Дополнительные главы вариационного исчисления

А.А.Егоров

Новосибирский государственный университет

2020

Вариационное исчисление — раздел анализа, в котором рассматриваются задачи о нахождении минимального (или максимального) значения некоторого интеграла за счет подходящего выбора функции, входящей заранее известным способом в подынтегральное выражение.

Пример (Задача о брахистохроне). В вертикальной плоскости даны две точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой (рис. 1). Определить путь, двигаясь по которому под влиянием только собственной тяжести, материальная точка M переместится из точки A в точку B за кратчайшее время.

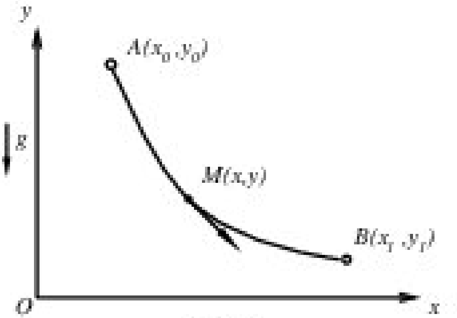


Рис. 1

Будем считать, что на плоскости введена декартова ортогональная система координат x, y; точки A и B имеют в этой системе координаты (x_0, y_0) и (x_1, y_1) соответственно; ускорение свободного падения направлено вдоль отрицательной полуоси y и равно g; масса точки M равна m.
Пусть нам задана некоторая непрерывная функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, по графику которой, как по рельсам, материальная точка M движется под действием только силы тяжести. Положение точки M на такой кривой будем задавать указанием её x-координаты в каждый момент времени t (т. е. указанием некоторой гладкой функцией $x : [0, T] \to \mathbb{R}$, где T — время, затрачиваемое на переход из точки A в точку B по данной кривой).

Полная энергия материальной точки M в начальный момент движения равна mgy_0 (начальная скорость равна нулю). Полная энергия материальной точки M в момент прохождения ею точки с координатами $(x, y(x))$ равна $mgy(x) + mv^2/2$, где $v = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} = \pm\sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx/dt$ — длина вектора скорости точки M. Мы выберем перед корнем знак плюс, поскольку $v \geq 0$ и $dx/dt \geq 0$. Первое из этих неравенств очевидно, а второе вытекает из нашего допущения о том, что точка M движется по графику функции $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ (движение, начинающееся из точки $(x_0, y(x_0))$, возможно лишь в направлении слева направо; при этом x-координата точки M монотонно возрастает в процессе всего движения).

Закон сохранения энергии даёт $mgy_0 = mgy(x) + mv^2/2$. Откуда для всех значений $t \in [0, T]$ получаем

$$\sqrt{2g(y_0 - y(x(t)))} = v = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}(x(t))\right)^2}\,\frac{dx}{dt}.$$

Следовательно, для полного времени, затрачиваемого на переход из точки A в точку B, мы получаем

$$T = \int\limits_0^T dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{dx}\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}}\,dx. \qquad (1)$$

Тем самым мы выразили с помощью интеграла время, затрачиваемое точкой для прохождения по кривой, являющейся графиком функции $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$. С математической точки зрения задача о брахистохроне состоит в том, чтобы найти функцию $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, для которой интеграл (1) выражает время движения точки по её графику и которая минимизирует это время.

Обсудим более подробно, какой должна быть функция y, чтобы интеграл (1) выражал время прохождения по её графику от A до B. Ясно, что эта функция должна быть непрерывна в замкнутом промежутке $[x_0, x_1]$ и должна удовлетворять граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Для того чтобы интеграл (1) мог быть написан, функция y должна иметь производную $y'(x)$ в открытом промежутке (x_0, x_1). С концевыми точками $x = x_0$ и $x = x_1$ дело обстоит иначе: интеграл (1) может в них сходиться как несобственный, даже если у функции y в этих точках нет производной (последнее может случиться, например, из-за того, что касательная становится вертикальной). Чтобы обеспечить себе в будущем достаточную свободу в манипулировании с интегралом (1), мы, помимо вышеуказанных «естественных условий на y», будем предполагать, что y имеет вторую непрерывную производную на открытом интервале (x_0, x_1).

Подведём итог для **Задачи о брахистохроне**:
Среди всех непрерывных функций $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, которые дважды непрерывно дифференцируемы в открытом интервале (x_0, x_1) и для которых интеграл

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}}\, dx \tag{2}$$

сходится, найти ту, которая доставляет интегралу $I[y]$ минимальное значение.

Зарождение вариационного исчисления

В отличие от многих разделов классической математики для вариационного исчисления точно известно время и место его зарождения, а также отец-основатель.

Последним является Иоганн Бернулли (Johann I Bernoulli), принадлежавший известной династии учёных Бернулли, происходящей из Голландии.

Иоганн Бернулли (1667–1748)

Его предки вместе с сотнями тысяч других голландцев покинули родину (Антверпен) вследствие жестоких преследований испанского правителя герцога Альбы и переехали во Франкфурт, а через некоторое время — в Базель, бывший тогда богатым торговым, промышленным и культурным центром. Они приняли базельское гражданство в 1622 году.

Иоганн Бернулли родился и воспитывался в Базеле. Некоторое время он обучался торговому делу, занимался медициной и химией, но потом пошёл по стопам своего старшего брата Якова Бернулли (Jacob I Bernoulli), крупнейшего математика того времени. К 18 годам Иоганн уже окончил университет. В 1690 году он едет в Женеву, а затем в Париж, где продолжает заниматься математикой.

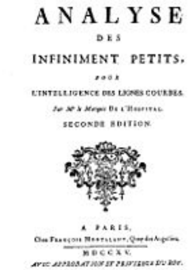
Яков Бернулли (1655–1705)

В 1684 году Г. Лейбницем (Gottfried Wilhelm von Leibniz) была изложена сущность дифференциального и интегрального исчисления. Братья Бернулли с жадностью осваивали его методы.

Г. Лейбниц (1646–1716)

Первый учебник по анализу «Анализ бесконечно малых» (фр. Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes) появился в 1696 году. Он был написан маркизом Г. Лопиталем (Guillaume F. de l'Hospitale), учеником Иоганна Бернулли, опубликовавшим лекции своего учителя по дифференциальному исчислению.

Г. Лопиталь (1661–1704)



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
M D C C X V.

«Анализ бесконечно малых»

Этот учебник, как и вся преподавательская деятельность И. Бернулли, сильно способствовал распространению анализа бесконечно малых. Именно в этой книге впервые появилось «правило Лопиталя», которое по существу принадлежит И. Бернулли.

Значение этой книги для распространения нового учения трудно переоценить — не только потому, что она была первой, но и благодаря ясному изложению, прекрасному слогу, обилию примеров. Как и конспект Бернулли, учебник Лопиталя содержал множество приложений; собственно, они занимали львиную долю книги — 95 %.

Практически весь изложенный Лопиталем материал был почерпнут из работ Лейбница и Иоганна Бернулли (авторство которых в общей форме было признано в предисловии). Кое-что, впрочем, Лопиталь добавил и из своих собственных находок в области решения дифференциальных уравнений.

Как было уже отмечено, в предисловии Лопиталь указывает, что без всякого стеснения пользовался открытиями Лейбница и братьев Бернулли и «не имеет ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно». Современников, однако, сильно озадачило то, что Иоганн Бернулли предъявил претензии на все сочинение Лопиталя целиком.
Объяснение этой необычной ситуации — в материальных затруднениях Иоганна после женитьбы. Двумя годами ранее, в письме от 17 марта 1694 г. Лопиталь предложил Иоганну ежегодную пенсию в 300 ливров, с обещанием затем её повысить, при условии, что Иоганн возьмет на себя разработку интересующих его вопросов и будет сообщать ему, и только ему, свои новые открытия, а также никому не пошлёт копии своих сочинений, оставленных в своё время у Лопиталя.

Этот тайный контракт пунктуально соблюдался два года, до издания книги Лопиталя. Позднее Иоганн Бернулли — сначала в письмах к друзьям, а после смерти Лопиталя (1704) и в печати — стал защищать свои авторские права.
Русский перевод — Лопиталь Г.Ф.. Анализ бесконечно малых. М.-Л.: ГТТИ, 1935. (Мат. анализ на EqWorld)

Другим учеником И. Бернулли был великий математик Л. Эйлер (Leonhard Euler), вся творческая жизнь которого тесно связана с Петербургской Академией наук, который 31 год проработал в Петербурге, там умер и похоронен.

Л. Эйлер (1707–1783)

В 1695 году Иоганн занял кафедру математики в Гронингенском университете (Нидерланды). По смерти старшего брата, Якова, занимавшего кафедру математики в Базельском университете, Иоганн переходит на место брата и занимает его в течение всей оставшейся жизни.

В июне 1696 года в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» («Труды учёных») на латинском языке было опубликовано следующее письмо Иоганна Бернулли, которое по праву считается первой публикацией по вариационному исчислению:

НОВАЯ ЗАДАЧА,
К РАЗРЕШЕНИЮ КОТОРОЙ
ПРИГЛАШАЮТСЯ МАТЕМАТИКИ

В вертикальной плоскости даны две точки A и B (рис. 11). Определить путь AMB, спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести, тело M, начав двигаться из точки A, дойдёт до точки B за кратчайшее время.

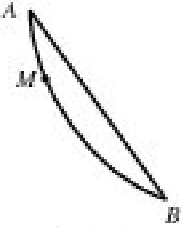


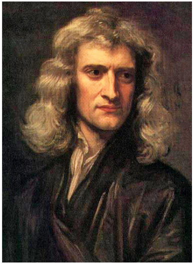
Рис. 11

Для того, чтобы вызвать интерес со стороны любителей подобных вопросов и побудить их охотнее предпринять попытку разрешения указанной задачи, довожу до их сведения, что эта задача не сводится к пустой умственной спекуляции, лишённой какого бы то ни было практического значения, как это может кому-либо показаться. В действительности она представляет очень большой практический интерес и притом, кроме механики, также и для других дисциплин, что может всем показаться неправдоподобным.

Между прочим (указываю это с целью предупредить возможное неправильное суждение), хотя прямая AB и является кратчайшей линией между крайними точками A и B, тем не менее тело проходит её не в кратчайшее время и существует кривая AMB, хорошо известная геометрам. Я назову эту линию, если по истечении текущего года никто другой её не назовёт.

Кривую наискорейшего спуска, о которой идёт речь в задаче Иоганна Бернулли, стали называть брахистохронной кривой или брахистохроной (от греческих слов $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ — кратчайший и $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ — время).
На решение предложенной И. Бернулли задачи был дан полугодовой срок. За это время решение прислал только один Г. Лейбниц. Однако по предложению последнего И. Бернулли продлил срок до пасхи 1697 года. Для лучшей информации математиков, живущих вне Германии, И. Бернулли повторил задачу в статье «Программа, изданная в Гронингене в 1697 году...», вышедшей на латинском языке в голландском городе Гронингене.

На этот раз были даны ещё три решения. Первое принадлежало Якову Бернулли, второе — Г. Лопиталю, третье же появилось в Трудах Лондонского королевского общества без подписи автора. Но И. Бернулли узнал в авторе И. Ньютона, заметив при этом, что «льва узнают по когтям».



И. Ньютон (1642–1727)

Метод решения, полученного 26 января 1697 года Исааком Ньютоном, задачи о брахистохроне стал одним из основополагающих в вариационном исчислении.
Таковым исторически было начало вариационного исчисления.