Гл. 9. Вариационное исчисление.

§ 9.1. Примеры задач классического вариационного исчисления.

Вариационное исчисление — раздел анализа, в котором рассматриваются задачи о нахождении минимального (или максимального) значения некоторого интеграла за счет подходящего выбора функции, входящей заранее известным способом в подынтегральное выражение.

Пример 9.1 (Задача о брахистохроне)

В вертикальной плоскости даны две точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой (рис. 1). Определить путь, двигаясь по которому под влиянием только собственной тяжести, материальная точка M переместится из точки A в точку B за кратчайшее время.

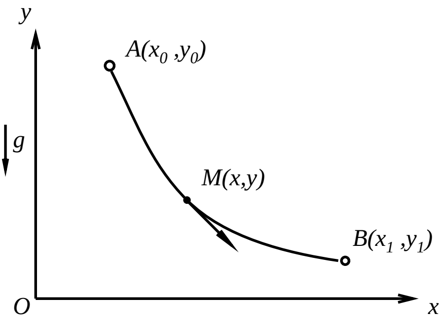

Рис. 1

Будем считать, что на плоскости введена декартова ортогональная система координат x, y; точки A и B имеют в этой системе координаты (x_0, y_0) и (x_1, y_1) соответственно; ускорение свободного падения направлено вдоль отрицательной полуоси y и равно g; масса точки M равна m.
Пусть нам задана некоторая непрерывная функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, по графику которой, как по рельсам, материальная точка M движется под действием только силы тяжести. Положение точки M на такой кривой будем задавать указанием её x-координаты в каждый момент времени t (т. е. указанием некоторой гладкой функцией $x : [0, T] \to \mathbb{R}$, где T — время, затрачиваемое на переход из точки A в точку B по данной кривой).

Полная энергия материальной точки M в начальный момент движения равна mgy_0 (начальная скорость равна нулю). Полная энергия материальной точки M в момент прохождения ею точки с координатами $(x, y(x))$ равна $mgy(x) + mv^2/2$, где $v = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} = \pm\sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx/dt$ — длина вектора скорости точки M. Мы выберем перед корнем знак плюс, поскольку $v \geq 0$ и $dx/dt \geq 0$. Первое из этих неравенств очевидно, а второе вытекает из нашего допущения о том, что точка M движется по графику функции $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ (движение, начинающееся из точки $(x_0, y(x_0))$, возможно лишь в направлении слева направо; при этом x-координата точки M монотонно возрастает в процессе всего движения).

Закон сохранения энергии даёт $mgy_0 = mgy(x) + mv^2/2$. Откуда для всех значений $t \in [0, T]$ получаем

$$\sqrt{2g(y_0 - y(x(t)))} = v = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}(x(t))\right)^2}\,\frac{dx}{dt}.$$

Следовательно, для полного времени, затрачиваемого на переход из точки A в точку B, мы получаем

$$T = \int\limits_0^T dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{dx}\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}}\,dx. \qquad (1)$$

Тем самым мы выразили с помощью интеграла время, затрачиваемое точкой для прохождения по кривой, являющейся графиком функции $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$. С математической точки зрения задача о брахистохроне состоит в том, чтобы найти функцию $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, для которой интеграл (1) выражает время движения точки по её графику и которая минимизирует это время.

Обсудим более подробно, какой должна быть функция y, чтобы интеграл (1) выражал время прохождения по её графику от A до B. Ясно, что эта функция должна быть непрерывна в замкнутом промежутке $[x_0, x_1]$ и должна удовлетворять граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Для того чтобы интеграл (1) мог быть написан, функция y должна иметь производную $y'(x)$ в открытом промежутке (x_0, x_1). С концевыми точками $x = x_0$ и $x = x_1$ дело обстоит иначе: интеграл (1) может в них сходиться как несобственный, даже если у функции y в этих точках нет производной (последнее может случиться, например, из-за того, что касательная становится вертикальной). Чтобы обеспечить себе в будущем достаточную свободу в манипулировании с интегралом (1), мы, помимо вышеуказанных «естественных условий на y», будем предполагать, что y имеет вторую непрерывную производную на открытом интервале (x_0, x_1).

Подведём итог для **Задачи о брахистохроне**:
Среди всех непрерывных функций $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, которые дважды непрерывно дифференцируемы в открытом интервале (x_0, x_1) и для которых интеграл

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}}\, dx \qquad (2)$$

сходится, найти ту, которая доставляет интегралу $I[y]$ минимальное значение.

Пример 9.2 (Задача о поверхности вращения наименьшей площади)

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве нам даны плоскость L и лежащие на ней прямая l и точки A и B. Требуется среди всех кривых, лежащих в данной плоскости и проходящих через точки A и B, найти ту, которая при вращении вокруг прямой l даёт поверхность наименьшей площади.

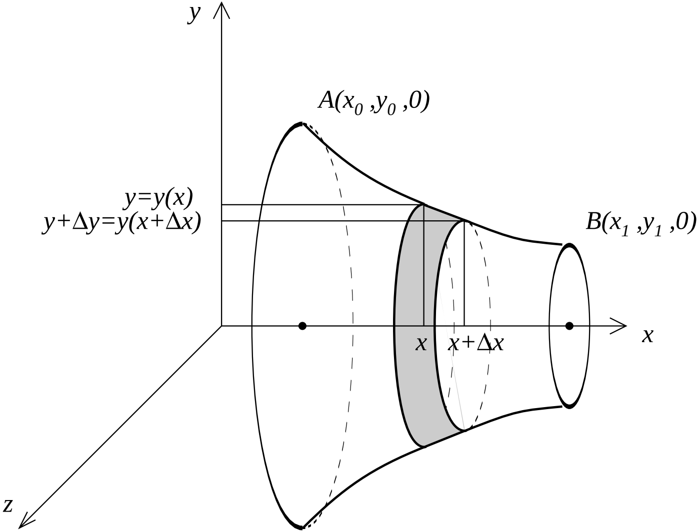

Рис. 2

Чтобы получить аналитическую формулировку этой задачи, свойственную вариационному исчислению, будем считать, что в трёхмерном евклидовом пространстве введена декартова ортогональная система координат x, y, z; плоскость L совпадает с плоскостью переменных x, y; прямая l совпадает с осью Ox; точки A и B имеют в этой системе координаты $(x_0, y_0, 0)$ и $(x_1, y_1, 0)$ соответственно.

Пусть нам дана некоторая гладкая функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$. На плоскости переменных x, y рассмотрим кривую, задаваемую графиком этой функции (т. е. кривую, задаваемую на этой плоскости уравнением $y = y(x)$). Тогда ширина $\Delta\sigma$ боковой стороны узкого (заштрихованного на рис. 2) пояска поверхности, образованного вращением той части графика функции $y = y(x)$, который лежит над отрезком $[x, x + \Delta x]$, приближённо выражается формулой

$$\Delta\sigma = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{1 + (y'(x))^2}\Delta x.$$

Поэтому площадь ΔS этого узкого пояска приближённо равна

$$\Delta S = 2\pi y(x)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\Delta x.$$

А значит, площадь всей поверхности выражается интегралом

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

(более развёрнутый вывод этой формулы был дан в курсе математического анализа). Отбрасывая несущественный числовой множитель 2π, получаем искомую аналитическую постановку **Задачи о поверхности вращения наименьшей площади**: Среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, найти ту, которая доставляет минимум интегралу

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx. \qquad (3)$$

Пример 9.3 (Задача о геодезических на поверхности)

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве заданы поверхность и две точки A и B на ней. Требуется найти кривую минимальной длины, лежащую на данной поверхности и соединяющую эти точки (рис. 3).

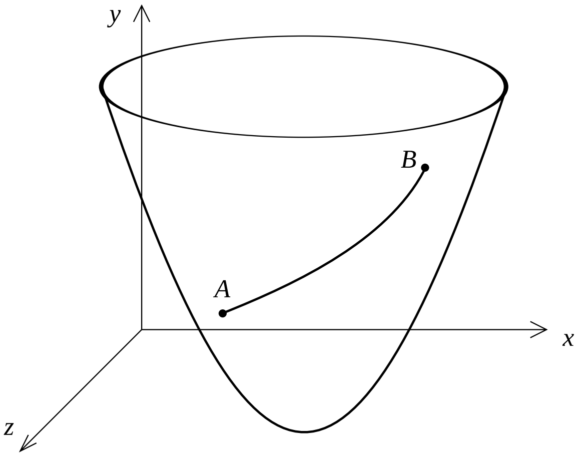

Рис. 3

Чтобы получить аналитическую формулировку этой задачи, будем считать, что в трёхмерном евклидовом пространстве введена декартова ортогональная система координат x, y, z; точки A и B имеют в этой системе координаты (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) соответственно; поверхность задана уравнением $G(x, y, z) = 0$ (при этом, как всегда при неявном способе задания поверхности, считаем, что градиент функции G не зануляется ни в одной точке поверхности). Пусть уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t_0 \le t \le t_1, \tag{4}$$

задают некоторую кривую, лежащую на поверхности G и соединяющую точки A и B. То есть пусть выражение $G(x(t), y(t), z(t))$ тождественно равняется нулю на $[t_0, t_1]$ и пусть $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$ и $z(t_1) = z_1$. Тогда длина кривой (4) вычисляется по формуле

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{5}$$

Тем самым мы приходим к следующей аналитической постановке **Задачи о геодезических на поверхности**: Среди всех троек дважды непрерывно дифференцируемых функций $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $z : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, которые тождественно зануляют выражение $G(x(t), y(t), z(t))$ и удовлетворяют граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$ и $z(t_1) = z_1$, требуется найти ту тройку функций, которая доставляет минимум интегралу (5).

§ 9.2. Простейшая задача вариационного исчисления.
Примеры, приведённые в предыдущем параграфе, показывают, что задачи вариационного исчисления сходны с задачами на поиск экстремума функции многих переменных, с которыми вы сталкивались в курсе математического анализа. Правда, теперь роль независимой переменной играет функция, а выражение, экстремум которого надлежит найти, задаётся интегралом. Из всего многообразия задач вариационного исчисления в этом параграфе мы выделим некоторую простейшую задачу, на решении которой в последующем и сосредоточим основное внимание.

Пусть имеется C^2-гладкая функция $F = F(x, y, y')$ трёх независимых числовых аргументов x, y и y' (здесь y' — не производная от y, а символ совершенно самостоятельного аргумента функции F). Будем предполагать, что каждый из аргументов x, y и y' меняется в открытом интервале, возможно, совпадающем со всей числовой прямой. Пусть, кроме того, задана функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, которая непрерывна в замкнутом промежутке $[x_0, x_1]$, дважды непрерывно дифференцируема в открытом интервале (x_0, x_1) и для которой при каждом $x \in (x_0, x_1)$ точка $(x, y(x), y'(x))$ содержится в области определения функции F. При фиксированном x подставим в функцию F значение $y(x)$ функции $y = y(x)$ в точке x вместо переменной y и значение $y'(x)$ производной функции $y = y(x)$ в точке x вместо переменной y'. Таким образом, в открытом интервале (x_0, x_1) возникнет C^1-гладкая функция $x \mapsto F(x, y(x), y'(x))$ одного переменного x.

Проинтегрируем эту функцию по переменной x в промежутке $[x_0, x_1]$:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Обратим внимание, что, вообще говоря, здесь написан несобственный интеграл, для которого точки $x = x_0$ и $x = x_1$ являются особыми.

Для краткости будем называть функцию $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ допустимой, если она непрерывна в замкнутом промежутке $[x_0, x_1]$; дважды непрерывно дифференцируема в открытом интервале (x_0, x_1); при каждом $x \in (x_0, x_1)$ точка $(x, y(x), y'(x))$ содержится в области определения функции F; и если интеграл

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{6}$$

сходится.

Определение 9.4 (простейшей задачи вариационного исчисления)

Простейшая задача вариационного исчисления состоит в том, чтобы среди всех **допустимых** функций, удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, найти ту, которая доставляет минимальное значение интегралу (6).

Приведённые в предыдущем параграфе задачи о брахистохроне и минимальной поверхности вращения являются частными случаями простейшей вариационной задачи.

Обсудим традиционную терминологию вариационного исчисления. Она очень напоминает терминологию, знакомую вам по теме «экстремумы функций многих переменных» из курса математического анализа. Однако, для полноты изложения, всё же определим ниже необходимые нам термины. Функционалом называют отображение множества функций во множество чисел (вещественных или комплексных). Поэтому можно сказать, что простейшая вариационная задача состоит в отыскании функции, доставляющей минимум функционалу (6).

Определение 9.5 (локального минимума, локального максимума, локального экстремума)

Говорят, что допустимая функция $\tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет локальный минимум функционалу (6) при граничных условиях $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$, если $\tilde{y}(x_0) = y_0$, $\tilde{y}(x_1) = y_1$ и существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой допустимой функции $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей граничным условиям $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$ и такой, что

$$\sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon,$$

выполняется неравенство $I[\tilde{y}] \leq I[y]$. Понятие локального максимума определяется аналогично. Если функция доставляет функционалу локальный минимум или локальный максимум, то говорят, что она доставляет функционалу локальный экстремум.

Определение 9.6 (глобального минимума, глобального максимума, глобального экстремума)

Говорят, что функция $\widetilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет глобальный минимум функционалу (6) при граничных условиях $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$, если для любой допустимой функции $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей граничным условиям $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$, выполняется неравенство $I[\widetilde{y}] \leq I[y]$.
Понятие глобального максимума определяется аналогично.
Если функция доставляет функционалу глобальный минимум или глобальный максимум, то говорят, что она доставляет функционалу глобальный экстремум.

§ 9.3. Необходимое условие локального экстремума. Лемма Лагранжа.

Напомним, что C^2-гладкая функция $\eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ является финитной, если она обращается в тождественный нуль в некоторых окрестностях точек x_0 и x_1, т. е. если найдётся число $\delta > 0$ такое, что функция η тождественно равна нулю на каждом из промежутков $[x_0, x_0 + \delta]$ и $[x_1 - \delta, x_1]$.

Пусть допустимая функция $\widetilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет локальный экстремум функционалу

$$I[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx$$

при граничных условиях $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$. Тогда непосредственно из определения экстремума вытекает, что для любой C^2-гладкой финитной функции $\eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, числовая функция $\varepsilon \mapsto I[\widetilde{y} + \varepsilon\eta]$ числового аргумента ε имеет локальный экстремум в точке $\varepsilon = 0$. Поэтому производная этой функции в точке $\varepsilon = 0$ равна нулю:

$$0=\left(\frac{d}{d\varepsilon}I[\widetilde{y}+\varepsilon\eta]\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}=\left(\frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,\widetilde{y}(x)+\varepsilon\eta(x),\widetilde{y}'(x)+\varepsilon\eta'(x))dx\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\left(\frac{d}{d\varepsilon}\left[\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}+\int\limits_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}+\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1}\right]\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\left(\frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}F(x,\widetilde{y}(x)+\varepsilon\eta(x),\widetilde{y}'(x)+\varepsilon\eta'(x))\,dx\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}. \qquad (7)$$

В последнем равенстве мы учли, что функция η тождественно равна нулю на промежутках $[x_0, x_0+\delta]$ и $[x_1-\delta, x_1]$, а значит, интегралы от функции $F(x,\widetilde{y}(x)+\varepsilon\eta(x),\widetilde{y}'(x)+\varepsilon\eta'(x))$ по этим промежуткам не зависят от ε.

Из курса математического анализа вам известно следующее утверждение о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра:

Пусть функция $f(x, \varepsilon)$, *определенная в прямоугольнике* $[a, b] \times [c, d]$, *будет непрерывна по* x *в* $[a, b]$ *при любом фиксированном* $\varepsilon \in [c, d]$. *Предположим также, что во всей области* $[a, b] \times [c, d]$ *существует частная производная* $f'_\varepsilon(x, \varepsilon)$, *непрерывная как функция двух переменных. Тогда при любом* $\varepsilon \in [c, d]$ *имеет место формула*

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int\limits_a^b f(x, \varepsilon)\, dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon)\, dx.$$

Наложенные выше на функции F, $\widetilde{y}$ и η условия гладкости позволяют применить эту теорему к последнему интегралу из равенства (7). Это даёт:

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} F(x, \widetilde{y}(x)+\varepsilon\eta(x), \widetilde{y}'(x)+\varepsilon\eta'(x))\, dx\right)\bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int\limits_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))\eta'(x)\right] dx.$$

Здесь $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ означают частные производные функции $F(x, y, y')$ по её второму и третьему аргументам соответственно.

Из наложенных выше на функции F, $\widetilde{y}$ и η условий гладкости, очевидно, следует, что второе слагаемое в последнем подынтегральном выражении является непрерывно дифференцируемой функцией переменного x на промежутке $[x_0+\delta, x_1-\delta]$. Проинтегрировав его по частям, получим

$$\int\limits_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,\widetilde{y}(x),\widetilde{y}'(x))\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\widetilde{y}(x),\widetilde{y}'(x))\eta'(x)\right]dx=$$

$$=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\widetilde{y}(x),\widetilde{y}'(x))\right]\eta(x)\Big|_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}+$$

$$+\int\limits_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,\widetilde{y}(x),\widetilde{y}'(x))\eta(x)-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\widetilde{y}(x),\widetilde{y}'(x))\right]\eta(x)\,dx=0. \tag{8}$$

Выражение

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))$$

здесь означает производную функции одного переменного

$$x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))$$

по своему аргументу. Внеинтегральные слагаемые в (8) зануляются ввиду того, что функция η удовлетворяет условиям $\eta(x_0+\delta) = \eta(x_1-\delta) = 0$. Поэтому мы получаем, что для любой финитной функции η справедливо равенство

$$\int\limits_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))\eta(x) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))\right]\eta(x)\, dx = 0,$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))\eta(x) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))\right]\eta(x)\, dx = 0.$$

Поскольку выражение, стоящее под знаком интеграла в квадратных скобках, есть функция непрерывная, то в силу приводимой ниже леммы Лагранжа оно равно нулю тождественно. Таким образом, мы получили, что *если допустимая функция* $\widetilde{y}$ *доставляет локальный экстремум функционалу* (6), *то в открытом интервале* (x_0, x_1) *она удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x)) = 0. \qquad (9)$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера и представляет собой необходимое условие локального экстремума для простейшей вариационной задачи.

Лемма 9.7 (Лагранжа)

Если функция $f:(x_0,x_1)\to\mathbb{R}$ *непрерывна и*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)\,dx = 0 \tag{10}$$

для каждой финитной функции $\eta:[x_0,x_1]\to\mathbb{R}$, *то* f *есть тождественный нуль.*

Доказательство леммы 9.7 будем вести от противного: допустим, что нашлась точка $\widetilde{x} \in (x_0, x_1)$ такая, что $f(\widetilde{x}) \neq 0$. Поскольку f непрерывна, то найдётся $\delta > 0$ такое, что интервал $(\widetilde{x} - \delta, \widetilde{x} + \delta)$ содержится в интервале (x_0, x_1) и $f(x) \neq 0$ для всех $x \in (\widetilde{x} - \delta, \widetilde{x} + \delta)$.
Зададим функцию $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле (её график см. на рис. 4)

$$\eta(x) = \begin{cases} (x - \widetilde{x} - \delta)^4 (x - \widetilde{x} + \delta)^4, & \text{если } |x - \widetilde{x}| < \delta; \\ 0, & \text{если } |x - \widetilde{x}| \geq \delta. \end{cases}$$

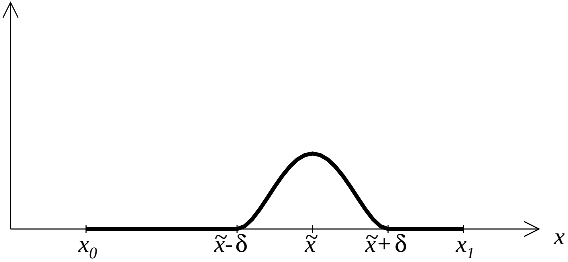

Рис. 4

Очевидно, она является дважды непрерывно дифференцируемой на всей оси $\mathbb{R}$, для всех достаточно малых δ зануляется в некоторой окрестности точек x_0 и x_1 и положительна на интервале $(\widetilde{x}-\delta, \widetilde{x}+\delta)$. Поэтому, с одной стороны, она финитна и для неё интеграл (10) должен быть равен нулю. Но, с другой стороны, для неё

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)\,dx = \int\limits_{\widetilde{x}-\delta}^{\widetilde{x}+\delta} f(x)\eta(x)\,dx,$$

а последний интеграл не равен нулю, поскольку подынтегральная функция не обращается в нуль и принимает значения одного знака.
Полученное противоречие означает, что функция f обращается в нуль во всех точках открытого интервала (x_0, x_1). Лемма Лагранжа доказана.

Замечание 9.8

Изучая обобщённые функции, для любых $n \geq 1$, $\delta > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ строят бесконечно дифференцируемую функцию $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что $\omega(x) = 0$ для всех $|x - x_0| \geq \delta$ и $\omega(x) > 0$ для всех $|x - x_0| < \delta$. Ясно, что при доказательстве леммы Лагранжа мы могли бы использовать подходящую функцию ω вместо того, чтобы строить η по явным формулам. Это соображение, в частности, показывает, что аналог леммы Лагранжа справедлив и для кратных интегралов.

Выполним дифференцирование в уравнении Эйлера (9) (волну над y опускаем):

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}(x, y(x), y'(x)) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}(x, y(x), y'(x))y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y(x), y'(x))y''(x)\right] = 0.$$

Отсюда видно, что уравнение Эйлера представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, не разрешённое относительно старшей производной. В соответствии с постановкой простейшей вариационной задачи его надлежит решать вместе с граничными условиями $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Обычно уравнение Эйлера (9) записывают в более кратком виде:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \tag{11}$$

где используются стандартные обозначения $F_y = \partial F / \partial y$ и $F_{y'} = \partial F / \partial y'$ для частных производных.

Определение 9.9 (экстремали)

Решения уравнения Эйлера (11) называют экстремалями функционала (6). Более подробно: функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ называется экстремалью функционала (6), проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), если она 1) непрерывна в замкнутом промежутке $[x_0, x_1]$; 2) дважды непрерывно дифференцируема в открытом интервале (x_0, x_1); 3) удовлетворяет уравнению Эйлера (11) и граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

§ 9.4. Случаи понижения порядка в уравнении Эйлера.

Уравнение Эйлера, вообще говоря, не относится ни к одному классу дифференциальных уравнений, которые вы изучали в курсе «Дифференциальные уравнения» или «Уравнения математической физики». Поэтому целесообразно уделить особое внимание тем случаям, когда уравнение Эйлера упрощается. В настоящем параграфе мы рассмотрим те случаи, когда оно допускает понижение порядка. Традиционно выделяют три таких случая. Каждый из них характеризуется тем, что функция $F = F(x, y, y')$, определяющая исследуемый функционал, не зависит от какого-то из аргументов x, y или y'.

Случай I: $F = F(x, y)$. Очевидно, при этом $F_{y'} = 0$ и уравнение (11) принимает вид $F_y(x, y) = 0$. Последнее уравнение вообще не является дифференциальным. Значит, можно сказать, что в этом случае порядок уравнения Эйлера понизился до нуля.

Случай II: $F = F(x, y')$. Очевидно, при этом $F_y = 0$ и уравнение (11) принимает вид $dF_{y'}/dx = 0$ или $F_{y'}(x, y'(x)) = C$, где C — некоторая постоянная. Последнее уравнение является (нелинейным) дифференциальным уравнением первого порядка. Значит, можно сказать, что в этом случае порядок уравнения Эйлера понизился до единицы.

Случай III: $F = F(y, y')$. Прямые вычисления в этом случае дают

$$\frac{d}{dx}[y'F_{y'} - F] = y''F_{y'} + y'\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y y' - F_{y'}y'' = -y'\left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right].$$

Следовательно, если функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (11), то она превращает выражение $y'F_{y'} - F$ в постоянную. И наоборот, если функция $y = y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка $y'F_{y'} - F = C$ (C — некоторая постоянная), то либо $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (11), либо $y = y(x)$ — линейна (поскольку $y'(x) = 0$).
Допуская известную вольность речи, говорят, что в случае III уравнение Эйлера принимает вид $y'F_{y'} - F = C$, где C — постоянная (важно только не забывать о «добавленных» линейных функциях).

§ 9.5. Решение задачи о брахистохроне

В соответствии со сказанным в § 9.1, нам предстоит найти экстремаль функционала

$$I[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}}\,dx,$$

принимающую данные граничные значения $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$.

Поскольку подынтегральная функция $F(y, y') = \sqrt{1+y'^2}/\sqrt{2g(y_0 - y)}$ не зависит явно от переменной x, то мы находимся в случае III из предыдущего параграфа и можем записать уравнение Эйлера в виде $y'F_{y'} - F = C$, где C — некоторая постоянная, которую предстоит определить в процессе решения задачи.

Прямые вычисления дают

$$y' \frac{2y'}{2g\sqrt{y_0 - y} \cdot 2\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{2g\sqrt{y_0 - y}} = C,$$

или

$$\frac{y'^2 - (1 + y'^2)}{\sqrt{y_0 - y} \cdot \sqrt{1 + y'^2}} = 2gC,$$

или $(y_0 - y)(1 + y'^2) = C_1$, где $C_1 = 1/(2gC)^2$ — новая постоянная.

Как и было обещано в предыдущем параграфе, мы получили дифференциальное уравнение первого порядка. К сожалению, оно является нелинейным и решить его не так просто. Мы обсудим решение именно этого частного уравнения, хотя соответствующий метод применим к целому классу уравнений и широко используется при решении дифференциальных уравнений.

Сначала исследуем решения уравнения $(y_0 - y)(1 + y'^2) = C_1$ качественно.
Из полученной выше формулы $C_1 = 1/(2gC)^2$ ясно, что $C_1 > 0$. Дадим этому факту физическую интерпретацию. Если бы C_1 равнялось нулю, то $y = y(x)$ тождественно равнялось бы y_0; потенциальная энергия тела тождественно равнялась бы mgy_0, а его кинетическая энергия — нулю. При этом скорость тела всегда равнялась бы нулю и никакого движения бы не происходило. Значит, $C_1 \neq 0$.
Аналогично, если бы C_1 было отрицательно, то в процессе движения $y(x)$ было бы больше, чем y_0, а значит, полная энергия тела в процессе движения превышала бы его полную энергию в начальный момент времени. Поскольку это невозможно, то C_1 не может быть отрицательным.

Итак, $C_1 > 0$. Устремляя $x \to x_0$ справа, видим, что в левой части уравнения $(y_0 - y)(1 + y'^2) = C_1$ первый сомножитель стремится к нулю. Значит, второй сомножитель должен при этом стремиться к бесконечности, т. е. $y'^2(x) \to +\infty$ при $x \to x_0 + 0$. При этом, если бы $y'(x) \to +\infty$ при $x \to x_0 + 0$, то функция y возрастала бы справа от x_0, и мы бы имели $(y_0 - y)(1 + y'^2) = C_1 < 0$, что невозможно. Значит, $y'(x) \to -\infty$ при $x \to x_0 + 0$. В частности, мы видим, что для всех x, достаточно близких к x_0, значение $y'(x)$ отрицательно, а значит, функция y строго монотонно убывает в некоторой окрестности точки x_0.

Рассмотрим теперь какой-нибудь промежуток изменения переменной x, на котором функция y' строго монотонна. Введём новую независимую переменную u, которая связана со старой переменной x следующим образом: $y'(x) = \operatorname{ctg} u$. Тем самым искомая функция $y(x)$ участвует в замене переменной. Поскольку обе функции $x \mapsto y'(x)$ и $u \mapsto \operatorname{ctg} u$ монотонны, то замена переменных $u \mapsto x$ взаимно однозначна. Более того, как нетрудно видеть, она является диффеоморфизмом. При этом прямые вычисления дают

$$y_0 - y = \frac{C_1}{1 + y'^2} = \frac{C_1}{1 + \operatorname{ctg}^2 u} = C_1 \sin^2 u = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2u). \tag{12}$$

По правилу дифференцирования сложной функции можем написать

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{du} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\operatorname{ctg} u}.$$

Дифференцируя (12), находим $dy/du = -2C_1 \sin u \cos u$ и

$$\frac{dx}{du} = -\frac{2C_1 \sin u \cos u}{\operatorname{ctg} u} = -2C_1 \sin^2 u = -C_1(1 - \cos 2u).$$

Проинтегрировав последнее выражение, получаем

$$x = -C_1\left(u - \frac{\sin 2u}{2}\right) + C_2, \qquad (13)$$

где C_2 — некоторая постоянная.
Формулы (12) и (13) дают параметрическое представление функции $y = y(x)$, являющейся экстремалью функционала

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}}\, dx$$

на всяком промежутке $[a, b]$, на котором функция $y'(x)$ монотонна. График этой функции называется брахистохронной кривой или брахистохроной.

Чтобы лучше уяснить себе строение брахистохроны, сделаем ещё одну замену переменной, положив $t = -2u$. Тогда движение точки по брахистохроне под действием только силы тяжести будет описываться уравнениями

$$\begin{cases} x = \frac{C_1}{2}(t - \sin t) + C_2, \\ y = y_0 - \frac{C_1}{2}(1 - \cos t). \end{cases} \tag{14}$$

Такое движение может быть представлено как сумма двух движений:

$$\begin{cases} x = \frac{C_1}{2} t + C_2, \\ y = y_0 - \frac{C_1}{2} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = -\frac{C_1}{2} \sin t, \\ y = \frac{C_1}{2} \cos t; \end{cases}$$

первое из которых представляет собой равномерное прямолинейное движение параллельно оси x, а второе — равномерное движение по окружности радиуса $C_1/2$.

Таким образом, откладывая $y_0 - y$ по вертикальной оси, можно дать следующее наглядное представление о движении (14): это есть траектория гвоздя, вбитого в колесо телеги, движущейся равномерно и прямолинейно (рис. 5). Такая кривая называется циклоидой.

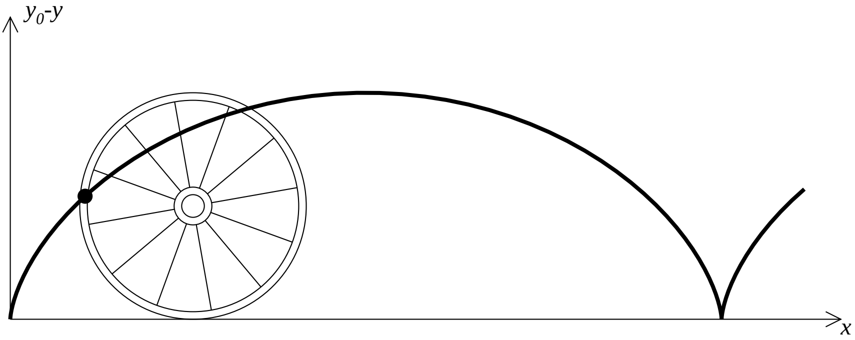

Рис. 5

Циклоида была открыта независимо от решения задачи о брахистохроне и обладает ещё несколькими замечательными свойствами. Например: (i) время, необходимое точке для того, чтобы, двигаясь по циклоиде без начальной скорости только под действием силы тяжести, достичь положения с минимальной потенциальной энергией, не зависит от начального положения точки (свойство таутохронности); (ii) период колебания маятника с ограничителем, имеющим форму циклоиды, не зависит от амплитуды колебаний (рис. 6; предполагается, что грузик подвешен на гибкой нити так, что «реальная длина» маятника изменяется со временем за счёт того, что часть нити прижимается к ограничителю).

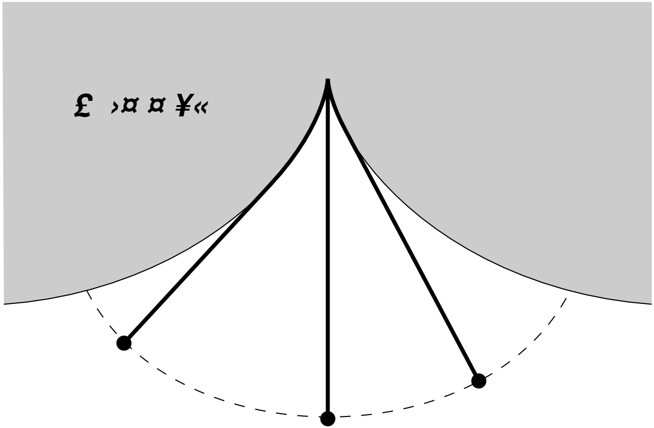

Рис. 6

Вернёмся, однако, к изучению задачи о брахистохроне. В соответствии со сказанным выше, экстремаль функционала (6), проходящая через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), обязательно имеет вертикальную касательную в точке (x_0, y_0). Поэтому вблизи точки (x_0, y_0) экстремаль совпадает с одной из кривых семейства циклоид, проходящих через точку (x_0, y_0) и имеющих в ней вертикальную касательную (рис. 7). Очевидно, экстремаль не может содержать точек излома циклоиды. Но на всяком интервале, не содержащем точек излома циклоиды, угол наклона касательной к ней меняется строго монотонно (наглядно это хорошо видно на рис. 7). Это означает, что сделанная нами выше замена переменной $y'(x) = \operatorname{ctg} u$ законна не только вблизи точки $x = x_0$.

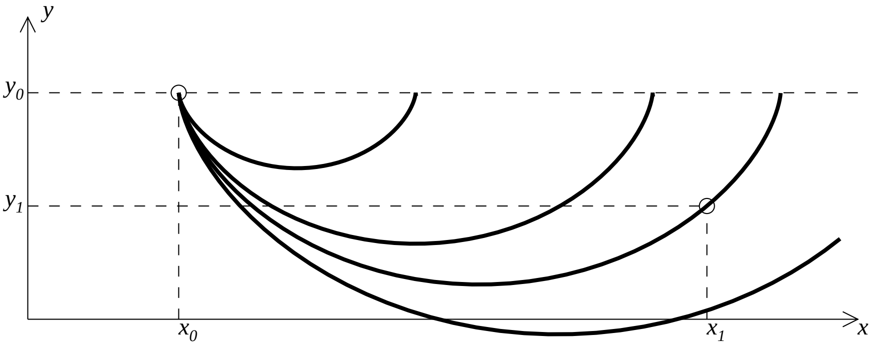

Рис. 7

Как видно из рис. 7, при $y_1 < y_0$, в семействе циклоид, проходящих через точку (x_0, y_0) и имеющих в ней вертикальную касательную, имеется кривая, касающаяся прямой $y = y_1$ (эта кривая, конечно, может и не проходить через точку (x_1, y_1)). Обозначив абсциссу точки касания через x_2, можем сказать, что в окрестности точки x_2 уравнение $(y_0 - y)(1 + y'^2) = C_1$ имеет неединственное решение, проходящее через точку (x_2, y_1): наряду с участком соответствующей циклоиды, решением будет и функция, график которой совпадает с этой циклоидой слева от x_2 и с отрезком прямой $y = y_1$ справа от x_2. Однако такая составная функция не имеет второй производной в точке $x = x_2$. Поэтому мы не называем её экстремалью. Вместе с тем из рис. 7 ясно, что при любом выборе точки (x_1, y_1) в семействе циклоид, проходящих через точку (x_0, y_0) и имеющих в ней вертикальную касательную, найдётся, и притом только одна, кривая, проходящая через точку (x_1, y_1).

Суммируя сказанное, можем утверждать, что в задаче о брахистохроне при любых граничных условия существует единственная экстремаль, являющаяся частью одного завитка циклоиды. При движении по этой экстремали точка M в начальный момент движется строго вниз (чтобы набрать скорость), а затем, подчиняясь уравнению Эйлера (или в результате конкуренции между стремлением набрать бо́льшую скорость и стремлением приблизиться к точке (x_1, y_1)), движется по циклоиде. При этом может случиться, что нижняя точка графика экстремали будет расположена значительно ниже уровня $y = y_1$.

§ 9.6. Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади.

В предыдущих параграфах мы подробно обосновывали такие наши действия, как замена переменной в дифференциальном уравнении и дифференцирование под знаком интеграла. Начиная с этого параграфа, будем излагать материал более сжато, оставляя обоснование некоторых деталей читателю, в связи с чем не всегда будем явно перечислять все требования на рассматриваемые нами функции F, y, η и т. д., предполагая их «достаточно гладкими».

В соответствии с аналитической формулировкой задачи о поверхности вращения наименьшей площади, приведённой в § 1, нам предстоит найти допустимую функцию $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, принимающую данные граничные значения $y(x_0) = y_0$, $y_(x_1) = y_1$ и доставляющую минимальное значение функционалу

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

Поскольку подынтегральная функция $F(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$ не зависит явно от переменной x, то мы находимся в случае III из параграфа 9.4 и можем понизить порядок в уравнении Эйлера, т. е. записать его в виде $y'F_{y'} - F = C$, где C — некоторая постоянная, которую предстоит определить в процессе решения задачи.

Прямые вычисления дают

$$y'F_{y'} - F = y'y\frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = y\frac{y'^2 - (1+y'^2)}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

или

$$\frac{y(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} = C_1,$$

где C и $C_1 = -C$ — постоянные, которые надлежит найти в процессе решения задачи.
Аналогично тому, как мы поступали в предыдущем параграфе, введём новую независимую переменную u, связанную со старой переменной x формулой $y'(x) = \operatorname{sh} u$.

Прямые вычисления последовательно дают

$$y = C_1\sqrt{1+y'^2} = C_1\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = C_1 \operatorname{ch} u;$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{du} = \frac{1}{y'}\frac{dy}{du} = \frac{C_1 \operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} u} = C_1.$$

Следовательно, $x = C_1 u + C_2$, где C_2 — некоторая постоянная. Таким образом, мы нашли параметрическое представление экстремали в задаче о поверхности вращения наименьшей площади. Исключая параметр u, получим следующую явную формулу для экстремали

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}\frac{x - C_2}{C_1}, \tag{15}$$

в которой постоянные C_1 и C_2, должны быть подобраны так, чтобы кривая проходила через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

Другими словами, постоянные C_1 и C_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} y_0 = C_1 \operatorname{ch} \dfrac{x_0 - C_2}{C_1}, \\ y_1 = C_1 \operatorname{ch} \dfrac{x_1 - C_2}{C_1}. \end{cases} \tag{16}$$

Кривая (15) называется цепной линией потому, что именно такую форму принимает гибкая нерастяжимая нить под действием силы тяжести (см. рис. 8). Поверхность, образованная вращением цепной линии вокруг оси x, называется катеноидом (рис. 9).

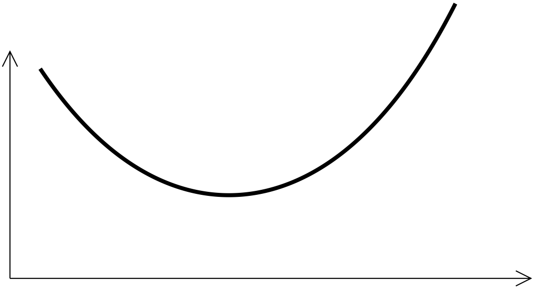

Рис. 8

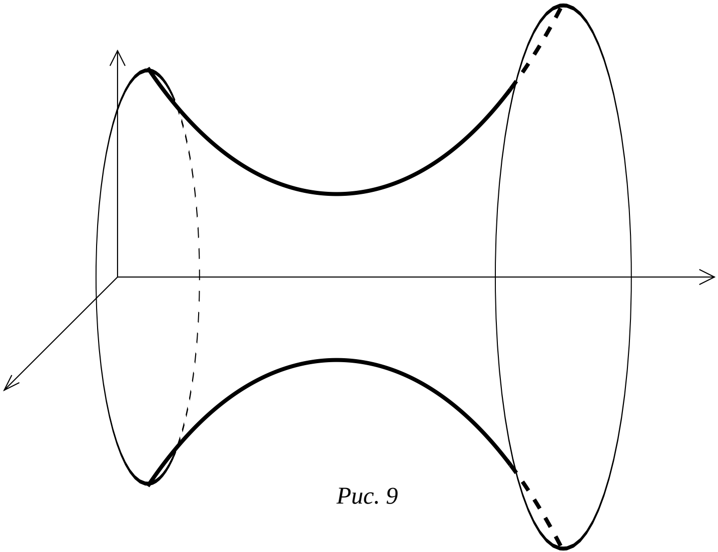

Рис. 9

Можно показать, что в зависимости от положения точек (x_0, y_0) и (x_1, y_1) в задаче о поверхности вращения наименьшей площади возможны следующие случаи:
1) Система (16) имеет единственное решение относительно C_1 и C_2. При этом через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) можно провести единственную кривую (15), которая и является решением задачи.
2) Система (16) имеет два решения относительно неизвестных C_1 и C_2. При этом через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) проходят две кривые (15); одна из них действительно доставляет минимум интегралу площади, а другая нет.
3) Система (16) не имеет решений. При этом через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) не проходит ни одна кривая (15); минимум площади достигается на «поверхности», получаемой вращением трехзвенной ломаной, соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x_0, 0)$; $(x_0, 0)$ и $(x_1, 0)$; $(x_1, 0)$ и (x_1, y_1).

§ 9.7. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями.

В § 9.5 мы решили задачу о брахистохроне при дополнительном предположении, что экстремальная кривая задаётся графиком некоторой функции и, в частности, однозначно проектируется на ось x. Можно, конечно, привести несложные дополнительные аргументы в пользу того, что мы не потеряли при этом никаких решений. Но можно встать и на более общую точку зрения: задать кривую в $\mathbb{R}^3$ параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, заново выразить время прохождения данной кривой, а затем — искать минимум соответствующего функционала, зависящего от трёх неизвестных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Но как при этом будут выглядеть уравнения Эйлера?

В данном параграфе мы выведем необходимые условия локального экстремума для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций.

Пусть требуется найти экстремум функционала

$$I[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))\, dx \quad (17)$$

при граничных условиях

$$y_1(x_0) = y_{01},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{0n},\ y_1(x_1) = y_{11},\ \ldots,\ y_n(x_1) = y_{1n}.$$

Непосредственно из определения локального экстремума следует, что если набор функций $\widetilde{y_1}(x), \ldots, \widetilde{y_n}(x)$ доставляет локальный экстремум функционалу I, то для каждого $j = 1, \ldots, n$ функция $\widetilde{y_j}(x)$ будет доставлять локальный экстремум следующему вспомогательному функционалу

$$I_j[y] := I[\widetilde{y_1}(x), \ldots, \widetilde{y_{j-1}}(x), y(x), \widetilde{y_{j+1}}(x), \ldots, \widetilde{y_n}(x)],$$

а значит, функция $y = \widetilde{y}_j(x)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера для функционала I_j:

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} = 0, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений даёт необходимое условие локального экстремума для функционала (17).

§ 9.8. Вариационная задача с высшими производными.

В данном параграфе мы выведем необходимые условия локального экстремума для следующей вариационной задачи: найти экстремум функционала

$$I[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), y''(x))\, dx \tag{18}$$

при граничных условиях

$$y(x_0) = y_0,\ \ y(x_1) = y_1,\ \ y'(x_0) = y_0',\ \ y'(x_1) = y_1'.$$

Непосредственно из определения локального экстремума следует, что если функция $\widetilde{y}(x)$ доставляет локальный экстремум функционалу I, то для любой финитной функции $\eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ числовая функция числового аргумента $\varepsilon \mapsto I[\widetilde{y}(x) + \varepsilon\eta(x)]$ имеет локальный экстремум при $\varepsilon = 0$, т. е.

$$0 = \left(\frac{d}{d\varepsilon} I(\widetilde{y} + \varepsilon\eta) \right) \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, \widetilde{y} + \varepsilon\eta, \widetilde{y}' + \varepsilon\eta', \widetilde{y}'' + \varepsilon\eta'')\, dx \right) \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (F_y(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}', \widetilde{y}'')\eta + F_{y'}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}', \widetilde{y}'')\eta' + F_{y''}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}', \widetilde{y}'')\eta'')\, dx. \qquad (19)$$

Интегрируя по частям второе и третье слагаемые, стоящие под знаком последнего интеграла, получаем

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\eta'\,dx = F_{y'}\eta\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d}{dx}F_{y'}\,dx;$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}\eta''\,dx = F_{y''}\eta'\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta'\frac{d}{dx}F_{y''}\,dx = -\eta\frac{d}{dx}F_{y''}\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\,dx.$$

В последних формулах внеинтегральные члены зануляются ввиду граничных условий $\eta(x_0) = \eta(x_1) = \eta'(x_0) = \eta'(x_1) = 0$, наложенных на функцию η. Значит, соотношение (19) принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right)\eta\,dx = 0. \tag{20}$$

В силу леммы Лагранжа (см. § 9.3), из формулы (20) получаем

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение даёт необходимое условие локального экстремума для функционала (18).

Аналогично можно показать, что необходимым условием локального экстремума для функционала

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\, dx$$

при граничных условиях $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $y'(x_0) = y'_0$, $y'(x_1) = y'_1$, $\ldots$, $y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$, $y^{(n)}(x_1) = y_1^{(n)}$ является дифференциальное уравнение

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0,$$

называемое уравнением Эйлера — Пуассона.

§ 9.9. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными.

Выведем необходимые условия локального экстремума для следующей вариационной задачи: найти экстремум функционала

$$I[z] = \iint\limits_D F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y))\,dx\,dy \qquad (21)$$

при граничном условии $z|_{\partial D} = z_0$, где D — некоторая область в $\mathbb{R}^2$, а $z_0 : \partial D \to \mathbb{R}$ — некоторая заданная функция.

Как и ранее, непосредственно из определения локального экстремума выводим, что если функция $\widetilde{z}$ доставляет локальный экстремум функционалу I, то для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\eta : D \to \mathbb{R}$ такой, что $\eta|_{\partial D} = 0$, числовая функция числового аргумента $\varepsilon \mapsto I[\widetilde{z} + \varepsilon\eta]$ имеет локальный экстремум при $\varepsilon = 0$, т. е.

$$0 = \left(\frac{d}{d\varepsilon} I(\widetilde{z} + \varepsilon\eta)\right)\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \left(\frac{d}{d\varepsilon} \iint\limits_D F(x, y, \widetilde{z} + \varepsilon\eta, \widetilde{z}_x + \varepsilon\eta_x, \widetilde{z}_y + \varepsilon\eta_y)\, dx\, dy\right)\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \iint\limits_D (F_z\eta + F_{z_x}\eta_x + F_{z_y}\eta_y)\, dx\, dy. \quad (22)$$

Нам предстоит преобразовать интеграл (22) к виду, в котором подынтегральное выражение не содержит производных η_x и η_y функции η. При этом нам придётся пользоваться *формулой Грина* — двумерным аналогом формулы интегрирования по частям — согласно которой

$$\int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy,$$

где P и Q — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, определённые в некоторой окрестности замыкания ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей ∂D, а левый интеграл берётся в положительном направлении (т. е. так, что при обходе область D остаётся слева).

Применяя формулу Грина, видим, что

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x}\eta) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y}\eta)\right] dx\,dy = \int\limits_{\partial D} (-F_{z_y}\eta)\,dx + (F_{z_x}\eta)\,dy = 0,$$

поскольку $\eta|_{\partial D} = 0$. Следовательно,

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}\right)\eta\,dx\,dy + \iint\limits_D (F_{z_x}\eta_x + F_{z_y}\eta_y)\,dx\,dy = 0.$$

Применяя последнюю формулу к (22), получаем, что для функции, доставляющей локальный экстремум функционалу (21), соотношение

$$\iint\limits_D \left(F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right) \eta \, dx \, dy = 0 \tag{23}$$

справедливо при любой функции $\eta : D \to \mathbb{R}$ такой, что $\eta|_{\partial D} = 0$.

Внеся очевидные изменения в доказательство леммы Лагранжа, приведённое в § 9.3, мы убеждаемся в справедливости следующего её двумерного аналога: *Если D — область в $\mathbb{R}^2$, функция $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна и*

$$\iint\limits_D f(x,y)\eta(x,y) \, dx \, dy = 0$$

для каждой C^1-гладкой функции $\eta : D \to \mathbb{R}$ такой, что $\eta|_{\partial D} = 0$, то f есть тождественный нуль.

Поэтому из формулы (23) получаем, что следующее дифференциальное уравнение в частных производных даёт необходимое условие локального экстремума для функционала (21)

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0.$$

Оно называется уравнением Эйлера — Остроградского.

Пример 9.10 (интеграл Дирихле)

Рассмотрим задачу о нахождении минимального значения так называемого *интеграла Дирихле*:

$$I[z] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy$$

при условии $z\big|_{\partial D} = z_0$.

Записывая для него уравнение Эйлера — Остроградского, получим

$$-2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{или} \qquad z_{xx} + z_{yy} = 0.$$

Как известно, последнее соотношение называется уравнением Лапласа, а его решения — гармоническими функциями. Поэтому мы можем сказать, что экстремалями интеграла Дирихле служат гармонические функции.

Это наблюдение служит теоретическим фундаментом для разнообразных численных методов построения гармонических функций по их граничным значениям: вместо решения разностного аналога уравнения Лапласа используют какой-нибудь итерационный метод минимизации интеграла Дирихле.

Основным вариационным принципом в механике является принцип стационарного действия Остроградского — Гамильтона, утверждающий, что среди возможных, т. е. совместимых со связями, движений системы материальных точек в действительности осуществляется движение, дающее экстремум интегралу от лагранжиана $L \equiv T - U$, т. е. функционалу

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt,$$

где T — кинетическая, а U — потенциальная энергия системы.

§ 9.10. Вариационная задача с подвижной границей. Условия трансверсальности.

Обсуждаемая в этом параграфе вариационная задача необычна для нас тем, что сама область интегрирования в ней является переменной. Чтобы лучше понять, о чём идет речь, представьте себя на месте капитана корабля, получившего пробоину. Чем скорее вы посадите корабль на мель, тем меньший ущерб будет нанесён грузу. Вам известно начальное положение корабля, очертания берега и карта течений, так что для каждой возможной траектории вы можете узнать время, необходимое для её прохождения (рис. 10). Но точка, в которой корабль сядет на мель за кратчайшее время, подлежит определению в процессе решения задачи!

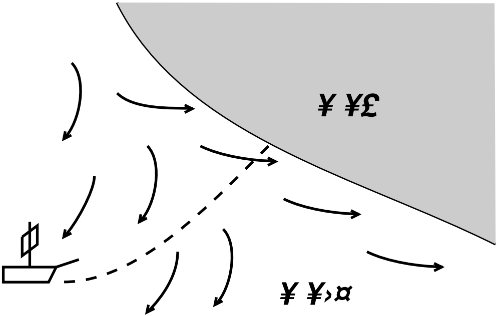

Рис. 10

Простейшая математическая задача такого типа состоит в том, чтобы найти число x_1 и дважды непрерывно дифференцируемую функцию $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, которые минимизируют функционал

$$I[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx \qquad (24)$$

при условиях, что значение функции $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ в точке x_0 (ра́вно как и сама точка x_0) задано: $y(x_0) = y_0$, а её значение в точке x_1 совпадает со значением некоторой заранее заданной функции $\varphi : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, т. е. $y(x_1) = \varphi(x_1)$.

Решение этой задачи базируется на том очевидном соображении, что если число x_1 и функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляют локальный экстремум вышеприведённой задаче «с подвижной границей x_1», то функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет локальный экстремум следующей простейшей вариационной задаче «с фиксированной границей x_1»: для данных чисел x_0, x_1, y_0 и $\varphi(x_1)$ найти C^2-гладкую функцию $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую граничным условиям $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = \varphi(x_1)$ и доставляющую локальный экстремум функционалу (24).

Из этого наблюдения следует, что если $y = y(x)$ доставляет локальный экстремум в задаче «с подвижной границей x_1», то она удовлетворяет соответствующему уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Решив это дифференциальное уравнение второго порядка, мы найдём y как функцию от x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2: $y = y(x, C_1, C_2)$. Подставив это выражение в интеграл (24), мы получим задачу о нахождении локального экстремума для функции трёх переменных

$$I(x_1, C_1, C_2) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, C_1, C_2), y'(x, C_1, C_2))\, dx$$

при ограничениях

$$y(x_0, C_1, C_2) = y_0 \qquad \text{и} \qquad y(x_1, C_1, C_2) = \varphi(x_1).$$

Тем самым мы свели вариационную задачу с подвижной границей к задаче на условный экстремум для функции трёх переменных. Предполагая, что решения $y = y(x, C_1, C_2)$ достаточно регулярным образом зависят от постоянных C_1 и C_2, последняя задача может быть решена с помощью известного вам из курса математического анализа правила множителей Лагранжа, согласно которому при отыскании экстремума функции $y = g(x_1, \ldots, x_n)$, переменные которой подчинены связям

$$\begin{cases} G_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

можно написать для неё функцию Лагранжа

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = g(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j(x_1, \ldots, x_n)$$

и искать её критические точки.

В нашем случае функция Лагранжа выглядит следующим образом:

$$L(x_1, C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, C_1, C_2), y'(x, C_1, C_2))\, dx +$$

$$+\lambda_1[y(x_0, C_1, C_2) - y_0] + \lambda_2[y(x_1, C_1, C_2) - \varphi(x_1)],$$

а её критические точки могут быть найдены из системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = F(x_1, y(x_1), y'(x_1)) + \lambda_2[y'(x_1) - \varphi'(x_1)] = 0, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y(x, y(x), y'(x)) \frac{\partial y}{\partial C_1}(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \frac{\partial y'}{\partial C_1}(x) \right) dx +$$

$$+\lambda_1 \frac{\partial y}{\partial C_1}(x_0) + \lambda_2 \frac{\partial y}{\partial C_1}(x_1) = 0, \qquad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y(x, y(x), y'(x)) \frac{\partial y}{\partial C_2}(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \frac{\partial y'}{\partial C_2}(x) \right) dx +$$

$$+\lambda_1 \frac{\partial y}{\partial C_2}(x_0) + \lambda_2 \frac{\partial y}{\partial C_2}(x_1) = 0, \quad (27)$$

$$y(x_0, C_1, C_2) = 0, \quad (28)$$

$$y(x_1, C_1, C_2) = \varphi(x_1). \quad (29)$$

Из (28) непосредственно вытекает, что

$$\frac{\partial y}{\partial C_1}(x_0) = \frac{\partial y}{\partial C_2}(x_0) = 0. \tag{30}$$

С другой стороны, поскольку

$$\frac{\partial y'}{\partial C_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial C_1}(x),$$

то, интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_y\frac{\partial y}{\partial C_1} + F_{y'}\frac{\partial y'}{\partial C_1}\right)dx =$$

$$= F_{y'}\frac{\partial y}{\partial C_1}\bigg|_{x_0}^{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\frac{\partial y}{\partial C_1}\,dx = F_{y'}(x_1)\frac{\partial y}{\partial C_1}(x_1).$$

Здесь мы учли (30) и то, что экстремаль удовлетворяет уравнению Эйлера.

Тем самым мы преобразовали уравнение (26) к виду

$$[F_{y'}(x_1) - \lambda_2]\frac{\partial y}{\partial C_1}(x_1) = 0. \tag{31}$$

Аналогично уравнение (27) может быть преобразовано к виду

$$[F_{y'}(x_1) - \lambda_2]\frac{\partial y}{\partial C_2}(x_1) = 0. \tag{32}$$

Ни в какой точке x величины $\frac{\partial y}{\partial C_1}(x)$ и $\frac{\partial y}{\partial C_2}(x)$ не могут обращаться в нуль одновременно, поскольку в этом случае решение $y = y(x, C_1, C_2)$ при всех значениях C_1 и C_2 принимало бы в точке x одно и то же значение и не являлось бы общим решением. Поэтому из (31) и (32) получаем $\lambda_2 = -F_{y'}(x_1)$.

С учётом этого формула (25) принимает вид

$$F(x_1) - F_{y'}(x_1)[y'(x_1) - \varphi'(x_1)] = 0.$$

Последнее соотношение обычно называют условием трансверсальности, поскольку оно предписывает, под каким углом кривая-решение $y = y(x)$ должна пересекать кривую-условие $y = \varphi(x)$ в подлежащей определению точке x_1 (отметим, что «трансверсальный» означает «некасательный»).

Результаты данного параграфа могут быть суммированы следующим образом. Чтобы найти экстремали функционала (24) с подвижной границей, нужно найти общее решение $y(x, C_1, C_2)$ соответствующего уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

В качестве постоянных C_1, C_2 и x_1 следует взять решения следующей системы из трёх уравнений:

$$y(x_0, C_1, C_2) = y_0,$$

$$y(x_1, C_1, C_2) = \varphi(x_1),$$

$$[\varphi'(x_1) - y'(x_1, C_1, C_2)]F_{y'}(x_1, y(x_1, C_1, C_2), y'(x_1, C_1, C_2))+ \\ +F(x_1, y(x_1, C_1, C_2), y'(x_1, C_1, C_2)) = 0.$$

§ 9.11. Изопериметрическая задача. Теорема Эйлера. Принцип взаимности.

Метод множителей Лагранжа, известный вам по курсу математического анализа, может быть применён и к другим задачам вариационного исчисления. Одну из них мы и рассмотрим в этом параграфе.

Классическая изопериметрическая задача. Среди всех замкнутых кривых на плоскости, имеющих данную длину, найти ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади. Классическую изопериметрическую задачу ещё называют задачей Дидоны, основательницы Карфагена. По преданию, она была дочерью тирского царя, но после его смерти не поделила престол со своим братом Пигмалионом и была вынуждена покинуть Тир в сопровождении многих жителей. Она высадилась в Африке и построила на земле, купленной у нумидийского короля Гиарба, крепость Бирсу (что значит — шкура). Название объясняется тем, что Дидона купила столько земли, сколько может обнять воловья шкура, но потом изрезала шкуру на мелкие ремешки и таким образом захватила большое пространство. К крепости Дидона пристроила город Карфаген, являющийся в настоящее время пригородом Туниса. Подробнее об этой истории и её влиянии на европейскую культуру можно прочитать, например, в статье «Дидона» энциклопедии Брокгауза и Ефрона.

Будем считать, что на плоскости задана замкнутая кривая γ, не имеющая самопересечений и параметризованная уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, причём направлению возрастания параметра t отвечает такой обход кривой γ, при котором ограничиваемая ею область остаётся слева. Тогда из формулы Грина (см. § 9.9) вытекает, что площадь области D, ограничиваемой кривой γ, выражается формулой

$$\iint\limits_D dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_\gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}[x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\,dt.$$

Длина же кривой γ, очевидно, выражается интегралом

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

Поэтому мы приходим к следующей аналитической постановке классической изопериметрической задачи.

Среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ и $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих помимо граничных условий $x(t_0) = x(t_1)$ и $y(t_0) = y(t_1)$ ещё и условию

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \mathrm{const},$$

найти те, которые доставляют локальный экстремум функционалу

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\, dt.$$

Изопериметрическими называются вариационные задачи, в которых надо найти локальный экстремум функционала при условии, что другой функционал принимает заранее заданное значение. Среди задач этого класса мы выделим, а потом и решим простейшую.

Простейшая изопериметрическая задача. Среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ и

$$J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x))\, dx = \text{const},$$

найти ту, которая доставляет локальный экстремум функционалу

$$I[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Теорема 9.11 (Эйлер)

Если функция $y = y(x)$ *является решением простейшей изопериметрической задачи и вместе с тем не является экстремалью функционала-условия* $J[y]$, *то найдётся вещественное число* λ *такое, что функция* $y = y(x)$ *является экстремалью вспомогательного функционала*

$$\widetilde{I}[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \widetilde{F}(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

где $\widetilde{F} = F + \lambda G$.

Без доказательства.

Отметим тот очевидный факт, что при любом вещественном $\lambda \neq 0$ функционалы

$$I[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \qquad \text{и} \qquad I^*[y] = \lambda \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

достигают экстремальных значений на одних и тех же функциях $y = y(x)$. Это обстоятельство позволяет записать вспомогательный функционал в теореме Эйлера в более симметричном виде: $\widetilde{I} = \lambda_1 I + \lambda_2 J$. Однако к вспомогательному функционалу такого вида приводят две изопериметрические вариационные задачи, называемыми взаимными или двойственными

$$\begin{cases} I \to \text{extr}, \\ J = \text{const} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} J \to \text{extr}, \\ I = \text{const}. \end{cases}$$

Значит, у двойственных задач множество экстремалей одинаково. В этом и состоит принцип взаимности.

Например, двойственной к классической изопериметрической задаче является следующая: среди всех замкнутых кривых на плоскости, ограничивающих фигуры данной площади, найти ту, которая имеет наименьшую длину. В силу принципа взаимности последняя задача имеет ту же совокупность экстремалей, что и классическая изопериметрическая задача, так что решить достаточно какую-нибудь одну из них.

§ 9.12. Решение классической изопериметрической задачи

Теорема Эйлера, доказанная в предыдущем параграфе, дословно переносится как на случай интегралов I и J, зависящих от более чем одной неизвестной функции, так и на случай, когда в задаче участвует несколько функционалов-условий $J_1, \ldots, J_n$. Мы не будем ни доказывать, ни даже формулировать теорему Эйлера во всей общности, но покажем как она может быть использована для решения классической изопериметрической задачи.

Напомним, что классическая изопериметрическая задача состоит в том, чтобы среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ и $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих помимо граничных условий $x(t_0) = x(t_1)$ и $y(t_0) = y(t_1)$ ещё и условию

$$J[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \mathrm{const},$$

найти те, которые доставляют локальный экстремум функционалу

$$I[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\, dt.$$

Подынтегральная функция вспомогательного функционала при этом имеет вид $\widetilde{F} = xy' - x'y + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Уравнение Эйлера представляет собой следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \widetilde{F}_x - \dfrac{d}{dt}\widetilde{F}_{x'} = 0, \\ \widetilde{F}_y - \dfrac{d}{dt}\widetilde{F}_{y'} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y' - \dfrac{d}{dt}\left(-y + \lambda\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) = 0, \\ -x' - \dfrac{d}{dt}\left(x + \lambda\dfrac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) = 0. \end{cases}$$

Левая часть каждого из уравнений последней системы является производной по t от некоторой функции. И, согласно системе, эта производная равняется нулю. Значит, соответствующая функция постоянна. Обозначив одну из этих постоянных через $2C_1$, а другую через $2C_2$, будем иметь

$$\begin{cases} y + C_1 = -\dfrac{\lambda}{2}\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ x + C_2 = -\dfrac{\lambda}{2}\dfrac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{cases}$$

Возводя каждое из уравнений последней системы в квадрат и складывая, получаем $(x+C_2)^2+(y+C_1)^2=\lambda^2/4$. Таким образом, если пара функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$ является решением классической изопериметрической задачи, то при всех значениях параметра t точка $(x(t),y(t))$ лежит на окружности с центром (C_2,C_1) и радиусом $\lambda/2$. Параметр λ найдётся из того условия, что искомая кривая имеет заранее заданную длину: $J[x,y]=\mathrm{const}=\pi\lambda$.

Подводя итог, можем сказать, что среди всех замкнутых кривых на плоскости, имеющих заданную длину, окружность ограничивает фигуру наибольшей площади.

§ 9.13. Вариационная задача на условный экстремум. Правило множителей Лагранжа.

Иногда в вариационных задачах дополнительные ограничения возникают не в форме постоянства некоторого функционала-условия, а в виде некоторого алгебраического, трансцендентного или дифференциального уравнения. Такие задачи называются задачами на условный экстремум. Характерную задачу такого типа мы рассмотрим в настоящем параграфе.

Задача о геодезических на сфере. Среди всех кривых, лежащих на сфере и соединяющих две данные точки, найти ту, которая имеет наименьшую длину.
Её аналитическая переформулировка столь очевидна, что мы приводим её без комментариев.
Среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ и $z : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих для каждого $t \in [t_0, t_1]$ уравнению $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = r^2$ и удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$ и $z(t_1) = z_1$, найти те, которые доставляют минимум функционалу

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Понятие геодезической линии является обобщением понятия прямой. Согласно одному определению линия на криволинейной поверхности называется геодезической, если при движении вдоль этой кривой вектор скорости остаётся параллельным сам себе. Такое определение встречалось вам в курсе дифференциальной геометрии. При этом оказывалось, что геодезические линии описываются некоторым дифференциальным уравнением (уравнением параллельного переноса). Согласно другому подходу геодезической является локально кратчайшая линия (т. е. линия, достаточно малые интервалы которой имеют наименьшую длину среди всех кривых, лежащих на поверхности и соединяющих те же концевые точки). При таком подходе геодезическая описывается уравнением Эйлера для функционала длины. Несколько удивительным является тот факт, что оба определения эквивалентны.
Среди всех вариационных задач на условный экстремум мы выделим простейшую.

Простейшая вариационная задача на условный экстремум. Пусть даны числа x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1 и трижды непрерывно дифференцируемые функции $F = F(x, y, y', z, z')$ и $G = G(x, y, z)$ от пяти и трёх независимых переменных соответственно, причём ни при каких значениях переменных x, y, z величины G, $\partial G/\partial y$ и $\partial G/\partial z$ не обращаются в нуль одновременно. Требуется среди всех трижды непрерывно дифференцируемых функций $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, $z : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $z(x_0) = z_0$, $z(x_1) = z_1$ и $G(x, y(x), z(x)) = 0$ для всех $x \in [x_0, x_1]$ найти ту, которая доставляет локальный экстремум функционалу

$$I[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))\, dx.$$

Решение этой задачи даётся следующей теоремой.

Теорема 9.12 (правило множителей Лагранжа)

Если функции $y = y(x)$ *и* $z = z(x)$ *являются решением простейшей вариационной задачи на условный экстремум, то найдётся непрерывно дифференцируемая функция* $\lambda : (x_0, x_1) \to \mathbb{R}$ *такая, что функции* $y = y(x)$ *и* $z = z(x)$ *являются экстремалями вспомогательного функционала*

$$I^*[y, z, \lambda] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F^*(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x), \lambda(x))\, dx,$$

где $F^* = F + \lambda(x)G$.

Без доказательства.

Выше мы сформулировали правило множителей Лагранжа для случая, когда производные $y' = y'(x)$ и $z' = z'(x)$ решения не входят явно в функцию-ограничение, т. е. когда функция-ограничение имеет вид $G(x, y, z) = 0$. В этом случае говорят о вариационной задаче на условный экстремум с голономной связью $G(x, y, z) = 0$. Если же производные решения явно входят в функцию-ограничение, т. е. если она имеет вид $G(x, y, y', z, z') = 0$, то говорят о вариационной задаче на условный экстремум с неголономной связью.
Для задач с неголономными связями правило множителей Лагранжа сохраняется дословно.

§ 14. Решение задачи о геодезических на сфере.

Правило множителей Лагранжа дословно переносится также на случай интегралов, зависящих от более чем двух неизвестных функций, и на случай, когда в задаче участвует несколько функций-ограничений $G_1, \ldots, G_n$. В последнем случае подынтегральное выражение во вспомогательном функционале имеет вид $F^* = F + \lambda_1(x)G_1 + \ldots + \lambda_1(x)G_n$. Покажем, как правило множителей Лагранжа работает в случае задачи о геодезических на сфере.

В этом случае $F = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, $G = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$.
Поэтому $F^* = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda(t)[x^2 + y^2 + z^2 - R^2]$.
Уравнение Эйлера приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} F^*_x - \dfrac{d}{dt} F^*_{x'} = 0, \\ F^*_y - \dfrac{d}{dt} F^*_{y'} = 0, \\ F^*_z - \dfrac{d}{dt} F^*_{z'} = 0, \\ F^*_\lambda - \dfrac{d}{dt} F^*_{\lambda'} = 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 2\lambda x - \dfrac{d}{dt} \dfrac{2x'}{2\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = 0, \\ 2\lambda y - \dfrac{d}{dt} \dfrac{2y'}{2\sqrt{y'^2 + y'^2 + z'^2}} = 0, \\ 2\lambda z - \dfrac{d}{dt} \dfrac{2z'}{2\sqrt{z'^2 + y'^2 + z'^2}} = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \end{cases}$$

До сих пор t был произвольным параметром на кривой-решении. В дальнейшем же будем считать, что t — натуральный параметр, т. е. что $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = 1$ для всех t. Тогда

$$x'' - 2\lambda x = 0, \tag{33}$$

$$y'' - 2\lambda y = 0, \tag{34}$$

$$z'' - 2\lambda z = 0, \tag{35}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \tag{36}$$

Если бы λ было числом, а не функцией от t, то каждое из уравнений (33)–(35) легко решалось бы. Но λ — неизвестная функция от t, и мы вынуждены действовать чуть более изощрённо. Умножив уравнение (33) на y, а уравнение (34) — на x, получим $x''y - y''x = 0$. Исключив подобным образом λ из каждой пары уравнений системы (33)–(35), получим, что она эквивалентна системе

$$\begin{cases} x''y - y''x = 0, \\ x''z - z''x = 0, \\ y''z - z''y = 0. \end{cases}$$

Прямым дифференцированием убеждаемся, что каждое уравнение последней системы эквивалентно соответствующему уравнению следующей системы:

$$x'y - y'x = C_1, \tag{37}$$

$$x'z - z'x = C_2, \tag{38}$$

$$y'z - z'y = C_3, \tag{39}$$

где C_1, C_2 и C_3 — некоторые постоянные. Умножим уравнение (37) на z, уравнение (38) — на y, уравнение (39) — на x и сложим между собой. Получим $C_1 z - C_2 y + C_3 x = 0$.

Таким образом, всякое решение системы (33)–(35) с необходимостью удовлетворяет системе

$$\begin{cases} C_1 z - C_2 y + C_3 x = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \end{cases}$$

первое уравнение которой задаёт плоскость, проходящую через начало координат, а второе — сферу с центром в начале координат.

Напомним, что пересечение сферы с плоскостью, проходящей через её центр, называется *большой окружностью*. Подводя итог сказанному выше, можем утверждать, что всякая геодезическая на сфере является дугой большой окружности.