1. Электростатика

Урок 1

Закон Кулона Сила, действующая со стороны заряда q_1 на заряд q_2 равна

$$\mathbf{F}_{12} = C\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{r_{12}}}{r_{12}},$$

где величина C множитель, зависящий от системы единиц. В системе CGSE размерность заряда выбирается так, чтобы $C = 1$. Тогда единица заряда имеет размерность (иногда ее называют статкулон)

$$[q] = [Fr^2]^{1/2} = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1} \ \text{ или } \ \text{г}^{1/2}\text{см}^{3/2}\text{сек}^{-1}.$$

В системе Си единица заряда определяется независимо от закона Кулона и равна 1 Кулону. $1k = 3 \cdot 10^9$ед. CGSE. В системе Си закон Кулона имеет вид

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\frac{\mathbf{r_{12}}}{r_{12}},$$

где $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12}\Phi/\text{м}$. Все дальнейшие формулы и задачи, если не оговорено другое, записываются в системе CGSE.

Сила, действующая со стороны i-го заряда на k-й, записывается в виде

$$\mathbf{F}_{ik} = \frac{q_i q_k}{r_{ik}^3}\mathbf{r}_{ik}.$$

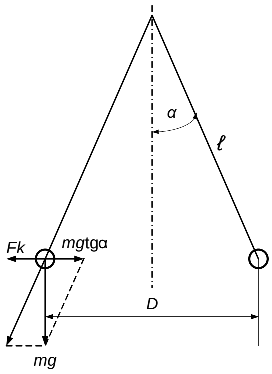
Электростатическое поле подчиняется принципу суперпозиции, т.е. поле в точке $\mathbf{r}$ является суммой (векторной!!) полей, создаваемых составляющими систему зарядами q_i, расположенными в точках $\mathbf{r}_i$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3}\mathbf{r}_i.$$

Электростатическое поле может быть выражено как градиент скалярной функции $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, следовательно потенциал определяется с точностью до произвольной константы. Потенциал точечного заряда, расположенного в начале координат $\varphi = \frac{q}{r} + C$. Принцип суперпозиции распространяется, очевидно, и на потенциал.

1.1. Два шарика с массой $m = 0,1$г подвешены на шелковых нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения им заряда они оттолкнулись и разошлись на расстояние $D = 6$см, длина нитей $\ell = 30$см. Определить, какой величины заряд был сообщен каждому шарику. Результат выразить в кулонах.

Решение Сумма сил вдоль нити и вдоль горизонтальной оси равна силе тяжести.



Сила вдоль горизонтальной оси $F_x = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$, а сила от второго заряженного шарика $Fk = \frac{q^2}{D^2}$. Для равновесия эти силы должны быть направлены в противоположные стороны и равны друг другу по модулю, т.е.

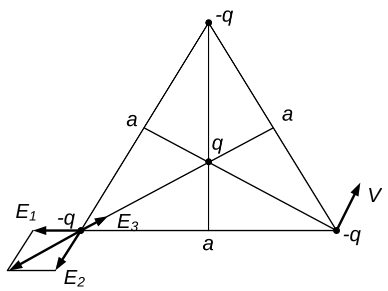
$$mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{q^2}{D^2}.$$

Откуда

$$q = D\sqrt{mg\,\mathrm{tg}\,\alpha} \approx D\sqrt{mg\alpha} = D\sqrt{mg\frac{D}{2\ell}} =$$
$$= 6\sqrt{10} \approx 18,8 \text{ статкулон} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ кулон}.$$

1.2. (Задача 1.3)Три одинаковых частицы имеют массу m и заряд $-q$ каждая. Расстояние между каждой парой a. Они движутся на неизменном расстоянии вокруг центральной частицы, заряд которой равен $+q$. При какой скорости частиц система находится в равновесии? Какова энергия полной «ионизации» системы?

Решение m– масса, q– заряд, a – расстояние. Высота h в правильном треугольнике $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Суммарная сила, действующая на каждую частицу в вершинах треугольника (см. рис)



$$\mathbf{F}_\Sigma = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_3 = [2F_1\cos(\pi/6) - F_3]\,\mathbf{e}_r,$$

где вектор $\mathbf{e}_r$ направлен от центра треугольника к каждому заряду.

$$F_1 = \frac{q^2}{a^2}, \quad F_3 = \frac{q^2}{(2/3h)^2}$$

$$F_\Sigma = \frac{q^2}{a^2}\sqrt{3} - \frac{3q^2}{a^2} = -\frac{q^2}{a^2}\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Поскольку получилось отрицательное значение силы, значит она направлена к центру и, следовательно, возможно вращение частиц вокруг центра со скоростью, определяемой из условия равновесия – равенства суммарной силы, действующей на каждую частицу, центробежной силе, т.е.

$$\frac{mv^2}{r} = F_\Sigma.$$

$$\frac{mv^2\sqrt{3}}{a} = \frac{q^2}{a^2}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$$
$$v = \sqrt{\frac{q^2}{ma}\left(\sqrt{3}-1\right)}.$$

Полная энергия системы в этом равновесном состоянии равна

$$E = T + U = 3\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}(3U_1 + U_0),$$

где первый член – это утроенная кинетическая энергия одной движущейся частицы, второе слагаемое – это вклад каждой движущейся частицы в общую энергию взаимодействия за счет взаимодействия с другими, а третье слагаемое - вклад покоящейся частицы в общую энергию за счет взаимодействия с движущимися. Точнее, это будет выглядеть так. Полная энергия взаимодействия имеет вид

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j} q_i \varphi_{ji},$$

где φ_{ji} – потенциал, который создает j-й заряд в точке, где находится заряд i. Для примера рассмотрим чему равен член U_1 в выражении для полной энергии

$$U_1 = q\left(\varphi_{21} + \varphi_{31} + \varphi_{01}\right) = q\left(\frac{q}{a} + \frac{q}{a} - \frac{q}{2/3h}\right) = \frac{q^2}{a}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Выражение для U_0 запишем аналогично в виде

$$U_0 = -q3\frac{q}{2/3h} = -3\frac{q^2}{a}\sqrt{3}.$$

Собирая все члены потенциальной энергии получим

$$U = \frac{1}{2}\left[3U_1 + U_0\right] = -3\frac{q^2}{a}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

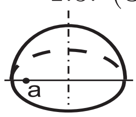
Используя ранее полученное выражение для скорости, полную энергию можно переписать в виде

$$E = T + U = 3\left[\frac{mv^2}{2} - \frac{q^2}{a}\left(\sqrt{3}-1\right)\right] = -\frac{3}{2}\frac{q^2}{a}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Для того, чтобы "ионизовать"систему, т.е. чтобы частицы разлетелись на бесконечность с нулевой скоростью, необходимо чтобы полная энергия системы стала равной нулю. Тогда очевидно, что необходимо "добавить"в систему энергию

$$E_0 = -E = \frac{3}{2}\frac{q^2}{a}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

1.3. (Задача 1.14 из задачника) Полусфера радиуса R равномерно заряжена с



поверхностной плотностью σ. Найти потенциал в некоторой точке экваториальной плоскости, отстоящей на расстоянии a от оси симметрии полусферы.

Решение Потенциал в точке A, если сфера полная

$$\varphi = \varphi_A^+ + \varphi_B^-$$

φ_A^+– потенциал в точке A от верхней полусферы.φ_B^-– потенциал от нижней полусферы в точке B. В силу осевой симметрии $\varphi_A = \varphi_B$; $\varphi = 2\varphi_A$. Легко понять, что потенциал внутри сферы в любой точке $\varphi = \mathrm{const} = \varphi_0$. Это можно объяснить вращением сферы, при которой ничего не меняется $\varphi_A = \frac{\varphi_0}{2}$. Тоже самое можно сказать о потенциале снаружи от всей сферы.

$$\varphi_{\text{внешн}} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{a}$$

$$\varphi_{\text{внешн}}^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\varphi_{\text{внешн}} = \frac{2\pi\sigma R^2}{a}$$

Из непрерывности

$$\varphi_{\text{внутр}} = 2\pi\sigma a\frac{R^2}{R} = 2\pi\sigma R$$

$\varphi_{\text{нар}} = 2\pi\sigma R^2/a$, $\varphi_{\text{внутр}} = 2\pi\sigma R$.

1.4. (Задача 1.15 из задачника) Найти потенциал φ и напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля: а) на оси Z круглого тонкого диска радиуса R; б) равномерно заряженной бесконечной плоскости; в) на оси Z круглого отверстия радиуса R, сделанного в плоскости $z = 0$. Плоскость и диск равномерно заряжены с плотностью σ.

Решение Электрическое поле $\mathbf{E}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = 0 \tag{1}$$

и, значит, является потенциальным, т. е. таким полем, в котором работа сил поля при перемещении заряда из одной точки в другую не зависит от пути, по которому производится его перемещение, а зависит только от расположения начальной и конечной точек. Потенциальность поля обусловливает существование такой скалярной функции, называемой потенциалом φ, разностью значений которой в конечной и начальной точках пути определяется работа по перемещению единичного заряда. Потенциал φ вводится соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\,\varphi. \tag{2}$$

Представленный таким образом вектор $\mathbf{E}$ является решением уравнения (1), поскольку ротор градиента всегда равен нулю. Если в уравнении (2) φ заменить на $\varphi + \mathrm{const}$, то $\mathbf{E}$ от этого не изменится. Таким образом, потенциал является вспомогательной величиной и определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Численная величина не может быть измерена на опыте. Физическое значение имеет лишь разность потенциалов между двумя точками, что соответствует работе A при перемещении единичного заряда между этими точками:

$$A = \int\limits_c^d (\mathbf{E}\,d\ell) = \int\limits_c^d (\operatorname{grad}\,\varphi d\ell) =$$

$$= -\int\limits_c^d (\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz) = -\int\limits_c^d d\varphi = \varphi(c) - \varphi(d).$$

Таким образом, потенциал в любой фиксированной точке можно сделать равным любой наперед заданной величине. Тогда потенциал всех остальных точек оказывается определенным однозначно. Если заряды расположены в конечной области пространства, то обычно потенциал выбирается равным нулю на бесконечности. Для системы точечных зарядов

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{R_i}, \tag{3}$$

где R_i – расстояние от заряда q_i до точки, в которой вычисляется потенциал φ. При непрерывном распределении заряда

$$\varphi = \int \frac{dq}{R} = \int\limits_V \frac{\rho\,dv}{R} + \int\limits_S \frac{\sigma\,ds}{R} + \int\limits_L \frac{\eta\,d\ell}{R}, \tag{4}$$

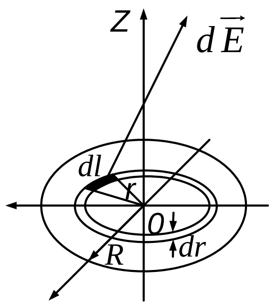
где ρ, σ, η – соответственно объемная, поверхностная и линейная плотности зарядов; R – расстояние до точки, в которой вычисляется потенциал от зарядов ρdv в первом интеграле, σds – во втором, $\eta d\ell$ – в третьем; dv, ds, $d\ell$ – соответственно элементарные объем, площадь, длина. Интегралы берутся по всему объему, где $\rho \neq 0$, по поверхности, где $\sigma \neq 0$, по линии, где $\eta \neq 0$.

Если заряды не расположены в конечной области пространства, то не всегда можно выбрать потенциал так, чтобы на бесконечности он был равен нулю, и путь прямого вычисления потенциала по формуле (4) может приводить к появлению расходимостей, поскольку эта формула является обобщением формулы (3) для потенциала от системы точечных зарядов, для которых потенциал принимается равным нулю на бесконечности. В этих случаях удобнее сводить задачу о нахождении потенциала к решению дифференциального уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. Иногда проще сначала найти $\mathbf{E}$, например, по теореме Гаусса в задачах с определенной симметрией распределения заряда (см. 1.23), а затем, обратив уравнение (1), найти потенциал по формуле

$$\varphi = -\int (\mathbf{E}\, d\mathbf{R}) + \text{const}, \tag{5}$$

подобрав константу так, чтобы потенциал имел более простой вид.

а) Потенциал будем вычислять по формуле (4). Выделим на диске кольцо радиуса r ширины dr. На элементе длины кольца $d\ell = r\,d\alpha$ находится количество заряда



$$dq = \sigma d\ell\, dr = \sigma r\, dr\, d\alpha.$$

Потенциал, создаваемый этим зарядом на оси на расстоянии z от диска, равен $dq/\sqrt{z^2 + r^2}$. Потенциал, создаваемый кольцом радиуса r ширины dr,

$$d\varphi = \frac{2\pi\sigma r\, dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}.$$

Тогда

$$\varphi = 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = 2\pi\sigma \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z|\right), \tag{6}$$

откуда

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\pi\sigma\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right). \tag{7}$$

б) Пусть бесконечная заряженная плоскость занимает положение плоскости (x, y). В силу симметрии распределения зарядов, вектор $\mathbf{E}$ электрического поля может зависеть только от координаты z и должен быть перпендикулярен плоскости. Он направлен к плоскости, если ее заряд отрицателен. Поэтому напряженность электрического поля для равномерно заряженной бесконечной плоскости можно найти предельным переходом при $R \to \infty$ в формуле (7) для поля, создаваемого диском радиуса R на оси диска. Получаем

$$E_z = 2\pi\sigma\frac{z}{|z|}.$$

Заметим, что предельный переход в формуле (6) для потенциала приводит к бесконечности. Это случай возникновения трудности с применением формулы (4), о котором говорилось выше. Распределение потенциала находим, используя формулу (5):

$$\varphi = -2\pi\sigma|z| + \mathrm{const}\,.$$

Константу положим равной нулю. Это означает, что мы выбрали равным нулю потенциал самой плоскости. Окончательно

$$\varphi = -2\pi\sigma|z|.$$

Напряженность электрического поля на заряженной плоскости терпит скачок, равный $4\pi\sigma$, как и следует из граничного условия

$$E_{2n}| - E_{1n}| = 4\pi\sigma.$$

в) Поле, создаваемое плоскостью с отверстием, можно рассматривать как суперпозицию двух полей: поля плоскости без отверстия, заряженной с плотностью σ, и поля диска радиуса R, заполняющего отверстие и заряженного с плотностью $-\sigma$. Поэтому

$$E_z = 2\pi\sigma\,\frac{z}{|z|} - 2\pi\sigma\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = 2\pi\sigma\,\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Распределение потенциала на оси отверстия

$$\varphi = \int E_z\,dz + \mathrm{const} = -2\pi\sigma\sqrt{R^2+z^2} + \mathrm{const}\,.$$

Константу можно выбрать равной нулю, это будет означать, что потенциал в центре отверстия $\varphi(0) = -2\pi\sigma R$.