

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет  
Кафедра общей физики

**Лабораторный практикум**  
**“ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ”**

**Л. Н. Вячеславов, В. Л. Курочкин, В. Б. Рева,**  
**Л. Н. Смирных**

**ВЫПУСК 5**

**Электрические цепи**

**Учебно-методическое пособие**

Новосибирск  
2008

УДК 537  
ББК

Л. Н. Вячеславов, В. Л. Курочкин, В.Б.Рева, Л.Н. Смирных

Электрические цепи:

Новосиб.гос.ун-т, 2008, \_\_\_\_ с.

Пособие соответствует программе лабораторного предусмотренного учебным планом практикума по общей физике для физических специальностей. Оно является пятым выпуском серии под общей редакцией Б. А. Князева. Пособие содержит рекомендации по технике эксперимента и методам обработки экспериментальных данных, справочные таблицы, необходимые для выполнения лабораторных работ, описание систем единиц, используемых при проведении экспериментов, а также описания работ раздела «Электрические цепи».

Рецензент

д-р физ.-мат. наук Б. А. Князев

© Новосибирский государственный  
университет, 2008

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## I ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1. Основные элементы электрических цепей.....	6
1.1. Сопротивление .....	6
1.2. Конденсатор.....	7
1.3. Индуктивность.....	9
1.4. Взаимоиндуктивность.....	10
1.5. Источники тока и напряжения. ....	11
1.6. Условия, при которых эквивалентные источники являются источниками стабильного тока или напряжения .....	13
1.7. Содержание понятия "эквивалентные" для источников напряжения и тока .....	14
1.8. Содержание понятия "эквивалентные" для источников напряжения и тока .....	16
2. Описание процессов в электрических цепях .....	17
2.1. Определение напряжения и тока с помощью комплексных чисел .....	17
2.2. Импенданс, активное и реактивное сопротивления.....	18
2.3. Векторные диаграммы .....	20
2.4. Законы Кирхгофа .....	21
2.5. Мощность, выделяемая в схемах с R, L, C в цепях переменного тока.....	21
2.6. Переходные процессы.....	23
3. Типичные четырехполюсники и их использование .....	27
3.1. Дифференцирующие и интегрирующие цепи .....	27

3.2. Фильтры .....	30
3.3. Амплитудно-частотные характеристики фильтров .....	31
4. Резонанс в электрических цепях .....	35
4.1. Колебательный контур. Свободные колебания.....	35
4.2. Вынужденные колебания .....	41
4.3. Вынужденные колебания в последовательном контуре. Резонанс напряжений .....	42
4.4. Вынужденные колебания в параллельном контуре. Резонанс токов .....	45
5. Дискретные элементы в электрических цепях.....	46
5.1. Дискретные элементы.....	46
5.2. Преобразование Фурье. Спектры дискретного и непрерывного сигналов.....	48
5.3. Примеры спектров различных сигналов.....	49
5.4. Свойства преобразования Фурье .....	52

## II ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

1. Лаб. работа 5.1 Переходные процессы в цепях с сосредоточенными параметрами.....	56
2. Лаб. работа 5.2. Резонанс в колебательном контуре .....	61
3. Лаб. работа 5.3. Пояс Роговского .....	73
4. Лаб. работа 5.4. Методы цифрового спектрального анализа .....	86
5. Лаб. работа 5.5. Колебательный контур как избирательный приемник модулированного сигнала.....	96

### III ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Обозначения основных элементов электрических цепей .....	114
2. Единицы измерения.....	114
3. Маркировка конденсаторов, индуктивностей и сопротивлений	115
4. Измеритель иммитансов типа МТ 4080D.....	116
5. Краткая инструкция пользования генератором SFG 8255.....	122

# І ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## 1. Основные элементы электрических цепей

Емкость, индуктивность и омическое сопротивление присущи в той или иной мере практически любому объекту, с которым мы сталкиваемся в быту или в физической лаборатории. Так тоненький проводок кроме сопротивления обладает еще и конечной индуктивностью, поэтому два объекта соединенные им не обязательно будут иметь одинаковый потенциал, если процесс протекает достаточно быстро. Обычный коаксиальный кабель имеет емкость, поэтому, если он использовался для передачи высокого напряжения, нас может ощутимо “стукнуть током” при работе с ним даже после отсоединения от источника напряжения. Конструкция конденсатора обладает небольшой, но все-таки индуктивностью. Вследствие этого время его разрядки на нагрузку с бесконечно малым сопротивлением все равно остается конечным.

Как правило, в большинстве случаев только одно из вышеперечисленных свойств является наиболее важным. Поэтому в электрических схемах при теоретическом анализе реальные материальные элементы схем мы представляем в виде их эквивалентных идеальных элементов – сопротивления  $R$ , емкости  $C$  и индуктивности  $L$  соответственно. А в тех случаях, когда важно учесть и другие свойства “деталей”, мы представляем их более сложными эквивалентными схемами из “набора” идеальных элементов. Иногда к нему добавляют взаимоиндуктивность  $M$ , которая позволяет передавать электрические сигналы между различными участками схемы через общий магнитный поток. А для описания *активных* линейных цепей набор пополняют идеальными источниками эдс (напряжения)  $E$  и тока  $I$ .

### 1.1. Сопротивление или резистор

Сопротивление – это наиболее простое устройство для которого коэффициент линейной связи между током и напряжением не зависит от частоты протекающего тока:

Основной параметр резисторов – сопротивление  $R$ . Оно определяет соотношение между током и напряжением в соответствии с законом Ома

$$U_0 = I_0 R .$$

Сопротивление измеряется в Омах (СИ) или в единицах сопротивления СГС (нет специального названия, размерность с/см).

Резисторы бывают постоянные и переменные (регулируемые). Наибольшее распространение имеют металлизированные и проволочные резисторы: в первом случае на керамическую трубочку нанесен металлизированный слой из высокоомных сплавов, толщина которого обеспечивает нужную величину  $R$ , во втором – на трубочку намотана тонкая проволока. Проволочные резисторы позволяют рассеивать большую мощность. На высоких частотах начинает сказываться собственная емкость и индуктивность элементов конструкции резистора и он должен быть представлен эквивалентной схемой из комбинации идеальных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Например, индуктивность проволочных (намотанных проводом) резисторов начинает сказываться уже на сравнительно низких частотах. Для очень высокоомных металлизированных резисторов, наоборот, на высоких частотах важной становится емкость между выводами резистора.

## 1.2. Конденсатор

Конденсатор – это устройство, способное накапливать электрический заряд. Величина накопленного заряда пропорциональна емкости конденсатора  $C$ , зависящей от конкретной его конструкции. Связь между напряжением  $U$ , зарядом  $Q$  и емкостью  $C$  выражается следующим соотношением:

$$Q = CU \quad (\text{СИ, СГС}).$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получаем линейную связь между током и напряжением в цепи с емкостью:

$$I = C \frac{dU}{dt} \quad (\text{СИ, СГС}). \quad (1)$$

т. е. через идеальный заряженный конденсатор ( $U = \text{const}$ ) постоянный ток не течет и его сопротивление бесконечно, если же конденсатор разряжен и ток в цепи не ограничен внешними элементами, то

в начальный момент времени сопротивление конденсатора переменному току может быть очень мало ( $dU/dt \rightarrow \infty$ ).

Промышленность выпускает конденсаторы разнообразных форм и размеров. Простейший конденсатор состоит из двух параллельных проводящих пластин площадью  $S$ , расположенных на небольшом расстоянии  $d$  друг от друга. Его емкость

$$C = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad (\text{СИ}), \quad C = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{S}{d} \quad (\text{СГС})$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды между пластинами.

Чтобы получить большую емкость, необходимы большая площадь и малый зазор между проводниками, обычно для этого один из проводников покрывают тонким слоем изолирующего материала (называемого диэлектриком); для таких конденсаторов используют металлизированные пленки. Широкое распространение получили следующие типы конденсаторов: керамические, электролитические (изготовленные из металлической фольги с оксидной пленкой в качестве изолятора), слюдяные (изготовленные из металлизированной слюды). Каждому типу конденсаторов присущи свои качества, для анализа которых нужно обратиться к специализированным справочникам.

В цепях переменного (синусоидального) тока  $U = U_0 \exp(i\omega t)$ ,  $I = I_0 \exp(i\omega t)$ , из уравнения (1) получаем

$$U_0 = \frac{I_0}{i\omega C} = Z_C I_0 \quad (\text{СИ, СГС}),$$

и конденсатор может быть рассмотрен как частотно-зависимый резистор с сопротивлением

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \equiv -\frac{i}{\omega C} \quad (\text{СИ, СГС}). \quad (2)$$

В отличие от обычного резистора сопротивление, или импеданс, конденсатора имеет комплексное значение. Это означает, что ток и напряжение на конденсаторе сдвинуты по фазе на угол  $\pi/2$ . Т.е сначала максимальным значением тока происходит зарядка разряженного конденсатора. Затем по мере роста заряда и напряжения на



конденсаторе ток уменьшается. Значение амплитуды тока, протекающего через конденсатор, равно

$$I_0 = \frac{U_0}{Z_C} \quad (\text{СИ, СГС}).$$

Единицей измерения емкости в СИ является фарада (Ф) и ее производные (дольные):  $1 \text{ Ф} = 10^{-12} \text{ пкФ}$  (пикофарад)  $= 10^{-9} \text{ нФ}$  (нанофарад)  $= 10^{-6} \text{ мкФ}$  (микрофарад). В системе СГС единицей емкости служит сантиметр, переводный множитель:  $1 \text{ см} \approx 0,9 \text{ пФ}$ .

Измерение емкости в [см] имеет простой физический смысл: способность тела накапливать электрический заряд пропорциональна его размерам, поэтому характерный размер тела и есть его емкость.

Емкость параллельно соединенных конденсаторов равна их сумме  $C = C_0 + C_1 + \dots$ , а емкость последовательно соединенных конденсаторов вычисляется по формуле  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} + \dots$ .

### 1.3. Индуктивность

Катушка индуктивности – это компонент электрической цепи, способный создавать (накапливать) магнитный поток при протекании по нему тока. Основным параметр катушки индуктивности – индуктивность  $L$ . Он задает следующую связь между напряжением  $U$  и током  $I$

$$U = L \frac{dI}{dt} \quad (\text{СИ}), \quad U = \frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} \quad (\text{СГС}),$$

Если ток в цепи, содержащей индуктивность, не меняется ( $I = \text{const}$ ), то ее сопротивление близко к нулю и, наоборот, при резком изменении тока ( $dI/dt \rightarrow \infty$ ) ее сопротивление очень велико.

В цепях переменного (синусоидального) тока импеданс индуктивности равен

$$Z_L = i\omega L \quad (\text{СИ}), \quad Z_L = \frac{1}{c^2} i\omega L \quad (\text{СГС}),$$

и падение напряжения на этом элементе при протекании по нему тока равно:

$$U_0 = I_0 Z_L.$$

Ток и напряжение на индуктивности сдвинуты по фазе на угол  $-\pi/2$ . Т.е сначала максимальным значением напряжения происходит увеличение тока протекающего через индуктивность. Энергия запасается в магнитном потоке. Затем по мере роста тока напряжение на индуктивности уменьшается.

При последовательном соединении общая индуктивность равна их сумме,  $L = L_0 + L_1 + \dots$ , а при параллельном соединении определяется по формуле  $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} + \dots$ .

Индуктивность измеряется в Генри (СИ) или в см (СГС).

Простейшая индуктивность представляет собой соленоид длины  $l$  содержащий  $N$  намотанный на сердечник диаметра  $d$ . Ее индуктивность в случае  $l \gg d$  равна

$$L = \frac{\mu \pi^2 N^2 d^2}{l} \text{ (СГС)} \quad L = \frac{\mu \mu_0 \pi N^2 d^2}{4l} \text{ (СИ)}$$

Более совершенные конструкции включают сердечник, на который наматывается провод. Материалом для сердечника чаще всего служит железо (пластинки, прокатанные из сплавов железа или изготовленные методами порошковой металлургии) или феррит, представляющий собой хрупкий непроводящий магнитный материал черного цвета. Сердечник позволяет увеличить индуктивность катушки за счет магнитных свойств материала сердечника. Сердечник может быть изготовлен в виде бруска, тора или может иметь какую-нибудь более причудливую форму.

К неидеальности катушек индуктивности приводят а) наличие сопротивления провода, из которого намотана катушка, б) относительно большие потери в сердечниках, в) межвитковая емкость.

#### 1.4. Взаимоиндуктивность

Если две катушки размещены на одном сердечнике или находятся близко друг от друга, то их магнитные поля пересекаются. Такое устройство называется магнитосвязанными катушками или идеальным трансформатором и служит для передачи переменных сигналов из одной катушки в другую без гальванической связи между ними.

Основной параметр магнитосвязанных катушек – взаимоиндуктивность (иначе – коэффициент взаимоиндукции)  $M$ :  $M = (L_1 L_2)^{1/2}$ . Для идеального трансформатора эта величина выражается через количество витков катушек  $w$ :  $n = w_1/w_2$  и называется коэффициентом трансформации.

### 1.5. Источники тока и напряжения

Реальные источники тока и напряжения (блоки питания, генераторы сигналов, различные датчики электрических сигналов) представляют собой сложные устройства, характеризующиеся набором специфических параметров и характеристик. В электрических цепях и при теоретических расчетах мы отображаем их эквивалентными схемами, основой которых является *эквивалентные источники напряжения и тока*. Точно так же, как мы отличаем реальные резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности от их идеальных эквивалентных элементов  $R$ ,  $C$  и  $L$ , необходимо отличать и реальные источники тока и напряжения от их идеальных эквивалентных схем.

Эквивалентный источник напряжения/тока состоит из двух идеальных элементов – идеального источника (генератора) напряжения/тока и внутреннего сопротивления (рис. 1).

Идеальный генератор (источник) *напряжения* — это элемент электрической цепи, разность потенциалов (напряжение)  $U = \varphi_2 - \varphi_1$  между выводами которого задано, и не зависит от внешних условий, в том числе и от протекающего по генератору тока. Это эквивалентно утверждению, что внутреннее сопротивление идеального источника напряжения равно нулю, а напряжение может быть задано либо как константа, либо в виде нужной функции времени. Идеальный генератор напряжения является физической абстракцией, то есть реально подобное устройство нельзя осуществить. Например, при подключении нагрузки, сопротивление которой стремится к нулю, ток протекающий через генератор напряжения, стремился бы к бесконечности, что нереализуемо.

Идеальный генератор (источник) *тока* — это элемент электрической цепи, для которого сила тока задана и не зависит от внешних условий. Ток может быть задан как константа или как функция вре-

мени. Идеальный генератор тока также является физической абстракцией. Если допустить его существование, то при заданной величине тока напряжение между выводами такого элемента стремилось бы к бесконечности при подключении нагрузки, сопротивление которой очень велико. Например, отключение нагрузки эквивалентно тому, что  $R_n = \infty$  и напряжение на выводах идеального источника тока должно стать  $U = \infty$ , что физически нелепо. Такого "конфуза" не происходит с идеальным источником напряжения, поэтому в схемах предпочтительно "работать" с идеальным источником напряжения, а не тока).

В теории линейных электрических цепей есть **теорема** Гельмгольца-Тевенина, согласно которой для анализа тока и напряжения на любом двухполюсном элементе цепи  $R_n$  всю остальную часть схемы можно представить в виде эквивалентного источника сигнала, состоящего из идеального источника напряжения  $E$  и внутреннего сопротивления  $R_i$  (рис. 1, а).

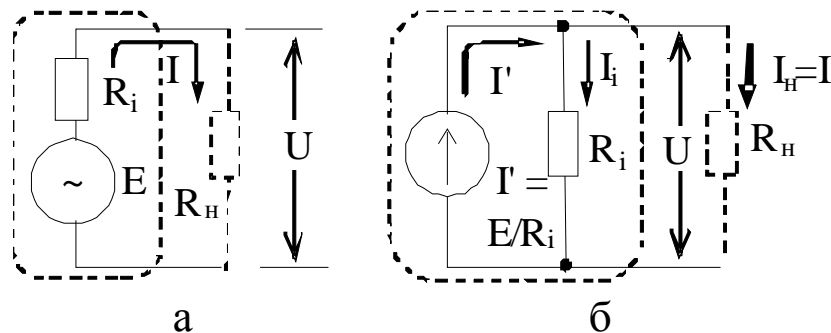


Рис. 1. Эквивалентные источники напряжения (а) и тока (б).

В соответствии с **другой** теоремой любой источник напряжения можно представить в виде эквивалентного ему источника тока, состоящего из идеального источника тока  $I' = E/R_i$  и того же самого внутреннего сопротивления  $R_i$  (рис. 1, б). Сами по себе идеальные источники  $E$  и  $I'$  смысла не имеют: смысл имеет только весь эквивалентный источник (напряжения или тока), состоящий из двух элементов – идеального источника и его внутреннего сопротивления. То есть элементы, окруженные на рис. 1 пунктирной линией, должны восприниматься как единый эквивалентный источник (напряжения или тока соответственно). Это важно помнить в связи с тем, что на эквивалентные источники напряжения (тока) часто

ошибочно переносят свойства их идеальных компонентов  $E$  ( $I'$ ). Следует запомнить, что эквивалентные источники напряжения (тока) призваны заменить реальные источники, а потому сами по себе идеальными источниками напряжения (тока) не являются!

### 1.6. Условия, при которых эквивалентные источники являются источниками стабильного тока или напряжения

На практике часто важно иметь такой источник электрической энергии (будь то источник сигнала или питания), который был бы способен поддерживать стабильное напряжение (ток) при изменении нагрузки в заданных пределах. Такие источники называются источниками стабильного напряжения (тока). Характеристики работы схемы показанной на рис. 1 полностью определяются отношением  $R_n/R_i$ .

1. При  $R_n \gg R_i$  (рис. 1, а) напряжение на нагрузке близко к величине  $E$  и слабо зависит от величины нагрузки, т. е. источник является генератором стабильного напряжения. Действительно, в этом случае  $U_n = E - I \cdot R_i$ , а  $I = E/(R_i + R_n) \approx E/R_n$ , т. е.  $U_n = E(1 - R_i/R_n) \approx E$ . Неидеальность генератора напряжения можно определить отношением изменения выходного напряжения к эдс:  $\Delta U_n = E - U_n$ , где  $\Delta U_n/E = R_i/R_n$ .

2. При  $R_n \ll R_i$  источник сигналов является генератором стабильной величины тока нагрузки с погрешностью  $\Delta I/I = R_i/R_n$ . Доказательство проводится аналогично предыдущему. Источник выдает в нагрузку ток, близкий к максимально возможному для него  $I_n = E/R_i$ .

3. При  $0.1 \cdot R_i \leq R_n \leq 10 \cdot R_i$  источник не является ни стабилизатором напряжения, ни стабилизатором тока. При изменении нагрузки одновременно изменяется как ток через нее, так и напряжение на ней.

### 1.7. Содержание понятия "эквивалентные" для источников напряжения и тока

Замещение источника напряжения источником тока не является тождественным, а только эквивалентным в определенных отношениях. Рассмотрим, в чем проявляется эквивалентность замещения.

Источник напряжения (рис 1, а) обеспечивает один и тот же ток  $I = E/(R_i + R_n)$  через  $R_i$  и  $R_n$  и напряжение на нагрузке  $U_n = I \cdot R_n$ . В свою очередь, источник тока (рис. 1, б) обеспечивает неизменную величину тока  $I' = E/R_i$ , который разветвляется на два тока: ток  $I_i$ , текущий через внутреннее сопротивление  $R_i$ , и ток  $I_n$ , текущий через нагрузку  $R_n$ , причем  $I' = I_i + I_n$ , а отношение токов обратно пропорционально отношению сопротивлений. Эквивалентность источников состоит в трех утверждениях.

1. Ток в нагрузке в обеих схемах одинаков. Действительно, ток в схеме источника напряжения  $I_n = I = E/(R_i + R_n)$ , а ток в схеме источника тока можно определить, воспользовавшись тем, что токи в параллельных ветвях распределяются обратно пропорционально сопротивлениям этих ветвей  $I_n/I_i = R_i/R_n$ . Учитывая соотношения  $I' = I_i + I_n$  и  $I' = E/R_i$ , получим для тока нагрузки схемы рис. 1, а, то же соотношение  $I_n = E/(R_i + R_n)$ , что и для схемы рис. 1, б.

2. Напряжение на нагрузках в обеих схемах одинаково  $U_n = U_n'$ , что следует из равенства токов в нагрузках для обеих схем и закона Ома.

3. Мощность, выделяемая на нагрузке, в обеих схемах одинакова, что следует из того, что мощность равна произведению тока на напряжение, а токи и напряжения на  $R_n$  в обеих схемах одинаковы.

Однако эквивалентность такой замены источников не является полной по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, если в отношении нагрузки обе схемы ведут себя совершенно одинаково (одинаковы токи, напряжения и выделяемая на нагрузке мощность), то этого нельзя сказать о самих источниках. Мощность, выделяемая на внутреннем сопротивлении самих эквивалентных источников

тока и напряжения, различна. Действительно, сами внутренние сопротивления эквивалентных источников одинаковы, но токи, текущие через них, различны. В источнике напряжения  $I_i = I_n = I = E/(R_i + R_n)$ . В источнике тока

$$I_i = I' - I_n = \frac{E}{R_i} - \frac{E}{R_i + R_n} = \frac{E}{R_i + R_n} \cdot \frac{R_n}{R_i} = I_n \frac{R_n}{R_i}$$

Таким образом, в зависимости от отношения  $R_n/R_i$  мощность, выделяемая на внутреннем сопротивлении эквивалентных источников напряжения и тока, получается различной, а потому представление об эквивалентных источниках напряжения и тока нельзя применять для анализа мощности в цепи самих реальных источников.

Второе ограничение связано с тем, что с внутренним сопротивлением эквивалентного источника тока  $R_i$  в расчетах нельзя поступать так, как если бы оно представляло собой сопротивление обыкновенного резистора. Нельзя, например, всю нагрузку  $R_n$  или ее часть "переносить" во внутреннее сопротивление источника тока, подсчитав новое сопротивление по закону сложения параллельных сопротивлений  $R_i' = R_n R_i / (R_i + R_n)$ .

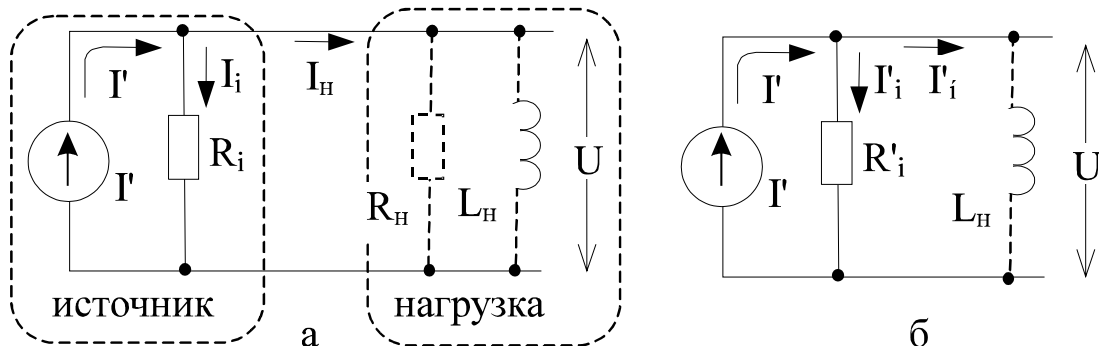


Рис. 2. Об эквивалентности источников напряжения и тока

Наиболее очевидна ошибочность такого решения в случае, когда нагрузка представляет собой комплексное сопротивление, например, показанное на рис. 2, а. Перенос части нагрузки в  $R_i'$ , показанный на рис. 2 (б), во-первых, изменяет фазу нового тока нагрузки  $I_n'$  по отношению к фазе тока источника, чего делать нельзя, так

как эквивалентный источник тока по определению должен обеспечивать те же самые напряжения и токи на нагрузке, что и замещаемый им реальный источник. Если в нагрузке на рис. 2 (а) происходят омические потери, вызванные протеканием тока по  $R_n$ , то новая нагрузка представляет собой чисто реактивное сопротивление, не имеющее омических потерь. Это меняет энергетические соотношения в рассматриваемой схеме. Таким образом, схема на рис. 2, (б) ни в отношении величины тока нагрузки, ни в отношении фазы этого тока, ни в отношении расчета мощности в нагрузке не является эквивалентной схеме на рис. 2, а.

Итак, никакую часть нагрузки – ни активную, ни реактивную – нельзя переносить ("суммировать") во внутреннее сопротивление эквивалентного источника тока, поскольку новый источник тока уже не будет эквивалентен исходному источнику напряжения (генератору) не только по мощности, но и по другим параметрам.

### 1.8. Эквивалентные схемы

На практике невозможно получить идеальный элемент цепи, сопротивление которого являлось бы только активным, или только индуктивным, или только емкостным. Катушка индуктивности обладает активным сопротивлением, так как ее обмотка выполнена из проводника с конечной проводимостью. Как всякое металлическое тело, она обладает и емкостью. Конденсатор имеет некоторую индуктивность, так как состоит из отдельных проводников, перемещение зарядов по которым вызывает появление магнитного поля. Потери в диэлектрике конденсатора вызывают его нагревание и, следовательно, являются необратимыми потерями, как и в активном сопротивлении. Даже простой отрезок провода, кроме активного сопротивления, имеет и индуктивное, и емкостное.

Исследовать прохождение тока в таких сложных элементах цепи, конечно, неудобно. Однако практически часто используются такие элементы, в которых сопротивление одного из перечисленных видов имеет преобладающее значение, а двумя другими видами можно без ущерба для требуемой точности исследования пренебречь. Тогда рассматриваемый элемент цепи можно заменить идеализиро-



ванным, обладающим только индуктивностью, или только емкостью, или только активным сопротивлением.

В тех же случаях, когда по тем или иным причинам такое упрощение недопустимо, прибегают к замене реального элемента эквивалентной цепью, состоящей из нескольких идеализированных элементов. Таким образом, например, конденсатор с потерями и катушка индуктивности с заметной величиной активного сопротивления проводников могут быть заменены схемами, изображенными на рис. 3.

Применение эквивалентных цепей значительно облегчает изучение процессов в электрических схемах. При этом можно ограничиться изучением свойств только трех идеализированных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , а все остальные случаи рассматривать как их комбинации.

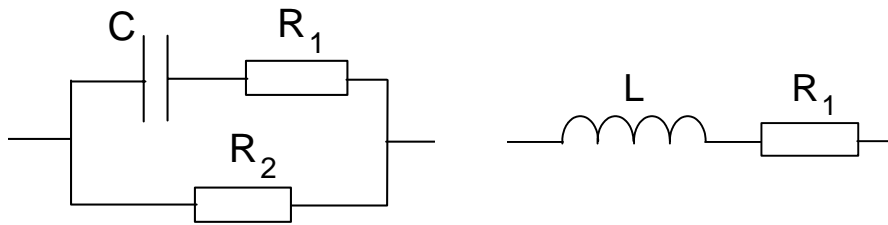


Рис. 3. Эквивалентные схемы конденсатора и индуктивности

## 2. Описание процессов в электрических цепях

### 2.1. Комплексная форма представления напряжения и тока

Пусть ток и напряжение в электрической цепи меняются по гармоническому закону. Теперь для того чтобы определить ток или напряжение в какой-либо точке схемы в данный момент времени недостаточно знать только амплитуду. Необходимо еще иметь информацию о фазе сигнала. Конечно, можно определять амплитуды и фазовые сдвиги напряжений и токов явно, например  $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , но проще это делать с помощью комплексных чисел. Вместо того чтобы складывать и вычитать синусоидальные функции, можно легко и просто складывать и вычитать комплексные числа записанные в экспоненциальной форме.

Всякую комплексную величину  $a + ib$  можно представить в виде  $Ae^{i\varphi}$ , где  $A$  и  $\varphi$  – действительные числа и

$$a + ib = Ae^{i\varphi} \Rightarrow A = \sqrt{a^2 + b^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

Для представления гармонических функций в экспоненциальном виде используются формулы:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx, \cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

где  $i$  – мнимая единица ( $i \cdot i = -1$ ).

Так как действующие значения напряжения и тока представляют собой реальные количественные величины, изменяющиеся во времени, то для перевода комплексного представления в реальные количественные величины достаточно воспользоваться следующим правилом:

$$A(t) = \operatorname{Re}(A(\omega) \exp(i\omega t))$$

где  $A(t)$  – реальная физическая величина (тока или напряжения);  $A(\omega)$  – та же величина, но в комплексном представлении;  $\operatorname{Re}$  – операция взятия действительной части. Для определения реальной и мнимой части нужно воспользоваться следующим представлением комплексных чисел:

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = \rho e^{i\varphi} = \rho \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$

Преобразование в обратную сторону записывается так:

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow A_0 \exp(i\varphi),$$

где  $A_0$  – амплитуда гармонической составляющей реального сигнала на частоте  $\omega$ .

Закон Ома для цепей содержащих только линейные элементы (сопротивления, емкости, индуктивности) записывается в "привычном" виде  $U = I \cdot Z$ . Только все входящие в закон величины являются комплексными:  $Z$  – импеданс линейного участка цепи;  $U$  – падение напряжения на нем;  $I$  – протекающий по нему ток.

## 2.2. Импеданс, активное и реактивное сопротивления

Импеданс является обобщением понятия сопротивление. В отличие от резистора, электрическое сопротивление которого характеризует соотношение постоянного напряжения и тока на нем, применение термина электрическое сопротивление к реактивным элемен-

там (катушка индуктивности и конденсатор) приводит к тому, что сопротивление идеальной катушки индуктивности стремится к нулю, а сопротивление идеального конденсатора — к бесконечности. Такой результат вполне закономерен, поскольку сопротивление элементов рассматривается на постоянном токе, то есть на нулевой частоте, когда реактивные свойства не проявляются. Однако в случае переменного тока свойства этих элементов существенно иные: напряжение на катушке индуктивности и ток через конденсатор не равны нулю. То есть реактивные элементы на переменном токе ведут себя как элементы с неким конечным «сопротивлением», которое и получило название электрический импеданс (или просто импеданс).

Импеданс линейного участка цепи есть комплексная величина. Модуль этой комплексной величины определяет связь между амплитудами тока и напряжения, как и обычное (активное) сопротивление элемента цепи. Фаза комплексного числа определяет сдвиг фаз между током и напряжением. Комплексные величины позволяют полностью описать произвольный гармонический сигнал — его амплитуду и фазу (разд. 2.1). Импеданс равен частному от деления комплексной амплитуды напряжения на данном участке на комплексную амплитуду тока. Действительная часть импеданса соответствует активному сопротивлению, а мнимая — реактивному. То есть элемент цепи с импедансом можно рассматривать как последовательно соединенные резистор с сопротивлением и чисто реактивный элемент с импедансом.

Импеданс цепи содержащей несколько элементов находится по стандартным правилам. Импедансы последовательно соединенных элементов суммируются, а при параллельном соединении определяются по правилу

$$\frac{1}{Z_{\Sigma}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots$$

Импеданс может быть измерен специальными приборами: измерителем *RLC* или анализатором импеданса (см. приложение, пункт 4). Эти приборы позволяют производить измерения в широком диапазоне частот и при различных напряжениях смещения.

### 2.3. Векторные диаграммы

Для теоретического анализа процессов в цепях, содержащих реактивные элементы, удобно использовать метод комплексных амплитуд. Суть метода заключается в следующем. В соответствии с формулой Эйлера комплексное число можно записать в виде  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ , где  $i$  – мнимая единица, и изобразить его на комплексной плоскости вектором, численно равным единице, под углом  $\varphi$  к действительной оси (рис. 4, а). Вектор не единичной длины, например, функция  $I = I_0 \cdot e^{i(\omega t + \psi)}$  в этом случае будет представлена вектором, изображенным на рис. 4, б.

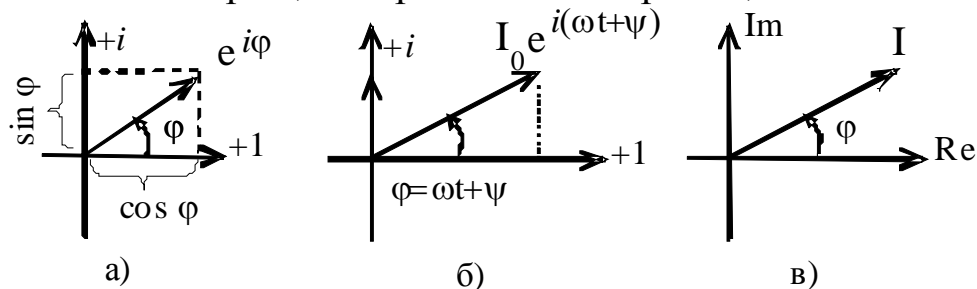


Рис. 4. Векторы на комплексной плоскости

Гармонические функции в комплексном виде представляются мнимой или действительной частью соответствующего комплексного числа. Например, косинусоидальный ток  $I = I_a \cdot \cos(\omega t)$  где  $I_a$  – амплитуда, можно представить в виде

$$I = I_a \cdot \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(I_a e^{i\omega t})$$

и изобразить в виде проекции вектора  $I_a e^{i(\omega t)}$  на ось +1 или Re (рис. 4, б). Re и Im – условное обозначение реальной и мнимой части комплексного числа. Для представления синусоидальной зависимости  $I = I_a \cdot \sin(\omega t)$  достаточно выбрать фазу  $\psi$  равной  $-\pi/2$ .

Поскольку угол  $\varphi = i(\omega t + \psi)$  линейно зависит от времени, то вектор  $I_a e^{i(\omega t)}$  будет вращаться с круговой частотой  $\omega$ . Для исключения этого вращения в случае гармонических величин принято на комплексной плоскости изображать их для момента времени  $t = 0$ . В этом случае  $\omega t = 0$  и

$$I_a e^{i(\omega t + \psi)} = I_a e^{i\psi} = I.$$

Величина  $I$  называется комплексной амплитудой. Таким образом, комплексная амплитуда изображает ток  $I$  на комплексной плоскости в момент времени  $t = 0$  (рис. 4, в).

## 2.4. Законы Кирхгофа

Основными законами для определения токов и напряжений в линейных цепях являются закон Ома и два закона Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа связывает между собой токи, сходящиеся в какой-либо точке (узле) цепи: сумма втекающих и вытекающих токов для данного узла равна нулю.

$$\sum_{k=0}^N I_k = 0. \quad (3)$$

Это означает, что токи не могут накапливаться в каком-либо узле цепи. Токам, втекающим в узел, приписывается знак плюс, а вытекающим – знак минус.

Второй закон Кирхгофа гласит, что сумма падений напряжения на элементах, составляющих произвольный замкнутый контур в цепи, равна сумме источников ЭДС в данном контуре:

$$\sum_{k=0}^N U_k = \sum_{k=0}^P E_k. \quad (4)$$

Произвольно заданные направления токов  $I_k$  в системе (3) приводят к положительному вкладу  $U_k$  в (4), если они совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура. Сторонние электродвижущие силы  $E_k$  имеют положительный знак, если они повышают потенциал в этом же направлении.

## 2.5. Мощность, выделяемая в схемах с $R$ , $L$ , $C$ в цепях переменного тока

Процессы передачи энергии по электрической цепи, рассеяния энергии или преобразования энергии из одного вида в другой характеризуются мощностью  $p$ . Она определяет интенсивность передачи или преобразования энергии и равна количеству переданной или преобразованной энергии в единицу времени. Мгновенная

мощность, производимая или отдаваемая произвольной частью цепи с двумя входами (двухполюсник) равна скорости совершения работы в данный момент времени

$$p(t) = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} q\Delta\varphi = U(t) \cdot I(t).$$

Напряжение и ток на входе двухполюсника в общем случае могут быть сдвинуты по фазе на угол  $\psi$ . В этом случае мгновенная мощность записывается как

$$\begin{aligned} p(t) &= U_0 \cos(\omega t) \cdot I_0 \cos(\omega t + \psi) = \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\psi) + \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(2\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (5)$$

Видно, что мгновенная мощность имеет постоянную и гармоническую составляющую частота которой в 2 раза больше частоты напряжения и тока. Двухполюсник получает мощность от внешней цепи когда мгновенная мощность положительна и отдает ее обратно во внешнюю цепь – когда она отрицательна. Такой возврат возможен потому, что энергия может запасаться в электрическом (конденсатор) или магнитном (индуктивность) поле элементов цепи, входящих в состав двухполюсника. Если двухполюсник содержит только сопротивления (резисторы), то энергия накапливаться в нем не может. В этом случае нет сдвига между напряжением и током.

Среднее значение мгновенной мощности за период называется активной мощностью. Она равна

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\psi) = UI \cos(\psi).$$

Здесь  $U$  и  $I$  эффективные значения тока и напряжения отличающиеся от максимальных величин на величину  $\sqrt{2}$ :  $U = U_0/\sqrt{2}$ ,  $I = I_0/\sqrt{2}$ . При анализе электрических цепей часто используют понятия реактивной

$$Q = UI \sin(\psi).$$

и полной мощности

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Полная мощность определяет максимальное амплитудное значение гармонической составляющей мощности циркулирующей через двухполюсник.

По аналогии с понятием импеданса в цепях переменного тока вводят комплексное выражения для мощности

$$S = U \cdot I^* = U I e^{i\psi} = UI \cos(\psi) + i UI \sin(\psi) = P + iQ.$$

Операция  $I^*$  означает сопряженное значение комплексной величины тока  $I$ .

На комплексной плоскости (рис. 5) полная мощность будет представлена вектором  $S$ , подобным вектору  $I$  на рис. 4, и ее проекция на действительную ось будет равна активной мощности  $\operatorname{Re} S = UI \cos(\psi) = P$ , а на мнимую  $\operatorname{Im} S = UI \sin(\psi) = Q$  – реактивной.

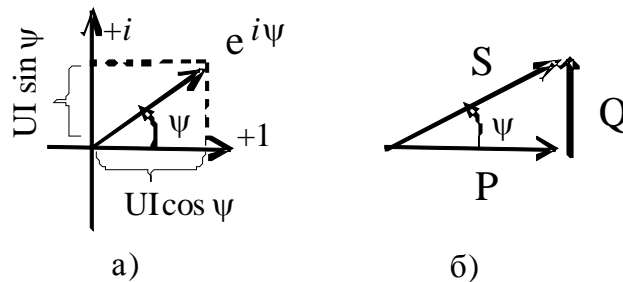


Рис. 5. Треугольник мощностей.

Обычно для мощности саму комплексную плоскость не изображают, а полученные соотношения между компонентами мощности, показанные на рис. 5, б, называют *треугольником мощностей*. Если угол  $\psi$  на рис. 5, в положителен, то общий импеданс цепи носит индуктивный характер. При емкостном импедансе угол  $\psi$  отрицателен, а при чисто активной нагрузке равен нулю и полная мощность совпадает с активной.

## 2.6. Переходные процессы

Если в цепи присутствуют не только активные, но и реактивные элементы, то в первый момент после ее подключения к источникам электрической энергии (электрического сигнала) процессы в ней могут сильно отличаться от тех, которые будут происходить в установившемся (стационарном) режиме. Это вызвано тем, что в реак-

тивных элементах в начальный момент после включения происходит "запас" энергии, которая затем в установившемся режиме будет сохраняться или переходить из одного реактивного элемента (или вида) в другой. Начальные процессы работы таких схем, возникающие непосредственно после коммутации (включения/выключения) или резкого изменения вынуждающей силы, называются переходными процессами в электрических цепях. Длительность переходных процессов может быть очень короткой (до долей микросекунд), но возникающие при этом токи и напряжения могут во много раз превышать их значения в стационарном режиме.

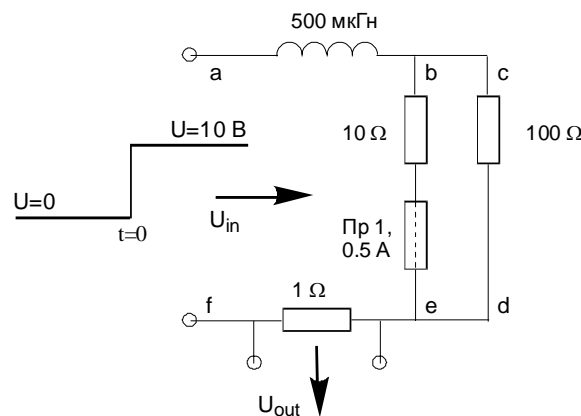


Рис. 6. Схема, иллюстрирующая анализ переходных процессов

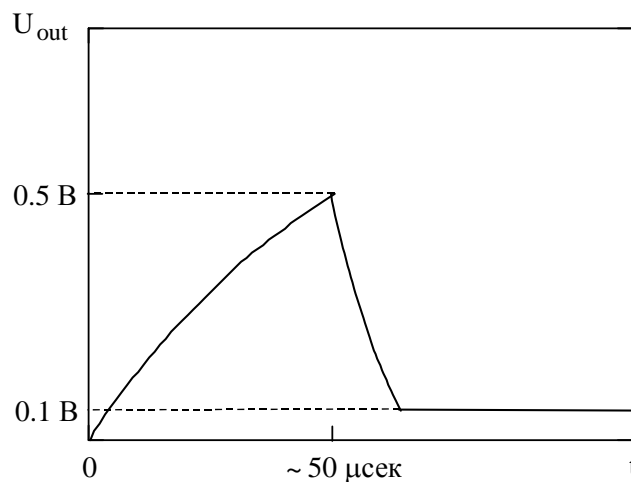


Рис. 7. Временная зависимость напряжения на сопротивлении  $1\ \Omega$  в схеме, изображенной на рис. 6

Для простейшего анализа переходных процессов можно воспользоваться следующими правилами:



1) незаряженная емкость в первый момент представляет собой короткое замыкание, полностью заряженная емкость – разрыв.

2) индуктивность в начальный момент после подключения к источнику напряжения (в начале протекания тока) представляет очень большое сопротивление, т. е. ток через нее будет минимален.

Например, при рассмотрении простой схемы, изображенной на рис. 6, можно рассуждать следующим образом.

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) индуктивность представляет собой очень большое сопротивление в цепи  $ab$ , поэтому ток в нашей системе не идет и падение напряжения на сопротивлении  $R = 1 \Omega$  равно нулю. Затем за время порядка  $\tau \approx L/R = 50 \mu\text{с}$ . ток достигает значения  $i$ . Скорость нарастания определяется минимальным из сопротивлений в цепях  $be$  и  $cd$ . После достижения значения тока  $0,5 \text{ А}$  предохранитель  $\text{Пр}1$  перегорает и ток переключается на цепь  $cd$  с сопротивлением  $100 \Omega$ . Соответствующая временная зависимость напряжения на сопротивлении  $1 \Omega$  выглядит следующим образом (рис. 7). Если мы хотим получить более точное описание переходных процессов, происходящих в электрической цепи, содержащей пассивные элементы, то нужно воспользоваться двумя законами Кирхгофа, дополнив их законами связи тока и напряжения для каждого элемента.

Рассмотрим применение этих законов, рассчитав переходной процесс в схеме, изображенной на рис. 8.

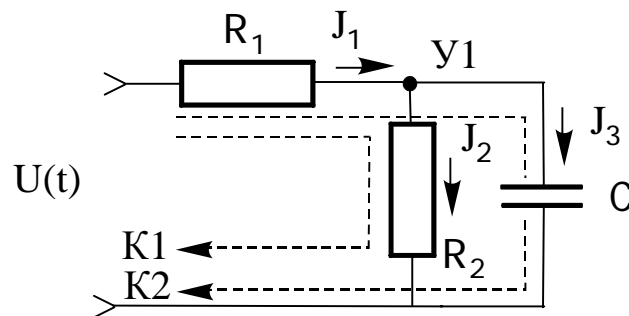


Рис. 8. Схема, иллюстрирующая использование законов Кирхгофа

Из первого закона Кирхгофа для узла  $Y1$  получаем:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (6)$$

Из второго закона Кирхгофа для контуров  $K1$  и  $K2$  получаем еще два уравнения:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = U(t), \quad (7)$$

$$I_1 R_1 + \frac{q_3}{C} = U(t). \quad (8)$$

Дифференцируя уравнение (8) по времени, используя, что  $I_3 = \frac{dq_3}{dt}$ , и выражая  $I_2$  и  $I_3$  из уравнений (6) и (7), получаем уравнение, описывающее зависимость  $I_1(t)$  при заданном поведении  $U(t)$ :

$$\frac{d}{dt} I_1(t) + \frac{1}{R_1 C} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) I_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{d}{dt} U(t) + \frac{U(t)}{R_2 C} \right). \quad (\text{СИ}) \quad (9)$$

Данное дифференциальное уравнение может быть решено численно с помощью математических пакетов MathCAD, MatLab, Mathematica, Maple и др. В случае простой зависимости  $U(t)$  решение уравнения (9) может быть записано в аналитической форме.

Решение полученного неоднородного дифференциального уравнения, как известно, состоит из суммы двух решений - решения однородного уравнения (с правой частью, равной нулю) и частного решения неоднородного уравнения. Полное решение однородного линейного дифференциального уравнения можно представить в виде суммы  $\sum_i I_i e^{p_i t}$ . Каждое элементарное решение  $\sum_i I_i e^{p_i t}$  описы-

вает либо гармонический процесс ( $p_i$  - мнимое число), либо экспоненциальный ( $p_i$  - вещественное число), либо комбинацию этих процессов ( $p_i$  - комплексное число). Физический смысл обычно имеют лишь процессы с затухающим, а не бесконечно возрастающим экспоненциальным членом в решениях. Это означает, что в начальный момент после коммутации на сигнал внешнего генератора всегда накладывается некоторый экспоненциально затухающий процесс, который и называется переходным.

Отметим, что определение переходного процесса зависит от того, что выбирается в качестве стационарного процесса. Поэтому, например, на рис. 9 представлены одновременно два переходных процесса. Один связан с выходом на стационарный периодический

процесс (область А), а второй с переходом с одного постоянного значения напряжения на другое (область Б).

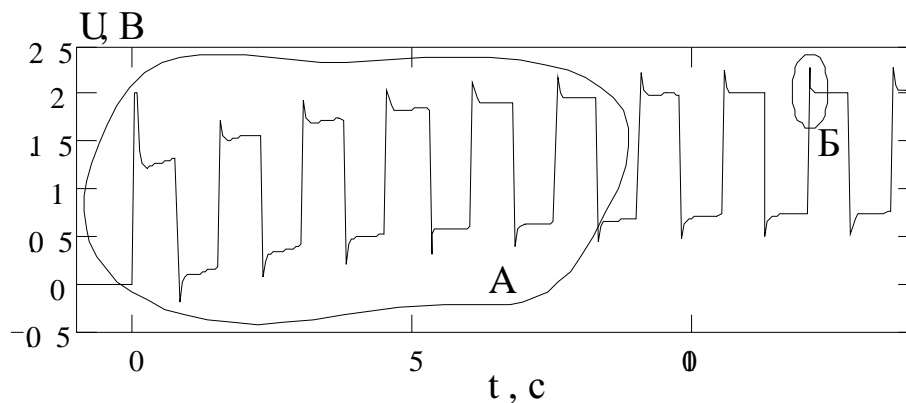


Рис. 9. Примеры переходных процессов

### 3. Типичные четырехполюсники и их использование

Во многих случаях анализа электрических цепей интересно знать токи и напряжения только некоторых ветвей и напряжения между конкретными узлами. В этом случае анализ цепи упрощается если ее разделить на отдельные части соединенные с остальными небольшим числом выводов – полюсов. В электротехнике особенно часто используется понятие цепи с двумя входами и двумя выходами, которую называют четырехполюсником. К четырехполюсникам относятся участки линий передачи электрической энергии, линии связи между генератором и приемником сигнала, аттенюаторы (ослабители) уровня сигнала, контуры корректирующие форму сигнала, аналоговые вычислительные цепи, трансформаторы, цепи регулирования различных параметров машин и т.д. Четырехполюсники могут быть пассивными (не содержащими источников энергии) или активными (содержащими источники напряжения или тока). Теория четырехполюсников дает возможность единым способом анализировать системы, самые различные по структуре и принципу действия. Кроме того, сложная цепь расчленяется на более простые части, характеристики которых дают полное представление о режиме работы всей цепи.

#### 3.1. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

Рассмотрим цепочку, изображенную на рис. 10. Применим второй закон Кирхгофа к нашей цепи

$$RI + \frac{q}{C} = U_{in}(t) \Rightarrow RI + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I dt = U_{in}(t)$$

где  $I$  – ток, протекающий по цепочке;  $RI$  – падение напряжения на сопротивление;  $q_0$  – начальный заряд в конденсаторе;  $q/C$  – напряжение на конденсаторе;  $U(t)$  – напряжение на источнике питания.

Дифференцируя данное выражение по времени, получаем

$$\frac{dI}{dt} + \frac{I}{RC} = \frac{1}{R} \frac{dU_{in}}{dt}. \quad (10)$$

Напряжение на выходе данного четырехполюсника

$$U_{out}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt'.$$

Если величина  $RC = \tau$  много больше характерного времени изменения нашего сигнала (или  $\omega \gg 1/\tau$ ), то вторым членом в левой части уравнения (10) можно пренебречь. В этом случае модуль емкостного сопротивления (импеданса)  $|Z_C| = 1/(\omega C)$  много меньше активного сопротивления  $Z_R = R$  и величина тока в цепи  $I(t)$  практически полностью определяется величиной  $R$ :

$$I(t) = \frac{U(t)}{Z_R + Z_C} \approx \frac{U(t)}{R}.$$

Напряжение на выходе четырехполюсника

$$U_{out}(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U_{in}(t') dt'.$$

Таким образом, данная схема в определенной области параметров “интегрирует” входной сигнал.

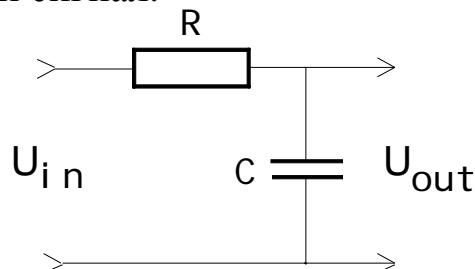


Рис. 10. Интегрирующая  $RC$ -цепочка

Продemonстрируем это свойство на примере простого импульса напряжения прямоугольной формы (рис. 11)

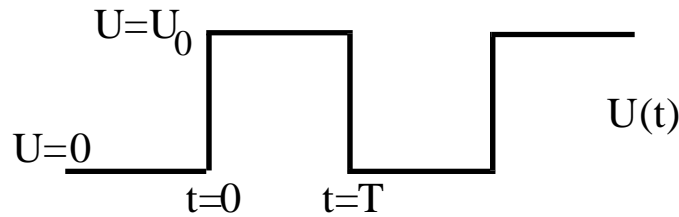


Рис. 11. Импульс напряжения

Действие такого импульса можно представить как мгновенное включение постоянного напряжения  $U = U_0$  на время  $T$  с последующим его выключением. Примем за начало отсчета времени момент “включения” напряжения (см. рис. 11) и проследим за изменением напряжения на выходе интегрирующей-цепочки (на конденсаторе  $C$ ). Решение уравнения (10) с начальными условиями  $q_0 = 0$ ,  $I_{t=0} = U_0/R$  (конденсатор не заряжен) при  $t = 0$  имеет вид

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \exp(-t/\tau), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $\tau = RC$  – постоянная времени интегрирующей цепочки. А напряжение на конденсаторе на этом же отрезке времени есть

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I dt = U_0(1 - \exp(-t/\tau)).$$

При малых  $t$  ( $t \ll RC = \tau$ ) экспоненту можно разложить в ряд  $1 - \exp(t/\tau) \approx t/\tau$ , поэтому при  $t \leq \tau$  напряжение на конденсаторе растет почти линейно, т. е. напряжение на конденсаторе пропорционально интегралу от входного напряжения:

$$U_C(t) \propto \int_0^t U(t) dt = \int_0^t U_0 dt = U_0 t.$$

Если выполняется обратное условие к уже рассмотренному, т. е.  $|Z_C| \gg Z_R$  (или  $\omega \ll 1/\tau$ ), то падение напряжения в цепи практически полностью определяется емкостью и решение уравнения (10) можно приближенно записать как

$$I \approx C \frac{dU_{in}}{dt}. \quad (11)$$

Тогда напряжение на выходе четырехполюсника

$$U_{out}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt' \approx U_{in}(t).$$

Т.е. низкочастотный сигнал интегрирующая цепочка пропускает практически без искажений, в отличие от высокочастотного сигнала, который интегрируется.

Дифференцирующая цепь изображена на рис. 12. В отличие от интегрирующей цепи в качестве выходного сигнала выступает напряжение на сопротивлении,

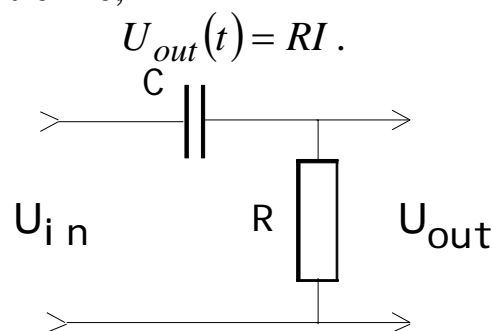


Рис. 12. Дифференцирующая  $RC$ -цепочка

Анализ процессов аналогичен случаю интегрирующей цепочки. В случае  $|Z_C| \gg Z_R$  (или  $\omega \ll 1/\tau$ ) ток равен (11) и напряжение на выходе цепи пропорционально

$$U_{out}(t) = RC \frac{dU_{in}}{dt}. \quad (12)$$

### 3.2. Фильтры

Благодаря тому что импеданс (сопротивление) конденсаторов (и индуктивностей) зависит от частоты, с их помощью можно строить частотно-избирательные схемы. Например, четырехполюсник, изображенный на рис. 13, слева, хорошо пропускает сигнал низкой частоты (емкость – разрыв цепи для постоянного тока) и плохо пропускает высокочастотный сигнал (емкость – короткое замыкание для высоких частот).

Четырехполюсник, изображенный на рисунке 13, справа, ведет себя “с точностью до наоборот”. При высокой частоте конденсатор

– хорошо проводящий элемент цепи – и сигнал с  $U_{in}$  достигает  $U_{out}$ , а для низких – “разрыв” и сигнала на  $U_{out}$  нет.

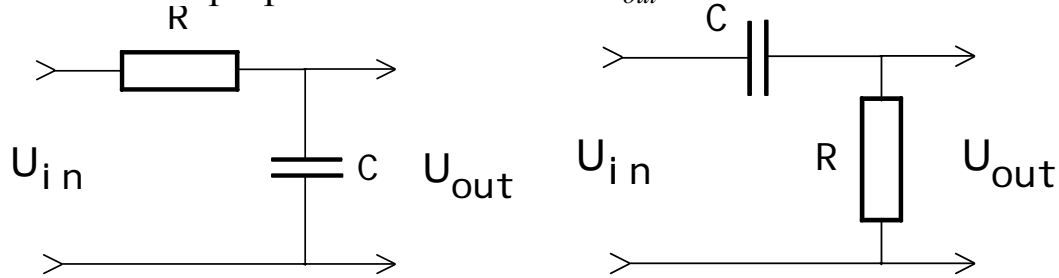


Рис. 13. Фильтры низких (слева) и высоких (справа) частот

### 3.3. Амплитудно-частотные характеристики фильтров

Для анализа амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) цепей с сосредоточенными параметрами удобно воспользоваться формализмом комплексных сопротивлений. В этом случае импедансы будут равны: резистора  $Z_R = R$ , емкости  $Z_C = 1/i\omega C$  и индуктивности  $Z_L = i\omega L$  ( $i$  – мнимая единица). В справедливости этих выражений можно убедиться, если считать, что  $I(t) = I \exp(i\omega t)$ ,  $U(t) = U \exp(i\omega t)$ ,  $\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$  (см. раздел 2.1), тогда

$$U_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int I \cdot \exp(i\omega t) dt = \frac{1}{i\omega C} I(t) \quad (\text{СИ}),$$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = i\omega L I(t) \quad (\text{СИ}).$$

Заметим, что вышеприведенные формулы написаны в системе СИ. В системе СГС их эквиваленты будут выглядеть как

$$U_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int I \cdot \exp(i\omega t) dt = \frac{1}{i\omega C} I(t) \quad (\text{СГС}),$$

$$U_L(t) = \frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} = \frac{i\omega L}{c^2} I(t) \quad (\text{СГС}),$$

где  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с – скорость света в вакууме.

Закон Ома для комплексных величин записывается в привычном виде. Поэтому фильтр низких частот, или ФНЧ (рис. 14) может быть представлен как простой делитель напряжения, но на частот-

но-зависимых резисторах. Тогда сигнал на выходе мы можем записать как

$$U_{\text{вых}} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} U_{\text{вх}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} U_{\text{вх}} = T(\omega) U_{\text{вх}}.$$

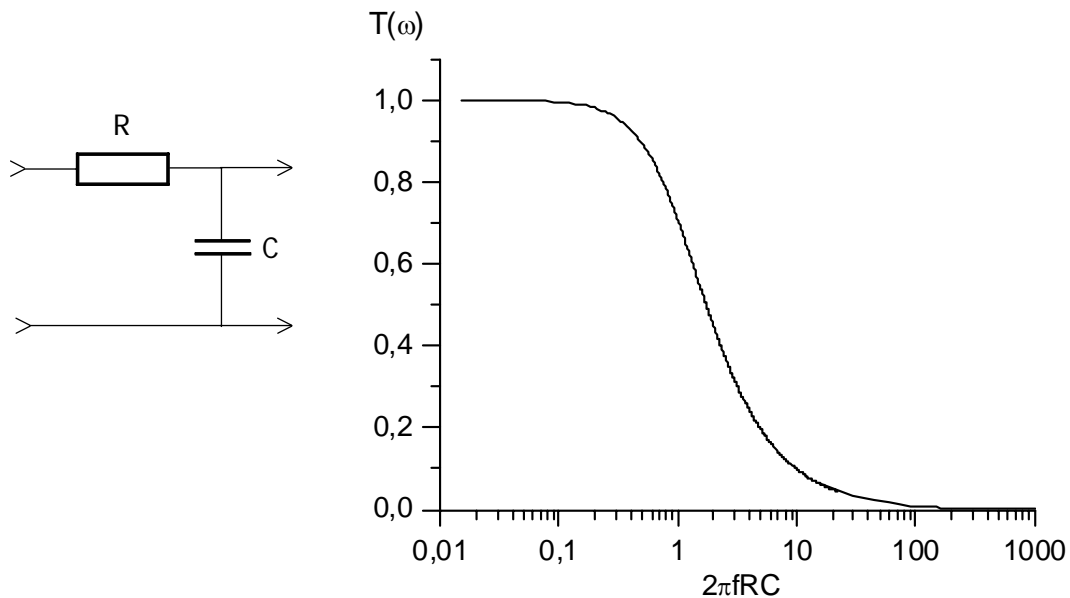


Рис. 14. Схема фильтра низких частот и его амплитудно-частотная характеристика

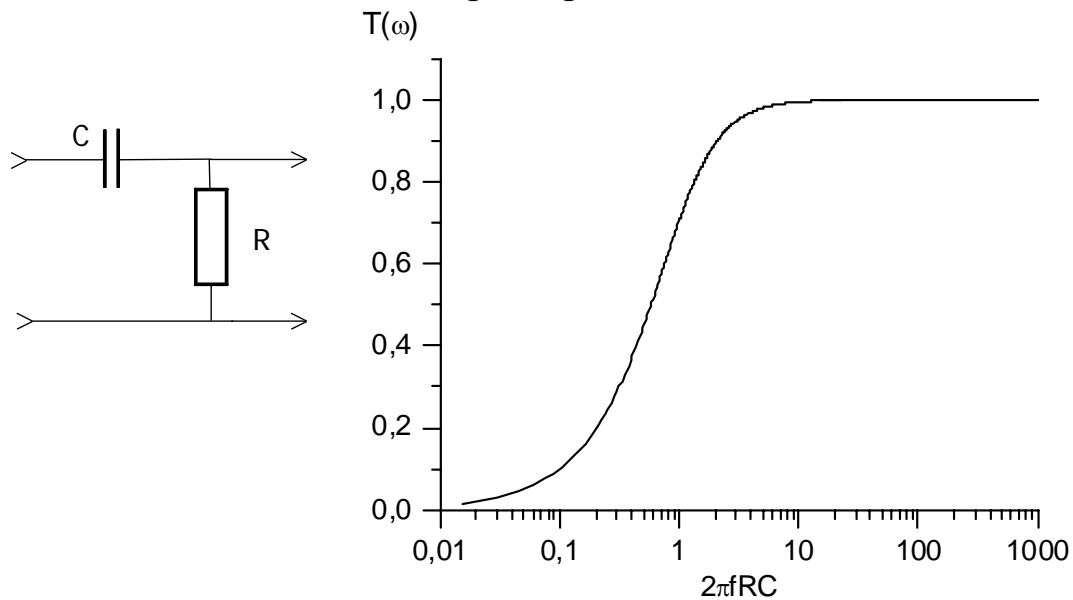


Рис. 15. Схема фильтра высоких частот и его амплитудно-частотная характеристика



Основной характеристикой четырехполюсников в качестве фильтров является передаточная функция  $T = U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$ . Комплексную передаточную функцию  $T(\omega) = |T(\omega)| \cdot \exp(i\varphi(\omega))$  можно трактовать следующим образом. Амплитуда передаточной функции  $|T(\omega)|$  описывает изменение выходного сигнала по амплитуде. Фазовая функция  $\varphi(\omega)$  описывает сдвиг фаз между входным и выходным сигналами. Эти две функции  $|T(\omega)|$  и  $\varphi(\omega)$  полностью описывают действие нашей схемы. Разлагая входной сигнал на отдельные гармонические составляющие, подвергая их действию передаточной функции  $T(\omega)$  и суммируя эти гармоники, мы получим выходной сигнал.

Для ФНЧ (или интегрирующей цепочки) передаточная функция

$$|T(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

изображена на рис. 14.

Для фильтра высоких частот (или дифференцирующей цепочки) все рассуждения полностью аналогичны:

$$U_{\text{вых}} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} U_{\text{вх}} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} U_{\text{вх}},$$

а передаточная функция есть

$$|T(f)| = \frac{(2\pi f RC)}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}.$$

Схема фильтра ФВЧ и его передаточная функция изображены на рис. 15.

Полосовой фильтр является последовательной комбинацией фильтров низких и высоких частот. После несложных, но громоздких выкладок можно найти его передаточную функцию:

$$U_{\text{вых}} = \frac{Y_o}{Y_o + Z_C} \cdot \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} U_{\text{вх}},$$

$$|T(f)| = \frac{(2\pi f RC)}{\sqrt{1 + 7 \cdot (2\pi f RC)^2 + (2\pi f RC)^4}},$$

где  $Y_0 = \frac{R(1+i\omega RC)}{1+2i\omega RC}$ .

Схема полосового фильтра и его передаточная функция показаны на рис. 16.

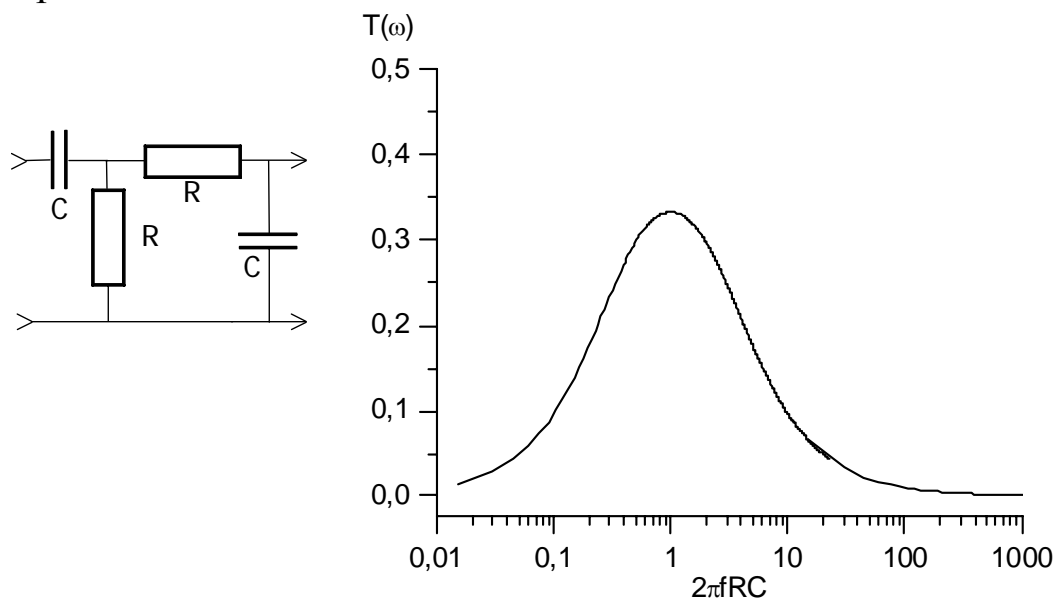


Рис. 16. Схема полосового фильтра и его амплитудно-частотная характеристика

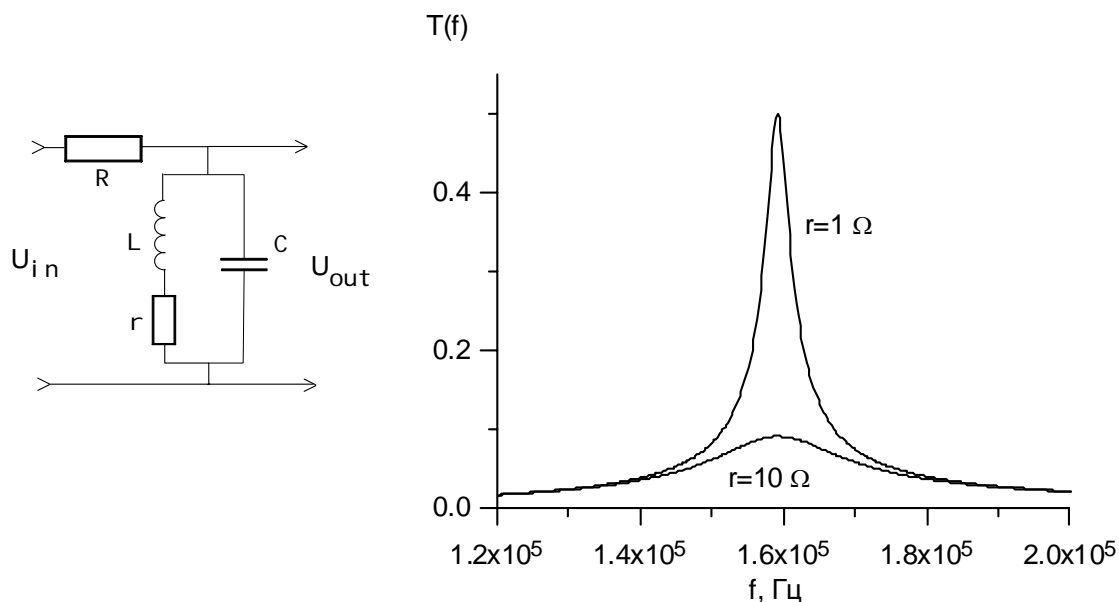


Рис. 17. Фильтр на основе резонансного контура и его амплитудно-частотная характеристика

В качестве полосового и заградительного фильтров часто используют схемы на основе резонансных контуров. Использование в фильтрах конденсаторов в сочетании с индуктивностями позволяет сильно “заострить” частотную характеристику схемы по сравнению с пологими характеристиками  $RC$ - и  $RL$ - схем.

Например, для схемы, изображенной на рис. 17, импеданс резонансного контура равен

$$Z_{LC} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{LC \sqrt{\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 + \omega^2 \frac{r^2}{L^2}}},$$

и можно получить полуширину резонансной кривой фильтра порядка  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  при  $\omega_0 L \gg r$ . На рис. 17, справа, показана передаточная функция для следующих параметров:  $L = 100$  мкГн,  $C = 100$  нФ,  $R = 5$  кОм,  $r = 1$  и  $10$  Ом.

## 4. Резонанс в электрических цепях

### 4.1. Колебательный контур, свободные колебания

Колебательный контур является типичным представителем резонансных колебательных систем, играющих важную роль в большинстве разделов физики – в механике это различного типа маятники и звуковые резонаторы (струны, мембраны, трубы, свистки, органы), в электродинамике – колебательные контуры, закрытые и открытые резонаторы с распределенными параметрами, в оптике – лазерные резонаторы, эталоны Фабри-Перо и т.д. Принципы описания всех колебательных систем настолько общи, что теория колебаний стала самостоятельным разделом физики. Поэтому изучение параметров, свойств и характеристик колебательного контура полезно рассматривать как общее введение в мир резонансных колебательных систем.

В теории колебаний выделяются два класса явлений – явления в линейных и нелинейных колебательных системах. Линейными называются такие системы, параметры которых не зависят от амплитуды колебаний. Например, для маятников это означает такие ма-

лые колебания, при которых упругость пружин и стержней не зависит от амплитуды колебания, а натяжение нити подвеса определяется только гравитационными силами. Для электрических колебательных контуров независимыми от амплитуды токов и напряжений должны оставаться такие величины, как индуктивность  $L$ , емкость  $C$  и сопротивление  $R$ .

Резонансные системы имеют два важных свойства:

1. Свойство избирательно реагировать на внешние источники сигналов, выделяя только те из них, частоты которых совпадают с собственной частотой колебательной системы;

2. Свойство запасать энергию колебаний, возбужденных внешним источником, поддерживая колебания в течение определенного времени после выключения внешнего источника.

Колебательный контур характеризуется двумя основными параметрами: частотой собственных (резонансных) колебаний  $\omega_0$  и добротностью  $Q$ , характеризующей отношение мощности энергии собственного колебания к мощности потерь за период.

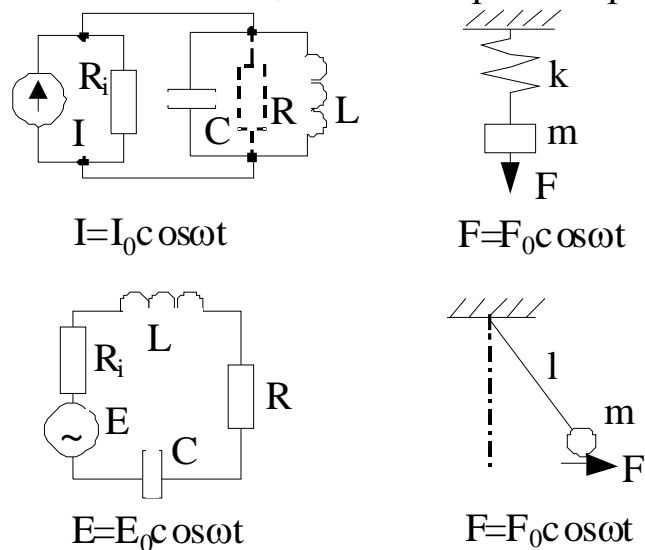


Рис. 18. Примеры колебательных контуров

На рис. 18 приведены примеры "параллелей" электрических и механических колебательных систем. В электрических резонаторах происходит периодический переход электрической энергии, запасенной в конденсаторе ( $W_{\text{Э}} = CU^2/2$ ) в магнитную энергию катуш-

ки индуктивности ( $W_M = LI^2/2$ ) и обратно. В маятниках происходит аналогичный циклический переход энергии из потенциальной (поднятого груза или сжатой пружины) в кинетическую и обратно.

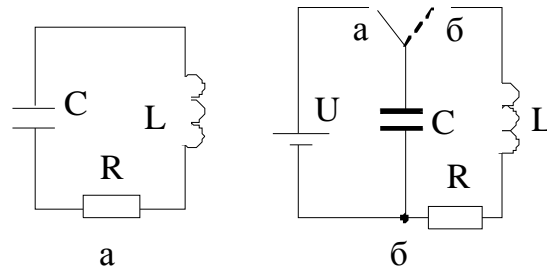


Рис. 19. Свободные колебания а) колебательный контур; б) пример возбуждения колебаний

Свободные колебания происходят в замкнутой цепи без вынуждающей силы (рис. 19, а). Согласно второму закону Кирхгофа для такой цепи можно написать:  $R \cdot I + U_C = -L \cdot dI/dt$ . Выражая  $U_C$  через заряд  $q$ , получим уравнение

$$R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (\text{СИ}).$$

Дифференцируя по времени и учитывая равенство  $I = \frac{dq}{dt}$ , получаем:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad (\text{СИ}).$$

Разделив на  $L$  и вводя обозначения

$$\delta = \frac{R}{2 \cdot L} \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (\text{СИ})$$

получим общее уравнение для свободных колебаний линейной резонансной системы:

$$I'' + 2\delta I' + \omega_0^2 I = 0,$$

где параметр  $\delta$  называется затухание, а параметр  $\omega_0$  - собственная частота (или частота свободных колебаний). Оно решается подстановкой  $I = A \cdot e^{i\omega t}$ , которая приводит к характеристическому уравнению

$$-\omega^2 + 2i\omega\delta + \omega_0^2 = 0, \text{ с решением } \lambda_{1,2} = i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Общее решение имеет две составляющие

$$I = A \cdot e^{i\omega_1 t} + B \cdot e^{i\omega_2 t}.$$

Константы  $A$  и  $B$  определяются начальными данными задачи, например, зарядом  $q_0$  или напряжением на конденсаторе  $U_0$ . Характер начальных данных определяется конкретной физической системой.

Частный пример схемы для возбуждения свободных колебаний в колебательном контуре приведен на рис. 19, б. Конденсатор  $C$  заряжается от батареи до напряжения  $U_0$  (положение "а" переключателя), а затем переключается в точку "б". Свободные колебания будут представлять собой циклический переход энергии электрического поля (в конденсаторе) в энергию магнитного поля (в индуктивности) и обратно.

Подставив найденные значения  $A$  и  $B$ , получим общее решение для свободных колебаний в контуре

$$I = i \frac{U_0}{L\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \frac{e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t} - e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t}}{2}. \quad (13)$$

Если бы колебательный контур состоял только из идеальных (без потерь) реактивных элементов (индуктивности  $L$  и емкости  $C$ ), то переход энергии из электрической в магнитную и обратно совершался бы без потерь, а в контуре существовали бы незатухающие свободные колебания с собственной частотой  $\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{1/LC}$ .

Наличие в схеме активного элемента  $R$  приводит к тому, что часть энергии за каждый период переходит в тепло и колебания затухают с некоторой постоянной времени  $\tau$ . Роль частоты в уравнении (13) теперь играет величина  $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , зависящая от отношения реактивной мощности к потерям на активном сопротивлении  $R$ . При этом вовсе не обязательно в схему должен быть включен отдельный резистор. В его качестве может выступать, например, омическое сопротивление провода, которым намотана катушка

индуктивности, а также сопротивление утечки изоляторов конденсатора. Кроме того, часть энергии колебаний может излучаться контуром в окружающее пространство в виде электромагнитной волны. На этом основано действие так называемых связанных контуров: если вблизи данного колебательного контура расположен другой, то в нем "наводятся" (возникают) колебания за счет того, что часть энергии трансформируется из первого контура во второй. Передача энергии совершается переменным электромагнитным полем, возникающим вокруг первого контура.

Если затухание мало, т.е.  $\delta < \omega_0$ , то мы получаем уравнение слабо затухающих колебаний в виде

$$I = -\frac{U_0}{L\omega_p} e^{-\delta t} \sin \omega_p t = -I_0 e^{-\delta t} \sin \omega_p t. \quad (14)$$

При этом резонансная частота приближается к частоте собственных колебаний:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right).$$

Таким образом, при малом затухании резонансная частота практически совпадает с собственной, однако колебания при этом не являются гармоническими. Для гармонических колебаний должно соблюдаться условие  $I(t) = I(t+T)$ , где  $T$  – период колебания. В нашем случае  $I(t) \neq I(t+T)$ , и о периоде можно говорить лишь как о времени, через которое повторяются нули функции (рис. 20). Именно в этом смысле мы будем ниже использовать термин "период колебаний".

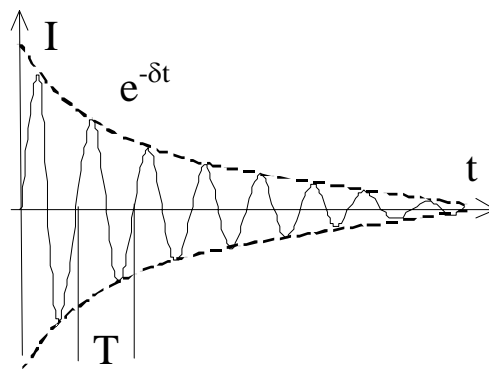


Рис. 20. Свободные затухающие колебания

Введем понятия добротности  $Q$  и логарифмического декремента затухания  $\gamma$  контура. Из (14) отношение амплитуд  $n$ -того и  $(n + k)$ -го колебаний равно  $I_n/I_{n+k} = e^{k\delta T}$ , где  $T = 2\pi/\omega$  – период колебания ("повторения нулей"). Логарифмическим декрементом затухания  $\gamma$  называется величина

$$\gamma = \delta T = \frac{1}{k} \ln \frac{I_n}{I_{n+k}} = \ln \frac{I_n}{I_{n+1}}. \quad (15)$$

Из (14) видно, что величина  $\delta$  обратно пропорциональна времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Из (15) следует, что декремент затухания  $\gamma$  показывает уменьшение амплитуды за период колебания:

$$\gamma = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}.$$

С логарифмическим коэффициентом затухания однозначно связан другой – более распространенный параметр, характеризующий колебательную систему, – ее добротность  $Q$ .

Добротность контура  $Q$  определяется соотношением

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{\rho}{R}, \quad \text{где } \rho = \sqrt{L/C} \quad (\text{СИ}).$$

Физический смысл добротности заключается в отношении запасенной в контуре энергии к энергии потерь за период колебания  $Q = \omega \cdot W_0 / \Delta W$ , откуда можно найти связь добротности с другими параметрами контура

$$Q = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega}{2\delta} = \omega \frac{L}{R} \quad (\text{СИ}). \quad (16)$$

Экспериментально добротность определяется по резонансной кривой как отношение резонансной частоты  $\omega_p$  к полосе частот  $2 \cdot \Delta\omega$ , определяемой на уровне  $U_{1,2} = \pm U_p / \sqrt{2}$ :

$$Q = \frac{\omega_3}{2 \cdot \Delta\omega} = \frac{f_3}{2 \cdot \Delta f},$$



где  $U_p$  – амплитуда колебания на резонансной частоте контура. Величина  $\rho = \sqrt{L/C}$  называется характеристическим (волновым) сопротивлением контура.

При большом затухании, т.е. при  $\delta > \omega_0$ , величина  $\omega_0^2 - \delta^2$  отрицательна, корень из нее мнимый. Такой случай называется апериодическим процессом. Общее решение, аналогичное (14), будет иметь вид

$$I = -\frac{U_0}{L\sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)}} e^{-\delta t} \operatorname{sh}\sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)} t. \quad (17)$$

График функции (17) приведен на рис. 21. Критическим условием, при котором затухающие колебания переходят в апериодический процесс, является условие  $\delta = \omega_0$ . В этом случае решение общего уравнения имеет вид

$$I = -\frac{U_0}{\omega L} (\omega t) e^{-\delta t} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}.$$

Остается добавить, что аналогичные параметры могут быть введены для любой резонансной колебательной системы независимо от ее физической природы (механические, термодинамические, электромагнитные, оптические, аэро- и гидродинамические системы).

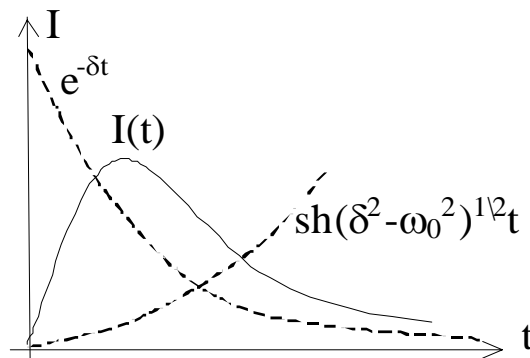


Рис. 21. Апериодический процесс

## 4.2. Вынужденные колебания

Колебательный контур, рассмотренный в предыдущем разделе, представлял собой замкнутую электрическую цепь, в которой совершаются свободные колебания.

В случае вынужденных колебаний мы должны подводить к контуру электрическую энергию от внешнего источника (генератора). Есть много способов для подключения источника внешней энергии к контуру, которые сводятся к той или иной комбинации двух основных: в разрыв цепи контура (рис. 22, а) или параллельно емкостной и индуктивной ветвям контура (рис. 22, б).

В зависимости от способа включения различают соответственно последовательный (рис. 22, а) и параллельный (рис. 22, б) колебательные контуры. Они предъявляют разные требования к согласованию с генератором и нагрузкой. Поэтому нужно отличать собственные параметры контура от параметров нагруженного контура, получаемые с учетом влияния генератора и "нагрузки" (входного сопротивления той цепи, в которую включен контур). В параллельном контуре (рис. 22, б) возникает резонанс токов. Для его поддержания в качестве вынуждающей силы необходимо применение генератора стабильного тока. В последовательном контуре (рис. 22, а) имеет место резонанс напряжений, и для его поддержания должен применяться внешний генератор стабильного напряжения.

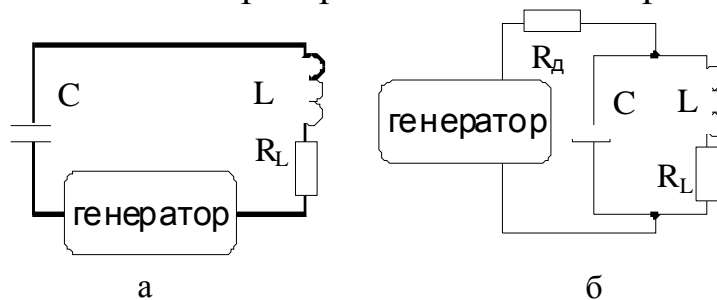


Рис. 22. Последовательный (слева) и параллельный (справа) колебательные контуры

#### 4.3. Вынужденные колебания в последовательном контуре, резонанс напряжений

Закон Кирхгофа, позволяющий исследовать процессы в контуре (рис. 22, а) в зависимости от частоты, записывается в виде.

$$U = U_R + U_L + U_C = IR + iI(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = I \cdot Z \quad (18)$$

Контур представляет для генератора некоторое комплексное сопротивление

$$Z = R_L + i \cdot \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right),$$

$$|Z| = \sqrt{R_L^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_L}, \quad (19)$$

где  $|Z|$  – модуль комплексного сопротивления,  $R_L$  – омическое сопротивление катушки индуктивности,  $\varphi$  – сдвиг фазы между активным и реактивным сопротивлениями, равный сдвигу фазы между током  $I$  в цепи и входным напряжением  $U$ ,  $i$  – мнимая единица.

Из (19) видно, что сопротивление цепи будет минимально и равно активному сопротивлению  $R_L$  на некоторой частоте  $\omega_0$ , определяемой условием

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad \text{где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{СИ})$$

Таким образом, на резонансной частоте сопротивление контура минимально, чисто активно, а ток в цепи совпадает по фазе с входным напряжением (напряжением генератора). Фактически это и есть определение резонанса в последовательном колебательном контуре.

Для практических целей представляет интерес исследовать поведение напряжений на реактивных элементах контура в зависимости от частоты генератора и определить его добротность  $Q$ .

Поскольку фазы  $U_L$  и  $U_C$  независимо от частоты всегда сдвинуты относительно тока  $I$  на  $+90^\circ$  и  $-90^\circ$  соответственно, то достаточно исследовать зависимость от частоты их модулей. Это можно сделать, исходя из уравнений

$$U_R = IR, \quad U_L = I\omega L, \quad U_C = \frac{I}{\omega C}, \quad I = \frac{U}{Z}.$$

Для примера раскроем уравнения для  $I$  и  $U_L$ . Используя введенное для свободных колебаний понятие добротности  $Q = 1/(\omega_0 RC)$  (уравнение 16), получим следующее выражение для тока в последовательном контуре:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}.$$

Тогда напряжение на индуктивности будет равно

$$U_L = \omega LI = U \frac{Q \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}. \quad (20)$$

Аналогичное уравнение можно получить для напряжения на  $C$ . При  $\omega = \omega_0$  напряжения на  $L$  и  $C$  будут равны  $U_{L0} = U_{C0} = Q \cdot U$ , т. е. в  $Q$  раз больше напряжения вынуждающей э.д.с.

На самом деле максимумы напряжения на элементах  $L$  и  $C$  несколько выше и смещены от резонансной частоты и выражаются следующими соотношениями:

$$\omega_{L\max} = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - \frac{R^2 C}{L}}} = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - \left(\frac{1}{Q}\right)^2}}, \quad \omega_{C\max} = \frac{\omega_0^2}{\omega_L}.$$

При добротности контура  $Q \geq 10$  сдвиг частот максимумов  $U_L$  и  $U_C$  относительно резонансной частоты  $\omega_0$  не превышает 1% и экспериментально резонансную частоту и добротность можно определять по резонансной кривой любого из напряжений  $U_L$  и  $U_C$ . Напряжение на реактивных элементах  $U_L$  и  $U_C$  при  $\omega = \omega_0$  в  $Q$  раз больше, чем входное напряжение  $U$  (см. уравнение 20), поэтому резонанс в последовательном контуре называется резонансом напряжений.

Важно отметить, что для нашего анализа существенно, что входное напряжение  $U$  само от частоты не зависит. В противном случае все параметры зависели бы не только от самого контура, но и от параметров источника сигнала. Как было показано в предыдущем параграфе, для этого выходное сопротивление генератора должно быть много меньше  $R$ .

#### 4.4. Вынужденные колебания в параллельном контуре, резонанс токов

Схема подключения параллельного представлена на рис. 21, б. Из-за комплексного характера нагрузки ток генератора является комплексной величиной. Поэтому, модуль тока  $I$  может оказаться меньше не только суммы модулей токов индуктивной и емкостной ветвей контура, но и каждого из них в отдельности. Именно это и происходит при резонансе в параллельном контуре: токи в индуктивной и емкостной ветвях контура в  $Q$  раз больше, чем ток, потребляемый от генератора тока. Поэтому резонанс в параллельном контуре называется резонансом токов.

Комплексное сопротивление параллельного контура равно

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_L + i\omega L) \frac{1}{i\omega C}}{R_L + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \approx \frac{L/C}{R_L + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Мы пренебрегли величиной  $R_L$  в числителе, поскольку она в  $Q$  раз меньше индуктивного сопротивления, но этого нельзя делать в знаменателе, поскольку при резонансе величина в скобках стремится к нулю.

Условие резонанса для параллельного контура то же, что и для последовательного – равенство реактивных сопротивлений ветвей с  $L$  и  $C$  :

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad \text{где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{СИ}).$$

Таким образом, при резонансе сопротивление контура становится чисто активным и равным

$$R_9 = \frac{L/C}{R_L} = \frac{\rho^2}{R_L}, \quad (21)$$

где  $\rho = \sqrt{L/C}$  волновое сопротивление контура.

Сопротивление  $R_9$  отдельного физического эквивалента в контуре не имеет, а является комбинацией волнового сопротивления  $\rho$  и сопротивления потерь  $R_L$ . Поэтому оно не составляет отдельной ветви параллельного контура и не ответвляет в себя ток. Следова-

тельно, "переносить" его куда-либо или к чему-нибудь "подсоединять" (например, к внутреннему сопротивлению источника тока) бессмысленно. На схеме это просто условное обозначение того факта, что на резонансной частоте параллельный колебательный контур представляет для внешнего генератора некоторое чисто активное сопротивление величиной  $R_{\text{э}}$ , а в формулах символическая запись определенной комбинации  $\rho$  и  $R_L$ , даваемой формулой (21).

Добротность параллельного контура

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_L} = \frac{1}{R_L \omega_0 C} = \frac{R_{\text{э}}}{\rho} = R_{\text{э}} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Собственные параметры параллельного контура, т. е. резонансная частота  $\omega_0$  и добротность  $Q$  будут такими же, как и в последовательном контуре при тех же  $C$ ,  $L$  и  $R_L$ .

## 5. Дискретные элементы в электрических цепях

### 5.1. Дискретные элементы

Развитие современной дискретной техники сильно изменило идеологию построения электрических цепей. Практически все современные осциллографы являются цифровыми устройствами в том смысле, что в ходе работы сигнал сначала превращается в "цифру", запоминается, а затем выводится на экран. В принципе последнее действие не обязательно, если есть возможность прочитать данные в компьютер и построить график там в любом удобном редакторе. Это кардинально отличает современные осциллографы от электронно-лучевых, где движение луча по экрану было принципиальным с точки зрения получения информации. Измеренный цифровой сигнал легко может быть дополнительно обработан в дальнейшем. Например, подсчитана частота и амплитуда синусоидального сигнала, или построен частотный спектр произвольного импульса. После того как сигнал "оцифрован" возможности обработки ограничены лишь фантазией экспериментатора.

Богатая номенклатура выпускаемых микросхем цифро-аналоговых (ЦАП) и аналогоцифровых преобразователей (АЦП) сделало возможными реализацию решений задач по манипулированию с сигналами и цепями недоступную ранее. Теперь для реализа-

ции поведения некоторой электрической цепи удобнее, иногда, измерить сигнал с помощью АЦП, затем рассчитать нужное поведение в микропроцессоре (“на лету” или on-line) и результат выставить в виде напряжения в ЦАПе. Такой подход имеет много достоинств, но и существует ряд недостатков, связанных с конечной скоростью обработки (дискретизации) сигналов в дискретных элементах, недостаточной разрешающей способностью ЦАП и АЦП, специфическими проблемами, связанными с переходом от непрерывных сигналов к дискретным.

Дискретной (или импульсной) системой называется такой элемент электрической цепи, который преобразует непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов или выполняет обратную операцию, по последовательности импульсов восстанавливает непрерывный сигнал. Как правило, дискретные элементы используются в комбинации с электронно-вычислительными машинами. Пример замены непрерывного сигнала  $X(t)$  на дискретную последовательность показан на рис. 23. Дискретизация осуществляется электронным ключом (или коммутатором) через равные интервалы времени  $\tau$ . Частота переключения электронного ключа  $f_{\text{switch}}$  и шаг дискретизации  $\tau$  связаны формулой  $f_{\text{switch}} = 1/\tau$ .

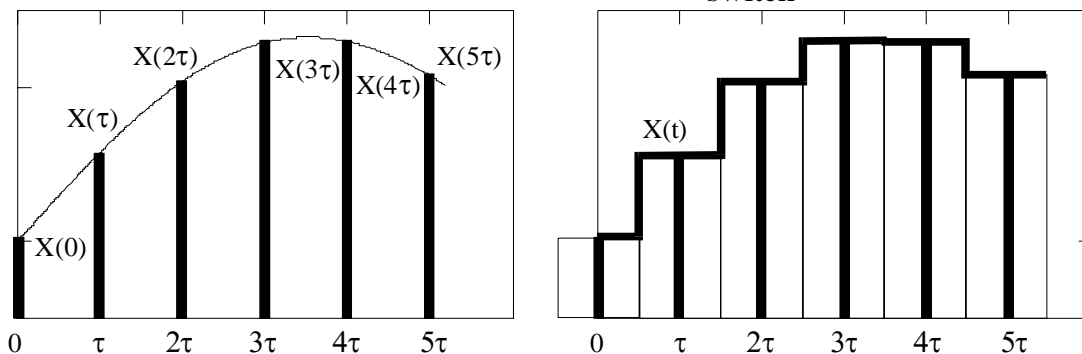


Рис. 23. Преобразование непрерывного сигнала в дискретный и обратно.

Дискретная последовательность или дискретный сигнал выражается через исходный непрерывный (аналоговый) сигнал следующим образом

$$X(n\tau) = x(t) \cdot d(t - n\tau).$$

где  $d(t)$  дискретная импульсная функция.

## 5.2. Преобразование Фурье, спектры дискретного и непрерывного сигналов

Прохождения сигнала через различные элементы электрических цепей удобно описывать на примере гармонической волны (см. [раздел 2.1](#)). В случае если волна не является гармонической, то ее всегда можно представить как суперпозицию конечного или бесконечного числа гармонических волн. Такой метод называется спектральным разложением. Если сигнал задан на конечном промежутке времени  $N$  точками, то он может быть представлен в виде суммы:

$$X_k = \frac{1}{N\tau} \sum_{p=0}^{N-1} c_p e^{2\pi i p k / N}.$$

Коэффициенты  $c_p$  называются фурье-гармониками или фурье амплитудами данного сигнала. Так как  $e^{2\pi i p k / N}$  периодически по модулю  $N$ , то, не меняя результата, можно перейти к суммированию по симметричному относительно нуля индексу.

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{N\tau} \sum_{p=0}^{N-1} c_p e^{2\pi i p k / N} = \frac{1}{N\tau} \sum_{p=-N/2}^{N/2-1} \tilde{c}_p e^{2\pi i p k / N} = \\ &= \frac{1}{N\tau} \left( \tilde{c}_0 + (-1)^k \tilde{c}_{N/2} \right) + \frac{2}{N\tau} \sum_{p=1}^{N/2-1} \operatorname{Re}(\tilde{c}_p) \cdot \cos(2\pi p k / N) - \\ &- \frac{2}{N\tau} \sum_{p=1}^{N/2-1} \operatorname{Im}(\tilde{c}_p) \cdot \sin(2\pi p k / N) = \\ &= \frac{1}{N\tau} \left( \tilde{c}_0 + (-1)^k \tilde{c}_{N/2} \right) + \frac{2}{N\tau} \sum_{p=1}^{N/2-1} |\tilde{c}_p| \cdot \cos(2\pi p k / N + \varphi_p) \end{aligned} \quad (18)$$

Как правило, описывается действительный (не комплексный) сигнал  $X_k$ , поэтому можно воспользоваться условием  $\tilde{c}_p = -\tilde{c}_p^*$  на коэффициенты ряда. Здесь звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину. Поэтому реально независимыми будут только  $N/2 + 1$  коэффициентов. Видно, что данное представление напрямую связано с представлением сигнала в виде конечной сум-



мы синусов и косинусов. Каждый комплексный коэффициент  $\tilde{c}_p$  характеризует не только амплитуду, но и фазу соответствующей Фурье-гармоники.

Если длительность сигнала конечна, но он непрерывен, т.е. известен для любого момента времени в заданном интервале, то сигнал может быть представлен в виде

$$X(t) = \frac{1}{N} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p e^{2\pi i p t/T}, \quad c_p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{2\pi i p t/T} dt \quad (19)$$

Здесь для полного представления сигнала необходимо уже бесконечное (но счетное) число коэффициентов. При увеличении количества точек в измерении (например, объема памяти цифрового осциллографа) формула (18) стремится к выражению (19).

Если мы допускаем, что функция определена на бесконечном промежутке времени, то ряд Фурье преобразуется в интеграл Фурье

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(f) e^{2\pi i p f t} df, \quad c_p = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{2\pi i p f t} dt.$$

В этом случае говорят о непрерывном спектре сигнала, т.е. частота гармоник пробегает теперь весь непрерывный ряд значений от  $(-\infty, +\infty)$ . Можно считать, что величина  $c(f)df$  является комплексной амплитудой гармоники  $e^{2\pi i p f t}$ , т.е. описывает ее амплитуду и фазу. Вследствие этого  $c(f)$  называют спектральной плотностью сигнала  $X(t)$ .

Как правило, на практике используется дискретное преобразование Фурье, так как сигнал измеряется на ограниченном промежутке времени в конечном числе точек.

### 5.3. Примеры спектров различных сигналов

На серии примеров на рис. 24 показаны спектры для различных сигналов. Слева на рисунке показан исходный сигнал, справа его спектр (амплитуды коэффициентов  $|c(f)|$  эквивалентных интенсивности заданной гармоники). Фазовые зависимости  $c(f)$  не указаны.

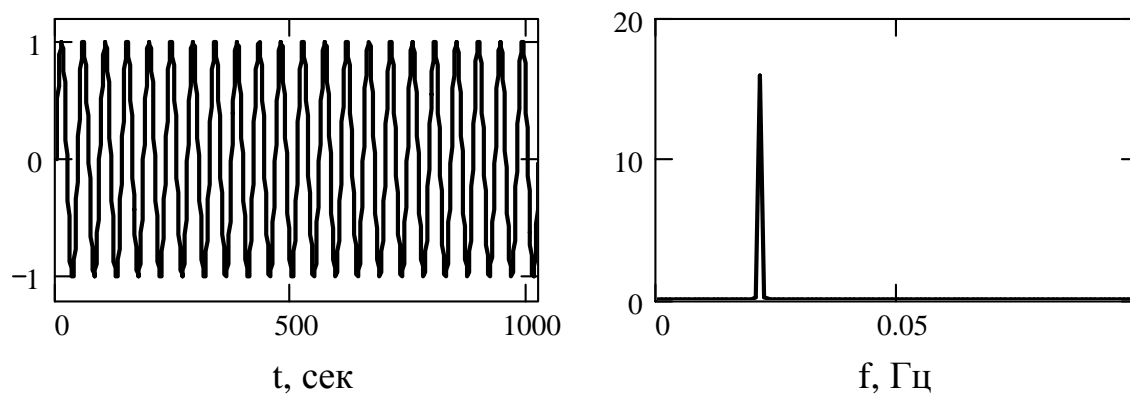


Рис. 24, пример 1. Спектр сигнала  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$

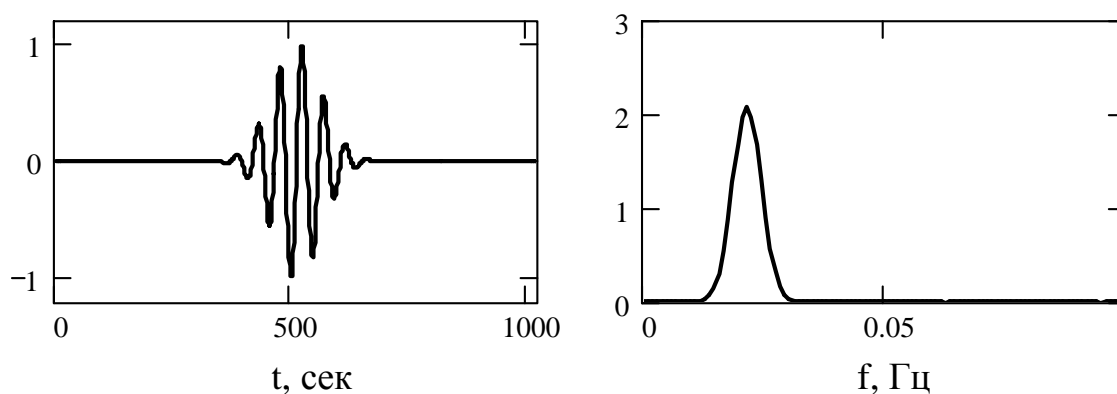


Рис. 24, пример 2. Спектр сигнала  $x(t) = \exp^{-(t-t_0)^2/\sigma_0^2} \sin(\omega_0 t)$

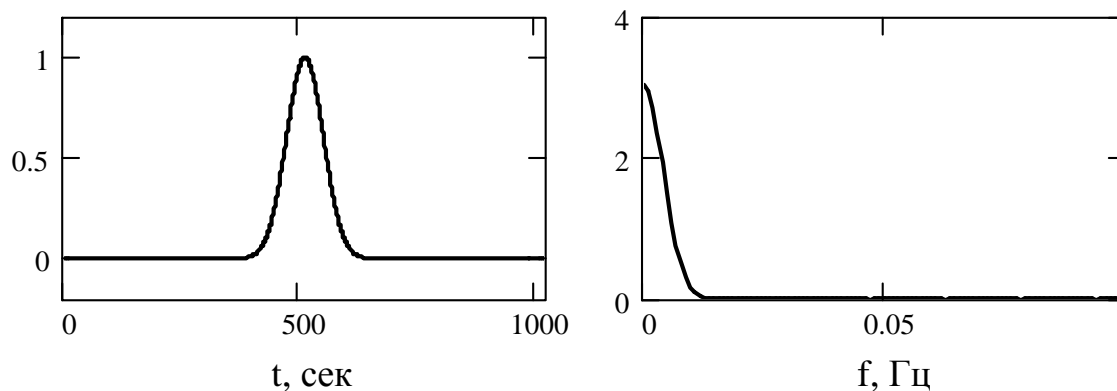


Рис. 24, пример 3. Спектр сигнала  $x(t) = \exp^{-(t-t_0)^2/\sigma_0^2}$ .

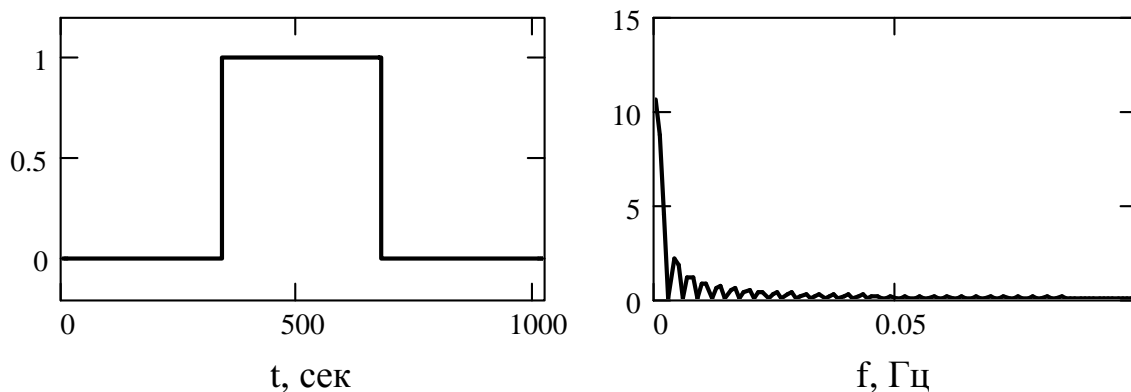


Рис. 24, пример 4. Спектр сигнала ступенчатой функции  $x(t) = d(t - t_0)$ .

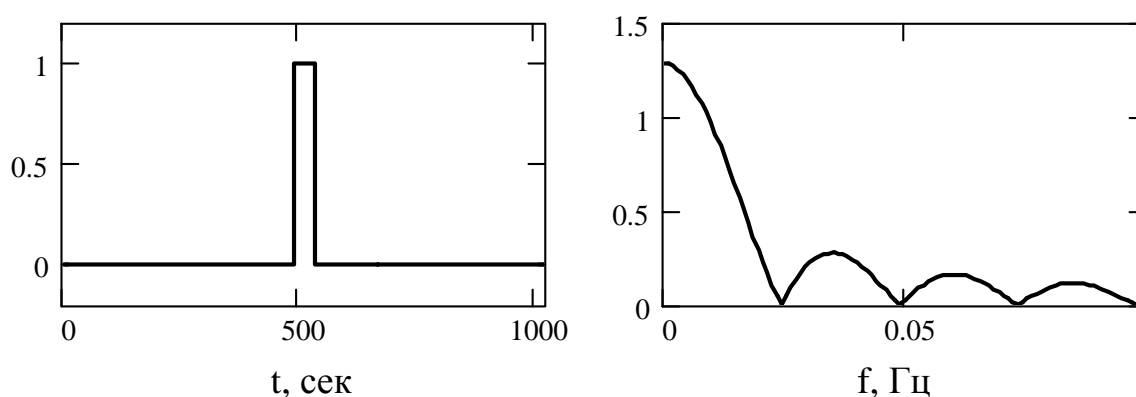


Рис. 24, пример 5. Спектр сигнала ступенчатой функции  $x(t) = d(t - t_0)$ .

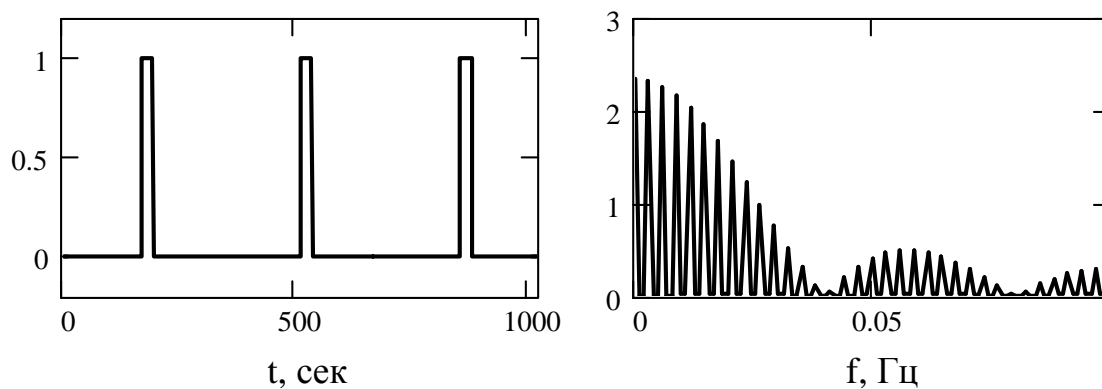


Рис. 24, пример 6. Спектр сигнала последовательности ступенчатых функций  $x(t) = d(t - t_0)$ .

## 5.4. Свойства преобразования Фурье.

### *Принцип неопределенности*

Чем больше характерная длительность сигнала во времени, тем уже его спектр в частотном пространстве Фурье гармоник. Обратное утверждение тоже верно – чем меньше длительность сигнала во времени, тем более широкий спектр. Иллюстрация этого принципа показана в примерах (1 2) и (4-5) на рисунке 24.

*Максимальная и минимальная частоты, регистрируемые с помощью дискретного преобразования Фурье.*

Минимальная и максимальная частоты в разложении сигнала в ряд Фурье

$$X_k = \frac{1}{N \cdot \tau} \sum_{p=0}^{N-1} c_p e^{2\pi i p k / N}.$$

равны

$$f_{\min} = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot \tau}, \quad f_{\max} = \frac{1}{2 \cdot \tau} = \frac{N}{2 \cdot T} = \frac{f_{\text{switch}}}{2}.$$

Здесь  $T$  - полное продолжительность измерения,  $N$  - число измерений,  $\tau$  - интервал между ближайшими измерениями (шаг дискретизации),  $f_{\max}$  - максимально высокая частота, регистрируемая при дискретном преобразовании Фурье.

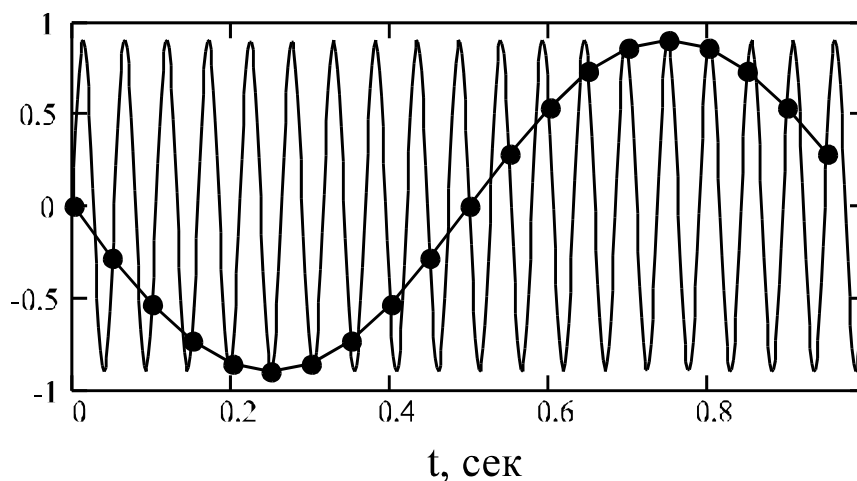


Рис. 25. “Стробоскопический” эффект

### *Эффект стробоскопирования при дискретной регистрации сигнала*

Пусть реальный сигнал содержит гармоники с частотами выше чем  $f_{\max}$ . Тогда происходит “просачивание” таких колебаний в низкочастотную область, связанное с эффектом “стробоскопирования”. Принцип эффекта показан на рисунке 25. Из рисунка видно, что комбинация быстрого изменения сигнала и конечного времени между измерениями приводит к появлению низкочастотной составляющей в регистрируемой последовательности.

Сигнал с частотой 19 Гц подается на АЦП с периодом измерений 50 мсек. Это соответствует максимальной регистрируемой частоте 10 Гц. Точки измерений показаны черными кружками. Видно, что в этом случае, наблюдатель увидит сигнал с периодом 1 сек (или частотой 1 Гц). Для того чтобы избежать этого, на практике, требуется либо применения быстродействующих АЦП, либо предварительной очистки сигнала с помощью специального фильтра.

### *Расположение частот при дискретном преобразование Фурье.*

Коэффициенты дискретного преобразования Фурье рассчитываются по формуле

$$c_p = \tau \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-2\pi i p k / N}$$

согласно разделу (4.2) индекс  $p$  может быть как в пределах  $[-N/2, N/2 - 1]$  так и в пределах  $[0, N - 1]$ . В физике принята интерпретация коэффициентов преобразования Фурье основанная на введении области положительных и отрицательных частот и поэтому используется индекс в виде  $[-N/2, N/2 - 1]$ . В некоторых математических пакетах используется нумерация коэффициентов в виде  $[0, N - 1]$ . В этом случае считается что ряд  $c_{N-1}, c_{N-2}, \dots$  описывает значение спектра на частотах  $-f_{\min}, -2f_{\min}, \dots$ .

*Теорема о энергии*

Для дискретного преобразования Фурье верно соотношение

$$\tau \sum_{k=0}^{N-1} X_k^2 = \frac{1}{N\tau} \sum_{p=-N/2}^{N/2-1} |c_p|^2,$$

которое имеет простой физический смысл. Энергия сигнала равна сумме энергий ее гармонических составляющих. Сумма

$$\tau \sum_{k=0}^{N-1} X_k^2 \approx \int_0^T [X(t)]^2 dt$$

характеризует энергию последовательности их  $N$  отсчетов данных. Для непрерывного преобразования Фурье это равенство записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} [X(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [X(f)]^2 df.$$

*Свойства непрерывного преобразования Фурье.*

Функция	Образ	Примечание
$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$	свойство линейности: $a, b$ - константы
$e^{i\omega t} f(t)$	$F(\omega - a)$	частотный сдвиг (см. пример 2 и 3, рис. 23)
$e^{iat}$	$\delta(\omega - a)$	гармонический сигнал с заданной частотой $a$ , (см. пример 1, рис. 23)
$\delta(t)$	1	максимально короткий сигнал, (предельный случай примера 5, рис. 23)
$e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$	функция Гаусса переходит в функцию Гаусса (см. 3, рис. 23)
$d(t) = \begin{cases} 1, & -a < t < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$	$2 \frac{\sin(\omega a)}{\omega} = 2a \text{sinc}(\omega a)$	преобразование Фурье от прямоугольной функции пропорционально функции $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ , (см. пример 4 и 5, рис. 23)

$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(i\omega)^n F(\omega)$	
$f(t) \cdot g(t)$	$\frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$	преобразование Фурье от произведения двух функций есть свертка $(F * G)(\omega) = \int F(\omega) G(\omega - \omega') d\omega'$
$(f * g)(t)$	$2\pi F(\omega) \cdot G(\omega)$	

## II ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

### Лабораторная работа 4.1. Процессы в RL и RC цепях

Цель работы: изучение процессов, возникающих в электрических цепях, составленных из сопротивлений, индуктивностей и емкостей (или в  $RLC$ -цепях); изучение характеристик  $RLC$ -фильтров.

Оборудование: генератор низкой частоты, осциллограф, набор радиотехнических схем.

#### 1. Интегрирующие и дифференцирующие цепи

Рассмотрим изменение формы сигнала при его прохождении через цепочку, изображенную на рис. 1, слева. Пусть параметры цепочки подобраны таким образом, что падение напряжения на конденсаторе много меньше величины входного сигнала  $U(t)$ . Тогда величина тока в цепи

$$I(t) \approx \frac{U(t)}{R}$$

и падение напряжения на конденсаторе выглядит следующим образом

$$U_c(t) \approx \frac{q_c(t)}{C} = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{1}{RC} \int U(t) dt.$$

Таким образом, выходной сигнал пропорционален интегралу по времени от входного сигнала, поэтому подобную цепочку называют “интегрирующей”. Для этого необходимо выполнение следующего критерия

$$\tau \ll R \cdot C.$$

Здесь  $R$  и  $C$  – параметры интегрирующей цепочки,  $\tau$  – характерное время входного сигнала (период, длительность и т. п.).

Если выполняется обратное условие к уже рассмотренному, т. е. падение напряжения в цепи практически полностью определяется емкостью, тогда ток в цепи равен

$$\frac{q}{C} = U(t) \Rightarrow I = C \frac{dU}{dt}.$$



В этом случае, используя в качестве выходного сигнала, напряжение на сопротивление, получаем аналоговую дифференцирующую цепочку (рис. 1, справа):

$$U_R(t) = RC \frac{dU}{dt}.$$

Для справедливости этого приближения необходимо выполнение условия

$$\tau \gg R \cdot C.$$

Более подробную информацию об интегрирующих и дифференцирующих цепях можно найти в разд. 3.11 (а также 3.5–3.7).

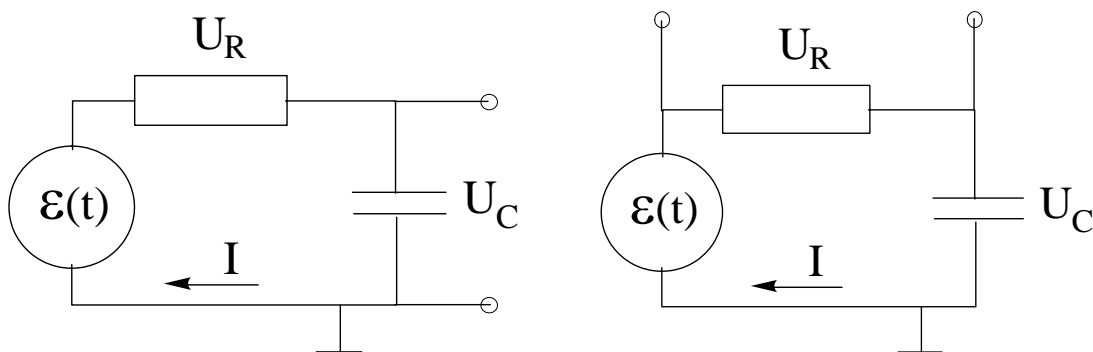


Рис. 1. Интегрирующая и дифференцирующая RC-цепочки

## 2. Фильтры

Благодаря тому что импеданс<sup>1</sup> (сопротивление) конденсатора  $Z_C \propto 1/\omega$  и индуктивности  $Z_L \propto \omega$  зависят от частоты (разд. 3.5 и 3.6), то, используя разные их комбинации, можно строить частотно-зависимые делители напряжения, которые будут пропускать только сигналы нужной частоты, а все остальные подавлять. В зависимости от назначения различают фильтры верхних или нижних частот, полосовые или заградительные (обозначаются соответственно ФВЧ, ФНЧ, ПФ, ЗФ).

<sup>1</sup> Импеданс линейного участка цепи есть комплексная величина. Модуль этой комплексной величины определяет связь между амплитудами тока и напряжения, как и обычное (активное) сопротивление элемента цепи. Фаза комплексного числа определяет сдвиг фаз между током и напряжением. Комплексные величины позволяют полностью описать произвольный гармонический сигнал – его амплитуду и фазу (разд. 3.7). Импеданс равен частному от деления комплексной амплитуды напряжения на данном участке на комплексную амплитуду тока.

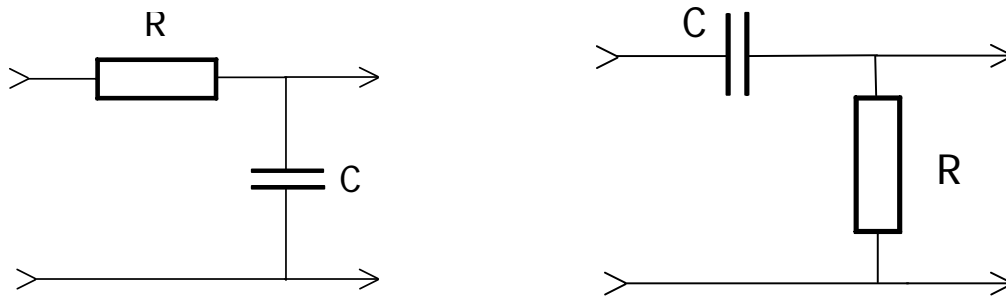


Рис. 2. Фильтр низких (слева) и высоких частот (справа)

Например, цепочка, изображенная на рис. 2, слева, хорошо пропускает низкие частоты (конденсатор в этом случае является практически “разрывом” в цепи) и плохо – высокие (ФНЧ), когда сопротивление конденсатора сильно падает. Цепочка изображенная на рис. 2, справа, задерживает низкие частоты, а высокие пропускает (ФВЧ). Примеры других типов фильтров изображены на рис. 3 и 4.

Одной из основных характеристик фильтра является его амплитудно-частотная характеристика (АЧХ). Изменяя частоту входного синусоидального сигнала и контролируя амплитуды сигналов на входе и на выходе фильтра, можно построить коэффициент передачи фильтра  $U_{out}/U_{in}$  как функцию частоты. Так как входной сигнал может быть представлен как сумма некоторого числа гармоник, то АЧХ несет информацию о том, как фильтр преобразует сигнал произвольной формы. Для получения полной информации о преобразовании сигнала необходимо дополнительное знание фазово-частотной характеристики (ФЧХ).

Более подробную информацию о виде и способах нахождения АЧХ для конкретных типов фильтра можно найти в разделах теории 3.2–3.3 (см. также 1.1–1.3).

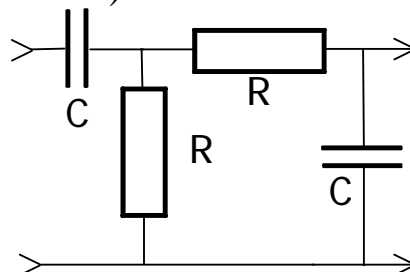


Рис. 3. Полосовой фильтр

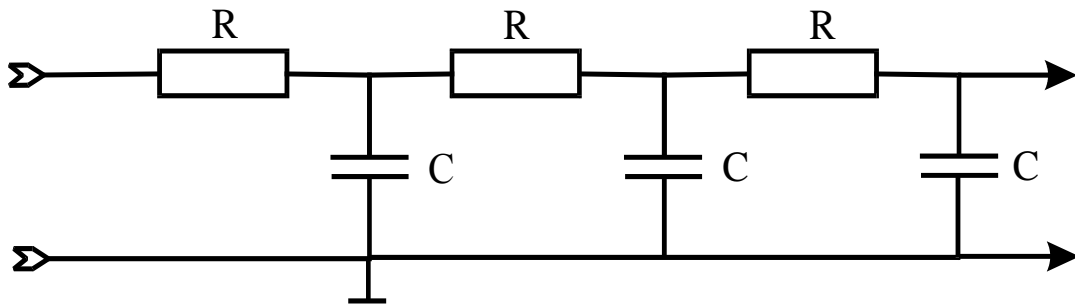


Рис. 4. Многозвенный фильтр низких частот

### 3. Контрольные вопросы

1. Запишите формулы для нижеследующих параметров:

Характерное время для переходного процесса в  $RC$ -цепи;

Характерное время для переходного процесса в  $LR$ -цепи;

Критерий применимости интегрирующих  $RC$ -,  $LR$ -цепочек;

Критерий применимости дифференцирующих  $RC$ -,  $LR$ -цепочек.

2. Как определяется характерная частота среза для фильтра низких (высоких) частот, чему она равна? Что такое АЧХ? Какая форма сигнала с генератора применяется для измерения АЧХ электротехнической схемы?

3. Придумать метод для определения неизвестных параметров цепочки, показанной на рис. 4.

### 4. Задания

1. Зарисовать (или записать на осциллографе) формы сигналов на выходе дифференцирующих и интегрирующих цепочек  $RC$ -типа в случаях:

а)  $f \ll 1/RC$ ;    б)  $f \gg 1/RC$ ;    в)  $f \approx 1/RC$ .

В качестве входного сигнала использовать пилообразное и прямоугольное напряжение. В случае в) при прямоугольном входном сигнале экспериментально определить значение  $RC$  по форме сигнала на выходе из цепочки. При выполнении этого задания необходимо контролировать форму и амплитуду входного сигнала.

2. Построить АЧХ (амплитудно-частотные характеристики) для фильтров

а) низкой частоты (рис. 2);

б) высокой частоты (рис. 2);

в) полосового фильтра (рис. 3);

г) фильтра низких частот, составленного из многих звеньев (рис. 3) и сравнить АЧХ фильтров ФНЧ, изображенных на рис. 2 и рис. 4. Есть ли разница между крутизной спада передаточной функции в том и другом случаях? Почему?

При выполнении этого задания необходимо контролировать амплитуду входного сигнала.

3. Определить неизвестные параметры цепочки, показанной на рис. 5.

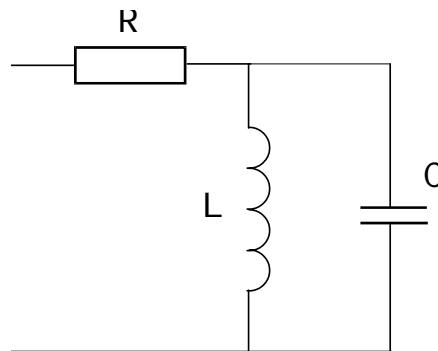


Рис. 5. Схема для определения неизвестных параметров

## 5. Библиографический список.

1. Часть I, разделы 1.1-1.3, 2.1-2.2, 2.4, 2.6, 3.2–3.3 настоящего сборника.

2. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987, Ч. 2.

3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.

4. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники. М.: Мир, 1986, Ч. 1.

## Лабораторная работа 4.2

### Резонанс в колебательном контуре

Цель работы: изучение вынужденных колебаний в колебательном контуре.

#### Введение

В теории цепей различают два случая резонансного контура: последовательный и параллельный. Они отличаются способом подключения внешней вынуждающей силы. В случае последовательного резонанса – это генератор напряжения, включенный последовательно в колебательный контур, а в случае параллельного тока – генератор тока подключенный параллельно. Способ подключения сопротивления в общем случае не важен.

#### 1. Последовательный колебательный контур

Схема последовательного колебательного контура приведена на рисунке 1, где буквами  $U_G$ ,  $R$ ,  $L$  и  $C$  соответственно обозначены источник переменного напряжения, сопротивление, индуктивность и конденсатор. Падение напряжения на этих элементах выражается следующим образом (см. ч. I, 1.1-1.3)

$$U_R = I \cdot R, \quad U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}, \quad U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I(t) dt.$$

Если задать переменное напряжение источника в виде гармонической функции с частотой  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ :

$$U_G(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

то установившийся ток в цепи с линейными элементами будет также гармонической функцией с той же частотой, но, в общем случае, с другой начальной фазой  $\varphi$ :

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$U_R = I_0 \cdot R \cdot \sin(\omega \cdot t) = U_R \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (1)$$

$$U_L = I_0 \cdot L \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi / 2) = U_L \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi / 2) \quad (2)$$

$$U_C = I_0 \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \sin(\omega \cdot t - \pi / 2) = V_C \cdot \sin(\omega \cdot t - \pi / 2) \quad (3)$$

Из полученных выражений видно, что падение напряжения на ёмкости запаздывает на четверть периода ( $\varphi = -90^\circ$ ) относительно тока, а напряжение на индуктивности опережает ток на ту же величину ( $\varphi = 90^\circ$ ). Кроме того, видно, что ток и напряжение на конденсаторе и индуктивности, которые называются реактивными элементами цепи, не совпадают по фазе, что отличает их от активного элемента - сопротивления, где фазы тока и напряжения совпадают.

Второй закон Кирхгофа для рассматриваемой цепи выглядит следующим образом

$$U_G = U_R + U_L + U_C \quad (4)$$

Векторная диаграмма, соответствующая уравнению (4) приведена на рисунке 1. Каждый вектор представляет собой комплексное число характеризующееся амплитудой и фазой. Отметим, что вся диаграмма, как целое вращается с частотой гармонического сигнала  $\omega$ . Наблюдаемое физическое значение напряжения или тока есть проекция соответствующего вектора на ось  $\text{Re}$ .

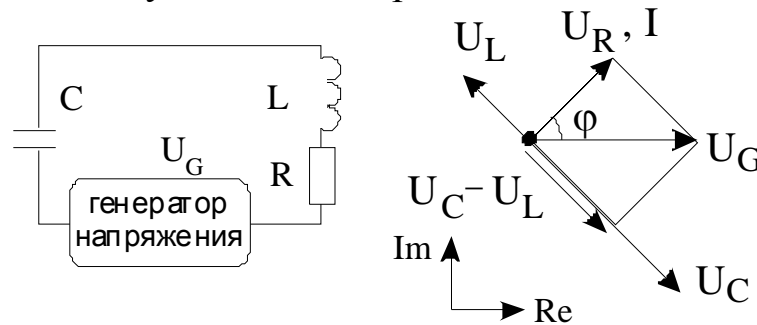


Рис. 1. Последовательный колебательный контур и векторная диаграмма токов в нем

Из рассмотрения диаграммы следует соотношение для модулей векторов

$$U_0 = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I_0 \cdot Z,$$

где выражение для полного сопротивления цепи  $Z$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}$$

получается подстановкой уравнений (1-3) в (10), а фаза  $\varphi$  равна

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}. \quad (5)$$

Исходя из выражений для полного сопротивления последовательного колебательного контура и используя формулы (1-3), можно определить полный ток  $I_0 = U_0/Z$  и амплитуды падения напряжения на элементах контура: сопротивлении, индуктивности и конденсаторе

$$U_R = \frac{U_0 \cdot R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}, \quad (6)$$

$$U_L = \frac{U_0 \cdot L \cdot \omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}, \quad (7)$$

$$U_C = \frac{U_0}{C \cdot \omega \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}. \quad (8)$$

Выражения (6-8) позволяют построить частотные зависимости напряжений на всех элементах последовательного колебательного контура, пример таких зависимостей приведён на рисунке 2.

Из рис. 2 (а) видно, что на малых частотах всё напряжение генератора падает на конденсаторе, который согласно формуле 2 (ч. I, раздел 1.2) имеет очень большое реактивное сопротивление. На больших частотах падение напряжения определяется индуктивностью (ч. I, раздел 1.3). Все резонансные кривые имеют максимум вблизи резонансной частоты, значение которой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (9)$$

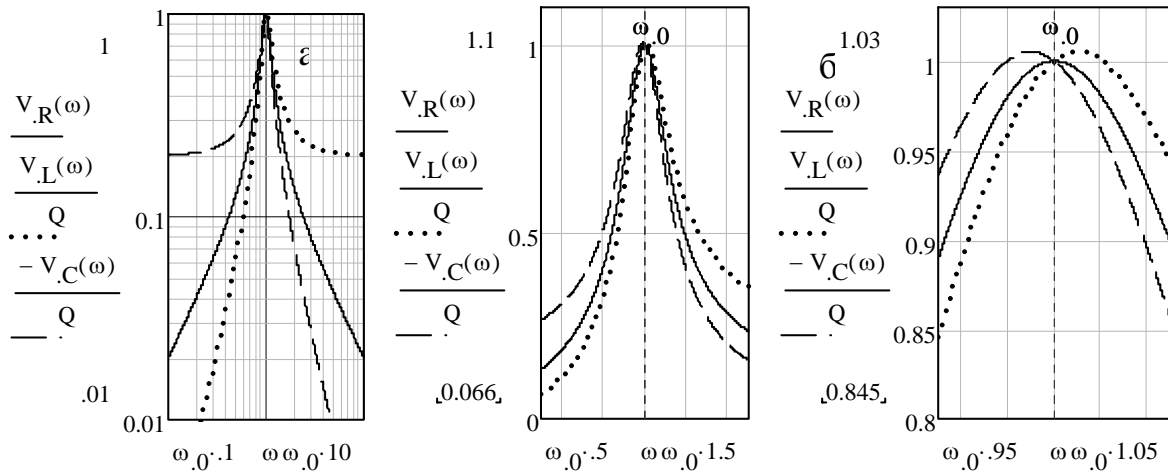


Рис. 2. Зависимость напряжения (в вольтах) на элементах последовательного колебательного контура  $R$ ,  $L$  и  $C$  от частоты для разных интервалов перестройки частоты внешнего сигнала (а, слева)  $0.1 \cdot \omega_0 < \omega < 10 \cdot \omega_0$ , (б, в центре)-  $0.5 \cdot \omega_0 < \omega < 1.5 \cdot \omega_0$  (в, справа)  $0.05 \cdot \omega_0 < \omega < 1.05 \cdot \omega_0$ . Величины напряжений  $U_L$  и  $U_C$  уменьшены в  $Q$  раз, где добротность  $Q$  определяется формулой (10). Напряжение на генераторе 1 вольт,  $Q = 5$ .

При этом оказывается, что резонанс напряжения на сопротивлении точно соответствует частоте (9), а резонансные частоты для  $U_C$  и  $U_L$  немного отличаются от  $\omega_0$  (см. ч. I, раздел 3.6), что заметно при точном измерении частоты при малых значениях параметра  $Q$  (см. рис. 2, в). Из рис. 2 (в) видно также, что максимум напряжения на сопротивлении равен напряжению источника переменного напряжения ( $U_R^{res} = U_G$ ), а максимумы на реактивных элементах контура  $C$  и  $L$  превышают  $U_G$  приблизительно на фактор добротности  $Q$

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{1}{\omega_0 \cdot R \cdot C} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10)$$

Оценим величину энергии, запасённой в реактивных элементах контура, используя формулы (1-3).



$$W = \frac{L \cdot I^2}{2} + \frac{C \cdot U_C^2}{2} = \frac{L}{2} \cdot I_0^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)^2 + I_0^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \omega^2 \cdot C} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)^2 \quad (11)$$

При резонансе ( $\omega = \omega_0$ ) выражение (11) принимает вид

$$W_{\text{Res}} = \frac{L}{2} \cdot I_0^2 \cdot (\sin(\omega \cdot t + \varphi)^2 + \cos(\omega \cdot t + \varphi)^2) = \frac{L}{2} \cdot I_0^2$$

Из которого видно, что запасённая энергия попеременно сосредотачивается в конденсаторе и в индуктивности, сохраняясь постоянной при постоянной подпитке от источника напряжения. Поглощение энергии происходит в активном элементе цепи - сопротивлении. Средняя за период диссипация энергии в сопротивлении

$$\Delta W = \langle I \cdot V_R \rangle \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = \langle I_{\text{max}}^2 \cdot R \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) \rangle \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = \frac{I_{\text{max}}^2 \cdot R}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$$

Отношение запасённой в резонансной системе энергии к потерям за период оказывается равным добротности с множителем  $2 \cdot \pi$ .

## 2. Амплитудные и фазовые характеристики последовательного колебательного контура

Любая резонансная система характеризуется двумя экспериментально наблюдаемыми зависимостями – амплитудно-частотной (АЧХ)  $I = I(f)$  и фазо-частотной (ФЧХ)  $\varphi = \varphi(f)$ . Для того, чтобы получить обобщенные характеристики контуров, эти характеристики строят в относительных величинах  $A(f) = I(f)/I_0$ , где  $I_0$  – максимальное значение тока в контуре при резонансной частоте.

Свойства амплитудно-частотной характеристики описываются выражениями 6-8 и показаны на рис. 2. Ширина резонансной кривой определяется добротностью колебательной системы. Чем выше добротность колебательной системы, тем уже резонансный пик, тем меньше относительные потери в системе. Напряжение на реактивных компонентах контура на фактор добротности  $Q$  превышает напряжение на задающем источнике, что иногда приводит к разрушительным последствиям. Так при  $Q = 100$ , напряжение на реактивных элементах  $C$  и  $L$  будет на два порядка больше напряжения

источника, что может вызвать пробой изоляции в элементах цепи. Заметим, что при столь сильном возрастании напряжения на реактивных элементах в резонансе, эти напряжения остаются в противофазе друг с другом, поэтому суммарное падение напряжения на реактивных элементах  $C$  и  $L$  уменьшается при резонансе до нуля, а сопротивление всей цепи последовательного колебательного контура становится чисто резистивным и определяется только величиной  $R$ .

Частотная зависимость фазы тока в цепи (и напряжения  $U_R$ ), определяемая формулой (5) показана на рисунке 3.

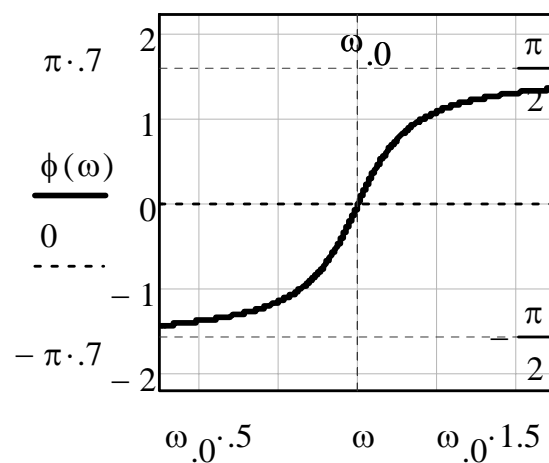


Рис. 3. Частотная зависимость разности фаз напряжения источника и тока в цепи для последовательного колебательного контура. Штриховые линии соответствуют значениям фазы  $\pm \pi/2$ . Диапазон изменения частоты  $0.5 \cdot \omega_0 < \omega < 1.5 \cdot \omega_0$ .

В низкочастотной части амплитуда тока определяется емкостью, и фаза тока опережает напряжение на четверть периода. В точке резонанса емкостные и индуктивные вклады в импеданс сравниваются и взаимно вычитаются, при этом разность фаз между током и напряжением источника равна нулю. После прохождения точки резонанса в высокочастотной части зависимости постепенно нарастает индуктивный вклад, и фаза тока стремится к чисто индуктивному запаздыванию относительно напряжения на четверть периода колебаний. При этом диапазон частот, на котором происходит пере-

стройка от ёмкостного к индуктивному типу поведения фазы, соответствует ширине резонансной кривой на рис. 2 (б).

### 3. Параллельный колебательный контур

Схема параллельного колебательного контура приведена на рис. 4. В данном случае вынужденные колебания в контуре создаются за счет источника тока подключенного параллельно к колебательному контуру. Особенностью идеального источника тока является то, что он питает цепь током фиксированной амплитуды независимо от величины нагрузки, т.е. импеданса или сопротивления подсоединённой к нему цепи. При параллельном соединении элементов цепи складываются токи в разветвляющихся участках цепи, а не падения напряжения, как в случае последовательного соединения. Падение напряжения одинаково на всех элементах, соединённых параллельно, аналогично тому, как это было с током, одинаковым во всей последовательной цепи

$$I_R = \frac{U}{R} = U \cdot g, \quad I_C = C \cdot \frac{dU}{dt}, \quad I_L = \frac{1}{L} \int U(t) dt.$$

Нетрудно видеть, что уравнения эти точно повторяют уравнения для последовательного резонанса, если в последних заменить ток на напряжение, сопротивление  $R$  на проводимость  $g = 1/R$ , а ёмкость на индуктивность. Первый закон Кирхгофа для токов в параллельном контуре имеет вид:

$$I_g = I_R + I_L + I_C,$$

а векторная диаграмма токов изображена на рис. 4. Ток на конденсаторе опережает ток источника на  $\pi/2$ , а ток на индуктивности на столько же запаздывает относительно тока источника.

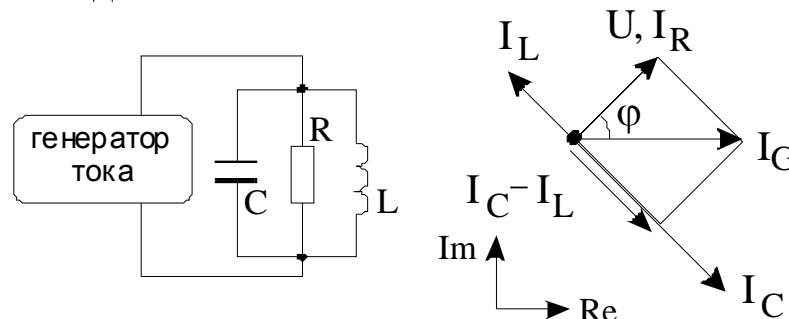


Рис. 4. Параллельный колебательный контур и векторная диаграмма токов в нем

Характерные функции для токов в параллельном контуре могут быть получены аналогично таким функциям для последовательного контура. Амплитудно-частотная функция, выглядит совершенно аналогично соответствующей функции для последовательного колебательного контура

$$I_R = I_0 \frac{\frac{\omega_0}{Q_p} \cdot \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q_p}\right)^2}}.$$

Как и в случае последовательного контура, АЧХ образует острый пик на резонансной частоте, но, если в последовательном контуре наблюдается резонанс напряжений, то в параллельном контуре возникает резонанс токов. При этом добротность и острота резонансного пика в первом случае увеличиваются с уменьшением сопротивления, а во втором случае это происходит при увеличении сопротивления. Физически это понятно, поскольку сопротивление  $R$ , моделирует в последовательном контуре потери на элементах самого контура, и полное отсутствие потерь соответствует  $R = 0$ . Обозначенное той же буквой сопротивление в параллельном контуре моделирует потери, вызванные внешней по отношению контура цепью, и в этом случае при отсутствии потерь  $R \rightarrow \infty$ .

#### 4. Указания по выполнению экспериментального задания.

1. Изложенная выше теория колебательного контура имеет дело с идеализированными моделями физических процессов. При применении теории к эксперименту ограничения реальной аппаратуры часто требуют внесения дополнительных корректив в описание процессов. В нашем случае, генераторы переменного тока, используемые в работе, не являются идеальными источниками тока или напряжения из-за того, что обладают конечным собственным внутренним сопротивлением. Внутреннее сопротивление идеального источника напряжения равно нулю, а у идеального источника тока оно равно бесконечности. Внутреннее сопротивление используемого в работе генератора составляет 50 Ом и является сравнимым или

малым по отношению к характерным активным и реактивным сопротивлениям.

По этой причине удобнее так модифицировать схему включения реального генератора, чтобы получить эквивалентный генератор тока или напряжения со свойствами близкими к идеальному элементу. Практическая реализация генератора напряжения показана на рис. 5. Если  $R_G \ll R_1$ , то получившийся эквивалентный генератор обладает маленьким собственным сопротивлением  $R_G$ . При этом реальный генератор работает на достаточно большую нагрузку  $R_G + R_1$ , которая при большом значении  $R_1$  не оказывает воздействие на остальную часть схемы.

Для практической реализации генератора тока необходимо дополнить генератор дополнительным сопротивлением как показано на рис. 5, справа. Комбинация сопротивления и генератора представляет собой эквивалентный источник тока. Если сопротивление нагрузки много меньше, чем  $R_G$ , то ток в цепи практически постоянен и равен  $U_0/R_G$ .

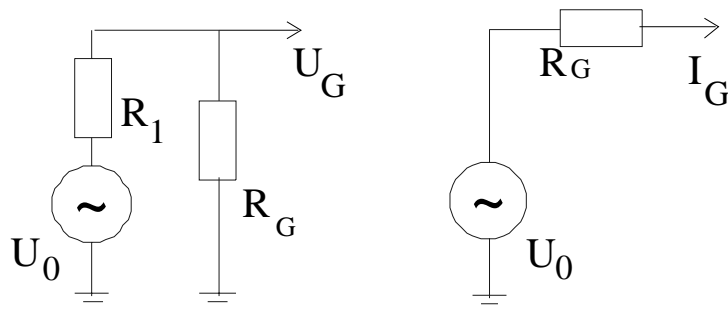


Рис. 5. Эквивалентный генератор напряжения (слева) и тока (справа)

2. Практическая схема регистрации одновременно входного и выходного сигнала для случая съема сигнала с сопротивления показана на рис. 7. Заземление одной из клемм выхода генератора и входов осциллографа не позволяет без переборки схемы проводить съём сигналов с каждого из элементов схемы. Рисунок слева позволяет снять зависимость напряжения на сопротивлении  $U_R$  от напряжения на эквивалентном генераторе напряжения  $U_G$ . Схема справа предназначена для измерения зависимости напряжения на

индуктивности  $U_L$  от частоты. Схему для  $U_C$  предлагается реализовать самостоятельно.

3. Для измерения амплитудно-частотной характеристики предлагается один из двух методов изложенных ниже.

3.1 Изменяя частоту генератора в ручном режиме осциллографом измеряется амплитуда тока и напряжения. Метод не много утомительный, но простой и надежный.

3.2 Используется свойство современных генераторов синусоидальных генераторов менять частоту сигнала (“сweep” частоту) либо самостоятельно, либо под действием внешнего управляющего сигнала. В этом случае возможно снятие амплитудно-частотной характеристики в полуавтоматическом режиме. Для этого на соответствующий вход генератора подаётся пилообразное напряжение низкой частоты (0.1-1 Гц). Это напряжение, одновременно с измеряемым сигналом  $U_G$  и сигналом от генератора подается на каналы осциллографа. В установках осциллографа удобно выбрать «экран»-type:dots, «набор данных» -peak detection для регистрации только амплитуды гармонического сигнала в виде его огибающей. Следует отметить, что цифровой осциллограф записывает сигнал не непрерывно, а в отдельных точках сигнала с частотой дискретизации, определяемой как  $f=N_s/T$ . Здесь  $N_s$  – общее число точек, регистрируемых для каждого луча, а  $T$  – длительность развёртки в секундах. Для используемых осциллографов  $N_s=25000$  и может оказаться, что  $f \ll \omega_0/2\pi$ . Это означает, что в режиме «peak detection» будут регистрироваться не все максимумы гармонического сигнала, а приблизительно каждый  $n$ -ый, где  $n = \omega_0/2\pi f$ . При медленном изменении частоты по сравнению с  $\omega_0$  это никак не скажется на результате измерений. Экран осциллографа с данными, полученными таким способом, показан на рис. 6. Пилообразный сигнал, регистрируемый на первом канале, производит пропорциональное его амплитуде изменение частоты гармонического сигнала, а две симметричные кривые соответствуют огибающим высокочастотного гармонического сигнала, возбуждающего колебательный контур. Максимум огибающей достигается в момент, когда пилообразный

сигнал проходит через ноль, что возможно только при первоначальной настройке генератора на резонансную частоту контура. Зная из технических характеристик генератора зависимость смещения частоты гармонического сигнала от амплитуды, можно пересчитать временную шкалу в частотную и таким образом получить экспериментальную частотную характеристику колебательного контура.

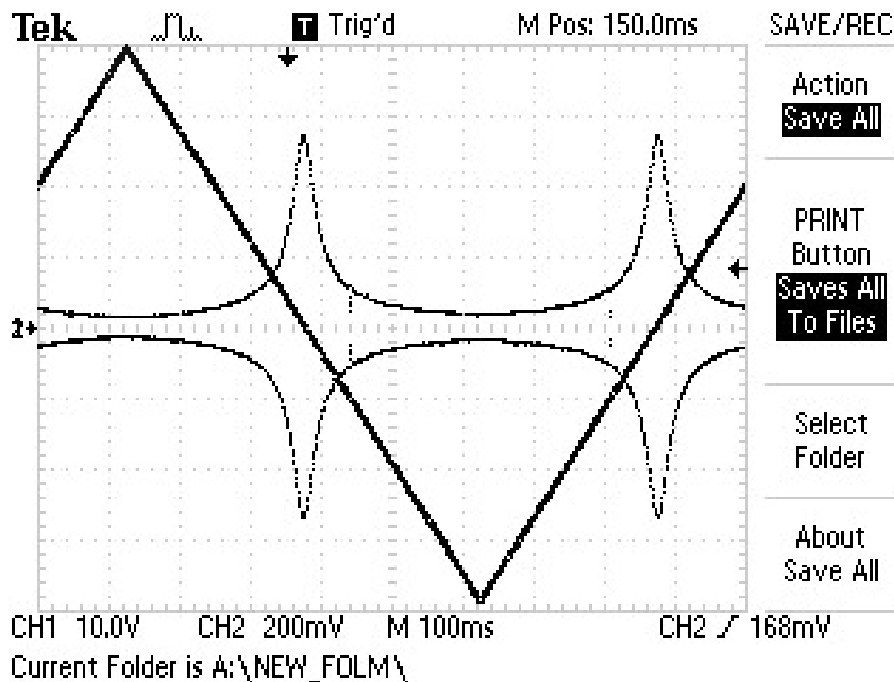


Рис. 6. Пример первоначальных данных по измерению частотных характеристик с помощью сканирования частоты гармонического напряжения пилообразным внешним сигналом.

4. Для измерения относительного фазового сдвига двух синусоидальных сигналов кроме метода фигур Лиссажу можно использовать также метод прямого измерения разности времени перехода через ноль двух гармонических сигналов. Измерив с помощью курсора это время  $\Delta t$ , разность фаз определяется как  $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T}$ , где  $T$  - период колебаний.

## 5. Контрольные вопросы

1. Чем отличаются последовательный и параллельный резонансные колебательные контуры? Почему нельзя раскачать последовательный колебательный контур генератором тока?

2. Какие значения сопротивлений  $R$  требуются, чтобы параллельный или последовательный контуры перестали быть колебательными?

3. Как колебательный контур можно использовать для спектральной фильтрации сигналов?

4. Как в последовательном колебательном контуре измерить сдвиг фаз между током и напряжением для индуктивности или для емкости?

## 6. Экспериментальные задания

1. Снять частотные зависимости напряжений на сопротивлении, емкости и индуктивности для последовательного контура (см. рис. 7). Снять частотную зависимость напряжения на сопротивлении, емкости и индуктивности от частоты для параллельного колебательного контура. Сравнить результаты измерений с теорией. Построить резонансные кривые по соответствующим формулам и наложить экспериментальные данные. Если наблюдаются различия, попытаться их объяснить.

2. Измерить зависимость фазы напряжений на  $L$ ,  $R$  и  $C$  относительно возбуждающего контур напряжения от частоты, построить график, сравнить результат с теорией.

3. Снять частотные зависимости напряжений на параллельном колебательном контуре от частоты (см. рис. 8).

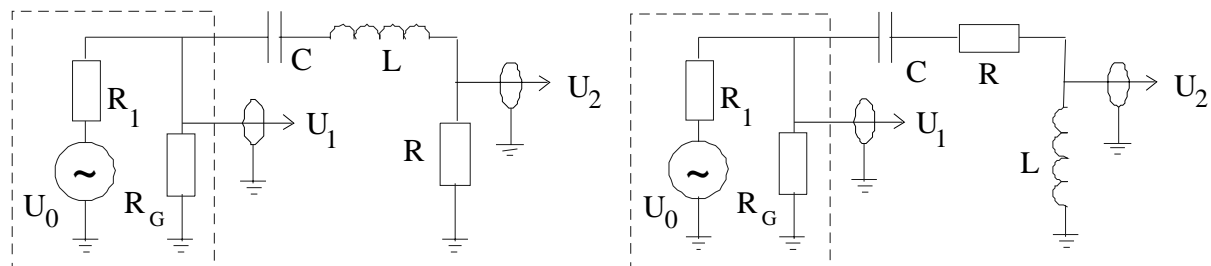


Рис. 7. Схемы для регистрации частотных зависимостей напряжения на сопротивлении, и индуктивности для последовательного



контура. Пунктиром показаны эквивалентные источники напряжения:  $R_G \ll R \ll R_1$ .

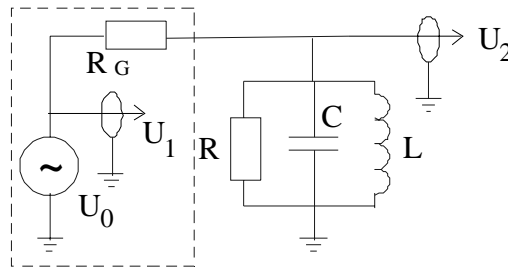


Рис. 8. Схемы для регистрации частотных зависимостей тока на сопротивлении от частоты для параллельного колебательного контура. Пунктиром показан эквивалентный источник тока:  $R_G \gg R$ .

## 7. Библиографический список

1. Часть I, разделы 1.1-1.5, 2.1-2.4, 3.4–3.7 настоящего сборника.
2. К.С. Демирчан, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин, Теоретические основы электротехники, СПб, Питер, 2003.
3. А.А. Евсюков, Электротехника, М., Просвещение, 1979.
4. Ю.М. Борисов, Д.Н. Липатов, Ю.Н. Зорин, Электротехника, М., Энергоатомиздат, 1985.
5. Г.С. Горелик, Колебания и волны, М., Физматгиз, 1959.
6. Л.И. Мандельштам, Лекции по теории колебаний, М., Наука, 1973.
7. Физическая энциклопедия, Ред. А.М. Прохоров, М., Советская энциклопедия, 1988-1998.

## Лабораторная работа 4.3. Пояс Роговского

Цель работы: экспериментальное исследование характеристик импульсного тока с помощью пояса Роговского. Определение и расчет параметров поясов Роговского; нахождение условий восстановления формы импульсного тока.

### 1. Принцип действия пояса Роговского

В экспериментальной практике существует необходимость измерения характеристик импульсных токов. В некоторых случаях прямое включение измерительных приборов в электрическую цепь невозможно. Например, в высоковольтных цепях, при быстрых разрядах в газе или если ток образован пучком заряженных частиц в ус-

корителе. Для того чтобы найти метод бесконтактного измерения параметров импульсного тока, достаточно заметить, что при движении зарядов в окружающем пространстве возникает переменное электромагнитное поле. Регистрируя вторичные эффекты от наведенного поля, можно получить измеряемые данные о параметрах импульса.

Для получения информации о величине и форме импульсного тока по наведенному переменному магнитному полю применяется пояс Роговского. В нашем случае он представляет собой длинный замкнутый соленоид с равномерной намоткой витков. Этот соленоид размещается так, чтобы охватывать измеряемый ток  $I_1(t)$  (см. рис.1).

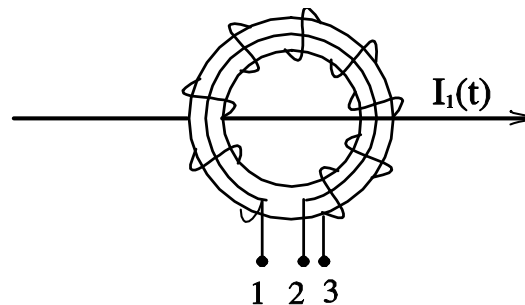


Рис.1. Схема пояса Роговского, 1 и 3 – обмотка соленоида, 1 и 2 – обратный виток

Можно заметить, что пояс представляет собой так же просто импульсный трансформатор, где первичной обмоткой является проводник с исследуемым током  $I_1(t)$ , а вторичной - пояс Роговского. Известно, что трансформатор хорошо передает форму сигнала (в пределах своего рабочего диапазона), если в первичной обмотке течет синусоидальный ток. В случае импульсного тока произвольной формы  $I_1(t)$  задача усложняется и информация о форме импульса во вторичной обмотке может быть утеряна. Форма и величина выходного сигнала с пояса Роговского зависит от временных параметров исследуемого импульса, конструкции пояса и характеристик подключаемой нагрузки. И только в некоторых случаях при определенных соотношениях между параметрами импульсного тока  $I_1(t)$  и пояса Роговского можно по сигналу, снимаемому с пояса, восстановить форму  $I_1(t)$  с помощью достаточно простых методов.

Принцип действия пояса Роговского заключается в следующем. Вокруг переменного тока  $I_1(t)$  создается переменное магнитное поле и создает э.д.с. индукции  $E(t)$  в соленоиде (рис. 1) с коэффициентом взаимной индукции  $M$  [2, с. 281].

$$\varepsilon(t) = -M \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} \quad (\text{СИ}), \quad \varepsilon(t) = -M \frac{1}{c^2} \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} \quad (\text{СГС}) \quad (1)$$

где  $M$  – коэффициент взаимной индукции. Индуктивность соленоида  $L = N \cdot M$ , где  $N$  – число витков [2. П. 51].

Здесь и далее будет использоваться в качестве основной система. При расчетах по формулам в этой системе окончательные численные результаты сразу получаются в практических единицах – вольтах, амперах и пр. [2, с. 370]. Для основных формул приведен также их вид в гауссовой системе единиц. Сопоставление всех формул электродинамики для этих двух систем приведено в [2, с. 668]).

Э.д.с. наводимую на контуре  $\varepsilon(t)$  можно легко измерить измерительным прибором. Например, если подключить к поясу осциллограф, то на экране будет наблюдаться производная тока. Для получения информации об исследуемом токе  $I_1(t)$  требуется найти метод восстановления  $I_1(t)$  по измеряемой величине  $\varepsilon(t)$ , или другими словами - проинтегрировать  $dI_0(t)/dt$ . Для этой цели предложено два способа подключения пояса к измерительной цепи. В одном из них пояс работает в режиме интегрирования тока на собственной индуктивности, во втором – в режиме интегрирования тока на внешней емкости. Рассмотрим их подробнее.

## 2. Режим интегрирования тока на собственной индуктивности

Подключим к поясу активное нагрузочное сопротивление  $R_n$  с которого будем снимать напряжение, возникающее при протекании тока по цепи соленоид - нагрузочное сопротивление  $R_n$ . Рассмотрим эквивалентную электрическую схему пояса для такой цепи, изображенную на рис.2. Здесь  $L$  – индуктивность пояса,  $C_0$  – его собственная емкость,  $r$  – активное сопротивление пояса,  $\varepsilon(t)$  – на-

веденная э.д.с. индукции в поясе,  $R_H$  – активное внешнее нагрузочное сопротивление.

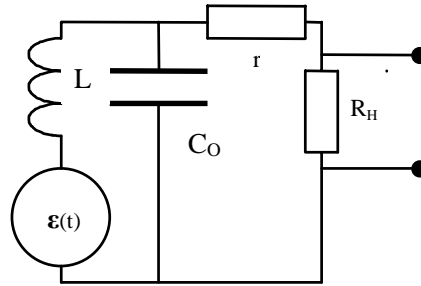


Рис. 2. Схема измерения тока с интегрированием на собственной индуктивности

Конструктивно изготовим пояс так, чтобы он обладал малой емкостью. Оценка малости для емкости в схеме на рис. 2 фактически означает, что емкостное сопротивление  $C_0$  на характерных частотах  $\omega$  сигнала  $I_1(t)$  настолько велико, что оно не шунтирует сигнал на  $R_H$  ( $C_0$  параллельна  $R_H$ ) и слабо влияет на амплитуду снимаемого с  $R_H$  сигнала т.е.

$$R_H + r \ll \frac{1}{\omega C_0}, \quad (2)$$

В этом случае при рассмотрении электрической цепи емкостью  $C_0$  можно пренебречь. Отметим, что параметр малости для  $C_0$  корректно вводить только вместе с частотой сигнала  $\omega$ . Тогда, по закону Кирхгофа для такой цепи, можем написать

$$\varepsilon(t) = L \frac{dI_2}{dt} + (R_H + r)I_2 = -M \frac{dI_1}{dt}, \quad (3)$$

где  $I_2$  – ток в цепи пояса,  $I_1$  – исследуемый импульс тока.

Общее решение уравнения (3), как показывается в курсе дифференциальных уравнений, есть

$$I_2(t) = \frac{1}{L} e^{-t/\tau} \int_0^t e^{-\xi/\tau} \varepsilon(\xi) d\xi, \quad (4)$$

где  $\tau = L/(R_H + r)$  – характерная постоянная времени интегрирования  $LR$  цепочки (см. ч. I, раздел 3.1),  $\xi$  – переменная интегрирова-

ния. На этом этапе нет простого соответствия между  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$ , т.е. условие малости емкости пояса еще не приводит к желаемому результату. Продолжим поиск дополнительных условий, при которых измеряемый сигнал на  $R_H$  был бы пропорционален  $I_1(t)$ .

Пусть длительность импульса тока (характерное время изменения тока)  $\tau_H$  мала по сравнению с  $\tau = L/(R_H + r)$  – собственным временем интегрирования пояса с нагрузкой  $R_H$ . Полагая для оценок, (как и в формуле (2)),  $\tau_H \approx 1/\omega$  можно записать это в виде неравенства

$$R_H + r \ll \omega L I_g = I_R + I_L + I_C, \quad (5)$$

Фактически это случай малой активной нагрузки по сравнению с индуктивной. Тогда членом  $(R_H + r)I_2$  в уравнении (3) можем пренебречь и это уравнение непосредственно интегрируется

$$I_2(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\xi/\tau} \varepsilon(\xi) d\xi = -M I_2(t), \quad (6)$$

или

$$I_2(t) = I_1(t)/N, \text{ при } \tau_H \ll \tau = L/(R_H + r) \quad (7)$$

Такой режим работы пояса называют так же режимом трансформации тока. Коэффициент трансформации тока  $K_i = I_2/I_1 = 1/N$  оказывается таким же, как и для трансформатора с обмотками в 1 и  $1/N$  витков [3, с. 136]. Напряжение  $U_{\text{блх}}$  на нагрузке пояса при этом

$$U_{\text{блх}} = R_H \cdot I_1(t)/N, \quad (8)$$

Напряжение на  $R_H$  прямо пропорционально  $I_1(t)$ , чего и требовалось достичь.

Дополнительно можно подчеркнуть, что конкретный пояс Роговского с параметрами  $C_0$  и  $L$  способен правильно регистрировать импульсы тока в некотором диапазоне характерных времен изменения импульса исследуемого тока. Можно сформулировать иначе – для импульсов  $\tau_H$  следует подобрать пояс с определенными  $C_0$  и  $L$ . Для оценки эти условия можно выписать, учитывая (2) и (5), в виде неравенства

$$(R_H + r)C_0 \ll \tau_H \ll L/(R_H + r), \quad (9)$$

Наличие малой активной нагрузки  $R_H$  обуславливает относительно низкую чувствительность  $U_{\text{вых}}/I_1(t)$  этой схемы. С другой стороны, требование малости  $R_H$  и  $C_0$  обуславливает максимально широкий частотный диапазон измерений для данного пояса. Основную погрешность в измерении формы импульса  $I_1(t)$  дает конечная величина постоянной времени  $\tau$  пояса. Емкостью  $C_0$  в уравнениях пренебречь легко, однако на практике нельзя изготовить пояс без емкости. Взглянув на схему, можно увидеть, что индуктивность пояса  $L$  и емкость  $C_0$  образуют колебательный  $LC_0$  контур с затуханием на собственном сопротивлении провода обмотки пояса (см. **ч. I, раздел 3.4**). Поэтому при регистрации самых коротких импульсов на фоне сигнала пропорционального  $I_1(t)$ , могут наблюдаться собственные затухающие колебания  $LC_0$  контура и картина, наблюдаемая на осциллографе, будет сложнее, чем описываемая уравнением (8). Этот случай наблюдается на поясах в данной лабораторной работе.

Если в качестве нагрузки включить большое сопротивление ( $R_H \gg L\omega$ ), то в этом случае пояс Роговского можно использовать для измерений в режиме интегрирования тока на внешней емкости.

### 3. Режим интегрирования тока на внешней емкости.

Схема включения пояса в этом режиме изображена на рис. 3. К обмоткам пояса в качестве нагрузки подключается интегрирующая  $R_H C_H$  цепочка, которая интегрирует ток  $I_2(t)$  (**см. ч. I, раздел 3.1**).

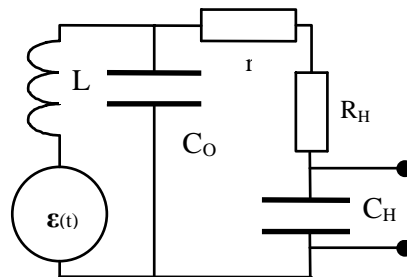


Рис. 3. Схема измерения тока с интегрированием на внешней емкости

Здесь  $L$  – индуктивность пояса,  $C_0$  – его собственная емкость,  $r$  – активное сопротивление пояса,  $\varepsilon(t)$  – наведенная э.д.с. индукции в поясе,  $R_H$  – активное внешнее нагрузочное сопротивление,  $C_H$  – внешняя нагрузочная емкость.

Для восстановления формы исходного тока  $I_1(t)$  измеряемый сигнал снимается с емкости  $C_H$ . Рассмотрим подробнее работу пояса в данной схеме. Индуктивность пояса вместе с элементами интегрирующей цепочки представляет собой колебательный контур с затуханием, последовательно с которым включена внешняя э.д.с.  $\varepsilon(t)$ . Собственной емкостью пояса  $C_0$  пренебрегаем. Аналогично (3) можем записать уравнение для замкнутой цепи

$$\varepsilon(t) = L \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_H} \int I_2 dt + (R_H + r)I_2 = -M \frac{dI_1(t)}{dt}, \quad (10)$$

где  $I_2$  – ток в цепи пояса,  $I_1$  – исследуемый импульс тока.

Подберем параметры интегрирующей цепочки так, чтобы при протекании тока  $I_2(t)$  с характерным временем  $\tau_H$  по цепи пояса основное падение напряжения падало на активном сопротивлении  $R_H + r$  пояса. Это соответствует требованию малости величины индуктивного импеданса пояса  $\omega L \ll R_H + r$  и емкостного сопротивления  $1/(\omega C_H) \ll R_H + r$  ( $\omega \approx 1/\tau_H$ ) на характерных частотах исследуемого импульса тока. Одновременно это также требование малости  $\tau_H$  по сравнению с временем  $\tau$  интегрирования  $R_H C_H$  цепочки  $\tau = (R_H + r)C_H$ . При таких условиях уравнение (10) преобразуется в

$$\varepsilon(t) = (R_H + r)I_2(t) = -M dI_1(t)/dt, \quad (11)$$

из которого находим зависимость  $I_1(t)$  от  $I_2(t)$

$$I_1(t) = -\frac{R_H + r}{M} \int I_2(t) dt, \quad (12)$$

Рассмотрим напряжение  $U_H$  на емкости  $C_H$  с выхода интегрирующей цепочки, смысл использования которой и состоял в том, чтобы проинтегрировать  $\varepsilon(t)$  и получить в явном виде  $I_1(t)$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I_2(t) dt, \quad (13)$$

Сравнивая (12) и (13) получаем

$$I_1(t) = -\frac{(R_H + r)C}{M} U_C(t) = -\frac{(R_H + r)C}{M} N \cdot U_C(t), \quad (14)$$

Итак, получена явная и прямая зависимость измеряемого сигнала с пояса от формы исследуемого импульсного тока, что и являлось конечной целью. Зная параметры пояса и интегрирующей цепочки  $R_H$ ,  $r$ ,  $C_H$ ,  $L$ ,  $N$  можно по напряжению на конденсаторе определить амплитуду  $I_0(t)$ . Условия работы пояса в этом режиме можно оценить, аналогично (9), следующим неравенством

$$L/(R_H + r) \ll \tau_H \ll (R_H + r)C_0. \quad (15)$$

#### 4. Особенности работы пояса Роговского

Величина напряжения на выходе пояса (8) или интегрирующей цепочки (13) не зависит от положения проводника с током или пучка частиц внутри пояса. Достаточно, чтобы пояс охватывал измеряемый ток. Это утверждение справедливо для достаточно медленного изменения импульса тока во времени. Если импульс достаточно короткий и ось пояса не совпадает с проводником с током, то, вследствие конечной скорости распространения электромагнитной волны, разные участки пояса будут взаимодействовать с ней в разные моменты времени. Это приведет к искажению формы сигнала.

Вследствие конечного времени распространения сигнала вдоль пояса значение э.д.с. индукции связана со значением  $dI_1/dt$  не только в данный момент времени, но и в некотором промежутке, равном времени распространения сигнала вдоль пояса. Если длительность измеряемого импульса сравнима с временем распространения, то будут наблюдаться искажения формы импульса.

Для регистрации импульсов большой длительности в режиме интегрирования тока на собственной индуктивности можно увеличивать величину индуктивности пояса. Это достигается увеличением площади сечения обмотки, числа витков и (там, где это возможно) применением сердечника с большой магнитной проницаемо-



стью. Так, один из поясов в лабораторной работе намотан на ферромагнитном кольце.

Пояс можно намотать на длинный гибкий ремень и «опоясать» им часть установки (просматривается происхождения термина «пояс»).

При измерении пояс не обязательно должен представлять собой замкнутый соленоид. Принцип работы пояса при этом не меняется, но количественные данные, снимаемые с выходной нагрузки, требуют дополнительной калибровки.

Используемые электриками «токоизмерительные клещи» представляют собой откалиброванный для промышленной сети пояс Роговского.

Пояс с соединенными концами представляет из себя "виток" провода в плоскости тора. Если присутствует постороннее переменное магнитное поле, пронизывающее эту плоскость, то на концах пояса появится дополнительная неконтролируемая э.д.с.. Кроме того, импульсный ток, проходящий по соленоиду, наводит в нем дополнительную э.д.с. самоиндукции. Учесть эти дополнительные неконтролируемые эффекты довольно трудно. Зато существует способ их исключить. Для этого достаточно от одного конца соленоида пропустить внутри соленоида обратный виток к другому концу и снимать сигнал с них (рис. 1). Этот обратный виток вызывает такую же по величине, но обратную по знаку э.д.с., как паразитную и самоиндукции. Таким образом неконтролируемые эффекты автоматически компенсируются.

Если длина пояса гораздо больше его поперечных размеров, то он представляет собой коаксиальную электрическую линию. Обмотка пояса играет роль внешнего проводника, а обратный виток – роль центральной жилы. В этом случае при регистрации коротких импульсов во избежании многократных отражений от концов пояса сопротивление нагрузки стараются согласовать с волновым сопротивлением линии (которое вычисляется как  $\sqrt{L/C}$ , где  $L$  и  $C$  – удельная индуктивность и емкость на единицу длины линии). Индуктивность и емкость пояса нельзя представлять в виде сосредоточенных параметров  $L$  и  $C_0$ , как это сделано на рис. 2 и 3, а следует рассматривать удельные величины на единицу длины пояса. При

правильном изготовлении пояса и согласованной нагрузке собственные колебания пояса могут быть сильно подавлены.

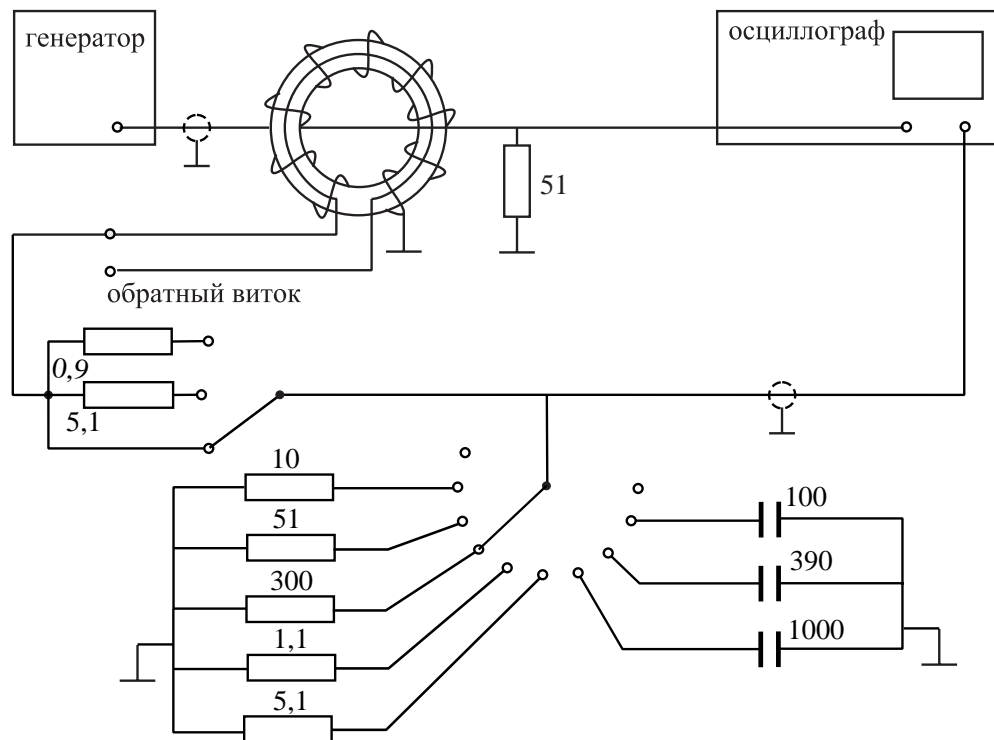


Рис. 4. Схема установки

## 5. Описание экспериментальной установки

Установка для измерения параметров импульсного тока с помощью пояса Роговского состоит из двух вариантов конструкции пояса Роговского, генератора прямоугольных импульсов, осциллографа и различных нагрузок, подсоединяемых к выходу пояса. Принципиальная электрическая схема установки приведена на рис. 4.

Для создания импульсов тока  $I_1(t)$  в данной работе обычно установлен генератор прямоугольных импульсов, выход которого согласован на нагрузку 50 Ом. От генератора на проводник, проходящий по оси двух поясов, подается прямоугольный импульс. Этот проводник нагружен на сопротивление 50 Ом, к которому подключается один из входов осциллографа для наблюдения за параметрами импульса генератора. Если в работе используется другой генератор, то нагрузку 50 Ом следует заменить на согласованную с генератором. К выходу пояса можно подключать различные варианты нагрузок для реализации работы пояса в режиме интегрирования

тока на собственной индуктивности или режиме интегрирования тока на внешней емкости. Сигнал с этой нагрузки подается на второй вход осциллографа, на котором наблюдается форма импульса с интегрирующих  $RL$  (8) или  $RC$  (14) цепочек. Собственное активное сопротивление проводов  $r$  в лабораторных поясах мало и им можно пренебречь в соответствующих формулах.

Конструктивные параметры поясов Роговского.

	1 пояс	2 пояс
Внутренний диаметр, мм	70	22
Внешний диаметр, мм	140	42
Ширина, мм	50	18
Число витков	220	100
Магнитная проницаемость	1	1000

## 6. Контрольные вопросы

1. Запишите уравнения 8, 13, 14 и 16 в системе СГС. Правила преобразования уравнений из одной системы в другую см., например, в [2].

2. Индуктивность тороидального соленоида с прямоугольным сечением (рис.1) вычисляется по формуле, которая приведена, например, в [2, с. 286]

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} N^2 b \ln \left( \frac{R+a}{a} \right), \quad (16)$$

где  $R$  – внутренний радиус,  $R+a$  – внешний радиус,  $b$  – ширина тора. Вычислите индуктивность поясов Роговского, используемых в лабораторной работе, в системе СИ и СГС. Необходимые для вычислений данные см. ниже в описании экспериментальной установки.

3. Выясните, чему равна входная емкость используемого в установке осциллографа.

4. Почему трансформатор хорошо передает форму тока, синусоидально изменяющегося во времени?

## 7. Экспериментальные задания

Прежде чем начинать измерения, прочитайте все пункты задания до конца, и лишь после этого приступайте к выполнению работы.

1. Включение установки «Пояс Роговского», предварительная настройка приборов.

Включить генератор SFG-2110. Выбрать форму выходного сигнала. Для этого нажать кнопку “wave”. На индикаторной панели будет высвечиваться форма сигнала: синус, меандр и треугольник. Выбрать меандр. Ручку амплитуды выходного сигнала AMPL установить на максимум.

Установит частоту выходного сигнала генератора. Набрать требуемое значение частоты (например 10). Выбрать значение единицы измерения (например kHz).

Выход генератора соединить с проводником, проходящим по оси пояса Роговского, в конце которого установить нагрузку 50 Ом. С выхода этого проводника подать сигнал на первый канал осциллографа. На второй канал подать сигнал с выхода первого пояса.

Включить осциллограф Tektronix TDS1012. Когда дисплей выйдет на рабочий режим, нажать кнопку AUTO SET. На дисплее появятся сигналы, поданные на вход 1 и 2. В нижней части есть индикация чувствительности вертикальной и горизонтальной разверток каналов. Для ознакомления с широкими возможностями цифрового осциллографа следует обратиться к его описанию.

Установить скважность выходного сигнала с генератора в режиме меандра. Нажать SHIFT и «7». Затем набрать число «20». Оно высветится на дисплее. Нажать кнопку Hz/%. Изменение скважности сигнала будет видно на осциллографе. При такой скважности рекомендуется выполнять работу.

Выполнить задания 2-4. Чтобы быстрее начать выполнять задания можно рекомендовать для наблюдения свободных колебаний первого пояса установить частоту повторения импульсов на генераторе 10 кГц, в режиме интегрирования тока на собственной индуктивности - 1 МГц, интегрирования тока на внешней емкости - 200 кГц. После выполнения пунктов 2-4 с первым поясом, подобрать частоту генератора для второго пояса самостоятельно.

2. Определение собственных параметров пояса: емкости, индуктивности и активного сопротивления.

При подаче по центральному проводнику прямоугольного импульса тока с достаточно короткими фронтами после каждого из

фронтов в поясе возникают свободные затухающие колебания с собственной частотой

$$L_0 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_0},$$

Подключив дополнительную емкость  $C_1$  известной величины параллельно выходу пояса и определив новую частоту  $f_1$  можно найти емкость  $C_{01}$ , используя соотношение

$$\frac{f_0^2}{f_1^2} = \frac{C_0 + C_1}{C_0},$$

Собственная индуктивность находится из

$$L_0 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_0},$$

По форме огибающей затухающих колебаний оценивается собственная постоянная затухания пояса  $\tau = 2L/r$  (см. работу 4.2) и сопротивление  $r$ .

Для нахождения собственных параметров пояса подключаем выход пояса через измерительный коаксиальный кабель к осциллографу. При таком подключении нагрузкой пояса является емкость кабеля и входная емкость осциллографа. Удельная емкость кабеля равна 100 пФ/м, входная емкость осциллографа указана на нем. Наблюдайте свободные затухающие колебания без и с дополнительно подключенными известными емкостями. Анализируя осциллограммы, определите собственные индуктивность, емкость, активное сопротивление и частоту для каждого пояса. Сравните полученное значение индуктивности с расчетной по формуле (16), а активное сопротивление - с измеренным при помощи цифрового тестера.

### 3. Режим интегрирования тока на собственной индуктивности.

В качестве нагрузки пояса подключите активное сопротивление (рис. 2). Меняя длительность импульса тока и величину сопротивления, рассмотрите получаемые осциллограммы. Объясните наблюдаемые картины, учитывая, что на нагрузочном сопротивлении возникает напряжение, обусловленное импульсом тока  $I_1(t)$  и собственными колебаниями пояса. Качественно зарисуйте в рабочей тет-

ради осциллограммы при минимальном, среднем и максимальном значении нагрузочного сопротивления и различных длительностях импульса. Для этих сопротивлений подберите такую длительность импульса, при которых форма импульса передается наилучшим образом. Качественно зарисуйте в тетрадь. Для такого импульса измерьте коэффициент передачи по току и сравните с расчетной величиной (7).

#### 4. Режим интегрирования тока на внешней емкости.

Используйте в качестве нагрузки пояса интегрирующую цепочку (рис. 3). Подберите параметры цепочки и длительность импульса при которых форма импульса передается наилучшим образом. Зарисуйте в рабочей тетради осциллограммы и запишите параметры интегрирующей цепочки. Для таких импульсов сравните величину наблюдаемого сигнала с расчетной в соответствии с формулой 14.

### 8. Библиографический список.

1. Часть I, разделы 1.1-1.3, 2.1-2.2, 2.4, 3.1, 3.4 настоящего сборника.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. М.: Наука, 1983. Т. 3. Электричество.
3. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1987. Ч. 1.
4. Князев Б. А., Костюрина А. Г. Лаборатория электричества и магнетизма. Введение в практикум. Новосибирск: НГУ, 2005.

## Лабораторная работа 4.4

### Методы цифрового спектрального анализа.

Цель работы: экспериментальное исследование особенностей регистрации данных с помощью цифровых устройств.

#### 1. Введение

Развитие электроники и вычислительной техники резко увеличило значение цифровых методов для обработки сигналов измерений. В отличие от аналогового способа, в этом случае используется предварительное преобразования сигнала в некоторое двоичное число. Затем полученная последовательность данных может быть проинтегрирована, продифференцирована, умножена на масштаби-

рующий множитель и т.д. Количество доступных операций для обработки сигнала становится практически неограниченным. Но цифровым устройствам свойственны некоторые особенности которые нужно учитывать при измерениях.

Спектральный анализ – это один из методов обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать сигнал как сумму гармонических составляющих. В 1807г. французский ученый Жан Батист Жозеф Фурье высказал предположение, что любую произвольную периодическую функцию  $x(t)$  с периодом  $T$  можно выразить в виде суммы

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

где значение коэффициентов определяется формулами

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Форма ряда представленная в () называется тригонометрической. Более часто используемая экспоненциальная форма (см. ) получается путем выражения тригонометрических функций через комплексную экспоненту

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{2\pi n t}{T}\right), \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-i \frac{2\pi n t}{T}\right) dt.$$

Сумма в этом представлении охватывает не только положительные, но и отрицательные значения  $n$ . Гармоники  $c_n$  в общем случае являются комплексными числами, поэтому для их представления. Как правило, используется два графика – один для модуля, а другой для аргумента комплексной функции.

Множество всех коэффициентов ряда Фурье  $c_n$  называется спектром функции  $x(t)$ . В частности,  $c_0$  является средним значением функции  $x(t)$ , а величина  $c_1$  называется комплексной величиной основной гармоники. Если функция  $x(t)$  является вещественной, тогда выполняется следующее тождество

$$c_n^* = c_{-n},$$

где  $*$  - операция комплексного сопряжения. Отсюда следует, что модуль спектра является четной функцией индекса  $n$ , а аргумент – нечетной. Таким образом, в случае вещественной функции  $x(t)$  достаточно знать только часть спектра, соответствующей положительным частотам.

## 2. Спектр прямоугольного импульса

Рассмотрим периодическую последовательность прямоугольных импульсов, которая изображена на рис. 1. Ряд Фурье для этой функции

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{\Delta}\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{6\pi t}{\Delta}\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{10\pi t}{\Delta}\right) + \dots \quad (1)$$

На рис. 2 показано как частичные суммы этого ряда сходятся к  $x(t)$ .

В комплексной форме гармоники имеют вид

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left( \exp\left(i \frac{2\pi t}{\Delta}\right) + \exp\left(-i \frac{2\pi t}{\Delta}\right) \right) - \\ - \frac{1}{3\pi} \left( \exp\left(i \frac{6\pi t}{\Delta}\right) + \exp\left(-i \frac{6\pi t}{\Delta}\right) \right) + \frac{1}{5\pi} \left( \exp\left(i \frac{10\pi t}{\Delta}\right) + \exp\left(-i \frac{10\pi t}{\Delta}\right) \right) \dots$$

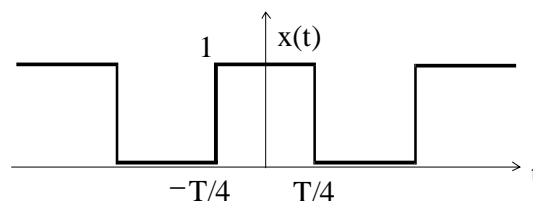


Рис. 1. Периодический прямоугольный сигнал

## 3. Дискретное преобразование Фурье

Метод дискретного преобразования Фурье применяется для спектрального анализа сигнала, представленного в виде ряда отсчетов. Например, такой ряд получается при измерении сигнала с помощью АЦП (аналого-цифрового преобразователя) через определенные промежутки времени.



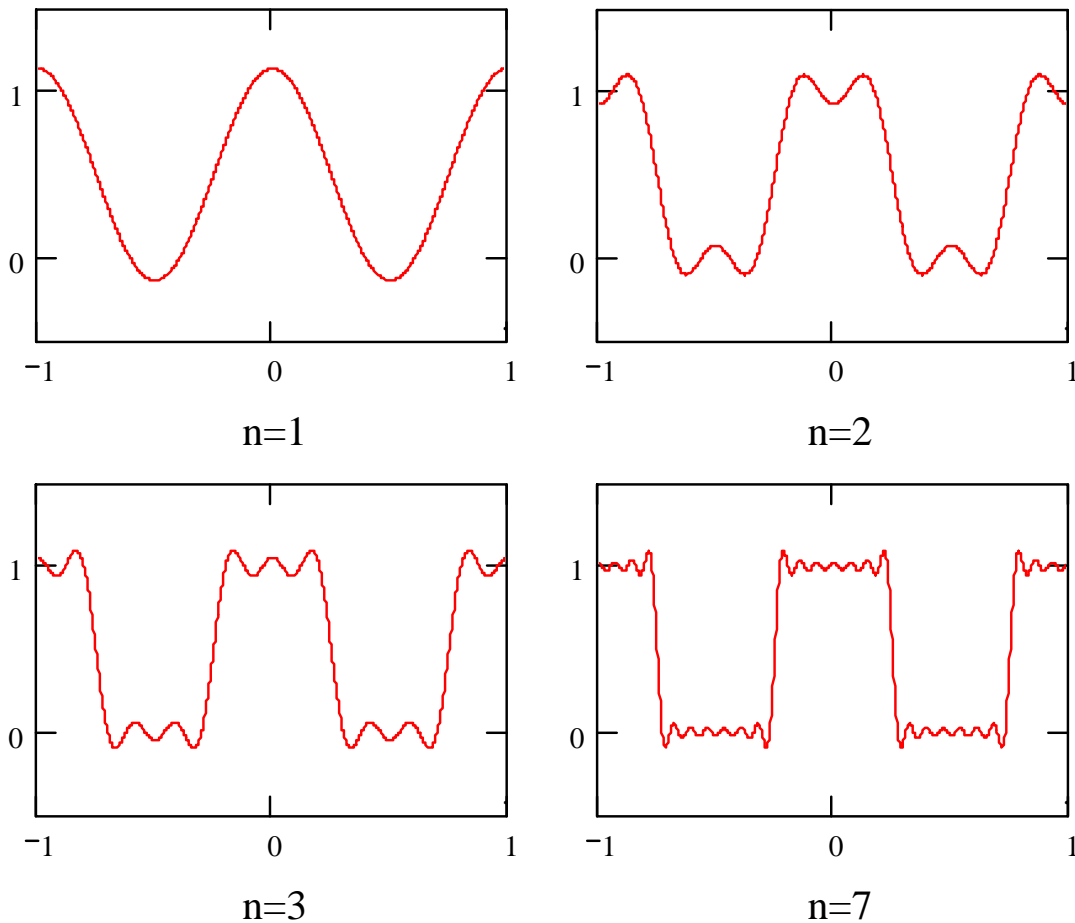


Рис.2. Частичные суммы ряда Фурье в случае прямоугольного сигнала.

Из теоремы Найквиста — Котельникова следует [2], что при дискретизации с частотой  $f_{switch}$  изначально непрерывного сигнала полезную информацию будут нести только частоты ниже частоты  $f_{max}$

$$f_{switch} = 2 \cdot f_{max}.$$

Эта частота носит название частоты Найквиста. Частоты выше частоты Найквиста будут проецироваться в область нижних частот. Если спектр сигнала не имеет составляющих выше частоты Найквиста, то только в этом случае он может быть оцифрован и затем восстановлен без искажений. Поэтому если в сигнале изначально присутствуют высокочастотные компоненты, то необходимо либо использование более высокочастотных АЦП, либо предварительная фильтрация сигнала с помощью аналогового фильтра (см. ч.I, п.4.4)

Другим важным параметром спектрального анализа является спектральное разрешение. Оно характеризует способность различать близкие по частоте сигналы и равно минимальной разнице частот колебаний, которую способен фиксировать прибор. В случае  $N$  измерений с временным шагом  $\tau$  спектральное разрешение равно

$$f_{\min} = \frac{1}{N \cdot \tau}.$$

Эта же величина равна шагу по частоте  $\Delta f = f_{\min}$  для спектра сигнала в случае дискретного преобразования Фурье.

#### 4. Фильтрация

Каждый обрабатываемый сигнал имеет конечную длительность. Ее разумеется можно менять и регулировать, но она обязательно остается конечной. Если мы анализируем сигнал  $x(t)$  на конечном промежутке  $T$ , то это означает, что он может быть представлен в виде

$$x(t) = x_1(t) \cdot f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

где  $x_1(t)$  есть непрерывная функция определенная на всем временном интервале. Прямоугольный вид функции  $f(t)$  называется естественным временным окном, но используют и другие формы  $f(t)$ . Она влияет на обнаружимость гармоник в присутствии других гармоник большой амплитуды и на спектральное разрешение. Роль этого эффекта продемонстрирована на рис. 3 и 4. Из бесконечного сигнала с фиксированной частотой и амплитудой вырезается конечный интервал с помощью треугольного или прямоугольного окна. На рис. 5 приведены соответствующие спектры сигналов. Видно, что несмотря на то, что исходный сигнал характеризуется одной гармоникой показанной на рис. 5 вертикальным отрезком, после ограничения сигнала на конечный интервал в его спектре появляются паразитные гармоники. Причина этого в том, дискретное преобразование Фурье требует периодичности ряда. Последняя точка временного ряда замыкается с его первой точкой. В результате реально обрабатываемый сигнал отличается от исходного. Использование правильно подобранной весовой функции окна  $f(t)$  позволя-

ет существенно уменьшить этот эффект, как это видно из примера с треугольным окном.

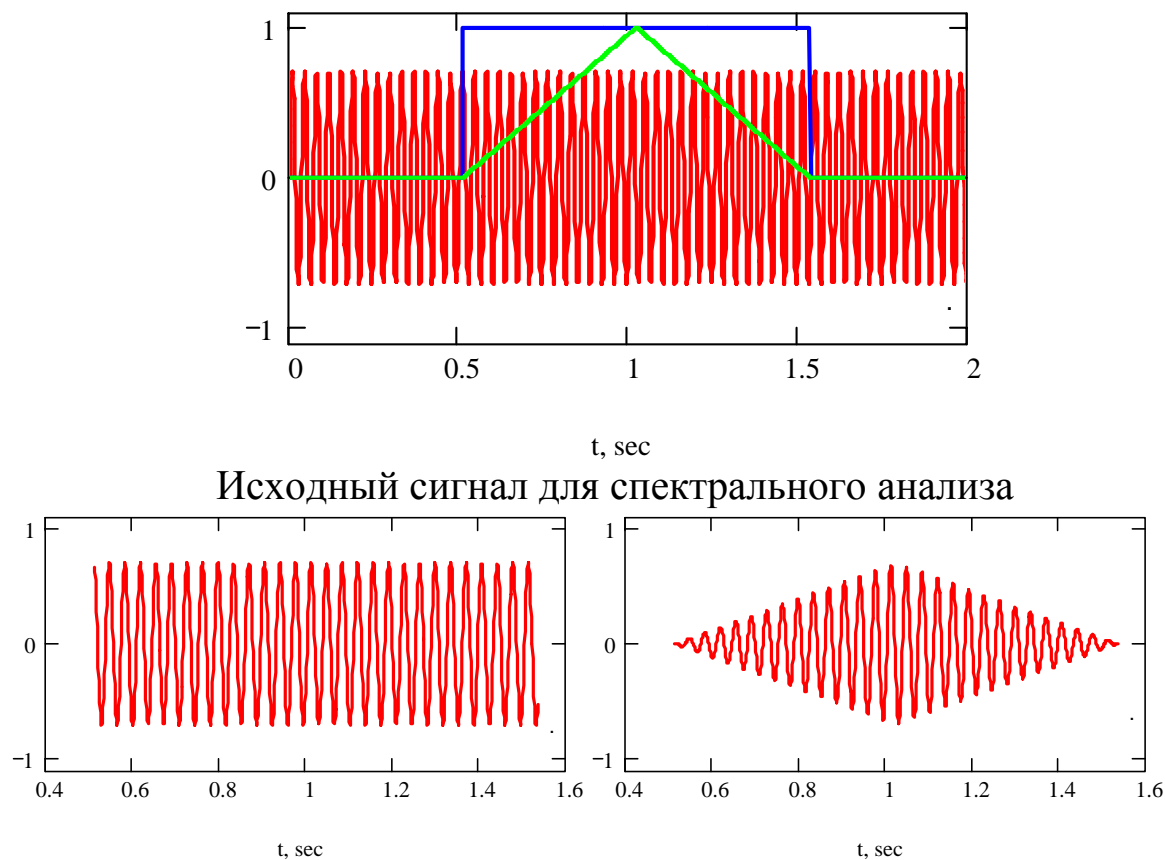


Рис.3. Исходный сигнал после умножения нас прямоугольное и треугольное окно

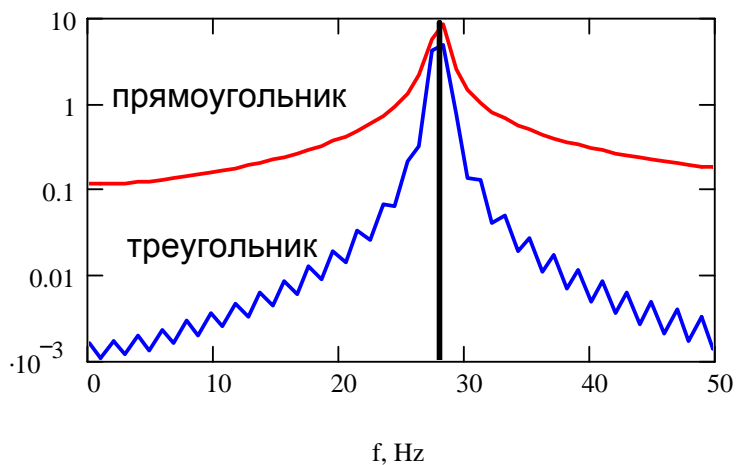


Рис.4. Спектр (модуль амплитуды) гармонического сигнала в случае использования различных окон

## 5. Задания

1. Установите на осциллографе развертку луча 2.5 мс. Оставляя развертку неизменной запишите синусоидальный сигнал с осциллографа для частот 50 Гц, 250 Гц, 1.5 кГц, 5.0 кГц, 20 кГц, 50 кГц, 300 кГц, 500 кГц. Сигнал необходимо записывать в текстовом виде. С помощью специализированных программ (MathCad, Matlab, Maple) постройте спектры полученных сигналов, объясните полученные графики. Определите минимальную и максимальную частоты регистрируемые данным осциллографом при выбранной развертке.

2. Установите генератор в режим генерации прямоугольных импульсов. Запишите сигнал в текстовом виде. С помощью специализированных программ (MathCad, Matlab, Maple) постройте спектры полученных сигналов, объясните полученные графики. Сравните полученные данные с уравнением 1, объясните наличие в спектре всех частот.

3. Воспользовавшись тем, что в спектре прямоугольного импульса содержатся все частоты оцените амплитудно-частотную характеристику фильтров низких частот, высоких частот и многозвенного (см. рис. 5 и 6). Для этого установите на генераторе сигналов режим прямоугольных сигналов с частотой примерно 50 Гц. Выберите развертку осциллографа 25 мс/дел. На **рис. 7** показан возможный вид экрана осциллографа в указанном режиме. Подавая прямоугольный сигнал на входы фильтров запишите одновременные осциллограммы для выходного и входного сигналов в текстовом виде. По полученным данным рассчитайте АЧХ фильтров. При этом учитывайте, что из рассмотрения нужно исключить гармоники с малой амплитудой, так как полученные с их использованием данные содержат большую погрешность. При обработке результатов рекомендуется использовать треугольное окно. Пример обработки на программе MathCad показан на рис. 8.

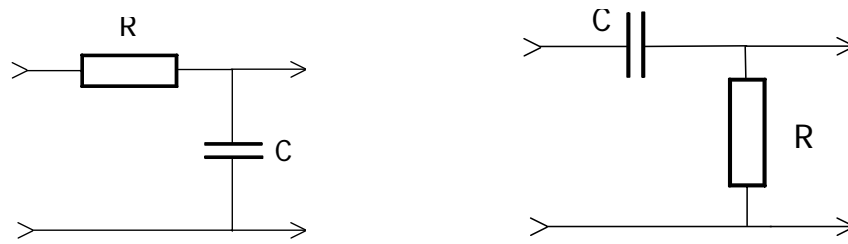


Рис. 5. Фильтр низких (слева) и высоких частот (справа)

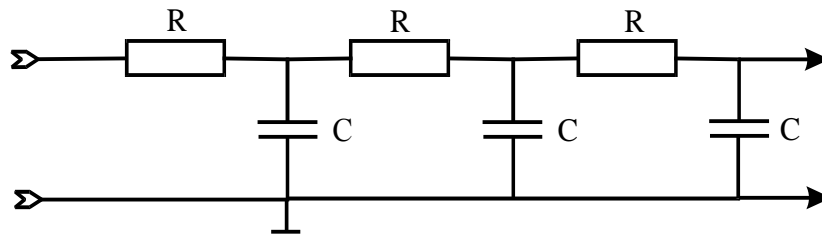


Рис. 6. Многозвенный фильтр низких частот

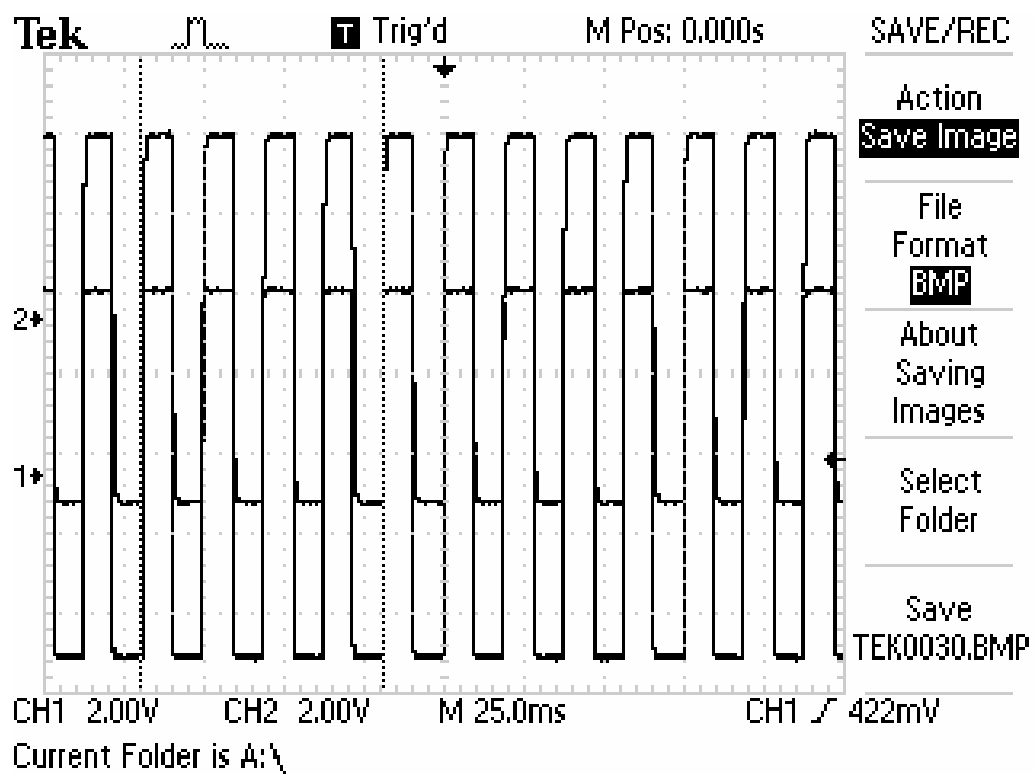
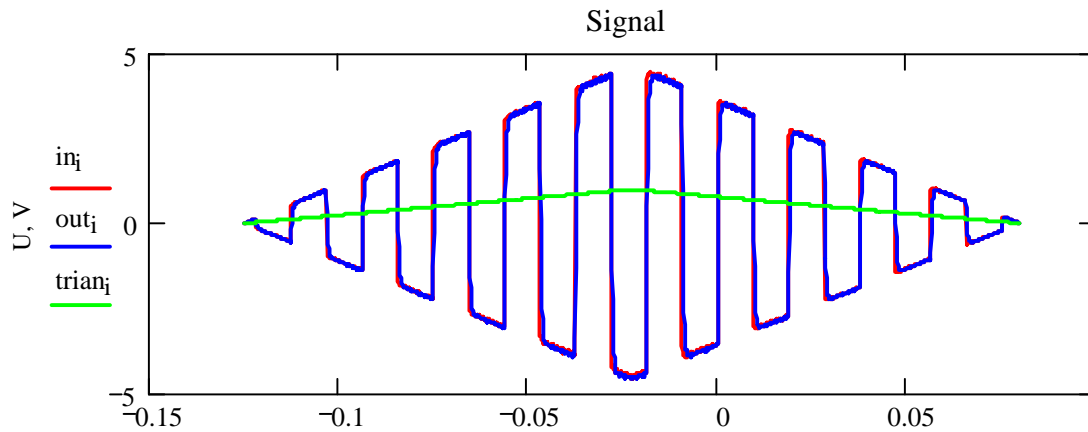


Рис. 7. Прохождение прямоугольного импульса через фильтр высоких частот

```

U1 := READPRN("TEK0039.dat") U2 := READPRN("TEK0040.dat")
Np := rows(U1)    Np = 2.5 × 103    Δt := 1 · 10-4    Δf :=  $\frac{1}{Np \cdot \Delta t}$ 
Nmax := 2048    i := 0..Nmax - 1
triani := if  $\left( i < Nmax \cdot 0.5, \frac{i}{0.5 \cdot Nmax}, 2 - \frac{i \cdot 2}{Nmax} \right)$ 
ini := triani · U1i,1    outi := U2i,1 · triani

```



```

k := 0..0.5 · Nmax
U1i,0, U2i,0, U2i,0
inc := fft(in)    outc := fft(out)
ainck := |inck|    aoutck := |outck|

```

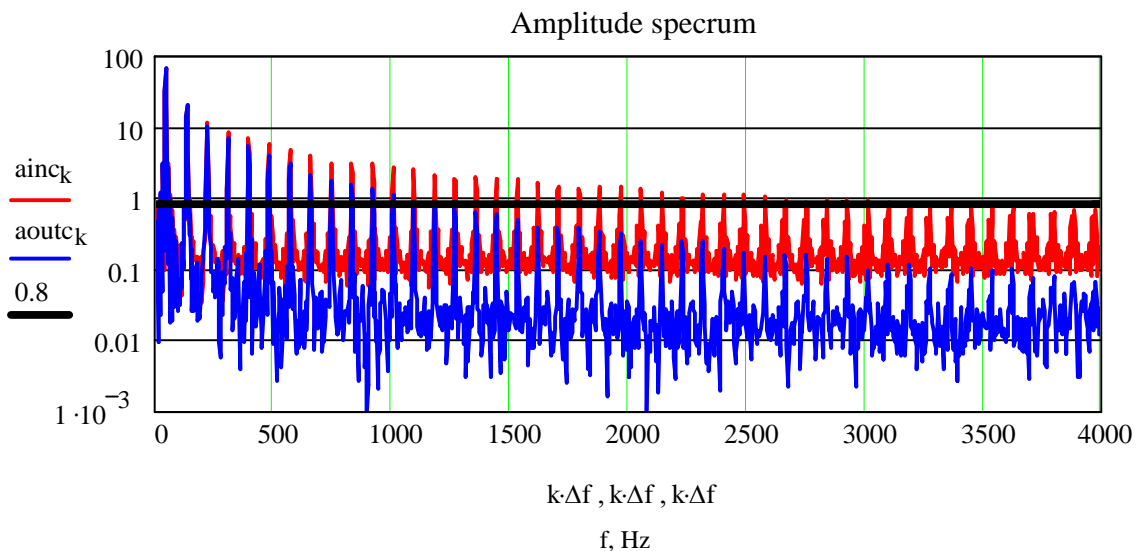


Рис. 8. Пример обработки результатов измерений на программе MathCad.

$$T_k := \text{if} \left( \text{ainq}_k < 0.8, 0, \frac{\text{aoutq}_k}{\text{ainq}_k} \right)$$

$$R := 1.1 \cdot 10^3 \quad C := 0.22 \cdot 10^{-6} \quad R \cdot C = 2.42 \times 10^{-4}$$

$$T_{\text{int}}(f) := \left| \frac{1}{1 + i \cdot R \cdot C \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \right|$$

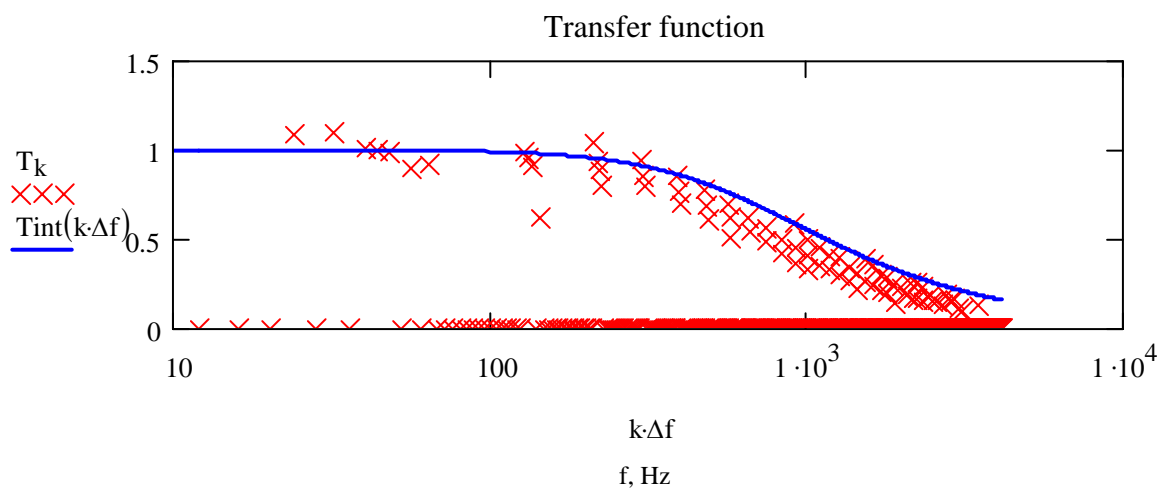


Рис.8. Пример обработки результатов измерений на программе MathCad, продолжение.

## 6. Библиографический список.

1. Часть I, разделы **3** и **5** настоящего сборника.
2. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1987. Ч. 1.
3. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.

## Лабораторная работа 4.5

### Колебательный контур как частотно-избирательная резонансная система.

Работа посвящена экспериментальному изучению практического применения колебательных контуров как резонансных систем. С общим теоретическим описанием процессов в контуре необходимо познакомиться в параграфе 3, п. п. 3.4...3.8 общего введения к сборнику. Ниже приведены лишь минимальные теоретические сведения, необходимые для практической работы.

#### 1. Резонансные колебательные системы

Колебательный контур является типичным представителем резонансных колебательных систем, играющих важную роль в большинстве разделов физики. Резонансные системы имеют три важных свойства:

- свойство *избирательно реагировать на внешние источники сигналов*, выделяя только те из них, частоты которых совпадают с *собственной* частотой колебательной системы;
- свойство *запасать энергию колебаний*, возбужденных внешним источником, поддерживая колебания в течение определенного времени после выключения внешнего источника;
- свойство *сохранять энергию в своей системе в виде циклического перехода одного ее вида в другой*, например, потенциальная  $\leftrightarrow$  кинетическая, магнитная  $\leftrightarrow$  электрическая и т.д.

Колебательные системы бывают с сосредоточенными и распределенными параметрами. Пример механической резонансной системы с распределенными параметрами – струна или упругий стержень, электрической – СВЧ резонаторы. Примерами колебательных систем с сосредоточенными параметрами являются различного рода маятники и колебательные контуры.

Любая резонансная система характеризуется двумя основными параметрами: *частотой собственных колебаний*  $\omega_0$  и *добротностью*  $Q$ , определяющей отношение мощности энергии собственных колебаний к мощности потерь за период.



## 2. Свободные колебания, основные параметры контура

В простейшем случае реальный колебательный контур состоит всего из двух деталей – катушки индуктивности и конденсатора, но его эквивалентная схема включает три элемента – индуктивность  $L$ , емкость  $C$  и эквивалентное сопротивление  $R_L$  (рис. 1, а). Основной

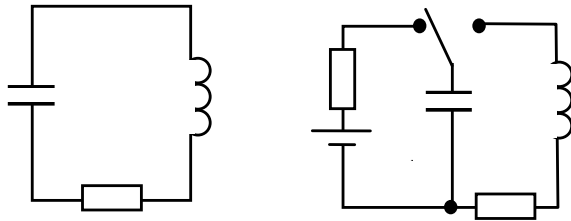


Рис. 1. Свободные колебания  
а) колебательный контур; б) пример возбуждения колебаний.

вклад в сопротивление  $R_L$  обычно вносит омическое сопротивление провода, которым намотана катушка, а добавочный – активные потери энергии в сердечнике катушки, в конденсаторе, скин-эффект в проводе катушки и рассеяние электромагнитной энергии в окружающем про-

странстве. Элементы  $L$  и  $C$  определяют собственную частоту колебаний контура  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , а отношение реактивного сопротивления этих элементов к активному сопротивлению потерь – добротность контура  $Q$ :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{\omega L}{R_L} = \frac{1}{\omega C R_L} = \frac{\rho}{R_L}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1)$$

Величина  $\rho$  называется *волновым* (или *характеристическим*) *сопротивлением* контура. Это чисто реактивное сопротивление, которое определяет взаимосвязь реактивных токов и напряжений в контуре, а отношение реактивного сопротивления к активному определяет добротность.

Энергия может быть введена в контур самыми различными способами, например начальной зарядкой конденсатора до некоторого напряжения  $U$ , как показано на рис. 1, б. При переключении конденсатора он начнет разряжаться через индуктивность и напряжение  $U_C$  будет уменьшаться, а ток через катушку расти. В момент полной разрядки конденсатора (уменьшения напряжения  $U_C$  до нуля) ток в цепи достигает максимального значения и начальная электрическая энергия конденсатора  $W_э = CU^2/2$  переходит в магнитную энергию катушки  $W_м = LI^2/2$ . Поскольку ток через индуктивность не

может прерваться мгновенно из-за явления самоиндукции, то энергия магнитного поля начинает уменьшаться постепенно. Изменение знака производной магнитной индукции вызывает эдс самоиндукции противоположного знака по отношению к первому полупериоду (полупериоду разрядки конденсатора) и конденсатор начинает перезаряжаться. Если бы потери в контуре отсутствовали ( $R_L = 0$ ), то конденсатор перезарядился бы до той же величины  $U_C$  но противоположного знака заряда.

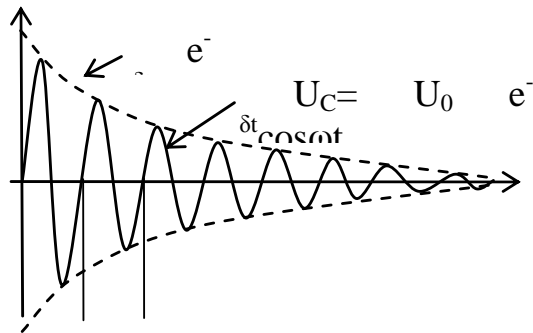


Рис. 2. Свободные затухающие колебания.

В реальном контуре часть энергии за цикл перезарядки будет рассеиваться на  $R_L$  и колебания в контуре будут затухающими (рис. 2). Величина затухания  $\delta$  однозначно связана с добротностью (п. 3.4 введения):

$$\delta = \pi/QT = R_L/2L. \quad (2)$$

### 3. Вынужденные колебания

Для поддержания незатухающих колебаний энергия потерь в контуре должна постоянно восполняться от внешнего генератора. В зависимости от способа подключения генератора к контуру различают последовательный и параллельный КК (рис. 3).

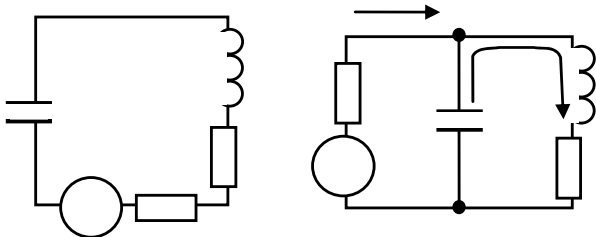


Рис. 3. Последовательный (а) и параллельный (б) КК.

В последовательном КК генератор включается в разрыв цепи контура (рис. 3, а), а в параллельном – параллельно элементам  $L$  и  $C$  (рис. 3, б). Колебания в контуре с внешним генератором называются *вынужденными*.

При практической работе с колебательными контурами важно отличать реальные резисторы, введенные в схему контура по тем или иным причинам, от эквивалентных сопротивлений схем замещения элементов контура и генератора. Из-за того что условное изображение тех и других сопротивлений одинаково, у студентов

надолго (иногда навсегда) складывается неверное представление о теоретическом "оперировании" с этими сопротивлениями и, соответственно, неумение реализовать нужные параметры контуров в практических схемах. Поэтому рассмотрим более подробно с этой точки зрения отличие параллельного контура от последовательного. Кроме того в данной работе мы будем тщательно соблюдать правило индексации сопротивлений: обозначения с индексами  $R_i$ ,  $R_L$ ,  $R_C$  и  $R_3$  мы будем сохранять за эквивалентными сопротивлениями схем замещения, а без индексов  $R$  или с арабской нумерацией  $R_1... R_n$  – за реальными резисторами, включенными в схемы.

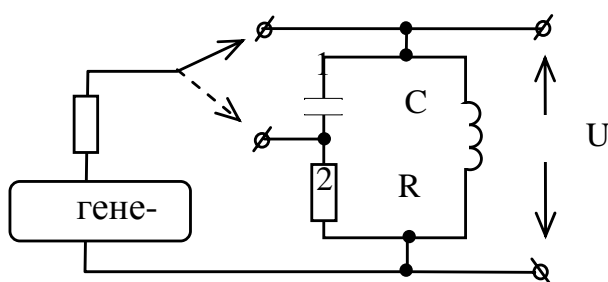


Рис. 4. Подключение КК к генератору.

На рис. 4 изображены два варианта подключения колебательного контура к внешнему генератору сигналов. Резистор  $R$  в цепи контура – это реальный резистор с малым сопротивлением 1...5 Ом, а  $R_1$  – это добавочный резистор, включаемый между генератором и контуром.

Эквивалентные сопротивления  $R_i$  и  $R_L$  на схеме не обозначены. Выходное напряжение контура снимается с катушки индуктивности. Генератор можно подключить к входу 1, либо 2.

*Вопрос:* какой контур – параллельный или последовательный изображен на рис. 4 (подумайте)?

*Ответ:* при включении генератора в положение 1 мы имеем параллельный контур, а в положение 2 – последовательный.

*Почему?* Потому что напряжение от внешнего генератора в этих двух положениях вводится в контур различным способом. В положении 2 сопротивление  $R$  является сопротивлением делителя выходного напряжения генератора  $R_1 R$ . На нем падает часть выходного напряжения генератора, которая и служит источником "подкачки" энергии в контур, причем этот источник включен в разрыв цепи контура. В положении 1 генератор включен параллельно реактивным элементам.

Однако для того, чтобы реализовать добротность контура  $Q$  близкую к теоретической (формулы 1, 2), величины сопротивлений резисторов  $R$  и  $R_1$  должны удовлетворять определенным условиям,

причем для параллельного и последовательного контура сопротивление  $R_1$  должно отличаться по величине в тысячи раз!

Рассмотрим условия, определяющие выбор величины сопротивления резисторов  $R$  и  $R_1$  в последовательном и параллельном КК. На рис. 5 отдельно изображена схема включения последовательного КК с добавлением изображения эквивалентных сопротивлений  $R_i$  и  $R_L$ . Если бы генератор был непосредственно включен в разрыв контура вместо сопротивления  $R$ , то его эквивалентное выходное сопротивление  $R_i = 50$  Ом оказалось бы включенным непосредственно в цепь контура последовательно с сопротивлением  $R_L$ . Омическое сопротивление катушек индуктивности на средних частотах (десять

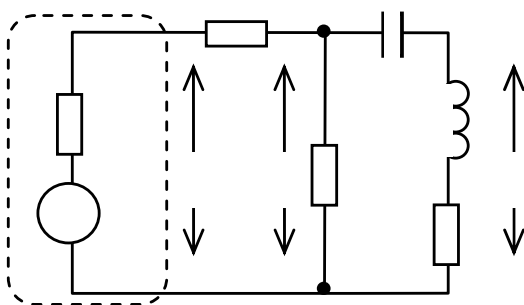


Рис. 5. Подключение последовательного КК к генератору.

ки кГц ... десятки МГц) равно 10...40 Ом (чем выше частота, тем меньше должна быть индуктивность и, соответственно, меньше  $R_L$ ). Суммарное эквивалентное сопротивление потерь контура  $R_L' = R_i + R_L$  увеличилось бы более чем в два раза, что привело бы к уменьшению добротности контура  $Q = \omega L/R_L'$  в соответствующее

число раз.

Для уменьшения влияния параметров генератора на добротность контура на его выходе включен делитель напряжения  $R_1R$ , причем только сопротивление  $R$  входит непосредственно в цепь контура. При условии  $R \ll R_L$  и  $(R_i + R_1) \gg R_L$  влияние генератора на собственные параметры КК будет минимальным, а амплитуда выходного напряжения генератора не будет зависеть от режима работы контура.

Конечно, при этом в контур поступает не все выходное напряжение генератора, а лишь его часть, определяемая условием

$$U_r/U_d = (R_1 + R)/R.$$

Но, как известно, в последовательном контуре осуществляется *резонанс напряжений* (п. 3.6 введения), т.е. напряжение на его элементах  $L$  и  $C$  в  $Q$  раз больше, чем напряжение  $U_d$  на элементе  $R$ . Поэтому для восполнения потерь достаточно весьма малой части напряжения генератора. По измеренным значениям  $U_d$  и  $U_C$  (или

$U_L$ ) можно определить величину  $Q$ . (Другой, более точный способ измерения добротности будет рассмотрен ниже).

В *параллельном контуре* (рис. 3, б) осуществляется *резонанс токов* (п. 3.7 введения): ток  $I_k$ , циркулирующий в цепи контура, в  $Q$  раз больше, чем ток генератора  $I_r$ , восполняющий потери в контуре. Подключение генератора к контуру осуществляется через добавочное сопротивление  $R_1$ , величина которого должна быть больше уже не величины  $R_L$ , как в последовательном контуре, а величины *эквивалентного сопротивления контура*  $R_3$  (формула 17, п. 3.7 введения):

$$R_3 = \frac{L/C}{R_L} = \frac{\rho^2}{R_L}. \quad (3)$$

Величина  $R_3$  в десятки тысяч раз превосходит величину  $R_L$ ! Физический смысл величины  $R_3$  заключается в том, что при резонансе в цепи генератора отсутствует сдвиг фазы между током и напряжением, т.е. на резонансной частоте генератор "воспринимает" параллельный КК как чисто активное сопротивление величиной  $R_3$ . При условии  $R_1 > R_3$  амплитуда выходного тока генератора практически

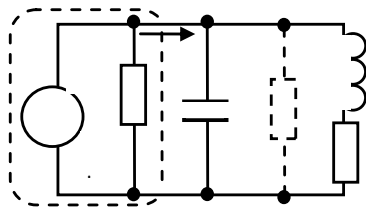


Рис. 6. Эквивалентная схема параллельного КК с источником тока.

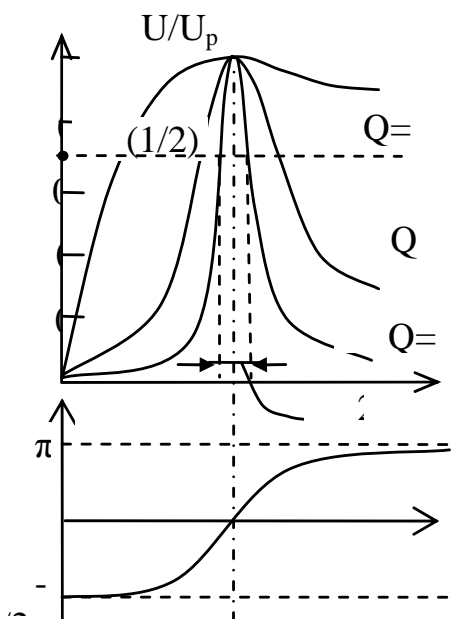
не будет зависеть от режима работы контура и генератор будет оказывать минимальное влияние на добротность параллельного контура.

При теоретическом анализе параллельного КК генератор удобнее представлять источником тока (рис. 6). Напомним, что эквивалентное сопротивление  $R_3$  не является реальным резистором, но лишь замещает КК по отношению к источнику тока *на резонансной частоте в режиме стационарной работы* системы генератор-контур (п. 3.7 введения). Поэтому при теоретическом анализе его нельзя "переносить" во внутреннее сопротивление источника тока  $R_i$  по причинам, указанным в п. 1.7 введения. Пересчет параметров генератора стандартных сигналов в параметры эквивалентного источника тока осуществляется по правилам:  $I = E/R_i'$ ,  $R_i' = R_i + R_1$ , где  $R_i$  – выходное сопротивление генератора сигналов, а  $E$  – его эдс (п. 1.5 введения).

Таким образом, при соблюдении правил подключения КК к генератору, собственные параметры  $\omega_0$  и  $Q$  параллельного и последовательного КК, выполненных на одних и тех же катушке и конденсаторе, будут практически одинаковы. Однако требования к генератору внешних сигналов (к его эквивалентному выходному сопротивлению) существенно различны и выполнить эти требования – обязанность экспериментатора!

#### 4. Измерение основных параметров колебательных контуров по резонансной кривой

Зависимость амплитуды напряжения на реактивных элементах контура  $U_C$  или  $U_L$  от частоты внешнего генератора (при постоянной амплитуде выходного напряжения генератора) называется *резонансной характеристикой контура*. На рис. 7, а приведены примеры резонансных характеристик последовательного контура в относительных единицах  $U_C/U_{Cr}$ , где  $U_{Cr}$  – амплитуда напряжения  $U_C$  на резонансной частоте, для различных добротностей контура. (В п. 3.6 введения показано, что в последовательном контуре  $U_C$  и  $U_L$  достигают максимального значения при частотах несколько отличающихся от резонансной, но при добротности контура больше 10 это отличие составляет доли процента и при практических измерениях им можно пренебречь). По резонансной кривой экспериментально определяются основные характеристики контура – резонансная частота  $f_0$  и добротность  $Q$ .



Добротность определяется по формуле

$$Q = f_0 / 2\Delta f, \quad (4)$$

где  $2\Delta f$  – *полоса пропускания контура* на уровне  $1/\sqrt{2} \approx 0.707$  от максимального (резонансного) значения (рис. 7, а).

На рис. 7, б приведена фазо-частотная характеристика последовательного контура, показывающая зависимость сдвига фазы между током и

Рис. 7. АЧХ (б) и ФЧХ (в) контура.

напряжением в цепи генератора от его частоты. По этой характеристике можно видеть, что при малых частотах напряжение отстает по фазе от тока, т.е. сопротивление последовательного контура носит емкостной характер, а при частотах больше резонансной – индуктивный. При резонансной частоте сдвиг фазы между током и напряжением равен нулю, т.е. контур представляет собой для генератора чисто активную нагрузку.

Для параллельного контура резонансная кривая имеет аналогичный вид и также служит для определения  $f_0$  и  $Q$ . Фазо-частотная характеристика параллельного контура "инвертирована" относительно оси абсцисс, поскольку сопротивление параллельного контура при частотах ниже резонансной имеет индуктивный характер, а выше – емкостной. При резонансе параллельный контур, как говорилось выше, также представляет собой чисто активную нагрузку для генератора.

При экспериментальном исследовании важно отличать собственную добротность контура  $Q$  от так называемой *нагруженной добротности*  $Q'$ . Смысл понятия "нагруженная" добротность рассмотрим на примере параллельного контура рис. 8.

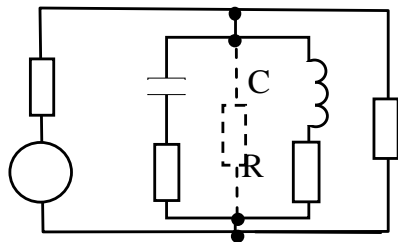


Рис. 8. Нагруженная добротность КК

Сопротивления  $R_i' = R_i + R_1$  и  $R_n$  схемы являются эквивалентным выходным сопротивлениям генератора и эквивалентным входным сопротивлением нагрузки (например, входным сопротивлением осциллографа) соответственно. Они подключены параллельно контуру, следовательно контур при работе затрачивает на них некоторую активную мощность, что сказывается на его добротности. Нагруженная добротность  $Q'$  может быть рассчитана по формуле

$$Q' = \frac{1}{1 + Q \cdot \rho / R^*} Q = kQ, \quad (5)$$

где  $Q$  и  $\rho$  собственная добротность и волновое сопротивление контура, а  $R^* = R_i' \cdot R_n / (R_i' + R_n)$  – параллельное соединение сопротивлений  $R_i'$  и  $R_n$ , т.е. "нагрузка" контура.

Если выполнено условие  $R_i' \gg R_n$ , а  $R_n$  сравнимо с  $R_3$ , то  $R_i'$  можно не учитывать и в формулу (5) подставить  $R^* = R_n$ . Очевидно коэффициент  $k$  всегда меньше единицы.

Формула (5) выведена в предположении, что сопротивления  $R^*$ ,  $R_i'$  или  $R_n$  включены параллельно эквивалентному сопротивлению  $R_3$  контура и формально уменьшают его величину, т.е. увеличивают потери в контуре (вывод формулы оставим для семинарских занятий).

## 5. Модуляция и демодуляция сигналов

Основные соотношения для контуров выводятся в рамках теории линейных колебаний. Условием линейности колебаний является независимость параметров контура  $L$ ,  $C$  и  $R_L$  от амплитуды токов и напряжений в контуре. Но большинство практических применений контуров в радиотехнике основано на нелинейных явлениях, таких как модуляция, детектирование, биения и т.д. В частности, радио- и телесигналы являются модулированными колебаниями: несущая частота радиоканала промодулирована звуковыми или видеосигналами изображения.

**Амплитудная модуляция колебаний.** Синусоидальная функция (4) имеет три постоянных не зависящих от времени параметра: амплитуду  $A_0$ , частоту  $\omega$  и фазу  $\psi$ :

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \psi)$$

Изменение во времени одного из этих параметров называется *модуляцией*. Соответственно различают *амплитудную*, *частотную* и *фазовую* модуляции.

Рассмотрим простейший случай *амплитудной модуляции* – изменение амплитуды  $A_0(t)$  гармоническим сигналом с частотой  $\Omega \ll \omega$ . Пусть например амплитуда высокочастотной составляющей сигнала меняется относительно своего среднего значения  $A_0$  на величину  $m A_0$  с частотой  $\Omega$  (рис.9, а).



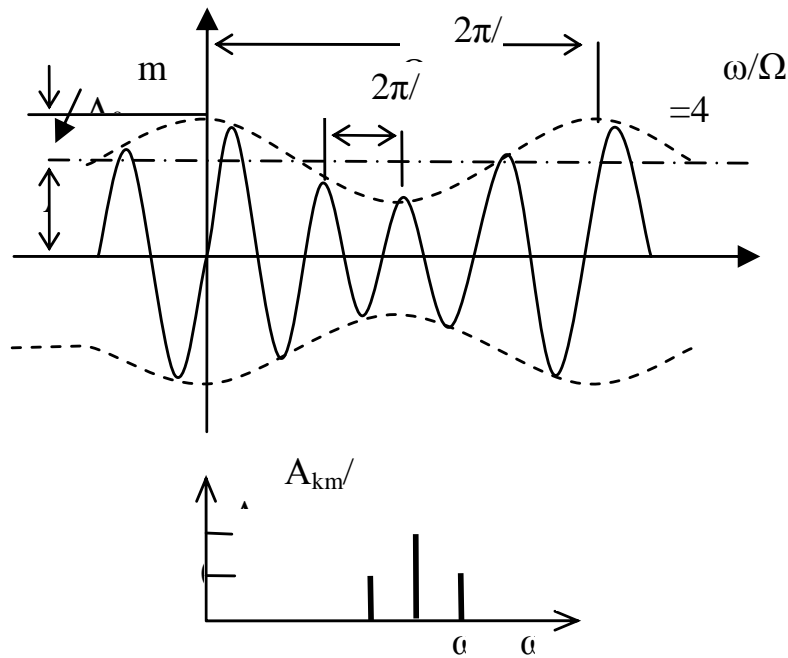


Рис. 9. Модулированное колебание (а) и его спектр (б).

Модулированный сигнал в этом случае будет представлен функцией

$$A(t) = A_m(t) \sin \omega_0 t = A_{0m} (1 + m \cos \Omega t) \sin \omega_0 t, \quad (8)$$

где  $m$  – коэффициент (глубина) модуляции,  $A_m(\Omega, t)$  – модулирующее колебание, равное

$$A_m(\Omega, t) = mA_0 \cos \Omega t, \quad (8')$$

$A_m(t)$  – огибающая модулированного сигнала, равная

$$A_m(t) = A_{0m} (1 + m \cos \Omega t). \quad (8'')$$

Подставив в (8) значения  $\cos \Omega t \sin \omega_0 t = 0,5 [\sin(\omega_0 - \Omega)t + \sin(\omega_0 + \Omega)t]$ , получим три составляющих модулированного сигнала

$$A(t) = A_0 \sin \omega_0 t + A_{2m} \sin \omega_1 t + A_{2m} \sin \omega_2 t,$$

где  $A_{2m} = mA_0/2$ ;  $\omega_1 = \omega_0 - \Omega$ ;  $\omega_2 = \omega_0 + \Omega$  и начальная фаза каждой из 3-х составляющих  $\psi = 0$ .

Таким образом, простейшее амплитудно-модулированное колебание  $A(t)$  может быть представлено суммой трех синусоидальных колебаний:

- колебания с несущей частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A_0$  и
- двух колебаний боковых частот  $\omega_1, \omega_2$  с одинаковой амплитудой  $A_{2m} = mA_0/2$  и частотами одна больше, другая меньше несущей частоты на  $\Omega$ .

Спектр амплитудно модулированного сигнала представлен на рис. 9, б.

Огибающая и ее спектр представлены на рис. 10, а, б. Спектр огибающей легко получить, используя равенство  $\cos \Omega t = \cos(-\Omega t)$  и записав огибающую функцию в виде

$$A_m(t) = (mA_{0m}/2)\cos(-\Omega t) + A_{0m} + (mA_{0m}/2)\cos(\Omega t)$$

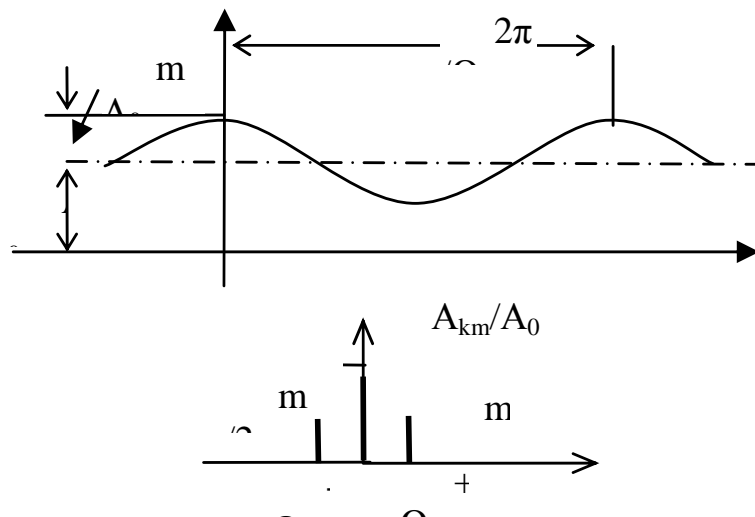


Рис. 10. Модулирующий сигнал (а) и его спектр (б)

Средняя компонента – это постоянная составляющая (частота равна нулю), две крайние имеют частоты  $\pm \Omega$ . Легко заметить, что спектры огибающей и несущей одинаковы, но сдвинуты по оси частот на  $\omega_0$ .

Самое широкое применение амплитудная модуляция находит в радиотехнике, где низкочастотным сигналом звуковой частоты модулируется высокочастотная несущая передающей станции. В этом случае модулирующий сигнал имеет уже не одну частоту  $\Omega$ , а занимает некоторую *полосу частот* и для анализа может быть представлен суммой гармонических составляющих

$$A_{\Omega}(t) = \sum_{j=1}^n A_{\Omega_j} \cos(\Omega_j t + \psi_j) = \sum_{j=1}^n A_{\Omega_j} \cos \lambda_j.$$

Само модулированное колебание в этом случае записывается в виде

$$U(t) = U_0 \left[ 1 + \sum_{j=1}^n A_{\Omega_j} \cos(\Omega_j t + \psi_j) \right] \cos(\omega t + \varphi) = E(t) \cos \Phi. \quad (9)$$

Из выражений (8 и 9) видно, что для амплитудной модуляции формально необходимо осуществить *перемножение* сигналов несущей и модулирующей частоты. Физически эта операция производится в устройстве, называемом *модулятором (перемножителем)*, который обычно является нелинейной системой. Для подавления боковых частот, выходящих за рамки полосы частот модулирующего сигнала, на выходе модулятора ставится полосовой фильтр (обычно система контуров).

**Детектирование (демодуляция) амплитудно модулированных сигналов.** Сигнал радиопередающей станции, поступающий в антенну приемника, является модулированным. Его информационная часть заключена в низкочастотном модулирующем сигнале. Она должна быть отделена в приемнике от несущей (высокочастотной)

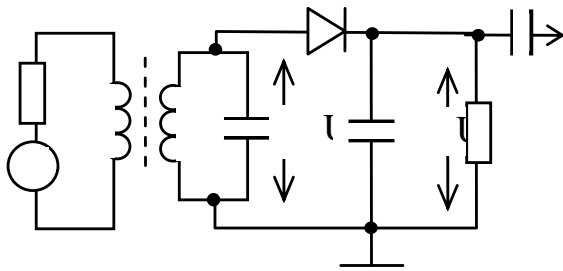


Рис. 10. Диодный детектор

компоненты, усилена и воспроизведена в исполнительном устройстве (динамике, мониторе и т.д.). Для выделения модулирующего сигнала в приемнике служат устройства, называемые *детекторами (демодуляторами)*.

Схема простейшего диодного детектора амплитудно модулированного сигнала изображена на рис. 10. Источник модулированного сигнала  $U(t) = E(t) \cos \Phi$  (9) представлен эквивалентным генератором, нагруженным на индуктивность  $L_1$ , с которой индуктивно связан колебательный контур  $L_2 C_1$ , настроенный на несущую частоту сигнала  $\omega$ . С контура сигнал через диод поступает на фильтр низкой частоты  $C_\phi R_1$  и далее через разделительный конденсатор  $C_p$  на вход усилителя низкой частоты.

Процесс детектирования заключается в следующем. При достаточно большом напряжении сигнала  $U(t)$  вольтамперную характеристику диода VD можно аппроксимировать ломаной линией, как показано на рисунке 11, б. Через диод течет импульсный ток одно-

полупериодного выпрямления  $I_d$ , изображенный на рис 11, г сплошной линией. Его можно разложить в ряд Фурье

$$I(t) = I_0(t) + I_1(t) \cos \Phi + I_2(t) \cos 2\Phi + \dots \quad (10)$$

Постоянная составляющая  $I_0(t)$  создает на диоде и сопротивлении  $R$  постоянное напряжение  $U_0$ , смещающее рабочую точку диода влево (в область отрицательных напряжений). Переменное высокочастотное напряжение выпрямленное диодом, образует на фильтре постоянное напряжение  $U_\Omega$ , "следящее" за амплитудой модулирующего сигнала (рис. 11, г).

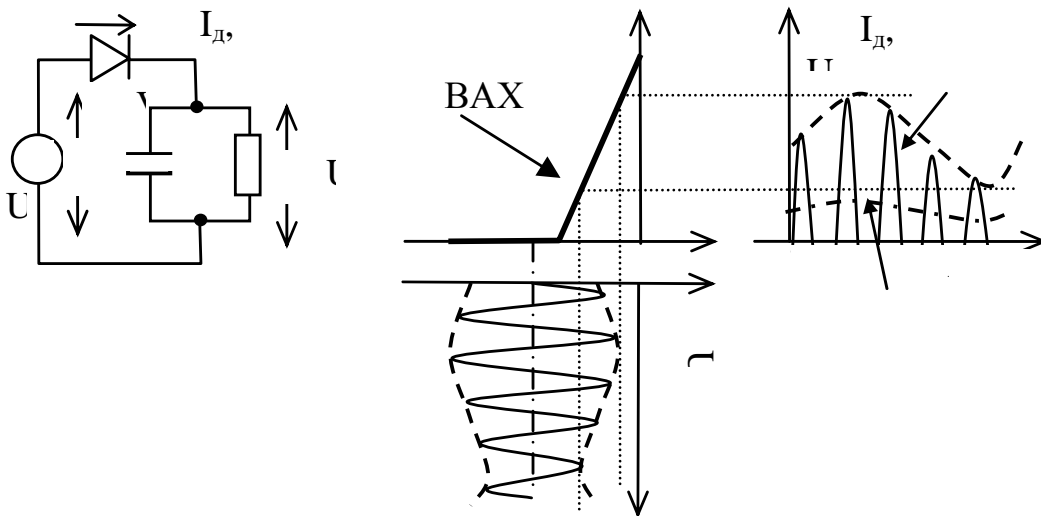


Рис. 11. Амплитудное диодное детектирование

Ток  $I_d$ , протекающий через диод в положительные полупериоды напряжения  $U(t)$ , заряжает конденсатор фильтра  $C$  с постоянной времени

$$\tau_0 = R_d C,$$

где  $R_d$  – сопротивление открытого диода (выходным сопротивлением источника сигнала мы пренебрегли, но оно может быть учтено суммированием с  $R_d$ ).

В отрицательные полупериоды диод закрыт и конденсатор разряжается через сопротивление фильтра  $R$  с постоянной времени  $\tau_p = RC$ , где величина сопротивления резистора  $R$  выбирается из условия  $R \gg R_d$ . При этом  $\tau_p \gg \tau_0$ , и на фильтре создается напряжение  $U_\Omega$ , пропорциональное амплитуде модулирующего сигнала.

При условии  $R \gg 1/\omega_0 C$ , где  $\omega_0$  – несущая частота сигнала,  $U_\Omega$  практически не будет содержать высокочастотной составляющей, тогда как низкочастотная составляющая (модулирующий сигнал  $U_\Omega$

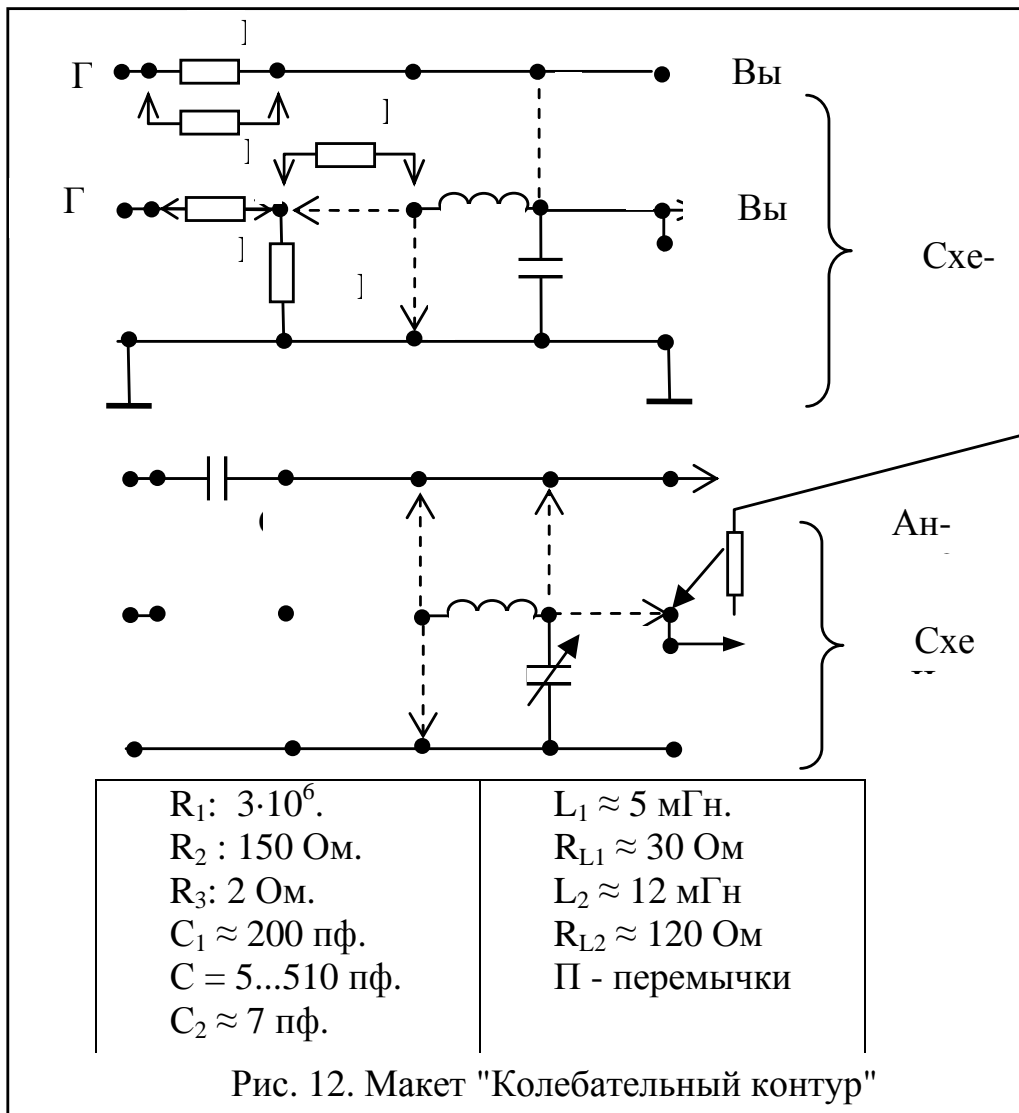
) практически полностью воспроизведется на фильтре, что и показано на рис. 11, г.

Следует заметить, что характеристика детектирования будет линейной лишь в том случае, когда ВАХ диода хорошо аппроксимируется отрезками прямых (рис. 11, б). А это выполняется только при достаточно большом напряжении сигнала (более 1 В). Если напряжение мало, то приходится применять квадратичную (примерно до 0.2...0.3 В) или экспоненциальную (при еще меньших напряжениях) аппроксимацию. Это приводит к появлению в спектре детектированного сигнала более высоких гармоник с частотой кратной  $\Omega$ . Детекторная характеристика становится нелинейной, что ведет к нелинейным искажениям сигнала модуляции. Поэтому в случае слабых сигналов используют предварительное усиление высокочастотного сигнала или транзисторные детекторы, позволяющие доусиливать сигнал одновременно с детектированием.

## **6. Экспериментальная часть, оборудование**

Генератор сигналов типа SFG 2110, осциллограф типа TDS 1000 с выносными делителями  $\times 10$ , измеритель иммитансов типа MT4080D, макетные платы с набором элементов, две штыревые антенны.

Макетная плата для выполнения лабораторной работы представлена на рис. 12. Верхняя схема предназначена для исследования собственных и нагруженных параметров контура, нижняя – для исследования применений контуров в режиме прием/передача сигналов.



К макету прилагается набор переключек, сменных резисторов, две штыревые антенны. Точные значения величин  $L_1$ ,  $R_{L1}$ ,  $L_2$ ,  $R_{L2}$  необходимо измерить самостоятельно.

## 7. Контрольные вопросы

1. Что такое колебательный контур и в чем отличие подключения к генератору параллельного и последовательного КК?
2. Напишите формулы для теоретического расчета основных параметров контура  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $\rho$ ,  $R_3$ . Нарисуйте резонансную характеристику контура и объясните, как по ней определить добротность КК.
3. Что такое амплитудная модуляция сигнала: приведите пример ее использования. Каков спектр амплитудно модулированного сигнала?
4. Что такое амплитудный детектор (его основное назначение)? Объясните принцип действия диодного амплитудного детектора.

5. Объясните принцип действия приемо-передающей цепи канала радиопередачи (роль несущей и модулирующего сигнала, роль колебательного контура в приемном устройстве).

## 8. Задания

**Задание 1: Исследование параметров параллельного контура.**

*Цель:* 1) По известным (измеренным) значениям элементов контура  $L$ ,  $R_L$  и  $C$  научиться рассчитывать собственные параметры контура  $f_0$ ,  $Q$ ,  $\rho$ ,  $R_3$ , реализовать и измерять их в экспериментальной установке.

2) Уметь определять степень влияния подключенных к контуру устройств (генератора и нагрузки) на собственные параметры контура, т.е. рассчитывать и экспериментально определять характеристики нагруженного контура.

Упражнение 1. Измерение величин элементов контура (схема 1). Удалив перемычки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  измерьте значения индуктивности  $L_1$ , омического сопротивления провода катушки  $R_{L1}$ , емкости  $C_1$ , а также сопротивления резисторов  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  макета измерителем иммитансов MT4080D.

(Краткую инструкцию пользования измерителем MT4080D см. в приложение 1 к данной работе. Для проверки умения пользоваться измерителем к набору элементов макетной платы приложены эталонные конденсатор  $C = 1000 \pm 5$  пФ и резистор  $R = 100 \pm 1$  Ом).

По измеренным значениям  $L_1$ ,  $R_{L1}$  и  $C_1$  рассчитайте теоретические значения добротности  $Q_t$ , волнового сопротивления  $\rho$  и эквивалентного сопротивления  $R_3$  контура и занесите данные в таблицу 1.

Табл.1

Упр. № Парам.	1.	2. ( $R_1'//R_1$ )	3. ( $R_1''//R_1$ )	4. ( $R_1'//C$ )
$L_1$ , мГн	х			
$C_1$ , пФ	х			
$R_{L1}$ ,	х			

Ом				
$\rho$ , кОм	х			
$R_3$ , кОм	х			
$Q_T$	х			
$f_0$ , кГц	х	х	х	х
$f_B$ , кГц	х	х	х	х
$f_H$ , кГц	х	х	х	х
$2\Delta f$ , кГц	х	х	х	х
$Q_{экс}$	х	х	х	х

Упражнение 2: измерение собственных параметров параллельного КК. Подключите генератор к входу  $\Gamma_{\text{пар}}$ . Соберите схему параллельного контура, установив переключки  $\Pi_2$  и  $\Pi_1$  (последнюю в положение 2). При средней выходной амплитуде генератора изменением частоты определите резонансную частоту контура  $f_0$ . При получении резонансного сигнала уменьшите амплитуду выходного сигнала генератора до такой величины, чтобы максимальная амплитуда на емкости контура была примерно 1...2 В. Измерьте полуширину резонансной кривой  $2\Delta f = f_B - f_H$  на уровне 0,7 от максимального и определите  $Q_3$  параллельного контура.

При экспериментальном определении  $Q$  все измерения частот должны быть выполнены с точностью до 4-го знака (почему?). Для этого используйте возможности точной настройки частоты генератора (краткую инструкцию пользования генератором SFG 2110 см. в приложение 2). Для уменьшения влияния входного сопротивления осциллографа (нагрузки  $R_H$ ) на собственные параметры контура используйте кабель с выносным делителем  $\times 10$  ( $R_H = 10 \text{ Мом}$ ).

Упражнение 3: влияние выходного сопротивления генератора на добротность контура. Подключая параллельно резистору  $R_1$  сменные резисторы  $R_1' = 10^5$  и  $R_1'' = 10^4$  Ом, измерьте значение нагруженной добротности контура. Проверьте справедливость формулы (5) для  $Q_H$  (для  $R_1', R_1''/R_1$ ).

Экспериментальное значение нагруженной добротности определяется прежним способом:  $Q_3' = f_0'/2\Delta f'$ .



Упражнение 4: влияние нагрузки на добротность КК. Подключите сменный резистор  $R_1' = 10^5$  Ом параллельно конденсатору контура и измерьте получившееся значение  $Q_n$ . Сравните его значение с данными предыдущего упражнения.

Анализ полученных результатов (вопросы к сдаче задания №1).

1). Сравните расчетные и измеренные значения  $f_0$  и  $Q$ . Обратите внимание на то, что при хорошем совпадении величин  $f_0$  экспериментальные и теоретические значения для  $Q$  значительно отличаются даже при максимальных значениях  $(R_i + R_1)$  и  $R_n$ .

2). Подумайте, какие дополнительные потери энергии могут происходить в контуре? Учтите, что мы измеряли активное сопротивление контура  $R_L$  на постоянном токе, а при резонансе контур работает на частоте  $\approx 150$  кГц. Какие дополнительные потери в катушке могут в связи с этим возникнуть? (Подсказка: воспользуйтесь формулами (5) и (6). Считайте, что катушка  $L_1$  намотана медным проводом диаметром 0,1 мм с омическим сопротивлением 2,23 Ом/м).

## Задание 2. Измерение параметров последовательного КК.

Упражнение 1: Измерение собственных параметров последовательного КК. Переключите переключку  $\Pi_1$  в положение 1, а переключку  $\Pi_2$  удалите. Выходной сигнал контура будем снимать с емкости  $C$  (Вых 2). Подключите генератор к входу  $\Gamma_{\text{пос}}$ . Измерьте добротность  $Q$ , последовательного контура. Данные занесите в таблицу 2:

Табл.2

Упр. № Парам.	1	2. ( $R_L + R_4$ )	2'. ( $R_L + R_4''$ )	3. ( $R_1' // C$ )	3'. ( $R_1' // L$ )
$L_1$ , мГн	х				
$C_1$ , пФ	х				
$R_{L1}$ , Ом	х				
$R_2$ , Ом	х				
$R_3$ , Ом	х				

$Q_T$	X				
$f_0$ , кГц	X		X	X	X
$f_B$ , кГц	X		X	X	X
$f_H$ , кГц	X		X	X	X
$2\Delta f$ , кГц	X		X	X	X
$Q_{экс}$	X		X	X	X

Упражнение 2: проверка влияния последовательного сопротивления на добротность КК. Устанавливая вместо перемычки  $\Pi_1$  сменные резисторы  $R_4' = 10$  и  $R_4'' = 51$  Ом измерьте нагруженные добротности  $Q_{H1}$ ,  $Q_{H2}$ .

Упражнение 3: проверка влияния нагрузки на параметры последовательного КК. 1) Подключите параллельно конденсатору С контура сменный резистор  $R_1' = 10^5$  Ом, как это делалось в параллельном контуре, и измерьте получившееся значение  $Q_H$ .

2) Подключите сменный резистор  $R_1' = 10^5$  Ом параллельно катушке индуктивности контура и измерьте получившееся значение  $Q_H$ .

Упражнение 4: проверка эквивалентности влияния параллельного  $R_H$  и последовательного  $R_{H.экв}$  сопротивлений на добротность контура. 1). Удалив перемычку  $\Pi_1'$ , включите на ее место переменный резистор  $R_{пер} = 1$  кОм. Вращая его ручку, подберите такую величину сопротивления, чтобы добротность контура оказалась равной полученной в упражнении 3 ( $R_H // L$ ).

2). Отсоединив переменный резистор от контура, измерьте полученное значение сопротивления  $R_{H.экв}$ .

3). Проверьте справедливость формулы  $R_H = \rho^2 / R_{H.экв}$ .

### Задание 3. Использование контура в режиме прием/передача электромагнитных сигналов.

В данном задании используется нижняя схема макетной платы.

Упражнение 1: измерение параметров контура 2. 1) Измерителем иммитансов измерьте параметры нижнего контура:  $L_2$ ,  $R_{L2}$ , максимальное и минимальное значение емкости переменного конденсатора  $C_{мин}$  и  $C_{мах}$ .

2). Подключите к входу Г генератор сигналов и определите частотный диапазон резонансной настройки контура, перекрываемый переменным конденсатором. Выходной сигнал снимайте с Вых.3.

3). Обратите внимание на то, что в данном случае между выходом генератора и параллельным контуром вместо сопротивления  $R_1 = 3 \cdot 10^6$  Ом включен конденсатор малой емкости  $C_2 \approx 7$  пф. Подумайте, является ли такая замена эквивалентной с точки зрения влияния генератора на добротность контура?

Упражнение 2: параллельный контур в качестве приемного селективного устройства электромагнитных сигналов. 1) К выходу генератора подключите передающую антенну, а на вход Г подключите приемную антенну.

2). Установив ручку переменного конденсатора в произвольное положение, настройте частоту генератора на резонансную частоту контура. Расстояние между антеннами установите примерно 1 м.

3). Поверьте нижнее и верхнее значение резонансной частоты контура, соответствующие  $C_{\max}$  и  $C_{\min}$  переменного конденсатора.

Примечание. Приемная антенна имеет некоторую емкость относительно корпусов приборов и самого экспериментатора. Эта емкость может меняться в зависимости от положения антенны. Для уменьшения ее влияния на резонансную частоту контура, служит разделительный конденсатор малой емкости  $C_2$  (почему?).

Упражнение 3: наблюдение амплитудно модулированного сигнала. 1). Настройте контур в резонанс с генератором на частоте  $f \approx 100$  кГц. Переключите генератор сигналов в режим модулированного сигнала (режим внутренней модуляции синусоидальным сигналом с частотой  $\Omega = 400$  Гц).

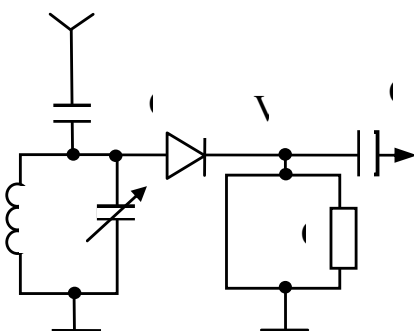


Рис. 12. Приемный контур с детектором сигналов.

2). Пронаблюдайте модулированный сигнал на осциллографе, меняя глубину модуляции.

3). Переключите осциллограф в режим быстрого преобразования Фурье и определите спектр модулированного сигнала. Измерьте коэффициент модуляции  $m$ .

Упражнение 4: изучение работы амплитудного диодного детектора. 1). Под-

ключите приемную антенну к выходу контура, а контур с помощью щупа Щ к входу диодного амплитудного детектора. Общая схема приемного контура с детектором приведена на рис. 13.

2). Подключите вход СН1 осциллографа к контуру (Вых. 3), а вход СН2 – к выходу детектора (Вых. 4).

3). Настройте контур в резонанс с генератором. Изменяя глубину модуляции сигнала проверьте линейность характеристики детектора в зависимости от амплитуды входного сигнала. Установите пределы амплитуды сигнала, при которой нелинейность детектирования не превышает 10 %. Нелинейность можно определить по отношению амплитуды 2-й гармоники сигнала (с частотой  $2\Omega$ ) к первой.

## 9. Библиографический список

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972.
2. Горелик Г.С. Колебания и волны. – М.: Физматгиз, 1959,
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Изд. 6. Учебник для студентов энергетических и электротехнических вузов.– М.: "Высш. Школа". 1973.
4. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие для вузов. Под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982.
5. Физическая энциклопедия /Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия. Т. 1. 1988. – 704 с., Т. 2. 1990. – 703 с., Большая российская энциклопедия. Т. 3. 1992. – 672 с., Большая российская энциклопедия. Т. 4. 1994. – 704 с., Большая российская энциклопедия. Т. 5. 1998. – 760 с. // Статьи: "Колебательный контур", "Резонанс".
6. **Волгов В.А.** Детали и узлы радиоэлектронной аппаратуры. М., "Энергия", 1977. – 656 с.

### III Приложения

#### 1 Обозначения

Условно на электротехнических схемах емкость  $C$ , индуктивность  $L$ , взаимоиנדуктивность  $M$  и сопротивление  $R$  изображают, как показано на рис. 3.

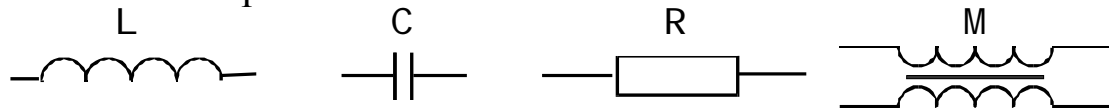


Рис. 1. Обозначение емкости  $C$ , индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и взаимоиנדуктивность  $M$  на электротехнических схемах

#### 2 Единицы измерения

В СИ и СГС единицы измерения электротехнических величин связаны следующим образом:

$$U[\text{СГС}] = U[\text{В}]/300,$$

$$I[\text{СГС}] = 3 \cdot 10^9 \cdot I[\text{А}],$$

$$C[\text{СГС}] = 9 \cdot 10^{11} \cdot C[\text{Ф}],$$

$$L[\text{СГС}] = 1 \cdot 10^9 \cdot L[\text{Гн}].$$

Как правило, в схемотехнике и радиотехнике используют только систему единиц СИ, что оказывается удобно с практической точки зрения. Все номиналы, величины напряжений и токов, показания приборов и т. д., как правило, указываются именно в этих единицах. Но в теоретических выкладках, часто используется и система единиц СГС.

### 3 Маркировка конденсаторов, индуктивностей и сопротивлений

Пример обозначения на схеме	Пример обозначения на детали	Предел. номинал емкости, сопротивления	Обозначение единиц измерения на детали	Обозначение единиц измерения	Единица измерения
1,5	1p5	до 91	р или П	пФ	пикофарада
15	15П				
150	Н15	от 0,1 до 91	н или Н	нФ	нанофарада
1500	1Н5				
0,015 мк	15Н				
0,15 мк	М15 μ15	от 0,1 и выше	μ или М	мкФ	микрофарада
1,5 мк	1М5				
15 мк	15М				
100 мк	100М				
0,47	Е47 R47	до 99,9	Е или R	Ом	ом
4,7	4Е7 4R7				
47	47Е				
470	470R K47	от 0,1 до 99,9	К	кОм	килоом
4,7 к	4K7				
47 к	47K				
470K	470к M47	от 0,1 до 99,9	М	МОм	мегаом
4,7 М	4M7				
47 М	47M				
470 М	G47	от 0,1 до 99,9	G	ГОм	гигаом
4,7 Г	4G7				
47 Г	47G				

Ранее при маркировке индуктивностей обозначений особого значения сокращенной кодировке не придавали, так как изготавливаемые дроссели имели значительные размеры. С изменением технологии и уменьшением габаритов радиоэлектронных компонентов появилась необходимость в кодировании номинальных значений индуктивности. В настоящее время широко применяется цветовое кодирование. Кроме этого известно как минимум три вида символьного кодирования. Номинальное значение кодируется цифрами, а допуск — буквами.

А. Первые две цифры указывают значение в микрогенри (мкГн,  $\mu\text{H}$ ), последняя — количество нулей. Следующая за цифрами буква указывает на допуск. Например, код 101J обозначает  $100 \text{ мкГн} \pm 5\%$ . Если буква не указывается — допуск 20 %. Исключения: для индуктивности меньше 10 мкГн роль десятичной запятой выполняет буква R, а для индуктивностей меньше 1 мкГн — буква N.

Б. Индуктивности маркируются непосредственно в микрогенри (мкГн,  $\mu\text{H}$ ). В таких случаях маркировка 680K будет означать не  $68 \text{ мкГн} \pm 10\%$ , как в случае А, а  $680 \text{ мкГн} \pm 10\%$ .

В. Индуктивности маркируются непосредственно в микрогенри без указания множителей. В этом случае маркировка 500 означает 500 мкГн.

#### 4. Измеритель иммитансов типа МТ 4080D

Так как реальные детали — резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы — наряду с основными параметрами  $R$ ,  $L$  и  $C$  характеризуются еще и дополнительными ("паразитными") величинами, поэтому существуют специальные измерители параметров элементов на переменных токах называемые измерителями. В лаборатории используется измеритель иммитансов МТ 4080D, на примере которого мы рассмотрим основные принципы их работы.

*Иммитанс* — обобщающее название для полного сопротивления (*импеданса*) и полной проводимости (*адмитанса*).

Полное сопротивление (импеданс) определяется формулами

$$Z = R + iX, \quad |Z| = (R^2 + X^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = X/R.$$

где  $R$  — активное,  $X$  — реактивное сопротивление,  $|Z|$  — модуль полного сопротивления (рис. 5, а,б).

Величина обратная сопротивлению называется проводимостью (адмитансом) и для комплексного сопротивления равна

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{R}{R^2 + X^2} - i \frac{X}{R^2 + X^2} = g - ib, \quad |Y| = \sqrt{g^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g}.$$

Закон Ома, выраженный через проводимость, запишется в виде

$$I = YU = Ug - iUb = I_g + I_b,$$

где  $I_g$  и  $I_b$  – активная и реактивная составляющие тока в цепи.

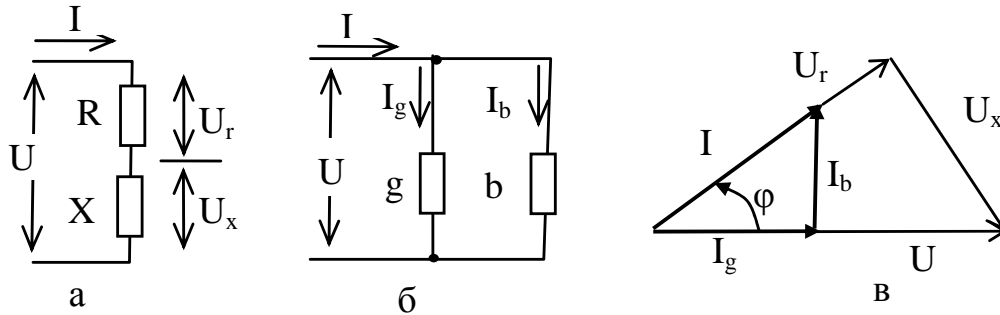


Рис. 2. Эквивалентные представления двухполюсника

Эквивалентные схемы импеданса и адмитанса представлены на рис. 2, (а, б соответственно). На их основе легко получить треугольники тока и напряжения аналогичные треугольнику мощности, полученному в предыдущем параграфе.

При комплексном характере нагрузки между током и напряжением в цепи есть сдвиг фаз  $\varphi$ . Ток  $I_g$  через активную проводимость  $g$  совпадает по фазе с напряжением на ней, а следовательно с напряжением  $U$  (рис. 2, б), что и отображено основанием треугольников тока и напряжения на рис. 2, в. Ток через реактивную компоненту  $I_b$  перпендикулярен току  $I_g$ , а его направление (вверх или вниз) зависит от характера реактивной составляющей (вверх для индуктивной и вниз для емкостной). Сумма этих токов дает полный ток в цепи  $I$  (рис. 2, (б, в)) и величину угла сдвига фаз между током и напряжением  $\varphi$ . Аналогичные соображения используются для построения треугольника напряжений в соответствии со схемой рис. 2, а. Напряжение  $U_r$  совпадает по фазе с током  $I$ , напряжение  $U_x$  перпендикулярно  $U_r$ , а их сумма дает полное напряжение  $U$ .

Аналитические формулы, отображающие проведенные графические построения, имеют вид:



$$U = ZI; \quad I = YU; \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{R}{R + iX} = \frac{R - iX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - i \frac{X}{Z^2} = g - ib,$$

$$\text{и} \quad g = \frac{R}{Z^2}, \quad b = \frac{X}{Z^2}; \quad R = gZ^2 = \frac{g}{Y^2}; \quad X = bZ^2 = \frac{b}{Y^2}.$$

$$U = ZI = (R + iX)I = RI + iXI = U_R + U_X.$$

Треугольник напряжений характеризуется соотношениями:

$$U_r = U \cos \varphi; U_x = U |\sin \varphi|; U = \sqrt{U_r^2 + U_x^2}.$$

откуда

$$I = YU = (g - ib)U = gU - ibU = I_g + I_b.$$

Из эквивалентной схемы комплексного двухполюсника рис. 2, б следуют аналогичные уравнения для дуальных компонентов (проводимостей):

$$I_g = I \cos \varphi; I_X = I |\sin \varphi|; I = \sqrt{I_g^2 + I_x^2}.$$

Графически этим уравнениям соответствует треугольник токов рис. 2, б, из которого получаем соотношения для токов:

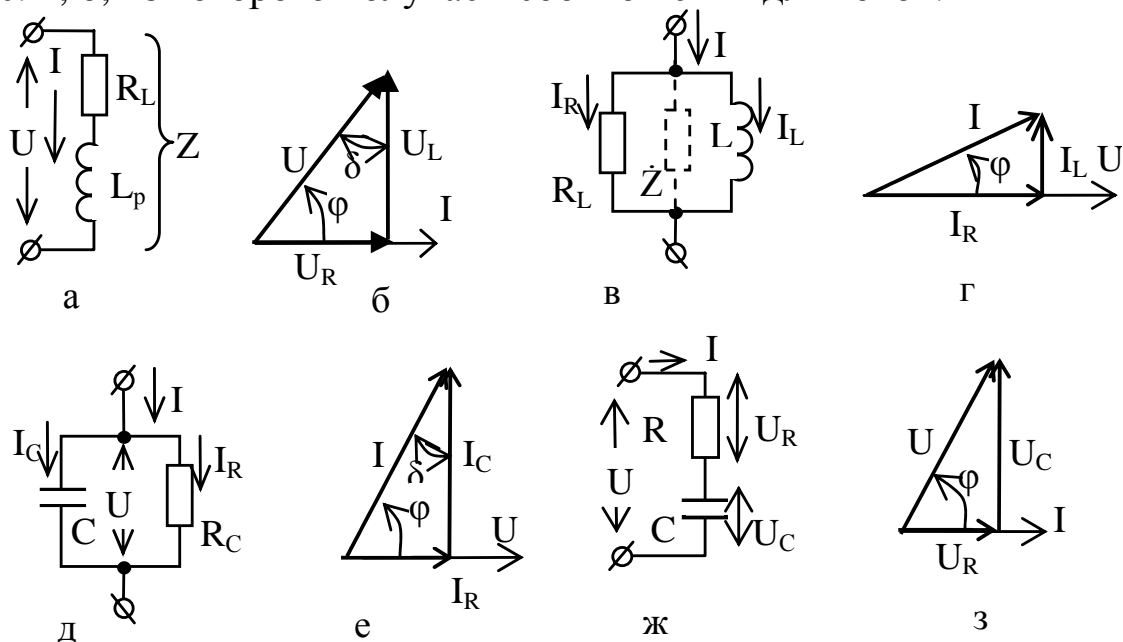


Рис. 3. Схемы замещения реактивных компонентов  
а - г) схемы замещения и векторные диаграммы токов и напряжений для катушки индуктивности; д - з) то же для

На рис. 3 представлены схемы замещения катушки индуктивности и конденсатора их эквивалентными последовательными и параллельными схемами, используемыми для определения параметров в измерителе иммитансов типа МТ 4080D.

Поскольку в описании прибора использованы обозначения компонентов, несколько отличающиеся от принятых нами выше, то приведем их отдельно.

Обозначение	Описание
<b>Z</b>	комплексное сопротивление (импеданс)
<b>Ls, Lp</b>	индуктивность (для последовательной и параллельной эквивалентной схемы замещения соответственно)
<b>Cs, Cp</b>	емкость (последовательная и параллельная схемы замещения соответственно)
<b>DCR</b>	сопротивление постоянному току (у нас – $R$ )
<b>ESR</b>	эквивалентное последовательное сопротивление ( $R_L$ или $R_C$ )
<b>D</b>	тангенс угла потерь $\delta$ (величина, обратная тангенсу угла сдвига фазы между током и напряжением: $D = \tan \delta = 1/\tan \varphi$ )
<b>Q</b>	добротность, (величина, обратная тангенсу угла потерь: $Q = 1/D$ )
<b><math>\theta</math></b>	фазовый сдвиг между током и напряжением в эквивалентной схеме замещения
<b>OL (-OL)</b>	индикация превышения предела измерения
<b>Мигание индикации Test</b>	аккумулятор разряжен ниже нормы, требуется подзарядка

Эквивалентные схемы замещения, используемые в измерителе, представлены на рис. 3.

Для измерения индуктивностей "обычных" катушек индуктивности (колебательных контуров, фильтров, дросселей, трансформаторов, линий задержек и т.д.) используется последовательная схема замещения (рис. 3, б), т.е. измерения производятся в режиме индикации параметра  $L_s$ . Формальное правило: последовательная схема

замещения индуктивности применяется тогда, когда большая часть потерь энергии происходит на омическом сопротивлении. И лишь при очень высоких частотах потери на гистерезис, вихревые токи в сердечнике и излучение начинают превышать омические потери. В этом случае применяется параллельная схема замещения, т.е. режим измерения  $L_p$ .

Расчетные формулы режима измерения индуктивности:

$Z = [ESR^2 + (2\pi fL)^2]^{1/2}$  – комплексное сопротивление последовательной эквивалентной схемы;

$\theta = \arctg(2\pi fL/ESR)$  – угол сдвига фаз между  $\omega L$  и  $R$ . (между  $U_L$  и  $U_R$ ).

$D = Z/2\pi fL$  – тангенс угла потерь.

$Q = 1/\tg \theta = ESR/2\pi fL$  – добротность катушки.

$R$  – сопротивление катушки на постоянном токе.

$ESR$  – последовательное омическое сопротивление импеданса.

$X = 2\pi fL$  – реактивная часть комплексного сопротивления, по которой рассчитывается индуктивность  $L_s$ .

$f$  – частота, на которой измеряются параметры эквивалентной схемы (частота тест-сигнала).

Эти формулы соответствуют формулам треугольника напряжения на рис. 3:

$$\tg \delta = \frac{U_R}{U_L} = \frac{R_L I}{\omega L I} = \frac{R_L}{\omega L}; \quad Q = \frac{1}{\tg \delta} = \frac{\omega L}{R_L} = \tg \varphi,$$

где  $\delta$  – угол потерь,  $\varphi$  – угол сдвига фаз между током и напряжением на катушке,  $Q$  – добротность катушки (величина, обратно пропорциональная тангенсу угла потерь),  $L$  – индуктивность катушки,  $R_L$  – омическое сопротивление катушки,  $\omega$  – частота, на которой производятся измерения (частота тест-сигнала).

Схемы замещения конденсатора и соответствующие векторные диаграммы представлены на рис. 2, д...з.

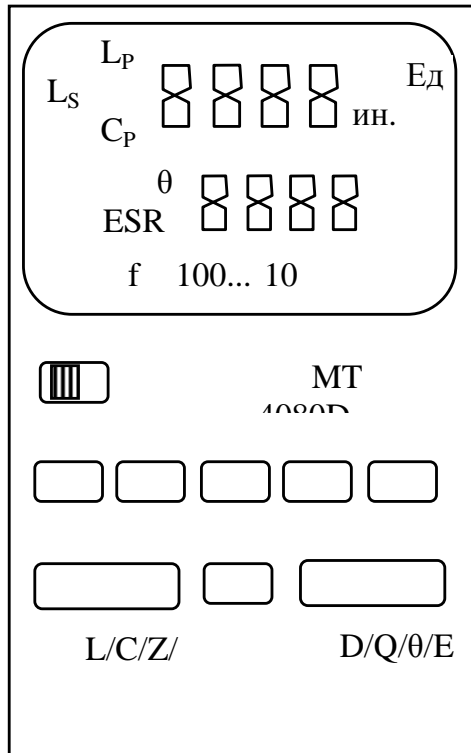
По векторным диаграммам легко получить расчетные формулы:

$$R_{np} = R_S = \frac{1}{\omega C \tg \delta}; \quad R_{nc} = R_p = \frac{\tg \delta}{\omega C}.$$

Обычный режим измерения емкости – параллельная схема замещения (индикация  $C_p$ ), в которой параллельное сопротивление "замещает" сопротивление утечки диэлектрика конденсатора.

## Краткая инструкция пользования измерителем МТ4080D

На рис. 1П. представлено условное изображение передней панели прибора. Верхний ряд цифр индикаторной панели отражает величину (цифровое значение) измеряемого параметра, который высвечивается слева от этих цифр.



Нижний цифровой ряд показывает значение вспомогательных параметров, указанных слева от этого ряда. Нижняя левая кнопка служит для установки измеряемой величины  $L/C/Z/DCR$ , а правая – для установки вспомогательного измеряемого параметра  $D/Q/\theta/ESR$ .

Левая кнопка среднего ряда (обозначенная буквой  $f$ ) переключает частоту тест-сигнала (частоту, на которой происходит измерение параметров).

Индуктивность и емкость могут измеряться по двум схемам замещения катушки индуктивно-

сти и конденсатора – по последовательной ( $L_s$ ,  $C_s$ ) и параллельной ( $L_p$ ,  $C_p$ ). В нашем случае рекомендуется проводить измерения  $L_s$ ,  $C_s$ .

**Обозначения величин, которые нам предстоит измерять.**  $L_s$ ,  $C_s$  – индуктивность и емкость при последовательной схеме замещения,  $Z$  – модуль полного (комплексного) сопротивления элемента или участка цепи, включающего активные и реактивные элементы,  $DCR$  – сопротивление постоянному току (активное сопротивление). Со значением остальных величин можно познакомиться в руководстве по эксплуатации измерителя иммитанса. (**Иммитанс** – общее название для *импеданса*  $Z$ , т.е. комплексного сопротивления, и *адмиттанса*  $Y$ , т.е. комплексной проводимости:  $Y=1/Z$ ).

**Измерения.** После включения прибора кнопкой  $L/C/Z/DCR$  выберите нужный параметр (индицируется слева вверху) и проведите измерение на частоте тест-сигнала 1 кГц. Помните, что катушка ин-

дуктивности представляет собой последовательное соединение индуктивности  $L$  и омического сопротивления провода  $R$ . Поэтому после измерения  $L$  сразу же включите режим измерения DCR и измерьте активное сопротивление катушки.

### 5. Краткая инструкция пользования генератором SFG 8255

На рис. 2П приведено условное изображение передней панели генератора. Верхний ряд кнопок позволяет установить 7 поддиапазонов регулирования частоты от Гц до МГц. Три отмеченные значками кнопки нижнего ряда предназначены для задания формы сигнала. Справа внизу находится выходной разъем и левее его регулятор амплитуды выхода. Еще левее – регулятор смещения (добавка постоянной составляющей к выходному сигналу). Ручка "скважность" служит для изменения скважности (отношения  $T/T_{\text{и}}$ , где  $T_{\text{и}}$  – длительность импульса, а  $T$  – период повторения). Левая кнопка нижнего ряда – включатель питания и рядом с ней ручка плавной установки частоты сигнала в каждом поддиапазоне. Слева вверху – индикаторная панель, указывающая частоту сигнала и целый ряд вспомогательных параметров.

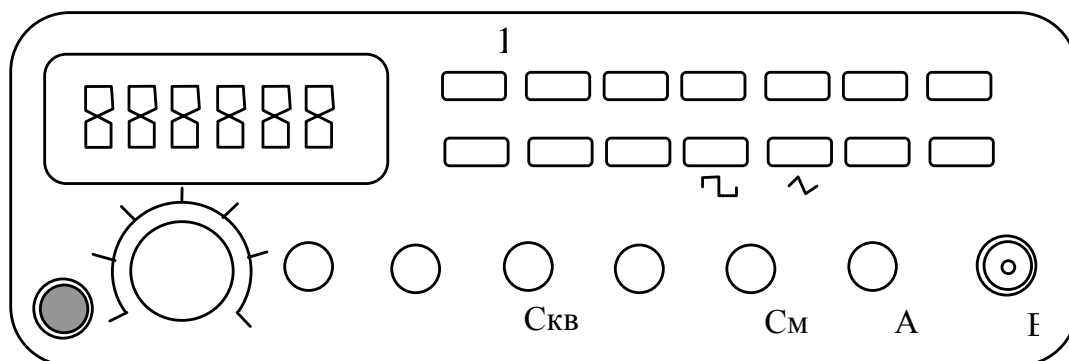


Рис. 2. Генератор GFG 8255

Этих сведений достаточно для оперативной работы с генератором. Более подробные сведения о режимах его работы нужно смотреть в руководстве по его эксплуатации.

2. Включите приборы (генератор и осциллограф) и установите на выходе генератора уровень сигнала, близкий к максимальному, форму сигнала – синусоидальную. Получите на осциллографе ус-

тойчивую картину синусоидальных колебаний и все дальнейшие переключения режимов генератора контролируйте с помощью осциллографа.

3. Переключая кнопки и используя регуляторы нижнего ряда проследите за изменением режимов работы генератора. Обратите внимание на действие регуляторов "смещение" и "скважность" при различной форме сигналов. Не забудьте, что в этом случае вход осциллографа должен быть настроен на регистрацию как постоянной, так и переменной составляющей (открытый вход, DC).

**В. Б. Рева, Л. Н. Вячеславов, В. Л. Курочкин, Л. Н. Смирных**

## **Электрические цепи**

Учебно-методическое пособие

Редактор *С. В. Исакова*

Подписано в печать *xx.xx.2008* г.

Формат 60 х 84 / 16. Офсетная печать.

Уч. изд. л. *х,х*. Усл. печ. л. *х,х*. Тираж 150 экз.

Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.  
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.