

Шаг 2. Найдем $n-1$ независимых первых интегралов $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$, решая уравнения системы:

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = C_1; \\ \dots \\ \Phi_{n-1}(x) = C_{n-1}. \end{cases}$$

Независимость проверяем по определению, если она не очевидна.

Шаг 3. По Теоремам 2 и 3 непрерывно дифференцируемая функция $F(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})$, зависящая от $n-1$ независимых первых интегралов, — тоже первый интеграл той же системы. В итоге решением уравнения (3) будет произвольная гладкая функция, аргументы которой известны:

$$u = F(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}).$$

3. *Разбор №1189 из задачника А. Ф. Филиппова*

1189. Решить задачу Коши для линейного однородного уравнения в ЧП 1-го порядка

$$xz_x - yz_y = 0, \quad z|_{y=1} = 2x.$$

***Геометрический смысл задачи Коши**: Найти поверхность $z(x,y)$, удовлетворяющую уравнению $xz_x - yz_y = 0$ и проходящую через кривую $z|_{y=1} = 2x$, заданную начальным условием.*

Решение. Характеристическая система состоит из одного уравнения и имеет вид:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$$

Значит, нам нужно найти всего один первый интеграл $\Phi_1(x,y) = C_1$.

В данном случае мы сразу получили дифференциальное уравнения с разделяющимися переменными, которое можно проинтегрировать:

$$\ln|x| = -\ln|y| + C, \quad \text{или } xy = C_1 = \Phi_1.$$

Запишем общее решение:

$$z = F(\Phi_1) = F(xy),$$

где F — произвольная гладкая функция.
Подставим начальное условие, чтобы найти функцию F в явном виде:

$$z\big|_{y=1} = F(x\cdot 1) = 2x \Rightarrow z(x,y) = F(xy) = 2xy.$$

В итоге искомая поверхность задается уравнением $z = 2xy$.

4. *Неоднородные уравнения в ЧП 1-го порядка*
Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_1(x)u_{x_1} + \ldots + a_n(x)u_{x_n} = b(x), \tag{4}$$

где $u(x_1,\ldots,x_n)$ — искомая функция, $a_i(x), b(x) \in C^1(B)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.
Шаг 1. По аналогии с теорией линейных уравнений из курса ОДУ предположим, что решение неоднородного уравнения можно найти следующим образом:

$$u_{\text{о.р.н.}} = u_{\text{о.р.о.}} + u_{\text{ч.р.н.}}$$

Частное решение можно найти, используя соотношение на характеристике:

$$\frac{du}{dt} = b$$

и добавив его в характеристическую систему:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}$$

Шаг 2. Решая эту систему, найдем уже n независимых первых интегралов $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$:

$$\begin{cases} \Phi_1(x,u) = C_1; \\ \ldots \\ \Phi_n(x,u) = C_n. \end{cases}$$

Здесь хотя бы один из первых интегралов будет зависеть от u.

Шаг 3. Запишем общее решение в виде неявно заданной гладкой функции

$$F(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) = 0.$$

Далее можно оставить ответ в таком виде или попытаться разрешить уравнение относительно u, если это возможно.

(На семинаре решали задачи 1189, 1172, 1177, 1183 из задачника А. Ф. Филиппова.)