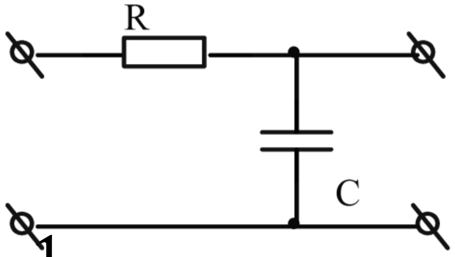
Аналоговая электроника.

Основы общей теории фильтров.

Активные фильтры.

Пассивный фильтр первого порядка



Проведем рассмотрение на примерах ФНЧ.

Передаточная функция для RC фильтра:

$$W(s) = \frac{1}{sRC+1} = \frac{1/_{RC}}{s + 1/_{RC}} = \frac{\omega_p}{s+\omega_p}, \qquad \omega_p = \frac{1}{RC}$$

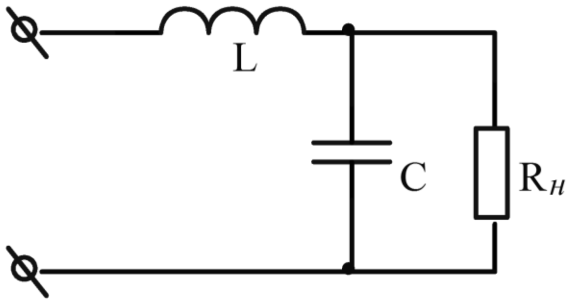
При больших значениях переменной s, соотношение определит наклон АЧХ в области задерживания в 20дБ/декаду. Если такого наклона не достаточно, для улучшения качества фильтрации, можно установить несколько RC фильтров последовательно:

$$W(s) = \frac{\prod \omega_{pi}}{\prod (s+\omega_{pi})}$$

Для этого фильтра полюса вещественные.

Пассивный фильтр второго порядка

Передаточная функция LC фильтра нижних частот:



$$W(s) = \frac{\frac{R_{\text{н}}}{1 + sR_{\text{н}}C}}{sL + \frac{R_{\text{н}}}{1 + sR_{\text{н}}C}} = \frac{1/_{LC}}{s^2 + s\frac{\sqrt{L/C}}{R_{\text{н}}\sqrt{LC}} + 1/_{LC}} = \frac{{\omega_0}^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q_f} + {\omega_0}^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad \frac{\sqrt{L/C}}{R_{\text{н}}} = \frac{\rho}{R_{\text{н}}} = \frac{\rho}{\rho^2/_{r_{\text{э}}}} = \frac{r_{\text{э}}}{\rho} = \frac{1}{Q_f}, \qquad s_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q_f} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4{Q_f}^2}}$$

ω_0 - частота, а Q_f- добротность сопряженной пары полюсов. Полюса этого фильтра являются комплексно-сопряженными при $Q_f > 0{,}5$. Наклон частотной характеристики для этого фильтра соответственно 40 дБ/декаду.

Фильтры высоких порядков.

Учтем, что полюса передаточной функции могут быть комплексными, а в этом случае удобнее использовать в разложении множители второго порядка. Тогда для ФНЧ:

$$W(s) = \frac{1}{\prod_i (1 + a_i s + b_i s^2)}$$

a_i и b_i положительные коэффициенты, их величины определяются критериями формирования АЧХ и ФЧХ. **Порядок фильтра определяется порядком полинома в знаменателе передаточной функции.** Если порядок фильтра нечетный, то $b_1 = 0$.

Добротность пары полюсов определяется соотношением $Q_i = \frac{\sqrt{b_i}}{a_i}$, а частота среза $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{b_i}}$.

Переход от ФНЧ к другим типам фильтров. ФВЧ.

Для перехода к ФВЧ следует произвести замену в выражении для передаточной функции $\frac{s}{\omega_p} \rightarrow \frac{\omega_p}{s}$. Тогда общий вид передаточной функции для ФВЧ:

$$W(s) = \frac{1}{\prod_i (1 + \frac{a_i}{s} + \frac{b_i}{s^2})}$$

Для фильтра второго порядка:

$$W(s) = \frac{s^2}{s^2 + s\frac{\omega_p}{Q_f} + \omega_p{}^2}$$

Переход от ФНЧ к другим типам фильтров. ПФ.

Для перехода к ПФ $\frac{s}{\omega_p} \to \frac{s^2+\omega_p^2}{s \cdot \Delta\omega_p}$, здесь $\Delta\omega_p = \omega_{\text{верх}} - \omega_{\text{нижн}}$ и $\omega_p = \sqrt{\omega_{\text{верх}}\omega_{\text{нижн}}}$. При таком преобразовании порядок удваивается.

Для полосового фильтра второго порядка:

$$W(s) = \frac{s\,\frac{\omega_p}{Q_f}}{s^2 + s\,\frac{\omega_p}{Q_f} + {\omega_p}^2}$$

Переход от ФНЧ к другим типам фильтров. РФ.

Для перехода к РФ (полосно-подавляющему фильтру) $\frac{s}{\omega_p} \to \frac{s \cdot \Delta\omega_p}{s^2+\omega_p^2}$, здесь $\Delta\omega_p = \omega_{\text{верх}} - \omega_{\text{нижн}}$ и $\omega_p = \sqrt{\omega_{\text{верх}}\omega_{\text{нижн}}}$. Порядок фильтра также удваивается.

Для режекторного фильтра второго порядка:

$$W(s) = \frac{s^2 + {\omega_p}^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f} s + {\omega_p}^2}$$

Универсальный фильтр.

Из выше изложенного видно, что можно построить универсальный фильтр, передаточная функция которого, в общем виде, будет выглядеть как:

$$W(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i s + b_i s^2)}{\prod_{i=1}^{m}(1 + a_i s + b_i s^2)}$$

При этом $n \leq m$.

Фильтры также можно делать перестраиваемыми, если есть возможность менять номиналы элементов.

Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя

Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя основаны на полиномах Баттерворта, Чебышева и Бесселя соответственно. Общий вид передаточной функции для этих фильтров соответствует полученной ранее (будем рассматривать фильтры также на примере ФНЧ):

$$W(s) = \frac{K}{Q(s)}$$

Где $Q(s)$ – полином требуемого типа. **Степень этого полинома определяет порядок фильтра**. Коэффициенты полинома для каждого типа фильтров различаются, из-за чего эти фильтры различаются по наклону и поведению АЧХ в полосах пропускания и задерживания. Фильтр Баттерворта отличается максимальной гладкостью характеристики в полосе пропускания, фильтр Чебышева крутизной спада характеристики на частоте среза, а фильтр Бесселя одинаковым фазовым сдвигом в полосе пропускания.

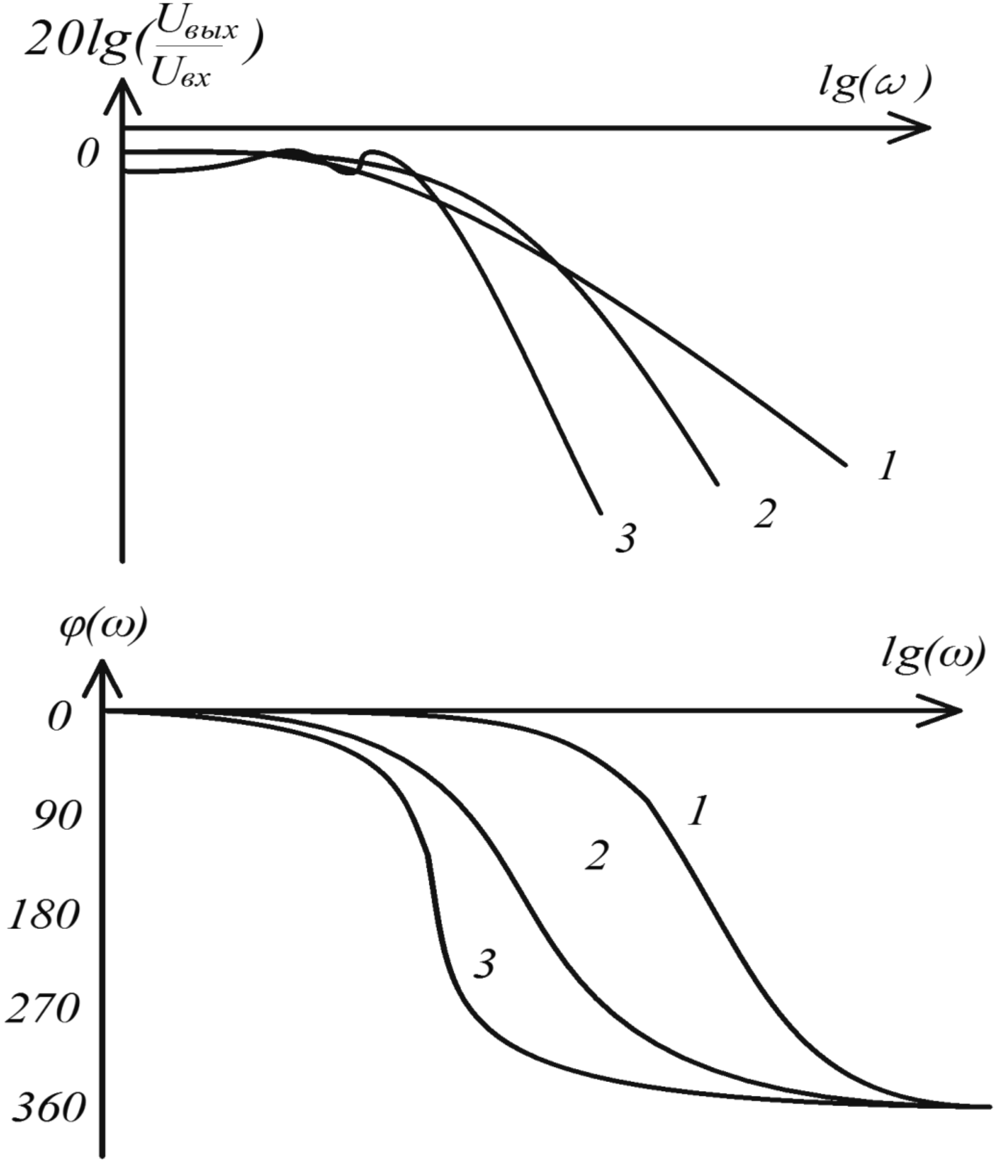
Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя

АЧХ, ФЧХ фильтров четвертого порядка.

1 - фильтр Бесселя,

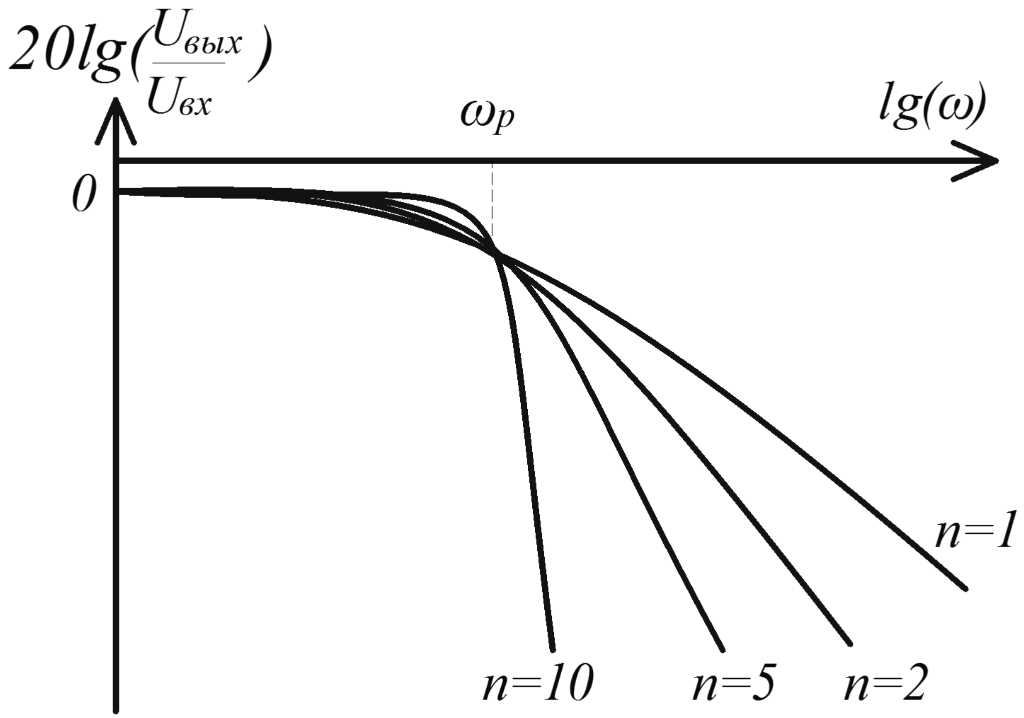
2 - фильтр Баттерворта,

3 - фильтр Чебышева.



Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя

АЧХ фильтра Баттерворта в зависимости от порядка



Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя

Передаточную характеристика фильтра определяют по таблице. Функции даны в нормированном виде. Для перехода в последствии к реальным значениям потребуются операции преобразования частот и масштабирования. Пересчет частоты осуществляется с помощью замены $s = \frac{s}{\omega_p}$, где $\omega_{\text{р}}$ - частота среза.

Нормированные передаточные характеристики для фильтров			
Баттерворта	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{(s^2+s\sqrt{2}+1)}$	$\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$
Чебышева[1]	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{0{,}5}{(s^2+s\sqrt{2}+1)}$	$\frac{0{,}25}{(s+0{,}298)(s^2+0{,}298s+0{,}839)}$
Бесселя	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{(\frac{1}{3}s^2+s+1)}$	$\frac{15}{(s+2{,}322)(s^2+3{,}678s+6{,}459)}$

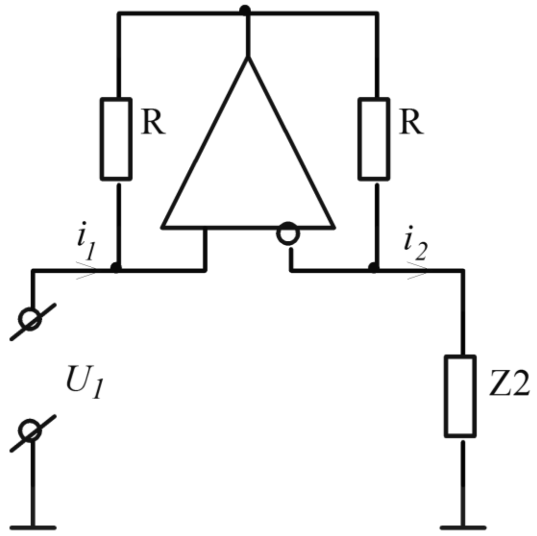
(1) Для этого типа фильтра Чебышева пульсации в полосе пропускания 3дБ

Построение фильтров на базе ОУ

Прежде чем изучать схемы фильтров, рассмотрим работу преобразователя сопротивления и гиратора. Эти устройства позволяют понять возможности построения высоко добротных фильтров без использования индуктивных элементов цепи.

Преобразователь отрицательного сопротивления

$$i_1 = -i_2$$



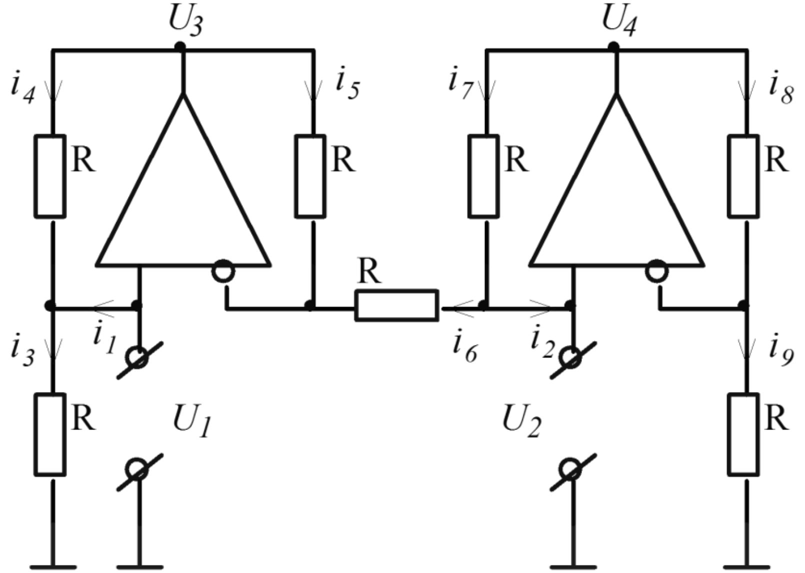
Напряжения на входах ОУ равны, тогда:

$$\frac{U_1}{i_1} = -Z_2$$

Цепь будет устойчива если внутреннее сопротивление внешней части будет меньше чем Z_2.

Гиратор

Схема преобразования полного сопротивления. Используя первое правило Кирхгофа, запишем для узловых точек схемы:



$$i_4 - i_3 + i_1 = \frac{U_3 - U_1}{R} - \frac{U_1}{R} + i_1 = 0$$

$$i_5 + i_6 = \frac{U_3 - U_1}{R} + \frac{U_2 - U_1}{R} = 0$$

$$i_7 - i_6 - i_2 = \frac{U_4 - U_2}{R} - \frac{U_2 - U_1}{R} - i_2 = 0$$

$$i_8 - i_9 = \frac{U_4 - U_2}{R} - \frac{U_2}{R} = 0$$

Исключив из уравнений U_3 и U_4, получим $\frac{U_2}{R} = i_1$, $\frac{U_1}{R} = i_2$, следовательно если подключить к клеммам U_1 сопротивление Z_1, то для выхода $Z_2 = \frac{U_2}{i_2} = \frac{i_1 R^2}{U_1} = \frac{R^2}{Z_1}$.

Пусть $Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$ тогда $Z_2 = j\omega C R^2 = j\omega L_э$.

Активные фильтры

Активными фильтрами называются фильтры построенные на основе операционных усилителей. Активные фильтры могут иметь в полосе пропускания коэффициент передачи больше 1.

ω_p – частота среза фильтра,

K – максимальная величина коэффициента передачи в полосе пропускания фильтра,

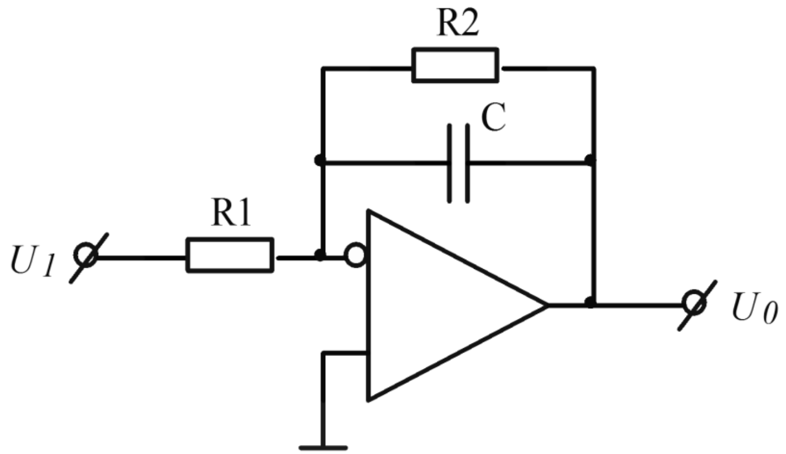
Q_f - добротность фильтра

Фильтры первого порядка

ФНЧ

$$W(s) = -K\frac{\omega_p}{s+\omega_p}$$

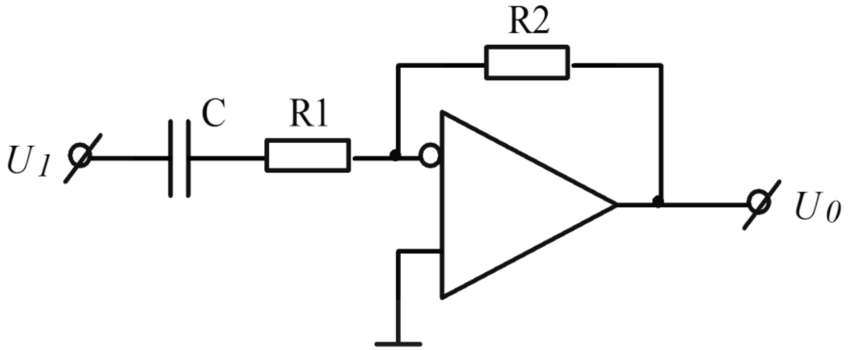
$$\omega_p = \frac{1}{R_2C} \quad K = -\frac{R_2}{R_1}$$



ФВЧ

$$W(s) = -K\frac{s}{s+\omega_p}$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_1C} \quad K = -\frac{R_2}{R_1}$$



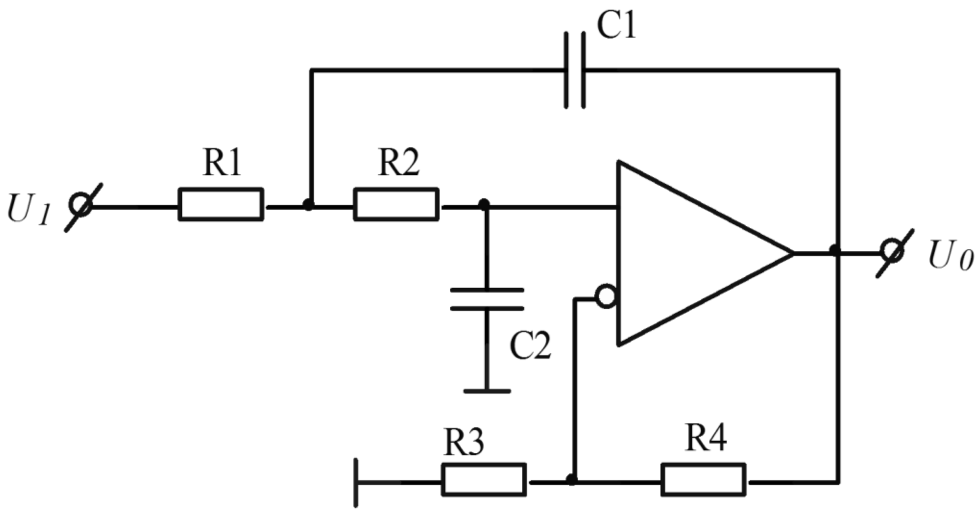
Фильтры второго порядка

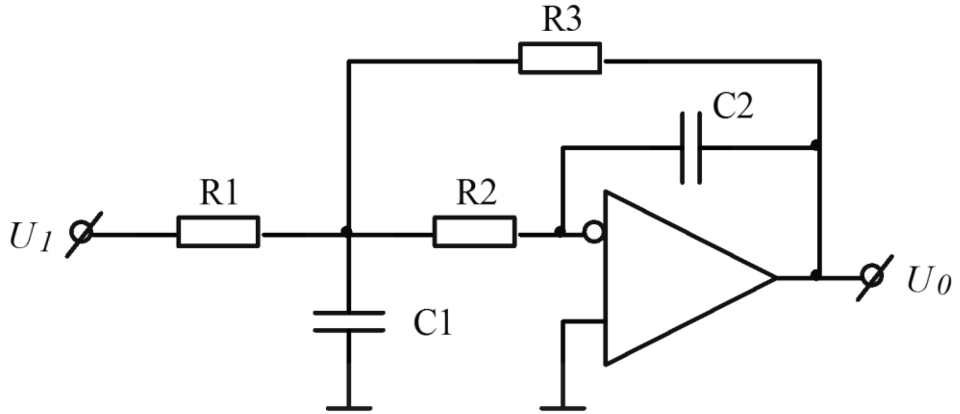
ФНЧ

$$W(s) = K \frac{{\omega_p}^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f} s + {\omega_p}^2}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

$$Q_f = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}} + \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} - \frac{R_4}{R_3}\sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}}}$$



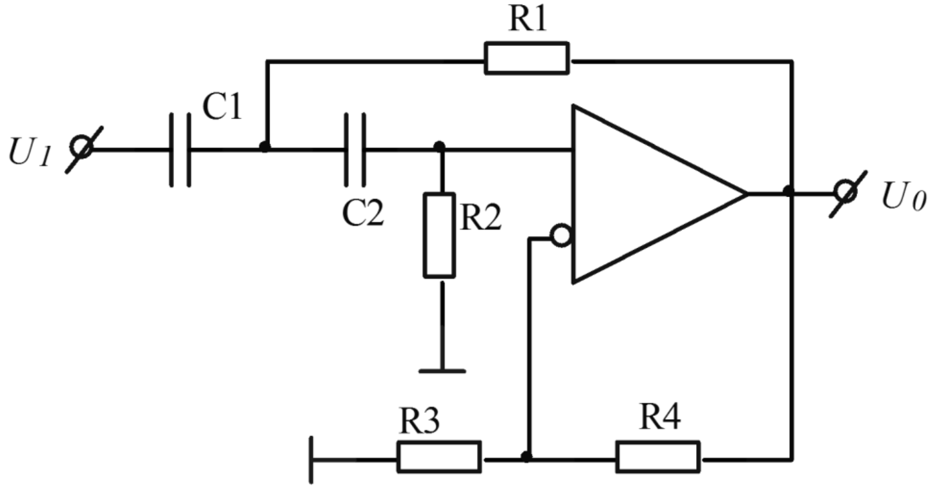


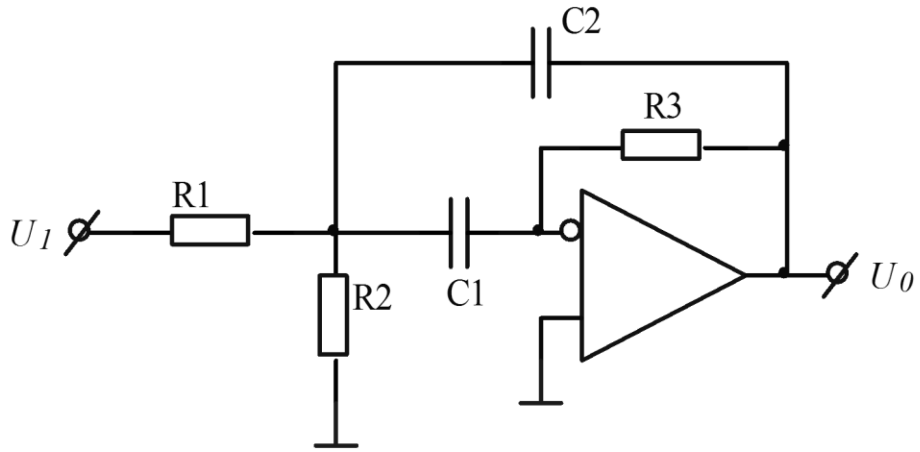
Фильтры второго порядка

ФВЧ

$$W(s) = K\frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f}s + {\omega_p}^2}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \quad K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

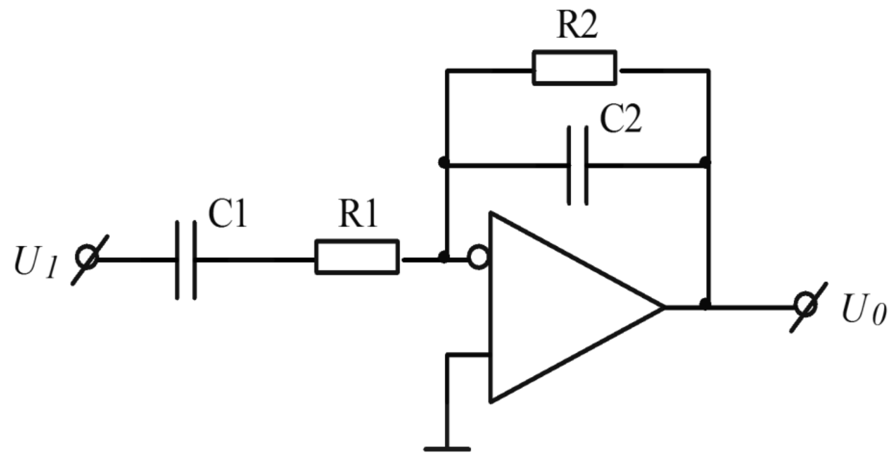




Фильтры второго порядка

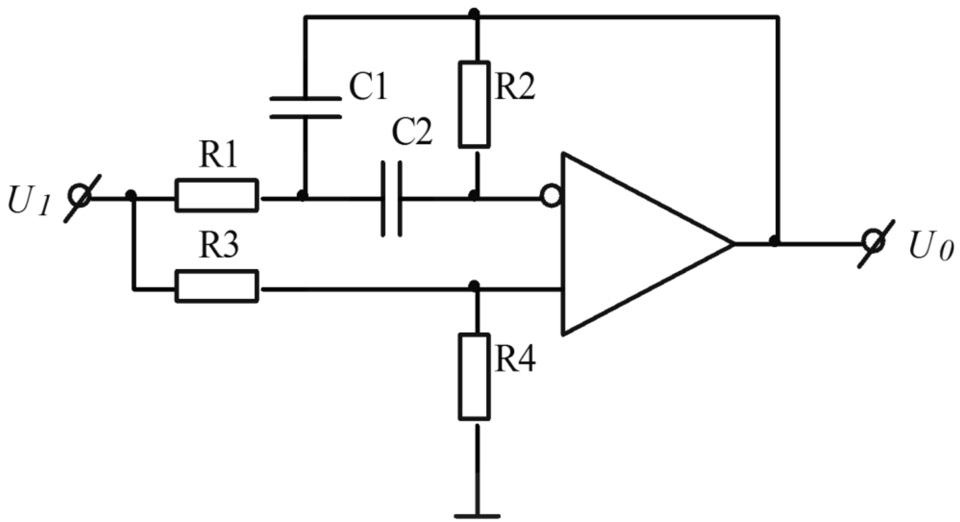
Полосовой Фильтр

$$W(s) = -K\frac{\frac{\omega_p}{Q_f}s}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f}s + {\omega_p}^2}$$



Режекторный Фильтр

$$W(s) = K\frac{s^2 + {\omega_p}^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f}s + {\omega_p}^2}$$



Фазовые фильтры

В отличии от других фильтров коэффициент передачи ФФ постоянен, а фаза изменяется в зависимости от частоты. ФФ предназначены для фазовой коррекции и задержки сигналов. При переходе к передаточной функции ФФ в числителе записывается полином сопряженный с полиномом знаменателя:

$$W(s) = \frac{\prod_i (1 - a_i s + b_i s^2)}{\prod_i (1 + a_i s + b_i s^2)}$$

При замене $s = j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{\prod_i \sqrt{(1 - b_i\omega^2)^2 + a_i{}^2\omega^2}\, e^{-j\propto}}{\prod_i \sqrt{(1 - b_i\omega^2)^2 + a_i{}^2\omega^2}\, e^{j\propto}} = 1 \cdot e^{-j\varphi}, \qquad \varphi = -2\sum_i arctg\frac{a_i\omega}{1 - b_i\omega^2}$$

Групповое время задержки фильтра: $T_g = \frac{d\varphi}{d\omega} = 2\sum_i \frac{a_i(1-b_i\omega^2)}{1+\omega^2(a_i{}^2-2b_i)+b_i{}^2\omega^4},$

на частоте среза $T_g(\omega_p) = \frac{1}{\sqrt{2}} T_g(\omega = 0)$

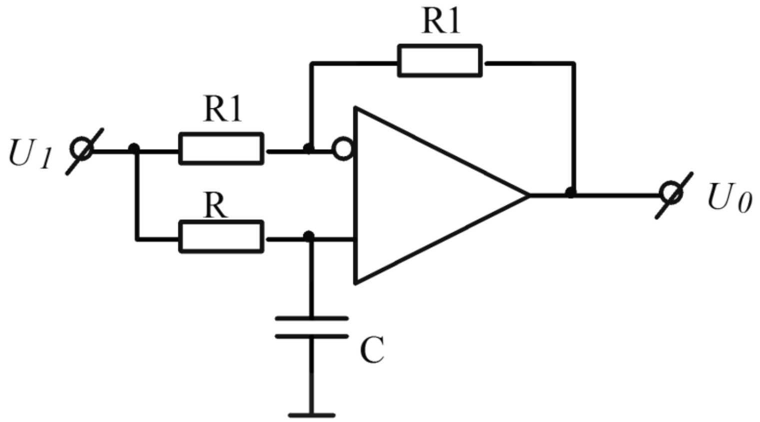
Фазовые фильтры первого и второго порядка

Фильтр первого порядка

$$W(s) = \frac{s - \omega_p}{s + \omega_p}$$

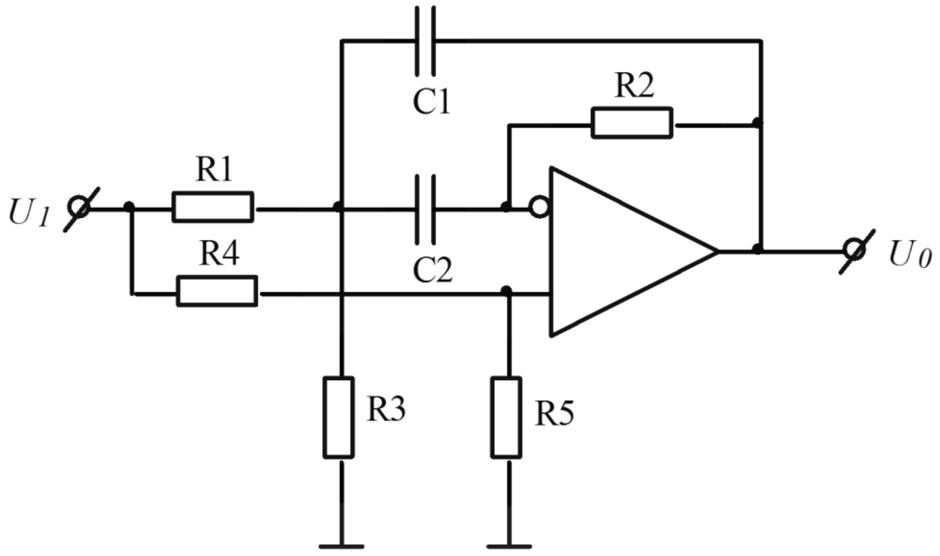
$$\omega_p = \frac{1}{RC}, \qquad \varphi = -2arctg(\omega RC),$$

$$T_g = \frac{2RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

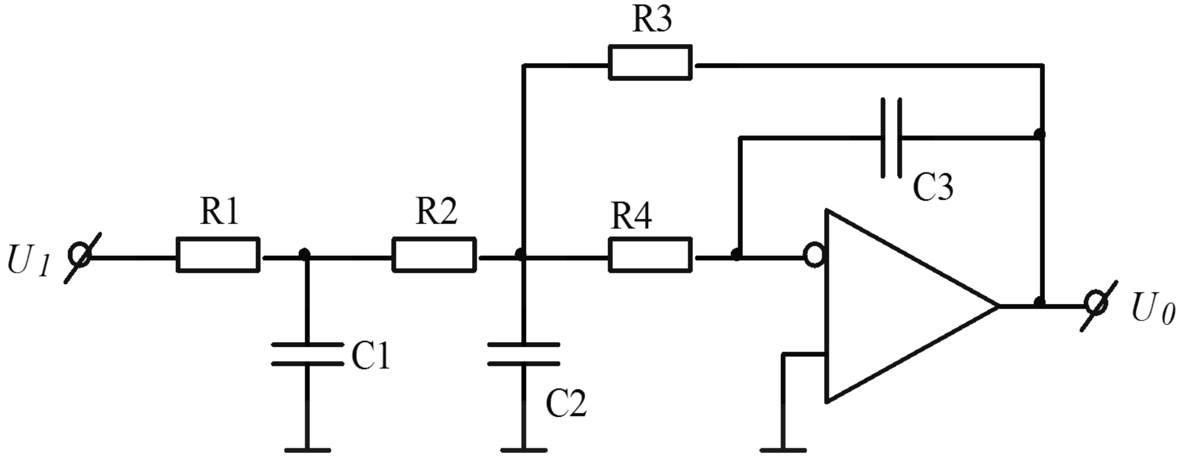


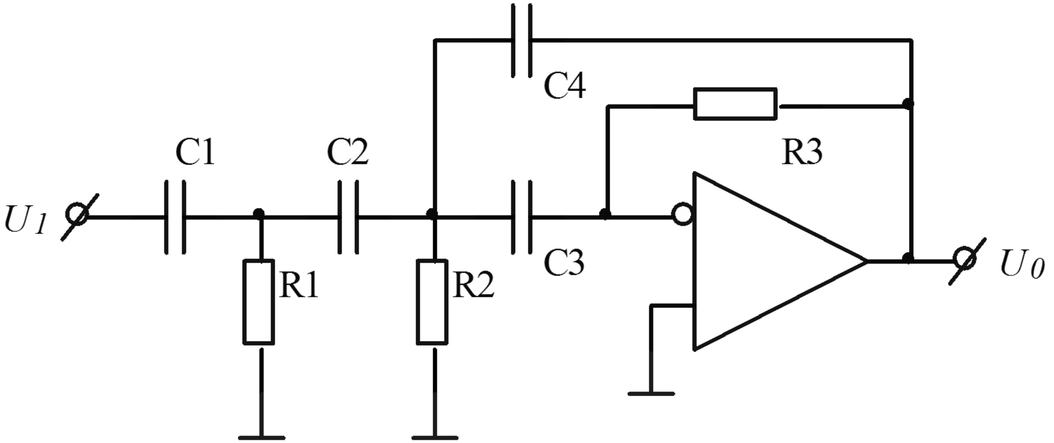
Фильтр второго порядка

$$W(s) = K\frac{s^2 - \frac{\omega_p}{Q_f}s + \omega_p{}^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f}s + \omega_p{}^2}$$



Фильтры третьего порядка





Пример построения передаточной функции активного фильтра

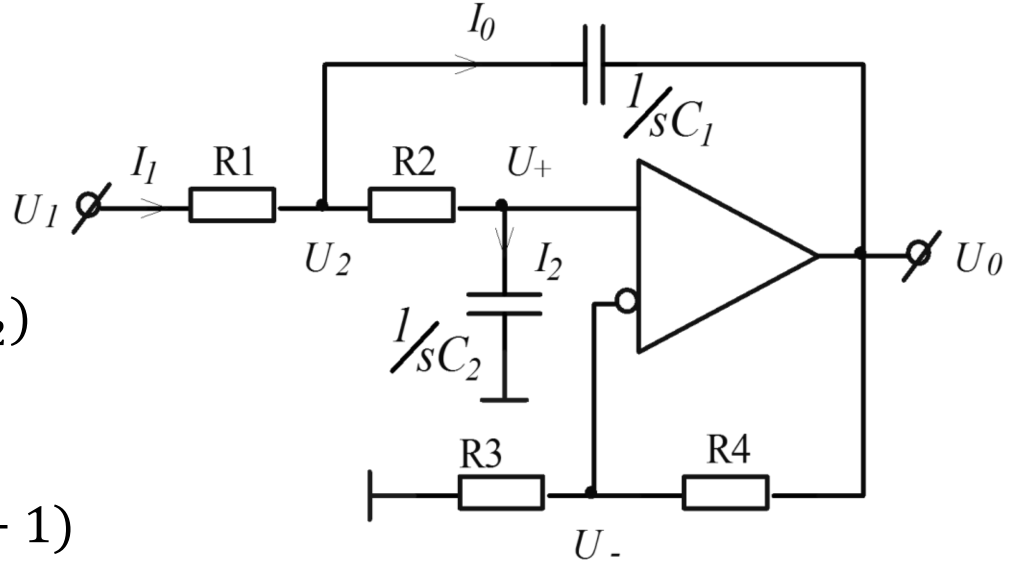
Передаточная функция ФНЧ 2-го порядка. Представив цепь в операторном виде, расставим токи ветвей и напряжения в узловых точках и запишем операторные токи и величину напряжения в узле:

$$U_+(s) = U_-(s) = U_0(s)\frac{R_3}{R_3 + R_4}\ ,\qquad I_2(s) = sC_2U_+(s) = sC_2U_0(s)\frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$U_2(s) = U_+(s) + I_2(s)R_2 = U_0(s)\frac{R_3}{R_3 + R_4}(1 + sR_2C_2)$$

$$I_1(s) = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{R_1} = \frac{U_1(s)}{R_1} - U_0(s)\frac{R_3}{R_1(R_3 + R_4)}(1 + sR_2C_2)$$

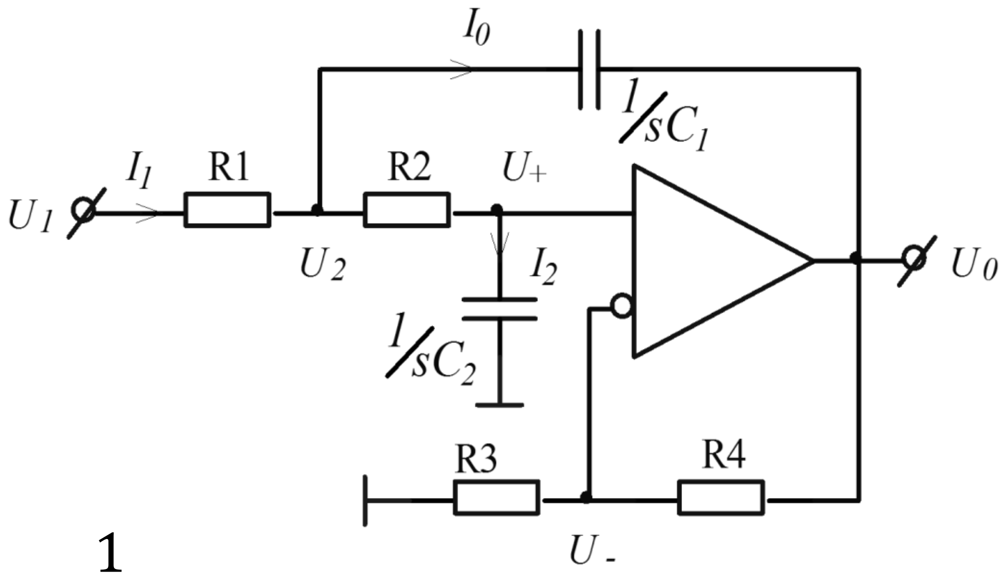
$$I_0(s) = sC_1\big(U_2(s) - U_0(s)\big) = sC_1U_0(s)(\frac{R_3}{R_3 + R_4}(1 + sR_2C_2) - 1)$$



Используя первое правило Кирхгофа для узла U_2, запишем: $I_1(s) = I_0(s) + I_2(s)$

Пример

Соотношение для передаточной функции:



$$W(s) = \frac{U_0(s)}{U_1(s)} = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1}{1 + sR_2C_2 + sR_1C_2 + sR_1C_1((1 + sR_2C_2) - 1 - \frac{R_4}{R_3})}$$

Приводя функцию к стандартному виду получим:

$$W(s) = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} - \frac{R_4}{R_3}\frac{1}{R_2C_2}\right) + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}$$

Пример

Переход от передаточной функции к схеме.

$$W(s) = \frac{20000}{s^2 + 200s + 10000}$$

$$W(s) = 2 \cdot \frac{-100}{s+100} \cdot \frac{-100}{s+100}$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_2 C} = 100 \text{ рад/с}$$