Домашняя работа к занятию 15.

1.1 Найдите точку покоя системы $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 1 \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$ и укажите ее тип. Нарисуйте фазовый портрет. Найдите первый интеграл.

1.2 Найдите точки покоя системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$ и укажите их тип. Нарисуйте фазовый портрет.

1.3 Найдите стационарные решения уравнения $\ddot{x} + x\dot{x} + x^2 = 1$. На фазовой плоскости $(x; \dot{x})$ нарисуйте фазовый портрет.

2.1 Найдите точки покоя системы $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = -2x(x + y) \end{cases}$ и укажите, если возможно, их тип. Найдите первый интеграл. При помощи компьютерных программ нарисуйте фазовый портрет.

2.2 Найдите стационарные решения уравнения $\ddot{x} + \sqrt{x^2 + \dot{x}^2} = 4$. На фазовой плоскости $(x; \dot{x})$ нарисуйте фазовый портрет.

3.1 Модель «хищник – жертва» была впервые построена Вольтерра для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море, которые имели один и тот же период, но отличались по фазе.

Пусть $x(t)$ — число хищников, а $y(t)$ — число жертв в момент времени t. Взаимодействие видов описывается системой $\begin{cases} \dot{x} = x(-a + b\,y) \\ \dot{y} = y(c - d\,x) \end{cases}$, где a, b, c, d — положительные коэффициенты.

Найдите точки покоя системы и определите их тип. Найдите первый интеграл. Изобразите фазовый портрет. Дайте содержательную интерпретацию полученной картины.

Ответы.

1.1 Точка $(-1;-2)$ — центр. Первый интеграл $x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + y = C$.

1.2 Точка $(0;3)$ — седло, точка $(0;-3)$ — неустойчивый узел.

1.3 $x = \pm 1$. Уравнение сводится к системе $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 - x^2 - xy \end{cases}$ Точка $(-1;0)$ — седло, точка $(1;0)$ — устойчивый фокус.

2.1 Точка $(-1;1)$ — узел. Для точки $(0;0)$ определить тип по линейному приближению не возможно. Первый интеграл $6x^2y - 3y^2 + 4x^3 = C$.

2.2 $x = \pm 2$. Уравнение сводится к системе $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ В точке $(-2;0)$ — узел, в точке $(2;0)$ линеаризация не дает информации.

3.1 Точка покоя $(0;0)$ — седло, причем оси Ox и Oy являются его сепаратрисами. Тип точки $(\frac{c}{d};\frac{a}{b})$ по теореме о линеаризации определить невозможно.

Первый интеграл $x^c e^{-dx} y^a e^{-by} = C$ можно представить в виде произведения $f_1(x)f_2(y) = C$, где $f_i(0) = 0$, $f_i(t) > 0$ при $t > 0$ и $f_i(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. каждая из функций f_i имеет единственную точку максимума. Анализируя эти особенности, можно понять, что линии уровня первого интеграла замкнуты и представляют собой целые траектории системы, то есть точка $(\frac{c}{d};\frac{a}{b})$ является центром.