Производящие функции.

Определение. Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ произвольная последовательность. Формальный степенной ряд

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

Называется *производящей функцией* этой последовательности.

Пример. Пусть $a_i = 1$. Тогда

$$A(x) = 1 + x + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Пример. Пусть $a_0 = 0,\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Тогда

$$A(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \ln(1+x).$$

Пусть $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ и $C(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ формальные числовые ряды.

Определение. Ряд

$$B(x)+C(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + c_n x^n$$

Называется *суммой* числовых рядов.

Определение. Ряд

$$B(x)C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i c_{n-i}\right)x^n$$

Называется *произведением* числовых рядов.

Пример. Числа Каталана.

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_0c_{n-1}+c_1c_{n-2}+\ldots+c_{n-1}c_0\right)x^n=$$

$$1+x\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_0c_n+c_1c_{n-1}+\ldots+c_nc_0\right)x^n=1+x\left(C(x)\right)^2.$$

Отсюда $C(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

В некоторых трудных комбинаторных задачах о последовательностях достижением является уже нахождение производящей функции искомой последовательности: ведь зная производящую функцию $f(x)$, можно находить члены «производимой» ею последовательности.

Пример. Выведем явную формулу чисел Каталана с помощью формулы Тейлора.

$$\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{1-4x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(-4)^n(1-4x)^{\left(\frac{1}{2}-n\right)}=$$

$$\frac{1}{2^n}(1-2)(1-4)\ldots(3-2n)(-4)^n(1-4x)^{\left(\frac{1}{2}-n\right)}=-2^n(2n-3)!!(1-4x)^{\left(\frac{1}{2}-n\right)}.$$

Отсюда

$$1-\sqrt{1-4x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(2n-3)!!}{n!}x^n$$

и

$$C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(2n-1)!!}{(n+1)!}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}C_{2n}^n x^n.$$

Бесконечные произведения.

Определение. Число неупорядоченных разложений числа n в сумму нечетных слагаемых обозначим через $Odd(n)$, а в сумму различных слагаемых — через $Dif(n)$.

Утверждение. $Odd(n) = Dif(n)$.

Доказательство.

Рассмотрим произведение бесконечных рядов, соответствующих нечетным числам,

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\ldots$$

Найдем, какой коэффициент будет при x^n после раскрытия скобок. Каждому разложению $n=1n_1+3n_3+5n_5+\ldots$ однозначно соответствует выбор по одному слагаемому из каждого сомножителя. Поэтому коэффициент равен количеству таких разложений. Следовательно

$$\sum_{n=0}^{\infty} Odd(n)x^n = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\ldots$$

Аналогично получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} Dif(n)x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$$

Действительно каждому разложению $n = 1\cdot\sigma_1 + 2\cdot\sigma_2 + 3\cdot\sigma_3 + \ldots$, где все $\sigma_i \in \{0,1\}$ однозначно соответствует выбор из i-ой скобки слагаемого x^i, если $\sigma_i = 1$, и 1 в противном случае.

Осталось заметить, что

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots = \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\frac{1-x^8}{1-x^4}\ldots =$$

$$\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\ldots =$$

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\ldots$$

Замечание. Многие производящие функции удается свести к известным функциям с помощью операций интегрирования и дифференцирования.

Пример. Пусть $b_n = n$. Возьмем ряд

$$A(x) = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots$$

продифференцируем его и домножим на x.

$$x(A(x))' = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

Тогда

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x(A(x))' = \frac{-x}{(1-x)^2}$$

Линейные рекуррентные последовательности.

Определение. Последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется *линейной рекуррентной последовательностью*, если существует натуральное число k и такие вещественные числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$, что при $n>k$

$$a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \ldots + p_k a_{n-k}.$$

Пример. Числа Фибоначчи.

$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$

Задача. Найти аналитическое выражение для чисел Фибоначчи.

Будем искать аналитическую формулу в виде геометрической прогрессии $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$.

Тогда $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ и $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Любая линейная комбинация $A\lambda_1 + B\lambda_2$ также удовлетворяет рекуррентному соотношению. Подберем *A* и *B* из начальных условий.

$$\begin{cases} u_0 = 1 = A + B \\ u_1 = 1 = A\lambda_1 + B\lambda_2 \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} A = \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ B = \dfrac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ответ.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Утверждение. Если последовательности удовлетворяют рекуррентному соотношению, то любая их линейная комбинация удовлетворяет этому рекуррентному соотношению.

Определение. Пусть последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_n = -\left(p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \ldots + p_k a_{n-k}\right).$$

Многочлен $x^k + p_1 x^{k-1} + p_2 x^{k-2} + \ldots + p_k$ будем называть *характеристическим многочленом последовательности*.

Пример. Характеристический многочлен чисел Фибоначчи $x^2 - x - 1$.

Теорема. Если λ корень характеристического многочлена кратности *s*, то для любого натурального числа $t \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ последовательность $a_n = n^t \lambda^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению.

Доказательство. Назовем оператор $\varphi(f)=x\cdot f'$ *оператором дифференцирования со смещением*.

Заметим, что $\varphi(Af+Bg)=A\varphi(f)+B\varphi(g)$.

Обозначим $\varphi_m(f)=\varphi(\varphi(\varphi(\ldots\varphi(f))))$.Тогда $\varphi_m(x^n)=n^m x^n$.

Если λ является корнем многочлена $P(x)$, кратности *s*, то он является корнем производной кратности *s*-1, и корнем кратности *s*-1 многочлена $\varphi(x^n P(x))$.

Следовательно, λ является корнем многочлена $\varphi_t(x^n P(x))$ для любого *t*<*s*.

Осталось заметить, что

$$\varphi_t(x^n P(x))=\varphi_t\left(x^{n+k}+p_1x^{n+k-1}+\ldots+p_kx^n\right)$$

$$(n+k)^t x^{n+k}+(n+k-1)^t p_1x^{n+k-1}+\ldots+n^t p_kx^n.$$

Следовательно

$$(n+k)^t\lambda^{n+k}+p_1(n+k-1)^t\lambda^{n+k-1}+\ldots+p_kn^t\lambda^n=0.$$

Теорема. Существует ровно k линейно-независимых вещественных последовательностей удовлетворяющих рекуррентному соотношению.

Следствие. Пусть λ корень характеристического многочлена с максимальным радиусом. Кратность корня равна s. Тогда скорость роста последовательности ограничена величиной $O\left(n^{s-1}(R(\lambda))^n\right)$.

Утверждение. Для любой линейной рекуррентной последовательности можно найти производящую функцию.

Пример.

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(u_{n-1}+u_{n-2}\right)x^n=$$

$$1+x+x\sum_{n=2}^{\infty}u_{n-1}x^{n-1}+x^2\sum_{n=2}^{\infty}u_{n-2}x^{n-2}=$$

$$1+x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}u_n x^n\right)+x^2\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n=1+x\cdot F(x)+x^2\cdot F(x).$$

Откуда

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$$