1. Электростатика

Урок 7

Разделение переменных в сферической и цилиндрической системах координат

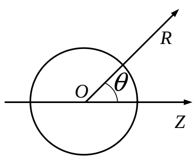
Оператор Лапласа в сферической системе координат записывается в виде

$$\triangle = \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}.$$

Прежде чем рассмотреть общий метод разделения переменных для сферической системы координат, рассмотрим конкретную частную задачу, тем более что она часто рассматривается как модель для многих других задач.

1.1. (Задача 1.51) Незаряженный металлический шар радиуса a вносится в электрическое поле, которое при отсутствии шара было однородным и равным $\mathbf{E}_0$. Определить результирующее поле и плотность поверхностных зарядов на шаре. Что изменится, если заменить шар цилиндром, ось которого перпендикулярна полю?

Решение Начало сферической системы координат поместим в центр шара. Ось Z, относительно которой отсчитываются угол θ, направим вдоль поля $\mathbf{E}_0$. Поскольку шар металлический, то напряженность поля внутри шара равна нулю.



Вне шара поле описывается уравнением Лапласа. Так как система имеет аксиальную симметрию, то напряженность поля и потенциал будут зависеть только от двух сферических координат R и θ. Уравнение Лапласа для рассматриваемой задачи примет вид

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi(R,\,\theta)}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\varphi(R,\,\theta)}{\partial\theta}\right) = 0. \qquad (1)$$

Решение уравнения будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от R, другая – только от θ:

$$\varphi(R,\ \theta) = \varphi_1(R)\,\varphi_2(\theta).$$

Чтобы определить функции $\varphi_1(R)$ и $\varphi_2(\theta)$, подставим решение в дифференциальное уравнение (1). После преобразований получим

$$\frac{1}{\varphi_1(R)}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi_1(R)}{\partial R}\right) = -\frac{1}{\varphi_2(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\varphi_2(\theta)}{\partial\theta}\right).$$

Это равенство должно быть справедливо при любых значениях R и θ, что возможно лишь в случае, когда и левая, и правая части уравнения равны некоторой постоянной C, т. е.

$$\frac{1}{\varphi_1(R)}\frac{d}{d\,R}\left(R^2\frac{d\,\varphi_1(R)}{d\,R}\right)=C\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\varphi_2(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\,\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\,\varphi_2(\theta)}{d\,\theta}\right)=-C\,. \tag{3}$$

Решением уравнения (3) является функция $\varphi_2(\theta)=\cos\theta$ при $C = \ 2$, что легко проверить. Решение уравнения (2) будем искать в виде степени R:

$$\varphi_1(R)=A\,R^n\,.$$

Подставим эту функцию в уравнение (2) и для n получим уравнение $n^2+n-2=0$, корни которого равны $n_1=-2\,,\ n_2=1$.

Таким образом, искомый потенциал имеет вид

$$\varphi(R\,,\ \theta)=\left(A_1R+\frac{A_2}{R^2}\right)\cos\theta.$$

Для определения постоянных A_1 и A_2 учтем граничные условия. Понятно, что при $R\to\infty$ влияние шара не должно сказываться, т. е. $\lim\limits_{R\to\infty}E_z(R,\theta)=E_0$, где

$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Учитывая, что $z=R\cos\theta$, находим $A_1=-E_0$. Поверхность шара является эквипотенциальной. Поэтому при $R=a$, $\frac{\partial\varphi(a,\,\theta)}{\partial\theta}=0$ для всех значений θ, что возможно только при условии

$$A_1a+\frac{A_2}{a^2}=0.$$

Следовательно, $A_2=E_0a^3$ и потенциал можно представить в виде:

$$\varphi=-E_0z+\frac{a^3(\mathbf{E}_0\mathbf{R})}{R^3}=-E_0R\cos\theta+\frac{E_0a^3\cos\theta}{R^2}\ \text{при}\ R\geqslant a.$$

$$\varphi=0\qquad\text{при}\qquad R\leqslant a.$$

Таким образом, металлический незаряженный шар, внесенный в однородное электрическое поле, меняет картину этого поля так, как изменил бы ее внесенный в поле электрический диполь с моментом $\mathbf{d} = \mathbf{E}_0 a^3$. Найдем напряженность электрического поля $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Использовав оператор ∇, запишем

$$\mathbf{E} = -(\nabla\varphi) = \mathbf{E}_0 - \frac{a^3}{R^3}\nabla(\mathbf{E}_0\mathbf{R}) - a^3(\mathbf{E}_0\mathbf{R})\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

С помощью правил векторного анализа вычислим $\nabla(\mathbf{E}_0\mathbf{R})$:

$$\nabla(\mathbf{E}_0\mathbf{R}) = \big[\mathbf{E}_0 \times [\nabla \times \mathbf{R}]\big] + \big[\mathbf{R} \times [\nabla \times \mathbf{E}_0]\big] + (\mathbf{E}_0\nabla)\mathbf{R} + (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{E}_0.$$

Поскольку $\mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$ и $[\nabla \times \mathbf{R}] = \mathrm{rot}\mathbf{R} = 0$, получим

$$\nabla(\mathbf{E}_0\mathbf{R}) = (\mathbf{E}_0\nabla)\mathbf{R} = \mathbf{E}_0.$$

Достаточно элементарно можно показать, что

$$\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right) = \frac{3\mathbf{R}}{R^5}.$$

Окончательно для вектора напряженности электрического поля получаем выражение

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{E}_0 + \dfrac{3(\mathbf{dR})\mathbf{R}}{R^5} - \dfrac{\mathbf{d}}{R^3} & \text{при} \quad R > a, \\ 0 & \text{при} \quad R < a, \end{cases}$$

где $\mathbf{d} = \mathbf{E}_0 a^3$ – дипольный момент, приобретаемый шаром в однородном электрическом поле $\mathbf{E}_0$.

Поверхностная плотность индуцированных зарядов

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi} E_R\bigg|_{R=a} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos\theta.$$

Этот заряд создает внутри шара однородное поле $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_0$, поскольку полное поле равняется нулю. Величина заряда на одной половине шара будет равна

$$|Q| = \left|\int\limits_S \sigma\, ds\right| = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{3}{4\pi} E_0 \cos\theta \cdot 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{3}{4} E_0 a^2.$$

Разумеется, полный заряд на шаре равен нулю.

1.2. Решим первую краевую задачу для уравнения Лапласа внутри и/или снаружи сферы.

Решение Рассмотрим теперь разделение переменных в сферической системе координат для уравнения Лапласа $\triangle U(r, \theta, \phi) = 0$. Для начала предположим, что решение этого уравнения можно записать в виде

$$U = \Psi(r, \theta)\Phi(\phi).$$

Тогда, как всегда, вычисляем соответствующие частные производные и делим каждый член уравнения на U. В результате получаем

$$\frac{1}{\Psi}\left\{\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right\} + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0. \qquad (1)$$

Из приводившихся ранее рассуждений (функция одного аргумента равна во всей области определения функции другого аргумента) следует

$$\Phi'' + k^2\Phi = 0.$$

Поскольку зависимость от координаты ϕ должна быть обязательно периодична с периодом 2π, то параметр k должен быть действительным и целым. Тогда эта часть решения имеет вид

$$\Phi(\phi) = A\sin k\phi + B\cos k\phi. \qquad (2)$$

Второе уравнение, которое получилось в результате разделения переменных, после деления на $\sin\theta$ приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) - k^2\frac{\Psi(r,\theta)}{\sin^2\theta} = 0. \qquad (3)$$

Введя новую переменную $x = \cos\theta$ и предположив, как обычно, $\Psi(r, \theta) = R(r)P(x)$, уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2R'_r\right) - \frac{1}{P(x)}\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)P'_x\right] - \frac{k^2}{1-x^2} = 0.$$

Стандартным способом разделяем переменные и получаем 2 уравнения

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2R'_r\right) = \nu^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P'_x\right] + \left[\nu^2 - \frac{k^2}{1-x^2}\right]P = 0$$

Положив $\nu = n(n+1)$ и $k^2 = m^2$, получим известное уравнение для присоединенных полиномов Лежандра $P_n^{(m)}(x)$

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

Сами же полиномы Лежандра удовлетворяют уравнению

$$\left[(1-x^2)P_n\right]' + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Полезно вспомнить формулу для разложения расстояния $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos\theta}} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta), & r \leqslant r_0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta), & r > r_0. \end{cases} \tag{4}$$

Теперь можно вернуться к основной задаче, так называемой 1-й краевой задаче внутри сферы, т. е. когда ищется решение уравнения

$$\Delta U = 0, \;\; r < a, \;\; U(r = a, \theta, \phi) = f(\theta, \phi).$$

Из написанного выше можно записать общее решение такой задачи

$$U(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \phi),$$

где $Y_n(\theta, \phi)$ – сферические функции, которые определяются соотношением

$$Y_n(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_{nk} \cos k\phi + B_{nk} \sin k\phi\right) P_n^{(k)}(\cos\theta).$$

1.3. (Задача 1.59) По какому закону должна быть распределена плотность заряда $\rho\,(r)$ внутри бесконечного цилиндра радиуса R, чтобы напряженность электрического поля E внутри цилиндра была постоянна по величине и равна E_0? Каково распределение потенциала?

Решение Из $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ следует

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_0) = 4\pi\rho, \quad \text{откуда} \quad \rho = \frac{E_0}{4\pi r}.$$

Здесь предполагалось, что поле имеет только радиальную составляющую, о чем в условии не говорилось. Это предположение естественно с учетом симметрии задачи. Внутри цилиндра потенциал φ изменяется по закону $\varphi_1 = -E_0 r + C$, где C – константа. Вне цилиндра потенциал подчиняется уравнению Лапласа, которое для данного случая будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) = 0,$$

откуда

$$\varphi_2 = A\ln r + B,$$

где A, B – константы. Выбирая $\varphi_1(0) = 0$ и используя граничные условия

$$\varphi_1(R) = \varphi_2(R),$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R},$$

получаем

$$\begin{array}{llll} \varphi_1 = & -E_0 r & \text{при} & r\leqslant R, \\ \varphi_2 = & -E_0 R\left(\ln\frac{r}{R}+1\right) & \text{при} & r > R. \end{array}$$

1.4. (Задача 1.60) Бесконечный полый цилиндр радиуса R заряжен с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0\cos 2\alpha$, где α – полярный угол цилиндрической системы координат с осью Z, направленной вдоль оси цилиндра. Найти потенциал φ и напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля внутри и вне цилиндра.

Решение Из симметрии распределения заряда потенциалы внутри φ_1 и вне цилиндра φ_2 могут зависеть только от r и α (в цилиндрической системе координат). Эти потенциалы равны друг другу на поверхности цилиндра и удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\alpha^2} = 0,\quad i = 1,2. \tag{1}$$

Будем искать решение уравнения (1) для $r < R$ и $r > R$ в виде

$$\varphi = f(r)\,\psi(\alpha). \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) можно записать так

$$\frac{r}{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\psi(\alpha)}\,\frac{\partial^2\psi(\alpha)}{\partial\alpha^2}.$$

Чтобы этому уравнению удовлетворить при любых r и α, нужно положить

$$-\frac{1}{\psi(\alpha)}\,\frac{\partial^2\psi(\alpha)}{\partial\alpha^2} = C^2; \tag{3}$$

$$\frac{r}{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) = C^2\,, \tag{4}$$

где C – постоянная величина. Решением уравнения (3) является функция $\psi(\alpha) = \cos C\alpha$. Поскольку на поверхности цилиндра должно выполняться условие

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R} - \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R} = 4\pi\sigma_0\cos 2\alpha\,, \tag{5}$$

то понятно, что $C = 2$. Уравнение (4) для радиальной части функции примет вид

$$r^2\,\frac{d^2f(r)}{dr^2} + r\,\frac{df(r)}{dr} - 4f(r) = 0. \tag{6}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $f = ar^b$. Подставив его в уравнение (6), получим, что оно удовлетворяется при $b = \pm 2$.

Понятно, что в решение для области $r > R$ не должен входить член, пропорциональный r^2, поскольку потенциал не должен стремиться к бесконечности при $r \to \infty$ (из-за ограниченной величины заряда). Для области же $r < R$, наоборот, не должен входить член, пропорциональный r^{-2}, чтобы потенциал остался конечным при $r = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 r^2\cos 2\alpha \quad \text{при} \quad r \leqslant R,\\ \varphi_2 &= A_2 r^{-2}\cos 2\alpha \quad \text{при} \quad r \geqslant R. \end{aligned}$$

Подставляя решения в уравнение (5) и учитывая, что на поверхности цилиндра $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$, находим, что $A_1 = \pi\sigma_0/R$, $A_2 = \pi\sigma_0 R^3$. Для $r \leqslant R$ окончательно получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \pi\sigma_0 R\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos 2\alpha,\\ E_{r1} &= -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = -2\pi\sigma_0\frac{r}{R}\cos 2\alpha,\\ E_{\alpha 1} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} = 2\pi\sigma_0\frac{r}{R}\sin 2\alpha,\\ |\mathbf{E}| &= 2\pi\sigma_0\frac{r}{R}\,; \end{aligned}$$

для $r\geqslant R$ получим

$$\varphi_2 = \pi\sigma_0 R\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos 2\alpha,$$

$$E_{r2} = 2\pi\sigma_0\left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos 2\alpha,$$

$$E_{\alpha 2} = 2\pi\sigma_0\left(\frac{R}{r}\right)^3 \sin 2\alpha,$$

$$|\mathbf{E}| = 2\pi\sigma_0\left(\frac{R}{r}\right)^3.$$