Динамическое программирование

Лекция 3

Идея Динамического Программирования (ДП)

Метод ДП (Р. Беллман, В.С. Михалевич, Н.З. Шор) можно трактовать как алгоритмическую версию рассуждений по индукции.

ДП эффективно применяется для оптимизации процессов, при рассмотрении которых возможно:

- выделить этапы процесса,
- на каждом этапе осуществить управление,
- полагать, что управление, действующее на последующих этапах, не оказывает влияния на величину показателя качества управления полученного на предыдущих этапах.

Задача о рюкзаке

- Забравшийся в магазин вор нашёл больше добычи, чем он может унести с собой. Его рюкзак выдерживает не больше W килограммов. Ему надо выбрать какие-то из n товаров веса $p_1, \dots, p_n$и стоимости $c_1, \dots, c_n$.
Как найти самый дорогой вариант?

Задача с повторениями	Задача без повторений
$x_i \geq 0$, *целые* количество взятых предметов типа i	$x_i = \begin{cases} 1, \text{если берем предмет типа } i \\ 0, \text{если не берем предмет типа } i \end{cases}$
$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to max$ $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq W$	

Задача о рюкзаке без повторений

- Забравшийся в магазин вор нашёл больше добычи, чем он может унести с собой. Его рюкзак выдерживает не больше W килограммов. Ему надо выбрать какие-то из n товаров веса $p_1, \dots, p_n$и стоимости $c_1, \dots, c_n$.
  Каждый товар есть в единственном экземпляре.
  Как найти самый дорогой вариант?

- $S_k(w)$ – максимальная стоимость унесённого, если разрешается уносить лишь товары $1, \dots, k$ и общий вес должен быть не больше w, если $0 \leq k \leq n, w \leq W$.
- Требуется найти $S_n(W)$ и набор переменных на которых достигается это значение.

Задача о рюкзаке без повторений

Забравшийся в магазин вор нашёл больше добычи, чем он может унести с собой. Его рюкзак выдерживает не больше W килограммов. Ему надо выбрать какие-то из n товаров веса $p_1, \dots, p_n$и стоимости $c_1, \dots, c_n$.
Каждый товар есть в единственном экземпляре.
Как найти самый дорогой вариант?

- $S_1(w) = \begin{cases} 0, \text{если } p_1 > w, \\ c_1, \text{если } p1 \leq w. \end{cases}$
- $S_k(w) = \max\{S_{k-1}(w - p_k) + c_k; S_{k-1}(w)\}, 2 \leq k \leq n, w \leq W$

На каждом шаге есть выбор:

- либо берем предмет типа k, но тогда для предыдущих предметов размер рюкзака должен быть меньше,
- либо не берем.

Для решения задачи необходимо заполнить таблицу размера $n \times W$, каждая ячейка таблицы заполняется за время $O(1)$.

Задача о рюкзаке без повторений (пример)

Забравшийся в магазин вор нашёл больше добычи, чем он может унести с собой. Его рюкзак выдерживает не больше W килограммов. Ему надо выбрать какие-то из n товаров веса $p_1, \dots, p_n$и стоимости $c_1, \dots, c_n$.
Каждый товар есть в единственном экземпляре.
Как найти самый дорогой вариант?

Товар	Вес p_i	Стоимость c_i
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

- $S_1(w) = \begin{cases} 0, \text{если } p_1 > w, \\ c_1, \text{если } p1 \le w. \end{cases}$
- $S_k(w) = \max\{S_{k-1}(w - p_k) + c_k; S_{k-1}(w)\}, 2 \le k \le n, w \le W$

$S_k(w)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	30	30	30	30	30
2	0	0	{14,0}	{14,0}	{14,0}	{14,30}	{14,30}	{14,30}	{44,30}	{44,30}
3	0	0	{0,14}	{16,14}	{16,14}	{30,30}	{30,30}	{30,30}	{30,44}	{46,44}
4										{39,46}

w

k

$S_n(W)$
ответ

Задача о рюкзаке с повторениями

- Забравшийся в магазин вор нашёл больше добычи, чем он может унести с собой. Его рюкзак выдерживает не больше W килограммов. Ему надо выбрать какие-то из n товаров веса $p_1, \ldots, p_n$и стоимости $c_1, \ldots, c_n$.
  Каждый товар есть в неограниченном количестве.
  Как найти самый дорогой вариант?

- $S_k(w)$ – максимальная стоимость унесённого, если разрешается уносить лишь товары $1, \ldots, k$ и общий вес должен быть не больше w, если $0 \leq k \leq n, w \leq W$.
- Требуется найти $S_n(W)$ и набор переменных на которых достигается это значение.

Задача о рюкзаке с повторениями

Забравшийся в магазин вор нашёл больше добычи, чем он может унести с собой. Его рюкзак выдерживает не больше W килограммов. Ему надо выбрать какие-то из n товаров веса $p_1, \dots, p_n$и стоимости $c_1, \dots, c_n$.
Каждый товар есть в неограниченном количестве.
Как найти самый дорогой вариант?

- $S_1(w) = \left\lfloor \frac{w}{p_1} \right\rfloor c_1,\ w \le W,$
- $S_k(w) = \max\limits_{0 \le x \le \left\lfloor \frac{w}{p_k} \right\rfloor} \{S_{k-1}(w - p_k x) + c_k x\}, 2 \le k \le n, w \le W.$

На каждом шаге есть выбор:

- Пусть x количество предметов типа k, но тогда для предыдущих предметов размер рюкзака должен быть меньше на величину $p_k x$

Для решения задачи необходимо снова заполнить таблицу размера $n \times W$, но для вычисления значения в каждой клеточке потребуется порядка $O(W)$ операций, значит трудоемкость данного метода составит $O(nW^2)$.

Может быть можно проще?

Задача о рюкзаке с повторениями

Забравшийся в магазин вор нашёл больше добычи, чем он может унести с собой. Его рюкзак выдерживает не больше W килограммов. Ему надо выбрать какие-то из n товаров веса $p_1, \dots, p_n$и стоимости $c_1, \dots, c_n$.
Каждый товар есть в неограниченном количестве.
Как найти самый дорогой вариант?

$S_k(w)$ – максимальная стоимость унесённого, если разрешается уносить лишь товары $1, \dots, k$ и общий вес должен быть не больше w, если $0 \leq k \leq n, w \leq W$.

- $S_1(w) = \left\lfloor \frac{w}{p_1} \right\rfloor c_1,\ w \leq W,$
- $S_k(w) = \max\limits_{0 \leq x \leq \left\lfloor \frac{w}{p_k} \right\rfloor} \{S_{k-1}(w - p_k x) + c_k x\}, 2 \leq k \leq n, w \leq W.$

Рассмотрим другое разбиение на подзадачи:

Пусть $S(w)$ – максимальная стоимость унесённого, если общий вес должен быть не больше $w \leq W$.

- $S(w) = \max\limits_{k:\, p_k \leq w} \{S(w - p_k) + c_k\}, w \leq W.$

Для решения задачи необходимо снова заполнить таблицу размера $1 \times W$, но для вычисления значения в каждой клеточке потребуется порядка $O(n)$ операций, значит трудоемкость данного метода составит $O(nW)$.

Задача о рюкзаке с повторениями

Забравшийся в магазин вор нашёл больше добычи, чем он может унести с собой. Его рюкзак выдерживает не больше W килограммов. Ему надо выбрать какие-то из n товаров веса $p_1, \dots, p_n$ и стоимости $c_1, \dots, c_n$.
Каждый товар есть в неограниченном количестве.
Как найти самый дорогой вариант?

Товар	Вес p_i	Стоимость c_i
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

- $S_1(w) = \left\lfloor \frac{w}{p_1} \right\rfloor c_1$
- $S(w) = \max\limits_{k:\, p_k \le w} \{S(w - p_k) + c_k\}, w \le W.$

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{S}(w)$	0	9	14	18	23	30	32	37	44	48

Задача распределения ресурсов

Планируется деятельность предприятия на ближайшие n лет.
Известно, что если в год t, $1 \le t \le n$, вложено x_t ресурса (x_t – целая величина), то предприятие получает доход, задаваемый *производственной функцией* $f_t(x_t)$.
Предполагается, что доход в год t определяется только величиной ресурса x_t, использованного в этом году, и не зависит от того, сколько вложено в другие годы.

Сумма вложений за n лет не должна превысить заданную величину Y.

Требуется таким образом распределить ресурсы чтобы, не выходя за ограничение Y, максимизировать суммарный доход от деятельности предприятия за n лет.

$$f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n) \to \max(x_n)$$
$$x_1 + \cdots + x_n \le Y,$$
$$x_t \ge 0 \text{, целые, } 1 \le t \le n.$$

Задача распределения ресурсов

Планируется деятельность предприятия на ближайшие n лет.
Известно, что если в год t, $1 \le t \le n$, вложено x_t ресурса, то предприятие получает доход $f_t(x_t)$. Сумма вложений за n лет не должна превысить заданную величину Y.

Требуется максимизировать суммарный доход от деятельности предприятия за n лет.

Обозначим $S_k(y), 1 \le k \le n, 0 \le y \le Y$ максимальный доход при планировании деятельности на k лет и распределении только y ресурсов.

Требуется найти $S_n(Y)$,

Задача распределения ресурсов

Теорема 1

Пусть $f_1, \dots, f_n$ – монотонно неубывающие функции.

Тогда справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$S_1(y) = f_1(y), 0 \le y \le Y;$$
$$S_k(y) = \max\{S_{k-1}\,(y - x) + f_k(x) | 0 \le x \le y\},$$
$$2 \le k \le n, 0 \le y \le Y.$$

Доказательство. Первое равенство очевидно.

По определению $S_k(y) \ge \max\{S_{k-1}\,(y - x) + f_k(x) | 0 \le x \le y\}$,

Пусть теперь $(x_1^*, \dots, x_k^*)$ – такой вектор, что $x_1^* + \dots + x_k^* \le y$ и $S_k(y) = f_1(x_1^*) + \cdots + f_k(x_k^*)$.

Поскольку $S_{k-1}(y - x_k^*) \ge f_1(x_1^*) + \dots + f_{k-1}(x_{k-1}^*)$, имеем

$$S_k(y) = f_1(x_1^*) + \dots + f_k(x_k^*) \le S_{k-1}(y - x_k^*) + f_k(x_k^*).$$

Задача распределения ресурсов

Алгоритм ДП вычисляет множество $S_k = \{S_{k(y)} | 0 \le y \le Y\}, k = 1, \dots, n$
с помощью соотношений из теоремы, где на каждом шаге оптимизируется ровно одна переменная.

- Процесс вычисления $S_1, \dots, S_n$ называется *прямым ходом* алгоритма.
- Число операций $\approx O(Y^2 n)$
- Память $\approx O(Yn)$.

	1	2	…	Y
$S_1(y)$				
$S_2(y)$				
…				
$S_n(y)$				$S_n(Y)$

- При *обратном ходе* алгоритма вычисляются значения $(x_n^*, \dots, x_1^*)$, с учетом того, что уже известны $S_{k(y)}$.
  Например, x_n^* определяется из уравнения $S_n(Y) = f_n(x_n^*) + S_{n-1}(Y - x_n^*)$ и так далее.
- Число операций $\approx O(Yn)$. Память $\approx O(Yn)$.

Динамическое программирование

Лекция 4

Прямая задача распределения ресурсов

Планируется деятельность предприятия на ближайшие n лет.
Известно, что если в год t, $1 \le t \le n$, используется x_t ресурса (x_t – целая величина, $0 \le x_t \le a_t$), то предприятие производит продукцию, количество задается *производственной функцией* $f_t(x_t)$, и затраты предприятия в этот год составляют $h_t(x_t)$.
Сумма вложений за n лет не должна превысить заданный бюджет Y.

Требуется таким образом распределить ресурсы чтобы, максимизировать количество произведенной продукции за n лет, не выходя за ограничение Y по затратам.

$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \to max$$
$$h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n) \le Y,$$
$$0 \le x_t \le a_t \text{, целые, } 1 \le t \le n.$$

ПЗРР

$$S_1(y) = f_1(x^*), \text{где } x^* = \max\{x \le a_1 | h_1(x) \le y\}, 0 \le y \le Y$$
$$S_k(y) = \max_{\{x \le a_k | h_k(x) \le y\}} \{f_k(x) + S_{k-1}(y - h_k(x))\}, 2 \le k \le n, 0 \le y \le Y.$$

Обратная задача распределения ресурсов

Планируется деятельность предприятия на ближайшие n лет.
Известно, что если в год t, $1 \leq t \leq n$, используется x_t ресурса (x_t – целая величина, $0 \leq x_t \leq a_t$), то предприятие *производит* $f_t(x_t)$ продукции, но затраты предприятия в этот год составляют $h_t(x_t)$.

Требуется таким образом распределить ресурсы чтобы, минимизировать затраты предприятия, но произвести продукции более D.

$$h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n) \to min,$$
$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \geq D,$$
$$0 \leq x_t \leq a_t \text{, целые, } 1 \leq t \leq n.$$

ОЗРР

Обратная задача распределения ресурсов

Планируется деятельность предприятия на ближайшие n лет.
Известно, что если в год t, $1 \le t \le n$, используется x_t ресурса (x_t – целая величина, $0 \le x_t \le a_t$), то предприятие *производит* $f_t(x_t)$ продукции, но затраты предприятия в этот год составляют $h_t(x_t)$.

Требуется таким образом распределить ресурсы чтобы, минимизировать затраты предприятия, но произвести продукции более D.

$f_t^{-1}(d) = \min\{0 \le x \le a_t | f_t(x) \ge d\}$ – минимальное количество ресурса x для производства d в год t.

$S_k(y)$ – минимальные затраты, которые необходимо понести, для того чтобы за первые k лет произвести d.

Требуется найти $S_n\,(Y)$.

Рекуррентные соотношения:

$$S_1(d) = \begin{cases} \infty, & \text{если } f_1(a_1) < d, \\ h_1\left(f_1^{-1}(d)\right), & \text{если } f_1(a_1) \ge d, \end{cases} \quad 0 \le d \le D,$$

$$S_k(d) = \min_{\{x \le a_k | x \le f_1^{-1}(d)\}} \left\{h_k(x) + S_{k-1}\left(d - f_k(x)\right)\right\}, 2 \le k \le n, 0 \le d \le D.$$

Теорема о связи прямой и обратной задач

Теорема 2

Пусть задано Y. Предположим, что D — наибольшее число, для которого оптимальное значение целевой функции обратной задачи ОЗРР не превосходит Y. Тогда оптимальное значение целевой функции прямой задачи ПЗРР равно D.

$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \to \max$$
$$h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n) \le Y,$$
$$0 \le x_t \le a_t \text{, целые, } 1 \le t \le n.$$

ПЗРР

Доказательство.

Пусть D удовлетворяет условию теоремы
и $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ — соответствующее решение задачи ОЗРР.

Значит $f_1(x_1^*) + \dots + f_n(x_n^*) \ge D$ и $h(x_1^*) + \dots + h_n(x_n^*) \le Y$.

$$h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n) \to \min$$
$$f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \ge D,$$
$$0 \le x_t \le a_t \text{, целые, } 1 \le t \le n.$$

ОЗРР

Рассмотрим D' — оптимальное решение прямой задачи ПЗРР
и $(x_1', \dots, x_n')$ — соответствующее решение задачи ПЗРР. Заметим, что

$$h(x_1') + \dots + h_n(x_n') \le Y.$$

Если $D' > D$, то это противоречит максимальности D в условии теоремы, значит $D' = D$.

Прямая и обратная задача о рюкзаке с повторениями

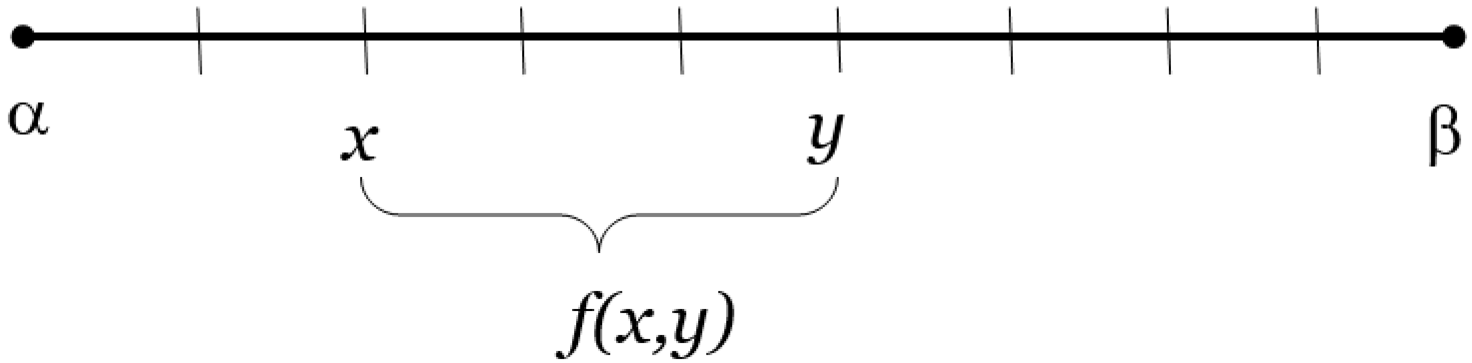
Прямая задача о рюкзаке	Обратная задача о рюкзаке
Найти вещи максимальной стоимости, суммарного веса не больше W.	Минимизировать суммарный вес вещей, суммарной стоимости больше Y
$S_k(w)$ – максимальная стоимость унесённого, если разрешается уносить лишь товары $1, \dots, k$ и общий вес должен быть не больше w, если $0 \le k \le n, w \le W$	$S_k(y)$ – минимальный вес рюкзака, если разрешается уносить лишь товары $1, \dots, k$ и суммарная ценность будет не меньше y.
$$S_1(w) = \left\lfloor \frac{w}{p_1} \right\rfloor c_1$$ $$S_k(w) = \max_{0 \le x \le \left\lfloor \frac{w}{p_k} \right\rfloor} \{S_{k-1}(w - p_k x) + c_k x\}.$$	$$S_1(y) = \left\lceil \frac{y}{c_1} \right\rceil x_1,$$ $$S_k(y) = \max_{0 \le x \le \left\lceil \frac{y}{c_k} \right\rceil} \{S_{k-1}(y - c_k x) + b_k x\}.$$

Задача о ближайшем соседе

Задан целочисленный сегмент $Z = [\alpha, \beta]$ и неотрицательная функция $f(x, y)$, заданная на $(x, y) \in Z \times Z$ при $x \le y$.

Для любого разбиения сегмента Z на n частей точками x_k, $1 \le k \le n$, $\alpha = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = \beta$ определим целевую функцию:

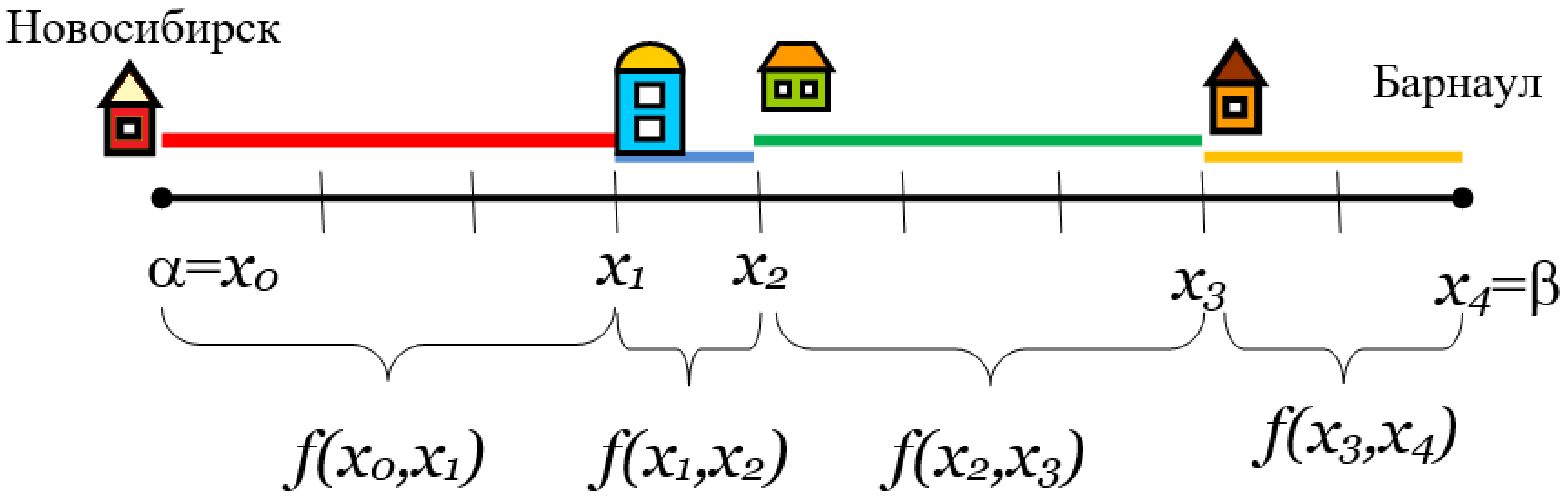
$$W(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, x_k)$$



Задача о ближайшем соседе

- Например, на дороге Новосибирск–Барнаул необходимо расставить станции дорожно-ремонтного обслуживания. Для каждого отрезка дороги задана стоимость обслуживания, зависящая только от границ участка. Необходимо определить границы каждого участка, чтобы вся дорога была обслужена, и суммарная стоимость обслуживания была минимальна.

Вариант обслуживания дороги



ЗБС с фиксированным числом интервалов

$ЗБС_n$ с фиксированным числом интервалов можно записать как

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, x_k) \to \min_{(x_k)}$$

$$\alpha = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n = \beta$$

Пусть $S_k(y)$—минимальные затраты при разбиении дороги (α, y) на k участков.

Тогда *рекуррентные соотношения:*

$$S_1(y) = f(\alpha, y), y = \alpha, \dots, \beta$$

$$S_k(y) = \min_{\alpha \le x \le y} \{S_{k-1}(x) + f(x, y)\}, \qquad y = \alpha, \dots, \beta, \qquad k = 2, \dots, n$$

$T = O(nM^2)$ $\Pi = O(nM)$, где M— длина дороги $[\alpha,\beta]$.

ЗБС с оптимизируемым числом интервалов (ЗБС*)

В этой задаче помимо оптимального разбиения должно быть найдено и оптимальное количество интервалов. Можно решить ЗБС$_n$ для разных n. Но можно…

Пусть $S(y)$—минимальные затраты на обслуживание дороги (α, y).

Тогда

рекуррентные соотношения:

$$S(\alpha) = 0,$$
$$S(y) = \min_{\alpha \le x < y} \{S(x) + f(x, y)\}, \qquad y = \alpha, \dots, \beta$$

$T = O(M^2), \Pi = O(M).$