МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

5 семестр, осень 2024

Задание 3

Теория потенциала, функции Грина и применение интегральных преобразований.
Гиперболические системы первого порядка.

1. (а) (3 б) Постройте функцию Грина и определите стационарную температуру $u(x,y)$ в двугранном угле $(0 < x, 0 < y)$, одна грань $(x = 0)$ которого поддерживается при нулевой температуре, а температура другой грани равна $u_0\theta(l - x)$:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < x, \quad 0 < y,$$
$$u(0,y) = 0, \quad u(x,0) = u_0\theta(l-x), \quad |u(x,y)| < \infty,$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда: $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x > 0$.

(б) (2 б) Найдите эту же стационарную температуру методом конформных отображений.

2. (3 б) Полупространство $y > 0$ ограничено плоскостью $y = 0$ и цилиндрической поверхностью $\{x, y : x^2 + y^2 = r_0^2, y > 0\}$. Определить температуру полупространства, если температура плоскости v_2, а цилиндрической поверхности v_1.

3. (3 б) (а) Постройте функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца $\Delta u + a^2 u = 0$ в полупространстве $z > 0$ и запишите формулу Пуассона. (б) Покажите, что функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в шаре невозможно построить методом отражений.

4. (4 б) Найдите разложение по сферическим гармоникам поверхностной плотности зарядов, индуцированных на проводящей заземленной сфере точечным зарядом, расположенным внутри сферы.

5. (3 б) Выразите ядро Пуассона для уравнения теплопроводности на отрезке [0, L] с краевыми условиями первого рода $G_{[0,L]}(x,\xi,t)$ в терминах ядра Пуассона для всей оси $G(x,\xi,t)$:
$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$

6. (а) (2 б) Найти sin- и cos-преобразования Фурье ($\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_c$ соответственно) второй производной функции $f(x)$. Предполагается, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и абсолютно интегрируема вместе со своими производными.

(б) (4 б) С помощью подходящего интегрального преобразования решите начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + cu + f(x,t), & 0 < x < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \alpha(t), & u\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

(Указание: редуцируйте задачу на три упрощенных)

7. (4 б) Найти с помощью преобразования Лапласа решение уравнения

$$2u_{xx} + 5u_{xt} + 3u_{tt} = 0, \quad 0 < x, t < \infty,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = f(t);$$
$$u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = 0.$$

8. (4 б) Найти общее решение следующих систем:

$$\text{(s1)} \begin{cases} (x-1)u_t - (x+1)v_t + u_x = 0 \\ (x+1)u_t - (x-1)v_t - v_x = 0; \end{cases}$$

$$\text{(s2)} \begin{cases} u_x + v_y = 2\,(u_x - v_y) - 3\,(v_x - u_y)\,, \\ v_x + u_y = 3\,(u_x - v_y) + 2\,(v_x - u_y) \end{cases}$$

9. (3 б) Решите задачу Коши ($t > 0$, $-\infty < x < \infty$)

$$\begin{cases} u_t + 2xu_x + 6x^2 v_x = 0, \\ v_t + u_x + 3xv_x = 0, \end{cases}$$

$u(x,0) = 2x, \quad v(x,0) = 1 - x.$

10. (6 б) Приведите следующие системы к каноническому виду, найдите общее решение и приведите примеры правильных и неправильных постановок краевых задач в областях (а) $t \geqslant 0, x \geqslant 0$; (б) $t \geqslant 0, x \leqslant 0$; (в) $t \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$(s_3) \begin{cases} 2u_t + (2t-1)u_x - (2t+1)v_x = 0, \\ 2v_t - (2t+1)u_x + (2t-1)v_x = 0 \end{cases}$$

$$(s_4) \begin{cases} 2u_t + 4v_x + w_x = 0, \\ v_t + 8u_x = 0, \\ w_t + 3w_x = w. \end{cases}$$