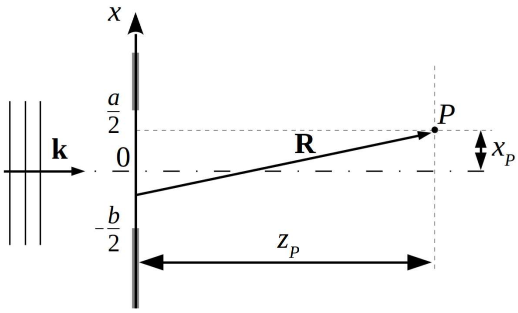
Зона дифракции Френеля

Выберем систему координат так, чтобы щель лежала в плоскости $z = 0$ и имела размеры $-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{b}{2}$, $-\infty < y < \infty$. Экран находится в плоскости $z = z_p$.



Поле в точке $P(x_p, z_p)$ экрана выражается интегралом Кирхгофа:

$$E_P = \frac{1}{i\lambda}\int\limits_S E_0\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\cos\psi dS$$

R в знаменателе подынтегрального выражения можно считать примерно равным z_p и вынести из-под интеграла. R в аргументе экспоненты запишем с учетом малого параметра как

$$R = \sqrt{z_p^2 + (x-x_p)^2 + y^2} = z_p\sqrt{1 + \frac{(x-x_p)^2}{z_p^2} + \frac{y^2}{z_p^2}} \approx z_p\left(1 + \frac{(x-x_p)^2}{2z_p^2} + \frac{y^2}{2z_p^2}\right) = z_p + \frac{(x-x_p)^2}{2z_p} + \frac{y^2}{2z_p}$$

Мы пренебрегли третьим членом при разложении квадратного корня. Выясним, когда это можно делать.

$$(1+\delta)^{1/2} = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8} + \ldots,$$

где $\delta = \frac{(x-x_p)^2}{z_p^2}$.

Третьим слагаемым можно пренебречь, если

$$kz_p \cdot \frac{(x-x_p)^4}{8z_p^4} \ll \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{(x-x_p)^4}{8z_p^3} \ll \frac{\pi}{4}$$

$$|x - x_p| < a \to \quad \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{a^4}{8z_p^3} \ll \frac{1}{4}$$

$$z_p^3 \gg \frac{a^4}{\lambda}$$

$$z_p \gg a\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/3}$$

Полученное неравенство задает интервал значений z_p, в котором можно ограничиться двумя членами разложения R по малому параметру $\frac{x}{z_p}$ *. Этот интервал называется зоной дифракции Френеля.

Более тщательный анализ показывает, что зона дифракции Френеля задается нестрогим неравенством

$$z_p \gtrsim a\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/3}$$

В зоне дифракции Френеля интеграл Кирхгофа принимает вид

$$E_P = \frac{1}{i\lambda}\int\limits_S E_0\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\cos\psi dS = \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ikz_p}}{i\lambda z_p}\int\limits_S \mathrm{e}^{i\frac{k(x-x_p)^2}{2z_p}}\,\mathrm{e}^{i\frac{ky^2}{2z_p}}\,dxdy = \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ikz_p}}{i\lambda z_p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\frac{ky^2}{2z_p}}\,dy\int\limits_{-b/2}^{a/2}\mathrm{e}^{i\frac{k(x-x_p)^2}{2z_p}}\,dx$$

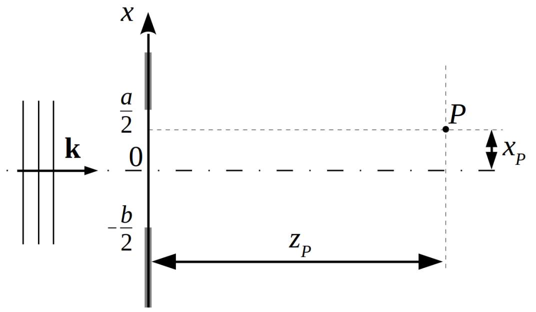
* Фактически малым параметром является $\frac{|x-x_p|}{z_p}$. Поэтому ограничение накладывается не только на x, но и на x_p. Следовательно, дальнейшие рассуждения справедливы для малых углов дифракции. При больших углах количественные соотношения становятся нестрогими, но дающими правильную асимптотику на качественном уровне.

Вычислим отдельно интеграл по y:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\frac{ky^2}{2z_p}}\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\frac{ky^2}{2z_p}} \sqrt{\frac{\lambda z_p}{\pi}} d\left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z_p}} y\right) = \sqrt{\frac{\lambda z_p}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\eta^2}\,d\eta = \sqrt{\frac{\lambda z_p}{\pi}} \sqrt{i\pi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\eta^2}\,d\eta = \sqrt{i\lambda z_p}$$

Искомое поле свелось к интегралу по x:

$$E_P = \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ikz_p}}{\sqrt{i\lambda z_p}} \int\limits_{-b/2}^{a/2} \mathrm{e}^{i\frac{k(x-x_p)^2}{2z_p}}\,dx =$$



$$= \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ikz_p}}{\sqrt{i\lambda z_p}} \left(\int\limits_{-b/2}^{x_p} \mathrm{e}^{i\frac{k(x-x_p)^2}{2z_p}}\,dx + \int\limits_{x_p}^{a/2} \mathrm{e}^{i\frac{k(x-x_p)^2}{2z_p}}\,dx \right) =$$

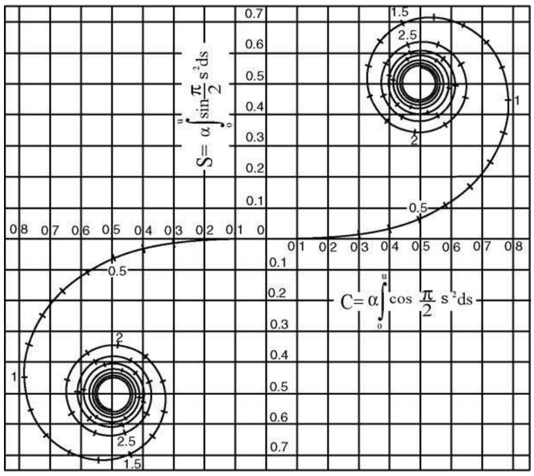
$$= \sqrt{\frac{\lambda z_p}{2}} \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ikz_p}}{\sqrt{i\lambda z_p}} \left(\int\limits_{v_1}^{0} \mathrm{e}^{i\frac{\pi v^2}{2}}\,dv + \int\limits_{0}^{v_2} \mathrm{e}^{i\frac{\pi v^2}{2}}\,dv \right) = \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ikz_p}}{\sqrt{2i}} \left(\int\limits_{0}^{-v_1} \mathrm{e}^{i\frac{\pi v^2}{2}}\,dv - \int\limits_{0}^{-v_2} \mathrm{e}^{i\frac{\pi v^2}{2}}\,dv \right) =$$

$$= \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ikz_p}}{\sqrt{2i}} \left(J\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p + \tfrac{b}{2})\right) - J\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p - \tfrac{a}{2})\right) \right),$$

где $v = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x - x_p)$, $dx = \sqrt{\frac{\lambda z_p}{2}} dv$, $v_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(-x_p - \frac{b}{2})$, $v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(\frac{a}{2} - x_p)$.

Для $\frac{x_p^2}{\lambda z_p} > 12.5$ аргумент $u > 5$ и интеграл Френеля хорошо аппроксимируется формулой:

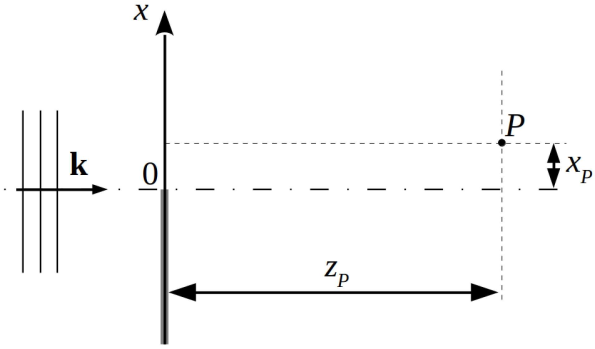
$$\widehat{J}(u) = 0.5 + \frac{0.318}{u} \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) + i\cdot\left(0.5 - \frac{0.318}{u}\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\right)$$

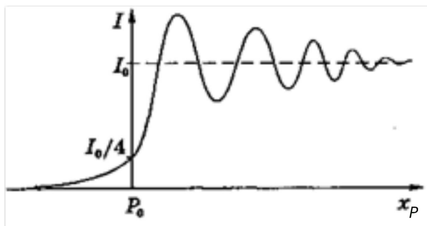


Случай полубесконечного экрана.

$$b = 0,\ a \to \infty:\ E_P = \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ikz_p}}{\sqrt{2i}} \left(J\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}} x_p\right) - J(-\infty) \right)$$

Интенсивность при $x_p > 0$ осциллирующая, при $x_p < 0$ – монотонно затухающая функция x_p:





Случай щели.

$$a = b:\ E_P = \frac{E_0\,\mathrm{e}^{ikz_p}}{\sqrt{2i}} \left[J\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p + a/2)\right) - J\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}(x_p - a/2)\right) \right]$$

Длина нитки, соединяющей концы J_- и J_+, равна $\sqrt{\frac{2}{\lambda z_p}}a$. При $x_p = 0$ середина нити находится в начале координат, нить максимально растянута. Интенсивность максимальная. При увеличении x_p нить скользит вправо и наматывается на витки спирали. При $x_p = \frac{\lambda z_p}{a}$ концы нити оказываются рядом на соседних витках. Это первая темная полоса. При $x_p \to \infty$ (угол дифракции стремится к $\pi/2$) нить наматывается на внутренние витки, оба конца близки к фокусу спирали, интенсивность полос стремится к нулю.