Занятие 11

Системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему однородных линейных уравнений

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{A}\vec{y}, \tag{11.1}$$

где $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}$ — квадратная числовая матрица порядка n.

Известно, что решения системы (11.1) образуют линейное векторное пространство, размерность которого равна n. Наша задача — научиться строить базис этого пространства, поскольку, зная базис (фундаментальную систему решений), легко написать общее решение системы.

Пусть $\vec{y}^{[1]}(t)$, ... , $\vec{y}^{[n]}(t)$ — некоторый набор частных решений системы (11.1). Составим матрицу $\mathbf{Y}(t)$, поместив в ее столбцы вектор-функции $\vec{y}^{[i]}(t)$. Очевидно, матрица $\mathbf{Y}(t)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t). \tag{11.2}$$

Можно показать, что функция $\varphi(t) = \det \mathbf{Y}(t)$ удовлетворяет однородному линейному уравнению

$$\dot{\varphi}(t) = \operatorname{tr} \mathbf{A} \cdot \varphi(t),$$

где $\operatorname{tr} \mathbf{A}$ — след матрицы $\mathbf{A}$, откуда следует, что

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) \cdot e^{\operatorname{tr}\mathbf{A}\cdot(t-t_0)}.$$

Эта замечательная формула называется формулой Лиувилля. Из нее тотчас же следует, что если $\det\mathbf{Y}(t_0) = 0$, то $\det\mathbf{Y}(t) \equiv 0$, и если $\det\mathbf{Y}(t_0) \neq 0$, то $\det\mathbf{Y}(t) \neq 0$ при любых значениях t.

Подчеркнем, что это свойство выполняется не для любой функциональной матрицы. Так, если $\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, то $\det\mathbf{Y}(0) = 0$, $\det\mathbf{Y}(1) = 0$, но $\det\mathbf{Y}(2) \neq 0$.

Матрицу $\mathbf{Y}(t)$ будем называть *фундаментальной*, если она является решением уравнения (11.2) и $\det\mathbf{Y}(t_0) \neq 0$ в некоторой точке t_0.

Если матрица $\mathbf{Y}(t)$ фундаментальна, то общее решение системы (11.1) задается формулой

$$\vec{y}_{\text{o.o.}}(t) = \vec{Y}(t) \cdot \vec{c} = C_1\vec{y}^{[1]}(t) + ... + C_n\vec{y}^{[n]}(t), \quad (11.3)$$

где $\vec{c}$ — вектор, составленный из произвольных констант C_1, ... , C_n.

Действительно, нетрудно проверить, что при любом векторе $\vec{c}$ формула (11.3) дает решение системы:

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{Y}}(t) \cdot \vec{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{c} = \mathbf{A}\vec{y}(t)$$

С другой стороны, если поставить для системы (11.1) задачу Коши $\vec{y}(t_0) = \vec{y_0}$, то из равенства $\vec{y_0} = \mathbf{Y}(t_0) \cdot \vec{c}$ в силу невырожденности матрицы $\mathbf{Y}(t_0)$ можно определить значение $\vec{c} = \mathbf{Y}^{-1}(t_0) \cdot \vec{y_0}$.

Таким образом, формула (11.3) при подходящем наборе констант дает решение любой задачи Коши. Следовательно, эта формула действительно описывает общее решение системы (11.1).

Из сказанного выше следует, что решения $\vec{y}^{[1]}(t)$, ... , $\vec{y}^{[n]}(t)$ образуют базис в пространстве решений, если в некоторой точке t_0 числовые векторы $\vec{y}^{[1]}(t_0)$, ... , $\vec{y}^{[n]}(t_0)$ линейно независимы. Другими словами, столбцы фундаментальной матрицы образуют базис в пространстве решений системы (ФСР).

Рассмотрим различные способы построения ФСР системы однородных линейный уравнений с постоянными коэффициентами.

Имеет место следующее замечательное утверждение: если вектор-функция $\vec{y}(t)$ является решением системы (11.1), то каждая ее компонента $y_i(t)$ удовлетворяет однородному линейному уравнению с постоянными коэффициентами, имеющему характеристический многочлен $P_n(\lambda) = \det\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big)$.

Основываясь на этом утверждении, можно предложить алгоритм построения общего решения системы второго порядка $\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$

1. Найти корни характеристического многочлена

$$P_n(\lambda) = \det\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big) = \lambda^2 - \operatorname{tr}\mathbf{A}\cdot\lambda + \det\mathbf{A}.$$

Здесь $\operatorname{tr}\mathbf{A}$ — след матрицы $\mathbf{A}$, то есть $(a_{11} + a_{22})$.

2. Выбрать любую компоненту ($x(t)$ или $y(t)$) и записать для нее общее решение этого уравнения.

3. Найти вторую компоненту, используя одно из уравнений системы.

4. Записать ответ в матричном или векторном виде.

Проиллюстрируем сказанное.

Пример 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$. Корни этого многочлена $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Общее решение соответствующего уравнения $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$.

Из первого уравнения системы $y = \dot{x} - 2x = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$.

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ $\square$

Пример 2. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$. Корни этого многочлена $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

Общее решение соответствующего уравнения

$$x(t) = C_1 e^{2t} \sin t + C_2 e^{2t} \cos t.$$

Из первого уравнения системы находим

$$y(t) = \dot{x} - x = C_1 e^{2t}(\sin t + \cos t) + C_2 e^{2t}(\cos t - \sin t).$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin t + \cos t & \cos t - \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \square$$

Описанный прием мы назовем *методом исключения*. Для систем второго порядка он является универсальным. Для системы третьего порядка метод исключения работает, если в системе есть уравнение, содержащее только две неизвестные функции. Это позволяет на третьем шаге алгоритма выразить одну компоненту через другую.

Пример 3. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = -x + y + z \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_3(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda.$$

Корни этого многочлена $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

Поскольку третье уравнение содержит только функции x и z, то, зная z, из него легко восстановить x. Поэтому начинаем с функции $z = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$. Тогда $x = \dot{z} + z = C_1 + 3C_2 e^{2t}$.

Наконец, из первого уравнения находим

$$y = 0,5(x - z - \dot{x}) = -2C_2 e^{2t} - 0,5C_3 e^{-t}.$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3e^{2t} & 0 \\ 0 & -2e^{2t} & -0,5e^{-t} \\ 1 & e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad \square$$

Замечание: характеристический многочлен можно найти по формуле

$$P_3(\lambda) = \det\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}\mathbf{A} \cdot \lambda^2 -$$
$$- \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \cdot \lambda + \det\mathbf{A}$$

Пример 4. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = y_1. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен $P_4(\lambda) = \lambda^4 - 1$.

Корни характеристического многочлена $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$.

$y_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t$,

$y_2 = \dot{y}_1 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_3 \cos t - C_4 \sin t$,

$$y_3 = \dot{y}_2 = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\sin t - C_4\cos t,$$

$$y_4 = \dot{y}_3 = C_1e^t - C_2e^{-t} - C_3\cos t + C_4\sin t.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \square$$

Как мы видели, если числа λ — корни характеристического многочлена — являются вещественными числами, то частные решения систем имеют вид $\vec{y}(t) = \vec{u} \cdot e^{\lambda t}$, где $\vec{u}$ — некоторый числовой вектор.

А что если сразу искать частные решения в таком виде? Подставляя функцию $\vec{y}(t) = \vec{u} \cdot e^{\lambda t}$ в уравнение (11.1) и сокращая на $e^{\lambda t}$, мы получим уравнение $\lambda\vec{u} = \mathbf{A}\vec{u}$, или $\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big)\vec{u} = 0$.

Это означает, что λ является собственным числом, а $\vec{u}$ — соответствующим ему собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$.

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет простую структуру, то есть у нее n вещественных собственных чисел λ_i (с учетом их кратности) и n соответствующих этим числам линейно независимых собственных векторов $\vec{u}^{[i]}$, то общее решение этой системы имеет вид

$$\vec{y}_{\,\text{о.о.}}(t) = C_1\vec{u}^{[1]}e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n\vec{u}^{[n]}e^{\lambda_n t}.$$

Именно такую структуру имела матрица в примере 3. Проверьте, что $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 0$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — собственным вектором, соответствующим $\lambda_2 = 2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ — собственным вектором, соответствующим $\lambda_3 = -1$.

Если вещественная матрица $\mathbf{A}$ имеет однократное собственное число $\lambda = \alpha + i\beta$ (и следовательно, сопряженное к нему собственное число $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$), то для построения вещественной ФСР следует сначала найти комплексный собственный вектор $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$, отвечающий $\lambda = \alpha + i\beta$, и получить комплексное решение

$$\vec{w}e^{\lambda t} = (\vec{u} + i\vec{v})e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\Big[(\vec{u}\cos\beta t - \vec{v}\sin\beta t) + i(\vec{u}\sin\beta t + \vec{v}\cos\beta t)\Big]$$

Действительная и мнимая части этого решения будут также частными решениями системы (11.1), причем линейно независимыми.

Пример 5. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P_3(\lambda) = \det\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$.

Корни этого многочлена $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Найдем собственный вектор, отвечающий $\lambda_1 = 1$ из уравнения

$$\Big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\Big)\vec{u}=0\ \ :$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad u_1=0,\ u_2+u_3=0.$$

Например, можно взять $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$, и получить решение $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}e^t$.

Далее, значению $\lambda_2=1+2i$ отвечает собственный вектор $\vec{w}=\begin{pmatrix}2i\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.

Следовательно, функция

$$\vec{w}e^{(1+2i)t}=\begin{pmatrix}2i\\ 1\\ 3\end{pmatrix}e^t(\cos 2t+i\sin 2t)=e^t\begin{pmatrix}-2\sin 2t\\ \cos 2t\\ 3\cos 2t\end{pmatrix}+ie^t\begin{pmatrix}2\cos 2t\\ \sin 2t\\ 3\sin 2t\end{pmatrix}$$

является комплекснозначным решением системы.

Отделяя ее вещественную и мнимую части, получаем два вещественных решения: $e^t\begin{pmatrix}-2\sin 2t\\ \cos 2t\\ 3\cos 2t\end{pmatrix}$ и $e^t\begin{pmatrix}2\cos 2t\\ \sin 2t\\ 3\sin 2t\end{pmatrix}$.

Составим из полученных решений матрицу

$$\mathbf{Y}_1(t)=e^t\begin{pmatrix}0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t\\ 1 & \cos 2t & \sin 2t\\ -1 & 3\cos 2t & 3\sin 2t\end{pmatrix}.$$

Так как $\det \mathbf{Y}_1(0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, то это фундаментальная матрица, и значит, мы нашли базис в пространстве решений.

Заметим, что для рассматриваемой системы уравнений легко можно получить базис методом исключения. Например, положив

$$z = C_1 e^t + e^t(C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t),$$

из третьего уравнения находим

$$x = (\dot{z} - z)/3 = 2e^t(C_2 \sin 2t - C_3 \cos 2t)/3.$$

Наконец, из первого уравнения

$$y = -C_1 e^t + e^t(C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t)/3.$$

Записав полученные решения в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}\cos 2t & -\frac{2}{3}\sin 2t \\ -1 & \frac{1}{3}\sin 2t & \frac{1}{3}\cos 2t \\ 1 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

мы придем к другой фундаментальной матрице

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}\cos 2t & -\frac{2}{3}\sin 2t \\ -1 & \frac{1}{3}\sin 2t & \frac{1}{3}\cos 2t \\ 1 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Впрочем, легко заметить, что обе фундаментальные матрицы состоят из пропорциональных столбцов, которые отличаются лишь порядком.

Вообще, любые две фундаментальные матрицы одной и той же системы уравнений связаны соотношением $\mathbf{Y}_2(t) = \mathbf{Y}_1(t) \cdot \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — невырожденная числовая матрица перехода.

Поскольку фундаментальные матрицы обратимы при любом значении t, найти матрицу $\mathbf{B}$ можно по формуле $\mathbf{B} = \mathbf{Y}_1^{-1}(0) \cdot \mathbf{Y}_2(0)$.

В нашем примере $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ $\square$

В заключение напомним, что мы рассматривали только матрицы простой структуры, оставив открытым вопрос о том, как найти фундаментальную матрицу (ФСР) в более сложных случаях, например, если характеристический многочлен имеет кратный корень, но число соответствующих собственных векторов меньше его кратности (то есть алгебраическая кратность корня больше его геометрической кратности). Кроме того, надо еще научиться алгебраическими средствами распознать, что мы столкнулись с такой ситуацией.

Другой способ построения ФСР, лишенный этих недостатков, мы обсудим на следующем занятии.

Самостоятельная работа

Найти общее решение системы.

1. $\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$

3.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = -2x + y - z \end{cases}$$

Указание: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i.$

Собственный вектор $\vec{w}\Big|_{\lambda=i} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$

4.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

Указание: $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 3.$

Ответы к самостоятельной работе

1. Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big) = \lambda^4.$$

$y_1 = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4t^3,$

$y_2 = C_2 + 2C_3t + 3C_4t^2,$

$y_3 = 2C_3 + 6C_4t,$

$y_4 = 6C_4.$

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \\ 6t \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

2. $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

$x = C_1 e^t + C_2 t e^t \quad \Rightarrow \quad y = 3x - \dot{x} = 2C_1 e^t + C_2(2t-1)e^t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \end{pmatrix} e^t = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ 2e^t & \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ e^t & -\cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1+t \\ -1-2t \\ t \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$