полной системе функций

Содержание

Полные системы функций

Определение:

Если любая булева функция, являющаяся суперпозицией функций некоторого множества, принадлежит этому множеству, то такое множество называют **замкнутым** (англ. *closed set*).

Определение:

Замыканием (англ. *closure*) множества функций называется минимальное по включению замкнутое подмножество всех функций, содержащее данное множество функций.

Определение:

Множество булевых функций называется **полной системой** (англ. *complete set*), если замыкание этого множества совпадает с множеством всех функций.

Определение:

Полная система функций называется **безызбыточной** (англ. *irredundant functions*), если она перестает быть полной при исключении из неё любого элемента.

Американский математик Эмиль Пост сформулировал необходимое и достаточное условие полноты системы булевых функций. Для этого он ввел в рассмотрение следующие замкнутые классы булевых функций:

- функции, сохраняющие константу T_0 и T_1,
- самодвойственные функции S,

Замкнутые классы булевых функций

Класс функций сохраняющих ноль T_0.

Определение:

Говорят, что функция **сохраняет ноль**, если $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Класс функций сохраняющих единицу T_1.

Определение:

Говорят, что функция **сохраняет единицу**, если $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Класс самодвойственных функций S.

Определение:

Говорят, что функция **самодвойственна** (англ. *self-dual*), если $f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$. Иными словами, функция называется самодвойственной, если на противоположных наборах она принимает противоположные значения.

Класс монотонных функций M.

Определение:

Говорят, что функция **монотонна** (англ. *monotonic function*) , если $\forall i (a_i \leqslant b_i) \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_n) \leqslant f(b_1, \ldots, b_n)$.

Класс линейных функций L.

Определение:

Говорят, что функция **линейна** (англ. *linear function*), если существуют такие $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $a_i \in \{0, 1\}, \forall i = \overline{1, n}$, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место равенство:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus a_n \cdot x_n.$$

Количество линейных функций от n переменных равно 2^{n+1}.

Формулировка и доказательство критерия Поста

Теорема:

Набор булевых функций K является полным тогда и только тогда, когда он не содержится полностью ни в одном из классов S, M, L, T_0, T_1, иными словами, когда в нем имеется хотя бы одна функция, не сохраняющая ноль, хотя бы одна функция, не сохраняющая один, хотя бы одна несамодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция.

Доказательство:

$\triangleright$

Необходимость.

Заметим, что необходимость этого утверждения очевидна, так как если бы все функции из набора K входили в один из перечисленных классов, то и все суперпозиции, а, значит, и замыкание набора входило бы в этот класс, и набор K не мог бы быть полным.

Достаточность.

Докажем, что если набор K не содержится полностью ни в одном из данных классов, то он является полным.

1. Рассмотрим функцию, не сохраняющую ноль — f_0 (то есть функцию, для которой $f_0(0) = 1$). Тогда $f_0(1)$ может принимать два значения:
   1. $f_0(1) = 1$, тогда $f_0(x, x, x, \ldots, x) = 1$.
   2. $f_0(1) = 0$, тогда $f_0(x, x, x, \ldots, x) = \neg x$.
2. Рассмотрим функцию, не сохраняющую один — f_1 (то есть функцию, для которой $f_1(1) = 0$). Тогда $f_1(0)$ может принимать два значения:
   1. $f_1(0) = 0$, тогда $f_1(x, x, x, \ldots, x) = 0$.
   2. $f_1(0) = 1$, тогда $f_1(x, x, x, \ldots, x) = \neg x$.

Таким образом, возможны четыре варианта:

- Мы получили функцию $\neg$.

Используем несамодвойственную функцию f_s. По определению, найдется такой вектор x_0, что $f_s(x_0) = f_s(\neg x_0)$. Где $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0k})$.

Рассмотрим $f_s(x^{x_{01}}, x^{x_{02}}, \ldots, x^{x_{0k}})$, где либо $x^{x_{0i}} = x$, при $x_{0i} = 1$. Либо $x^{x_{0i}} = \neg x$, при $x_{0i} = 0$. Нетрудно заметить, что $f_s(0) = f_s(1) \Rightarrow f_s = \text{const}$. Таким образом мы получили одну из констант.

- Мы получили $\neg$ и $0 \Rightarrow$ имеем константу, равную 1, поскольку $\neg 0 = 1$.
- Мы получили $\neg$ и $1 \Rightarrow$ имеем константу, равную 0, поскольку $\neg 1 = 0$.
- Мы получили 1 и 0.

$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \neg x$.

В итоге имеем три функции: $\neg, 0, 1$.

Используем нелинейную функцию f_l. Среди нелинейных членов f_l (ее представления в виде полинома Жегалкина), выберем тот, в котором минимальное количество элементов. Все аргументы кроме двух в этом члене приравняем единице, оставшиеся два назовем x_1 и x_2. Все элементы, не входящие в данный член, примем равными нулю. Тогда эта функция будет представима в виде $g_l = x_1 \land x_2 [\oplus x_1] [\oplus x_2] [\oplus\ 1]$, где в квадратных скобках указаны члены, которые могут и не присутствовать (остальные слагаемые будут равны нулю, поскольку в них есть как минимум один аргумент, не входящий в выбранный член, так как в выбранном члене минимальное число элементов).

Рассмотрим несколько вариантов:

1. Присутствует член $\oplus\ 1$. Возьмем отрицание от g_l и член $\oplus\ 1$ исчезнет.
2. Присутствуют три члена, без $\oplus\ 1$: $g_l = x_1 \land x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$. Составив таблицу истинности для этой функции нетрудно заметить, что она эквивалентна функции $\lor$.
3. Присутствуют два члена, без $\oplus\ 1$. Построив две таблицы истинности для двух различных вариантов, заметим, что в обоих случаях функция истинна только в одной точке, следовательно, СДНФ функции g_l будет состоять только из одного члена. Если это так, то не составляет труда выразить $\land$ через $\neg$ и g_l. Например, если функция $g_l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает истинное значение, когда аргументы с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ложны, а все остальные истины, то функцию $\land$ можно выразить как $g_l([\neg]x_1, [\neg]x_2, \ldots, [\neg]x_n)$, где $\neg$ ставится перед аргументами с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$.
4. Присутствует один член. Выразим $\land$ через $\neg$ и g_l аналогично пункту 3.

В итоге получим функцию$\neg$, а также либо функцию $\land$, либо функцию $\lor$. Поскольку функцию $\land$ можно выразить через $\lor$ и $\neg$, а функцию $\lor$ через $\land$ и $\neg$, то мы получили базис $\land$, $\lor$, $\neg$. Любую булеву функцию, не равную тождественному нулю, можно представить в форме СДНФ, то есть выразить в данном базисе. Если же функция равна тождественному нулю, то ее можно представить в виде $x \land \neg x$.

Значит, полученные функции образуют полную систему, поскольку с их помощью можно выразить любую булеву функцию. Из этого следует, что K — полная система функций, что и требовалось доказать.

$\triangleleft$

Примеры

Согласно критерию Поста система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.

В частности, если функция не входит ни в один из классов Поста, она сама по себе формирует полную систему. В качестве примера можно назвать штрих Шеффера или стрелку Пирса.

Широко известны такие полные системы булевых функций:

- $\{\land, \lor, \neg\}$ (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание);

конъюнктивных нормальных форм, вторая — для представления в виде полиномов Жегалкина.

Первая из упоминавшихся выше полных систем безызбыточной не является, поскольку согласно законам де Моргана либо дизъюнкцию, либо конъюнкцию можно исключить из системы и восстановить с помощью остальных двух функций. Вторая система является безызбыточной — все три её элемента необходимы для полноты системы.

Теорема о максимальном числе функций в базисе: максимально возможное число булевых функций в базисе — четыре.

Иногда говорят о системе функций, полной в некотором замкнутом классе, и, соответственно, о базисе этого класса. Например, систему $\{\oplus, 1\}$ можно назвать базисом класса линейных функций.

См. также

- Булевы функции
- Суперпозиции
- Полином Жегалкина

Источники информации

- Википедия — Критерий Поста (http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B9_%D0%9F%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B0)
- Википедия — Замкнутые классы булевых функций (http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%BC%D0%BA%D0%BD%D1%83%D1%82%D1%8B%D0%B5_%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%81%D1%8B_%D0%B1%D1%83%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D1%8B%D1%85_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9)
- Образовательный сайт MiniSoft (http://mini-soft.ru/nstu/diskr/7_.php)
- Post's lattice (http://en.wikipedia.org/wiki/Post%27s_lattice)
- Лекции по дискретной математике (http://www.mielt.ru/dir/cat14/subj266/file299/view1397.html)