Семинар 1 [05.09.2022]

Линейные операторы. Матрицы, след матрицы, определитель матрицы. Эрмитово сопряжение матрицы, эрмитовы и унитарные матрицы. Собственные числа и вектора, присоединенный вектор, нормальная (жорданова) форма матрицы. Функция от матрицы, резольвента $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$,

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\lambda) R_\lambda(A)\, d\lambda.$$

Задачи

Задача 1 (14)

Пусть $A_1, \ldots A_n$ – квадратные матрицы одинакового размера. Доказать, что

$$\mathrm{Tr}[A_1 A_2 \ldots A_n] = \mathrm{Tr}[A_2 \ldots A_n A_1].$$

Задача 2 (2)

Пусть A, B, C, D – квадратные матрицы $n \times n$, $AC = CA$ и A– невырожденная матрица. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & C \\ B & A \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

Решения

Задача 1

Обозначим $A = A_1$ и $B = A_2 \dots A_n$ и докажем, что

$$\mathrm{Tr}\left[AB\right] = \mathrm{Tr}\left[BA\right]. \tag{1}$$

Имеем по определению

$$\mathrm{Tr}\left[AB\right] = (AB)^j_i\, \delta^i_j = A^j_k B^k_i \delta^i_j = A^i_k B^k_i,$$
$$\mathrm{Tr}\left[BA\right] = (BA)^j_i\, \delta^i_j = B^j_k A^k_i \delta^i_j = A^k_i B^i_k.$$

Поскольку все индексы в полученных выражениях «немые», меняя местами индексы i и k в одном из них, получаем искомое равенство.

Отсюда в частности следует, что след матрицы инвариантен относительно преобразований координат и равен сумме ее собственных значений. Действительно, пусть $A' = T^{-1}AT$ – матрица A в жордановом базисе, T – соответствующая матрица перехода, тогда

$$\mathrm{Tr}\left[A\right] = \mathrm{Tr}\left[AT\,T^{-1}\right] = \mathrm{Tr}\left[T^{-1}AT\right] = \mathrm{Tr}\left[A'\right] = \sum_i \lambda_i.$$

Задача 2 (2)

Мотивация: умножить матрицу в условии задачи на такую матрицу, определитель которой легко бы вычислялся, а само умножение упрощало бы исходную матрицу. Ясно, что

$$\begin{vmatrix} I & 0 \\ X & A \end{vmatrix} = |A|.$$

С другой стороны имеем

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ XA + AC & XB + AD \end{pmatrix}.$$

Поскольку $AC = CA$, удобно положить $X = -C$, чтобы один из блоков занулился:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & AD - CB \end{pmatrix}.$$

Далее учтем, что

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} = \left|A^{-1}\right| |A| = 1.$$

Вычисляем:

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & AD - CB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & A(AD - CB) \end{pmatrix}.$$

В итоге, собирая все вместе, имеем

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & A(AD - CB) \end{pmatrix},$$

откуда, навешивая определитель на обе части, получаем

$$|A| \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\,|AD - CB|.$$

При условии $|A| \neq 0$, что справедливо, когда матрица A невырожденная, приходим к искомому равенству.