Семинар 4 и 5. *(12 и 16 сентября 2024 г.)*

Приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами при $n > 2$

1. *Полезные сведения из курса линейной алгебры*

Квадратичная форма с матрицей A имеет вид

$$(A\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j. \tag{1}$$

Невырожденное ($\det T \neq 0$)) линейное преобразование $\xi = T\eta$ (или $\xi_i = \sum\limits_{l=1}^{n} t_{il}\eta_l$) переводит квадратичную форму (1) в квадратичную форму (2)

$$(\tilde{A}\eta, \eta) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{kl}\eta_k\eta_l \tag{2}$$

$$(A\xi, \xi) = (AT\eta, T\eta) = (T^T AT\eta, \eta)$$

$$(A\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{l=1}^{n} t_{il}\eta_l \sum_{k=1}^{n} t_{jk}\eta_k =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_{il}t_{jk})\eta_k\eta_l = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{kl}\eta_k\eta_l = (\tilde{A}\eta, \eta),$$

где коэффициенты новой квадратичной формы вычисляются по формуле

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_{il}t_{jk}. \tag{3}$$

Пусть

n_+ — количество положительных собственных значений матрицы A;

n_- — количество отрицательных собственных значений матрицы A;

n_0 — количество нулевых собственных значений матрицы A.

Квадратичная форма (2) имеет (нормальный) канонический вид, если

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

где B, C и D — диагональные матрицы размера $(n_+ \times n_+)$, $(n_- \times n_-)$ и $(n_0 \times n_0)$ соответственно

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

или

$$(\tilde{A}\eta, \eta) = \sum_{i=1}^{n_+} \eta_i^2 - \sum_{j=n_++1}^{n_++n_-} \eta_j^2.$$

Привести квадратичную форму (1) к нормальному каноническому виду можно методом Лагранжа. Выделяя полные квадраты, мы найдем замену переменных $\eta = S\xi$, далее, чтобы получить матрицу перехода T, необходимо выразить все $\xi_1, \ldots, \xi_n$ через $\eta_1, \ldots, \eta_n$. В итоге получим невырожденное линейное преобразование $\xi = T\eta$ (или $\xi_i = \sum\limits_{l=1}^{n} t_{il}\eta_l$).

2. *Определение и классификация УЧП 2 порядка*

Уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{n} a_k u_{x_k} + au = f(x), \tag{4}$$

где $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица размера $(n \times n)$. Пусть
n_+ — количество положительных собственных значений матрицы A;
n_- — количество отрицательных собственных значений матрицы A;
n_0 — количество нулевых собственных значений матрицы A.

Переформулируем классификацию уравнений для случая постоянных коэффициентов:

Определение 1. *Уравнение* (4) *называется* $\begin{cases} \textit{гиперболическим} \\ \textit{эллиптическим} \\ \textit{параболическим} \end{cases}$ *если*

$$\begin{cases} n_- = 1,\, n_+ = n-1 \,\textit{или}\, n_+ = 1,\, n_- = n-1; \\ n_+ = n \,\textit{или}\, n_- = n; \\ n_0 > 0. \end{cases}$$

В данном случае тип уравнения сохраняется во всей области, поскольку коэффициенты постоянные. В данном случае привести уравнение (4) к каноническому виду — значит с помощью невырожденной линейной замены $y = \varphi(x)$ перейти к уравнению

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} u_{y_i y_j} + \tilde{F}(y, u, \nabla u) = 0, \tag{5}$$

в котором матрица старшей части имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

где B, C и D — диагональные матрицы размера $(n_+ \times n_+)$, $(n_- \times n_-)$ и $(n_0 \times n_0)$ соответственно

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Приведение к каноническому виду УЧП 2 порядка с постоянными коэффициентами при* $n > 2$
Идея: пока что не знаем, какую замену нам нужно сделать, мы найдем ее после того, как пересчитаем коэффициенты уравнения и приведем к каноническому виду квадратичную форму с той же матрицей A.

Сделаем замену $y = \varphi(x)$ и пересчитаем производные:

$$u_{x_i} = \sum_{l=1}^{n} u_{y_l} \cdot (y_l)_{x_i};$$

$$u_{x_i x_j} = (u_{x_i})_{x_j} = (\sum_{l=1}^{n} u_{y_l} \cdot (y_l)_{x_i})_{x_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} u_{y_l y_k} \cdot (y_l)_{x_i} \cdot (y_k)_{x_j} + \sum_{l=1}^{n} u_{y_l} \cdot (y_l)_{x_i x_j}$$

Подставим эти выражения в уравнение (4):

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} u_{y_l y_k} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (y_l)_{x_i} \cdot (y_k)_{x_j} + \sum_{l=1}^{n} u_{y_l} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (y_l)_{x_i x_j} + \Phi(y, u, \nabla u) = 0.$$

Обозначим

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (y_l)_{x_i} \cdot (y_k)_{x_j}, \tag{6}$$

Здесь $(y_l)_{x_i}$, $(y_k)_{x_j}$ постоянные в силу того, что матрица A постоянная. Эти коэффициенты пока не известны. Пусть $J = \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ — матрица, состоящая из частных производных $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$.

В итоге получим уравнение в каноническом виде (5)

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{kl} u_{y_l y_k} + \tilde{F}(y, u, \nabla u) = 0,$$

где $\tilde{a}_{kl}$ — элементы матрицы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Как найти такую замену $y = \varphi(x)$, чтобы получить в старшей части диагональную матрицу $\tilde{A}$?

Рассмотрим квадратичную форму вида (1) с той же матрицей A, что и у старшей части уравнения (4). Приведем ее к (нормальному) каноническому виду (2) с помощью метода Лагранжа и найдем линейную замену $\xi = T\eta$ с матрицей перехода T, где ξ и η старые и новые переменные квадратичной формы соответственно.

Посмотрим внимательно на выражение для вычисления коэффициентов квадратичной формы (3) и увидим, что это почти то же самое, что и формула для коэффициентов уравнения (6) с матрицей $\tilde{A}$ в старшей части. *Этот факт лежит в основе метода приведения к каноническому виду и дает нам возможность связать уравнение и квадратичную форму с матрицей старшей части.*

Действительно,

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_{il} t_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (y_l)_{x_i} \cdot (y_k)_{x_j}$$

Здесь t_{il}, t_{jk} — элементы известной нам матрицы T. *(Элементы матрицы частных производных J по-прежнему не известны, сейчас мы их найдем с помощью матрицы T!)*. Получается, $(y_l)_{x_i} = t_{il}$, $(y_k)_{x_j} = t_{jk}$. При этом в левой части суммирование идет по столбцам матрицы A и строкам матрицы T для j и по столбцам матрицы T и строкам матрицы A для i. В правой же части наоборот, суммирование идет по столбцам матрицы A и столбцам матрицы частных производных J для j и по строкам матрицы A и строкам матрицы частных производных J для i. Значит, $J = \left(\dfrac{\partial y_k}{\partial x_j}\right) = T^T$. Поскольку замена $y = \varphi(x)$ линейная, то $y = T^T x$.

Итак, зная замену $y = T^T x$, пересчитаем производные по формулам, приведенным выше, и подставим их в уравнение. Коэффициенты старшей части нового уравнения — это элементы диагональной матрицы $\tilde{A}$ и равны $\tilde{a}_{kl}$.

4. *Алгоритм приведения УЧП к каноническому виду*

Чтобы привести уравнение (4) к каноническому виду (5), нужно:

1) записать квадратичную форму с какими-нибудь произвольными переменными ξ *(они нам понадобятся только в процессе приведения квадратичной формы к каноническому виду)* и той матрицей A, которая содержится в старшей части уравнения (4);

2) методом выделения полных квадратов привести квадратичную форму $(A\xi, \xi)$ к виду

$$(\tilde{A}\eta, \eta) = \sum_{i=1}^{n_+} \eta_i^2 - \sum_{j=n_++1}^{n_++n_-} \eta_j^2.$$

3) найти линейную замену $\xi = T\eta$ *(на этом этапе мы закончили работать с квадратичной формой, теперь мы знаем матрицу старшей части уравнения $\tilde{A}$ и матрицу замены T)*;

4) найти линейную замену для переменных уравнения $y = T^T x$;

5) выразить первые производные u_{x_i} через производные u_{y_j}, если они были в исходном уравнении (4);

6) записать полученное уравнение (5) с коэффициентами $\tilde{a}_{kl}$ в старшей части (не равны нулю только коэффциенты при повторных производных) и подставить в младшую часть выражение для первых производных u_{x_i} через производные u_{y_j}.

Готово! Мы привели уравнение (4) *к каноническому виду* (5)*, ура!*

5. *Примеры из задачника В. С. Владимирова*

№2.1 (4) Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0.$$

Решение. 1) Запишем квадратичную форму с теми же коэффициентами, что и в старшей части уравнения:

$$(A\xi, \xi) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2.$$

2) Приведем эту квадратичную форму к каноническому виду:

$$\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 = \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_2 - \xi_3) + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 =$$
$$= \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_2 - \xi_3) + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3 + 2\xi_2\xi_3 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_2 + \xi_3)^2$$

В итоге получим квадратичную форму

$$(\tilde{A}\eta, \eta) = \eta_1^2 + \eta_2^2,$$

где $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3$, $\eta_2 = \xi_2 + \xi_3$. Здесь отсутствует третья переменная η_3, а матрица $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, уравнение является параболическим. В качестве η_3 можем положить, например, $\eta_3 = \xi_3$.

3) Выразим старые переменные через новые $\xi = T\eta$, чтобы найти матрицу T:

$$\xi_3 = \eta_3 \Rightarrow \xi_2 = \eta_2 - \xi_3 = \eta_2 - \eta_3$$

$$\xi_1 = \eta_1 - \xi_2 + \xi_3 = \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 + \eta_3 = \eta_1 - \eta_2 + 2\eta_3.$$

Запишем замену в векторно-матричной форме:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = T\eta$$

4) Вернемся к уравнению. Линейная замена для переменных уравнения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

т.е. $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y - x$, $\tilde{z} = 2x - y + z$.

5) В исходном уравнении младшей части не было, поэтому переходим к следующему шагу.

6) Запишем уравнение, в старшей части которого те же коэффициенты, что и в каноническом виде квадратичной формы, т.е. матрица коэффициентов равна $\tilde{A}$:

$$u_{\tilde{x}\tilde{x}} + u_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0.$$

Это и есть канонический вид уравнения.

№ 2.1 (8) Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0.$$

Решение. 1) Запишем квадратичную форму с теми же коэффициентами, что и в старшей части уравнения:

$$(A\xi, \xi) = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_3\xi_4.$$

2) Преобразуем квадртичную форму:

$$\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_3\xi_4 = \xi_1(\xi_2 + \xi_3 + \xi_4) + \xi_3\xi_4$$

Введем замену

$$\eta_1 - \eta_2 = \xi_1, \quad \eta_1 + \eta_2 = \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, \quad \eta_3 - \eta_4 = \xi_3, \quad \eta_3 + \eta_4 = \xi_4.$$

В итоге получим квадратичную форму

$$(\tilde{A}\eta, \eta) = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_4^2,$$

Матрица $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Выразим ξ_2 через новые переменные

$$\xi_2 = \eta_1 + \eta_2 - \xi_3 - \xi_4 = \eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3.$$

Запишем замену в векторно-матричной форме:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = T\eta$$

4) Вернемся к уравнению. Линейная замена для переменных уравнения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

т.е. $\tilde{x} = x + y$, $\tilde{y} = y - x$, $\tilde{z} = -2y + z + t$, $\tilde{t} = -t - z$.

5) В исходном уравнении младшей части не было, поэтому переходим к следующему шагу.

6) Запишем уравнение, в старшей части которого те же коэффициенты, что и в каноническом виде квадратичной формы, т.е. матрица коэффициентов равна $\tilde{A}$:

$$u_{\tilde{x}\tilde{x}} - u_{\tilde{y}\tilde{y}} + u_{\tilde{z}\tilde{z}} - u_{\tilde{t}\tilde{t}} = 0.$$

Это и есть канонический вид уравнения.

№2.1 (2) Привести к каноническому виду уравнение

$$4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0.$$

Решение. 1) Запишем квадратичную форму с теми же коэффициентами, что и в старшей части уравнения:

$$(A\xi, \xi) = 4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3.$$

2) Приведем эту квадратичную форму к каноническому виду:

$$4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 = 4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 \pm \xi_2^2 \pm \xi_3^2 =$$
$$= (4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 + \xi_2^2) - (\xi_2^2 + 2\xi_2\xi_3 + \xi_3^2) + \xi_3^2 = (2\xi_1 - \xi_2)^2 - (\xi_2 + \xi_3)^2 + \xi_3^2$$

В итоге получим квадратичную форму

$$(\tilde{A}\eta, \eta) = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2,$$

где $\eta_1 = 2\xi_1 - \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2 + \xi_3$, $\eta_3 = \xi_3$. Матрица $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, уравнение является гиперболическим.

3) Выразим старые переменные через новые $\xi = T\eta$, чтобы найти матрицу T:

$$\xi_3 = \eta_3 \Rightarrow \xi_2 = \eta_2 - \xi_3 = \eta_2 - \eta_3$$
$$\xi_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \xi_2) = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2 - \eta_3).$$

Запишем замену в векторно-матричной форме:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = T\eta$$

4) Вернемся к уравнению. Линейная замена для переменных уравнения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

т.е. $\tilde{x} = -\dfrac{x}{2}$, $\tilde{y} = -\dfrac{x}{2} + y$, $\tilde{z} = -\dfrac{x}{2} - y + z$.

5) Вычислим младшие производные:

$$u_y = u_{\tilde{y}} - u_{\tilde{z}} \quad u_z = u_{\tilde{z}}.$$

6) Запишем уравнение, в старшей части которого те же коэффициенты, что и в каноническом виде квадратичной формы, т.е. матрица коэффициентов равна $\tilde{A}$:

$$u_{\tilde{x}\tilde{x}} - u_{\tilde{y}\tilde{y}} + u_{\tilde{z}\tilde{z}} + u_{\tilde{y}} = 0.$$