ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ 1

3-й курс, 5-й семестр.

Задача 1.

Частица движется в поле $U(x) = \alpha x^4$. Оценить энергию основного состояния.

Задача 2.

Частица движется в поле $U(x) = -G\delta(x+a) - G\delta(x-a)$. Считая $mGa/\hbar^2 \gg 1$, найти приближённые значения энергий связанных стационарных состояний и нарисовать качественно соответствующие волновые функции.

Задача 3.

Частица движется в поле $U(x) = G\delta(x + a) - 2G\delta(x)$. Получить уравнение для определения энергии связанного состояния и показать качественно (графически) существование решения.

Задача 4.

Найти условие, при котором в потенциале $U(x) = -G\delta(x) - 2G\delta(x - a)$ появляется второе связанное стационарное состояние.

Задача 5.

Найти условие, при котором в потенциале $U(x) = \infty$ при $x < 0$, $U(x) = -G\delta(x - a)$ при $x > 0$ существует связанное стационарное состояние.

Задача 6.

6. Чему равняется произведение неопределённостей $\Delta x \Delta p$ для связанного стационарного состояния частицы, движущейся в потенциале $U(x) = -G\delta(x)$?

Задача 7.

Оценить на каком по счёту квантовом уровне находится абсолютно упругий шарик с массой 1 *г*, подпрыгивающий на высоту 10 *см* над идеально отражающей плоскостью в однородном поле тяжести g?

Задача 8.

Для $n-$го состояния линейного осциллятора вычислить, используя операторный метод, среднее значение $< n|x\hat{p}|n >$.

Задача 9.

Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии линейного осциллятора, находящегося в однородном электрическом поле. “Электрическая” часть потенциальной энергии осциллятора равна $-|e|\mathcal{E}x$.

Задача 10.

Показать, что среднее значение производной по времени физической величины, не зависящей от времени явно, в стационарном состоянии дискретного спектра равно нулю, в частности, что $< n|\vec{p}|n >= 0$.

Задача 11.

Чему равны средние значения координаты и импульса частицы, находящейся в основном состоянии в поле $U(x) = \infty$ при $x < 0$, $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ при $x > 0$.

Задача 12.

Для частицы в однородном поле $U(x) = -F_0 x$ найти гейзенберговские операторы координаты и импульса.

Задача 13.

Используя правило квантования Бора-Зоммерфельда, найти квазиклассический спектр энергии в поле $U(x) = m\omega^2 x^2/2 - F_0 x$.

Задача 14.

Вычислить в квазиклассическом приближении коэффициент прохождения электрона через потенциальный барьер: $U(x) = 0$ при $x < 0$, $U(x) = U_0 - |e|\mathcal{E}x$ при $x > 0$ (“холодная эмиссия”). Указать условие применимости расчёта.

Задача 15.

Найти число уровней энергии в потенциальной яме $U(x) = -U_0(1 - |x|/a)$ при $|x| < a$, $U(x) = 0$ при $|x| > a$, для которой $\sqrt{U_0 m a^2/\hbar^2} \gg 1$.

Задача 16.

Найти положение, ширину и время жизни низшего квазистационарного уровня в поле $U(x) = \infty$ при $x < 0$, $U(x) = G\delta(x - a)$ при $x > 0$, считая барьер малопроницаемым, т.е. $mGa/\hbar^2 \gg 1$.

Задача 17.

Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии плоского ротатора с моментом инерции $I = \mu R_0^2$. Гамильтониан такой системы имеет вид $\hat{H} = -(\hbar^2/2I)\,\partial^2/\partial\varphi^2$.

Задача 18.

Плоский ротатора (система с гамильтонианом $\hat{H} = -(\hbar^2/2I)\,\partial^2/\partial\varphi^2$) в момент времени $t=0$ находится в состоянии с волновой функцией $\psi(\varphi, t=0) = A\,e^{i\varphi}\cos^2\varphi$. Найти среднее значение момента ротатора l_z и $\psi(\varphi, t>0)$.

Задача 19.

Найти возможные значения момента l_z, их вероятности и среднее значение l_z в состоянии системы, описываемом волновой функцией $\psi(\varphi) = A\,e^{i\varphi}\cos^2\varphi$.

Задача 20.

Доказать, что $\overline{\hat{l}_x^2}\;\overline{\hat{l}_y^2} \geq (\;\overline{\hat{l}_z}\;)^2/4$, где средние значения операторов взяты по состояниям с определённым орбитальным моментом l и его проекцией m на ось z. Для каких m выполняется равенство?

Задача 21.

Найти $\widetilde{Y}_{1m}(\theta,\varphi)$ — собственные функции оператора $\hat{l}_x$ через функции $Y_{1m}(\theta,\varphi)$ собственные для оператора $\hat{l}_z$.

Задача 22.

Указать, при каких m и m' могут быть отличны от нуля матричные элементы дипольного момента $< m'|\vec{r}\,|m >$.

Задача 23.

Вычислить средние значения $< \psi|\hat{\vec{l}}|\psi >$ для $\psi = Y_{l\,0}$ и $\psi = (Y_{11} + Y_{1-1})/\sqrt{2}$.

Задача 24.

Какие значения проекции момента l_z и квадрата момента $\vec{l}^{\,2}$ реализуются в состоянии $\psi_{100}(x,y,z)$ пространственного изотропного осциллятора (т.е. частицы в поле $U = m\omega^2\vec{r}^{\,2}/2$).

Задача 25.

Найти кратность вырождения уровней энергии пространственного изотропного $(\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega)$ осциллятора.

Задача 26.

Найти условие существования дискретного уровня энергии в центрально-симметричной потенциальной яме: $U(r) = -U_0$ при $r < a$, $U(r) = 0$ при $r > a$.

Задача 27.

Получить уравнение для определения уровней энергии частицы, движущейся с моментом $l = 0$ в центрально-симметричной потенциальной яме: $U(r) = -U_0$ при $r < a$, $U(r) = 0$ при $r > a$. Когда в ней появляется n-й уровень?

Задача 28.

Прямым вариационным методом найти энергию основного состояния атома водорода, используя пробную функцию $A\,e^{-r/b}$.

Задача 29.

Показать, что в основном состоянии атома водорода наиболее вероятное значение r равно $a = \hbar^2/me^2$, а среднее значение $\overline{(1/r)} = 1/a$.

Задача 30.

Сравнить энергии основных состояний и размеры (наиболее вероятные значения r) для водородоподобных атомов He^+, Li^{++}, e^+e^- (позитроний) с соответствующими величинами для атома водорода.

Задача 31.

Найти вероятность того, что при β-распаде трития $^3\mathrm{H}$ электрон, находившийся в основном состоянии, попадёт на первый возбуждённый уровень энергии иона $^3\mathrm{He}^+$ в состояние с волновой функцией $\psi_{200} = (1 - r/(2a))e^{-r/(2a)}/\sqrt{8\pi a^3}$. Как связан здесь параметр a с боровским радиусом?

Задача 32.

Найти распределение вероятностей различных значений импульса электрона в основном состоянии атома водорода.

Задача 33.

Найти собственные функции и собственные значения гамильтониана $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2}(\hat{l}_z + \frac{1}{2})^2$, где $\hat{l}_z = -i\partial/\partial\varphi$, а μ и R_0 — параметры. Какова кратность вырождения уровней?