

## Вопросы к экзамену по ММФ 4 семестр

1. Решение дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ . Задача Коши. Корректность. Теорема Пикара для уравнения  $y' = f(x, y)$  (Общая схема доказательства. Сведение к эквивалентному интегральному уравнению. Построение последовательных приближений).
2. Решение дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ . Задача Коши. Теорема Пикара для уравнения  $y' = f(x, y)$  (Общая схема доказательства. Равномерная сходимости последовательных приближений к решению задачи).
3. Решение дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ . Задача Коши. Корректность. Теорема Пикара для уравнения  $y' = f(x, y)$  (Общая схема доказательства. Единственность решения). Теорема Пеано (без доказательства).
4. Решение дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ . Задача Коши. Глобальная теорема единственности решения задачи Коши для уравнения  $y' = f(x, y)$ .
5. Продолжение решения. Непродолжаемое решение. Теорема существования и единственности непродолжаемого решения задачи Коши для уравнения  $y' = f(x, y)$ .
6. Линейная система уравнений 1-го порядка. Задача Коши. Теорема Пикара для линейной системы.
7. Линейная однородная система уравнений 1-го порядка. Структура множества решений. Линейная зависимость/независимость функций. Признак линейной зависимости решений. Размерность пространства решений.
8. Линейная однородная система уравнений. Матрица Вронского. Фундаментальная матрица. Структура фундаментальной матрицы. Формула Лиувилля. Критерий линейной независимости решений.
9. Линейная неоднородная система уравнений. Структура множества решений. Принцип суперпозиции. Метод вариации постоянных.
10. Линейная система с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента: определение и свойства.
11. Линейное уравнение  $n$ -го порядка. Задача Коши. Теорема Пикара для линейного уравнения  $n$ -го порядка.
12. Линейное однородное уравнение  $n$ -го порядка. Структура множества решений. Матрица Вронского. Формула Лиувилля. Критерий линейной независимости решений.
13. Линейное неоднородное уравнение  $n$ -го порядка. Структура множества решений. Принцип суперпозиции. Метод вариации постоянных.
14. Линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение классической ФСР.
15. Линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Построение специальной ФСР. Функции  $\psi_k$ .
16. Выражение матричной экспоненты через функции  $\psi_k$ . Неравенство Гельфанда-Шилова.
17. Автономные системы. Классификация траекторий.
18. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами на плоскости. Классификация точек покоя.

19. Устойчивость по Ляпунову решения системы уравнений первого порядка. Асимптотическая устойчивость. Сведение исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения.
20. Критерий устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения линейной однородной системы.
21. Критерий устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
22. Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости нулевого решения.
23. Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевого решения.
24. Матричное уравнение Ляпунова. Теорема об устойчивости по первому приближению. Случай асимптотической устойчивости.
25. Оператор Штурма-Лиувилля. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля как ядро обратного оператора. Построение функции Грина в невырожденном случае.
26. Размерность ядра оператора Штурма-Лиувилля. Необходимое (и достаточное) условие разрешимости краевой задачи. Структура решений краевой задачи.
27. Задача Штурма-Лиувилля. Сведение к интегральному уравнению. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова.
28. Понятие регулярной особой точки линейного однородного уравнения второго порядка. Представление решения в виде обобщенного степенного ряда в окрестности регулярной особой точки. Определяющее уравнение. Построение ФСР в случае  $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ .
29. Свойства нулей решений линейного однородного уравнения второго порядка.
30. Теорема Штурма и её следствия.