Семинар 2. *(5 сентября 2024 г.)*

Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Задача Коши

1. *Теорема о неявной функции*

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0; \\ \ldots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \end{cases} \qquad \text{или } F(x, y) = 0.$$

Теорема 1. *Если отображение $F : U \to \mathbb{R}^n$, определенное в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+n}$, таково, что*
1) $F \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$;
2) $F(x_0, y_0) = 0$;
3) Матрица частных производных $F'_y(x_0, y_0)$ невырождена, т.е.

$$\det F'_y(x_0, y_0) = \det \left. \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \ldots & & \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0,$$

то существует $(n+m)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^n \subset U$, где

$$I_x^m = \{x \in \mathbb{R}^m | |x - x_0| < \alpha\}, \ I_y^n = \{y \in \mathbb{R}^n | |y - y_0| < \beta\}$$

и такое отображение $f \in C^p(I_x^m, I_y^n)$, что для любой точки $(x, y) \in I_x^m \times I_y^n$ можно разрешить систему уравнений $F(x, y)$ относительно $y_1, \ldots, y_n$, т.е.

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m); \\ \ldots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m). \end{cases}$$

Далее нас будет интересовать случай $n = 1$, т.е. когда система состоит из одного уравнения.

2. *Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка*

Определение 1. *Уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(u, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_1(x,u)u_{x_1} + \ldots + a_n(x,u)u_{x_n} = b(x,u), \qquad (1)$$

где $u(x_1, \ldots, x_n)$ — искомая функция, $a_i(x,u) \in C^1(B)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$, называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.

Хотим свести уравнение (1) к линейному уравнению в частных производных, метод решения которого нам известен. Для этого введем функцию $v(x,u)$ такую, что $\left.\dfrac{\partial v}{\partial u}\right|_{u(x)} \neq 0$, где $u(x)$ — решение уравнения (1), и будем искать решение в виде неявно заданной функции $v(x,u) = F(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) = 0$. Продифференцируем тождество $v(x, u(x) = 0)$ по каждой независимой переменной x_i:

$$\frac{dv}{dx_i} = \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0.$$

Выразим отсюда $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$:

$$u_{x_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_i} / \frac{\partial v}{\partial u} = -v_{x_i}/v_u.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (1) (*помним, что производная $v_u|_{u(x)}$ функции $v(x,u)$ на решении $u(x)$ не обращается в ноль*):

$$-a_1(x,u)v_{x_1}/v_u - \ldots - a_n(x,u)v_{x_n}/v_u = b(x,u).$$

Домножим это уравнение на $-v_u$ и перенесем всё в левую часть:

$$a_1(x,u)v_{x_1} + \ldots - a_n(x,u)v_{x_n} + b(x,u)v_u = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2), в котором $v(x,u)$ — искомая функция, является линейным уравнением в ЧП первого порядка. Чтобы решить его, вспомним алгоритм решения с прошлого семинара.

Шаг 1. Запишем для уравнения (2) характеристическую систему из n уравнений:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b} \tag{3}$$

Шаг 2. Найдем n независимых первых интегралов $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, решая уравнения системы:

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = C_1; \\ \ldots \\ \Phi_n(x) = C_n. \end{cases}$$

Независимость проверяем по определению, если она не очевидна.

Шаг 3. Решением уравнения (2) будет неявно заданная произвольная гладкая функция, зависящая от найденных первых интегралов, т.е.

$$v(x, u) = F(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) = 0.$$

Вспомним теорему о неявной функции и предположим, что в окрестности любой точки $F'_{\Phi_k} = \dfrac{\partial F}{\partial \Phi_k} \neq 0$. Тогда можно разрешить уравнение $F(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) = 0$ относительно Φ_k:

$$\Phi_k(x, u) = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}, \Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n),$$

где f принадлежит тому же классу гладкости, что и F. Можно записать ответ в виде $\Phi_k(x, u) = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}, \Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n)$ или попытаться выразить u, если это возможно.

Замечание. При решении квазилинейных уравнений не нужно каждый раз вводить функцию v. Достаточно записать характеристическую систему (3) и искать решение в виде неявно заданной функции $F(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, а потом в силу теоремы о неявной функции представить один первый интеграл как функцию, зависящую от всех остальных. Далее будем использовать сокращеный алгоритм решения.

3. *Разбор № 1200 из задачника А. Ф. Филиппова*

1200. Решить уравнение

$$yzz_x + xzz_y = xy.$$

Решение. Характеристическая система имеет вид:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Один первый интеграл можно найти из уравнения

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz}$$

Решая его, получим $\Phi_1 = x^2 - y^2 = C_1$. Аналогично, решая уравнение

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{xy},$$

получим второй первый интеграл $\Phi_2 = z^2 - x^2 = C_2$. Эти первые интегралы независимы.

Запишем общее решение:

$$F(\Phi_1, \Phi_2) = F(x^2 - y^2, z^2 - x^2) = 0.$$

где F — произвольная гладкая функция.

По теореме о неявной функции можно разрешить данное уравнение относительно Φ_2:

$$z^2 - x^2 = f(x^2 - y^2).$$

4. *Задача Коши для линейных уравнений в ЧП первого порядка*

Поставим задачу Коши для линейного уравнения в ЧП первого порядка:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = a_1(x)u_{x_1} + \ldots + a_n(x)u_{x_n} = b(x), \\ u|_S = \varphi(x), \end{cases} \tag{4}$$

где $S : \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = 0, \Phi \in C^1, \nabla\Phi|_S \neq 0\}$ — $(n-1)$-мерная поверхность класса C^1, заданная неявно уравнением $\Phi(x) = 0$.

Теорема 2. *Пусть $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in S$ и в этой точке поверхность S не касается характеристик уравнения. Тогда существует окрестность точки x^0, в которой задача Коши* (4) *имеет единственное решение $u(x)$ для любых функций $b(x), \varphi(x) \in C^1$.*

Определение 2. *Задача Коши называется корректной, если у нее существует единственное решение, которое непрерывно зависит от начальных данных.*

5. *Продолжение разбора №1200*

Решим задачу Коши для уравнения из №1200, т.е. найдем поверхность $z(x, y)$, проходящую через кривую $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Подставим начальные данные в общее решение $z^2 - x^2 = f(x^2 - y^2)$:

$$a^2 - y^2 - a^2 = f(a^2 - y^2) \Rightarrow f(a^2 - y^2) = -y^2.$$

Сделаем замену $a^2 - y^2 = s$, тогда

$$f(s) = s - a^2 \Rightarrow f(x^2 - y^2) = x^2 - y^2 - a^2 = z^2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - y^2 - z^2 = a^2.$$

6. *Разбор №1212 из задачника А. Ф. Филиппова (геометрическая задача)*

1212. Найти поверхность, проходящую через прямую

$$y = x, \quad z = 1$$

и ортогональную к семейству поверхностей

$$v(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = Cx.$$

Решение. Идея заключается в том, чтобы получить УЧП 1-го порядка и задачу Коши для него. Введем функцию $u(x, y, z)$ и будем искать поверхность, заданную неявно уравнением $u(x, y, z) = F(x, y, z) = 0$.

Пусть $\vec{n}_1$ — нормаль к поверхностям $x^2 + y^2 + z^2 = Cx$, $\vec{n}_2$ — нормаль к искомой поверхности $u(x, y, z)$. Поверхности ортогональны, если скалярное произведение их нормалей равно нулю, т.е. $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$. Вычислим эти нормали:

$$\vec{n}_1 = (v_x, v_y, v_z) = (2x - C, 2y, 2x), \quad \vec{n}_2 = (u_x, u_y, u_z).$$

(Производные u_x, u_y, u_z неизвестны.)

Избавимся сразу от параметра C, чтобы искомое семейство содержало только один параметр:

$$x^2 + y^2 + z^2 = Cx \Leftrightarrow x + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} = C.$$

В итоге получим скалярное произведение:

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = (x - \frac{y^2}{x} - \frac{z^2}{x})u_x + 2yu_y + 2zu_z = 0.$$

Это в точности линейное однородное уравнение в ЧП 1-го порядка. Составим характеристическую систему для полученного уравнения:

$$\frac{dx}{\frac{x^2-y^2-z^2}{x}} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{2z}.$$

Один первый интеграл можно найти сразу из уравнения с разделяющимися переменными $\frac{dy}{2y} = \frac{dz}{2z}$. Решив его, получим $\Phi_1 = \frac{y}{z} = C_1$. Чтобы найти второй первый интеграл, воспользуемся свойством равных дробей. К первой дроби *(числитель отдельно, знаменатель отдельно)* прибавим вторую, умноженную *(и числитель и знаменатель)* на y, и третью, умноженную аналогичным образом на z. Приравняем полученную выражение, например, ко второй дроби:

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 - y^2 - z^2 + 2y^2 + 2z^2} = \frac{dy}{2y} \Leftrightarrow \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y}.$$

Проинтегрируем и получим $\Phi_2 = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2$.
Тогда общее решение уравнения равно

$$u(x, y, z) = F(\Phi_1, \Phi_2) = F(\frac{y}{z}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}) = 0.$$

Далее по теореме о неявной функции разрешим это уравнение относительно второго аргумента:

$$F(\frac{y}{z}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = \varphi(\frac{y}{z}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = y\varphi(\frac{y}{z}).$$

Подставим начальные условия и найдем функцию φ в явном виде:

$$x^2 + y^2 + z^2\Big|_{\substack{y=x\\z=1}} = 2y^2 + 1 = y\varphi(\frac{y}{z})\Big|_{\substack{y=x\\z=1}} = y\varphi(y) \Rightarrow \varphi(y) = 2y + \frac{1}{y}.$$

Тогда

$$y\varphi(\frac{y}{z}) = 2\frac{y^2}{z} + z = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow 2y^2 + z^2 = z(x^2 + y^2 + z^2).$$

Итак, уравнение искомой поверхности равно $2y^2 + z^2 = z(x^2 + y^2 + z^2)$.
(На семинаре ещё решали задачу Коши $u_x + y^2u_y + u = 0$, $u|_{y=2} = x + 2$.)
Домашнее задание: № 1211, 1202, 1196, 1218 из того же задачника.