Домашняя работа к занятию 21.

1.1 Получите линейное дифференциальное уравнение, для которого функции x и e^x образуют ФСР.

1.2 Решите задачу Коши $\begin{cases} (x^2-4)y''-2xy'+2y=8 \\ y(0)=4;\ y'(0)=1 \end{cases}$ На каком интервале определено непродолжаемое решение этой задачи? Можно ли ответить на этот вопрос, не решая уравнения?

1.3 Функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале $(a;b)$. Могут ли два линейно независимых решения дифференциального уравнения $y''+p(x)y'+q(x)=0$ иметь экстремумы в одной и той же точке этого интервала?

2.1 Убедитесь, что функции $y_1(x)\equiv 1$ и $y_2(x)=-\cos x$ являются решениями уравнения $(1+\cos x)y''+\sin xy'+y=1$. Решите для этого уравнения задачу Коши с начальными данными $y(0)=1$, $y'(0)=1$. На каком интервале определено непродолжаемое решение этой задачи Коши?

2.2 Коэффициенты уравнения $y''+p(x)y'+q(x)=0$ непрерывны на интервале $(a;b)$. Функция $y_1(x)$ — частное решение этого уравнения, имеющее на интервале $(a;b)$ ровно два нуля. Докажите, что частное решение $y_2(x)$, линейно независимое с $y_1(x)$, обязательно имеет на интервале $(a;b)$ ровно один нуль.

3.1 Найдите два линейно независимых решения уравнения в виде $y=x^n$:

$$x^2(2x+1)y'''+x(4x+3)y''-2xy'+2y=0.$$

Получите уравнение второго порядка, которому удовлетворяет третье решение, линейно независимое с найденными. Запишите общее решение исходного уравнения.

Ответы и указания

1.1 *Указание*: Раскройте определитель Вронского $\begin{vmatrix} y & x & e^x \\ y' & 1 & e^x \\ y'' & 0 & e^x \end{vmatrix} = 0$ по первому столбцу.

Ответ: $(x-1)y'' - xy' + y = 0$

1.2 *Указание*: Частное решение неоднородного уравнения и решения однородного уравнения ищем в виде многочленов второй степени.

$y_{\text{ о.н.}}(x) = C_1 x + C_2(x^2+4) - x^2$

Ответ: Непродолжаемое решение задачи Коши $y = x + 4$ определено на интервале $(-1;1)$.

1.3 *Указание*: Если в точке x_0 обе функции имеют экстремум, то определитель Вронского в этой точке равен нулю.

Ответ: не могут.

2.1 *Указание*: разность $y_1(x) - y_2(x)$ является решением однородного уравнения. Второе решение постройте, используя формулу Лиувилля.

Ответ: Непродолжаемое решение $y = 1 + \sin x$ определено на интервале $(-\pi;\pi)$.

2.2 *Указание*: Рассмотрите определитель Вронского в нулях функции $y_1(x)$ и докажите, что функция имеет в этих точках значения разных знаков.

3.1 *Указание*: $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^{-1}$. Третье решение ищем из уравнения $x^2y'' + xy' - y = C(2x-1)$. Следовательно, $y_3 = x\ln|x| - 1$.

Ответ: $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x} + C_3(x\ln|x| - 1)$