Семинар 11 [25.10.2022]

Автомодельность. Бегущие волны.

Задачи

Задача 1

Найти автомодельную подстановку и автомодельное решение уравнения теплопроводности

$$\partial_t u = \partial_x (u^n \partial_x u), \quad n > 0.$$

при условии, что

$$\int u(x,0)\, dx = 1, \quad u(-x,t) = u(x,t).$$

Решения

Задача 1

Масштабное преобразование

$$x = \lambda \bar{x}, \quad t = \mu \bar{t}, \quad u = \nu \bar{u},$$

дает

$$\frac{\nu}{\mu}\partial_{\bar{t}}\bar{u} = \frac{\nu^{n+1}}{\lambda^2}\partial_{\bar{x}}\left(\bar{u}^n \partial_{\bar{x}}\bar{u}\right),$$
$$\nu\lambda \int \bar{u}\left(\bar{x},0\right) d\bar{x} = 1.$$

Такое преобразование оставляет задачу неизменной, если

$$\nu\lambda = 1, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{\nu^n}{\lambda^2}, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu^{\frac{1}{n+2}}, \quad \nu = \frac{1}{\mu^{\frac{1}{n+2}}}.$$

Тогда

$$ut^{\frac{1}{n+2}} = \bar{u}\bar{t}^{\frac{1}{n+2}}, \quad \frac{\bar{x}}{\bar{t}^{\frac{1}{n+2}}} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}^{\frac{1}{n+2}}},$$

и автомодельная подстановка имеет вид

$$g\left(ut^{\frac{1}{n+2}}, \frac{x}{t^{\frac{1}{n+2}}}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad f = t^{-\frac{1}{n+2}} f\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{n+2}}}\right).$$

откуда получаем

$$\frac{d}{d\xi}\left(f^n \frac{df}{d\xi}\right) + \frac{1}{n+2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi f\right) = 0,$$

где $\xi = xt^{-\frac{1}{n+2}}$. Получившееся уравнение можно один раз проинтегрировать:

$$f^n \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{n+2}\xi f = 0,$$

а константа интегрирования равна нулю, так как в силу граничных условий $f'(0) = 0$. В итоге имеем

$$f^{n-1}df = -\frac{1}{n+2}\xi d\xi, \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = \left(\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}\left(\xi_0^2 - \xi^2\right)\right)^{1/n}$$

откуда

$$u = t^{-\frac{1}{n+2}}\left(\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}\left(\xi_0^2 - x^2 t^{-\frac{2}{n+2}}\right)\right)^{1/n}, \quad \xi_0 t^{\frac{1}{n+2}} > |x|,$$
$$u \equiv 0, \quad |x| < \xi_0 t^{\frac{1}{n+2}}.$$

Постоянная ξ_0 может быть найдена из условия нормировки:

$$1 = \int u(x,0)\,dx = \lim_{t\to 0}\left[t^{-\frac{1}{n+2}}\left(\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}\right)^{1/n}\int\limits_{-\xi_0 t^{\frac{1}{n+2}}}^{\xi_0 t^{\frac{1}{n+2}}}\left(\xi_0^2 - x^2 t^{-\frac{2}{n+2}}\right)^{1/n} dx\right] =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}\right)^{1/n}\xi_0^{\frac{2+n}{n}}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\eta\right)^{1/n} d\eta.$$

Далее, учитывая, что

$$\int_{-1}^{1}\left(1-\eta^2\right)^{1/n}d\eta = 2\int_{0}^{1}\left(1-\eta^2\right)^{1/n}d\eta = \frac{2}{n}\int_{0}^{1} z^{1/2}(1-z)^{1/n-1}\,dz = .$$

$$= \frac{2}{n}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{n}\right)},$$

получаем

$$\xi_0 = \left(\left(2\frac{n+2}{n}\right)^{1/n}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{n+2}}.$$

При $n=1$ имеем $\xi_0=(9/2)^{1/3}$:

$$u = \frac{1}{6t^{1/3}}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{2/3}-\frac{x^2}{t^{2/3}}\right),\quad \left(\frac{9t}{2}\right)^{1/3} > |x|,$$
$$u\equiv 0,\quad |x| < \left(\frac{9t}{2}\right)^{1/3}.$$

При $n\gg 1$, получаем $\xi_0 = 1/2$:

$$u\sim\frac{1}{t^{1/n}},\quad \frac{1}{2}t^{1/n} > |x|,$$
$$u\equiv 0,\quad |x| < \frac{1}{2}t^{1/n}.$$