ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Вопросы к экзамену (1-й семестр)

Введение

(о). Понятие «множества» в рамках наивной теории множеств. Элемент множества, принадлежность множеству. Подмножество, равные множества, способы задания множеств, пустое множество.
(о). Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Упорядоченная пара, прямое произведение двух множеств. Упорядоченные наборы (n-ки), прямое произведение n множеств.
(о). Отображение, область определения отображения, значение отображения, множество значений, образ множества под действием отображения, полный прообраз множества под действием отображения, полный прообраз элемента под действием отображения.
(о). График отображения. Композиция двух отображений. Сюрьективное отображение (отображение на). Инъективное (взаимно однозначное) отображение. Биективное отображение. Обратное отображение.
(о). Четная функция. Нечетная функция.
(у). Правила преобразования графиков (без доказательства).
(о). Высказывание. Операции над высказываниями: конъюкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, равносильность.
(о). Высказывание с переменными. Высказывание (все)общности. Высказывание существования.
(о). Теорема и доказательство. Критерий. Необходимое условие. Достаточное условие.
(о). Метод доказательства от противного.
(у). Теорема о методе математической индукции (без доказательства).
(о). Факториал. Двойной факториал. Число перестановок. Число размещений. Число сочетаний (биномиальные коэффициенты).
(уд). Лемма Паскаля.
(уд). Лемма о формуле бинома Ньютона.
(уд). Лемма о неравенстве Бернулли.

1. Предел и непрерывность функций одной переменной

(о). Вещественные числа. Рациональные и иррациональные числа.
1.1 (у). Аксиома полноты — теорема Дедекинда о полноте вещественных чисел.
1.2 (о). Отрезок (замкнутый промежуток), интервал (открытый промежуток), полуинтервал (полуоткрытый промежуток), промежуток.
1.3 (уд). Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши — Кантора).
1.4 (о). Ограниченное снизу множество, нижняя граница. Ограниченное снизу множество, верхняя граница. Ограниченное множество.
1.5 (у-упр). Доказать, что множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует число $c > 0$ такое, что $|x| \le c$ для любого $x \in X$.
1.6 (о). Минимум и максимум множества.
1.7 (уд). Теорема Дедекинда о существовании наибольшей нижней границы и наименьшей верхней границы (доказательство п.2).
1.9 (о). Точная нижняя граница (нижняя грань, инфимум). Точная верхняя граница (верхняя грань, супремум).
1.10 (о). Расширенная числовая прямая.
1.11 (у). Теорема о точных границах в $\overline{\mathbb{R}}$ (без доказательства).
1.12 (у-упр). 2. Показать, что $\inf X = -\infty$ для непустого неограниченного снизу множества $X \subset \mathbb{R}$. 3. Показать, что $\sup X = +\infty$ для непустого неограниченного сверху множества $X \subset \mathbb{R}$. 4. Показать, что $\inf \emptyset = +\infty$ и $\sup \emptyset = -\infty$.
1.13 (уд). Критерий для точных границ (доказательство п.2. случай $\sup X = a$).
1.15 (у). Принцип Архимеда (без доказательства).
1.17 (о). Последовательность.
1.18 (о). Конечный предел последовательности.
1.19 (пр). Пример, сходящейся последовательности.
1.20 (о). Бесконечные пределы последовательности: $x_n \to +\infty$, $x_n \to -\infty$, $x_n \to \infty$.
1.21 (з). Замечание о стремлении и сходимости.
1.22 (о). Расходящаяся последовательность.
1.23 (з). Замечание о расходящихся последовательностях.
1.24 (у-упр). 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. А обратное, вообще говоря, не верно. 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.
1.25 (о). Бесконечно большая последовательность. Бесконечно малая последовательность.

1.26 (у-упр). Пусть $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность x_n бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\dfrac{1}{x_n}$ бесконечно большая.
1.27 (о). Ограниченная последовательность.
1.28 (у-упр). Последовательность $(x_n \in \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничено множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
1.29 (уд). Теорема о пределе последовательности и неравенстве (доказательство для случая конечных пределов).
1.30 (з). Замечание о предельном переходе в неравенстве.
1.31 (уд). Следствие о единственности предела (доказательство для случая конечных пределов).
1.32 (уд). Теорема о зажатой последоваетльности (доказательство для случая конечных пределов).
1.33 (уд). Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
1.35 (уд). Теорема о бесконечно малых.
1.36 (уд). Теорема о пределе последовательности и алгебраических операциях.
1.37 (о). Подпоследовательность.
1.38 (о). Частичный предел последовательности.
1.39 (уд). Теорема о пределе подпоследовательности последовательности, имеющей предел (доказательство для случая конечных пределов).
1.41 (уд). Теорема Больцано — Вейерштрасса.
1.42 (у). Следствие из теоремы Больцано — Вейерштрасса (без доказательства).
1.43 (у-з). Замечание о непустоте множества частичных пределов любой последовательности.
1.44 (о). Верхний и нижний предел последовательности.
1.45 (о). Неубывающая последовательность. Невозрастающая последовательность. Возрастающая последовательность. Убывающая последовательность. Монотонная последовательность. Строго монотонная последовательность.
1.46 (уд). Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности.
1.47 (о). Фундаментальная последовательность (сходящая в себе последовательность, последовательность Коши). Условие Коши.
1.48 (уд). Критерий Коши сходимости последовательности.
1.49 (з). Замечание об определении сходимости последовательности.
1.50 (пр). Пример расходящейся ограниченной последовательности.
1.51 (о). Конечная предельная точка (точка сгущения). Конечная предельная точка (точка сгущения) слева. Конечная предельная точка (точка сгущения) справа. Предельные точки $\pm\infty$.
1.52 (з). Замечания о предельных точках.
1.53 (о). Конечный предел функции в точке сгущения.
1.54 (о). Конечный предел слева функции в точке сгущения. Конечный предел справа функции в точке сгущения.
1.55 (у-з). Замечание о связи существования предела с существованием односторонних пределов.
1.56 (о). Конечный предел функции на бесконечности.
1.57 (о). Бесконечные пределы $\pm\infty$ и ∞ функции в точке сгущения.
1.58 (з). Замечание об определении бесконечных пределов слева и справа и при $x \to \pm\infty$.
1.59 (о). Окрестность и проколатая окрестность для конечной точки и для бесконечно удаленных точек $\pm\infty$.
1.60 (у). Определение предельной точки на языке окрестностей (без доказательства).
1.61 (у). Определение предела функции на языке окрестностей (без доказательства).
1.62 (уд). Теорема об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне (доказательство для случая конечных точки и предела).
1.64 (у). Теорема о пределе функции и неравенстве (без доказательства).
1.65 (у-з). Замечание о нестрогости неравенства в теореме о пределе функции и неравенстве.
1.67 (у). Теорема о зажатой функции (без доказательства).
1.69 (у). Теорема о пределе функции и алгебраических операциях (без доказательства).
1.71 (у). Критерий Коши для предела функции (без доказательства).
1.73 (уд). Теорема о пределе композиции (доказательство для случая конечных точек и пределов).
1.75 (о). Асимптотические сравнения o-малое и O-большое.
1.76 (з). Замечание об определении сравнений o-малое и O-большое в случае, когда функция $g(x)$ не обращается в нуль.
1.77 (з). Замечание об использовании символов $o(f(x))$ и $O(f(x))$.
1.78 (уд). Правила работы с o-малыми и O-большими (доказательство пп. 1)–3)).
1.80 (у-з). Замечание о разности o-малых.
1.81 (уд). Теорема о сравнении показательной, степенной и логарифмической функций.
1.82 (о). Главная часть.
1.83 (з). Замечание о выделении главной части.
1.84 (з). Замечание о главной части, которая не обращается в нуль.
1.85 (о). Эквивалентные функции.
1.86 (уд). Теорема о главных частях элементарных функций.
1.87 (у). Теорема о формулах Тейлора для элементарных функций (без доказательства).
1.88 (у). Правило Бернулли — Лопиталя (без доказательства).
(о) Элементарные функции.
1.89 (уд). Теорема о существовании предела $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1.90 (о). Экспоненциальная (показательная) функция. Число e.
1.91 (уд). Теорема о свойствах показательной функции (доказаетльство п. 5)).
1.93 (з). Замечание о равенстве $e^x = \exp(x)$.
1.94 (о). Натуральный логарифм.
1.95 (уд). Теорема о свойствах логарифма (доказаетльство п. 5)).
1.97 (о). Степень с произвольным основанием.
1.98 (о). Степенная функция.
1.99 (з). Замечание об определении степенной функции.
1.100 (уд). Замечательный предел для степенной функции.
1.101 (о). Тригонометрические функции.
1.102 (уд). Замечательный предел для $\sin x$.
1.103 (о). Непрерывность функции в точке.
1.104 (з). Замечание о непрерывности в изолированной точке.
1.105 (з). Замечание о непрерывности в точке сгущения, которая не принадлежит области определения функции.
1.106 (о). Точка разрыва, разрыв первого и второго рода, устранимый разрыв.
1.107 (у). Теорема о непрерывности в точке и алгебраических операциях и композиции (без доказательства).
1.108 (у-з). Замечание о непрерывности элементарных функций.
1.109 (о). Непрерывность функции на множестве.
1.110 (уд) Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях.
1.111 (з) Замечание о промежуточных значениях непрерывной функции.
1.112 (уд). Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях.

2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

2.1 (о). Производная функции в точке. Производная функции (на промежутке).
2.2 (з). Замечание об использовании термина производная.
2.3 (у-з). Замечание о непрерывности функции, имеющей производную.
(з) Физическая интерпретация производной.
(з) Геометрическая интерпретация производной. Секущая. Касательная.
2.4 (о). Дифференцируемость в точке. Дифференциал.
2.5 (з). Замечание о дифференциале.
2.6 (з). Замечание о линейных и аффинных функциях.
2.7 (з). Замечание о рассмотрении дифференциала как главной линейной части приращения.
2.8 (з). Замечание о записи равенства, характеризуещего дифференциал, через аргумент функции.
2.9 (з). Замечание о сравнении равенства, характеризуещего дифференциал, с уравнением касательной.
2.10 (уд). Теорема о производной и дифференциале.
2.11 (з). Замечание о форме записи диффернециала.
2.12 (уд). Теорема о производной и алгебраических операциях (доказательство п. 2 правило Лейбница).
2.14 (уд). Теорема 2.14 о производной композиции.
2.15 (уд). Теорема о производной обратной функции.
2.16 (уд). Теорема о производных элементарных функций (доказательство $(a^x)'$, $(\log_a x)'$, $(x^\alpha)'$, $(\sin x)'$, $(\operatorname{tg} x)'$, $(\arcsin x)'$.
2.17 (о). Локальный максимум. Локальный минимум. Локальный экстремум.
2.18 (о). Внутренняя точка промежутка.
2.19 (з). Замечание о внутренних точках промежутка.
2.20 (уд). Теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума.
2.21 (уд). Теорема Ролля.
2.22 (з). Замечание о физической интерпритации теоремы Ролля.
2.23 (уд). Теорема Лагранжа о конечном приращении.
(з) Замечание о геометрической интерпритации теоремы Лагранжа.
2.24 (у). Следствие о конечном приращении (без доказательства).
2.25 (уд). Теорема Коши о конечном приращении.
2.26 (з). Замечание о том, что теорема Коши обобщает теорему Лагранжа.
2.27 (з). Замечание о геометрической интерпретации теоремы Коши.
2.28 (о). Старшие производные.
2.29 (з). Замечание о том, что для определения производной порядка k в некоторой точке x_0 надо иметь производные порядка $k-1$ в точках x из некоторой окрестности точки x_0.
2.30 (уд). Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
2.31 (о). Полином Тейлора и остаточный член в формуле Тейлора.
2.32 (з). Замечание о представлении остаточного члена в формуле Тейлора в форме Лагранжа.
2.34 (з). Замечание о зависимости точки ξ от точки x в теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
2.34 (з). Замечание об общей форме для остаточного члена в формуле Тейлора.
2.35 (уд). Теорема формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
2.36 (з). Замечание о представлении остаточного члена в формуле Тейлора в форме Пеано.

2.37 (з). Замечание о выборе формы представления остаточного члена в формуле Тейлора.
2.38 (з). Замечание о формуле Тейлора и ряде Тейлора.
2.39 (у). Теорема о формулах Тейлора для элементарных функций (без доказательства).
2.40 (уд). Теорема о достаточном условии локального экстремума.
2.43 (уд). Критерий монотонности (доказательство пп. 1)–2)).
2.45 (о). Выпуклая функция. Строго выпуклая функция. Выпуклая комбинация точек.
2.46 (о). Вогнутая функция. Строго вогнутая функция.
2.47 (з). Замечание об используемой терминологии для выпуклых и вогнутых функций.
2.48 (з). Замечание о геометрическом смысле выпуклости функции.
2.49 (о). Выпуклое множество.
2.50 (о). Надграфик функции.
2.51 (з). Замечание о геометрическом смысле выпуклости функции с использованием надграфика.
2.52 (уд). Критерий выпуклости функции.
2.53 (з). Замечание о других критериях выпуклости, полученных при доказательстве критерия выпуклости функции.
2.54 (уд). Другое определение выпуклости.
2.55 (уд). Критерий выпуклости в терминах первой производной.
2.56 (з). Замечание о полезности свойства выпуклости.
2.57 (у-упр). Доказать, что для любых $x_1, x_2 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, справедливы неравенства: 1) $\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$; 2) $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$; 3) $\frac{1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \leq \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2}$. В частности, для $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ получаем неравенства $\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$, связывающие среднее гармоническое (в левой части), среднее геометрическое (в центральной) и среднее арифметическое (в правой).
2.58 (у-упр). Неравенство Юнга. Докажите для $a, b > 0$ и $p, q > 1$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, справедливость неравенства Юнга $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
2.59 (у-упр). Неравенство Йенсена. Докажите, что для выпуклой функции $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ верно более общее, чем в ее определении, неравенство, а именно для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b \rangle$ и любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, верно неравенство Йенсена $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$. Оно аналогично неравенству выпуклости, но в отличие от него содержит n элементов вместо двух. Доказательство неравенства Йенсена можно провести по индукции.
2.60 (у-упр). Используя неравенство Йенсена, доказать, что для $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq$ x_1+x
2.61 (о). Точка перегиба.
2.62 (о). Вертикальная асимптота. Наклонная асимптота.
2.63 (з). Замечание об аналогичности рассмотрения случаев $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.
2.64 (уд). Нахождение наклонных асимптот.
2.65 (у). Правило Бернулли — Лопиталя (без доказательства).
2.67 (о). Первообразная (неопределенный интеграл). Обобщенная первообразная.
2.68 (з). Замечание об интеграле и первообразной.
2.69 (з). Замечание о том, что добавление к функции константы не меняет ее производной.
2.70 (уд). Теорема о множестве первообразных.
2.71 (з). Замечание о рассмотрении первообразных только на промежутке.
2.72 (з). Замечание об обозначении первообразной.
(у) Таблица простейших неопределенных интегралов (без доказательства).
2.73 (уд). Теорема о линейности первообразных.
2.74 (уд). Теорема о формуле интегрирования по частям для первообразной.
2.75 (з). Замечание о записи формулы интегрирования по частям.
2.76 (уд). Теорема о замене и подстановке в неопределенном интеграле.
2.77 (з). Замечание об обратимости функции в формуле подстановки.
2.78 (з). Замечание об использовании замены.
2.79 (пр). Пример на замену в неопределенном интеграле.
2.80 (о-з). Гиперболические функции.
2.81 (пр). Пример на подстановку в неопределенном интеграле.
2.82 (о). Рациональная функция.
2.83 (уд). Теорема о первообразной рациональной функции.
2.84 (о). Простейшая дробь.
2.85 (у-з). Замечание о разложение рациональной функции на простейшие дроби.
2.86 (уд). Утверждение о первообразной вида $\int \frac{dx}{(x-x_0)^k}$.
2.87 (уд). Утверждение о первообразной вида $\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^k}$.
2.88 (уд). Утверждение о рекурентной формуле для первообразной вида $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$.
2.89 (о). Обыкновенное дифференциальное уравнение. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.
2.90 (о). Уравнение с разделяющимися переменными.
(уд). Решения уравнение с разделяющимися переменными. Начальное условие. Задача Коши.
2.91 (о). Линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

(о). Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
(уд). Решения линейного однородного дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Начальные условия. Задача Коши.
2.92 (з). Количество начальных условий в зависимости от порядка уравнения для единственности решения.

3. Интеграл Римана

3.1 (о). Разбиение отрезка и разбиение с выделенными точками.
3.2 (о). Функция, интегрируемая по Риману, и ее интеграл. Интегральная сумма Римана.
3.3 (з). Замечание о высказывании, что интеграл Римана — это предел интегральных сумм.
3.4 (з). Замечание о геометрической интерпретации интеграла.
3.5 (о). Верхняя и нижняя суммы Дарбу.
3.6 (з). Замечание о геометрической интерпретации интегральных сумм Дарбу.
3.7 (у). Критерий Дарбу (без доказательства).
3.9 (з). Замечание о необходимом условии интегрируемости.
3.10 (пр). Пример ограниченной неинтегрируемой по Риману функции. Функция Дирихле.
3.11 (у). Теорема о линейности и аддитивности интеграла (без доказательства).
3.13 (у). Теорема об интегрируемости непрерывной и монотонной функций (без доказательства).
3.15 (у). Теорема о монотонности интеграла (без доказательства).
3.17 (з). Замечание о свойстве положительности интеграла.
3.18 (уд). Первая теорема о среднем.
3.19 (з). Замечание о геометрическом смысле теоремы о среднем для случая $g(x) = 1$.
3.20 (з). Замечание об использовании теоремы о среднем для оценок.
3.21 (уд). Теорема о связи интеграла и первообразной.
3.22 (з). Замечание о существенности условия непрерывности подынтегральной функции в утверждении 2) теоремы о связи интеграла и первообразной.
3.23 (уд). Теорема о формуле Ньютона — Лейбница.
3.24 (уд). Теорема о формуле Тейлора с интегральным остаточным членом.
3.25 (з). Замечание о получении из интегрального вида остаточного члена с помощью теоремы о среднем формы Лагранжа.
(о). Особая точка для подынтегральной функции.
3.26 (о). Интегрируемость функции в несобственном смысле. Несобственный интеграл. Расходимость интеграла.
3.27 (о). Абсолютная и условная сходимости несобственного интеграла.
3.28 (уд). Теорема критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
3.29 (з). Замечание о пределе в случае несобственного интеграла.
3.30 (уд). Теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла.
3.31 (уд). Теорема об интегрировании основных особенностей.
3.32 (уд). Мажорантный признак и теорема сравнения.
3.33 (пр). Примеры на исследование сходимости интегралов.
3.34 (уд). Признаки Абеля и Дирихле сходимости для несобственных интегралов (доказательство при дополнительных условиях на функции).
3.35 (пр). Пример исследования сходимости интеграла с помощью признака Дирихле.
(о). Сходимость несобственного интеграла, имеющего несколько особенностей..
3.36 (пр). Пример исследования сходимости интеграла, имеющего несколько особенностей.
3.37 (о). Сходимость несобственного интеграла в смысле главного значения.
3.38 (пр). Примеры исследования сходимости интеграла в смысле главного значения.
3.39 (о) Эйлеровы интегралы: Γ- и B-функции.
3.40 (уд). Теорема о свойствах Γ- и B-функций (доказательство пп. 1, 2 и 4).
3.42 (у-з). Замечания о свойствах функции Γ.
3.43 (у-з). Замечание о формуле Стирлинга.
3.44 (пр). Примеры о выражении интегралов через эйлеровы интегралы. Интеграл Эйлера — Пуассона (интеграл Гаусса).
(у) Формула для вычисления площади подграфика (без доказательства).
3.45 (пр). Вычисление площади плоской фигуры.
(у) Формула для вычисления площади фигуры, ограниченной кривой в полярных координатах (без доказательства).
(у) Формула для вычисления массы и центра тяжести стержня. Нулевой и первый моменты (без доказательства).
(у) Формула для вычисления объём тела вращения (без доказательства).
3.46 (пр). Вычисление объёма трехмерного шара.
3.47 (о). Парметризованная кривая. Параметризация и ее компоненты.
3.48 (з). Замечание о предположении о непрерывности производных компонент параметризации и о векторе мгновенной скорости.
(у) Формула для вычисления длины кривой (без доказательства).
3.49 (з). Замечание о парметризациях кривой.

3.50 (уд). Теорема о длине кривой.
3.51 (з). Замечание о замене времени.
3.52 (з). Замечание об убывающих функциях t и τ при замене времени.
3.53 (у). Формула для вычисления ддлины графика функции (без доказательства).
3.54 (пр). Пример вычисления длины кривой.

4. Числовые и функциональные ряды

4.1 (о). Числовой ряд. Частичная сумма ряда. Общий член ряда. Сходимость ряда. Сумма ряда.
4.2 (з). Замечание об определении ряда.
4.3 (уд). Критерий Коши сходимости числового ряда.
4.4 (уд). Теорема о необходимом условии сходимости ряда.
4.5 (з). Замечание о сравнении ряда с несобственным интегралом.
4.6 (о). Абсолютная и условная сходимости числового ряда.
4.7 (з). Замечание о взаимосвязи сходимости числового ряда с его абсолютной или условной сходимостью.
4.8 (уд). Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда.
4.9 (уд). Мажорантный признак сходимости числового ряда и теорема сравнения для сходимости числового ряда.
4.10 (уд). Теорема об интегральном признаке сходимости числового ряда.
4.11 (уд). Теорема о сходимости эталонных числовых рядов.
4.12 (з). Замечание о сравнение рядов из п. 3) теоремы о сходимости эталонных числовых рядов с гармоническим рядом.
4.13 (у-з). Замечание о гармоническом ряде.
4.14 (уд). Теорема о признаке Коши сходимости числового ряда.
4.15 (з). Замечание о п. 3) теоремы о признаке Коши сходимости числового ряда.
4.16 (уд). Теорема о признаке Даламбера сходимости числового ряда.
4.17 (пр). Пример на исследование сходимости числового ряда с помощью признака Коши.
4.18 (пр). Пример на исследование сходимости числового ряда с помощью признака Даламбера.
4.19 (з). Еще одно замечание о ряде Тейлора.
4.20 (уд). Теорема о признаках Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов.
4.21 (уд). Теорема о признаке Лейбница.
4.23 (о). Поточечная сходимость функциональной последовательности на множестве.
4.24 (з). Замечание о зависимости при поточечной сходимости скорости сходимости последовательности значений $f_n(x)$ от выбора точки x.
4.25 (о). Равномерная сходимости функциональной последовательности на множестве.
4.26 (з). Замечание о разнице между поточечной и равномерной сходимостями.
4.30 (у). Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (без доказательства).
4.32 (у). Теорема о равномерном пределе последовательности непрерывных функций (без доказательства).
4.33 (о). Равномерная норма.
4.34 (упр). Доказать, что $f_n \rightrightarrows f$ на X тогда и только тогда, когда $\|f_n - f\| \to 0$.
4.35 (з). Замечание о пространстве непрерывных функций.
4.36 (о). Поточечная и равномерная сходимости функционального ряда.
4.37 (з). Замечание о равномерной сходимости частичных сумм функционального ряда.
4.38 (у). Теорема о непрерывности суммы ряда (без доказательства).
4.39 (у). Теорема о дифференцируемости функционального ряда (без доказательства).
4.40 (у). Теорема об интегрировании функционального ряда (без доказательства).
4.41 (у). Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда (без доказательства).
4.42 (у). Теорема о мажорантном признаке Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (без доказательства).
4.44 (о). Степенной ряд.
4.45 (з). Замечание о степенных рядах комплексного аргумента.
4.46 (з). Замечание о сдвиге центра ряда в начало координат.
4.47 (у). Теорема о сходимости степенного ряда (без доказательства).
4.48 (з). Замечание о формуле Коши — Адамара. Интервал сходимости. Круг сходимости.
4.50 (у). Теорема об интегрировании степенного ряда (без доказательства).
4.51 (о). Пространства $C^k((a,b))$, $k \in \mathbb{N}$, и $C^\infty((a,b))$.
4.52 (з). Замечание о пространстве $C^0((a,b))$ и соотношениях между пространствами $C^k((a,b))$, $k \in \mathbb{N}$, и $C^\infty((a,b))$.
4.53 (о). Ряд Тейлора. Ряд Маклорена.
4.54 (у). Теорема о дифференцировании степенного ряда (без доказательства).
4.55 (у). Ряды Тейлора основных элементарных функций (без доказательства).

Пояснения к вопросам

(о) определение понятия;
(о-з) определение понятий в виде замечаний;
(уд) утверждение (теорема, лемма и т.п.) с доказательством;
(у) утверждение (теорема, лемма и т.п.) без доказательства;
(у-упр) и (у-з) утверждения, сформулированные как упражнение или замечания, без доказательства;
(з) замечание;
(пр) пример.

Студент должен обязательно знать все вопросы с определениями понятий, формулировками утверждений (теорем, лемм и т.п.), замечаниями к ним или самостоятельных замечаний (о), (уд), (у), (у-упр), (у-з), (з).

Теоретическая часть экзаменационного билета включает в себя первую часть (определение понятий), состоящую из 4 определений (о), (о-з) и замечаний к ним (з), вторую часть (формулировки утверждений (теорем, лемм и т.п.)), включающую 2 формулировки утверждений возможно с соответствующими замечаниями (уд), (у), (у-упр), (у-з), (з) и третью часть (при очной сдаче доказательство), включающее доазательство одного из утверждений (упр) или разбор примера (пр). Если в утверждении или примере несколько пунктов, то в третью часть билета будут включаться от одного до всех пунктов, возможно объединение утверждения с соответствующими примерами. Упражнения будут только те, которые были сформулированы на лекциях и включены в список вопросов.

Пример билета:
0. Выполнение требований по сдаче заданий и решению потоковых контрольных.
1. Четыре определения (спрашиваются непосредственно экзаменатором).
2. Сформулировать утверждения:
(1) Лемма Паскаля.
(2) Критерий Дарбу.
3. Доказать теорему о производной и дифференциале.

Система оценивания по курсу «Основы математического анализа»

Итоговая оценка ставится по количеству набранных баллов за практическую часть и теоретическую часть. Практика состоит из работы на семинарах, решении ежемесячных заданий и потоковых работ. Теоретическая часть сдается на экзамене. В процентном соотношении максимальное возможное количество баллов за практику и за теорию составляет примерно 60% и 40% соответственно.

Работа на семинарах (оценивается каждым семинаристом индивидуально, мах 100 баллов)
Ежемесячные задания (31 задача, мах 228 баллов)/
Потоковая работа (5 задач по 90 баллов за задачу, мах 450 баллов).
Теоретический экзамен (Пояснения даны ниже, мах 530 баллов)

К экзамену необходимо сдать в срок не менее половины ежемесячных заданий и набрать на потоковых контрольных не менее 90 баллов. Пока эти условия не выполнены студент не начинает сдавать теоретическую часть.

Теоретическая часть экзаменационного билета состоит из трех частей: определения понятий (4 определения), формулировки утверждений (теорем, лемм и т.п.) (2 утверждения) и доказательство теоремы (при очной форме сдачи экзамена) или решение упражнения (при дистанционной форме сдачи экзамена) (1 доказательство или решение упражнения). Студент отправляется на пересдачу, если он не ответил на первую часть билета, т.е. не знает хотя бы одного определения из билета. Баллы по каждой части билета следующие: Определения – 120 баллов, формулировки теорем – 160 баллов, доказательство – 250 баллов.

Итоговая оценка: «5» $\geq$ 1130 баллов «4» $\geq$ 820 балов «3» $\geq$ 400 баллов

Доцент А. А. Егоров
(редакция от 13.01.2022)