

## *VII*

# *М е т о д   с и л*

## Введение:

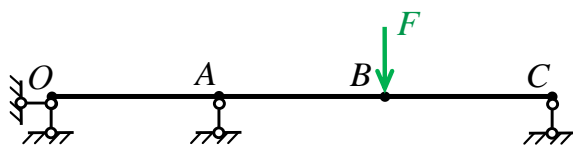
С помощью уравнений статического равновесия Теоретической механики инженеры научились определять реакции связей в опорах балок и рам и получать таким образом силовые схемы. Расчёт силовой схемы (внутренние силовые факторы, напряжения, перемещения) особых сложностей не представляет, этот процесс давно и хорошо отработан.

Статически неопределимые системы (количество связей больше уравнений статического равновесия) поставили инженеров в тупик – уравнений для определения реакций не хватает. Что делать?

Процесс вычисления реакций стольких связей, сколько нужно для превращения системы в статически определимую называется **«раскрытием статической неопределимости»**. Он может быть реализован разными методами.

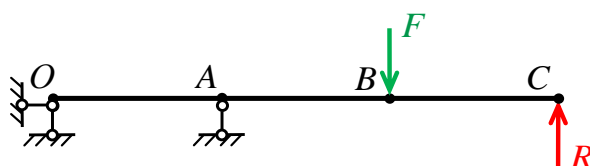
**«Метод сил»** задаёт свою последовательность действий, необходимых для раскрытия статической неопределимости. Делается, по сути, то же самое, что и в статически неопределимых задачах растяжения (сжатия) и кручения: составляются дополнительные уравнения совместности деформаций. С той только разницей, что в задачах растяжения (сжатия) и кручения уравнения совместности деформаций решались совместно с уравнениями статического равновесия, а в методе сил уравнения совместности деформаций (их называют **«каноническими уравнениями»**) самодостаточны, неизвестные силы (реакции связей) вычисляются только из них.

Например, можем ли мы найти реакции связей в такой балке?



Не можем. Количество связей ( 4 ) больше количества уравнений статического равновесия на плоскости ( 3 ). Степень статической неопределимости  $n=4-3=1$ .

А в такой?



Можем. Три реакции находятся из трёх уравнений статического равновесия.

Значит, нужно найти реакцию всего одной связи для того, чтобы балка приняла привычный нам статически определимый вид.

Найти реакцию можно из условия: точка C при нагружении не смещается. То есть, насколько она опускается под действием нагрузки (рис. VII.1a), настолько же поднимается под действием реакции (рис. VII.1б).

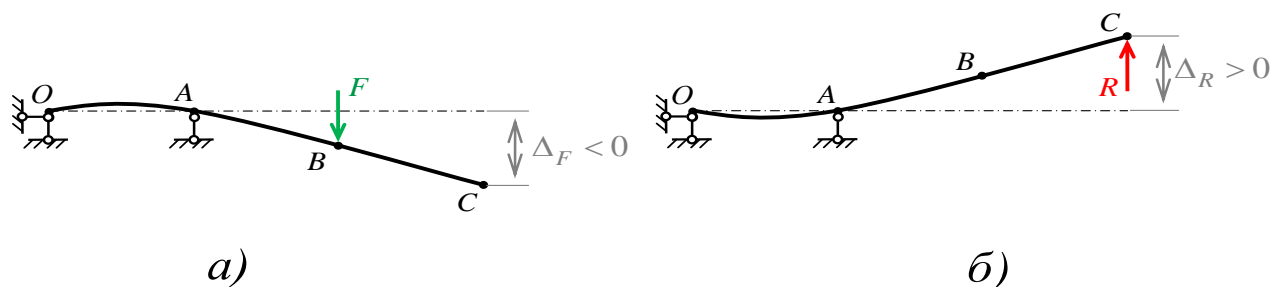


Рис. VII.1.

Уравнение

$$\Delta_F + \Delta_R = 0 \quad (VII.1)$$

называется каноническим. Из него можно определить неизвестную силу R.

Определять перемещения точек оси балки  $\Delta_i$  методом Мора мы уже умеем.

## Один раз статически неопределимые системы

### Жёсткие связи:

Возьмём статически неопределимую балку:

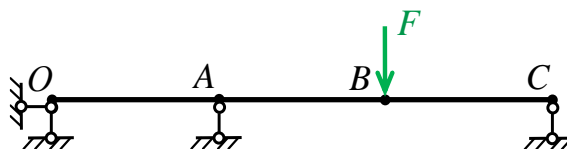


Рис. VII.2.

Внешних связей  $2+1+1=4$ , уравнений статического равновесия на плоскости 3, степень статической неопределимости:  $n=4-3=1$ .

Значит, для того, чтобы превратить систему в статически определимую, нужно отдельно вычислить реакцию 1 связи. Связь, реакцию которой будем искать, решая канонические уравнения, называют **избыточной**.

Какую из четырёх внешних связей назначить избыточной? Давайте, перечислим возможные варианты, изобразив нашу расчётную схему без внешней нагрузки и без избыточной связи:

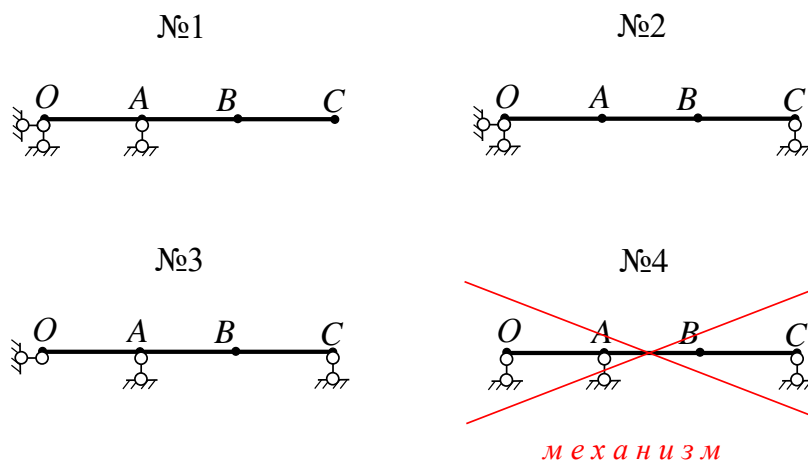
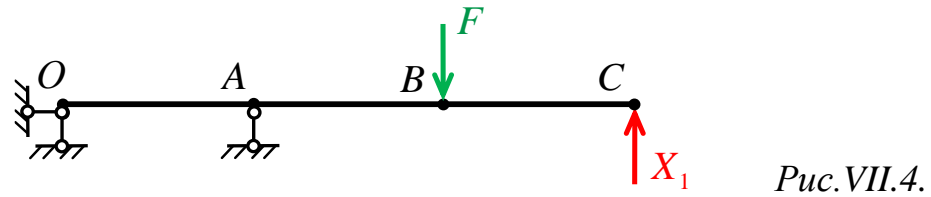


Рис. VII.3.

Эти схемы называются **основными системами** (О.С.). Задачу можно решить, используя любую из них. Нельзя избыточной назначать связь, без которой система превращается в механизм.

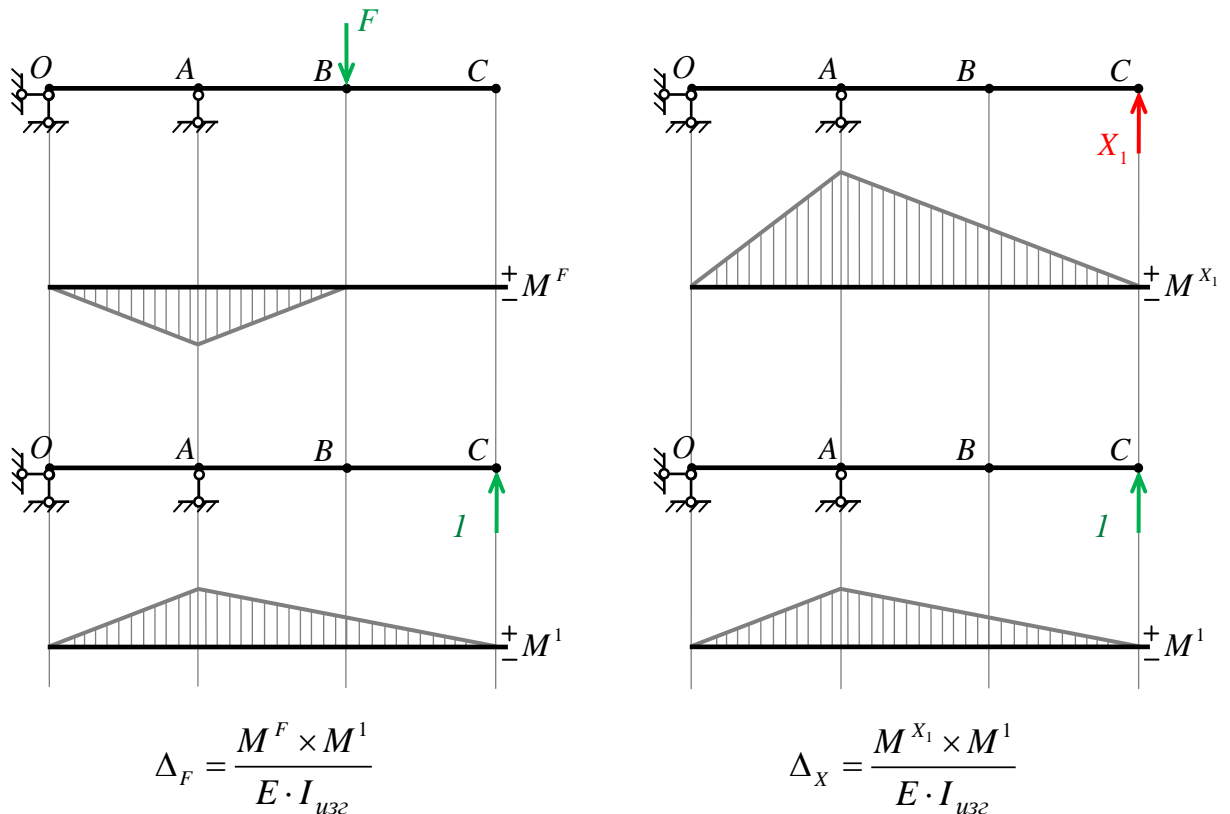
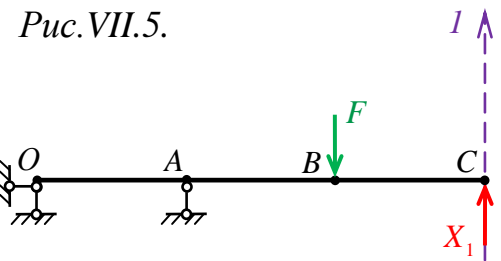
Выберем, например, *О.С. №1*. Изобразим нашу конструкцию. Значение реакции, пока не известно, поэтому назовём её  $X_1$ :



Эта схема называется **эквивалентной системой** (Э.С.).

Значение реакции  $X_1$  находим, исходя из того, что перемещение точки  $C$  под действием внешней нагрузки  $\Delta_F$  равно по модулю и противоположно по знаку перемещению этой точки под действием реакции (рис. VII.1.).

Выберем направление  $l$  в точке  $C$  (для определённости пусть это будет, например, направление неизвестной реакции) и вычислим методом Мора перемещение точки  $C$  в этом направлении от нагрузки и от реакции избыточной связи:



$$X_1 \text{ добываем из уравнения : } \Delta_F + \Delta_X = 0 \quad (VII.2)$$

Стоп!

Мы используем три эпюры. Однако видно, что две из них линейно зависимы:

эпюра  $M^{X_I}$  просто в  $X_I$  раз больше эпюры  $M^I$ :  $M^{X_I} = X_I \cdot M^I$ ;

Значит, для получения  $\Delta_X$  достаточно эпюру  $M^I$  умножить саму на себя, а результат увеличить в  $X_I$  раз:

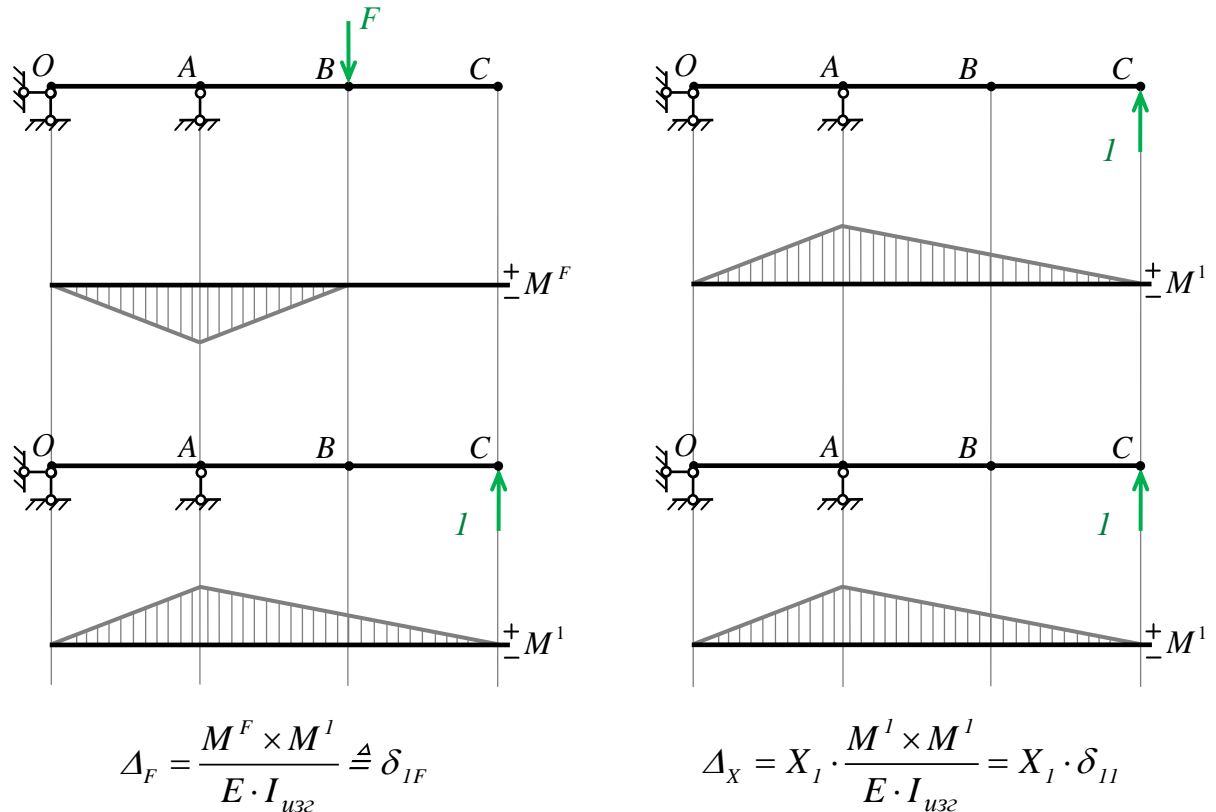


Рис.VII.7.

Уравнение примет вид:

$$X_I \cdot \delta_{II} + \delta_{IF} = 0 \quad (VII.2)$$

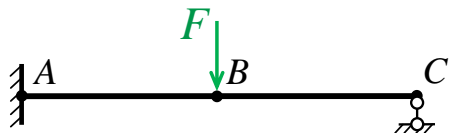
Здесь первое слагаемое – перемещение точки приложения реакции  $X_I$  от самой реакции  $X_I$ , второе слагаемое – перемещение точки приложения реакции  $X_I$  от внешней нагрузки. В сумме 0 ибо точка C не перемещается.

$\delta_{II}$  - **податливость** (перемещение точки приложения реакции по первому направлению от единичной силы по этому же направлению).

Нижние индексы податливости не только показывают *что* перемещается и *от действия чего*, но и какую эпюру на какую нужно умножить для получения результата. Поэтому обозначим:  $\Delta_F \triangleq \delta_{IF}$ .

Направление  $l$  (рис. VII.5.) может быть не только линейным. Если в качестве избыточной выбрана угловая связь, направление  $l$  будет угловым. Например:

Расчётная схема:



Количество внешних связей:

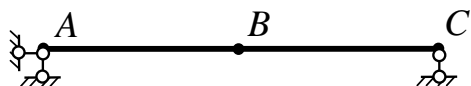
$$n_{\text{внеш.св.}} = \overset{A}{3} + \overset{C}{1} = 4$$

Количество уравнений равновесия на плоскости: 3.

Степень статической неопределимости:

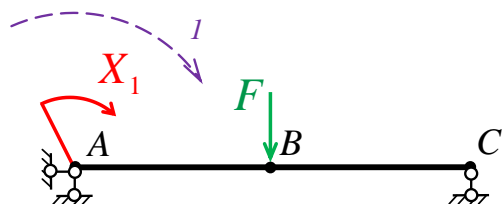
$$n = 4 - 3 = 1$$

О.С.



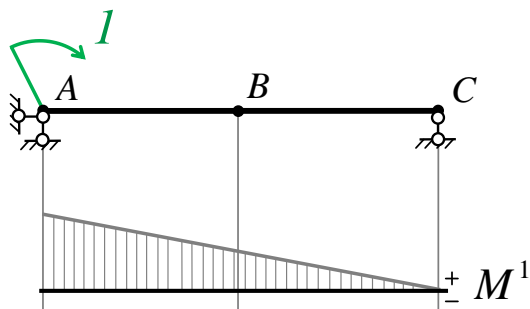
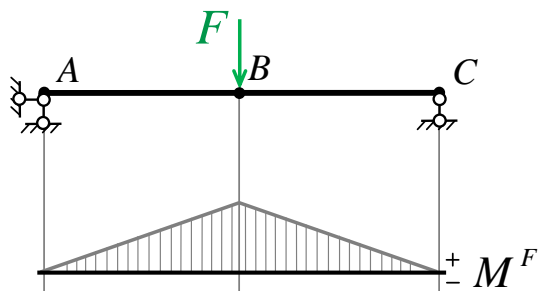
Избыточной назначаем угловую связь в точке A.

Э.С.



Реакция отброшенной связи – момент  $X_1$ . Направление  $l$  угловое.

Эпюры:

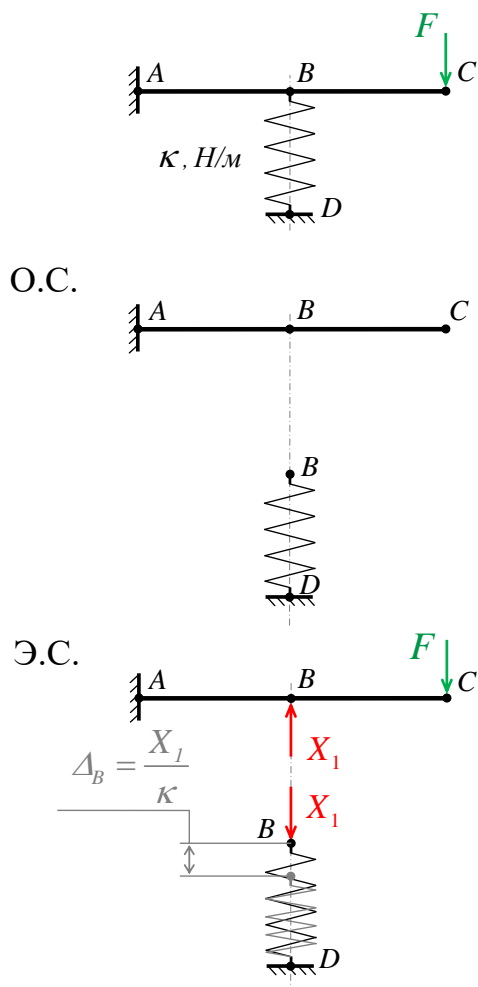


Вычисления:

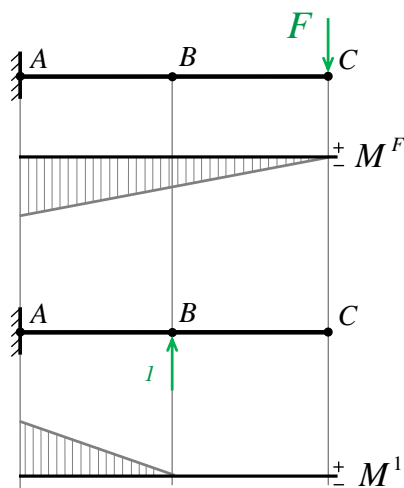
$$\delta_{1F} = \frac{M^1 \times M^F}{E \cdot I_{\text{изг}}}; \quad \delta_{11} = \frac{M^1 \times M^1}{E \cdot I_{\text{изг}}}; \quad X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = 0; \quad X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}}.$$

## Податливая связь:

Если речь идёт не о жёсткой связи, а о пружинке, поступают так:



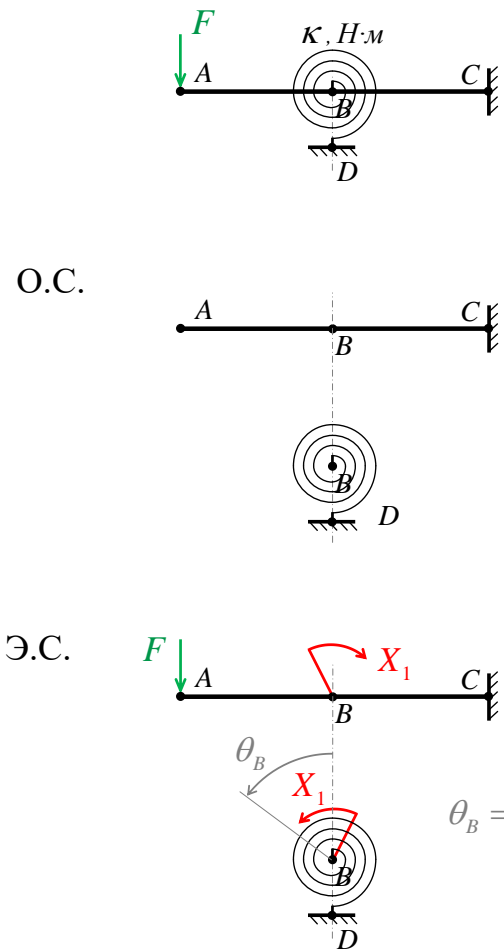
Эпюры:



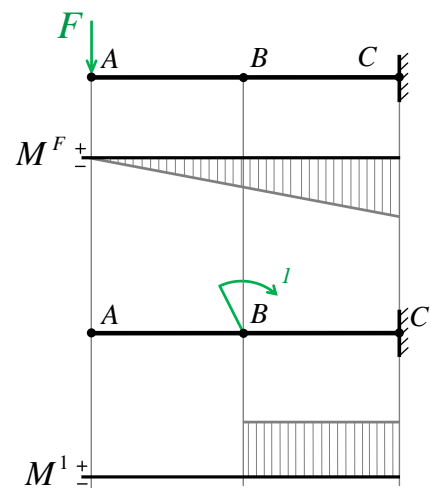
Вычисления:

$$\delta_{1F} = \frac{M^1 \times M^F}{E \cdot I_{u32}}; \quad \delta_{11} = \frac{M^1 \times M^1}{E \cdot I_{u32}};$$

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = \frac{X_1}{K}.$$



Эпюры:



Вычисления:

$$\delta_{1F} = \frac{M^1 \times M^F}{E \cdot I_{u32}}; \quad \delta_{11} = \frac{M^1 \times M^1}{E \cdot I_{u32}};$$

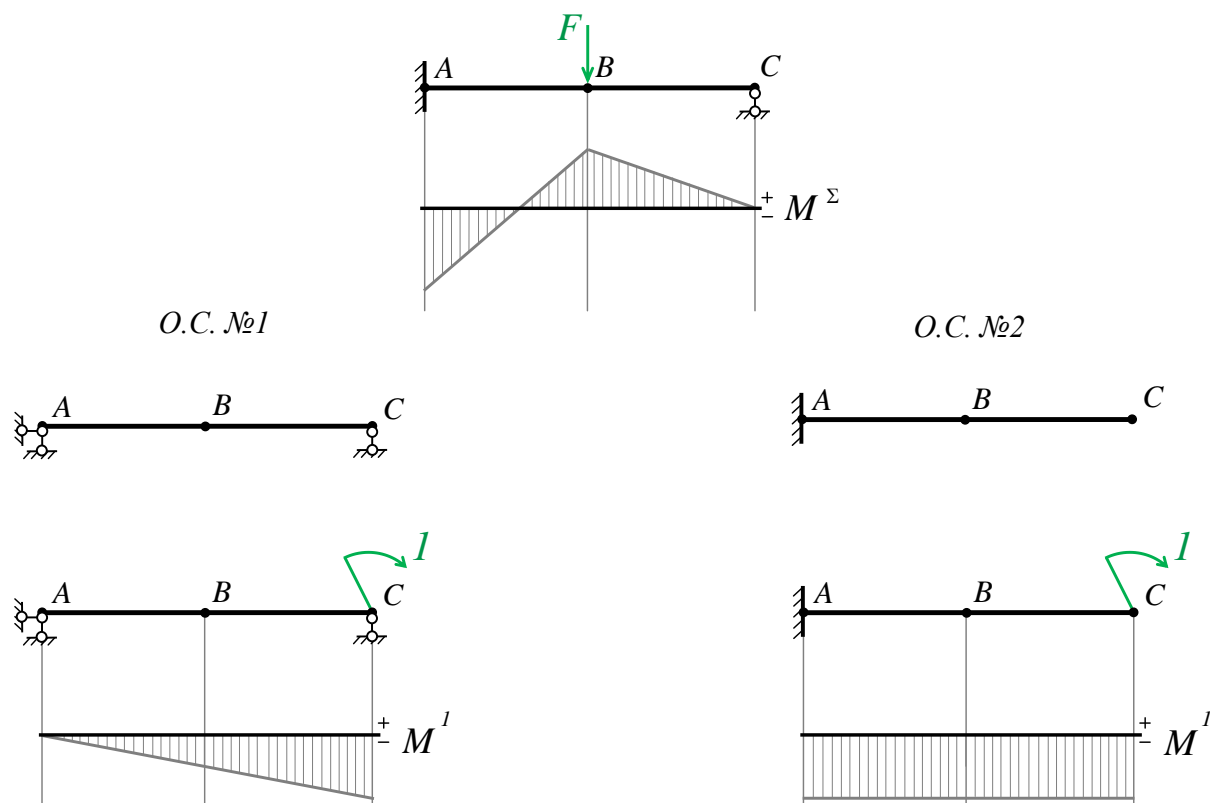
$$X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = \frac{X_1}{K}.$$



### Вычисление перемещений:

Для того, чтобы найти перемещение точки упругой оси статически неопределимой системы (балки или рамы) нужно умножить итоговую эпюру на эпюру от единичной обобщённой силы, приложенной к интересующей нас точке в интересующем нас направлении в *любой основной системе*.

То есть, например, перемножение итоговой эпюры  $M^\Sigma$  на любую из единичных эпюр  $M^I$  или  $M^I$  даст один и тот же результат (рис.VII.8.). Происходит это потому, что таким образом мы находим перемещение рассматриваемой точки в эквивалентных системах, соответствующих этим основным системам. А в эквивалентных системах внутренние силовые факторы, напряжения и перемещения точно такие же, как и в нашей исходной статически неопределимой конструкции, поэтому, собственно, они и называются *эквивалентными*.



$$\theta_C = \frac{M^\Sigma \times M^I}{E \cdot I_{изг}} = \frac{M^\Sigma \times M^I}{E \cdot I_{изг}}$$

Рис. VII.8.

### Проверка правильности полученного решения:

Правильность полученного решения (силовой схемы и эпюры внутренних моментов) можно проверить тремя способами:

*1) Вычислить какое-либо обобщённое перемещение, заведомо равное нулю;*

Например в конструкции, показанной на *рис.VII.8.* заведомо равен нулю угол поворота поперечного сечения в точке *A*, заведомо равно нулю вертикальное перемещение точки *C* и т.д. Первое перемещение можно определить с помощью О.С. №1 (к точке *C* приложить единичный момент, полученную эпюру перемножить с эпюрой суммарной, получить результатом нуль). Второе перемещение можно проверить с помощью О.С. №2 (к точке *C* приложить вертикальную единичную силу, полученную эпюру перемножить с суммарной, получить результатом нуль).

*2) Вычислить обобщённое перемещение какого-либо сечения дважды, используя разные основные системы;*

Равенство, показанное на *рис. VII.8.*, выполняется только в случае безошибочности суммарной эпюры внутреннего изгибающего момента.

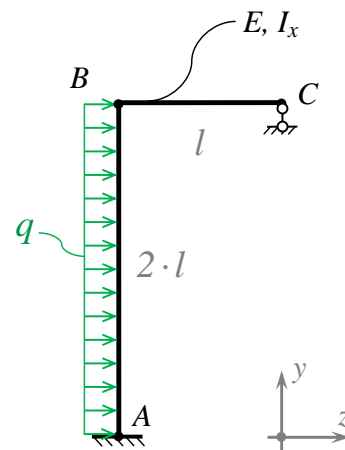
*3) Решить задачу повторно, используя для решения другую основную систему.*

Пример VII.1:

Дано:  $E, I_x, q, l$ .

Построить эпюру внутреннего изгибающего момента в плоской раме.

Проверить полученное решение.



Решение (по пунктам конспекта L-01):

I. Вычисление степени статической неопределенности:

а) Количество внешних связей:  $n_{\text{внеш.св.}} = \overset{A}{3} + \overset{C}{1} = 4$  ;

б) Количество внутренних связей:  $n_{\text{внутр.св.}} = 3 \cdot K = 3 \cdot 0 = 0$  ;  
 $K$  – количество замкнутых контуров.

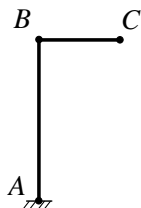
в) Степень статической неопределенности:

$$n = (n_{\text{внеш.св.}} + n_{\text{внутр.св.}}) - 3 = (4 + 0) - 3 = 1.$$

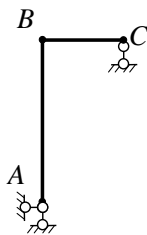
II. Раскрытие статической неопределенности:

а) Варианты основных и эквивалентных систем:

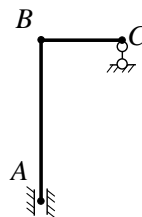
О.С. №1



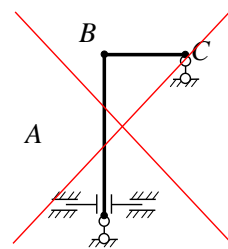
О.С. №2



О.С. №3

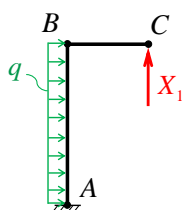


О.С. №4

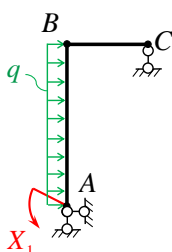


механизм

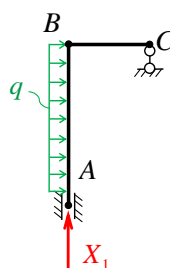
Э.С. №1



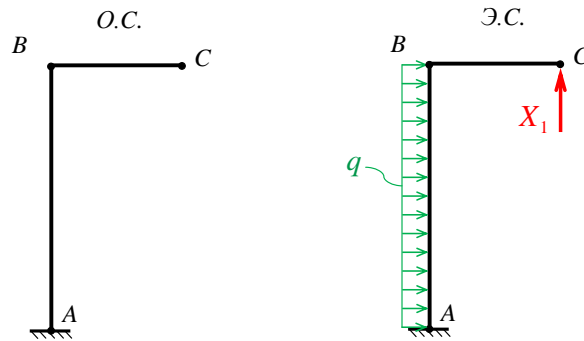
Э.С. №2



Э.С. №3

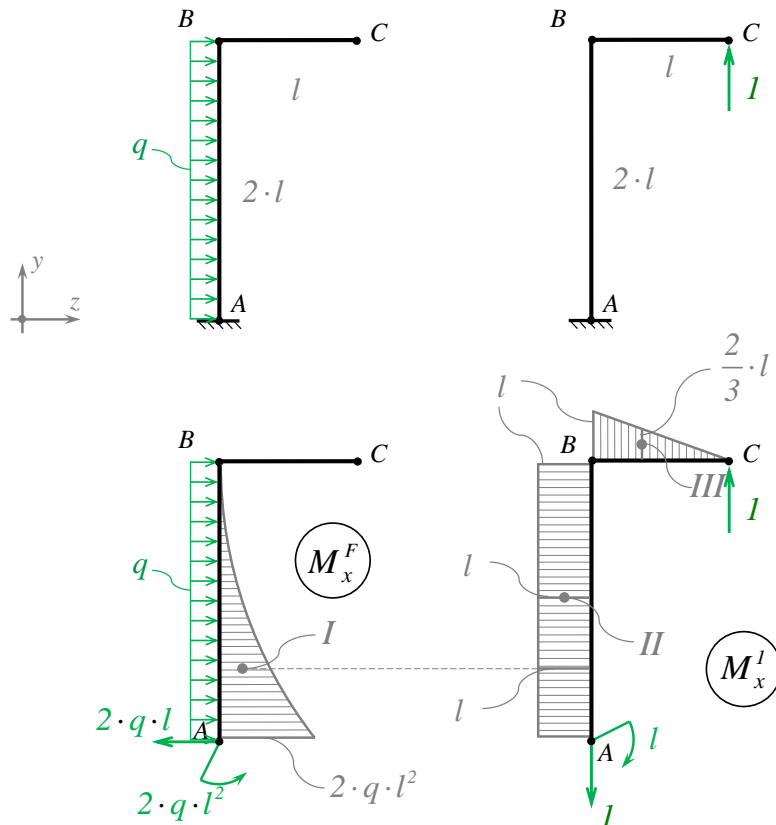


б) Выбираем первый вариант:



в) Система канонических уравнений:  $X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = 0$

г) Коэффициенты канонических уравнений:



$$\delta_{11} = \frac{M_x^I \times M_x^I}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ (2l \cdot l) \cdot l + \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] = \frac{7}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_x} ;$$

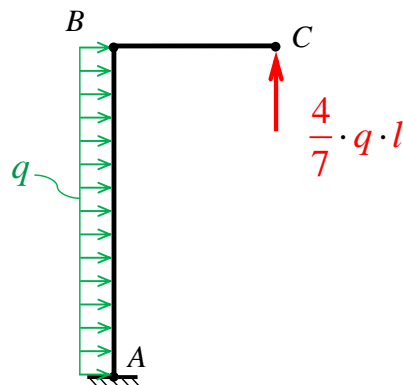
$$\delta_{1F} = \frac{M_x^I \times M_x^F}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ - \left( \frac{1}{3} \cdot 2l \cdot 2ql^2 \right) \cdot l \right] = - \frac{4}{3} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} .$$

д) Реакция избыточной связи:

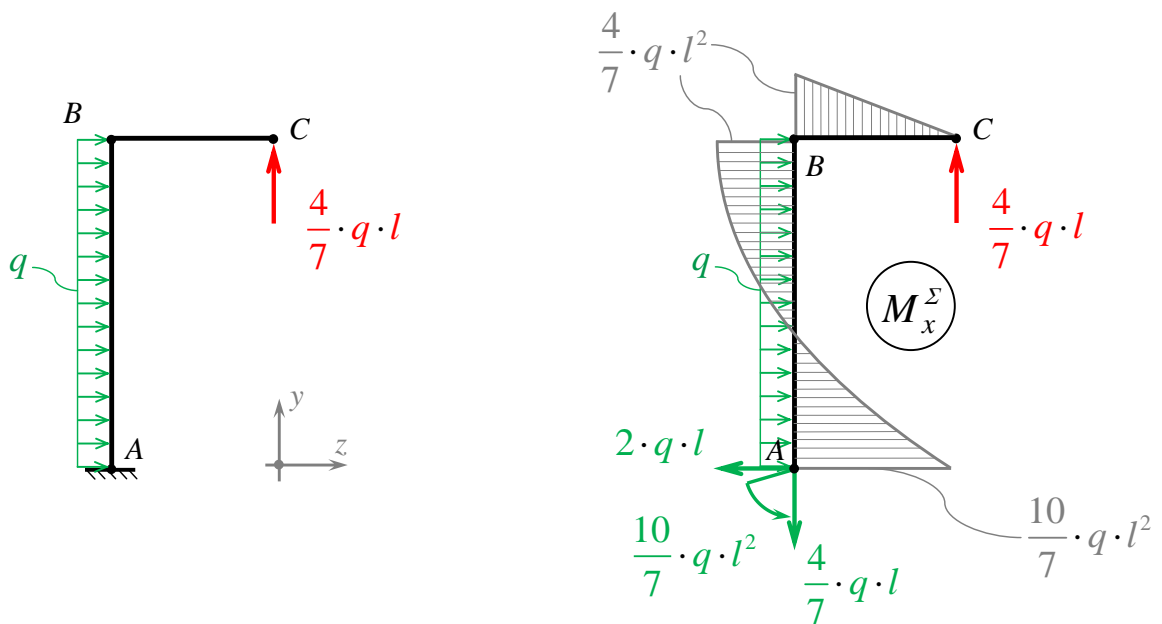
$$X_I \cdot \delta_{II} + \delta_{IF} = 0$$

$$X_I = -\frac{\delta_{IF}}{\delta_{II}} = \frac{4}{7} \cdot \frac{q \cdot l}{E I_x} \times \frac{7}{4} \cdot \frac{E I_x}{q \cdot l} = \frac{4}{7} \cdot q \cdot l \quad .$$

е) Эквивалентная система:

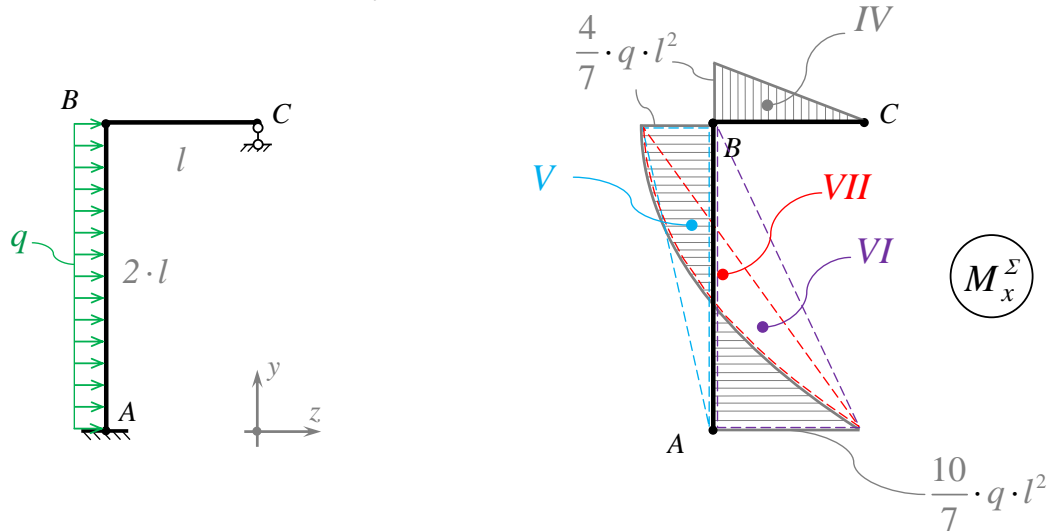


III. Завершаем решение задачи:



IV. Проверка правильности полученного решения (нахождение перемещения в разных основных системах):

Определим угловое смещение поперечного сечения, связанного с точкой  $B$ , используя основные системы №1 и №2.



$$\theta_B = \frac{M_x^\Sigma \times M_x^l}{E \cdot I_x} =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot l \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \frac{4}{7} q l^2 \right) \cdot \overset{\text{V}}{1} - \left( \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \frac{10}{7} q l^2 \right) \cdot \overset{\text{VI}}{1} + \left( \frac{q \cdot (2 \cdot l)^3}{12} \right) \cdot \overset{\text{VII}}{1} \right] = -\frac{4}{21} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_x};$$

$$\theta_B = \frac{M_x^\Sigma \times M_x^l}{E \cdot I_x} =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot l \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{4}{7} q l^2 \right) \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \right] =$$

$$= -\frac{4}{21} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_x}.$$

$\theta_B = \theta$ , значит суммарная эпюра  $M^\Sigma$  построена верно.

## Два раза статически неопределимые системы

$n=2$ , значит в системе уже две избыточные связи, нужно составить систему из двух уравнений для их получения из двух условий. Например:

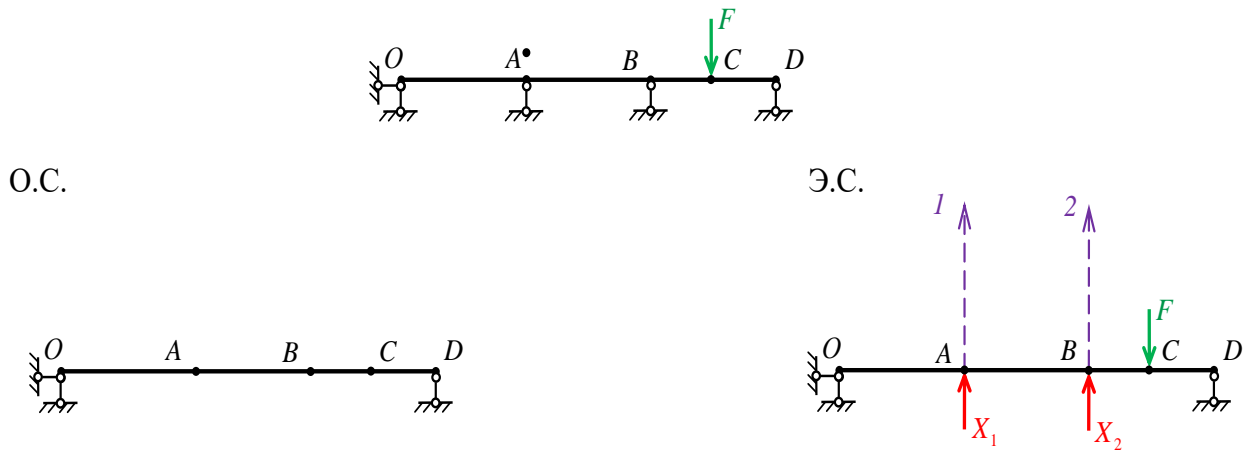


Рис.VII.9.

Первое условие: сумма перемещений точки A по первому направлению от реакции  $X_1$  (а именно  $X_1 \cdot \delta_{11}$ ), от реакции  $X_2$  (а именно  $X_1 \cdot \delta_{12}$ ) и от внешней нагрузки (а именно  $\delta_{1F}$ ) равна нулю.

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \delta_{1F} = 0$$

Второе условие: сумма перемещений точки B по второму направлению от реакции  $X_2$  (а именно -  $X_2 \cdot \delta_{22}$ ), от реакции  $X_1$  (а именно -  $X_1 \cdot \delta_{21}$ ) и от внешней нагрузки (а именно  $\delta_{2F}$ ) равна нулю.

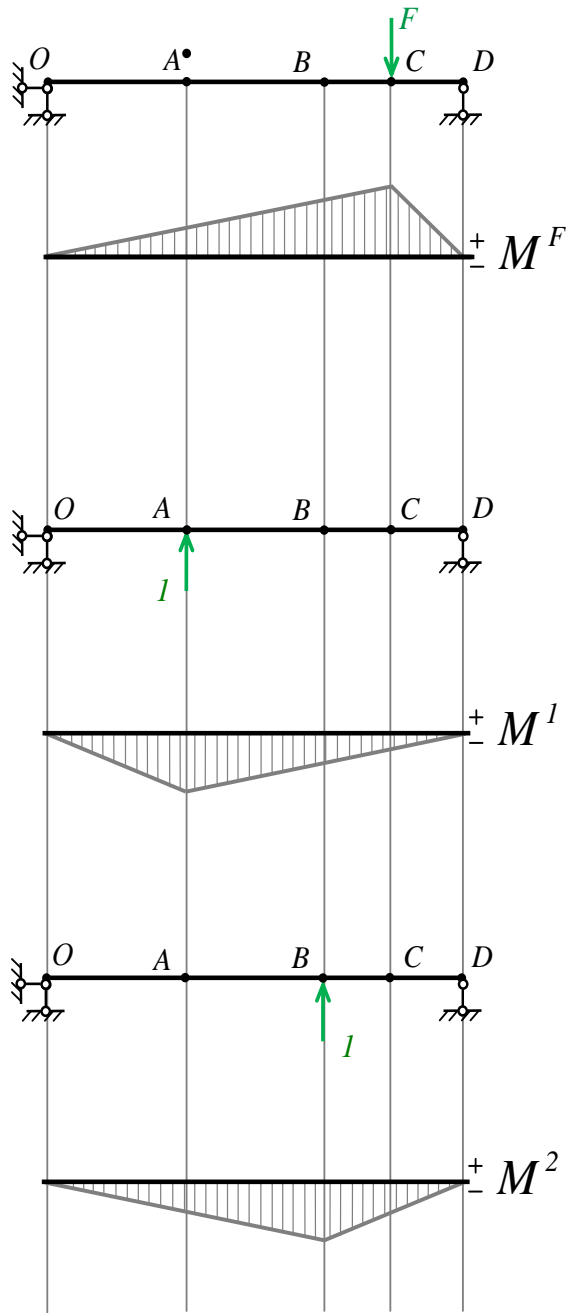
$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \delta_{2F} = 0$$

И вот у нас есть система двух уравнений для определения двух неизвестных реакций избыточных связей:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \delta_{1F} &= 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \delta_{2F} &= 0 \end{aligned}$$

(VII.3)

Здесь



$$\delta_{11} = \frac{M^1 \times M^1}{E \cdot I_{изг}};$$

$$\delta_{12} = \frac{M^1 \times M^2}{E \cdot I_{изг}};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21};$$

$$\delta_{22} = \frac{M^2 \times M^2}{E \cdot I_{изг}};$$

$$\delta_{1F} = \frac{M^1 \times M^F}{E \cdot I_{изг}};$$

$$\delta_{2F} = \frac{M^2 \times M^F}{E \cdot I_{изг}};$$

$M^F$  — эпюра от внешней нагрузки,  
приложенной к О.С.;

$M^i$  — эпюра от единичной силы, приложенной к О.С. по  $i^{му}$  направлению.

(VII.4)



## **$n$ раз статически неопределимые системы**

Как было показано ранее, система канонических уравнений для 1 раз статически неопределимой стержневой системы (балки или рамы) с жёсткими связями имеет вид (VII.2):

$$X_l \cdot \delta_{ll} + \delta_{lF} = 0$$

Система канонических уравнений для дважды статически неопределимой системы с жёсткими связями имеет вид (VII.3):

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

Нетрудно доказать, что для системы с  $n=3$  система канонических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \delta_{3F} = 0 \end{array} \right.$$

А для системы с  $n=k$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \cdot \delta_{1l} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + X_4 \cdot \delta_{14} + \dots + X_k \cdot \delta_{lk} + \delta_{lF} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{2l} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_4 \cdot \delta_{24} + \dots + X_k \cdot \delta_{2k} + \delta_{2F} = 0 \\ ..... \\ X_1 \cdot \delta_{kl} + X_2 \cdot \delta_{k2} + X_3 \cdot \delta_{k3} + X_4 \cdot \delta_{k4} + \dots + X_k \cdot \delta_{kk} + \delta_{kF} = 0 \end{array} \right.$$

Причём ни от каких конструктивных особенностей рассматриваемой системы этот вид канонических уравнений не зависит.

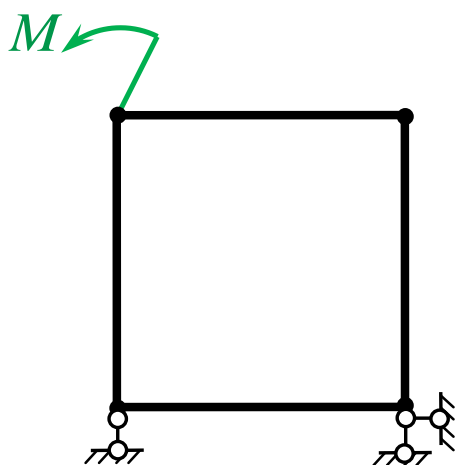
Коэффициенты  $\delta$ , количество которых пропорционально квадрату степени статической неопределимости, вычисляются так же, как это указано в формулах (VII.4). Их вычисление облегчает следствие из теоремы о взаимности перемещений:  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

## Замкнутый контур

### Общий случай.

Назначение избыточными внешних связей вполне пригодно для балок и рам, не имеющих в своей конструкции замкнутых контуров из стержней.

Если же таковые присутствуют, то для раскрытия статической неопределимости избыточными назначаются связи внутренние (между частями самого контура), а их реакциями считаются внутренние силовые факторы, с которыми части рамы действуют друг на друга в выбранных поперечных сечениях. Поскольку у плоских рам и балок при прямом изгибе в поперечных сечениях из шести внутренних ненулевыми будут три ( $N$ ,  $Q$  и  $M_x$ ), то в общем случае на плоскости замкнутый контур будет статически неопределим три раза по причине наличия трёх внутренних связей:



Количество внешних связей:

$$n_{\text{внеш.св.}} = 1 + 2 = 3 ;$$

Количество внутренних связей:

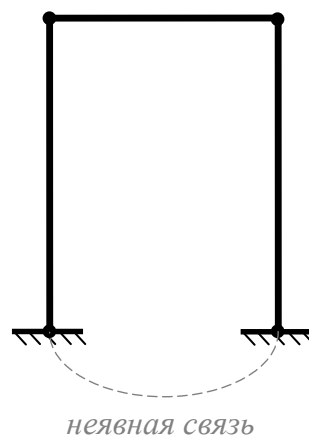
$$n_{\text{внутр.св.}} = 3 \cdot K = 3 \cdot 1 = 3 ;$$

$K$  – количество замкнутых контуров.

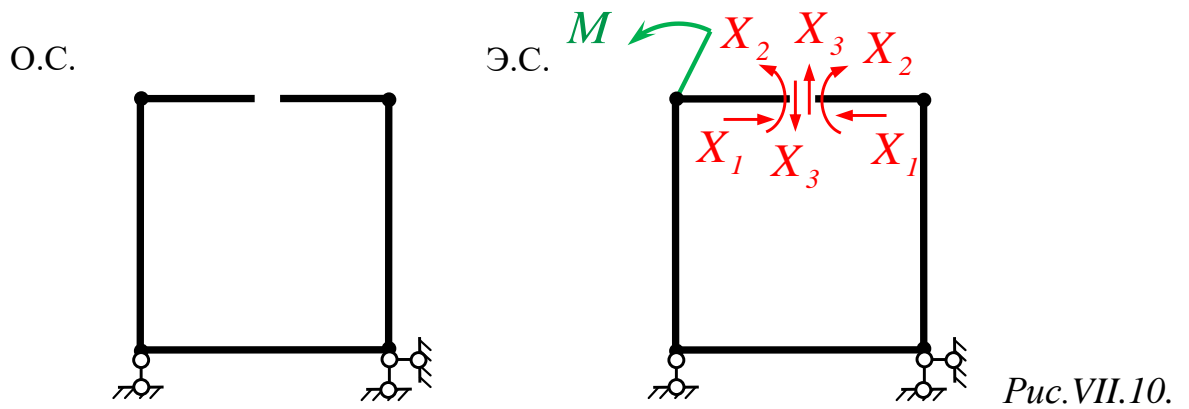
Степень статической неопределимости:

$$n = (n_{\text{внеш.св.}} + n_{\text{внутр.св.}}) - 3 = (3 + 3) - 3 = 3$$

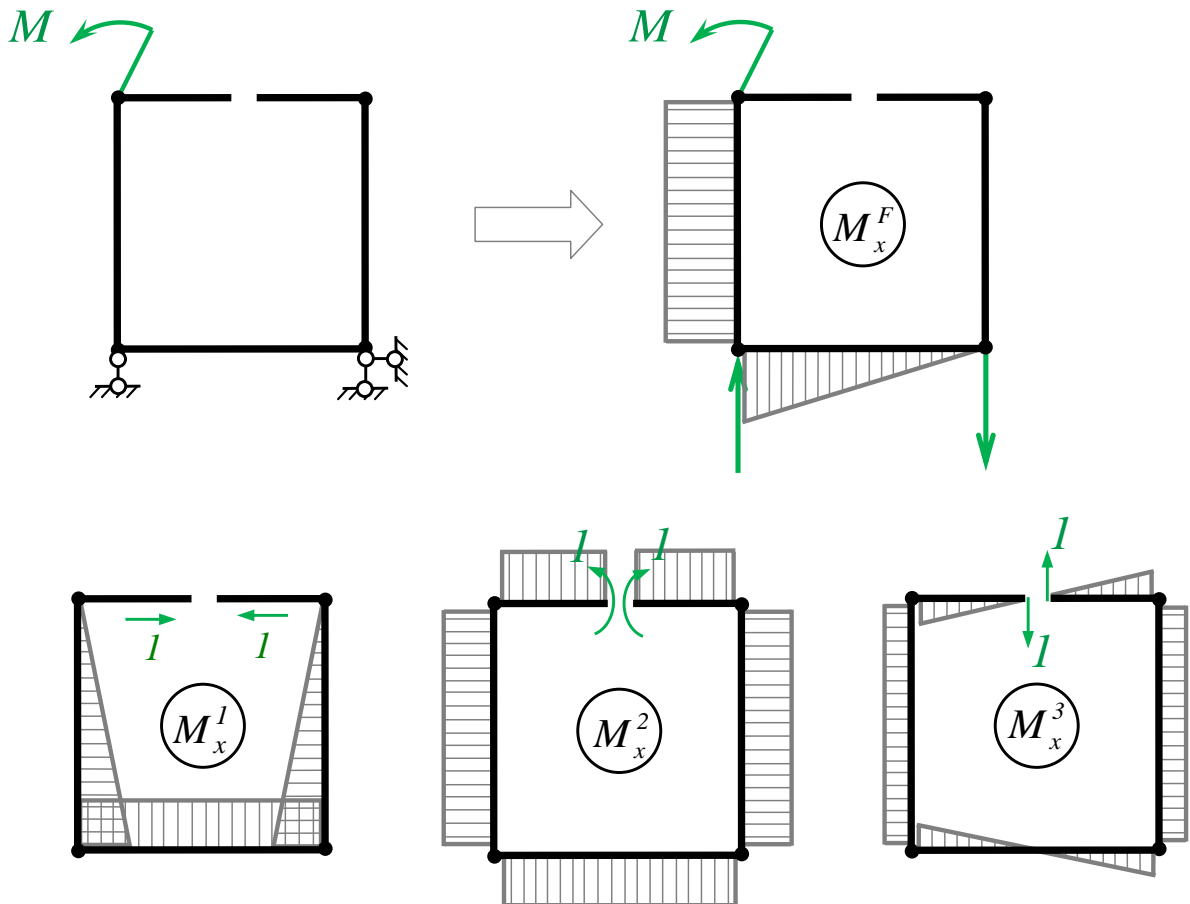
Используется один из двух расчётных приёмов: рассечение или врезка шарниров. Ниже мы рассмотрим оба приёма. Перед рассмотрением хочется добавить: применимы они не только к конструкциям, имеющим явные замкнутые контуры, но также и к конструкциям, точки которых жёстко фиксированы и тем неявно связаны:



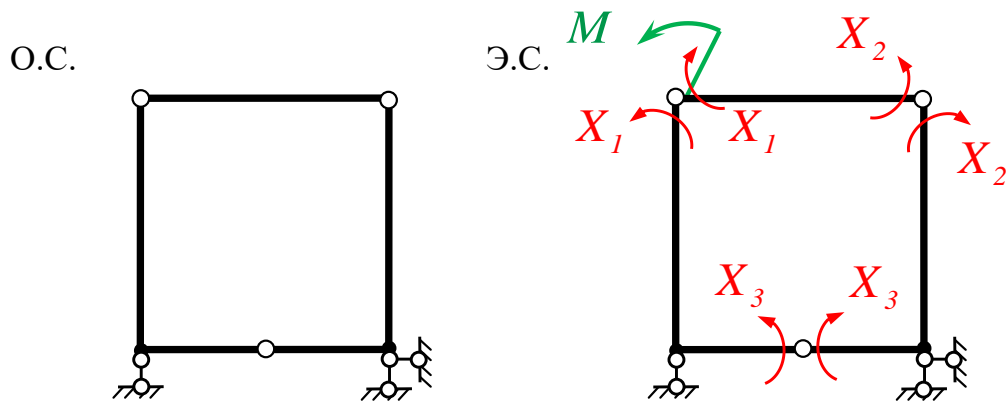
a) Контур рассекается в любом удобном месте.



$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

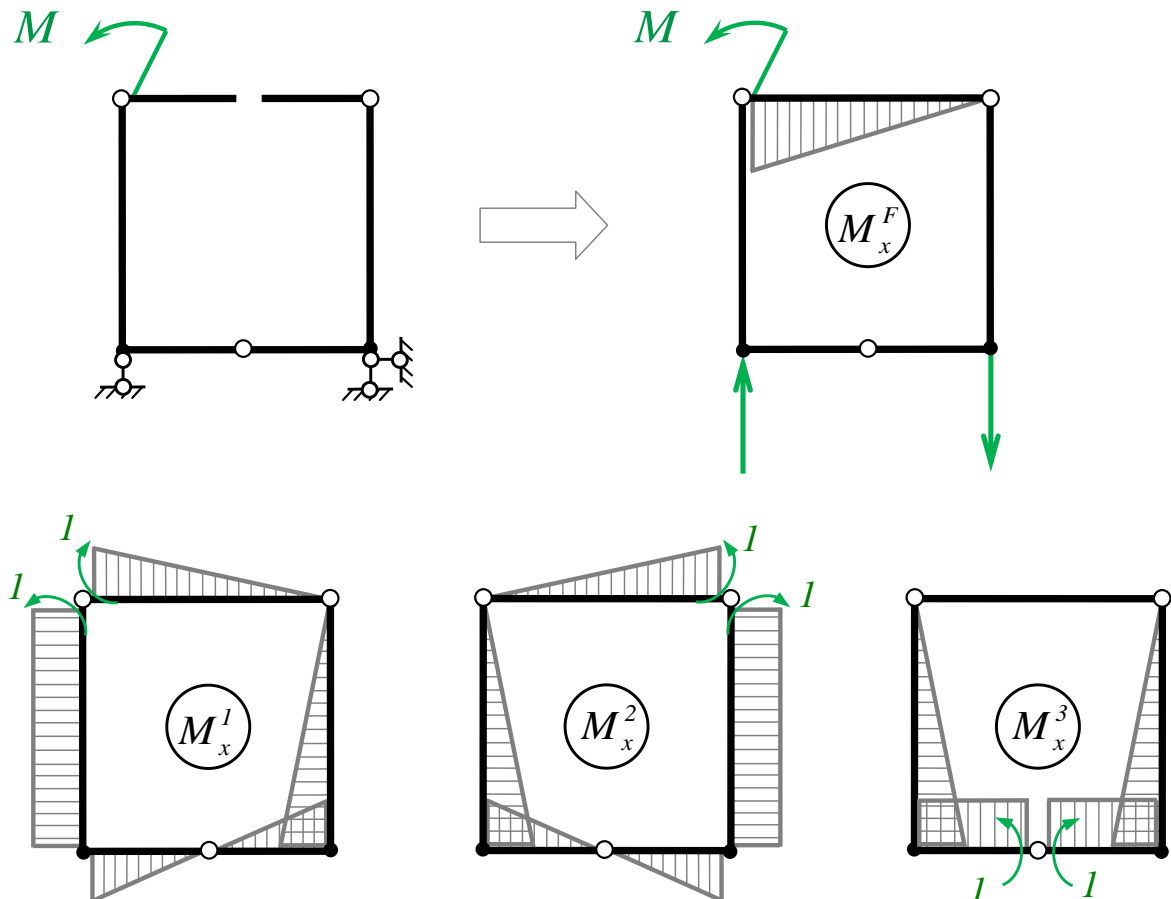


а) В контур врезаются три шарнира. Каждый уменьшает степень статической неопределённости на единицу. Шарниры не должны лежать на одной прямой, иначе будет механизм.



$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

Пример расчёта рам с врезанными шарнирами – [К-06](#).



Частные случаи: симметрия и косая симметрия.

**Симметричными** называют системы, образованные симметричными стержневыми конструкциями, к которым приложена симметричная нагрузка (рис.VII.11а.).

**Кососимметричными** (обратносимметричными) называют системы, образованные симметричными стержневыми конструкциями, к которым приложена обратносимметричная нагрузка (рис.VII.11б.), либо обратносимметричными конструкциями, к которым приложена симметричная (рис.VII.11в) либо кососимметричная (рис.VII.11г) нагрузка.

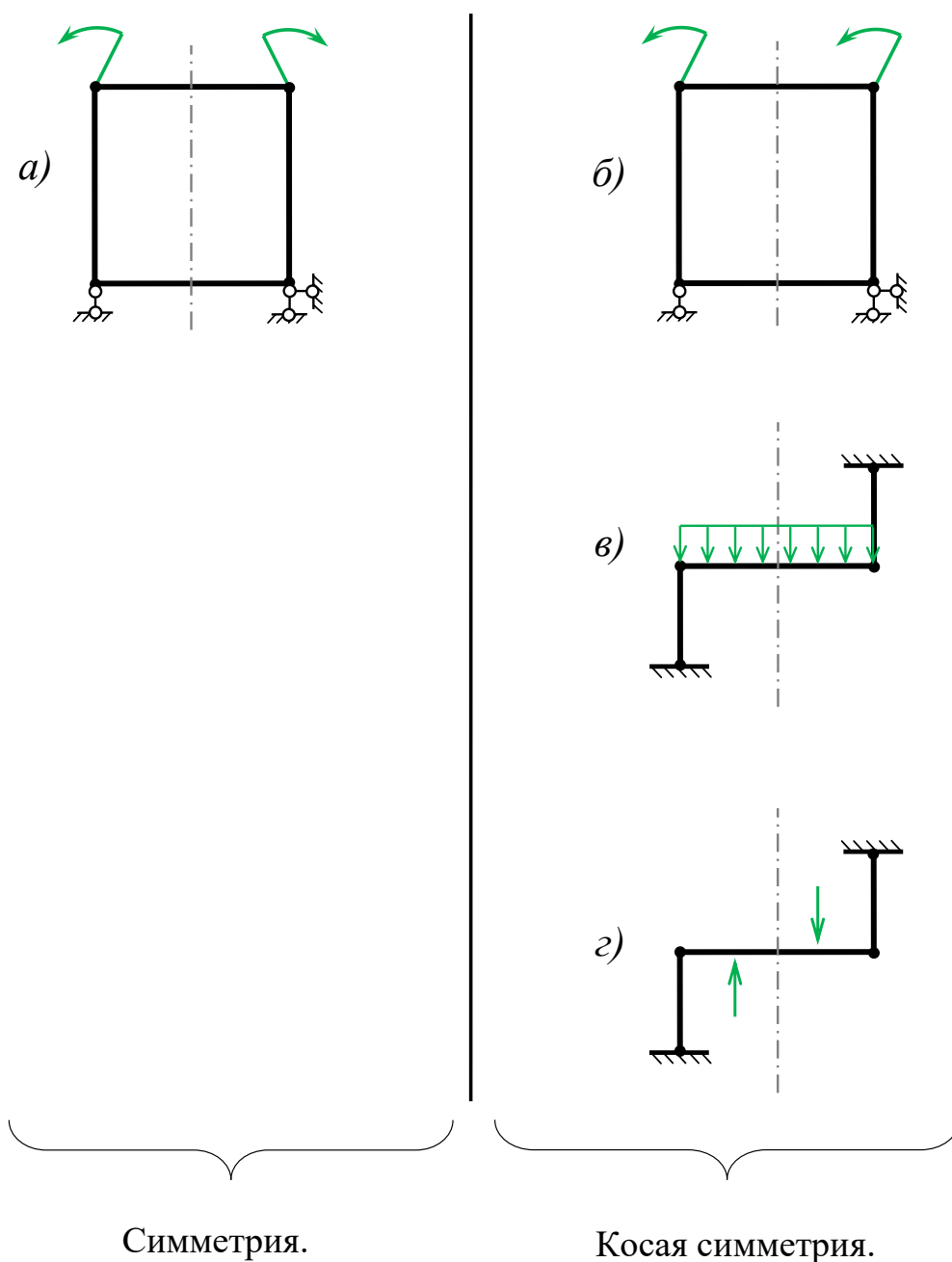


Рис.VII.11.

Внутренние силовые факторы в разрезе замкнутого контура (рис. VII.10.) также подразделяются на симметричные и кососимметричные. Как это определяется? По векторам сил: симметричные стрелки соответствуют симметричным факторам ( $X_1$  и  $X_2$ ) кососимметричные стрелки соответствуют кососимметричному фактору ( $X_3$ ).

Особенностью симметричных и кососимметричных систем является обнуление «чужих» силовых факторов в разрезе, совпадающем с осью симметрии, это понижает степень статической неопределимости:

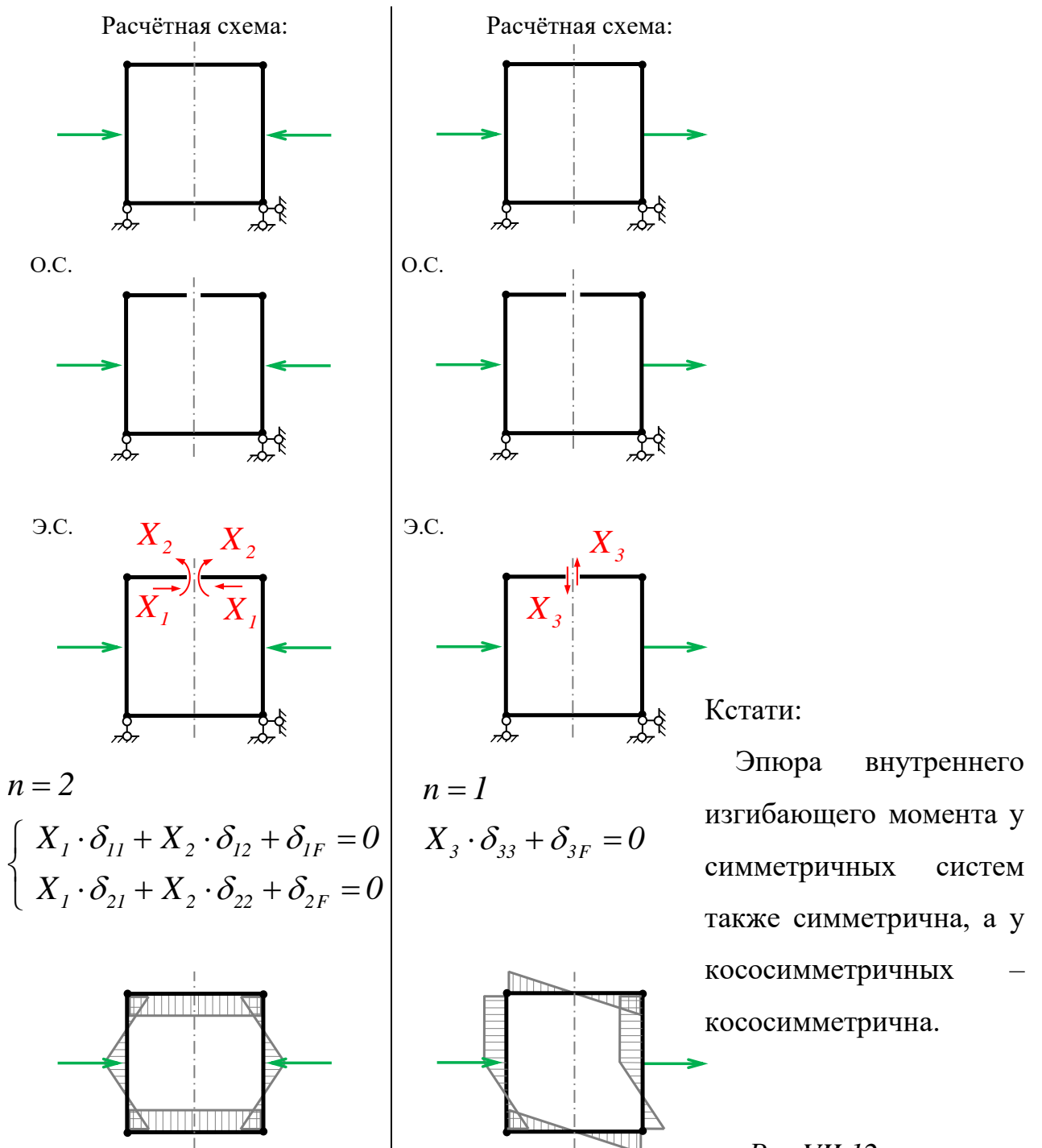


Рис. VII.12.

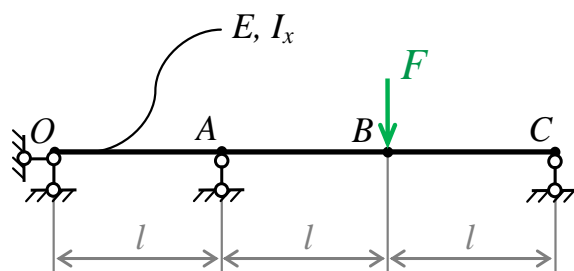
## Врезанный шарнир

Идея назначать избыточными связи не внешние, а внутренние, возникшая при расчёте рам с замкнутым контуром, может быть применена и к балкам тоже. Резать балку нельзя, механизм получится. А врезать шарнир вполне допустимо.

Врезка шарнира между опорами не оптимальна, она приводит к сложным расчётам (см. конспект [F-08](#)). Врезка шарнира над опорой, наоборот, порождает статически определимую систему, расчёт которой очень прост: сложная балка фактически распадается на две простые, «не замечающие» друг друга (см. конспект [F-09](#)).

Решим таким образом задачу, изображённую на *рис.VII.2*.

Пример VII.2 :



Дано:  $E, I_x, F, l$ .

Построить эпюру внутреннего изгибающего момента. Проверить полученное решение.

Решение (по пунктам конспекта [L-01](#)):

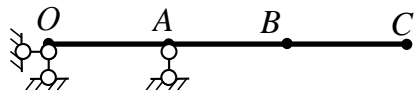
I. Вычисление степени статической неопределимости:

- Количество внешних связей:  $n_{\text{внеш.св.}} = \overset{O}{2} + \overset{A}{1} + \overset{C}{1} = 4$  ;
- Количество внутренних связей:  $n_{\text{внутр.св.}} = 3 \cdot K = 3 \cdot 0 = 0$  ;
- Степень статической неопределимости:  $n = (4 + 0) - 3 = 1$  .

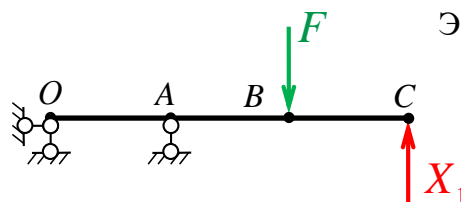
II. Раскрытие статической неопределимости:

а) Варианты основных и эквивалентных систем:

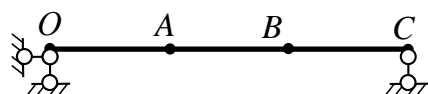
О.С. №1



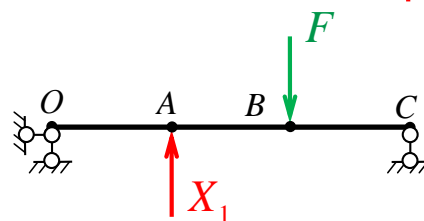
Э.С. №1



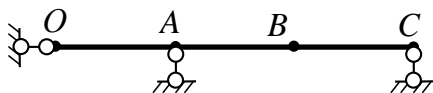
О.С. №2



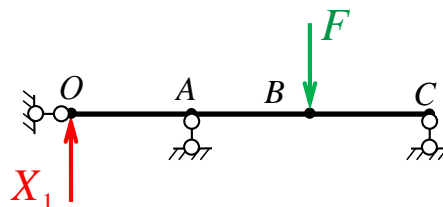
Э.С. №2



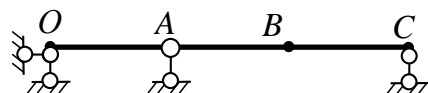
О.С. №3



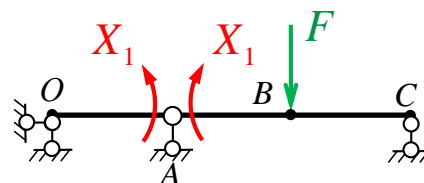
Э.С. №3



О.С. №4



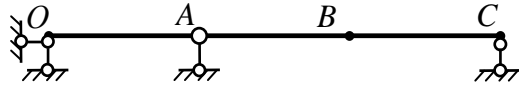
Э.С. №4



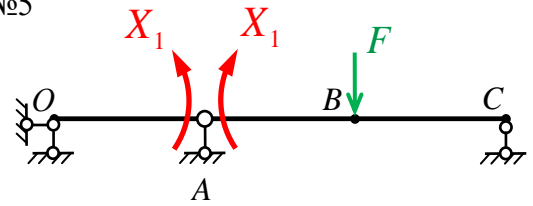


б) Выбираем пятый вариант:

О.С. №5

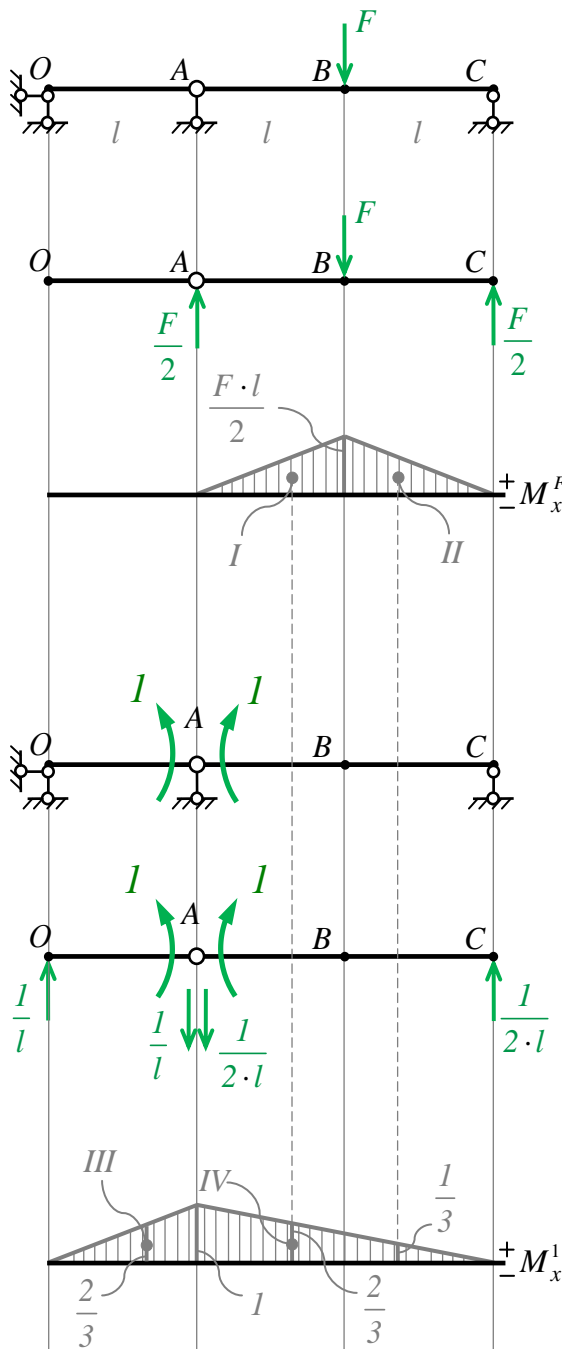


Э.С. №5



в) Система канонических уравнений:  $X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = 0$

г) Коэффициенты канонических уравнений:



$$\begin{aligned} \delta_{1F} &= \frac{M_x^I \times M_x^F}{E \cdot I_x} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot l \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{F \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} + \\ &+ \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{F \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} l = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_x} \end{aligned}$$

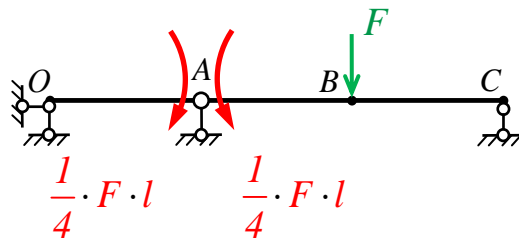
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{M_x^I \times M_x^I}{E \cdot I_x} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot l \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \right) \cdot \frac{2}{3} + \\ &+ \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot 1 \right) \cdot \frac{2}{3} l = \\ &= \frac{l}{E \cdot I_x} \end{aligned}$$

д) Реакция избыточной связи:

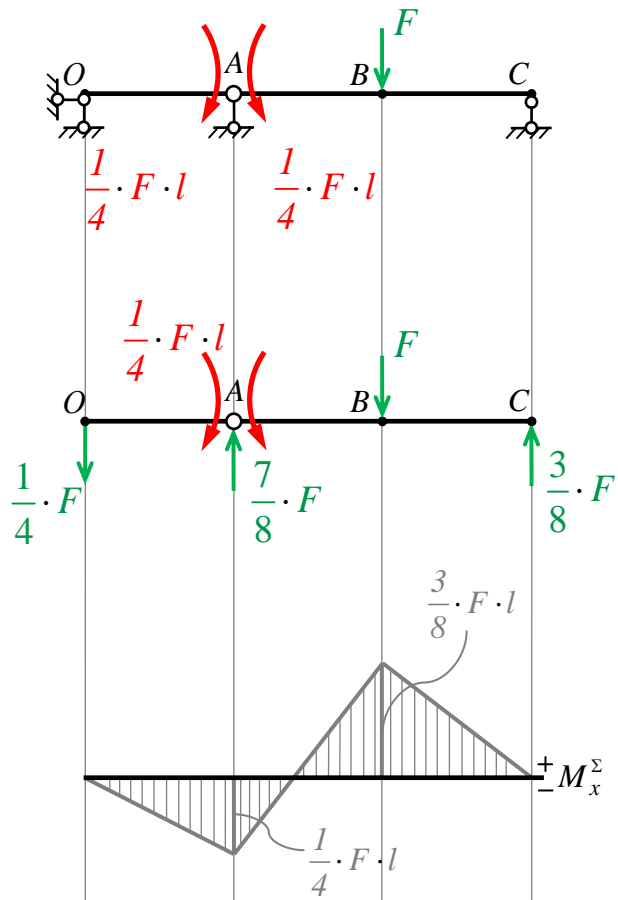
$$X_I \cdot \delta_{II} + \delta_{IF} = 0$$

$$X_I = -\frac{\delta_{IF}}{\delta_{II}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_x} \times \frac{E \cdot I_x}{l} = -\frac{1}{4} \cdot F \cdot l \quad .$$

е) Эквивалентная система:



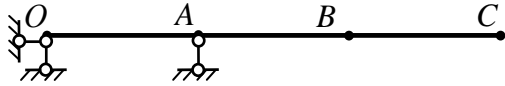
III. Завершаем решение задачи:



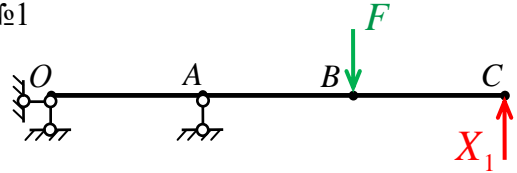
IV. Проверка правильности полученного решения (повторное решение в другой О.С.):

б) Выбираем первый вариант:

О.С. №1

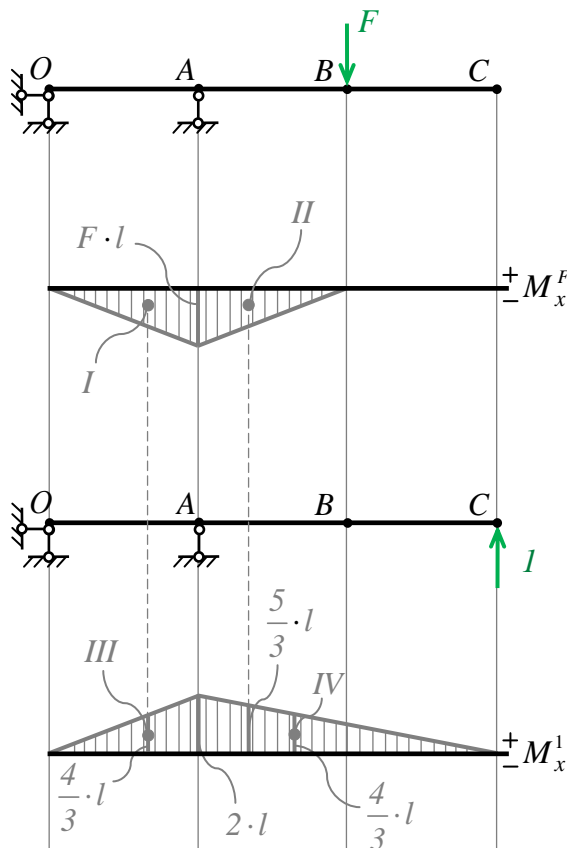


Э.С. №1



в) Система канонических уравнений:  $X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = 0$

г) Коэффициенты канонических уравнений:



$$\begin{aligned} \delta_{1F} &= \frac{M_x^1 \times M_x^F}{E \cdot I_x} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot l \left[ -\left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot F \cdot l \right) \cdot \frac{4}{3} \cdot l - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot F \cdot l \right) \cdot \frac{5}{3} \cdot l \right] = -\frac{3}{2} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{M_x^1 \times M_x^1}{E \cdot I_x} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot l \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot 2l \right) \cdot \frac{4}{3} \cdot l + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \right) \cdot \frac{4}{3} \cdot l \right] = \frac{4 \cdot l^3}{E \cdot I_x}. \end{aligned}$$

д) Реакция избыточной связи:

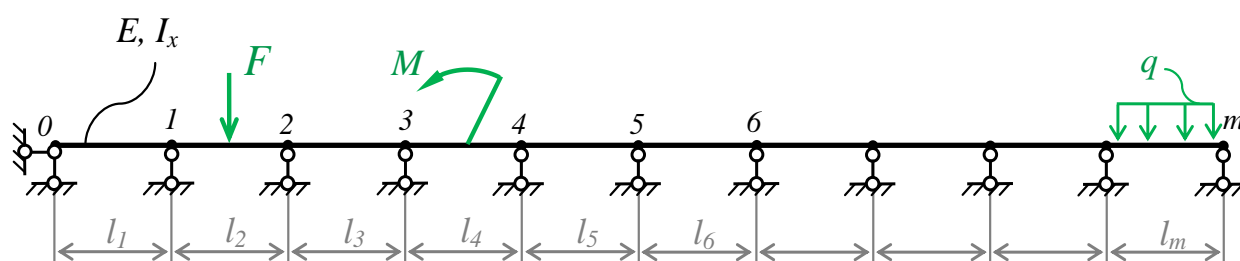
$$X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_x} \times \frac{E \cdot I_x}{4 \cdot l^3} = \frac{3}{8} \cdot F.$$

Реакция совпала с основным решением, этого достаточно.

## Многоопорные балки

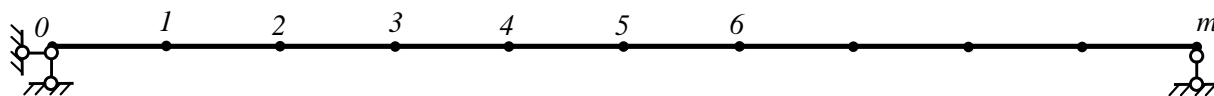
Многоопорными (или неразрезными) называют балки, лежащие более чем на двух шарнирных опорах и не имеющие промежуточных шарниров. Такие балки, широко применяемые в различных конструкциях, принадлежат к числу статически неопределимых.

Опоры таких балок принято нумеровать слева направо, начиная от нуля, участок балки имеет номер правой опоры. Если края балки не защемлены, степень статической неопределимости равна количеству промежуточных опор:  $n=m-1$ .

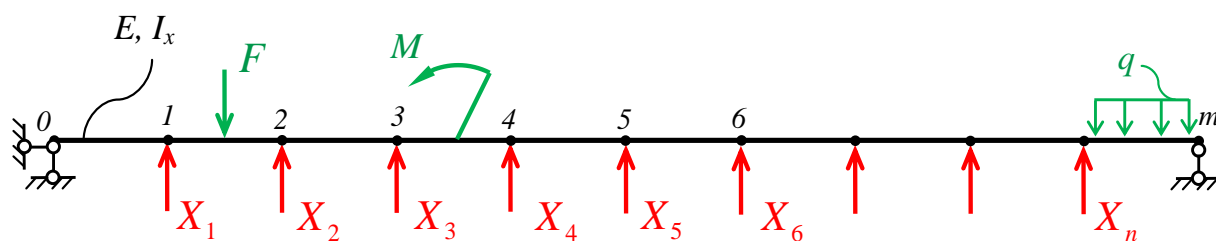


Рассчитывать подобные конструкции можно так, как это показано на (рис.VII.9.), назначая избыточными внешние связи - промежуточные опоры:

О.С.



Э.С.

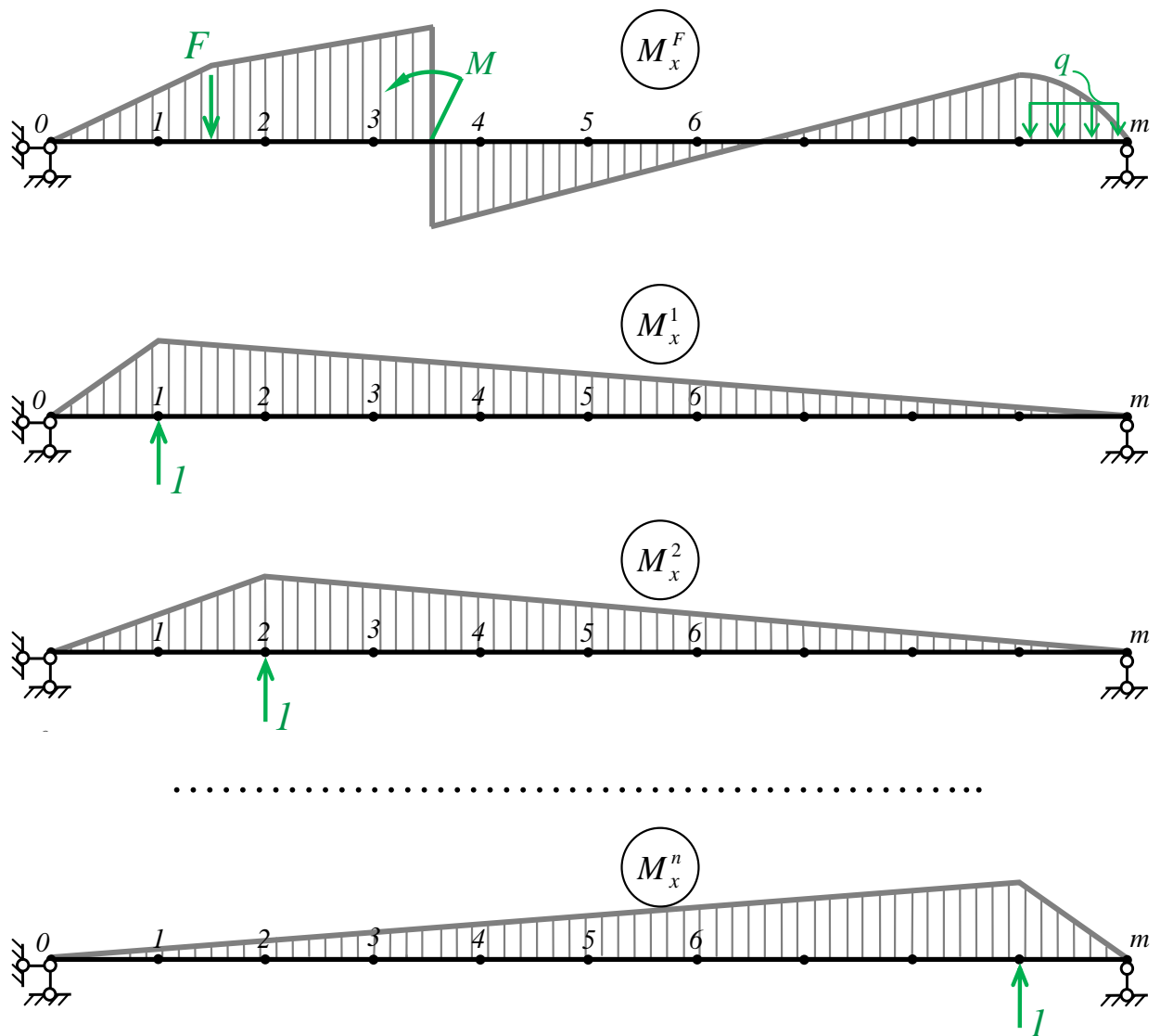


Канонические уравнения:

(VII.5)

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + X_4 \cdot \delta_{14} + X_5 \cdot \delta_{15} + X_6 \cdot \delta_{16} + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta_{1n} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_4 \cdot \delta_{24} + X_5 \cdot \delta_{25} + X_6 \cdot \delta_{26} + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta_{2n} + \delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} + X_5 \cdot \delta_{35} + X_6 \cdot \delta_{36} + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta_{3n} + \delta_{3F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{41} + X_2 \cdot \delta_{42} + X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} + X_5 \cdot \delta_{45} + X_6 \cdot \delta_{46} + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta_{4n} + \delta_{4F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{51} + X_2 \cdot \delta_{52} + X_3 \cdot \delta_{53} + X_4 \cdot \delta_{54} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta_{5n} + \delta_{5F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{61} + X_2 \cdot \delta_{62} + X_3 \cdot \delta_{63} + X_4 \cdot \delta_{64} + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta_{6n} + \delta_{6F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta + X_2 \cdot \delta + X_3 \cdot \delta + X_4 \cdot \delta + X_5 \cdot \delta + X_6 \cdot \delta + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta + \delta = 0 \\ X_1 \cdot \delta + X_2 \cdot \delta + X_3 \cdot \delta + X_4 \cdot \delta + X_5 \cdot \delta + X_6 \cdot \delta + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta + \delta = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{n1} + X_2 \cdot \delta_{n2} + X_3 \cdot \delta_{n3} + X_4 \cdot \delta_{n4} + X_5 \cdot \delta_{n5} + X_6 \cdot \delta_{n6} + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta_{nn} + \delta_{nF} = 0 \end{cases}$$

Эпюры для вычисления коэффициентов  $\delta_{ij}$  (рисуем прямо на балке):

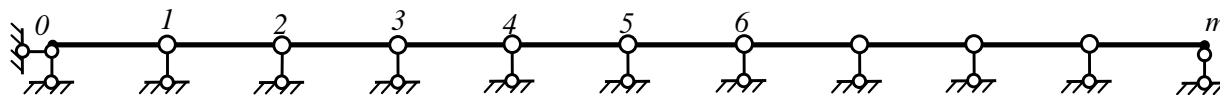


$$\delta_{ij} = \frac{M_x^i \times M_x^j}{E \cdot I_x}; \quad \delta_{iF} = \frac{M_x^i \times M_x^F}{E \cdot I_x}.$$

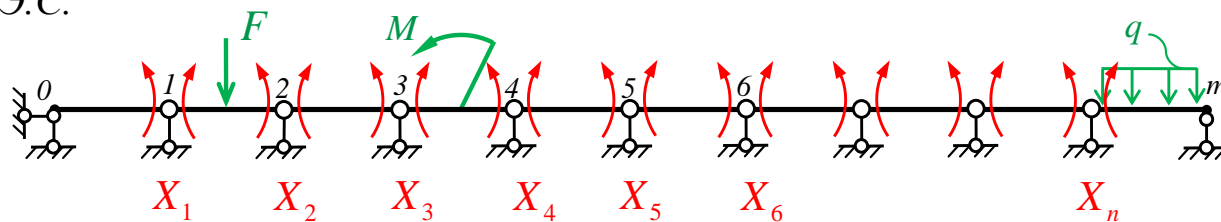
Это будет правильно. Но не оптимально.

Расчёты существенно упрощаются, если в качестве основной будет выбрана система с врезанными, как в примере VII.2, над опорами шарнирами:

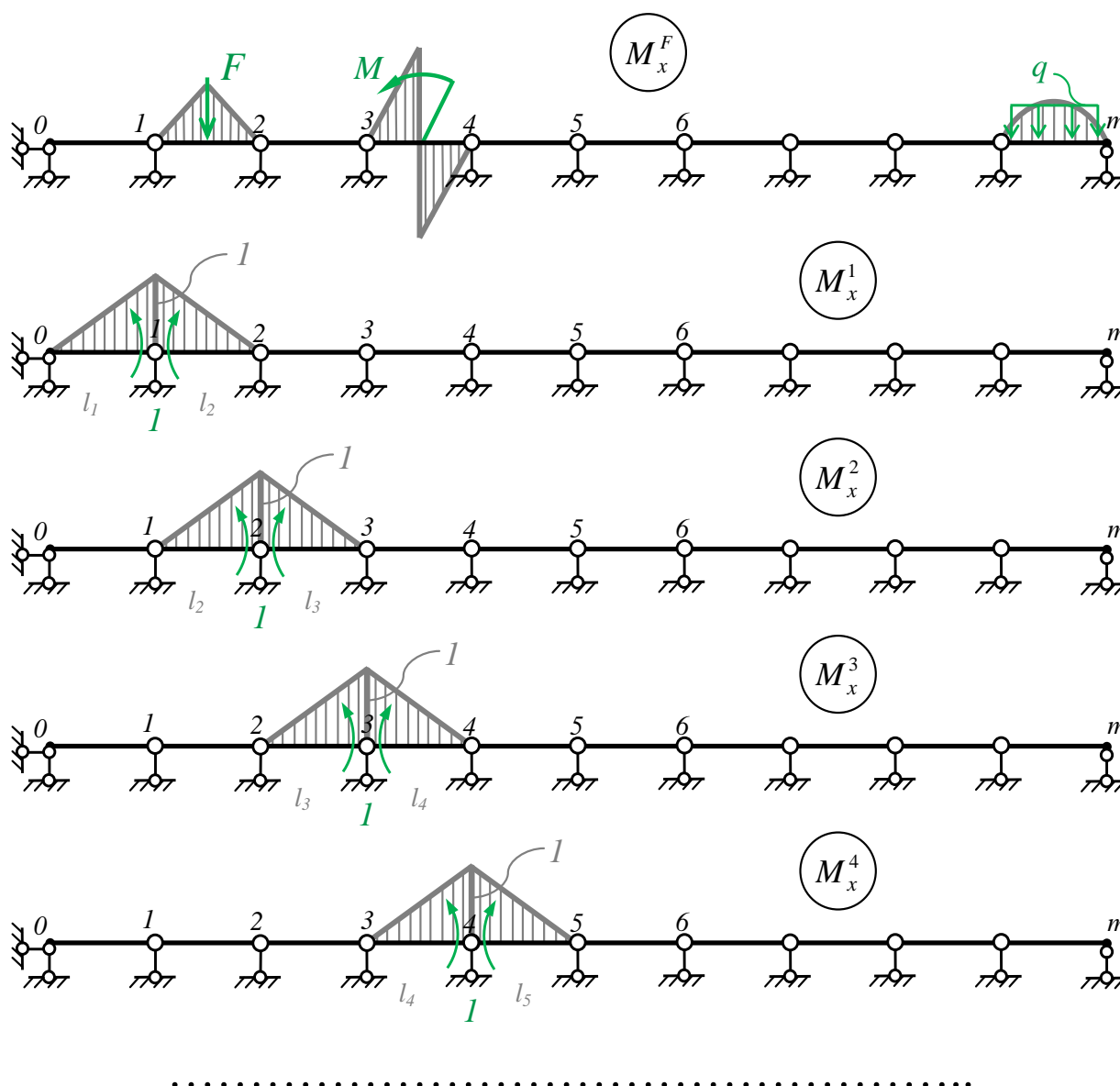
О.С.



Э.С.



Эпюры для вычисления коэффициентов  $\delta_{ij}$  (рисуем прямо на балке):



Видно, что эпюры от единичных моментов на расстоянии более одного номера вообще не пересекаются, что значительно уменьшает количество ненулевых коэффициентов в системе канонических уравнений (VII.5) :

$$j-i > 1 : \delta_{ij} = \frac{M_x^i \times M_x^j}{E \cdot I_x} = 0, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \delta_{2F} = 0 \\ 0 + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \delta_{3F} = 0 \\ 0 + 0 + X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} + X_5 \cdot \delta_{45} + 0 + 0 + 0 + 0 + \delta_{4F} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + X_4 \cdot \delta_{54} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + 0 + 0 + 0 + \delta_{5F} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + X \cdot \delta + 0 + 0 + \delta_{6F} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + X_6 \cdot \delta + X \cdot \delta + X \cdot \delta + 0 + \delta = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta + \delta = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta_{nn} + \delta_{nF} = 0 \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \delta_{2F} = 0 \\ X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} + \delta_{3F} = 0 \\ X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} + X_5 \cdot \delta_{45} + \delta_{4F} = 0 \\ X_4 \cdot \delta_{54} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + \delta_{5F} = 0 \\ X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + X \cdot \delta + \delta_{6F} = 0 \\ X_6 \cdot \delta + X \cdot \delta + X \cdot \delta + \delta = 0 \\ X \cdot \delta + X \cdot \delta + X_n \cdot \delta + \delta = 0 \\ X_{n-1} \cdot \delta_{nn-1} + X_n \cdot \delta_{nn} + \delta_{nF} = 0 \end{array} \right. \quad (VII.6)$$

Причём строить эпюры  $M_x^i$  вовсе не обязательно в силу их однотипности. Формулы для коэффициентов от перемножения единичных эпюр можно записать аналитически:

$$\delta_{ii} = \frac{M_x^i \times M_x^i}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot l_i \cdot 1 \right) \cdot \frac{2}{3} + \left( \frac{1}{2} \cdot l_{i+1} \cdot 1 \right) \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{l_i + l_{i+1}}{3 \cdot E \cdot I_x};$$

$$\delta_{ij} = \frac{M_x^i \times M_x^j}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \begin{array}{cc} i\text{-тый правый треугольник} & j\text{-тый левый треугольник} \\ \left( \frac{1}{2} \cdot l_{i+1} \cdot 1 \right) & \cdot \quad \frac{1}{3} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{l_{i+1}}{6 \cdot E \cdot I_x} ; \quad i+1 = j ; \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} .$$

Так же, в зависимости от нагрузки, можно вывести формулу для определения  $\delta_{iF}$  и на этом не останавливаться, как это показано в учебниках [Феодосьева](#) (стр. 285) или [Писаренко](#) (стр. 413).

В конце концов, при типовой нагрузке можно вообще обойтись без построения эпюр:

- 1) Подсчитать количество промежуточных опор;
- 2) Для каждой промежуточной опоры написать стереотипное **уравнение трёх моментов** (VII.6); уравнения так называются потому, что в каждое входят три неизвестные  $X$ , которые и являются моментами;
- 3) По формулам вычислить коэффициенты  $\delta$  ;
- 4) Решив систему уравнений, получить значения неизвестных  $X$  , раскрыть, таким образом, статическую неопределимость.

В данном случае в первом и последнем уравнении системы (VII.6) вы видите всего два момента, потому, что края стержня шарнирно опёрты, а не заделаны (защемлены).



## Плоскопространственные рамы

Плоскопространственными называются плоские рамы, нагруженные обобщёнными силами, перпендикулярными этой плоскости.

Мы будем рассматривать рамы, плоскость которых одновременно является главной плоскостью слагающих стержней (рис.VII.13.).

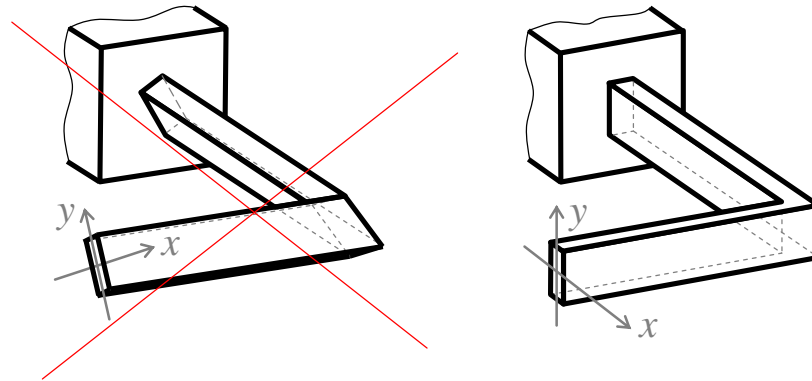


Рис.VII.13.

В поперечных сечениях стержней плоскопространственной рамы не равны нулю два момента – изгибающий  $M_x$  и крутящий  $M_{кр}$ . Поэтому при вычислении перемещений точек упругой оси методом Мора помимо третьего слагаемого в формуле (VI.9) придётся учитывать ещё и второе. А для этого предварительно необходимо найти соотношение между крутильной жёсткостью стержней и их жёсткостью на изгиб из плоскости:

$$G \cdot I_{\kappa} \quad \text{и} \quad E \cdot I_x$$

вернее, найти коэффициент пропорциональности  $k$  между податливостью стержней на изгиб и податливостью на кручение:

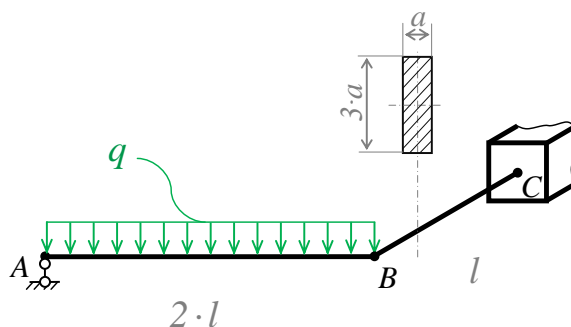
$$\frac{1}{G \cdot I_{\kappa}} = k \cdot \frac{1}{E \cdot I_x}$$

$$k = \frac{E \cdot I_x}{G \cdot I_{\kappa}} \quad (\text{VII.7})$$

Пример VII.3 :

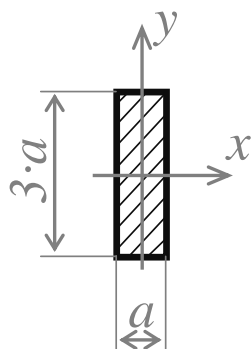
Дано:  $E, q, l, \nu=0,25$ .

Построить эпюру внутренних моментов. Проверить полученное решение.



Решение:

Вычисление коэффициента  $k$ :



$\beta=0,263$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{E}{2 \cdot (1 + 0,25)} = \frac{E}{2,5} = \frac{2}{5} \cdot E ;$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{a \cdot (3 \cdot a)^3}{12} = \frac{9}{4} \cdot a^4 ;$$

$$I_{\hat{e}} = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,263 \cdot 3 \cdot a \cdot a^3 = 0,789 \cdot a^4 ;$$

$$k = \frac{E \cdot I_x}{G \cdot I_{\hat{e}}} = \frac{\cancel{E} \cdot \frac{9}{4} \cdot a^4}{\frac{2}{5} \cdot \cancel{E} \cdot 0,789 \cdot a^4} = 7,129 \approx \frac{50}{7}.$$

Округления  $k$  до обыкновенной дроби допустимы с погрешностью, не превышающей 4% (инженерная точность).

Далее следуем пунктам конспекта [L-01](#):

I. Вычисление степени статической неопределимости:

а) Количество внешних связей:  $n_{\text{внеш.св.}} = \overset{A}{1} + \overset{C}{3} = 4 ;$

б) Количество внутренних связей:  $n_{\text{внутр.св.}} = 3 \cdot K = 3 \cdot 0 = 0 ;$

$K$  – количество замкнутых контуров.

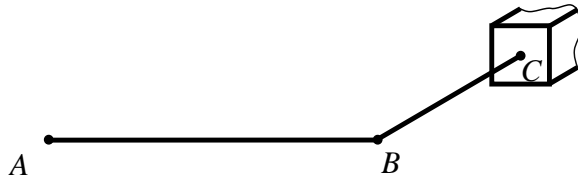
в) Степень статической неопределимости:

$$n = (n_{\text{внеш.св.}} + n_{\text{внутр.св.}}) - 3 = (4 + 0) - 3 = 1.$$

## II. Раскрытие статической неопределенности:

а) Варианты основных и эквивалентных систем (двух достаточно):

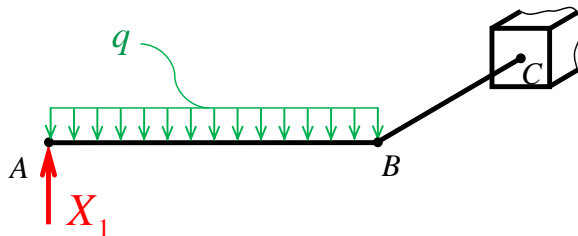
О.С. №1



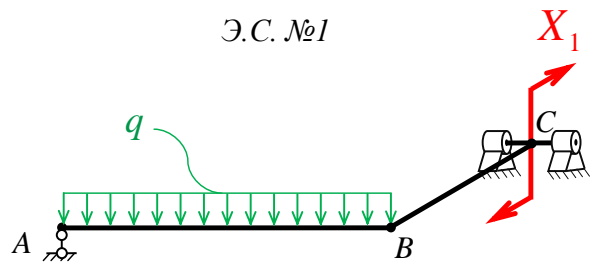
О.С. №2



Э.С. №1

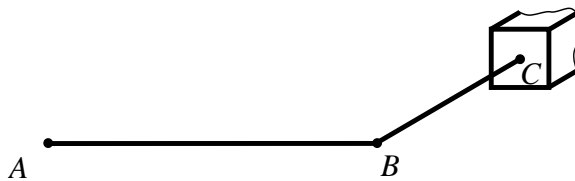


Э.С. №2

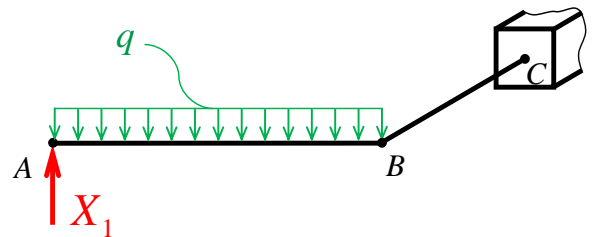


б) Выбираем первый вариант:

О.С. №1

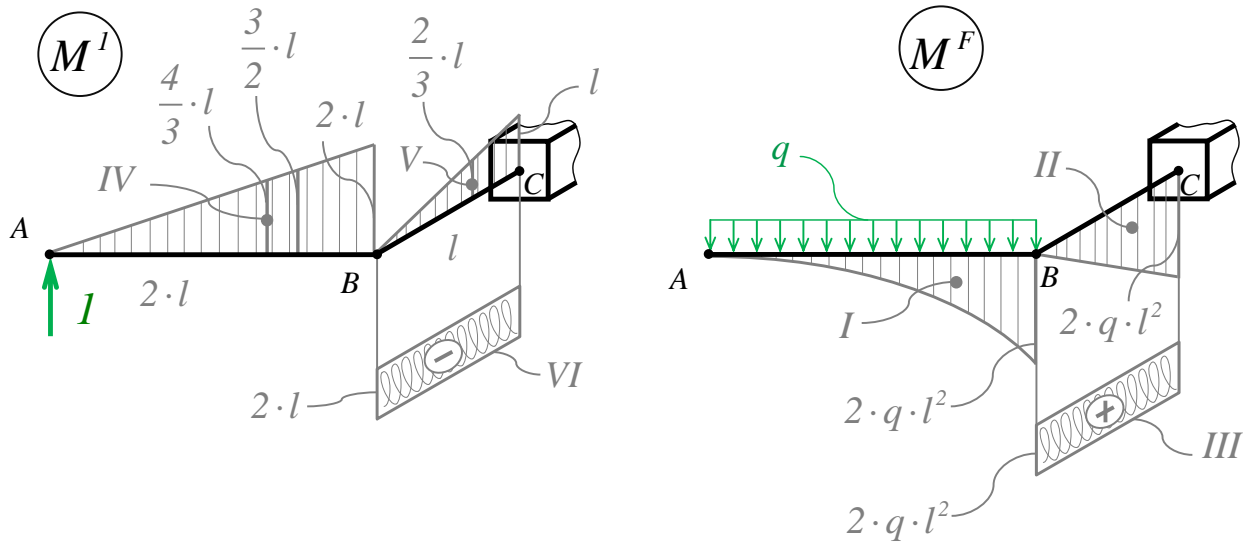


Э.С. №1



в) Система канонических уравнений:  $X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = 0$

2) Коэффициенты канонических уравнений:



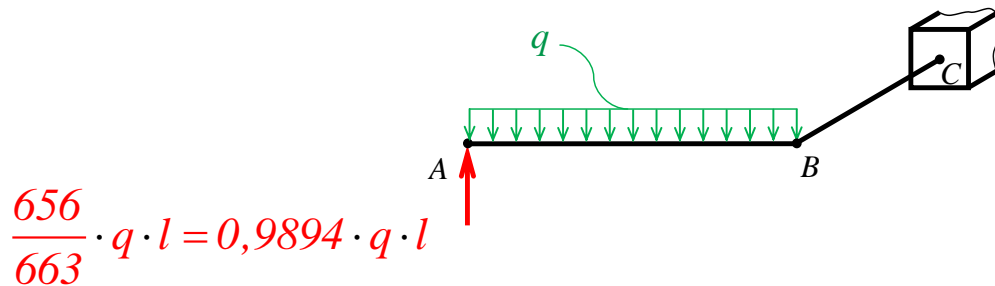
$$\begin{aligned}\delta_{IF} &= \frac{M^I \times M^F}{E \cdot I_x} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ - \left( \frac{1}{3} \cdot \cancel{2}l \cdot 2ql^2 \right) \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot l - \left( \frac{1}{\cancel{2}} \cdot l \cdot 2ql^2 \right) \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot l \right] + \\ &+ \frac{1}{G \cdot I_{кр}} \cdot \left[ - (l \cdot 2ql^2) \cdot 2 \cdot l \right] = - \frac{8}{3} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} - \frac{4 \cdot q \cdot l^4}{G \cdot I_{кр}} = \\ &= - \frac{8}{3} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} - k \cdot \frac{4 \cdot q \cdot l^4}{E \cdot I_x} = - \frac{8}{3} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} - \frac{50}{7} \cdot \frac{4 \cdot q \cdot l^4}{E \cdot I_x} = - \frac{656}{21} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{II} &= \frac{M^I \times M^I}{E \cdot I_x} = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}l \cdot 2l \right) \cdot \frac{4}{3} \cdot l + \left( \frac{1}{\cancel{2}} \cdot l \cdot l \right) \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot l \right] + \\ &+ \frac{1}{G \cdot I_{кр}} \cdot \left[ (l \cdot 2l) \cdot 2 \cdot l \right] = \frac{3 \cdot l^3}{E \cdot I_x} + \frac{4 \cdot l^3}{G \cdot I_{кр}} = \\ &= \frac{3 \cdot l^3}{E \cdot I_x} + k \cdot \frac{4 \cdot l^3}{E \cdot I_x} = \frac{3 \cdot l^3}{E \cdot I_x} + \frac{50}{7} \cdot \frac{4 \cdot l^3}{E \cdot I_x} = \frac{221}{7} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_x}.\end{aligned}$$

д) Реакция избыточной связи:

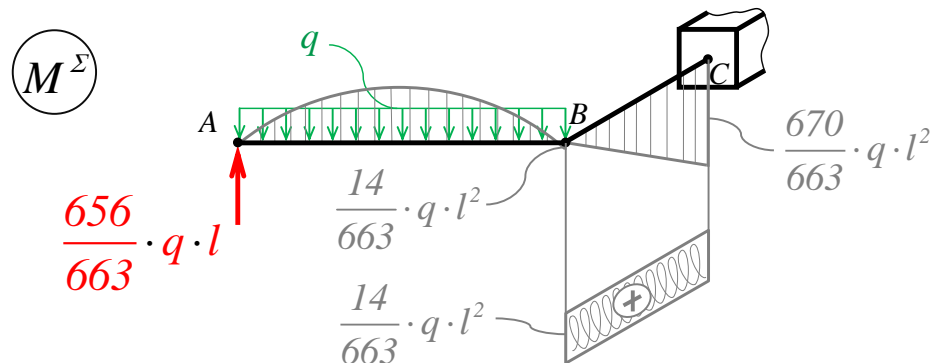
$$X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{656}{21} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} \times \frac{7}{221} \cdot \frac{E \cdot I_x}{l^3} = \frac{656}{663} \cdot q \cdot l = 0,9894 \cdot q \cdot l.$$

е) Эквивалентная система:

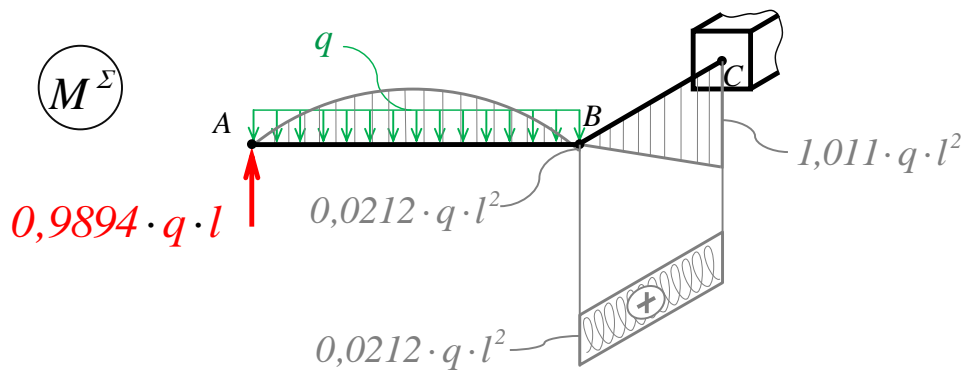


### III. Завершаем решение задачи:

Суммарную эпюру моментов можно записать в правильных дробях:



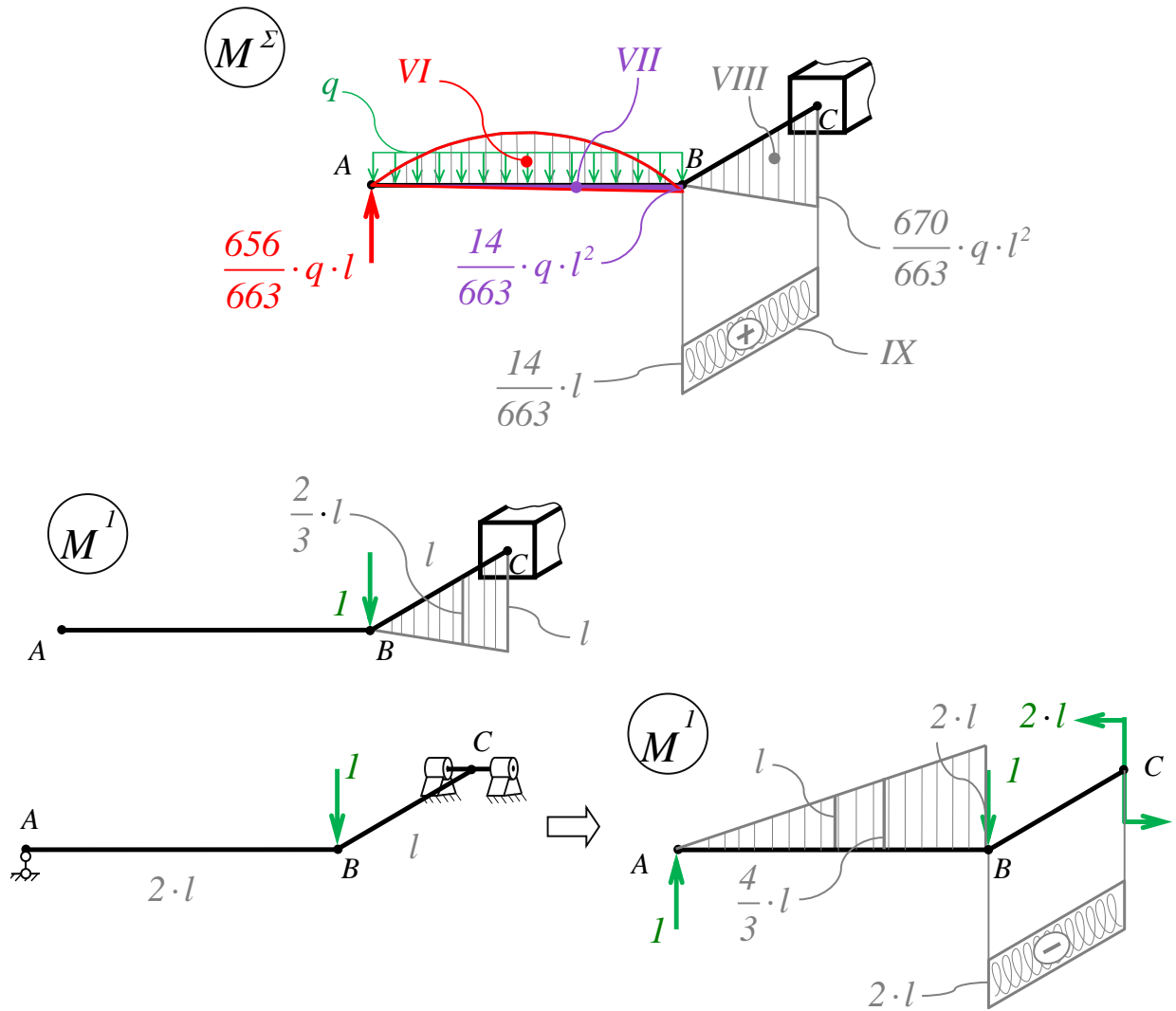
либо в десятичных дробях:



### IV. Проверка правильности полученного решения:

Определим угловое смещение поперечного сечения, связанного с точкой B, используя основные системы №1 и №2.

Проверка правильности эюры, записанной в правильных дробях:



$$\delta_B = \frac{M^\Sigma \times M^I}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{670}{663} q l^2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] = \frac{670}{1989} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x};$$

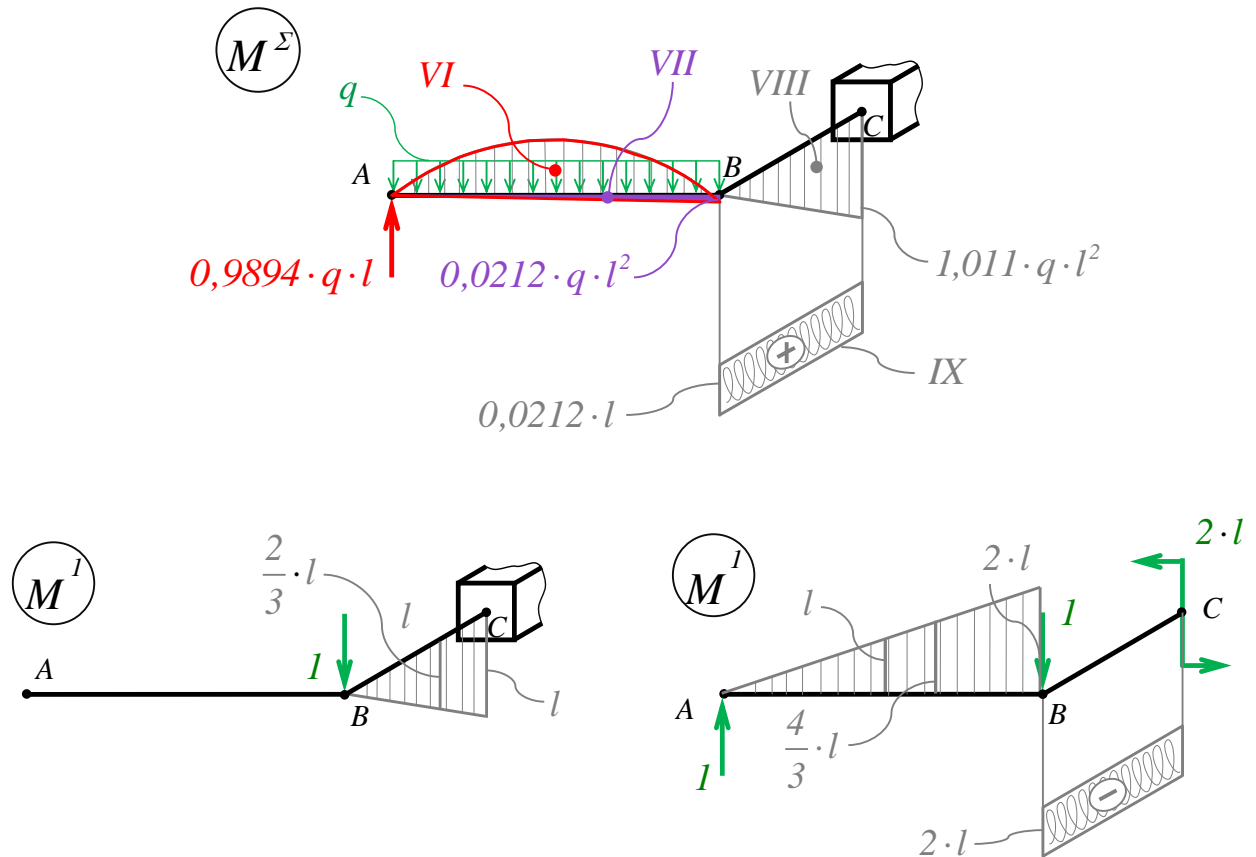
$$\delta_B = \frac{M^\Sigma \times M^I}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{q \cdot (2 \cdot l)^3}{12} \right) \cdot l - \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot \frac{14}{663} q l^2 \right) \cdot \frac{4}{3} \cdot l \right] +$$

$$+ \frac{1}{G \cdot I_k} \cdot \left[ \left( \frac{14}{663} q l^2 \cdot l \right) \cdot 2 \cdot l \right] = q \cdot l^4 \cdot \left\{ \frac{1270}{1989} \cdot \frac{1}{E \cdot I_x} - \frac{28}{663} \cdot \frac{1}{G \cdot I_k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{1989} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ 1270 - \frac{50}{7} \cdot 84 \right\} = \frac{670}{1989} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x}.$$

$\delta_B$  и  $\delta_B$  совпали абсолютно. Так и должно быть при работе с эюрой, записанной в правильных дробях – полное совпадение. И, при проверке заведомо нулевого перемещения, тоже должен получиться строго нуль.

Проверка правильности эюры, записанной в десятичных дробях:



$$\delta_B = \frac{M^\Sigma \times M^I}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot 1,011 q l^2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] = 0,337 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x};$$

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{M^\Sigma \times M^I}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{q \cdot (2 \cdot l)^3}{12} \right) \cdot l - \left( \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 0,0212 q l^2 \right) \cdot \frac{4}{3} \cdot l \right] + \\ &+ \frac{1}{G \cdot I_\theta} \cdot \left[ (0,0212 q l^2 \cdot l) \cdot 2 \cdot l \right] = q \cdot l^4 \cdot \left\{ \frac{0,6384}{E \cdot I_x} - \frac{0,0424}{G \cdot I_\theta} \right\} = \\ &= \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ 0,6384 - \frac{50}{7} \cdot 0,0424 \right\} = 0,3355 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x}. \end{aligned}$$

$\delta_B$  и  $\delta_B$  совпадают частично. Хорошо это или плохо?

При переходе к десятичным дробям значение реакции  $X_I$  округлялось до *четырёх* значащих цифр (округляется последняя цифра); дальнейшие расчёты также производились с этой же точностью. Значит, погрешность

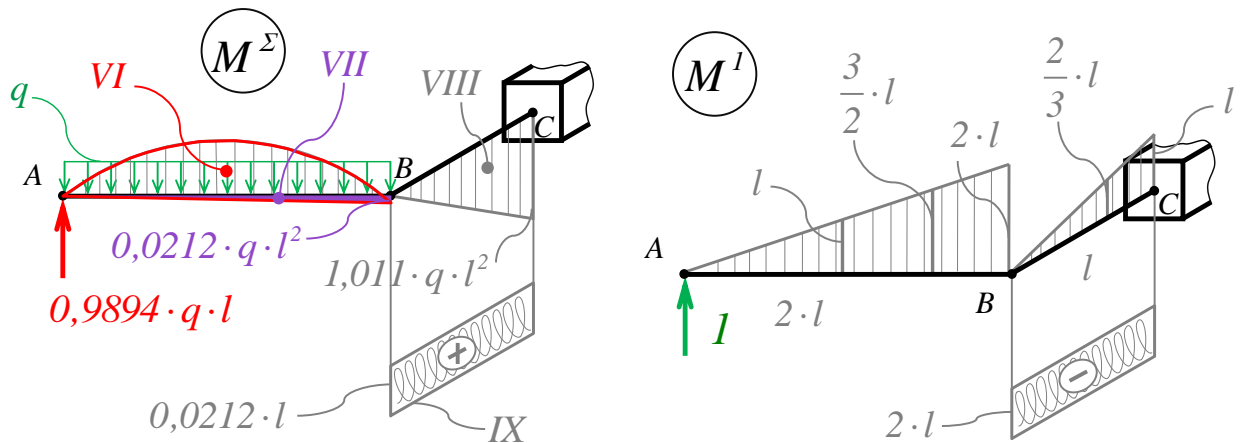
может проявиться, начиная с *третьей* значащей цифры. Первые две должны совпасть. Так ли это?

$$\delta_B = 0, \textcolor{red}{33}70 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x};$$

$$\delta_B = 0, \textcolor{red}{33}55 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x}.$$

Да, первые две значащие цифры совпадают. Значит, результат можно признать верным.

А, если проверим нулевое линейное перемещение точки А, используя суммарную эпюру, записанную в десятичных дробях?



$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{M^\Sigma \times M^I}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \times \\ &\times \left[ \left( \frac{q \cdot (2 \cdot l)^3}{12} \right) \cdot l - \left( \frac{1}{2} \cdot \cancel{2} l \cdot 0,0212 q l^2 \right) \cdot \frac{3}{2} \cdot l - \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot 1,011 q l^2 \right) \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot l \right] - \\ &- \frac{1}{G \cdot I_\theta} \cdot \left[ (0,0212 q l^2 \cdot l) \cdot 2 \cdot l \right] = q \cdot l^4 \cdot \left\{ \frac{0,2979}{E \cdot I_x} - \frac{0,0424}{G \cdot I_\theta} \right\} = \\ &= \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ 0,2979 - \overbrace{\frac{50}{7} \cdot 0,0424}^k \right\} = 0,004957 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x}. \end{aligned}$$

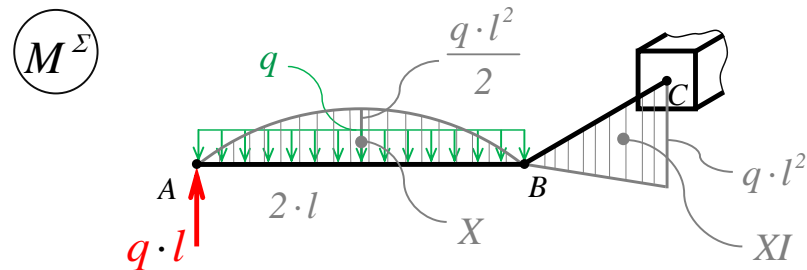
Тоже не ноль. И не понятно, от какой позиции отсчитывать погрешность. Так, что лучше эпюры в десятичных дробях таким образом не проверять.



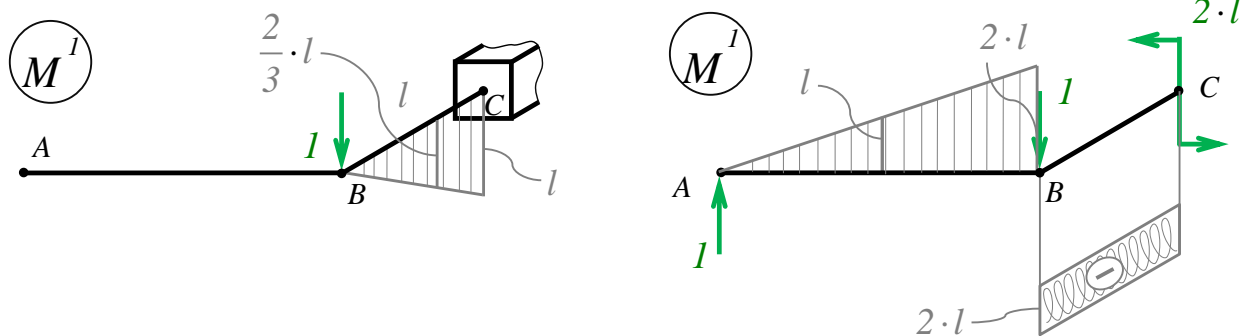
Примечание:

Искомая реакция  $X_I$  всего на 1% меньше  $q \cdot l$ . Давайте попробуем её округлить до  $q \cdot l$ ?  $X_I = 0,9894 \cdot q \cdot l \approx q \cdot l$ .

При этом суммарная эпюра моментов изменится незначительно:



Проверим правильность эпюры, вычислив линейное перемещение точки  $B$  в двух основных системах:



$$\delta_B = \frac{M^\Sigma \times M^I}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot q l^2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x};$$

$$\delta_B = \frac{M^\Sigma \times M^I}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{q \cdot (2 \cdot l)^3}{12} \right) \cdot l \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x}.$$

Результаты различаются *вдвое*. Вот к чему приводит небольшое округление значения реакции даже в пределах инженерной точности.

Вывод: последнее число, которое можно округлить до удобного значения в пределах 4% – коэффициент  $k$ . Дальнейшие вычисления следует вести либо в правильных дробях, либо с округлением до четырёх значащих цифр.

## Особенности плоскопространственных рам

Являясь, по сути, пространственной конструкцией (в сечениях пространственного стержня, в общем случае, не равны нулю все шесть внутренних силовых факторов) плоскопространственные рамы имеют особенность, облегчающую их расчёт: три из шести силовых факторов, действующих в плоскости рамы, заведомо равны нулю. Причина: внешняя нагрузка, действующая *из* плоскости, ни перемещений (при условии, показанном на *рис.VII.13.*) ни внутренних силовых факторов в других направлениях вызвать не может.

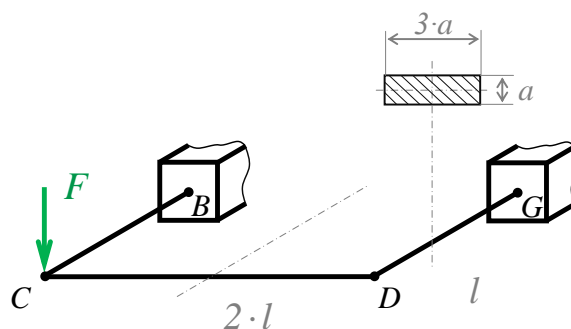
Так же по причине отсутствия внешней нагрузки, действующей в плоскости рамы, из шести уравнений равновесия тела в пространстве, три удовлетворяются тождественно: сумма сил по двум направлениям в плоскости и сумма моментов в плоскости. Таким образом, нетривиальных уравнений статического равновесия для плоскопространственной рамы не 6, а 3, что и находит своё применение в формуле вычисления степени статической неопределимости (см. конспект [L-01](#)).

Статическая неопределимость плоскопространственных рам с замкнутым контуром, либо, опирающихся на несколько заделок, может быть раскрыта назначением избыточными внутренних связей, то есть, разрезом.

Пример VII.4 :

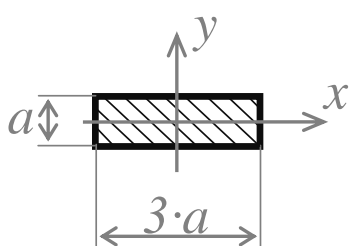
Дано:  $E, F, l, a, \nu=0,25$ .

Построить эпюру внутренних моментов. Проверить полученное решение.



Решение:

Вычисление коэффициента  $k$ :



$\beta=0,263$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{E}{2 \cdot (1 + 0,25)} = \frac{E}{2,5} = \frac{2}{5} \cdot E ;$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{(3 \cdot a) \cdot a^3}{12} = \frac{1}{4} \cdot a^4 = 0,25 \cdot a^4 ;$$

$$I_K = \beta \cdot h^3 \cdot b = 0,263 \cdot a^3 \cdot 3 \cdot a = 0,789 \cdot a^4 ;$$

$$k = \frac{E \cdot I_x}{G \cdot I_K} = 0,7921 \approx \frac{4}{5}.$$

Округления  $k$  до обыкновенной дроби допустимы с погрешностью, не превышающей 4% (инженерная точность).

Далее следуем пунктам конспекта [L-01](#):

I. Вычисление степени статической неопределимости:

Попробуем раму решить, как пространственную – 6 силовых факторов в сечении, 6 реакций в заделке, 6 уравнений равновесия.

а) Количество внешних связей:  $n_{\text{внеш.св.}} = \overset{B}{6} + \overset{G}{6} = 12 ;$

б) Количество внутренних связей:  $n_{\text{внутр.св.}} = 3 \cdot K = 3 \cdot 0 = 0 ;$   
 $K$  – количество замкнутых контуров.

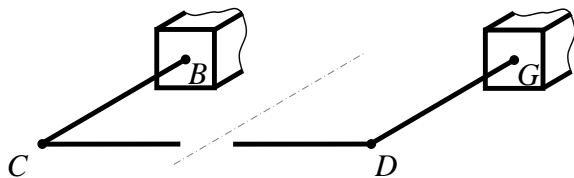
в) Степень статической неопределимости:

$$n = (n_{\text{внеш.св.}} + n_{\text{внутр.св.}}) - 6 = (12 + 0) - 6 = 6 .$$

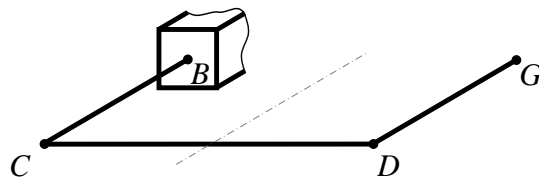
## II. Раскрытие статической неопределимости:

а) Варианты основных и эквивалентных систем (двух достаточно):

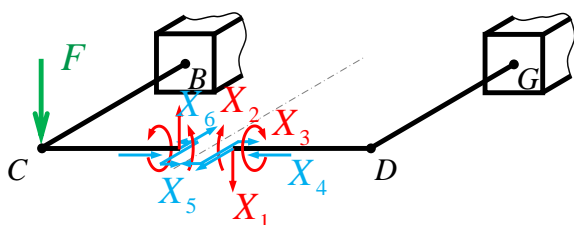
О.С. №1



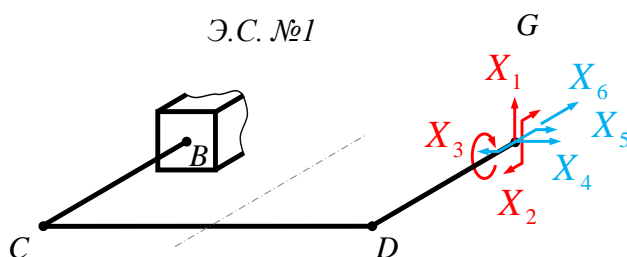
О.С. №2



Э.С. №1

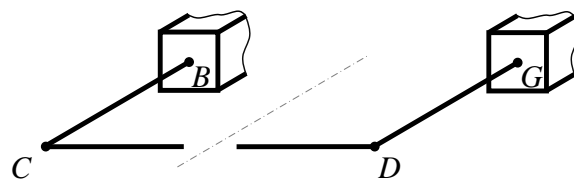


Э.С. №1

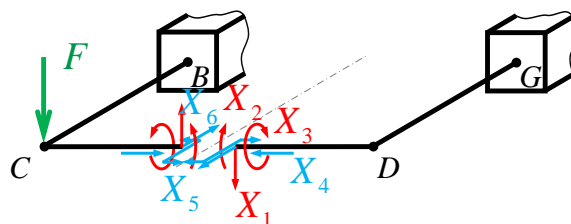


б) Выбираем первый вариант:

О.С. №1



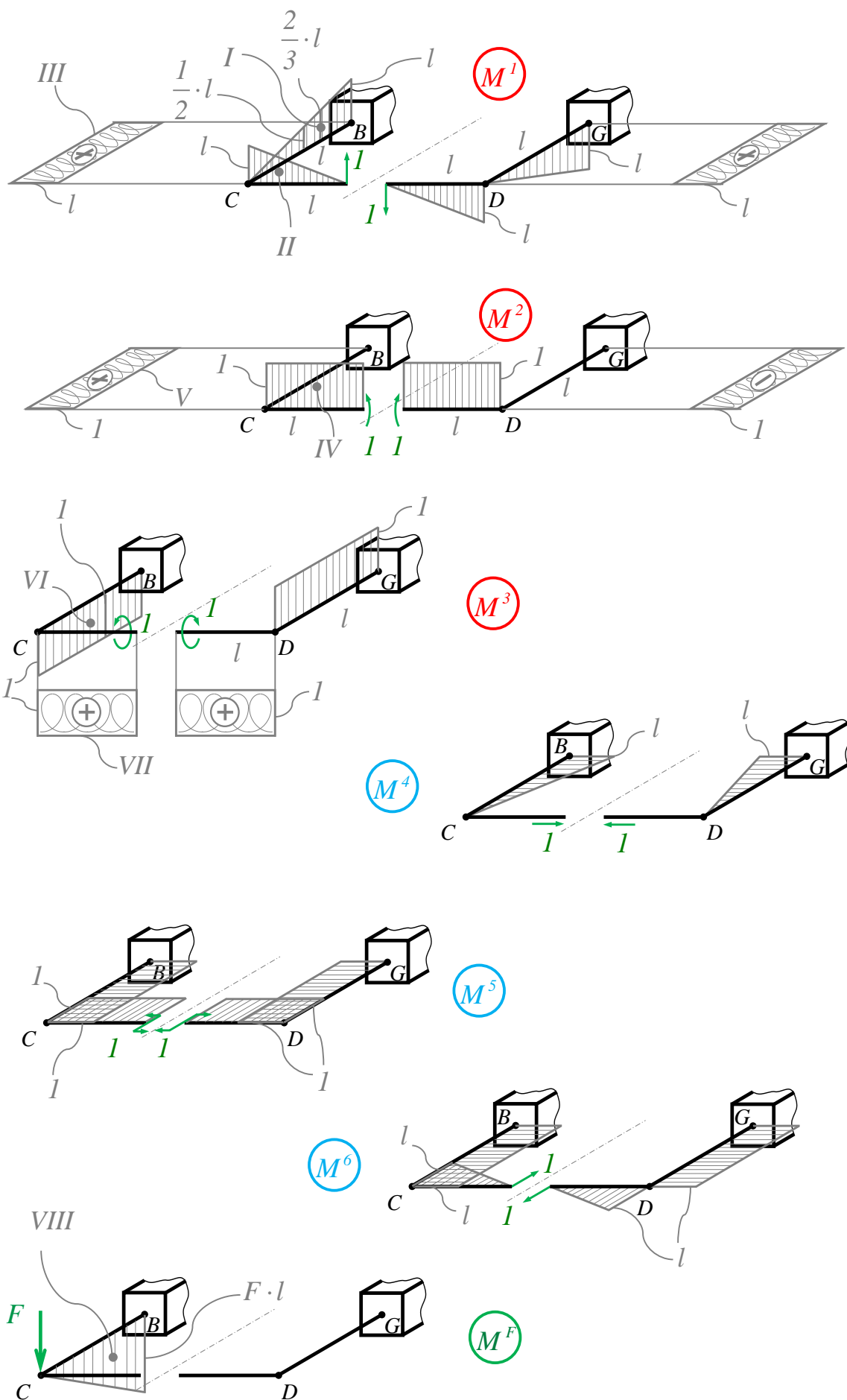
Э.С. №1



в) Система канонических уравнений:

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + X_4 \cdot \delta_{14} + X_5 \cdot \delta_{15} + X_6 \cdot \delta_{16} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_4 \cdot \delta_{24} + X_5 \cdot \delta_{25} + X_6 \cdot \delta_{26} + \delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + X_4 \cdot \delta_{34} + X_5 \cdot \delta_{35} + X_6 \cdot \delta_{36} + \delta_{3F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{41} + X_2 \cdot \delta_{42} + X_3 \cdot \delta_{43} + X_4 \cdot \delta_{44} + X_5 \cdot \delta_{45} + X_6 \cdot \delta_{46} + \delta_{4F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{51} + X_2 \cdot \delta_{52} + X_3 \cdot \delta_{53} + X_4 \cdot \delta_{54} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} + \delta_{5F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{61} + X_2 \cdot \delta_{62} + X_3 \cdot \delta_{63} + X_4 \cdot \delta_{64} + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} + \delta_{6F} = 0 \end{cases}$$

2) Коэффициенты канонических уравнений:



Эпюры внутренних моментов от единичных обобщённых сил *из плоскости* ( $M^1, M^2, M^3$ ) состоят их эпюр изгибающих моментов из плоскости и крутящих моментов; эпюры внутренних моментов от единичных обобщённых сил *в плоскости* ( $M^4, M^5, M^6$ ) состоят их эпюр изгибающих моментов в плоскости. Взаимное перемножение таких эпюр даёт нуль:  $M^i \times M^j = 0$ .

Так же нулю будут равны произведения эпюры от внешней нагрузки  $M^F$  с эпюрами от единичных сил в плоскости:  $M^F \times M^j = 0$ .

Соответственно, нулевыми будут податливости, равные этим произведениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \delta_{3F} = 0 \\ X_4 \cdot \delta_{44} + X_5 \cdot \delta_{45} + X_6 \cdot \delta_{46} = 0 \\ X_4 \cdot \delta_{54} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} = 0 \\ X_4 \cdot \delta_{64} + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} = 0 \end{array} \right.$$

Система шести уравнений распадается на две независимые системы: первые три уравнения и последние три уравнения. Последние три уравнения при ненулевых коэффициентах  $\delta$  удовлетворяются только в том случае, если внутренние силовые факторы, действующие в плоскости рамы равны нулю:

$$X_4 = 0 ;$$

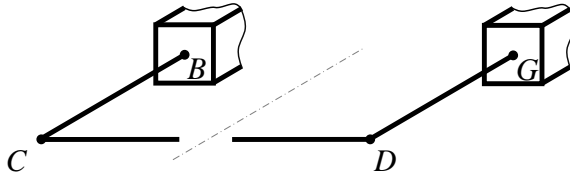
$$X_5 = 0 ;$$

$$X_6 = 0 .$$

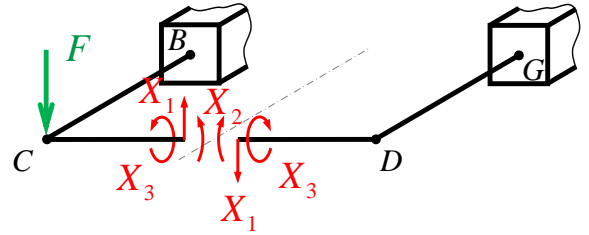
Несложно убедиться в том, что так будет при расчёте любой плоскопространственной рамы. Поэтому при решении подобных задач эти силовые факторы априори считают равными нулю. Нет реакции – нет связи и замкнутый контур плоскопространственной рамы в общем случае статически неопределим три раза, а не шесть.

Значит:

О.С. №1



Э.С. №1



$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

Что ещё может облегчить нам жизнь?

В случае наличия у рамы оси симметрии и разреза именно по этой оси (как в данной задаче), эпюры  $M^1$  и  $M^3$  кососимметричны, эпюра  $M^2$  симметрична. Произведение симметричной эпюры на кососимметричную всегда даёт нуль. Значит:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

И система канонических уравнений

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_3 \cdot \delta_{13} + \delta_{1F} = 0 \\ X_2 \cdot \delta_{22} + \delta_{2F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_3 \cdot \delta_{33} + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

распадается на две:

$$X_2 \cdot \delta_{22} + \delta_{2F} = 0 \quad (a)$$

и

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_3 \cdot \delta_{13} + \delta_{1F} = 0 \\ X_1 \cdot \delta_{31} + X_3 \cdot \delta_{33} + \delta_{3F} = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Вычисляем коэффициенты:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= M^I \times M^I = \frac{4}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{1}{\cancel{2}} \cdot l \cdot l \right) \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot l \right] + \frac{2}{G \cdot I_\kappa} \cdot \left[ (l \cdot l) \cdot l \right] = \\ &= \frac{l^3}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ \frac{4}{3} + \frac{4}{5} \cdot 2 \right\} = \frac{4 \cdot l^3}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right\} = \frac{88}{30} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_x};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= M^2 \times M^2 = \frac{2}{E \cdot I_x} \cdot \left[ (l \cdot l) \cdot l \right] + \frac{2}{G \cdot I_\kappa} \cdot \left[ (l \cdot l) \cdot l \right] = \\ &= \frac{2 \cdot l}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ 1 + \frac{4}{5} \right\} = \frac{2 \cdot l}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \right\} = \frac{108}{30} \cdot \frac{l}{E \cdot I_x};\end{aligned}$$

$$\delta_{33} = M^3 \times M^3 = \frac{2}{E \cdot I_x} \cdot \left[ (l \cdot l) \cdot l \right] + \frac{2}{G \cdot I_\kappa} \cdot \left[ (l \cdot l) \cdot l \right] = \frac{108}{30} \cdot \frac{l}{E \cdot I_x};$$

$$\delta_{1F} = M^I \times M^F = \frac{-1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{1}{\cancel{2}} \cdot Fl \cdot l \right) \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot l \right] = -\frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_x} = -\frac{10}{30} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_x};$$

$$\delta_{2F} = M^2 \times M^F = 0;$$

$$\delta_{3F} = M^3 \times M^F = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot Fl \cdot l \right) \cdot l \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_x} = \frac{15}{30} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_x};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = M^I \times M^3 = \frac{-\cancel{2}}{E \cdot I_x} \cdot \left[ (l \cdot l) \cdot \frac{l}{\cancel{2}} \right] = -\frac{l^2}{E \cdot I_x} = -\frac{30}{30} \cdot \frac{l^2}{E \cdot I_x}.$$



д) Реакции избыточных связей:

Из системы (а):

$$X_2 = -\frac{\delta_{2F}}{\delta_{22}} = 0$$

Из системы (б):

$$\begin{cases} X_1 \cdot \frac{88}{30} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_x} + X_3 \cdot \left( -\frac{30}{30} \cdot \frac{l^2}{E \cdot I_x} \right) + \left( -\frac{10}{30} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_x} \right) = 0 \\ X_1 \cdot \left( -\frac{30}{30} \cdot \frac{l^2}{E \cdot I_x} \right) + X_3 \cdot \frac{108}{30} \cdot \frac{l}{E \cdot I_x} + \frac{15}{30} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 \cdot 88 - X_3 \cdot 30 - 10 \cdot F = 0 \\ -X_1 \cdot 30 + X_3 \cdot 108 + 15 \cdot F = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 \cdot 44 - X_3 \cdot 15 - 5 \cdot F = 0 \\ X_1 \cdot 30 - X_3 \cdot 108 - 15 \cdot F = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{5715}{31086} \cdot F \approx 0,1838 \cdot F ;$$

$$X_3 = -\frac{1980}{31086} \cdot F \cdot l \approx 0,06369 \cdot F \cdot l .$$

Проверка:

$$\begin{cases} \frac{5715}{31086} \cdot F \cdot \frac{88}{30} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_x} + \left( -\frac{1980}{31086} \cdot F \cdot l \right) \cdot \left( -\frac{30}{30} \cdot \frac{l^2}{E \cdot I_x} \right) + \left( -\frac{10}{30} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_x} \right) = \\ = \left( \frac{502920}{932580} + \frac{59400}{932580} - \frac{310860}{932580} \right) \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_x} = 0 \\ \frac{5715}{31086} \cdot F \cdot \left( -\frac{30}{30} \cdot \frac{l^2}{E \cdot I_x} \right) + \left( -\frac{1980}{31086} \cdot F \cdot l \right) \cdot \frac{108}{30} \cdot \frac{l}{E \cdot I_x} + \frac{15}{30} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_x} = 0 \end{cases}$$

Решаем систему ( $a$ ):

Конспект не завершён!