СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
Лекция 11 Бесстолкновительное уравнение Больцмана.

Образовский Е. Г.

29 ноября 2022 г.

План лекции:

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

План лекции:

- **Бесстолкновительное уравнение Больцмана**

План лекции:

- **Бесстолкновительное уравнение Больцмана**
- **Плазменные колебания**

План лекции:

- Бесстолкновительное уравнение Больцмана
- Плазменные колебания
- Затухание Ландау

План лекции:

- Бесстолкновительное уравнение Больцмана
- Плазменные колебания
- Затухание Ландау
- Приложение: ионный звук

Кинетическое уравнение Больцмана.

Кинетика описывает процессы, происходящие в неравновесных системах. В основном мы ограничимся кинетикой классических систем.
Многие неравновесные свойства определяются одночастичной функцией распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Как правило используется нормировка

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p = n(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

где $n(\mathbf{r}, t)$ – плотность числа частиц.

Кинетическое уравнение Больцмана.

Если можно пренебречь столкновениями, то отдельная частица представляет собой замкнутую систему, для которой выполняется теорема Лиувилля

$$\frac{df(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{dt} = 0, \tag{2}$$

то есть функция распределения остается постоянной вдоль фазовой траектории. Расписывая полную производную по времени, получим

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{p}} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{F} = -\partial U(\mathbf{r})/\partial \mathbf{r}$ – сила, создаваемая внешним полем U. Это бесстолкновительное уравнение Больцмана.

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Используем бесстолкновительное уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{p}} = 0 \qquad (4)$$

для нахождения диэлектрической проницаемости разреженной плазмы. Найдем отклонение функций распределения заряженных частиц от равновесных значений f_0. Эти отклонения возникают из-за появления электрического и магнитного поля (самосогласованные поля), возникающих за счет возмущения равновесного состояния плазмы.
Условие слабой неидеальности плазмы

$$T \gg \frac{e^2}{\bar{r}} \sim e^2 n^{1/3}. \qquad (5)$$

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Ограничимся пока рассмотрением электронов. Пусть плазма находится в электрическом поле $\mathbf{E} \propto e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$. Считаем, что электрическое поле достаточно слабое, чтобы отклонение функции распределения электронов δf от равновесной f_0 можно было считать малым и произвести линеаризацию кинетического уравнения. Найдём добавку к функции распределения электронов, затем — плотность тока

$$\mathbf{j}_\alpha = e\int \mathbf{v}_\alpha \delta f d^3p = \sigma_{\alpha\beta}E_\beta, \tag{6}$$

выразим проводимость и, наконец, воспользуемся соотношением

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi\sigma_{\alpha\beta}i}{\omega}. \tag{7}$$

Выберем ось x параллельно направлению вектора $\mathbf{k}$. С учетом того, что $\delta f \propto \mathbf{E}$, из линеаризованного кинетического уравнения (без учета столкновений)

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v_x \frac{\partial \delta f}{\partial x} + e\mathbf{E}_\beta \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}_\beta} = 0 \quad (8)$$

получаем

$$\delta f = -\frac{ie\mathbf{E}_\beta}{\omega - kv_x} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}_\beta}. \quad (9)$$

Плотность тока

$$\mathbf{j}_\alpha = e\int \mathbf{v}_\alpha \delta f d^3p = -ie^2\int \frac{\mathbf{v}_\alpha \mathbf{E}_\beta}{\omega - kv_x}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}_\beta}d^3p. \tag{10}$$

Тензор проводимости

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{ie^2}{k}\int \frac{\mathbf{p}_\alpha}{p_x - m\omega/k}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}_\beta}d^3p. \tag{11}$$

Тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{4\pi e^2}{k\omega}\int \frac{\mathbf{p}_\alpha}{p_x - m\omega/k}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}_\beta}d^3p. \tag{12}$$

следует указать способ обхода полюса в подинтегральном выражении. Этот способ, правило Ландау, можно получить с помощью адиабатического включения поля волны $\mathbf{E} \propto e^{i\mathbf{kr}-i\omega t+\delta t}$, где $\delta \to +0$. Это эквивалентно замене $\omega \to \omega + i\delta$. Диэлектрическая проницаемость для продолных волн тогда имеет вид

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{\omega k} \int p_x \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x} \frac{dp_x}{p_x - \omega m/k - i\delta} \tag{13}$$

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Используя известную формулу

$$\int \frac{g(z)dz}{z - z_0 - i\delta} = v.p. \int \frac{g(z)dz}{z - z_0} + i\pi g(z_0), \tag{14}$$

(где $v.p. \int$ – интеграл в смысле главного значения) получим

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{\omega k} v.p. \int p_x \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x} \frac{dp_x}{p_x - \omega m/k} - i \frac{4\pi^2 e^2 m}{k^2} \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x}\Big|_{p_x = m\omega/k}. \tag{15}$$

Для максвелловской плазмы

$$f_0(p_x) = \frac{n_0 e^{-p_x^2/2mT}}{\sqrt{2\pi m T}}, \tag{16}$$

где n_0 – равновесная концентрация электронов. Наличие мнимой части в диэлектрической проницаемости приводит к затуханию волн - затуханию Ландау в бесстолконовительной плазме.

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Утем, что $\dfrac{\partial f_0}{\partial p_x} = -\dfrac{f_0 p_x}{mT}$. В этом случае получим

$$-\frac{m}{k}\pi i \frac{\partial f_0}{\partial p_x}\bigg|_{p_x=m\omega/k==m\omega/k} = \frac{\pi i p_x}{kT} f_0\bigg|_{p_x=m\omega/k}. \qquad (17)$$

Рассмотрим случай $\omega/k \gg v_T$. Тогда

$$\frac{4\pi e^2}{\omega k} v.p. \int p_x \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x} \frac{dp_x}{p_x - \omega m/k} \approx$$

$$\approx \frac{4\pi e^2}{\omega^2 m} \int p_x \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x} dp_x \left(1 + \frac{p_x k}{m\omega} + \frac{p_x^2 k^2}{m^2\omega^2}\right) =$$

$$= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{Tk^2}{m\omega^2}\right). \qquad (18)$$

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Для продольных волн $\varepsilon_l = 0$ Преобразуем все вместе:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{k^2\langle v^2\rangle}{\omega_p^2} - \frac{\pi i}{Tk^3} \cdot \frac{4\pi ne^2}{\sqrt{2m\pi T}} m\omega \exp\left(-\frac{m^2\omega^2}{2mTk^2}\right). \qquad (19)$$

Преобразуем показатель экспоненты:

$$\frac{m^2\omega^2}{2mTk^2} = \frac{m}{2Tk^2}\left(\omega_p^2 + 3k^2\frac{T}{m}\right) = \frac{1}{2k^2 r_D^2} + \frac{3}{2}; \qquad (20)$$

$$\frac{\omega_p^2 m}{T} = \frac{4\pi ne^2}{T} = \frac{1}{r_D^2}, \qquad (21)$$

r_D — дебаевский радиус.
Условие слабой неидеальности плазмы можно записать в виде:

$$\frac{e^2}{\bar{r}T} \sim \frac{e^2 n^{1/3}}{T} \sim \frac{\bar{r}^2}{r_D^2}, \qquad (22)$$

В итоге

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 \frac{T}{m} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_p^2}{(kr_D)^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_D^2} - \frac{3}{2} \right) \cdot i; \tag{23}$$

$$\omega = \omega_p + \frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{2\omega_p} - i\gamma, \tag{24}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_p}{k^3 r_D^3} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_D^2} - \frac{3}{2} \right). \tag{25}$$

Получившаяся малая добавка означает появление поглощения, называемого затуханием Ландау.

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Картину взаимодействия электронов с волной удобно представить в системе отсчета, которая движется со скоростью волны ω/k. В этой системе электрическое поле волны представляет собой ряд потенциальных ям глубины $\phi_0 \sim E/k$. Большая часть электронов имеет в этой системе отсчета энергию большую глубины ям и движется, периодически ускоряясь и замедляясь. Те же электроны, для которых в лабораторной системе $v_x \approx \omega/k$, должны колебаться в потенциальных ямах с частотой $\Omega \sim \sqrt{\phi_0''/m} \sim \sqrt{kE/m}$.

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

В лабораторной системе те электроны, которые слегка опережают волну, отражаются от убегающей от них “стенки”, замедляются и передают волне энергию, а более медленные — отражаются от догоняющего их края потенциальной ямы и ускоряются. Более быстрых — меньше: $\dfrac{\partial f}{\partial p_x} < 0$. В такой картине подразумевается, что волна достаточно слабая, чтобы второе отражение не успело сыграть роль, как волна уже сильно затухнет.

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Если это условие не выполнено, то затухание оказывается более медленным и даже могут происходить осцилляции интенсивности волны, если ускорившиеся было электроны отражаются то от одного края потенциальной ямы, то от другого — то замедляясь, то ускоряясь. Периоды колебаний электронов в потенциальной яме зависят от их энергий, поэтому происходит “перемешивание” фаз колебаний различных электронов, при большой амплитуде волны осцилляции её интенсивности исчезают. Колебания плазмы в таких условиях описываются так называемым квазилинейным приближением (развитым А.А. Веденовым, Е.П. Велиховым и Р.З. Сагдеевым).

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Пусть сквозь плазму идет пучок электронов. Тогда на кривой $f(p_x)$ должен быть максимум, отвечающий скорости частиц пучка, и для некоторого интервала скоростей окажется $\dfrac{\partial f}{\partial p_x} > 0$; для некоторого интервала значений k вместо затухания появляется нарастание волн за счет энергии пучка. Это пример неустойчивости плазмы — явления, имеющего первостепенное значение для работ по управляемым термоядерным реакциям (как помеха). Это же явление может быть использовано для создания генератора колебаний (обычно — в твердотельной плазме) просто при прохождении по образцу достаточно сильного тока.

Приложение: Ионный звук

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{26}$$

используется для вывода закона дисперсии продолных волн в максвелловской плазме. Равновесные функции распределения для электронов

$$f_{0e} = N_e e^{-p^2/2m_e T_e} \tag{27}$$

и ионов

$$f_{0i} = N_e e^{-p^2/2M_i T_i} \tag{28}$$

имеют разные температуры $T_e \gg T_i$, что возможно благодаря медленному обмену энергией между частицами с существенно разной массой.

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

В присутствии продольной волны с электрическим полем

$$E_x = E_0 e^{ikx - i\omega t} \tag{29}$$

ищем решение уравнения Больцмана для электронов и ионов в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0 + \delta f e^{ikx - i\omega t}. \tag{30}$$

Тогда линеаризованное уравнение

$$\delta f (ikv_x - i\omega) + eE_0 \frac{\partial f_0}{\partial p_x} = 0. \tag{31}$$

Отсюда

$$\delta f = \frac{ieE_0}{kv_x - \omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_x}. \tag{32}$$

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Плотность электрического тока равна

$$j_x(k,\omega) = \int (f_0 + \delta f) e v_x d^3p = ie^2 E_0 \int \frac{v_x d^3p}{kv_x - \omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_x}. \qquad (33)$$

Полюс подынтегрального выражения приводит к затуханию продолных волн даже в отсутствии столкновений (затухание Ландау).
Рассмотрим вклад в плотность тока от электронов, считая выполненным условие $v_e k \gg \omega$.

Тогда с помощью разложения

$$\frac{1}{kv_x-\omega}=\frac{1}{kv_x(1-\omega/kv_x)}\approx\frac{1}{kv_x}+\frac{\omega}{k^2v_x^2}, \quad (34)$$

получим

$$j_{xe}(k,\omega)=-\frac{ie^2E_0\omega}{k^2T_e}\int f_0d^3p=-\frac{ie^2E_0\omega n_e}{k^2T_e}. \quad (35)$$

Мы использовали

$$\frac{\partial f_0}{\partial p_x}=-\frac{p_x}{m_eT_e}f_0, \quad \int f_0d^3p=n_e, \quad (36)$$

а также

$$\int v_xf_0d^3p=0 \quad (37)$$

из-за нечетности подынтегрального выражения.

Рассмотрим теперь вклад в плотность тока от ионов, считая выполненным условие $v_i k \ll \omega$. Тогда с помощью разложения

$$\frac{1}{kv_x - \omega} \approx -\frac{1}{\omega} \tag{38}$$

получим

$$j_{xi}(k, \omega) = -\frac{ie^2 E_0}{\omega} \int v_x \frac{\partial f_{0i}}{\partial p_x} d^3 p = \frac{ie^2 n_i E_0}{M_i \omega}, \tag{39}$$

где интеграл берем по частям

$$\int v_x \frac{\partial f_{0i}}{\partial p_x} d^3 p = -\frac{1}{M_i} \int f_{0i} d^3 p = -\frac{n_i}{M_i}. \tag{40}$$

Суммируя вклады электронов и ионов, имеем

$$j_x(k,\omega) = -\frac{ie^2 E_0 \omega n_e}{k^2 T_e} + \frac{ie^2 n_i E_0}{M_i \omega}. \quad (41)$$

Отсюда проводимость равна

$$\sigma(k,\omega) = -\frac{ie^2 \omega n_e}{k^2 T_e} + \frac{ie^2 n_i}{M_i \omega}, \quad (42)$$

а диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon(k,\omega) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma(k,\omega) = 1 + \frac{4\pi n_e e^2}{k^2 T_e} - \frac{4\pi n_i e^2}{M_i \omega^2}. \quad (43)$$

Для продолных волн $\varepsilon(k,\omega) = 0$, отсюда

$$\omega = \frac{\Omega_{pi}\lambda_D k}{\sqrt{1+\lambda_D^2 k^2}}, \tag{44}$$

где введены обозначения

$$\Omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\pi n_i e^2}{M_i}} \tag{45}$$

– плазменная частота ионов,

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_e e^2}} \tag{46}$$

– дебаевская длина экранирования электрического поля электронами.

Бесстолкновительное уравнение Больцмана

Если длина волны большая, $\lambda_D k \ll 1$, то имеем звуковые колебания

$$\omega = \Omega_{pi} \lambda_D k = \sqrt{\frac{T_e}{M_i}} k. \qquad (47)$$

В данном случае электроны захватываются потенциалом, создаваемым неоднородностями плотности ионов, и давление создается горячими электронами, так что скорость ионного звука

$$C_s = \sqrt{\frac{T_e}{M_i}}. \qquad (48)$$

В обратном пределе коротких волн, $\lambda_D k \gg 1$,

$$\omega = \Omega_{pi}. \qquad (49)$$

В этом случае электроны не успевают захватиться потенциалом и создают однородный фон, а ионы испытывают плазменные колебания с частотой Ω_{pi}.