Уравнение теплопроводности II

“Уравнения математической физики”

Скопинцев Артур Маркович

Новосибирск, 2023

Задачи на ур-е теплопроводности, фундаментальное решение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, & t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n; \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, & t > 0, \;\; x \in \Omega; \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u\big|_{\partial\Omega} = \alpha(t, x), & x \in \partial\Omega, \;\; t > 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \beta(t, x), \qquad x \in \partial\Omega, \;\; t > 0, \tag{6.4}$$

$$\tilde{u}(t, \xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(t, x)\, dx$$

Стандартное интегрирование по частям даёт:

$$\int e^{-ix\cdot\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta_x u\right) dx = \left[\frac{\partial}{\partial t} + a^2|\xi|^2\right] \int e^{-ix\cdot\xi} u(t, x)\, dx = \\ = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + a^2|\xi|^2 \tilde{u}.$$

Таким образом, уравнение (6.1) равносильно уравнению

$$\frac{\partial \tilde{u}(t, \xi)}{\partial t} + a^2|\xi|^2 \tilde{u}(t, \xi) = 0. \tag{6.10}$$

Начальное же условие, очевидно, приобретает вид

$$\tilde{u}\big|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(\xi), \tag{6.11}$$

где $\widetilde{\varphi} = F\varphi$.

Уравнение (6.10) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение по t с параметром ξ. Оно легко решается, и мы получим с учётом начального условия (6.11):

$$\tilde{u}(t,\,\xi) = e^{-ta^2|\xi|^2}\widetilde{\varphi}(\xi). \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned} u(t,\,x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\tilde{u}(t,\,\xi)\,d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi - ta^2|\xi|^2}\widetilde{\varphi}(\xi)\,d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi - ta^2|\xi|^2}\varphi(y)\,dy\,d\xi. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования (это возможно по теореме Фубини), мы получаем:

$$u(t,\,x) = \int \Gamma(t,\,x-y)\varphi(y)\,dy, \tag{6.13}$$

где

$$\Gamma(t,\,x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi - ta^2|\xi|^2}\,d\xi \tag{6.14}$$

(по существу мы повторили выкладку, доказывающую, что преобразование Фурье переводит умножение в свёртку). Вычислим явно $\Gamma(t,\,x)$, взяв интеграл в (6.14). Для этого нужно выделить полный квадрат в показателе экспоненты:

$$\begin{aligned} ix\cdot\xi - ta^2|\xi|^2 &= -ta^2\xi\cdot\xi + ix\cdot\xi = \\ &= -ta^2\Big(\xi - \frac{ix}{2ta^2}\Big)\cdot\Big(\xi - \frac{ix}{2ta^2}\Big) - \frac{|x|^2}{4ta^2}. \end{aligned}$$

Делая замену переменных $\xi - \dfrac{ix}{2ta^2} = \eta$, т. е. сдвигая контур интегрирования по каждому ξ_j, мы получим:

$$\begin{aligned} \Gamma(t,\,x) &= (2\pi)^{-n}e^{-\frac{|x|^2}{4ta^2}}\int e^{-ta^2|\eta|^2}\,d\eta = \\ &= (2\pi)^{-n}e^{-\frac{|x|^2}{4ta^2}}(a\sqrt{t})^{-n}\int e^{-|\xi|^2}\,d\xi \end{aligned}$$

(мы сделали ещё замену переменных $\xi = a\sqrt{t}\,\eta$). Используя формулу

$$\int e^{-|\xi|^2}\,d\xi = \pi^{n/2},$$

получим окончательно:

$$\Gamma(t,\,x) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n}\exp\Big(-\frac{|x|^2}{4ta^2}\Big). \tag{6.15}$$

Решение задачи Коши записывается в виде

$$u(t,\,x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} \varphi(y)\,dy, \tag{6.16}$$

называемом *интегралом Пуассона.*

Теорема *Фундаментальным решением оператора* $\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_x$ *в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *является локально интегрируемая функция*

$$\mathcal{E}(t,\,x) = \theta(t)\Gamma(t,\,x) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n}\,\theta(t)\exp\Big(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\Big), \tag{6.22}$$

где $\theta(t)$ — *функция Хевисайда* ($\theta(t) = 1$ *при* $t > 0$, $\theta(t) = 0$ *при* $t \leqslant 0$).

Асимптотическое поведение решения ур-я теплопроводности

Пример *Используя формулу , исследовать асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности при $t \to +\infty$.*

Решение. Будем считать, что $\varphi(x)$, а, следовательно, и $\widehat{\varphi}(y)$ принадлежат $S(\mathbb{R})$. Сначала отметим очевидный факт, что интеграл

$$I_\delta(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|y|>\delta} \widehat{\varphi}(y) e^{-a^2y^2t} \, e^{iyx} \, dy$$

удовлетворяет оценке

$$I_\delta(t,x) = O(e^{-a^2\delta^2 t}).$$

Поэтому основной вклад в решение $u(t,x)$ при $t \to +\infty$ дает интеграл

$$J_\delta(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|y|<\delta} \widehat{\varphi}(y) e^{-a^2y^2t} \, e^{iyx} \, dy.$$

Считая δ достаточно малым, можно заменить $\widehat{\varphi}(x)$ на ее значение в нуле

$$\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \, dx.$$

Оставшийся интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|y|<\delta} e^{-a^2y^2t} \, e^{iyx} \, dy$$

можно заменить интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2t} \, e^{iyx} \, dy, \tag{7.8}$$

так как разность этих интегралов имеет порядок $O(e^{-a^2\delta^2 t})$. В свою очередь, интеграл 7.8, как было установлено в примере совпадает с функцией

$$G_0(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Следовательно, имеет место асимптотическая формула

$$u(x,t) \sim \widehat{\varphi}(0) \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Конечно, приведенные рассуждения можно признать лишь наводящими соображениями. Однако, в этом направлении можно двигаться дальше. Предварительно заметим, что справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^n e^{-a^2y^2t}\, e^{iyx}\, dy = (-i)^n \frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\right\}.$$

Поэтому, заменив функцию $\widehat{\varphi}(y)$ в интеграле 7.4 ее тейлоровским разложением:

$$\widehat{\varphi}(y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\varphi}^{(n)}(0)\frac{y^n}{n!},$$

получаем для $u(x,t)$ следующий асимптотический ряд

$$u(x,t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\varphi}^{(n)}(0)\frac{(-i)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\right\}.$$

Приведенный способ асимптотического разложения интегралов носит название метода Лапласа. Его обоснование можно найти во многих книгах. Смотрите, например, М.В. Федорюк. Метод перевала. М.: Наука. 1977.

Пример *Применяя преобразование Фурье, найти решение неоднородного уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(x,t)$$

с нулевым начальным условием

$$u|_{t=0} = 0.$$

Решение. Применяя преобразование Фурье к уравнению теплопроводности, получаем следующую задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -a^2 y^2 \widehat{u} + \widehat{f}(y,t) \\ \widehat{u}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид

$$\widehat{u}(y,t) = \int\limits_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \widehat{f}(y,t)\, dy.$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{y\to x}(e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \widehat{f}(y,t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} f(s,\tau)\, ds.$$

Поэтому формула Пуассона для решения неоднородного уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием имеет вид

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} f(s,\tau)\, ds\, d\tau.$$

Замечание *Обобщенная функция* $\delta(x-s)\delta(t-\tau)$ *интерпретируется как мгновенный точечный источник тепла в точке* $x = s$, *действующий в момент времени* $t = \tau$. *Поэтому фундаментальное решение называют функцией влияния мгновенного точечного источника, т. е. фундаментальное решение* $G(x,t|s,\tau)$ *определяет распределение температуры при таком источнике. Представляя источники тепла как суперпозицию точечных источников*

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-s)\delta(t-\tau)f(s,\tau)\,ds\,d\tau$$

получаем решение как суперпозицию функций влияния с той же плотностью

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t|s,\tau)f(s,\tau)\,ds\,d\tau.$$

Считая, что источники тепла равны нулю при $t < 0$ *и учитывая, что фундаментальное решение равно нулю при* $\tau > t$, *выводим*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{t} G(x,t|s,\tau)f(s,\tau)\,ds\,d\tau.$$

Полученная формула совпадает с формулой Пуассона для решения неоднородного уравнения с нулевым начальным условием. Конечно, приведенные рассуждения носят эвристический характер, но могут быть строго обоснованы в рамках теории обобщенных функций.

Принцип максимума для уравнения теплопроводности

Теорема (принцип максимума). *Всякое классическое решение* $u(x,t)$ *(непрерывное в замкнутой области* $\bar{D} \equiv \{0 \leqslant x \leqslant l,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$*) уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \rho(x)u_t \qquad (53.1)$$

принимает наибольшее и наименьшее значения либо в начальный момент времени $u|_{t=0}$*, либо на границе отрезка* $u|_{x=0}$*.* $u|_{x=l}$*.*

Доказательство. 1. Если $u(x,t) = \text{const}$, то справедливость утверждения теоремы очевидна.

2. Пусть

$$M_1 = \max\{u|_{t=0}, u|_{x=0}, u|_{x=l}\}, \qquad (53.2)$$

$$M_2 = \max_{\substack{x\in[0,l]\\ t\in[0,T]}} u(x,t), \quad M_2 = u(x_0, y_0). \qquad (53.3)$$

Покажем, что $M_1 = M_2$. Предположим противное: $M_1 < M_2$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \alpha(T-t), \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < \frac{M_2 - M_1}{2T}.$$

Функция $v(x,t)$ непрерывна в $\bar{D}$ и, следовательно, достигает в $\bar{D}$ наибольшего значения в некоторой точке (x_1, t_1), так как $M_3 = v(x_1, t_1)$

$$M = u(x_0,t_0) \leqslant u(x_0,t_0) + \alpha(T-t_0) = v(x_0,t_0) \leqslant M_3.$$

Точка (x_1, t_1) не может лежать на границе, так как

$$|v(x,0)| \leqslant |u(x,0)| + \alpha T < M_1 + \frac{1}{2}(M_2 - M_1) < M_2 \leqslant M_3;$$

$$|v(0,t)| \leqslant |u(0,t)| + \alpha(T-t) < M_1 + \frac{1}{2}(M_2 - M_1) < M_2 \leqslant M_3;$$

$$|v(l,t)| \leqslant |u(l,t)| + \alpha(T-t) < M_1 + \frac{1}{2}(M_2 - M_1) < M_2 \leqslant M_3.$$

Таким образом, точка $(x_1, t_1) \in \bar{D}$ и в ней функция $u(x,t)$ должна удовлетворять уравнению (53.1). Но, так как (x_1, t_1) – точка максимума, то

$$u_x(x_1,t_1) = v_x(x_1,t_1) = 0, \qquad u_{xx}(x_1,t_1) = v_{xx}(x_1,t_1) \leqslant 0,$$
$$u_t(x_1,t_1) = v_t(x_1,t_1) + \alpha > 0,$$

поскольку

$$v_t(x_1,t_1) = \begin{cases} 0, & 0 < t < T; \\ v(x,t) \geqslant 0, & t = T, \end{cases}$$

и, следовательно, в точке (x_1, t_1) функция $u(x,t)$ не удовлетворяет уравнению (53.1). Следовательно, предположение $M_1 < M_2$ неверно, т.е. $M_1 = M_2$, что и требовалось доказать.

Доказательство для минимума аналогично.

Единственность решения первой краевой задачи

Теорема (**о единственности**). *Классическое решение смешанной задачи с краевыми условиями первого рода (непрерывное в области* $0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0$)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t) = \rho\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (53.4)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad u(x,0) = \varphi(x), \qquad (53.5)$$

единственно.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи (53.4), (53.5). Пусть $v = u_2 - u_1$, тогда

$$v(0,t) = v(l,t) = v(x,0) = 0.$$

Это решение непрерывно и достигает наибольшего и наименьшего значений на границе. Следовательно, $v(x,t) = 0$, что и доказывает теорему.

Единственность решения задачи Коши

Теорема *Классическое решение задачи Коши (непрерывное и ограниченное при* $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$)

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{53.6}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad |\varphi(x)| \leqslant M < \infty,$$

единственно.

Доказательство. Пусть существуют функции u_1 и u_2, удовлетворяющие уравнению (53.6), и функция $v = u_1 - u_2$, для которой $|v| \leqslant 2M$. Рассмотрим функцию

$$w(x,t) = \frac{4M}{L^2}\Big(\frac{x^2}{l} + a^2 t\Big). \tag{53.7}$$

Очевидно, она удовлетворяет уравнению (53.6), причем

$$\begin{aligned}
&|w(x,0)| = \frac{4M}{L^2}\Big(\frac{x^2}{l}\Big) \leqslant 2M \quad \text{при} \quad |x| \leqslant L,\\
&|w(x,0)| \geqslant v(x,0) = 0,\\
&|w(\pm L,t)| \geqslant 2M,\\
&|w(\pm L,t)| \geqslant |v(\pm L,t)|.
\end{aligned}$$

Следовательно, по теореме об экстремуме

$$|v(x,t)| \leqslant w(x,t)$$

для всех x, принадлежащих отрезку $]-L, L[$. Зафиксировав x, перейдем в последнем равенстве к пределу при $L \to \infty$. Тогда

$$|v(x,t)| \leqslant 0,$$

что дает $v(x,t) = 0$. Таким образом, теорема доказана.