Гл. 1. Первая вариация

§ 1.1. Критические точки функционалов

Пусть $\Phi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, имеет локальный экстремум (т. е. максимум или минимум) в точке $\varepsilon = 0$.

Если существует производная $\Phi'(0)$, то

$$\Phi'(0) = 0.$$

Если дополнительно $\Phi \in C^2(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, то по формуле Тейлора

$$\Phi(\varepsilon) - \Phi(0) = \frac{1}{2}\Phi''(\delta\varepsilon)\varepsilon^2$$

для некоторого $\delta \in (0, 1)$. При этом

$$\Phi''(0) \geq 0.$$

в случае, когда $\varepsilon = 0$ — точка локального минимума, и

$$\Phi''(0) \leq 0.$$

в случае, когда $\varepsilon = 0$ — точка локального максимума.

Таким образм, условия

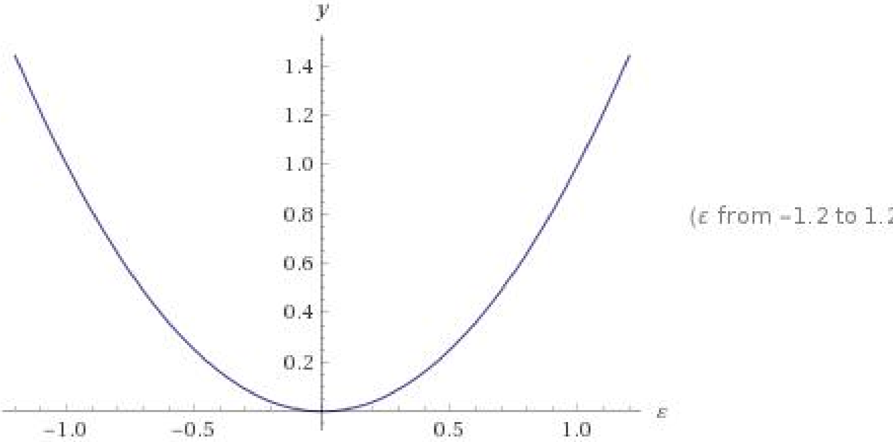
$$\Phi'(0) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi''(0) \geq 0$$

являются необходимыми условиями для локального минимума у C^2-гладкой функции Φ в точке $\varepsilon = 0$. Но эти условия не являются достаточными, как показывает пример функции $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^3$.

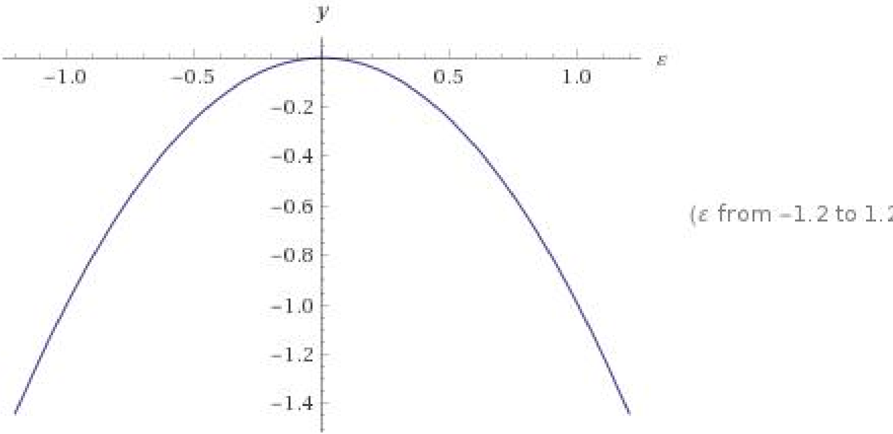
С другой стороны, условия

$$\Phi'(0) = 0, \quad \Phi''(0) > 0 \quad (\text{или} \quad \Phi''(0) < 0)$$

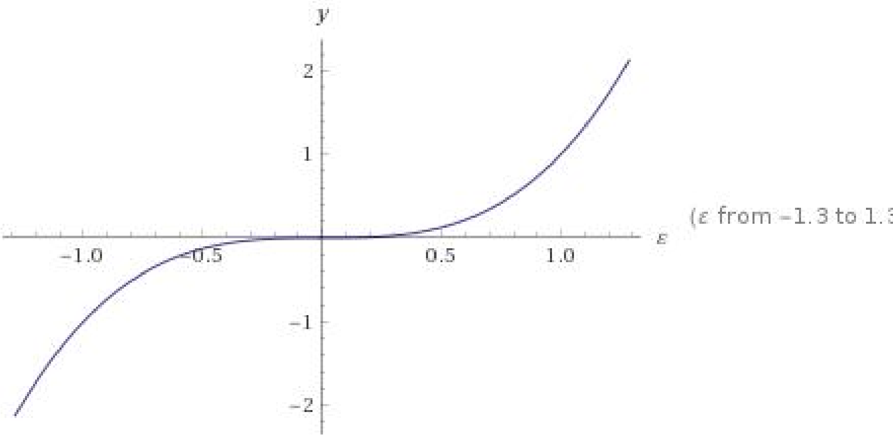
являются достаточными условиями для строгого локального минимума (или максимума) у C^2-гладкой функции Φ в точке $\varepsilon = 0$. Но в свою очередь эти условия не являются необходимыми, как показывает пример функции $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^4$.



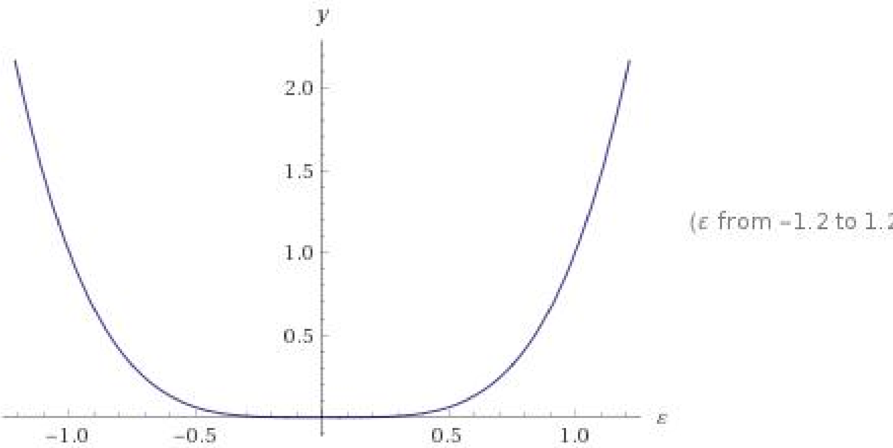
Функция $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^2$, $\varepsilon = 0$ является точкой строгого минимума ($\Phi'(0) = 0$ и $\Phi''(0) > 0$).



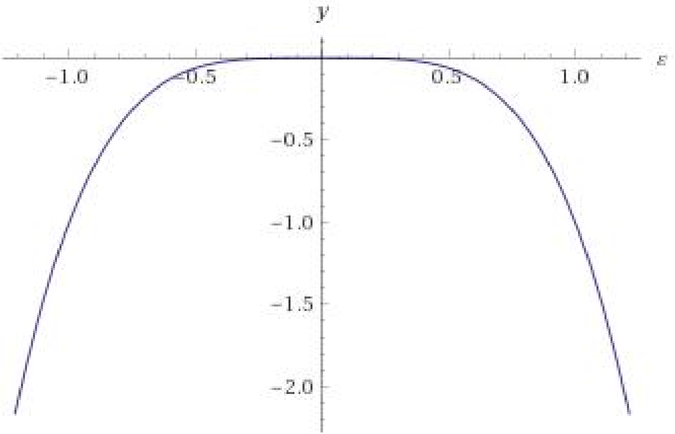
Функция $\Phi(\varepsilon) = -\varepsilon^2$, $\varepsilon = 0$ является точкой строгого максимума ($\Phi'(0) = 0$ и $\Phi''(0) < 0$).



Функция $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^3$, $\varepsilon = 0$ не является точкой ни максимума, ни минимума, но является стационарной ($\Phi'(0) = 0$) и $\Phi''(0) = 0$.



Функция $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^4$, $\varepsilon = 0$ является точкой строгого минимума ($\Phi'(0) = 0$), но при этом $\Phi''(0) = 0$.



(ε from −1.2 to 1.

Функция $\Phi(\varepsilon) = -\varepsilon^4$, $\varepsilon = 0$ является точкой строгого максимума ($\Phi'(0) = 0$), но при этом $\Phi''(0) = 0$.

Другими словами существует небольшой разрыв между необходимыми и достаточными условиями для (строгого) локального экстремума. Такой же разрыв наблюдается и в вариационном исчислении, при этом описание самих условий становится более сложным.

При этом проверка только части условий для поиска экстремумов в вариационных задачах, аналогичных поиску стационарных точек ($\Phi'(\varepsilon) = 0$) для функций Φ одного вещественного аргумента, является содержательной и трудной задачей.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $\mathcal{F} : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция. Тогда для некоторых $u_0 \in \Omega$ и $\zeta \in \mathbb{R}^n$ и для достаточно малого $\varepsilon_0 >$ функция

$$\Phi(\varepsilon) = \mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\zeta), \quad -\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

также является C^1-гладкой. Мы назовем её производную $\Phi'(0)$ при $\varepsilon = 0$ первой вариацией функции $\mathcal{F}$ в точке u_0 по направлению ζ и будем записывать

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \zeta) := \Phi'(0). \tag{1}$$

Первая вариация есть ничто иное как производная $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta}(u_0)$ функции $\mathcal{F}$ в точке u_0 по направлению вектора ζ.

Для $\mathcal{F} \in C^2(\Omega)$ формула

$$\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \zeta) := \Phi''(0) \tag{2}$$

задаёт второую вариацию функции $\mathcal{F}$ в точке u_0 по направлению ζ. В общем, если $\mathcal{F} \in C^\infty(\Omega)$, то m-ая вариация функции $\mathcal{F}$ определяется правилом

$$\delta^m \mathcal{F}(u_0, \zeta) := \Phi^{(m)}(0).$$

Если $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^n)$, то мы можем вычислить

$$\delta \mathcal{F}(u_0, \zeta) = \mathcal{F}_u(u_0) \cdot \zeta = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}_{u_i}(u_0) \zeta^i$$

и

$$\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \zeta) = \mathcal{F}_{uu}(u_0) \zeta \cdot \zeta = \sum_{i,k=1}^{n} \mathcal{F}_{u_i u_k}(u_0) \zeta^i \zeta^k.$$

Тем самым, первая вариация $\delta \mathcal{F}$ есть линейная форма, а вторая вариация $\delta^2 \mathcal{F}$ есть квадратичная форма относительно ζ.

Как необходимое условие для локального экстремума функции $\mathcal{F}$ в точке u_0 является соотношение

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \zeta) = 0 \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

которое эквивалентно условию

$$D\mathcal{F}(u_0) = 0,$$

где $D\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}_u(u_0)$ обозначает градиент функции $\mathcal{F}$ в точке u_0.

Точка u_0, удовлетворяющая (3), называется критической (или стационарной) точкой функции $\mathcal{F}$, а о числе $\mathcal{F}(u_0)$ говорят как о критическом значении $\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{F} \in C^2(\Omega)$. Если u_0 — точка локального минимума функции $\mathcal{F}$, то вторая вариация $\delta^2\mathcal{F}(u_0, \zeta)$ является положительно полуопределённой (неотрицательно определенной) квадратичной формой относительно ζ (т. е. $\delta^2\mathcal{F}(u_0, \zeta) \geq 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{R}^n$) и, эквивалентно, собственные числа матрицы Гесса $D^2\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}_{uu}(u_0) = (\mathcal{F}_{u^i u^k}(u_0))$ неотрицательны.

С другой стороны, если все собственные числа матрицы Гесса $D^2\mathcal{F}(u_0)$ положительны, то критическая точка $u_0 \in \Omega$ доставляет строгий локальный минимум функции $\mathcal{F}$. В действительности, строгая выпуклость функции $\mathcal{F}$ в некоторой окрестности точки u_0 уже обеспечивает достижения строгого локального минимума в точке u_0, но является немного более слабым условием, как можно это видеть из примера функции $\mathcal{F}(u) = |u|^4$. Другими словами, предположение

$$\delta^2\mathcal{F}(u_0, \zeta) > 0 \quad (\text{или} < 0) \tag{4}$$

для всех $\zeta \in \mathbb{R}^n$ с $\zeta \neq 0$ влечёт, что критическая точка $u_0 \in \Omega$ является точкой строгого локального минимума (или максимума) для функции $\mathcal{F}$.

Если в критической точке $u_0 \in \Omega$ матрица Гесса $D^2\mathcal{F}(u_0)$ имеет как положительные, так и отрицательные собственные числа, то из формулы Тейлора

$$\mathcal{F}(u_0+\zeta) - \mathcal{F}(u_0) = \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{F}(u_0,\zeta) = o(|\zeta|^2) \quad (\text{при } \zeta \to 0) \quad (5)$$

получаем, что точка u_0 не является ни точкой локального максимума, ни точкой локального минимума; в этом случае, u_0 называется седловой точкой функции $\mathcal{F}$.
Критическая точка $u_0 \in \Omega$ для функции $\mathcal{F} \in C^2(\Omega)$ называется невырожденной, если матрица Гесса $D^2\mathcal{F}(u_0)$ является несингулярной, т. е. если ноль не является собственным числом матрицы Гесса $D^2\mathcal{F}(u_0)$.

Формула Тейлора (5) влечёт, что невырожденные критические точки являются изолированными критическими точками, а график функции $\mathcal{F}$ в достаточно маленькой окрестности невырожденной критической точки выглядит примерно так же, как у ныворожденной квадратичной формы

$$\mathcal{L}(\zeta) = \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{F}(u_0, \zeta).$$

Действительно, мы можем записать

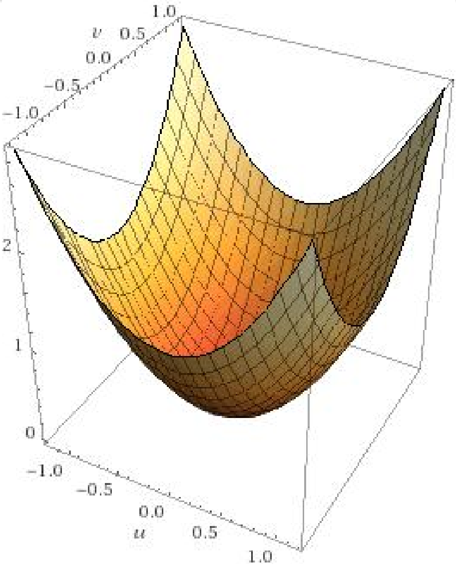
$$\mathcal{F}(u_0+\zeta)-\mathcal{F}(u_0)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(\zeta)\zeta^i\zeta^k,$$

$$a_{ik}(\zeta):=\int\limits_0^1(1-t)\mathcal{F}_{u_iu_k}(u_0+t\zeta)\,dt,$$

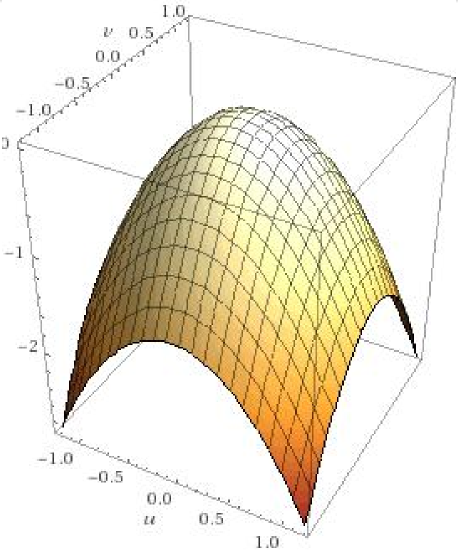
и можно доказать, что существует диффеоморфизм $u=\varphi(v)$ с $u_0=\varphi(0)$, который отображает некоторый шар $B=\{v\in\mathbb{R}^n:\ |v|<\rho\}$ на окрестность $\mathcal{U}$ точки u_0 так, что

$$\mathcal{F}(\varphi(v))=\mathcal{F}(u_0)-\sum_{i=1}^{q}|v^i|^2+\sum_{j=q+1}^{n}|v^j|^2=\mathcal{F}(u_0)+\mathcal{K}(v). \quad (6)$$

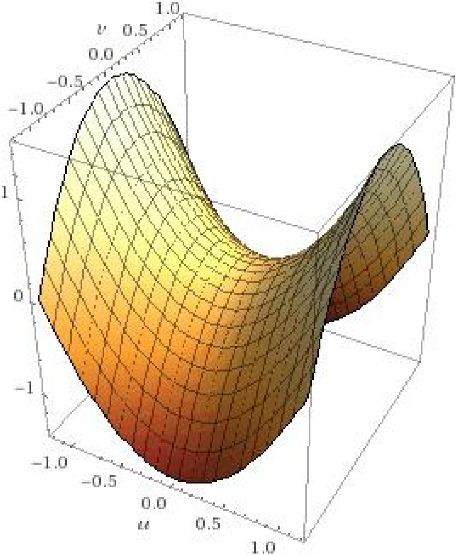
То есть, с точностью до композиции с диффеоморфизмом $\mathcal{F}(u)-\mathcal{F}(u_0)$ является квадратичной формой. Этот результат известен как лемма Морса.



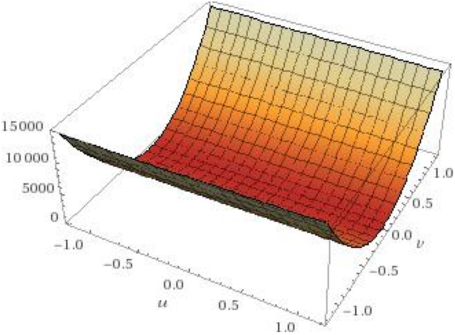
Функция $\mathcal{F}(u, v) = u^2 + v^2$, $(0, 0)$ является невырожденной критической точкой строгого минимума; эллиптический параболоид



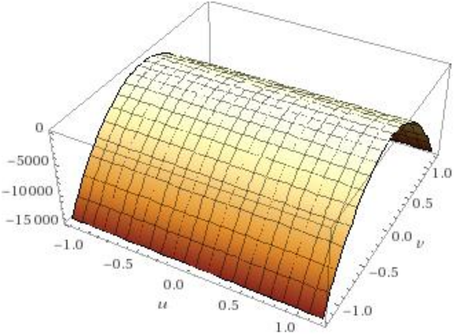
Функция $\mathcal{F}(u, v) = -(u^2 + v^2)$, $(0, 0)$ является невырожденной критической точкой строгого максимума; эллиптический парабалоид.



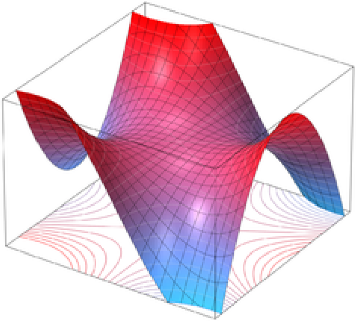
Функция $\mathcal{F}(u,v) = u^2 - v^2$, $(0,0)$ является невырожденной критической седловой точкой; гиперболический парабалоид.



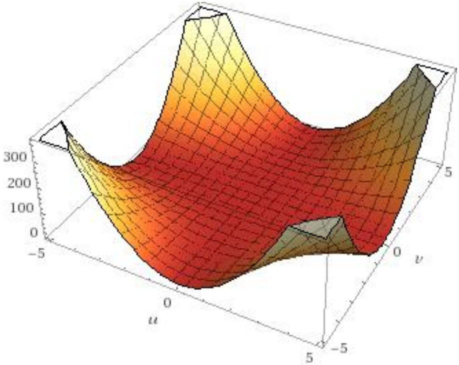
Функция $\mathcal{F}(u, v) = (u - 100v)^2$, $(0, 0)$ является вырожденной критической точкой нестрогого минимума; парабалический цилиндр.



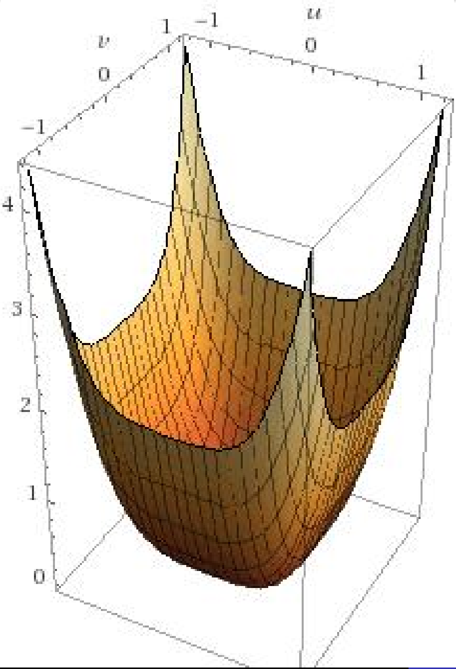
Функция $\mathcal{F}(u,v) = -(u - 100v)^2$, $(0,0)$ является вырожденной критической точкой нестрогого максимума; парабалический цилиндр.



Функция $\mathcal{F}(u, v) = u^3 - 3uv^2 = \mathrm{Re}(w^3)$, $w = u + iv$, $(0, 0)$ является вырожденной критической точкой, не является ни точкой максимума, ни точкой минимума; обезьянье седло.



Функция $\mathcal{F}(u, v) = u^2 v^2$, $(0, 0)$ является вырожденной критической точкой нестрогого максимума.


u
v
−1
0
1
1
0
−1
4
3
2
1
0

Понятия первой и второй вариации переносятся на функционалы

$$\mathcal{F} : V \to \mathbb{R},$$

определеные на некотором подмножестве V произвольного вещественного линейного пространства X. Чтобы это сделать, выберем некоторую точку $u_0 \in V$ и некоторый вектор $\zeta \in X$ и предположим, что интервал $\{u \in X : \ u = u_0 + \varepsilon\zeta, \ |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ содержится в V для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. Тогда определим функцию $\Phi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ правилом $\Phi(\varepsilon) := \mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\zeta)$ и, если существует производная $\Phi'(0)$, то вводим первую вариацию $\delta\mathcal{F}(u_0, \zeta)$ функционала $\mathcal{F}$ в точке u_0 по направлению ζ правилом

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \zeta) := \Phi'(0).$$

Кроме того, если производная $\Phi'(\varepsilon)$ существует для всех $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, а также существует вторая производная $\Phi''(\varepsilon)$, то определим второю вариацию $\delta^2\mathcal{F}(u_0, \zeta)$ функционала $\mathcal{F}$ в точке u_0 по направлению ζ правилом

$$\delta^2\mathcal{F}(u_0, \zeta) := \Phi''(0).$$

Предположим теперь, что только что определенные первые и вторые вариации $\delta\mathcal{F}(u_0, \zeta)$ и $\delta^2\mathcal{F}(u_0, \zeta)$ существуют в некоторой точке $u_0 \in V$ для всех направлений ζ, содержащихся в некотором подпространстве Z пространства X. Кроме того, предположим, что функционал $\mathcal{F} : V \to \mathbb{R}$ имеет минимум в точке u_0. Тогда снова получаем, что

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \zeta) = 0, \quad \delta^2\mathcal{F}(u_0, \zeta) \geq 0 \qquad \text{для всех } \zeta \in Z. \tag{7}$$

В следующем параграфе мы будем применять приведенные рассмотрения к функционалам $\mathcal{F} : V \to \mathbb{R}$, задающимся многомерными интегралами

$$\mathcal{F}(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u(x), Du(x))\,dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

и определёнными для функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, содержащихся в некотором подмножестве V подходящего функционального пространства X, скажем $X \subset C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Замечание 1.1

Почему первая вариация $\delta\mathcal{F}$ используется как основное понятие производной для функционалов. Во-первых, это наиболее старая, заслуженная, прошедшая проверку временем концепция для производной функционала, введенная Лагранжем и Эйлером (поэтому для обозначения используется символ Лагранжа δ). Во-вторых, и это самое важное, это понятие предпочтетельнее в качестве основного, потому что оно достаточно «слабое». Может, например, случиться так, что первая вариация $\delta\mathcal{F}(u_0, \zeta)$ существует для вариаций ζ, содержащихся в некотором классе Z, который достаточно мал по сравнению с пространством , но еще «достаточно большой», чтобы можно было вывести значимые заключения для u_0, хотя другие типы производных могут уже не существовать. Кроме того, нет необходимости вводить норму в линейном пространстве , чтобы определить первую и вторую вариацию $\delta\mathcal{F}$ и $\delta^2\mathcal{F}$.

Другими примерами понятий производной служат производная по Фреше и производная по Гато. Для интегральных функционалов (8) первая вариация и производные по Фреше и Гато, рассматриваемые для $\zeta \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, совпадают в случае, когда интегранд F является функцией класса C^1.
В некоторых руководствах введенную нами первую вариацию именуют «дифференциалом Гато».

§ 1.2. Зануление первой вариации и необходимые условия.

1.2.1. Первая вариация интегральных функционалов.

В этом параграфе мы будем рассматривать функционалы $\mathcal{F}$ следующего типа

$$\mathcal{F}(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u(x), Du(x))\, dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

которые будем называть варициonными интегралами. Будем записывать $\mathcal{F}_\Omega(u)$ или $\mathcal{F}(u, \Omega)$, если хотим указать область интегрирования Ω. Функцию $F(x, u, p)$, участвующую в построении интеграла $\mathcal{F}(u)$, будем называть или лагарнжианом, или вариационным интеграндом, или функцией Лагарнжа. Для вариационных интегралов, которые определяются лагранжианами F, G, . . . , будут обозначаться теми же буквами, но в рукописном написании $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, ...

Далее, в общей ситуации, считаем, что Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ — отображение класса C^1. Кроме того, считаем, что $F(x, u, p)$ — вещественно-значная C^1-гладкая функция, определенная на некотором открытом множестве $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$, содержащем 1-график $\{(x, u(x), Du(x)) : \ x \in \overline{\Omega}\}$ отображения u. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что сложная функция $F(x, v(x), Dv(x))$ определена для всех точек $x \in \overline{\Omega}$ и для всех отображений $v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, удовлетворяющих неравенству $\|v - u\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \delta$. Здесь $\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} := \|v\|_{C(\overline{\Omega})} + \|Dv\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|v\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|$.

Таким образом, интеграл

$$\mathcal{F}(v) = \int\limits_{\Omega} F(x, v(x), Dv(x))\, dx$$

можно записать для любого отображения $v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ с $\|v - u\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \delta$. Следовательно, функция

$$\Phi(\varepsilon) := \mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi)$$

определена для любого отображения $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ и для $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, где ε_0 — некоторое положительное число, меньшее чем $\delta/\|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})}$. Кроме того, Φ – C^1-гладкая функция на $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, поэтому первая вариация $\delta\mathcal{F}(u, \varphi)$ функционала $\mathcal{F}$ в (точке) u в направлении (вектора) φ корректно определена правилом

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) := \Phi'(0)$$

а прямые вычисления дают

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi)=\int\limits_{\Omega}\{F_{u^i}(x,u,Du)\varphi^i+F_{p^i_\alpha}(x,u,Du)\varphi^i_{x^\alpha}\}\,dx, \qquad (10)$$

Здесь используется правило суммирования Эйнштейна: берется сумма по дважды появляющимся греческим индексам от 1 до n и по дважды появляющимся латинским индексам от 1 до N Вводя обозначения $x=(x^\alpha)$, $u=(u^i)$, $p=(p^i_\alpha)$ и $p=(p_1,\ldots,p_n)$, где $p_\alpha=(p^1_\alpha,\ldots,p^N_\alpha)$, $F_{p_\alpha}=(F_{p^1_\alpha},\ldots,F_{p^N_\alpha})$, формулу (10) можно записать в виде

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi)=\int\limits_{\Omega}\{F_u(x,u,Du)\cdot\varphi+F_p(x,u,Du)\cdot D\varphi\}\,dx.$$

Заметим, что при сделанных предположениях на F и u первая вариация $\delta\mathcal{F}(u,\varphi)$ является линейным функционалом относительно $\varphi\in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$.

Формула (10) предлагает ввести в рассмотрение выражение $\delta F(u,\varphi)(x)$, определяемое правилом

$$\delta F(u,\varphi)(x) := F_u(x,u(x),Du(x))\cdot\varphi(x) + F_p(x,u(x),Du(x))\cdot D\varphi(x). \tag{11}$$

для $x \in \overline{\Omega}$. Назовем выражение (11) первой вариацией лагранжиана F в u в направлении φ. Тогда будем записывать

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = \int\limits_{\Omega} \delta F(u,\varphi)(x)\,dx, \tag{12}$$

Рассмотрим соотношение

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \tag{13}$$

которое с учетом (10) эквивалентно

$$\int\limits_\Omega \left\{ F_{u^i}(x,u,Du)\varphi^i + F_{p^i_\alpha}(x,u,Du)\varphi^i_{x^\alpha} \right\} dx = 0, \quad \text{для всех } \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \tag{14}$$

Здесь $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ — пространство C^∞-гладких отображений $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^N$, имеющих компактный носитель $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$.

Отображение $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, удовлетворяющее соотношению (14) для всех $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, называется слабой экстремалью функционала $\mathcal{F}$, а уравнение (14) называют слабым уравнением Эйлера (или, более точно, уравнением Эйлера для u в слабой форме).

Заметим, что соотношение (14) следует из достаточно слабого свойства минимальности для отображения u. Достаточно предположить, что для некоторого $\delta_0 \in (0, \delta)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varphi) \tag{15}$$

для всех $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ с $\|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \delta_0$
Дадим следующее

Определение 1.2

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторое подмножество $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Тогда $u \in \mathcal{C}$ называется слабым минимизурующим отображением для функционала $\mathcal{F}$ в (относительно) $\mathcal{C}$, если существует $\delta_0 > 0$ такое, что $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$ для всех $v \in \mathcal{C}$, удовлетворяющих $\|v - u\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \delta_0$.

Заметим, что соотношение (14) следует из следующего более ослабленного свойства минимальности.

Предложение 1.3

Предположим, что для каждой точки $x_0 \in \Omega$ *существует* $r > 0$ *со следующими свойствами*
(i) $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$,
(ii) для каждого $\varphi \in C_c^\infty(B_r(x_0), \mathbb{R}^N)$ *найдется число* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что неравенства* $\|\varepsilon\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \delta$ *и* $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi)$ *выполняются для всех* ε *с* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.
Тогда выполнено соотношение (14).

Другими словами, слабое уравнение Эйлера (14) уже выполняется, если значения функционала $\mathcal{F}$ не уменьшаются, когда мы добавляем только маленькие локальные изменения для u.

1.2.2. Фундаментальная лемма вариационного исчисления, уравнение Эйлера и оператор Эйлера L_F

Теорема 1.4

Предположим, что $F \in C^2(\mathcal{U})$ *и* u *— слабая экстремаль функционала* $\mathcal{F}$*, т.е.*

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ F_{u^i}(x,u,Du)\varphi^i + F_{p^i_\alpha}(x,u,Du)\varphi^i_{x^\alpha} \right\} dx = 0, \text{ для всех } \varphi \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N).$$

Кроме того, пусть отображение u *класса* $C^2(\Omega,\mathbb{R}^N)$*. Тогда отображение* u *удовлетворяет*

$$D_\alpha F_{p^i_\alpha}(x,u(x),Du(x)) - F_{u^i}(x,u(x),Du(x)) = 0, \quad 1 \le i \le N, \tag{16}$$

для всех $x \in \Omega$*.*

Утверждение остается справедливым, если вместо условия $F \in C^2(\mathcal{U})$ *только предположить, что* $F_u \in C^0(\mathcal{U})$ *и* $F_p \in C^1(\mathcal{U})$*.*

Лемма 1.5 (фундаментальная)

Пусть $f(x)$ *— непрерывная вещественно-значная функция на некотором открытом множестве* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *и предположим, что*

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\eta(x)\,dx \geq 0 \text{ для всех } \eta \in C_c^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ с } \eta \geq 0 \tag{17}$$

или

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\eta(x)\,dx = 0 \text{ для всех } \eta \in C_c^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N). \tag{18}$$

Тогда

$$f(x) \geq 0 \text{ или, соответственно, } f(x) = 0$$

для всех $x \in \Omega$.

Определение 1.6

Уравнения (16) называются уравнениями Эйлера интегрального функционала $\mathcal{F}(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u, Du)\, dx$, а их C^2-гладкие решения $u(x)$ называют экстремалями функционала $\mathcal{F}$ или F-экстремалями. Мы используем символ L_F (или просто L) для оператора Эйлера

$$L_F(u) := F_u(\cdot, u(\cdot), Du(\cdot)) - D_\alpha F_{p_\alpha}(\cdot, u(\cdot), Du(\cdot)). \qquad (19)$$

Пример 1.7

1. Интеграл Дирихле

$$\mathcal{D}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |Du|^2\,dx, \quad N = 1.$$

Уравнение Эйлера — уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega.$$

2. Интеграл

$$\mathcal{F}(u) = \int\limits_{\Omega} (\frac{1}{2}|Du|^2 + f(x)u)\,dx, \quad N = 1.$$

Уравнение Эйлера — уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(x) \quad \text{в } \Omega.$$

3. Нелинейное уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(u) \quad \text{в } \Omega$$

есть уравнение Эйлера для интеграла

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|Du|^2 + g(u)\right) dx, \quad N = 1,$$

где $g'(z) = f(z)$.

Аналогично, интеграл

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} - g(u)\right)dx, \quad p \geq 1,$$

имеет уравнение Эйлера

$$-\Delta u = u|u|^{p-1} + f(u),$$

которое является важным модельным уравнением в физике, где предполагается, что

$$f(0) = 0, \quad \lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{|z|^p} = 0.$$

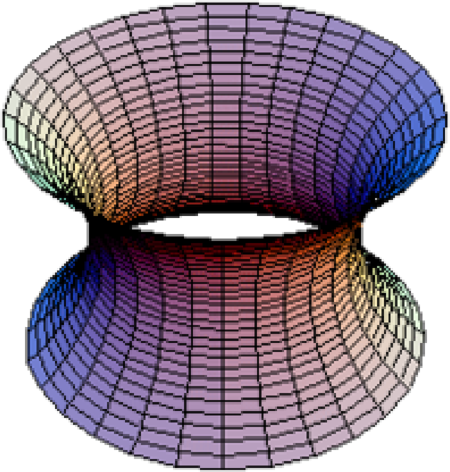
В частности, если $n = 4$ и $p = 3$, то интеграл

$$\int_{\Omega} (\frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{4}|u|^4 + \frac{1}{2}\lambda|u|^2)\, dx$$

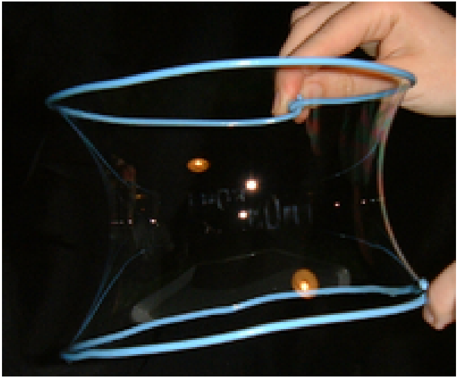
имеет уравнение Эйлера

$$-\Delta u = u^3 - \lambda u.$$

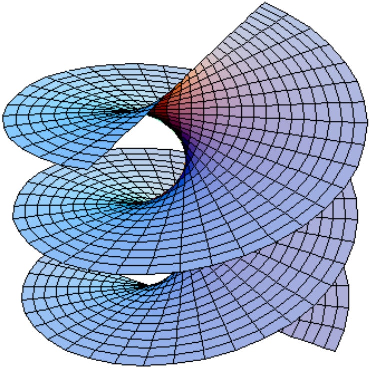
Эта очень простая модель появляется в физике в связи с упрощенной версией уравнений Янга–Милса.



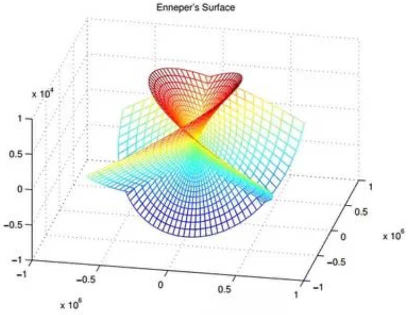
Минимальная поверхность ($H = 0$). Катеноид:
$x = \operatorname{ch} u \cos v, \;\; y = \operatorname{ch} u \sin v, \;\; z = u \;\; (u \in \mathbb{R}, \;\; v \in [0, 2\pi))$.



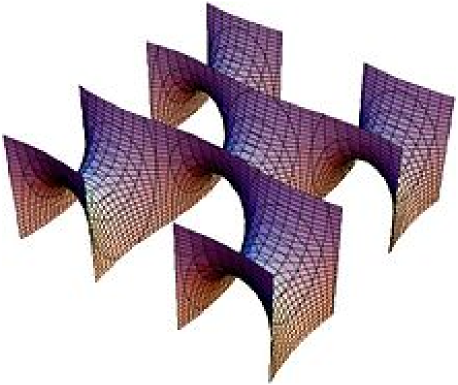
Мыльная пленка в виде катеноида.



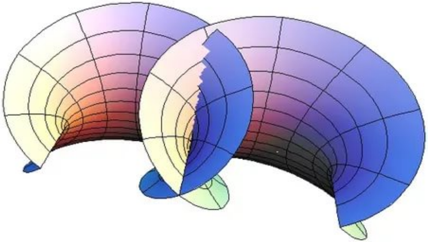
Минимальная поверхность ($H = 0$). Геликоид:
$x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = hv.$



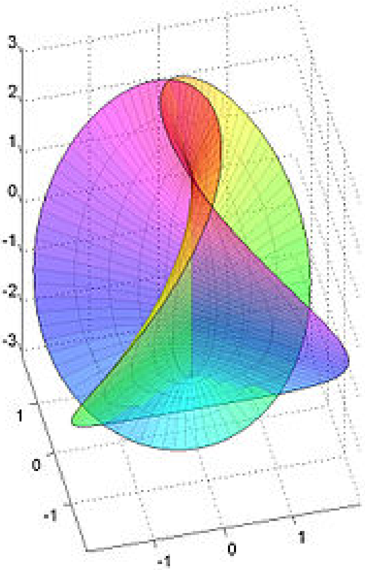
Минимальная поверхность ($H = 0$). Поверхность Эннепера:
$x = u(1 - u^2/3 + v^2)/3, \; y = -v(1 - v^2/3 + u^2)/3, \; z = (u^2 - v^2)/3.$



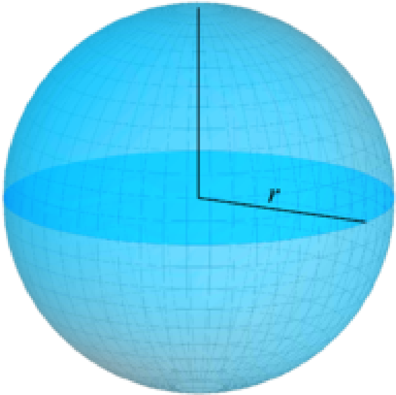
Минимальная поверхность ($H = 0$). Поверхность Шерка: $z = \ln \frac{\cos(x)}{\cos(y)}$.



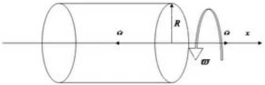
Минимальная поверхность ($H = 0$). Поверхность Каталана:
$\vec{r} = \vec{\rho}(u) + v\vec{l}(u)$, ($\vec{l}'' \neq 0$, $(\vec{l}, \vec{l}', \vec{l}'') = 0$).



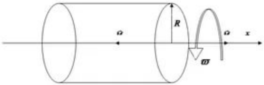
Неориентируемая минимальная поверхность ($H = 0$).



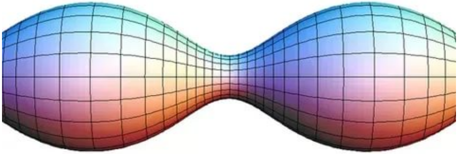
Поверхность постоянной кривизны ($H \neq 0$). Сфера.



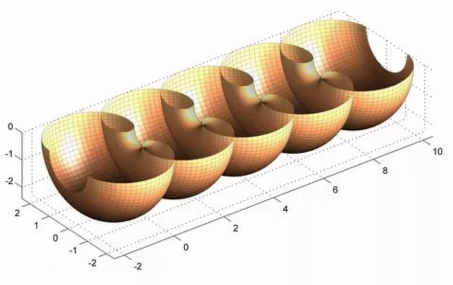
Поверхность постоянной кривизны ($H \neq 0$). Цилиндр.



Поверхность постоянной кривизны ($H \neq 0$). Цилиндр.



Поверхность постоянной кривизны ($H \neq 0$). Ундулоид (unduloid или onduloid).



Поверхность постоянной кривизны ($H \neq 0$). Нодоид (nodoid).

Поверхность постоянной кривизны ($H \neq 0$). Тор Вента (Wenta torus).

1.2.3. Усреднения. Варианты фундаментальной леммы

1.2.4. Естественные граничные условия

В дополнение к предположениям п. 1.2.2 далее также будем предполагать,что $\partial\Omega$ — многообразие класса C^1, $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, и вместо условия (14) отображение u даже удовлетворяет более сильному соотношению

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N). \tag{20}$$

Последнее уравнение является, например, следствием следующего свойства локальной минимальности

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varphi) \quad \text{для всех } \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \quad \text{с } \|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \delta_0. \tag{21}$$

Предложение 1.8

Если $\partial\Omega$ — многообразие класса C^1, $F \in C^2(\mathcal{U})$, $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ и $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, то u есть экстремаль функционала $\mathcal{F}$, которая на границе $\partial\Omega$ удовлетворяет «естественным граничным условиям»

$$\nu_\alpha F_{p^i_\alpha}(x, u, Du) = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{22}$$

Здесь $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ обозначает вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$.

Замечание 1.9

Из доказательства будет ясно, что вместо предположения $F \in C^2(\mathcal{U})$ достаточно предполагать, что производные F_u и F_p существуют и $F_u \in C^0(\mathcal{U})$, $F_p \in C^1(\mathcal{U})$.

Из условия минимальности (21) видно, что свободные (или естественные) граничные условия появляются всякий раз, когда мы имеем минимум в классе отображений, граничные условия которых не фиксированы. Для векторно-значных экстремалей мы часто встречаем проблемы, где некоторые компоненты фиксированы, в то время как другим позволено двигаться свободно. Тогда только последнии компоненты будут удовлетворять естественным граничным условиям. Позже мы обсудим соответстующие результаты для важных специальных задач.
Рассмотрим некоторые примеры:

Пример 1.10

1. Естественные граничные условия, ассоциированные с интегралом Дирихле

$$\mathcal{D}(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |Du|^2 \, dx,$$

есть, так называемые, граничные условия Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где ν обозначает вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$. Ясно, что это условие является естественным граничным условием для каждого варициoнного интеграла вида

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |Du|^2 + g(x, u) \right) \, dx.$$

2. Естественные граничные условия для функционала площади

$$\mathcal{A}(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx,$$

также как и для функционалов типа

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sqrt{1 + |Du|^2} + g(x,u)\right) dx,$$

дается соотношением

$$\nu \cdot Tu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \qquad Tu := \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}},$$

которое имеет следующую геометрическую интерпретацию.

Пусть α — угол между вектором единичной нормали

$$\mathbf{n} := \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}(Du, -1),$$

гиперповерхности $(x, u(x))$, $x \in \overline{\Omega}$, и вектором единичной нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu, 0)$ к цилиндру $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда

$$\alpha = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n} = \nu \cdot Tu,$$

и свободное граничное условие $\nu \cdot Tu$ говорит, что минимальная поверхность $(x, u(x))$, которая удовлетворяет $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$,

$$\delta\mathcal{A}(u, \varphi) = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in C^1(\overline{\Omega}),$$

пересекает цилиндр $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ перпендикулярно.

§ 1.3. Замечания о существовании и регулярности минимизирующих функций

1.3.1. Слабые экстремали, которые не удовлетворяют уравнению Эйлера. Теорема о регулярности решений одномерных варицонных задач

Следующие примеры показывают, что существуют слабые экстремали и даже слабые минимизирующие функции, которые не являются решениями уравнений Эйлера.

Пример 1.11

1. Очень тривиальный пример дается функционалом

$$\mathcal{F}(v) = \int_{-1}^{1} (|Dv(x) - 2|x||)^2 \, dx, \quad n = N = 1,$$

который минимизируется функциями $u(x) = x|x| + \mathrm{const}$, которые класса C^1 на $[-1, 1]$, но не класса C^2 на $(-1, 1)$. Таким образом $u(x)$ удовлетворяют (14), но не удовлетворяют (9).

Однако этот пример не достаточно удовлетворительный, так как $F_p \notin C^1$. Поэтому представим два более усовершенствованных примера лагранжианов, которые вещественно аналитические (они даже многочлены), но для которых существуют решения $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ уравнения (14), которые не лежат в классе $C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Таким образом, для прекрасных лагранжианов, слабые экстремали не обязательно «классические» экстремали.