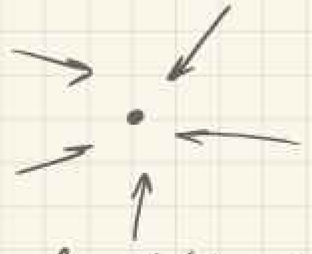
# Одномерное движение. Движение в центральном поле

классификация сил:



$$f_i = f_i(t, \bar r, \dot{\bar r}, m\dots)$$

- $\bar f = -\dot{\bar r}\cdot k(t, \bar r, \dots)$ — диссипативная
- $\bar f = \bar f(t, \bar r, \cancel{\dot{\bar r}}, \dots)$ — тело движется в поле силы
- $\bar f = \bar f(\cancel{t}, \bar r, \dots)$ — стационарная сила
- $\bar f = \bar f(\cancel{t}, \bar r, \dots)$ + $\oint f\,dl = 0\ \forall L$ — консервативная сила

понятие потенциала для консервативных сил:

$$U(\bar r) = -\int_{r_0}^{\bar r} f(r)\,d\bar l$$

( – работа $f$ по перемещ. тела из $\bar r_0 \to \bar r$ )

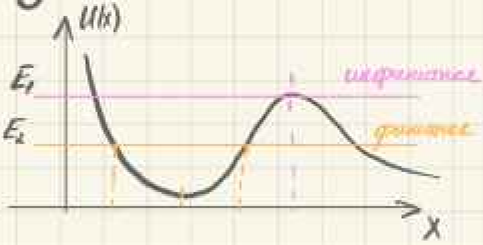
при малом перемещении вдоль $x$:

$$\bar f = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\nabla U(\bar r) = -\frac{\partial U(\bar r)}{\partial r}$$

**одномерное движение:** движение описывается одним параметром

( II з-н Н: $m\ddot x = f(x) \Rightarrow \ddot x = \frac{d v}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow f(x)/m = \ddot x = \frac12\, dv^2/dx \Rightarrow mv^2/2 = \int f(x)dx + const$ )

## движение на плоскости:





$$E = \frac{mv^2}{2} + U(x) \Rightarrow v = \dot x = \pm\sqrt{2/m\,(E - U(x))}$$

( ± означает прираст/убывание координат)

$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{2/m\,(E-U(x))}} \quad \text{и} \quad T = 2\int_{x_1}^{x_2} dt$$ — полный период финитного движения

**центральное поле:** направление силы проходит через неподвижный центр, величина силы зависит от расстояния до этого центра

! центральные силы консервативны: $A = -\int_{\bar r_1}^{\bar r_2} f(\bar r)\,d\bar l = -\int_{r_1}^{r_2} f(r)\,dr = U(r_2) - U(r_1)$

сохраняющиеся величины:

### момент импульса

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar r\times\bar p] = \Big[\underbrace{\frac{d}{dt}\bar r}_{\bar v}\times\bar p\Big] + \Big[\bar r\times\underbrace{\frac{d}{dt}\bar p}_{\bar f}\Big] = 0$$

$$\bar v = \dot{\bar r} = \dot r\bar e_r + r\cdot\dot{\bar e}_r = \underbrace{\dot r\bar e_r}_{\bar v_\parallel} + \underbrace{r\dot\varphi\,\bar e_\varphi}_{\bar v_\perp}$$

$$|M| = M = r\cdot p\cdot\sin\varphi = r\cdot mv\sin\varphi = rmv_\perp = mr^2\dot\varphi$$

### энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + (r\dot\varphi)^2\right) + U(r) = \frac{m\dot r^2}{2} + \underbrace{\frac{M^2}{2mr^2} + U(r)}_{U_{эфф}}$$

$U_{эфф}$ – эфф. потенциал радиального дв-я

$$\begin{cases} \dot r = \dfrac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\dfrac{m}{2}(E - U_{эфф})} \\ \dot\varphi = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{M}{mr^2} \end{cases}$$

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}\,\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф})}}$$

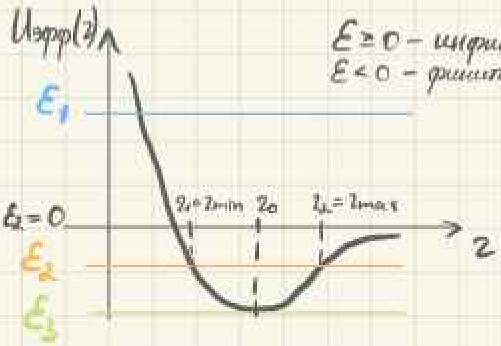
! в кулоновском поле в-р Лапласа (Рунге-Ленца): $A = [\bar v\times\bar M] - \alpha\frac{\bar r}{r}$

# Задача Кеплера.

ЗК – задача о нахождении траекторий и скоростей тел, которые взаимодействуют посредством центральной силы.

Рассм-ем потенциал: $U = -\frac{\alpha}{r} = -\frac{G M_c m_3}{r} \Rightarrow U_{эфф} = \underbrace{-\frac{\alpha}{r}}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{M^2}{2mr^2}}_{\to 0}$

$E \geq 0$ – инфинитное
$E < 0$ – финитное



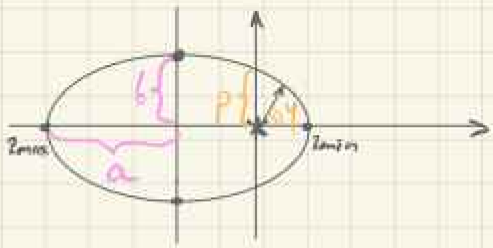

получим траекторию движения:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{M}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{2/m\,(E + \alpha/r - M^2/2mr^2)}}$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

классификация орбит




$E > 0$, $e > 1$ – гипербола
$E = 0$, $e = 1$ – парабола
$E < 0$, $e < 1$ – эллипс
$E = -\frac{m\alpha}{2M^2}$, $e = 0$ – окружность

I з.К: планеты СС двигаются по $r(\varphi)$ = эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

$$a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max}) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{M^2/m\alpha}{1 - \left(1 + \frac{2M^2E}{m\alpha^2}\right)} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow b = a\sqrt{1-e^2} = a\sqrt{1 - 1 - 2M^2E/m\alpha^2} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$$

II з.К: секториальная скорость в центр. поле сохраняется

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1/2 \cdot r \cdot r\,d\varphi}{dt} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2}{2} \cdot \dot{\varphi} = \frac{M}{2m} = const$$

III з.К: отношение $\frac{T^2}{a^3} = const$ для $\forall$ СС

период определяем как: $T = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2/m\,(E + \alpha/r - M^2/2mr^2)}}$, где $E < 0$, $r_1, r_2$ – точки останова ($\dot{r} = 0$)

иначе: $T = \frac{S_{эл}}{\sigma_{сек}} = \frac{\pi ab}{M/2m} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \Rightarrow T^2 = \pi^2 \frac{\alpha^3}{\alpha} \cdot \frac{m}{2|E|^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} a^3$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \cdot m}{GM_c m} = \frac{4\pi^2}{GM_c} = const$$

# Сечение рассеяния. Ф-ла Резерфорда.


$d\sigma' = \frac{dN}{j}$ — число частиц, попавших в дет-тор

$j$ — полный поток

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho, \quad dS = 2\pi R\sin\theta\, R\, d\theta$$

из $d\sigma'$ частицы попадут в $dS'$: $d\sigma' = d\sigma \cdot \frac{dS'}{2\pi R\sin\theta R d\theta} = d\sigma \cdot \frac{d\Omega'}{2\pi \sin\theta d\theta}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d(\pi\rho^2)}{2\pi\sin\theta d\theta} = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}\left|\frac{d\rho^2(\theta)}{d\theta}\right|$$

способы нахождения:

**в квадратурах**

$$d\varphi = \frac{M\, dr}{mr^2\sqrt{2/m\left(E - \alpha/r - M^2/2mr^2\right)}}$$

$$M^2 = 2E\rho^2 m$$

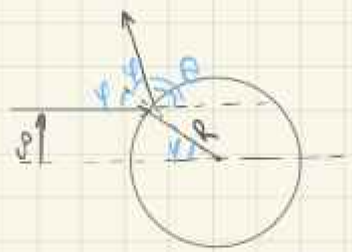
$$d\varphi = \rho/r^2\, dr \Big/ \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E}}$$

$$\frac{\pi-\theta}{2} = \varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \rho/r^2\, dr \Big/ \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E}}$$

$\Rightarrow \rho(E, \theta)$

$r_{min}$ ищем $m\frac{\dot r^2}{2} = 0 = E - \frac{M^2}{2mr^2} - U(r)$

**геометрический**



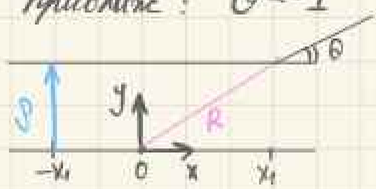

$$\rho = R\sin\varphi = R\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{R^2}{4}$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\underbrace{2\pi\sin\theta d\theta}_{d\Omega} = \pi R^2$$

**быстрые частицы**

приближ.: $\theta \ll 1$




$$\theta = \frac{\Delta p_y}{p_x} = \frac{1}{mv_\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_y\, dt$$

$$dt = \frac{dx}{v_\infty}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial r}\cdot 2y$$

$$\theta = \frac{1}{2E}\int_{-x_1}^{x_1}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) 2y\, dx = \frac{1}{2E}\int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)2\rho\, dx$$

$\frac{V}{E} = \theta_0 \ll 1 \Rightarrow \theta = \theta_0 \cdot \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho^2\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$

планетарная модель Резерфорда: $U = -\alpha/r$:

$$M = m\rho_\infty v_\infty \Rightarrow M^2 = m^2\rho^2 v_\infty^2 = 2mE\rho^2$$

$$d\varphi = \frac{M\, dr}{mr^2\sqrt{2/m\left(E - \alpha/r - M^2/2mr^2\right)}}$$

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi_0} d\varphi = -\int_{r=\infty}^{r_0}\frac{M/mr^2\, dr}{\sqrt{2/m\left(E - \alpha/r - M^2/2mr^2\right)}} \quad \left[\begin{array}{l}\theta = \pi - 2\varphi_0 \\ r_0 : U_{эфф}(r_0) = E\end{array}\right]$$

в итоге: $\rho(\theta) = \frac{\alpha}{2E}\cdot \mathrm{ctg}\,\theta/2$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\theta/2} \quad \Rightarrow \sigma_{полн} = \infty$$

# Ур-я Лагранжа для частицы в потенц. поле.
## Обобщенные координаты и импульсы.

$U(x,t)$


$\bar{F} = -\nabla U(x,t) = \bar{F}(x,t)$

$\Rightarrow$ два пути: 1) II з-н Ньютона: $m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$

2) новый подход $\rightarrow$ придумаем функцию

$$L = L(x,\dot{x},t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x,t), \quad x(t) \text{ - просто функция}$$

Тогда: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$ $\oplus$ $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ $\Rightarrow$ тогда II з-н Ньютона сводится к виду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$ – ур-ние Эйлера-Лагранжа

$L = L(x,\dot{x},t) = T - U$ – функция Лагранжа

замечание: т.е. если правильно подобрать ф-ю $L$, то II з-н Ньютона и ур-е Эйлера-Лагранжа станут эквивалентными

если наши $x, y, z$ выражены ч/з $q_i = q_i(t) \Rightarrow$ необходимо преобр-е координат

для системы $n$ тел: $\underbrace{\bar{r}_1, .., \bar{r}_n}_{3D} \rightarrow \underbrace{q_1, ..., q_M}_{3N-\text{е штук}}$

! $n$ и $M$ разные, т.к. могут быть связи между телами

опр: обобщенные координаты $\{q_i\}$ – любая совокупность пар-ров, описывающая положение системы однозначно

$\dot{q}_i = \frac{dq}{dt}$ – обобщ. скорость

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ – обобщенный импульс

пример построения:


$x_2 = x + l\sin\varphi$
$y_2 = l\cos\varphi$

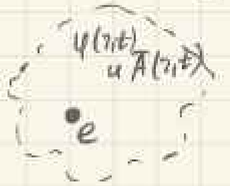
$\dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$
$\dot{y}_2 = -l\sin\varphi\,\dot{\varphi}$

$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2$

$U = -mgy$

$$L = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left[\underbrace{\dot{x}^2}_{\text{пост. дв.}} + \underbrace{l^2\dot{\varphi}^2}_{\text{колеб.}} + \underbrace{2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi}_{\text{зависимость движения}}\right] + mgl\cos\varphi$$

# Функция Лагранжа для частицы в ЭМГ поле.




$$E(\bar r,t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \bar r} - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar A}{\partial t}, \quad \bar B(\bar r,t) = \left[\frac{\partial}{\partial \bar r}, A\right]$$

если выбрать $L(\bar r, \dot{\bar r}, t) = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{T} - \underbrace{e\varphi}_{U} + \underbrace{\frac{e}{c}\bar A \cdot \bar v}_{\text{ни кинетич., ни потенц. энергии}}$ $\Rightarrow$ из ур-я Лагранжа получим $m\dot{\bar v} = e\bar E + \frac{e}{c}[\bar v, \bar B]$

- обобщенный импульс $p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv + \frac{e}{c}\bar A$

- известно, что $E, B$ инв-ны относительно преобр: $\begin{cases} \varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \\ \bar A \to \bar A' = \bar A + \frac{\partial f}{\partial \bar r} \end{cases}$, $f = f(\bar r, t)$

следоват-но лагранжианы $L$ и $L'$ отличаются на $\frac{d}{dt}\left(\frac{ef}{c}\right)$:

$$L' = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi' + \frac{e}{c}A'v = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + \frac{e}{c}Av + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \bar r}v\right) = L + \frac{e}{c}\frac{df(\bar r,t)}{dt}$$

! эти лагранжианы должны быть физически эквивалентны

- видно, что выбор ф-ции Лагранжа неоднозначен: если к ф-ции Лагранжа добавить полную производную по времени от любой функции $F(q,t)$, то полученное выражение можно также рассматривать как другую функцию Лагранжа, приводящую к тем же ур-ям движения

если $L'(q,\dot q,t) = L(q,\dot q,t) + \frac{dF(q,t)}{dt}$ $\Rightarrow$ значения $S$ и $S'$ отличаются величинами, не зависящими от выбора пробной функции

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}dt = S + F(q^{(2)}, t_2) - F(q^{(1)}, t_1)$$ $\Rightarrow$ совпадают ур-я движения

- из неоднозначности ф-ции Лагранжа $\Rightarrow$ неоднозначность обобщ-х импульсов:

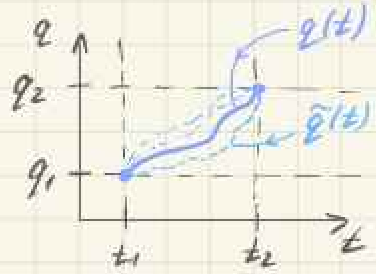
$$p_i' = \frac{\partial L'}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial}{\partial \dot q_i}\frac{dF}{dt} = p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

# Принцип Гамильтона.
# Ковариантность ур-ний Лагранжа

! уравнения Лагранжа ковариантны, т.е. не меняют свой вид при замене координат

более того, ур-я Лагранжа не меняют вид/форму при замене координат и времени : пусть $\begin{cases} q = q(Q,\tau) \\ t = t(Q,\tau) \end{cases}$

$$\Rightarrow \tilde{L}(Q,\dot{Q},\tau) = L\left(q(Q,\tau), \frac{d}{dt}(q(Q,\tau)), t\right)\cdot \frac{dt}{d\tau}, \text{ где } \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q/\partial\tau + \partial q/\partial Q \cdot \partial Q/\partial\tau}{\partial t/\partial\tau + \partial t/\partial Q\cdot \partial Q/\partial\tau}$$




если $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)$ - действие, то $S \to \min$ на истин. траект.

опр: $q(t)$ - истинная, т.е удовлетворяет ур-ю Ньютона

др. словами: $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt = 0$ на истинной траектории

! условие: $\delta t = 0$ и $\forall q \ \exists \tilde{q} = q + \delta q$

• рассм-м соседнюю траекторию: $\tilde{q}(t) = q(t) + \delta q(t) \Rightarrow \dot{\tilde{q}} = \dot{q} + \frac{d}{dt}\delta q$

• на ней: $\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(\tilde{q},\dot{\tilde{q}},t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q} + \frac{d}{dt}\delta q, t)\,dt$

• $\delta S = \tilde{S} - S = \int_{t_1}^{t_2} L(\tilde{q},\dot{\tilde{q}},t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[L(q+\delta q, \dot{q}+\frac{d}{dt}\delta q, t) - L(q,\dot{q},t)\right]dt$

$= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q,\dot{q},t)\,dt$

• $\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\cdot\frac{d}{dt}\delta q = \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\delta q + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\delta q\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\right] =$

$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) + \delta q\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)$

• $\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta q\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q\,dt = 0$

$\delta q = 0$ при $t_1, t_2$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

# Циклические координаты.
## Энергия в лагранжевом подходе.

**Опр:** интеграл движения — функция обобщенных координат и скоростей, остающаяся постоянной при движении механической системы.

фунд. законы (однор. пр-ва, изотропность, время) — симметрия

1) если $L = L(q_1, q_2, \dots, \cancel{q_k}, \dots, q_n)$ — не зависит от $q_k$ $\Rightarrow$ соответствующий ей обобщ. импульс сохр-ся $\Rightarrow$ ИД

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\text{из ур-я Лагранжа}} \underbrace{= 0}_{\text{наше условие}} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = p = const$$

2) если $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n, \cancel{t})$ — не зависит явно от $t$ $\Rightarrow$ тоже ИД

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}} \cdot \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial t}}_{\dot q_i} + \sum \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{p_i} \cdot \frac{\partial \dot q_i}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum \frac{dp_i}{dt}\dot q_i + \sum p_i \frac{d\dot q_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\sum p_i \dot q_i$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt}\left(L - \sum p_i \dot q_i\right) = \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sum p_i \dot q_i - L = const = E_\Lambda$$ — энергия в смысле Лагранжа

! $q(t)$ и $p(t)$ меняются от времени

# Линейные колебания. Понятие нормальных координат.

- одна степень свободы: $L(q,\dot q) = T(q,\dot q) - U(q)$, $T(q,\dot q) = \frac{1}{2}a(q)\cdot\dot q^2 \geq 0$

пусть $q_0$ – точка минимума $U(q)$ $\Rightarrow$ разложим по малому откл-ю $x = q - q_0$

$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2}kx^2$, $\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q_0} = 0$, $\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0} = k > 0$ (если $k=0$ – нелинейные кол-я)

$a(q) = m + O(x)$, $m = a(q_0)$

огр-ся членами 2-го порядка по $x$ и $\dot x = \dot q$ $\Rightarrow L(x,\dot x) = \frac{1}{2}m\dot x^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow m\ddot x + kx = 0$

решение $x = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow -m\omega^2 + k = 0$, откуда $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

симм-но отн-но $i \leftrightarrow j$ $a_{ij}(q) = a_{ji}(q)$

- множество степеней свободы: $L = T - U(q_1,\dots,q_s)$, $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j \geq 0$

пусть $q_{i0}$ $(i=1,..,s)$ – точка минимума $U$ $\Rightarrow$ разложение по малым откл-м: $x_i = q_i - q_{i0}$:

$U(q) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}x_i x_j + const$, $k_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_{i0}} = k_{ji}$

т.к. при $x_i = 0$ $U = min$: квадр форма положит. опред: $\sum_{i,j} k_{ij}x_i x_j \geq 0$

$a_{ij}(q) = m_{ij} + O(x_k)$, где $m_{ij} = a_{ij}(q_{k0}) = m_{ji}$ $\Rightarrow$ из положи-ти $T$ $\Rightarrow \sum_{i,j} m_{ij}\dot x_i \dot x_j \geq 0$

огранич. чл-ми 2-го порядка и получим: $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(m_{ij}\dot x_i \dot x_j - k_{ij}x_i x_j)$

введем: в-р смещения: $\bar x = (x_1\ x_2\ \dots\ x_s)^T$

матрицу масс и жесткостей: $\hat m = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1s} \\ & \dots & \\ m_{s1} & \dots & m_{ss}\end{pmatrix}$, $\hat k = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1s} \\ & \dots & \\ k_{s1} & \dots & k_{ss}\end{pmatrix}$

тогда $L(x,\dot x) = \frac{1}{2}(\dot x, \hat m \dot x) - \frac{1}{2}(x, \hat k x)$, причем $(\dot x, \hat m \dot x) \geq 0$, $(x, \hat k x) \geq 0$, $\hat m^T = \hat m$, $\hat k^T = \hat k$

ур-я Лагранжа: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow \hat m \ddot x + \hat k x = 0$

подстановка $x = A\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow$ к системе алг. ЛОУ: $(-\omega^2 \hat m + \hat k)A = 0$

эта система имеет нетривиальное решение при $|-\omega^2\hat m + \hat k| = 0$

пусть $\omega_1^2, \dots, \omega_s^2$ – корни этого ур-я (могут совпадать) $\Rightarrow \omega_\alpha$ – собственные частоты

для определения компонент в-ра $A^{(\alpha)}$: $(-\omega_\alpha^2 \hat m + \hat k)A^{(\alpha)} = 0$

если $A^{(\alpha)}$ – решение, то и $aA^{(\alpha)}$ – решение $\Rightarrow \forall \omega_\alpha$ соотв. колебание $x^{(\alpha)}(t) = A^{(\alpha)}\underbrace{a_\alpha\cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)}_{Q_\alpha(t)}$
при котором все частицы дв-ся с одной частотой и в одной фазе/противофазе

такое движение называют нормальным колебанием или модой

полное решение: $x = \sum_{\alpha=1}^{s} A^{(\alpha)}Q_\alpha(t)$, где $S$ произв. амплитуд и фаз можно найти, зная $x(0)$ и $\dot x(0)$

# Ортогональность НК. Вырождение частот

**Ортогональность** пусть $\omega_\alpha$ и $\omega_\beta$ – различны $\Rightarrow$ $\overbrace{\omega_\alpha^2 \hat{m} A^{(\alpha)} = \hat{k} A^{(\alpha)}}^{1}$ и $\overbrace{\omega_\beta^2 \hat{m} A^{(\beta)} = \hat{k} A^{(\beta)}}^{2}$

$$\left.\begin{aligned} \omega_\beta^2 (A^{(\alpha)}, \hat{m} A^{(\beta)}) &= (A^{(\alpha)}, \hat{k} A^{(\beta)}) \\ \omega_\alpha^2 (A^{(\beta)}, \hat{m} A^{(\alpha)}) &= (A^{(\beta)}, \hat{k} A^{(\alpha)}) \end{aligned}\right| \Rightarrow \omega_\alpha^2 (A^\beta, \hat{m} A^\alpha) - \omega_\beta^2 (A^\alpha, \hat{m} A^\beta) = (A^\beta, \hat{k} A^\alpha) - (A^{(\alpha)}, \hat{k} A^{(\beta)})$$

учтем $\hat{k}, \hat{m}$ – симм-ны и $\forall n_n, n \in \mathbb{R}$: $(A, \hat{n} B) = (\hat{n}^T A, B)$

$$\underbrace{(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)}_{\neq 0} (A^\alpha, m A^\beta) = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} (A^\alpha, \hat{m} A^\beta) &= 0 \\ (A^\alpha, \hat{k} A^\beta) &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} X^\alpha &= A^\alpha Q_\alpha \\ X^\beta &= A^\beta Q_\beta \end{aligned}$$

, отвечающие разным $\omega_\alpha$ ортог-ны в метрике масс или жесткостей

**вырожденность:** пусть решение $X^1$ и $X^2$ отвечают одной частоте $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow C_1 X^1 + C_2 X^2$ – тоже для $\omega_1$

т.е. пр-во решений, отвеч-х данной частоте = плоскость, проходящая ч/з $X^1$ и $X^2$, причем $\forall x \in (x_1, x_2)$ ортогонален в метрике масс/жесткостей в-н НК, отвеч-х другим частотам

среди в-в этой плоскости можно выбрать пару л.н. так, что они удовл-ли соотн. ортогон-ти

совокупность взаимно ортог-ных (в м-це масс/жесткостей) в-в представляет собой удобный базис для координат $Q_\alpha$, которые приводят лагранжиан к виду соотв. набору независимых осц
такие координаты наз-ся нормальными

если $X = (x_1 \dots x_s) \to Q = (Q_1, \dots, Q_s)$, есть лин. преобр-е $X = \hat{U} Q$, $x_i = \sum U_{i\alpha} Q_\alpha$, $U_{i\alpha} \equiv A_i^\alpha$, при котором квадр. формы $T$ и $U$ энергий одновр-но приводятся к диагон-му виду

$$L = \sum_{\alpha=1}^{s} L_\alpha, \quad L_\alpha = \frac{1}{2} M_\alpha \dot{Q}_\alpha^2 - \frac{1}{2} K_\alpha Q_\alpha^2, \text{ где } M_\alpha = (A^\alpha, \hat{m} A^\alpha) \text{ и } K_\alpha = (A^\alpha, \hat{k} A^\alpha)$$

соотв. ур-я Лагранжа: $M_\alpha \ddot{Q}_\alpha + K_\alpha Q_\alpha = 0$ – имеют вид одномерных ур-ний

т.обр. каждая нк $Q_\alpha$ предст-ет собой колебание с одной опред. $\omega_\alpha$, в то время как каждая координата $x_i$ есть лин. суперпозиция колебаний с разными, вообще говоря, частотами

в силу св-в положит-ти кв. форм собств. корни ур-я $|-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}| = 0$ явл-ся положит-ми:

$$\omega_\alpha^2 = \frac{K_\alpha}{M_\alpha} = \frac{(A^\alpha, \hat{k} A^\alpha)}{(A^\alpha, \hat{m} A^\alpha)} \geq 0$$

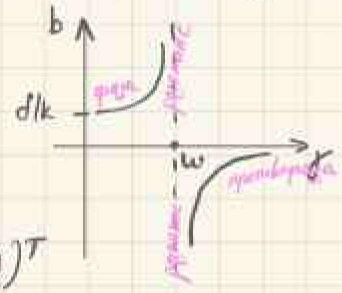
, т.е. $\omega_\alpha \in \mathbb{R}$ и не зависят от нормировки в-в $A^\alpha$

пусть на сист-му с 1ст.св действует внешняя $f(t) \Rightarrow \Delta U(x,t) = -x\cdot f(x)$

$L(x,\dot x,t) = \frac{1}{2}(m\dot x^2 - kx^2) + x\cdot f(x) \longrightarrow \ddot x + \omega^2 x = \frac{f(t)}{m}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, где для $x_0$ и $v_0$:

$$x(t) = \underbrace{x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}_{\text{свободные}} + \underbrace{\int_0^t f(\tau)\,\frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega m}\,d\tau}_{\text{вынужд. кол.}}$$

! при наличии малого трения 1,2 слаг. $\xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, а последнее незат. щм-ся, поэтому мы рассматриваем такие установившиеся колебания




пусть $f(t) = f\cos(\gamma t+\varphi) \to x(t) = b\cos(\gamma t+\varphi)$,
где $b = \frac{f}{(\omega^2-\gamma^2)m}$

в многомерном случае: $\Delta L = \sum_i x_i F_i(t)$, $F(t) = (F_1(t) \ldots F_s(t))^T$

тогда $L(x,\dot x,t) = \frac{1}{2}(\dot x, \hat m\dot x) + \frac{1}{2}(x,\hat k x) + xF(t)$ и $\hat m\ddot x + \hat k\ddot x = F(t)$

с помощью замены $x = \sum_{\alpha=1}^{s} A^{(\alpha)}Q_\alpha(t)$ и $x\cdot F(t) = \sum_\alpha A^\alpha F(t)\,Q_\alpha$ получим:

$L = \sum L_\alpha$, где $L_\alpha = \frac{1}{2}(M_\alpha\dot Q_\alpha^2 - K_\alpha Q_\alpha^2) + Q_\alpha f_\alpha(t)$, где $M_\alpha = (A^\alpha, \hat m A^\alpha)$, $K_\alpha = (A^\alpha, \hat k A^\alpha)$ и $f_\alpha(t) = A^{(\alpha)}F(t)$

после этого ур-я для $Q_\alpha$: $\ddot Q_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = \frac{f_\alpha(t)}{M_\alpha}$, $\omega_\alpha = \sqrt{\frac{K_\alpha}{M_\alpha}}$

пусть $F(t) = F\cos(\gamma t+\varphi) \Rightarrow F_\alpha(t) = f_\alpha\cos(\gamma t+\varphi)$, $f_\alpha = A^{(\alpha)}F$
и вынужд. колеб. норм. координат имеют вид

$Q_\alpha = b_\alpha\cos(\gamma t+\varphi)$, $b_\alpha = \frac{f_\alpha}{(\omega_\alpha^2-\gamma^2)M_\alpha}$

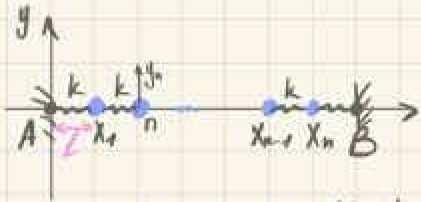
перейдя от норм. коорд. к исходным: $x = \sum A^{(\alpha)} b_\alpha\cos(\gamma t+\varphi) = \sum_1^s A^\alpha \frac{(A^\alpha, F)\cos(\gamma t+\varphi)}{(\omega_\alpha^2-\gamma^2)(A^\alpha, \hat m A^\alpha)}$

сила $f_\alpha = A^\alpha F$ – действ. на $\alpha$-е колебание, опр-ся проекцией $\bar F$ на напр-е данного кол-ния

след-но, если $F$ и $\bar A^\alpha$ ортогональны $\Rightarrow$ слагаемое $A^\alpha b\cos(\gamma t+\varphi)$ отсутствует в сумме
в частности, в этом случае не возникает резонанса при $\gamma\to\omega_\alpha$

если $FA^\alpha \neq 0$, то при $\gamma\to\omega_\alpha$ возникает резонанс, причем вблизи резонанса всеми слаг-ми в сумме, кроме одного, можно пренебречь и $x \approx A^{(\alpha)}b_\alpha\cos(\gamma t+\varphi)$

# Колебания линейной цепочки с закрепленными концами. Бегущие и стоячие волны




натяжение ∀ пружинки: $f = k(l - l_0)$

возвр. сила, действ. на n-ю частицу со стороны n-й пружины равна:

$$F_n = -f\sin\alpha = -f\cdot\frac{y_n - y_{n-1}}{l}$$

тогда $L = \frac{m}{2}\sum_1^N \dot{y}_n^2 - \frac{f}{2l}\sum_1^{N+1}(y_n - y_{n-1})^2$, где $y_0 \equiv 0$, $y_{N+1} \equiv 0$

ур-я Лагранжа имеют вид: $\ddot{y}_n + \omega_0^2(2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}) = 0$, $n = 1 \dots N$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{ml}}$

**бегущие волны:** будем считать кол-во частиц неограниченным

будем искать реш: $y_n(t) = Re[e^{i\omega t} f(X_n)]$, $X_n = n\cdot l$, $f(X_n)$ соот-т ампл. кол-й n-й частицы

при сдвиге на $l$ по OX функция Лагранжа беск. цеп. не меняется $\Rightarrow Re[e^{i\omega t} f(X_n + l)]$ – тоже реш-е

$f(X_n + l) = \lambda f(X_n) = \lambda^2 f(X_{n-1}) = \dots = \lambda^n f(X_1)$

подставим ~ в , учитывая ~ $\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2\left(2 - \lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda_{1,2} = d \pm \sqrt{d^2 - 1}$, $d = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}$

причем $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$

- при $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = e^{\pm i\psi} \Rightarrow \omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\frac{\psi}{2}$ и $y_n = Re[Ae^{i(\omega t \mp n\psi)}]$

введем $K = \frac{\psi}{l}$, тогда $\lambda = e^{\mp iKl}$ и $y_n = Re[Ae^{i(\omega t \mp KX_n)}]$ – бегущие по и против OX волны

тогда $\omega$ опр-ет $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а волновой в-р K – длину волны: $\Lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi l}{\psi}$

$\omega^2 = 4\omega_0^2\sin^2\frac{\psi}{2}$ – закон дисперсии $\Rightarrow 0 < \omega < 2\omega_0$

$\omega t \mp KX_n = const \Rightarrow X_n = \pm\frac{\omega}{K}t - \frac{const}{K}$ – з-н движения точки постоянной фазы

- при $\lambda < 1$: $\lambda = -e^{\mp\psi} = -e^{\mp \varkappa l}$, $\psi = \varkappa l \Rightarrow \omega^2 = 4\omega_0^2 ch^2\frac{\psi}{2} \Rightarrow \omega > 2\omega_0$

в этом случае амплитуды колебаний падают (возрастают) с ростом $X_n$:

$$y_n = Re[(-1)^n Ae^{i\omega t \mp \varkappa X_n}] = Re[(-1)^n Ae^{\mp n\psi}e^{i\omega t}]$$

энергия, переданная от (n-1) к n-й частицы за $dt$: $dE = F_n dt = -m\omega_0^2(y_n - y_{n-1})\dot{y}_n dt$

$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle = \pm\frac{1}{2}m\omega_0^2\omega|A|^2\sin\psi$ – для вида  и „0" для стоячие волны: удовлет-м нач. условиям со стенкой подбирая решение в виде:

$$y_n = A_+ e^{i(\omega t+n\varphi)} + A_- e^{i(\omega t-n\varphi)} \Rightarrow$$

из $y_0(0) = 0 \Rightarrow A_+ = -A_- \Rightarrow y_n = \mathrm{Re}[2iA_+ \sin n\varphi \cdot e^{i\omega t}] = A\sin n\varphi \cdot \cos(\omega t + \chi)$,

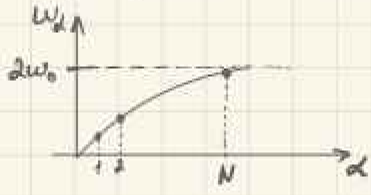
$2iA_+ = Ae^{i\chi}$

из $y_{N+1}(0) = 0 \Rightarrow \sin(N+1)\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_\alpha = \frac{\pi\alpha}{N+1}$, $\alpha = 1, \dots, N$

тогда $\omega_\alpha = 2\omega_0 \sin\frac{\pi\alpha}{2(N+1)}$, $\alpha = 1, \dots, N$

! с ростом $N$ число собств. частот ↑↑, но они все $0<\omega<2\omega_0$ – разрешенная зона

$\omega > 2\omega_0$ – запрещенная зона




в-р нормального колебания, отв-щий $\alpha$-й частоте: $y^\alpha = const \cdot \begin{pmatrix} \sin\varphi_\alpha \\ \vdots \\ \sin N\varphi_\alpha \end{pmatrix} Q_\alpha(t)$

$Q_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \chi_\alpha)$

фазе $\varphi_\alpha$ соотв-ет $\lambda_\alpha = \frac{2\pi}{k_\alpha} = \frac{2L}{\alpha}$, где $L = l\cdot(N+1)$ ($\alpha$-е кол-е соотв. такой стоячей волне, у кот-й на длине цепочки уклад-ся ровно $\alpha$ полуволн)

выберем $const = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^N \sin^2 n\varphi_\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \Rightarrow (y^\alpha, y^\beta) = \delta_{\alpha\beta} Q_\alpha^2$

общее реш-е есть суперпозиция всех норм. колебаний: $y_n = \sum_1^N \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\frac{\pi n\alpha}{N+1} Q_\alpha(t)$

а лагранжиан $L = \sum L_\alpha$, $L_\alpha = \frac{m}{2}(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)$ отвечающий набору $N$ разных отдельных осцил.

пример: для пружинки из $N$ частиц масс $m$, связанных $k$, могущих двигаться только по AB:

$\ddot{x}_n + \omega_0^2(2x_n - 2x_{n-1} - x_{n+1})$, $n = 1, \dots, N$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Нелинейные колебания осциллятора с одной степенью свободы. Ангармонические поправки.

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{m\alpha x^3}{3} - \frac{m\beta x^4}{4}, \quad \alpha, \beta \ll 1$$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3$, где $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

т.к. реш- период. функция $\Rightarrow x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t$, где $a_n, \omega$ из ур-я движ. при заданной энергии, начало отсчета выбрано так, чтобы при $t=0$ откл-е $X$ макс-е

удобно задавать дв-е ч/з амплитуду основной гармоники $a_1 \equiv a$, остальные $a_i = a_i(a)$
разность $\delta\omega = \omega - \omega_0$ зависит от $a$ и наз-ся нелинейным сдвигом частоты

при малой нелин-ти реш-е мало отлич-ся от гармонических колебаний $\Rightarrow$ будем искать решение методом посл-ных приближений

первое приближение: $x^{(1)} = a\cos\omega t$, где $\omega$ - неизвестна и мало отличается от $\omega_0$

второе приближение: подставим $x^{(1)}$ в и выразим степени косинуса как:

$$\cos^2\omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t, \quad \cos^3\omega t = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$$

тогда ур-е движ-я будет иметь вид: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{1}{2}\alpha a^2(1+\cos 2\omega t) - \frac{1}{4}\beta a^3(3\cos\omega t + \cos 3\omega t)$

его част. реш. ищем как: $x^{(2)}(t) = a_0^{(2)} + a\cos\omega t + a_2^{(2)}\cos 2\omega t + a_3^{(2)}\cos 3\omega t$

будем приравнивать коэф-ты в левой и правой частях при одинаковых гармониках и получим:

$$\omega_0^2 a_0^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2}; \quad (\omega^2 - \omega_0^2)a = \frac{3}{4}\beta a^3; \quad (4\omega^2 - \omega_0^2)a_2^{(2)} = \frac{1}{2}\alpha a^2; \quad (9\omega^2 - \omega_0^2)a_3^{(2)} = \frac{1}{4}\beta a^3$$

считая, что $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\omega_0(\omega - \omega_0) \Rightarrow \delta\omega^{(2)} = \omega - \omega_0 = \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}$

амплитуды гармоник находим из оставшихся ур-ний: $a_0^{(2)} = \frac{-\alpha a^2}{2\omega_0^2}, \quad a_2^{(2)} = \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}, \quad a_3^{(2)} = \frac{\beta a^3}{32\omega_0^2}$

в третьем приближ-нии появятся новые поправки 3-го порядка и получим:

$$\delta\omega^{(3)} = \frac{-5\alpha^2 a^2}{12\omega_0^3} \quad \text{и} \quad a_3^{(3)} = \frac{\alpha^2 a^3}{48\omega_0^4}$$

окончательно: $x(t) = a\cos\omega t - \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}(3 - \cos 2\omega t) + \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t$

$$\delta\omega = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2$$

при этом должны выполняться неравенства: $\frac{\alpha a}{\omega_0^2} \ll 1$ и $\frac{\beta a^2}{\omega_0^2} \ll 1$

# Уравнения Гамильтона. Постановка. Пример построения функции Гамильтона.

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, $i = 1, \dots, S$ – дифф. 2-го порядка с $\ddot q, \dot q$ и $q$

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$ и $\dot p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ $\Rightarrow$ можем перейти от ур-й 2-го порядка к ур-м 1-го порядка с $q_i$ и $p_i$
т.е. $\dot q_i = f(q, p, t)$, $\dot p_i = g_i(q, p, t)$ – $2S$ ур-ий 1-го порядка

$$dL(q, \dot q, t) = \sum_1^S \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} d\dot q_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_1^S \left( \dot p_i dq_i + p_i d\dot q_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

для $\underbrace{H(p, q, t) = \sum_1^S p_i \dot q_i - L}_{\text{функция Гамильтона}} \Rightarrow dH(p, q, t) = \sum_1^S (\dot q_i dp_i - \dot p_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

выражая $dH$ через частные производные получим ур-я Гамильтона (каноннч. ур-я):

$$\dot q_i = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, S$$

их $2S$ штук с $2S$ неизвестными

$$\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial t}$$

**пример 1:** пусть $L(q, \dot q) = \frac{1}{2} a(q) \dot q^2 + b(q) \dot q + c(q)$

$p\dot q - L = \frac{1}{2} a(q) \dot q^2 - c(q)$, выразим $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = a(q)\dot q + b(q) \Rightarrow \dot q = \frac{p - b(q)}{a(q)}$

тогда $H(p, q) = \frac{(p - b(q))^2}{2a(q)} - c(q)$

в частности для гармонич. осцил. $\Rightarrow H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

**пример 2:** частица в Ц.П. в сферических коорд-х

$$H(p_r, p_\theta, p_\varphi, r, \theta, \varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2\theta} + U(r)$$

**пример 3:** нерелятив. частица в ЭМГ поле

$$H(\bar p, \bar r, t) = \frac{1}{2m} \left( \bar p - \frac{e}{c} \bar A(\bar r, t) \right)^2 + e\varphi(\bar r, t)$$

**пример 4:** в релятивистском случае

$$H(\bar p, \bar r, t) = \sqrt{\left( \bar p - \frac{e}{c} \bar A(\bar r, t) \right)^2 c^2 + m^2 c^4} + e\varphi(\bar r, t)$$

**пример 5:** фотон в среде

$$H(\bar p, \bar r) = \frac{c}{n(\bar r)} |\bar p|$$

# Скобкт Пуассона. Свойства скобок Пуассона. Теорема Пуассона. Примеры

пусть $f = f(p,q,t)$ и $g = g(q,p,t)$ – произвольные $\Rightarrow \{f,g\} = \sum_{1}^{s} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_i}$

свойства:

1) $\{f,c\} = 0$, если $c = const$
2) $\{f,g\} = -\{g,f\}$
3) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_2, g\} + \{f_1, g\}$
4) $\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$
5) $\{p_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}$ и $\{q_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$
6) $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$
   $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$

$$\frac{df(p,q,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\Rightarrow \frac{df(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}$$

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}$$

пример: пусть м.п. задано $\bar{A}(\bar{r},t) \Rightarrow v_i = \frac{p_i}{m} - \frac{e}{mc}A_i$

$\{v_i, v_j\} = -\frac{e}{m^2c}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{e}{m^2c}\sum_{1}^{3} e_{ijk}B_k$, где $\bar{B} = rot\bar{A}$, $e_{ijk}$ – антисимм. единич. тензор 3 ранга

пусть $B$ однородно и пост-но, расс-м дв-е частицы в пл-ти $\perp \bar{B}$, пусть $Oz \uparrow\uparrow \bar{B} \Rightarrow$

$\{v_x, v_y\} = -\frac{eB_z}{m^2c} = -\frac{\omega}{m}$ – частица движется


, $x_0 = x - v_y/\omega$
$y_0 = y + v_x/\omega$

тогда для координат центра орбиты $\{x_0, y_0\} = \frac{1}{m\omega}$

**тождество Якоби:** $\{f, \{g,h\}\} + \{h, \{f,g\}\} + \{g, \{h,f\}\} = 0$, где

в общем случае возможно: $f = f(q,p,t)$, $g = g(q,p,t)$, $h = h(q,p,t)$, где $t$ явл-ся параметром

**теорема Пуассона:** пусть мех-я сист. имеет 2 инт-ла движ. $f(q,p,t)$ и $g(q,p,t)$. тогда скобка $h = \{f,g\}$ тоже инт-л движ-я для этой системы

краткое док-во: из $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\} = 0$ и $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \{H,g\} = 0$ + тожд. Якоби

получаем: $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \{H,h\} = 0$, ч.т.д.

пример: в поле изотропного осциллятора $U(r) = \frac{kr^2}{2}$ сохр-ся $\bar{M}_p = \bar{M} = (0,0,M)$
$M = xp_y - yp_x$

и энергия по $Ox$ и $Oy$: $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$, $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{ky^2}{2}$

по т. Пуассона: $N = \{E_x, M\} = \frac{p_x p_y}{m} + kxy$ – тоже интеграл движения

! повторное применение т. Пуассона не приводит к новым инт-м движения

# Функция Гамильтона для частицы в элмг поле

# Канонические преобразовантя. Понятие производящей функции

каноническим наз-ся преобр-е вида $q_i = q_i(Q,t)$ (наз-мое точечным) такое:

$$\sum_1^s p_i dq_i = \sum_1^s P_i dQ_i + dF(q,Q,\tilde{t}),$$ где $dF(q,Q,\tilde{t}) = \left(dF(q,Q,t) - \frac{\partial F}{\partial t}dt\right)\Big|_{t=\tilde{t}}$

функция $F(q,Q,t)$ - производящая функция данного преобр-я

из опр-я кан. преобр.: $p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$, $P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$

ур-я Гамильтона ковариантны отн-но канонических преобр-ний: так, например, вар. пр

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right]dt + \sum p_i \delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \Rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ и } \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

в силу ~: $S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum P_i \dot{Q}_i - H'(P,Q,t)\right)dt + \int_{t_1}^{t_2} dF(q,Q,t)$, где $H'(P,Q,t) = H(p,q,t) + \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial t}$

поэтому: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{Q}_i - \frac{\partial H'}{\partial P_i}\right)\delta P_i - \left(\dot{P}_i + \frac{\partial H'}{\partial Q_i}\right)\delta Q_i\right]dt + \sum_i P_i \delta Q_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\delta Q_i\Big)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$

в силу сост-й м/у $p$ и $P$ и нузависим-ю $\delta Q_i$ и $\delta P_i$ получим: $\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}$ и $\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$

окончательно: $dF(q,Q,t) = \sum(p_i dq_i - P_i dQ_i) + (H' - H)dt$

сущ-ют и др. производящие функции: $F_1(q,Q,t)$, $F_2(q,P,t)$, $F_3(p,Q,t)$, $F_4(p,P,t)$

$F_2(q,P,t) = F_1(q,Q,t) + \sum_i P_i Q_i$

$F_3(Q,p,t) = F_1(q,Q,t) - \sum_i p_i q_i$

$F_4(p,P,t) = F_1(q,Q,t) + \sum P_i Q_i - \sum p_i q_i$

пример: $F_2(q,P,t) = \sum q_i P_i$ дает $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i$, $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i$ | тождеств-е преобр-ние

пример: $F(q,Q) = qQ$

$$\begin{cases} p_i(Q,q,t) = \frac{\partial F}{\partial q_i} = Q \\ P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -q \end{cases} \quad \text{и} \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H$$

Необходимый и достаточный признак каноничности преобразований. Примеры канонических преобразований

критерий: чтобы $q, p \to Q, P$ вида $q = q(Q, t)$ было каноническим, необходимо и достаточно выполнение след. равенств для фундам-х скобок Пуассона:

$$\{Q_i, Q_j\}_{p,q} = 0 \qquad \{P_i, P_j\}_{p,q} = 0 \qquad \{P_i, Q_j\}_{p,q} = \delta_{ij}$$

скобка Лагранжа: $[P_j, Q_l]_{p,q} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial P_j} = \delta_{jl}$

если $[Q_j, Q_l]_{p,q} = 0$ и $[P_j, P_l]_{p,q} = 0 \Rightarrow$ преобр-ние каноническое

а) $\Phi(\bar{r}, \bar{P}) = \bar{r}\bar{P} + \bar{\delta\alpha}\bar{P}$ , $\bar{\delta\alpha} = const$ – трансляция

$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\delta\alpha}$

$\bar{p} = \bar{P}$

" $\bar{P}[\bar{\delta\varphi} \times \bar{r}] = \bar{r}[\bar{P} \times \bar{\delta\varphi}]$

б) $\Phi(\bar{r}, \bar{P}) = \bar{r}\bar{P} + \bar{\delta\varphi}[\bar{r} \times \bar{P}]$ – поворот

$\vec{R} = \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{P}} = \vec{r} + [\bar{\delta\varphi} \times \bar{r}]$ $\qquad\xrightarrow{|\delta\varphi| \ll 1}\qquad$ $\bar{R} = \bar{r} + [\bar{d\varphi} \times \bar{r}]$

$\bar{p} = \frac{d\Phi}{d\bar{r}} = \bar{P} + [\bar{P} \times \bar{\delta\varphi}]$ $\qquad\qquad$ $\bar{P} = \bar{p} - [\bar{P} \times \bar{\delta\varphi}] = \bar{p} - [\bar{p} \times \bar{\delta\varphi}] = p + [\bar{\delta\varphi} \times \bar{p}]$

в) $\Phi(q, P) = qP + \delta\alpha(q^2 + P^2)$

$Q = \frac{\partial\Phi}{\partial P} = q + \delta\alpha \cdot 2P \xrightarrow{|\delta\alpha| \ll 1} q + \delta\alpha \cdot 2p$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & 2\delta\alpha \\ -2\delta\alpha & 1 \end{pmatrix}$ – поворот в фазовом пр-ве

$p = P + \delta\alpha \cdot 2q \Rightarrow P = p - 2q\delta\alpha$

для гармонического осциллятора $x = A\cos(wt + \varphi_0)$ и $p = -mwA\sin(wt + \varphi_0)$ поворот на $\varphi = wt$ по час.стр. приводит к $Q = A\cos\varphi_0$ и $P = -mwA\sin\varphi_0$ с $H' = 0$

г) пусть $a = \frac{mwx + ip}{\sqrt{2mw}}$ , $a^* = \frac{mwx - ip}{\sqrt{2mw}}$

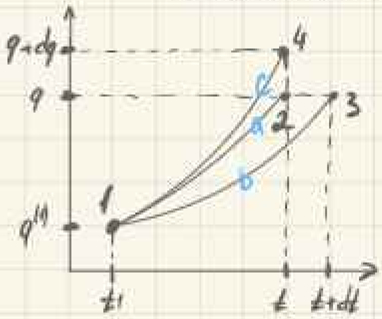
$Q = a$ и $P = ia^*$ – канонические переменные

для гармонического осциллятора новые канонические переменные имеют вид:

$Q = a = \sqrt{\frac{mw}{2}} A e^{-i(wt + \varphi_0)}$ , $P = ia^* = i\sqrt{\frac{mw}{2}} A e^{i(wt + \varphi_0)}$ и $H' = wa^*a = -iwQP$

но если $Q = ae^{iwt}$ , $P = ia^*e^{iwt}$ – канонические $\Rightarrow H' = 0$ а новые $Q, P \neq Q(t)$ и $P(t)$

# Действие вдоль истинной траектории как фукнция начальных и конечных координат и времени. Свойства




$a, b, c$ – различные законы движ-я, которые отвечают разл. значения $\dot q$ в нач. момент времени $t_1$

$S_{12} = \int_1^2 L(q,\dot q,t)dt$ при фикс. $t_1$ и $q^{(1)}$ явл-ся функцией конечной точки 2, т.е. $S_{12} = S(q,t)$

в отличии от инт-лов действия в $S_{12}$ исполь-ся истинный з-н движ-я $q(t)$

Свойства $S(q,t)$:

- рассм-м два различных пути из $1 \to 3$:

1) вдоль кривой истинного дв-я $b$, вклад этого пути в действие: $S(q, t+dt)$
2) 1–2 вдоль ист. кривой $a$ $(S(q,t))$ и малого участка 2-3, для кот-го вклад в действие $Ldt$

$L = p\dot q - H$ ⊕ на 2-3 $\dot q = 0 \Rightarrow Ldt|_{2\text{-}3} = -Hdt \Rightarrow$ по принцип. Гамильтона $\delta S = 0$:

$S(q,t+dt) = S(q,t) - Hdt \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -H$

- рассм-м приращение $S(q,t)$ при $2 \to 4$:

$S(q+dq, t) = \int_1^4 Ldt$ вдоль кривой $c$ и $1 \to 2$, $2 \to 4$

строго говоря, к $1 \to 2 \to 4$ не применим принцип наим. действия, т.к. на $2 \to 4$ $\dot q \to \infty$,
НО допустима завис-ть $q(t)$, сколь угодно близкая и гладкая $\Rightarrow$ на $2 \to 4$: $\dot q dt = dq$

$Ldt|_{2\to 4} = (p\dot q - H)dt = pdq - Hdt$

$S(q+dq,t) = S(q,t) + pdq \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial q} = p$

- $dS(q,t,q^{1},t_1) = \sum p_i dq_i - Hdt - \sum p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)}dt_1$

- переход от нач. значений координат и импульсов к их значениям спустя время $\tau$ является каноническим преобр-ем, для кот-го произв. функция:

$F(q^{(1)}, q, t) = -S(q, t+\tau, q^{(1)}, t)$, где $q^{(1)}$ – старые коорд.
$q$ – новые коорд.

Уравнения Гамильтона Якоби. Методы решения. Пример

есть $S(q, t, q^{(1)}, t_1)$, есть $\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, t)$ и $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ => тогда

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, q_1, \dots, q_s, t\right) = 0$$ – уравнение Гамильтона - Якоби (*)

чтобы решить задачу о движении механич. сист. нужно найти полный интеграл (*)

$S = f(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t) + \alpha_{s+1}$, где $\alpha_{s+1}$ – несущественно аддитивная постоянная
тогда нахождение $q_i(t)$ и $p_i(t)$ сведется к реш. алг. ур-ний

пусть $f(q, \alpha, t)$ – производящая канон. преобр., $\alpha_i$ – новые импульсы => тогда

$q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$
$p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$ следуют из: $\frac{\partial f}{\partial q_i} = p_i$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ – новые координаты

новый Гамильтониан $H'(\alpha, \beta, t) = H + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

а новые переменные $\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \beta} = 0$, $\dot{\beta}_i = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = 0$ – интегралы движения

• если гамильтониан не зависит от времени явно, то $S$ можно искать в виде:

$S(q_1, \dots, q_s, t) = -Et + S_0(q_1, \dots, q_s)$, где $S_0(q_1, \dots, q_s)$ – укороченное действие

тогда: $\underbrace{H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}, q_1, \dots, q_s\right)}_{\text{ур-е в ч.п.}} = E$ $\Rightarrow$ $\underbrace{H\left(\frac{dS_1(q_1)}{dq_1}, \dots, \frac{dS_s(q_s)}{dq_s}, q_1, \dots, q_s\right) = E}_{\text{ур-ние в полных производных}}$

далее $S_0(q_1, \dots, q_s) = \sum_1^s S_i(q_i)$

тогда для $S$ решение будет иметь вид: $S_i(q_i) = \int p_i(q_i) dq_i$

пример: $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ => $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = 0$ (*):

ищем в виде: $S = -Et + S_x(x)$

(*): $-E + \frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \frac{m\omega^2x^2}{2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = \left(E - \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)2m \Rightarrow$

$dS = \sqrt{\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)2m}\, dx = \frac{2E}{\omega}\left(\frac{\arcsin t}{2} + \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}\right)$, где $\frac{\sqrt{m}\,\omega x}{\sqrt{2E}} = t$

$S = -Et + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{m^2\omega^2x^2}{4}} + \frac{E}{\omega}\arcsin\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x$

$\frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x\right) - \beta_0$ => выразить $x(t)$

# Сохранение фазового объема при канонических преобразованиях. Теорема Лиувилля. Применимость

пусть $(2s-1)$-мерная пов-ть замкнутая в $2s$-мерном фазовом пр-ве $p_i, q_i$ выделяет некоторую область $\Omega$

назовем **фазовым объемом этой области**: $\Gamma = \int_\Omega dp_1 \dots dp_s dq_1 \dots dq_s$

при произвольном преобр-нии $q, p \to Q, P$ $\Omega \to \Omega'$ и интеграл преобр-ся:

$\Gamma = \int_{\Omega'} D \, dP_1 \dots dP_s dQ_1 \dots dQ_s$, где $D = \frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)}$ – якобиан преобр-ния ($p = p_1, \dots, p_s$, $q = q_1, \dots, q_s$ и т.д.)

с др. стороны фазовый объем $\Omega'$ равен: $\Gamma' = \int_{\Omega'} dP_1 \dots dP_s dQ_1 \dots dQ_s$

док-ем, что **если преобр-е каноническое, то $D = 1$ и $\Gamma' = \Gamma$** (не зависит от выбора коорд-т)

- сначала $p, q \to P, q$, потом к $P, Q$: якобиан полного преобр-я равен произв. якобианов послед-х этапов:

$$D = \frac{\partial(p, q)}{\partial(P, q)} \frac{\partial(P, q)}{\partial(P, Q)}$$ – здесь можем опустить неизменяющиеся эл-ты

учтем, что якобиан обратных преобр. сами взаимно обратны и перейд. к обр. $D$ во втором сомножителе

$$D = \frac{\partial(p)}{\partial(P)}\bigg|_{q=const} \bigg/ \frac{\partial(q)}{\partial(Q)}\bigg|_{P=const}$$

- преобр-е каноническое $\Rightarrow$ есть $\Phi(q, P) \Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial P_k}$ и $\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \partial P_i}$

в ~ матрицы взаимно транспонированы их det-ты равны $\Rightarrow D = 1$, ч.т.д.

**Теорема Лиувилля:** при движении $\forall$ гамильтоновой системы (нет дисс. сил!) фазовый объем не изменяется

др. словами: движение точек фазового пр-ва подобно движ-ю частиц несжимаемой жидкости (для дек. координат т. Лиувилля справедлива еще и в пр-ве координат и скоростей)

Адиабатические инварианты. Общая идея. Применимость. Примеры использования (из задания)

пусть мех. сист. с одной ст. свободы совершает колебания в усл-ях, когда ее параметр $\lambda$ адиабат. медл. (медленно и плавно) изменяется:

$$\dot\lambda T \ll \lambda \quad \text{и} \quad \ddot\lambda T \ll \dot\lambda$$

- если $H(p,q,\lambda)$ – гам-н этой системы, пар-р $\lambda = const \Rightarrow E = const$: траектория движ-я замкнута и опр-ся как $H(p,q,\lambda) = E$

пусть $p = p(q,E,\lambda)$ – реш-е для $H = E \Rightarrow S(E,\lambda) = \oint p(q,E,\lambda)\,dq$ – площадь, охв-мая на фаз. плос-ти этой траекторией

- если $\lambda \neq const \Rightarrow E \neq const \Rightarrow \langle E \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)\,dt$ – медл. изм-ся и зависит от $\lambda(t)$

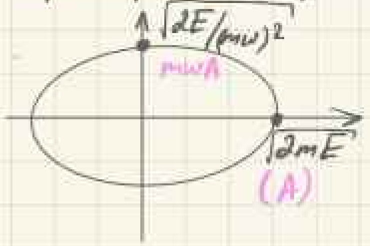
$$I(E,\lambda) = \frac{S(E,\lambda)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\oint p(q,E,\lambda)\,dq$$ – адиабатический инвариант

- пусть в нач. момент есть $\lambda$ и $E$ $\Rightarrow$ при фиксировании этих величин фаз. траект. замкнута и огр-ет фаз. площадь $S$
  энергии точек в этой обл-ти отличны от $E$

в случае произв. изм-ния пар-ра $\lambda(t)$ площадь этой области должна сохр-ся (по т. Лиувилля), НО точки на границе, которые раньше соотв-ли фаз. траектории с $E$ перестанут иметь один-ю энергию и быть фаз. траекторией

если $\lambda(t)$ изм-ся адиабатически $\Rightarrow$ все точки первонач. фаз траектории могут остав-ся фаз. траекториями для новой $E'$ $\Rightarrow$ адиаб. инв-т сохр-ся

пример 1: гармонический осциллятор с мен-ся $\omega$: $\dot\omega \ll \omega^2$, $\ddot\omega \ll \dot\omega\omega$



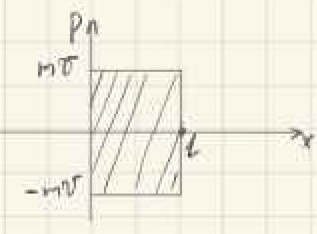

эллипс, задаваемый $H(p,x,\omega) = E$

$$S = \frac{\pi\cdot\sqrt{2mE}\cdot\sqrt{2E}}{\sqrt{m\omega^2}} = \frac{2E\pi}{\omega^2} = (m\omega A^2\pi)$$

$$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega}$$

пример 2: частица в прямоуг. потенц. ящике с шириной $l(t)$, $\dot l \ll v$, $\ddot l l \ll \dot l v$


период $T = \frac{2l}{v}$, $mv = \sqrt{2mE}$



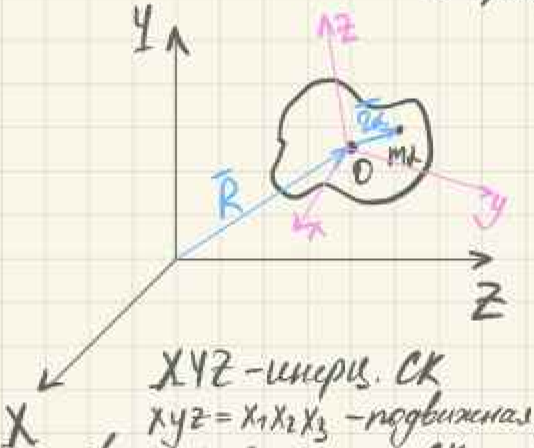

+ задача из месов

$$I = \frac{mvl}{\pi} = \frac{\sqrt{2m}}{\pi}\sqrt{El}$$

$mvl = const$

Момент импульса твердого тела. Тензор моментов инерции. Кинетическая энергия тв тела. Теорема Штейнера. Примеры

**Твердое тело** – совокупность точек, расст-я между которыми не изменяются в процессе движения




XYZ – инерц. СК

xyz = $x_1x_2x_3$ – подвижная, связанная с телом СК

! проекции $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ в-ра $\bar r_\alpha$ на оси xyz = const при движении

движ. тв. тела:

поступательное + вращательное

- изм-ся в-р $\bar R$
- скорость $\forall$ точки $\bar v_\alpha$ = скорости точки O: $\bar v_\alpha = \dot{\bar R} \equiv \bar v$

- не изм-ся пол-е точки O
- $\bar \Omega = \Omega \cdot \bar n$, $\bar n$ – напр-е вращ-я
- $\bar v_\alpha = [\bar\Omega \times \bar r_\alpha]$
- $\bar\Omega$ не зависит от выбора O

- если тв. тело движ-ся произв-но: $\bar v_\alpha = \bar v + [\bar\Omega \times \bar r_\alpha]$

- если $\bar v = \bar v_\parallel + \bar v_\perp$ ⇒ для смещ-ного на в-р $\bar B$ O системы $\bar v' = \bar v + [\bar\Omega \times \bar B]$ ⇒ $v'_\parallel = v_\parallel$ и $\bar v'_\perp = \bar v_\perp + [\bar\Omega \times \bar B]$ ⇒ если $\bar v_\parallel = 0$ ⇒ сущ-ет возможность предст-ть движ. тв. тела чистым вращ-м, тогда ось, проходящая через O' – мгновенная ось вращения тела

импульс тв. тела: $\bar P = m \bar v_{цм}$, $m = \sum_\alpha m_\alpha$

момент импульса: $\bar M = m[R \times v_{цм}] + \sum_\alpha m_\alpha [\bar r_\alpha \times [\bar\Omega \times \bar r_\alpha]]$

если $\bar v_{цм} = 0 \Rightarrow M = \sum m_\alpha [\bar r_\alpha \times [\bar\Omega \times \bar r_\alpha]] = (\bar\Omega \bar r_\alpha^2 - (\bar\Omega, \bar r_\alpha)\bar r_\alpha) m_\alpha$

спроецируем на оси подвижной СК:

$[r_\alpha \times [\bar\Omega, \bar r_\alpha]] \cdot \bar e_i = \sum_1^3 (\bar r_\alpha^2 \delta_{ik} - (r_\alpha)_i (r_\alpha)_k) \Omega_k \Rightarrow M_i = \sum_1^3 I_{ik}\Omega_k$, где $I_{ik}$ – тензор моментов инерции тв. тела

$I_{ik} = \sum_1^N m_\alpha \{\bar r_\alpha^2 \delta_{ik} - (r_\alpha)_i (r_\alpha)_k\}$ – постоянная хар-ка тела

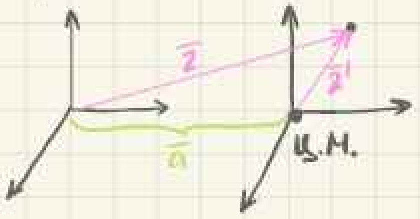
кинетическая энергия: $T = \frac{1}{2} m \bar v_{цм} + \frac{1}{2} \sum m_\alpha [\bar\Omega \times \bar r_\alpha]^2$

если $\bar v_{цм} = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{3} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$

св-ва тензора инерции:

1) $I_{11} = \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2)$, ...
2) $I_{12} = I_{21} = -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha$, $I_{31} = I_{13}$, $I_{23} = I_{32}$
3) $I_{11} + I_{22} \geq I_{33}$, для плоского тв. тела: $I_{11} + I_{22} = I_{33}$

теорема Штейнера:




$I'_{ik} = I^{цм}_{ik} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$

диаг-ные эл-ты минимальны в системе Ц.М. твердого тела если нач. отсчета подвижн. системы лежит в ц.м. тв. тела: $I_{ik}$ имеет диаг-ный вид

$I_1 = I_{11}^{цм}$, $I_2 = I_{22}^{цм}$, $I_3 = I_{33}^{цм}$ – главные моменты инерции в главных осях инерции

- если $I_1 = I_2 = I_3$ – шаровой волчок (однор. шар / куб)
- если $I_1 = I_2 \neq I_3$ – симметричный волчок (  )

- если $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ – асимметричный волчок

# Вращение твердого тела под действием внешних сил. Уравнение Эйлера

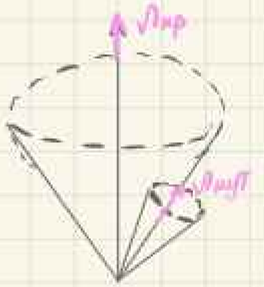
для тв. тела: (*) $\frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{F}$, $\frac{dP_i}{dt} + \sum\limits_{j,k=1}^{3} e_{ijk} \Omega_j P_k = F_i$, – проекция (*) на оси $x_1 x_2 x_3$

аналогично: $\frac{d\bar{M}}{dt} = \bar{K}$, $K = \sum\limits_{\alpha} [\bar{z}_\alpha \times \bar{f}_\alpha]$, $\frac{dM_i}{dt} + \sum\limits_{1}^{3} e_{ijk} \Omega_j M_k = K_i$

• если O для $x_1 x_2 x_3$ – покоится $\Rightarrow$ $\frac{dM_i}{dt} = \sum\limits_{1}^{3} I_{ik} \frac{d\Omega_k}{dt}$, $i = 1, 2, 3$

• если доп-но $x_1 x_2 x_3$ вдоль главных осей инерции $\Rightarrow$ $I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \sum e_{ijk} \Omega_j \Omega_i I_k = K_i$ – ур-ния Эйлера

если на волчок действует $m\bar{g}$ и кин. эн. $T \sim \frac{M^2}{I_3} \gg mgl$




в первом прибл. пренебр-ем влиянием силы $\Rightarrow$ $M = const$ и $\Omega_{нут} = \frac{M}{I_1'}$ (скорость нутации)

учтем силу: $\frac{dM}{dt} = [\bar{l} \times m\bar{g}]$ – приближ. реш-е этого ур-я можно провести, разделяя быстрые и медленные дв-я $\bar{M}$ и $\bar{l}$

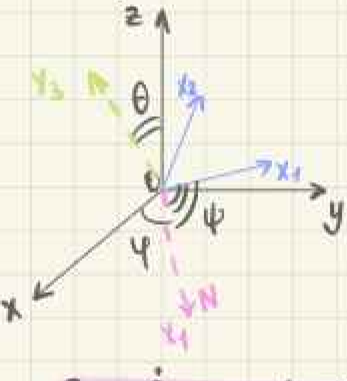
$\left.\begin{array}{l} \bar{M} = \langle \bar{M} \rangle + \delta \bar{M} \\ \bar{l} = \langle \bar{l} \rangle + \delta \bar{l} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \bar{l} \rangle = \frac{\bar{M}}{M} l \cos\alpha_M$ ($\alpha_M$ – угол м/у $\bar{M}$ и осью симм. волчка)

для медленно изм-хся величин из ~: $\frac{d\langle \bar{M} \rangle}{dt} = [\langle \bar{l} \rangle \times m\bar{g}] = [\bar{\Omega}_{пр} \times \langle \bar{M} \rangle]$, $\bar{\Omega}_{пр} = -\frac{ml\cos\alpha_M \bar{g}}{M}$

в-р момента импульса прецессирует вокруг вертик-го напр-я и $\frac{\Omega_{пр}}{\Omega_{нут}} \sim \frac{mgl}{M^2/I_1'} \sim \frac{mgl}{T} \ll 1$

ось симметрии быстрого волчка вр-ся с большой угл. скор. $\Omega_{нут}$,
а сам момент импульса в среднем медл-но вр-ся вокруг вертик. напр-я с $\Omega_{пр}$

углы Эйлера:




1. поворот вокруг Oz на $\varphi$ ($\varphi \in (0; 2\pi)$)

2. ON – линия узлов, отн-но нее отклоним на $\theta$ $(0, \pi)$

3. $Ox_3$ повернули на $\psi$ $(0, 2\pi)$

$\bar{\Omega} = \dot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{\theta}} + \dot{\bar{\psi}}$

$\Omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$

$\Omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$

$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$

$\Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$

если $I_1 = I_2$ $\Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}\left[I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right]$