Множества

Содержание

- 1 Определения
- 2 Способы задания множеств
  - 2.1 Перечисление
  - 2.2 Описание
- 3 Отношения между множествами
  - 3.1 Включение
  - 3.2 Равенство
  - 3.3 Общие элементы
- 4 Специальные множества
- 5 Операции над множествами
  - 5.1 Бинарные операции над множествами
  - 5.2 Унарные операции над множествами
- 6 Теорема де Моргана

Определения

Определение:

Множество — первичное математическое понятие, которому не дано строгое математическое определение. Представляет собой набор, совокупность каких-либо объектов, объединенных общим свойством.

Определение:

Объекты, из которых состоит множество, называют *элементами* этого множества. Если a — элемент множества A, то записывают $a \in A$ («a принадлежит A»). Если a не является элементом множества A, то записывают $a \notin A$ («a не принадлежит A»). В отличие от мультимножества каждый элемент множества уникален, и во множестве не может быть двух идентичных элементов.

Способы задания множеств

Существуют два основных способа задания множеств: перечисление и описание.

Перечисление

Первый способ состоит в том, что задаётся и перечисляется полный список элементов, входящих в множество.

$A = \{a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots\}$

Описание

Второй способ применяется, когда множество нельзя или затруднительно задать с помощью списка. В таком случае множества определяются свойствами их элементов.

$A = \{a \mid P\}$, где P — определенное свойство элемента a.

Отношения между множествами

Два множества A и B могут вступать друг с другом в различные отношения.

Включение

- A включено в B, если каждый элемент множества A принадлежит также и множеству B :

  $$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A: \ a \in B$$

- A включает B, если B включено в A:

  $$A \supseteq B \Leftrightarrow B \subseteq A$$

- A строго включено в B, если A включено в B, но не равно ему:

  $$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \land (A \neq B)$$

Равенство

- A равно B, если A и B включены друг в друга:

  $$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \land (B \subseteq A)$$

Общие элементы

- A и B не пересекаются, если у них нет общих элементов:

  A и B не пересекаются $\Leftrightarrow \forall a \in A : a \notin B$

Специальные множества

Определение:

Пустое множество — множество, не содержащее ни одного элемента. Обычно пустое множество обозначают как $\varnothing$.

Определение:

Универсальное множество — множество, содержащее все объекты и все множества. В тех аксиоматиках, в которых универсальное множество существует, оно единственно. Обычно универсальное множество обозначают как $\mathbb{U}$.

Операции над множествами

Бинарные операции над множествами

- Пересечение A и B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

- Объединение A и B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

- Разность A и B.

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

- Симметрическая разность A и B.

$$A \bigtriangleup B \equiv A - B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Унарные операции над множествами

- Дополнение определяется следующим образом:

$$\overline{A} \equiv A^{\complement} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A.$$

Теорема де Моргана

Теорема (де Моргана):

$$\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}$$

$$\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$$

Доказательство:

$\triangleright$

Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Для того, чтобы доказать равенство множеств, докажем, что первое множество включает второе и наоборот (частый приём при доказательстве равенства двух множеств).

Сначала докажем, что $\overline{\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha} \subseteq \bigcap\limits_{\alpha} \overline{A_\alpha}$.

Пусть $x \in \left(\overline{\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha}\right)$. Значит, $\nexists\ \alpha_i$ такого, что $x \in A_{\alpha_i}$. Следовательно, $\forall \alpha :\ x \in \overline{A_\alpha} \Rightarrow x \in \left(\bigcap\limits_{\alpha} \overline{A_\alpha}\right)$. В силу выбора x (любой элемент множества $\overline{\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha}$) следует искомое включение.

Теперь докажем, что $\bigcap\limits_{\alpha} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha}$

Пусть $x \in \left(\bigcap\limits_{\alpha} \overline{A_\alpha}\right)$. Тогда $\forall \alpha :\ x \in \overline{A_\alpha} \Rightarrow x \notin A_\alpha$. Поскольку x не входит ни в одно объединяемое множество, то $x \notin \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha \Rightarrow x \in \overline{\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha}$

Аналогично, в силу выбора x выполняется искомое включение.
◁

Теорема де Моргана устанавливает двойственность понятий объединения и пересечения множеств. То есть, имея некоторое верное равенство, содержащее объединения и пересечения, можно переписать его, заменив пересечения на объединения и наоборот. Например, из равенства

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \Rightarrow (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Доказывается это следующим образом: равны множества, значит, равны дополнения. После раскрытия дополнений приходим к написанному равенству.

Источник — «http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Множества&oldid=84691»

- Эта страница последний раз была отредактирована 4 сентября 2022 в 19:14.