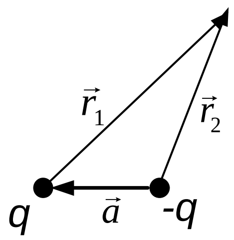
1. Электростатика

Урок 3

Диполь

1.1. (Задача 1.27 из задачника) Найти потенциал и напряженность поля диполя с дипольным моментом $\mathbf{p}$.

Решение Рассмотрим два одинаковых по величине и разных по знаку заряда,



находящихся на расстоянии a друг от друга (см. рис.). Потенциал такой системы в некоторой точке можно записать (по принципу суперпозиции) как

$$\varphi_d = q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = q\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Для вычисления этого выражения предположим, что $r_1 \gg a, \quad r_2 \gg a$. Домножим числитель и знаменатель полученного выражения $r_1 + r_2$и пренебрежем различиями между r_1 и r_2 в знаменателе

$$\frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{2r^3} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r^3}.$$

Используя векторное соотношение, $\mathbf{a} + \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$,, можно получить

$$\varphi_d = \frac{\mathbf{rp}}{r^3},$$

где $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$ и вектор $\mathbf{p}$, который называется дипольным моментом, направлен от $-q$ к $+q$. Для системы зарядов потенциал электростатического поля вдали от области их размещения

$$\varphi = \frac{Q}{R} + \frac{\mathbf{Rd}}{R^3},$$

где $Q = \sum_i q_i$, $\mathbf{d} = \sum \mathbf{r}_i q_i$, а $\mathbf{R}$ – вектор из начала координат в точку, наблюдения. Начало координат выбрано где-то внутри системы зарядов. Тогда поле в точке $\mathbf{R}$

$$E = -\nabla\left(\frac{\mathbf{Rd}}{R^3}\right) = -\frac{\mathbf{d}}{R^3} + \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{Rd})}{R^5}$$

При выводе этого соотношения использовались правила обращения с оператором ∇

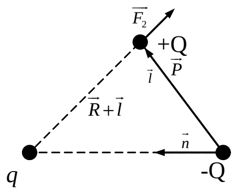
$$\nabla R = \mathbf{R}/R, \quad \nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a.$$

1.2. (Задача 1.28 из задачника) Найти силу и вращательный момент, приложенные к электрическому диполю с моментом $\mathbf{P}$ в поле точечного заряда q.

Решение Сила, действующая на диполь в поле точечного заряда q, является суммой сил, действующих на заряды диполя со стороны заряда q:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = Q(\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}), \tag{1}$$

где $\mathbf{E_1}$ – напряженность электрического поля, создаваемая зарядом q в точке нахождения отрицательного заряда диполя $(-Q)$; $\mathbf{E_2}$ – в точке нахождения положительного заряда диполя. Если расстояние между зарядами диполя мало по сравнению с расстоянием, на котором находится диполь от заряда, то поле $\mathbf{E_2}$ можно разложить в ряд Тейлора и оставить в нем два первых отличных от нуля члена



$$\mathbf{E_2} = \mathbf{E}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\ell}) =$$

$$= \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \ell_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \ell_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + \ell_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \approx \mathbf{E_1} + (\boldsymbol{\ell}\,\nabla)\mathbf{E},$$

где $(\boldsymbol{\ell}\,\nabla)$ – скалярное произведение вектора $\boldsymbol{\ell}$ и вектора $\nabla = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$. Подставим $\mathbf{E_2}$ в уравнение (1) и учитывая, что $\mathbf{P} = Q\boldsymbol{\ell}$, $\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3}\mathbf{R}$, находим выражение для силы, действующей на диполь со стороны точечного заряда:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{P}\nabla)\frac{q}{R^3}\mathbf{R} = q\left(P_x\frac{\partial}{\partial x} + P_y\frac{\partial}{\partial y} + P_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\mathbf{R}}{R^3}. \tag{2}$$

Так как

$$P_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) = P_x\left(\frac{1}{R^3}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \mathbf{R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\right)\right) = P_x\left(\frac{\mathbf{i}}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}}{R^5}x\right),$$

то аналогично

$$P_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) = P_y\left(\frac{\mathbf{j}}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}}{R^5}y\right), \quad P_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) = P_z\left(\frac{\mathbf{k}}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}}{R^5}z\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные векторы в направлениях соответственно X, Y, Z. Подставляя вычисленные соотношения в уравнение (2), получаем

$$\mathbf{F} = q\left(\frac{\mathbf{P}}{R^3} - \frac{3(\mathbf{P}\,\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5}\right). \tag{3}$$

Сила, действующая на диполь в поле точечного заряда, равна по абсолютной величине и противоположна по направлению силе, действующей на заряд в поле диполя. Поэтому из формулы (3) следует, что поле, создаваемое диполем в точке, определяемой радиус-вектором $\mathbf{R}$ на больших расстояниях, будет иметь вид

$$\mathbf{E}_{\text{дип}} = -\frac{\mathbf{P}}{R^3} + \frac{3(\mathbf{P}\,\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5}.$$

Момент сил, действующий на диполь во внешнем поле $\mathbf{E}$, равен $\mathbf{N} = [\mathbf{P} \times \mathbf{E}]$. Подставляя в эту формулу поле точечного заряда
$\mathbf{E} = q\mathbf{R}/R^3$, получаем

$$\mathbf{N} = q\frac{[\mathbf{P} \times \mathbf{R}]}{R^3},$$

где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, проведенный из точки нахождения точечного заряда q в точку, где находится диполь.

1.3. (Задача 1.31 из задачника) Найти уравнение силовых линий точечного диполя с дипольным моментом $\mathbf{d}$, помещенного в начале координат. Нарисовать примерный вид силовых линий.

Решение Выберем систему координат так, что диполь располагается вдоль оси z сферической системы координат. Уравнение силовых линий поля $\mathbf{E}$ в произвольной ортогональной системе координат записывается в виде

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2} = \frac{h_3 dq_3}{E_3}$$

Используя коэффициенты Ламе для сферической системы координат $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r\sin\theta$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}$$

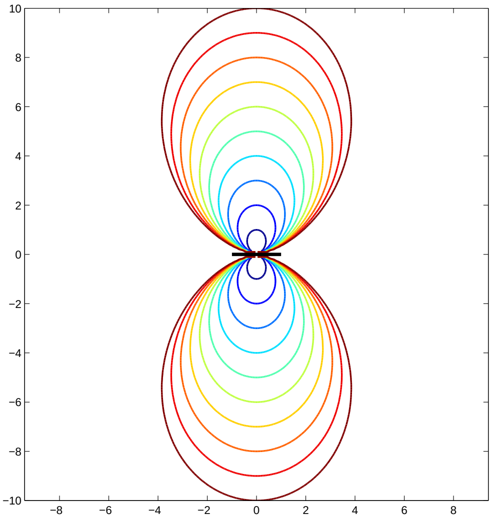
$$E_r = -\frac{p}{r^3}\cos\theta + \frac{3p\cos\theta}{r^3} = 2\frac{p}{r^3}\cos\theta$$

$$E_\theta = \frac{p}{r^3}\sin\theta$$

$$\frac{r^3 dr}{2p\cos\theta} = \frac{r^4 d\theta}{p\sin\theta}$$

$$\frac{dr}{r} = 2\frac{d\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{dr}{r} = C_1 = 2\frac{d\sin\theta}{\sin\theta} = 2\ln\sin\theta$$
$$\ln r = C_1 = \ln(\sin^2\theta)$$
$$\frac{r}{\sin^2\theta} = \text{const}$$



Силовые линии диполя

1.4. а) Показать, что дипольный момент $\mathbf{P}$ электрически нейтральной системы зарядов $\sum\limits_i q_i = 0$ не меняется при смещении начала координат.

б) При каком выборе вектора смещения $\mathbf{d}$ дипольный момент $\mathbf{P}' = 0$, если $\sum\limits_i q_i \neq 0$?

Решение а) Пусть в некоторой системе координат радиус-вектор положения i-го заряда q_i есть $\mathbf{R}_i$, тогда дипольный момент системы зарядов в этой системе координат $\mathbf{P} = \sum\limits_i q_i \mathbf{R}_i$. Сдвинем начало координат на некоторый вектор $\mathbf{d}$, тогда положение каждого заряда в новой системе будет $\mathbf{R}'_i = \mathbf{R_i} - \mathbf{d}$ и

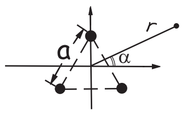
$$\mathbf{P}' = \sum_i q_i \mathbf{R}'_i = \sum_i q_i(\mathbf{R_i} - \mathbf{d}) = \sum_i q_i \mathbf{R_i} - \mathbf{d}\sum_i q_i = \mathbf{P},$$

так как $\sum\limits_i q_i = 0$.

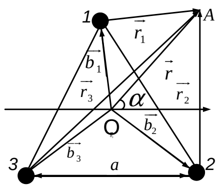
б) $\mathbf{P}' = 0$, если

$$\mathbf{d} = \frac{\sum\limits_i q_i \mathbf{R_i}}{\sum\limits_i q_i}.$$

1.5. (Задача 1.37 из задачника) Три бесконечных заряженных нити (линейная плотность заряда $\varkappa$) расположены на расстоянии a друг от друга. Найти два первых (отличных от нуля!) члена разложения потенциала на больших расстояниях.



Решение Напряженность электрического поля от бесконечной заряженной с плотностью $\varkappa$ нити $\mathbf{E} = (2\varkappa/R^2)\mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, расположенный в плоскости, перпендикулярной нити, и проведенный от нити в точку наблюдения. Тогда потенциал от одной нити равен $-2\varkappa \ln R + \text{const}$. Потенциал от трех нитей в обозначениях рисунка



$$\varphi = -2\varkappa \ln r_1 - 2\varkappa \ln r_2 - 2\varkappa \ln r_3.$$

Константа выбрана равной нулю. Так как $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{b}_1$, то

$$r_1 = (r^2 + b^2 - 2rb \sin \alpha)^{1/2}.$$

Аналогично

$$r_2 = \left(r^2 + b^2 - 2rb \cos(\alpha + 30^\circ)\right)^{1/2},$$
$$r_3 = (r^2 + b^2 + 2rb \cos(\alpha - 30^\circ))^{1/2},$$

где $b = |\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2| = |\mathbf{b}_3|$. Далее

$$\ln r_1 = \ln r + \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2b}{r} \sin \alpha + \frac{b^2}{r^2}\right).$$

Разлагая второе слагаемое в ряд Тейлора по степеням b/r, получаем

$$\ln r_1 \simeq \ln r - \sin \alpha \, \frac{b}{r} + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \, \frac{b^2}{r^2} + \frac{1}{3!}(12 \sin \alpha - 16 \sin^3 \alpha) \, \frac{b^3}{r^3}.$$

Сделав аналогичные вычисления для $\ln r_2$ и $\ln r_3$ и сложив, окончательно найдем, что

$$\varphi = -6\varkappa \ln r - 2 \, \frac{b^3}{r^3} \, \varkappa \sin^3 \alpha \quad \text{при} \quad b \ll r,$$

где $b = a/\sqrt{3}$.