Занятие 10

Неоднородные линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Специальная правая часть.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (10.1)$$

Как мы уже отмечали, разность двух решений этого уравнения является решением однородного уравнения. Отсюда сразу же следует, что общее решение $y_{\text{ о.н.}}(x)$ уравнения (10.1) может быть представлено в виде

$$y_{\text{ о.н.}}(x) = y_{\text{ о.о.}}(x) + y_{\text{ ч.н.}}(x),$$

где $y_{\text{ о.о.}}(x)$ — общее решение однородного уравнения, $y_{\text{ ч.н.}}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

На предыдущем занятии мы уже научились находить общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Сейчас мы рассмотрим метод, позволяющий так же легко строить частное решение неоднородного уравнения со специальной правой частью.

Напомним, что мы называли *специальной* правую часть вида

$$f(x) = P_m(x) \cdot e^{\lambda x},$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а λ — произвольное число (возможно, комплексное). В этом случае частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов. Оно имеет вид $y(x) = x^p \cdot Q_m(x) \cdot e^{\lambda x}$, где $Q_m(x)$ — многочлен степени m, коэффициенты которого нам и предстоит определить.

Если λ не является корнем характеристического многочлена, то $p = 0$. Если же λ является корнем характеристического многочлена кратности s, то $p = s$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' + y'' = f(x)$.

Характеристическое уравнение $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -1$, следовательно, $y_{\text{ о.о.}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$.

Найдем частные решения при различных правых частях $f(x)$.

а) $f(x) = e^{2x}$. Показатель экспоненты $\lambda = 2$ не является корнем характеристического многочлена, поэтому неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{\text{ ч.н.}} = Ae^{2x}$. Подставляя эту функцию в уравнение и сокращая на e^{2x}, получим $A = 1/12$.

б) $f(x) = x^2 e^x$. Показатель экспоненты $\lambda = 1$ не является корнем характеристического многочлена, поэтому неоднородное уравнение имеет частное решение вида

$$y_{\text{ ч.н.}} = (Ax^2 + Bx + C)e^x.$$

Подставляя эту функцию в уравнение, воспользуемся формулой Лейбница дифференцирования произведения

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Получаем:

$$(Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x + 3(2Ax + B) \cdot e^x + 3(2A) \cdot e^x + 0 \cdot e^x +$$

$$+(Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x + 2(2Ax + B) \cdot e^x + (2A) \cdot e^x = x^2 e^x$$

Сокращая на e^x и приводя подобные слагаемые, получим равенство многочленов

$$2Ax^2 + (2B + 10A)x + (2C + 5B + 8A) = x^2,$$

которое выполнено тождественно, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Отсюда $A = 1/2$, $B = -5/2$, $C = 17/4$ и

$$y_{\text{ ч.н.}} = \frac{2x^2 - 10x + 17}{4}\, e^x.$$

в) $f(x) = e^{-x}$. Показатель экспоненты $\lambda = -1$ является корнем характеристического многочлена кратности 1, поэтому неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{\text{ ч.н.}} = Axe^{-x}$. Подставляя эту функцию в уравнение и сокращая на e^{-x}, находим $A = 1$. Таким образом, $y_{\text{ ч.н.}} = xe^{-x}$.

г) $f(x) = x$. Показатель экспоненты $\lambda = 0$ является корнем характеристического многочлена кратности 2, поэтому неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{\text{ ч.н.}} = x^2(Ax+B) = Ax^3+Bx^2$. Подставляя эту функцию в уравнение, находим $A = 1/6$, $B = -1/2$. Таким образом, $y_{\text{ ч.н.}} = \dfrac{x^3 - 3x^2}{6}$.

д) $f(x) = 4\sin 2x$. Так как $\sin 2x$ — мнимая часть экспоненты e^{2ix}, мы сначала найдем комплекснозначное частное решение уравнения с правой частью $f(x) = 4e^{2ix}$, а затем выделим его мнимую часть. Она и будет искомым частным решением.

Показатель экспоненты $\lambda = 2i$ не является корнем характеристического многочлена, поэтому неоднородное уравнение с правой частью

$f(x) = 4e^{2ix}$ имеет частное решение вида $y_{\text{ ч.н.}} = Ae^{2ix}$. Подставляя эту функцию в уравнение, находим $A = \dfrac{-1+2i}{5}$. Таким образом,

$$y_{\text{ ч.н.}} = \frac{-1+2i}{5}e^{2ix} = \frac{-1+2i}{5}(\cos 2x + i\sin 2x) =$$

$$= -\frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + \frac{i}{5}(2\cos 2x - \sin 2x)$$

Итак, уравнение с правой частью $f(x) = 4\sin 2x$ имеет частное решение

$$y_{\text{ ч.н.}} = \frac{1}{5}(2\cos 2x - \sin 2x).$$

Заметим, что мы также нашли частное решение

$$y_{\text{ ч.н.}} = -\frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x),$$

соответствующее правой части $f(x) = 4\cos 2x$. $\square$

Пример 2. Решим задачу Коши $\begin{cases} y''' + y'' = 2\sin x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \end{cases}$

Корни характеристического многочлена $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -1$, следовательно, общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{ о.о.}}(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}.$$

Правая часть уравнения $f(x) = 2\sin x$, поэтому частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде $y_{\text{ ч.н.}}(x) = A\sin x + B\cos x$ либо методом комплексификации, переходя к уравнению с правой частью $f(x) = 2e^{ix}$.

Так или иначе, частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ ч.н.}}(x) = -\sin x + \cos x$$

и общее решение исходного уравнения

$$y_{\text{ о.н.}}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} - \sin x + \cos x$$

Вычисляя значения $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ и сравнивая их с условиями задачи Коши, получаем систему $\begin{cases} C_1 + C_3 + 1 = 0 \\ C_2 - C_3 - 1 = 0 \\ C_3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 2 \\ C_3 = 1 \end{cases}$

Итак, искомое решение задачи Коши

$$y(x) = -2 + 2x + e^{-x} - \sin x + \cos x$$

Заметим, что для однородного уравнения задача Коши с нулевыми начальными данными имела бы тождественно нулевое решение. □

Решая задачу Коши, мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_j, поэтому чем проще окажется эта система, тем быстрее мы решим нашу задачу.

Рассмотрим матрицу этой системы. Ее первая строка состоит из значений функций $y_k(x)$ в точке x_0, где $\{y_1(x); ...; y_n(x)\}$ — ФСР дифференциального уравнения. Вторая строка — значения производных от $y_k(x)$ в точке x_0, и так далее. Поэтому наша цель — выбрать ФСР таким образом, чтобы получающаяся матрица имела максимально простую структуру.

Пример 3. Решим задачу Коши $\begin{cases} y'' - y = x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Корни характеристического многочлена $\lambda_{1,2} = \pm 1$, и традиционно рассматривают ФСР, состоящую из функций e^x и e^{-x}.

Однако гораздо удобнее использовать ФСР, состоящую из функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$, которые являются линейными комбинациями e^x и e^{-x}. При таком выборе ФСР матрица $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ (\operatorname{ch} x)' & (\operatorname{sh} x)' \end{pmatrix}$ в точке $x = 0$ совпадает с единичной матрицей.

Итак, общее решение уравнения $y_{\text{о.н.}}(x) = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x - x$.

$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_2 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$ и $y(x) = \operatorname{ch} x - x$. $\square$

Также весьма удобной является специальная ФСР, состоящая из функций $\psi_k(x)$.

Пример 4. Решим задачу Коши $\begin{cases} y^{IV} - 4y'' = 3e^x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 6 \end{cases}$

Корни характеристического многочлена $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_{3,4} = 0$. На занятии 9 мы построили для этого случая специальную ФСР:

$\psi_1(x) = e^{2x}, \quad \psi_2(x) = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{2}$, $\psi_3(x) = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{4}$, $\psi_4(x) = \dfrac{\operatorname{sh} 2x - 2x}{8}$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) + C_3\psi_3(x) + C_4\psi_4(x) - e^x$$

Заметим, что благодаря специальному выбору начальных условий, матрица Вронского для системы ψ-функций в точке $x = 0$ имеет треугольный вид, причем все диагональные элементы равны 1:

$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому условия Коши приводят нас к линейной системе, которая легко решается методом подстановки:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 - 1 = 0 \\ y'(0) = 2C_1 + C_2 - 1 = 1 \\ y''(0) = 4C_1 + C_3 - 1 = 1 \\ y'''(0) = 8C_1 + 4C_2 + C_4 - 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = -2 \\ C_4 = -1 \end{cases}$$

Итак, $y = e^{2x} - \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} - \dfrac{\operatorname{sh} 2x - 2x}{8} - e^x = \dfrac{11}{16}e^{2x} - \dfrac{3}{16}e^{-2x} + \dfrac{x}{4} - e^x$.

Понятно, что использование классической ФСР привело бы нас к решению системы линейных уравнений четвертого порядка, которая не имела бы специального треугольного вида. $\square$

Обратимся теперь к неоднородному линейному уравнению Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x).$$

Понятно, что специальной правой частью следует считать функцию вида

$$f(x) = P_m(\ln x) \cdot x^\lambda, \quad (x > 0),$$

где $P_m(t)$ — многочлен степени m.

Искать частное решение методом неопределенных коэффициентов, подставляя предполагаемое решение непосредственно в уравнение Эйлера, легко, если $f(x) = x^\lambda$, и λ не является корнем характеристического уравнения. В противном случае лучше перейти к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, которое получается после замены переменной $t = \ln|x|$. Это дифференциальное уравнение можно восстановить, зная корни его характеристического многочлена. А этот многочлен, в свою очередь, совпадает с характеристическим многочленом уравнения Эйлера

$$\lambda(\lambda-1)...(\lambda-(n-1)) + ... + a_{n-2}\lambda(\lambda-1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

поэтому замену переменной в уравнении нам выполнять не придется, а нужно лишь преобразовать правую часть уравнения.

Пример 5. Решить уравнение $x^3y''' + xy' - y = x^2 + x^2\ln x + x\ln x$.

Характеристическое уравнение $(\lambda-1)^3 = 0$ и общее решение однородного уравнения $y_{\text{ о.о.}} = C_1x + C_2x\ln x + C_3x(\ln x)^2$, $(x > 0)$, были нами найдены на прошлом занятии (см. Пример 3). Осталось найти частное решение неоднородного уравнения.

Согласно принципу суперпозиции, оно является суммой частных решений, соответствующих правым частям $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2\ln x$ и $f_3(x) = x\ln x$.

1) $f_1(x) = x^2$. Так как $\lambda = 2$ не является корнем характеристического многочлена, уравнение имеет частное решение вида $y_1 = Ax^2$. Подставляя эту функцию в уравнение $x^3y''' + xy' - y = x^2$, получим $A = 1$, то есть $y_1 = x^2$.

2) Замена $x = e^t$ преобразует правую часть $f_2(x) = x^2\ln x$ к виду $f_2(t) = e^{2t}\cdot t$, а левую часть — к виду $\dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y$. Так как $\lambda = 2$ не является корнем характеристического многочлена, уравнение имеет частное решение вида $y_2(t) = e^{2t}\cdot(At + B)$.

Подставляя эту функцию в уравнение с постоянными коэффициентами, получим $A = 1$, $B = -3$, то есть $y_2(t) = e^{2t} \cdot (t - 3)$. Возвращаясь к переменной x, получаем $y_2(x) = x^2 \cdot (\ln x - 3)$.

3) Замена $x = e^t$ преобразует правую часть $f_3(x) = x \ln x$ к виду $f_3(t) = e^t \cdot t$. Так как $\lambda = 1$ является корнем характеристического многочлена кратности 3, уравнение имеет частное решение вида $y_3(t) = e^t \cdot t^3(At + B) = e^t \cdot (At^4 + Bt^3)$.

Однако мы не будем подставлять эту функцию в уравнение, а продемонстрируем следующий элегантный прием. Замена переменной $x = e^t$ преобразовала уравнение Эйлера в уравнение

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = e^t \cdot t.$$

Умножим обе части уравнения на e^{-t}:

$$e^{-t}\dddot{y} - 3e^{-t}\ddot{y} + 3e^{-t}\dot{y} - e^{-t}y = t.$$

Заметим, что с помощью формулы Лейбница левую часть уравнения можно представить в виде производной произведения:

$$\frac{d^3(e^{-t}y)}{dt^3} = t.$$

Отсюда легко найти частное решение $e^{-t}y = \dfrac{t^4}{4!}$, то есть $y = \dfrac{t^4}{24}e^t$.

Возвращаясь к переменной x, получаем $y_3(x) = \dfrac{x}{12}\ln^4 x$. $\square$