МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

4-й семестр, задание № 2

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента. Нелинейные системы и первые интегралы. Метод малого параметра

1. Найдите общее решение неоднородных линейных уравнений и систем, используя метод вариации постоянных или метод комплексных амплитуд:

(а) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = e^t \sin^2 t$; (2 б)

(б) $\begin{cases} 2\ddot{x} + 3x - y = \cos t, \\ 2\ddot{y} + x + y = 0; \end{cases}$ (3 б)

(в) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = x + 2y + t^{-2}e^{3t}; \end{cases}$ (3 б)

(г) $t^2 \dddot{y} - 2t\ddot{y} + 2\dot{y} = t$. (3 б)

2. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид $(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$, где $\beta \neq 0$. Докажите, что

$$e^{At} = e^{\alpha t}\left[E\cos\beta t + (A - \alpha E)\frac{\sin\beta t}{\beta}\right].$$

Рассмотрите также случай $\beta = 0$. Совпадает ли полученный ответ с тем, что дает предельный переход при $\beta \to 0$ в первой формуле? (3 б)

3. Рассмотрим систему $\dfrac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}$. Мы знаем, что любая компонента $y_i(t)$ решения $\vec{y}(t)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению порядка n, имеющему характеристический многочлен $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Покажите, что обратное утверждение не верно. (2 б)

Можете использовать для иллюстрации систему с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найдите экспоненту e^{At} для матрицы A, используя представление экспоненты в виде ряда по степеням A^k или в виде полинома от ψ — функций (по 2 б каждый пункт):

(а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Постройте фундаментальную матрицу решений системы $\dfrac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}$ с матрицей A из задачи 4(а), используя собственные векторы матрицы A. Выясните, как связана построенная фундаментальная матрица с матрицей e^{At}. (2б)

6. Найдите точки покоя динамической системы и нарисуйте их фазовые портреты. Охарактеризуйте устойчивость (неустойчивость) найденных положений равновесия. (по 2 б каждая точка) $\begin{cases} \dot{x} = (y-4)(x-y) \\ \dot{y} = 4 - xy. \end{cases}$

7. Найдите первые интегралы и решите систему уравнений (3 б)

$$\frac{d\,x}{x\,(y^2 - z^2)} = \frac{d\,y}{y\,(z^2 - x^2)} = \frac{d\,z}{z\,(x^2 - y^2)}$$

8. Найдите два члена разложения по степеням малого параметра μ периодического решения уравнения $\ddot{x} + 3x + \mu x^3 = 2\cos t$. (3 б)

9. Функции $x = x\,(t, x_0, y_0)$ и $y = y\,(t, x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2, \\ 2\dot{y} = -y^2 \end{cases}$$

и $x\,(1) = x_0,\ y\,(1) = y_0$. Найдите производную $\dfrac{\partial x}{\partial y_0}$ при $x_0 = 3,\ y_0 = 2$. (2б)