1. Магнитостатика

Урок 21

Граничные условия. Метод изображений

1.1. (Задача 5.9) Равномерно намагниченная сфера (идеализированный ферромагнетик) вносится во внешнее однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Найти результирующее магнитное поле. Магнитная проницаемость сферы μ_1, окружающей среды μ_2.

Решение Пусть $\mathbf{M}_0$ – вектор намагниченности. Уравнения, описывающие распределение магнитного поля намагниченного шара в однородном магнитном поле, имеют вид $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, из которых следуют граничные условия $H_{1\tau}| = H_{2\tau}|$; $B_{1n}| = B_{2n}|$ (непрерывность тангенциальной составляющей напряженности магнитнго поля и непрерывность нормальной составляющей магнитной индукции). Решением первого уравнения является функция $\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi$. Подставляя это решение во второе уравнение, получаем уравнение Лапласа для скалярного потенциала $\nabla^2\psi = 0$. Таким образом, задача о магнитном шаре в магнитном поле аналогична задаче о диэлектрическом шаре в электрическом поле (см. 2.8а). Потенциал внутри шара будем искать в виде

$$\psi_1 = -c_1(\mathbf{H}_0\,\mathbf{R}) + b_1(\mathbf{M}_0\,\mathbf{R}) \qquad \text{при} \qquad R\leqslant a\,.$$

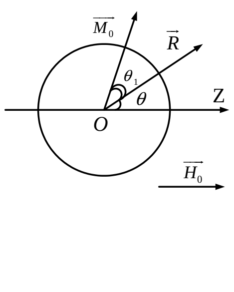
Наличие второго слагаемого учитывает тот факт, что при снятии поля $\mathbf{H}_0$ в шаре остается поле, порождаемое собственной намагниченностью. Вне шара

$$\psi_2 = -(\mathbf{H}_0\,\mathbf{R}) + \frac{1}{R^3}\Big[b_2(\mathbf{M}_0\,\mathbf{R}) + b_3(\mathbf{H}_0\,\mathbf{R})\Big] \qquad \text{при} \qquad R\geqslant a\,.$$

Второе слагаемое учитывает наличие поля от собственного и индуцированного магнитных моментов шара. Направим ось Z вдоль $\mathbf{H}_0$. Перепишем потенциалы в следующем виде:

$$\begin{array}{llll} \psi_1 = & -c_1H_0R\cos\theta + b_1M_0R\cos\theta_1 & \text{при} & R\leqslant a \\ \psi_2 = & -H_0R\cos\theta + \frac{b_3H_0\cos\theta}{R^2} + \frac{b_2M_0\cos\theta_1}{R^2} & \text{при} & R\geqslant a\,. \end{array}$$

где θ – угол между направлением поля $\mathbf{H}_0$ и радиус-вектором $\mathbf{R}$ до точки наблюдения, а θ_1– угол между направлением вектора намагниченности шара $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{R}_0$. Запишем условие непрерывности потенциала на поверхности шара $\psi_1(a) = \psi_2(a)$. Оно эквивалентно условию непрерывности тангенциальной составляющей магнитного



поля $H_{1\tau} = H_{2\tau}$:

$$\left(H_0 a - c_1 H_0 a - \frac{b_3 H_0}{a^2}\right)\cos\theta = \left(\frac{b_2 M_0}{a^2} - b_1 M_0\right)\cos\theta_1 \,.$$

Поскольку это равенство должно выполняться при любых углах θ и θ_1, то коэффициенты при $\cos\theta$ и $\cos\theta_1$ обращаются в нуль. Получаем

$$b_1 = \frac{b_2}{a^3}\,, \qquad c_1 = 1 - \frac{b_3}{a^3}\,.$$

Найдем проекции вектора $\mathbf{B}$ на направление радиус-вектора $\mathbf{R}$. Для идеализированного ферромагнетика внутри шара

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 + 4\pi \mathbf{M}_0 \qquad \text{при} \qquad R < a,$$

где $\mathbf{M}_0$ – постоянная, не зависящая от $\mathbf{H}$ намагниченность. Вне шара $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$, тогда

$$B_{1R} = \mu_1\left(-\frac{\partial\psi_1}{\partial R}\right) + 4\pi M_0\cos\theta_1 =$$

$$= \mu_1 c_1 H_0 \cos\theta - \mu_1 b_1 M_0 \cos\theta_1 + 4\pi M_0 \cos\theta_1 \,,$$

$$B_{2R} = \mu_2\left(-\frac{\partial\psi_2}{\partial R}\right) = \mu_2 H_0\cos\theta + \frac{2\mu_2}{R^3}(b_2 M_0\cos\theta_1 + H_0\cos\theta)\,.$$

Из условия непрерывности нормальной составляющей вектора $\mathbf{B}$ на поверхности шара $B_{1R}(a) = B_{2R}(a)$ получаем

$$c_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(1 - \frac{b_3}{a_3}\right), \qquad b_1 = \frac{4\pi}{\mu_1}\frac{2b_2}{a}\frac{\mu_2}{\mu_1}\,.$$

Окончательно

$$c_1 = \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1}\,, \quad b_1 = \frac{4\pi}{2\mu_2 + \mu_1}\,, \quad b_2 = \frac{4\pi a^3}{2\mu_2 + \mu_1}\,, \quad b_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_2 + \mu_1}\,a^3\,.$$

$$\psi_1 = -\frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1}(\mathbf{H}_0\,\mathbf{R}) + \frac{4\pi}{2\mu_2 + \mu_1}(\mathbf{M}_0\,\mathbf{R}) \qquad \text{при} \qquad R \leqslant a\,.$$

$$\psi_2 = -(\mathbf{H}_0\,\mathbf{R}) + \frac{(\mathbf{m}\,\mathbf{R})}{R^3} \qquad \text{при} \qquad R \geqslant a\,,$$

где

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{2\mu_2 + \mu_1}\mathbf{M}_0 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1}\,a^3 \mathbf{H}_0\,.$$

Распределение напряженности магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{H}_1 = -\nabla\psi_1 = \frac{3\mu_2}{2\mu_2+\mu_1}\mathbf{H}_0 - \frac{4\pi}{2\mu_2+\mu_1}\mathbf{M}_0 \quad \text{при} \qquad R\leqslant a\,,$$
$$\mathbf{H}_2 = -\nabla\psi_2 = \mathbf{H}_0 + \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{m}\,\mathbf{R})}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \quad \text{при} \qquad R > a\,.$$

При вычислении полей $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ использованы формулы векторного анализа

$$\operatorname{grad}(\varphi_1\,\varphi_2) = \varphi_1 \operatorname{grad}\,\varphi_2 + \varphi_2 \operatorname{grad}\,\varphi_1\,;$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = [\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}] + [\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}] + (\mathbf{A}\,\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\,\nabla)\mathbf{A}$$

и

$$\operatorname{rot}\mathbf{R} = \operatorname{rot}\mathbf{H}_0 = \operatorname{rot}\mathbf{M}_0 = 0$$

$$(\mathbf{H}_0\,\nabla)\mathbf{R} = \mathbf{H}_0\,, \qquad (\mathbf{R}\,\nabla)\mathbf{H}_0 = 0\,,$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{R^3}\right) = -\frac{3\mathbf{R}}{R^5}\,.$$

Если шар предварительно не был намагничен ($\mathbf{M}_0 = 0$), то

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= \frac{3\mu_2}{2\mu_2+\mu_1}\mathbf{H}_0\,,\\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{дип}}\,,\end{aligned}$$

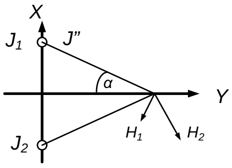
где $\mathbf{H}_{\text{дип}}$ – поле, создаваемое индуцированным магнитным моментом

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_1-\mu_2}{2\mu_2+\mu_1}\,a^3\mathbf{H}_0\,.$$

Метод изображений для токов

1.2. (Задача 5.14) Бесконечный прямой провод с током J_1 расположен параллельно плоской границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (провод – в среде с μ_1). Расстояние от провода до границы a. Определить магнитное поле во всем пространстве.

Решение Пусть поле в верхней полуплоскости (по аналогии с электростатикой) создает заданный ток J_1 и ток J_2, расположенный в нижней полуплоскости симметрично



заданному, и они вместе находятся в среде с μ_1. Предположим также, что поле в нижней полуплоскости создает ток J'', расположенный в месте заданного тока, но находящийся в среде μ_2. Используя граничные условия на границе раздела сред, попробуем найти величину тока J_2 и J''. Как известно, граничные условия имеют вид

$$H_{1\tau} = H_{2\tau},$$
$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Как известно, поле от бесконечного провода с током J имеет в цилиндрических координат вид

$$H_\varphi = \frac{2J}{cr}.$$

Тогда на границе раздела, как видно из рисунка,

$$H_{1\tau} = \frac{2J_1}{ca}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{2J_2}{ca}\sin\alpha\cos,$$
$$H_{2\tau} = \frac{2J''}{ca}\sin\alpha\cos,$$

откуда получаем соотношение для токов

$$J_1 - J_2 = J''.$$

Записывая аналогично граничные условия для нормальных компонент $\mathbf{B}$, получаем

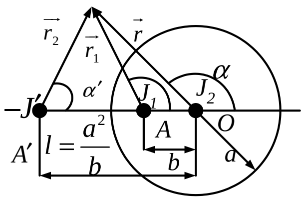
$$\mu_1(J_1 + J_2) = \mu_2 J''.$$

Решая эти уравнения для токов, получаем

$$J_2 = J_1\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2},$$
$$J'' = J_1\frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

1.3. (Задача 5.17) Прямолинейный провод с током J расположен внутри бесконечной цилиндрической полости, вырезанной в однородной магнитной среде. Провод расположен параллельно оси цилиндра на расстоянии b от нее. Радиус цилиндра – a, магнитная проницаемость магнетика – μ. Найти поле и силу, действующую на единицу длины провода.

Решение Векторы поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ во всем пространстве, кроме точек оси, вдоль



которой течет ток J, удовлетворяют однородным уравнениям $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$. Поэтому можно ввести векторный $\mathbf{A}$ и скалярный ψ потенциалы, которые будут удовлетворять во всем пространстве уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0\,; \tag{1}$$

$$\nabla^2 \psi = 0\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi$.

В результате задача магнитостатики сведена к задаче электростатики, которую будем решать, используя метод изображений. Поле внутри полости попытаемся найти как поле, которое создалось бы в вакууме реальным током J, проходящим через точку A на расстоянии b от центра цилиндрической полости, и фиктивным током $(-J')$, расположенным на расстоянии $\ell = a^2/b$ от оси полости. Расстояние ℓ выбирается таким для того, чтобы отношение r_2/r_1 было постоянным для точек окружности радиуса a: $r_2/r_1 = a/b$, что дает возможность удовлетворить граничным условиям на поверхности цилиндрической полости.

Поле вне полости будем искать как поле, создаваемое в однородном магнетике μ двумя фиктивными токами J_1 и J_2, проходящими через точки соответственно A и 0.

Векторный потенциал для прямого тока в цилиндрической системе (см. 4.15) равен

$$A_z = -\frac{2J}{c}\ln r + \text{const}\ .$$

Эта функция является решением уравнения (1). Используя принцип суперпозиции, находим (см. рисунок):

$$\begin{aligned} A_{1z} &= -\frac{2J}{c}\ln r_1 + \frac{2J'}{c}\ln r_2 + c_1 \qquad \text{при} \qquad r \leqslant a, \\ A_{2z} &= -\frac{2\mu J_1}{c}\ln r_1 - \frac{2\mu J_2}{c}\ln r + c_2 \qquad \text{при} \qquad r \geqslant a. \end{aligned} \tag{3}$$

Циркуляция вектора $\mathbf{H}$ по контуру, охватываемому полость, равна $4\pi J/c$, поэтому

$$J_1 + J_2 = J. \tag{4}$$

Найдем скалярный потенциал прямого тока. Для прямого тока силовые линии имеют форму окружностей с центрами на оси тока и напряженность магнитного поля имеет только касательные к окружностям составляющие

$$H_\alpha = \frac{2J}{cr}\,.$$

Поскольку $H_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$, то для скалярного потенциала прямого тока находим

$$\psi = -\frac{2J}{c}\alpha\,.$$

Для нашей задачи, используя принцип суперпозиции, запишем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{2J}{c}\alpha_1 + \frac{2J'}{c}\alpha' \qquad \text{при} \qquad r\leqslant a, \\ \psi_2 &= -\frac{2J_1}{c}\alpha_1 - \frac{2J_2}{c}\alpha \qquad \text{при} \qquad r\geqslant a\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Если положить $\psi_1(a) = \psi_2(a)$, $A_{1z}(a) = A_{2z}(a)$, то тем самым окажутся выполненными условия для тангенциальных составляющих магнитного поля $H_{1\alpha}(a) = H_{2\alpha}(a)$ и нормальных составляющих вектора магнитной индукции $B_{1r}(a) = B_{2r}(a)$ на поверхности цилиндра, вытекающие из уравнений $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$. Из системы (5) с учетом уравнения (4) и равенства $\alpha' = \alpha - \alpha_1$ получаем $J' = -J_2$. Запишем условие непрерывности векторного потенциала на поверхности цилиндра:

$$\frac{2}{c}\left(J(\mu-1) - \mu J_2 + J'\right)\ln r_1 = c_2 - c_1 - \frac{2\mu J_2}{c}\ln a - \frac{2J'}{c}\ln\frac{a}{b} \tag{6}$$

Здесь использована связь $r_2 = r_1 a/b$ и соотношение (4). Поскольку правая сторона уравнения (6) – константа, то, для того чтобы уравнение удовлетворялось при всех r_1, нужно положить

$$J(\mu-1) - \mu J_2 + J' = 0,$$

$$c_2 - c_1 = \frac{2\mu J_2}{c}\ln a + \frac{2J'}{c}\ln\frac{a}{b}.$$

Окончательно находим

$$J_2 = \frac{\mu-1}{\mu+1}J, \qquad J' = -\frac{\mu-1}{\mu+1}J, \qquad J_1 = \frac{2}{\mu+1}J.$$

Сила, действующая на единицу длины тока J, равна

$$\mathbf{F} = \frac{[\mathbf{J} \times \mathbf{B}]}{c}\,,$$

где $\mathbf{B}$ – магнитная индукция в месте расположения J, создаваемая всеми токами, кроме самого J. В нашем случае это поле от тока J'. Поэтому

$$\mathbf{F} = -\frac{2JJ'}{c\,(\ell - b)}\,\frac{\mathbf{b}}{b} = \frac{2(\mu - 1)}{\mu + 1}\,\frac{J^2}{c^2\,(a^2 - b^2)}\mathbf{b}\,.$$

Если $\mu > 1$, линейный проводник с током притягивается к ближайшей части поверхности стенки, при $\mu < 1$ – отталкивается.