Теория игр в топологии

Содержание

Рассматриваются игры, которые используются в топологии. Такие игры называются *топологическими играми*. Практически всегда топологическая игра — это антагонистическая последовательная игра с двумя игроками с бесконечным количеством ходов.

Главный вопрос в топологических играх:

Problem 1.1.

У кого из игроков есть выигрышная стратегия.

Общее понятие игры

(P) Играет несколько *игроков*, $P = \{\alpha, \beta, \dots\}$ — *множество игроков*. Как правило играют два игрока — $P = \{\alpha, \beta\}$.

(S) У каждого игрока есть набор *множеств стратегий* — $S_\alpha, S_\beta, \dots$, $\mathcal{S} = \{S_\alpha, S_\beta, \dots\} = \{S_\delta : \delta \in P\}$.

(p) Игроки в игре реализуют свои стратегии, в результате получается *партия*; задана функция

$$p : \prod_{\delta \in P} S_\delta = S_\alpha \times S_\beta \times \dots \to R$$

R — *множество партий*

(b) По партии $r \in R$ определяется выигрыш каждого игрока с помощью *функции выигрыша*: выигрыш для игрока $\delta \in P$ равен $b_\delta(r)$, где $b_\delta : R \to R_\delta$, R_δ — возможные выигрыши для игрока δ; $=\{b_\alpha, b_\beta, \dots\} = \{b_\delta : \delta \in P\}$.

Игра определяется набором $(P, \mathcal{S}, p, R,)$. Набор $(P, \mathcal{S}, p, R)$ назовем *процедурой игры*.

Выигрышные стратегии

В топологических играх рассматривается ситуация, когда для игрока $\gamma \in P$ выясняется только выиграл он или проиграл, то есть $o_\gamma : R \to \mathbb{B}$ есть булева функция, где $\mathbb{B} = \{\text{true}, \text{false}\} = \{0, 1\}$. Топологические игры с *нулевой суммой* (*антогонистические*). Если выигрывает один игрок, остальные проигрывают.

Definition 1.2.

Стратегия $s \in S_\delta$ называется выигрышной для игрока $\delta \in P$, если для любого *профайла стратегий*

$$\vec{s} = (s_\alpha, s_\beta, \ldots) = (s_\delta)_{\delta \in P} \in S_\alpha \times S_\beta \times \ldots = \prod_{\delta \in P} S_d e$$

такого что $s_\delta = s$, игрок δ выигрывает, то есть

$$b_\delta(r) = \text{true} = 1,$$

где $r = p(\vec{s})$.

Definition 1.3.

Игра называется

(1) *благоприятной* для игрока δ, если у игрока δ есть выигрышная стратегия.

(2) *неблагоприятной* для игрока δ, если у игрока δ нет выигрышной стратегии.

(3) *слабо благоприятной* для игрока δ, если для любого набора стратегий

$$(s_\gamma)_{\gamma \in P \setminus \{\delta\}} \in \prod_{\gamma \in P \setminus \{\delta\}} S_\gamma$$

существует стратегия $s_\delta \in S_\delta$, так что для профайла стратегий $\vec{s} = (s_\gamma)_{\gamma \in P}$ выполняется $b_\delta(p(\vec{s})) = 1$.

Если $P = \{\alpha, \beta\}$, то

1. Если игра благоприятна для α, то она не благоприятна для β.
2. Игра слабо благоприятна для α если и только если она неблагоприятна для β.
3. Если игра благоприятна для α, то она слабо благоприятна для α.

Аналогичные определения даются для *каолиции* $K \subset P$.

Игра Банаха-Мазура $BM(X, M)$

Пусть $M \subset X = \mathbb{I} = [0,1]$.
Играют два игрока α и β на X. Игроки по очереди выбирают отрытые непустые отрезки

$$\underset{\alpha}{U_1} \supset \underset{\beta}{V_1} \supset \underset{\alpha}{U_2} \supset \underset{\beta}{V_2} \ldots \supset \underset{\alpha}{U_n} \supset \underset{\beta}{V_n} \ldots$$

Игрок α выигрывает, если

(b_{NEI}): $M \cap \bigcap_n U_n = M \cap \bigcap_n V_n \neq \varnothing$.

Это игра Банаха-Мазура $BM(X, M)$.

Категории подмножеств

Пусть X пространство (например, $X = \mathbb{I}$), $M \subset X$.

1. $\overline{M}$ — замыкание M;
2. $\operatorname{Int} M = X \setminus \overline{X \setminus M}$ — внутренность M.

Подмнножество $M \subset X$ называется:

1. *всюду плотным*, если $\overline{M} = X$;
2. *нигде не плотным*, если $X \setminus \overline{M}$ всюду плотно;
3. *первой категории* (или *тощим*), если существует счетное семейство нигде не плотных множеств M_n, $n \in \mathbb{N}$, так что $M = \bigcup_n M_n$;
4. *второй категории* (или *тучным*), если M не тощее.
5. *остаточным*, если $X \setminus M$ тощее.

Игра $BM(\mathbb{I}, \mathbb{I})$ α-благоприятна, то есть у α есть выигрышная стратегия. Опишем эту стратегию.
Игрок α на n-ом ходу выбирает отрезок U_n таким образом, что $\overline{U_n} \subset V_n$. По лемме о вложенных отрезках,

$$\bigcap_n U_n = \bigcap_n \overline{U_n} \neq \varnothing.$$

Theorem 2.1.

Если M тощее, то $BM(M,X)$ β-благоприятна.

Доказательство.

Пусть $M = \bigcup_n M_n$, где M_n нигде не плотное. Определим стратегию для β. На n-ом шаге возмем открытое непустое $V_n \subset U_n \setminus M_n$. Тогда

$$\bigcap V_n \subset X \setminus \bigcup_n M_n = X \setminus M.$$

Следовательно

$$M \cap \bigcap V_n = \varnothing.$$

$\square$

Тучные M

Из теоремы 2.1 вытекает

Theorem 2.2.

Если M $BM(M, X)$ β-неблагоприятна, то M тучнае.

Из того что $BM(\mathbb{I}, \mathbb{I})$ α-благоприятна и теоремы 2.1 вытекает, что $\mathbb{I}$ тучное.