# Теория игр в топологии

# Содержание

1 Игра Банаха-Мазура

**Theorem 1.1.**

*Пусть $\gamma_n$ есть открытое семейство открытых множеств, $\overline{\bigcup_n \gamma_n} = X$ для $n \in \omega$. Если $BM(X, M)$ $\alpha$-благоприятна, то существует открытое непустое $U \subset X$ и дизъюнктное семейство $\mu_n$ открытых множеств для $n \in \omega$ так что выполняются условия*

1. $\overline{\bigcup_n \mu_n} = \overline{U}$;
2. $\mu_{n+1}$ *вписано в* $\gamma_n$;
3. $\mu_{n+1}$ *вписано в* $\mu_n$;
4. *если* $U_n \in \mu_n$ *и* $U_{n+1} \subset U_n$ *для* $n \in \omega$, *то* $X \cap \bigcap_n U_n \neq \varnothing$;

Пусть $s$ выигрышная стратегия $\alpha$. Положим $U = s(\varnothing)$.
Построим последовательность семейств открытых множеств

$$\mu_0, \mathcal{B}_0, \mu_1, \mathcal{B}_1, \ldots$$

Так что

1. $\mu_0 = \{U\}$;
2. $\mu_n$ дизъюнктные семейства;
3. $\overline{\bigcup \mu_n} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_n} = U$;
4. $\mu_{n+1}$ вписано в $\gamma_n$;
5. $\mathcal{B}_n$ вписанно в $\mu_n$, $\mu_{n+1}$ вписанно в $\mathcal{B}_n$: заданы отображения $\varphi_n : \mu_n \to \mathcal{B}_{n-1}$, $\psi_n : \mathcal{B}_n \to \mu_n$ таким образом, что
   (a) если $U_n \in \mu_n$, то $U_n \subset \varphi_n(U_n) \in \mathcal{B}_{n-1}$;
   (b) если $V_n \in \mathcal{B}_n$, то $V_n \subset \psi_n(V_n) \in \mu_n$.
6. пусть
   (a) $\mathfrak{A}_n = \{(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n) : U_i \in \mu_i$ для $i \leq n$, $V_i \in \mathcal{B}_i$ для $i < n$, $\varphi_i(U_i) = V_{i-1}$ для $0 < i \leq n$, $\psi_i(V_i) = U_i$ для $i < n\ \} =$ $\{(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n) : (U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}) \in \mathfrak{B}_{n-1}$ и $\varphi_n(U_n) = V_{n-1}\ \}$;
   (b) $\mathfrak{B}_n = \{(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n, V_n) :$ $(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n) \in \mathfrak{A}_n$ и $\psi_n(V_n) = U_n\ \}$;

Тогда $s(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}) = U_n$ для $(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n) \in \mathfrak{A}_n$.

# Доказательство.

Пусть $\tau_*(V)$ — все непустые открытые подмножества $V \subset X$. Индукцией по $n$. Положим $\mu_0 = \{U\}$. Пусть $n > 0$. Положим $\mathcal{B}' = \bigcup\{\tau_*(W) : W \in \gamma_n\}$. Для $U_{n-1} \in \mu_{n-1}$ положим Положим

$$\mu = \{s(U_0, V_0, ..., U_{n-1}, V) : ((U_0, V_0, ..., U_{n-1}) \in \mathfrak{A}_{n-1}, V \in \mathcal{B}', V \subset U_{n-}$$

$\mu$ — $\pi$-база $U$. Пусть $\mu_n \subset A$ дизьюнктное семейство и $\overline{\bigcup \mu_n} = \overline{U}$.