Семинар 4 [19.09.2022]

Линейные уравнения первого порядка. Характеристики. Условие разрешимости задачи Коши. Квазилинейные уравнения. Опрокидывание.

Задачи

Задача 0 (40, 39)

Проверить, что для уравнения Лиувилля

$$\partial_t f + \{\mathcal{H}, f\} = 0,$$

где $\mathcal{H}$ – функция Гамильтона, а $\{\cdot,\cdot\}$ – скобки Пуассона, уравнениями характеристик являются уравнения Гамильтона.

Упражнение: показать, что уравнения характеристик бесстолкновительного кинетического уравнения

$$\partial_t f + \boldsymbol{v}\partial_r f + e\left(\boldsymbol{E} + c^{-1}v \times \boldsymbol{B}\right)\partial_p f = 0$$

совпадает с уравнениями движения заряженной частицы в электрическом и магнитном полях.

Задача 1 (36)

Найти и изобразить на плоскости (x, y) характеристики следующих уравнений:

а)

$$\partial_x u - y^2 \partial_y u = 0;$$

б)

$$x\partial_x u - y\partial_y u = 0;$$

в)

$$\frac{1}{2x}\partial_x u - y\partial_y u = 0.$$

Задача 2 (37)

Решить задачу Коши для уравнения

$$\partial_x u - y\partial_y u = 0, \qquad u(0, y) = \cos y.$$

Задача 3 (38)

Решить задачу Коши для уравнения

$$y\partial_x u - x\partial_y u = 0, \qquad u(1, y) = y^2.$$

Задача 4 (42)

Найти общее решение уравнения

$$x\partial_x u + y\partial_y u + 2\left(x^2 + y^2\right)\partial_z u = 0$$

и решить задачу Коши $u|_{x^2+y^2=1} = 1 - z$.

Задача 5 (56)

Найти общее решение уравнения:

$$\partial_t u + \partial_x u = u.$$

Решения

Задача 0

Пользуясь определением скобок Пуассона, имеем

$$\{\mathcal{H}, f\} = \partial_p \mathcal{H} \partial_r f - \partial_r \mathcal{H} \partial_p f,$$

и тогда получаем

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \partial_p H, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\partial_r H.$$

Задача 1

В случае а) имеем

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} - y^2,$$

откуда получаем

$$\frac{dy}{dx} = -y^2, \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x - x_0},$$

и решение записывается в виде

$$u = f\left(x - \frac{1}{y}\right).$$

В случае б) имеем

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y,$$

откуда получаем

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x},$$

и решение записывается в виде

$$u = f(xy).$$

В случае в) имеем

$$\dot{x} = \frac{1}{2x}, \quad \dot{y} = -y,$$

откуда получаем

$$\frac{dy}{y} + 2x dx = 0, \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x^2},$$

и решение записывается в виде

$$u = f\left(ye^{x^2}\right).$$

Задача 2

Имеем

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -y,$$

откуда получаем

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x},$$

и решение записывается в виде

$$u = f(ye^x).$$

Из задачи Коши имеем

$$u(0, y) = f(y) = \cos y.$$

И в итоге

$$u = \cos(ye^x).$$

Так как начальная гиперповерхность везде пересекает характеристики под ненулевым углом и только один раз, решение существует и единственно во всем пространстве.

Задача 3

Имеем
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x,$$
откуда получаем
$$y\,dy + x\,dx = 0, \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C,$$
и решение записывается в виде
$$u = f\left(x^2 + y^2\right).$$
Из задачи Коши имеем
$$u(1, y) = f\left(1 + y^2\right) = y^2, \quad \Rightarrow \quad f(z) = z - 1.$$
И в итоге
$$u = x^2 + y^2 - 1.$$
Заметим, однако, что начальная гиперповерхность $x = 1$ не является трансверсальной для всех характеристик, характеристики, лежащие вне единичного круга $x^2 + y^2 > 1$, пересекает в двух местах, а с характеристиками, находящимися внутри единичного круга $x^2 + y^2 < 1$, начальная гиперповерхность вовсе не имеет общих точек. Это, во-первых, приводит к тому, что внутри круга $x^2 + y^2 < 1$ решением задачи является произвольная дифференцируемая функция $g(\xi)$ переменной $\xi = x^2 + y^2$, равная нулю на окружности единичного радиуса $\xi = 1$. Во-вторых, вообще говоря, даже снаружи от единичного круга решение может оказаться неоднозначным. Тем не менее, нам «повезло», что задача Коши обладает симметрией относительно оси x. Можно убедиться, что для задачи Коши $u(1, y) = y$ однозначность пропадает, и снаружи от единичного круга $x^2 + y^2 > 1$ возникают две непрерывные ветви:
$$u = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$
Отрицательная ветвь есть аналитическое продолжение решения, удовлетворяющего задаче Коши на нижней части начальной гиперповерхности: $x = 1$, $y < 0$, но не удовлетворяющее на верхней: $x = 1$, $y > 0$, а положительная – наоборот.

Таким образом, решение, удовлетворяющее одновременно уравнению
$$y\partial_x u - x\partial_y u = 0,$$
и задаче Коши
$$u(1, y) = y^2,$$
в самом общем случае может быть записано в виде
$$u = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1, & x^2 + y^2 > 1, \\ g\left(x^2 + y^2\right), & x^2 + y^2 \le 1, \end{cases}$$
где $g = g(\xi)$ – произвольная непрерывная функция, такая что $g(1) = 0$.

Задача 4

Решение «в лоб» дает
$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y, \quad \dot{z} = 2\left(x^2 + y^2\right),$$
и далее
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{y}{x},$$

а также

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{x} = 2\left(1+I_1^2\right)x, \quad \Rightarrow \quad z = \left(1+I_1^2\right)x^2 + I_2, \quad \Rightarrow \quad I_2 = z - x^2 + y^2.$$

Решение записывается в виде

$$u = f\left(\frac{y}{x}, x^2+y^2-z\right).$$

Из задачи Коши имеем

$$u|_{x^2+y^2=1} = f\left(\frac{y}{x}, 1-z\right) = 1-z, \quad \Rightarrow \quad f(a,b) = b,$$

тогда

$$u = x^2+y^2-z.$$

Решение однозначно задано во всем пространстве кроме прямой $x^2+y^2=0$, где уравнение вырождено. Тем не менее, благодаря симметрии задачи Коши относительно поворотов вокруг оси z, на этой прямой решение может быть непрерывно доопределено пределом по любому направлению $u(0,0,z) \equiv u|_{x\to 0, y\to 0} = -z$.

Если в задаче Коши имеется зависимость от азимутального угла, например

$$u|_{x^2+y^2=1} = 1-z+y,$$

то непрерывное решение по-прежнему существует и однозначно всюду кроме прямой $x^2+y^2=0$:

$$u = 1-z+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Однако на самой прямой $x^2+y^2=0$ непрерывность нарушается. Действительно:

$$u|_{x=0, y\to +0} = 2-z, \quad u|_{x=0, y\to -0} = -z,$$
$$\Rightarrow$$
$$u|_{x=0, y\to +0} \neq u|_{x=0, y\to -0}.$$

Если немного подумать, то можно заметить, что удобно перейти в цилиндрические координаты (r, φ, z):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Заметим, что

$$r\partial_r = r(\partial_r x)\partial_x + r(\partial_r y)\partial_y = x\partial_x + y\partial_x.$$

Тогда уравнение упрощается

$$r\partial_r + 2r^2\partial_z u = 0.$$

Отсюда получаем

$$\dot{r} = r, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad , \dot{z} = 2r^2,$$

следовательно

$$\varphi = I_1, \quad , r^2 - z = I_2.$$

Общее решение запишется в виде

$$u = g\left(\varphi, r^2 - z\right).$$

Задача 5

Имеем

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = x, \quad \dot{u} = u,$$

откуда находим

$$x - t = I_1, \quad I_2 = ue^{-t}.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$f\left(x - t, ue^{-t}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad u = g\left(x - t\right) e^{t}.$$