Домашняя работа к занятию 17.

1.1 Найдите общее решение уравнения $\dot{x} = \dfrac{x(x-1)}{t}$. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выясните, являются ли устойчивыми решения $x \equiv 1$ и $x \equiv 0$.

1.2 Найдите первый интеграл системы $\begin{cases} \dot{x} = y^3(1+x^2) \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$ и начертите на фазовой плоскости траектории системы вблизи точки $(0;0)$. Сделайте вывод об устойчивости или неустойчивости нулевого решения.

1.3 Исследуйте на устойчивость решение задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y + z + 1, & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 2x - y - z + \sin t, & y(0) = 2 \\ \dot{z} = y - 2z + t^2, & z(0) = 0 \end{cases}$

2.1 Найдите общий интеграл уравнения $2t\dot{x} = x - x^3$ и нарисуйте картину интегральных линий. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выясните, являются ли устойчивыми стационарные решения $x \equiv 1$, $x \equiv -1$ и $x \equiv 0$.

2.2 При каких значениях параметра a нулевое решение уравнения $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + ay = 0$ асимптотически устойчиво?

2.3 Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases} \dot{x} = -x + z \\ \dot{y} = -e^{-t}y + z \\ \dot{z} = -z \end{cases}$

2.4 Исследуйте на устойчивость решение задачи Коши $\begin{cases} (t^2+1)y'' + ty' - y = \sin t \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \end{cases}$

3.1 Рассмотрим матрицу порядка $n \times n$

$$\mathbf{A_0} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -1 & 10 \\ 0 & & \dots & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, ее следует считать устойчивой, так как все ее собственные числа лежат в левой полуплоскости. Покажите, что матрица

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -1 & 10 \\ \varepsilon & & \dots & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon = 10^{2-n}$ обязательно имеет собственное число, лежащее в правой полуплоскости, то есть является неустойчивой.

Этот пример иллюстрирует тот неочевидный факт, что даже небольшое изменение элементов матрицы может привести к потере ее устойчивости.

Проведите компьютерный эксперимент, вычисляя собственные числа матрицы $\mathbf{A}_\varepsilon$ для различных значений ε при помощи прикладных математических пакетов программ.

Ответы.

1.1 Общее решение $x = \dfrac{1}{1+Ct}$. Решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво, решение $x \equiv 1$ неустойчиво.

1.2 Первый интеграл $y^4 + 4\ln(1+x^2) = C$. Нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

1.3 Указание: не решайте задачу Коши! Система линейная, поэтому устойчивость *любого* решения связана с устойчивостью *нулевого* решения *однородной* системы.

Характеристический многочлен $P_3(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 4$. Все его корни лежат в левой полуплоскости.

Ответ: решение асимптотически устойчиво.

2.1 Общий интеграл $t = \dfrac{Cx^2}{x^2 - 1}$. Решения $x \equiv \pm 1$ асимптотически устойчивы, решение $x \equiv \pm 0$ неустойчиво.

2.2 $0 < a < 2$

2.3 Общее решение $x = C_1 e^{-t}$, $y = C_1 + C_2 \exp(e^{-t})$, $z = (C_1 t + C_3)e^{-t}$. Нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

2.4 Указание: попробуйте решить однородное уравнение.

Одно его решение легко найти в виде многочлена: это решение $y = t$. Этого достаточно, чтобы утверждать, что любое решение неоднородного уравнения неустойчиво.