

Задание 4 (сдать до 30 декабря)

Вариант 1

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $3x_1^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)*Вариант 2*

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3;$

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3.$

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3;$

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 - x_3x_4.$

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 3

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 4

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 5

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 6

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $-4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 18x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-2x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 7

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 8

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)

Вариант 9

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 + x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 10

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)

Вариант 11

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3$;

(b) $2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 12

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $-4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 18x_2x_3$;

(b) $2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 13

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_3$;

(b) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 - x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-2x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 14

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;

(b) $2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)
Вариант 15

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

3. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм:

(a) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

4. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм:

(a) $3x_1^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

5. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$ отрицательно определена?

6. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.

7. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

8*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

9*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

10*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.