Переходные процессы в электрических цепях.

Основные понятия.

Классический метод анализа.

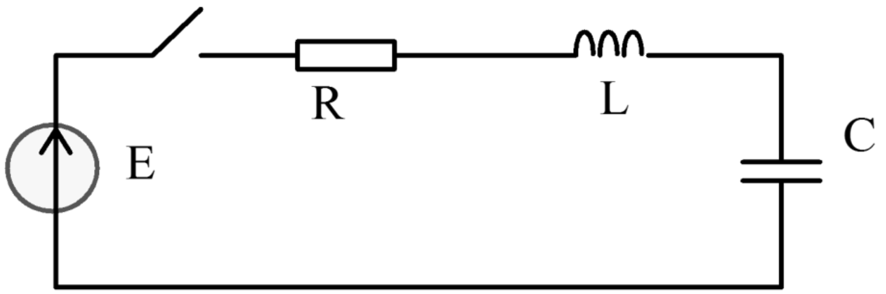
Интеграл Дюамеля. Интеграл наложения.

Основные понятия.

Переходный процесс - это переход между режимами работы цепи, отличающимися друг от друга амплитудами, фазами или частотами действующими в цепи ЭДС, или конфигурацией элементов цепи.

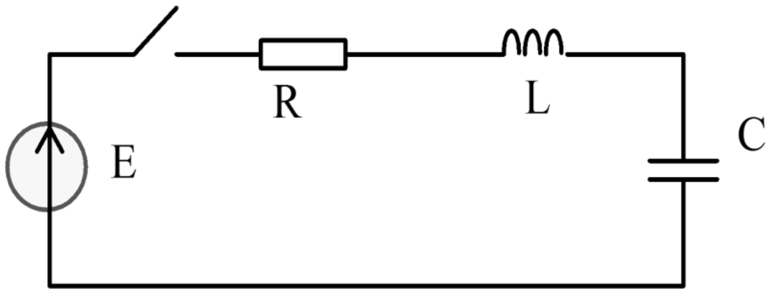
$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$

$$i = C\frac{du_c}{dt}$$



$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

Классический метод



Решение представляется в виде:

$$u_c = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}}$$

Решение это сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения.

$u_{\text{пр}}$ - называется принужденной составляющей.

$u_{\text{св}}$ - называется свободной составляющей решения.

$u_{\text{св}}$ - сумма экспонент. Показатели для экспонент находятся из решений характеристического уравнения:

$$p^2LC + pRC + 1 = 0$$

Тогда

$$u_c = u_{\text{пр}} + \sum A_k e^{p_k t}$$

Характеристическое уравнение

Характеристическое уравнение может быть получено из дифференциального, однако дифференциальное уравнение составлять необязательно, часто это очень трудоемкий процесс. Для составления характеристического уравнения запишем входной импеданс цепи (относительно источника ЭДС):

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Проведем замену $j\omega = p$ и приравняем нулю:

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} = 0$$

После преобразования получим уравнение совпадающее с полученным ранее.

Свободная составляющая решения:

Вид корня характеристического уравнения	Вид свободной составляющей	Тип переходного процесса
Различные, вещественные корни $p_1, p_2, \dots p_n$	$\sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}$	Апериодический
Пары комплексно сопряженных корней $\alpha_k \pm j\omega_k$	$\sum_{k=1}^{n} A_k e^{\alpha_k} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$	Периодический

A_k - постоянные интегрирования

$\alpha_k < 0,$ постоянная времени $\tau = \frac{1}{p_k}$

Правила коммутации

$t = 0$ - момент коммутации

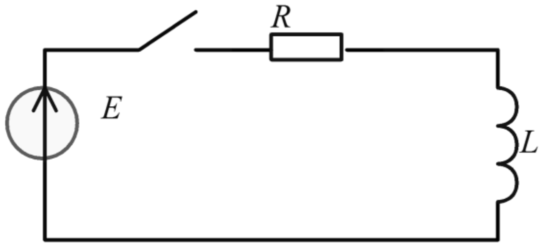
$t = 0_-$ - момент непосредственно перед коммутацией

$t = 0_+$ - момент непосредственно после коммутации

Законы (правила) коммутации: $i_L(0_+) = i_L(0_-)$, $u_C(0_+) = u_C(0_-)$

Доказать правила достаточно просто – предположим, что $i_L(0_+) \neq i_L(0_-)$, по второму правилу Кирхгофа:

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$



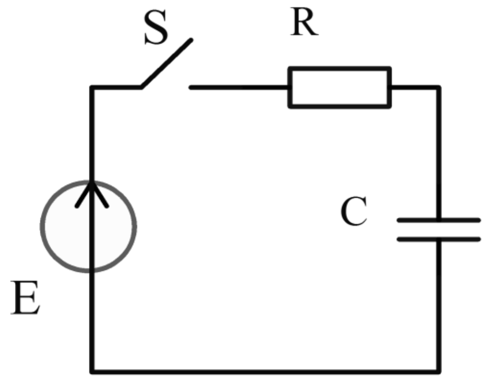
Неравенство токов приводит к обращению второго слагаемого в бесконечность – равенство выполнить невозможно, следовательно предположение неверно.

Правила коммутации

Аналогично для второго соотношения. Если $u_C(0_+) \neq u_C(0_-)$, то с учетом что

$$i_C = C\frac{du_c}{dt}$$

Запишем по второму правилу Кирхгофа:



$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

Конечное приращение напряжения приведет к обращению производной в бесконечность и невозможности выполнения уравнения составленного по второму правилу Кирхгофа – следовательно предположение о неравенстве напряжений неверно.

Определение постоянных интегрирования

Независимые начальные условия – потокосцепление (**ток**) катушки индуктивности и заряд (**напряжение**) конденсатора.

К зависимым начальным условиям относят значения остальных токов и напряжений в цепи.

Для уравнения первого порядка (переходный процесс в цепи с одним реактивным элементом):

$$A = u_{\text{св}}(0_+) = u_c(0) - u_{\text{пр}}$$

Определение постоянных интегрирования

Для уравнения второго порядка с действительными корнями

$$u_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Продифференцируем это уравнение:

$$u'_{\text{св}} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$$

Для момента коммутации можно записать систему уравнений:

$$u_{\text{св}}(0_+) = A_1 + A_2$$
$$u'_{\text{св}}(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2$$

$$A_1 = \frac{u'_{\text{св}}(0_+) - p_2 u_{\text{св}}(0_+)}{p_1 - p_2} \quad , \quad A_2 = u_{\text{св}}(0_+) - A_1$$

Определение постоянных интегрирования

Уравнение второго порядка, комплексные корни

$$u_{\text{св}} = Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \psi)$$

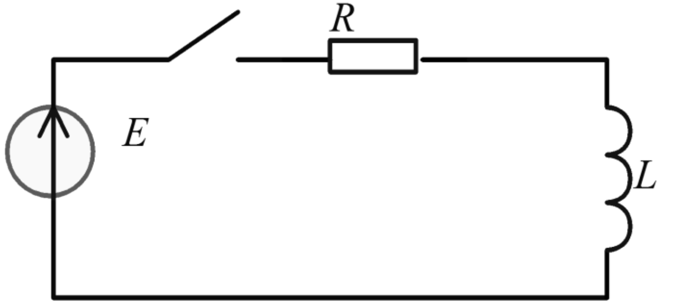
$$u_{\text{св}}(0_+) = A\sin\psi$$

$$u'_{\text{св}}(0_+) = -A\alpha\sin\psi + A\omega\cos\psi$$

Порядок расчета переходного процесса классическим методом

1. Записать решение в виде суммы свободного и принужденного значений.
2. Определить принужденное и начальное значения.
3. Составить характеристическое уравнение, решить определив его корни.
4. Соответственно виду корней записать общий вид решения.
5. Определить постоянные интегрирования используя начальные условия и записать окончательный вид решения.

Пример 1.



Определить ток индуктивности. Ключ замыкается.

Общий вид решения:

$$i_L(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = i_{\text{пр}} + Ae^{pt}$$

Принужденное значение находим из уравнения по второму правилу Кирхгофа при $t = \infty$:

$$i_{\text{пр}} = i_L(\infty) = {}^{E}/_{R}$$

Характеристическое уравнение:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L \;\Rightarrow\; R + pL = 0 \;\Rightarrow p = -{}^{R}/_{L}$$

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий:

$$i_L(0) = {}^{E}/_{R} + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -{}^{E}/_{R}$$

Ответ:

$$i_L(t) = {}^{E}/_{R} - {}^{E}/_{R}\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

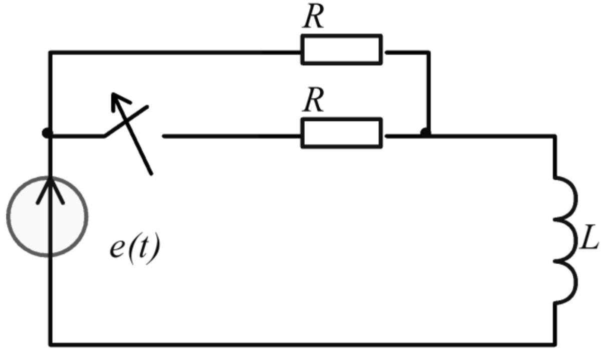
Пример 2.

Определить ток индуктивности. Ключ размыкается. $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Общий вид решения:

$$i_L(t) = i_{\text{пр}} + Ae^{pt}$$

Принужденное значение находим из уравнения по второму правилу Кирхгофа при $t = \infty$:



$$\dot{I}_{\text{пр}} = \frac{E_m e^{j\left(\varphi - arctg\frac{\omega L}{R}\right)}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot e^{j\omega t}$$

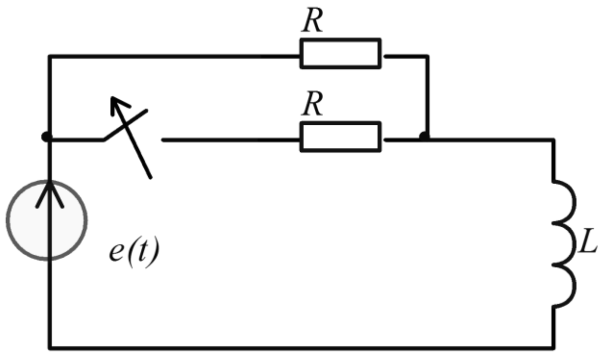
Характеристическое уравнение:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L \;\; \Rightarrow \;\; R + pL = 0 \;\; \Rightarrow p = -{}^{R}/_{L}$$

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий:

$$\dot{I}_L(0) = \frac{E_m e^{j\left(\varphi - arctg\frac{\omega L}{2R}\right)}}{\sqrt{4R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{E_m e^{j\left(\varphi - arctg\frac{\omega L}{R}\right)}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + A$$

Пример 2.



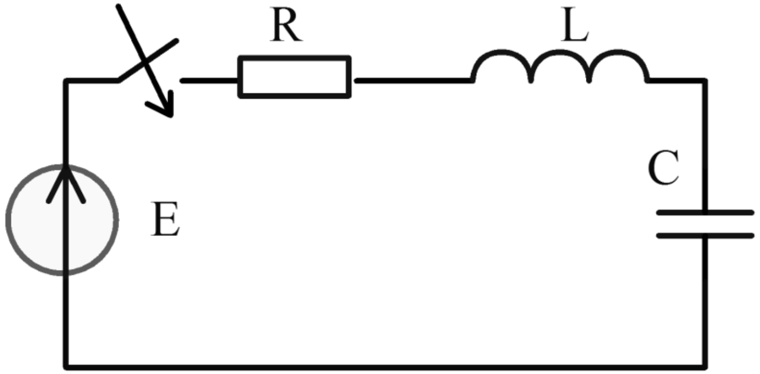
Ответ:

$$i_L(t) = \frac{E_m \sin(\omega t + 30° - arctg\,\frac{\omega L}{R})}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} +$$

$$+\left(\frac{E_m \sin\left(30° - arctg\,\frac{\omega L}{2R}\right)}{\sqrt{4R^2 + \omega^2 L^2}} - \frac{E_m \sin\left(30° - arctg\,\frac{\omega L}{R}\right)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

Пример 3.

Определить ток индуктивности. Ключ замыкается.
Для упрощения расчета принять
$R = 1\,\Omega, \;\; C = 40\,\mu F, \;\; L = 15{,}625\,\mu H.$



Принужденное значение и начальные условия:

$$i_L(\infty) = 0, \qquad i_L(0) = 0, \qquad U_C(0) = 0$$

Характеристическое уравнение составляется для цепи после момента коммутации:

$$p^2 LC + pRC + 1 = 0$$

Корни уравнения (комплексные – процесс периодический):

$$p_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} = (-0{,}32 \pm j0{,}24) \cdot 10^6,$$

$$\alpha = -3{,}2 \cdot 10^5, \qquad \omega = 2{,}4 \cdot 10^5$$

Пример 3.

Общий вид решения:

$$i_L(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = Ae^{-3,2\cdot 10^5 t} sin(2,4 \cdot 10^5 t + \varphi_i)$$

Определим постоянную интегрирования и начальную фазу:

$$i_L(0_+) = A\sin\varphi_i \ \Rightarrow \varphi_i = 0, \qquad i'_L(0_+) = -A\alpha\sin\varphi_i + A\omega\cos\varphi_i$$

По второму правилу Кирхгофа (с использованием правил коммутации):

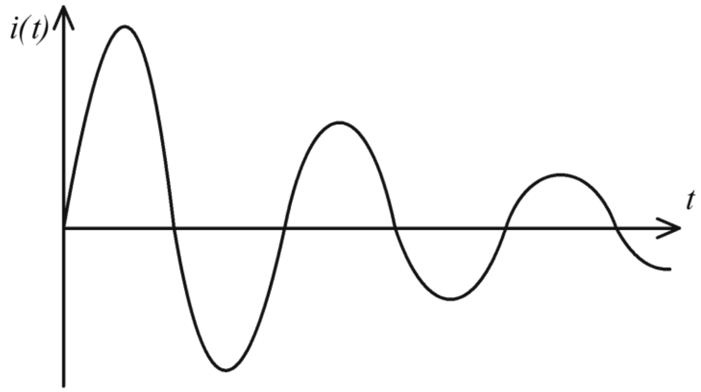
$$E = U_L + i_L R + U_C \quad \Rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{E}{L} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{E}{\omega L} = 3,75\ A$$

Пример 3.

Общий вид решения:

$$i_L(t) = \frac{E}{3,75} e^{-3,2\cdot 10^5 t} sin(2,4 \cdot 10^5 t)$$

Примерный вид процесса:

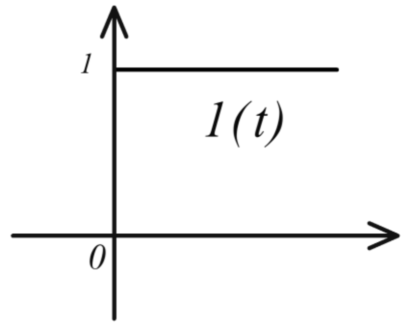


Интеграл Дюамеля.

Интеграл наложения.

Импульсные функции. Функция Хэвисайта.

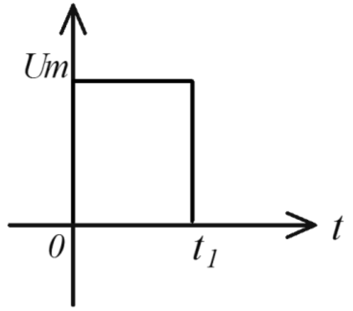
Функция Хэвисайта (единичная ступенчатая функция):

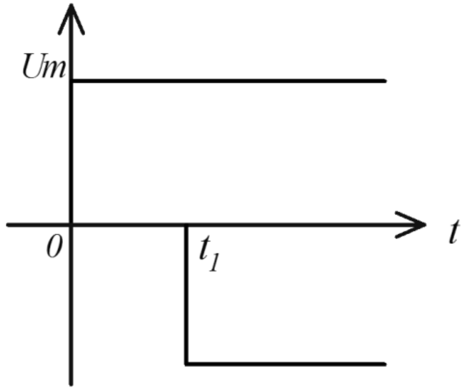


$$1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases}$$

Применение функции Хэвисайта: описание коммутации в цепи без применения ключа, представление сигналов как суммы элементарных воздействий (ступенек) и т.д.

$$f(t) = U_m[1(t) - 1(t - t_1)]$$

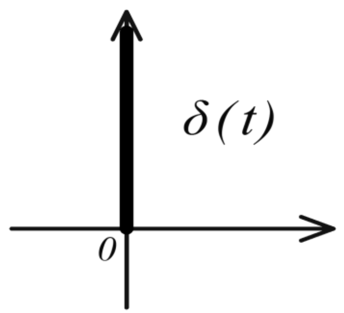




Функция Дирака.

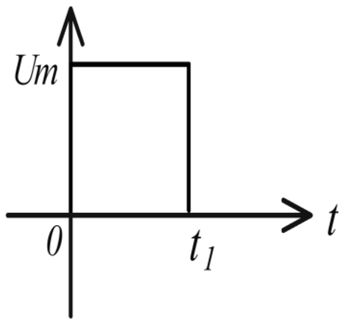
Функция Дирака:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t) = \begin{cases} +\infty, t = 0, \\ 0, t \neq 0; \end{cases}$$



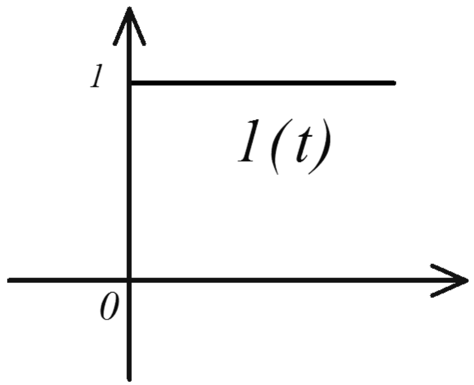
Применение описание короткого импульса:

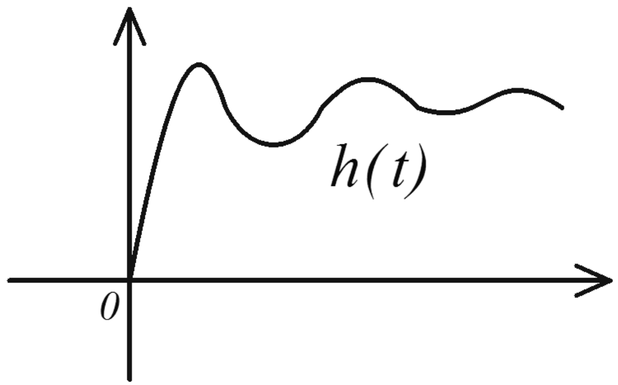
$$f(t) \approx t_1 \cdot U_m\, \delta\left(\frac{t_1}{2}\right)$$



Переходная характеристика

Переходной характеристикой или переходной функцией электрической цепи называют реакцию цепи на ступеньку напряжения амплитудой 1 Вольт. Обозначают переходную характеристику как $h(t)$.

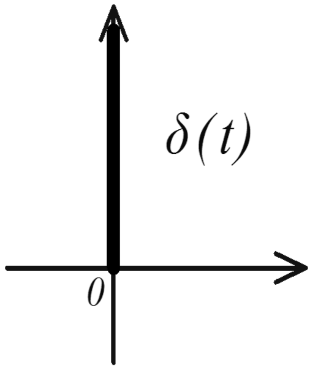


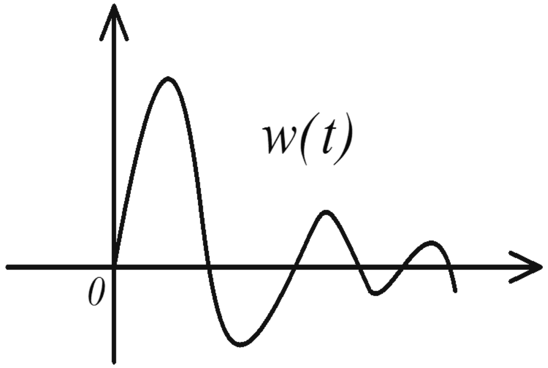


Переходная характеристика это переходный процесс с нулевыми начальными условиями, вызванный подачей ступеньки напряжения величиной 1 В.

Временная характеристика

Временной или импульсной характеристикой электрической цепи называют реакцию цепи на сигнал в виде $\delta(t)$, обозначая ее как $w(t)$.





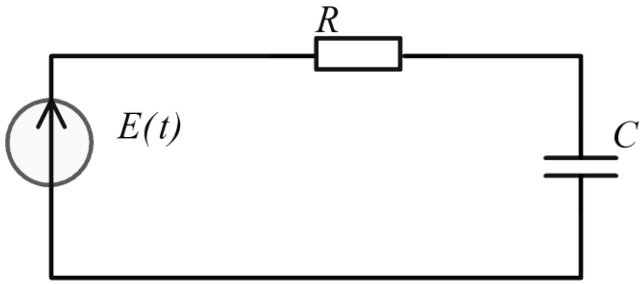
Связь между переходной и временной характеристиками:

$$h(t) = \int_0^t w(t)dt\,, \qquad w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Пример определение переходной и импульсной характеристик цепи.

$$E(t) = 1(t)$$

Согласно классическому методу анализа определим U_c



Характеристическое уравнение:

$$R + \frac{1}{pC} = 0, \qquad p = -\frac{1}{RC}$$

Принужденное значение равно величине ЭДС, постоянная интегрирования из начального условия равна -1. Тогда:

$$U_c = U_{\text{пр}} + U_{\text{св}} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

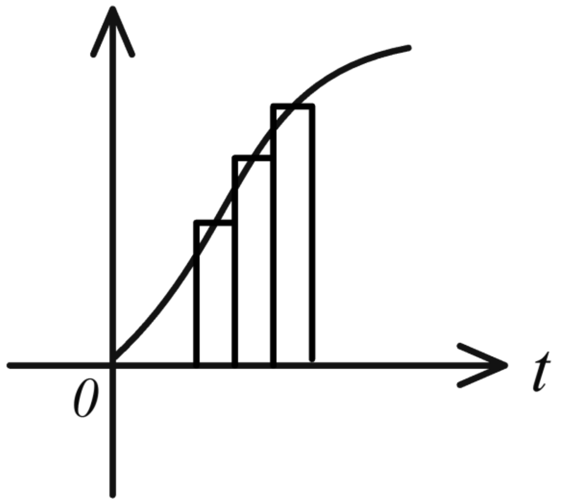
$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Необходимо заметить, что область применения соотношений при $t > 0$.

Интеграл наложения.

При воздействии сигнала произвольной формы на вход звена, его можно разложить на воздействия от суммы коротких импульсов. Если каждый из импульсов представить как:

$$U_{\text{вх}}(t)\Delta\tau\delta(t-\tau)$$



То по принципу наложения:

$$U_{\text{вых}}(t) \cong \sum U_{\text{вх}}(t)\Delta\tau w(t-\tau)$$

Устремив $\Delta\tau$ к нулю, получим интеграл наложения:

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_0^t U_{\text{вх}}(\tau)w(t-\tau)d\tau = \int_0^t U_{\text{вх}}(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

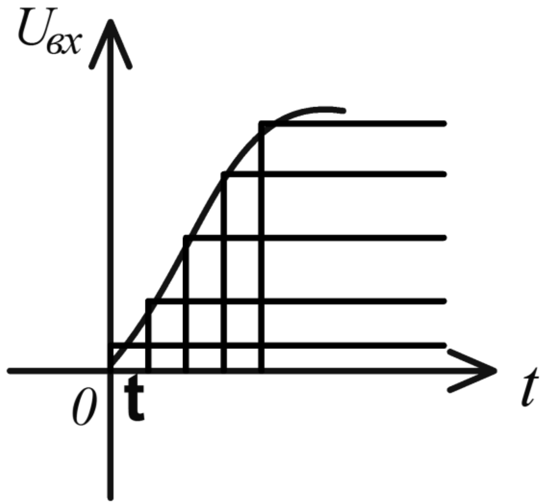
Связь между входной и выходной величинами с использованием импульсной (временной) характеристики цепи устанавливается с помощью свертки.

Интеграл Дюамеля.

Если представить воздействие не суммой коротких импульсов, а суммой ступенчатых функций, то для определения реакции цепи на воздействие, также используя принцип наложения, запишем:

$$U_{\text{вых}}(t) \cong \sum U_{\text{вх}}(t)h(t-\tau) = U_{\text{вх}}(0)h(t) + \sum \frac{U_{\text{вх}}(t)}{\Delta\tau}\Delta\tau h(t-\tau)$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t U_{\text{вх}}{}'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Полученное соотношение называется интегралом Дюамеля.

Если функция воздействия имеет разрывы, то интеграл Дюамеля заново записывается относительно каждого разрыва.

Формы записи интеграла Дюамеля.

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t {U_{\text{вх}}}'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t {U_{\text{вх}}}'(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

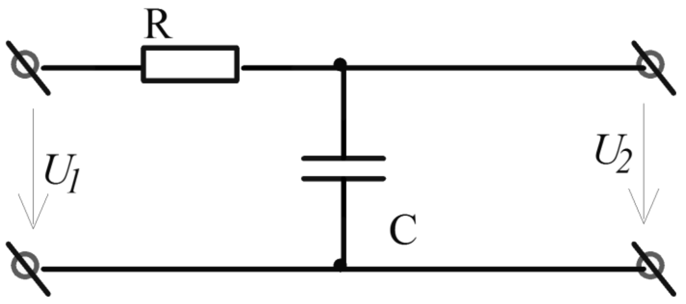
$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t)h(0) + \int_0^t h'(\tau)U_{\text{вх}}(t-\tau)d\tau$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t)h(0) + \int_0^t h'(t-\tau)U_{\text{вх}}(\tau)d\tau$$

Форма интеграла Дюамеля выбирается исходя из удобства интегрирования.

Реакция на импульсное воздействие. Временной метод.

Импульсная характеристика:



$$w(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Воздействие – прямоугольный импульс:

$$U_1(t) = U_m[1(t) - 1(t - t_1)]$$

Реакция с использованием свертки учтем что импульс это сумма двух ступенчатых воздействий, одинаковых по величине и разных по знаку.

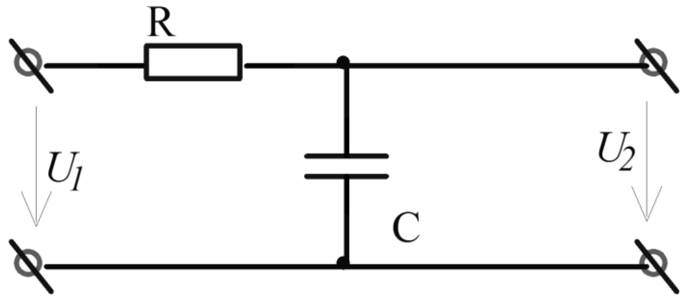
Интеграл наложения.

$$U_2(t) = \int_0^t U_1(t) w(t-\tau) d\tau = \int_0^t U_m [1(\tau) - 1(\tau - t_1)] \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{U_m}{RC} e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} d\tau - \int_{t_1}^t \frac{U_m}{RC} e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} d\tau =$$

$$= U_m \left[1(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - 1(t - t_1)\left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right) \right]$$

Интеграл Дюамеля.



Переходная характеристика:

$h(t) = 1 - e^{-\frac{1}{RC}t}$

Воздействие :

$$U_1(t) = U_m[1(t) - 1(t - t_1)]$$

Реакция:

$$U_2(t) = U_1(0)h(t) + \int_0^t U'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau = 1(t)U_m\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) +$$

$$+\int_0^t 0\cdot\left(1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}\right)d\tau - 1(t-t_1)U_m\left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right) - \int_{t_1}^t 0\cdot\left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\right)d\tau =$$

$$= U_m\left[1(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - 1(t-t_1)\left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right)\right]$$