Семинар 15 [11.11.2022]

Функции Бесселя

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0,$$
$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}.$$

Задачи

Задача 1

Доказать рекуррентные соотношения

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x),$$
$$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J'_\nu(x).$$

Задача 2

Найти производящую функцию

$$F(x,w)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}w^m J_m(x).$$

Задача 3

Получить интегральное представление Бесселя для $n\in\mathbb{Z}$:

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta.$$

Задача 4

Доказать соотношения ортогональности

$$\int_0^1 xJ_k(\lambda_m x)J_k(\lambda_n x)\,dx=\frac{\delta_{mn}}{2}\left(\frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m}\right)^2,\qquad J_k(\lambda_m)=0,\quad \forall m,$$
$$\int_0^1 xJ_k(\lambda_m x)J_k(\lambda_n x)\,dx=\frac{\delta_{mn}}{2}\left(1-\frac{k^2}{\lambda_m^2}\right)J_k^2(\lambda_m),\qquad \frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m}=0,\quad \forall m.$$

Решения

Задача 1

Первая формула доказывалась на лекции, докажем вторую. Пользуемся определением функции Бесселя через ряд. Правая часть равенства имеет вид:

$$2J'_{\nu}(x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(2m+\nu)(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1}.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned}
J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} - \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+1} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} - \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left[\frac{\Gamma(m+\nu+1)}{\Gamma(m+\nu)} + \frac{m!}{(m-1)!}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1}.
\end{aligned}$$

В итоге, пользуясь свойством гамма-функции

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu),$$

получаем искомое равенство.

Задача 2

Продифферинцируем F по каждой из переменных:

$$\partial_x F = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} w^m J'_m(x), \quad \partial_w F = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m w^{m-1} J_m(x).$$

Далее, пользуясь рекуррентными соотношениями из предыдущей задачи, получаем

$$\begin{aligned}
\partial_x F &= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} w^m (J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)) = \frac{1}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)F, \\
\partial_w F &= \frac{x}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} w^{m-1}(J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)) = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{w^2}\right)F.
\end{aligned}$$

Решая получившуюся систему, имеем

$$\begin{aligned}
\ln F &= \frac{x}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) + f_1(w), \\
\ln F &= \frac{x}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) + f_2(x).
\end{aligned}$$

И, следовательно,

$$F(x, w) = C\exp\left[\frac{x}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right], \quad C = \mathrm{const}.$$

Поскольку

$$J_m(0) = 0, \quad \forall m \neq 0, \qquad J_0(0) = 1,$$

то

$$F(0,w)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} w^m J_m(0)=1, \quad \Rightarrow \quad C=1.$$

В итоге

$$F(x,w)=\exp\left[\frac{x}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right].$$

Задача 3

Воспользуемся производящей функцией, полученной в предыдущей задаче. Фактически функции Бесселя представляют из себя коэффициенты ряда Лорана

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} w^m J_m(x).$$

Умножая данное равенство на w^{-n-1}получаем

$$\frac{1}{w^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} w^m J_{n+1+m}(x).$$

По определению вычетом в точке называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана в соответствующей точке, таким образом

$$c_{-1}=J_n(x)=\operatorname*{Res}_{w=0}\left(\frac{1}{w^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]\right).$$

С другой стороны

$$\operatorname*{Res}_{w=0}\left(\frac{1}{w^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{w^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]dw,$$

где γ – замкнутый контур в комплексной плоскости, охватывающий точку $w=0$. В качестве контура γ выберем окружность единичного радиуса и сделаем замену $w=e^{i\theta}$, тогда

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{w^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]dw=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp\left[-in\theta+\frac{x}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right]d\theta=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta+ix\sin\theta}d\theta=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta.$$

Задача 4

Запишем уравнение Бесселя на функцию $J_k(\lambda_m x)$ и умножим $J_k(\lambda_n x)$:

$$J_k(\lambda_n x)\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_k(\lambda_m x)}{dx}\right)+J_k(\lambda_n x)\left(\lambda_m^2-\frac{k^2}{x^2}\right)J_k(\lambda_m x)=0.$$

Меняя m и n местами, получаем другое равенство. Вычитая одно из другого умнажая на x и интегрируя по x от 0 до 1, получаем

$$\left(\lambda_m^2-\lambda_n^2\right)\int\limits_0^1 xJ_k(\lambda_n x)J_k(\lambda_m x)\,dx=\int\limits_0^1\left[J_k(\lambda_m x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_k(\lambda_n x)}{dx}\right)-J_k(\lambda_n x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_k(\lambda_m x)}{dx}\right)\right]dx.$$

Правая часть интегрируется:

$$\int\limits_0^1\left[J_k(\lambda_m x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_k(\lambda_n x)}{dx}\right)-J_k(\lambda_n x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_k(\lambda_m x)}{dx}\right)\right]dx=$$

$$=x\left(J_k(\lambda_m x)\frac{dJ_k(\lambda_n x)}{dx}-J_k(\lambda_n x)\frac{dJ_k(\lambda_m x)}{dx}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\lambda_n J_k(\lambda_m)\frac{dJ_k(\lambda_n)}{d\lambda_n}-\lambda_m J_k(\lambda_n)\frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m}.$$

При $m\neq n$ она равна нулю, при $n=m$ имеем

$$\int\limits_0^1 xJ_k(\lambda_n x)J_k(\lambda_n x)\,dx=\lim_{m\to n}\left[\frac{1}{\lambda_m^2-\lambda_n^2}\left(\lambda_n J_k(\lambda_m)\frac{dJ_k(\lambda_n)}{d\lambda_n}-\lambda_m J_k(\lambda_n)\frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{dJ_k(\lambda_n)}{d\lambda_n}\right)^2-\frac{1}{2}J_k(\lambda_n)\left(\frac{1}{\lambda_n}\frac{dJ_k(\lambda_n)}{d\lambda_n}+\frac{d^2J_k(\lambda_n)}{d\lambda_n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{dJ_k(\lambda_n)}{d\lambda_n}\right)^2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{k^2}{\lambda_n^2}\right)J_k^2(\lambda_n).$$