Домашняя работа к занятию 2

1.1 $\begin{cases} y' = 2\dfrac{y}{x} + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

1) Найдите формулу общего решения (общего интеграла) уравнения.

2) Решите поставленную задачу Коши и укажите максимальный интервал существования полученного решения.

3) Найдите решения вида $y = kx$. Нарисуйте интегральные линии уравнения и выясните, являются ли найденные решения вида $y = kx$ особыми.

1.2 Найдите общее решение уравнения $y' = \dfrac{y^2 - x}{2xy + 2y^3}$.

1.3 Найдите общее решение уравнения $(x + 2y - 5)\,dy = (2y - 2)\,dx$.

2.1 $xy\,dx = (x^2 + y^2)\,dy$

1) Найдите формулу общего решения (общего интеграла) уравнения.

2) Найдите решения вида $y = kx$. Нарисуйте интегральные линии уравнения и выясните, являются ли найденные решения особыми.

3) Нарисуйте интегральную кривую, проходящую через точку $(2; 1)$. Покажите, что максимальный интервал существования соответствующего непродолжаемого решения — вся прямая $(-\infty; +\infty)$.

2.2 Найдите общее решение уравнения $3x^3y^2y' = y^6 + x^4$.

2.3 Найдите общее решение уравнения $2ydx + x(1 - xy)dy = 0$.

3.1 Докажите, что если одна из интегральных линий однородного уравнения замкнута и не проходит через точку $(0; 0)$, то все интегральные линии также замкнуты и не проходят через точку $(0; 0)$.

3.2 Получите дифференциальное уравнение семейства кривых, ортогональных кривым семейства $x^2 + y^2 = Cx$. Решите это уравнение.

Ответы и указания

1.1 1) $y = Cx^2 - x$ 2) $y = 2x^2 - x, \ \ x \in (0; +\infty)$
3) решение $y = -x$ получается из формулы общего решения при $C = 0$ и не является особым.

1.2 *Замечание*: замена $z = y^2$ приводит уравнение к однородному.
Ответ: $2 \operatorname{arctg} \dfrac{y^2}{x} + \ln(x^2 + y^4) = C$

1.3 $(2y + 1 - x)^2 = C(y - 1)$ и $y \equiv 1$.
Замечание: Решение $y \equiv 1$ не описывается формулой общего решения, однако не является особым.

2.1 1) $2 \ln Cy = \dfrac{x^2}{y^2}$ или $x^2 = y^2 \ln(C^2 y^2)$; 2) решение $y \equiv 0$ не описывается формулой общего решения, но не является особым;
3) подставляя начальные данные в формулу общего интеграла, получаем соотношение $x^2 = y^2(4 + \ln y^2)$, которое определяет решение в неявном виде. Заметим, что полученное соотношение четно относительно x и относительно y, поэтому описываемое им множество точек симметрично относительно оси Ox и оси Oy. Изобразите данное множество точек, используя график функции $u = t(4 + \ln t)$ и учитывая, что $u = x^2 \geqslant 0$, $t = y^2 \geqslant 0$.

2.2 *Замечание*: замена $z = y^3$, $t = x^2$ приводит уравнение к однородному.
Ответ: $x^2 = (x^2 - y^3) \ln Cx$ и $x^2 = y^3$.

2.3 *Замечание*: замена $z = y^{-1}$ приводит уравнение к однородному. Возможна потеря решения $y \equiv 0$.
Ответ: $Cx^2 y = (1 + xy)^2; \qquad y \equiv 0$

3.1 *Указание*: общее решение однородного уравнения имеет вид $\ln Cx = F(\dfrac{y}{x})$. Перейдите к полярным координатам.

3.2 *Ответ*: $2xydx = (x^2 - y^2)dy$; $x^2 + y^2 = Cy$.