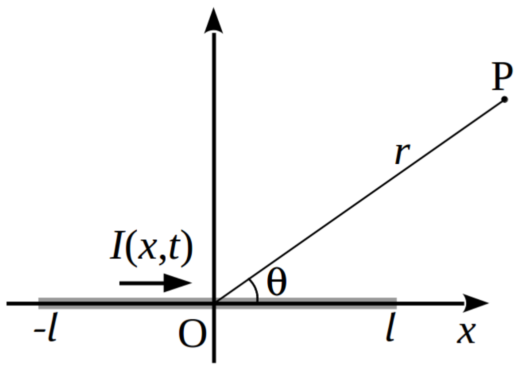
Задача.
Исследовать излучение вибратора Герца в волновой зоне.
Решение.
Общее выражение для тока через вибратор имеет вид

$$I(x,t) = I_0 \frac{\sin k(l - |x|)}{\sin kl} \,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,.$$



Для вибратора Герца $kl \ll 1$ и тогда

$$I(x,t) \approx I_0 \left(1 - \frac{|x|}{l}\right) \mathrm{e}^{-i\omega t}\,.$$

Поскольку на концах антенны ток равен нулю, то для $\dot{d}$ всего вибратора подходит выражение

$$\dot{d}_x = \int\limits_{-l}^{l} I(x) dx = 2I_0 \,\mathrm{e}^{-i\omega t} \int\limits_{0}^{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = I_0 l \,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

Вторая производная дипольного момента по времени равна

$$\ddot{d}_x = -i\omega I_0 l \,\mathrm{e}^{-i\omega t} = -ickl I_0 \,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,.$$

Угловое распределение интенсивности излучения антенны в волновой зоне (мгновенное значение)

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta = \frac{c^2 (kl)^2 I_0^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta \cos^2\omega t = \frac{(kl)^2 I_0^2}{4\pi c} \sin^2\theta \cos^2\omega t,$$

а его среднее по времени значение

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{(kl)^2 I_0^2}{8\pi c} \sin^2\theta.$$

Средняя по времени мощность, излучаемая в полный телесный угол, равна

$$\langle J \rangle = \frac{(kl)^2 I_0^2}{8\pi c} \int \sin^2\theta d\Omega = \frac{(kl)^2 I_0^2}{8\pi c} \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2\theta \cdot 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{(kl)^2 I_0^2}{4c} \cdot \frac{4}{3} = \frac{(kl)^2 I_0^2}{3c}.$$

Сопротивление излучения

$$R = \frac{2\langle J \rangle}{I_0^2} = \frac{2(kl)^2}{3c}.$$

Подставим $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$R = \frac{2\pi^2}{3c} \cdot \left(\frac{2l}{\lambda}\right)^2.$$

В единицах СИ ($\frac{1}{c} = 30\,\text{Ом}$)

$$R \approx 200 \left(\frac{2l}{\lambda}\right)^2 \text{Ом}.$$