Задание 7 (сдать до 15 мая)
Вариант 1

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -2+i \\ 1+2i & -2-i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 10x_2x_3 - 5x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz - 1 = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ – сингулярные базисы отображения ортогональной проекции $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ на $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, затем – общий случай.

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)
Вариант 2

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3+2i & 3-2i \\ -2-3i & -2+3i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2^2 + 24x_2x_3 + 12x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)

Вариант 3

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3-i & -1+3i \\ 3+i & -1-3i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 8x_2x_3 - 2x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 2y + 2z = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det\, G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)

Вариант 4

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:

(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;

(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;

(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:

(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;

(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -1+2i & 2-i \\ -1-2i & 2+i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz + 3x + 3y - 3z = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det\, G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)
Вариант 5

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3-2i & -3+2i \\ 2+3i & 2-3i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ – сингулярные базисы отображения ортогональной проекции $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ на $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, затем – общий случай.

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)
Вариант 6

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3+i & 1-3i \\ -3-i & 1+3i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det\, G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)

Вариант 7

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:

(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;

(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;

(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:

(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;

(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i \\ -2-i & -2+i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2,$$

$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением
$$7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8xz - 8yz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$$
в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \dots, v_k) = \det\, G(v_1, \dots, v_k)$ обладает свойством
$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$
Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины
$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)
Вариант 8

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3-2i & -2+3i \\ 3+2i & -2-3i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det\, G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)
Вариант 9

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3+i & 3-i \\ -1-3i & -1+3i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 7x_2^2 + 16x_2x_3 + 10x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy - 16xz + 20yz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)

Вариант 10

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -1-2i & -1+2i \\ 2+i & 2-i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 7x_2^2 - 12x_2x_3 + 6x_3^2,$$
$$g = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \dots, v_k) = \det G(v_1, \dots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)

Вариант 11

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3+2i & 2-3i \\ -3-2i & 2+3i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det\, G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)
Вариант 12

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3-i & -3+i \\ 1+3i & 1-3i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 5x_2^2 + 6x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)

Вариант 13

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:

(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;

(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;

(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:

(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;

(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -2+i & 1-2i \\ -2-i & 1+2i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \dots, v_k) = \det\, G(v_1, \dots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)
Вариант 14

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3+i & -1-3i \\ 3-i & -1+3i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 + 3x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det\, G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 15 мая)
Вариант 15

1. В квантовой механике используются матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:
(а) эти четыре матрицы образуют базис в пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$;
(б) матрицы σ_1, σ_2, σ_3 унитарны;
(в) имеют место равенства

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0.$$

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iHt)$ унитарна для каждого $t \in \mathbb{R}$.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^\dagger B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^\dagger = A$.

5. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 2+i & -1-2i \\ 2-i & -1+2i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

6. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -2 & 14 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

7. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее к диагональному виду пару квадратичных форм

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2^2 + 12x_2x_3 + 21x_3^2,$$
$$g = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2^2 - 9x_3^2.$$

8*. Поверхность задана уравнением

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 2z = 0$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:
(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $||\mathsf{A}\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;
(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

10*. (**15=3+3+6+3 баллов**)

(1) Доказать, что определитель Грама $g(v_1, \ldots, v_k) = \det\, G(v_1, \ldots, v_k)$ обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. *Для четырёх векторов, рассмотрите сначала случай, когда наборы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *– сингулярные базисы отображения ортогональной проекции* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ *на* $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, *затем – общий случай.*

(2) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(3) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(4) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?