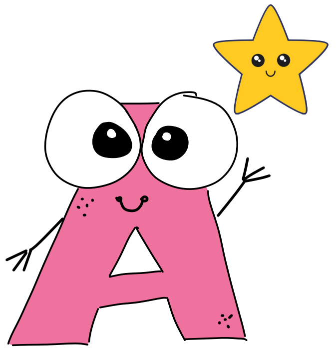
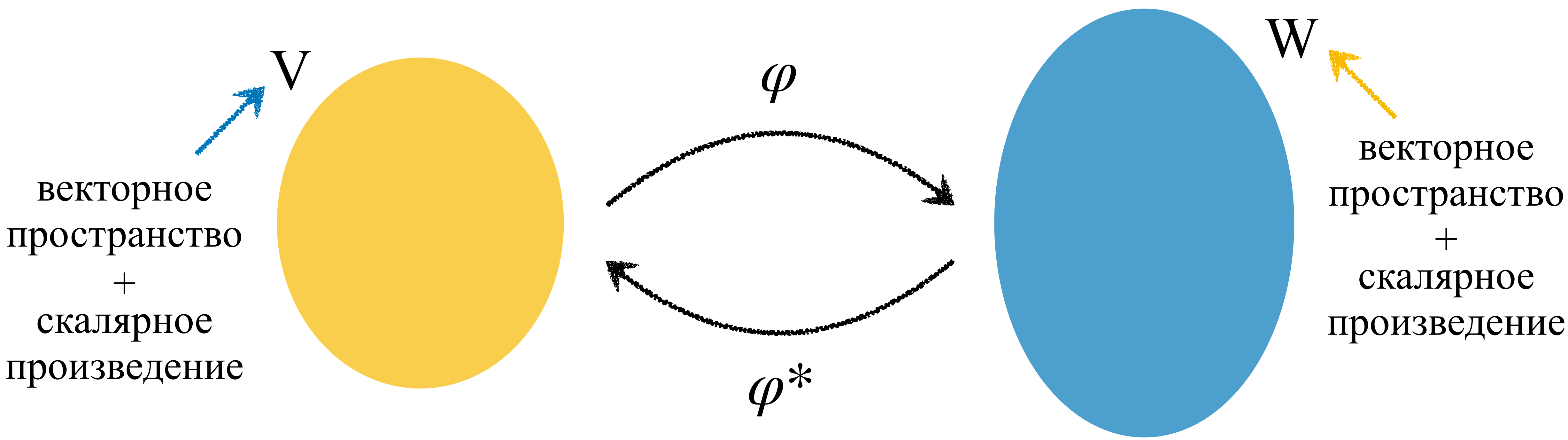
Сопряжённый оператор



Определение



φ^* – сопряжённое отображение

$$(\varphi(x), y)_W = (x, \varphi^*(y))_V \text{ для всех } x \in V \text{ и } y \in W$$

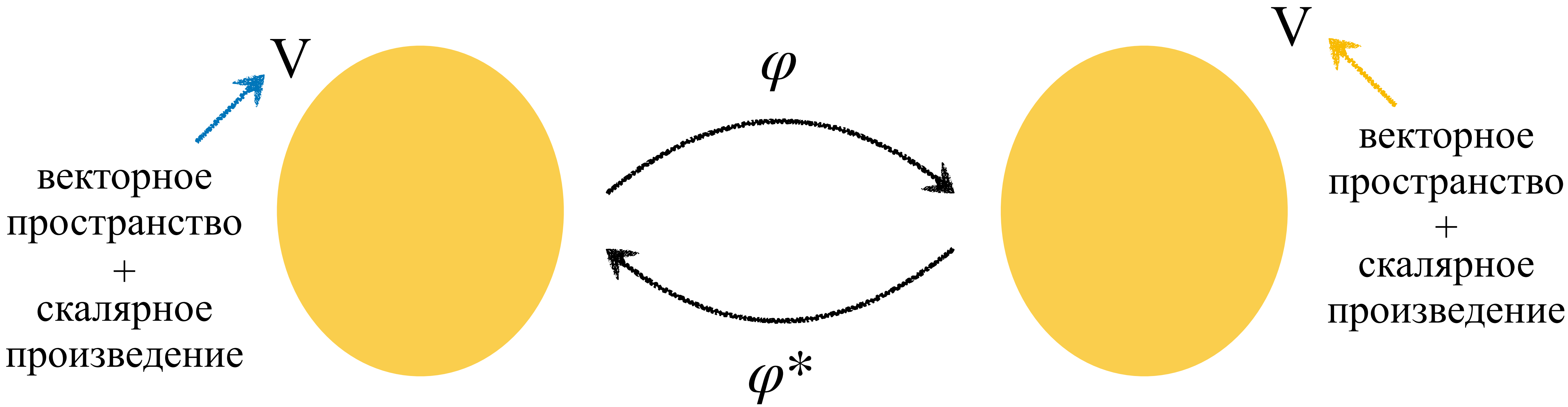
Теорема

φ^* – сопряжённое отображение

1) существует

2) единственное

Определение



φ^* – сопряжённый оператор

$$\Updownarrow$$

$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$ для всех $x, y \in V$

Чуть-чуть свойств

$$(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$$

$((\varphi+\psi)x, y) = (\varphi(x)+\psi(x), y) = (\varphi(x), y) + (\psi(x), y) =$

$= (x, \varphi^*(y)) + (x, \psi^*(y)) =$

$= (x, \varphi^*(y)+\psi^*(y)) =$

$= \underline{(x, (\varphi^*+\psi^*)y)}$

$\| $

$\underline{(x, (\varphi+\psi)^* y)}$

$\Rightarrow (\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$

$$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$$

$(x, (\varphi\psi)^*(y)) = ((\varphi\psi)(x), y) = (\varphi(\psi(x)), y) = (\psi(x), \varphi^*(y)) =$

$= (x, \psi^*(\varphi^*(y))) \Rightarrow (\varphi\psi)^*(y) = \psi^*(\varphi^*(y)) \Rightarrow$

$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$

$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$

Задача 1

Найдите φ^*, если оператор φ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ действует по правилу $\varphi(x) = (x_2, x_3, x_4, x_1)^T$ в некотором ОНБ.

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$$

$$\parallel$$

$$x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 + x_1 y_4 = x_1 y_4 + x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 =$$

$$= (x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4) \begin{pmatrix} y_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x, \tilde{y})$$

$$\Rightarrow \varphi^*(y) = (y_4, y_1, y_2, y_3)^T$$

Задача 2

$\varphi(e^t) = e^{\sqrt{t}}$

Найдите оператор, сопряжённый оператору φ, действующему по правилу $(\varphi(f))(t) = f(\sqrt{t})$ на евклидовом пространстве $C[0,1]$, где

$$(f(t), g(t)) = \int_0^1 f(t)g(t)dt\,.$$

$$(\varphi(f), g) = (f, \varphi^*(g))$$

$$\| $$

$$(f(\sqrt{t}), g(t)) = \int_0^1 f(\sqrt{t})\, g(t)\, dt = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{t} = s \\ t = s^2 \\ t = 0,\ s = 0 \\ t = 1,\ s = 1 \\ dt = 2s\,ds \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^1 f(s)\, g(s^2)\, 2s\,ds = \int_0^1 f(t) \left(g(t^2) 2t\right) dt = \left(f(t), 2t g(t^2)\right)$$

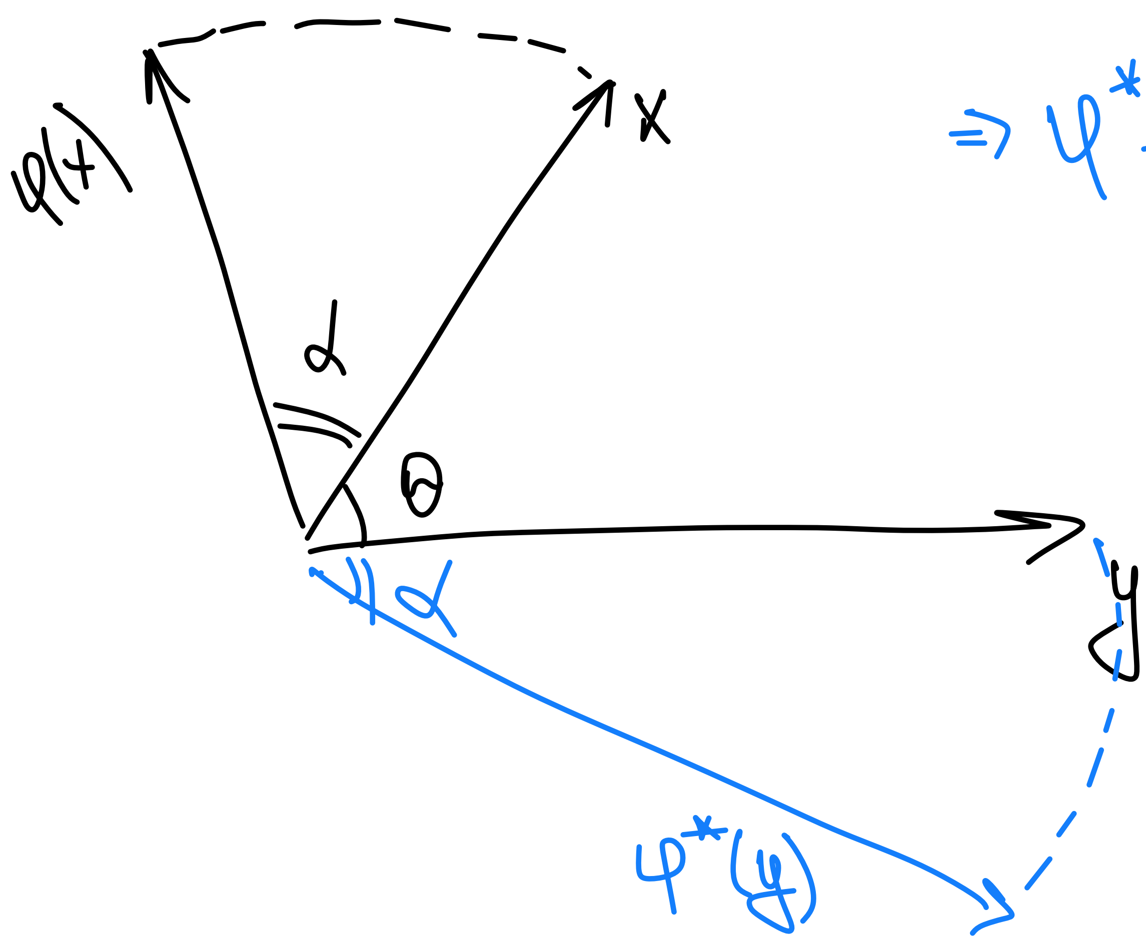
$$\Rightarrow \quad \varphi^*(g) \overset{?}{=} 2t \cdot g(t)$$

Задача 3

Каков геометрический смысл оператора, сопряженного к оператору поворота евклидовой плоскости на угол α против часовой стрелки?

$$\underline{(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))}$$

$$|\varphi(x)||y|\cos(\alpha+\theta) = |x||y|\cos(\alpha+\theta)$$



$\Rightarrow \varphi^*$ – поворот на угол α по часовой стрелке

К этой задаче

Вывод

Как можно найти φ^*?

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$$
$$\shortparallel$$
$$\ldots\ldots$$
$$\shortparallel$$
$$(x, \ldots\ldots(y)) \Rightarrow \varphi^* = \ldots$$

Линейность

$$\varphi^*(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi^*(x) + \beta\varphi^*(y)$$

$(\underline{z}, \varphi^*(\alpha x+\beta y)) = (\varphi(z), \alpha x+\beta y) =$

$= \alpha(\varphi(z), x) + \beta(\varphi(z), y) = \alpha(z, \varphi^*(x)) + \beta(z, \varphi^*(y)) =$

$= (\underline{z}, \alpha\varphi^*(x) + \beta\varphi^*(y))$

Т.к. z – любое, то $\varphi^*(\alpha x+\beta y) = \alpha\varphi^*(x) + \beta\varphi^*(y)$

<u>Утв</u> $(z, x) = (z, y)\ \forall z \Rightarrow x = y$

□ $(z, x-y) = 0$ $\quad (x-y, x-y) = 0 \Rightarrow x-y=0$

Пусть $z = x-y$, тогда $\quad x = y$ ■

Матрица A^* $= [\varphi^*]$

над $\mathbb{R}$

над $\mathbb{C}$

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

$$(Ax)^+ G y = x^+ G (A^* y)$$

$$x^+ A^+ G y = x^+ G A^* y$$

$$\Rightarrow A^+ G = G A^*$$

$$A^* = G^{-1} A^+ G$$

$(x, y) = x^T G y$ над $\mathbb{R}$

$(x, y) = x^+ G y$ над $\mathbb{C}$

Матрица A^* в ОНБ

$G = E$

над $\mathbb{R}$: $A^* = A^T$

над $\mathbb{C}$: $A^* = A^+$

$A^* = G^{-1} A^T G$

Задача 4

Скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задано билинейный формой

$$f(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 \; {= x^T G y}.$$

Найдите матрицу сопряжённого оператора A*, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Проверка!

$$\Rightarrow A^* = G^{-1} A^T G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$A^* = G^{-1} A^T G$$

Задача 4

Скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задано билинейный формой

$$= x^T G y$$

$$f(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2\,.$$

Найдите матрицу сопряжённого оператора A*, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow A^* = G^{-1} A^T G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Упр. Посмотреть формулировку в лекциях.

Альтернатива Фредгольма

$$\boxed{Im(\varphi)^{\perp} = Ker(\varphi^*)}$$

$y \in \mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow \exists x \;\; \varphi(x) = y$

$z \in \ker \varphi^* \Rightarrow \varphi^*(z) = 0$

$(y, z) = (\varphi(x), z) = (x, \varphi^*(z)) = (x, 0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \perp z$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = (\ker \varphi^*)^{\perp}$

Задача 5

Найдите при какой правой части система линейных уравнений $Ax = b$ является совместной, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если $Ax=b$ совместна, то $b \in \operatorname{Im} A = (\ker A^*)^{\perp}$

1) $A^* = A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\ker A^* = ?$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \ker A^* = \langle (-1,-1,1)^T \rangle$

Задача 5

Найдите при какой правой части система линейных уравнений $Ax = b$ является совместной, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) $\ker A^* = ?$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \ker A^* = \langle \underline{(-1,-1,1)^T} \rangle$$

$\cdot\, v = 0$

3) $(\ker A^*)^\perp = ?$ $\quad -v_1 - v_2 + v_3 = 0$

$$v_1 = -v_2 + v_3$$

$$\operatorname{Im} A = \langle (-1,1,0)^T, (1,0,1)^T \rangle \ni b$$