

VI

*Общий случай
нагружения
стержня.*

Потенциальная энергия стержня в общем случае нагружения

Двумя бесконечно близкими поперечными сечениями выделим из упругого стержня элементарный участок длиной dz :

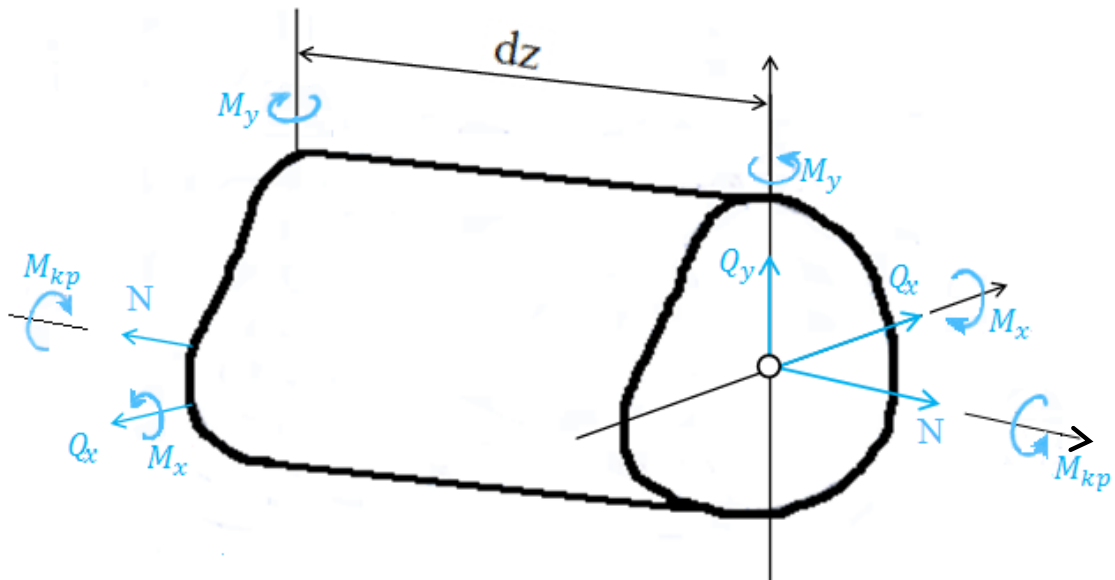


Рис. VI.1.

Со стороны отброшенных частей стержня на торцы участка действуют, в общем случае, шесть внутренних силовых факторов: M_x , M_y , $M_z \triangleq M_{кр}$, Q_x , Q_y и $Q_z \triangleq N$.

При нагружении стержня каждый из этих внутренних силовых факторов совершает работу на перемещениях поперечных сечений (торцев участка):

$$dU = \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} \cdot dz + \frac{M_{кр}^2}{2 \cdot G \cdot I_{кр}} \cdot dz + \frac{M_x^2}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot dz + \frac{M_y^2}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot dz + K_x \cdot \frac{Q_x^2}{2 \cdot G \cdot A} \cdot dz + \\ + K_y \cdot \frac{Q_y^2}{2 \cdot G \cdot A} \cdot dz$$

(VI.1)

где

K_x , K_y – **коэффициенты формы** поперечного сечения

$$\bigcirc K_x = K_y = 10/9 \quad ; \quad \odot K_x = K_y = 2 \quad ; \quad \square K_x = K_y = 6/5.$$

Потенциальная энергия деформации всего стержня получается интегрированием участков dz по всей его длине:

$$U = \int \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} \cdot dz + \int \frac{M_{kp}^2}{2 \cdot G \cdot I_k} \cdot dz + \int \frac{M_x^2}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot dz + \int \frac{M_y^2}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot dz + \\ + \int K_x \cdot \frac{Q_x^2}{2 \cdot G \cdot A} \cdot dz + \int K_y \cdot \frac{Q_y^2}{2 \cdot G \cdot A} \cdot dz \quad (VI.2)$$

Последние два слагаемых дают небольшой вклад в общую сумму и ними, как правило, пренебрегают.

На понятиях «*потенциальная энергия деформации*» и равной ей для упругого тела «*работа внешних сил*» основаны доказательства так называемых **энергетических теорем**:

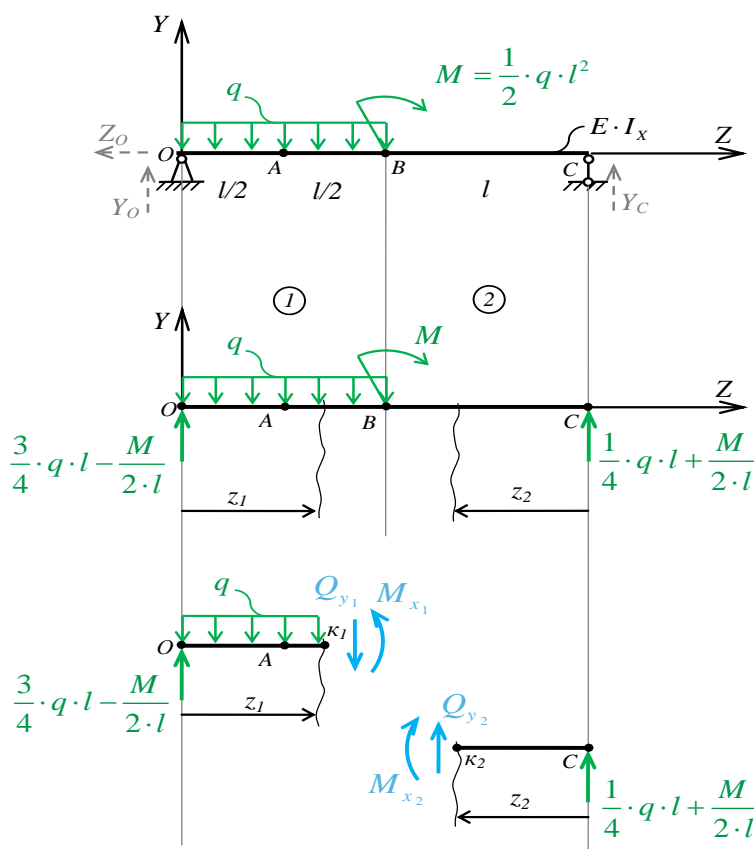
1. Теорема Кастилиано;
2. Теорема Лагранжа;
3. Теорема Бетти (теорема о взаимности работ).

Теорема Кастилиано

Частная производная от потенциальной энергии системы по обобщённой силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы (без доказательства):

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (\text{VI.3})$$

Пример VI.1 :



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow Y_c = \frac{1}{4} \cdot q \cdot l + \frac{M}{2 \cdot l}$$

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow Y_o = \frac{3}{4} \cdot q \cdot l - \frac{M}{2 \cdot l}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Z_o = 0$$

$$\sum M_{K_1} = 0$$

$$M_{x_1} = \left(\frac{3}{4} \cdot q \cdot l - \frac{M}{2 \cdot l} \right) \cdot z_1 - \frac{q \cdot z_1^2}{2}$$

$$\sum M_{K_2} = 0$$

$$M_{x_2} = (\frac{1}{4} \cdot q \cdot l - \frac{M}{2 \cdot l}) \cdot z_2$$

$$U = \int_0^l \frac{M_{x_1}^2 \cdot dz_1}{2 \cdot E \cdot I_x} + \int_0^l \frac{M_{x_2}^2 \cdot dz_2}{2 \cdot E \cdot I_x} = \frac{l}{12 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left[\frac{17}{40} \cdot q^2 \cdot l^4 - \frac{1}{4} \cdot q \cdot M \cdot l^2 + M^2 \right]$$

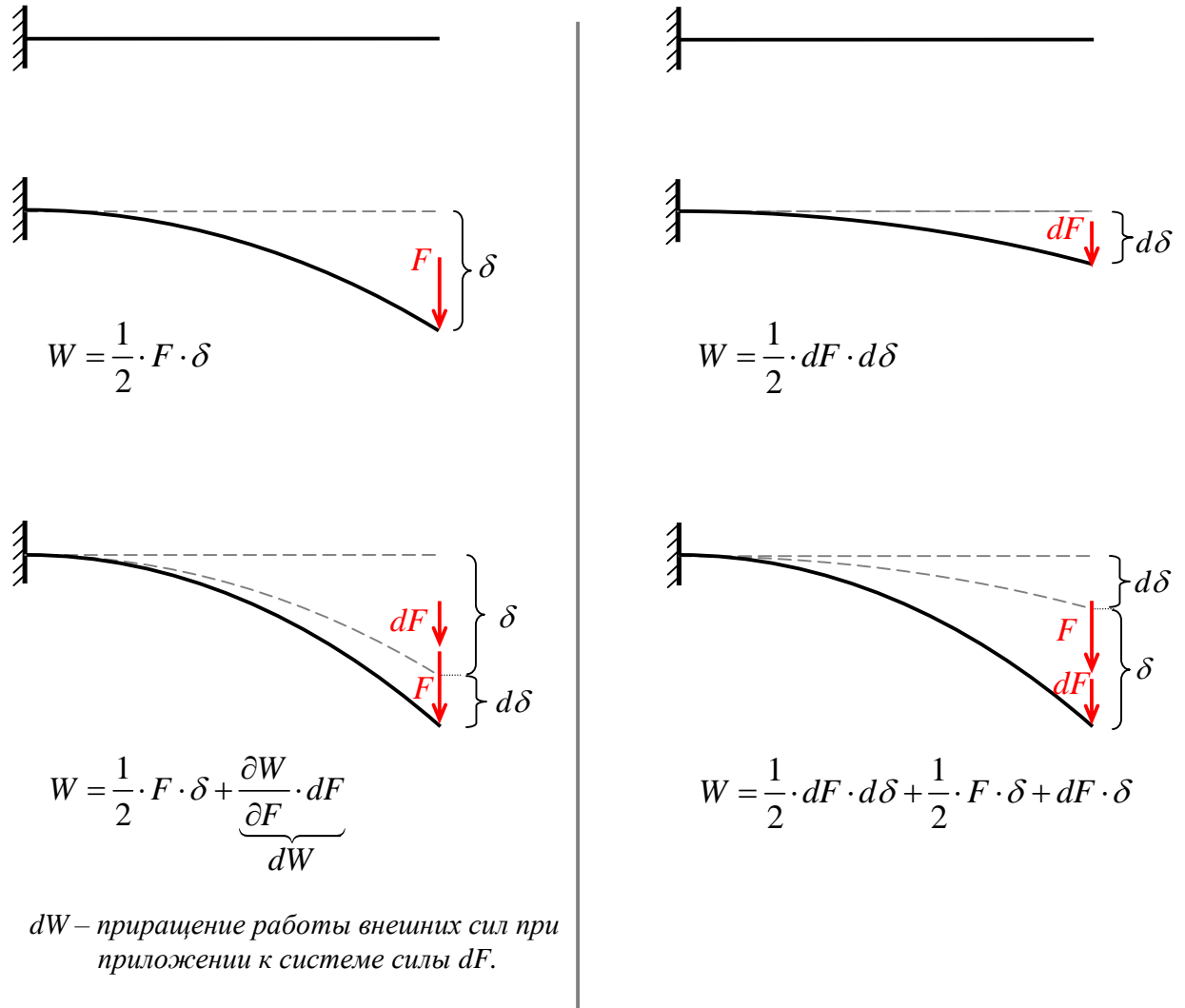
$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{l}{12 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left[-\frac{1}{4} \cdot q \cdot l^2 + 2 \cdot M \right] > 0 \Rightarrow \text{поворот по направлению } M$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l^2 : \quad \theta_B = \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I_x} \text{ - сравнить с примером } \boxed{V.5}$$

Доказательство теоремы Кастилиано:

Определим работу, которую совершают сила F и её бесконечно малое приращение dF при прямом и обратном порядке приложения к упругому телу

Рис. VI.2



$W = W$ — система линейна, результат от порядка приложения сил не зависит.

$$\cancel{\frac{1}{2} \cdot F \cdot \delta} + \frac{\partial W}{\partial F} \cdot \cancel{dF} = \cancel{\frac{1}{2} \cdot dF \cdot d\delta} + \cancel{\frac{1}{2} \cdot F \cdot \delta} + \cancel{dF \cdot \delta}$$

≈ 0

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \delta \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial F} = \delta$$

В упругой системе $U=W$

Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа обратна теореме Кастилиано.

Без доказательства: частная производная от потенциальной энергии системы по обобщённому перемещению равна обобщённой силе, действующей в направлении этого перемещения:

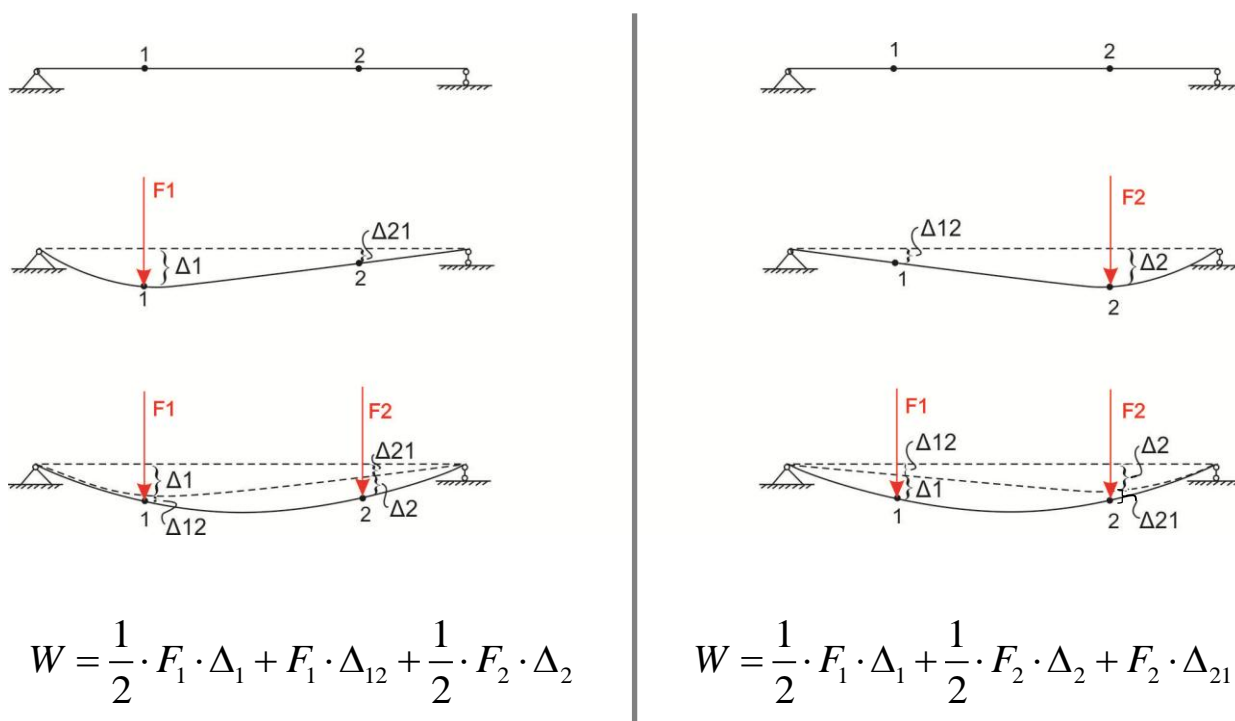
$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad (VI.4)$$

Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)

Обязательным условием доказательства является соблюдение принципа независимости действия сил, поэтому применима теорема только к линейным системам.

Рассмотрим упругое тело, к которому в точке 1 приложена сила F_1 , а в точке 2 – сила F_2 . Определим работу, которую совершают силы F_1 и F_2 при прямом и обратном порядке приложения:

Рис. VI.3



$$F_1 \cdot \Delta_{12} = F_2 \cdot \Delta_{21}$$

(VI.5)

Формулировка теоремы:

Работа первой силы на перемещение точки её приложения под действием второй силы равна работе второй силы на перемещении точке её приложения под действием первой силы.

Здесь речь идет об обобщённых силах (силах и моментах) и обобщённых перемещениях (линейных перемещениях и углах поворота), на которых эти силы совершают работу.

Следствия из теоремы о взаимности работ:

1) Если, $F_1=F_2$ то $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ (VI.6)

Теорема о взаимности перемещений:

Перемещение точки 1 под действием силы, приложенной в точке 2, равно перемещению точки 2 под действием такой же силы, приложенной в точке 1 (рис. VI.3).

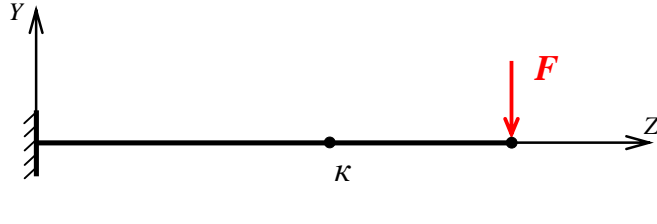
2) Если $F_1=F_2=1$, то перемещения Δ_{ij} становятся **податливостями** δ_{ij} :

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (VI.7)$$

Это свойство линейных систем используют при решении статически неопределимых задач.

Интеграл Мора

Основной вклад в потенциальную энергию (VI.2) плоской стержневой конструкции вносит внутренний изгибающий момент M_x :



$$U = \int \frac{M_x^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot I_x}$$

По теореме Кастилиано найдём перемещение точки “К” конструкции.

Для этого в интересующем нас направлении приложим в точки “К” фиктивную силу Φ , равную нулю и возьмём производную по ней от потенциальной энергии:



$$M_x = M_x^F + M_x^\Phi - \text{принцип независимости действия сил;}$$

где

M_x^F – внутренний изгибающий момент в системе от внешней нагрузки;

$M_x^\Phi = M_x^1 \times \Phi$ — от фиктивной силы Φ ;

M_x^1 — от единичной силы в точке «К» по направлению Φ .

$$U = \int \frac{M_x^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot I_x} = \int \frac{(M_x^F + M_x^1 \cdot \Phi)^2}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot dz = \int \frac{(M_x^F)^2 + 2 \cdot M_x^F \cdot M_x^1 \cdot \Phi + (M_x^1 \cdot \Phi)^2}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot dz$$

$$\delta_K = \frac{\partial U}{\partial \Phi} = \int \frac{2 \cdot M_x^F \cdot M_x^1 + 2 \cdot (M_x^1)^2 \cdot \Phi}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot dz$$

$$\Phi = 0 : \quad \boxed{\delta_K = \int \frac{M_x^F \cdot M_x^1}{E \cdot I_x} \cdot dz} \quad \text{Интеграл Мора для плоской стержневой системы.} \quad (VI.8)$$

При этом δ - обобщённое перемещение. То есть:

— если в точке « K » приложена единичная сила, то δ_K - линейное перемещение точки в направлении этой силы;

— если в точке « K » приложен единичный момент, то δ_K - угол поворота точки по направлению действия этого момента.

В общем случае:

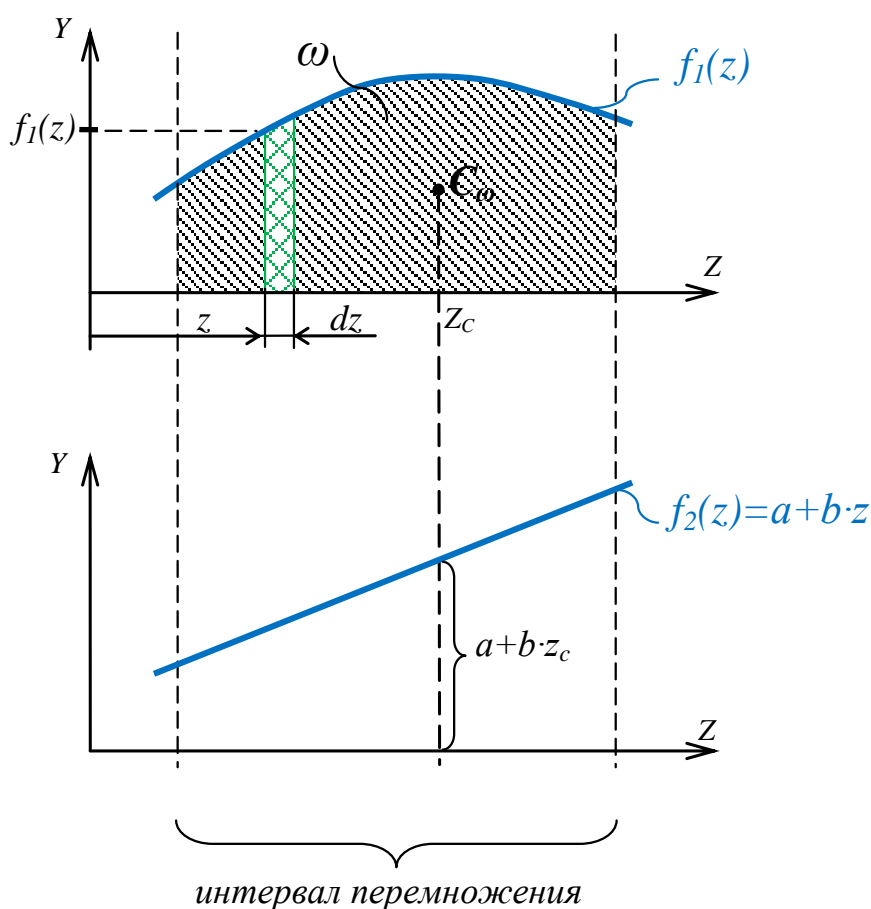
$$\delta = \int \frac{N^F \cdot N^1}{E \cdot A} \cdot dz + \int \frac{M_{kp}^F \cdot M_{kp}^1}{G \cdot I_{\kappa}} \cdot dz + \int \frac{M_x^F \cdot M_x^1}{E \cdot I_x} \cdot dz + \\ + \int \frac{M_y^F \cdot M_y^1}{E \cdot I_y} \cdot dz + \int K_x \cdot \frac{Q_x^F \cdot Q_x^1}{G \cdot A} \cdot dz + \int K_y \cdot \frac{Q_y^F \cdot Q_y^1}{G \cdot A} \cdot dz$$

(VI.9)

Способ Верещагина

Графоаналитический способ вычисления определённого интеграла от произведения двух функций, одна из которых линейна.

Строго говоря, способ Верещагина относится к математическому анализу и к механике прямого отношения не имеет, но изобретён и применяется для подсчёта интеграла Мора. Применим к расчёту плоских и пространственных конструкций, состоящих из прямых стержней, ибо вторая функция обязательно должна быть линейна.



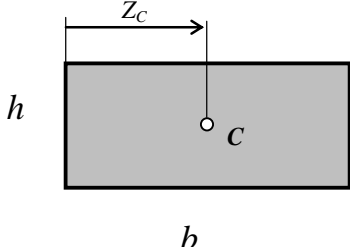
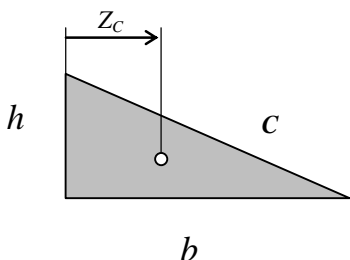
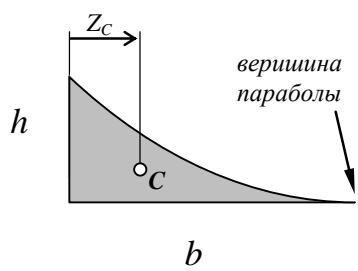
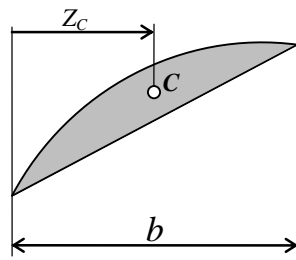
ω – площадь
заштрихованной
фигуры;
 C_ω – её центр тяжести.

$$\int f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot dz = \int f_1(z) \cdot (a + b \cdot z) \cdot dz =$$

$$= a \cdot \underbrace{\int f_1(z) \cdot dz}_{\omega} + b \cdot \underbrace{\int z \cdot f_1(z) \cdot dz}_{\substack{\text{площадь} \\ \text{зелёной} \\ \text{полоски}}} = a \cdot \omega + b \cdot \omega \cdot z_c = \omega \cdot \underbrace{(a + b \cdot z_c)}_{\substack{\text{значение линейной} \\ \text{функции под центром} \\ \text{тяжести нелинейной} \\ \text{фигуры}}}$$

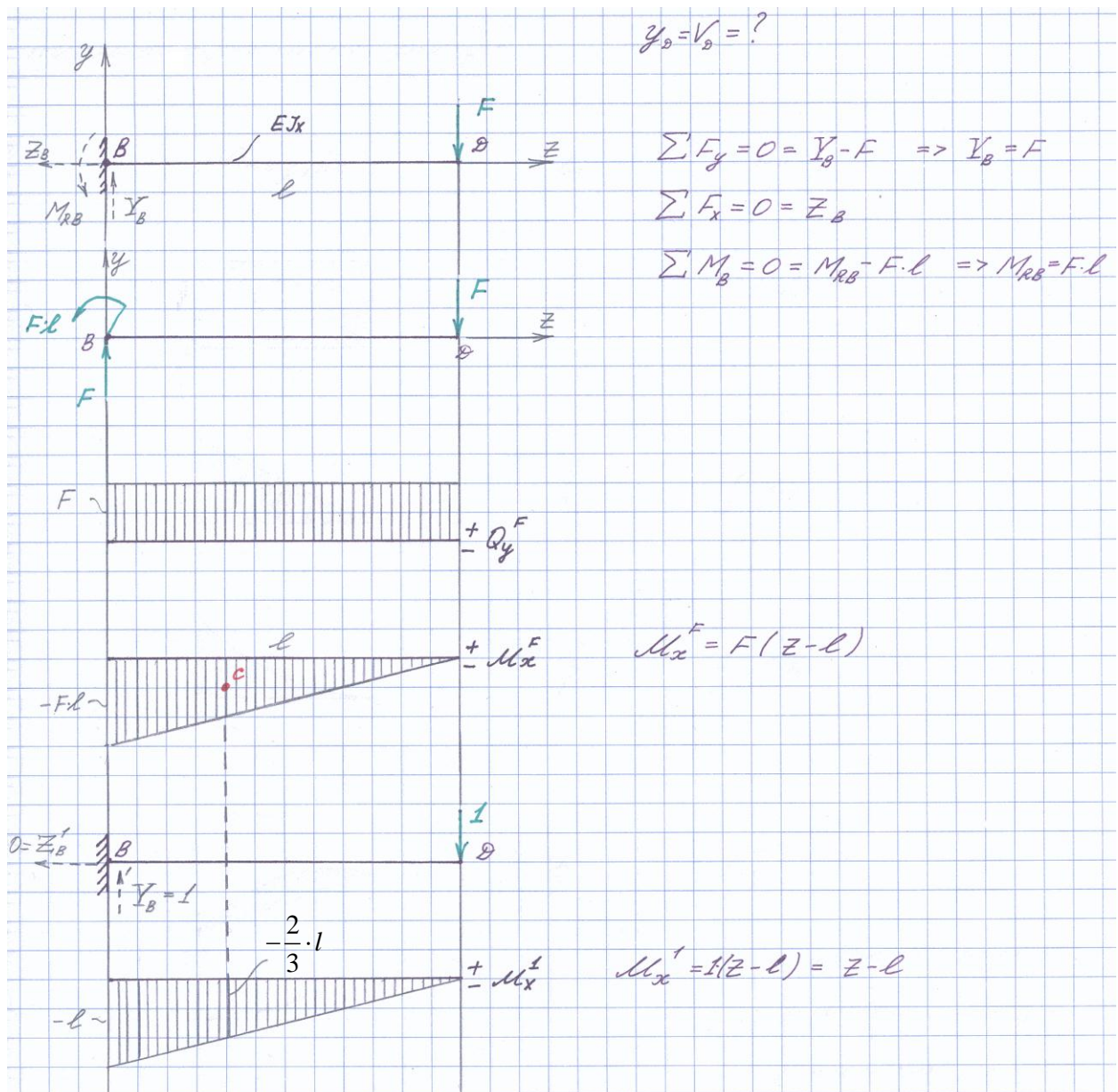
$S_y^\omega = \omega \cdot z_c$

Площади и расположение центров тяжести некоторых простых фигур:

Фигура:	Z_C	ω
<p>Прямоугольник:</p> 	$\frac{b}{2}$	$b \cdot h$
<p>Линейный треугольник:</p> 	$\frac{b}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$
<p>Параболический треугольник:</p> 	$\frac{b}{4}$	$\frac{1}{3} \cdot b \cdot h$
<p>Горбушка (отсечённая прямой часть параболы):</p> 	$\frac{b}{2}$	$\frac{q \cdot b^3}{12}$

 q – внешняя распределённая нагрузка на участке с горбушкой.

Пример VI.2 :



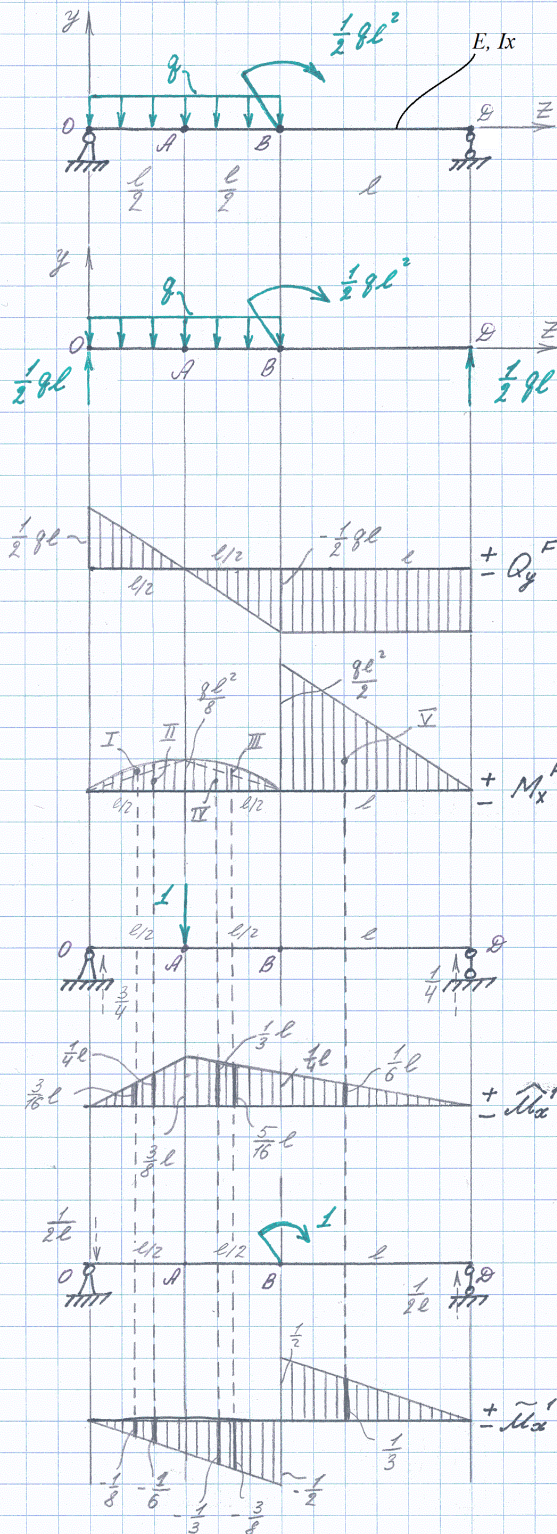
Классическое вычисление:

$$y_D = \int_0^l \frac{M_x^F \cdot M_x^1}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l [F(z-l) \cdot (z-l)] dz = \frac{F}{EJ_x} \int_0^l (z^2 - 2lz + l^2) dz = \frac{Fl^3}{3EJ_x}$$

Способ Верещагина:

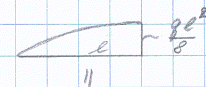
$$y_D = \frac{1}{EJ_x} \left[-\left(\frac{1}{2} l F l \right) \cdot \left(-\frac{2}{3} l \right) \right] = \frac{Fl^3}{3EJ_x}$$

Пример VI.3



$$y_A = ?$$

$$\theta_B = ?$$



$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql}{8} \cdot l$$

$$A' = \frac{8(\frac{l}{2})^3}{12} = \frac{ql^3}{8 \cdot 12}$$

Сравнить: пример V.1

стр 109... 110

Способ Верещагина:

$$y_A = V_A = \frac{M_x^F \times \tilde{M}_x'}{EJ_x} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{ql^3}{8 \cdot 12} \right) \cdot \frac{3}{16} l + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{1}{4} l + \left(\frac{ql^3}{8 \cdot 12} \right) \cdot \frac{5}{16} l + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} l + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \right) \cdot \frac{1}{6} l \right] = \frac{25}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_x}$$

$$\theta_B = \frac{M_x^F \times \tilde{M}_x'}{EJ_x} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{ql^3}{8 \cdot 12} \right) \cdot \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{ql^3}{8 \cdot 12} \right) \cdot \frac{3}{8} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \right) \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{16} \cdot \frac{ql^3}{EJ_x}$$

Классическое вычисление интеграла Мора (θ_B):

$$\left. \begin{aligned} M_{x_1}^F &= \frac{1}{2} q l z_1 - \frac{q z_1^2}{2} \\ M_{x_2}^F &= \frac{1}{2} q l z_2 \end{aligned} \right\} \text{Эпюра } M_x^F$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M}_{x_1}^I &= -\frac{1}{2l} z_1 \\ \tilde{M}_{x_2}^I &= \frac{1}{2l} z_2 \end{aligned} \right\} \text{Эпюра } \tilde{M}_x^I$$

$$\theta_B = \int \frac{M_x^F \cdot \tilde{M}_x^I}{EJ_x} dz =$$

$$= \int_0^l \frac{M_{x_1}^F \cdot \tilde{M}_{x_1}^I}{EJ_x} dz_1 + \int_0^l \frac{M_{x_2}^F \cdot \tilde{M}_{x_2}^I}{EJ_x} dz_2 =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[\int_0^l \left(\frac{1}{2} q l z_1 - \frac{q z_1^2}{2} \right) \left(-\frac{z_1}{2l} \right) dz_1 + \int_0^l \left(\frac{1}{2} q l z_2 \right) \left(\frac{z_2}{2l} \right) dz_2 \right] =$$

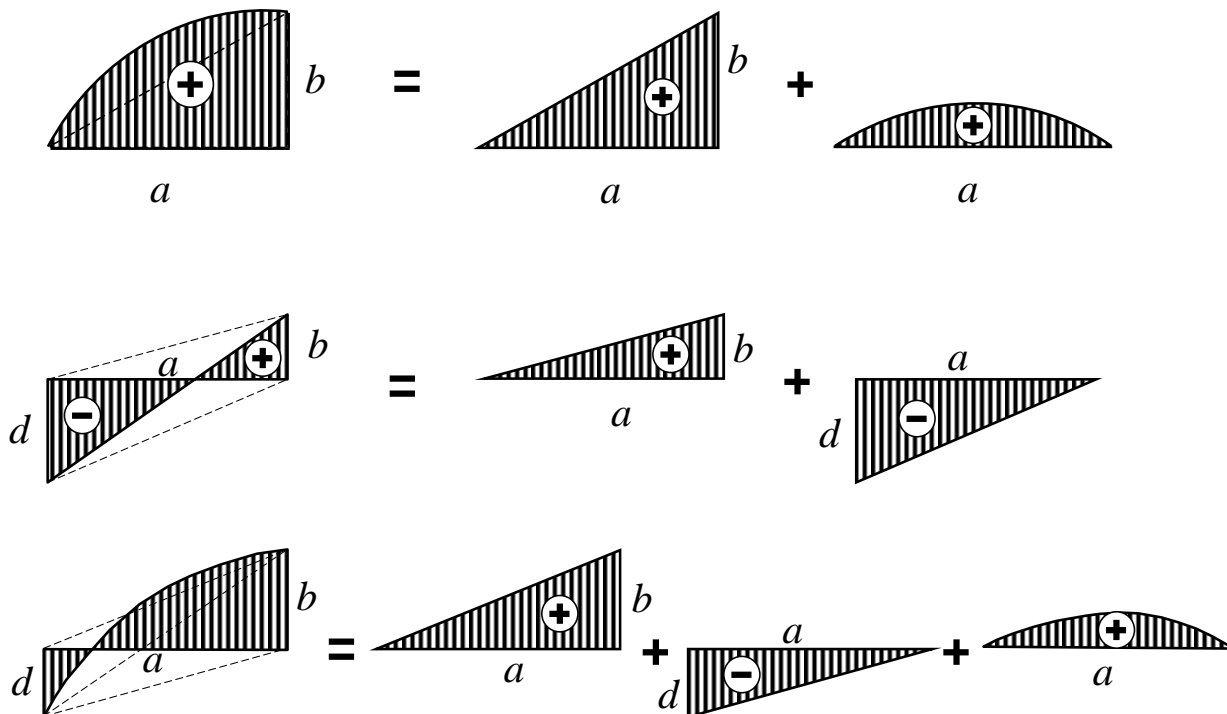
$$= \frac{1}{4lEJ_x} \cdot \left[-ql \int_0^l z_1^2 dz_1 + q \int_0^l z_1^3 dz_1 + ql \int_0^l z_2^2 dz_2 \right] =$$


$$= \frac{q}{4lEJ_x} \cdot \left[-l \cdot \frac{z_1^3}{3} \Big|_0^l + \frac{z_1^4}{4} \Big|_0^l + l \cdot \frac{z_2^3}{3} \Big|_0^l \right] =$$

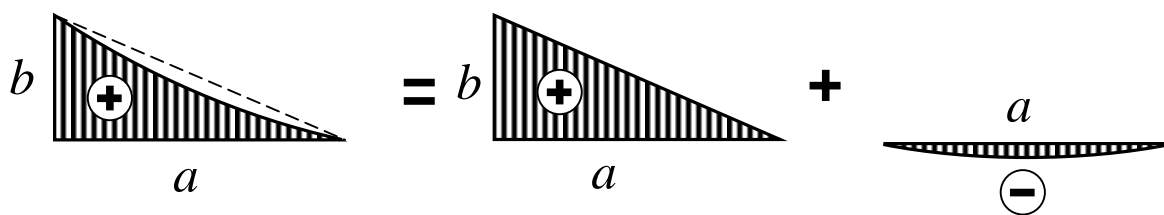
$$= \frac{ql^3}{4EJ_x} \cdot \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right] = \frac{ql^3}{16EJ_x}$$

Рассмотрение сложной фигуры на эпюре M_x , как суммы нескольких простых фигур называется **расслоением эпюры**.

Примеры расслоений:



Фигура  коварна! Это может оказаться параболический треугольник (см. Таблицу), а может – сумма линейного и параболического треугольников. Носик параболического треугольника всегда является вершиной параболы – его гипотенузы- (проверяется по эпюре Q_y : в этой точке Q_y пересекает ноль). В противном случае, раслаивайте фигуру на линейный треугольник и горбушку:



Расчёт витых пружин

Витая пружина представляет собой упругий стержень (круглая проволока), завитый, для компактности, петлями.

В зависимости от вида воспринимаемых рабочих нагрузок, витые пружины подразделяют на

- пружины растяжения (рис. VI.4а);
- пружины сжатия (рис. VI.4б);
- пружины кручения (рис. VI.4в).

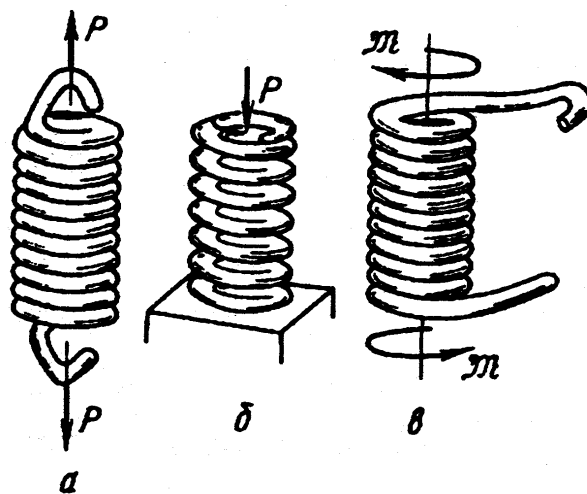


Рис. VI.4

На расчётных схемах пружину подробно (рис. VI.5а) не изображают, ограничиваясь её упругой осью (рис. VI.5б).

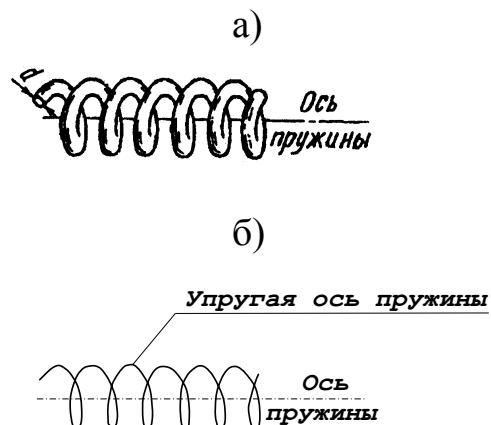
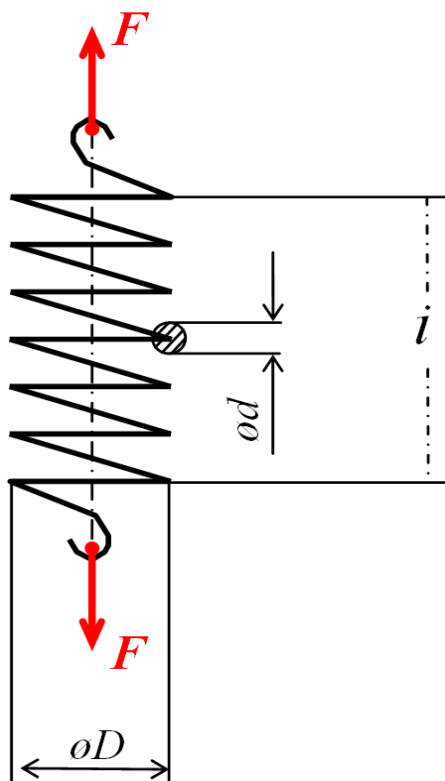


Рис. VI.5



В расчётах пружин на прочность и жёсткость используют следующие их характеристики (рис. VI.6):

d – диаметр проволоки;

D – средний диаметр витка;

i – число витков.

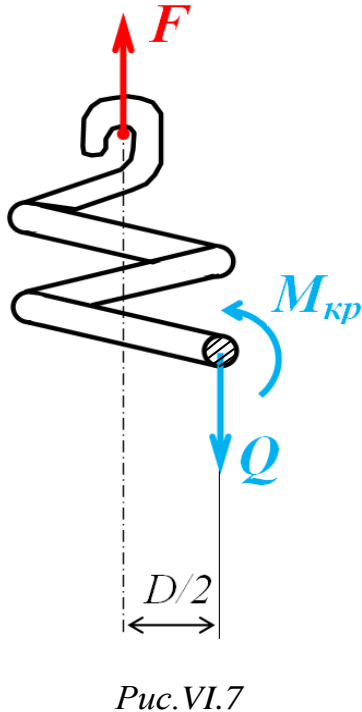
Рис. VI.6

Проволока пружин растяжения и сжатия работает на кручение, проволока пружин кручения – на изгиб.

Далее рассматривать будем только витые пружины растяжения (сжатия).

Расчёт пружины на прочность:

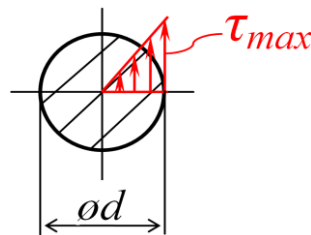
При нагружении в поперечных сечениях проволоки, из которой они навиты, возникают два внутренних силовых фактора: перерезывающая сила Q и крутящий момент $M_{кр}$ (рис. VI.7).



$Q = F$; в расчётах на прочность и жёсткость действием Q можно пренебречь по сравнению с действием $M_{кр}$.

$$M_{кр} = F \cdot \frac{D}{2}.$$

Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях круглой проволоки:



$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\kappa}} = \frac{F \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}$$

На практике пользуются полуэмпирической формулой:

$$\tau_{\max} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \cdot x_{\tau} \quad (VI.10)$$

где $x_{\tau} = \frac{4 \cdot C + 2}{3 \cdot C - 3}$ – эмпирический коэффициент;

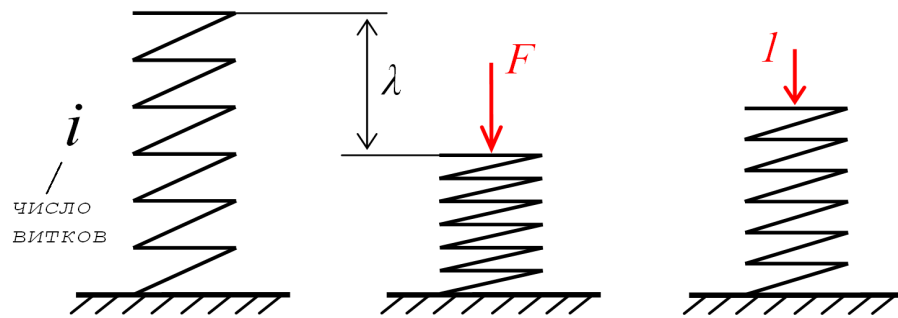
$$C = \frac{D}{d} - \text{индекс пружины} \quad (4 < C < 10).$$

Расчётный коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{\tau_{np}}{\tau_{\max}} \quad (VI.11)$$

где $\tau_{np} = \tau_T$ – хрупкие материалы при создании пружин не используются.

Расчёт пружины на жёсткость:



$$\lambda = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр}^F \cdot M_{кр}^1}{G \cdot I_{\kappa}} dS \text{ - интеграл Мора.}$$

где $G \cdot I_{\kappa}$ – жесткость проволоки на кручение;

ℓ – общая длина проволоки;

S – дуговая координата по длине.

$$M_{кр}^F = F \cdot \frac{D}{2} \text{ – по длине проволоки момент постоянен;}$$

$$M_{кр}^1 = 1 \cdot \frac{D}{2} ;$$

$$I_{\kappa} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} ;$$

$$\ell = i \cdot \pi \cdot D$$

$$\lambda = \int_0^{i \cdot \pi \cdot D} \frac{F \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{D}{2}}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} dS = \frac{F \cdot D^2 \cdot 8}{G \cdot \pi \cdot d^4} \cdot \int_0^{i \cdot \pi \cdot D} dS = \frac{8 \cdot F \cdot D^2}{G \cdot \pi \cdot d^4} \cdot i \cdot \pi \cdot D = \frac{8 \cdot F \cdot D^3 \cdot i}{G \cdot d^4}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{8 \cdot F \cdot D^3 \cdot i}{G \cdot d^4}}$$

(VI.12)