

Работа 1.1. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЖИДКОСТИ

Данный вариант работы "Броуновское движение" – оригинальная разработка НГУ. Программа Brownian для съемки фильма и определения координат частицы разработана ст. преподавателем КОФ Дорошкиным А.А., доработка микроскопа с установкой светодиодного осветителя выполнена сотрудником лаборатории молекулярного практикума Фроловым В.М., описание и задания разработаны доцентом КОФ Смирных Л.Н.

Часть 1. Теоретическое введение

1.1. Общее определение броуновского движения

Броуновское движение – это беспорядочное тепловое движение малых частиц, взвешенных в жидкости или газе. Открыто в 1827 г. Р. Броуном как движение цветочной пыльцы (частиц с размером ~ 1 мкм) в воде, видимое при сильном увеличении.



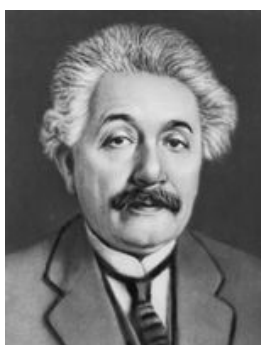
Роберт БРОУН
Robert Brown, 1773–1858

Причинами броуновского движения в общем случае является хаотическое тепловое движение молекул среды, обуславливающее флуктуации импульса, передаваемого частицам в каждый момент времени. В жидкости связи между молекулами среды больше тепловых (точнее, становятся больше тепловых, как только расстояние между ними становится больше равновесного для данной температуры). Поэтому температура в жидкости проявляется в виде хаотической тепловой флуктуации микрообъемов среды, обусловленной перестройкой связей молекул и вызывающей флуктуацию давления в жидкости. Броуновские частицы в жидкости являются прекрасным "индикатором" этих флуктуаций.

Теоретически в рамках молекулярно-кинетической теории газов броуновское движение было объяснено А. Эйнштейном и М. Смолуховским в 1905-06 гг [1]. Тогда же (1906-10) законы броуновского движения (1-й и 2-й законы Эйнштейна) были подтверждены экспериментально Ж. Перреном и Т. Сведбергом. В настоящее время развиты более подробные обобщенные теории броуновского движения, рассматриваемого как винеровский случайный процесс [2].



М. Смолуховский
(1872-1917)



А. Эйнштейн
(1879-1945)



Ж.Б. Перрен
(1870-1942)

Возможность визуального наблюдения за движением броуновских частиц до сих пор является наиболее наглядным экспериментальным подтверждением молекулярно-кинетической теории вещества. Принципиальное значение теория броуновского движения имела для прояснения статистической природы второго начала термодинамики, для проблем обратимости (необратимости) молекулярных процессов. Практическое применение теория броуновского движения находит в физике дисперсных систем, коагуляции растворов

(укрупнения частиц растворов), седиментации (оседании) частиц. В метрологии¹ броуновское движение (флуктуации подвижных частей измерительных приборов) являются принципиальным "ограничителем" увеличения точности этих приборов [3].

В связи с развитием в настоящее время нанотехнологий броуновское движение может вновь обрести не только практический, но и научный интерес, поскольку экспериментальное изучение движения броуновских частиц в жидкостях позволяет более подробно изучить микродинамику поведения среды на пространственных масштабах от нано- до микрометрового диапазона.

Использование современных средств экспериментального исследования – соединение традиционного микроскопа с веб-камерой, позволяющей вывести изображение движущейся броуновской частицы на экран компьютера, и соответствующего программного обеспечения, позволяющего фиксировать и быстро обрабатывать большие массивы экспериментальных данных, – делает броуновское движение частиц в жидкости уникальным инструментом для знакомства студентов с особенностями измерения и теоретического представления случайных физических величин. Именно это и является главной целью данной работы.

1.2. Отличие броуновского движения от движения тел классической механики

Броуновское движение вводит нас в мир случайных, стохастических явлений. Законы, описывающие поведение таких систем, носят *вероятностный* характер, сильно отличающийся от детерминистических законов, к которым мы привыкли со школы и на которых основана механика Ньютона. Поэтому очень важно с самого начала правильно осознать эти особенности. Исследование броуновского движения частиц в жидкости представляет для этого прекрасную возможность.

Характерные особенности броуновского движения по сравнению с обычным механическим можно представить при анализе следующего модельного эксперимента. Будем опускать в воду стальные шарики диаметром d и следить за характером их движения (рис. 1). При макроскопическом размере шарика (например, при $d = 10$ см) его движение с высокой точностью описывается законами классической механики. Это означает, что *параметры* его движения – траектория $\mathbf{r}(t)$, скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и ускорение $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ – определяются вторым законом Ньютона: $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \cdot d^2\mathbf{r}/dt^2$.

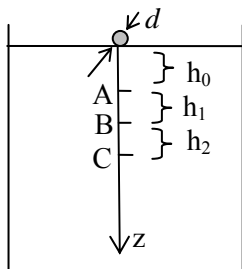


Рис. 1. Движение шарика

В нашем модельном эксперименте скорость и ускорение шарика можно определить, фиксируя время прохождения им двух последовательных расстояний h_1 и h_2 . Если диаметр d достаточно велик, а расстояние точек А и В от поверхности сравнительно мало (например, $h_0 = 1$ см), то шарик будет двигаться вниз с ускорением, близким к ускорению свободного падения g . В измерительном практикуме вы использовали этот метод для измерения величины g , только шарик падал не в жидкости, а в воздухе.

Будем уменьшать диаметр шарика. При $d \sim 1$ мм ускорение шарика будет уже много меньше g , поскольку на движущийся в воде шарик действует суммарная сила $F = mg - F_a - F(v)$, где mg – сила тяжести, F_a – архимедова сила, $F(v) = kv$ – сила вязкостного трения в жидкости, возрастающая с увеличением скорости движения шарика.

Сила вязкостного трения обусловлена тем, что при движении шарик передает жидкости часть своей кинетической энергии (часть импульса), и в жидкости образуется "спутный поток", т.е. происходит увлечение жидкости движущимся в ней телом. Чем выше скорость движения шарика, тем больше кинетической энергии он передает жидкости в единицу времени и тем больше он тормозится. В результате при достижении некоторой критической скорости $v_{кр}$ сумма силы трения и силы Архимеда будет равна силе тяжести $mg = F_a + kv_{кр}$, после чего шарик будет двигаться вниз уже с постоянной скоростью $v_{кр}$. В молекулярном

¹ Метрология – физико-техническая дисциплина об измерениях, методах достижения их единства и требуемой точности.

практикуме это явление (закон Стокса) используется в работе по определению вязкости глицерина.

До сих пор движение шарика подчинялось законам классической механики. При этом скорость и ускорение тела в механике определяются как первая и вторая производная от траектории по времени. Однако дальнейшее уменьшение диаметра шарика (при тех же условиях эксперимента) приносит нам неожиданный результат. Сначала на равномерное движение шарика вдоль направления z начинают накладываться некоторые случайные отклонения по всем трем координатам, а при дальнейшем уменьшении диаметра шарик и вовсе перестает опускаться вниз в направлении силы тяжести! Направление и величина смещений за любые конечные промежутки времени τ теперь будут изменяться *случайным* образом. То есть движение шарика становится полностью беспорядочным (случайным). Это и есть явление, которое получило название *броуновское движение* частиц. Правда, если речь идет о падении стального шарика в воде, то подобные явления будут наблюдаться при диаметрах шарика менее 1 мкм, и нам понадобится микроскоп, чтобы проводить дальнейшие наблюдения за его движением. За малостью диаметра шарика мы будем называть его *броуновской частицей*, имея, однако, в виду, что ее диаметр, по крайней мере, на порядок больше диаметра молекул среды, в которой эта частица движется.

В связи с таким принципиальным (качественным) изменением движения шарика нам предстоит выяснить целый ряд вопросов, главные из которых следующие:

- 1) каковы причины столь решительного изменения законов движения шарика;
- 2) какие *новые* параметры² движения мы должны ввести, чтобы сформулировать относительно них *законы* броуновского движения частиц;
- 3) какими новыми (*вероятностными*) законами следует описывать это движение;

Относительно причин, определяющих движение броуновских частиц, мы уже говорили в самом начале введения. Когда хаотические тепловые флуктуации импульса, передаваемого частице со стороны жидкости, превысят изменения импульса, определяемые изменением потенциальной энергии шарика в поле тяготения за те же времена, тогда дальнейшим движением частицы будут управлять уже эти тепловые флуктуации среды.

Однако количественные характеристики выполнения этого условия сформулировать не так просто. Ведь случайное "блуждание" броуновской частицы уже нельзя описать прежними законами механики, для которых скорость и ускорение являются важнейшими параметрами движения. Действительно, хотя траектория движения броуновской частицы по-прежнему остается непрерывной в каждой точке, но в каждой точке в силу случайности причин, вызывающих это движение, траектория испытывает "излом". Такие траектории с точки зрения математики уже *не имеют производных* (потому что в точке "излома" производная "справа" не равна производной "слева", а такой точкой фактически становится каждая точка траектории броуновской частицы). Как следствие этого *классические понятия скорости и ускорения неприменимы к описанию движения броуновских частиц*. А, следовательно, для описания броуновского движения уже нельзя обычным образом применить мощнейший теоретический аппарат классической механики – теорию дифференциальных уравнений.

С другой стороны, эксперименты показывают, что движение различных броуновских частиц отличается друг от друга не только случайным образом, но и *закономерно*. Например, на экране компьютера нашей установки мы без труда фиксируем закономерные различия в случайном движении двух частиц, имеющих различный размер. "Большие" частицы движутся "медленнее" своих малых собратьев. И хотя нужно еще как-то объяснить, что такое "быстрее" и "медленнее", если привычное понятие скорости неприменимо к описанию движения броуновских частиц, но глаз надежно фиксирует наличие этих вполне закономерных, а вовсе не случайных отличий.

² Параметр – это какая-либо физическая величина, характерная для рассматриваемого процесса, а характеристика – это зависимость этой величины от другого параметра, например, от времени, или температуры и т.д. Законы – это устойчиво повторяющиеся отношения между величинами.

Таким образом, при всей случайности "блужданий" частиц их движение также подчиняется вполне определенным законам. Однако эти законы являются *вероятностными*, т.е. выполняются не в каждой конкретной точке и в каждый конкретный момент времени движения броуновской частицы, а лишь "в среднем". Невозможно предсказать сколько и с какими импульсами молекул ударило в данный момент в броуновскую частицу. А если бы каким-то чудом мы это узнали, то в следующий момент вся картина изменилась бы непредсказуемым образом, и наши "чудом приобретенные" знания стали бы совершенно бесполезными.

Исторически задача описания систем, содержащих очень большое число элементов, для которых просто невозможно задать ни начальные условия, ни использовать обычные уравнения механики для описания каждого элемента, была выполнена теоретическими трудами Р.Ю.Э. Клаузиуса, Дж.К. Максвелла, Л. Больцмана и Дж. Гиббса, заложившими основы молекулярно-кинетической, а затем и статистической физики.



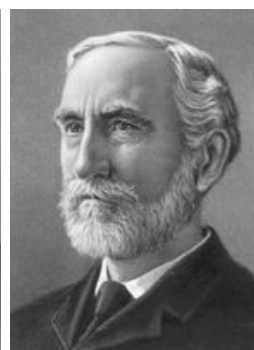
Клаузиус Р.Ю.Э
(1822 – 1888)



Дж.К. Максвелл
(1831 —1879)



Л. Больцман
(1844 —1906)



Дж. Гиббс
(1839-1903)

Но первым новый взгляд на мир вероятностных законов открыл Д. Бернулли, сумевший всего лишь через 40 лет после выхода в свет основополагающего труда И. Ньютона по механике "Математические начала натуральной философии" [3] вывести формулу для давления газов на основе объяснения этого *макропараметра* суммарным действием случайных ударов молекул в стенки сосуда. Тем самым Д. Бернулли первым сумел объяснить формирование *макроскопической* величины – давления газа P , характеризующего систему в целом (газ в сосуде), посредством *усреднения множества случайных микрособытий*.



Ньютон И.(1643-1727)



Бернулли Д. (1700-1782)

В мир формирования однозначных (детерминированных) *макропараметров* множеством случайных событий на *микроуровне* нам и предстоит войти.

Вопросы по параграфу.

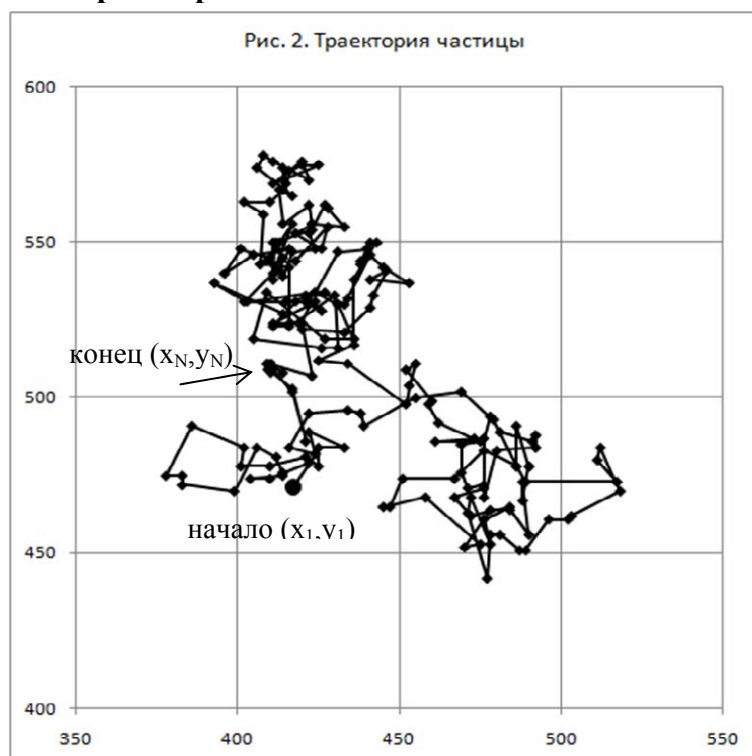
1. Чем *качественно* отличается броуновское движение от движения тел классической механики (макротел)?
2. Почему к движению броуновской частицы нельзя применить классические понятия скорости и ускорения?
3. Можно ли в качестве закона, описывающего движение броуновской частицы, записать второй закон Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \cdot d^2\mathbf{r}/dt^2$?

4. Какова причина броуновского движения?

1.3. Что такое "траектория" броуновской частицы?

Напомним, наша задача – понять, какими законами можно описывать броуновское движение, и каков физический смысл основных параметров этого движения. Причина броуновского движения – флуктуации импульса, передаваемого частице со стороны жидкости. Природа флуктуаций чисто тепловая – случайные отклонения давления и, соответственно, обмен импульсами между флуктуирующими микрообъемами жидкости. Это и есть сущность проявления такого макропараметра жидких сред, как температура. Сама частица не играет активной роли в своих перемещениях. Скорее она служит *индикатором флуктуационных процессов в жидкости*. И поскольку флуктуации носят случайный характер, то нас должно интересовать не конкретное поведение частицы в каждой точке траектории, а некоторые средние характеристики ее движения. Теоретические основы решения подобных задач вы будете изучать в *статистической физике*. В данной работе мы лишь воспользуемся некоторыми ее законами для вычисления и объяснения результатов экспериментального наблюдения броуновского движения. Рассмотрим их на конкретном примере броуновского движения частицы канифоли размером $\approx 1\text{ мкм}$ в воде, полученного на нашей установке.

1. Первичные экспериментальные данные. Первичным экспериментальным материалом для исследования законов движения броуновской частицы является регистрация ее положений через одинаковые промежутки времени τ . На рис. 2 приведен пример записи движения частицы – 200 последовательных точек, полученных через временные промежутки $\tau = 1\text{ с}$. Для дальнейшей обработки мы соединяем эти точки отрезками прямых, называемых **смещения**, и получаем **"траекторию"** частицы.



2. Что такое "траектория броуновской частицы"? Обратите внимание, что *реальной траектории частицы принадлежат только сами точки $x_i y_i$, $i = 1, 2, \dots, N$* , а соединяющие их отрезки прямых проведены *нами*. Сама же частица могла двигаться между соседними точками как угодно. Например, если бы мы фиксировали ее положение не через $\tau = 1\text{ с}$, а с временным шагом $\tau = 0.01\text{ с}$, то вместо каждого смещения (прямой линии) получили бы "траекторию", подобную изображенной на рис. 2. То есть получили бы двести новых "траекторий" из 100 смещений каждая.

Таким образом, термин "траектория" по отношению к движению броуновской частицы мы применяем совсем не в том смысле, в каком этот термин применяется при описании движения тела в механике. Там траектория действительно отображает все точки пространства, в которых *последовательно во времени* "побывало" тело ("материальная точка"). Здесь отрезками прямых мы фиксируем только *смещения* частицы за время τ , т.е. *расстояния* между двумя точками траектории, а не *путь*, пройденный частицей.

В теории броуновского движения принято характеризовать смещения с помощью их *проекций* на произвольную декартову систему координат $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$. Флуктуации импульса, передаваемого броуновской частице, направлены чисто случайным образом по отношению к осям системы координат. Поэтому вполне естественно считать, что при достаточном усреднении средние проекции смещений по всем трем осям совершенно равноценны (при том, однако, условии, что действием силы тяжести мы пренебрегаем и в среде в целом отсутствуют течения и градиенты макропараметров, таких как давление, температура, плотность и пр.) Поэтому в дальнейшем все рассуждения мы можем вести относительно какой-либо одной проекции, например, Δx , а результаты распространить на любую из трех проекций. Таким образом, траектории из 200 точек будет соответствовать 199 смещений $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и столько же смещений³ $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

1.4. Понятия "функция распределения" и "статистический ансамбль"

Если на рис. 2 рядом поместить еще одну траекторию той же самой частицы, т.е. следующие 200 смещений, снятых с тем же временным шагом $\tau = 1$ с, то вполне может оказаться, что вообще ни одно ее смещение не совпадет в точности с каким-либо смещением первой траектории. Потому что все смещения Δx_i чисто случайны и совпасть они могут тоже только чисто случайно. Что же тогда "полезного" (т.е. закономерного) можно получить из таких экспериментальных данных? Можно, например, определить среднее значение величины $\langle \Delta x \rangle$, но в теории броуновского движения утверждается, что математическое ожидание μ для нее равно нулю и не зависит от времени. Т.е. $\langle \Delta x \rangle \rightarrow \mu = 0$ при $N \rightarrow \infty$ и любом конечном τ . Можно указать одну из интуитивно ясных причин "зануления" $\langle \Delta x \rangle$: при осреднении по очень большому числу смещений (стремящемуся к ∞) смещений "влево" должно быть столько же, сколько "вправо". Чуть ниже мы узнаем другую причину этого, следующую уже из математической модели броуновского движения.

Для характеристики случайных величин в статистической физике вводится два основных понятия: "функция распределения" и "статистический ансамбль". В общем случае **статистический ансамбль** – это совокупность сколь угодно большого числа одинаковых физических систем («копий» данной системы), находящихся в одинаковых *макроскопических* состояниях; при этом *микроскопические* состояния систем могут принимать все возможные значения, совместимые с заданными значениями макропараметров, определяющих её макрокопическое состояние. Основной характеристикой статистического ансамбля является *функция распределения*.

Поясним это на примере нашей задачи. Мы имеем дело с изолированной системой, состоящей из капли жидкости и взвешенных в ней броуновских частиц. *Макропараметрами* нашей системы являются давление P , температура T , полный объем капли V , масса воды M_v , размер, число и вещество броуновских частиц. В целом по системе эти параметры в течение эксперимента мы считаем неизменными. Однако, каждая из частиц в любой зафиксированный момент времени имеет свой случайный по величине и направлению импульс и за каждый временной шаг τ каждая из них совершит некоторое смещение с проекцией Δx_i . Если мы зафиксировали 200 координат одной частицы, то полученные 199 смещений Δx_i мы можем рассматривать как *ансамбль* из 199 систем-"копий" капля-частица, в каждой из которых "реализуется" только одно микросостояние и, соответственно, одно

³ В дальнейшем для краткости мы будем опускать слово "проекция" и смещением называть также величину Δx .

смещение. Иначе говоря, мы можем считать, что 199 раз "запускали" частицу из одной и той же точки, причем *макропараметры* системы были одни и те же, а *микроусловия* – те, которые соответствовали каждому индивидуальному смещению траектории. Естественно, что представление о траектории мы при этом полностью потеряем, зато приобретаем возможность поставить вопрос о *функции распределения* случайной величин Δx .

1.5. Броуновское движение как винеровский случайный процесс

Теоретической моделью броуновского движения является *винеровский случайный процесс* (винеровская случайная величина). Характеристика "винеровский" означает требование, чтобы все значения Δx_i были получены за *неперекрывающиеся промежутки времени*. При этом условии случайная величина Δx будет иметь *нормальное (гауссово) распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $t = n\tau$* [2, 4].



Рис. 3. Функция распределения смещений

Функция нормального (гауссового) распределения смещений показана на рис. 3 для двух значений времени $t = \tau$ и $t = 4\tau$. Поскольку математическое ожидание (среднее значение смещения $\langle \Delta x \rangle$ для генеральной совокупности) равно нулю при любом $n\tau$, то единственной закономерно изменяющейся в зависимости от $n\tau$ величиной для винеровского процесса будет *дисперсия распределения смещений $\sigma^2 = f(n\tau)$* .

Прежде чем выяснять вопрос о том, как определить дисперсию смещений по экспериментально полученным траекториям броуновской частицы, приведем требования математической модели, при которых смещения броуновской частицы можно считать винеровской случайной величиной. Согласно классической работе П. Леви [2]:

«Стохастический процесс, который мы будем называть линейным⁴ броуновским движением, есть схема, хорошо передающая свойства реального броуновского движения, наблюдаемого на достаточно малой (но не бесконечно малой) временной шкале, и предполагающая, что такие же свойства имеют место на любой шкале. Здесь

- исчезает понятие *свободного пробега*, в течение которого движение отдельной молекулы⁵ ... существенным образом равномерно и прямолинейно;
- каждая молекула за конечное время пробегает *бесконечный* путь,
- а любая из ее координат есть функция, *не имеющая производной* и принимающая бесконечное число раз максимальные и минимальные значения в любом интервале».

Дисперсия нормального распределения определяется согласно формуле

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\Delta x_i - \mu)^2}{N}. \quad (1)$$

Для винеровской случайной величины $\mu = 0$ и для дисперсии мы получаем выражение

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\Delta x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum \Delta x_i^2}{N} = \langle \Delta x^2 \rangle. \quad (1')$$

Физический смысл дисперсии определяется тем, что в диапазоне $\pm \sigma$ расположено 68% всех значений смещений, а сама величина σ^2 пропорциональна $t = n\tau$. Величина σ называется *стандартным (среднеквадратичным) отклонением* функции распределения смещений.

1.6. Соотношения теоретических и экспериментально определяемых величин

1. **Среднее смещение.** Формально среднее смещение определяется как

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{\sum \Delta x_i}{N}. \quad (2)$$

⁴ Одномерным.

⁵ Под молекулой разумеется броуновская частица.

В теоретической модели броуновского движения, как было сказано выше, число реальных смещений частицы на любом конечном участке пути бесконечно, т.е. $N = \infty$, откуда и следует вывод, что $\mu = \langle \Delta x \rangle$ при $N = \infty$ равно нулю ($\mu = 0$).

При экспериментальном определении среднего в нашем случае $N = 199$, и для траектории, показанной на рис. 2, $\langle \Delta x \rangle = 0.015$, а $\langle \Delta y \rangle = 0.18$. Более того, как не трудно заметить по рис. 2, для среднего экспериментального смещения будет справедлива формула

$$\langle \Delta x \rangle_{\text{эксп}} = \frac{\sum \Delta x_i}{N} = \frac{x_{200} - x_1}{199},$$

т.е. среднее смещение равно разности первой и последней координаты экспериментальной траектории, деленной на число смещений, из которой она состоит.

В этом случае единственной возможностью получить $\langle \Delta x \rangle_{\text{эксп}} = 0$ будет тот редчайший шанс, когда окажется, что частица закончила свое движение точно в той же точке, из которой его начала. За многолетнюю практику еще ни одному студенту не удалось получить такую траекторию. И лишь при очень большом N (не менее нескольких тысяч) среднее смещение частицы становится пренебрежимо малой величиной. На нашей установке это можно сделать лишь отсняв не менее 10 фильмов (по 200 смещений) для одной и той же частицы.

Таким образом, задача экспериментальной проверки утверждения $\mu = 0$ для броуновского движения на нашей установке требует слишком большого времени, недоступного студенту в течение занятия, а потому может быть поставлена только в качестве *темы курсовой работы*.

3. Дисперсия распределения. В связи с тем, что среднее экспериментальное смещение не равно нулю, возникает вопрос, как получить экспериментальное значение дисперсии? Точнее говоря, если для обработки данных мы используем компьютерную программу (например, *Excel*), то должны ли мы к колонке смещений Δx_i применить операцию "ДИСП" или должны возвести в квадрат каждое Δx_i^2 и определить дисперсию как $\langle \Delta x^2 \rangle$?

Правильным будет именно последнее, поскольку для броуновского движения дисперсия, как было сказано выше, в точности равна значению $\langle \Delta x^2 \rangle$ (формула 1'). А применив операцию "ДИСП", мы определим величину

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\Delta x_i - \langle \Delta x \rangle)^2}{N}.$$

в которой $\langle \Delta x \rangle \neq 0$, что не верно.

1.7. Основные законы броуновского движения.

Как было сказано выше, основные законы броуновского движения были получены Эйнштейном и Смолуховским в начале 1900-х гг.

Согласно **первому закону** дисперсия смещений (средний квадрат проекции смещения частицы) $\langle \Delta x^2 \rangle$ вдоль выбранного направления x пропорциональна времени $t = n\tau$:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = 2Dt = 2Dn\tau, \quad (3)$$

где τ – "временной шаг", через который мы фиксируем положения частицы $x_i y_i$ (см. рис. 2).

Коэффициент пропорциональности в этом уравнении согласно **второму закону** для броуновских частиц сферической формы определяется *коэффициентом диффузии* D :

$$D = kT/6\pi\eta a. \quad (4)$$

Здесь $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура (одинаковая для среды и частицы), η – динамическая вязкость среды (для воды $\eta = 10^{-2}$ г/(см·с) = 10^{-3} Н·с/м² при 20°C), a – радиус броуновской частицы⁶. Сам коэффициент D является еще одним *макропараметром* системы частица-капля, который, также как и другие макропараметры, например, P и T , является *статистическим средним микропроцессов*, происходящих в данной системе.

⁶ В случае несферических частиц выражение для коэффициента D будет сложнее, но сам закон (1) останется прежним.

Законы (1,2) принято называть законами Эйнштейна или Эйнштейна-Смолуховского. В неявном виде в них предполагается **третий закон** – закон независимости средних квадратов проекций смещения частицы:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle = \langle \Delta z^2 \rangle, \quad (5)$$

а величины

$$\langle s^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle \text{ и } \langle S^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle + \langle \Delta z^2 \rangle \quad (5')$$

характеризуют средние квадраты смещения частицы в плоскости и в трехмерном пространстве соответственно.

1. Что такое средний квадрат смещения в плоскости $\langle s^2 \rangle$ и в пространстве $\langle S^2 \rangle$?

Для винеровской случайной величины проекции смещения Δx_i и Δy_i считаются независимыми. Соответственно независимы и их дисперсии $\langle \Delta x^2 \rangle$ и $\langle \Delta y^2 \rangle$. А в силу невыделенности осей X и Y для движения частицы дополнительно имеет место равенство дисперсий $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle$ (закон (5) броуновского движения).

В теории вероятностей есть теорема: если случайные величины α и β независимы, то дисперсия их суммы равна сумме дисперсий: $\sigma^2(\alpha + \beta) = \sigma^2(\alpha) + \sigma^2(\beta)$. На этом основании и записан закон (5'):

$$\begin{aligned} \langle s^2 \rangle &= \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle = 4D\tau; \\ \langle S^2 \rangle &= \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle + \langle \Delta z^2 \rangle = 6D\tau. \end{aligned} \quad (5')$$

Таким образом, уравнения (5') утверждают, что дисперсия распределений смещений в плоскости удваивается, а в пространстве – утраивается по сравнению с дисперсией для одномерного винеровского процесса.

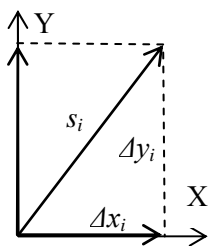


Рис. 4

Формально точно такие же формулы мы получаем для расчета среднего квадрата смещения частицы в плоскости и пространстве.

Например в плоскости длина каждого индивидуального смещения s_i определяется соотношением $s_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$ (рис. 4). Усредняя это выражение, мы вновь получим $\langle s^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle$. Таким образом, и здесь трактовка двух численно одинаковых величин имеет два различных смысловых значения. В правильной трактовке эта величина определяет дисперсию расплывания ансамбля смещений в *плоскости* $\sigma_s^2 = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle$. Напомним, что и в этом случае при определении величины $\mu = \langle s \rangle$ мы должны будем полагать число $N \rightarrow \infty$ и, соответственно,

$$\sigma_s^2 = \frac{\sum (\Delta s_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum \Delta s_i^2}{N} = \langle s^2 \rangle \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

1.8. "Винеровский" и "учебный" способы обработки траектории

Этот параграф вызван тем, что иногда (например, [5]) даются рекомендации по экспериментальной проверке закона (3), не соответствующие определению броуновского движения как винеровского случайного процесса.

Проверить экспериментально закон (3) – это значит определить зависимость дисперсии функции распределения $\langle \Delta x^2 \rangle$ от времени $t = n\tau$. Если в нашем распоряжении траектория из $N = 200$ точек, зафиксированных с постоянным шагом по времени τ , то первую точку закона (для $n = 1$) мы получим, вычислив все Δx_i по алгоритму: $\Delta x_1 = x_1 - x_2, \Delta x_2 = x_2 - x_3, \dots, \Delta x_{199} = x_{199} - x_{200}$ – всего 199 смещений. Затем возводим в квадрат каждое Δx_i и получаем $\langle \Delta x^2 \rangle_1$.

Вторую точку (для $n = 2$) мы получим, вычисляя смещения по алгоритму $\Delta x_1 = x_1 - x_3, \Delta x_2 = x_3 - x_5, \dots, \Delta x_{99} = x_{197} - x_{199}$. В этом случае все смещения частицы получены за *неперекрывающиеся отрезки времени*, что соответствует условию винеровского процесса, но осреднение второй точки $\langle \Delta x^2 \rangle_2$ мы вынуждены делать уже не по 199, а всего лишь по 99 смещениям. Нетрудно заметить, что для точки, соответствующей $n = 10$ нам придется определять смещения по алгоритму $\Delta x_1 = x_1 - x_{11}, \Delta x_2 = x_{11} - x_{21}, \dots, \Delta x_{19} = x_{181} - x_{191}$, т.е. проводить осреднение $\langle \Delta x^2 \rangle_{10}$ всего лишь по 19 точкам. Таким образом, для траектории из 200 точек мы сможем получить для проверки закона (3) не более чем 7-10 точек, причем число смещений для осреднения резко уменьшается с ростом n (примерно в n раз). Это приводит к увеличению ошибки определения $\langle \Delta x^2 \rangle_n$ и разбросу точек. Зато такой способ

обработки данных соответствует теоретическому определению броуновского движения как винеровского случайного процесса и потому мы условно назовем его "винеровским"

В соответствии с рекомендациями [5] точки при $n \geq 2$ можно получать по другому алгоритму $\Delta x_1 = x_1 - x_3$, $\Delta x_2 = x_2 - x_4$, ... $\Delta x_{198} = x_{198} - x_{200}$. Таким образом, даже для точки $n = 50$ в этом случае мы проводим усреднение величины $\langle \Delta x^2 \rangle_{50}$ по 150 точкам, полученным по алгоритму $\Delta x_1 = x_1 - x_{51}$, $\Delta x_2 = x_2 - x_{52}$, ... $\Delta x_{149} = x_{150} - x_{200}$! Естественно, что все точки проверки закона (3) лягут на гораздо более "плавную" кривую. Но зато для всех значений $\langle \Delta x^2 \rangle_n$, начиная с $n = 2$ мы проводим усреднение по смещениям, *перекрывающимся по времени*, что не соответствует определению винеровского процесса. Поэтому мы условно можем назвать этот метод "учебным".

Мы рекомендуем обрабатывать экспериментальные результаты по "винеровскому" методу и брать для проверки закона (3) такое число точек n , чтобы последнюю точку усреднять не менее чем по 15-20 смещениям.

Вопросы по пп. 1.4 – 1.8.

1. Что такое "статистический ансамбль" и его основная характеристика – "функция распределения" в применении к броуновскому движению?
2. Каковы особенности винеровского случайного процесса в применении к броуновскому движению?
3. Что такое "траектория" и "смещение" броуновской частицы?
4. Что такое "функция распределения смещений" броуновской частицы и чему равны ее основные параметры – среднее смещение и дисперсия (формулы 1, 2)?
5. По какой формуле следует определять экспериментальное значение дисперсии?
6. Что такое "винеровский" и "учебный" метод обработки траектории и в чем их отличие?

Часть 2. Описание установки

На рис. 5 приведена фотография рабочего места, включающего микроскоп «Биолам» с веб-камерой «Trust» (разрешающая способность 1280x1024 пкс.), соединенной с компьютером.



Рис. 5. Установка "Броуновское движение"

К установке прилагается микрокувета с покровным стеклом и объект-микрометр ОМ-П с ценой деления 5 мкм. Эмульсии с броуновскими частицами студенты могут готовить самостоятельно или использовать имеющиеся в лаборатории.

На рис. 6 показан разрез микрокуветы. На стеклянной подложке 1 наклеены две опорные полосы 2, между которыми расположено прямоугольное основание микрокуветы 3, верхняя поверхность которого на 0.2 мм ниже верхней поверхности опорных полос. На основание микрокуветы шприцем наносится капля раствора 4 и сверху накладывается покровное стекло 5 толщиной ≈ 150 мкм. Таким образом, между покровным стеклом и основанием создается пространство, заполненное раствором. Каплю раствора нужно наносить на основание таким образом, чтобы, с одной стороны, она полностью покрыла основание и между раствором и покровным стеклом не было пузырьков воздуха. С другой стороны, нужно наносить такое количество раствора, чтобы жидкость не касалась опорных полос и не затекала между ними и

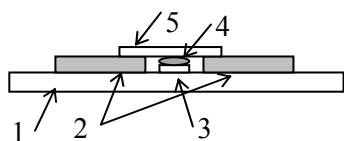


Рис. 6. Микрокувета

покровным стеклом. Иначе раствор будет втягиваться в создавшееся капиллярное пространство и избавиться от потока жидкости во время измерений не удастся.

После заправки кюветы и включения видеокамеры нужно дождаться, пока видимое течение жидкости (по общему движению БЧ) не прекратится.

В качестве осветителя в микроскопе установлен светодиод синего цвета, позволяющий значительно уменьшить "ореол" вокруг частиц за счет уменьшения хроматических искажений.

3. Задания

Задание 1. Включение установки

Включение установки состоит из трех этапов:

1. Включения компьютерной программы "*Brownian*" для получения изображения поля микроскопа;
2. Заправки микрокюветы эмульсией;
3. Настройки микроскопа на картину движения броуновских частиц.

Этап 1. Войдите в программу "*Brownian*" и выберите окно "*brownian_snap.vi*", обеспечивающее наблюдение и последующую съемку видеофильма. Данное окно имеет вид, показанный на рис. 7.

1. Инструменты окна "*brownian_snap.vi*" позволяют:

- наблюдать частицы в поле зрения микроскопа в непрерывном режиме без фиксации кадров (что используется в том числе для настройки микроскопа);
- производить запись кадров, отснятых с шагом по времени τ , заданном в элементе управления "*Time interval*" (вверху справа: рекомендуется установить $\tau = 1$ сек.).

2. Кликните стрелку ↗ слева вверху и в открывшемся диалоге выберите директорию в которой хотите сохранить кадры (каждый кадр будет записан в выбранной директории в формате *.jpg*). Кликните кнопку "*Select Cur Dir*". Это вернет поле "*brownian_snap.vi*", но уже с изображением кадра поля зрения микроскопа пока с "пустым" изображением, поскольку

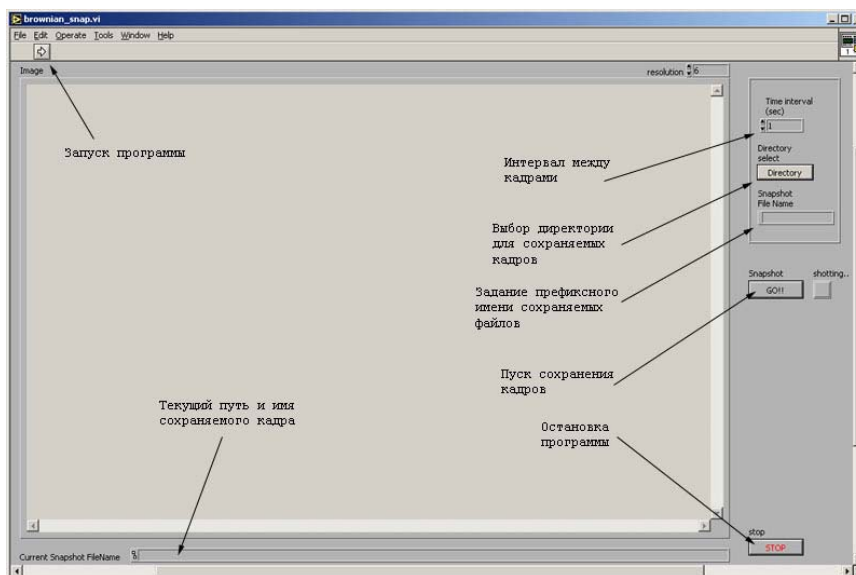


Рис. 7. Панель "*brownian_snap.vi*"

резкость микроскопа не настроена.

Этап 2. Для работы нам нужен объектив микроскопа с увеличением $\times 40$. Проверьте, какой объектив установлен. Приготовьте микрокювету с раствором и поместите ее на столик микроскопа. Первоначальное расстояние объектива микроскопа от покровного стекла примерно 2 мм.

Этап 3.

Внимание: при настройке изображения вам придется опускать объектив почти вплотную до поверхности покровного стекла, которое легко ломается, если объектив

касается его.

Поэтому выполняйте следующие **правила настройки изображения**. Микроскоп имеет две ручки изменения расстояния между объективом и предметным столиком: грубую и точную.

1. Вращением по часовой стрелке ручки *точного* перемещения (металлическая) поднимите объектив на максимальное расстояние, чтобы затем при точной настройке иметь запас хода.

2. Ручкой *грубого* хода аккуратно опустите объектив на расстояние примерно в 2 мм от покровного стекла.

3. Ручкой *точного* перемещения медленно опускайте объектив до получения резкой картины "пятен" на верхней поверхности покровного стекла.

4. При продолжении опускания объектива вы сначала увидите "размывание" пятен, а затем появление новых уже на внутренней (нижней) поверхности покровного стекла. Покровное стекло имеет толщину ≈ 150 мкм, поэтому по пункту 3. и 4. вы сможете получить представление о глубине резкости объектива.

5. Если микрокювета помещена верно, то вы сразу увидите движущиеся вблизи нижней поверхности покровного стекла броуновские частицы. Вращением предметного столика и его перемещением с помощью двух боковых микровинтов просмотрите различные участки микрокюветы. Это даст вам опыт подстройки изображения, который будет необходим при работе с объект-микрометром.

6. Выберите участок поля зрения микроскопа несколько глубже нижней поверхности покровного стекла, когда частицы, касающиеся нижней поверхности стекла, уже не видны. По общему перемещению БЧ, попавших в поле зрения, убедитесь в отсутствии видимого течения жидкости в микрокювете. При его наличии извлеките микрокювету и проверьте не затекает ли жидкость между покровным стеклом и боковыми опорами. При необходимости перезаправьте кювету.

Внимание: имейте в виду, что при таком увеличении даже незначительное движение воздуха в области микрокюветы ("ветер") вызывает микротечения в капле, что может "испортить" весь результат. Поэтому во время работы постарайтесь обеспечить отсутствие таких потоков. В частности, не ставьте установку вблизи окна или приборов, нагреваемых до температуры выше окружающей.

Теперь ваша установка готова к записи видеокадров фильма.

Задание 2. Запись и обработка видеофильма

1. Вам нужно будет получить не менее 100 (лучше 150-200) кадров фильма движения частицы с шагом по времени $\tau = 1$ с. К сожалению, в силу случайности движения частицы по всем трем координатам она может "уйти" либо из поля резкости изображения, либо за границы поля кадра за более короткое время, чем 1,5...3 мин. Если во время съемки частица уходит из поля резкости, то очень аккуратно, чтобы не влиять на микрокювету, можно подстраивать глубину резкости соответствующим микровинтом микроскопа. Но если частица уходит за границу кадра, то тут ничего не поделаешь: следует начать съемку заново, поскольку подстраивать кювету или поворотный столик микроскопа во время съемки ни в коем случае нельзя.

Поэтому, не включая съемки, пронаблюдайте за движением выбранной частицы на протяжении не менее минуты и убедитесь, что она за это время остается в поле кадра. Заодно потренируйтесь в регулировке глубины резкости. Затем перемещением столика микроскопа "верните" частицу примерно в середину кадра и начинайте съемку.

2. Для этого в элементе управления "*Snapshot File Name*" впишите имя файлов, под которым будут фиксироваться ваши кадры (например, "ккк"). К имени каждого записанного файла в процессе записи кадров автоматически будет добавляться номер записанного кадра: 001, 002, 003,

Проверьте установку интервала времени фиксации кадров в верхнем правом углу панели "Time interval". Там должно быть установлено 1 сек. При готовности к записи кликните кнопку "Go".

3. С этого момента начинается автоматическая запись кадров, в чем вы можете убедиться по смене текущего имени записываемого файла в нижней строке панели ("Current Snapshot FileName: ккк001.jpg, ккк002.jpg....ккк003.jpg и т.д.).

4. **Внимание:** после набора нужного числа кадров остановите программу нажатием кнопки **Stop**. Теперь вы имеете необходимый ряд записанных кадров в выбранной директории для последующей работы с ними. Если вы забудете нажать кнопку **Stop**, то программа автоматически завершит работу после съемки всех 200 кадров.

Задание 3. Съемка масштабной линейки объект-микрометра

Координаты отснятых вами кадров будут записаны в относительных единицах (в пикселях). Чтобы перевести их в абсолютные значения длин, необходимые нам при окончательной обработке, нужно отснять масштабную линейку объект-микрометра (рис. 8).

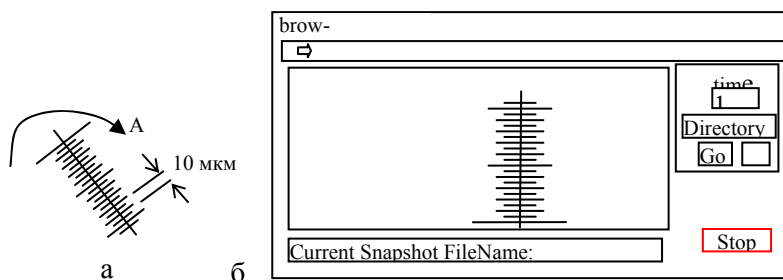


Рис. 8. Настройка масштабной линейки

1. Замените микроювету на объект-микрометр. Для этого просмотрите "на просвет" пластинку объект-микрометра. В ее центре вы увидите маленький "квадратик" шкалы. Вам нужно определить, на какой поверхности пластинки находится шкала и установить объект-микрометр на столик микроскопа таким образом, чтобы шкала попала в поле его зрения.

Последнее сделать не просто, поэтому лучше сначала установить на микроскопе более слабый объектив (x20) и "поймать" изображение шкалы.

2. Установив перемещением столика микроскопа шкалу в цент поля зрения, верните объектив микроскопа x40 и вновь подстройте микроскоп на резкое изображение шкалы. Обычно шкала оказывается под произвольным углом к осям координат кадра (рис. 8, а).

3. Перемещением столика микроскопа добейтесь того, чтобы штрихи масштабной линейки были параллельны одной из осей координат кадра, как показано на рис. 8, б.

4. Отсняв 1...3 кадра шкалы (в соответствии с алгоритмом съемки задания 1) сохраните эти кадры под другим именем (в той же директории, в которой сохранены ваши кадры броуновской частицы).

Задание 4. Определение и запись координат БЧ

1. Перейдите к окну "brownian_view.vi" программы "Brownian", обеспечивающему фиксацию координат отмеченных вами точек в новый файл, содержащий уже не сами видеокдры, а колонку координат x_i , y_i выбранной вами БЧ. Эту колонку координат вы далее будете обрабатывать в программе "Excel". Панель "brownian_view.vi" показана на рис. 9.

Режим "brownian_view.vi" позволяет:

- "прогонять" для просмотра последовательность кадров вашего файла последовательным нажатием кнопок *Next*, *Prev* справа без записи координат;
- установив зеленый крестик + на выбранной для регистрации частице, зафиксировать координаты этой точки нажатием кнопки *Fix*;
- набрать и сохранить в вашем файле колонки координат x_i , y_i последовательного положения БЧ.

2. Нажав стрелку ⇨ выберите в директории имя вашего файла с первым кадром. Он будет с расширением *jpg* (наш пример – *ккк001.jpg*).

Клик на "Ок" вернет на экран поле первого кадра, на котором "клик" мыши позволяет фиксировать зеленый крестик + на выбранной точке (частице). В правых колонках боковой части панели появляется значение координат x_i , y_i соответствующих выделенной точке.

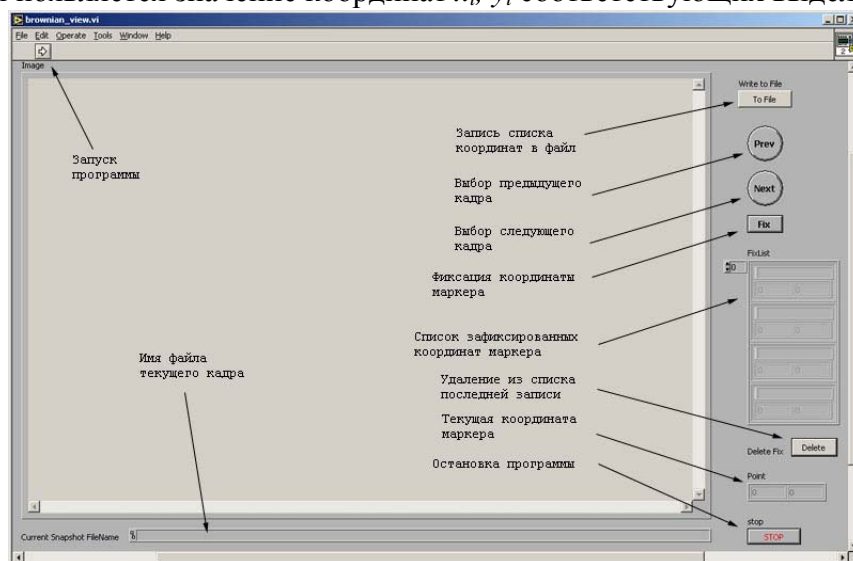


Рис. 9. Панель "brownian view.vi"

3. Чтобы выбрать частицу, координаты которой вы собираетесь далее фиксировать, вы можете несколько раз нажимать кнопку *Next*, чтобы проследить за движением частицы. Выбрав регистрируемую частицу, вновь вернитесь к первому кадру и зафиксируйте координаты ее начального положения нажатием кнопки *Fix*.

Справа в колонке координаты запишутся под именем файла кадра. Проверьте, чтобы это имя (например, ккк001) совпадало с именем кадра внизу поля в строке *Current Snapshot FileName*.

4. Для перехода к следующему кадру нажмите кнопку *Next*. Переместите крестик на новое положение частицы, зафиксируйте координаты и далее по алгоритму *Next* → *Fix* → *Next*... зафиксируйте координаты всех последующих положений броуновской частицы. Сверяйте номер зафиксированных координат с номером в нижней строке, чтобы не пропустить случайно кадр. При необходимости стереть неверно занесенные кадры, это можно сделать нажатием клавиши "*Delete*".

5. Нажмите *To file* справа и в появившемся диалоге запишите имя файла, под которым координаты положений БЧ будут сохранены

6. Не забудьте нажать затем кнопку **Stop**.

7. Запись координат масштабной линейки объект-микрометра производится аналогичным образом. Вызвав файл масштабной линейки, зафиксируйте последовательность точек делений шкалы, как показано на рис. 10 крестиками. Отмеченный крестиками шаг шкалы равен 10 мкм.

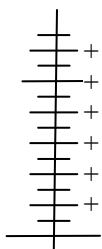


Рис. 10. Шкала

Задание 5. Обработка данных в программе Excel

1. Вызовите на экран окно программы *Excel* и в строке "Открыть" откройте имя вашего файла с координатами частицы (из директории *LabVIEW Date*), а затем перенесите колонки координат движения БЧ в программу *Excel*.

2. Для этого в появившемся окне "Мастер текстов" поставьте флажок в строке формата данных "с разделителем" → "Далее" → в строке символ раздела флажок "пробел" → "Готово".

Теперь в окне программы *Excel* у вас сформировано два столбца последовательных координат x_i , y_i положения броуновской частицы. Далее предполагается, что с работой в программе *Excel* вы знакомы.

Задание 6. Изучение и запись графиков движения БЧ.

1. Постройте полный график движения БЧ (траекторию частицы). Этот график далее нужно будет представить к отчету, поэтому оформите его со всеми подписями осей координат и легенды.

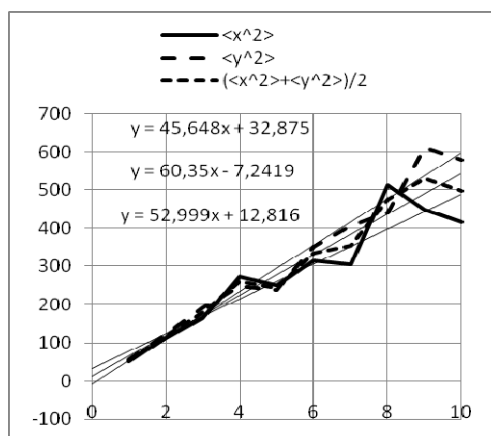
Задание 7. Проверка первого закона броуновского движения

1. Для проверки первого закона броуновского движения необходимо построить графики зависимости $\langle \Delta x^2 \rangle$ и $\langle \Delta y^2 \rangle$ от $t = n\tau$ не менее чем для $n = 6 \dots 10$. Для этого в таблице *Excel* нужно заполнить столбцы данных в соответствии с таблицей 1.

Табл.1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I		
	x	y	$\Delta x(1)$	$\Delta y(1)$	Δx^2_1	Δy^2_1	$\Delta x(2)$	$\Delta y(2)$	Δx^2_2	...	Δx^2_{10}
1			$x_1 - x_2$	$y_1 - y_2$			$x_1 - x_3$				
2			$x_2 - x_3$	$y_2 - y_3$							
3			$x_3 - x_4$	$y_3 - y_4$			$x_3 - x_5$				
...			$x_4 - x_5$	$y_4 - y_5$							
n											
					$\langle \Delta x^2 \rangle_1$	$\langle \Delta y^2 \rangle_1$			$\langle \Delta x^2 \rangle_2$		$\langle \Delta x^2 \rangle_{10}$

2. Занесите результаты осреднения $\langle \Delta x^2 \rangle_n$ и $\langle \Delta y^2 \rangle_n$ в новую таблицу 2. Таблица должна содержать четыре столбца: 1-й – значения n (от 1 до 10), второй и третий – соответствующие значения $\langle \Delta x^2 \rangle_n$, $\langle \Delta y^2 \rangle_n$ и $(\langle \Delta x^2 \rangle_n + \langle \Delta y^2 \rangle_n)/2$. Последний столбец позволяет фактически "удвоить" статистику для определения коэффициента D , поскольку дает среднее значение для дисперсий по осям X и Y .



3. По табл.2 постройте график зависимости функций $\langle \Delta x^2 \rangle_n$, $\langle \Delta y^2 \rangle_n$ и $(\langle \Delta x^2 \rangle_n + \langle \Delta y^2 \rangle_n)/2$ от времени $t = n\tau$. Проведите на них аппроксимирующие прямые (линейный тренд), причем в "формат линии тренда" укажите "прогноз назад на 1", что обеспечит продление линии тренда до пересечения с осью Y .

Эти графики должны быть представлены к отчету, поэтому оформите на них все надписи в легенде, на осях и запись уравнений линейного тренда.

На рис. 11 показан пример данных для определения дисперсий.

Задание 8. Переход к абсолютным значениям величин $\langle \Delta x^2 \rangle$ и $\langle \Delta y^2 \rangle$ и определение коэффициента диффузии D

1. Занесите в табл. *Excel* значения координат масштабной линейки и определите величину коэффициента пересчета значений $\langle \Delta x^2 \rangle$, $\langle \Delta y^2 \rangle$ и $(\langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle)/2$ к абсолютным значениям длин (в мкм).

2. С учетом коэффициента пересчета масштаба к абсолютным значениям определите значения коэффициентов диффузии D_x , D_y и $(D_x + D_y)/2$ соответствующие аппроксимациям данных по $\langle \Delta x^2 \rangle$, $\langle \Delta y^2 \rangle_n$ и $(\langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle)/2$.

4. К отчету представить:

1. Отпечатанный лист с графиками:

- траектории БЧ с указанием числа смещений n , по которым построен график;
- зависимости функций $\langle \Delta x^2 \rangle_n$, $\langle \Delta y^2 \rangle_n$ и $(\langle \Delta x^2 \rangle_n + \langle \Delta y^2 \rangle_n)/2$ от времени $t = n\tau$ (рис. 11).

2. Количественные значения: переводного множителя масштаба графиков к абсолютным значениям длин;

- экспериментальные значения D_x , D_y и $(D_x + D_y)/2$ (в абсолютных величинах), а также табличное значение коэффициента диффузии D водных растворов некоторых солей [8, 9];
- диаметр наблюдавшейся вами броуновской частицы (в мкм), который определите по видеокадрам в сравнении с видеокадром шкалы объект-микрометра. Оцените погрешность определения диаметра БЧ.

5. Список литературы

1. Брауновское движение. А.Эйнштейн, М. Смолуховский. Сб. ст. [пер. с нем. и франц.]. М.- Л., ОНТИ, 1936. – 608 с.
2. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц.. М.: Наука, Физматлит, 1972 г. -376 с.
3. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. -М.: Наука, 1989. -690 с.
4. Математический энциклопедический словарь. /Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. Статья "Винеровский процесс".
5. Физический практикум. Под ред. В.И. Ивероновой. – М.: Наука, "Физматлит", 1962. – 958 с.
6. А.К. Кикоин, И.К. Кикоин. Молекулярная физика. М. Наука. 1967 г. стр. 42-43
7. Лавренчик В.Н. Постановка физического эксперимента и статистическая обработка его результатов. Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 272 с.
8. Кошкин Н.И., М.Г. Ширкевич. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
9. Физические величины. Справочник / Под ред.И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1231 с.