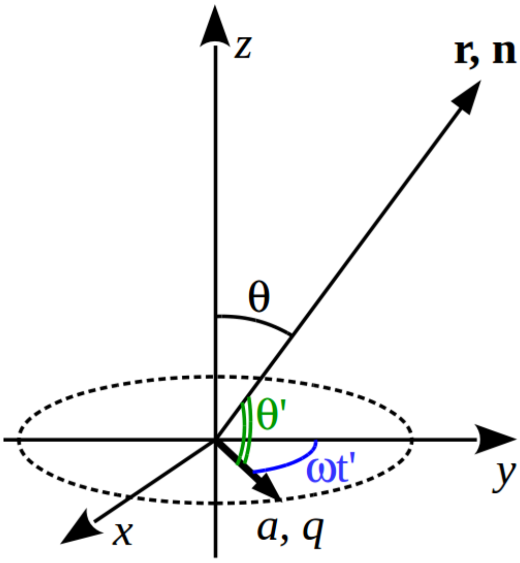
Задача 4.18.

Найти в волновой зоне электромагнитное поле, угловое распределение и полную интенсивность, а также исследовать поляризацию при равномерном движении по окружности радиуса a с частотой ω нерелятивистской частицы заряда q ($v \ll c$).



Решение.

Излучающая система обладает дипольным моментом. В волновой зоне угловое распределение интенсивности излучения задается выражением

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} = \frac{q^2\omega^4 a^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta'(t'),$$

где $t' = t - r/c$ – время излучения э-м волны, $\theta'(t')$ – текущий угол между векторами $\mathbf{d}(t')$ и $\mathbf{n}$, а точка наблюдения (вместе с нештрихованным углом θ) зафиксирована в плоскости yz. Угол между векторами $\ddot{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{n}$ равен $\pi - \theta'$, его отличие от θ' не влияет на значение $\sin^2$ в формуле для $\frac{dJ}{d\Omega}$.

Выразим $\sin^2\theta'$ через сферические переменные θ и $\phi = \omega t'$. Для этого выразим двумя способами скалярное произведение

$$(\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}) = r_x \cdot d_x + r_y \cdot d_y + r_z \cdot d_z = 0 + r\sin\theta \cdot d\cos\omega t' + 0 = r\cdot d\cdot\cos\theta',$$

откуда

$$\cos\theta' = \sin\theta\cos\omega t', \quad \sin^2\theta' = 1 - \sin^2\theta\cos^2\omega t'.$$

Итак, угловое распределение интенсивности излучения равно

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{q^2\omega^4 a^2}{4\pi c^3}(1 - \sin^2\theta\cos^2\omega t'),$$

Усредняя по времени, получим

$$\left\langle\frac{dJ}{d\Omega}\right\rangle = \frac{q^2\omega^4 a^2}{4\pi c^3}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2}\right) = \frac{q^2\omega^4 a^2}{8\pi c^3}(1+\cos^2\theta).$$

Полная интенсивность (средняя мощность) излучения получается интегрированием $\langle\frac{dJ}{d\Omega}\rangle$ по телесному углу *:

$$J = \int\left\langle\frac{dJ}{d\Omega}\right\rangle d\Omega = \frac{q^2\omega^4 a^2}{8\pi c^3}\int\limits_0^\pi (1+\cos^2\theta)2\pi\sin\theta d\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{q^2 a^2\omega^4}{c^3} = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3}.$$

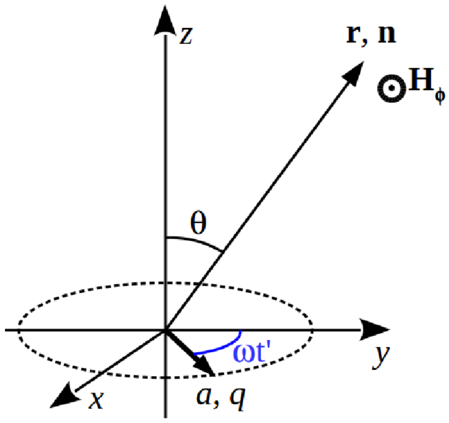
*Также можно использовать общую формулу

$$J = \frac{2\langle\ddot{d}^2\rangle}{3c^3},$$

где $\langle\ddot{d}^2\rangle$ – среднее по времени значение квадрата модуля вектора $\ddot{\mathbf{d}}$.

Магнитное поле в волновой зоне:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} = \pm \frac{qa\omega^2\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\omega t'}}{c^2 r}\mathbf{e}_\alpha,$$



где $\mathbf{e}_\alpha$ – единичный вектор, нормальный к плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{d}$ (для фиксированной точки наблюдения его направление переменно во времени).

Это поле вращается вокруг оси $\mathbf{r}$, оставаясь ей перпендикулярным. Конец вектора $\mathbf{B}$ описывает эллипс с большой полуосью $H_\theta = \frac{qa\omega^2}{c^2 r}$ и малой $H_\phi = \frac{qa\omega^2}{c^2 r}\cos\theta$. Локально поле по своей структуре идентично плоской электромагнитной волне *. В частных случаях

$$\theta = 0 : H_\phi = H_\theta - \text{ круговая поляризация.}$$

$$\theta = \pi/2 : H_\phi = 0,\ H_\theta \neq 0 - \text{ линейная поляризация.}$$

*Электрическое поле в волновой зоне связано с магнитным соотношением $\mathbf{E} = -[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]$. Это следует из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Поэтому для описания свойств электромагнитной волны здесь достаточно ограничиться анализом магнитного поля.