Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 1

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [2;\ 0;\ 1;\ -2]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [2;\ 3;\ 3;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [0;\ 3;\ 2;\ 1]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [1;\ 2;\ 2;\ 0]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [-3;\ -1;\ -2;\ 3]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[1;\ 0;\ -1;\ 1]^\top + \alpha[-1;\ -1;\ 1;\ 0]^\top + \beta[2;\ -1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{3k}a_{42}a_{2m}a_{15}a_{56}a_{63}a_{71}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 2

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ \ \ x_1 + \lambda x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 2, \\ \ \ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [0;\ 1;\ -1;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [1;\ -1;\ 1;\ 0]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [2;\ -3;\ 3;\ -2]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [1;\ -2;\ 2;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [2;\ -4;\ 4;\ -3]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[1;\ 1;\ 3;\ -3]^\top + \alpha[1;\ -1;\ 1;\ 0]^\top + \beta[-1;\ -1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 7 \\ 9 & -10 & 10 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{35}a_{4k}a_{76}a_{52}a_{1m}a_{24}a_{61}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)

Вариант 3

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ \ \ x_1 + \lambda x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 - 4x_4 = 1, \\ \ \ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 + 5x_4 = 3, \\ 5x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 3. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [1;\ 1;\ 2;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [1;\ 1;\ 1;\ 1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [-1;\ -1;\ 0;\ 0]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [-1;\ 0;\ 2;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [-3;\ -2;\ -1;\ -1]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[2;\ 1;\ -1;\ 0]^\top + \alpha[-1;\ -2;\ 1;\ 0]^\top + \beta[2;\ 1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{33}a_{4k}a_{2m}a_{15}a_{56}a_{62}a_{71}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 4

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 7, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [1;\ 1;\ 1;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [1;\ -1;\ -1;\ 0]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [1;\ -3;\ -3;\ 1]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [1;\ 4;\ 2;\ -3]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [1;\ 2;\ 0;\ -2]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[-1;\ 3;\ 0;\ 2]^\top + \alpha[2;\ 2;\ 1;\ 0]^\top + \beta[1;\ -2;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -12 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{72}a_{25}a_{1k}a_{34}a_{56}a_{6m}a_{43}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 5

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [3;\ 2;\ 3;\ -2]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [2;\ -1;\ 0;\ 1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [4;\ 5;\ 6;\ -5]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [-2;\ -1;\ -1;\ 0]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [-3;\ 0;\ -2;\ 1]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[0;\ 1;\ 1;\ -2]^\top + \alpha[-2;\ -2;\ 1;\ 0]^\top + \beta[-1;\ -1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{34}a_{4k}a_{72}a_{1m}a_{26}a_{67}a_{51}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i,\ \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 6

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [0;\ -1;\ -2;\ -3]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [2;\ -1;\ -1;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [2;\ -2;\ -3;\ -4]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [1;\ -1;\ 2;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [-1;\ 1;\ 5;\ 6]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[3;\ 1;\ 0;\ 2]^\top + \alpha[-2;\ 1;\ 1;\ 0]^\top + \beta[2;\ 1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -7 & -2 & -1 \\ 8 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{3k}a_{12}a_{47}a_{76}a_{6m}a_{21}a_{53}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 7

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A,B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 9, \\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [-2;\ -2;\ -3;\ 4]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [-1;\ -1;\ -2;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [1;\ 1;\ 1;\ -2]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [1;\ 2;\ 2;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [2;\ 3;\ 3;\ -3]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[1;\ 1;\ 1;\ 1]^\top + \alpha[-2;\ -1;\ 1;\ 0]^\top + \beta[-1;\ 1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 7 \\ -4 & 7 & 25 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 13 & 8 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{36}a_{4k}a_{12}a_{2m}a_{73}a_{64}a_{55}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i,\ \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 8

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 3. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [3;\ -1;\ 1;\ 1]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [2;\ 1;\ 2;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [1;\ -2;\ -1;\ 2]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [3;\ 0;\ 2;\ 0]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [4;\ -2;\ 1;\ 2]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[2;\ 1;\ 2;\ 1]^\top + \alpha[1;\ 1;\ 1;\ 0]^\top + \beta[1;\ 2;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 12 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{42}a_{3k}a_{75}a_{51}a_{6m}a_{17}a_{23}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 9

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ \ \ x_1 + \lambda x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 5, \\ 4x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 + \ \ x_4 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 7. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [3;\ 1;\ -1;\ 1]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [2;\ 2;\ 1;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [8;\ 4;\ -1;\ 1]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [0;\ 1;\ 2;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [5;\ 2;\ -2;\ 1]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[1;\ 2;\ 1;\ -1]^\top + \alpha[-2;\ 2;\ 1;\ 0]^\top + \beta[2;\ -1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -9 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \\ -2 & 14 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{74}a_{5k}a_{45}a_{37}a_{2m}a_{66}a_{13}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 10

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [2;\ 0;\ 0;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [0;\ 2;\ 1;\ 1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [2;\ 4;\ -2;\ -3]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [1;\ 2;\ 1;\ 0]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [-1;\ 4;\ 2;\ 2]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[1;\ -1;\ 3;\ 1]^\top + \alpha[-1;\ -2;\ 1;\ 0]^\top + \beta[2;\ -2;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -8 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -7 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{46}a_{51}a_{3k}a_{13}a_{24}a_{62}a_{7m}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 11

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [0;\ -6;\ 5;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [-1;\ -1;\ 0;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [1;\ 7;\ -5;\ -1]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [1;\ -2;\ 3;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [2;\ -7;\ 8;\ 5]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[3;\ 1;\ 1;\ -1]^\top + \alpha[-2;\ -1;\ 1;\ 0]^\top + \beta[-2;\ -1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -3 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & 11 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{42}a_{3k}a_{26}a_{1m}a_{61}a_{75}a_{53}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 12

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ \ \ x_1 + \lambda x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 4, \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [1;\ -2;\ -1;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [-1;\ 2;\ 1;\ -1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [-1;\ 2;\ 1;\ -3]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [-3;\ 5;\ 3;\ -3]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [5;\ -9;\ -5;\ 6]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[1;\ 0;\ 1;\ 0]^\top + \alpha[-1;\ 2;\ 1;\ 0]^\top + \beta[-1;\ -1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 9 & -9 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & 11 & 9 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{57}a_{2k}a_{43}a_{14}a_{3m}a_{72}a_{66}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i,\ \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 13

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [1;\ 0;\ -3;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [0;\ 1;\ -1;\ 1]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [-1;\ 2;\ 1;\ 0]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [-2;\ -3;\ 8;\ -6]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [-3;\ -2;\ 10;\ -7]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[-1;\ 1;\ -1;\ 1]^\top + \alpha[-2;\ -1;\ 1;\ 0]^\top + \beta[-1;\ 1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -8 & -8 \\ 9 & 6 & 7 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{32}a_{41}a_{2k}a_{15}a_{6m}a_{73}a_{56}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)

Вариант 14

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [0;\ 1;\ 0;\ 2]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [-2;\ 4;\ -4;\ 5]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [-4;\ 6;\ -8;\ 6]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [1;\ -3;\ 3;\ -5]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [-3;\ 8;\ -7;\ 12]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[-1;\ 1;\ 1;\ 2]^\top + \alpha[-1;\ -2;\ 1;\ 0]^\top + \beta[1;\ 1;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \\ 7 & 14 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{63}a_{4k}a_{36}a_{2m}a_{11}a_{74}a_{55}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i,\ \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать до 4 декабря)
Вариант 15

1. Доказать, что если матрицы A и B кососимметричны, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7, \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5\}$ и выразить через него все остальные векторы для

$$\mathbf{a}_1 = [-6;\ 1;\ -3;\ -3]^\top,\ \mathbf{a}_2 = [-4;\ 1;\ -1;\ -2]^\top,\ \mathbf{a}_3 = [8;\ -1;\ 5;\ 4]^\top,$$
$$\mathbf{a}_4 = [-2;\ -1;\ -2;\ -2]^\top,\ \mathbf{a}_5 = [0;\ -1;\ 0;\ -1]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, множество решений которой — это линейное многообразие

$$\{[-1;\ 0;\ 2;\ 1]^\top + \alpha[1;\ 2;\ 1;\ 0]^\top + \beta[-2;\ -2;\ 0;\ 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -3 & -4 & 6 \\ -7 & -2 & 14 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k, при которых определитель $\det(a_{ij})$ содержит моном

$$a_{23}a_{54}a_{1k}a_{71}a_{4m}a_{66}a_{32}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i,\ \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.