# Домашняя работа к занятию 18.

**1.1** Найдите все положения равновесия системы и исследуйте их на устойчивость по первому приближению: $\begin{cases} \dot{x} = x + y - 1 \\ \dot{y} = -\ln(x^2 + y) \end{cases}$

**1.2** Построив функцию Ляпунова в виде $H(x; y; z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, исследуйте на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases} \dot{x} = -z + zy \\ \dot{y} = -y - 8xz \\ \dot{z} = x + xy \end{cases}$

**2.1** Исследуйте на устойчивость решение $x = t$ уравнения
$\dddot{x} - \cos\ddot{x} + \dot{x} + x = t$

**2.2** Исследуйте на устойчивость решение $(0; -1)$ системы
$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - xy - 1 \\ \dot{y} = -x + 4y + x^2 + y^3 + 3y^2 + 2 \end{cases}$

**2.3** Построив функцию Четаева в виде $V(x; y) = ax + by$, покажите, что точка $(0; 0)$ является неустойчивым положением равновесия для системы $\begin{cases} \dot{x} = x^4 \\ \dot{y} = 2x^2y^2 - y^2 \end{cases}$

**3.1** Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы в зависимости от значения параметра $a$: $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + y^2 \\ \dot{y} = x + y + x^2 \end{cases}$

**3.2** Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы
$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2x^3 - y^3 \\ \dot{y} = x + y + y^3 - x^3 \end{cases}$

## Ответы.

**1.1** Положения равновесия $(1;0)$ и $(0;1)$.

Матрица линеаризованной системы $\mathbf{A}\big|_{(1;0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, собственные числа $\lambda_{1;2} = \pm i$. По первому приближению исследовать нельзя.

Матрица линеаризованной системы $\mathbf{A}\big|_{(0;1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, собственные числа $\lambda_{1;2} = \pm 1$. Положение равновесия неустойчиво.

**1.2** Функция Ляпунова $H(x;y;z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2$. Производная в силу системы $\frac{d}{dt}H(x;y;z) = -2y^2 \leqslant 0$. Нулевое решение устойчиво, и можно показать, что асимптотически устойчиво.

**2.1** Характеристический многочлен линеаризованного уравнения $P_3(\lambda) = \lambda^3 + \lambda + 1$. Решение неустойчиво, так как не выполнено необходимое условие.

**2.2** Замена $u = y + 1$ приводит к системе $\begin{cases} \dot{x} = -x - u - xu \\ \dot{u} = -x + u + x^2 + u^3 \end{cases}$

Матрица линеаризованной системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, собственные числа $\lambda_{1;2} = \pm\sqrt{2}$. Положение равновесия неустойчиво.

**2.3** Функция Четаева $V(x;y) = x - y$.

**3.1** Характеристический многочлен линеаризованной системы $P_2(\lambda) = \lambda^2 - (a+1)\lambda + (a+2)$.

При $-2 < a < -1$ корни лежат в левой полуплоскости, следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво.

При $a = -2$ получаем систему $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y + y^2 \\ \dot{y} = x + y + x^2 \end{cases}$ Матрица линеаризованной системы вырождена ($\det \mathbf{A} = 0$). Исследование по первому приближению невозможно. Но для нелинейной системы можно построить функцию Четаева $V(x; y) = x + 2y$. Ее производная в силу системы $\dfrac{d}{dt}V(x; y) = 2x^2 + y^2$ положительно определена. Нулевое решение неустойчиво.

При $a = -1$ получаем систему $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + y^2 \\ \dot{y} = x + y + x^2 \end{cases}$. Характеристический многочлен линеаризованной системы $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 1$, корни чисто мнимые. Исследование по первому приближению невозможно. Первый интеграл нелинейной системы $F(x; y) = \dfrac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{3}(x^3 - y^3)$ имеет локальный минимум в точке $(0; 0)$. Таким образом, точка $(0; 0)$ — центр. Нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

**3.2** Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму $H(x; y) = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2$. Ее производная в силу системы $\dfrac{d}{dt}H(x; y) = 2(x^4 + y^4)$ также положительно определена, поэтому нулевое решение неустойчиво.