Задачи

1. Определить амплитуду рассеяния и борновское сечение в потенциале $U(r) = -\dfrac{Ze^2}{r}\exp(-\lambda r)$.

2. Определить амплитуду рассеяния и борновское сечение в потенциале $U(r) = U_0\theta(R-r)$.

3. Определить амплитуду рассеяния и борновское сечение в потенциале $U(r) = U_0\exp(-\lambda r)$.

4. Плотность распределения заряда в ядре имеет вид $\rho(r) = \dfrac{3Z|e|}{4\pi R^3}\theta(R-r)$. Определить борновское сечение рассеяния нерелятивистских электронов на этом ядре и сравнить с формулой Резерфорда.

5. N одинаковых точечных ядер расположены на оси z на расстоянии a друг от друга. Определить борновское сечение рассеяния пучка нерелятивистских заряженных частиц, движущихся вдоль оси z.

6. Определить наименьший угол рассеяния, при котором зануляется дифференциальное борновское сечение рассеяния на потенциале $U(r) = U_0\exp(-r^2/R^2)\,\mathrm{ch}(az/R^2)$.
   Указание. Свести к задаче рассеяния на системе одинаковых частиц.

7. Определить сечение рассеяния медленных частиц в потенциале $U(r) = -U_0\theta(R-r)$.

8. Определить сечение рассеяния медленных частиц в потенциале $U(r) = -G\delta(r-R)$.

9. Вычислить парциальное сечение $\sigma_{l=0}$ для рассеяния в потенциале $U(r) = G\delta(R-r)$ частиц с энергией $E \sim \hbar^2/(mR^2)$. Считать, что $mGR/\hbar^2 \gg 1$.

10. Вычислить фазы рассеяния для потенциала $U(r) = \alpha/r^2$. Конечно ли полное сечение?

11. Вычислить полное сечение рассеяния быстрых частиц в потенциале $U(r) = U_0\theta(R-r)$.

12. Вычислить полное сечение рассеяния быстрых частиц в потенциале $U(r) = U_0\theta(R-r)\sqrt{1-(r/R)^2}$.

13. Спиновая часть волновой функции нерелятивистского электрона имеет вид $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Найти вектор среднего спина $\boldsymbol{s}$ и поляризационную матрицу плотности. Найти вероятность того, что проекция спина на направление $\boldsymbol{s}$ равна $-1/2$.

14. В борновском приближении найти угол поворота среднего спина электрона при рассеянии в потенциале $U(r) = U_0 e^{-r^2/a^2}(1+\alpha\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s})$.

. . . .

15. Получить спектр уравнения Клейна-Фока-Гордона в постоянном и однородном магнитном поле.

16. Получить спектр уравнения Клейна-Фока-Гордона в кулоновском поле.

17. Определить коэффициенты прохождения и отражения для рассеяния скалярной частицы на «ступеньке»: $U(z) = U_0\theta(z)$.

18. Первая релятивистская поправка к гамильтониану бесспиновой частицы в кулоновском поле имеет вид $-\dfrac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3}$ $(\hbar = c = 1)$. Найти поправку к энергии основного состояния.

19. Первая релятивистская поправка к гамильтониану бесспиновой частицы в кулоновском поле имеет вид $-\dfrac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3}$ ($\hbar = c = 1$). Найти поправку к энергии состояния $2s$.
Указание. Радиальная функция состояния $2s$ имеет вид $R_{2s}(r) = A\,(1 + Br)\exp\left(-r/2a_B\right)$. Константу B найти из условия ортогональности волновой функции основного состояния.

20. Первая релятивистская поправка к гамильтониану бесспиновой частицы в кулоновском поле имеет вид $-\dfrac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3}$ ($\hbar = c = 1$). Найти поправку к энергии состояния $2p$.
Указание. Радиальная функция состояния $2p$ имеет вид $R_{2p}(r) = Ar\exp\left(-r/2a_B\right)$.

21. Первая релятивистская поправка к гамильтониану частицы со спином $1/2$ в кулоновском поле $-Z\alpha/r$ имеет вид ($\hbar = c = 1$)
$$-\frac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2m^2}\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{Z\alpha}{4m^2r^3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}\,.$$
Найти поправку к энергии основного состояния.

22. Первая релятивистская поправка к гамильтониану частицы со спином $1/2$ в кулоновском поле $-Z\alpha/r$ имеет вид ($\hbar = c = 1$)
$$-\frac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2m^2}\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{Z\alpha}{4m^2r^3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}\,.$$
Найти поправку к энергии состояния $2s_{1/2}$.
Указание. Радиальная функция состояния $2s$ имеет вид $R_{2s}(r) = A\,(1 + Br)\exp\left(-r/2a_B\right)$. Константу B найти из условия ортогональности волновой функции основного состояния.

23. Первая релятивистская поправка к гамильтониану частицы со спином $1/2$ в кулоновском поле $-Z\alpha/r$ имеет вид ($\hbar = c = 1$)
$$-\frac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2m^2}\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{Z\alpha}{4m^2r^3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}\,.$$
Найти поправку к энергии состояния $2p_{1/2}$.
Указание. Радиальная функция состояния $2p$ имеет вид $R_{2p}(r) = Ar\exp\left(-r/2a_B\right)$.

24. Первая релятивистская поправка к гамильтониану частицы со спином $1/2$ в кулоновском поле $-Z\alpha/r$ имеет вид ($\hbar = c = 1$)
$$-\frac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2m^2}\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{Z\alpha}{4m^2r^3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}\,.$$
Найти поправку к энергии состояния $2p_{3/2}$.
Указание. Радиальная функция состояния $2p$ имеет вид $R_{2p}(r) = Ar\exp\left(-r/2a_B\right)$.

25. Свободный электрон находится в состоянии с волновой функцией ($m = \hbar = c = 1$)
$$\psi(t=0,\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \left(1+\sqrt{2}\right)\dfrac{\sin r}{r}\varphi \\ \dfrac{i}{r}\left(\dfrac{\sin r}{r} - \cos r\right)(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n})\,\varphi \end{pmatrix}.$$
Имеет ли это состояние определённые значения энергии и полного момента, и если да, то какие?

26. Определить коэффициенты прохождения и отражения для рассеяния частицы со спином $1/2$ на «ступеньке»: $U(z) = U_0\theta(z)$.

27. Для $S(\Lambda) = \exp\left[\frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\right] \approx I + \frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$ и $\Lambda = \exp[\omega] \approx I + \omega$ проверить соотношение

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

с точностью до линейных по ω членов. $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$.

28. Привести гамильтониан

$$H = \frac{[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}/c)]^2}{2m} + U(\boldsymbol{r})$$

к виду гамильтониана уравнения Паули. Чему равно гиромагнитное отношение для дираковской частицы?

29. Вычислить тонкое расщепление уровня с $n = 2$ в атоме водорода за счёт спин-орбитального взаимодействия $\dfrac{e^2\hbar^2}{2m^2c^2r^3}(\boldsymbol{ls})$.

30. Вычислить отношение матричных элементов $\bar{u}_{\boldsymbol{p}_2,\lambda_2}\gamma^0 u_{\boldsymbol{p}_1,\lambda_1}$ при $\lambda_2 = \lambda_1$ и $\lambda_2 = -\lambda_1$.

. . . .

31. Нейтрон находится в постоянном магнитном поле $H = 1\,\text{Тл} = 1\,\text{В·сек/м}^2 = 10^4\,\text{Гс}$, направленном вдоль оси z. Вычислить вероятность радиационного перехода между состояниями с $s_z = \pm 1/2$.
Примечание. Магнитный момент нейтрона равен $-1{,}913\frac{e\hbar}{2m_pc}$.

32. Определить мультипольность и оценить вероятность радиационного перехода $2p_{3/2} \to 2p_{1/2}$.

33. Определить мультипольность и оценить вероятность радиационного перехода $3d_{3/2} \to 2p_{1/2}$.

34. Вычислить вероятность радиационного перехода между компонентами сверхтонкой структуры состояния $1s_{1/2}$ атома водорода.
Примечание. Частота, соответствующая разности энергий триплета ($F = 1$) и синглета ($F = 0$), равна $\frac{E_{F=1}-E_{F=0}}{2\pi\hbar} \approx 1420\,\text{МГц}$.

35. Вычислить отношение интенсивностей излучения для переходов $3p \to 1s$ и $2p \to 1s$.
Указание. Радиальные волновые функции имеют вид $R_{2p}(r) = Ar\exp(-r/2a_B)$ и $R_{3p}(r) = B(r + Cr^2)\exp(-r/3a_B)$. Коэффициенты A, B, C найти из условий нормировки и ортогональности.

36. Вычислить отношение вероятностей излучения для переходов $2p_{3/2} \to 2s_{1/2}$ и $2p_{1/2} \to 1s_{1/2}$.
Указание. Радиальная функция состояния $2p$ имеет вид вид $R_{2p}(r) = Ar\exp(-r/2a_B)$, а состояния $2s$ — $R_{2s}(r) = B(1 + Cr)\exp(-r/2a_B)$. Константу C найти из условия ортогональности волновой функции основного состояния. Тонкое расщепление описывается формулой $\Delta E = -\frac{m\alpha^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)$.

37. С учётом величины лэмбовского сдвига $\dfrac{E_{2s_{1/2}} - E_{2p_{1/2}}}{2\pi\hbar} \approx 1058\,\text{МГц}$ вычислить отношение вероятностей излучения для переходов $2s_{1/2} \to 2p_{1/2}$ и $2p_{1/2} \to 1s_{1/2}$.
Указание. Радиальная функция состояния $2p$ имеет вид вид $R_{2p}(r) = Ar\exp(-r/2a_B)$, а состояния $2s$ — $R_{2s}(r) = B(1 + Cr)\exp(-r/2a_B)$. Константу C найти из условия ортогональности волновой функции основного состояния.

38. Частица с массой $m = 10^9\,$эВ/с^2 находится в поле сферического осциллятора $U(r) = m\omega^2 r^2/2$ с частотой $\omega = 10^6\,$эВ$/\hbar$. Определить среднее время жизни первого возбужденного состояния.
Указание. Использовать для вычислений выражение оператора координаты через операторы рождения и уничтожения: $r^i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_i + a_i^\dagger\right)$.

39. Вычислить сечение ионизации атома водорода в состоянии $2s_{1/2}$ излучением с длиной волны $\lambda = 10\,$нм.
Указание. Радиальная функция состояния $2s$ имеет вид вид $R_{2s}(r) = A\left(1 - r/2a_B\right)\exp\left(-r/2a_B\right)$.

40. Вычислить сечение радиационного захвата электрона в состояние $2p_{1/2}$ для энергий начального электрона больших по сравнению с ридбергом.
Указание. Радиальная функция состояния $2p$ имеет вид вид $R_{2p}(r) = Ar\exp\left(-r/2a_B\right)$.

41. Оценить при какой спектральной интенсивности лазера (в точке резонансной частоты) вероятность однофотонного перехода $3p \to 2p$ в атоме водорода увеличится вдвое.

42. Используя правило Ферми оценить вероятность двухфотонного перехода $2s_{1/2} \to 1s_{1/2}$.
Указание. Матричный элемент оценить по вкладу оператора $\mathbb{V}^{(2)} = \frac{e^2\boldsymbol{A}^2}{2mc^2}$.