Определение

Обыкновенные дифф. уравнения - соотношения вида

$$F(t;\, y(t);\, y'(t);\, y''(t); \dots y^{(n)}(t)) = 0,$$

где $t \in \mathbb{R}$ - независимая переменная, $y(t)$ - искомая функция.

Порядок уравнения - наибольший порядок производной, входящей в уравнение.

Уравнение разрешено относительно старшей производной, если оно имеет вид

$$y^{(n)}(t) = f(t;\, y(t);\, y'(t);\, y''(t); \dots y^{(n-1)}(t))$$

Рассматриваем уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y'(t) = f(t; y), \tag{1}$$

где $f(t; y)$ определена в области $D \subset \mathbb{R}^2$.

Вопросы для обсуждения

- что такое «решения уравнения»
- что значит «решить уравнение», как это сделать
- какие свойства решений нас интересуют, как их установить

Определение

Решение уравнения

Функция $y = \varphi(t)$, определенная на интервале $J = (t_1; t_2) \subset \overline{\mathbb{R}}$, называется решением уравнения $y'(t) = f(t; y)$ на J, если $\forall\ t \in J$

- $(t; \varphi(t)) \in D$, т.е. определено значение $f(t; \varphi(t))$
- определена производная $\varphi'(t)$
- $\varphi'(t) = f(t; \varphi(t))$

Определение

Задача Коши

Для заданной точки $(t_0; y_0) \in D$ найти решение уравнения $y'(t) = f(t; y)$, определеннное в некоторой окрестности точки t_0 и удовлетворяющее условию

$$y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

Вопросы для обсуждения

- существование решения задачи Коши
  (хотя бы локально)
- единственность решения задачи Коши
  (хотя бы локально)
- непрерывная зависимость решения от параметров
  (в частности, от начальных данных)
- продолжение решения по t
  (возможно, до границы области D)
- единственность продолжения решения
- гладкость решения

Корректность

Задача поставлена корректно в некотором классе функций, если решение задачи в этом классе существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи

Определение

Общее решение уравнения

Пусть в каждой точке области D имеет место существование и единственность решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t; y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Функция $y = \varphi(t; C)$ называется общим решением уравнения $y'(t) = f(t; y)$ в области D, если

- $\forall\ C$ функция $y(t) = \varphi(t; C)$ является решением уравнения $y'(t) = f(t; y)$
- $\forall\ (t_0; y_0) \in D\ \exists\ C : \varphi(t_0; C) = y_0$

Определение

Особое решение уравнения

Функция $y = \varphi(t)$ называется особым решением уравнения $y'(t) = f(t; y)$ в области D, если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Локальные теоремы

Теорема Пеано

Если $f(t;y) \in C(D)$, то для любой точки $(t_0;y_0) \in D$ существует решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t;y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

определенное в некоторой окрестности точки t_0.

Локальные теоремы

Теорема Пикара

Если $f(t;y) \in C(D)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$, то для любой точки $(t_0;y_0) \in D$ существует, причем единственное, решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t;y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

определенное в некоторой окрестности точки t_0.

Уточненная формулировка

Теорема Пикара

Если $f(t;y) \in C(D)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$, то для любой точки $(t_0;y_0) \in D$ можно указать $h > 0$ такое, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t;y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

существует и единственно на отрезке $[t_0 - h; t_0 + h]$.

Определение

Условие Липшица

Говорят,что функция $f(t;y)$ удовлетворяет в области D условию Липшица по переменной y, если найдется $L \in \mathbb{R}$ такое, что для любых $(t;y_1)$ и $(t;y_2)$ из D

$$|f(t;y_1) - f(t;y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Лемма

Если функция $f(t;y)$ дифференцируема по y в области D и $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$, то в любом прямоугольнике $\Pi = [a;b] \times [c;d] \subset D$ функция $f(t;y)$ удовлетворяет условию Липшица по y.

План доказательства теоремы Пикара

- эквивалентность задачи Коши решению интегрального уравнения
- построение последовательных приближений
- равномерная сходимость последовательных приближений
- единственность решения

Эквивалентность интегральному уравнению

диф. ур $\Rightarrow$ инт. ур.

Если $y = y(t)$ - решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t; y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

на интервале $(t_1; t_2)$, содержащем t_0, то

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau; y(\tau)) d\tau$$

Эквивалентность интегральному уравнению

диф. ур $\Leftarrow$ инт. ур.

Если $y = y(t)$ - *непрерывное* решение уравнения

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau; y(\tau))d\tau$$

на интервале $(t_1; t_2)$, содержащем t_0, то $y = y(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t; y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Метод последовательных приближений

Введем оператор $A : \varphi(t) \mapsto \psi(t)$, действующий по правилу

$$\psi(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau; \varphi(\tau))d\tau$$

Мы ищем «неподвижную точку»

$$y(t) = Ay(t)$$

Метод последовательных приближений

Строим последовательность функций $y^{[k]}(t)$:

$$y^{[0]}(t) \equiv y_0$$

$$y^{[k]}(t) = Ay^{[k-1]}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau; y^{[k-1]}(\tau))d\tau$$

$$\Pi_a = \{(t; y) \mid |t - t_0| \leq a; |y - y_0| \leq b\} \subset D$$

$$M = \max |f(t; y)|, (t; y) \in \Pi_a$$

$$h = \min\{a; \frac{b}{M}\}$$

$$\Pi_h = \{(t; y) \mid |t - t_0| \leq h; |y - y_0| \leq b\} \subset D$$

Лемма.

Пусть $\Omega_h = \{\varphi(t) \mid \varphi(t) \in C[t_0 - h; t_0 + h]; (t; \varphi(t)) \in \Pi_h\}$.
Если $\varphi(t) \in \Omega_h$, то $\psi(t) = A\varphi(t) \in \Omega_h$.

Доказательство

$$\forall t \in [t_0 - h; t_0 + h] \; |\psi(t) - y_0| = |\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau; \varphi(\tau))d\tau| \leq$$

$$\leq |\int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau; \varphi(\tau))|d\tau| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} M d\tau| \leq Mh \leq b$$

Определение

Сжимающее отображение

Отображение (оператор) A называется сжимающим на Q, если $\exists q \in (0;1)$ такое, что $\forall \varphi, \psi \in Q$

$$\| A\varphi - A\psi \| \leq q \cdot \| \varphi - \psi \|$$

$\forall t \in [t_0 - h; t_0 + h]$

$$|A\varphi(t) - A\psi(t)| = |\int\limits_{t_0}^{t} (f(\tau; \varphi(\tau)) - f(\tau; \psi(\tau)) d\tau| \leq$$

$$\leq |\int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau; \varphi(\tau)) - f(\tau; \psi(\tau))| d\tau| \leq$$

$$\leq L|\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau| \leq L \cdot \max |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \cdot |t - t_0| \leq$$

$$\leq L \cdot \parallel \varphi(\tau) - \psi(\tau) \parallel \cdot h$$

Сходимость

Покажем, что $y^{[n]}(t)$ равномерно сходится на $I_h = [t_0 - h; t_0 + h]$ к некоторой функции $y(t)$

$$y^{[n]}(t) = (y^{[n]}(t) - y^{[n-1]}(t)) + (y^{[n-1]}(t) - y^{[n-2]}(t)) + \ldots$$

$$\ldots + (y^{[2]}(t) - y^{[1]}(t)) + (y^{[1]}(t) - y^{[0]}(t)) + y^{[0]}(t) =$$

$$= y_0 + \sum_{k=1}^{n} z_n(t)$$

Сходимость

$$\| z_k(t) \| = \| y^{[k]}(t) - y^{[k-1]}(t) \| = \| Ay^{[k-1]}(t) - Ay^{[k-2]}(t) \| \leq$$

$$q \cdot \| y^{[k-1]}(t) - y^{[k-2]}(t) \| = q \cdot \| z_{k-1}(t) \| \leq \ldots \leq q^{k-1} \| z_1(t) \|$$

Единственность

Определение

Продолжение решения

Решение $y = \psi(t)$, определенное на интервале J, называется продолжением решения $y = \varphi(t)$, определенного на интервале I, если $I \subset J$ и $\psi(t) \equiv \varphi(t)$ на I.

Непродолжаемое решение

Решение $y = \psi(t)$, определенное на интервале I, называется непродолжаемым, если любое его продолжение совпадает с ним самим.

Глобальные теоремы

Теорема единственности решения задачи Коши

Пусть $f(t;y) \in C(D)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t;y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

определенные на интервалах I_1 и I_2 соответственно, то $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ на интервале $I = I_1 \bigcap I_2$.

Глобальная теорема единственности

Доказательство

Пусть $\exists t_1 \in I$ такая, что $\varphi(t_1) \neq \psi(t_1)$ $(t_0 < t_1)$

$M = \{t \in [t_0; t_1] \,\big|\, \varphi(t) \equiv \psi(t)\}$

1. $M \neq \emptyset$
2. M ограничено сверху
3. M замкнуто

Глобальная теорема единственности

$t^* = \sup M$, $t^* \in I$

Поставим задачу Коши $\varphi(t^*) = \psi(t^*) = y^*$

$\exists t > t^* \,\Big|\, \varphi(t) = \psi(t)$

Сущ. и ед-ть непродолжаемого решения

Теорема

Если $f(t;y) \in C(D)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$, то для любой точки $(t_0;y_0) \in D$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t;y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

определенное на интервале $(t_-;t_+)$.

$(t_-; t_+)$ - объединение интервалов существования всех решений задачи Коши

$t_- = \inf\{t_l\}$; $t_+ = \sup\{t_r\}$

$t_- < t_1 < t_+$

$\varphi(t)$ — решение задачи Коши $(t_0;\ y_0)$

$y(t_1) = \varphi(t_1)$

Глобальные теоремы

Теорема о покидании компакта

Пусть $f(t;y) \in C(D)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$, $G \subset D$ — компакт, $(t_0;y_0) \in G$ и $\varphi(t)$ — непродолжаемое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t;y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

определенное на интервале $(t_-;t_+)$.

Тогда существует отрезок $[r_-;r_+] \subset (t_-;t_+)$ такой, что $(t;\varphi(t)) \notin G$ при $t \in (t_-;t_+) \setminus [r_-;r_+]$.

Гладкость решений

Если $f(t;y) \in C^p(D)$, $p \geq 1$, то любое решение уравнения $y'(t) = f(t;y)$ имеет непрерывные производные до порядка $(p+1)$ включительно.

$(p=1)$ $f(t;y) \in C^1$, т.е. $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C \Rightarrow y(t) \in D$

$\Rightarrow y'(t) = f(t;y(t)) \in C$

$f(t;y) \in C^1$ и $y(t) \in C^1 \Rightarrow f(t;y(t)) \in C^1$ и

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \in C$$

$(p = 2)\ f(t; y) \in C^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial t} \in C^1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C^1$

$\Rightarrow y(t) \in C^2$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \in C$$

$\Rightarrow \dfrac{d^2 y}{dt^2} \in C^1$, т.е. $\exists \dfrac{d^3 y}{dt^3} \in C$

Непрерывная зависимость решения от параметров

Пусть $M = (m_1; m_2)$, $(t_0; y_0; \mu_0) \in D \times M$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t; y; \mu) \\ y(t_0; \mu) = y_0 \end{cases} \qquad (3)$$

Если $f(t; y; \mu) \in C(D \times M)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(D \times M)$, то решение $y = y(t; \mu)$ задачи Коши (3) является непрерывной функцией по совокупности переменных $(t; \mu)$ в некоторой окрестности $|t - t_0| \le h$, $|\mu - \mu_0| \le \delta$.

Дифференцируемость по параметру

Уравнение в вариациях

Если $f(t;y;\mu) \in C^1(D \times M)$, то решение $y(t;\mu)$ задачи Коши $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t;y;\mu) \\ y(t_0;\mu) = y_0 \end{cases}$ непрерывно дифференцируемо по μ и функция $z(t,\mu) = \dfrac{\partial y}{\partial \mu}$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot z + \dfrac{\partial f}{\partial \mu} \\ z(t;\mu)\Big|_{t=t_0} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Дифференцируемость по параметру

Метод малого параметра

Если $f(t;y;\mu) = f_0(t;y) + \mu f_1(t;y) + o(\mu)$, то решение $y(t;\mu)$ задачи Коши $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t;y;\mu) \\ y(t_0;\mu) = y_0 \end{cases}$ представимо в виде $y(t;\mu) = \varphi_0(t;y) + \mu\varphi_1(t;y) + o(\mu)$, где $\varphi_0(t;y)$ является решением задачи $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f_0(t;y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, а $\varphi_1(t;y)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial f_0}{\partial y}(t;\varphi_0) \cdot \varphi_1 + f_1(t;\varphi_0) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

Пример

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y + \mu(y^2 + t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$y = \varphi_0(t) + \mu\varphi_1(t) + O(\mu^2)$

$y = Ce^t$

$$\mu = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \varphi_0(t) = e^t$$

Дифференцируем по μ

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial y}{\partial \mu} = \dfrac{\partial y}{\partial \mu} + (y^2 + t) + \mu \cdot 2y\dfrac{\partial y}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mu}(0;\mu) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_1(t) = \frac{\partial y}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\varphi_1(t) = \varphi_1(t) + (\varphi_0(t)^2 + t) \\ \varphi_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\varphi_1(t) = \varphi_1(t) + (e^{2t} + t) \\ \varphi_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_1(t) = e^{2t} - t - 1$$

$$y(t;\mu) \approx \underbrace{e^t}_{=\varphi_0} + \mu(\underbrace{e^{2t} - t - 1}_{=\varphi_1})$$

$y' = y + e^{2t} + t$

$y' = y + e^{2t}$ $\quad Ae^{2t}$

$A2 = A + 1 \Rightarrow A = 1$

$y' = y + t$ $\quad Bt + C$

$B = Bt + C + t = t\underbrace{(B+1)}_{=0} + \underbrace{C}_{=B}$

$C = B = -1$

$y = De^{2t} + e^{2t} - t - 1$ $\quad D + 1 - 1 = 0$

Нормальная система уравнений

$\vec{y}(t)$ — вектор-столбец с элементами $y_i(t)$.

$\vec{f}(t; \vec{y}(t))$ — вектор-столбец с элементами $f_i(t; y_1, ..., y_n)$, определенными в $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(t; \vec{y}(t)) \qquad y' = f(t, y) \tag{5}$$

Задача Коши — найти решение уравнения (5), удовлетворяющее условию

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$\mathcal{D}$, R^{n+1}

Теорема

Если $f_i(t;\vec{y}) \in C(D)$ и $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(D)$, $(i, j = 1, ..., n)$, то для любой точки $(t_0;\vec{y}_0) \in D$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши

$y' = f(t, y)$

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = \vec{f}(t;\vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \end{cases}$$

3. Коши для уравнения высокого порядка

$$y^{(n)}(t) = f(t; y(t); y'(t); y''(t); \dots y^{(n-1)}(t)) \qquad (7)$$

Сведем к системе, положив

$y_1 = y(t)$, $y_2 = y'(t)$, ..., $y_n = y^{(n-1)}(t)$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_n \\ \vdots \\ f(t, \vec{y}) \end{pmatrix}$$

Задача Коши — найти решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям

$$y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y_1; \dots y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}; \qquad (8)$$

$y_1 \qquad y_2 \qquad y_n$

$$y^{(n)} = f(\underbrace{t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}}) \qquad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$f \in C(D) \qquad (t_0, \vec{y}_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \in C(D)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Нормальная система линейных уравнений

$\dot{y}_1 = \sum a_{1j} y_j + f_1$

$\dot{y}_2 = \sum a_{2j} y_j + f_2$

$\dots$

$A(t)$ — матрица $n \times n$ с элементами $a_{ij}(t)$

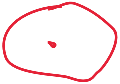
$\vec{f}(t)$ — вектор из $\mathbb{R}^n$ с элементами $f_i(t)$.

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \tag{9}$$

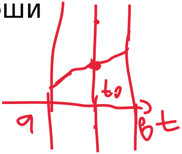
Задача Коши — найти решение системы уравнений (9), удовлетворяющее условию

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

Теорема



Если все $a_{ij}(t) \in C(a;b)$ и $f_i(t) \in C(a;b)$, то для любой точки $t_0 \in (a;b)$ и любого вектора $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \end{cases}$$

$= \vec{f}(t, \vec{y})$

$D = (a, b) \times \mathbb{R}^n$

существует на всем $(a;b)$ и единственно.

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[A(\tau)\vec{y}(\tau) + \vec{f}(\tau)\right] d\tau$$

$\vec{y} = Q\vec{y}$

Введем оператор $Q : \varphi(t) \mapsto \psi(t)$, действующий по правилу

$$\vec{\psi}(t) = Q\vec{\varphi}(t) = \vec{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[A(\tau)\vec{\varphi}(\tau) + \vec{f}(\tau)\right] d\tau$$

последовательные приближения

$t \in (a,b),\ \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{y}_0(t) = \vec{y}_0,$

$$\vec{y}_k(t) = Q\vec{y}_{k-1}(t) = \vec{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[A(\tau)\vec{y}_{k-1}(\tau) + \vec{f}(\tau)\right] d\tau,\ k \in N$$

$$\vec{y}_k(t) = [\overbrace{\vec{y}_k(t) - \vec{y}_{k-1}(t)}^{z_k}] + \ldots + [\overset{z_1}{\vec{y}_1(t) - \vec{y}_0(t)}] + \overset{z_0}{\vec{y}_0(t)} = \sum_{j=0}^{k} \vec{z}_j(t),$$

где $\vec{z}_0(t) = \vec{y}_0$, $\vec{z}_j(t) = \vec{y}_j(t) - \vec{y}_{j-1}(t)$, $j \in \mathbb{N}$

оценка в точке t

Лемма. $||\vec{z}_j(t)|| \leq M_0 K^{(j-1)} \frac{(\sqrt{n}|t-t_0|)^j}{j!}$, $j \in \mathbb{N}$

$||A(t)|| \leq K$, $||\vec{f}(t)|| \leq M$ на отрезке $[\alpha; \beta] \in (a; b)$

$$||\vec{z}_1(t)|| = ||\vec{y}_1(t)) - \vec{y}_0|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} \left[A(\tau)\vec{y}_0 + \vec{f}(\tau)\right] d\tau|| \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\left|\int\limits_{t_0}^{t} \left(||A(\tau)|| \cdot ||\vec{y}_0|| + ||\vec{f}(\tau)||\right) d\tau\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\left|\int\limits_{t_0}^{t} \underbrace{\left(K \cdot ||\vec{y}_0|| + M\right)}_{=: M_0} d\tau\right| \leq M_0\sqrt{n}|t - t_0|^1$$

$$||\vec{z}_{j+1}(t)|| = ||\vec{y}_{j+1}(t) - \vec{y}_j(t)|| \leq \sqrt{n}\left|\int\limits_{t_0}^{t} ||A(\tau)|| \cdot ||\vec{z}_j(\tau)||\, d\tau\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{n}K\left|\int\limits_{t_0}^{t} M_0 K^{j-1} \frac{(\sqrt{n}|t-t_0|)^j}{j!}\, d\tau\right| \leq M_0 K^j \frac{(\sqrt{n}|t-t_0|)^{j+1}}{(j+1)!}$$

$\|y(t)\|_{C[\alpha,\beta]} = \sup\limits_{t\in[\alpha;\beta]} |y(t)|$

$M_0 K^{j-1} = \frac{M_0}{K} K^j$

$t_0 \quad t$

$K\sqrt{n}\,|\beta-\alpha| = B$

Равномерная оценка

$||\vec{z}_j(t)|| \le M_0 K^{(j-1)} \frac{(\sqrt{n}|t-t_0|)^j}{j!}$, $j \in \mathbb{N}$, поэтому

$||\vec{z}_j(t)||_{C[\alpha;\beta]} \le M_0 K^{(j-1)} \frac{(\sqrt{n}|\beta-\alpha|)^j}{j!} = \frac{M_0}{K} \frac{B^j}{j!}$, $j \in \mathbb{N}$,

следовательно, ряд $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \vec{z}_j(t)$ сходится равномерно на $[\alpha;\beta]$

$\alpha \quad \beta$

$a \quad b$

Принцип суперпозиции

Пусть $\vec{y}_k(t)$ — решение системы $\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}_k(t)$. Тогда для любых $c_k \in \mathbb{R}$ функция $\vec{y}(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k\ \vec{y}_k(t)$ — решение системы $\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$ с правой частью $\vec{f}(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k\ \vec{f}_k(t)$.

Если $\vec{y}_1(t)$ и $\vec{y}_2(t)$ — решения системы с одной и той же правой частью $\vec{f}(t)$, то $\vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)$ — решение однородной системы.

$\frac{d}{dt}\bar{y} = A(t)y$ то

Если $\vec{y}_1(t)$ — решение системы с правой частью $\vec{f}(t)$, а $\vec{y}_1(t)$ — решение однородной системы, то $\vec{y}_1(t) + \vec{y}_0(t)$ — решение системы с правой частью $\vec{f}(t)$.

$y_{но} = y_{оо} + y_{чн}$

Однородные системы линейных уравнений

Структура множества решений

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} \qquad (9_0)$$

лод

Решения системы образуют линейное пространство.

- $\vec{y}(t) \equiv \vec{0}$ — решение системы (9_0)
- Если $\vec{y}_k(t)$ — решения системы (9_0), то для любого набора $c_k \in \mathbb{R}$ функция $\vec{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\, \vec{y}_k(t)$ — решение системы (9_0)

Размерность и базис пространства решений

$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y}(t)$ $\quad \vec{y}\big|_{t_0} = \vec{0}$ $\quad \vec{y} \equiv 0$

Линейная независимость функций

Функции $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$, линейно независимы на $(a; b)$, если $\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{m} c_k\, \vec{y}_k(t_0)}\equiv \vec{0} \Leftrightarrow\ c_k = 0\ \forall\ k = 1, \ldots, m$

Лемма. Если $\vec{y}_k(t)$ — решения системы (9_0) на $(a; b)$ — линейно зависимы в точке $t_0 \in (a; b)$, то они линейно зависимы на $(a; b)$.

Теорема. Размерность пространства решений системы (9_0) равна n.

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\ \ldots\ $ $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{y}_k(t_0) = e_k$

ФСР

Базис пространства решений системы (9_0) называется фундаментальной системой решений (9_0) (ФСР).

Матрица $\mathbf{\Phi}(t)$, столбцами которой являются векторы ФСР, называется фундаментальной матрицей системы.

$\mathbf{\Phi}(t)$ — фундаментальная матрица системы (5_0), если и только если $\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{\Phi}(t)$ и

$\exists\ t_0 \in (a;b) \;\Big|\; \det \mathbf{\Phi}(t_0) \neq 0$

Критерий линейной независимости решений

Пусть $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, ..., n$, — решения системы (5_0) на $(a; b)$, $\Phi(t)$ — составленная их них матрица. Следующие утверждения равносильны:

- $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, ..., n$, линейно независимы
- $\forall\ t \in (a; b) \ \Big|\ \det \mathbf{\Phi}(t) \neq 0$
- $\exists\ t_0 \in (a; b) \ \Big|\ \det \mathbf{\Phi}(t_0) \neq 0$

Общее решение однородной линейной системы

Любое решение системы (9_0) можно представить в виде $\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c}$, где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (9_0), а $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$

Общее решение задачи Коши для однородной линейной системы

$\forall\ t_0 \in (a; b)$, $\forall\ \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши (8) для системы (9_0) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{y}_0,$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (5_0)

Множество фундаментальных матриц

Пусть $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ - фундаментальные матрицы системы (5_0). Тогда $\Psi(t) = \Phi(t) \cdot B$, где B - невырожденная числовая матрица.

$$\Psi(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\Psi(t_0)$$

Определитель Вронского системы вектор-функций

$W(t) = \det\left[\vec{\varphi}_1(t)\ \vec{\varphi}_2(t) ... \vec{\varphi}_n(t)\right]$

Формула Лиувилля-Остроградского

Пусть $\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1, ..., n$, — решения системы (5_0) на $(a; b)$, $\Phi(t)$ — составленная их них матрица. Если $W(t) = \det \Phi(t)$, то

$$W'(t) = \operatorname{tr} \mathbf{A}(t) \cdot W(t)$$

Следствие. $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} \mathbf{A}(\tau)\, d\tau\right)$

Общее решение неоднородной линейной системы

Пусть $\vec{y}_*(t)$ — некоторое решение системы (5). Тогда любое решение системы (5) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c} + \vec{y}_*(t),$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (5_0), а $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Общее решение задачи Коши для неоднородной линейной системы

$\forall\ t_0 \in (a;b)$, $\forall\ \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши (6) для системы (5) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{y}_0 + \vec{y}_*(t),$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (5_0), а $\vec{y}_*(t)$ — решение системы (5) такое, что $\vec{y}_*(t_0) = \vec{0}$

Метод вариации постоянных

Ищем решение в виде $\vec{y}_*(t) = \Phi(t)\vec{c}(t)$

$$\frac{d}{dt}\vec{c}(t) = \Phi^{-1}(t)\vec{f}(t)$$

$$\vec{c}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

$$\vec{y}_*(t) = \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau$$