4. ИЗЛУЧЕНИЕ

Урок 20

Рассеяние волн. Давление света

Дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{< dI/d\Omega >}{< S_0 >},$$

где $< dI/d\Omega >$ — угловое распределение вынужденного излучения, а $< S_0 >$ — среднее значение вектора Пойнтинга падающего излучения.

4.1. (Задача 4.66.)Определить эффективное сечение рассеяния свободным зарядом поляризованной волны с поляризацией: а) линейной; б) круговой; в) эллиптической.

Решение а) $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta$, где θ — угол между электрическим полем $\mathbf{E}$ падающей волны и направлением рассеяния;

б) и в)$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{[\mathbf{A}\times\mathbf{n}]^2+[\mathbf{B}\times\mathbf{n}]^2}{A^2+B^2}$, где $\mathbf{E}$ — поле падающей волны, взятое в виде $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos(\omega t+\alpha)+\mathbf{B}\sin(\omega t+\alpha)$, а векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ортогональны. Случай $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ описывает рассеяние волны, поляризованной по кругу.

4.2. (Задача 4.67.)Линейно поляризованная волна падает на изотропный гармонический осциллятор. Скорость электрона $v \ll c$. Найти дифференциальное $d\sigma/d\Omega$ и полное σ сечение рассеяния волны с учетом силы лучистого трения.

Решение Гармонический осцилятор в поле плоской волны

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t}.$$

Есть еще сила трения. Позже будет показано, что

$$f_T = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}.$$

Тогда полное уравнение движения с учетом силы трения имеет вид

$$\ddot{x} - \frac{2}{3}\frac{r_e}{c}\dddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E_0 e^{-i\omega t},$$

где $r_e = e^2/m_0c^2$. Будем искать установившееся решение этого уравнения в виде $Ae^{i\omega t}$. Тогда

$$x(t) = -\frac{\frac{e}{m}E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega^3\frac{2r_e}{3c}}$$

$$\ddot{d} = \frac{\omega^2 \frac{e^2}{m} E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega^3 \frac{2r_e}{3c}}.$$

Тогда сечение рассеяния согласно определению

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\langle}{\langle S \rangle} = \frac{\left|\ddot{\mathbf{d}}\right|^2 \sin^2\theta \cdot 8\pi}{4\pi c^3 E_0^2 c} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\ddot{d} \cdot \ddot{d}^*\right) \frac{2}{c^4 E_0^2} = \frac{\frac{e^4}{m^2} E_0^2}{c^4 E_0^2} \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{r_e}{c}\right)^2 \omega^6}$$

$$\sigma = F(\omega, \omega_0) \cdot \frac{8}{3} \cdot \pi r_e^2 = \sigma_T F(\omega, \omega_0)$$

1.

$$\omega \gg \omega_0$$
$$F \approx \frac{1}{1 + \frac{4}{9}\frac{r_e^2}{c^2}\omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{4}{9}\left(\frac{r_e 2\pi}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{4}{9}\left(\frac{r_e}{\lambda}\right)^2} \approx 1$$
$$\sigma = \sigma_T$$

Но силой торможения можно воспользоваться только

$$\lambda \gg r_e$$

2.

$$\omega \approx \omega_0$$

$$F = \frac{9}{4}\frac{\lambda_0^2}{r_e^2}$$

$$\sigma = \frac{9}{4}\frac{4}{3} 2\pi \lambda_0^2 = 6\pi\lambda_0^2 \gg \sigma_T$$

3.

$$\omega \ll \omega_0$$

$$F \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

$$\sigma = \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \ll \sigma_T$$

$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$, где $\gamma = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}$ — фактор, учитывающий силу лучистого трения, взятую в виде $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -m\gamma\dot{\mathbf{r}}$.

4.3. (Задача 4.69.)Найти дифференциальное сечение рассеяния плоской линейно поляризованной монохроматической волны на маленьком шаре $(\lambda \gg a)$. В поле электромагнитной волны у шара возникают дипольный электрический $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}$ и магнитный $\mathbf{m} = \beta \mathbf{H}$ моменты.

Решение

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}$$

$$\mathbf{m} = \beta \mathbf{H}$$

$$E_x = E_0 e^{ikz - i\omega t}$$

$$H_y = E_0 e^{ikz - i\omega t}$$

$$d_x = \alpha E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{d}_x = -\alpha E_0 \omega^2 e^{-i\omega t}$$

$$m_y = \beta E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{m}_y = -\beta E_0 \omega^2 e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{H}_d = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_d \times \mathbf{n} = \frac{1}{c^2 r_p} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$$

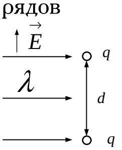
$$\mathbf{H}_m = \frac{1}{c^2 r_p} \left(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n}$$

$$(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \| \ddot{\mathbf{d}}.$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_m = \frac{1}{c^2 r_p} \left\{ \ddot{\mathbf{d}} + \ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} \right\} \times \mathbf{n}$$

$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = (\alpha + \beta)^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \sin^2\theta$, где θ — угол между электрическим полем падающей волны и направлением рассеяния.

4.4. (Задача 4.70.)Плоская волна длиной λ падает на систему двух свободных зарядов



так, как показано на рисунке. Найти дифференциальное сечение рассеяния в зависимости от расстояния d между зарядами. Для каких соотношений $\frac{d}{\lambda}$ при заданном $\Delta\lambda$ в падающей волне рассеяние некогерентно?

Решение $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = 4 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \cos^2(kd\cos\theta)$, где θ — тот же угол, что и в предыдущей задаче. При $d \ll \lambda$ сечение в 4 раза больше, чем для одного заряда; при $\frac{d}{\lambda} \gg \frac{\lambda/\Delta\lambda}{\cos\theta}$ рассеяние некогерентно и сечение вдвое больше, чем для одного заряда.

4.5. (Задача 4.71.)Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией и длиной волны λ рассеивается на двух электронах, находящихся на расстоянии $\lambda/4$ друг от друга. Волна идет вдоль линии, соединяющей электроны. Найти поляризацию и отношение интенсивностей в продольном и поперечном направлениях.

Решение Для 1-го заряда

$$E_x = E_0 \cos \omega t$$

$$E_y = E_0 \sin \omega t$$

$$\mathbf{H}_d^{(1)} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n} = \frac{1}{c^2 r_p}\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$$

$$\ddot{d}_x = -\omega^2 \frac{e^2}{m} E_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{d}_y = -\omega^2 \frac{e^2}{m} E_0 \sin \omega t$$

$$H_x = \ddot{d}_y$$

$$H_y = \ddot{d}_x$$

2-ой заряд

$$H_x = E_0 \cos\left(\omega t - k\frac{\lambda}{4}\right) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \sin \omega t$$

$$H_y = E_0 \sin\left(\omega t - k\frac{\lambda}{4}\right) = E_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \cos \omega t$$

Вдоль оси Zпри сложении $\mathbf{H}^{(1)}, \ H^{(2)}$ надо учесть еще и запаздывание возбужденной волны, как раз равно запаздыванию возбуждения.

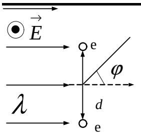
$$H_x^{(1)}(\omega t) + H_x^{(2)}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

поперек наблюдения (вдоль x, например) есть только запаздывание возбуждения.

$$H_z = n_x \ddot{\mathbf{d}}_y,$$

то есть поляризация линейная. $I_{\|}/I_{\perp} = 4$. В продольном направлении поляризация круговая, а в поперечном — линейная.

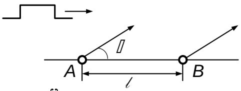
4.6. (Задача 4.72.)Два нерелятивистских электрона (заряд — e, масса — m) находятся



в поле линейно поляризованной плоской монохроматической волны. Расстояние между ними практически постоянно: $d = \frac{\lambda}{2}$. Электрическое поле волны направлено по нормали к плоскости рисунка. Найти сечение рассеяния $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varphi$, где φ — угол рассеяния волны в плоскости рисунка,

Решение $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varphi} = 4\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)$.

4.7. (Задача 4.75.)Волновой пакет длиной $c\tau$ с несущей частотой ω_0 налетает на два



свободных электрона, расстояние между которыми $AB = l \lesssim c\tau$. Пакет амплитуды $\mathbf{E_0}$ образован линейно поляризованными электромагнитными волнами, волновой вектор которых направлен вдоль AB, а электрическое поле перпендикулярно плоскости рассеяния волн. Найти спектр излучения, рассеянного под углом θ к первоначальному направлению.

Решение

$$E_\omega = \int\limits_0^\tau e^{-i\omega t} e^{i\omega_0 t} E(t)\, dt = \int\limits_0^\tau e^{i(\omega_0-\omega)t} dt = \frac{e^{i(\omega_0-\omega)\tau} - 1}{\omega_0 - \omega}$$

$$= e^{i(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}} \left[\frac{\sin\left[(\omega_0-\omega)\tau\right]}{(\omega_0-\omega)\tau}\right]\tau$$

$$E^{(1)} \sim e^{-i\omega t}$$

$$E^{(2)} \sim e^{-i\omega\left(t + \frac{l\cos\theta}{c} - \frac{l}{c}\right)}$$

$$E \sim e^{i(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t}\left(1 + e^{il(1-\cos\theta)}\right) \sin c = \cos\left[\frac{kl}{2}(1-\cos\theta)\right]$$

$E_\omega(\theta) \sim E_0 \operatorname{sinc}\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2} \cos\frac{kl(1-\cos\theta)}{2}$.

Задача 4.71

Решение.

Амплитуда поля падающей волны $\vec{E}_{пад} = E_0\left(\vec{e_x} - i\vec{e_y}\right)\cdot e^{i(kz-\omega t)}$. В дальней волновой зоне $\vec{H}_{расс} = \dfrac{E_0 r_e}{R}[\left(\vec{e_x} - i\vec{e_y}\right)\times\vec{n}]\left(1+e^{-i\chi}\right)\cdot e^{i(kz-\omega t)}$, где $\vec{n}$ - единичный вектор вдоль направления распространения волны (под углом θ к оси z), $\chi = \dfrac{2\pi d}{\lambda}(1-\cos\theta)$. Выбирая оси x, y так, чтобы $\vec{n}$ был в плоскости yz, получим $\vec{H}_{расс} = \dfrac{E_0 r_e}{R}\left(\vec{e_y}\cos\theta - \vec{e_z}\sin\theta + i\vec{e_x}\cos\theta\right)\left(1+e^{-i\chi}\right)\cdot e^{i(kz-\omega t)}$.

Дифференциальное сечение рассеяния $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = 2r_e^2\left(1+\cos^2\theta\right)\left(1+\cos\chi\right)$.

Для $d=\lambda/4$ $\chi = \dfrac{\pi}{2}(1-\cos\theta)$, $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = 2r_e^2\left(1+\cos^2\theta\right)\left[1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]$.

При $\theta=0$ $\vec{H}_{расс} = \dfrac{E_0 r_e}{R}\left(\vec{e_y} + i\vec{e_x}\right)2\cdot e^{i(kz-\omega t)}$ поляризация круговая, при $\theta=\pi/2$ $\vec{H}_{расс} = \dfrac{E_0 r_e}{R}\left(-\vec{e_z}\right)\left(1-i\right)\cdot e^{i(kz-\omega t)}$ поляризация линейная.

Чтобы построить качественно диаграмму направленности излучения, достаточно рассмотреть $\theta=0$ $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = 8r_e^2$, $\theta=\pi$ $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = 0$, $\theta=\pi/2$ $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = 2r_e^2$.