План лекции № 3

Спектральный метод анализа устойчивости разностных схем

1. Понятие устойчивости разностных схем
2. Погрешность решения разностной схемы
3. Необходимое условие устойчивости разностных схем
4. Доказательство условной устойчивости явной разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение параболического типа
5. Доказательство абсолютной устойчивости неявной разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение параболического типа
6. Влияние наличия искомой функции в составе свободного члена на устойчивость разностных схем
7. Задания для самоконтроля

1. Понятие устойчивости разностных схем

При численном решении дифференциальных уравнений неизбежно возникают ошибки, приводящие к некоторому отличию результатов численного решения от истинных значений искомой функции, причём существует два типа источников этих ошибок. Как уже отмечалось в разделе "Понятие порядка аппроксимации", одним источником ошибок является сама аппроксимация, т.е. замена производных в исходных дифференциальных уравнениях конечными разностями. Другой источник ошибок связан с погрешностью вычислений. Ошибки могут возникать при неточности вычислений как самой разностной схемы, так и начальных и граничных условий. В зависимости от особенностей вычислительного алгоритма эти ошибки в процессе расчёта могут затухать или возрастать. Если они не возрастают, то говорят, что разностная схема **устойчива**, если же возрастают, то – **неустойчива**.

Запишем дифференциальную краевую задачу в виде символьного равенства:

$$L\,u = f, \qquad (3.1)$$

где L – дифференциальный оператор; u – искомая функция; f – правая часть дифференциального уравнения.

Тогда разностную схему кратко можно представить в следующем виде:

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \qquad (3.2)$$

где L_h – разностный оператор, действующий на сеточную функцию $u^{(h)}$, являющуюся результатом решения разностной задачи; $f^{(h)}$ – проекция на разностную сетку непрерывной функции f.

Теорема 1. Разностная схема (3.2) с линейным оператором L_h устойчива, если при любом $f^{(h)} \in F_h$ уравнение (3.2) имеет единственное решение $u^{(h)} \in U_h$, причём

$$\left\| u^{(h)} \right\| \le c \left\| f^{(h)} \right\|,$$

где c – константа, U_h – множество решений, F_h – множество правых частей.

Теорема 2. Пусть разностная схема (3.2) аппроксимирует дифференциальное уравнение (3.1) с порядком аппроксимации $O(h^k)$ и является устойчивой. Тогда решение разностной задачи (3.2) $u^{(h)}$ сходится к решению исходной дифференциальной задачи (3.1) $[u]_h$ и имеет место неравенство:

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\| \le M\,h^k,$$

где M – константа.

Таким образом, *сходимость решения разностной схемы к решению исходного уравнения* имеет место только при выполнении двух требований:

1. разностная схема должна аппроксимировать исходное уравнение;
2. разностная схема должна быть устойчива.

2. Погрешность решения разностной схемы

В настоящем учебном пособии изучается два метода, позволяющих исследовать устойчивость разностных схем. Первый из них называется **гармоническим** или **спектральным** методом анализа разностных схем. Второй – **метод тестовых задач** – будет описан в конце курса.

Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение параболического типа, свободный член которого не включает искомую функцию u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x). \tag{3.3}$$

Запишем для него явную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + f(t^n, x_j). \tag{3.4}$$

Погрешность решения разностной схемы (3.4) в точке (t^n, x_j) можно представить с помощью соотношения:

$$z_j^n = u_j^n - [u(t^n, x_j)].$$

Здесь u_j^n – решение разностной схемы (3.4) в точке (t^n, x_j); $[u(t^n, x_j)]$ – истинное решение исходного дифференциального уравнения (3.3) в точке (t^n, x_j). Выражая из данного соотношения u_j^n и подставляя в разностную схему (3.4), получаем:

$$\frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} + \frac{[u(t^{n+1}, x_j)] - [u(t^n, x_j)]}{\Delta t} = \sigma \frac{z_{j+1}^n - 2z_j^n + z_{j-1}^n}{h^2} +$$
$$+ \sigma \frac{[u(t^n, x_{j+1})] - 2[u(t^n, x_j)] + [u(t^n, x_{j-1})]}{h^2} + f(t^n, x_j).$$

В разделе "Порядок аппроксимации разностной схемы" было доказано, что разностная схема (3.4) имеет порядок аппроксимации:

$$O(\Delta t) + O(h^2).$$

Следовательно, имеет место следующее равенство:

$$\frac{[u(t^{n+1}, x_j)] - [u(t^n, x_j)]}{\Delta t} = \sigma \frac{[u(t^n, x_{j+1})] - 2[u(t^n, x_j)] + [u(t^n, x_{j-1})]}{h^2} +$$
$$+ f(t^n, x_j) + O(\Delta t) + O(h^2).$$

С учётом данного выражения получаем разностную схему для погрешности решения:

$$\frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{z_{j+1}^n - 2z_j^n + z_{j-1}^n}{h^2} + O(\Delta t) + O(h^2). \tag{3.5}$$

3. Необходимое условие устойчивости разностных схем

Выразим из соотношения (3.5) величину погрешности на (n + 1)-ом шаге по времени:

$$z_j^{n+1} = z_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{h^2}[z_{j+1}^n - 2z_j^n + z_{j-1}^n] + \Delta t\,[O(\Delta t) + O(h^2)].$$

Последний член в правой части полученного выражения имеет порядок малости, явно меньший Δt, что позволяет им пренебречь. Таким образом, получаем:

$$z_j^{n+1} = z_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{h^2}[z_{j+1}^n - 2z_j^n + z_{j-1}^n].$$

Представим данное выражение в операторном виде:

$$z^{n+1} = z^n + \sigma \Delta t\, L_n z^n = (E + \sigma \Delta t\, L_n)\, z^n = B z^n.$$

Здесь z^n – вектор погрешностей, E – единичный оператор:

$$z^n = \begin{pmatrix} z_1^n \\ z_2^n \\ \dots \\ z_N^n \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad L_n z^n = \frac{z_{j+1}^n - 2z_j^n + z_{j-1}^n}{h^2}.$$

Оператор B, определяемый с помощью выражения

$$B = E + \sigma \Delta t\, L_n,$$

называют **оператором перехода** от n-го шага по времени к (n + 1)-му шагу по времени.

Для того чтобы разностная схема (3.4), аппроксимирующая дифференциальное уравнение (3.3), была устойчива, необходимо (согласно определению устойчивости разностных схем), чтобы норма погрешности на (n + 1)-ом шаге по времени не превосходила нормы погрешности на n-ом шаге по времени, то есть:

$$\| z^{n+1} \| \le \| z^n \|. \tag{3.6}$$

Погрешность решения разностной схемы в точке (t^n, x_j) можно представить в виде комплексного выражения (гармоники):

$$z_j^n = \lambda^n e^{i \alpha j}, \tag{3.7}$$

где λ – собственное число оператора перехода B; i – мнимая единица.

Теорема. Для того, чтобы разностная схема была устойчива (т.е. для выполнения условия (3.6)), необходимо, чтобы все собственные числа оператора перехода B удовлетворяли условию:

$$|\lambda| \le 1. \tag{3.8}$$

Данное условие является **необходимым условием устойчивости** разностных схем.

4. Доказательство условной устойчивости явной разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение параболического типа

Сравнивая явную разностную схему (3.4), аппроксимирующую дифференциальное уравнение параболического типа (3.3), с разностной схемой для погрешности её решения (3.5), легко видеть, что разностная схема для погрешности решения (3.5) по структуре совпадает с явной разностной схемой для однородного уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \to \qquad \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}.$$

Это означает, что наличие свободного члена в правой части дифференциального уравнения не оказывает влияния на устойчивость разностной схемы, аппроксимирующей это уравнение, при условии, что свободный член не включает искомую функцию u. Таким образом, для доказательства устойчивости разностной схемы (3.4) отбрасываем свободный член и представляем решение разностной схемы в виде гармоники (3.7):

$$u_j^n=\lambda^n e^{i\alpha j}.$$

Подставляя данное выражение в разностную схему, получаем:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}-\lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t}=\sigma\frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)}-2\lambda^n e^{i\alpha j}+\lambda^n e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}.$$

Далее, упрощаем полученное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$:

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}=\sigma\frac{e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha}}{h^2}.$$

Преобразуем комплексные числа из экспоненциальной формы в тригонометрическую:

$$e^{\pm i\alpha}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\lambda-1}{\Delta t}=\sigma\frac{2\cos\alpha-2}{h^2}. \tag{3.9}$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{3.10}$$

получаем формулу, из которой затем выражаем λ:

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}=\sigma\frac{-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{h^2} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=1-\frac{4\sigma\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

С учётом необходимого условия устойчивости разностных схем (3.8) имеем:

$$|\lambda|\le 1 \qquad \Rightarrow \qquad -1\le 1-\frac{4\sigma\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\le 1.$$

В полученном двойном неравенстве правое условие выполняется автоматически (если $\sigma > 0$). Поэтому рассмотрим более подробно левое условие:

$$1-\frac{4\sigma\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\ge -1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\le\frac{1}{2\sigma}. \tag{3.11}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (3.11) явная разностная схема (3.4) устойчива. Однако выражение (3.11) непригодно для использования, поскольку содержит переменную величину – аргумент комплексного числа α, определить интервал изменения которого с помощью соотношения (3.7) не представляется возможным. Поэтому, чтобы гарантировать устойчивость явной разностной схемы (3.4) не зависимо от значения α, переходим к более строгому условию, задавая для $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ максимально возможное значение, равное 1:

$$\frac{\Delta t}{h^2} \le \frac{\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \le \frac{1}{2\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta t}{h^2} \le \frac{1}{2\sigma}. \tag{3.12}$$

Выражение (3.12) является условием устойчивости явной разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение параболического типа, свободный член которого не включает искомую функцию u. Такие разностные схемы, устойчивость которых зависит от какого-либо условия, ограничивающего выбор интервала деления на разностной сетке, называют **условно устойчивыми**.

5. Доказательство абсолютной устойчивости неявной разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение параболического типа

Рассмотрим неявную разностную схему, аппроксимирующую дифференциальное уравнение (3.3):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + f(t^n, x_j).$$

Можно доказать, что разностная схема для погрешности решения в этом случае (как и в случае явной разностной схемы), по структуре совпадает с неявной разностной схемой для однородного уравнения параболического типа. Поэтому для исследования устойчивости неявной разностной схемы отбрасываем свободный член и представляем решение в виде гармоники (3.7) (по аналогии с тем, как это было сделано для явной разностной схемы):

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} = \sigma \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} + \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}.$$

Далее, упрощаем полученное выражение, деля левую и правую его части на $\lambda^n e^{i\alpha j}$:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \sigma\lambda \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2}.$$

Используя зависимости (3.9), (3.10), получаем формулу, из которой затем выражаем λ:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \sigma\lambda \frac{-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{h^2} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{1 + 4\frac{\sigma\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1.$$

Легко видеть, что необходимое условие устойчивости разностных схем (3.8) в данном случае выполняется при любых значениях Δt и h. Такие разностные схемы, устойчивость которых не зависит от выбора интервала деления на разностной сетке, называют **абсолютно устойчивыми**.

6. Влияние наличия искомой функции в составе свободного члена на устойчивость разностных схем

Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение параболического типа, свободный член которого включает искомую функцию u следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k u. \qquad (3.13)$$

Подобные уравнения часто встречаются в математических моделях химических реакторов, в которых протекают прямые реакции. Поэтому важно знать, каким образом наличие подобного свободного члена влияет на устойчивость разностных схем.

Запишем для уравнения (3.13) явную разностную схему:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}-k u_j^n.$$

Осуществляя выкладки, аналогичные описанным ранее (для случая уравнения, свободный член которого не включает функцию u), можно получить разностную схему для погрешности решения, которая будет иметь вид:

$$\frac{z_j^{n+1}-z_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{z_{j+1}^n-2z_j^n+z_{j-1}^n}{h^2}-k z_j^n+O(\Delta t)+O(h^2).$$

Наличие слагаемого $-k z_j^n$ в правой части данного уравнения говорит о том, что свободный член в уравнении (3.13) влияет на погрешность вычислений, поэтому отбрасывать его при анализе устойчивости разностной схемы (3.14) нельзя.

Представляя решение разностной схемы (3.14) в виде гармоники (3.7), получаем:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}-\lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t}=\sigma\frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)}-2\lambda^n e^{i\alpha j}+\lambda^n e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}-k\lambda^n e^{i\alpha j}.$$

Далее, деля левую и правую части данного выражения на $\lambda^n e^{i\alpha j}$ и используя зависимости (3.9), (3.10), получаем формулу, из которой затем выражаем λ:

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}=-\frac{4\sigma}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}-k \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=1-\frac{4\sigma\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}-k\Delta t.$$

С учётом необходимого условия устойчивости разностных схем (3.8) имеем:

$$|\lambda|\le 1 \qquad \Rightarrow \qquad -1\le 1-\frac{4\sigma\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}-k\Delta t\le 1.$$

Анализ полученного неравенства, аналогичный описанному выше (для случая уравнения, свободный член которого не включает функцию u) позволяет получить условие устойчивости явной разностной схемы (3.14), аппроксимирующей уравнение (3.13):

$$\frac{4\sigma\Delta t}{h^2}+k\Delta t\le 2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t\le\frac{2h^2}{4\sigma+kh^2}.$$

Легко доказать, что на абсолютную устойчивость неявной разностной схемы, аппроксимирующей уравнение (3.13), наличие рассматриваемого свободного члена не повлияет.

Задания для самоконтроля

1. Что характеризует понятие устойчивости разностной схемы (*выберите наиболее точный ответ*):

<> А. Погрешность решения разностной схемы в процессе вычислений увеличивается

<> Б. Погрешность решения разностной схемы в процессе вычислений не возрастает

<> В. Погрешность решения разностной схемы в процессе вычислений уменьшается

<> Г. Погрешность решения разностной схемы в процессе вычислений не убывает

2. Математическая модель химического реактора с продольным перемешиванием в нестационарном режиме описывается дифференциальным уравнением параболического типа:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc,$$

где D – коэффициент диффузии, k – константа скорости реакции, c – концентрация исходного реагента.

Выберите из представленных ниже разностных соотношений то, которое является неявной разностной схемой, аппроксимирующей это дифференциальное уравнение:

<> А.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = D\frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}}{h^2} - kc_j^n$	<> Г.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = D\frac{c_{j+1}^{n} - 2c_j^{n} + c_{j-1}^{n}}{h^2} - kc_j^n$
<> Б.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^{n-1}}{2\Delta t} = D\frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}}{h^2} - kc_j^{n+1}$	<> Д.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = D\frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n} + c_{j-1}^{n-1}}{h^2} - kc_j^n$
<> В.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = D\frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}}{h^2} - kc_j^{n+1}$	<> Е.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = D\frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}}{h^2} - k\,n\Delta t$

3. Выберите правильное доказательство абсолютной устойчивости неявной разностной схемы

$$\frac{c_j^{n+1}-c_j^n}{\Delta t}=D\frac{c_{j+1}^{n+1}-2c_j^{n+1}+c_{j-1}^{n+1}}{h^2}-kc_j^{n+1},$$

аппроксимирующей дифференциальное уравнение из задания № 2.

<> А. $c_j^n=\lambda^n e^{i\alpha j} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}-\lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t}=D\dfrac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j+1)}-2\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}+\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j-1)}}{h^2};$

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}=D\frac{\lambda e^{i\alpha}-2\lambda+\lambda e^{-i\alpha}}{h^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda=1+\frac{\Delta t D\lambda}{h^2}(e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha});$$

$$\lambda+4\frac{\Delta t D\lambda}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{1}{1+4\dfrac{\Delta t D}{h^2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\le 1.$$

<> Б. $c_j^n=\lambda^n e^{i\alpha j} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}-\lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t}=D\dfrac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j+1)}-2\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}+\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}-k\lambda^{n+1}e^{i\alpha j};$

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}=D\frac{\lambda e^{i\alpha}-2\lambda+\lambda e^{-i\alpha}}{h^2}-k\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda=1+\frac{\Delta t D\lambda}{h^2}(e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha})-\Delta t k\lambda;$$

$$\lambda+4\frac{\Delta t D\lambda}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\Delta t k\lambda=1 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{1}{1+4\dfrac{\Delta t D}{h^2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\Delta t k}\le 1.$$

<> В. $c_j^n=\lambda^n e^{i\alpha j} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}-\lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t}=D\dfrac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j+1)}-2\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}+\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}-k\lambda^{n+1}e^{i\alpha j};$

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}=D\frac{\lambda e^{i\alpha}-2\lambda+\lambda e^{-i\alpha}}{h^2}-k\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda=1+\frac{\Delta t D\lambda}{h^2}(e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha})-\Delta t k\lambda;$$

$$\lambda=1-4\frac{\Delta t D\lambda}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}-\Delta t k\lambda\le 1.$$

<> Г. $c_j^n=\lambda^n e^{i\alpha j} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}-\lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t}=D\dfrac{\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j+1)}-2\lambda^{n+1}e^{i\alpha j}+\lambda^{n+1}e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}-k\lambda^{n}e^{i\alpha j};$

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t}=D\frac{\lambda e^{i\alpha}-2\lambda+\lambda e^{-i\alpha}}{h^2}-k \quad \Rightarrow \quad \lambda=1+\frac{\Delta t D\lambda}{h^2}(e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha})-\Delta t k;$$

$$\lambda+4\frac{\Delta t D\lambda}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\Delta t k \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{1-\Delta t k}{1+4\dfrac{\Delta t D}{h^2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\le 1.$$

4. Выберите из представленных ниже разностных соотношений то, которое является явной разностной схемой, аппроксимирующей дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 10^{-3} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

<> А.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{h^2} - kc_j^n$	<> Г.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{3} \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{h^2}$
<> Б.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^{n-1}}{2\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{h^2}$	<> Д.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{h^2}$
<> В.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}}{h^2}$	<> Е.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^n + c_{j-1}^{n-1}}{h^2}$

5. Определите, при каком условии на шаг Δt разностная схема, аппроксимирующая дифференциальное уравнение из задания № 4, будет устойчива, если $h = 10^{-2}$:

<> А.	$\Delta t \le 0{,}01$	<> Г.	$\Delta t \le 0{,}02$
<> Б.	$\Delta t \ge 0{,}01$	<> Д.	$\Delta t \ge 0{,}1$
<> В.	$\Delta t \le 0{,}05$	<> Е.	$\Delta t \le 0{,}1$

6. Выберите из представленных ниже разностных соотношений то, которое является явной разностной схемой, аппроксимирующей дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 10^{-3} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - 10\, c.$$

<> А.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{h^2} - 10^{-3} c_j^n$	<> Г.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{3} \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{h^2}$
<> Б.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^{n-1}}{2\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{h^2} - 10 c_j^n$	<> Д.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^n + c_{j-1}^{n-1}}{h^2} - 10 c_j^n$
<> В.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 10 c_j^{n+1}$	<> Е.	$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = 10^{-3} \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{h^2} - 10 c_j^n$

7. Определите, при каком условии на шаг Δt разностная схема, аппроксимирующая дифференциальное уравнение из задания № 6, будет устойчива, если $h = 10^{-2}$:

<> А.	$\Delta t \leq 0{,}01$	<> Г.	$\Delta t \leq 0{,}04$
<> Б.	$\Delta t \geq 0{,}01$	<> Д.	$\Delta t \leq 0{,}02$
<> В.	$\Delta t \leq 0{,}05$	<> Е.	$\Delta t \leq 0{,}07$