Пороговая функция

Определение:

Булева функция $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ называется **пороговой** (англ. *threshold function*), если ее можно представить в виде $f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = [\sum\limits_{i=1}^{n} A_i a_i \geqslant T]$, где a_i — **вес** (англ. *weight*) аргумента A_i, а T — **порог** (англ. *threshold*) функции f; $a_i, T \in R$

Обычно пороговую функцию записывают в следующим виде: $f = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n; T]$.

Содержание

- 1 Пример
- 2 Примеры пороговых функций
- 3 Пример непороговой функции
- 4 Значимость пороговых функций
- 5 См. также
- 6 Источники информации

Пример

Рассмотрим функцию трёх аргументов $f(A_1, A_2, A_3) = [3, 4, 6; 5]$. Согласно этой записи имеем

$$a_1 = 3; a_2 = 4; a_3 = 6; T = 5.$$

Все наборы значений аргументов A_1, A_2, A_3, на которых функция принимает единичное (либо нулевое) значение, можно получить из соотношения вида $3A_1 + 4A_2 + 6A_3 \geqslant 5$.

Если $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$, то $0 < 5 \Rightarrow f = 0$.
Если $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 1$, то $6 \geqslant 5 \Rightarrow f = 1$.
Если $A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = 0$, то $4 < 5 \Rightarrow f = 0$.
Если $A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = 1$, то $10 \geqslant 5 \Rightarrow f = 1$.
Если $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = 0$, то $3 < 5 \Rightarrow f = 0$.
Если $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = 1$, то $9 \geqslant 5 \Rightarrow f = 1$.
Если $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 0$, то $7 \geqslant 5 \Rightarrow f = 1$.
Если $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1$, то $13 \geqslant 5 \Rightarrow f = 1$.

Таким образом, заданная функция принимает единичное значение на наборах $001, 011, 101, 110, 111$. Её минимальная форма имеет вид

$$f = A_1 A_2 + A_3.$$

Утверждение:

Для всякой пороговой функции справедливо

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n; T] = [ka_1, ka_2, ka_3, \ldots, ka_n; kT],$$

где k — положительное вещественное число.

▷

Чтобы убедиться в этом достаточно записать

$$ka_1A_1 + ka_2A_2 + \ldots + ka_nA_n \geqslant kT$$
$$ka_1A_1 + ka_2A_2 + \ldots + ka_nA_n < kT$$

и разделить обе части неравенства на k.
◁

Примеры пороговых функций

Примерами пороговых функций служат функции AND и OR. Представим функцию AND в виде $[1, 1; 2]$. Докажем, что это именно пороговая функция, подставив все возможные значения аргументов:

$A_1 = 0, A_2 = 0$, то $0 < 2 \Rightarrow f = 0$.
$A_1 = 0, A_2 = 1$, то $1 < 2 \Rightarrow f = 0$.
$A_1 = 1, A_2 = 0$, то $1 < 2 \Rightarrow f = 0$.
$A_1 = 1, A_2 = 1$, то $2 \geqslant 2 \Rightarrow f = 1$.

Таблица значений совпадает с таблицей истинности функции AND, следовательно AND — пороговая функция.

Функцию OR представим в виде $[1, 1; 1]$. Аналогично докажем, что это пороговая функция:

$A_1 = 0, A_2 = 0$, то $0 < 1 \Rightarrow f = 0$.
$A_1 = 0, A_2 = 1$, то $1 \geqslant 1 \Rightarrow f = 1$.
$A_1 = 1, A_2 = 0$, то $1 \geqslant 1 \Rightarrow f = 1$.
$A_1 = 1, A_2 = 1$, то $2 \geqslant 1 \Rightarrow f = 1$.

Таблица значений совпадает с таблицей истинности функции OR, следовательно OR — пороговая функция.

Пример непороговой функции

Утверждение:

Функция XOR — непороговая.

▷

Предположим, что XOR — пороговая функция. При аргументах $(0, 0)$ значение функции XOR равно 0. Тогда по определению пороговой функции неравенство $A_1x_1 + A_2x_2 \geqslant T$ не должно выполняться. Подставляя значение аргументов, получаем, что $T > 0$. При аргументах $(0, 1)$ и $(1, 0)$ значение функции XOR равно 1. Тогда по определению выполняется неравенство $A_1x_1 + A_2x_2 \geqslant T$, подставляя в которое значения соответствующих аргументов, получаем $A_1 \geqslant T, A_2 \geqslant T$. Отсюда следует, что $A_1 > 0, A_2 > 0$ и $A_1 + A_2 \geqslant 2T$. При аргументах $(1, 1)$ значение функции XOR равно 0, следовательно неравенство $A_1x_1 + A_2x_2 \geqslant T$

выполняться не должно, то есть $A_1 + A_2 < T$. Но неравенства $A_1 + A_2 \geqslant 2T$ и $A_1 + A_2 < T$ при положительных A_1, A_2 и T одновременно выполняться не могут. Получили противоречие, следовательно, функция XOR — непороговая.
$\triangleleft$

Значимость пороговых функций

Пороговые функции алгебры логики представляют интерес в связи с простотой технической реализации, в связи со своими вычислительными возможностями, а также благодаря возможности их обучения. Последнее свойство с успехом применяется на практике при решении плохо формализуемых задач. Пороговые функции применяются в качестве передаточных функций в искусственных нейронах, из которых состоят искусственные нейронные сети. А так как искусственный нейрон полностью характеризуется своей передаточной функцией, то пороговые функции являются математической моделью нейронов.

См. также

- Булевы функции
- Замкнутые классы булевых функций

Источники информации

- Пороговая функция (http://www.simvol.biz/uploadfiles/File/sostav/books/Diskret_mat1.pdf)
- Википедия — Искусственный нейрон (http://ru.wikipedia.org/wiki/Искусственный_нейрон)