Транзитивный остов

Определение:

Транзитивным остовом (или **транзитивным сокращением**, англ. *transitive reduction*) отношения R на множестве X называется минимальное отношение R^- на X такое, что транзитивное замыкание R^- равно транзитивному замыканию R.

Содержание

Алгоритм для антисимметричных отношений

Описание алгоритма

Пусть первоначально $R^- = R$.

Чтобы сделать R^- минимальным отношением на X, таким, что транзитивное замыкание R^- будет равно транзитивному замыканию R, рассмотрим всевозможные комбинации из каждых трёх элементов $a, b, c \in X$. Если для этих элементов существует каждое из отношений: aRb, bRc и aRc, — то исключим отношение aRc из R^-. После проверки всех комбинаций и исключения ненужных отношений получаем искомое отношение R^-.

Псевдокод

```
function f(X: List<T>, R: List<T>):
  R⁻ = R
  foreach a ∈ X
    foreach b ∈ X
      foreach c ∈ X
        if aRb and bRc and aRc
          R⁻ = R⁻ \ (a, c)
```

Доказательство корректности

Для удобства представим отношение в виде графа: $G = \langle V, E \rangle$. Его транзитивным остовом будет граф $G^- = \langle V, E^- \rangle$.

Введём несколько обозначений:

- $u \underset{G}{\to} v$ — в графе G есть ребро из вершины u в v,
- $u \underset{G}{\leadsto} v$ — в графе G есть путь (возможно, рёберно пустой) из вершины u в v,
- $u \overset{+}{\underset{G}{\leadsto}} v$ — в графе G есть рёберно непустой путь из вершины u в v.

Также введём определение транзитивного замыкания в терминах теории графов:

Определение:

Транзитивным замыканием (англ. *transitive closure*) графа $G = \langle V, E \rangle$ называется граф $G^* = \langle V, E^* \rangle$, где $E^* = \left\{ (i, j) \in V \times V \mid i \underset{G}{\leadsto} j \right\}$.

Так как отношение антисимметрично и транзитивно, то граф ацикличен, то есть в нём выполняется следующее: $\forall i, j \in V : i \overset{+}{\underset{G}{\leadsto}} j \Longrightarrow i \neq j$.

Докажем теорему, из которой следует алгоритм.

Теорема:

Пусть $G^- = \langle V, E^- \rangle$. Тогда
$$E^- = \left\{ k \underset{G}{\to} m \mid \forall l : [k \underset{G}{\leadsto} l \land l \underset{G}{\to} m \Longrightarrow k = l] \right\}$$

Доказательство:

▷

Докажем, что $E^- \subseteq \left\{ k \underset{G}{\to} m \mid \forall l : [k \underset{G}{\leadsto} l \land l \underset{G}{\to} m \Longrightarrow k = l] \right\}$:

Пусть G^- уже построен. Пусть $k \underset{G^-}{\to} m$. Тогда $k \neq m$ (так как иначе удаление ребра (k, m) из E^- приведёт к образованию меньшего графа с тем же транзитивным замыканием, что нарушает условие минимальности транзитивного остова). Поэтому по определению транзитивного остова $k \overset{+}{\underset{G}{\leadsto}} m$.

Пусть l — вершина, для которой выполняется $k \underset{G}{\leadsto} l \land l \underset{G}{\to} m$. Докажем, что $k = l$, от противного. Пусть $k \neq l$. G ацикличен, поэтому $l \neq m$. Поскольку $G^* = (G^-)^*$, верно $k \overset{+}{\underset{G^-}{\leadsto}} l \land l \overset{+}{\underset{G^-}{\leadsto}} m$. Поскольку G^- ацикличен, путь из k в l не может содержать ребра (k, m), аналогично путь из l в m не может содержать (k, m). Поэтому в G^- существует путь из k в m, не содержащий в себе ребро (k, m), значит, удаление (k, m) из E^- не изменит транзитивное замыкание, что противоречит условию минимальности E^-. Поэтому $\forall l : [k \underset{G}{\leadsto} l \land l \underset{G}{\to} m \Longrightarrow k = l]$. Поскольку $k \overset{+}{\underset{G}{\leadsto}} m$, существует такая вершина l, что $k \underset{G}{\leadsto} l \land l \underset{G}{\to} m$, что приводит к выводу, что $k \underset{G}{\to} m$.

Докажем, что $\left\{ k \underset{G}{\to} m \mid \forall l : [k \underset{G}{\leadsto} l \land l \underset{G}{\to} m \Longrightarrow k = l] \right\} \subseteq E^-$:

Предположим, что $k \underset{G}{\to} m$ и $\forall l : [k \underset{G}{\leadsto} l \land l \underset{G}{\to} m \Longrightarrow k = l]$. Докажем, что kG^-m, от противного. Предположим, что $(k, m) \notin E^-$. Поскольку G ацикличен, $k \neq m$ и поэтому $k \overset{+}{\underset{G^-}{\leadsto}} m$. Поскольку $(k, m) \notin E^-$, существует вершина l такая, что $k \underset{G^-}{\leadsto} l \land l \underset{G^-}{\leadsto} m$ и $k \neq l \neq m$, поэтому $k \overset{+}{\underset{G}{\leadsto}} l \land l \overset{+}{\underset{G}{\leadsto}} m$. Поскольку G ацикличен, существует вершина $l' \neq k$, для которой выполняется $k \overset{+}{\underset{G}{\leadsto}} l' \land l' \underset{G}{\to} m$, что противоречит нашему предположению.

Так как множества E^- и $\left\{ k \underset{G}{\to} m \mid \forall l : [k \underset{G}{\leadsto} l \land l \underset{G}{\to} m \Longrightarrow k = l] \right\}$ включены друг в друга, они совпадают, то есть равны.

◁

Ассимптотика

Для множества X с количеством элементов n алгоритм работает за $O(n^3)$, так как в каждом из трёх циклов мы пробегаемся по всем элементам множества X.

См. также

- Транзитивное замыкание
- Остовные деревья: определения, лемма о безопасном ребре

Источники информации

- Wikipedia: Transitive reduction (http://en.wikipedia.org/wiki/Transitive_reduction)
- *J.A. La Poutré and J. van Leeuwen. «Maintenance of transitive closures and transitive reductions of graphs»*, 1987.