Сокращённая и минимальная ДНФ

Содержание

Сокращенная ДНФ

Определение:

Сокращенная ДНФ (англ. *reduced disjunctive normal form*) — форма записи функции, обладающая следующими свойствами:

- любые два слагаемых различаются как минимум в двух позициях,
- ни один из конъюнктов не содержится в другом.

Например: $(x \land y)$ содержится в $(x \land y \land z)$.

Функцию можно записать с помощью сокращенной ДНФ не единственным способом.

Запишем функцию $\langle x, y, z \rangle$ (медиана) в виде совершенной ДНФ: $(x \land y \land z) \lor (x \land y \land \neg z) \lor (x \land \neg y \land z) \lor (\neg x \land y \land z)$. Известно, что это выражение равносильно следующему: $((x \land y \land z) \lor (x \land y \land \neg z)) \lor ((x \land \neg y \land z) \lor (x \land y \land z)) \lor ((\neg x \land y \land z) \lor (x \land y \land z))$. Вынесем в каждой скобке общий конъюнкт (например, в первой $(x \land y \land z) \lor (x \land y \land \neg z) = (x \land y) \lor (z \land \neg z)$. Так как $z \land \neg z = 0$, то такой конъюнкт не влияет на значение выражения, и его можно опустить. Получим в итоге формулу $(x \land y) \lor (y \land z) \lor (x \land z)$.

Минимальная ДНФ

Определение:

Минимальная ДНФ (англ. *minimal disjunctive normal form*) — такая сокращенная ДНФ, в которой содержится минимальное количество вхождений переменных.

Каждая минимальная ДНФ является сокращенной, но не каждая сокращенная — минимальна. Например, запись $(x \land y) \lor (y \land z) \lor (x \land z)$ является минимальной ДНФ для медианы (она же сокращенная, как видно в примере выше); а запись $(x \land y \land \neg z) \lor (\neg x \land y \land z) \lor (x \land z)$ — не минимальная, но сокращенная ДНФ.

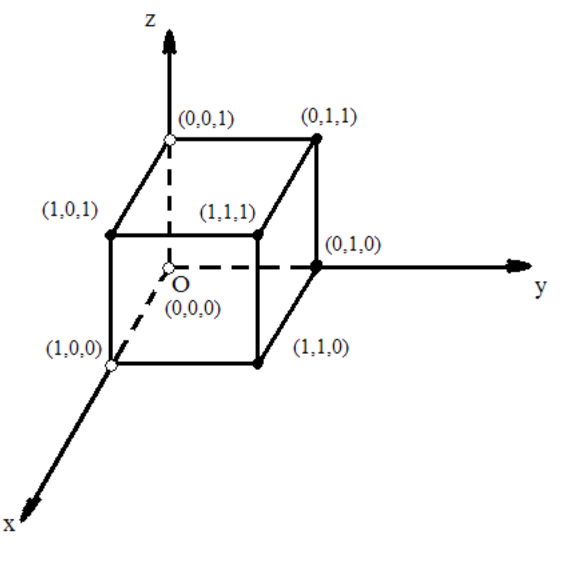
Минимизация ДНФ

Рассмотрим несколько способов минимизации дизъюнктивных нормальных форм:

Визуализация гиперкубами

Этот способ работает при количестве переменных не больше трёх (в противном необходимо вводить четвёртое или следующие за ним измерения для представления фигур). Сначала мы рисуем куб в системе отсчёта $Oxyz$ (названия координатных осей соответствуют названиям переменных). Затем каждую вершину обрабатываем следующим образом:

Описание алгоритма	Пример
Если у нас конъюнкт, переменные в котором равны соответствующим координатам вершины, то в эту вершину мы помещаем закрашенный чёрным кружок.	Вершине с координатами $(0, 1, 1)$ соответствует конъюнкт $(\neg X \land Y \land Z)$, он равен единице при $X = 0, Y = 1$ и $Z = 1$)
В противном случае мы помещаем в вершину закрашенный белый кружок.	Для такой ДНФ: $(X \land \neg Y \land Z) \lor (X \land Y \land Z) \lor (\neg X \land Y \land Z) \lor (\neg X \land Y \land \neg Z) \lor (X \land Y \land \neg Z)$ мы получим следующий гиперкуб (см. рисунок)
Далее обработка гиперкуба идёт следующим образом:	
пока у нас есть незакрашенные вершины, мы выбираем грань, либо вершину, либо ребро, на которых больше всего закрашенных	



чёрным вершин и ещё не обработанных вершин.

Если в данном гиперкубе есть грань, все вершины на которой закрашены чёрным, то мы можем записать её в качестве конъюнкта, где будет только переменная с неизменяющейся соответствующей ей координатой.

Грань, на которой лежат закрашенные вершины $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1)$ мы можем записать как конъюнкт Y.

Теперь мы смотрим, остались ли на рёбрах куба закрашенные и не отмеченные нами в ДНФ вершины. Если — да, то рёбра с такими вершинами мы можем записать в качестве конъюнкта, где будут только переменные с неизменяющимися соответствующим им координатами

Ребро, соединяющее закрашенные вершины $(0, 1, 1)$ и $(1, 1, 1)$ мы можем записать как конъюнкт $(Y \land Z)$.

И если после такой обработки у нас остались свободные вершины, мы просто переписываем координаты каждой такой вершины в отдельный конъюнкт, равный 1.

Вершину $(1, 0, 1)$ мы бы переписали как конъюнкт $(X \land \neg Y \land Z)$.

В итоге нашу изначальную ДНФ можно записать как $(Y) \lor (X \land Z)$.

Карты Карно

Построим следующую таблицу $n \times n$, где n — число переменных:

		w	w	$\neg w$	$\neg w$
		z	$\neg z$	$\neg z$	z
y	x				
y	$\neg x$				
$\neg y$	$\neg x$				
$\neg y$	x				

Теперь для каждого конъюнкта мы помечаем соответствующую ему ячейку таблицы.

Например, ДНФ

$$(\neg X \land Y \land \neg Z \land W) \lor (\neg X \land Y \land \neg Z \land \neg W) \lor (\neg X \land \neg Y \land \neg Z \land W) \lor (\neg X \land \neg Y \land \neg Z \land \neg W) \lor (\neg X \land \neg Y \land Z \land \neg$$

будет выглядеть на картах Карно так:

		w	w	$\neg w$	$\neg w$
		z	$\neg z$	$\neg z$	z
y	x				
y	$\neg x$		1	1	
$\neg y$	$\neg x$		1	1	
$\neg y$	x			1	1

Теперь покрываем прямоугольниками (длины сторон которых — степени двойки ($1, 2, 4$)) те ячейки карт Карно, которые содержат в себе единицу (на каждом ходу мы выбираем такой прямоугольник, чтобы он покрывал наибольшее количество ещё не покрытых клеток) до тех пор, пока не покроем все такие ячейки.

Для карт Карно на примере это выглядело бы так:

		w	w	$\neg w$	$\neg w$
		z	$\neg z$	$\neg z$	z
y	x				
y	$\neg x$		1	1	
$\neg y$	$\neg x$		1	1	1
$\neg y$	x			1	1

После этого записываем каждый прямоугольник в виде конъюнкта, в котором будут указаны только те переменные, которые одинаковы для всех ячеек этого прямоугольника.

То есть, в этом примере получаем: $(\neg Z \land \neg X) \lor (\neg W \land \neg Y)$

Метод Квайна

Этот метод основан на применении двух основных операций:

- Операция попарного неполного склеивания:

  $$Ax \lor A\neg x = Ax \lor A\neg x \lor A$$

- Операция элементарного поглощения:

$A\tilde{x} \vee A = A$
(где A — некоторая элементарная конъюнкция, то есть конъюнкт, в который каждая из переменных входит не более одного раза)

Например:

Пусть $A = y\neg z\neg w$, тогда:

- Операция попарного неполного склеивания:

  $y\neg z\neg wx \vee y\neg z\neg w\neg x = y\neg z\neg wx \vee y\neg z\neg w\neg x \vee y\neg z\neg w$

- Операция элементарного поглощения:

  $y\neg z\neg w\tilde{x} \vee y\neg z\neg w = y\neg z\neg w$

Метод состоит в последовательном выполнении всех возможных склеиваний и затем всех поглощений частей СДНФ пока это может быть осуществимо.

Описание алгоритма

- Исходным является множество пар вида Ax или $A\neg x$
- Выполняются все возможные операции неполного попарного склеивания для элементарных конъюнкций длины n (где n — число аргументов).
- Выполняются все возможные операции элементарного поглощения для элементарных конъюнкций длины $n-1$ (общая часть "p" имеет длину $n-1$)
- В результате получилось множество элементарных конъюнкций, разделяемых на два подмножества (по длине):
  - подмножество элементарных конъюнкций длины n (оставшиеся)
  - подмножество элементарных конъюнкций длины $n-1$
- Если множество элементарных конъюнкций длины $n-1$ не пусто, то заново выполняются операции неполного попарного склеивания и элементарного поглощения для конъюнкций длины $n-1$ и так далее.

Алгоритм завершается, когда подмножество является пустым, либо нельзя выполнить ни одной операции неполного попарного склеивания. После выполнения этого алгоритма будет получена сокращенная (но еще не минимальная) форма.

Переход от сокращённой формы к минимальной осуществляется с помощью специальной таблицы. Члены СДНФ заданной функции вписываются в столбцы, а в строки — члены сокращённой формы. Отмечаются столбцы членов СДНФ, которые поглощаются отдельными элементами сокращённой формы.

Члены сокращённой формы, не подлежащие исключению, образуют ядро. Такие члены определяются по вышеуказанной матрице. Для каждой из них имеется хотя бы один столбец, перекрываемый только этим членом.

Для получения минимальной формы достаточно выбрать из членов сокращённой формы, не входящих в ядро, такое минимальное их число с минимальным количеством букв в каждом из этих членов, которое обеспечит перекрытие всех столбцов, не перекрытых членами ядра.

Пример

Функция от четырёх аргументов задана следующей таблицей:

Набор $xyzw$	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Значение исходной функции	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Проведём операции неполного склеивания и поглощения:

№	**Элементарная конъюнкция**	**Поглощение**
1	$\neg x\neg y\neg z\neg w$	$+$
2	$\neg xy\neg z\neg w$	$+$
3	$x\neg yz\neg w$	$+$
4	$x\neg yzw$	$+$
5	$xy\neg z\neg w$	$+$
6	$xy\neg zw$	$+$
7	$xyz\neg w$	$+$
8	$xyzw$	$+$

№ склеивания	Результат
$1-2$	$\neg x \neg z \neg w$
$2-5$	$y \neg z \neg w$
$3-4$	$x \neg y z$
$3-7$	$\neg x \neg z \neg w$
$4-8$	xzw
$5-6$	$xy\neg z$
$5-7$	$xy\neg w$
$6-8$	xyw
$7-8$	xyz

На данном шаге все элементы вида Ax или $A\neg x$ участвовали в операциях попарного неполного склеивания и были поглощены своими собственными частями. Поэтому элементы сокращённой ДНФ на этом шаге не получены.

№	Элементарная конъюнкция	Поглощение
1	$\neg x \neg z \neg w$	
2	$y \neg z \neg w$	
3	$x \neg y z$	$+$
4	$\neg x \neg z \neg w$	$+$
5	xzw	$+$
6	$xy\neg z$	$+$
7	$xy\neg w$	$+$
8	xyw	$+$
9	xyz	$+$

№ склеивания	Результат
$3-9$	xz
$4-5$	xz
$6-9$	xy
$7-8$	xy

На данном этапе получаем элементы сокращённой ДНФ $\neg x \wedge \neg z \wedge \neg w$ и $y \wedge \neg z \wedge \neg w$

№	Элементарная конъюнкция	Поглощение
1	xz	
2	xy	

Обе элементарные конъюнкции на данном шаге являются элементами сокращённой ДНФ.

В результате выполнения алгоритма мы получаем следующую сокращённую ДНФ: $(\neg x \wedge \neg z \wedge \neg w) \vee (y \wedge \neg z \wedge \neg w) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$

Переход от сокращённой формы к минимальной:

- Единицы ДНФ, покрываемые элементами Ax или $A\neg x$ обозначаются "+". Пары Ax и $A\neg x$, попадающие в ядро помечаются "*".
- Единицы функции, которые покрываются только каким-то одним конъюнктом из системы элементов сокращённой ДНФ, помечаются “>”.
- Единицы функции, покрываемые ядром, но не покрываемые только каким-то одним конъюнктом из системы элементов сокращённой ДНФ помечаются “>>”.

	$\neg x \neg y \neg z \neg w >$	$\neg x y \neg z \neg w >>$	$x \neg y z \neg w >$	$x \neg y z w >$	$x y \neg z \neg w >>$	$x y \neg z w >$	$x y z \neg w >>$	$x y z w >>$
$\neg x \neg z \neg w^*$	$+$	$+$						
$y \neg z \neg w$		$+$			$+$			
xz^*			$+$	$+$			$+$	$+$
xy^*					$+$	$+$	$+$	$+$

На основе этой таблицы получим ядро $(\neg x \wedge \neg z \wedge \neg w) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$, которое является также и минимальной ДНФ.

См. также

- ДНФ
- КНФ

Источники информации

- Минимизация логических функций методом Куайна — Википедия (http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B8%D0%BD%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85_%D

1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%BC_%D0%9A%D1%83%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%B0)
- Метод Квайна (http://matrixcalc.org/pf1.html)
- Карта Карно — Википедия (http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B0_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BD%D0%BE)
- Минимизация булевых функций в классе ДНФ (http://vuz.exponenta.ru/PDF/book/kv.html)
- Минимизация ДНФ методом Квайна (http://tablica-istinnosti.ru/minimizatsiya-dnf-metodom-kvayna.html)