Постановки, решения и редукции задач. Метод Фурье III

“Уравнения математической физики”

Скопинцев Артур Маркович

Новосибирск, 2023

Постановка задач для уравнений мат. физики

Все рассмотренные нами уравнения можно отнести к одному из следующих типов:

а) уравнения колебаний (гиперболического типа)

$$\rho(\vec{x}, t) u_{tt} = \widehat{L} u + f(\vec{x}, t); \tag{18.1}$$

б) уравнение теплопроводности (параболического типа)

$$\rho(\vec{x}, t) u_t = \widehat{L} u + f(\vec{x}, t); \tag{18.2}$$

в) стационарное уравнение (эллиптического типа)

$$\widehat{L} u + f(\vec{x}) = 0. \tag{18.3}$$

Здесь обозначено

$$\widehat{L} u = \operatorname{div}(k(\vec{x}) \operatorname{grad} u) - q(\vec{x}) = (\nabla, k(\vec{x}) \nabla u) - q(\vec{x}) \tag{18.4}$$

Мы уже отмечали, что общее решение уравнений в частных производных второго порядка, как правило, содержит две произвольные функции. Из физических соображений обычно требуется найти единственное решение. Поэтому, помимо дифференциальных уравнений, математическая постановка физической задачи должна включать дополнительные условия, которым должна удовлетворять искомая функция на границах области ее определения.

I. Задача Коши: найти функцию $u(\vec{x}, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению (18.1) или (18.2) в любой точке $\vec{x} \in E$ (в этом случае область E совпадает со всем пространством), а также начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(\vec{x}) \tag{18.5}$$

для уравнения (18.1) и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}) \tag{18.6}$$

для уравнения (18.2).

Обычно искомую функцию подчиняют еще некоторым ограничениям общего характера, например требуют, чтобы на бесконечности выполнялось следующее условие:

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} |u(\vec{x}, t)| \leqslant \infty \tag{18.7}$$

или

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} |u(\vec{x}, t)| = 0. \tag{18.8}$$

Как правило, такие условия естественно вытекают из физической постановки задачи. Искомую функцию можно подчинить другим ограничениям, например потребовать, чтобы

$$\int\limits_E |u(\vec{x}, t)|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} < \infty \tag{18.9}$$

или

$$\int\limits_E |\operatorname{grad} u(\vec{x}, t)|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} < \infty,$$

II. Смешанная задача: найти функцию $u(\vec{x},t)$, удовлетворяющую при $t>0$, $\vec{x}\in E$ уравнению (18.1) [или (18.2)], начальным условиям (18.5) [или (18.6)] и граничному условию

$$\left[\alpha(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(\vec{x})u\right]\Big|_S=\mu(\vec{x},t)\big|_S, \tag{18.11}$$
$$[\alpha^2(\vec{x})+\beta^2(\vec{x})]\big|_S\neq 0.$$

Здесь S – граница области E, $\partial u/\partial n$ – производная по внешней нормали к поверхности S. При этом предполагается выполнение условия согласования

$$\left[\alpha(\vec{x})\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\beta(\vec{x})\varphi\right]\Big|_S=\mu(\vec{x},0)\big|_S. \tag{18.12}$$

♦ Граничные условия (18.11) называются граничными условиями первого рода (условиями Дирихле), если $\alpha(\vec{x})|_S\equiv 0$; второго рода (условиями Неймана), если $\beta(\vec{x})|_S\equiv 0$, и третьего рода (условиями Робина) в противном случае.

III. Краевая задача (задача определения стационарного режима): найти функцию $u(\vec{x},t)$, удовлетворяющую в области E уравнению (18.1) [или (18.2)] и граничному условию (18.11) (без начальных условий).

Для уравнений эллиптического типа: найти функцию, удовлетворяющую в области E ($\vec{x}\in E$) уравнению (18.3) и граничному условию

$$\left[\alpha(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(\vec{x})u\right]\Big|_{S_E}=\mu(\vec{x})|_{S_E},\quad [\alpha^2(\vec{x})+\beta^2(\vec{x})]\big|_{S_E}\neq 0. \tag{18.13}$$

♦ Краевая задача при $\alpha(\vec{x})|_S\equiv 0$ называется задачей Дирихле, , а при $\beta(\vec{x})\equiv 0$ – задачей Неймана.

До сих пор мы рассматривали внутренние задачи $\vec{x}\in E$.

◊ Если нужно найти решение $u(\vec{x},t)$, удовлетворяющее условиям (18.11), (18.13), в бесконечной области E^*, внешней по отношению к поверхности S, то требуют выполнения условия регулярности на бесконечности (18.7) или (18.8). Такая задача называется внешней краевой задачей.

Корректность задачи

♦ Задачу, решение которой непрерывно зависит от ее исходных данных, будем называть устойчивой.

Требование устойчивости решения замыкает перечень требований, предъявляемых к математической постановке задачи, корректно определяющей ее решение.

♦ Математическую задачу будем называть поставленной корректно, если она удовлетворяет одновременно следующим трем требованиям: а) решение задачи существует; б) решение задачи единственно; в) решение задачи устойчиво.

Остановимся более подробно на третьем требовании – устойчивости решения. Обозначим через $\mathcal{F}$ класс функций, к которому принадлежат исходные данные задачи, содержащий последовательность $\{\varphi_n(\vec{x})\}$, $n=\overline{1,\infty}$, сходящуюся к функции $\varphi(\vec{x})$ при $n\to\infty$. Соответственно через $\mathcal{U}$ обозначим класс функций – решений задачи u, к которой стремится последовательность решений $\{u_n\}$, $n=\overline{1,\infty}$ при $n\to\infty$. Если при заданном n данные задачи φ_n определяют решение u_n, то для устойчивого решения из сходимости

$$\varphi_n\to\varphi \quad (\varphi_n-\varphi\to 0) \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{18.17}$$

следует сходимость

$$u_n\to u \quad (u_n-u\to 0) \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{18.18}$$

♦ Классом корректности задачи будем называть совокупность классов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$, задающих ее корректное решение. Задача, некорректная в одном классе, может быть корректной в другом.

Формулы (18.17) и (18.18) чисто формально определяют устойчивость решения задачи. Для того чтобы это понятие приобрело определенный смысл, необходимо конкретизировать понятие сходимости в классах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$. Наиболее распространенными в математической физике являются понятия равномерной сходимости и сходимости в среднем (см. разд. «Основные и обобщенные функции» части II). Их естественность характеризуется, например, краевой задачей для уравнения теплопроводности, где роль u играет температура тела Ω, а роль φ – температура на границе тела S. В этом случае малое изменение температуры на границе вызовет малое ее изменение во внутренних точках тела. Таким образом, классом корректности в данном случае является совокупность двух классов $\mathcal{C}(\Omega)$ и $\mathcal{C}(S)$ непрерывных на Ω и S функций.

Пример Адамара некорректной задачи

Если обратиться к задаче Коши для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, то ее решение, если оно существует, всегда корректно. Для уравнений более высоких порядков это утверждение уже не всегда справедливо. Например, решение задачи Коши для уравнений более высоких порядков может быть неустойчивым относительно начальных данных. Обратимся к примеру, приведенному Адамаром. Рассмотрим последовательность задач Коши для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

с начальными условиями для n-й задачи

$$u(x,0) = 0, \quad u_y(x,0) = \varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ при $n \to \infty$ равномерно стремится к функции $\varphi(x) = 0$. Легко убедиться, что n-я задача Коши имеет единственное решение

$$u_n(x,y) = \frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2}.$$

Однако при возрастании n последовательность $\{u_n(x,y)\}$ не стремится к решению $u(x,y) = 0$, соответствующему начальному условию $\varphi(x) = 0$, а, напротив, неограниченно возрастает, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2} \right| = \infty.$$

Таким образом, хотя решение задачи существует и единственно, оно не является устойчивым по отношению к начальным условиям. Следовательно, указанная задача поставлена некорректно.

Классическое и обобщенное решение

Как правило, мы будем предполагать, что во всех рассматриваемых случаях требуется найти решение $u(\vec{x}, t)$, непрерывное вместе со своими частными производными соответствующего порядка (например, для уравнений второго порядка решение непрерывно вместе с частными производными второго порядка по всем переменным). Такие решения называются классическими, а постановка соответствующей краевой задачи в этом классе функций – классической постановкой. Однако в ряде интересных случаев начальные и(или) краевые условия могут задаваться негладкими (разрывными) функциями, и решения задач такого сорта уже не являются гладкими функциями. В частности, именно такие задачи привели к понятию обобщенного решения.

Рассмотрим линейное уравнение в частных производных второго порядка

$$\widehat{L}u = f(\vec{x}), \qquad \widehat{L}u = (\nabla, k(\vec{x})\nabla u) - q(\vec{x})u, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (18.20)$$

где $k(\vec{x})$ и $q(\vec{x})$ — гладкие функции.

♦ Обобщенным решением уравнения (18.20) в области $E \subset \mathbb{R}^n$ называется обобщенная функция $u(\vec{x})$, удовлетворяющая в этой области уравнению (18.20) в обобщенном смысле, т.е.

$$\langle \widehat{L}u(\vec{x}) | \varphi(\vec{x}) \rangle = \langle f(\vec{x}) | \varphi(\vec{x}) \rangle, \qquad (18.21)$$

где $\varphi(\vec{x})$, $\vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$, принадлежит пространству основных функций $\mathcal{D}(E)$ [для неограниченных областей — пространству Шварца $\mathcal{S}(E)$

◊ Всякое классическое решение является и обобщенным.

Фундаментальное решение

♦ Фундаментальным решением (функцией влияния) уравнения в частных производных $\widehat{L}u(\vec{x}) = 0$ или фундаментальным решением линейного дифференциального оператора $\widehat{L}$ (18.20) называется обобщенная функция $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$, которая при каждом фиксированном $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет в $\mathbb{R}^n$ уравнению

$$\widehat{L}_x \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \qquad (18.22)$$

где по определению $\delta(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)\ldots\delta(x_n - y_n)$.

Фундаментальное решение $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$ позволяет найти частное решение неоднородного уравнения (18.20) по формуле

$$u(\vec{x}) = \int\limits_E \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} \qquad (18.23)$$

в предположении, что интеграл, стоящий в правой части, существует. В справедливости соотношения (18.23) можно убедиться, если подействовать на него оператором $\widehat{L}$. Тогда получим

$$\widehat{L}u(\vec{x}) = \int\limits_E \widehat{L}_x \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} = \int\limits_E \delta(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} = f(\vec{x}).$$

◊ Если оператор $\widehat{L}$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то под фундаментальным решением оператора $\widehat{L}$ часто понимается обобщенная функция $\mathcal{E}(\vec{x})$, которая является решением уравнения

$$\widehat{L}\mathcal{E}(\vec{x}) = \delta(\vec{x}). \qquad (18.24)$$

Очевидно, что эти фундаментальные решения связаны соотношением

$$\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{E}(\vec{x} - \vec{y}). \qquad (18.25)$$

$$u(\vec{x}) = f * g = \int g(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y}. \qquad (18.26)$$

Само решение в виде (18.26) иногда называют решением в форме потенциала.

Второе название – функция влияния – становится понятным, если неоднородность $f(\vec{x})$ в уравнении (18.20) представить в виде «суммы» точечных источников $f(\vec{y})\delta(\vec{x} - \vec{y})$, т.е.

$$f(\vec{x}) = \int\limits_E \delta(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y}.$$

В силу соотношений (18.22) и (18.23) каждый точечный источник $f(\vec{y})\delta(\vec{x} - \vec{y})$ влияет на объект, помещенный в точку $\vec{x}$, в соответствии с формулой $f(\vec{y})\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$. Поэтому решение

$$u(\vec{x}) = \int\limits_E \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y}$$

представляет собой суперпозицию этих влияний.

Оператор Лапласа $\Delta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$:

$$\Delta_n \mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}),$$
$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{(\delta_{2n} + n - 2)\sigma_n} e_n(\vec{x} - \vec{y}).$$

Здесь δ_{2n} – дельта-символ Кронекера, σ_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$,

$$\sigma_n = \int\limits_{|\vec{x}|=1} dS = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \qquad \sigma_2 = 2\pi, \qquad \sigma_3 = 4\pi$$

и

$$e_n(\vec{x}) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{|\vec{x}|}, & n = 2, \\ \dfrac{1}{|\vec{x}|^{n-2}}, & n \geqslant 2. \end{cases}$$

Оператор Гельмгольца $\Delta_n + k^2$:

$$(\Delta_n + k^2)\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}),$$
$$\mathcal{E}_n(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \pm\dfrac{i}{4} H_0^{(1,2)}(k|\vec{x} - \vec{y}|), & n = 2; \\ -\dfrac{e^{\pm k|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}, & n = 3. \end{cases}$$

Здесь $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ – функции Ханкеля нулевого индекса, k – в общем случае комплексная величина.

Оператор теплопроводности $\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_n$:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_n\Big)\mathcal{E}_n(\vec{x},\vec{y},t) = \delta(t)\delta(\vec{x}-\vec{y}), \qquad \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n, \quad t\in\mathbb{R}^1,$$

$$\mathcal{E}_n(\vec{x},\vec{y},t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\exp\Big(-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{4a^2t}\Big).$$

Волновой (Даламбера) оператор $\Box_n = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n$:

$$\Box_n\mathcal{E}_n(\vec{x},\vec{y},t) = \delta(t)\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$

$$\mathcal{E}_n(\vec{x},\vec{y},t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\theta(at-|\vec{x}-\vec{y}|), & n=1;\\ \dfrac{\theta(at-|\vec{x}-\vec{y}|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2}}, & n=2;\\ \dfrac{\theta(t)\delta(a^2t^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2)}{2\pi a}, & n\geqslant 3. \end{cases}$$

Фундаментальное решение $\mathcal{E}(\vec{x},\vec{y})$ оператора $\widehat{L}$ не единственно и определяется с точностью до слагаемого $g_0(\vec{x},\vec{y})$, являющегося при каждом фиксированном $\vec{y}$ произвольным решением однородного уравнения

$$\widehat{L}g_0(\vec{x},\vec{y}) = 0.$$

Это позволяет находить фундаментальные решения, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, в том числе решения уравнений (18.22) с краевыми, начальными и смешанными (начально-краевыми) условиями. Фундаментальные решения соответствующих задач называются также функциями Грина этих задач. Для функций Грина будем использовать обозначения $g(\vec{x},\vec{y})$ и $G(\vec{x},\vec{y})$.

Задача Штурма-Лиувилля

Пусть E – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ и S_E – ее граница (гладкая поверхность). Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\widehat{L}v + \lambda\rho(\vec{x})v = 0, \qquad \vec{x} \in E \tag{19.1}$$

с однородными граничными условиями

$$\left(\alpha(\vec{x})\frac{\partial v}{\partial n} + \beta(\vec{x})v\right)\Big|_{S_E} = 0. \tag{19.2}$$

Здесь обозначено

$$\widehat{L}v = \operatorname{div}\big(k(\vec{x})\operatorname{grad} v\big) - q(\vec{x})v = \big(\nabla, k(\vec{x})\nabla v\big) - q(\vec{x})v, \tag{19.3}$$

$\partial v/\partial n$ – производная вдоль внутренней нормали к поверхности S_E и $\rho(\vec{x})$ – заданная знакоположительная функция.

♦ Задача об определении значений параметра λ, при которых существует нетривиальное решение $v_\lambda(\vec{x})$ уравнения (19.1) с краевыми условиями (19.2), называется задачей Штурма–Лиувилля. Значения параметра λ, при которых существует решение задачи Штурма–Лиувилля, называются собственными значениями, а отвечающие им функции $v_\lambda(\vec{x})$ – собственными функциями.

♦ Совокупность всех собственных значений $\{\lambda_n\}$ задачи Штурма–Лиувилля называется спектром, а совокупность собственных значений и отвечающих им собственных функций $[\lambda_n, v_n(\vec{x})]$, $n = \overline{0, \infty}$, – спектральной серией.

Свойство 1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$ и собственных функций $\{v_n(\vec{x})\}$; можно так выбрать нумерацию собственных значений λ_n, что при увеличении номера n они неограниченно возрастают. Каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций.

$\Diamond$ В отличие от задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнений в частных производных собственные значения могут быть вырожденными, т.е. собственному значению может соответствовать несколько линейно независимых собственных функций. Количество таких функций называется кратностью собственного значения, или кратностью вырождения. В дальнейшем мы будем предполагать, что в спектре задачи Штурма–Лиувилля каждое собственное значение присутствует столько раз, какова его кратность.

Свойство 2. При $q(\vec{x}) \geqslant 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (краевое условие Дирихле) собственные значения задачи Штурма–Лиувилля положительны:

$$\lambda_n > 0, \qquad n = \overline{0, \infty}.$$

Свойство 3. Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (19.1), (19.2) удовлетворяют условию ортогональности

$$\langle v_n(\vec{x}) | v_m(\vec{x}) \rangle_\rho = \|v_n(\vec{x})\|^2 \delta_{nm}, \qquad n, m = \overline{0, \infty}, \qquad (19.4)$$

где обозначено

$$\langle v | u \rangle_\rho = \langle v(\vec{x}) | u(\vec{x}) \rangle_\rho = \int\limits_E v(\vec{x}) u(\vec{x}) \rho(\vec{x}) d\vec{x}; \qquad (19.5)$$

$$\|v\| = \|v(\vec{x})\| = \sqrt{\langle v(\vec{x}) | v(\vec{x}) \rangle_\rho}. \qquad (19.6)$$

$\Diamond$ В дальнейшем мы будем предполагать, что собственные функции, соответствующие вырожденному собственному значению, выбраны ортогональными. Последнее всегда можно сделать, например, методом ортогонализации Шмидта

Свойство 4 (теорема разложения В.А. Стеклова). Если функция $f(\vec{x})$ дважды непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\bar{E}$ и удовлетворяет граничному условию (19.2), то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи (19.1) и (19.2)

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n v_n(\vec{x}), \tag{19.7}$$

где

$$C_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \langle f(\vec{x}) | v_n(\vec{x}) \rangle_\rho. \tag{19.8}$$

Ряд (19.7) называется рядом Фурье функции $f(\vec{x})$ по ортогональной системе функций $\{v_n(\vec{x})\}$, $n = \overline{0,\infty}$. Коэффициенты (19.8) называются коэффициентами Фурье.

Следствие. Система собственных функций $\{v_n(\vec{x})\}$ задачи Штурма–Лиувилля удовлетворяет условию полноты

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \tag{19.9}$$

в классе дважды непрерывно дифференцируемых в области $\bar{E}$ функций, для которых выполняется однородное граничное условие (19.2).

Доказательство. Подставим (19.8) в (19.7) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Получим

$$\int\limits_E f(\vec{y}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y})\, d\vec{y} = f(\vec{x}),$$

откуда в соответствии с определением дельта-функции следует (19.9).

Редукция задачи

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\rho(\vec{x})\widehat{P}_t u = \widehat{L}u + f(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} \in E, \tag{20.1}$$

где

$$\widehat{P}_t u = \sum_{j=0}^{2} a_j(t)\frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \tag{20.2}$$

а оператор $\widehat{L}$ определен формулой (19.3). Уравнение (20.2) является уравнением гиперболического типа, если $a_2 \neq 0$, и параболического типа, если $a_2 = 0$, а $a_1 \neq 0$.

В частности, при

$$a_2 = \frac{1}{a^2}, \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{P}_t u = \frac{1}{a^2}u_{tt}$$

уравнение (20.2) переходит в волновое уравнение, а если при этом $\widehat{L} = \Delta$, то в уравнение Даламбера

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} = \Delta u.$$

Если в уравнении (20.2)

$$a_0 = a_2 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{a^2} \quad \text{и} \quad \widehat{P}_t u = \frac{1}{a^2}u_t,$$

то оно переходит в уравнение теплопроводности. В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $\widehat{L} = \Delta$ и уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{1}{a^2}u_t = \Delta u.$$

Поставим для уравнения (20.1) начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(\vec{x}) \tag{20.3}$$

и граничные условия

$$\left(\alpha(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(\vec{x})u\right)\Big|_{S_E} = \mu(\vec{x}, t)\big|_{S_E}, \quad |\alpha(\vec{x})| + |\beta(\vec{x})| \neq 0. \tag{20.4}$$

◊ В случае уравнения теплопроводности начальное условие имеет вид

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}). \tag{20.5}$$

♦ Классическим решением задачи (20.1)–(20.5) называется функция $u(\vec{x}, t)$, определенная и непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно в области E и $t \in [0, T]$ и удовлетворяющая граничному условию (20.4) и начальным условиям (20.3) или (20.5).

Утверждение 20.1. *Пусть функции* $u_1(\vec{x},t)$, $u_2(\vec{x},t)$ *и* $u_3(\vec{x},t)$ *являются классическими решениями следующих задач:*

$$\begin{cases} \rho(\vec{x})\widehat{P}_t u_1 = \widehat{L} u_1, \qquad \vec{x} \in E, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u_1}{\partial n} + \beta u_1\right)\Big|_S = 0, \quad u_1|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(\vec{x}); \end{cases} \tag{20.6}$$

$$\begin{cases} \rho(\vec{x})\widehat{P}_t u_2 = \widehat{L} u_2 + f(\vec{x},t), \qquad \vec{x} \in E, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u_2}{\partial n} + \beta u_2\right)\Big|_S = 0, \quad u_2|_{t=0} = \dfrac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0; \end{cases} \tag{20.7}$$

$$\begin{cases} \rho(\vec{x})\widehat{P}_t u_3 = \widehat{L} u_3, \qquad \vec{x} \in E, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u_3}{\partial n} + \beta u_3\right)\Big|_S = \mu(\vec{x},t)|_S, \quad u_3|_{t=0} = \dfrac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{20.8}$$

тогда решение $u(\vec{x},t)$ *задачи* (20.1), (20.3) *и* (20.4) *имеет вид*

$$u(\vec{x},t) = u_1(\vec{x},t) + u_2(\vec{x},t) + u_3(\vec{x},t). \tag{20.9}$$

Процедура сведения начально-краевой задачи (20.1), (20.3) *и* (20.4) *к более простым задачам* (20.6)–(20.8) *называется редукцией общей задачи.*

◊ Задача (20.6) представляет собой смешанную задачу с однородным граничным и неоднородным начальным условиями для однородного линейного уравнения в частных производных второго порядка; задача (20.7) – смешанную задачу с однородными граничными и начальными условиями для неоднородного линейного уравнения; задача (20.8) – смешанную задачу с неоднородными граничными и однородными начальными условиями для однородного линейного уравнения.

Редукция: неоднородные начальные условия

Рассмотрим задачу (20.6). Ее решение будем искать в виде

$$u_1(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) v_n(\vec{x}), \tag{20.10}$$

где $v_n(\vec{x})$ – решение задачи Штурма–Лиувилля (19.1), (19.2).

Подставим (20.10) в (20.6) и получим

$$\rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\vec{x}) \widehat{P}_t T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{L} T_n(t) v_n(\vec{x}) =$$

$$= \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n) T_n(t) v_n(\vec{x}).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях $v_n(\vec{x})$, для определения функций $T_n(t)$ получим следующую задачу Коши:

$$\widehat{P}_t T_n + \lambda_n T_n = 0, \qquad T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n, \tag{20.11}$$

где φ_n и ψ_n – коэффициенты (19.8) разложения функций $\varphi(\vec{x})$ и $\psi(\vec{x})$ в ряд Фурье по функциям $v_n(\vec{x})$

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n v_n(\vec{x}), \qquad \psi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n v_n(\vec{x}); \tag{20.12}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \langle \varphi(\vec{x}) | v_n(\vec{x}) \rangle_\rho, \quad \psi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \langle \psi(\vec{x}) | v_n(\vec{x}) \rangle_\rho. \tag{20.13}$$

В частности, задача Коши (20.11) для уравнения теплопроводности примет вид

$$\frac{1}{a^2} T_n' + \lambda_n T_n = 0, \qquad T_n(0) = \varphi_n, \tag{20.14}$$

и ее решением являются функции

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t}. \tag{20.15}$$

Аналогично задача Коши для волнового уравнения

$$\frac{1}{a^2} T_n'' + \lambda_n T_n = 0, \qquad T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \tag{20.16}$$

будет иметь решение

$$T_n(t) = \varphi_n \cos(a\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin(a\sqrt{\lambda_n} t). \tag{20.17}$$

Таким образом, решение смешанной задачи (20.6) для уравнения теплопроводности имеет вид

$$u_1(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} v_n(\vec{x}), \tag{20.18}$$

а для волнового уравнения

$$u_1(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\varphi_n \cos(a\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin(a\sqrt{\lambda_n} t)\Big] v_n(\vec{x}). \tag{20.19}$$

♦ Функция $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ называется функцией Грина, или фундаментальным решением смешанной задачи, для уравнения теплопроводности, если для произвольного фиксированного $\vec{y} \in E$ справедливо

$$\rho(\vec{x}) g_t(\vec{x}, \vec{y}, t) = \widehat{L}_x g(\vec{x}, \vec{y}, t), \quad \vec{x} \in E; \tag{20.20}$$

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial g(\vec{x}, \vec{y}, t)}{\partial n_x} + \beta(\vec{x}) g(\vec{x}, \vec{y}, t)\right\}\Bigg|_{S_E} = 0; \tag{20.21}$$

$$g|_{t=0} = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad |\alpha(\vec{x})| + |\beta(\vec{x})| \neq 0. \tag{20.22}$$

Если область E совпадает со всем пространством, то функция $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$, удовлетворяющая условиям (20.20), (20.22), называется функцией Грина задачи Коши для уравнения (20.6) и обозначается через $G(\vec{x}, \vec{y}, t)$.

Подставив (20.22) в (20.13), из (20.18) получим

Утверждение 20.2. *Функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности* (20.1) $\widehat{P}_t = a^{-2}\partial_t$ *можно представить в виде*

$$g(\vec{x}, \vec{y}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) e^{-\lambda_n a^2 t} v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}). \tag{20.23}$$

Утверждение 20.3. *Пусть $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ – функция Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Тогда решение задачи* (20.6) *имеет вид*

$$u_1(\vec{x}, t) = \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t) \varphi(\vec{y}) d\vec{y}. \tag{20.24}$$

Действительно, подставив коэффициенты Фурье (20.13) в соотношение (20.18), с учетом явного вида функции Грина (20.23) приходим к (20.24).

♦ Функции $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ и $\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t)$ называются функциями Грина смешанной задачи для волнового уравнения, если для произвольного фиксированного $\vec{y} \in E$ справедливы условия

$$\rho(\vec{x}) g_{tt}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \widehat{L}_x g(\vec{x}, \vec{y}, t), \quad \vec{x} \in E; \tag{20.25}$$

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial g(\vec{x}, \vec{y}, t)}{\partial n_x} + \beta(\vec{x}) g(\vec{x}, \vec{y}, t)\right\}\Big|_{S_E} = 0; \tag{20.26}$$

$$g|_{t=0} = 0, \qquad g_t|_{t=0} = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{20.27}$$

$$\rho(\vec{x}) \mathfrak{g}_{tt}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \widehat{L}_x \mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t), \quad \vec{x} \in E; \tag{20.28}$$

$$\left[\alpha(\vec{x}) \frac{\partial \mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t)}{\partial n_x} + \beta(\vec{x}) \mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t)\right\}\Big|_{S_E} = 0; \tag{20.29}$$

$$\mathfrak{g}|_{t=0} = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \qquad \mathfrak{g}_t|_{t=0} = 0. \tag{20.30}$$

Когда область E совпадает со всем пространством, функции $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ и $\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t)$, отвечающие условиям (20.27)–(20.30), называются функциями Грина задачи Коши для волнового уравнения (20.1) $\widehat{P}_t = a^{-2}\partial_t^2$ и обозначаются $G(\vec{x}, \vec{y}, t)$ и $\mathfrak{G}(\vec{x}, \vec{y}, t)$.

Утверждение 20.4. *Функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения $\widehat{P}_t = a^{-2}\partial_t^2$ (20.1) можно представить в виде*

$$g(\vec{x}, \vec{y}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) \sin(a\sqrt{\lambda_n} t) v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}); \tag{20.31}$$

$$\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \rho(\vec{y}) \cos(a\sqrt{\lambda_n} t) v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}). \tag{20.32}$$

Подставив коэффициенты Фурье (20.13) в соотношение (20.19), с учетом явного вида функций Грина (20.31) и (20.32) убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 20.5. *Пусть $g(\vec{x}, \vec{y}, t)$ и $\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t)$ – функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения. Тогда решение задачи (20.6) можно представить в виде*

$$u_1(\vec{x}, t) = \int_E g(\vec{x}, \vec{y}, t) \psi(\vec{y}) d\vec{y} + \int_E \mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t) \varphi(\vec{y}) d\vec{y}. \tag{20.33}$$

♢ Если $\widehat{P}_t = a^{-2}\partial_t^2$ – волновой оператор, то из (20.31) и (20.32) следует

$$\mathfrak{g}(\vec{x}, \vec{y}, t) = g_t(\vec{x}, \vec{y}, t). \tag{20.34}$$

Редукция: неоднородное уравнение

Рассмотрим теперь задачу (20.7). Ее решение будем искать в виде

$$u_2(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(t) v_n(\vec{x}). \tag{20.35}$$

Подставим (20.35) в (20.7):

$$\rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\vec{x}) \widehat{P}_t T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{L} T_n(t) v_n(\vec{x}) + f(\vec{x}, t) =$$

$$= \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n) T_n(t) v_n(\vec{x}) + \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) v_n(\vec{x}).$$

Здесь

$$f_n(t) = \frac{1}{\|v_n(\vec{x})\|^2} \left\langle \frac{f(\vec{x}, t)}{\rho(\vec{x})} \middle| v_n(\vec{x}) \right\rangle_{\rho}. \tag{20.36}$$

Приравняв коэффициенты рядов Фурье, стоящих в левой и правой частях, получим следующее уравнение для $\Theta_n(t)$:

$$\widehat{P}_t \Theta_n + \lambda_n \Theta_n = f_n(t), \qquad \Theta_n(0) = \Theta_n'(0) = 0. \tag{20.37}$$

Решение уравнения (20.37) можно представить в виде

$$\Theta_n(t) = \int_0^t \mathcal{K}_n(t, \tau) f_n(\tau) d\tau, \tag{20.38}$$

где $\mathcal{K}_n(t, \tau)$ – функция Грина задачи Коши (20.37)

В случае уравнения теплопроводности получим

$$\Theta_n(t) = e^{-a^2\lambda_n t}\int\limits_0^t e^{a^2\lambda_n\tau} f_n(\tau)d\tau \qquad (20.39)$$

и

$$\mathcal{K}_n(t,\tau) = e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}. \qquad (20.40)$$

В случае волнового уравнения для определения функции $\Theta_n(t)$ получим следующее уравнение:

$$\Theta_n'' + \lambda_n a^2\Theta_n = f_n(t) \qquad (20.41)$$

с начальными условиями (20.37).

Решение уравнения (20.41) будем искать методом Лагранжа:

$$\Theta_n(t) = p_n(t)\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + q_n(t)\sin(a\sqrt{\lambda_n}t),$$

где функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$ определяются системой уравнений

$$\begin{cases} p_n'(t)\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + q_n'(t)\sin(a\sqrt{\lambda_n}t) = 0, \\ p_n'(t)(-a\sqrt{\lambda_n})\sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + q_n'(t)a\sqrt{\lambda_n}\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) = f_n(t). \end{cases}$$

В результате получим

$$p_n(t) = -\frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin(a\sqrt{\lambda_n}\tau)d\tau + p_n^0,$$

$$q_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos(a\sqrt{\lambda_n}\tau)d\tau + q_n^0.$$

Из начальных условий (20.37) найдем $q_n^0 = p_n^0 = 0$. Тогда

$$\Theta_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\big[-\sin(a\sqrt{\lambda_n}\tau)\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) +$$

$$+\cos(a\sqrt{\lambda_n}\tau)\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)\big]d\tau = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin[a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)]d\tau.$$

Таким образом, для волнового уравнения

$$\mathcal{K}_n(t,\tau) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin[a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)]. \qquad (20.42)$$

♦ Обобщенная функция $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$ называется фундаментальным решением, или функцией Грина, смешанной задачи, если она при фиксированных $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, $\tau\in\mathbb{R}$, удовлетворяет уравнению

$$\rho(\vec{x})\widehat{P}_t\mathfrak{E}=\widehat{L}_x\mathfrak{E}+\delta(\vec{x}-\vec{y})\delta(t-\tau) \qquad (20.43)$$

и однородному начально-краевому условию

$$\Big[\alpha(\vec{x})\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial n}+\beta(\vec{x})\mathfrak{E}\Big]\Big|_{S_E}=0, \quad \mathfrak{E}|_{t=0}=\mathfrak{E}_t|_{t=0}=0, \quad (20.44)$$
$$\{\alpha^2(\vec{x})+\beta^2(\vec{x})\}\big|_{S_E}\neq 0.$$

Утверждение 20.6. *Фундаментальное решение $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$ смешанной задачи* (20.1) *можно представить в виде*

$$\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{K}_n(t,\tau)v_n(\vec{x})v_n(\vec{y}). \qquad (20.45)$$

Действительно, положив в (20.36)

$$f(\vec{x},t)=\delta(\vec{x}-\vec{y})\delta(t-\tau),$$

из (20.35) получим (20.45).

Подставив коэффициенты Фурье (20.36) в (20.35) и поменяв местами суммирование и интегрирование, с учетом явного вида функции $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$ приходим к следующему утверждению.

Утверждение 20.7. *Пусть $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$ – фундаментальное решение смешанной задачи* (20.43) *и* (20.44). *Тогда решение задачи* (20.7) *можно представить в виде*

$$u_2(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)f(\vec{y},\tau)d\vec{y}. \qquad (20.46)$$

Утверждение 20.8. *Функции Грина* $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$ (20.43) *и* $g(\vec{x},\vec{y},t)$ (20.25), (20.20) *связаны соотношением*

$$\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)=\frac{1}{a_2(\tau)}g(\vec{x},\vec{y},t-\tau). \qquad (20.47)$$

В случае уравнения теплопроводности в соотношении (20.47) *коэфициент* $a_2(\tau)$ *необходимо заменить на* $a_1(\tau)$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$u_2(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E\frac{1}{a_2(\tau)}g(\vec{x},\vec{y},t-\tau)f(\vec{y},\tau)d\vec{y}, \qquad (20.48)$$

где функция $g(\vec{x},\vec{y},t)$ – решение задачи (20.25). Тогда

$$\widehat{L}u_2(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E\frac{1}{a_2(\tau)}\widehat{L}_x g(\vec{x},\vec{y},t-\tau)f(\vec{y},\tau)d\vec{y}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\widehat{P}_t u_2(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E\frac{1}{a_2(\tau)}\widehat{P}_t g(\vec{x},\vec{y},t-\tau)f(\vec{y},\tau)d\vec{y}+\\ +a_2(t)\int\limits_E\frac{1}{a_2(t)}g_t(\vec{x},\vec{y},0)f(\vec{y},t)d\vec{y}+\\ +a_2(t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_E\frac{1}{a_2(t)}\hat{g}(\vec{x},\vec{y},0)f(\vec{y},t)d\vec{y}+\\ +a_1(t)\int\limits_E\frac{1}{a_2(t)}g(\vec{x},\vec{y},0)f(\vec{y},t)d\vec{y}.\end{aligned}$$

С учетом определения (20.27) получим

$$\widehat{P}_t u_2(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E\frac{1}{a_2(\tau)}\widehat{P}_t g(\vec{x},\vec{y},t-\tau)f(\vec{y},\tau)d\vec{y}+f(\vec{x},t).$$

Отсюда в силу произвольности функции $f(\vec{y},\tau)$ следует, что представление (20.46) эквивалентно представлению (20.48) и соотношение (20.47) справедливо. Для уравнения теплопроводности доказательство аналогично.

Редукция: неоднородные граничные условия

Рассмотрим, наконец, задачу (20.8). Покажем, что ее можно свести к рассмотренным ранее. Действительно, пусть $v(\vec{x},t)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\left[\alpha(\vec{x})\frac{\partial v}{\partial n}+\beta(\vec{x})v\right]\Big|_{S_E}=\mu(\vec{x},t)\big|_{S_E}. \tag{20.49}$$

Решение уравнения (20.8) будем искать в виде

$$u_3(\vec{x},t)=v(\vec{x},t)+w(\vec{x},t). \tag{20.50}$$

Тогда для определения функции $w(\vec{x},t)$ имеем задачу:

$$\rho(\vec{x})\widehat{P}_t w=\widehat{L}w+\tilde{f}(\vec{x},t), \tag{20.51}$$

$$\left(\alpha(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial n}+\beta(\vec{x})w\right)\Big|_{S_E}=0,$$

$$w|_{t=0}=-v|_{t=0},\quad w_t|_{t=0}=-v_t|_{t=0},$$

где

$$\tilde{f}(\vec{x},t)=\widehat{L}v(\vec{x},t)-\rho(\vec{x})\widehat{P}_t v(\vec{x},t),$$

т.е. для функции $w(\vec{x},t)$ получим задачи, рассмотренные выше. Тогда ее можно записать в виде

$$w(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E \mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)\tilde{f}(\vec{y},\tau)d\vec{y}-$$

$$-\int\limits_E \mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)v(\vec{y},0)d\vec{y}-\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)v_t(\vec{y},0)d\vec{y}. \tag{20.52}$$

Соответственно для уравнения теплопроводности вместо (20.52) получим

$$w(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E \mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)\tilde{f}(\vec{y},\tau)d\vec{y}-\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)v(\vec{y},0)d\vec{y}=$$

$$=\int\limits_0^t\frac{d\tau}{a_1(\tau)}\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t-\tau)\tilde{f}(\vec{y},\tau)d\vec{y}-\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)v(\vec{y},0)d\vec{y}.$$

Для оператора $\widehat{P}_t=a^{-2}$ формулу (20.52) можно записать с помощью одной функции Грина $g(\vec{x},\vec{y},t)$:

$$w(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t-\tau)\tilde{f}(\vec{y},\tau)d\vec{y}-$$

$$-\int\limits_E g_t(\vec{x},\vec{y},t)v(\vec{y},0)d\vec{y}-\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)v_t(\vec{y},0)d\vec{y}.$$

Стационарное уравнение

Рассмотрим следующую задачу:

$$\widehat{L}u = f(\vec{x}); \tag{21.1}$$

$$\left(\alpha(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(\vec{x})u\right)\Big|_{S_E} = \varphi(\vec{x})\big|_{S_E}. \tag{21.2}$$

Решение задачи (21.1), (21.2) будем искать в виде

$$u(\vec{x}) = w(\vec{x}) + v(\vec{x}), \tag{21.3}$$

где $v(\vec{x})$ – произвольная гладкая вместе со своими производными второго порядка функция, удовлетворяющая условию

$$\left[\alpha(\vec{x})\frac{\partial v}{\partial n} + \beta(\vec{x})v\right]\Big|_{S_E} = \varphi(\vec{x})\big|_{S_E},$$

например, $v(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$, если функция $\varphi(\vec{x})$ удовлетворяет перечисленным условиям. Тогда для функции $w(\vec{x})$ получим уравнение

$$\widehat{L}w = \bar{f}(\vec{x}) \tag{21.4}$$

с однородными граничными условиями

$$\left[\alpha(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial n} + \beta(\vec{x})w\right]\Big|_{S_E} = 0. \tag{21.5}$$

Здесь обозначено

$$\bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \widehat{L}v(\vec{x}).$$

Решение уравнения (21.4) будем искать в виде

$$w(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n v_n(\vec{x}), \tag{21.6}$$

где $v_n(\vec{x})$ – собственные функции оператора $\widehat{L}$ в области E. Подставим (21.6) в уравнение (21.4):

$$\widehat{L} \sum_{n=0}^{\infty} w_n v_n(\vec{x}) = \bar{f}(\vec{x});$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n)\rho(\vec{x}) w_n v_n(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(\vec{x}) \alpha_n v_n(\vec{x}), \tag{21.7}$$

где

$$\alpha_n = -\frac{1}{\|v_n(x)\|^2} \left\langle \frac{\bar{f}(\vec{x})}{\rho(\vec{x})} \middle| v_n(\vec{x}) \right\rangle_{\rho}, \tag{21.8}$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых функциях $v_n(\vec{x})$.

Получим

$$\lambda_n w_n = -\alpha_n, \qquad n = \overline{0, \infty},$$

где λ_n – собственные числа задачи (19.1), (19.2). Предположим, что $\lambda_n \neq 0$, и, следовательно, функция $w(\vec{x})$ есть

$$w(\vec{x}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n} v_n(\vec{x}) \tag{21.9}$$

и решение исходной задачи имеет вид

$$u(\vec{x}) = v(\vec{x}) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n} v_n(\vec{x}). \tag{21.10}$$

♦ Обобщенная функция $g(\vec{x},\vec{y})$ называется функцией источника, или функцией Грина внутренней краевой задачи, если она при фиксированных $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению

$$\widehat{L}_x g(\vec{x},\vec{y}) = \delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (21.11)$$

и однородному граничному условию

$$\Big\{\alpha(\vec{x})\frac{\partial g(\vec{x},\vec{y})}{\partial n_x} + \beta(\vec{x})g(\vec{x},\vec{y})\Big\}\Big|_{S_E} = 0, \qquad (21.12)$$

$$\{\alpha^2(\vec{x}) + \beta^2(\vec{x})\}\big|_{S_E} \neq 0,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, нормальный к поверхности S и внутренний по отношению к области E (внутренняя нормаль). В случае граничных условий первого $(\alpha(\vec{x})|_S \equiv 0)$, второго $(\beta(\vec{x})|_S \equiv 0)$ и третьего рода функция $g(\vec{x},\vec{y})$ называется функцией Грина (функцией источника) первой, второй и третьей краевой задачи соответственно.

Утверждение 21.1. *Функцию источника, или функцию Грина, $g(\vec{x},\vec{y})$ внутренней краевой задачи* (21.11), (21.12) *можно представить в виде*

$$g(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\rho(\vec{y})}{\lambda_n\|v_n(\vec{x})\|^2}v_n(\vec{x})v_n(\vec{y}). \qquad (21.13)$$

Действительно, подставив $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x}-\vec{y})$ в (21.8), из (21.9) получим (21.13).

Утверждение 21.2. *Пусть $g(\vec{x},\vec{y})$ – функция Грина внутренней краевой задачи* (21.11), (21.12). *Тогда решение однородной задачи* (21.1), (21.2) $[\varphi(\vec{x}) = 0]$ *можно представить в виде*

$$u(\vec{x}) = \int\limits_E g(\vec{x},\vec{y})\bar{f}(\vec{y})d\vec{y}. \qquad (21.14)$$

Действительно, подставив коэффициенты α_n (21.8) в (21.9) и поменяв местами суммирование и интегрирование, с учетом (21.13) и $\varphi(\vec{x}) = 0$ убеждаемся в справедливости утверждения.

◊ Из явного вида функции Грина (21.13) следует, что она определена, если соответствующая задача Штурма–Лиувилля не имеет тривиальных собственных значений. В противном случае можно ввести обобщенные функции Грина, аналогичные тем, которые возникали в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. разд. «Краевая задача для линейных дифференциальных уравнений с параметром» части II). Например, для второй краевой задачи $(\beta(\vec{x})\big|_{S_E} = 0)$

$$(\nabla, k(\vec{x})\nabla u) = f(\vec{x}), \qquad \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n}\Big|_{S_E} = 0 \qquad (21.15)$$

существует обобщенная функция Грина, удовлетворяющая вместо (21.11) условию

$$\Big\{\frac{\partial g(\vec{x},\vec{y})}{\partial n_x}\Big\}\Big|_{S_E} = -\frac{1}{S_0}, \qquad (21.16)$$

где S_0 – площадь поверхности S_E. Такая функция Грина называется функцией Неймана (см. также [55]). Подробно такая задача будет рассмотрена ниже.