Потери энергии и импульса релятивистских частиц на излучение

Вместе с электромагнитным полем излучаются энергия и импульс. В дипольном приближении излучение связано с ускорением частицы, то есть с действующими на них силами. Ниже конспективно излагается, какие потери энергии и импульса возникают при движении релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.

Уравнения движения в терминах 4-векторов и 4-тензоров имеет вид

$$\frac{dp^i}{d\tau} = m\frac{du^i}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{ik}u_k, \tag{1}$$

где τ – собственное время, p^i – контравариантная компонента 4-импульса, F^{ik} – контравариантные компоненты 4-тензора электромагнитного поля, u_k – ковариантная компонента 4-скорости (здесь и ниже производится суммирование по повторяющимся индексам, стоящим на разных уровнях):

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},\ p^i = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix},\ u^i = \gamma\begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},\ u_i = \gamma\begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix},$$

i=0,...,3, k=0,...,3.

Контравариантная форма для вызванного излучением изменения полного (в телесный угол 4π) 4-импульса

$$dp^i = -\frac{2q^2}{3c^5}\frac{du_k}{d\tau}\frac{du^k}{d\tau}dx^i \tag{2}$$

В частном случае $i = 0$ в сопутствующей системе отсчета получаем изменение полной энергии диполя (оно противоположно по знаку полной излученной энергии)

$$d\mathcal{E} = -\frac{2q^2}{3c^3}a^2dt$$

Подставляя в (2) $\frac{du^i}{d\tau}$ из (1), получим

$$\Delta p^\mu = -\frac{2q^4}{3m^2c^7}\int(F_{ij}u^j)(F^{ik}u_k)dx^\mu$$

Расписывая скалярное произведение под интегралом для лабораторной системы (то есть той, в которой 4-скорость частицы равна $u^i = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$, получим в векторной форме

$$\Delta p^\mu = \frac{2q^4}{3m^2c^5}\gamma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{(\mathbf{E} + [\beta\times\mathbf{H}])^2 - (\beta\cdot\mathbf{E})^2\right\}dx^\mu$$

Это выражение для $\mu = 1, 2, 3$ дает полное изменение компонент 3-мерного импульса, а для $\mu = 0$ – полное изменение энергии заряженной релятивистской частицы:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2q^4}{3m^2c^3}\gamma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{(\mathbf{E} + [\beta\times\mathbf{H}])^2 - (\beta\cdot\mathbf{E})^2\right\}dt$$

Уточним еще раз, что все поля, координаты и время, входящие в последние две формулы, относятся к лабораторной системе отсчета, а β и γ задаются скоростью частицы в этой лабораторной системе.