СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
Лекция 5 Фотоны.

Образовский Е. Г.

21 сентября 2022 г.

План лекции:

Фотоны.

План лекции:

- **газ фотонов**

План лекции:

- газ фотонов
- скорость звука. вклад фотонов

План лекции:

- газ фотонов
- скорость звука. вклад фотонов
- задача С.Хокинга

Фотоны.

Число фотонов не сохраняется при наличии частиц материи из-за процессов излучения и поглощения, поэтому химпотенциал фотонов равен нулю. Тогда число фотонов есть

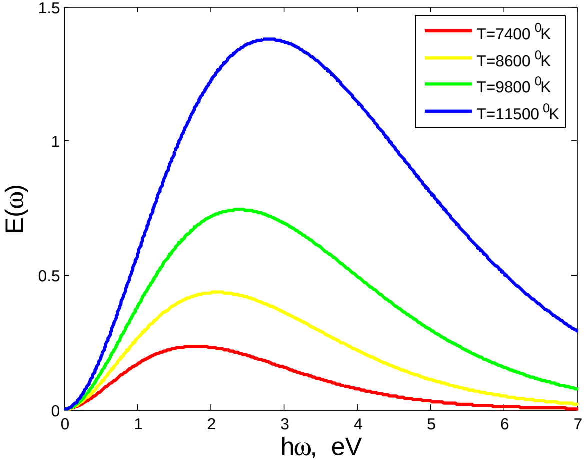
$$N = V \int 2 \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left[\beta\hbar\omega\right] - 1} = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int \frac{x^2 dx}{e^x - 1}, \qquad (1)$$

а энергия

$$E = \frac{VT}{\pi^2} \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \qquad (2)$$

Фотоны

Спектр излучения черного тела при различных температурах.



Фотоны

Максимум в спектре излучения

$$I(\omega) = \frac{d\overline{E}(\omega)}{d\omega} = \frac{V}{\pi^2}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1}, \tag{3}$$

где введено обозначение

$$x \equiv \frac{\hbar\omega}{T}, \tag{4}$$

находим из условия

$$\frac{dI(x)}{dx} = 0, \quad \to \quad 3(e^x - 1) = xe^x. \tag{5}$$

Численное решение этого уравнения дает

$$\hbar\omega_{max} \approx 2.82T. \tag{6}$$

Чтобы найти свободную энергию нужно вычислить большую статсумму

$$Q = \exp(\beta\mu N - \beta F) = \prod_i Q_i = \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp\left[-\beta\varepsilon_i\right] = \prod_i \frac{1}{1 - \exp\left[-\beta\varepsilon_i\right]} \tag{7}$$

Тогда

$$F = -T \ln Q = \sum_i \ln\left[1 - \exp(-\beta\varepsilon_i)\right] =$$

$$= \frac{VT}{\pi^2}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int x^3 dx \ln\left[1 - e^{-x}\right] =$$

$$= -\frac{VT}{3\pi^2}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = -\frac{\pi^2 VT}{45}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 = -\frac{1}{3}E \tag{8}$$

Фотоны

Давление P и энтропия S фотонного газа получаются из соотношений

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{\pi^2 T}{45}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \sim n_\gamma T, \qquad (9)$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{4\pi^2 V}{45}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \sim n_\gamma V, \qquad (10)$$

где n_γ - плотность числа фотонов.

Оценим насколько изменится скорость звука $c_S^2 = (\partial P/\partial\rho)_S$ в газе заряженных частиц с плотностью n и массой m за счет присутствия фотонов, находящихся в равновесии при температуре $T \ll mc^2$.

Рассмотрим сначала предельный случай, когда газ настолько разрежен, что его плотность $n \ll n_\gamma$, плотности числа фотонов. При этих условиях основной вклад в давление и энтропию вносят фотоны

$$P_\gamma \sim T n_\gamma \gg nT, \;\; S_\gamma \sim n_\gamma V \gg S, \tag{11}$$

но основной вклад в массовую плотность ρ вносят частицы

$$\rho_{\text{частиц}} = nm \gg \rho_\gamma \sim \frac{n_\gamma T}{c^2}, \tag{12}$$

если $T \ll mc^2$.

Фотоны

Давление P_γ и энтропия S_γ фотонного газа равны

$$P = \frac{a}{4}T^4 \sim n_\gamma T, \quad S = aT^3 V \sim n_\gamma V, \tag{13}$$

где $a = \frac{4\pi^2}{45(\hbar c)^3}$, n_γ - плотность числа фотонов.
Условие $S = Const$ означает $VT^3 = Const$ то есть

$$\frac{dV}{V} = -\frac{3dT}{T} \tag{14}$$

Фотоны

Тогда

$$dP \sim n_\gamma dT, \quad d\rho = d\left(\frac{Nm}{V}\right) = -\left(\frac{nmdV}{V}\right) = \left(\frac{3nmdT}{T}\right), \tag{15}$$

и следовательно

$$c_S^2 \sim \frac{n_\gamma}{n}\left(\frac{T}{m}\right) \gg c_S^2{}_{\text{частиц}} \tag{16}$$

Таким образом фотоны, находящиеся в равновесии при высокой температуре с газом заряженных частиц, существенно повышают скорость распространения возмущений плотности. Отметим, что для этого необходимо, чтобы длина свободного пробега фотонов была много меньше характерного размера возмущения плотности.

Фотоны. Задача С.Хокинга

Определить условие устойчивого равновесия черной дыры с испускаемой ей чернотельным излучением, заключенными в ящик объема V с зеркальными стенками.

Решение:

То, что черная дыра способна испускать излучение за счет квантовых эффектов, было открыто С.Хокингом в 1974 г.

Для решения задачи нам понадобится выражение для энтропии черной дыры. Найдем сначала из размерных соображений температуру испускаемого черной дырой излучения, приравнивая характерную длину волны λ чернотельного излучения с температурой T, $\lambda \sim \hbar c/T$, “размеру” черной дыры $r_g \sim GM/c^2$. Откуда получаем оценку

$$T \sim \frac{\hbar c^3}{GM}. \tag{17}$$

Фотоны. Задача С.Хокинга

Теперь, зная энергию черной дыры $E = Mc^2$, и используя термодинамику, получим

$$dS = \frac{dE}{T} \sim \frac{GMd(Mc^2)}{\hbar c^3} \quad \to \quad S \sim \frac{GM^2}{\hbar c} \tag{18}$$

Точное выражение для энтропии черной дыры и температуры испускаемого ей излучения, полученные С.Хокингом, имеют вид

$$S = 4\pi \frac{GM^2}{\hbar c}, \quad T = \frac{1}{8\pi} \frac{\hbar c^3}{GM} \tag{19}$$

Фотоны. Задача С.Хокинга

Далее для упрощения выражений полагаем $c = 1$, и энтропию черной дыры записываем как $S = aM^2$, где $a = 4\pi G/\hbar$.
Энергию испускаемого черной дырой излучения записываем в виде $E_{rad} = \sigma T^4 V$, энтропию - $S_{rad} = 4\sigma T^3 V/3$. Полная энергия U по условию постоянна: $U = E_{rad} + M = Const$. Тогда выразим температуру через полную энергию и энергию черной дыры

$$U - M = E_{rad} = \sigma T^4 V \quad \rightarrow \quad T = \left(\frac{U - M}{\sigma V}\right)^{1/4} \tag{20}$$

и получим выражения для энтропии излучения

$$S_{rad} = \frac{4}{3}(\sigma V)^{1/4}(U - M)^{3/4} \equiv b(U - M)^{3/4}, \tag{21}$$

где $b = 4(\sigma V)^{1/4}/3$.

Фотоны. Задача С.Хокинга

Полная энтропия системы S имеет вид

$$S = aM^2 + b(U - M)^{3/4}. \tag{22}$$

В равновесии энтропия должна быть максимальна, откуда

$$\frac{dS}{dM} = 2aM - \frac{3b}{4(U - M)^{1/4}} = 0 \;\rightarrow\; \alpha x = \frac{1}{(1 - x)^{1/4}}, \tag{23}$$

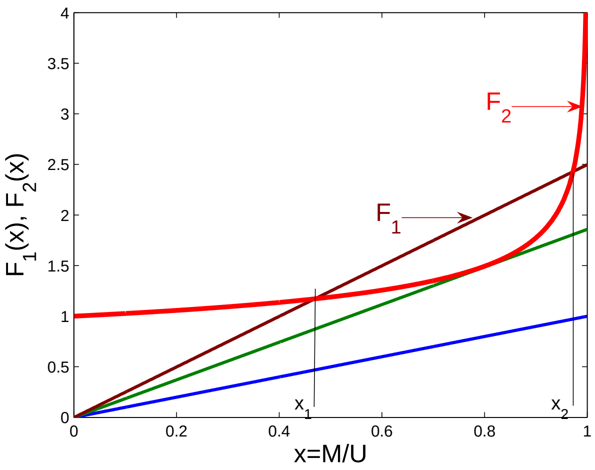
где ввели обозначение $x = M/U$ и $\alpha = 8aU^{5/4}/3b$.
Рассмотрим графическое решение этого уравнения, рис. 16, где введены обозначения: $x = M/U$, $F_1(x) = \alpha x$, $F_2 = 1/(1 - x)^{1/4}$.

Фотоны. Задача С.Хокинга

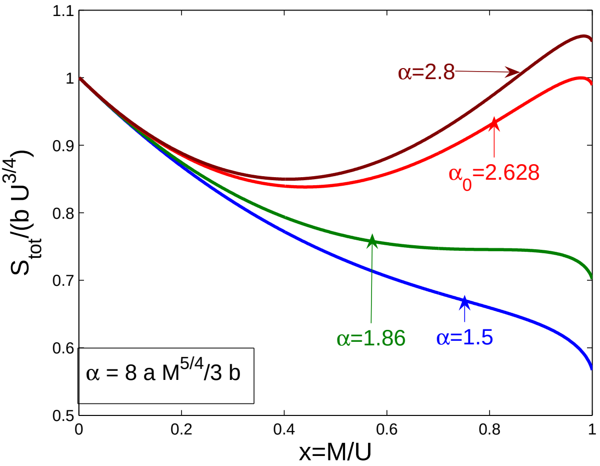
Видно, что при больших значениях объема решений нет и это соответствует полному испарению черной дыры. При уменьшении объема получается сначала одно решение, а затем два, из которых одно (x_2) является локальным максимумом. Это решение становится устойчивым при некотором критическом значении объема, когда энтропия в максимуме $S(x_2)$ сравнивается с $S(x = 0)$.

Фотоны. Задача С.Хокинга

Графическое решение уравнения $2aM = (\sigma V)^{1/4}/(U - M)^{1/4}$



Полная энтропия системы как функция массы черной дыры при различных значениях объема системы



Найдем это значение x_2.

$$S(x=0) = b(U)^{3/4} = S(x_2) = aU^2x_2^2 + bU^{3/4}(1-x_2)^{3/4}. \quad (24)$$

Откуда

$$1-(1-x)^{3/4} = \frac{aU^{5/4}}{b}x^2 = \frac{3x}{8(1-x)^{1/4}} \quad (25)$$

где использовано, что

$$\alpha x = \frac{1}{(1-x)^{1/4}}. \quad (26)$$

Зависимость полной энтропии системы от энергии черной дыры показана на рис. 17. Наличие двух локальных максимумов у энтропии системы приводит к возможности существования метастабильных состояний.
Перепишем предыдущее уравнение в виде

$$\frac{3x}{8} = (1-x)^{1/4} - 1 + x \quad \rightarrow \quad x = 1 - \left(1 - \frac{5}{8}x\right)^4 \qquad (27)$$

Легко сообразить, что решение этого уравнения x_2 не сильно отличается от единицы, так что в первом приближении $x_2 \approx 1 - (3/8)^4 = 1 - 81/4096 \approx 0,98$.
Таким образом, в устойчивом равновесии черной дыры с испускаемым ей излучением почти вся энергия заключена в черной дыре, а на равновесное тепловое излучение приходится около 2 % от всей энергии.