Теория игр в топологии

Содержание

Игры на пространстве Бэра

Пусть Y множество и $U \subset Y^\omega$. Для $\bar{x} = (x_0, x_1, ..., x_n) \in Y^{<\omega}$ положим

$$U/\bar{x} = \{\bar{y} \in Y^\omega \ : \ \bar{x}^\frown\bar{y} \in U\}.$$

Пусть $\bar{p} \in Y^{2n}$.

Определим булеву игру с нулевой суммой $G(Y, U; \bar{p})$ с двумя игроками α и β.

0-ой ход. Игрок α выбирает $y_0 \in Y$. Игрок β выбирает $y_1 \in Y$.

n-ый ход. Игрок α выбирает $y_{2n} \in Y$. Игрок β выбирает $y_{2n+1} \in Y$.

После счетного числа ходов игрок α выиграл если $\bar{p}^\frown(y_n)_{n\in\omega} \in U$.

Игру $G(Y,U;\bar{p})$ можно трактовать следующим образом: игроки сначала сделали n ходов $\bar{p}$, потом продолжили игру $G(Y,U)$.
Игра $G(Y,U;\bar{p})$ эквивалентна игре $G(Y/\bar{p},U)$.
Пусть s есть стратегия для игрока $\gamma \in \{\alpha,\beta\}$ и $q=(q_0,...,q_{n-1}) \in Y^n$. Обозначим через $s*q$ частичную партию $p \in Y^{2n}$, которая получается после n ходов, когда игрок γ следует стратегии s а противник на k-ом ходу выбирает q_k.
Стратегию s для γ назовем *оборонительной* (defensive strategy) если
Обозначим

$$Y^{2,<\omega} = \left(Y^2\right)^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} Y^{2n},$$

$$W_\alpha = \{\bar{p} \in Y^{2,<\omega} \ : \ \text{игра } G(Y,U;\bar{p}) \ \alpha\text{–благопритна}\},$$

$$W_\beta = \{\bar{p} \in Y^{2,<\omega} \ : \ \text{игра } G(Y,U;\bar{p}) \ \beta\text{–благопритна}\}.$$

Theorem 1.1.

Пусть U не более чем счетно. Тогда $G(Y, U)$ β-благоприятна.

Пусть $U = \{u_n : n \in \omega\}$, $u_n = (u_{n,0}, u_{n,1}, \dots)$.
Выигрышня стратегия для игрока заключается в следуюшем: на n-ом ходу игрок β выбирает y_{2n+1} таким образом, что $y_{2n+1} \neq u_{n,2n+1}$.

Theorem 1.2.

Пусть $|U| < 2^\omega$. *Тогда* $G(Y,U)$ α*-неблагопричтна.*

Пусть s есть некоторая стратегия игрока α. Пусть $Q \subset Y^\omega$, которые смогут сыграть игроки когда α придерживается стратигии α. Тогда $|Q| = 2^\omega$. Пусть $y \in Q \setminus U$ и q есть такая стратегия β, что результат игры равен y. В этакой партии игрок β стратегией q оправерг стратегию s игрока α.