Волновое уравнение

“Уравнения математической физики”

Скопинцев Артур Маркович

Новосибирск, 2023

Геометрическое место точек, до которых дошли колебания к определенному моменту времени, называются фронтом волны, т.е. фронт волны – это поверхность, которая отделяет часть пространства, уже охваченную волновым процессом, от области, в которой колебания ещё не возникли.

В этой главе обсуждается волновое уравнение в размерностях 1, 2 и 3. По аналогии с формулой Даламбера приводятся формулы Пуассона и Кирхгофа, определяющие решение задачи Коши по заданным начальным данным. Обсуждаются свойства решений и поведение волн.

Энергетическое неравенство

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t,x), \qquad (t,x) \in K \subset \mathbb{R}^{n+1}. \qquad (5.2)$$

Область K, в которой мы будем рассматривать уравнение, лежит в полупространстве $t > 0$ и примыкает к гиперплоскости $t = 0$. Более точно, $\partial K = (\{t=0\} \times \Omega_0) \cup S$, где $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область в пространстве x-в. Кусочно-гладкая гиперповерхность S является «достаточно плоской», а именно в любой точке $(t,x) \in S$ внешняя нормаль $\nu = (\nu_t, \nu_x)$, $\nu_t = \cos(\nu, t) \in \mathbb{R}^1$, $\nu_x = (\cos(\nu, x_1), \ldots, \cos(\nu, x_n)) \in \mathbb{R}^n$, к этой поверхности удовлетворяет неравенству

$$\nu_t \geqslant a|\nu_x|, \qquad (5.3)$$

или, по-другому, $\cos^2(\nu,t) \geqslant a^2 \left(\cos^2(\nu,x_1) + \cdots + \cos^2(\nu,x_n)\right)$.

Такой поверхностью S, нормаль к которой удовлетворяет (5.3), причем с заменой нестрогих неравенств в них на равенства, является так называемый *характеристический конус* S_{t_0,x_0} с вершиной в произвольной точке (t_0, x_0), $t_0 > 0$, т. е. множество точек (t,x) таких, что

$$|x - x_0|^2 = a^2(t-t_0)^2, \qquad t \leqslant t_0. \qquad (5.4)$$

Действительно, нормалью (правда, неединичной, как выше) к S_{t_0,x_0} в точке $(t,x) \in S_{t_0,x_0}$ является вектор

$$\nu = (\nu_t, \nu_x), \qquad \nu_t = a^2(t-t_0), \qquad \nu_x = \frac{1}{2}\nabla_x\left(|x-x_0|^2\right) = x - x_0.$$

Следовательно, ввиду (5.4),

$$\nu_t^2 = a^4(t-t_0)^2 = a^2|x-x_0|^2 = a^2|\nu_x|^2.$$

В случае одной пространственной переменной образующими характеристического конуса S_{t_0,x_0} (в этом случае S_{t_0,x_0} есть угол на плоскости) являются характеристики уравнения струны — прямые $x \pm at = \mathrm{const} = x_0 \pm at_0$.

Введем еще некоторые обозначения. Пусть $\Omega_\tau = K \cap \{t = \tau\}$ — сечение области K плоскостью $\{t = \tau\}$; $K_\tau = K \cap \{0 < t < \tau\}$; $S_\tau = S \cap \{0 < t < \tau\}$. Границей области K_τ является $\partial K_\tau = \Omega_0 \cup \Omega_\tau \cup S_\tau$. Обозначим

$$E(\tau) = \frac{1}{2}\|u_t(\tau,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega_\tau)} + \frac{a^2}{2}\|\nabla_x u(\tau,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega_\tau))^n} \equiv$$
$$\equiv \int\limits_{\Omega_\tau} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{a^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right] dx$$

— значение функционала энергии в момент времени τ. Первое слагаемое в этой сумме имеет физический смысл кинетической энергии колебаний, а второе — потенциальной.

Теорема *Пусть функция $u(t,x) \in C^2(K) \cap C^1(\overline{K})$ удовлетворяет в K волновому уравнению (5.2). Тогда для любого $\tau \geqslant 0$ имеет место* энергетическое неравенство

$$E(\tau) \leqslant E(0).$$

Доказательство. Умножим уравнение (5.2) на u_t и проинтегрируем по области K_τ. Имеем:

$$0 = \int\limits_{K_\tau} \left(u_{tt} - a^2\Delta u\right) u_t dt dx =$$

$$= \int\limits_{K_\tau} \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2 + a^2\sum_{k=1}^n u_{x_k}^2\right) - a^2\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}(u_t u_{x_k})\right] dt\, dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$u_{tt}u_t = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t)^2,$$

$$u_{x_k x_k}u_t = \frac{\partial}{\partial x_k}(u_t u_{x_k}) - u_{tx_k}u_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(u_t u_{x_k}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_{x_k})^2.$$

Применим формулу Гаусса—Остроградского, сведя интегрирование различных производных по области K_τ к интегрированию по ее границе $\partial K_\tau = \Omega_0 \cup \Omega_\tau \cup S_\tau$. Учитывая, что внешняя нормаль $\nu = (\nu_t, \nu_x)$ к этой области на Ω_τ имеет вид $(1, 0, \ldots, 0)$, а на Ω_0 — $(-1, 0, \ldots, 0)$, получим:

$$0 = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left(u_t^2 + a^2\sum_{k=1}^n u_{x_k}^2\right) dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left(u_t^2 + a^2\sum_{k=1}^n u_{x_k}^2\right) dx$$

$$+ \int\limits_{S_\tau}\left[\frac{1}{2}\left(u_t^2 + a^2\sum_{k=1}^n u_{x_k}^2\right)\cos(\nu, t) - a^2\sum_{k=1}^n u_t u_{x_k}\cos(\nu, x_k)\right] dS$$

$$= E(\tau) - E(0) + \int\limits_{S_\tau}\left[\left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2|\nabla u|^2}{2}\right)\nu_t - a^2 u_t(\nabla u, \nu_x)\right] dS, \qquad (5.5)$$

где $(\nabla u, \nu_x) = \sum\limits_{k=1}^n u_{x_k}\cos(\nu, x_k)$ — скалярное произведение вектора $\nabla u \equiv (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ и проекции ν_x вектора единичной нормали $\nu = (\nu_t, \nu_x)$. Так как в силу(5.3)

$$\left|a^2 u_t(\nabla u, \nu_x)\right| \leqslant a^2|u_t||\nabla u||\nu_x| \leqslant$$

$$\leqslant a|\nu_x|\left(\frac{|u_t|^2}{2} + \frac{a^2|\nabla u|^2}{2}\right) \leqslant \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2|\nabla u|^2}{2}\right)\nu_t,$$

то последний интеграл в (5.5) неотрицателен, и $E(\tau) - E(0) \leqslant 0$. Теорема доказана.

Единственность решения задачи Коши

Следствие *Решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(t,x) + f(t,x), & (t,x) \in K \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \Omega_0. \end{cases} \tag{5.6}$$

единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — два решения задачи (5.6). Тогда функция $v(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2\Delta v(t,x), & (t,x) \in K \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0, & x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Энергия $E(0)$ в начальный момент $t=0$ для этого решения равна нулю. С учетом того что функционал $E(t)$ неотрицательный, из доказанной теоремы следует, что $E(t) \equiv 0$. Следовательно, $v_t, v_{x_k} \equiv 0$, и $v(t,x) \equiv \mathrm{const}$. С учетом $v(0,x) = 0$ имеем $v(t,x) \equiv 0$, и $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. □

Выше мы рассматривали задачу Коши в некоторой области $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задавая начальные условия только в ограниченной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$. Если же начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы при всех $x \in \mathbb{R}^n$, то и решение можно искать во *всем* полупространстве $t > 0$. Таким образом, мы имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(t,x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}^n), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \in C^1(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{5.7}$$

При этом решение ищется в классе функций $u(t,x) \in C^2\left(\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n}\right)$.

Замечание Из сказанного выше следует единственность решения $u(t,x)$ задачи (5.7). Действительно, любая точка полупространства $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ попадает в некоторый характеристический конус $|x - x_0|^2 \leqslant a^2(t - t_0)^2$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, внутри которого единственность решения задачи Коши доказана. Заметим также, что решение $u(t,x)$ внутри конуса зависит от значений начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ лишь на его основании — множестве $|x - x_0|^2 \leqslant a^2 t_0^2$ (шаре радиуса at_0 с центром в x_0).

Решение задачи Коши при n=3, формула Кирхгофа

По произвольной функции $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ построим функцию $M_g(t,x)$, $t>0$, по следующему правилу:

$$M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|\xi - x| = at} g(\xi) dS_\xi, \qquad (5.8)$$

dS_ξ — элемент площади на сфере радиуса at (с центром в x). Или, делая замену переменных в (5.8) $\xi = x + at\eta$, $dS_\xi = (at)^2 dS_\eta$, где dS_η — элемент площади на единичной сфере (с центром в 0), получаем другой вид оператора $M_g(t,x)$:

$$M_g(t,x) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x + at\eta) dS_\eta. \qquad (5.9)$$

Из этого представления, в частности, видно, что гладкость функции $M_g(t,x)$ совпадает с гладкостью функции $g(x)$.

Предложение *Для любой функции $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ имеем:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_g(t,x) = a^2 \Delta M_g(t,x), \qquad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \qquad (5.10)$$

$$M_g(t,x)\Big|_{t=0} = 0, \qquad (5.11)$$

$$\frac{\partial M_g(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x). \qquad (5.12)$$

Доказательство. Начальное условие (5.11) — очевидное следствие (5.9).

Из (5.9) также находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x + at\eta) dS_\eta + \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x + at\eta), a\eta)\, dS_\eta. \qquad (5.13)$$

Учитывая то, что $g(x)$ — гладкая функция, имеем

$$\frac{\partial M_g(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x) dS_\eta = g(x),$$

и начальное условие (5.12) также имеет место.

Для доказательства (5.10) преобразуем равенство (5.13) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_g(t,x) = \frac{M_g}{t} + \frac{at}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x + at\eta), \eta)\, dS_\eta \qquad (5.14)$$

$$= \frac{M_g}{t} + \frac{1}{4\pi a t} \int\limits_{|\xi - x| = at} (\nabla g(\xi), \eta)\, dS_\xi = \frac{M_g}{t} + \frac{1}{4\pi a t} \int\limits_{|\xi - x| < at} \Delta g(\xi) d\xi.$$

Здесь мы вновь вернулись к переменным $\xi = x + at\eta$, а затем поток векторного поля $\nabla g(\xi)$ через поверхность сферы $|\xi - x| = at$ (η — в точности вектор единичной нормали к этой сфере) преобразовали, в соответствии с формулой Гаусса—Остроградского, к интегралу от дивергенции $\operatorname{div}(\nabla g(\xi)) = \Delta g(\xi)$ по шару $|\xi - x| < at$. Далее, дифференцируя (5.14) по t еще раз, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi a t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\xi-x|<at}\Delta g(\xi)d\xi\right), \tag{5.15}$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{M_g}{t}\right) = \frac{1\partial}{t\partial t}M_g - \frac{M_g}{t^2} = \frac{M_g}{t^2} + \frac{1}{4\pi a t^2}\int\limits_{|\xi-x|<at}\Delta g(\xi)d\xi - \frac{M_g}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi a t^2}\int\limits_{|\xi-x|<at}\Delta g(\xi)d\xi;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a t}\int\limits_{|\xi-x|<at}\Delta g(\xi)d\xi\right) = -\frac{1}{4\pi a t^2}\int\limits_{|\xi-x|<at}\Delta g(\xi)d\xi + \frac{1}{4\pi a t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\xi-x|<at}\Delta g(\xi)d\xi\right).$$

Производная в правой части (5.15) легко считается, если перейти к сферическим координатам:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\xi-x|<at}\Delta g(\xi)d\xi\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^{at}\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g(x+r\eta)r^2 dS_\eta dr\right) =$$

$$= a\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g(x+at\eta)(at)^2 dS_\eta$$

$$= a(at)^2\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g(x+at\eta)dS_\eta.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_g(t,x) = \frac{a^2 t}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g(x+at\eta)dS_\eta.$$

С другой стороны, из (5.9) имеем:

$$\Delta M_g(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\Delta g(x+at\eta)dS_\eta,$$

и (5.10) доказано.

Теорема *Пусть $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(t,x), & t>0, \quad x\in\mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{5.16}$$

задается формулой Кирхгофа

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x), \tag{5.17}$$

где оператор M определен в (5.8)–(5.9).

Доказательство. Действительно, как доказано в Предложении функция $u^{II}(t,x) \equiv M_\psi(t,x)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt}^{II} = a^2\Delta u^{II}(t,x), \qquad u^{II}\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t^{II}\Big|_{t=0} = \psi(x). \tag{5.18}$$

Покажем, что функция $u^I(t,x) \equiv \partial M_\varphi(t,x)/\partial t$ является решением следующей задачи:

$$u_{tt}^{I} = a^2\Delta u^{I}(t,x), \qquad u^{I}\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t^{II}\Big|_{t=0} = 0. \tag{5.19}$$

Действительно, так как $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, то $M_\varphi(t,x) \in C^3(R_+ \times \mathbb{R}^3)$, и поскольку функция $M_\varphi(t,x)$ удовлетворяет волновому уравнению, то и u^I, как производная $M_\varphi(t,x)$, также удовлетворяют этому уравнению. В силу (5.12) получаем

$$u^I\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

а ввиду (5.10) и (5.11) имеем:

$$\frac{\partial u^I}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}M_\varphi(t,x)\Big|_{t=0} = a^2\Delta M_\varphi(t,x)\Big|_{t=0} = 0.$$

Из (5.18) и (5.19) следует, что функция $u(t,x) = u^I(t,x) + u^{II}(t,x)$ удовлетворяет (5.16). □

Метод спуска. Решение задачи Коши при n=2, формула Пуассона

Решим теперь задачу Коши в случае двух пространственных переменных, т. е. $x \in \mathbb{R}^2$. Здравый смысл подсказывает, что, уменьшив количество переменных, мы не должны получить более сложную задачу. И дело действительно обстоит так. Метод, позволяющий свести задачу меньшей размерности к задаче большей размерности, называется *метод спуска*. Изложим его.

Пусть $u(t,x) = u(t,x_1,x_2,x_3)$ — решение трехмерной по пространственным переменным задачи Коши (5.16) для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right),$$

и пусть начальные функции φ и ψ не зависят от третьей пространственной переменной x_3, т. е. $\varphi = \varphi(x_1,x_2)$, $\psi = \psi(x_1,x_2)$. Заметим, что решение этой задачи мы знаем, и оно задается формулой Кирхгофа (5.17), где интегрирование функций φ и ψ идет по сферам в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Сделаем сдвиг по оси x_3 на произвольное число $x_3^0 \in \mathbb{R}$. С одной стороны, функция $u(t,x)$ перейдет в $\tilde{u}(t,x) = u(t,x_1,x_2,x_3+x_3^0)$. С другой стороны, уравнение теплопроводности от сдвига по одной из осей не меняется, как и не меняются при сдвиге по оси x_3 начальные условия φ и ψ. Это означает, что $\tilde{u}(t,x)$ является решением той же самой задачи Коши (5.16), что и функция $u(t,x)$. В силу единственности решения этой задачи, $\tilde{u}(t,x) \equiv u(t,x)$, т. е.

$$u(t,x_1,x_2,x_3+x_3^0) = u(t,x_1,x_2,x_3) \qquad \forall x_3^0 \in \mathbb{R}.$$

Последнее в точности означает, что функция $u(t,x)$ не зависит от x_3; $u = u(t,x_1,x_2)$. Значит, $\partial^2 u/\partial x_3^2 = 0$, и функция $u(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right).$$

Таким образом мы получаем, что функция $u(t,x)$, задаваемая формулой Кирхгофа (5.17), является и решением двумерной по пространственным переменным задачи Коши (5.16) для уравнения теплопроводности, если начальные функции $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ считать заданными в $\mathbb{R}^3$, но не зависящими от x_3. Правда, в этом случае интегрирование по сфере в $\mathbb{R}^3$, через которое задаются M_φ и M_ψ (см. (5.8)), разумно свести к интегрированию по пространству $\mathbb{R}^2$. Проделаем это сведение.

Сфера радиуса R с центром в точке $x = (x_1,x_2,x_3)$ проецируется в круг того же радиуса с центром в (x_1,x_2). Элемент площади на сфере dS и элемент площади на круге $d\xi = d\xi_1 d\xi_2$ связаны соотношением $d\xi = dS\cos\gamma$, где γ — угол между плоскостью, касательной к сфере, и плоскостью (x_1,x_2), или, что то же самое, угол между нормалью к сфере и осью x_3 (являющейся нормалью к плоскости (x_1,x_2)). Легко видеть, что $\sin\gamma$ равен отношению проекции радиуса сферы на плоскость (x_1,x_2) к самому радиусу R, т. е.

$$\sin\gamma = \frac{|\xi - x|}{R} = \frac{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2}}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sqrt{R^2-|\xi-x|^2}}{R}.$$

Еще учтем, что $R = at$, а также то, что в каждую точку круга проецируются две точки сферы (с «верхней» и «нижней» половинок), и получаем окончательно, что формула (5.8) переписывается в двумерном случае так:

$$M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|\leqslant at} g(\xi)\frac{2d\xi_1 d\xi_2}{\cos\gamma} = \frac{2at}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|\leqslant at}\frac{g(\xi)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(at)^2-|\xi-x|^2}}.$$

Окончательно имеем

$$M_g(t,x) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|\xi-x|\leqslant at}\frac{g(\xi)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(at)^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}. \qquad (5.20)$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 88. *Пусть* $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. *Тогда решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(t,x), & t>0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

задается формулой Пуассона

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x),$$

где оператор M определен в (5.20).

Естественно, из трехмерного пространства можно «спуститься» не только в двумерное, но и в одномерное пространство, получив *формулу Даламбера* (см. (5.24) ниже) решения задачи Коши для уравнения струны (напомним, что уравнение струны — это одномерное по пространственным переменным волновое уравнение). Сразу оговоримся, что эту формулу легко получить элементарными методами (перейдя к характеристикам и найдя общее решение уравнения струны), да и классическое решение задачи Коши выражается формулой Даламбера не только для начальных условий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространств $C^3(\mathbb{R})$ и $C^2(\mathbb{R})$ соответственно (как в трехмерном и двумерном случаях), но и при $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, что легко проверяется непосредственным вычислением. Тем не менее проделаем вывод формулы Даламбера из формулы Кирхгофа все тем же методом спуска.

Итак, как и в предыдущем разделе, мы рассмотрим решение $u(t,x)$ — решение задачи Коши для волнового уравнения в случае, когда $x \in \mathbb{R}^3$, но начальные функции зависят только от одной переменной x_1: $\varphi = \varphi(x_1)$, $\psi = \psi(x_1)$. Тогда задача не меняется при сдвигах по осям x_2 и x_3, и, в силу единственности решения, функция $u(t,x)$ также не меняется при этих сдвигах, т. е. $u = u(t,x_1)$. Значит, вторые производные решения по x_2 и x_3 равны 0, и $u(t,x_1)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \qquad u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1), \qquad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x_1). \tag{5.21}$$

Остается только свести интегрирование по сфере в формуле (5.8) к интегрированию по отрезку $[x_1 - at, x_1 + at]$, который является проекцией этой сферы на ось x_1.

В элемент длины $d\xi_1$ на этом отрезке проецируется сферический слой. Площадь dS этого слоя в $1/\cos\gamma$ раз больше, чем $2\pi r d\xi_1$ — площадь боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, где γ — угол между нормалями к слою и цилиндру (γ — тот же угол, что и в предыдущем разделе). Здесь $r = R\cos\gamma$ — радиус основания слоя и цилиндра, $d\xi_1$ — их высота, $R = at$ — радиус сферы. Итак,

$$dS = \frac{2\pi r d\xi_1}{\cos\gamma} = 2\pi R d\xi_1 = 2\pi a t d\xi_1. \tag{5.22}$$

Замечание Формула площади сферического слоя $S = 2\pi R h$, которая получается из (5.22) интегрированием по ξ_1, есть в любом математическом справочнике. Отметим, что эта площадь зависит только от радиуса сферы R и высоты слоя h и не зависит от того, где этот слой находится на сфере — «посередине» или «с краю». Это означает, что, нарезав тонкокожий апельсин «кружочками» одинаковой толщины, в каждом кусочке получаем одинаковое количество кожуры, тогда как мякоти, как мы понимаем, больше в средних дольках, чем в крайних.

В частном случае $h = 2R$, имеем всем известную формулу площади полной поверхности сферы $S = 4\pi R^2$.

Подставляя (5.22) в (5.8), имеем

$$M_g(t,x_1) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{x_1-at}^{x_1+at} g(\xi_1)\cdot 2\pi a t d\xi_1 = \frac{1}{2a} \int\limits_{x_1-at}^{x_1+at} g(\xi_1) d\xi_1. \tag{5.23}$$

Заметим, что в рассматриваемом одномерном случае

$$\frac{\partial}{\partial t} M_g(t,x_1) = \frac{1}{2a}\left(a g(x_1+at) - (-a) g(x_1 - at)\right) = \frac{g(x_1-at) + g(x_1+at)}{2}.$$

Следовательно, решением задачи Коши (5.21) является следующая функция $u(t,x)$ (уже не нужный индекс $_1$ опускаем):

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \tag{5.24}$$

Поведение волны при n = 3, 2, 1

Уже отмечалось, что (см. Замечание) значение решения $u(t,x)$ задачи Коши (5.7) для волнового уравнения в некоторой точке (t_0,x_0), $t_0>0$, в пространстве *любой* размерности зависит от значения начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ только на основании характеристического конуса, т. е. на шаре (или же круге в $\mathbb{R}^2$, или отрезке в $\mathbb{R}^1$) $|x-x_0|\leqslant at_0$. Это же видно и из формулы Пуассона, где интегрирование в (5.20) идет как раз по этому кругу. Что же касается формулы Кирхгофа, то там, как мы видим из (5.8), нам важны значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ только в окрестности границы шара $|x-x_0|\leqslant at_0$, т. е. сферы $|x-x_0|=at_0$. Точнее, для нахождения значения $u(t_0,x_0)$ нам нужно знать значение начальной скорости $\psi(x)$ на этой сфере, а также значения на ней начального смещения $\varphi(x)$ и его производных (так как $M_\varphi(t,x)$ входит в решение через его частную производную по t). Это, на первый взгляд небольшое, различие между формулами Кирхгофа и Пуассона, заключающееся в разных знаках («$=$» и «$\leqslant$» соответственно) в определении множества, по которому идет интегрирование, приводит к качественно различным эффектам в процессе распространения волн в пространствах разной размерности.

Важной характеристикой распространения волн является так называемое *множество зависимости* решения от начальных условий. Поясним, что это такое. Предположим, что мы знаем решение $u(t,x)$ задачи Коши для волнового уравнения с некими начальными данными $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Изменим теперь начальные данные, но не на всем пространстве, а лишь на каком-то (например, ограниченном) множестве B, т. е. рассмотрим задачу Коши для нашего уравнения с другими начальными данными, $\tilde\varphi(x)$ и $\tilde\psi(x)$, причем $\tilde\varphi(x)=\varphi(x)$ и $\tilde\psi(x)=\psi(x)$ при $x\notin B$. Решение этой новой задачи обозначим $\tilde u(t,x)$. Возникает вопрос: где решение не изменилось? Точнее, в каких точках $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ мы можем заведомо утверждать, что $u(t,x)=\tilde u(t,x)$? Так вот, множество тех точек (t,x), где решение *может измениться* при изменении начальных условий только на неком множестве B, и называется *множеством зависимости* решения от значения начальных условий на B.

В силу линейности задачи, можно считать, что $\varphi(x)\equiv\psi(x)\equiv0$, и, соответственно, решение $u(t,x)$ — также нулевое, $u(t,x)\equiv0$. Положим $\tilde\varphi(x)=\tilde\psi(x)=0$ при $x\notin B$ и попытаемся ответить на вопрос: где заведомо $\tilde u(t,x)=0$, а в каких точках мы этого утверждать не можем? Ответ, оказывается, зависит от количества пространственных переменных ($n=1,2$ или 3).

Трехмерное пространство. Положим, для определенности, $B=\{x\in\mathbb{R}^3\mid|x|<1\}$ — единичный шар, и пусть лишь в нем начальные условия φ и ψ, возможно, отличны от нуля. Это означает, что в нулевой момент времени в окрестности 0 произошли какие-то возмущения (взрыв). Пусть мы находимся в точке x_0, $|x_0|>1$. Попробуем понять, когда (по времени) мы почувствуем эти возмущения (услышим взрыв), т. е. при каких t, возможно, $u(t,x_0)\neq0$?

В соответствии с формулой Кирхгофа (5.17), (5.8), для определения значения $u(t,x_0)$, мы должны интегрировать начальные условия по сфере $S^{at}_{x_0}$ с центром в точке x_0 и радиусом at. Ненулевой результат мы можем получить лишь тогда, когда эта сфера имеет непустое пересечение с единичным шаром B. Значит, если $at\leqslant|x_0|-1$, то шар B лежит вне сферы $S^{at}_{x_0}$, и $u(t,x_0)=0$. Это означает, что возмущения еще не дошли до точки x_0. Вообще, при произвольном множестве B, в точках (t,x), таких, что x удалено от B более чем на at, значение $u(t,x)$ будет заведомо нулевым. Следовательно, распространение колебаний в пространстве идет со скоростью a.

Если же $at\geqslant|x_0|+1$, то шар B попадает целиком внутрь сферы $S^{at}_{x_0}$, интегрирование идет по множеству, где $\varphi=\psi=0$, а, следовательно, снова $u(t,x_0)=0$ (волна прошла точку x_0).

Подытоживая сказанное, мы получаем, что в произвольный момент времени $t>0$ ненулевое значение решение может принимать лишь в точках x, лежащих в шаровом слое

$$at-1<|x|<at+1,\qquad t>0,\tag{5.25}$$

(при $t<1/a$ — в шаре $|x|<at+1$). В этом случае множество точек (t,x) таких, что $|x|=at+1$ (т. е. удаленных от B на расстояние at) называется *передним фронтом волны*, а множество точек, в которых $|x|=at-1$, — *задним фронтом волны*. Волновые фронты в пространстве распространяются со скоростью a. *Область зависимости* решения от значения начальных условий в B есть множество точек между передним и задним фронтами; в нашем случае область зависимости задается (5.25).

Двумерное пространство. Принципиальное отличие двумерного случая от трехмерного заключается в том, что интегрирование в (5.20) идет по всему двумерному кругу $B^{at}_{x_0}$ с центром в точке x_0 и радиуса at, а не по его границе (окружности). Поэтому мы заведомо будем иметь $u(t,x_0)=0$ лишь при $at \leqslant |x_0|-1$, когда единичный шар B лежит вне $B^{at}_{x_0}$, а при $at \geqslant |x_0|+1$ (т. е. $B \subset B^{at}_{x_0}$), значение $u(t,x_0)$ не обязано быть нулевым. Следовательно, решение $u(t,x)$ может принимать ненулевое значение лишь в точках, удовлетворяющих

$$|x| < at+1, \qquad t>0. \tag{5.26}$$

Итак, при распространении колебаний в двумерном пространстве, *имеется передний фронт* волны, состоящий, как и в $\mathbb{R}^3$, из точек, удаленных от множества B ровно на расстояние at, и *нет заднего фронта.* Множество зависимости решения от начальных условий — область внутри переднего фронта волны, куда попадают точки $x \in \mathbb{R}^2$, удаленные от B менее, чем на at.

Пусть колебания, вызванные возмущением начальных условий в некотором ограниченном множестве B, дошли в какой-то момент времени до точки x_0. Далее по времени в точке x_0 эти возмущения будут постоянно ощущаться, правда, все в меньшей степени. Это обусловлено тем, что в знаменателе подынтегрального выражения в (5.20) стоит растущая по t величина $\sqrt{(at)^2-|x_0-\xi|^2}$ (x_0 фиксировано, а ξ пробегает ограниченное множество B). Как мы видим, наибольшее влияние на величину $u(t,x_0)$ оказывают значения начальных условий $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ в тех точках ξ, которые удалены от x_0 на расстояния, близкие к at, так как именно там знаменатель в (5.20) мал. Для того чтобы подчеркнуть, что колебания со временем затухают, говорят о *размытом заднем фронте* волны в $\mathbb{R}^2$ (а не о его отсутствии).

Замечание Проиллюстрируем наши математические выводы физическими примерами. Звуковые волны в трехмерном пространстве распространяются, безусловно, с наличием заднего фронта, иначе любой звук мы бы слышали с долгим (хоть и постепенно затухающим) «эхом». Ну а расходящиеся на поверхности воды круги (а не один круг) от брошенного камня (это и есть сильно локализованное возмущение начальных данных) прекрасно демонстрируют четкий передний и размытый задний фронт волны, распространяющейся в двумерном пространстве.

Одномерное пространство. Как мы видим из формулы Даламбера (5.24), значение решения $u(t,x_0)$ задачи Коши для уравнения струны зависит от начального смещения струны φ в точках $x_0 \pm at$ и начальной скорости ψ на отрезке $[x_0-at, x_0+at]$. Отрезок здесь — это одномерный шар, а точки $x_0 \pm at$ — сфера в одномерном пространстве (граница шара). Таким образом, решение принципиально по-разному зависит от φ и от ψ: зависимость от φ аналогична трехмерному случаю, а от ψ — двумерному.

Например, если $\psi \equiv 0$, а $\varphi(x)=0$ при $|x| \geqslant 1$, и $\varphi(x)>0$ при $x \in (-1,1)$, то

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2},$$

и $u(t,x)>0$, если хотя бы одно из чисел $x \pm at$ принадлежит интервалу $(-1,1)$, и $u(t,x)=0$ в остальных точках. Множество зависимости решения от значения начального смещения φ на интервале $(-1,1)$ задается, как и в *трехмерном* случае, неравенствами (5.25).

Если же, наоборот, $\varphi \equiv 0$, $\psi(x)=0$ при $|x| \geqslant 1$, и $\psi(x)>0$ при $|x|<1$, то

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi,$$

и $u(t,x)>0$ при $(-1,1)\cap(x_0-at, x_0+at) \neq \varnothing$, и $u(t,x)=0$ в остальных точках, т. е. при $x_0-at \geqslant 1$ или $x_0+at \leqslant -1$. Множество зависимости решения от значения начальной скорости ψ на интервале $(-1,1)$ задается, как и в *двумерном* случае, соотношением (5.26). Заметим также, что при рассматриваемых финитных начальных условиях мы не имеем стремления $u(t,x_0)$ к 0 при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,x_0) = \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi)d\xi = \frac{1}{2a}\int_{-1}^{1} \psi(\xi)d\xi > 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Это отличает нашу одномерную задачу не только от трехмерной, но и от двумерной.

Пространство произвольной размерности. Возникает естественный вопрос: что же качественно происходит с распространением волн в случае n пространственных переменных? Или по-другому: по какому множеству, сфере S_x^{at} или шару B_x^{at}, идет интегрирование в определении оператора $M_g(t, x)$, если $x \in \mathbb{R}^n$? Формулы, которыми дается решение задачи Коши в случае n пространственных переменных, называются формулами Герглотца—Петровского, и мы их здесь не приводим, давая лишь принципиальный ответ. Интересующимся посоветуем обратиться, например, к [16].

В пространствах нечетной размерности n (за исключением $n = 1$), интегрирование в определении оператора M_g идет по поверхности сферы S_x^{at}, следовательно, как в рассмотренном нами трехмерном случае, распространение волн идет с наличием переднего и заднего фронта.

В пространствах четной размерности, интегрирование в определении оператора M_g идет по шару B_x^{at}, следовательно, как в двумерном случае, у волн есть только передний фронт, а задний — размыт.

Пространство размерности один стоит особняком.

[16]: Курант Р. – Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964

Принцип Дюамеля

Принцип Дюамеля, по существу, утверждает, что, умея решать задачу Коши для однородного волнового уравнения, мы можем решить и неоднородное уравнение

$$u_{tt} = a^2\Delta_x u(t,x) + f(t,x), \qquad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{5.27}$$

например, с нулевыми начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = 0. \tag{5.28}$$

Теорема 89. *Пусть $U(t,\tau,x)$ — решение задачи Коши для* однородного *волнового уравнения*

$$U_{tt} = a^2\Delta_x U(t,\tau,x), \qquad t>\tau, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{5.29}$$

с начальными условиями, заданными при $t=\tau$:

$$U\Big|_{t=\tau} = U(\tau,\tau,x) = 0, \qquad U_t\Big|_{t=\tau} = U_t(\tau,\tau,x) = f(\tau,x). \tag{5.30}$$

Тогда функция

$$u(t,x) := \int\limits_0^t U(t,\tau,x)d\tau \tag{5.31}$$

является решением неоднородной *задачи* (5.27)–(5.28).

Замечание 19. Постановка начальных условий в задаче (5.29)–(5.30) не в момент времени $t=0$, а при $t=\tau>0$, влечет только то, что в соответствующей формуле (Кирхгофа, Пуассона, Даламбера) надо везде заменить t на $t-\tau$.

Замечание 20. Существование решения однородной задачи Коши в двумерном и трехмерном случаях мы доказали при гладкости начальной скорости $\psi\in C^2$, следовательно, и решение неоднородной задачи мы получим лишь в предположении $f(t,x)\in C^2$.

Доказательство. Будем дифференцировать функцию $u(t,x)$, заданную (5.29). Все дифференцирования ниже законны, так как функция $U(t,\tau,x)$, как решение однородной задачи Коши, является дважды непрерывно-дифференцируемой по t и по x. Для нахождения производных по x просто дифференцируем по параметру под знаком интеграла:

$$\Delta_x u(t,x) = \int\limits_0^t \Delta_x U(t,\tau,x)d\tau.$$

Для нахождения производных функции $u(t,x)$ по переменной t дифференцировать приходится как по параметру, так и по верхнему пределу:

$$u_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t U(t,\tau,x)d\tau = U(t,t,x) + \int\limits_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau = \int\limits_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau,$$

$$u_{tt}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau = U_t(t,t,x) + \int\limits_0^t U_{tt}(t,\tau,x)d\tau =$$

$$= f(t,x) + \int\limits_0^t U_{tt}(t,\tau,x)d\tau.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу начальных условий (5.30), $U(t,t,x) = 0$, $U_t(t,t,x) = f(t,x)$. С учетом того что $U_{tt} = a^2\Delta_x U$ (см. (5.29)), получаем (5.27). Начальные условия (5.28) также, очевидно, выполнены. □

Решение уравнения (5.27) с произвольными начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

в силу линейности задачи, будет выражаться так:

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}M_{\varphi(x)}(t,x) + M_{\psi(x)}(t,x) + \int\limits_0^t M_{f(\tau,x)}(t-\tau,x)d\tau,$$

где оператор M_g задается (5.8), (5.20) или (5.23) в зависимости от размерности пространства. Например, при $n=1$, формула Даламбера (5.24) перепишется в виде:

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$