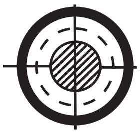
1. Квазистационарные явления

Урок 25

Сохранение магнитного потока

1.1. (Задача 6.23) Внутри сверхпроводящего бесконечного цилиндра с сечением S_1 расположены аксиально симметрично бесконечный соленоид с сечением S_2 и вокруг него одиночный измерительный виток с площадью S_3. В соленоиде создается магнитное поле H. Найти изменение магнитного потока через контур витка.



Решение В момент времени $t = 0$ магнитный поток $\Phi = 0$. После включения магнитного поля H в соленоиде по сверхпроводящему внешнему цилиндру потечет такой ток, который обеспечит равенство нулю полного потока через сверхпроводящий цилиндр. Этот ток создаст внутри цилиндра дополнительное поле H_1. Из условия равенства нулю полного тока имеем

$$HS_2 - H_1 (S_1 - S_2) = 0,$$

откуда

$$H_1 = H \frac{S_2}{S_1 - S_2}.$$

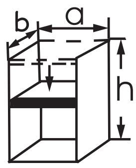
Изменение потока через виток с площадью S_3

$$\Delta\Phi_3 = H_1 \cdot (S_1 - S_3)$$

откуда

$$\Delta\Phi_3 = \frac{S_2 \cdot (S_1 - S_3)}{S_1 - S_2} H.$$

1.2.



(Задача 6.24) Две параллельные шины замкнуты на нижнем конце неподвижной перемычкой с размерами $a \times b$, а сверху – «поршнем» веса P и размерами $a \times b$. Все материалы сверхпроводящие, поле между шинами H_0. Трением пренебречь. Найти зависимость $h(t)$, считая поле внутри контура однородным ($h \gg a, b$) и пренебрегая обратным полем.

Решение Поток через прямоугольное сечение $h \times a$ сохраняется, поэтому

$$\Phi_0 = h_0 a H_0 = \Phi = haH,$$

откуда получаем в любой момент времени

$$H = \frac{H_0 h_0}{h}.$$

Давление со стороны замкнутого пространства (вверх)

$$p = \frac{H^2}{8\pi} = \frac{H_0^2 h_0^2}{8\pi h^2}.$$

Тогда уравнение движения поршня весом P

$$m\ddot{h} = -P + \frac{H^2}{8\pi}ab = -P + \frac{H_0^2 h_0^2}{h^2 8\pi}ab$$

или, учитывая, что $P = mg$ и вводя обозначение $A = \frac{H_0^2 h_0^2}{8\pi m}ab$, получаем

$$\ddot{h} = -g + \frac{A}{h^2}.$$

Введя переменную $F(h) = \dot{h}$, получим уравнение

$$F\frac{dF}{dh} = -g + \frac{A}{h^2}.$$

$$\frac{dF^2}{2} = -gdh + \frac{A}{h^2}dh,$$

откуда

$$F^2 = -2gh - 2\frac{A}{h} + C_1.$$

При $h = h_0$ (в начальный момент времени) $F = 0$, откуда получаем

$$C_1 = 2gh_0 + 2\frac{A}{h_0}.$$

Уравнение $F(h) = 0$ имеет еще одно решение, т. е.

$$F^2 = 0 = 2g(h_0 - h) - 2A\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0}\right),$$

откуда

$$h_1 = \frac{A}{gh_0} = h_0\frac{H_0^2 ab}{8\pi mg}.$$

таким образом поршень будет осуществлять колебания между h_0 и $h_0 \frac{H_0^2 ab}{8\pi mg}$. Представляет интерес найти частоту малых колебаний. Предположим, что отклонение δh от точки равновесия мало. Определим сначала точку равновесия. Эта точка определяется условием равенства нулю силы в уравнении движения, т. е.

$$-g + \frac{A}{h_1^2} = 0, \text{ откуда } h_1^2 = \frac{g}{A}.$$

Тогда уравнение движения можно записать относительно переменной $\delta h = h - h_1$ в виде

$$\ddot{\delta h} = -g + \frac{A}{h^2} = -g\left(1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right),$$

где $x = \delta h/h_1$. Окончательно, уравнение движения можно приближенно (при $x \ll 1$) записать в виде

$$\ddot{x} = -\frac{g}{h_1}(1 - 1 + 2x) = -\frac{2g}{h_1}x = -\omega^2 x,$$

откуда, частота малых колебаний $\omega = \sqrt{\frac{g}{2h_1}}$.

1.3. (Задача 6.25) Сверхпроводящее плоское кольцо с самоиндукцией L, в котором течет ток J, вдвигается полностью в однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Найти ток J', который будет после этого протекать по кольцу. Площадь осевого сечения кольца – S. Нормаль к плоскости кольца составляет с направлением $\mathbf{H}_0$ угол θ.

Решение Поток через кольцо в начальный момент времени равен

$$\Phi_0 = \frac{LJ}{c}.$$

Дополнительный поток, который появился в связи с появлением внешнего поля

$$\Delta\Phi = H_0 \cos\theta \cdot S.$$

Поскольку поток через сверхпроводящее кольцо не должен изменяться, в кольце пойдет другой ток J'

$$\Phi_0 = \frac{LJ}{c} = \frac{LJ'}{c} + H_0 \cos\theta \cdot S,$$

откуда

$$\frac{LJ'}{c} = \frac{LJ}{c} - \frac{H_0 S \cos\theta \cdot c}{L}$$

или

$$J' = J - \frac{cH_0 S}{L}\cos\theta.$$

1.4. (Задача 6.26) Проводящее кольцо с самоиндукцией L находится в нормальном состоянии во внешнем магнитном поле (магнитный поток через контур кольца равен Φ_0). Затем температура понижается и кольцо переводится в сверхпроводящее состояние. Какой ток будет течь по кольцу, если теперь выключить внешнее магнитное поле?

Решение

$$\Phi_0 = \frac{LI}{c}$$

$$I = \frac{c\Phi_0}{L}.$$

1.5. (Задача 6.27) В постоянном однородном магнитном поле с индукцией B находится круглое, недеформируемое, достаточно малого сечения сверхпроводящее кольцо радиуса R. В начальный момент плоскость кольца параллельна направлению магнитного поля, а ток в кольце отсутствует. Определить силу тока в кольце сразу после того, как оно было повернуто так, что плоскость кольца стала перпендикулярна к линиям магнитного поля. Найти затраченную работу.

Решение Если индуктивность кольца L, то изменение магнитного потока от внешнего поля после поворота

$$\Delta\Phi = B\pi R^2.$$

Это изменение компенсируется током I, которое возникнет в кольце

$$\Delta\Phi = \frac{LI}{c},$$

откуда

$$I = \frac{cB\pi R^2}{L}.$$

работа, которая совершается при этом

$$A = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{B^2\pi^2R^4}{2L}.$$

1.6. (Задача 6.29) Сверхпроводящий короткозамкнутый соленоид с током J, имеющий N плотно намотанных витков, длину ℓ, радиус витка a ($\ell \gg a$), растягивают в длину в два раза. Какую работу нужно при этом затратить?

Решение Магнитное поле внутри соленоида в начальный момент времени (по теореме Стокса)

$$H_0\ell = \frac{4\pi}{c}NI,$$

а поток через поперечное сечение соленоида

$$\Phi_0 = H_0 S.$$

После того, как соленоид растянули, поле внутри определяется из соотношения

$$2H_1\ell = \frac{4\pi N I_1}{c},$$

а поток не должен измениться - соленоид сверхпроводящий и короткозамкнутый.

$$\Phi_1 = H_1 S = H_0 S.$$

Откуда получаем $H_1 = H_0$, $I_1 = 2I$. Работа по растяжению, следовательно

$$A = \ell S \cdot \frac{H^2}{8\pi} = \ell S \frac{16\pi^2 N^2 I^2}{\ell^2 c^2 8\pi} = \frac{2N^2 I^2 \pi^2 a^2}{\ell c^2}.$$

1.7. (Задача 6.33) Медный тонкостенный цилиндр массы m и длины ℓ внесли в однородное магнитное поле параллельное оси цилиндра, после чего за очень короткий интервал времени τ поле быстро увеличили до значения H_1 и выключили. Известно, что цилиндр сжался без разрушения («магнитное обжатие»). Считая цилиндр длинным, а его форму после обжатия – цилиндрической, найти поле внутри цилиндра сразу после «обжатия» ($H_1 = 5$ кГс, $H_0 = 1$ кГс, $\tau = 10^{-6}$ с, $m/\ell = 1$ г/см. Силами упругой деформации пренебречь).

Решение Предположим, что за время t, $0 \le t \le \tau$, когда поле снаружи стало H_1, радиус цилиндра не успел измениться. Магнитное поле внутри определяется из закона сохранения магнитного потока через поперечное сечение цилиндра (приближение «сверхпроводимости» тонкого медного цилиндра)

$$\Phi = H_0 \pi r_0^2 = H(r)\pi r^2,$$

где r– текущий радиус сжимающегося цилиндра. Тогда поле внутри цилиндра

$$H(r) = H_0 \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Уравнение движения элемента цилиндра длиной $r\delta\varphi$ вдоль радиуса под действием разности давлений магнитных полей описывается уравнением

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} m\ddot{r} = -\frac{r\delta\varphi\ell}{8\pi}\left[H_1^2 - H_0^2\frac{r_0^4}{r^4}\right],$$

или, упрощая, получим
$$\ddot{r} = -\frac{r\ell}{4m}\left[H_1^2 - H_0^2\frac{r_0^4}{r^4}\right].$$
Домножив обе части уравнения на $\dot{r}$, можно привести уравнение к виду
$$\frac{d}{dt}\dot{r}^2 = -\frac{\ell}{4m}\left[H_1^2\frac{d}{dt}r^2 + H_0^2 r_0^4\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2}\right],$$
откуда получаем решение
$$\dot{r}^2 = -\frac{\ell}{4m}\left[H_1^2 r^2 + H_0^2\frac{r_0^4}{r^2}\right] + C_1.$$
Из начальных условий получим
$$C_1 = \frac{\ell}{4m}\left[H_1^2 r_0^2 + H_0^2 r_0^2\right].$$
Считая, как указано выше, что цилиндр не сдвинулся с места при $t, 0 \leq t \leq \tau$, т. е. $\dot{r} = 0$. Тогда
$$H_1^2 r^4 + H_0^2 r_0^4 - \left(H_1^2 + H_0^2\right) r_0^2 r^2 = 0,$$
откуда, решая квадратное уравнение, получим
$$r = r_0\frac{H_0}{H_1}, \quad \text{и} \quad H = \frac{H_1^2}{H_0}.$$