ДНФ

Содержание

ДНФ

Определение:

Простой конъюнкцией (англ. *inclusive conjunction*) или **конъюнктом** (англ. *conjunct*) называется конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Простая конъюнкция

- **полная**, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно 1 раз;
- **монотонная**, если она не содержит отрицаний переменных.

Определение:

Дизъюнктивная нормальная форма, ДНФ (англ. *disjunctive normal form, DNF*) — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид дизъюнкции нескольких простых конъюнктов.

Пример ДНФ: $f(x,y,z) = (x \land y) \lor (y \land \neg z)$.

СДНФ

Определение:

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ (англ. *perfect disjunctive normal form, PDNF*) — ДНФ, удовлетворяющая условиям:

- в ней нет одинаковых простых конъюнкций,
- каждая простая конъюнкция полная.

Пример СДНФ: $f(x,y,z) = (x \land \neg y \land z) \lor (x \land y \land \neg z)$.

Теорема:

Для любой булевой функции $f(\vec{x})$, не равной тождественному нулю, существует СДНФ, ее задающая.

Доказательство:

$\triangleright$

Для любой булевой функции выполняется следующее соотношение, называемое **разложением Шеннона**:

$$f(\vec{x}) = \neg x_i \land f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \lor x_i \land f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Данное соотношение легко проверить подстановкой возможных значений x_i (0 и 1). Эта формула позволяет выносить x_i за знак функции. Последовательно вынося x_1, x_2,.., x_n за знак $f(\vec{x})$, получаем следующую формулу:

$$f(\vec{x}) = \neg x_1 \land \neg x_2 \land \ldots \land \neg x_{n-1} \land \neg x_n \land f(0,0,\ldots,0,0) \ \lor$$

$$\neg x_1 \land \neg x_2 \land \ldots \land \neg x_{n-1} \land x_n \land f(0,0,\ldots,0,1) \ \lor$$

$$\ldots$$

$$\lor \ x_1 \land x_2 \land \ldots \land x_{n-1} \land \neg x_n \land f(1,1,\ldots,1,0) \ \lor$$

$$x_1 \land x_2 \land \ldots \land x_{n-1} \land x_n \land f(1,1,\ldots,1)$$

Так как применение данного соотношения к каждой из переменных увеличивает количество конъюнктов в два раза, то для функции от n переменных мы имеем 2^n конъюнктов. Каждый из них соответствует значению функции на одном из 2^n возможных наборов значений n переменных. Если на некотором наборе $f(\vec{x}) = 0$, то весь соответствующий конъюнкт также равен нулю и из представления данной функции его можно исключить. Если же $f(\vec{x}) = 1$, то в соответствующем конъюнкте само значение функции можно опустить. В результате для произвольной функции была построена СДНФ.

◁

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 1.
2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Пример построения СДНФ для медианы

Построение СДНФ для медианы от трех аргументов

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 1.

x	y	z	$\langle x, y, z \rangle$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.

x	y	z	$\langle x, y, z \rangle$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	**1**	**1**	**1**	$(\neg x \wedge y \wedge z)$
1	0	0	0	
1	**0**	**1**	**1**	$(x \wedge \neg y \wedge z)$
1	**1**	**0**	**1**	$(x \wedge y \wedge \neg z)$
1	**1**	**1**	**1**	$(x \wedge y \wedge z)$

3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции:

$\langle x, y, z \rangle = (x \land y \land z) \lor (\neg x \land y \land z) \lor (x \land \neg y \land z) \lor (x \land y \land \neg z)$.

Построение СДНФ для медианы от пяти аргументов

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	
0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	1	0	
0	0	1	1	0	0	
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	$(\neg x_1 \land \neg x_2 \land x_3 \land x_4 \land x_5)$
0	1	0	0	0	0	
0	1	0	0	1	0	
0	1	0	1	0	0	
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	$(\neg x_1 \land x_2 \land \neg x_3 \land x_4 \land x_5)$
0	1	1	0	0	0	
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	$(\neg x_1 \land x_2 \land x_3 \land \neg x_4 \land x_5)$
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	$(\neg x_1 \land x_2 \land x_3 \land x_4 \land \neg x_5)$
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	$(\neg x_1 \land x_2 \land x_3 \land x_4 \land x_5)$
1	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	0	
1	0	0	1	0	0	
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	$(x_1 \land \neg x_2 \land \neg x_3 \land x_4 \land x_5)$
1	0	1	0	0	0	
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	$(x_1 \land \neg x_2 \land x_3 \land \neg x_4 \land x_5)$
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	$(x_1 \land \neg x_2 \land x_3 \land x_4 \land \neg x_5)$
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	$(x_1 \land \neg x_2 \land x_3 \land x_4 \land x_5)$
1	1	0	0	0	0	
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	$(x_1 \land x_2 \land \neg x_3 \land \neg x_4 \land x_5)$
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	$(x_1 \land x_2 \land \neg x_3 \land x_4 \land \neg x_5)$
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	$(x_1 \land x_2 \land \neg x_3 \land x_4 \land x_5)$
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	$(x_1 \land x_2 \land x_3 \land \neg x_4 \land \neg x_5)$
1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	$(x_1 \land x_2 \land x_3 \land \neg x_4 \land x_5)$
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	$(x_1 \land x_2 \land x_3 \land x_4 \land \neg x_5)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	$(x_1 \land x_2 \land x_3 \land x_4 \land x_5)$

$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle = (\overline{x_1} \land \overline{x_2} \land x_3 \land x_4 \land x_5) \lor (\overline{x_1} \land x_2 \land \overline{x_3} \land x_4 \land x_5) \lor (\overline{x_1} \land x_2 \land x_3 \land \overline{x_4} \land x_5) \lor (\overline{x_1} \land x_2 \land x_3 \land x$

Примеры СДНФ для некоторых функций

Стрелка Пирса: $x \downarrow y = (\neg x \land \neg y)$.

Исключающее или: $x \oplus y \oplus z = (\overline{x} \land \overline{y} \land z) \lor (\overline{x} \land y \land \overline{z}) \lor (x \land \overline{y} \land \overline{z}) \lor (x \land y \land z)$.

См. также

- Сокращенная и минимальная ДНФ
- КНФ

Источники информации

- СДНФ — Википедия (http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%94%D0%9D%D0%A4)
- Е.Л Рабкин, Ю.Б. Фарфоровская — Дискретная математика (http://dvo.sut.ru/libr/himath/w163rabk/index.htm)

Источник — «http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=ДНФ&oldid=85541»

- Эта страница последний раз была отредактирована 4 сентября 2022 в 19:35.