МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

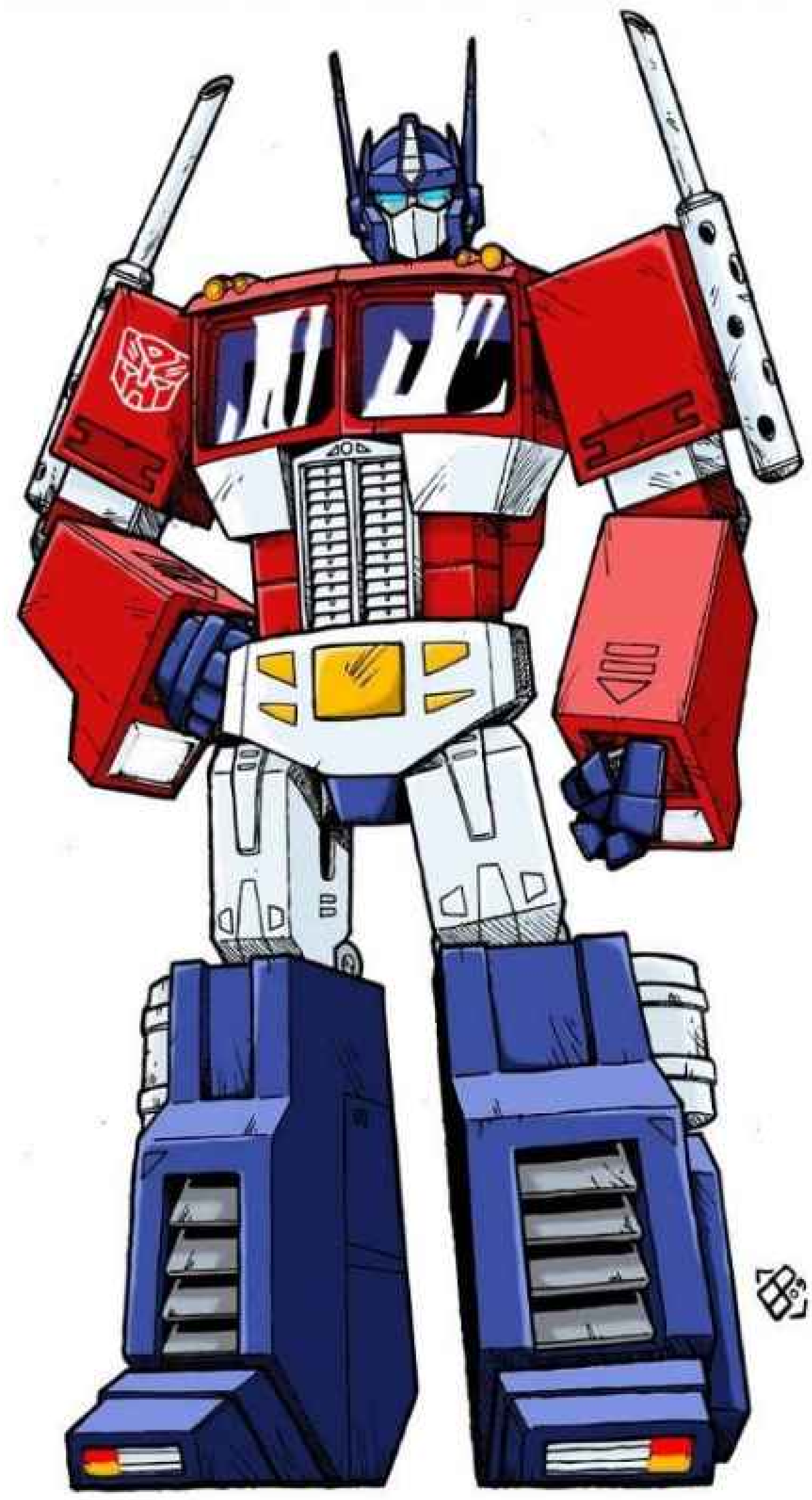
Физический факультет

Кафедра общей физики

Семинары по

ФУНКАНУ

(Осень - весна 2023-2024 г.)



Автор: Юсупова А. Д.,
студентка 2 курса, гр. 22311

Преподаватель: Ермишина В. Е.

Ермишина Виктория Евгеньевна

Методички
- Бельхеева
- Александров

РЯДЫ ФУРЬЕ

Разложение 2π-периоd. функции в ряд Фурье

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ – р. Ф $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ – коэф. Фур.

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ – формальный ряд для $f(x)$

Найти коэф-ы

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ – формула Эйлера-Фурье

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$\cos(\pm\pi n) = (-1)^n$

$\sin(\pi n) = 0$

$\int^{\pi} u\,dv = uv\Big|^{\pi} - \int v\,du$

w1 График 2π-ф.

$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{\pi}x\Big|_0^{\pi} = 1$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\ldots + \int_0^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx\right) = \frac{\sin nx}{\pi \cdot n}\Big|_0^{\pi} = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{-\cos nx}{\pi n}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}(-\cos(\pi n) + \cos 0) = \frac{1}{\pi n}(-(-1)^n + 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2}{\pi n}, & n = 2k-1 \end{cases}$

$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)}\sin(2k+1)x$

or $+\sum_{k=1}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin(2k-1)x$

w2 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(x\Big|^{-\frac{\pi}{2}} + x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = 0$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$ (нечёт · чёт = нечёт)

$f(-x) = -f(x)$

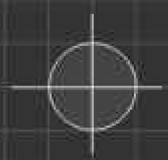
$g(-x) = g(x)$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{чёт}}\,dx = \frac{2}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - \cos\pi n\right) =$

n	0	1	2	3	4	5
$\cos\frac{\pi n}{2}$	1	0	-1	0	1	0
$\cos\pi n$	1	-1	1	-1	1	-1
f		1	-2	1	0	1

$\boxed{n=4}$

$= \frac{2}{\pi n}\begin{cases} 1, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k, \ k = 2m \\ 2, & n = 2k, \ k = 2m-1 \end{cases}$



n	1	2	3	4	5	6
b_n	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	$-\frac{2}{3\pi}$

Теор 2π-период-я ф-я f наз-ся **кусочно-гладкой**, ⇔ в промежутке [-π, π] найдётся конечное число точек $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \pi$ – 1 $\forall (x_j, x_{j+1})$ $f \in C^1$

$\forall x_j$ ∃ и конеч. левый и пр-й предела и производные сл и спр

$f(x_j \pm 0) = \lim_{h \to 0_+} f(x_j \pm h) = \lim_{h \to 0_+}\frac{f(x_j \pm h) - f(x_j \pm 0)}{\pm h}$

$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < -\pi/2 \\ 1, & -\pi/2 \le x < \pi/2 \\ x^2, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$

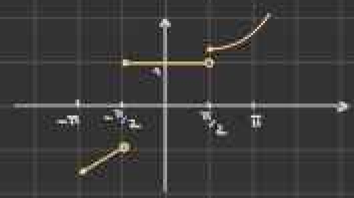
$x = -\frac{\pi}{2}$

$f(-\frac{\pi}{2} - 0) = -\frac{\pi}{2}$

$f(-\frac{\pi}{2} + 0) = 1$

$f'_+ = \frac{1-1}{h} = 0$

$f'_- = \frac{-\pi/2 - h + \pi/2}{-h} = 1$



Th. р. Ф 2π-периоd. кусочн-гл. ф-ии f(x) сходится в кажд. т-ке $x \in \mathbb{R}$, а его сумма равна $\begin{cases} f(x), & ⇔ x \text{ – т-ка непр.} \\ \frac{1}{2}(f(x+0) - f(x-0)), & ⇔ x \text{ – т. разрыва} \end{cases}$

w1 $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$, 2π-пер. Найти $\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-x\,dx + \int_0^{\pi}x\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx = \pi$

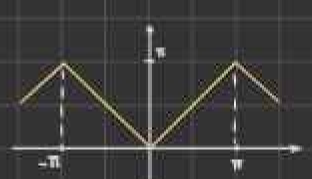
$b_n = 0$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}x\,d\sin nx = \frac{2}{\pi n}\left(\cancel{x\sin nx\Big|_0^{\pi}} - \int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}(\cos\pi n - 1) = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 2k+1 \end{cases}$

$f(x) \sim \pi/2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi$

$\lim_{h \to 0}\frac{f(-\pi+h) - f(-\pi+0)}{h} = \frac{-(-\pi+h) - \pi}{h} = -1$ $\lim_{h \to 0}\frac{f(\pi-h) - f(\pi-0)}{-h} = 1$

$\lim_{h \to 0}\left[\frac{f(0+h) - f(0+0)}{h} = \frac{f(0+h) - f(0+0)}{h} = \frac{h-0}{h}\right] = 1$ $\lim_{h \to 0}\left[\frac{f(0-h) - f(0-0)}{-h} = \frac{f(0-h) - f(0-0)}{-h} = \frac{h-0}{-h}\right] = -1$



$\boxed{x=0}$ $\frac{1}{2}(f(0+0) + f(0-0)) = 0 = \frac{\pi}{2} - \sum_1^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cdot 1$

$\sum_{k=1}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}$

D/З $f(x) = |\sin x|$, 2π-пер. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ - ? (при x = 0)

f на [0, π]

1. Продолжим на (-π, 0)
   а) чётным образом (для разл. по cos)
   б) нечётн (по sin)
   Прод. до 2π-пер.
2. Вычисл. коэф
3. Сост. р.Ф
4. Провер. сх-ть

$f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ – разл. по sin

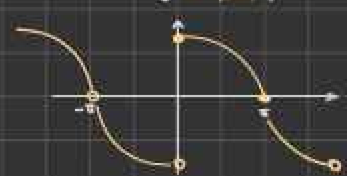
1. Прод. неч. обр. $(f(-x) = -f(x))$, 2π-пер

$a_n = 0$ $(a_0 = 0)$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\,dx = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right) =\right.$

$= \frac{1}{\pi}(1 - (-1)^{n+1})\frac{(n-1)+n+1}{(n-1)(n+1)} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2n}{n^2-1}, & n = 2k \end{cases}$ $\left(b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin x\,dx = 0\right)$

$f^*(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_1\frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx$ (n = 2k)



$f(x) = e^{ax}$ $a>0$ $x\in[0,\pi]$ по cos

1. Продолж. чётн. образом $b_n = 0$ до 2π-пер. ф.

2. $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{ax}dx = \frac{2}{\pi a}(e^{a\pi}-1)$

3. $a_n = \frac{2}{\pi}\overbrace{\int_0^\pi e^{ax}\cos(nx)dx}^{J} = \frac{2}{\pi a}\int_0^\pi \cos(nx)de^{ax} = \frac{2}{\pi a}\left(\cos(nx)e^{ax}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^{ax}d\cos(nx)\right) =$

$= \frac{2}{\pi a}((\cos(\pi n)e^{\pi a}-1)+\star)$

$\star = \int_0^\pi e^{ax}\sin(nx)dx = \frac{1}{a}\int_0^\pi \sin(nx)de^{ax} = \frac{1}{a}(\sin(nx)e^{ax}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^{ax}d\sin(nx)) = -\frac{1}{a}\overbrace{\int_0^\pi e^{ax}\cos(nx)dx}^{J}$

$\frac{2}{\pi}J = \frac{2}{\pi a}((\cos(\pi n)e^{\pi a}-1)-\frac{1}{a}J) \Rightarrow \frac{2}{\pi}J = a_n = \frac{2a}{\pi(a^2+1)}(\cos(\pi n)e^{\pi a}-1)$

$$\boxed{f^*(x) \sim \frac{1}{\pi a}(e^{a\pi}-1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{\pi(a^2+1)}(\cos(\pi n)e^{\pi a}-1)\cdot\cos(nx)}$$

$f(x) = |\sin x|$, 2π-пер. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ - ? (при $x=0$)

$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & -\pi\le x<0 \\ \sin x, & 0\le x<\pi \end{cases}$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}(\cos x|_0^\pi) = -\frac{4}{\pi}$

$b_n = 0$ (неч. ф-я на симм. отр.)

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\overbrace{\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)dx}^{J} = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin(x)d\sin(nx) = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin(nx)d\sin(x) = \frac{2}{\pi n^2}\int_0^\pi \cos(x)d\cos(nx) =$

$= \frac{2}{\pi n^2}(-\cos(-\pi n)-1) + \frac{2}{\pi n^2}J \Rightarrow J(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{-1}{n^2}(1+\cos(\pi n)) \Rightarrow a_n = -\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(-\pi+h)-f(-\pi+0)}{h} = \frac{-\sin(-\pi+h)+\sin(\pi)}{h} = \frac{-\sin(h)}{h} = -1$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi-0)}{-h} = \frac{\sin(\pi)\cos(h)-\sin(h)\cos(\pi)}{-h} = 1$ – произв-е в т-ах $-\pi+0$, $\pi-0$

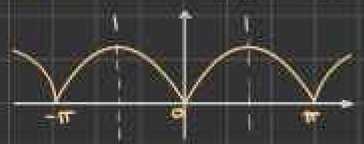
$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0-h)-f(0-0)}{h} = \frac{-\sin(0-h)-\sin(0)}{-h}\right] = -1$

$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h)-f(0+0)}{h} = \frac{\sin(0+h)}{h} = \frac{\sin(h)}{-h}\right] = 1$ – произв-е в т-ах 0_+ и 0_- (0 – т. разр. отсл.)

$\boxed{x=0}$: $f(x) = -\frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$

@ $n=2k \Rightarrow \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cos(2k\pi)}{4k^2-1}$

$\frac{2}{\pi}(1-\sum\frac{2}{4k^2-1}) = 0 \Rightarrow \sum\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$



$b_n = 0$
$a_{2n+1} = 0$

Кусочно-гл. $f(x)$, $f(x-\pi) = f(x)$ (π-период) $\forall x \Leftrightarrow a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$

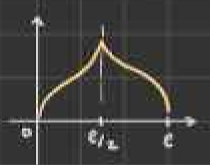
$a_{2n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos((2n-1)x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos((2n-1)x)dx + \int_0^\pi\right) =$

В 1 интегр. $\boxed{x = t-\pi}$: $\int_0^\pi \underbrace{f(t-\pi)}_{f(t)}\underbrace{\cos((2n-1)(t-\pi))}_{-\cos((2n-1)t)}dt = -\int_0^\pi f(t)\cos((2n-1)tdt)dt$ / b_{2n-1} – аналогично

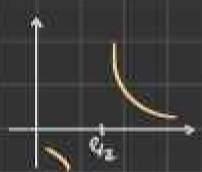
$\boxed{\Leftarrow}$ @ $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{2n}\cos(2nx) + b_{2n}\sin(2nx))$

$f(x-\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{2n}\cos(2n(x-\pi)) + b_{2n}\sin(2n(x-\pi))) = \sum(a_{2n}(\cos(2nx-2\pi n)) +$
$+ b_{2n}(\sin(2nx-2\pi n)) = \sum a_{2n}\cos(2nx) + b_{2n}\sin(2nx) = f(x)$ ■

(симм. оси)
а) $f(\ell - x) = f(x)$

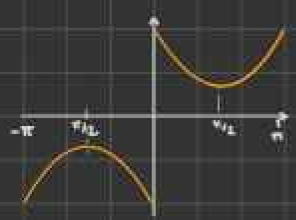


(симм. центр)
б) $f(x+\ell) = -f(x)$



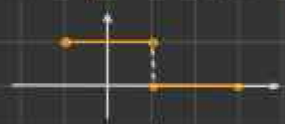
$f(x)$	а)	б)
чёт	$a_{2n-1}=0$, $b_n=0$	$a_{2n}=0$, $b_n=0$
неч	$b_{2n}=0$, $a_n=0$	$b_{2n-1}=0$, $a_n=0$

$\boxed{\text{№}}$ $f(x)$ – интегр-ма на $[0, 2\pi]$. Как продолж. $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, чтобы её р.Ф имел вид $\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin((2n-1)x)$?



f на $[-\ell, \ell]$, 2ℓ - период; $x = \frac{\ell y}{\pi}$ $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi n x}{\ell} + b_n\sin\frac{\pi n x}{\ell})$ $a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx$ $b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx$

$f(x) = \begin{cases} 1, & -1\le x<1 \\ 0, & 1\le x<3 \end{cases}$, $\boxed{2\ell = 4}$



$\boxed{Д/з}$ $f(x) = \begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x<2 \\ 3-x, & 2\le x<3 \end{cases}$

$a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{2}{2\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi n}$ $b_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{2}{2\pi n}(-\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-1}^{1}) = 0$

Компл. ряда форма Фурье

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$ $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ по ф-лам Эйлера

$\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ $\qquad \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

$f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

$c_n = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n>0 \\ a_0/2, & n=0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n}+ib_{-n}), & n<0 \end{cases}$

$f(x) = x^2, \quad [-1,1]$

$2\ell = 2 \Rightarrow |\ell| = 1;$

$c_n = \dfrac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\, e^{-\frac{i\pi n x}{\ell}}$

№1 $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<\pi \\ -1, & -\pi<x<0 \end{cases}$

1) $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \dfrac{1}{2\pi}\left(-\int\limits_{-\pi}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi}\right) = \dfrac{1}{2\pi}\left(-\dfrac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{0} + \dfrac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{0}^{\pi}\right) = /-\tfrac{1}{i} = i/ = \dfrac{1}{2\pi n}\left(-(1-e^{i\pi n}) + e^{-i\pi n} - 1\right) = \dfrac{i}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 \\ -\frac{2i}{\pi n} \end{cases}$

$n \neq 0$, $\quad c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{2\pi}\left(x\Big|_{0}^{\pi} - x\Big|_{-\pi}^{0}\right) = 0$

2) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{-2i}{\pi(2k+1)} e^{i(2k+1)x} = /n = 2k+1/ = -\dfrac{2i}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{n}e^{inx} = -\dfrac{2i}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{n}\right) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2in} = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n} = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$

Д/з: фейнман

№2 $\dfrac{a\sin(x)}{1-2a\cos(x)+a^2}$, $|a|<1$ $\qquad \cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \{z = e^{ix}\} = \dfrac{z+z^{-1}}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$ $\qquad \sin(x) = \dfrac{z^2-1}{2iz}$

$\dfrac{a\sin(x)}{1-2a\cos(x)+a^2} = \dfrac{a(z^2-1)}{2i(z - a(z^2+1) + a^2 z)} = \{z - az^2 - a + a^2 z = (z-a) + a^2 z - az^2 = (z-a) - az(z-a) = (z-a)(1-az)\} = \dfrac{a(z^2-1)}{2i(1-az)(z-a)} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{A}{1-\frac{a}{z}} - \dfrac{B}{1-az}\right) \boxed{=}$ $\quad A=1,\ B=1$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, $|q|<1$

$|az| = |ae^{ix}| = |a| < 1$, $\quad |z| = |e^{ix}| = 1$

$\boxed{=}\ \dfrac{1}{2i}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a^n z^n - \dfrac{a^n}{z^n}\right)\right) = \dfrac{1}{2i}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z^n - z^{-n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$

Домашняя работа

$|a|<1$, $\quad \dfrac{1-a^2}{1-2a\cos(x)+a^2} = \dfrac{1-a^2}{1-az-a/z+a^2} = \dfrac{z(1-a^2)}{(z-a)(1-az)} = \dfrac{A}{(1-a/z)} + \dfrac{B}{(1-az)} = \dfrac{a}{z(1-a/z)} + \dfrac{1}{(1-az)} \overset{\left\{\substack{|a|<1 \\ |a/z| = |a| < 1}\right\}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{a^{n+1}}{z^{n+1}} + a^n z^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n+1} e^{-i(n+1)x} + a^n z^n = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} e^{ikx} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, где $c_n = \begin{cases} a^n, & n\geq 0 \\ a^{-n}, & n<0 \end{cases}$ $\quad -(n+1) = k \in (-\infty, -1)$

Равенство Ляпунова

Th. $f(x)$: $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < +\infty$; a_0, a_n, b_n — коэф. Ф. ф-ции f. Тогда справедливо $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

№1 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x|<\alpha \\ 0, & \alpha\leq|x|\leq\pi \end{cases}$, рав-во Ляп.-? $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2(\alpha n)}{n^2}$

$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\alpha} 0 + \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} dx + \int\limits_{\alpha}^{\pi} 0\right) = \dfrac{2\alpha}{\pi}$ $\qquad a_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\cos(nx)dx = \dfrac{2}{\pi n}\sin(\alpha n)$ $\qquad b_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin(\,)}_{\text{неч}}dx = 0$

$\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} dx = \dfrac{2\alpha}{\pi}$ $\qquad 2\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{\pi^2 n^2}\sin^2(\alpha n)\right) = \dfrac{2\alpha}{\pi}$ $\quad = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$

$\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2(\alpha n)}{n^2} = \dfrac{2\alpha\pi - 2\alpha^2}{\pi^2}$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2(\alpha n)}{n^2} = \dfrac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$ $\qquad \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

Д/з: $f(x) = |x|\cos(x)$, $x\in(-\pi,\pi)$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)^2}{(n^2-1)^4}$

f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-пер., C^1 (непр. дифф.) $\quad f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, $\quad f'(x)$ — непр. 2π-пер. $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{a_0'}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'\cos(nx) + b_n'\sin(nx)$, $\quad a_0' = 0$, $a_n' = nb_n$, $b_n' = -na_n$

$f(x)$ — диф-ма на $[0,\pi]$, $\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = 0$ $\qquad \underset{\text{нер-во Стеклова}}{\int\limits_{0}^{\pi}[f(x)]^2dx \leq \int\limits_{0}^{\pi}[f'(x)]^2dx}$, $\quad f(x) = A\cos(x)$

Док-во $f(x)$ продолжим $[-\pi,0]$ чётно, обр. кус-гл. на $[-\pi,\pi]$ $\int f^2 dx < \infty$, $\quad \dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2dx$ $\quad a_0 = 0$ $\quad b_n = 0$ $\quad \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$

$f'(x) \sim \dfrac{\tilde{a}_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n\cos(nx) + \tilde{b}_n\sin(nx))$ $\qquad \tilde{a}_0 = 0$ $\quad \tilde{a}_n = 0$ $\quad \tilde{b}_n = -na_n$

$\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$

Интеграл Фурье

f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R} \in C^1$ $\qquad f(x) = \underbrace{\int\limits_{0}^{\infty}[a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)]dy}_{\text{инт. Фурье}}$ $\qquad a(y) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ty)dt$ $\quad b(y) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ty)dt$

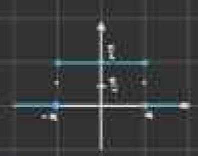
a: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — косинус преобр. Фурье; $\quad b$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — синус преобр. Фурье; $\quad$ * — интегр. ф-ла Фурье

Def. Функция f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ наз-ся абсолютно инт-ой на $[a,b]$, if $\int\limits_{a}^{b}|f(x)|dx$ — сходится. If $(a,b) = (-\infty,\infty)$, then f — абс. инт-ма

Def. f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ наз-ся кусочно-гладкой, если она куc-гл. $\forall$ конечного промеж-ка $[a,b]$

Th. $\exists f(x)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — кус-гл. абс. инт-ая ф-ия. Then $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad \int\limits_{0}^{\infty}[a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)]dy = \dfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, где $a(y) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ty)dt$, $\quad b(y) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ty)dt$

№ $a>0$ $\quad \int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\sin(ay)}{y}\cos(yx)dy = \underbrace{\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |x|<a \\ \frac{\pi}{4}, & |x|=a \\ 0, & |x|>a \end{cases}}_{f(x)}$



$\dfrac{\sin(ay)}{y} = a(y)$

1) Абс. интегр-ть: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \pi a$ $\qquad$ 2) Кус-гл. $\forall x\in(-\infty,-a)\cup(-a,a)\cup(a,+\infty)$ $\ f(x)\in C^1$ $\qquad \lim \dfrac{f(a+h) - f(a+0)}{h} = 0$

т. разр. $x = \pm a$

Д/з: $\boxed{\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\sin(\pi y)}{1-y^2}\sin(yx)dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x, & |x|\leq\pi \\ 0, & |x|>\pi \end{cases}}$ $\quad f(a-0) = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad f(a+0) = 0$, $\quad f(-a-0) = 0$, $\quad f(-a+0) = \dfrac{\pi}{2}$

$a(y) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ty)dt = \int\limits_{0}^{a}\cos(ty)dt = \dfrac{\sin(ty)}{y}\Big|_{t=0}^{t=a} = \dfrac{\sin(ay)}{y}$

Решить инт-ое ур-е $(a>0)$ $\quad \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos(yx)dx = \dfrac{a}{a^2+y^2}$, $x>0$

Обр. cos-преобр. Ф чёт. ф-ции $g(x) = \dfrac{1}{a^2+x^2}$ прод-им чёт. обр. на $(-\infty,\infty)$. Вычислим для $g(x)$ прямое cos-преобр.

$a(x) = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} g(t)\cos(xt)dt = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\cos(xt)}{a^2+t^2}dt = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{e^{-ax}}{a}$ (Лаплас) $\qquad (b(y)=0)$ $\qquad \int\limits_{0}^{\infty}|a(x)|dx$ — сх-ся, значит $f(x) = a(x) = \dfrac{e^{-ax}}{a}$

Д/з $\int|f(x)|dx = 2\pi < +\infty$

$b(y) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(yt)dt = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\dfrac{\pi}{2}\sin t\sin(yt)dt = \dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{\pi}\cos(t-yt)dt - \int\limits_{0}^{\pi}\cos(t+yt)dt\right) = \dfrac{1}{2(1-y)}\sin(t-ty)\Big|_{0}^{\pi} - \dfrac{1}{2(1+y)}\sin(t+ty)\Big|_{0}^{\pi} = \dfrac{\sin(\pi(1-y))}{2(1-y)} - \dfrac{\sin(\pi(1+y))}{2(1+y)} = \dfrac{\sin(\pi y)(2+2y)}{4-4y^2} = \dfrac{\sin\pi y}{1-y^2}$

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ представима своим инт. Фурье: $f(x) = \int_0^{+\infty} [a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)]dy$. Компл. форма: $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}dt\right]e^{ixy}dy$

Def: $F_+[f](y) = \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$; Прямое преобр. Ф ф-ции f: $\hat{f} = F_+[f]$; $F_-[f](x) = \check{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{ixy}dy$ – обратн. преобр. Ф

Формулы обращ-я преобр. Ф

① Док-ть, что $\hat{f}(x) = \check{f}(-x)$ $(\Leftrightarrow \check{f}(x) = \hat{f}(-x))$

$\underset{F_-[f](-x)}{\check{f}(-x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{iy(-x)}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy}dy = \hat{f}(x)$

② Линейность. $F_\pm[af+bg] = aF_\pm[f] + bF_\pm[g]$, $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $\}$ $f(x) = u(x) + iv(x)$

Док-ть рав-во и найти их аналоги для обр. преобр-я $(a\in\mathbb{R},\ f: \mathbb{R}\to\mathbb{C})$.

③ Сдвиг по фазе у ф-ии приводит к сдвигу по аргументу её преобр. Ф.

$F_+[e^{iax}f(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}f(x)e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-ix(y-a)}f(x)dx = F_+[f](y-a)$

$F_-[e^{iax}f(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}f(x)e^{ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix(y+a)}f(x)dx = F_-[f](y+a)$

Следствие: $F_+[f(x)\cos ax](y) = \frac{1}{2}(F_+[f(x)](y-a) + F_+[f(x)](y+a))$ $\quad F_-[f(x)\cos ax](y) = \frac{1}{2}(F_-[f(x)](y-a) + F_-[f(x)](y+a))$

$F_+[f(x)\sin ax](y) = \frac{1}{2i}(F_+[f(x)](y-a) - F_+[f(x)](y+a))$ $\quad F_-[f(x)\sin ax](y) = \frac{1}{2i}(F_-[f(x)](y-a) - F_-[f(x)](y+a))$

Док-ть рав-во и найти их аналоги для обр. преобр-я $(a\in\mathbb{R},\ f: \mathbb{R}\to\mathbb{C})$

④ Сдвиг по аргументу у ф-ии приводит к сдвигу по фазе у её преобразования Ф.

$F_+[f(x-a)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\underbrace{x-a}_{s})e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-iy(s+a)}ds = e^{-iay}F_+[f(s)](y)$

$F_-[f(x-a)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)e^{ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{iy(z+a)}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iay}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx = e^{iay}F_-[f(x)](y)$

Док-ть, вычислить аналог для обр. преобр. Ф.

⑤ $\forall a\neq 0$ if для $f(x)$ опр. $\hat{f}(y)$ then для $f(ax)$ опр. $\frac{1}{a}\hat{f}(y/a)$

$\hat{f} = F_+[f(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$

$F_+[f(ax)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)e^{-ixy}dx = \left\{\begin{smallmatrix} w = ax \\ x = w/a \\ dx = \frac{1}{a}dw\end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(w)e^{-i\frac{w}{a}y}dw = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{y}{a}\right)$

унитарн. эквив.
опер-ов импульса / координаты

Док-ть, $F_+\left[\frac{df}{dx}\right](y) = iy\,F_+[f(x)](y)$

⑥ $\exists f - f'$ – непр. и абс. инт. на $\mathbb{R}$

$F_+[f'(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int f(x)e^{-ixy}(-iy)dx\right) \circledcirc$

$|e^{-ixy}| = 1 \Rightarrow \circledcirc\ iy\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx = iy\,F_+[f(x)](y)$

Утв. If $f - f'$ – абс. инт. then $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$

f – абс. инт., f' – огр. $\Leftrightarrow f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$

$\left|\lim_{x\to+\infty} f(x) - f(0)\right| = \left|\int_0^{+\infty} f'(x)dx\right| < +\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ – огр. на $+\infty$

⑦ $\exists f\in C(\mathbb{R})$, $f(x)$ и $xf(x)$ – абс. инт. на $\mathbb{R}$

$\frac{dF_+}{dy}[f(x)](y) = -iF_+[xf(x)](y)$ $\quad \frac{dF_-}{dy}[f(x)](y) = iF_-[xf(x)](y)$

$f\in C_1$

$\frac{dF_+}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-ixy}dx\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)\frac{de^{-ixy}}{dy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)(-ix)e^{-ixy}dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int xf(x)e^{-ixy}dx \circledcirc$

$\circledcirc\ \boxed{-iF_+[xf(x)](y)}$ ч.т.д.

Найти прямое и обратное преобр. Ф-е

(1) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x|\le a \\ 0, & |x|>a\end{cases}$

$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ixy}}{-iy}\Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-iya} - e^{iya}}{-iy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin ya}{y}$

$\hat{f}(-x) = \check{f}(x)$ $\quad \check{f}(x) = \hat{f}(-x)$
$\check{f}(-x) = \hat{f}(x)$

(2) $g(x) = \begin{cases}\cos x, & |x|\le\pi \\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$

$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot e^{-ixy}dx$

$g(x) = f(x)\cos(x)$

$F_+[f(x)\cos(bx)] = \frac{1}{2}(F_+[f(x)](y-b) + F_+[f(x)](y+b)) \circledcirc \begin{smallmatrix} a=\pi \\ b=1\end{smallmatrix}$

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\pi(y-1)}{y-1} + \frac{\sin\pi(y+1)}{y+1}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{y\sin\pi y}{1-y^2}$ $\quad //\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

Д/З

(3) $f(x) = \begin{cases} x & |x|\le a \\ 0 & |x|>a\end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi \\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$

(5) $f(x) = \begin{cases} x\sin(x) & |x|\le\pi \\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$

$\frac{dF_+}{dy}[f(x)](y) = -iF_+[xf(x)](y)$

(3) $f(x) = \begin{cases} x, & |x|\le a \\ 0, & |x|>a\end{cases}$

$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} xe^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{iy}\right)\left(a(\overset{-2i\sin(ay)}{e^{-iay} - e^{iay}}) - \frac{e^{-iay} - e^{iay}}{iy}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin(ay)}{y}(a - i)$

(4) $f(x) = \begin{cases}\sin(x), & |x|\le\pi \\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$ $\qquad$ (5) $f(x) = \begin{cases} x\sin(x) & |x|\le\pi \\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$

СВЕРТКА. Ф-ЛА ПУАССОНА (и её применение к суммированию числовых рядов)

Мультииндекс α – вектор $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ $\forall\alpha_j\in\mathbb{Z}$; $\alpha_j\ge 0$. n – длина мульти-са. $|\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n$ – вес

$\alpha+\beta = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n)$ – сложение; $\alpha\le\beta$ $\forall_j$ $\alpha_j\le\beta_j$ – сравнение; $\forall\underset{\text{вектор}}{x}\in\mathbb{R}^n$ x^α α – м/и $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$

$f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, дост. гладкая, $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ $\quad \begin{smallmatrix}(x,y)\\ \alpha=(1,2)\end{smallmatrix}$

Def: I Функция $f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ наз-ся быстроубыв. ф-ей, if (1) $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ (2) $\forall\alpha$ – м/и и $\forall p>0$ $\exists K_{\alpha,p} = const < +\infty$ $|D^\alpha f| \le \frac{K_{\alpha p}}{1+|x|^p}$, $|x| = (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$

II Функция $f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ наз-ся быстроубыв. ф-ей, if (1) $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ (2) $\forall\alpha$ – м/и ф-ия $x\to x^\alpha D^\beta f(x)$ – огр. в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\exists C_{\alpha,\beta} = const < +\infty$, т.ч. $|x^\alpha D^\beta f| \le C_{\alpha\beta}$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$

Свойства: (1) If $f,g\in S(\mathbb{R}^n)$ $\forall a,b\in\mathbb{C}$, $af+bg\in S(\mathbb{R}^n)$
(2) If $f\in S(\mathbb{R}^n)$ $\forall\alpha$ – м/и $D^\alpha f\in S(\mathbb{R}^n)$
(3) If $f\in S(\mathbb{R}^n)$ $\forall\alpha$ – м/и $x^\alpha\cdot f\in S(\mathbb{R}^n)$
(4) If $f\in S(\mathbb{R}^n)$, $P(x)$ – многочл. $P(x)f\in S(\mathbb{R}^n)$

преобр. Ф. б. уб. ф-й:

$\hat{f} = (2\pi)^{-n/2}\int f(x)e^{-i(x,y)}dx = F_+[f]$
$\check{f} = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i(x,y)}dx = F_-[f]$
$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

Св-ва преобр. Ф. б. уб. ф-й:

① Линейность $\forall a,b\in\mathbb{C}$, $f,g\in S(\mathbb{R}^n)$: $F_\pm[af+bg] = aF_\pm[f] + bF_\pm[g]$

② $\forall f\in S(\mathbb{R}^n)$, $\forall\alpha$ – м/и $F_\pm[x^\alpha f] = (\pm i)^{|\alpha|}D^\alpha F_\pm$ $\qquad$ ③ –//– $F_\pm[D^\alpha f] = (\pm i)^{|\alpha|}F_\pm[f]$

④ A – невырожд. м-ца $n\times n$ b – n-мерн. в-р $f\in S(\mathbb{R}^n)$ $F_\pm[f(Ax+b)] = |\det A^{-1}|e^{\pm i(b,A^{-1}y)}\cdot F_\pm[f(x)]((A^{-1})^T y)$

⑤ $\forall f\in S(\mathbb{R}^n)$, $x_0\in\mathbb{R}^n$: $F_\pm[f(x-x_0)] = e^{\mp i(x_0,y)}F_\pm[f(x)]$ $\qquad$ ⑥ $\forall f\in S(\mathbb{R}^n)$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ $F_\pm[af(x)](y) = \frac{1}{|a|}F_\pm[f(x)](y/a)$

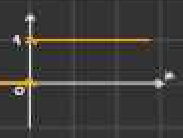
⑦ $f\in S(\mathbb{R}^n)$, $F_\pm[f]\in S(\mathbb{R}^n)$ $\qquad$ ⑧ $f\in S(\mathbb{R}^n)$ $F_+[F_-[f]] = F_-[F_+[f]] = f$

Def $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ свёртка $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\,dy$

свойства свёртки:
1. Коммутативность: $f*g = g*f$
2. Ассоциат. $(f*g)*h = f*(g*h)$
3. Лин-ть по 1-му аргум-ту: $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall f, g, h \in S(\mathbb{R}^n)$: $(af + bg)*h = a(f*h) + b(g*h)$
4. $\forall \alpha$ – м/и $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g = f*(D^\alpha g)$
5. $F_1[f*g] = (2\pi)^{n/2} F_1[f] \cdot F_1[g]$
6. $F_1[f \cdot g] = (2\pi)^{-n/2} F_1[f] * F_1[g]$

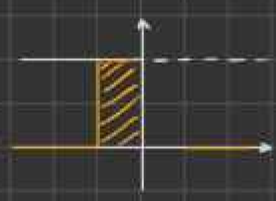
Формула Пуассона: **Th** if $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, т.ч. $\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$

Ф-ия Хевисайда:
$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



[1] $(H*H)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(y) \underbrace{H(x-y)}_{g}\,dy = \int_0^{+\infty} g\,dy \;=$

$$g = \begin{cases} 1, & 0 < y < x, \; x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \quad = \begin{cases} \int_0^x 1\,dy, & 0 < y < x, \; x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = xH(x)$$



Д/з:
1. $H(x) * (H(x)\sin(x))$
2. $H(x) * H(1+x)$

$$H(x) * (H(x)\sin(x)) = \int_0^{+\infty} H(y) \cdot H(x-y) \cdot \sin(x-y)\,dy = \begin{cases} \int_0^x \sin(x-y)\,dy, & 0 < y < x \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} (1-\cos(x)) \\ 0 \end{cases} = H(x)(1-\cos(x))$$

ПРЕОБРАЗОВ. ЛАПЛАСА $\mathcal{L}$

Def: ф-ия $f: [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ непр. всюду, кроме изолир. точек (лок. интегр.), наз. **оригиналом**, if $\exists a \in \mathbb{R}$: $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-at}\,dt$ сх-ся

Def: $a(f) = \inf a$, a – показ-ль роста

Def: **Изображением** оригинала $f(t)$ наз-ся ф-ия $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt}\,dt$, опр-ная в $\operatorname{Re} p > a(f)$ $\quad f(t) \risingdotseq F(p)$

Def: **Преобраз. Лапласа** – преобр., ч сопост-ет оригиналу $f(t)$ изобр. $F(p)$: $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

№1 $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

$\int_0^{\infty} |H(t)| e^{-at}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-at}\,dt = -\frac{e^{-at}}{a}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}$ $\left(e^{-at} \xrightarrow[t \to \infty]{\text{сх-ся}} 0 \right)$

$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^{\infty} H(t) e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}$ $\quad \boxed{a(t) = 0}$
$\underline{\operatorname{Re} p > 0}$

№2 Явл-ся ли ф-я ориг-ом и найти показ. роста
1. $f(t) = e^{(2+3i)t}$
$\int_0^{\infty} e^{(2+3i)t - at}\,dt = \frac{e^{(2+3i-a)t}}{2+3i-a}\Big|_0^{\infty}$ $\to$ $a > 2+3i \Rightarrow$ ориг, $\quad a(f) = \inf a = 2$
$e^2 e^{3i} = e^2(\overbrace{\cos + i\sin}^{\text{огр. на } \infty,\ |\cdot| \le 1})$
2. $f(t) = \frac{1}{t}$
$\int_0^{\infty} |t^{-1}| e^{-at}\,dt \quad \frac{1}{te^{at}}$
не лок. инт-ма
3. $f = \frac{1}{\sqrt{t}}$
$\int_0^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{t}}\right| e^{-at}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{at}\sqrt{t}}\,dt$

№3 Найти изобр. и указать обл. опр. изобр.
$f(t) = e^{\alpha t}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ $\quad F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t - pt}\,dt = \frac{e^{(\alpha - p)t}}{\alpha - p}\Big|_0^{\infty} = \left\{ \begin{matrix} \alpha - p < 0 \\ \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re} p \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\alpha - p}(0 - 1) = \frac{1}{p - \alpha}$

Д/з
Найти изобр. и указ. обл. опр-я изобр., $f(t) = t^n$

$f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$
$\int_0^{\infty} |t^n| e^{-at}\,dt = \int_0^{\infty} t^n e^{-at}\,dt = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^n} \int_0^{\infty} (at)^n e^{-at}\,d(at) = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} = \frac{n!}{a^{n+1}}$

$f(t) = t^\lambda$ $(\lambda > -1)$
$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}$ $\quad \operatorname{Re} p > 0$ $\quad$ ведь, где $p^{\lambda+1} > 0 \Leftrightarrow p > 0$

$f(t) = 3^t$
$\int_0^{\infty} 3^t e^{-at}\,dt = -\frac{3^t}{ae^{at}}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \ln 3 \cdot e^{-at} 3^t\,dt = \frac{1}{a} + \left[\frac{\ln 3}{a} - \overbrace{\frac{1}{a}\int_0^{\infty} 3^t e^{-at}\,dt}^{J}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{a - \ln 3}$

Свойства преобр. Лапласа

Th [Линейность]
if $f(t), g(t)$ – ориги $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\quad \mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha\mathcal{L}\{f\} + \beta\mathcal{L}\{g\}$

$f(t) = e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p - \alpha}$
$f(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$

$\sin(\omega t) \risingdotseq \frac{1}{2i(p - i\omega)} - \frac{1}{2i(p + i\omega)} = \frac{\omega}{(p - i\omega)(p + i\omega)}$
$\cos(\omega t) \risingdotseq \frac{2p}{2(p - i\omega)(p + i\omega)} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Th [Подобие]
if $f(t)$ – ориг, $f(t) \risingdotseq F(p)$ then $\forall a > 0$ $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$

Th [Смещение]
if $f(t)$ – ориг, $f(t) \risingdotseq F(p)$ then $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ $e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p - \alpha)$, $\operatorname{Re} p > a(f) - \operatorname{Re}\alpha$

$f(t) = t^2 - 1$
$t^2 - 1 \cdot H \risingdotseq \frac{2!}{p^{2+1}} - \frac{1}{p} = \frac{2 - p^2}{p^3}$

$\cos^2(\omega t)$
$\cos(\omega t) \cdot \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{p - i\omega}{(p - i\omega)^2 + \omega^2} + \frac{p + i\omega}{(p + i\omega)^2 + \omega^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(p + i\omega)(p^2 + 2i\omega p) - (p + i\omega)(p^2 - 2i\omega t)}{p^4 - (2i\omega p)^2}\right]$

$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \risingdotseq \frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p^2 + 4\omega^2)} \overset{\operatorname{Re} p > 0}{\risingdotseq} \frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$

Th [о диф-нии ориг-ла]
$\exists$ if $f(t)$ – непр. при $t \ge 0$ и диф-ма при $t > 0$, причём $f'(t)$ – ориг., then $f(t)$ – ориг. и $\mathcal{L}\{f'\}(p) = p\mathcal{L}\{f\}(p) - f(0)$

Th [о интег-нии ориг-ла]
if $f(t)$ – ориг., непр. на $[0, +\infty)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, then $\int_0^t f(u)\,du \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$

Th [о диф-нии изобр.]
if $f(t)$, $tf(t)$ – ориг., $f(t) \risingdotseq F(p)$, then $F'(p) \risingdotseq -tf(t)$

Th [об инт-ии изобр.]
if $f(t)$, $\frac{f(t)}{t}$ – ориг., $f(t) \risingdotseq F(p)$, then $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} F(q)\,dq$

$F(p) = \frac{3}{p+2} \risingdotseq 3e^{-2t}$
$F(p) = \frac{1}{(p-3)^2}$
$F(p) = \frac{1}{p^2 + 9} = \frac{\sin(3t)}{3}$

$$H_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}, \quad a > 0, \quad H(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$$

$H_a(t) = H(t-a) \risingdotseq e^{-pa} \cdot \frac{1}{p}$

$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le a \\ 0, & a < t < 0 \end{cases}$
$\|$
$H(t) - H_a(t) \risingdotseq \frac{1 - e^{-pa}}{p}$

П 11

Th [о запаздывании ориг-ла]:
if $f(t)$ – ориг. и $a \in \mathbb{R}$, $\underline{a > 0}$, $\quad \mathcal{L}\{f(t-a)H_a t\}(p) = e^{-ap}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$

Def: свёртка оригиналов $f_1(t)$, $f_2(t)$: $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\xi) f_2(t - \xi)\,d\xi$

Th Бореля:
$\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} \cdot \mathcal{L}\{f_2\}$

Th Дюамеля:
if f_1 – оригинал, непр. на $[0; +\infty)$, f_2 – ориг, непр. дифф. на $[0; +\infty)$, then $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(f_1 * f_2)\right] = p \cdot \mathcal{L}\{f_1\} \cdot \mathcal{L}\{f_2\}$

№1 $f''(t)+3f'(t)+2f(t)=1$ (*) $f(0)=-1$, $f'(0)=-2$

1) $\mathcal{L}\{f'\}=p\cdot\mathcal{L}\{f\}-f(0)$

$\mathcal{L}\{f''\}=p^2\mathcal{L}\{f\}-pf(0)-f'(0)$

$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}=p^n\mathcal{L}\{f\}-p^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$

$\mathcal{L}\{*\}=\mathcal{L}\{f''\}+3\mathcal{L}\{f'\}+2\mathcal{L}\{f\}+\mathcal{L}\{1\}=p^2\mathcal{L}\{f\}-p\cdot f(0)-f'(0)+3p\mathcal{L}\{f\}-3f(0)$ ⊕

⊕ $2\mathcal{L}\{f\}+\frac{1}{p}=\mathcal{L}\{f\}\cdot(p^2+3p-2)+p+\frac{1}{p}+5$

№2 Найти оригинал, $\ddagger$ ему соответствует изобр. $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+\omega^2)}$; $\omega\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

1) Выбираем $\sin(\omega t)\ \dot{=}\ \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$\int_0^t \sin(\omega u)\,du\ \dot{=}\ \frac{1}{p}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ $\frac{1}{\omega}(1-\cos(\omega t))\ \dot{=}\ \frac{1}{p}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

2) $\frac{1}{\omega}\int_0^t(1-\cos(\omega t))\,du\ \dot{=}\ \frac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{\omega}\left[t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\dot{=}\ \frac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ $t=\frac{t}{\omega^2}-\frac{\sin(\omega t)}{\omega^3}$

$\int_0^t f\ \dot{=}\ \frac{F}{p}$

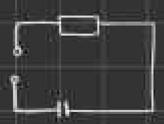
№3 $F(p)=\frac{1}{p(p-2)}$

1) $e^{2t}\ \dot{=}\ \frac{1}{p-2}$ $\int_0^t e^{2u}du=\frac{e^{2u}}{2}\Big|_0^t=\frac{e^{2t}}{2}-1\ \dot{=}\ \frac{1}{p(p-2)}$

1. $E_R=A\cdot I(t)$ $E_C=\frac{1}{C}Q=\frac{1}{C}=\frac{1}{C}\int_{t_0}^t I(u)\,du$

$E_L=L\frac{dI}{dt}$

№4



$H_a(t)=H(t-a)=\begin{cases}1, & 0<a\le t\\ 0, & t<a\end{cases}$

1) $R\cdot I(t)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^t I(u)\,du=E(t)=E_0(H_a(t)-H_b(t))$

$R\cdot\mathcal{L}\{I\}+\frac{1}{Cp}\mathcal{L}\{I\}=\frac{E_0}{p}[e^{-ap}-e^{-bp}]$

$\mathcal{L}\{I\}=\frac{E_0}{R}\cdot\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}[e^{-ap}-e^{-bp}]$

$\mathcal{L}\{e^{-t/RC}\}$

2) $I=\frac{E_0}{R}\left[e^{-\frac{(t-a)}{RC}}H_a(t)-e^{-\frac{(t-b)}{RC}}H_b(t)\right]=\begin{cases}0, & t<a\\ \frac{E_0}{R}e^{-\frac{(t-a)}{RC}}, & a<t<b\\ \frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\left[e^{\frac{a}{RC}}-e^{\frac{b}{RC}}\right], & t>b\end{cases}$ ← th. "о запаздывании оригинала"

№5 $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=2e^{3t}$; $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$

1) Предположим, $x(t)\ \dot{=}\ X$

$p^2X-p\cancel{x(0)}-\cancel{\dot{x}(0)}-3pX+3\cancel{x(0)}+2X=\frac{2}{p-3}$

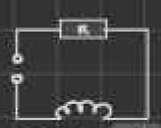
$p^2X-3pX+2X=\frac{2}{p-3}$

$X=\frac{2}{p-3}\cdot\frac{1}{p^2-3p+2}=\frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}=\frac{A(p-2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-1)(p-2)}{(p-1)(p-2)(p-3)}$ ⊜ $\begin{cases}A+B+C=0 & (\text{при } p^2)\\ -5A-4B-3C=0 & (\text{при } p)\\ 6A+3B+2C=2 & (\text{при } 1)\end{cases}$ ⊜ $\frac{1}{p-1}-\frac{2}{p-2}+\frac{1}{p-3}=\frac{1}{6}$

$C=-A-B$
$-5A-4B+3A+3B=0$
$-2A-B=0 \Rightarrow B=-2A$
$C=A$
$6A-6A+2A=2 \Rightarrow$
$A=C=1$
$B=-2$

2) $x(t)=e^t-2e^{2t}+e^{3t}$

Hw



$E(t)=RI+L\frac{dI}{dt}$

$R\cdot\mathcal{L}\{I\}+pL\cdot\mathcal{L}\{I\}-L\cancel{I(0)}=\mathcal{L}\{f(E(t))\}$

$\mathcal{L}\{I\}=\frac{1}{R+pL}\mathcal{L}\{tH(t)-tH(t-1)\}$

$\mathcal{L}\{e^{-\frac{Rt}{L}}\}$

$I=\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}(f_1*f_2)\}=\int_0^t[tH(t)-tH(t-1)]e^{-\frac{R}{L}(t-u)}du=\frac{Lt}{R}e^{-\frac{R}{L}t}(1+e^{\frac{R}{L}})$

$E(t)=t(H(t)-H(t-1))$

$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$ – нестр. опр. f Дирака

Def: $\exists$ G – открытое множ-во в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi: G \to \mathbb{C}$. Носитель ф-ии φ (supp φ) – замыкание в $\mathbb{R}^n$ множ-во всех $x \in G: \varphi(x) \neq 0$

$x \in G$ $x \in \operatorname{supp}\varphi$ if $\exists x_1 \ldots x_n \in G: \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x : \varphi(x_i) \neq 0\ \forall i$

Пр-р: $\varphi: (0,1) \to \mathbb{C}$, $\varphi(x) = 1\ \forall x$, $\operatorname{supp}\varphi = [0,1]$

Def: $\varphi: G \to \mathbb{C}$ наз-ся основной (пробной), if φ – бескон. дифф-ма и supp φ явл. огр. подмножеством G $\Leftrightarrow$
1) φ – беск. дифф-ма
2) supp φ – компактное подмнож. G
3) supp $\varphi \cap \partial G = \varnothing$

D(G) – векторное простр-во основных функций

Последов-ть основных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ сх-ся к $\varphi \in D(G)$ if
1. $\exists M \in G$, M – огр. в $\mathbb{R}^n$, M замкн.: supp $\varphi_i \subseteq M\ \forall i$
2. $\forall \alpha$ – м/и $D^\alpha\varphi_1, D^\alpha\varphi_2, \ldots, D^\alpha\varphi_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} D^\alpha\varphi$ $\left(\sup|D^\alpha\varphi_n(x) - D^\alpha\varphi(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right)$

Def: if $\forall$ отображение $F: D(G) \to \mathbb{C}$ – функционал

Def: if $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(G)$ $F(a\varphi_1 + b\varphi_2) = aF(\varphi_1) + bF(\varphi_2)$, then F – лин-й ф-нал

Def: Непр. ф-ал $F: \forall \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in D(G) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ посл-ть $F(\varphi_1), \ldots, F(\varphi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F$

Def: Обобщённая функция – линейный непр. ф-нал на D(G); D'(G) – пр-во обобщ. ф-ций. Обозн. $F(\varphi)$ or (F, φ)

$f \in L_{1,loc}$ (лок. интегр.) if $\forall x_0 \in G$ $\exists U(x_0)$: $\int\limits_{U(x_0)} |f(x)|dx < +\infty$

Th. 1: $f \in L_{1,loc}$ $F(\varphi) = \int\limits_G f(x)\varphi(x)dx$ (*)

Th. 2: $\delta: D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ (Дирак)

Th. 3: $\mathcal{P}\frac{1}{x}: D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$: $(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \underbrace{v.p.}_{\text{инт-ла в см. глав. знач}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx$

Th. 4: $\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}dx$

Ф-ла [Сохоцкого]: $\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta + \mathcal{P}\frac{1}{x}$

Def: Обобщ. ф-я наз-ся регулярной, if $\exists$ "обычная" $f \in L_{1,loc}(G)$: f опр-ся из (*)
Обобщ. ф-я наз-ся сингулярной, if она не регулярная

Def: Послед-ть $F_1, \ldots, F_n \in D'(G)$ сх-ся к $F \in D$ if $\forall \varphi \in D(G)$ $F_1(\varphi), \ldots, F_n(\varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F$

Def: Посл-ть $h_1, \ldots, h_n$ вещественнозн. функций, опр. на всём $\mathbb{R}^n$, наз-ся δ-образной, if
1. $\forall k \in \mathbb{N}$ функции $h_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегр. в $\mathbb{R}^n$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$ справедливо $h_k \geq 0$
3. $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists \varepsilon_k > 0: h_k(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n: |x| > \varepsilon_k$
4. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} h_k(x)dx = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$h_k = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |x| \leq \varepsilon_k \\ 0 & |x| > \varepsilon_k \end{cases}$

Док-ть, что последов-ть $\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}_{f_\varepsilon(x)} \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} \delta(x)$

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$

if $x=0$ $f_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$
if $x\neq 0$ $f_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$

- $f_\varepsilon(x)$ – непр $\Rightarrow f_\varepsilon \in L_{1,loc} \Rightarrow$ порождает рег. обобщ. ф-ию
- $F(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \varphi(x)dx = \left\{t = \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)\, 2\sqrt{\varepsilon}\, dt$

$|e^{-t^2}\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)| \leq Me^{-t^2}$

φ – осн. $\Rightarrow$ огр. $\Rightarrow \exists M > 0 = const: |\varphi| \leq M$

$\lim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi(2\sqrt{\varepsilon}t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{\varepsilon}t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi(0)dt = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt}_{\sqrt{\pi}} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$

Док-ть, что $\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} \delta(x)$

if $x=0$ $f_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$
if $x\neq 0$ $f_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$

- $f_\varepsilon(x)$ – непр $\Rightarrow f_\varepsilon \in L_{1,loc} \Rightarrow$ порождает рег. обобщ. ф-ию
- $F(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx = \left\{\begin{matrix} t = \frac{x}{\varepsilon} \\ dx = \varepsilon dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\varphi(t\varepsilon)dt \Rightarrow$

$\left|\frac{1}{t^2+1}\varphi(t\varepsilon)\right| \leq \frac{1}{t^2+1} \cdot M \Rightarrow$ огр. $\Rightarrow$ вносим lim

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\varphi(0) \int \frac{1}{t^2+1}dt = \varphi(0)$

$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \cos(xy)dy = \delta(x)$

Запишем несобств. инт. как предел

$\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A \cos(xy)dy = \frac{1}{\pi}\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\Big|_0^{+A} = \frac{1}{\pi}\lim\limits_{A\to\infty} \frac{\sin Ax}{x}$

$f_1, \ldots, f_n$ и $F_1, \ldots, F_n$ $f_n(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2x^2} \to \delta(x)$ $F_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n(t)dt$

1) $k = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ $f_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$ – решали

2) F_n – непр. огр. ф-я

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2t^2}dt\right]\varphi(x)dx = /z = kt/ = \lim \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{kx} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz\right]\varphi(x)dx \circledcirc$

$\circledcirc \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x<0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-z^2}dz = \frac{1}{2}, & x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = 1, & x>0 \end{cases}$

$H(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

! напис. в Александрова

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – невырожд. лин. преобр., $\vec{b}$ – фикс в-р в $\mathbb{R}^n$, $F \in D'(\mathbb{R}^n)$. $(\underbrace{F(Ax+b)}_{?}, \varphi(x)) = \left(F(y), \frac{\varphi(A^{-1}(y-b))}{|\det A|}\right)$ $\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. $F(Ax+b)$ получена из $F(x)$ линейн. заменой перем-х.

Пр-р:
1) $(\delta(-x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(-x)) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$, $\Rightarrow \delta$ – чет
2) $(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0)$

Th: $\exists$ функц. $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непр. диф-ма и имеет only простые нули $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (т.е. y простой нуль ф. a if $a(y)=0$, $a'(y)\neq 0$), then $\delta(a(x)) = \sum \frac{\delta(x-x_i)}{|a'(x_i)|}$

1) $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

$\delta(ax)$ $a(x) = a \cdot x$ $x=0$ – прост. нуль

$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$

2) $\delta(\sin ax)$

3) $\delta(x^2 - a^2)$

какая-то очень важная ×

$f(t)$ - (оригинал)	Преобр. Лапласа $\mathcal{L}$	Обл. опр. изобр.
$H(t)$	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$\operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re} p$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
a^t	$\frac{1}{p-\ln a}$	$\operatorname{Re} p > \ln a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
$\sin(\omega t + a)$	$\frac{\omega\cdot\cos(a) \pm p\cdot\sin(a)}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$

14.12

G - область
D(G) ∋ $\varphi: G \to \mathbb{C}$
D'(G) ∋ $F: D(G) \to \mathbb{C}$

$\exists F \in D'(G)$, $a: G \to \mathbb{C}$ - ∞ диф-я

Def Произведением обобщ. функции F на ∞-диф-ю ф-ию a наз-ся новая ф-я aF, действующая на $\forall$ пробную ф-ю φ по правилу: $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$

- Свойства

1. $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$

   $\forall \varphi \in D(G)$ $\quad (a(x)\delta(x), \varphi) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta(x), \varphi(x)) = (a(0)\delta(x), \varphi(x))$

2. $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$

   $\forall \varphi \in D(G)$ $\quad (x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = (\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)) = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x)dx = (1, \varphi)$

3. $x \cdot \frac{1}{x \pm i0} = 1 =$ / ф-ла Сохоцкого / $= x \cdot (\mp i\pi\delta + \mathcal{P}\frac{1}{x}) = \underbrace{\mp i\pi x \cdot \delta}_{=0 \text{ по св. 1}} + \underbrace{x\mathcal{P}\frac{1}{x}}_{=1 \text{ по св. 2}}$

$\exists G$ - обл. в $\mathbb{R}^n$, α - м/и

Def Производные порядка α обобщ. ф-ии $F \in D'(G)$ наз-ся новая ф-я, действующая на $\forall$ пробную ф-ю φ по правилу: $(D^\alpha F, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F, D^\alpha \varphi)$

Пример $(\delta'(x), \varphi(x)) = -(\delta, \varphi'(x)) = -\varphi'(0)$, т.е. $(\delta^{(n)}(x), \varphi(x)) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$

Def Ф-ия $f(x)$ наз-ся кусочно-гладкой, if она к-т. в смысле рядов Фурье

Th: [о связи классической и обобщ. производных кус-гл функции]

$\forall$ кус-гл $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ справедливо: $\quad f'_{об} = f'_{кл} + \sum [f]_{x_k}\delta(x - x_k)$, где $[f]_{x_k} = f(x+0) - f(x-0)$ - скачок

$H'(x)$ - ?

пробн. ф-я вблизи бесконечн. опред. $= 0$

$(H'(x), \varphi(x)) = -(H(x), \varphi'(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty}\varphi'(x)dx = -\varphi\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$

Вычислить производные $f^{(n)}$ $k = 1$

- $f(x) = |x|$ - кус-гл $\quad$ прост. котл. $x = 0$ $\quad [f]_0 = 0$ $\quad$ $(|x|)'' = (-1 + 2H(x))' = 2\delta(x)$

  $f'_{кл} = (|x|)' = \text{sgn}(x)$ $\quad f'_{об} = \text{sgn}(x) + \underline{0 \cdot \delta(x-0)} = \text{sgn}(x) = -1 + 2H(x)$ $\quad (|x|)^{(n)} = 2\delta^{(n-2)}(x)$

Def [Лин. диф. оператор] Линейным диф-ым оператором порядка k с ∞ диф-ми коэфф-тами в обл. $G \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся выражение $L = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x)D^\alpha$, a_α - ∞ диф. функции, причём хотя бы для одного $\alpha = k$ ф-ия $a_\alpha \neq 0$ (может $= 0$ в некот. т-ках, но не всех)

F - обобщ. $\quad LF = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x)D^\alpha F$

Def if $F_1, F_2 \in D'(G)$ удовл. рав-ву $LF_1 = F_2$, then F_1 явл-ся решением диф. ур. $LF = F_2$

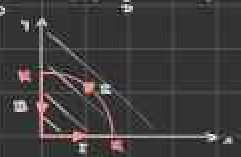
Def Обобщ. ф-я E наз-ся фундам-ым реш-ем оператора L, if $LE = \delta$

$k = 2$ $\qquad$ Блин, не успела 💅💅

$(0,1)$

Док-ть, что $F(x,y) = H(x)H(y)$ явл-ся фунд-ым решением оператора $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$

{ ф-ла Грина
{ $\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D Q_x - P_y \, dxdy$



Док-во: $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \varphi\right) = \left(F, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) = \iint H(x)H(y)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}dxdy = \iint_{x>0,\, y>0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}dxdy = / P = 0, \, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} / \ominus$

$\ominus \lim_{R \to \infty} \oint_{\partial D} \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = \varphi(0,0) = \delta(x,y)$

I $\int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi(x,0)}{\partial y}dy = 0$ $\quad$ II $\int = 0$ $\quad$ III $\int_{+\infty}^{0} \frac{\partial \varphi(0,y)}{\partial y}dy = \varphi(0,y)\Big|_{+\infty}^{0} = \varphi(0,0)$

Th: [о фунд. решен. обыкнов. (скалярн.) диф. опер-ре]

$\exists L = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(x)\frac{d^j}{dx^j}$ - обыкн. лин. диф. опер-р в $\mathbb{R}$, причём $a_0(x) \equiv 1$, а $a_k(x)$ - ∞ диф-мп

$\exists$ функция $f_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^k(\mathbb{R})$ явл-ся "классическим" решением однор. ур-я $LF = 0$, и удовл. усл. $f_0(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-2)}(0) = 0$, $f_0^{(k-1)} = 1$

then регулярн. обобщ. ф-я $E = H(x)f_0(x)$ явл. фунд. реш. оп-ра L (т.е. $LE = \delta$)

Найти фунд. реш. опер-ра $L = \frac{d}{dx} - \lambda$

Найдём реш. $Lf = 0$

$\frac{df_0}{dx} - \lambda f_0 = 0$ $\quad \int \frac{df_0}{f_0} = \int \lambda dx$ $\quad \ln f_0 = \lambda x + C$ $\Rightarrow$ $f_0 = Ce^{\lambda x}$ $\quad f_0 = 1 \Rightarrow 1 = Ce^{\lambda \cdot 0} \Rightarrow f_0(x) = e^{\lambda x}$ $\quad$ Th $\Rightarrow E = H(x)e^{\lambda x}$ - фунд. реш.

22.12 — последний забег

Def: $\exists F$ и G - обобщ. ф-ии в $\mathbb{R}^n$, причём $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ $\quad y \to (G(z), \varphi(y+z)) \in D(\mathbb{R}^n)$. Тогда свёртка обобщ-х ф-й F и G: $F * G$ - нов. обобщ. ф-я, действующ. на $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ по правилу $(F * G, \varphi) = (F(y), (G(z), \varphi(y+z)))$

Свойства:

1. $\forall F \in D'(\mathbb{R}^n)$ определена $F * \delta$ и $F * \delta = F$
2. Линейность по 1-му аргументу: $\forall a_1, a_2$ и $\forall F_1, F_2, G \in D'(\mathbb{R}^n)$: определены свёртки $F_1 * G$ и $F_2 * G$, then $(a_1F_1 + a_2F_2) * G = a_1(F_1 * G) + a_2(F_2 * G)$
3. Коммутативность: $\forall F, G \in D'(\mathbb{R}^n)$ определены свёртки $F * G$ и $G * F$ then $F * G = G * F$
4. if $\exists$ для $F, G \in D'(\mathbb{R}^n)$ определена свёртка $F * G$, then $\forall \alpha$ - м/и определены свёртки $(D^\alpha F) * G$ и $F * (D^\alpha G)$ и верно $D^\alpha(F * G) = (D^\alpha F) * G$ $F * (D^\alpha G)$

$(F_1 * F_2) * F_3 \neq F_1 * (F_2 * F_3)$, $F_1 = 1$, $F_2 = \delta'$, $F_3 = H$

1) $(F_1 * F_2, \varphi) = (1, (\delta'(z), \varphi(y+z))) = -(1, \varphi'(y)) = (1', \varphi(y)) = (0, \varphi) = 0$

2) $(F_2 * F_3, \varphi) = (\delta' * H, \varphi) = (H * \delta', \varphi) = (H(y), (\delta'(z), \varphi(y+z))) = -(H(y), \varphi'(y)) = (H'(y), \varphi(y)) = (\delta(y), \varphi(y)) = \delta(y)$ $\qquad F_1 * (F_2 * F_3) = 1 \cdot \delta = 1$

if E - фунд-ое решение оператора L: $LF = f(x)$, then частное реш.: $E * f$

W1 $\delta(x-a) * F(x)$

$(\delta(\underset{y}{x-a}) * F(x), \varphi) = (\delta(x-a), (F(z), \varphi(x-a+z))) = (F(z-a), \varphi(z))$

$\delta(y), (F(z), \varphi(z-a))$

$(F(z), \varphi(a+z)) \cdot (F(z-a), \varphi(z))$

W2 $\delta''(x) * |x| = (\delta(x) * |x|)'' = |x|'' = 2\delta(x)$

Преобр. Фурье обобщ. ф-й

Def Преобразованием Ф. обобщ. ф-ии F (прямое / обр.) наз. новая обобщ. ф-ия $\mathcal{F}_1[F]$, действ. на $\forall$ пробную φ по правилу $(\mathcal{F}_1[F],\varphi) = (F,\mathcal{F}_1[\varphi])$

Преобр. Ф. пробной ф-ии – быстроубыв. ф-ия

Def Обобщ. функцией медленного роста наз-ся <u>линейный непрер. функционал</u> на пр-ве $S(\mathbb{R}^n)$ основ-х ф-й, принимающий знач. в $\mathbb{C}$ $S(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$

Обозн. мн-во обобщ-х ф-й медленного роста $S'(\mathbb{R}^n)$

Свойства:

1. Линейность: $\forall a,b\in\mathbb{C}$, $F,G\in S'(\mathbb{R}^n)$: $\mathcal{F}_1[af+bg] = a\mathcal{F}_1[F]+b\mathcal{F}_1[g]$
2. $\forall\alpha$-м.и. $\forall F\in S'(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{F}_1[x^\alpha F(x)](y) = (i)^{|\alpha|}D^\alpha\mathcal{F}_1[F(x)](y)$
3. -//- $\mathcal{F}[D^\alpha F(x)](y) = (iy)^{|\alpha|}\mathcal{F}_1[F(x)](y)$
4. $\mathcal{F}_1$

Пр-р

1. $(\mathcal{F}_1[\delta],\varphi) = (\delta,\mathcal{F}_1[\varphi]) = \mathcal{F}_1[\varphi](0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\cdot e^{-i(x,y)}dx\Big|_{y=0} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx = ((2\pi)^{-\frac{n}{2}},\varphi)$

2. $F=1$ $\mathcal{F}_1[F]$-?

$1 = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}}$ $\mathcal{F}_1[F] = \mathcal{F}_1[(2\pi)^{n/2}\cdot\mathcal{F}_1[\delta]$

$(D^\alpha F)=G$

Метрические пространства

1. МЕТРИКИ

Def $\exists$ M - множ-во и ф-ция $\rho: M \times M \to \mathbb{R}^+$ удовл. усл-ям:

1) $\rho(u,v)=0 \iff u=v$ (аксиома тождества)
2) $\rho(u,v)=\rho(v,u)$ (симметр.)
3) $\rho(u,v) \le \rho(u,w)+\rho(w,v)$ (нер-во дин)

Тогда, ρ - метрика (на M), (M,ρ) - метрич. простр-во

Th-h (1) Дискретная

$$\rho_{discr}(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\ne y\end{cases}$$

Th-h (3) М-ки Минковского

$\mathbb{F}$ обозн. $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ $\quad M=\mathbb{F}^n \quad \forall p \quad 1\le p \le +\infty$

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$$

// ℓ_∞ - простр-во огр-ных послед-тей $\quad \sup|x_i|<+\infty$

[3.1] Манхэттенская: $\rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|$

[3.2] Евклидовая: $\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum |x_i-y_i|^2}$

[3.3] Чебышёва (супремум м-ка / равномерн.): $\rho_\infty(x,y)=\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p(x,y)=\max\limits_{i=1..n}|x_i-y_i|$

(W1) $\exists(X,\rho)$ - метр. пр-во. Показать, что $\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, $\rho_2(x,y)=\ln(1+\rho(x,y))$ и $\rho_3=\min\{1,\rho(x,y)\}$ - тоже м-ки

Lem $\exists(X,\rho)$ - метр. пр-во, $f: \underset{[0;+\infty)}{\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+}$, f - нестрого выпуклая вверх ф-я $f(0)=0$. Тогда, $f(\rho)$ - тоже метрика

Док-во:

$\forall \alpha\in[0,1] \ \forall x,y\ge 0 \quad f(\alpha x+(1-\alpha)y)\ge \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \qquad \forall x_1,x_2,x_3\in X \quad \rho(x_1,x_3)\le\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,x_3)$

Нужно д-ть, что $f(\rho(x_1,x_3))\le f(\underbrace{\rho(x_1,x_2)}_{d_1})+f(\underbrace{\rho(x_2,x_3)}_{d_2})$. (*)

f - неуб. (от противного)

$\exists\ \exists x,y>0,\ x<y,\ f(x)>f(y)$, т.е. $\forall z>y$ график ф-ции ниже прямой, соед. $f(x), f(y)$, т.е. $\exists z>y: f(z)<0$!!

$f(\rho(x_1,x_3))\le f(d_1)$

Для д-ва (*) нужно: $f(d_1+d_2)\le f(d_1)+f(d_2)$

$f(d_1)=f\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}(d_1+d_2)+(1-\alpha)\cdot 0\right)\ge\frac{d_1}{d_1+d_2}f(d_1+d_2)+(1-\alpha)f(0)$

$f(d_2)=f\left(\frac{d_2}{d_1+d_2}(d_1+d_2)+(1-\alpha)\cdot 0\right)\ge\frac{d_2}{d_1+d_2}f(d_1+d_2)+(1-\alpha)f(0)$

$f(d_1)\ge\frac{d_1}{d_1+d_2}f(d_1+d_2)$

$f(d_2)\ge\frac{d_2}{d_1+d_2}f(d_1+d_2)$

$f(d_1)+f(d_2)\ge f(d_1+d_2)\frac{d_1+d_2}{d_1+d_2}$ ∎

Th/задача [т. Метрика Хэмминга]

$\exists M=\{a_1,\dots,a_n\}$, $\quad \rho: M^n\times M^n\to\mathbb{R}^+$

$\rho(x,y)=\rho((a_{i_1},\dots,a_{i_n}),(a_{j_1},\dots,a_{j_n}))=\#\{a_{i_k}\ne a_{j_k},\ k=\overline{1,n}\}$. Док-ть, что ρ - м-ка

Пр. 4.1 $M=\{'а',\dots,'я'\}$

$x=\{'к','о','м','м','у','т','а','т','и','в','н','о','с','т','ь'\}$
$y=\{'а','с','с','о','ц','и','а','т','и','в','н','о','с','т','ь'\}$ $\Big\}\ \rho(x,y)=6$

Lem $\exists(M_1,\rho_1),(M_2,\rho_2)$ - метр. пр-ва. $(M_1\times M_2,\rho)$; $\rho((\underset{M_1}{x_1},\underset{M_2}{y_1}),(\underset{M_1}{x_2},\underset{M_2}{y_2}))=\rho_1(x_1,x_2)+\rho_2(y_1,y_2)$ - тоже метр. пр-во

$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\rho_1(x_1,x_2)+\rho_2(y_1,y_2)\le[\rho_1(x_1,x_3)+\rho_1(x_3,x_2)]+[\rho_2(y_1,y_3)+\rho_2(y_3,y_2)]=\rho((x_1,y_1),(x_3,y_3))+\rho((x_3,y_3),(x_2,y_2))$ ∎

$$\rho_{discr}(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\ne y\end{cases}$$

$(M^n,\rho)=(\underbrace{M\times\dots\times M}_{n},\rho)$, $\quad \rho=\sum_{i=1}^n\rho_{discr}(x_i,y_i)$

[М-ка Махаланобиса]

$\exists$ дана выборка случайных векторов $\{\vec{x}_i\in\mathbb{R}^n,\ i=\overline{1,N}\}$ и выборочная ковариационная м-ца $C_{n\times n}$

Док-ть, что $\rho(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{(\vec{x}-\vec{y})^T C^{-1}(\vec{x}-\vec{y})}$ - метрика

C - невырожд., $\quad C\sim\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2\end{bmatrix}$ - в глав. осях, $\sigma_i=\sqrt{\text{дисперсия}}$

$\Downarrow$

C^{-1} - симм., полож. опред., невырожд.

Реш-е:

$C=UDU^T$, $\quad C^{-1}=(UDU^T)^{-1}=UD^{-1}U^T$, $\quad C^{-1}=L^TL$ - разл. Холецкого

$\rho(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{(\vec{x}-\vec{y})^TL^TL(\vec{x}-\vec{y})}=\sqrt{\underbrace{(L(\vec{x}-\vec{y}),L(\vec{x}-\vec{y}))}_{\text{скал. произв.}}}$

т.е. $\rho(\vec{x},\vec{y})=\|L\vec{x}-L\vec{y}\|_2\le\|L\vec{x}-L\vec{z}\|_2+\|L\vec{z}-L\vec{y}\|_2=\rho(\vec{x},\vec{z})+\rho(\vec{z},\vec{y})$

15.02.2024

Фундам. посл-ть: $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n,m\ge N(\varepsilon)\quad \rho(u_n,u_m)<\varepsilon$

Посл. сх-ся: $\rho(u_n,u)\to 0,\ n\to+\infty$

Изолир., предельн., т. прикоснов-ия - ?

Def Отображение $A: X\to X$ наз-ся **сжимающим**, if $\exists\alpha\in(0,1)\ \forall x,y\in X \quad \rho(Ax,Ay)\le\alpha\rho(x,y)$

Def $\forall$ реш-ие x ур-я $Ax=x$ наз-ся **неподвижн. точкой отобр-я A**

th [Банаха о неподв. точке]

$\exists X$ - полное и $A: X\to X$ - сжатие. Тогда **$\exists!$ неподвижн. т. A**

(W1) Найти все возможн. предел рекур. посл-ти $x_{n+1}=\sqrt[3]{4+5x_n}$ при всех возможных нач. значениях x_1. С помощью принципа сжимающих отображений пояснить графически к каким из найденных пределов сход-ть реализуется более, чем при 1 нач. знач. x_1

if $x_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}$ $\qquad x_\infty=\sqrt[3]{4+5x_\infty}$

$x_\infty^3-5x_\infty-4 \quad /: x+1$

$(x+1)(x^2-x-4)=0 \longrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

$x_1^*=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$,

$x_2^*=-1$,

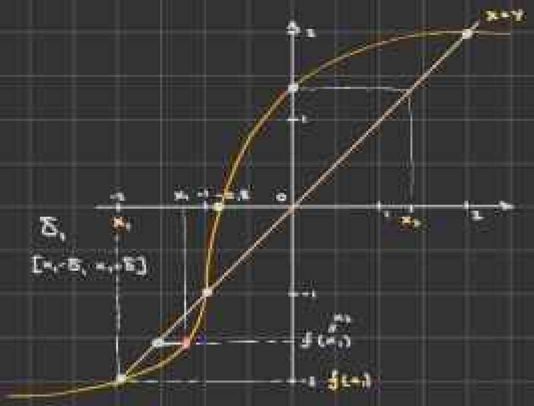
$x_3^*=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

$f(x)$ - сжим-щая на $[a,b]$, if $\forall x,y\in[a,b]\ |f(x)-f(y)|\le k|x-y|,\ 0<k<1$

т.е. f - Липшицева с $k<1$

По th. о среднем $|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|\le k|x-y|$,

т.е. if $|f'(\xi)|\le k<1$ $(\forall\xi\in[a,b])$ then f - сжим. на $[a,b]$



$f(x)=0$

$4+5x=0 \to x=-0{,}8$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$

для x_2 нет интерв. $[x_2-\delta, x_2+\delta]$ → нельзя примен. сжат

№2 Используя метод сжим. отобр., найти корни $3x^3+4x^2+4x+1=0$. С точностью, лучше 0,01 и срав-ть её с точным реш-ем

$f(x)=3x^3+4x^2+4x+1=0$

$f'(x)=9x^2+8x+4>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f\nearrow \Rightarrow \exists!$ кор. $f(x)=0$

$f(x)=(3x+1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow \quad x=-1/3$

Рассм. $F(x)=x-\lambda f(x)$, $\lambda\neq 0$

$F(x^*)=x^* \iff f(x^*)=0 \Rightarrow x^*$ - кор $f(x) \iff x^*$ - неподвижн. т. $F(x)$

- $f(-1)<0$
- $f(0)>0$

Рассм. F на $[-1;0]$. При каком λ F - сжим?

Нужно, чтобы $|F'(x)|<1 \quad x\in[0,1]$

$F'(x)=1-\underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{f'(x)}_{>0}$

$1-\lambda(9x^2+8x+4)>-1$

$\lambda(9x^2+8x+4)<2$

$\max\limits_{x\in[-1,0]}[9x^2+8x+4]=5$ (при $x=-1$) $\qquad \lambda<2/5$

$\lambda=1/3$

$\exists\, x_1=0 \qquad x_2=F(x_1)=-1/3 \qquad x_3=F(x^2)=-1/3$

Д/з: 1) попроб-ть $x_1=-1$

2) выбрать своё λ и 3 различ. x_1 — убедить предел посл-ти

29.02.24

Абелева гр. - ?

Лин. пр-ва

Конеч. сист. в-ов

Def: Произвольная сист. в-ов $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ наз-ся лин. незав-ой, если $\forall$ её конечн. подсистема лин. незав-ма

$\exists\, L$ - лин. пр-во. Лин незав-я сист. в-ов $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset L$ наз-ся алгебраическим базисом в L (базис Гамеля), если $\langle\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\rangle = L$ (т.е. кажд. в-р из L представим как лин. комб. базиса)

Пр-р. $\mathbb{R}_0^\infty=\{x\in\mathbb{R}^\infty: \exists k\in\mathbb{N}: x_k=x_{k+1}=\dots=0\}$ $\qquad \{e_i=(0,0,\dots,\underset{i}{1},0,\dots)\}$ - базис Гамеля

$\exists\, L$ - норм. пр-во. Посл-ть в-ров $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset L$ наз. базисом Шаудера, если $\forall x\in L$ $\exists!$ числов. посл-ть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: $x=\sum x_n e_n$ (ряд) $\quad (\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n>N(\varepsilon)\ \|x-\sum_{k=1}^{n}x_k e_k\|<\varepsilon)$

Пр-р. $\{e_i=(0,0,\dots,\underset{i}{1},0,\dots)\}_{n\in\mathbb{N}}$ - базис Шаудера в ℓ_p $\qquad \forall\ell_p\ x\in\ell_p$ представим как $\sum x_n e_n$

$\|x-\sum_{k=1}^{n}x_k e_k\|_p = \|\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k e_k\|_p=(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p)^{1/p}$

Def Метр. пр-во X наз-ся сепарабельным, если $\exists M$ - подмнож-во X, M - счётное, всюду плотное ($\overline{M}=X$)

Пр-р.
1) $\operatorname{cl}\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ сепар.
2) $\overline{\mathbb{Q}^n}=\mathbb{R}^n$
3) $\mathbb{R}^n_\infty, \mathbb{R}^n_p\dots$ (разные метрики)
4) $C[a,b]$, $\mathbb{P}$ - мн-во полиномов на $[a,b]$

$P_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots a_nx^n \qquad A=\{P_n^q=q_0+q_1x+\dots+q_nx^n\}_{q_i\in\mathbb{Q}}$ - счётное $\qquad \overline{A}=\mathbb{P}$

4) $\ell_p \quad 1\le p<\infty$

$M=\{x\in\ell_p: x=(x_1,\dots,x_n,0,0,\dots)\}$ $\qquad \overline{M}=\ell_p$

$A=\{x_q\in\ell_p: x=(q_1,\dots,q_n,0,0,\dots)\}$ где $q_i\in\mathbb{Q}$ $\qquad \overline{A}=M\Rightarrow \overline{A}=\overline{\overline{A}}=\overline{M}=\ell_p \qquad \rho(x,x_q)\le\rho(\overline{x},x)+\rho(\overline{x},x_q)$

Несепарабельные

1) X с дискр. метрикой

2) ℓ_∞ (нет счётн. мн-ва с cl). Метр.: $\sup|x|<\infty$, $\rho(x,y)=\sup|x_i-y_i|$

St L-н.п., если в L $\exists$ б-с Шаудера, then L - сепар.

Д-во

$\exists\, e_n$ - б-с Ш-ра $\Rightarrow \forall x\in L\ \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon)\ \|x-\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\|<\varepsilon$ $\quad$ Тогда $\forall k=\overline{1,n}\ \exists q_k\in\mathbb{Q}$ (если $F=\mathbb{R}$) или $q_k\in(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})$ (если $F=\mathbb{C}$) $\quad |x_k-q_k|<\frac{\varepsilon}{n\|e_k\|}$

$\|x-\sum_{k=1}^{n}q_ke_k\| = \|x \underbrace{\pm\sum_{k=1}^{n}x_ke_k}_{\text{прибавим и вычтем}} - \sum q_ke_k\| \le \|x-\sum x_ke_k\|+\|\sum(x_k-q_k)e_k\| < \varepsilon+\sum|x_k-q_k|\|e_k\| < \varepsilon+\frac{\varepsilon n\|e_k\|}{n\|e_k\|}=2\varepsilon$ $\qquad$ Норма приближ. $<2\varepsilon\Rightarrow$ всюду сходится

Т.е. $M=\{\sum_{k=1}^{n}q_ke_k\}$ всюду плотно в L. Оно также счётно.

Пр-р 1) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ - неполное пр-во

! нормиров. пр-во может быть неполным (если оно подпр-во, then оно может быть незамкнутым)

Пр-ры: 1) $\mathbb{R}_0^\infty$ всюду плотно в ℓ_p, т.е. $\overline{\mathbb{R}_0^\infty}=\ell_p$, но $\mathbb{R}_0^\infty\neq\overline{\mathbb{R}_0^\infty}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_0^\infty$ - не явл. замкн. подмн.

2) $\mathbb{P}[a,b]$ - пр-во многочленов. $\overline{\mathbb{P}}[a,b]=C[a,b]$ $\quad \mathbb{P}\neq\overline{\mathbb{P}}\Rightarrow\mathbb{P}$ - не замкн. подмн. пр-ва $C\Rightarrow\mathbb{P}$ - неполное

Def Нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ наз. эквивален-ми, если $\exists$ числа $m, M>0$: $\forall\vec{x}\in L$ (лин. н.п.) верно нер-во: $m\|x\|_a\le\|x\|_b\le M\|x\|_a$

Th На конечномерном лин пр-ве все нормы экв-ны. (на ∞мерн. $\exists$ неэквив-ые)

Пр-ры: 1) $\{x_n=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n},0,\dots,0)\}\subset\ell_2\subset\ell_\infty$ $\qquad \|x_n\|_2=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\frac{n}{n^2}}=\sqrt{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad \neq \quad \|x_n\|_1=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\frac{n}{n}}=1$

2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in C[0,1]$

$$f_n(x)=\begin{cases}2nx & 0\le x<\frac{1}{2n}\\ 2-2nx & \frac{1}{2n}\le x<\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_c$ $\qquad \|f_n\|_1=\int_0^1|f_n(x)|dx$

$\|f_n\|_c=\sup\varphi=2n\cdot x_{max}=2n\cdot\frac{1}{2n}=1$ $\qquad \|A\|_F=\sum\sum|a_{ij}|^2$

$\|f_n\|_1=\int_0^{1/2n}|2nx|dx+\int_{1/n}^{1}0dx=2n\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2n}+2x\Big|_{1/2n}^{1/n}-2n\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{1/2n}^{1/n}=\frac{1}{4n}+\frac{1}{n}-\frac{3}{4n}-\frac{1}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\qquad$ неэквив

! Эквивалентные нормы сходятся к одинаковым пределам

$f_n \neq f$

$\boxed{\text{Def}}$ **Скалярным произв.** в лин. пр-ве $\mathbb{L}$ над полем $\mathbb{F}$ наз. ф-ция $(\cdot,\cdot): \mathbb{L}\times\mathbb{L}\to\mathbb{F}$, которая $\forall x,y,z\in\mathbb{L}$ и $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}$ удовл. условиям:

1) $(x,x)\geq 0$, причём $(x,x)=0 \iff x=0$
2) $(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$ — лин-сть по 1ому арг.
3) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ — эрмитова симм-сть

(if $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ - пр-во евклидово — симметрия и лин-сть по обоим арг.)
(if $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ - пр-во унитарно — симметрия и полулин-сть по 2ому арг.)

$(x,\alpha y+\beta z)=\overline{(\alpha y+\beta z, x)}=\dots$ хрен с ним, см. лекции

$\boxed{\text{Def}}$ $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ — норма, порождённая ск.пр (! но не всегда можно выбрать норму в явном виде)

$\boxed{\text{Def}}$ **Гильбертово** пр-во — пр-во со скалярным произведением, полное отн-но норм., порождён. скал. пр-ем

7.03.24

Для с.п работает нер-во Коши-Буняковского-Шварца
$|(x,y)|\leq\sqrt{(x,x)(y,y)}$, причём рав-во $\iff \exists\lambda\in\mathbb{F}: x=\lambda y$

$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$

$\boxed{\text{Def}}$ $\mathbb{L}$ - ЛПСП. Вектора $x,y\in\mathbb{L}$ наз. **ортогональными**, if $(x,y)=0$. Обозн. $x\perp y$

$\boxed{\text{Th}}$ $\mathbb{L}$ - ЛПСП. Вектора $x,y\in\mathbb{L}$, $x\perp y$, then $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

$\boxed{\text{Th}}$ [ф-ла Неймана-Йордана]
$\mathbb{L}$ - н.п со ск.пр., $x,y\in\mathbb{L}\to \|x+y\|^2-\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$

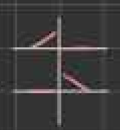
Пр-ры [ск. пр]
1) $\mathbb{F}^n$ $\quad (x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}$
2) ℓ_2 $\quad (x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}$ — Гильбертово
3) $C[a,b]$ $\quad (x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$
4) $L_2[a,b]$ $\quad (x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$

Пр-ры ℓ_p

$x=(1,0,\dots 0\dots)$ $\quad \|x\|^p=1$
$y=(0,1,\dots 0\dots)$ $\quad \|y\|^p=1$
$x+y=(1,1,\dots 0\dots)$ $\quad \|\underbrace{x+y}_{2}\|_p=\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^p}=\sqrt[p]{1^p+1^p}=2^{1/p}$

$\|x-y\|=2^{1/p}$
$2^{2/p}+2^{2/p}=2\cdot 2=4$, $p=2$
$2^{1+2/p}\neq 4$

$\|\cdot\|_C$
$C[a,b]$ $\quad x(t)=\begin{cases}\frac{a+b}{b-a}-\frac{2}{b-a}t, & t\in[0,\frac{a+b}{2}]\\ 0\end{cases}$



Док-ть, что в унитарном пр-ве справедливо поляр. тож-во: $(x,y)=\frac14\left[(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+i(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)\right]$

$\frac14\left[(x+y,x+y)-(x-y,x-y)+i(x+iy,x+iy)+i(x-iy,x-iy)\right]=$

$=(x,x+y)+(y,x+y)-(x,x-y)+(y,x-y)+i(x,x+iy)-(y,x+iy)+(ix,x-iy)+(y,x-iy)=\frac14\left[(x,x)+2(x,y)+(y,y)-(y,x)-(x,-y)-(y,-y)-(x,y)+i\left((x,x)-i(x,y)+i((x,y)-i(x,y))-(y,x)-i(y,x)+i((x,y)+i(x,y))\right)\right]=(x,y)$

$2xy+2xy+2ix^2-2iy^2=2i(x^2+2xy-y^2)=2i(x+iy)^2$

$(x,y+z)=\overline{(y+z,x)}=\overline{(y,x)}+\overline{(z,x)}=(x,y)+(x,z)$ $\qquad (x-iy,x)=(\overline{x,x})-i(x,y)$

$\boxed{\text{Def}}$ $\exists\mathbb{L}'\subseteq\mathbb{L}$, $x\in\mathbb{L}$, $x'\in\mathbb{L}'$ - ближ-й к x, if $\forall y\in\mathbb{L}'$ $\|x-x'\|\leq\|x-y\|$

В пр. со СП
$\boxed{\text{Def}}$ $\exists\mathbb{L}'\subseteq\mathbb{L}$, $\mathbb{L}'$-ЛПСП, $x\in\mathbb{L}$; $x'\in\mathbb{L}'$ - **ортог-ая проекция x на $\mathbb{L}'$**, if $\forall y\in\mathbb{L}'$ $\quad (x-x')\perp y$

$\boxed{\text{Th}}$ В $\mathbb{L}$ - ЛПСП, $\mathbb{L}'$ (со ск.пр) $\subseteq\mathbb{L}$, $x'\in\mathbb{L}$ - ближ $\iff$ x' - ортог. пр-ция

$\boxed{\text{St}}$ $\exists\mathbb{L}$-ЛПСП, $M\subset\mathbb{L}$. Then $M^\perp$ - замкн. лин. подпр. $\mathbb{L}$

$\boxed{\text{Th}}$ $\exists H'$ - замкн. подпр. гильбертова H. Тогда $H=H'\oplus(H')^\perp$

$\boxed{\text{St}}$ $\exists H$ - гильбертово, $M\subset H$. Тогда $(M^\perp)^\perp=\mathrm{cl}_H M \Rightarrow H=M^\perp\oplus(M^\perp)^\perp=\overline{M}\oplus M^\perp$

$\boxed{\text{Th}}$ $\exists H'$ - замкн. подпр. гильбертова H, then $\exists! x'\in H'$, ближ. к x
конечномерное H' - подпр. гильбертова H, всегда замкнуто

$\boxed{\text{Def}}$ $\exists\mathbb{L}$ - ЛПСП. Ортог. дон-ем к множ-ву $M\subset\mathbb{L}$ наз. мн-во $M^\perp=\{x\in\mathbb{L}\ \forall y\in M\ x\perp y\}$

$\boxed{\text{Def}}$ Лин. пр. $\mathbb{L}$ явл-ся **прямой суммой** своих подпр-в $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ if
$\forall x\in\mathbb{L}\ \exists!\ u\in\mathcal{U}$ и $v\in\mathcal{V}$ $\quad x=u+v$. Обозн. $\mathbb{L}=\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$

На $C(\mathbb{R})$ возьмём чётные функции (X - чёт)
$\forall y\in X^\perp$ должно быть $y\perp x\in X$
$(x,y)=0$: $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y(t)\,dt=0$

f $\{e_1,\dots,e_n\}$
$f\sim\sum_{k=1}^{\infty}(f,e_k)e_k$

№1

$L_2[0,1]$. Найти проекцию ф-ии $x(t)=t^2+1$ на подпр. L всех многочл. степени $n\le 1$: $\alpha t+\beta$

$y(t)=\alpha t+\beta$

$\langle 1, t\rangle$

$\langle f_1, f_2\rangle$ – Б.С.

Надо $x-y\perp L$

$$\begin{cases}(x-y,1)=0\\(x-y,t)=0\end{cases}\qquad \begin{matrix}\int_0^1(t^2+1-\alpha t-\beta)\cdot 1\,dt\\ \int_0^1(t^2+1-\alpha t-\beta)\,t\,dt\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1/3+1-\frac{\alpha}{2}-\beta=0\\ 1/4+1/2-\frac{\alpha}{3}-\beta/2=0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=5/6\end{matrix}\Rightarrow \boxed{y(t)=Pr_L x=t+5/6}$$

№2

В пр-ве $L_2(-1,1)$ найти ортог. доп. к след. подпр-вам S:

1) S – пр-во многочл. от x

$S^\perp=\{z\in L_2(-1,1): \forall y\in S\ \ z\perp y\}$ $\qquad \int_{-1}^{1} z(x)y(x)\,dx=0$ $\qquad$ Вообще говоря, $\nexists$ ф-ии, произв. $\forall$ⁱ на многочлен даст 0

$y(x)=a_n x^n+\dots+a_0$ $\qquad$ Тогда $S^\perp=\{0\}$

2) S – пр-во многочл. от x^2 $\Rightarrow$ пр-во чётных ф-й $\Rightarrow$ ищем $S^\perp$ – нечётн.

3) S – пр-во функций $=0$ при $x\le 1/2$

$S^\perp$ – пр-во ф-ий вида $f(x)\in L_2(-1,1): f(x)=0$ при $x>1/2$

Ортог-ия Грама-Шмидта

$x_1,\dots,x_n$ – лин. незав. в-ра

$y_1=x_1$ $\qquad z_1=y_1/\|y_1\|$ $\qquad z_n=y_n/\|y_n\|$

$y_2=x_2-(x_2,z_1)z_1$

$\vdots$

$y_n=x_n-\sum_{i=1}^{n-1}(x_n,z_i)z_i$

№3 Ортогон-ть мономы $1, x, x^2$

1) $L_2[-1,1]$

$\left(\int_{-1}^{1}1\,dx\right)^{1/2}=\sqrt{x|_{-1}^{1}}=\sqrt{2}$ $\qquad z_1=\frac{1}{\sqrt2}$ $\qquad y_1=1$ $\qquad (x,y_1)=\int_{-1}^{1}x\frac{1}{\sqrt2}dx=0$ $\qquad y_2=x-\cancel{(x,\frac{1}{\sqrt2})}\frac{1}{\sqrt2}=x$

$\left(\int_{-1}^{1}x^2dx\right)^{1/2}=\sqrt{\frac13-\frac{-1}{3}}=\sqrt{\frac23}=\|y_2\|$ $\qquad z_2=\frac{y_2}{\|y_2\|}=x\sqrt{\frac32}$ $\qquad y_3=x^2-(x^2,\frac{1}{\sqrt2})\frac{1}{\sqrt2}-\cancel{(x^2,x\sqrt{\tfrac32})}x\sqrt{\tfrac32}=x^2-1/3$ $\qquad \|y_3\|=\left(\int_{-1}^{1}(x^2-\tfrac13)^2dx\right)^{1/2}=\left(\frac{8}{45}\right)^{1/2}$

$\frac12\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac12\cdot\frac23=\frac13$

$z_3=(x^2-1/3)\sqrt{\frac{45}{8}}=\frac{3\sqrt5}{2\sqrt2}(x^2-1/3)$

2) $C[-1,1]$

$\max_{x\in[-1,1]}|1|=1=y_1$ $\qquad y_2=x-(x,1)1=x$ $\qquad y_3=x^2-\underbrace{(x^2,x)}_{0}x-\underbrace{(x^2,1)}_{2/3}1=x^2-2/3$ $\qquad \max|x^2-2/3|=2/3$

$\int_{-1}^{1}x\,dx=0$

$\max|x|=\|x\|=1=y_2$ $\qquad \frac32(x^2-\frac23)$

$z_1=1/1=1$ $\qquad z_2=x/1=x$

Th [О проектировании на конечном подпр]

Пусть $\mathbb{L}$ – ЛПСП, $\mathbb{L}'$ – конечном. в $\mathbb{L}$, система $\{e_1,\dots,e_n\}$ – ОНБ в $\mathbb{L}'$. Тогда $Pr_{\mathbb{L}'}x=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$

Пр-р $\quad Pr_L(e^x)=\sum_{i=1}^{n}(e^x,e_i)e_i$

Def $\mathbb{L}$-ЛПСП. Сист. в-ов $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – ОНС, if $\forall e\in\ \forall\alpha,\beta\in A: (e_\alpha,e_\beta)=\begin{cases}1, &\alpha=\beta\\0, &\alpha\ne\beta\end{cases}$

St Пусть $\mathbb{L}$ – сепараб. ЛПСП. then $\forall$ ОНС не более чем счётна

Def Пусть $\{e_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ – ОНС в пр-ве $\mathbb{L}$ со ск. пр., $x\in\mathbb{L}$. Числа $\lambda_k=(x,e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ наз. коэф. Фурье в-ра x относит. ОНС $\{e_k\}$, а ряд $\sum\lambda_k e_k$ – р.Ф.

Th [Нер-во Бесселя]

Пусть $\mathbb{L}$ – ЛПСП, $x\in\mathbb{L}$, $\{e_k\}$ – ОНС, λ_k – к.Ф. в-ра x отн-но ОНС: $\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2\le\|x\|^2$

21.03.24

Def Пусть $\{e_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ – ОНС в $\mathbb{H}$. Она наз-ся:

- полной, if её нельзя пополнить ($\nexists\, \bar{x}\in H: \{x, e_k\}$ – ОНС / ортог. доп. к $\{e_k\}=\{0\}$) $\quad (\{e_k\})^\perp$
- Гильб. базисом, if $\forall\bar{x}\in H$ представим своим р.Ф. ($\bar{x}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k$, $\lambda_k=(x,e_k)$)
- замкнутой, if $\forall\bar{x}\in\mathbb{H}$ вып. рав-во Парсеваля: $\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2$

Th [Критерий полноты ОНС]

Пусть $\{e_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ – ОНС в сепараб. ГП $\mathbb{H}$, then следующие утв. равносильны:

1) $\langle e_k\rangle_{n\in\mathbb{N}}=\mathbb{H}$

2) Система $\{e_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ – полна

3) $\{e_k\}$ – Г.Б.

4) $\{e_k\}$ – замкнут.

Пр-р

1) ℓ_2

$\{e_n=(0,0,\dots,0,1,0,\dots)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad x\in\ell_2,\ \bar{x}=(x_1,x_2,\dots)$

Пусть $x\in H$, $(x,e_k)=0$ $\Rightarrow$

$x=0$ $\Rightarrow$ $\{e_k\}$ – полна

2) $L_2[-\pi,\pi]$ ОНС: $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt\pi}\sin(nx)\}$

№4 $L_2[-\pi,\pi]$. Д-ть, что $\{e_n=\frac{1}{\sqrt\pi}\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$

1) $\{e_n\}$ – ОНС

$e_n=\frac{1}{\sqrt\pi}\sin(nx)$ $\qquad e_k=\frac{1}{\sqrt\pi}\sin(kx)$ $\qquad (e_n,e_k)=\delta_{nk}$

$$\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos[x(n-k)]-\cos[x(n+k)]\right)dx=\underbrace{\frac{1}{\pi(n-k)}}_{n\ne k}\sin\Big|_0^{\pi}-\underbrace{\frac{1}{\pi(n+k)}}_{-n\ne k}\sin\Big|_0^{\pi}=0$$

$n=k$: $\quad\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(2nx))\,dx=1=\delta_{nn}$

2) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – не явл. ГБ.

$f(x) = \cos(nx)$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx) = 0 \quad \Rightarrow$ не полн.

Def Ф-ия $w: (a,b) \to \mathbb{R}$ наз. **весовой**, if (>0 п.в. и инт-ма)

1) $w(x) \geq 0$ $x \in (a,b)$, $w>0$ п.в. на (a,b)
2) if (a,b) – конечн. $\Rightarrow \int_a^b w(x)dx < +\infty$
3) if (a,b) – беск. then $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\int_a^b x^{n} w(x)dx < +\infty$

Def $\exists$ $w(x)$ – вес. Весовым лебеговским пр-вом наз-ся $L_2^w(a,b) = \{f \in \mathbb{R}^{(a,b)} : \int_a^b f^2(x)w(x)dx < +\infty\}$ со с.п. $(f,g)_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$

$\|f\| = \left(\int_a^b f^2 w\, dx\right)^{1/2}$

Def Посл-ть алг-х многочленов $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ наз-ся посл-ть ортог-х многочл. в $L_2^w(a,b)$ if $\forall n,m \in \mathbb{N}_0$ $\deg q_n = n$, $(q_n, q_m)_w = \delta_{n,m}$

Th [общие св-ва ОМ]

1) ОМ $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ $\exists$ $\forall L_2^w(a,b)$
2) $\forall$ многочлен p_n степ. 'n' представим в виде лин. комб-ии ОМ $q_0 \dots q_n$, т.е. $\exists$ числа $f_0 \dots f_n$: $p_n = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k$
3) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\langle 1, x, \dots x^n \rangle = \langle q_0 \dots q_n \rangle$
4) Посл. ОМов ! с точн. до знака
5) if p_n – мн степени $n < m$, then $(p_n, q_m)_w = 0$
6) $\forall$ ОМ справ-ва трёхчленная рекк ф-ла: if $q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$ $\forall n \in \mathbb{N}$ then
$x q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x)$
7) $q_n(-x) = (-1)^n q_n(x)$

Def $\exists$ $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. т. $x_0 \in (a,b)$ наз. **точкой перемены знака**, if $f(x_0) = 0$ и $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ $\forall x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ $f(x_1)f(x_2) < 0$

Th [Св-ва ОМ]

$\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – ОМ в $L_2^w(a,b)$, then
1) $q_n(b) > 0$, $(-1)^n q_n(a) > 0$
2) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ у q_n и q_{n+1} нет общих корней
3) if x_0 – корень q_n, then $q_{n+1}(x_0)q_{n-1}(x_0) < 0$
4) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ нули q_n и q_{n+1} перемежаются / т.е. if $\forall k \in \mathbb{N}_0$ $x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < x_n^{(n)}$ – корни q_n

$a < x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)} < b$

Док-ть, что посл-ть мономов $\{1, x, \dots x^n\}$ не могут быть ОМ ни для какого $w(x)$, ни для какого (a,b)

Док-во.

(От противного) $\exists$ $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – ОМ

$(x^n, x^m)_w = \delta_{n,m}$

1) $\int_a^b \underbrace{x^n x^n}_{x^{2n}} w\, dx = 1$ $\qquad$ 2) $\int_a^b \underbrace{x^{n-1} x^{n+1}}_{x^{2n}} w\, dx = 0$

Д/З $\quad S = \langle 1; x; x^2 \rangle$, $f(x) = e^x$

$\sum (f, e_i) e_i$

б-с в L_2 $\langle \overset{e_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}; \overset{e_2}{x\sqrt{\tfrac{3}{2}}}; \overset{e_3}{\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - 1/3)} \rangle$

I. $\int_{-1}^{1} e^x \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} e^x x\, dx = \frac{\sqrt{6}}{e}$

$\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(\int_{-1}^{1} e^x x^2 dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{3} e^x dx\right) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2e}{3} - \frac{5}{e}\right) = \frac{\sqrt{5}e}{\sqrt{2}} - \frac{15\sqrt{5}}{2\sqrt{2}e}$

$e - \frac{5}{e}$ $\qquad$ $e/3$

$\frac{2e}{3} - \frac{5}{e}$

28.03

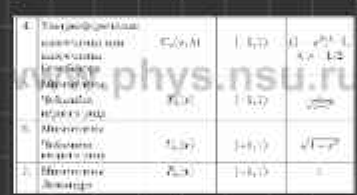
Th Ф-ия $w(x): (a,b) \to \mathbb{R}$ с точн-ю до лин-й замены перем-ых явл-ся весовой ф-ей какого-либо КОМ $\Leftrightarrow$ $w(x)$ удовл. ур-ю Пирсона

$\left[(\ln w(x))'\right] = \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}$

$A = \alpha_0 + \alpha_1(x)$, $B(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, $\quad \alpha_i, \overset{const}{\beta_i} \in \mathbb{R}$

Причём выполнены гран. усл.:

$\lim_{x\to a+} w(x)B(x) = \lim_{x \to b-} w(x)B(x) = 0$



Th [след. св-ва КОМ]

1) Для КОМ q_n, $n \in \mathbb{N}_0$ справ-ва ф-ла Родрига: $q_n(x) = \frac{C_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n}[w(x)B^n(x)]$; $\quad C_n$ – const, заданная стандартиз-ей
2) $\forall m \in \mathbb{N}$ многочлены $\left\{\frac{d^m}{dx^m} q_{n+m}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – КОМ на том же интервале, но и с др. весом
3) у всех КОМ q_n $\exists$ выражающаяся ч/з элементар. ф-ю производящая ф-ия $g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n q_n(x) t^n$
4) КОМ q_n $n \in \mathbb{N}_0$, явл-ся одним из решений Д.У. 2го порядка $B(x)y''(x) + (A(x) + B'(x))y'(x) - n(\alpha_1 + (n+1)\beta_2)y(x) = 0$

Произв. ф-я мн-ов Эрмита $e^{2xt - t^2}$

$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{n!} t^n$

$H_n(x) = \frac{\partial^n g(x,t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0} = e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]\Big|_{t=0} = \{x - t = y\} = (-1)^n e^{x^2}\left[\frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}\right]\Big|_{y=x} = \underbrace{\overset{C_n}{(-1)^n} \overset{w^{-1}}{e^{x^2}} \frac{d^n}{dx^n} \overset{w}{e^{-x^2}}}_{\text{ф-ла Родрига}}$

№2 С той же производящей. Нужно доказать: $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$, $H_{2n+1}(0) = 0$

При $x=0$ $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(0)}{(2n)!} t^{2n}$ чёт

$\overset{0}{H_{2n+1}} t^{2n+1}$ – нечёт

Разложим в р. Тейлора

$e^{-t^2} = \sum \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} = \sum (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} \Rightarrow 1 = 1$ ✓

$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}$

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = 2x$ $H_2(x) = 4x^2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n-1)!} t^{n-1} = \{n = k-1\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}}{n!} t^n$

$\frac{\partial g}{\partial t} = 2(x-t) e^{2xt-t^2} = 2(x-t) g$ $\frac{\partial g}{\partial t} - 2(x-t) g = 0$

$\frac{\partial}{\partial t}(e^{2xt-t^2}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} - 2(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum \frac{H t^{n-1}}{(n-1)!} - 2x \sum \frac{H t^n}{n!} + \sum \frac{H t^{n+1}}{n!}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{H_{n+1}}{n!} t^n - 2x \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1}\right) = 0$

при $\frac{H_{n+1}}{n!} - 2x \frac{H_n}{n!} + \frac{2H_{n-1}}{(n-1)!} = 0 \rightarrow \boxed{H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0}$ 1)

Д/з 1) показать, что $\frac{\partial g}{\partial x} - 2gt = 0$

2) получить рекк. ф-лу

1) $2te^{..} - 2te^{..} = 0$ ✓

2) $\frac{\partial}{\partial x} \sum \frac{H_n}{n!} t^n - 2 \sum \frac{t^{n+1} H_n}{n!} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} H_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0}$ 2)

4.04

№1 Подкор. рек-ие ф-лы 1–2, а затем используя 2) рф. В рез-те докажите, что $y = H_n(x)$ – ч. р. Д.У. 2го пор. $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

$(H_{n+1} - 2xH_n + \frac{d}{dx} H_n)'_x = H'_{n+1} - 2H_n - 2xH'_n + H''_{n+1} = H''_{n+1} + 2nH_n - 2xH_n$

$y'' - 2xy - 2ny = 0$

№2 используя №1 д-ть: $y_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ яв-ся реш-ем $y'' + (2n+1-x^2)y = 0$

$y'' = -e^{-x^2/2} H_n + x^2 e^{-x^2/2} H_n - \underline{xe^{-x^2/2} H'_n} + H''_n e^{-x^2/2} \underline{- xH'_n e^{-x^2/2}} = H'' e^{..} - 2xH' e^{..} + H_n e^{..} (x^2 - 1)$

$y' = -xe^{-x^2/2} H_n + H'_n e^{-x^2/2}$

??

№3 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & , n = m \end{cases}$

$\begin{cases} y_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2} \\ y_m(x) = H_m(x) e^{-x^2/2} \end{cases}$ $\begin{cases} y''_n + (2n+1-x^2) y_n = 0 \mid y_m \\ y''_m + (2m+1-x^2) y_m = 0 \mid y_n \end{cases}$

I. $n \neq m$ $y''_n y_m - y''_m y_n + 2y_n y_m (n-m) = 0$ $\frac{d}{dx}(y'_n y_m - y'_m y_n) + 2y_n y_m (n-m) = 0 \mid \int_{-\infty}^{+\infty}$ $\overset{0}{\overline{y'_n y_m|}} - \overset{0}{\overline{y'_m y_n|}} + 2\int y_n y_m (n-m) dx = 2(n-m) \int e^{-x^2} H_n H_m dx = 0 \Rightarrow \int = 0$

II. $n = m$ $\begin{cases} H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0 \mid \cdot H_{n-1} \\ H_n - 2xH_{n-1} + 2nH_{n-2} = 0 \mid \cdot H_n \end{cases} -1$ $\Rightarrow H_{n+1}H_{n-1} - H_n^2 - \cancel{2xH_nH_{n-1}} + \cancel{2xH_{n-1}H_n} + 2nH_{n-1}^2 - 2(n-1)H_{n-2}H_n = 0$

$\Rightarrow 2nH_{n-1}^2 - H_n^2 + H_{n+1}H_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}H_n = 0 \quad | e^{-x^2} | \int$

$\int (2ne^{-x^2} H_{n-1}^2 - e^{-x^2} H_n^2 + \underbrace{e^{-x^2} H_{n+1} H_{n-1}}_{=0 \text{ по I}} - \underbrace{2e^{-x^2}(n-1) H_{n-2} H_n}_{=0 \text{ анал.}}) dx = 0 \Rightarrow 2n \int e^{-x^2} H_{n-1}^2 dx = \int e^{-x^2} H_n^2 dx$

$\int e^{-x^2} H_n^2 dx = 2n \int e^{-x^2} H_{n-1}^2 dx = 2^{n-1} n! \int e^{-x^2} x^2 dx = -2^n n! \int x de^{-x^2} = -2^n n! \left[\cancel{xe^{-x^2}}| - \underbrace{\int e^{-x^2} dx}_{\sqrt{\pi}}\right] = \boxed{2^n n! \sqrt{\pi}}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, H_n)_w}{(H_n, H_n)_w} H_n$

$\|$ стр 87–88 лекц

$f(x) = (\delta(x-y), f(y))$

Д/З для sgn(x)

Th

If для иуз-ти ф-ии $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интеграл $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x) dx < +\infty$ then в каждой т-ке непр-ти ф-ии f имеет место рав-во $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x)$,

где $C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx$

(у Александрова x^{2p} стр 49

$f(x) = e^{ax}$ – разложить конкм

$g = e^{2xt - t^2}$ if $t = a/2 \Rightarrow g = e^{ax} = e^{a^2/4} \sum \frac{H_n}{n!} \frac{a^n}{2^n}$

$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

$C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) dx - \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} H_n dx\right] =$

Многочлены Лагерра

$(0, +\infty)$

$w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$

Производящая ф-я $g(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n$

Произв ф-я задаёт стандартизацию

Формула Родрига $L_n^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{n+\alpha}]$

№1 $L_0^\alpha(x)$, $L_1^\alpha(x)$, $L_2^\alpha(x)$ ч/з производящ. и ф-лу Родр.

Ч/з производящую

$\cdot\ g(x,t)|_0 = 1 = L_0^\alpha$ $g'|_0 = L_1^\alpha = \alpha + 1 - x$ $g''|_0 = L_2^\alpha =$

$g'(x,t) = e^{\frac{-xt}{1-t}} (\alpha+1)(1-t)^{-\alpha-2} - \frac{e^{\frac{-xt}{1-t}} x}{(1-t)^{\alpha+3}} = e^{\frac{-xt}{1-t}} \frac{((\alpha+1)(1-t) - x)}{(1-t)^{\alpha+3}}$

$g''(x,t) = e^{\frac{-xt}{1-t}} \frac{((\alpha+1)(1-t) - x)}{(1-t)^{\alpha+3}} \cdot \frac{-x}{(1-t)^2} + e^{\frac{-xt}{1-t}} \frac{(-\alpha-1)(1-t)^{\alpha+3} + ((\alpha+1)(1-t) - x)(\alpha+3)(1-t)^{\alpha+4}}{(1-t)^{2\alpha+6}}$??

через Родрига

$L_0^\alpha = e^x \frac{x^{-\alpha}}{0!} e^{-x} x^\alpha = 1$

$L_1^\alpha = e^x \frac{x^{-\alpha}}{1!} \frac{d}{dx}[e^{-x} x^{1+\alpha}] = e^x x^{-\alpha} (-e^{-x} x^{1+\alpha} + e^{-x} x^\alpha (1+\alpha)) =$

$= -x + 1 + \alpha - 1 + \alpha - x$

$L_2^\alpha = e^x \frac{x^{-\alpha}}{2!} \frac{d^2}{dx^2}[e^{-x} x^{2+\alpha}] = \frac{x^2}{2} - x(\alpha+2) + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$

$x^2 - x\alpha - x - \alpha - 1 - \alpha^2 - 5\alpha$

$\frac{1}{2}((1+\alpha)(2+\alpha) - 2(2+\alpha)x + x^2)$

(w2) $\partial g/\partial t$, получить рекур. ф-лу

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{((\alpha+1)(1-t)-x)}{(1-t)^2}\, g(x,t)$$

$$(1-t)^2 \frac{\partial g}{\partial t} - (\alpha - \alpha t - t + 1 - x)\, g(x,t) = 0$$

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) \frac{\partial t^n}{\partial t} - [(\alpha+1)(1-t) - x] \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha t^n =$$

$$(1-t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n L_n^\alpha t^{n-1} - \alpha \sum_{0}^{\infty} L_n^\alpha t^{n-1} - \underline{\alpha \sum L_n^\alpha t^n} - \cancel{\sum L_n^\alpha t^n} + \cancel{\sum L_n^\alpha t^n} \underline{- x \sum L_n^\alpha t^n} = 0$$

$$\sum_{0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}^\alpha t^n \quad (n-1 \to k)$$

$$\boxed{(n+1)L_{n+1}^\alpha + (x - \alpha - 1 - 2n)L_n^\alpha + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha = 0} \quad \Rightarrow \text{w4}$$

(w3) $\frac{\partial g}{\partial x}$ + рекур. ф-ла

$$g(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-t}{(1-t)} \cdot g$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial L_n^\alpha}{\partial x} t^n + \frac{1}{(1-t)} \sum L_n^\alpha(x) t^{n+1} = 0 \quad (n+1 \to k)$$

$$\Sigma - \Sigma \frac{\partial L}{\partial x} t^{n+1}$$

$$\frac{dL_n^\alpha}{dx} - \frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx} + L_n^\alpha = 0$$

(w4)

$$L_{n-1}^\alpha = -\frac{(n+1)L_{n+1}^\alpha + (x-\alpha-1-2n)L_n^\alpha}{n+\alpha} =$$

$$\frac{dL_n^\alpha}{dx} + \frac{n+1}{n+\alpha}\frac{dL_{n+1}^\alpha}{dx} + \frac{x-\alpha-1-2n}{n+\alpha}\frac{dL_n^\alpha}{dx} + \frac{L_n^\alpha}{n+\alpha} + L_n^\alpha = 0$$

$$\frac{n+1}{n+\alpha}\frac{dL_{n+1}^\alpha}{dx} + L_n^\alpha\left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{x-\alpha-2n-1}{n+\alpha}\right) + \left(\frac{x-\alpha-2n-1}{n+\alpha}+1\right)\frac{dL_n^\alpha}{dx} = 0 \;\Big|\cdot n+\alpha$$

$$(n+1)\, dL_{n+1}^\alpha + (2n+2+\alpha-x)L_n^\alpha + (x-n-1)\frac{dL_n^\alpha}{dx} + (n+1)L_{n+1} = 0$$

$$n L_n^{\alpha\prime}(x) + (x-n)L_{n-1}^{\alpha\prime}(x) - nL_n^\alpha(x) + (2n+\alpha-x)L_{n-1}^\alpha(x) = 0$$

<u>из II</u>: $L_{n-1}^{\alpha\prime}(x) = L_n^{\alpha\prime} + L_{n-1}^\alpha(x)$

$$nL_n^{\alpha\prime}(x) + (x-n)[L_n^{\alpha\prime}(x) + L_{n-1}^\alpha(x)] - nL_n^\alpha + (2n+\alpha-x)L_{n-1}^\alpha = 0$$

$x L_n^{\alpha\prime}(x) - nL_n^\alpha(x) + (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x) = 0$ – приятный вид рек. ф-лы $\;\Big|\, d/dx$

$$L_n^{\prime\alpha}(x) + xL_n^{\prime\prime\alpha}(x) - nL_n^{\prime\alpha}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{\prime\alpha}(x) = 0$$

$$L_n^{\prime\alpha} + xL_n^{\prime\prime\alpha}(x) - nL_n^{\prime}(x) + (n+\alpha)[L_n^{\prime\alpha} + L_{n-1}^\alpha] = 0$$

$$(1+\alpha)L_n^{\prime}(x) + xL_n^{\prime\prime\alpha}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha = 0 \quad \Rightarrow y = L_n(x) \Rightarrow \boxed{xy'' + (1+\alpha-x)y' + ny = 0}$$

Док-ть, $y_n = x^{\alpha/2} e^{-x/2} L_n^\alpha(x)$ – ф-я Лагерра есть частн. реш. $\quad xy'' + y' + \left(n + \frac{1+\alpha}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x}\right)y = 0$

$$y' = \frac{\alpha}{2}x^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha + x^{\frac{\alpha}{2}}$$

Док-ть соотн. ортог.

$$\int e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha L_m^\alpha = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \Gamma(n+\alpha+1), & n = m \end{cases}$$

Th If для кус-но функции $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\int_0^{\infty} e^{-x} x^\alpha |f(x)|^2 dx < +\infty$, then в $\forall$ её точке непр-ти её можно разложить

$$f_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x), \text{ где } c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha L_n(x) f(x)\, dx \qquad f = \sum \frac{(f, L_n^\alpha)}{(L_n^\alpha, L_n^\alpha)} L_n^\alpha \qquad c_n = (f, e_n) \quad \{e\}$$

Операторы

$\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ – ЛП над $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

Def Отобр-е $A: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, заданное на ЛП. $\operatorname{Dom} A \subset \mathbb{X}$ наз. линейным оператором, if $\forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} A$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ $\hookrightarrow$ $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$

Def Образ оператора: $\operatorname{Im} A = \{y \in \mathbb{Y} : \exists x \in \operatorname{Dom} A \;\; y = Ax\}$

Def Ядро оператора: $\operatorname{Im} A = \{y \in \mathbb{Y} : \exists x \in \operatorname{Dom} A : y = Ax\}$

$\operatorname{Ker} A = \{x \in \operatorname{Dom} A : Ax = 0\}$

$\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ – мн-во всех лин. оп-ров: $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$

St 1) $\operatorname{Im} A \subseteq \mathbb{Y}$ $\quad$ 2) $\operatorname{Ker} A \subseteq \mathbb{X}$

St $\exists A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$, then композиц. оп-ров $A \circ B \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$

$\overset{\shortparallel}{BA}$ – произведен. лин. опер.

инт. конечном. опер.

Пр-ры: 1) $O \in \mathcal{L}(X, Y)$: $Ox = 0_Y$ – нулевой оп-р

2) Тождеств. (единичн.): $I \in \mathcal{L}(X)$: $Ix = x$

3) Опер-р ортог-го проектир-я на H': $Pr_{H'} x = y$

$\mathrm{Dom}\, Pr_{H'} = H$; $\mathrm{Im}\, Pr_{H'} = H'$, $\mathrm{Ker}\, Pr_{H'} = (H')^{\perp}$

$I - Pr_{H'} = Pr_{(H')^{\perp}}$

25.04.24

X – Банахово пр-во над $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}$

Def. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ – регулярное значение оп. A if $(A - \lambda I)$ – биекция

Мн-во всех рег. зн-й A – его резольв. мн-во $\rho(A)$

Def. Спектр оп-ра A – мн-во $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

Def. Операторнозначная ф-я $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, опр. на мн-ве $\lambda \in \rho(A)$ наз. резольвентой оп. A

Def. Пусть $\lambda \in \sigma$, т.е. $(A - \lambda I)$ – не биекция, then

1) $(A - \lambda I)$ – не инъективен, λ – т-ка точечного спектра $\sigma_p(A)$

2) λ – т. непрерывного спектра A σ_c, if $(A - \lambda I)$ – инъект., но не сюръект. и $\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq X$, но вс. пл. в X, т.е. $\overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)} = X$

3) λ – т. остаточного спектра A, if $(A - \lambda I)$ – инъект., но не сюръект. и $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ не вс. пл. в X, σ_r

$\sigma(A) = \sigma_c \cup \sigma_p \cup \sigma_r$

Св-ва $(A - \lambda I)^{-1}$	$\exists$		$\neg\exists$
	огр	не огр	
плотн. опр	$\lambda \in \rho(A)$	$\lambda \in \sigma_c(A)$	$\lambda \in \sigma_p(A)$
не пл. опр	$\lambda \in \sigma_r(A)$		

Def. Спектр-ым радиусом оп. A наз. величина $r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma} |\lambda|$

Th. [Св-ва спектра огр. оп-ра] A – огр. оп. со сп-ом $\sigma(A)$ (X – Б.П. над $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(X)$). Тогда:

1) $\sigma(A)$ – замкнут. мн-во в $\mathbb{C}$

2) $\sigma(A)$ – огр мн-во, целиком содерж-ся в $B[0, \|A\|]$, т.е. $r(A) \leq \|A\| < +\infty$

3) $\sigma(A)$ – не пуст

4) Справ-ва ф-ла Гельфанда-Бёрлинга $r(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$

$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$Ax(t) = t x(t)$ $\quad t \in [0,1]$

$(A - \lambda I)$ – обр. $\Leftrightarrow \left[(A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \right]$

$(A - \lambda I)x = (t - \lambda)\, x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall t \neq \lambda$

и произв. при $t = \lambda$

2 ф-ции, кот. равны п.в. в Лебег. пр-ве равны $\Rightarrow x(t)$ – нулевой в-р $\in L_2[0,1] \Rightarrow (A - \lambda I)$ обр. $\forall \lambda \Rightarrow \sigma_p(A) = \varnothing$

Рассм. произв. $y(t)$ и ур-е $(A - \lambda I)x = y$. Решим $\forall y$

$(t - \lambda)x(t) = y(t)$

$x(t) = \dfrac{y(t)}{t - \lambda} = (A - \lambda I)^{-1} y(t)$ $\qquad \mathrm{Dom}\,(A - \lambda I)^{-1} = ?$

$\exists \delta\ \forall t \in [0,1]\ |t - \lambda| \geq \delta$

If $\lambda \notin [0,1]$ $\quad \|x\|_{L_2} = \left\|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right\| = \left(\int\limits_0^1 \left|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\delta} \|y\|_{L_2} < +\infty$

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$ – рег. знач.

H_i – г.п.

Def. Пусть оп. $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Оп-р A^* наз. сопряженным к A, if $\forall x_1 \in H_1$ и $\forall x_2 \in H_2$ $\hookrightarrow$ $(Ax_1, x_2) = (x_1, A^* x_2)$

Пр-р: $A \in \mathcal{B}(L_2[0,1])$ $\quad Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$

$(Ax, y) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^t x(s)ds\, \overline{y(t)}dt = \int\limits_0^1 x(s) \left[\overline{\int\limits_s^1 y(t)dt} \right] ds = (x, \int\limits_s^1 y(t)dt)$

$A^* y(s) = \int\limits_s^1 y(t)dt$

Th. [св-ва сопр. оп.]

Пусть $A, B \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Тогда

1) $A^* \exists$, $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ $\quad (\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$

3) $(A^*)^* = A$

4) $\|A^*\| = \|A\|$

5) if $C \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$ then $(CA)^* = A^* C^*$

6) if A – непр. обр. then A^* – непр. обр., причём $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Th. [О связи спектров A и A^*]

1) $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$

2) $\sigma_r(A) \subset \overline{\sigma_p(A^*)}$

3) $(\sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)) \supset \overline{\sigma_p(A^*)}$

4) $\sigma_c(A) = \overline{\sigma_c(A^*)}$

Cons. $\sigma_r(A) = \overline{\sigma_p(A^*)} \setminus \sigma_p(A)$

Пр-р: ℓ_2

$S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots)$

$S_\ell x = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$

$\|S_r\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \sum\limits_{i=1}^{\infty} ((S_r x)_i)^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|x\| = 1$

$(S_r x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (S_r x)_i \bar{y}_i = \sum\limits_{i=2}^{\infty} x_{i-1} \bar{y}_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_{i+1} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i (\overline{S_\ell y})_i = (x, S_\ell y) = (x, S_r^* y) \quad \Rightarrow \|S_r\| = \|S_\ell\|$

$\sigma(S_r)$ $\sigma(S_\ell)$ целиком $\subset B[0,1]$

Пусть $\lambda \in \sigma_p(S_r)$, т.е. $\exists x \in \ell_2$ – ненулевой, т.ч. $S_r x = \lambda x$

$(0, x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) \Rightarrow 0 = \lambda x_1,\ x_1 = \lambda x_2, \ldots \Rightarrow$

- if $\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x = 0$ ↯
- if $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots \Rightarrow x = 0$ ↯

$\Rightarrow \sigma_p(S_r) = \varnothing$

Пусть $\lambda \in \sigma_p(S_l)$, т.е. $\exists\, x \overset{\circ}{\in} \ell_2$, т.ч. $S_l x = \lambda x$

$(x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \dots) \to x_2 = \lambda x_1,\ x_3 = \lambda^2 x_1, \dots, x_{n+1} = \lambda^n x_1$

При каком λ $x \in \ell_2$?

$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda^{i-1} x_1|^2 = |x_1|^2 \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} < +\infty$

$\sigma_p(S_l) = B(0,1)$ $\quad \underline{|\lambda| < 1}$

$\sigma_r(S_r) = B(0,1) \setminus \varnothing = B(0,1)$ $\qquad B(0,1) \subset \sigma(S_r) = B[0,1]$ $\qquad \sigma_r(S_l) = B(0,1)$

$S(0,1) = \sigma_c(S_r)$ $\qquad \sigma_c(S_l) = S(0,1)$

Def: Лин. оп-р $A \in \mathcal{B}(H)$ наз. **нормальным**, if он коммутирует со своим сопряж-ем. $[A, A^*] = AA^* - A^*A = 0$. В частн-ти, явл. норм.

Def: Самосопр. оп-р $A = A^*$ **Def**: Унитарный $A^* = A^{-1}$ **St**: Ост. спектр огр. норм. оп-ра $A \in \mathcal{B}(H)$ – пуст. $\sigma_r(A) = \varnothing$

Th [Норма самосопр. оп-ра]

Для норм. лин. самосопр. оп-ра верна ф-ла $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$

Cons: $\forall A \in \mathcal{B}(H)$ справедл. $\|A\| = \|A^*\| = \sqrt{\|AA^*\|} = \sqrt{\|A^*A\|}$

Th [об ортог. собств. подпр-в]

Пусть $A \in \mathcal{B}(H)$ – самосопр. оп-р, then собс. в-ра, отвеч-ие разн. собств. значениям A, ортог-ны д-г

Th: Пусть $A \in \mathcal{B}(H)$ – самосопр. оп-р и S – его инв-ное подпр-во (т.е. $A(S) \subset S$). Then ортог. доп. $S^{\perp}$ – тоже обр. inv подпр-во A

Пр-р: с/с оп-ра

Пусть H' – подпр. H. $(P_{H'}x, y) = (P_{H'}x, P_{H'}y + P_{(H')^\perp}y) = (P_{H'}x, P_{H'}y) = (P_{H'}x + P_{(H')^\perp}x, P_{H'}y) = (x, P_{H'}y)$

Def: Пусть H – ГП над $\mathbb{F}$. **Лин-ым функционалом** наз. лин. оп-р, действ. из H в $\mathbb{F}$

Def: Сопр-ным простр-вом H^* наз. пр-во всех непр-х лин-х ф-лов на H, т.е. $H^* = \mathcal{B}(H, \mathbb{F})$ ($\mathcal{B}$ – лин. огр. оп-р из H в $\mathbb{F}$)

! Функционал $f \in H^* \iff \ker f$ – замкнуто в H^*

Th [Рисса об общем виде лин. непр. ф-ла]

Пусть H – Г.П., then $\forall$ лин-го непр. ф-ла $f \in H^*$ $\exists!$ вектор $x_f \in H$: $\forall x \in H$ $f(x) = (x, x_f)$, причём $\|x_f\| = \|f\|$

<u>Кринж</u> от физиков

Будем считать, что ск. пр. линейно по $2^{ому}$ аргументу (а по $1^{ому}$ полулинейно). $(x, y) = \langle x | y \rangle = \langle x | \cdot | y \rangle$ внутр. произв-е, $|y\rangle\langle x|$ внешнее

$|y\rangle$ – кет-вектор (обычный в-р, элемент пр-ва H)

$\langle x|$ – бра-вектор (ф-нал $f: H \to H^*$, порожд-ый в-ром $x \in H$ в соотв. с т. Рисса, т.е. $f(y) = (x, y)$ $\forall y \in H^*$)

Пр-р 1 (Тожд. оп-р) – сумма

Пусть $x_1, \dots, x_n$ – ортонорм. б-с в H. $\forall x \in H$ можем разложить $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i\rangle$. $\lambda_m = (x_m, x) = \langle x_m | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_m | x_i \rangle$, $(x_m, x) = \langle x_m | x \rangle$

$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i\rangle \lambda_i = \underbrace{\sum |x_i\rangle\langle x_i|}_{\hat{I}} x\rangle$, $\quad \hat{I} = \sum_{i=1}^{n} |x_i\rangle\langle x_i|$

Пр-р 2 (Резольвента)

Пусть H – ГП, $\dim H = m$, if $H \to H$ – лин. оп-р, с.в-ры V кот. образуют ОНБ в H. Обозн. λ_j – с.з. A, отвеч. с.в. x_j, т.е. $Ax_j = \lambda_j x_j$

Решим неодн. ур-е $(A - \lambda I)x = y$ $= Ax - \lambda x = A|x\rangle - \lambda|x\rangle = |y\rangle$

Разложим $|x\rangle$ по б-су $|x\rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j\rangle$

$A|x\rangle = A\sum_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j\rangle = \sum \alpha_j A|x_j\rangle = \sum \alpha_j \lambda_j |x_j\rangle$ $\qquad$ Подставим в ур-е $\sum \alpha_j \lambda_j |x_j\rangle - \lambda \sum_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j\rangle = |y\rangle$

$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\lambda_j - \lambda)|x_j\rangle = |y\rangle \langle x_k|$

$\langle x_k | y \rangle = \langle x_k | \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\lambda_j - \lambda)|x_j\rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\lambda_j - \lambda)\langle x_k | x_j \rangle = \alpha_k (\lambda_k - \lambda)$

$|x\rangle = \sum_{j=1}^{m} |x_j\rangle \alpha_j = \sum |x_j\rangle \frac{\langle x_j | y \rangle}{\lambda_j - \lambda} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda}}_{R} |y\rangle$

Пр-р 3 (Оп-р проектир-я на прямую параллельно)

Пусть x, y – в-ра в H, причем $(y, x) = 1$

Оп-р $P_{\langle x \rangle, y} \in \mathcal{B}(H)$, действ. на $\forall z \in H$ по правилу $P_{\langle x \rangle, y} z = (y, z)x$ (проектор на лин. оболочку $\langle x \rangle$ вдоль подпр-ва $\{y\}^{\perp}$)

- $\operatorname{Im} P_{\langle x \rangle, y} = \langle x \rangle$
- $\forall w \in \{y\}^{\perp}$: $P_{\langle x \rangle, y}(z + w) = (y, z + w)x = (y, z)x = P_{\langle x \rangle, y} z$
- $P^2_{\langle x \rangle, y} = P_{\langle x \rangle, y}$

$P_{\langle x \rangle, y} z = \langle y | z \rangle |x\rangle = |x\rangle\langle y | z \rangle = |x\rangle\langle y | \cdot | z \rangle$

Найти м-ц нахождения эл-та м-цы на σ бра-кет

16.05.2024

$(0,1)$

$\bigcup\limits_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$ – откр. покрытие. Нельзя выделить конечное подпокрытие

Мн-во компактно, если из $\forall$ посл-ти, можно выделить подмнож-во

↳ <=> замкн. огр.

↳ конечномерн.

Предкомпакт – if замыкание комп-но

⟶ ↳ <=> огр

∞мерн: компак => з. и огр

Def Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ наз. **компактным**, if он отображает $\forall$ огр. мн-во $M \subset \mathcal{X}$ в предкомпактное $A(M) \subset \mathcal{Y}$. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – Банаховы

$\Updownarrow$

—||— if из $\forall$ огр. посл-ти $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпосл-ть $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, которую этот оп-р отображает в сходящуюся послед-ть $\{Ax_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Y}$

$A \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ – комп. опер.

Th [св-ва комп. оп-ров]: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, V, W$ – Банах. пр-ва

1) if $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\alpha, \beta \in F$, then $(\alpha A + \beta B) \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
2) $\forall A \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \Rightarrow A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
3) $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, V) \Rightarrow BA \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, V)$, $A \in \mathcal{K}(W, \mathcal{X})$, $C \in \mathcal{B}(W, \mathcal{X}) \Rightarrow AC \in \mathcal{K}(W, \mathcal{X})$
4) $I \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \Leftrightarrow \dim \mathcal{X} < +\infty$
5) Пусть $\dim \mathcal{X} = \infty$ и $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ – обратим, тогда обр. оп. $A^{-1} \notin \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
6) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $A_n \to A \Rightarrow A \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

Th [св-ва спектра комп. оп-ра]:

$\mathbb{H}$ – ∞мерн. Г.П. Тогда

1) $\lambda = 0 \in \sigma(A)$
2) $\forall \lambda \neq 0 \in \sigma(A)$ явл. его с.з.
3) $\forall \varepsilon > 0$ оп-р A имеет конеч. кол-во с.з-ий $\lambda : |\lambda| > \varepsilon$

Th $\exists$ A – ненул., самосопр., компактн. Тогда A имеет хотя бы одно $\lambda \neq 0$ ($A \neq 0$, $A = A^*$, $A \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 : \lambda \in \sigma_p(A)$)

Th $\exists$ A – самосопр., компактн. оп-р в ∞мерн. сепараб. Г.П. $\mathbb{H}$ над полем $\mathbb{C}$. Тогда $\exists$ ОНБ в $\mathbb{H}$, состоящий из с.в-ров оп-ра A.

Фредгольм 1го рода

$$\int_a^b k(t,s)x(s)\,ds + f(t) = 0$$

Фредгольм 2го рода

$$\int_a^b k(t,s)x(s)\,ds + f(t) = x(t)$$

Вольтерр 1го рода

$$\int_a^t k(t,s)x(s)\,ds + f(t) = 0$$

Вольтерр 2го рода

$$\int_a^t k(t,s)x(s)\,ds + f(t) = x(t)$$

x – неизв. ф-я, её ищем. $k(t,s)$ – ядро инт. оп-ра. $f(t)$ – известн. ф-я

Сведение задачи Коши к Вольтерру 2го рода

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + P_1(t)x^{(n-1)}(t) + P_n(t)x(t) = f(t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \end{cases}$$

$\boxed{a=0}$

Избавимся от нач. данных:

Замена: $x(t) = y(t) + x_0 + \frac{x_1}{1!}t + \frac{x_2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{x_{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}$

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + P_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + P_n(t)y(t) = g(t) \\ y(0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \to$$

$$y^{(n)}(t) = z(t)$$

$$y^{(n-1)}(t) = \int_0^t y^{(n)}(s)\,ds$$

$$y^{(n-2)}(t) = \int_0^t\left[\int_0^u z(s)\,ds\right]du = \int_0^t\left[\int_s^t z(s)\,du\right]ds = \int_0^t z(s)\frac{(t-s)}{1!}\,ds$$

$$y^{(n-3)}(t) = \int_0^t\left[\int_0^u z(s)\frac{(u-s)}{1}\,ds\right]du = \int_0^t\left[\int_s^t z(s)\frac{u-s}{1!}\,du\right]ds = \int_0^t z(s)\frac{(t-s)^2}{2!}\,ds$$

$$y(t) = \int_0^t z(s)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds$$

$$z(t) + \int_0^t \underbrace{k(t,s)}_{=\,p_1(t) + p_2(t)\frac{t-s}{1!} + \ldots + p_n\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}} z(s)\,ds = g(t)$$

№1 $\begin{cases} x'(t) + 2t\,x(t) = e^t \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} y' + 2ty + 2t = e^t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$y' = z$

$y = \int_0^t z(s)\,ds$

$$z(t) + \underbrace{2t}_{k(t)\text{ – ядро}}\int_0^t z(s)\,ds = \underbrace{e^t - 2t}_{g(t)}$$

№2 Решить инт. ур, сведя к Д.У.

$x(t) - \int_0^t x(s)\,ds = e^t$. Inop => $x = y'$

$k = -1 = p_1$, $e^t = g(t)$

$\begin{cases} y' + p_1 y = e^t \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y' - y = e^t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$y = c_1 e^t$ $\quad y_4 = Ae^t t$

$Ae^t = e^t \Rightarrow y = c_1 e^t + e^t t$

$y = te^t$ $\quad \underline{x} = e^t + te^t$

$\boxed{\text{Def}}$ **Интегральн. оп-ром Гильберта – Шмидта** наз. опер. сопост-щий $\forall$ ф-ции $x \in L_2(a,b)$ ф-ю $y(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$, где $K \in L_2[a,b]^2$

A - оп-р Гил.-Шм., тогда инт. ур-е можно переписать $Ax + f = 0$ Фр./В. 1[го] рода
$Ax + f = x$ Фр./В 2[го] рода

$\boxed{\text{Th}}$: $\exists$ A - оп-р ГБ-Ш. с ядром $K(t,s)$, действ. в $L_2[a,b]$. Then $A \in \mathcal{K}(L_2[a,b])$, а для его нормы справедлива оценка $\|A\| \le \|K\|_2 = \left(\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds\right)^{1/2}$

$\boxed{\text{Def}}$ Ядро оп-ра ГБ-Ш. наз. **вырожденным**, if оно представим-ое в виде $K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,Q_j(s)$. $P_j, Q_j \in L_2[a,b]$, причём P_j – лин. нез.

Метод только для вырожд-х ядер

$x(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t)$

$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,Q_j(s)$

$x(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\underbrace{\int_a^b Q_j(s)\,x(s)\,ds}_{q_j} + f(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,q_j + f(t)$ – **вид решения**

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,q_j + f(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j \int_a^b Q_j(s)\cdot\left[\sum_{k=1}^{n} q_k P_k(t) + f(s)\right]ds + f(t)$$

$a_{jk} = \int_a^b Q_j(s)\,P_k(s)\,ds$ $\qquad b_j = \int Q_j(s)\,f(s)\,ds$ $\qquad q_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\,q_k + b_j$

№1

Найти реш. ур-я Фредгольма 2[го] рода с вырожд. ядром $x(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos t \sin s\; x(s)\,ds = \sin t$

$k = \cos t \sin s \cdot \frac{1}{\pi}$ $\qquad P_1 = \frac{1}{\pi}\cos t$ $\qquad Q_1 = \sin s$

$a_{11} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\sin = \int_{-\pi}^{\pi} = 0$ $\qquad b_1 = \int_0^{2\pi} \sin^2 s\,ds = \pi$ $\qquad q_1 = \frac{\pi}{1-0} = \pi$ $\qquad x(t) = \frac{1}{\pi}\cos t\,\pi + \sin t = \cos t + \sin t$

№2 $\quad x(t) - 3\int_{-1}^{1}(t^2s^2 + 4ts + 1)\,x(s)\,ds = 2\pi^2\cos 2\pi t$

$K(t,s) = 3t^2s^2 + 12ts + 3 \Rightarrow P_1 = 3t^2,\ Q_1 = s^2;\ P_2 = 12t,\ Q_2 = s;\ P_3 = 3,\ Q_3 = 1$

$a_{11} = 3\int_{-1}^{1} s^2 s^2\,ds = \frac{3}{5}s^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{6}{5}$ $\qquad a_{12} = 0 = a_{21}$

$a_{13} = 2 = a_{31}$ $\qquad a_{23} = a_{32} = 8$ $\qquad a_{33} = 6$ $\qquad a = \begin{pmatrix} 6/5 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$b_1 = \int_{-1}^{1} s^2\,2\pi^2\cos 2\pi s\,ds = 4\pi^2\int_0^1 s^2\cos 2\pi s\,ds = 0$ $\qquad b_2 = 0$ $\qquad b_3 = 0$

$q_1 = \frac{6}{5}q_1 + 2q_3$

$q_2 = 8q_2 \rightarrow$ $\qquad q_2 = 0$

$q_3 = 2q_1 + 6q_3$

$q_3(1-6) = \frac{12}{5}q_1 + 2q_3$

21.05.24

$$\int_a^t \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,ds = f(t)$$

1) if $\mathcal{K}(t,s)$ и $f(t)$ имеют непр. производные по t и $\mathcal{K}(t,t) \ne 0$

1. дифф-ем и делим на $\mathcal{K}(t,t)$

$$x(t) + \int_a^t \frac{\mathcal{K}'_t(t,s)}{\mathcal{K}(t,t)}\,x(s)\,ds = \frac{f'_t(t)}{\mathcal{K}(t,t)}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)\,ds = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,s) + \frac{\partial b(t)}{\partial t}\cdot f(t,a) - \frac{\partial a}{\partial t} f(t,b)$$

$\forall$ оп-р ГБ-Ш всегда компактен

2) Вводим новую перем-ю

$$X(t) = \int_a^t x(s)\,ds$$

$$X(t) - \int_a^t \frac{\mathcal{K}'_t(t,s)}{\mathcal{K}(t,t)}\cdot X(s)\,ds = \frac{f(t)}{\mathcal{K}(t,t)}$$

$\boxed{\text{Th}}$ **[Альтернатива Фредгольма]**: $\exists B = I - A$, где $A \in \mathcal{K}(H)$. Тогда верно одно из двух утв-й:

1) Либо B и B^* инъективны ($\ker B = \ker B^* = \{0\}$) и сюръективны ($\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} B^* = H$), а значит биективны.

2) Либо B и B^* <u>не</u> инъект., причём $0 < \dim\ker B = \dim\ker B^* < +\infty$
и <u>не</u> сюръект., причём $\operatorname{Im} B = (\ker B^*)^\perp \ne H$
$\operatorname{Im} B^* = (\ker B)^\perp \ne H$

Пусть A – оп. ГБ-Ш

(неодн): $(I-A)x = f$

(одн.): $(I-A)x = 0$

(сн): $(I-A^*)y = g$

(со): $(I-A^*)y = 0$

$\rightarrow$ А.Ф. утверждает, что

1) Либо ур. (о) и (со) имеют только нулевое реш., тогда ур-я (н) и (сн) имеют единств. реш-я

2) Либо ур. (о) и (со) имеют по $n < +\infty$ лин. нез-ых реш-й $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ соотв-но, тогда ур-е (н) разрешимо $\Leftrightarrow$ $f \perp x_i$ $\forall i = \overline{1,n}$. Аналог., (сн) разр. $\Leftrightarrow$ $g \perp y_i$, $i = \overline{1,n}$

if ур-е (н) разр-мо, then его решение можно представить как сумму частного р-я (чн) и (оо)

$x = x_{чн} + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ $\qquad$ Аналог. для сопр.

Фр 2$^{\text{го}}$ рода с вырожд. ядром $\quad q_j = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{jk} q_k + b_j$

$(0):\ q_j - \lambda \sum_{i} a_{jk} q_k = 0$

(w1) Иссл-ть разр. ур. Ф2р с вырожд. знач. λ

1) $x(t) - \lambda \int_0^1 \underbrace{(1+2t)}_{P_1} \underbrace{s}_{Q_1} x(s)\,ds = 1 - \frac{3}{2}t$

$K(t,s) = \sum_{1}^{n} P_i(t) Q(s)$

$a_{11} = \int_0^1 s(1-2s)\,ds = \frac{7}{6}$

$q_1 - \lambda\left(\frac{7}{6} q_1\right) = 0$

$q_1\left(1 - \frac{7\lambda}{6}\right) = 0$

$\underline{q_1 = 0}$ при $\lambda \in R / \{6/7\}$

$q_1 \in R$ при $\lambda = \frac{6}{7}$

Метод посл-ых приближений

Пусть A - инт. оп-р Гб-Ш (ИоГШ) с ядром $K(t,s)$

$Ф^2$: $\mu \int_a^b K(t,s) x(s)\,ds + f(t) = x(t)$

Оп. вид: $(I - \mu A)x = f$

$|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ гарант. $\exists$ обр. оп-ра $(I - \mu A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^n A^n f = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$

$x_0 = f$, $x_n = \mu A x_{n-1}$, $A^0 = I$

Th [о повт. ядре]

Пусть A - и.о.Г-Ш с ядром $K(t,s)$, then $\forall n \geq 2$ $\mu \in \mathbb{N}$ опер. A^n - тоже о.Г-Ш, причём его ядро $K_n(t,s)$ можно найти как

$K_n(t,s) = \int_a^b K(t,\tau) K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau$, причём $\|A^n\| \leq \|K_n\|_2 \leq \|K\|_2^n$

«повторные» ядра

$x(t) = f(t) + \int_a^b R(t,s,\mu) f(s)\,ds$

$R(t,\mu,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n K_n(t,s)$ - резольвентное ядро

(w2) $x(t) = \sin(\pi t) + \frac{1}{2}\int_0^1 x(s)\,ds$

$K(t,s) = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$ $\qquad |\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ $\qquad x_n = f + \mu A x_{n-1}$ ← тут было $\sum_{n=1}^{\infty}$

$x_0(t) = \sin(\pi t)$

$x_1(t) = \sin(\pi t) + \mu\int_0^1 x_0(s)\,ds = \sin(\pi t) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi s)\,ds = \sin(\pi t) + \frac{1}{\pi}$

$x_2(t) = s(\pi t) + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin\pi s + \frac{1}{\pi}\right)ds = \sin\pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}$ $\quad \Rightarrow \quad x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n = \sin(\pi t) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sin(\pi t) + \frac{2}{\pi}$

$x_n(t) = \sin(\pi t) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$

(w3) Найти K_n, R и представить реш. ч/з R

$x(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x(s)\,ds = \sin t$

$\mu = \frac{1}{2\pi}$, $K(t,s) = 1 = K_1$

$\|A\|^2 = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} 1^2\,ds\,dt = \int_0^{\pi} \pi\,dt = \pi^2$

$K_2(t,s) = \int_0^{\pi} K_1(\tau,s)\,d\tau = \pi$

$K_3(t,s) = \int_0^{\pi} K\cdot\pi = \pi^2$

$\boxed{K_n = \pi^{n-1}}$

$R = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n K_n(t,s) = \sum \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot \pi^{n-1} = \frac{1}{\pi}$

23.05.24

$K(t,s) = \overline{K(s,t)}$ - симметричное ядро

X - собств. ф-ия инт. ур-я (одно. ур-я $x = \mu A x$), μ - собс. знач.

if имеет место рав-во $X(t) = \mu\int_a^b K(t,s) x(s)\,ds$

If $\lambda \neq 0$ - с.з. on A then $\mu = 1/\lambda$ - с.з. $x = \mu A x$

Метод ГШ разложения решения И.У. $x = \mu A x + f$ по собств. ф-ям симметр. ядра

$x(t) = f(t) + \mu \sum_n \frac{x_n(t)}{\mu_n - \mu} \int_a^b f(s)\,\overline{x_n(s)}\,ds$, x - с.ф., μ - с.з.

(w1) $x(t) - \mu\int_0^1 K(t,s) x(s)\,ds = 0$, найти с.з., с.ф.

$K(t,s) = \begin{cases} (s-1)t, & 0 \leq t \leq s \\ s(t-1), & s \leq t \leq 1 \end{cases}$

$x(t) = \mu\left(\int_0^t s(t-1)x(s)\,ds + \int_t^1 (s-1)t\,x(s)\,ds\right)$

$\downarrow d/dt$

$x'(t) = \mu\left[\int_0^t s\,x(s) + 1\cdot\cancel{(t-1)t}\,x(t) - 0 + \int_t^1 (s-1)x(s)\,ds + 0 - 1\cancel{(t-1)t}\,x(t)\right]$

$x'(t) = \mu\left(\int_0^t s\,x(s)\,ds + \int_t^1 (s-1)x(s)\,ds\right)$

$\downarrow d/dt$

$x''(t) = \mu\left[0 + t\,x(t) - 0 + 0 + 0 - 1(t-1)x(t)\right] \Rightarrow x''(t) = \mu x(t)$

$x(0) = \int_0^1 (s-1)\cdot 0\cdot x(s)\,ds = 0$

$x(1) = \int_0^1 s(1-1)\,ds = 0$

$\begin{cases} x''(t) = \mu x(t) \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$

$x_{oo} = c_1 e^{\sqrt{\mu}t} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}t}$

$\mu > 0$

$\lambda = \pm\sqrt{\mu}$

$x = c_1 e^{\sqrt{\mu}t} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}t}$

$x(0) = c_1 + c_2 = 0$

$x \equiv 0$ - реш. (тривиал)

$\mu < 0$

$\lambda = \pm i\sqrt{\mu}$

$x_1 = c_1\cos\sqrt{\mu}t + c_2\sin\sqrt{\mu}t$

$x(0) = c_1 = 0$

$c_2\sin\sqrt{\mu}t = 0 \Rightarrow \sqrt{\mu} = \pi n$

$\mu_n = \pi^2 n^2$

$x_n = \sqrt{2}\sin\pi n t$

$\mu = 0$

$\lambda = 0$

$x = 0$

$x = ct + \tilde{c}$

$x(0) = \tilde{c} = 0$

$x(1) = c + \tilde{c} = 0$

$\rightarrow c = 0$

$\underline{x = 0}$

$x(t) - \mu\int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds = 1$

$x(t) = 1 + \mu\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot\sin(\pi n t)}{\pi^2 n^2 - \mu}$

$\underbrace{\int_0^1 1\cdot\sin(\pi n s)\,ds}_{-\frac{1}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)}$

$x(t) = 1 + \frac{\mu}{\pi} 2\sqrt{2}\sum \frac{\sin(\pi[2k+1]t)}{(\pi^2(2k+1)^2 - \mu)}\frac{1}{(2k+1)}$

Мы
пережили это...

Спасибо
Виктории
Евгеньевне ♡