Урок 7. Резонаторы и волноводы

1. (Задача 2.32.) Показать, что в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками не могут распространяться чисто поперечные волны. Найти связь между поперечными компонентами полей и продольной составляющей электрического поля E_z для монохроматической Е-волны (или ТМ-волны), распространяющейся вдоль прямоугольного пустого волновода. Найти уравнение для составляющей поля E_z. То же для Н-волны (или ТЕ-волны).

Решение Волновод представляет собой полость неограниченной длины. Распространение электромагнитных волн в волноводе принципиально отличается от распространения неограниченных в пространстве плоских волн. Пусть длины сторон прямоугольного сечения равны a и b, ось Z направлена вдоль волновода, а среда, заполняющая волновод, характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями соответственно ε и μ.

Если в начале волновода (при $z = 0$) попытаться возбудить монохроматическую плоскую волну, то естественно допустить, что в волноводе возникает бегущая вдоль Z волна, для которой зависимость E и H от z дается множителем $e^{-ik_z z}$ с постоянным k_z, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H_0}(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{1}$$

Волновые уравнения для E и H имеют вид

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \tag{2}$$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \tag{3}$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Подставляя соотношения (1) в уравнения (2), (3), получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E_0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E_0}}{\partial y^2} = -\varkappa^2 \mathbf{E_0}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H_0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H_0}}{\partial y^2} = -\varkappa^2 \mathbf{H_0}, \tag{5}$$

где $\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_z^2$. Связь между векторами E и H определяется уравнениями

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{6}$$

Записывая эти уравнения по компонентам и подставляя в них решение в виде выражений (1), получаем

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{x0} = -ik_zE_{y0} - \frac{\partial E_{z0}}{\partial y}; \tag{7}$$

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{y0} = ik_zE_{x0} + \frac{\partial E_{z0}}{\partial x}; \tag{8}$$

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{z0} = \frac{\partial E_{xo}}{\partial y} - \frac{\partial E_{y0}}{\partial x}; \tag{9}$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{x0} = ik_zH_{y0} + \frac{\partial H_{z0}}{\partial y}; \tag{10}$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{y0} = -ik_zH_{x0} - \frac{\partial H_{z0}}{\partial x}; \tag{11}$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{z0} = \frac{\partial H_{xo}}{\partial y} - \frac{\partial H_{y0}}{\partial x}. \tag{12}$$

Формулы (7)–(12) позволяют выразить компоненты векторов E_{x0}, E_{y0}, H_{x0}, H_{y0} через E_{z0} и H_{z0}:

$$E_{x0} = -\frac{1}{\varkappa^2}\left(ik_z\frac{\partial E_{z0}}{\partial x} + \frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_{z0}}{\partial y}\right); \tag{13}$$

$$E_{y0} = -\frac{1}{\varkappa^2}\left(ik_z\frac{\partial E_{z0}}{\partial y} - \frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_{z0}}{\partial x}\right); \tag{14}$$

$$H_{x0} = -\frac{1}{\varkappa^2}\left(ik_z\frac{\partial H_{z0}}{\partial x} - \frac{i\varepsilon\omega}{c}\frac{\partial E_{z0}}{\partial y}\right); \tag{15}$$

$$H_{y0} = -\frac{1}{\varkappa^2}\left(ik_z\frac{\partial H_{z0}}{\partial y} + \frac{i\varepsilon\omega}{c}\frac{\partial E_{z0}}{\partial x}\right). \tag{16}$$

Обратим внимание, что формулы 13-16 получены для случая, когда зависимость всех полей от z и t дается множителем $e^{i(\omega t - k_z z)}$. Ничто не запрещает описывать те же волны комплексно сопряженным множителем $e^{i(k_z z - \omega t)}$. Но тогда все выражения для поперечных полей в формулах 13-16 изменят знак ввиду формальной замены $k_z \to -k_z$, $\omega \to -\omega$ (как, например, в учебнике В.И. Яковлева “Классическая электродинамика” Ч.2).

Как известно, для плоских волн векторы **E** и **H** перпендикулярны направлению распространения, т. е. если волна распространяется вдоль оси Z, как в нашем случае, то для такой волны $E_z = 0$ и $H_z = 0$. Из полученных формул (13)–(16) ясно, что E_{z0} и H_{z0} одновременно не могут быть равны нулю, поскольку в этом случае все компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ будут равны нулю, если только $\varkappa \neq 0$. Если $\varkappa = 0$, что означает $\omega^2 = v^2 k_z^2$ и имеет место для плоской монохроматической волны в неограниченной среде, то тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H_0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H_0}}{\partial y^2} = 0.$$

Магнитное поле в этом случае удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа с таким граничным условием, что на сторонах прямоугольника $x = 0, a$; $y = 0, b$ поле направлено вдоль границы. Решением такой краевой задачи, как известно, служит $\mathbf{H} = 0$. Но если отсутствует магнитное поле, то равно нулю и электрическое поле. Таким образом, чисто поперечные электромагнитные волны не могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками. Следует заметить, что этот вывод относится к любым волноводам, выполненным в виде простой трубы любого сечения, поскольку в процессе вывода мы нигде не использовали явный вид формы сечения.

Для E-волны, т.е. для волны, у которой

$$H_z = 0, E_z = E_{z0} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)},$$

из уравнений (13)–(16) получаем

$$E_{x0} = -\frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x},\; E_{y0} = -\frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y},\; H_{x0} = \frac{i\varepsilon\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y},\; H_{y0} = -\frac{i\varepsilon\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Компонента E_{z0} удовлетворяет уравнению

$$\Delta_2 E_{z0} + \varkappa^2 E_{z0} = 0,$$

где $\varkappa^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - k_z^2$, $v^2 = c^2/(\varepsilon\mu)$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Для H-волны в обеих частях приведенных выше формул следует сделать замены $E \leftrightarrow H$ и $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$.

2. (Задача 2.33.) Показать, что для E-волны (H-волны), распространяющейся вдоль прямоугольного пустого волновода, граничные условия для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выполнены, если на стенках волновода $E_z = 0$ ($\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$).

Решение Если $E_z = 0$ везде на границе, то согласно решению предыдущей задачи, в котором записаны связь между E_{x0}, E_{y0} и E_z, если $E_z = 0$ для стенок, у которых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ ($x = 0, x = a, y = 0, y = b$), то получается $E_\tau = 0$ и $H_n = 0$. Следовательно, для E-волны условие $E_z|_\Gamma = 0$ эквивалентно условию $E_\tau|_\Gamma = 0$ и $H_n|_\Gamma = 0$. Аналогичный результат получается для H-волны: из условия $\frac{\partial H_z}{\partial n}|_\Gamma = 0$ следует выполнение на границе условий $E_\tau|_\Gamma = 0$ и $H_n|_\Gamma = 0$.

3. (Задача 2.34.) Определить Е-волны (Н-волны), которые могут распространяться вдоль пустого волновода прямоугольного сечения $a \times b$. Найти критическую (наименьшую) частоту этих волн.

Решение Компонента поля $E_z(x, y)$ подчиняется двумерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \varkappa^2 E_z = 0$$

и граничному условию

$$E_z|_\Gamma = 0.$$

Будем решать это уравнение методом разделения переменных для чего предположим, что $E_z = X(x) \cdot Y(y)$. Подставляя это в волновое уравнение, получим

$$Y\frac{d^2 X}{dx^2} + X\frac{d^2 Y}{dy^2} + \varkappa^2 XY = 0.$$

разделим обе части уравнения на произведение $X \cdot Y$, получим

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} + \varkappa^2 = 0.$$

Поскольку сумма функции только от x и функции только от y равна константе во всей области определения, это возможно только тогда, когда каждая из них равна константе. Положим

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2,$$
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2.$$

Тогда

$$X(x) = A\sin k_x x + B\cos k_x x,$$
$$Y(y) = C\sin k_y y + D\cos k_y y.$$

Учитывая граничные условия $E_z(x = 0, y) = 0$, что эквивалентно условию $X(0) = 0$ и $E_z(x, y = 0) = 0$, что эквивалентно $Y(0) = 0$, получим

$$E_z(x, y) = A\sin k_x x \cdot \sin k_y y,$$

где k_x и k_y удовлетворяют условию

$$\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2, \text{ или, другими словами, } \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Для удовлетворения условий на границах $x = a$ и $y = b$

$$k_{x,n_x} a = n_x \pi, \;\; k_{y,n_y} b = n_y \pi,$$

где

$$n_x = 1, 2, 3..., n_y = 1, 2, 3...$$

Общее решение тогда запишется в виде

$$E_z\left(x, y\right) = \sum_{n_x, n_y} A_{nx,ny} \sin \frac{n_x \pi}{a} x \sin \frac{n_y \pi}{b} y$$

$$\frac{n_x^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n_y^2 \pi^2}{b^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = 0,$$
$$n_x \neq 0, n_y \neq 0,$$
$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + \left(\frac{n_x \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{b}\right)^2.$$

$$\omega_{\min}^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

Для H-волны, поскольку $H \sim \cos \frac{n_x \pi x}{a} \cos \frac{n_y \pi y}{b}$ минимальное значение частоты

$$\omega_{\min} = \frac{c\pi}{a}, \; (a > b, \; n_x = 1, \; n_y = 0).$$

4. (Задача 2.35.) Найти распределение тока в стенках пустого волновода прямоугольного сечения $a \times b$, в котором распространяется E_{11}-волна (H_{10}-волна).

Решение Для H_{10}-волны: в боковых стенках $\eta_x = \eta_z = 0$ и $\eta_y = \pm H_z|_{x=0,a}$; на «крыше» и «дне» $-\eta_y = 0, \eta_x = \pm \frac{cH_z(x)}{4\pi}|_{y=0,b}, \eta_z = \mp \frac{c}{4\pi} H_x\left(x\right)|_{y=0,b}$, где H_x, H_z – компоненты поля в волноводе.

Для E_{11}-волны: в боковых стенках $\eta_x = \eta_y = 0$ и $\eta_z = \pm \frac{c}{4\pi} H_y\left(y\right)|_{x=0,a}$; на «крыше» и «дне» $\eta_x = \eta_y = 0$, и $\eta_z = \mp \frac{c}{4\pi} H_x\left(x\right)|_{y=0,b}$, где H_x, H_y – компоненты поля в волноводе, η – поверхностная плотность тока.

5. (Задача 2.36.) На какой волне должен работать излучатель, чтобы возбудить один тип волны в прямоугольном волноводе с a=5 см, b=3 см?

Решение Для решения этой задачи необходимо определить какая из минимальных частот (для Е-волны или для Н-волны) меньше и длина волны излучения должна соответствовать зазору между наименьшей $\omega_{\min 1}$ и следующей за ней частотой $\omega_{\min 2}$, т. е.

$$\omega_{\min 1} < \omega < \omega_{\min 2}.$$

Дисперсионное уравнение для прямоугольного волновода имеет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2.$$

Отсюда следует, что для E-волны минимальное значение частоты

$$\omega_{Emin} = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2},$$

а минимальное значение частоты для H-волны

$$\omega_{Hmin} = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{a}\right)^2} = \frac{\pi c}{a}.$$

Таким образом ясно, что минимальная допустимая частота излучателя должна быть больше $\omega > \omega_{Hmin} = \omega_{H_{10}}$, но при этом возникает вопрос, каково ограничение сверху. Для решения этого вопроса надо сравнить 2-ые частоты для E-волны и H-волны. Очевидно, что для $a > b$ частота $\omega_{H_{01}} < \omega_{E_{11}} < \omega_{H_{20}}$ и, следовательно,

$$\omega_{\min} < \omega < \omega_{H_{01}},$$

$$\omega_{H_{01}} = \frac{c\pi}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1.67\omega_{\min}$$

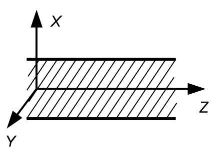
$$\omega_{\min} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 3,14}{5} = 2 \cdot 10^{10} \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

В волноводе возбуждается только H_{10}-волна, когда

$$\omega_{\min} \leqslant \omega \leqslant 1,67\omega_{\min}, \quad \omega_{\min} = 1,9 \cdot 10^{10}\text{рад/сек}.$$

6. (Задача 2.38.) Показать, что бесконечно протяженный диэлектрический слой с проницаемостями ε и μ, заполняющий в вакууме область $-a \leqslant x \leqslant a$, действует как волновод. Определить типы волн, которые могут распространяться в таком волноводе (ограничиться случаем, когда векторы поля не зависят от координаты y).

Решение Волны в системе, показанной на рисунке, удовлетворяют волновому уравнению



$$\Delta\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\mathbf{H}_0(\mathbf{r},t) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}_0(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

Будем рассматривать гармонические волны с частотой ω, распространяющиеся вдоль оси z, т.е. искать решения в виде $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} \cdot e^{i(k_z z - \omega t)}$ и $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H} \cdot e^{i(k_z z - \omega t)}$.

Тогда для E-волны (волны электрического типа) получаются решения двух типов.

а) ЧЕТНЫЕ для поперечных полей решения:

$$E_z(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} A \sin \varkappa x \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & |x| \leqslant a, \\ A \sin \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \mathrm{e}^{-sx} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & x > a, \\ -A \sin \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \mathrm{e}^{sx} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & x < -a. \end{cases}$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} A \frac{i\varepsilon\omega}{c\varkappa} \cos \varkappa x \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & |x| \leqslant a \\ -A \sin \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \frac{i\omega}{cs} \, \mathrm{e}^{-s|x|} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & |x| > a. \end{cases}$$

$$H_x(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} A \frac{ik_z}{\varkappa} \cos \varkappa x \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & |x| \leqslant a \\ A \sin \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \frac{ik_z}{s} \, \mathrm{e}^{-s|x|} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & |x| > a. \end{cases}$$

Условия на $\varkappa$ и s:

$$\operatorname{tg} \varkappa a = -\frac{\varepsilon s}{\varkappa}, \ \ (\varepsilon\mu - 1)\frac{\omega^2}{c^2} = \varkappa^2 + s^2$$

б) НЕЧЕТНЫЕ для поперечных полей решения:

$$E_z(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} B \cos \varkappa x \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & |x| \leqslant a, \\ B \cos \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \mathrm{e}^{-sx} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & x > a, \\ B \cos \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \mathrm{e}^{sx} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & x < -a. \end{cases}$$

$$H_y(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} B \frac{i\varepsilon\omega}{c\varkappa} \sin \varkappa x \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & |x| \leqslant a \\ -B \cos \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \frac{i\omega}{cs} \, \mathrm{e}^{-sx} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & x > a, \\ B \cos \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \frac{i\omega}{cs} \, \mathrm{e}^{sx} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & x < -a. \end{cases}$$

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} B \frac{ik_z}{\varkappa} \sin \varkappa x \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & |x| \leqslant a \\ B \cos \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \frac{ik_z}{s} \, \mathrm{e}^{-sx} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & x > a \\ -B \cos \varkappa a \, \mathrm{e}^{sa} \, \frac{ik_z}{s} \, \mathrm{e}^{sx} \, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}, & x < -a. \end{cases}$$

Условия на $\varkappa$ и s:

$$\operatorname{tg} \varkappa a = \frac{\varkappa}{\varepsilon s}, \ \ (\varepsilon\mu - 1)\frac{\omega^2}{c^2} = \varkappa^2 + s^2.$$

Волны магнитного типа: решения получаются из решений (а, б) заменой $E \leftrightarrow H$, $\varepsilon \leftrightarrow \mu$.

Волноводные свойства слоя проявляются в том, что поток энергии из диэлектрического слоя наружу, как это следует из полученного решения, равен нулю.

7. (Задача 2.39.) На вход в волновод подается сигнал $E(t)\cos(\omega_* t)$, где частотный спектр функции $E(t)$ – в пределах $(0, \omega_0)$, а ω_* – критическая частота волновода. Найти границы спектра на выходе волновода.

Решение Рассмотрим гармонику с максимальной частотой

$$\sin(\omega_* t) \cdot \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left[\sin(\omega_* + \omega_0) t + \sin(\omega_* - \omega_0) t\right].$$

Отсюда следует, что спектр сигнала на выходе $\omega_* \leqslant \omega \leqslant \omega_* + \omega_0$.