

Лабораторная работа №5

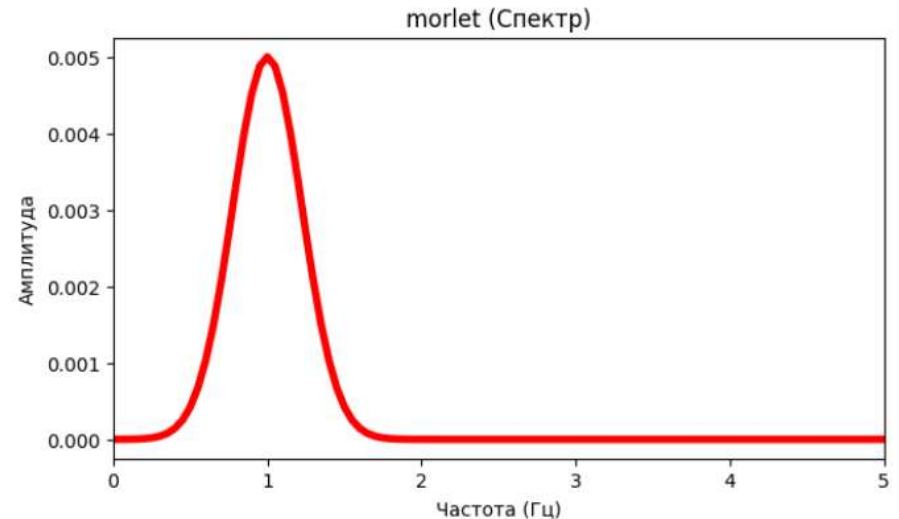
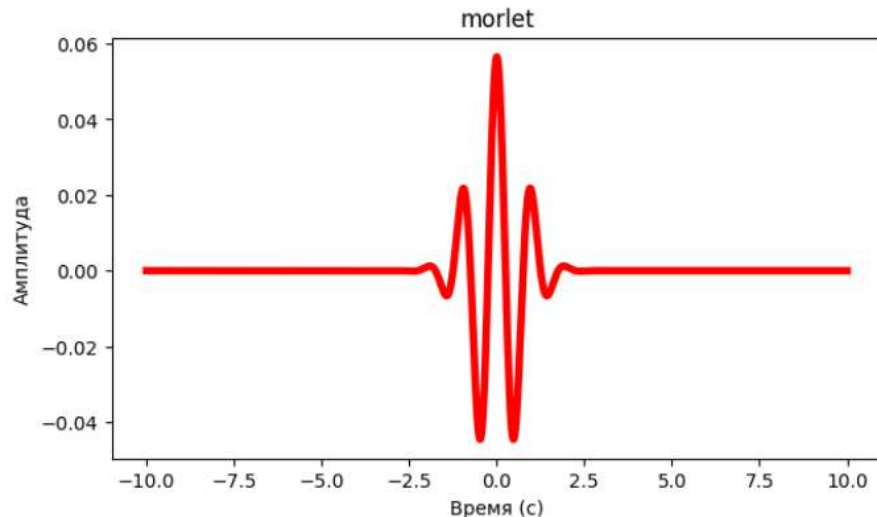
1. Реализовать вейвлет Морле во временном пространстве $\psi(t)$, формула (1).

Реализовать вейвлет Морле в частотном пространстве $\hat{\psi}(\omega)$. Это можно сделать используя обратное преобразование Фурье от $\psi(t)$ или воспользоваться формулой (2).

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} e^{i\omega_0 t} \quad (1)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \alpha \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2 \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4}} \quad (2)$$

Используя формулу вейвлета Морле, выясните, как сместить основную частоту фильтрации. Объясните, как выбор основной частоты влияет на фильтрацию сигнала и на поведение вейвлета. Постройте графики временной и частотной формы вейвлета Морле при разных значениях основной частоты фильтрации.



2. Реализовать вейвлет “Мексиканская шляпа” во временном пространстве $\psi(t)$.

Реализовать вейвлет “Мексиканская шляпа” в частотном пространстве $\hat{\psi}(\omega)$. Это можно сделать используя обратное преобразование Фурье от $\psi(t)$ или воспользоваться формулой (4).

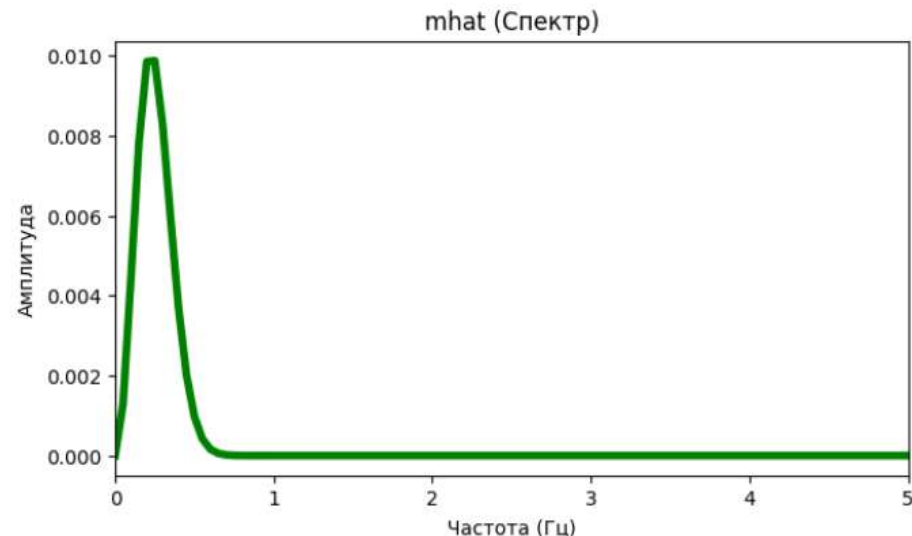
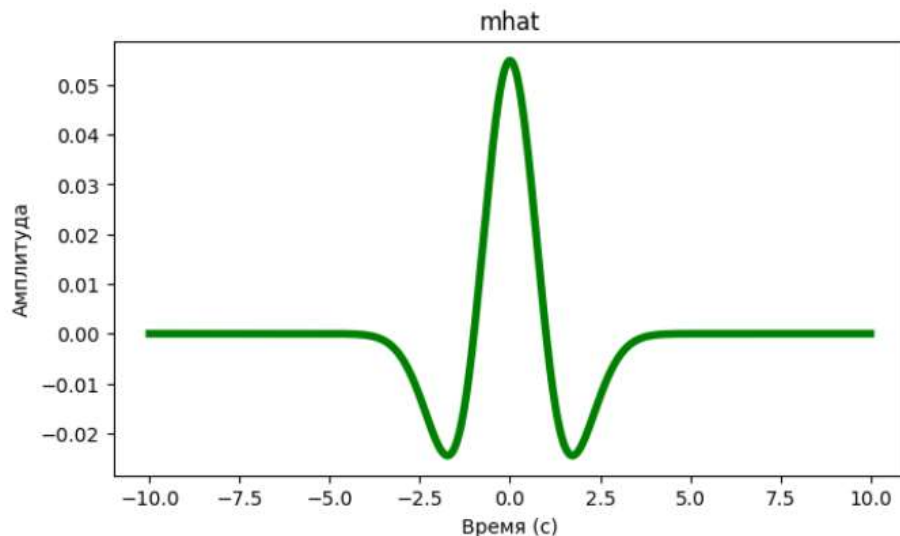
$$\psi(t) = \left(1 - \frac{(t - t_0)^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{(t - t_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i\omega_0 t} \quad (3)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = (\omega - \omega_0)^2 e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2 \sigma^2}{2}} \quad (4)$$

Где:

- t_0 — это сдвиг по времени (если требуется),
- $e^{i\omega_0 t}$ — гармоническая осцилляция с центральной частотой ω_0 .

Используя формулу “Мексиканская шляпа”, выясните, как сместить основную частоту фильтрации. Объясните, как выбор основной частоты влияет на фильтрацию сигнала и на поведение вейвлета. Постройте графики временной и частотной формы вейвлета Морле при разных значениях основной частоты фильтрации.



3. Реализовать вейвлет Хаара во временном пространстве $\psi(t)$. Вейвлет состоит из двух прямоугольных импульсов положительного для интервала $0 \leq t < 0.5$ и отрицательного для интервала $0.5 \leq t < 1$ и может быть представлен согласно формуле (5).

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5, \\ -1, & 0.5 \leq t < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

В частотной области вейвлет Хаара $\psi(\omega)$ может быть получен с помощью преобразования Фурье от формулы (5) или используя формулу (6).

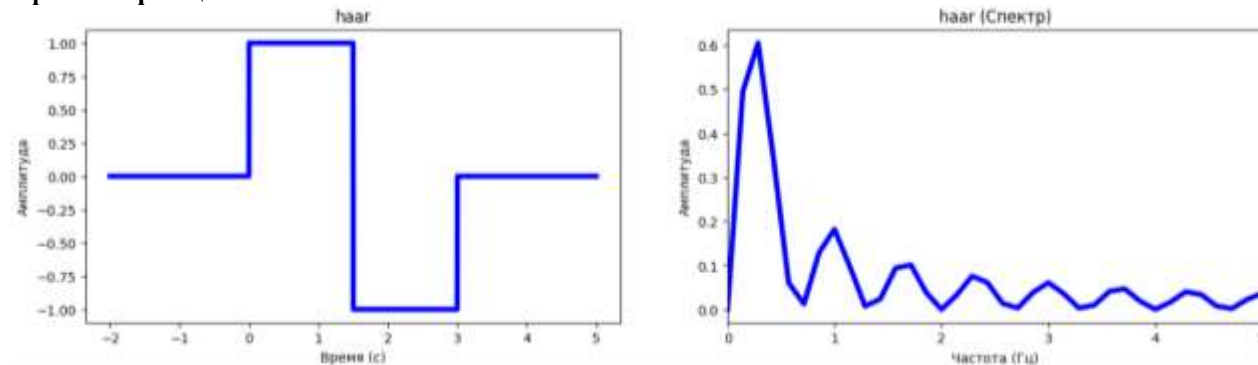
$$\hat{\psi}(\omega) = 2i \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-i\omega/2} \quad (6)$$

Чтобы изменить центральную частоту фильтрации, мы можем применить масштабирование согласно формуле (7). Если мы хотим увеличить центральную частоту, нужно уменьшить временной масштаб и наоборот. Масштабирование во временной области приводит к изменению частотных характеристик в частотной области согласно формуле (8).

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (7) \quad \bullet \text{ При } a < 1, \text{ основной вейвлет сжимается, что увеличивает центральную частоту.}$$

$$\hat{\psi}_a(\omega) = \sqrt{a} \hat{\psi}(a\omega) \quad (8) \quad \bullet \text{ При } a > 1, \text{ вейвлет расширяется, что уменьшает центральную частоту.}$$

Постройте графики временной и частотной формы вейвлета Хаара при разных значениях основной частоты фильтрации.



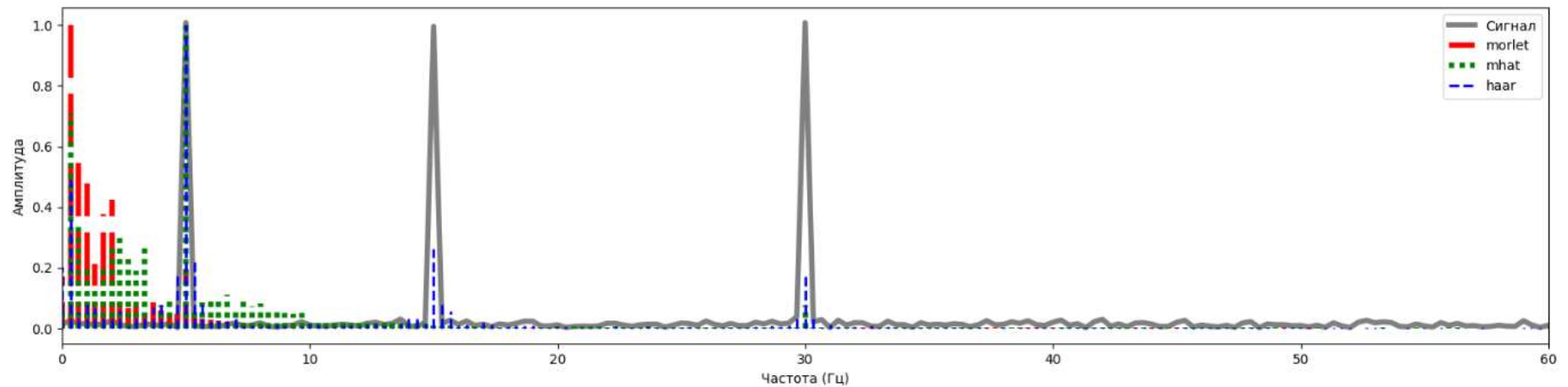
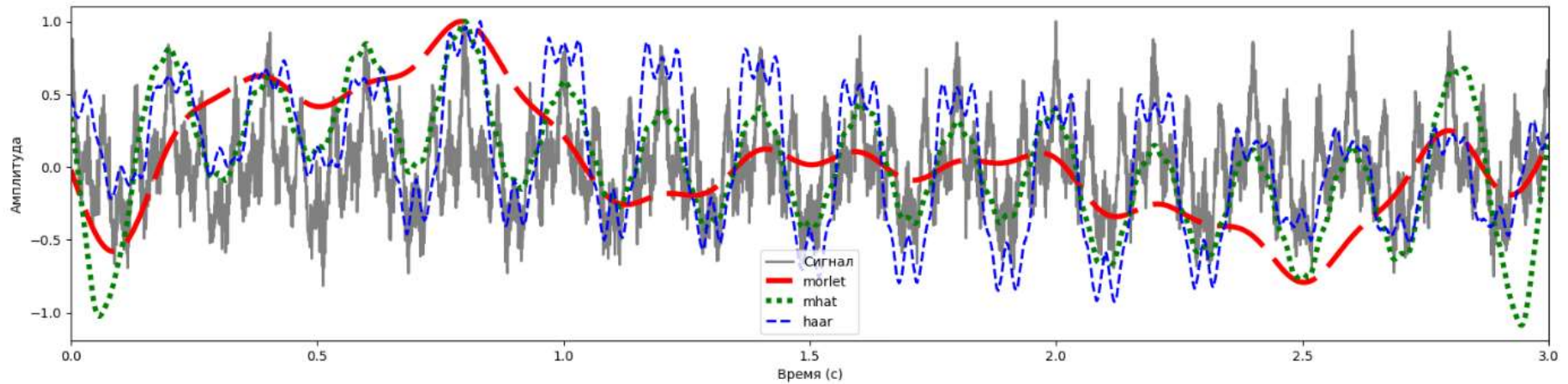
4. Рассмотреть произвольный сигнал с шумом.

Реализовать свертку сигнала с вейвлетами Морле, вейвлетом “Мексиканская шляпа” и вейвлетом Хаара.

Осуществить фильтрацию сигналов с помощью этих 3-х вейвлетов.

Сравнить результаты.

Отметить сильные и слабые стороны каждого из вейвлетов.



5. На рис 5.(а) приведен сигнал, частота которого меняется со временем. На рис 5.(б) представлена спектрограмма данного сигнала, которая получена в результате сверки сигнала с вейвлетом Морле. Реализовать данный код на языке программирования Python. Разобраться в построении спектрограммы.

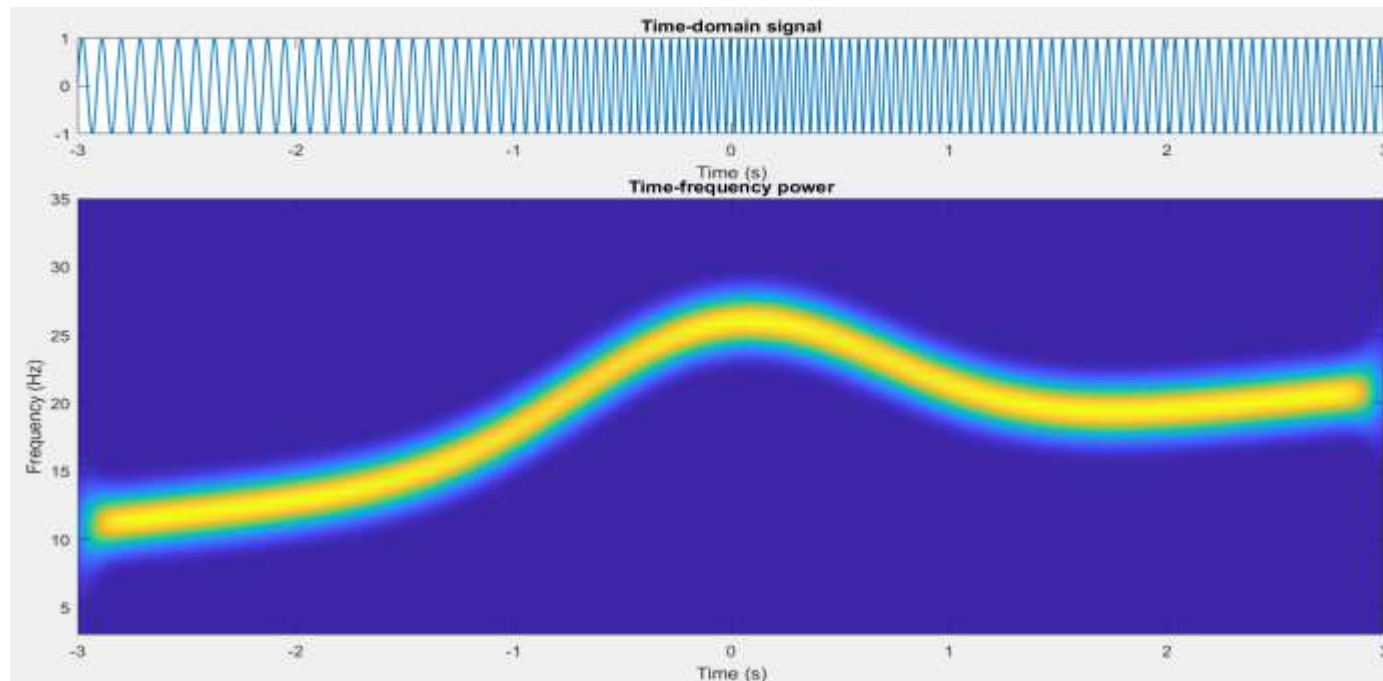


Рис 5.(а)

Рис 5.(б)

6. Скачайте с интернета любой аудио файл, постройте для него три спектрограммы используя вейвлет Морле, вейвлет Хаара и вейвлет “Мексиканская шляпа. Объясните результаты.

Убедитесь, что Ваш алгоритм работает правильно, для этого скачайте аудио звук любой чистой ноты и постройте для него три спектрограммы используя вейвлет Морле, вейвлет Хаара и вейвлет “Мексиканская шляпа. Например, для ноты “ля” первой октавы основная гармоника должна соответствовать 440 Гц.

Алгоритм

1. Создается сигнал как синусоида с частотной модуляцией.

```
signal = np.sin(2 * np.pi * (time + np.cumsum(freqmod))/srates)
```

2. Формирование вейвлета. Вейвлеты — это комплексные синусоиды, умноженные на гауссово окно. Они используются для анализа сигнала на разных частотах.

```
wavelets[wi, :] = np.exp(1j * 2 * np.pi * freq[wi] * time) * gaussian
```

3. Свертка сигнала с вейвлетами:

Свертка реализована через быстрое преобразование Фурье (FFT) для ускорения вычислений. Для каждого вейвлета:

Вычисляется FFT вейвлета и сигнала.

Перемножаются спектры (FFT сигнала и FFT вейвлета).

Обратное FFT (IFFT) возвращает результат свертки во временной области.

```
sigX = scipy.fftpack.fft(signal, nconv) # FFT сигнала
```

```
waveX = scipy.fftpack.fft(wavelets[fi, :], nconv) # FFT вейвлета
```

```
convres = scipy.fftpack.ifft(waveX * sigX) # Обратное FFT произведения
```

```
tf[fi, :] = np.abs(convres)**2 # Сохранение мощности
```

4. Визуализация: Результат свертки визуализируется как временно-частотная карта, показывающая мощность сигнала на разных частотах и времени.

```
plt.contourf(time, freq, tf)
```

```
plt.xlabel('Time (s)'), plt.ylabel('Frequency (Hz)')
```