

IV

Геометрические характеристики плоских фигур.

Используемые в курсе «Сопротивление материалов» геометрические характеристики поперечных сечений стержней вычисляются по тем же формулам, что и инерциальные параметры тонких пластинок единичной плотности (1 кг/м^2).

Поэтому новых названий им придумывать не стали:

- центр тяжести;
- статический момент;
- момент инерции.

Перечень геометрических характеристик

Пусть на плоскости имеется некоторая геометрическая фигура Φ и некоторая система координат OXY :

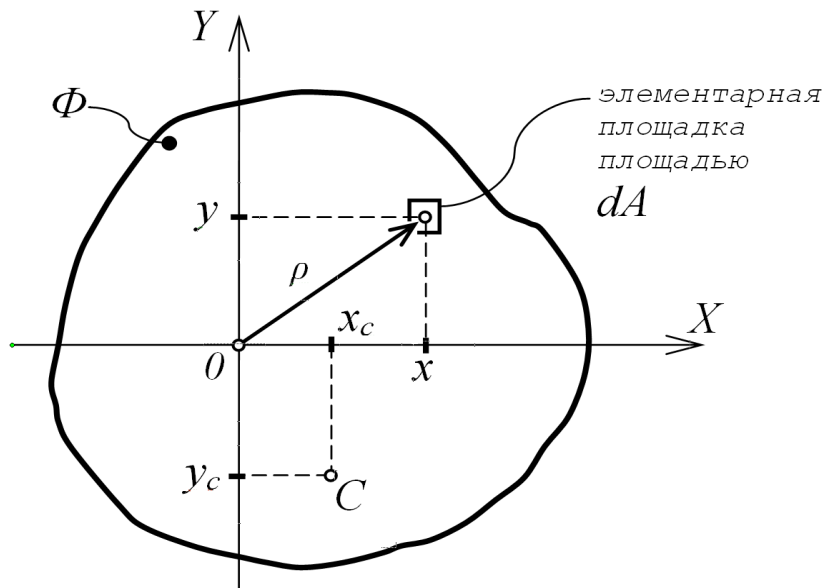


Рис. IV.1

C — **центр тяжести** фигуры (то же, что и центр тяжести пластинки подобной формы);

$$A = \int_{\Phi} dA \quad \begin{matrix} >0 \\ <0 \\ =0 \end{matrix} \text{ — **площадь**, [м²] ;}$$

$$S_x = \int_{\Phi} y \cdot dA \quad \begin{matrix} >0 \\ <0 \\ =0 \end{matrix} \text{ — **статический момент относительно оси X**, [м³] ;}$$

$$S_y = \int_{\Phi} x \cdot dA \quad \begin{matrix} >0 \\ <0 \\ =0 \end{matrix} \text{ — **статический момент относительно оси Y**, [м³] ;}$$

$$I_x = \int_{\Phi} y^2 \cdot dA \quad \begin{matrix} >0 \\ <0 \\ =0 \end{matrix} \text{ — **момент инерции относительно оси X**, [м⁴] ;}$$

$$I_y = \int_{\Phi} x^2 \cdot dA \quad \begin{matrix} >0 \\ <0 \\ =0 \end{matrix} \text{ — **момент инерции относительно оси Y**, [м⁴] ;}$$

↙ ↘
Осевые моменты инерции

$$I_{xy} = \int_{\Phi} x \cdot y \cdot dA \quad \begin{matrix} >0 \\ <0 \\ =0 \end{matrix} \text{ — **центробежный момент инерции**, [м⁴] ;}$$

$$I_p = \int_{\Phi} \rho^2 \cdot dA = \int_{\Phi} (x^2 + y^2) \cdot dA = I_y + I_x \quad \begin{matrix} >0 \\ <0 \\ =0 \end{matrix} \text{ — **полярный момент**$$

инерции, [м⁴].

Формулы для определения координат центра тяжести выведены ещё в курсе теоретической механики:

$$x_c = \frac{S_y}{A} \quad (IV.2)$$

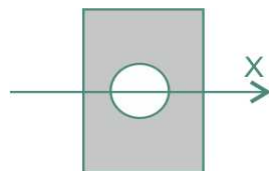
$$y_c = \frac{S_x}{A} \quad (IV.3)$$

Как уже указывалось в разделе «кручение», моменты инерции - величины аддитивные:

- а) Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции её частей:

$$I = \sum I_i$$

- б) Момент инерции фигуры равен моменту инерции её наружного контура, минус моменты инерции фигур-вырезов:



$$I_x = I_x^{\square} - I_x^{\circ}$$

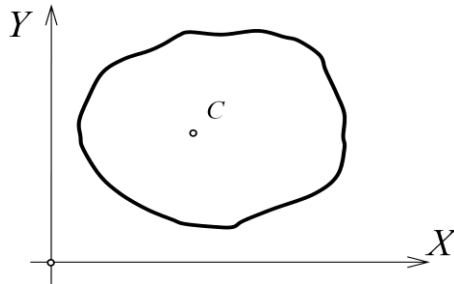
Эти же два свойства также присущи статическим моментам.

Виды координатных осей

Координатные оси OX и OY , в которых рассчитываются геометрические характеристики плоских фигур, подразделяются на:

- 1) **Произвольные**: не обладают никакими признаками. Таких осей

бесконечное количество.



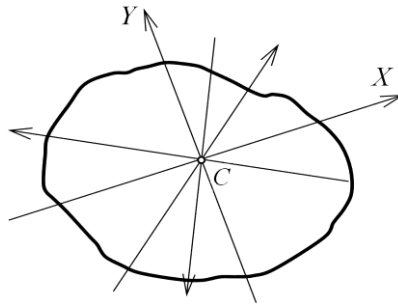
- 2) **Центральные**: начало координат - в центре тяжести фигуры. Таких

осей также бесконечное количество.

Признак центральности осей X и Y :

$$x_c = 0 \Rightarrow S_y = 0 \quad (\text{см. (IV.2)})$$

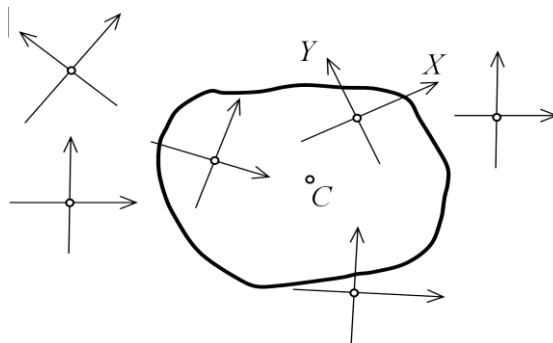
$$y_c = 0 \Rightarrow S_x = 0 \quad (\text{см. (IV.3)})$$



- 3) **Главные**. Как известно, сумма осевых моментов инерции постоянна:

$$I_x + I_y = I_p = \text{const}$$

Значит, для каждой точки на плоскости имеется такая пара осей X и Y , в которой моменты I_x и I_y плоской фигуры принимают экстремальные значения (один максимальное, другой минимальное). Эти оси и называются *главными для соответствующей точки*.



Главных осей для фигуры существует бесконечное количество, ибо на плоскости бесконечное количество точек.

Признак главных осей:

$$I_x \begin{matrix} \nearrow \text{min} \\ \searrow \text{max} \end{matrix} \quad I_y \begin{matrix} \searrow \text{max} \\ \nearrow \text{min} \end{matrix}$$

$I_{xy} = 0$ — это будет доказано позже.

4) **Главные центральные:** главные оси для точки - центра тяжести фигуры.

Для фигуры существует единственная пара главных центральных осей. Исключение – фигуры с тремя и более осями симметрии (ниже об этом будет подробнее).

Признаки:

$$I_x \begin{matrix} \nearrow \text{min} \\ \searrow \text{max} \end{matrix} \quad I_y \begin{matrix} \nearrow \text{max} \\ \searrow \text{min} \end{matrix}$$

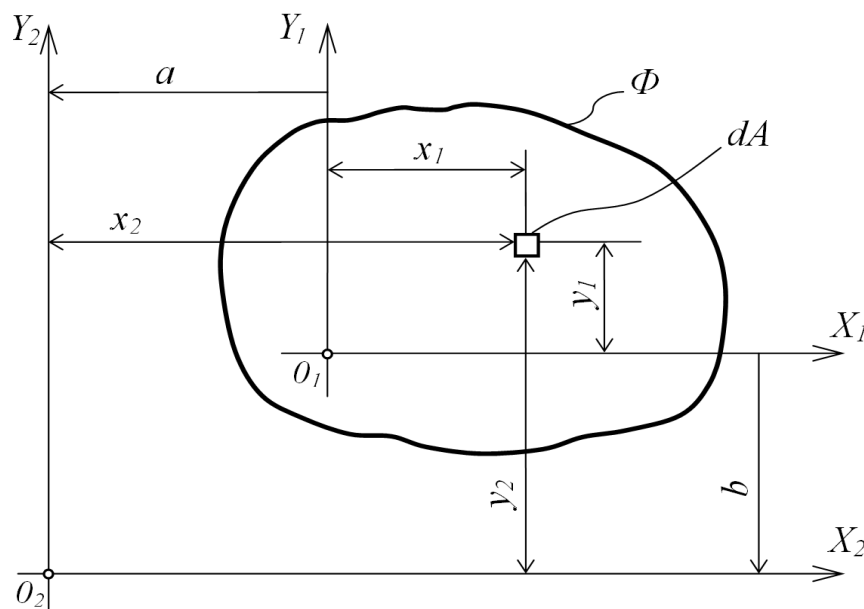
$$S_x = 0$$

$$S_y = 0$$

$$I_{xy} = 0$$

Если у фигуры есть ось симметрии, то она - главная центральная.

Изменение статических моментов при параллельном переносе осей



$$O_2X_2 \parallel O_1X_1$$

$$O_2Y_2 \parallel O_1Y_1$$

Известны: S_{x_1}, S_{y_1}

Найти: S_{x_2}, S_{y_2}

$$S_{x_2} = \int_{\Phi} y_2 \cdot dA = \int_{\Phi} (y_1 + b) \cdot dA = \int_{\Phi} y_1 \cdot dA + b \cdot \int_{\Phi} dA = S_{x_1} + b \cdot A$$

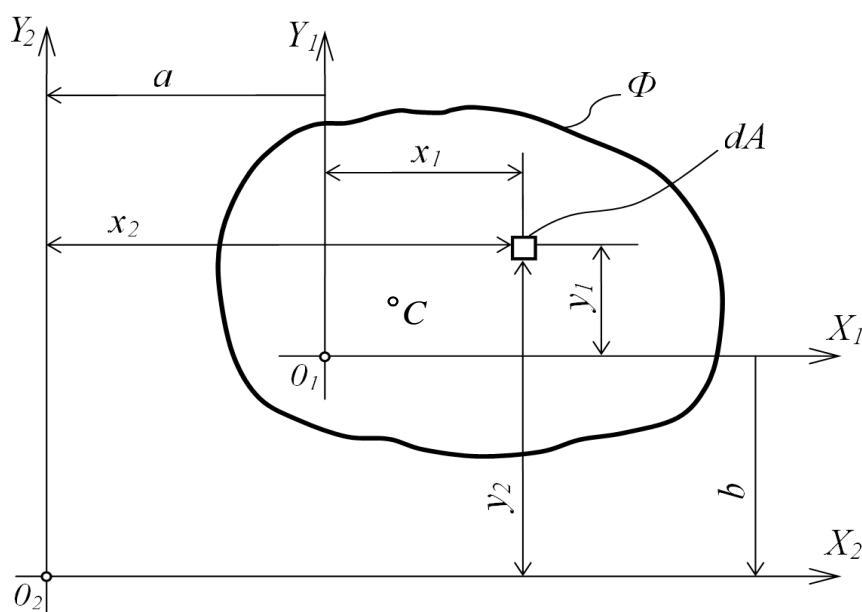
$$S_{y_2} = \int_{\Phi} x_2 \cdot dA = \int_{\Phi} (x_1 + a) \cdot dA = \int_{\Phi} x_1 \cdot dA + a \cdot \int_{\Phi} dA = S_{y_1} + a \cdot A$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_{x_2} &= S_{x_1} + b \cdot A \\ S_{y_2} &= S_{y_1} + a \cdot A \end{aligned}}$$

(IV.5)

a и b стоят в первой степени. Значит имеют значение их знаки (направление переноса осей)

Изменение моментов инерции
при параллельном переносе осей



$$O_2X_2 \parallel O_1X_1$$

$$O_2Y_2 \parallel O_1Y_1$$

Известны: I_{x_1}, I_{y_1}

Найти: I_{x_2}, I_{y_2}

$$\begin{aligned} I_{x_2} &= \int_{\Phi} y_2^2 \cdot dA = \int_{\Phi} (y_1 + b)^2 \cdot dA = \int_{\Phi} (y_1^2 + 2 \cdot b \cdot y_1 + b^2) \cdot dA = \\ &= \int_{\Phi} y_1^2 \cdot dA + 2 \cdot b \cdot \int_{\Phi} y_1 \cdot dA + b^2 \int_{\Phi} dA = I_{x_1} + 2 \cdot b \cdot S_{x_1} + b^2 \cdot A ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_2} &= \int_{\Phi} x_2^2 \cdot dA = \int_{\Phi} (x_1 + a)^2 \cdot dA = \int_{\Phi} (x_1^2 + 2 \cdot a \cdot x_1 + a^2) \cdot dA = \\ &= \int_{\Phi} x_1^2 \cdot dA + 2 \cdot a \cdot \int_{\Phi} x_1 \cdot dA + a^2 \int_{\Phi} dA = I_{y_1} + 2 \cdot a \cdot S_{y_1} + a^2 \cdot A . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_2} &= I_{x_1} + 2 \cdot b \cdot S_{x_1} + b^2 \cdot A \\ I_{y_2} &= I_{y_1} + 2 \cdot a \cdot S_{y_1} + a^2 \cdot A \end{aligned}$$

(IV.5)

Знаки при a и b по-прежнему имеют значение.

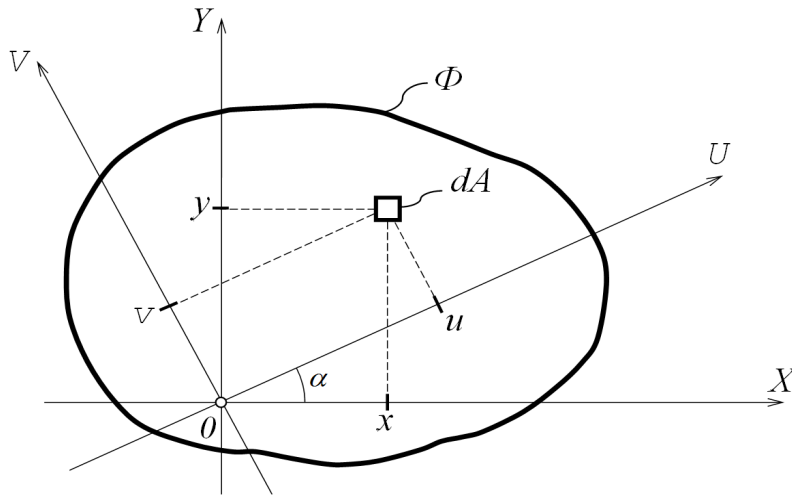
Если оси X_1 и Y_1 – центральные (т. $O_1 = \text{т. } C$), то статические моменты S_{x_1}, S_{y_1} равны нулю и:

$$\begin{array}{l} I_{x_2} = I_{x_1} + b^2 \cdot A \\ I_{y_2} = I_{y_1} + a^2 \cdot A \end{array} \quad - \text{теорема Штейнера} \quad (IV.6)$$

Вот здесь уже знаки при a и b не важны. Из формул (IV.6) следует, что в семействе параллельных осей минимальный момент инерции получается относительно центральной оси ($a = 0$ или $b = 0$). Удаление рассматриваемой оси от центральной увеличивает момент инерции.

Теорема Штейнера для геометрических фигур (тонких пластинок) является аналогом теоремы Гюйгенса для массивных тел в Теоретической механике.

Изменение моментов инерции
при повороте осей координат



$$u = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$

$$v = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

$$I_u = \int_A v^2 \cdot dA = \int_A (-x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)^2 \cdot dA =$$

$$= \int_A (x^2 \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + y^2 \cdot \cos^2 \alpha) \cdot dA =$$

$$= \sin^2 \alpha \cdot \int_A x^2 \cdot dA - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA + \cos^2 \alpha \cdot \int_A y^2 \cdot dA =$$

$$= I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \underbrace{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} + I_x \cdot \cos^2 \alpha ;$$

$$I_v = \int_A u^2 \cdot dA = \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dA =$$

$$= I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_{xy} \cdot \underbrace{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} + I_x \cdot \sin^2 \alpha ;$$

$$I_{uv} = \int_A u \cdot v \cdot dA = \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \cdot (-x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha) \cdot dA =$$

$$= \int_A (-x^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + x \cdot y \cdot \cos^2 \alpha - x \cdot y \cdot \sin^2 \alpha + y^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha) \cdot dA =$$

$$= I_x \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha - I_{xy} \cdot \sin^2 \alpha + I_{xy} \cdot \cos^2 \alpha - I_y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha \\ \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \end{vmatrix} = I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
 I_u &= I_x \cdot \cos^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + I_y \cdot \sin^2 \alpha \\
 I_v &= I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + I_x \cdot \sin^2 \alpha \\
 I_{uv} &= I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)
 \end{aligned}
 \tag{IV.7}$$

Найдём экстремум функции I_u , то есть найдём такой угол α , при котором I_u достигает своего максимума или минимума:

$$I_u = I_x \cdot \cos^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + I_y \cdot \sin^2 \alpha$$

$$(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$$

$$\begin{aligned}
 I_u' &= \frac{dI_u}{d\alpha} = 2 \cdot \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) \cdot I_x - 2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \cdot I_{xy} + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot I_y = \\
 &= -\sin(2 \cdot \alpha) \cdot I_x - 2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \cdot I_{xy} + \sin(2 \cdot \alpha) \cdot I_y
 \end{aligned}$$

Экстремум:

$$\alpha = \alpha_0, \quad I_u' = 0: \quad \sin(2 \cdot \alpha_0) \cdot [I_y - I_x] - 2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha_0) \cdot I_{xy} = 0$$

\Downarrow

$$\sin(2 \cdot \alpha_0) \cdot [I_y - I_x] = 2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha_0) \cdot I_{xy}$$

\Downarrow

$$\text{tg}(2 \cdot \alpha_0) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Так как $I_u + I_v = I_P = \text{const}$, то I_v при угле α_0 так же примет экстремальное значение: $(I_u = \max, I_v = \min)$ или $(I_u = \min, I_v = \max)$.

Найдем угол $\tilde{\alpha}$, при котором центробежный момент I_{uv} обращается в ноль:

$$I_{uv}(\tilde{\alpha}) = 0 = I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \tilde{\alpha}) + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \tilde{\alpha})$$

$$I_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \tilde{\alpha}) = \frac{I_y - I_x}{2} \cdot \sin(2 \cdot \tilde{\alpha})$$

$$tg(2 \cdot \tilde{\alpha}) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Это тот же самый угол, при котором моменты инерции I_u и I_v принимают экстремальные значения!

Значит, для точки O на плоскости существует только одна пара координатных осей, относительно которых моменты инерции фигуры принимают экстремальные значения, а центробежный момент обращается в ноль. Эти оси называются **главными**.

Если в точке плоскости задана некоторая система координат OXY и в ней подсчитаны моменты инерции фигуры I_x , I_y , I_{xy} , то угол α_0 между этой системой координат и главными осями вычисляется по формуле:

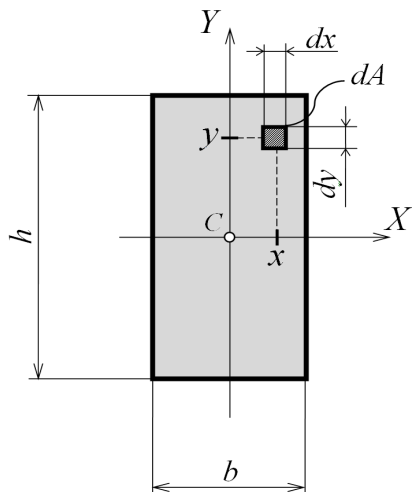
$$tg(2 \cdot \alpha_0) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (IV.8)$$

Какие именно экстремальные значения принимают моменты инерции в главных осях, можно определить, вычислив α_0 из (IV.8) и подставив его в (IV.7):

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (IV.9)$$

Моменты инерции простейших фигур

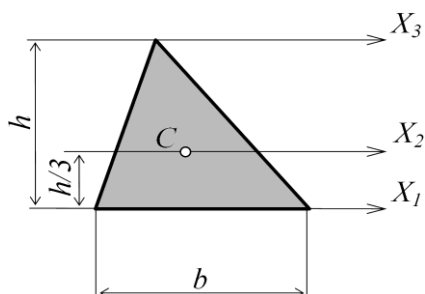
1) Прямоугольник:



$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_{\Phi} y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \cdot dx \cdot dy = \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \right) \cdot dy = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = \\
 &= b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 + \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}
 \end{aligned}$$

2) Треугольник:

Без вывода:

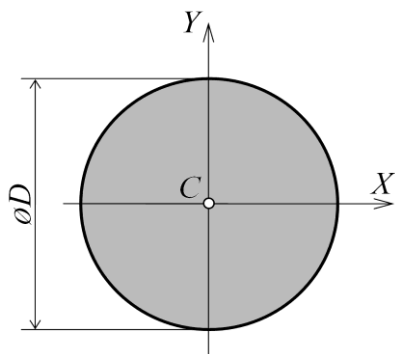


$$I_{x_3} = \frac{b \cdot h^3}{4}$$

$$I_{x_2} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

$$I_{x_1} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

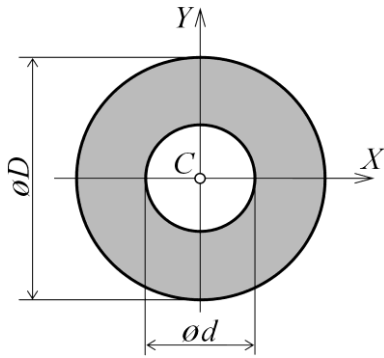
3) Круг:



$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \quad - \quad \text{было выведено ранее;}$$

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_y \\ I_x + I_y &= I_p \end{aligned} \right\} I_x = I_y = \frac{1}{2} \cdot I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

4) Круг с вырезом:

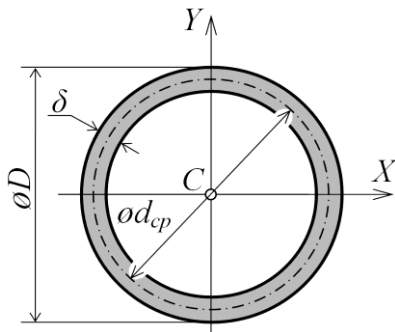


$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] \quad - \text{ было выведено}$$

ранее;

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} \cdot I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$$

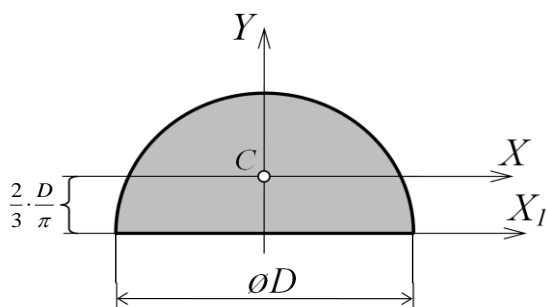
4) Кольцо:



$$I_p = \frac{\pi \cdot d_{cp}^3 \cdot \delta}{4} \quad - \text{ было выведено ранее;}$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} \cdot I_p = \frac{\pi \cdot d_{cp}^3 \cdot \delta}{8}$$

5) Полукруг:



$$A = \frac{1}{2} \cdot A^\circ = \frac{\pi \cdot D^2}{8}$$

$$I_y = \frac{1}{2} \cdot I_y^\circ = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$$

Без вывода:

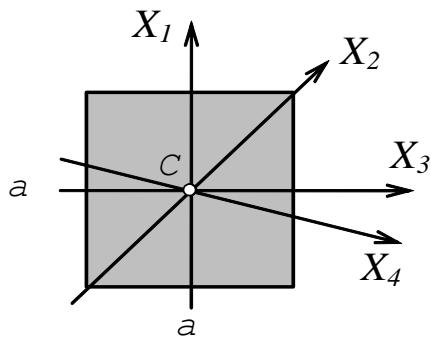
$$y_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{D}{\pi}$$

$$I_{x_l} = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$$

$$I_x \approx 0,00686 \cdot D^4$$

Примечание:

У фигур, имеющих три и более оси симметрии, любая центральная ось является главной центральной, а осевые моменты инерции равны друг другу.

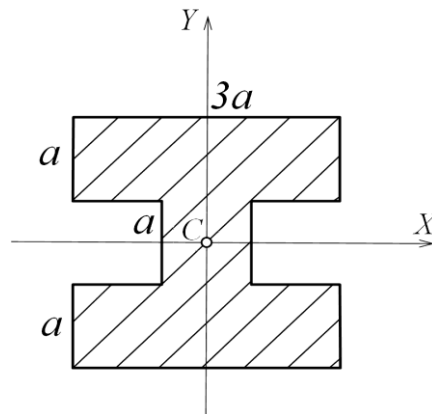


Квадрат:

$$I_{X_1} = I_{X_2} = I_{X_3} = I_{X_4} = \frac{a^4}{12}$$

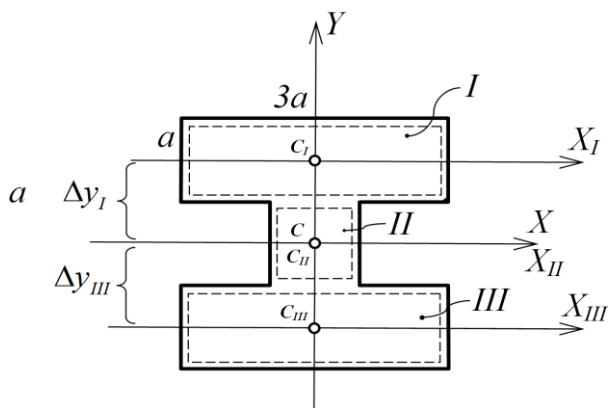
Оси X_1 , X_2 , X_3 и X_4 – главные центральные.

Пример вычисления момента инерции составной фигуры:



2 способа:

Разбить сложную фигуру на простые и суммировать их моменты инерции:



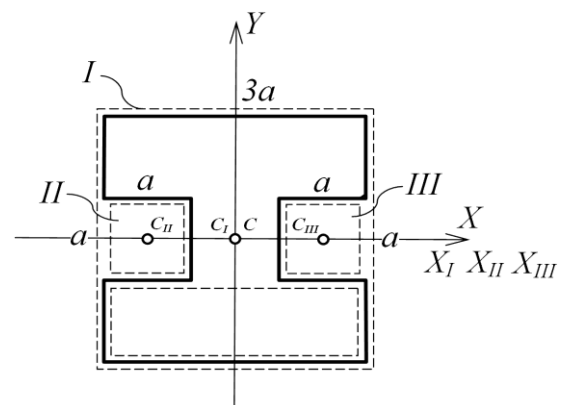
$$I_x^I = I_{x_I}^I + A^I \cdot (\Delta y_I)^2 = \frac{3 \cdot a \cdot a^3}{12} + 3 \cdot a^2 \cdot a^2 = \frac{39}{12} a^4$$

$$I_x^{II} = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

$$I_x^{III} = I_{x_{III}}^{III} + A^{III} \cdot (\Delta y_{III})^2 = \frac{39}{12} a^4$$

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} = \frac{39}{12} a^4 + \frac{1}{12} a^4 + \frac{39}{12} a^4 = \frac{79}{12} a^4$$

Из момента инерции сплошной фигуры вычесть моменты инерции вырезов:



$$I_x^I = \frac{3 \cdot a \cdot (3 \cdot a)^3}{12} = \frac{81}{12} a^4$$

$$I_x^{II} = I_x^{III} = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

$$I_x = I_x^I - I_x^{II} - I_x^{III} = \frac{81}{12} a^4 - \frac{1}{12} a^4 - \frac{1}{12} a^4 = \frac{79}{12} a^4$$