

Домашняя работа к занятию 11

1.1 Решите задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 4x - y, & y(0) = 0 \end{cases}$$

1.2 Найдите решения системы, ограниченные при $t \rightarrow \infty$,
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - z \\ \dot{y} = -2x - y + 3z \\ \dot{z} = -x + y + 2z \end{cases}$$

1.3 Найдите периодические решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 2x + y - 2z \\ \dot{z} = 3x + 2y - 3z \end{cases}$$

2.1 Решите задачу Коши для системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - z, & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x - y, & y(0) = 1 \\ \dot{z} = 3x - y - z, & z(0) = 0 \end{cases}$$

2.2 Найдите общее решение системы
$$\begin{cases} t\dot{x} = 2x + y \\ t\dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

2.3 Рассмотрим систему $\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y}$. Сформулируйте условия на собственные числа матрицы \mathbf{A} , при которых

- а) все решения системы стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$
- б) система имеет периодические решения
- в) существует решение, ограниченное на всей прямой \mathbb{R}

Являются ли эти условия необходимыми и достаточными?

2.4 Рассмотрим систему $\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y}$. Мы знаем, что любая компонента $y_i(t)$ решения $\vec{y}(t)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению порядка n , у которого характеристический многочлен есть $P_n(\lambda) = \det |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|$. Верно ли обратное утверждение?

Ответы и указания

1.1 Указания: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 2$$

Ответ: $x = (1 + 2t) \cdot e^t, y = 4t e^t$

1.2 Указание: $\lambda_1 = 0$.

Ответ: $x \equiv -5, y \equiv 1, z \equiv -3$.

1.3 Указания: Характеристический многочлен $P_n(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+1)$.
Собственному числу $\lambda = i$ соответствует собственный вектор

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \cos t \\ 3 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \sin t - \cos t \end{pmatrix}$

2.1 Ответ: $x = t^2 + 2t + 1; y = t^2 + 1; z = 2t^2 + 2t$

2.2 Ответ: $\begin{cases} x = C_1 t + C_2 t^5 \\ y = -C_1 t + 3C_2 t^5 \end{cases}$

2.3 а) $\forall i (\operatorname{Re} \lambda_i < 0)$; б) и в) $\exists i \mid \operatorname{Re} \lambda_i = 0$

2.4 Нет.