

И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова

# СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Под редакцией  
д-ра техн. наук., профессора В.С. Зарубина  
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

*Рекомендовано Министерством общего  
и профессионального образования  
Российской Федерации  
в качестве учебника для студентов  
высших технических учебных заведений*

Москва  
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана  
1999

УДК 517.1  
ББК 22.171  
В67

*Рецензенты:* проф. В.Н. Новосельцев, проф. И.Б. Погожев

**В67      Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.** Случайные процессы: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVIII).

ISBN 5-7038-1267-4 (Вып. XVIII)  
ISBN 5-7038-1270-4

Книга является восемнадцатым выпуском учебного комплекса „Математика в техническом университете“, состоящего из двадцати выпусков, и знакомит читателя с основными понятиями теории случайных процессов и некоторыми из ее многочисленных приложений. По замыслу авторов, данный учебник должен явиться связующим звеном между строгими математическими исследованиями, с одной стороны, и практическими задачами — с другой. Он должен помочь читателю овладеть прикладными методами теории случайных процессов.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям и аспирантам.

Ил. 34. Библиогр. 30 назв.

*Выпуск книги финансировал  
Московский государственный технический  
университет им. Н.Э. Баумана*

УДК 517.1  
ББК 22.171

- © И.К. Волков, С.М. Зуев,  
Г.М. Цветкова, 1999
- © Московский государственный  
технический университет  
им. Н.Э. Баумана, 1999
- © Издательство МГТУ  
им. Н.Э. Баумана, 1999

ISBN 5-7038-1267-4 (Вып. XVIII)  
ISBN 5-7038-1270-4

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория случайных процессов — интенсивно развивающийся раздел теории вероятностей, имеющий многочисленные приложения в физике, технике, биологии, медицине, экономике и других областях знаний. Для овладения методами этой теории нужны знания не только в объеме базового курса высшей математики и традиционных разделов курсов теории вероятностей и математической статистики, но и ряда специальных курсов. В частности, мы предполагаем, что читатель может оперировать основными понятиями теории дифференциальных уравнений математической физики, а также владеет методами теории интегральных преобразований.

Ориентируясь на студентов технических вузов, инженеров и научных сотрудников прикладных специальностей, мы старались вести изложение на доступном уровне, отступая иногда от строгого математического стиля. В основном, этот подход использован при анализе различных задач прикладного характера, если содержательный смысл их решений интуитивно ясен.

Естественно, что в одной книге невозможно охватить все основные разделы теории случайных процессов и, тем более, все ее приложения. По замыслу авторов, данный учебник должен помочь читателю овладеть прикладными методами теории случайных процессов и явиться связующим звеном между строгими математическими исследованиями, с одной стороны, и практическими задачами — с другой.

Надеемся, что книга будет полезна студентам, аспирантам, научным сотрудникам и не только технических специальностей.

В начале книги (после предисловия и введения) помещен список основных обозначений, содержащих расшифровку часто встречающихся в тексте символов. В большинстве математи-

ческих символов использованы буквы латинского и греческого алфавитов, написание и произношение которых представлены после списка основных обозначений.

В конце книги приведен список рекомендуемой литературы и предметный указатель, в который входят в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все выделенные в тексте **полужирным курсивом** термины. Для каждого термина указан номер страницы книги, на которой он определен и выделен полужирным курсивом, или номер выпуска, в котором дано его объяснение. Выделение термина **светлым курсивом** означает, что в данном параграфе он является одним из ключевых слов и читателю должно быть знакомо значение этого термина. Читатель может уточнить это значение, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу. Ссылки на другие источники даны либо путем указания номера выпуска, либо путем упоминания фамилий авторов, по которым можно определить полные данные этих источников, обратившись к списку рекомендуемой литературы.

Ссылки в тексте на номера формул и рисунков набраны обычным шрифтом (например, (10.4) — четвертая формула в десятой главе, (П2.9) — девятая формула во втором приложении, (рис. 9.2) — второй рисунок в девятой главе).

Прежде чем приступить к изучению теории случайных процессов, мы предлагаем читателю ответить на вопросы для самопроверки и убедиться в том, что он готов к усвоению излагаемого материала. В конце каждого вопроса римскими цифрами обозначен содержащий соответствующий материал номер выпуска комплекса учебников „Математика в техническом университете“.

## Задания для самопроверки

1. Что понимают под **множеством**? Какие множества называют: а) **конечными**; б) **счетными**; в) **несчетными**? Что называют **диаметром множества** в метрическом простран-

стве? Что называют: а) **объединением множеств**; б) **пересечением множеств**; в) **разностью множеств**; г) **дополнением множества**? [I]

2. Дайте определение **отображения (функции)**. Что называют: а) **образом множества  $X$  при отображении  $f$** ; б) **прообразом множества при отображении  $f$** ? [I]

3. Какие функции называют: а) **четными**; б) **нечетными**; в) **периодическими**; г) **тригонометрическими**? Запишите **формулы Эйлера** и докажите основные свойства тригонометрических функций. [I], [IX]

4. Что называют: а) **скалярной функцией векторного аргумента**; б) **вектор-функцией**; в) **векторной функцией векторного аргумента**; г) **координатной функцией**; д) **бесконечно малой функцией**? Как сравнивают бесконечно малые функции? [I], [II], [V]

5. Дайте определение **предела**: а) **последовательности**; б) **функции**. Сформулируйте признаки существования предела. Перечислите свойства функций, имеющих конечный предел. [I], [V]

6. Какую функцию называют **непрерывной**: а) **в точке**; б) **на множестве**? Перечислите основные свойства функций, непрерывных: а) в точке; б) на множестве. [I], [V]

7. Дайте определение **дифференцируемой функции**: а) **в точке**; б) **в области**. Что называют **частной производной** от скалярной функции векторного аргумента? Приведите формулировку теоремы о равенстве **смешанных производных**. [II], [V]

8. Для скалярной функции векторного аргумента запишите **формулу Тейлора** и сформулируйте условия ее применимости. [V]

9. Дайте определение **локального экстремума (максимума и минимума) скалярной функции векторного аргумента**. Сформулируйте необходимые и достаточные условия его существования. [V]

10. Дайте определение **касательной плоскости** к **поверхности** в заданной точке. При каких условиях касательная плоскость существует? [V]

11. Что называют **определенным интегралом** и какой геометрический смысл он имеет? Запишите **формулу интегрирования по частям**. Дайте определение  **$n$ -кратного интеграла**. [VI], [VII]

12. Что называют **матрицей** и что понимают под **размером матрицы**? Какую матрицу называют: а) **квадратной**; б) **единичной**; в) **нулевой** или **нуль-матрицей**; г) **симметрической**; д) **диагональной**; е) **трехдиагональной**; ж) **невырожденной**; з) **блочной**; и) **положительно определенной**; к) **неотрицательно определенной**; л) **ортогональной**? [III], [IV]

13. Сформулируйте основные свойства следующих операций над матрицами: а) **сложение матриц**; б) **умножение матрицы на число**; в) **умножение матриц**; г) **транспонирование матрицы**. Дайте определение **обратной матрицы** и укажите ее основные свойства. Какие матрицы называют **коммутирующими (перестановочными)**? [III]

14. Что понимают под **следом  $\text{Sp } A$  матрицы  $A$** ? Докажите следующие равенства, полагая, что все указанные матрицы квадратные одного **порядка**, а матрица  $D$  невырожденная симметрическая и имеет **собственные числа  $\lambda_k$  ( $k = \overline{1, n}$ )**: а)  $\text{Sp}(A + B) = \text{Sp}(A) + \text{Sp}(B)$ ; б)  $\text{Sp}(AC) = \text{Sp}(CA)$ ; в)  $\text{Sp}(D^m) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ; г)  $\text{Sp}(D^{-1}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}$ . [III], [IV]

15. Дайте определение **системы линейных алгебраических уравнений**. Какую систему линейных алгебраических уравнений называют **совместной**? Сформулируйте условия существования и единственности **решения системы линейных алгебраических уравнений**. [III]

16. Дайте определение **линейного пространства**. Что называют: а) **линейной оболочкой системы векторов линейного пространства**; б) **линейно (не)зависимой системой**

векторов линейного пространства; в) базисом линейного пространства; г) размерностью линейного пространства? [IV]

17. Что понимают под скалярным произведением в линейном пространстве и что называют евклидовым пространством? Можно ли утверждать, что любое линейное пространство со скалярным произведением является нормированным пространством? Дайте определение ортонормированного базиса евклидова пространства и запишите формулу для скалярного произведения в этом базисе. [IV]

18. Запишите неравенство Коши — Буняковского. В каких случаях это неравенство обращается в равенство? [IV]

19. Что называют квадратичной формой? В каких случаях квадратичную форму называют: а) положительно определенной; б) отрицательно определенной; в) неположительно определенной; г) неотрицательно определенной? Изложите принципиальную схему приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования. [IV]

20. Дайте определение линейного оператора. Какая связь существует между линейными операторами и матрицами? Дайте определение собственного вектора и собственного значения линейного оператора. Изложите общую схему их нахождения. [IV]

21. Что называют линейным дифференциальным оператором и обыкновенным линейным дифференциальным уравнением? Дайте определение фундаментальной системы решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения. [VIII]

22. Сформулируйте задачу Коши для: а) обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка; б) системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка; в) системы уравнений в частных производных параболического типа. Сформулируйте

те теоремы существования и единственности решения этих задач. [VIII], [XII]

23. Что называют **дифференциальным уравнением в частных производных**: а) **параболического типа**; б) **эллиптического типа**; в) **гиперболического типа**? [XII]

24. Что понимают под **смешанной задачей для уравнения в частных производных параболического типа**? Изложите идею метода Фурье разделения переменных для решения смешанных задач. Сформулируйте **задачу Штурма — Лиувилля**. [XI], [XII]

25. Дайте определение **устойчивости** и **асимптотической устойчивости** решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. [VIII]

26. Что называют: а) **интегральным преобразованием**; б) **оригиналом интегрального преобразования** и его **изображением**; в) **интегральным преобразованием Фурье**; г) **интегральным преобразованием Лапласа**; д) **сверткой оригиналов**? Сформулируйте условия представимости функции **интегралом Фурье**. [XI], [IX]

27. Дайте определение **числового ряда**. Какой **числовой ряд** называют: а) **знакоположительным**; б) **знакопеременным**; в) **знакопеременным**; г) **сходящимся**; д) **сходящимся абсолютно**; е) **сходящимся условно**? [IX]

28. Дайте определение **функционального ряда**. Какой **функциональный ряд** называют: а) **сходящимся**; б) **абсолютно сходящимся**; в) **равномерно сходящимся**? Перечислите основные свойства функциональных рядов, сходящихся: а) **абсолютно**; б) **равномерно**. [IX]

29. Что называют **рядом Фурье** функции  $f(x)$  в  $L^2[a, b]$ ? Сформулируйте **условия Дирихле** поточечной сходимости **тригонометрического ряда Фурье**. Что называют: **ортонормированной тригонометрической системой функций**? [IX]



30. Что понимают под: а) аппроксимацией; б) абсолютной погрешностью аппроксимации; в) относительной погрешностью аппроксимации? [XIII]

31. Запишите: а) формулу полной вероятности; б) формулу Байеса. Дайте определение полной группы событий. [XVI]

32. Какую случайную величину называют случайной величиной, распределенной по: а) нормальному закону; б) закону Пуассона; в) экспоненциальному закону; г) равномерному закону; д) логарифмически нормальному закону; е) закону „хи-квадрат“; ж) закону Стюдента? [XVI], [XVII]

33. Приведите определения начальных и центральных моментов случайной величины. Для моментов первого и второго порядков приведите содержательную интерпретацию. [XVI]

34. Дайте определение сходимости последовательности случайных величин: а) по вероятности; б) почти наверное (или сильно); в) в среднем квадратичном. [XVI]

35. Что понимают под: а) случайными и систематическими ошибками измерений (наблюдений); б) реализацией случайной величины; в) выборочной статистикой? Как определяется: а) выборочное среднее; б) выборочная дисперсия; в) исправленная выборочная дисперсия; г) выборочная ковариация? [XVII]

36. Дайте определение оценки числовой характеристики случайной величины, полученной по данным случайной выборки. Как можно оценить ее качество? [XVII]

37. Что называют статистической гипотезой? Изложите общую схему проверки любой статистической гипотезы. [XVII]

# ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ◀ и ▶ — начало и окончание доказательства
- # — окончание примера, замечания
- $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел I-1.3
- $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел I-4.3
- $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел I-1.3
- $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел I-1.3
- $\mathbb{R}^n$  — (декартово) произведение  $n$  множеств действительных чисел I-2.5
- $M_{nm}(\mathbb{R})$  — множество матриц типа  $n \times m$  с элементами из  $\mathbb{R}$  III
- $M_n(\mathbb{R})$  — множество квадратных матриц порядка  $n$  с элементами из  $\mathbb{R}$  III
- $I_n, E$  — единичная матрица в  $M_n(\mathbb{R})$  III
- $\mathbf{0}$  — нуль-вектор в  $\mathbb{R}^n$  IV
- $\Theta_{nm}, \Theta$  — нулевая матрица в  $M_{nm}(\mathbb{R})$  III
- $a \in A$  — элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$  I-1.1
- $a \notin B$  — элемент  $a$  не принадлежит множеству  $B$  I-1.1
- $\{a_i\}_{i=1}^N$  — множество из элементов  $a_1, a_2, \dots, a_N$  I-1.1
- $A = \{x: \dots\}$  — множество  $A$  состоит из элементов  $x$ , обладающих свойством, указанным после двоеточия I-1.1
- $A \subset B$  — множество  $A$  является подмножеством множества  $B$  ( $A$  включается в  $B$ ) I-1.2
- $A \setminus B$  — разность множеств  $A$  и  $B$  I-1.4
- $\bigcup_{i=1}^N A_i$  — объединение множеств  $A_1, A_2, \dots, A_N$  I-1.4
- $\bigcap_{i=1}^N A_i$  — пересечение множеств  $A_1, A_2, \dots, A_N$  I-1.4
- $\alpha \implies \beta$  — из высказывания  $\alpha$  следует  $\beta$  (если  $\alpha$ , то  $\beta$ ) I-1.5

- $\alpha \iff \beta$  — высказывания  $\alpha$  и  $\beta$  равносильны ( $\alpha$  тогда и только тогда, когда  $\beta$ ) **I-1.5**
- $\vee$  и  $\wedge$  — символы дизъюнкции ( $\alpha \vee \beta$  читается:  $\alpha$  или  $\beta$ ) и конъюнкции ( $\alpha \wedge \beta$  читается:  $\alpha$  и  $\beta$ ) **I-1.5**
- $\neg \alpha$  — отрицание высказывания  $\alpha$  (не  $\alpha$ ) **I-1.5**
- $\forall x$  — для любого  $x$  **I-1.5**
- $\exists x : \dots$  — существует такое  $x$ , что ... **I-1.5**
- $\nexists x : \dots$  — не существует такое  $x$ , что ... **I-1.5**
- $\triangleq$  — равно по определению **1.1**
- $f: X \rightarrow Y$  — отображение  $f$  множества  $X$  в (на) множество  $Y$  **I-2.1**
- $U(x_0, \varepsilon)$  —  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  **I-5.2**
- $\sum_{k=1}^N a_k$  — сумма слагаемых  $a_1, a_2, \dots, a_N$  **I-2.6**
- $\prod_{k=1}^N a_k$  — произведение  $N$  сомножителей  $a_1, a_2, \dots, a_N$  **I-2.6**
- $k = \overline{1, N}$  — число  $k$  принимает последовательно все значения из множества натуральных чисел от 1 до  $N$  включительно **I-2.6**
- $x \rightarrow a$  — переменное  $x$  стремится к  $a$  **I-2.7**
- $(a, b)$  — скалярное произведение элементов  $a$  и  $b$  в евклидовом пространстве **IV**
- $\|a\|$  — евклидова норма элемента  $a$  в евклидовом пространстве **IV**
- $o(h)$  — величина, более высокого порядка малости, чем  $h$  **I-10.1**
- $\arg \max_{x \in B} f(x)$  — значение аргумента функции  $f(x)$ , при котором достигается  $\max_{x \in B} f(x)$ , или решение уравнения  $f(y) = \max_{x \in B} f(x)$  относительно  $y \in B$  **9.6**
- $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция Дирака **XII**
- $J(x)$  — единичная функция (функция Хевисайда) **XI**

- $A^T$  — матрица, транспонированная к матрице  $A$  III  
 $A^{-1}$  — матрица, обратная к матрице  $A$  III  
 $\text{Rg } A$  — ранг матрицы  $A$  III  
 $\det A, |A|$  — определитель матрицы  $A$  III  
 $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  — диагональная матрица с диагональными элементами  $a_1, \dots, a_n$  III  
 $\text{Sp } A$  — след матрицы  $A$  IV  
 $a^*$  — число, комплексно сопряженное к числу  $a$  I-4.3  
 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — вероятностное пространство XVI, П1  
 $\Omega$  — пространство элементарных событий XVI, П1  
 $\omega$  — элементарное событие (исход) XVI, П1  
 $P[\alpha]$  — вероятность события  $\alpha$  XVI, П1  
 $(X, \mathcal{B})$  — измеримое пространство П1  
 $\xi(\omega)$  — случайная величина XVI, П1  
 $F_\xi(x)$  — функция распределения вероятностей случайной величины  $\xi(\omega)$  XVI, П1  
 $f_\xi(x)$  — плотность распределения (вероятностей) случайной величины  $\xi(\omega)$  XVI, П1  
 $M[\xi(\omega)]$  — математическое ожидание случайной величины  $\xi(\omega)$  XVI, П1  
 $D[\xi(\omega)]$  — дисперсия скалярной случайной величины  $\xi(\omega)$  XVI, П1  
 $\text{cov}[\xi(\omega); \eta(\omega)]$  — ковариация скалярных случайных величин  $\xi(\omega)$  и  $\eta(\omega)$  XVI, П1  
 $\rho[\xi(\omega); \eta(\omega)]$  — коэффициент корреляции скалярных случайных величин  $\xi(\omega)$  и  $\eta(\omega)$  XVI, П1  
 $\Sigma_\xi, \text{cov}[\xi(\omega)]$  — ковариационная матрица случайного вектора  $\xi(\omega)$  XVI, П1  
 $F_\varepsilon(x|y) = F_\varepsilon(x|\eta(\omega) = y)$  — условная функция распределения (вероятностей) случайной величины  $\xi(\omega)$  при условии  $\eta(\omega) = y$ , где  $\varepsilon(\omega) \triangleq (\xi^T(\omega) \ \eta^T(\omega))^T$  XVI, П1

$f_{\varepsilon}(x|y) = f_{\varepsilon}(x|\eta(\omega) = y)$  — условная плотность распределения (вероятностей) случайной величины  $\xi(\omega)$  при условии  $\eta(\omega) = y$ , где  $\varepsilon(\omega) \triangleq (\xi^T(\omega) \ \eta^T(\omega))^T$  XVI, П1

$M[\xi(\omega)|y] = M[\xi(\omega)|\eta(\omega) = y]$  — значение условного математического ожидания случайной величины  $\xi(\omega)$  при условии  $\eta(\omega) = y$  XVI, П1

$M[\xi(\omega)|\eta(\omega)]$  — условное математическое ожидание случайной величины  $\xi(\omega)$  при условии  $\eta(\omega)$  XVI, П1

$D[\xi(\omega)|y] = D[\xi(\omega)|\eta(\omega) = y]$  — значение условной дисперсии случайной величины  $\xi(\omega)$  при условии  $\eta(\omega) = y$  XVI, П1

$D[\xi(\omega)|\eta(\omega)]$  — условная дисперсия случайной величины  $\xi(\omega)$  при условии  $\eta(\omega)$  XVI, П1

$\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — случайная функция 1.1

$\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , — случайный процесс 1.1

$\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = \mathbb{N}$ ,  $\{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$  — случайная последовательность 1.1

$F_{\xi}(x|t)$  — одномерная функция распределения случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  1.1

$f_{\xi}(x|t)$  — одномерная функция плотности вероятностей случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  1.1

$F_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}|t_1, \dots, t_N)$  —  $N$ -мерная функция распределения случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  1.1

$f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}|t_1, \dots, t_N)$  —  $N$ -мерная функция плотности вероятностей случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  1.1

$m_{\xi}(t)$  — математическое ожидание случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  1.2

$\Sigma_{\xi}(t)$  — ковариационная матрица случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  1.2

$\sigma_{\xi}^2(t)$  — дисперсия случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  1.2

$K_{\xi}(t_1, t_2)$  — ковариационная функция случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  1.2

$K_{\xi\eta}(t_1, t_2)$  — взаимная ковариационная функция случайных процессов  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$  1.2

$\|\xi(t, \omega)\|_{CK}$  — СК-норма случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  3.1

$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega)$  — предел (в смысле СК-сходимости) случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , при  $t \rightarrow t_0$  ( $t_0 \in T$ ) 3.1

$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{(m)}(t, \omega)$  — предел (в смысле СК-сходимости) последовательности случайных процессов  $\{\xi_{(m)}(t, \omega), t \in T\}_{m=1}^{\infty}$  3.1

$\xi(t, \omega), t \in T_0 \subset T$  — производная случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , в  $T_0 \subset T$  3.3

$\int_T \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt'$  — интеграл от случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , с весовой функцией  $\varphi(t, t')$  по  $T$  3.4

$L_t[\xi(t, \omega)]$  — результат воздействия линейного оператора  $L_t$  на случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  3.5

$s_{\xi}(\nu)$  — спектральная плотность стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$  4.2

$\{S_k\}_{k=1}^n$  — множество возможных состояний марковского процесса с дискретными состояниями 5.1

$s_k^j$  — случайное событие, состоящее в том, что после  $j$  этапов исходная система  $S$  находится в состоянии  $S_k$  5.1

$p_k(j)$  — вероятность того, что после  $j$  этапов исходная система  $S$  находится в состоянии  $S_k$  5.2

$p_{mk}^j$  — условная вероятность реализации случайного события  $s_k^j$  при условии  $s_m^{j-1}$  5.2

$P(j)$  — матрица переходных вероятностей 5.2

$p(0)$  — вектор начальных вероятностей состояния 5.2

$p_k(t)$  — вероятность реализации случайного события  $s_k^t$ , состоящего в том, что в момент времени  $t \in T$  система  $S$  находится в состоянии  $S_k$  5.3

$\lambda_{ij}(t)$  — плотность вероятности перехода системы из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  в момент времени  $t$  5.3

$p(t)$  — вектор вероятностей состояний системы в момент времени  $t$  5.3

$\Phi(\nu)$  — частотная характеристика линейной динамической системы 4.4

$\Gamma$  — матрица спектральных интенсивностей белого шума 7.1

$\overset{\circ}{\xi}(t, \omega), t \in T$  — центрированный случайный процесс 4.1

$\int_s^t \Psi(w(\tau, \omega), \tau) dw(\tau, \omega)$  — стохастический интеграл Ито функции  $\Psi$  по винеровскому процессу  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$  7.3

$\int_s^t \Psi(w(\tau, \omega), \tau) d_* w(\tau, \omega)$  — стохастический интеграл Стратоновича функции  $\Psi$  по винеровскому процессу  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$  7.3

$f_\xi(t, X, \tau, Y)$  — условная функция плотности вероятностей марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  8.1

$U, U_m, U_{MN}$  — множества реализаций случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  9.1

$\hat{\beta}_K(\omega)$  — оценка вектора неизвестных параметров  $\beta \in B \subset \mathbb{R}^L$ , полученная на основе случайной выборки объема  $K$  из генеральной совокупности случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от  $\beta$  9.3

$f(y|\beta)$  — функция плотности вероятностей случайной выборки из генеральной совокупности случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от вектора неизвестных параметров  $\beta \in B \subset \mathbb{R}^L$  9.1

$A(\beta)$  — информационная матрица Фишера 9.4

$L(\alpha|U_*)$  — функция правдоподобия,  $U_* \in \{U, U_m, U_{MN}\}$  9.6

$\Phi(\alpha|U_*)$  — критерии метода наименьших квадратов 9.7

$\tilde{L}(\alpha|U_*)$  — функция квазиправдоподобия 9.6

## Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

## Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	ми	Υ υ	ипсилон
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ни	Φ φ	фи
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.



# ВВЕДЕНИЕ

Содержание выпуска относится к одному из специальных курсов высшей математики, который является составной частью теории вероятностей. В процессе развития теории вероятностей как науки можно условно выделить три этапа, первый из которых связан с понятием случайного события, второй — с понятием случайной величины, а третий — с понятием случайной функции. При этом начало первого этапа относится к середине XVII в., второго — к середине XIX в., а третьего — к 20–30 гг. XX в., и начало каждого следующего этапа, в принципе, не связано с завершением предыдущего.

Теория случайных процессов возникла вследствие практической необходимости математического моделирования реальных процессов различной природы, состояние каждого из которых в любой фиксированный момент времени представляет собой случайный вектор соответствующей размерности. Примером случайного процесса является процесс изменения во времени пространственных координат частицы, совершающей броуновское движение. Другими примерами случайных процессов являются: процесс стабилизации полета самолета в реальных условиях, когда он находится под постоянным воздействием случайных изменений вектора скорости ветра и других параметров турбулентной атмосферы; процесс развития неоднородной популяции с несколькими типами индивидуумов; процессы спроса и предложения на рынке товаров и т.д.

Фактически теория случайных процессов занимается изучением различных семейств случайных величин, эволюционирующих во времени. При этом логически корректное определение основных понятий теории случайных процессов в рамках аксиоматики теории вероятностей создавало и создает много трудностей теоретико-множественного характера. Они связаны,

например, с определениями непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости и других свойств случайных процессов. Именно поэтому в монографиях по теории случайных процессов значительное место занимает анализ развития теоретико-множественных конструкций. Они написаны на высоком теоретическом уровне и, как правило, сложны для понимания специалистов, занимающихся прикладными проблемами в различных областях человеческой деятельности, решение которых предполагает широкое использование методов теории случайных процессов. А так как литература по прикладным аспектам теории случайных процессов, доступная для понимания широкому кругу студентов, аспирантов и научных работников, имеющих математическую подготовку в объеме стандартного курса высшей математики, весьма немногочисленна, то возникла необходимость в написании этой книги.

Основной целью написания предлагаемого учебника явилось систематическое изложение элементов теории случайных процессов, усвоение которых должно способствовать активному овладению ее прикладными методами при решении практических задач. Различный уровень общей математической подготовки читателей и разнообразие их запросов авторы попытались учесть компоновкой материала по разделам с возрастающими уровнями сложности. Все основные понятия и методы иллюстрированы примерами, а в конце каждой главы приведены контрольные вопросы и упражнения.

Отметим, что учебник не содержит библиографии по теории случайных процессов и ее приложениям. В списке рекомендуемой литературы указаны лишь те источники, обращение к которым поможет читателю получить более полные сведения по отдельным вопросам теории случайных процессов и в смежных разделах высшей математики.

Содержание первых четырех глав соответствует базовому курсу теории случайных процессов. Мы предполагаем, что читатель может оперировать основными понятиями высшей математики (элементы линейной алгебры, дифференциальное

и интегральное исчисление, тригонометрические ряды Фурье и интеграл Фурье, обыкновенные линейные дифференциальные уравнения) и теории вероятностей в объеме втузовского курса. При этом, для удобства читателей и во избежание разночтения в соответствующих определениях теории случайных процессов, авторы сочли целесообразным привести основные определения базового курса теории вероятностей в приложении 1.

В первой главе введены и обсуждаются основные понятия теории случайных процессов: случайная функция; случайный процесс; случайная последовательность; сечение случайной функции; реализация случайной функции; конечномерный закон распределения случайной функции. Обсуждается вопрос о корректности задания случайного процесса посредством его конечномерных законов распределения. Дается определение стохастически эквивалентных случайных процессов, анализируются их свойства и возможные приложения. Вводятся понятия математического ожидания, ковариационной матрицы, ковариационной функции и связанных с ними числовых характеристик случайного процесса с последующим изучением их основных свойств.

Во второй главе рассмотрены важнейшие типы случайных процессов, представляющих особый интерес для приложений (стационарные, гауссовские, с независимыми приращениями, винеровские, марковские, пуассоновские). При этом отмечается особое место винеровских процессов как в теоретических, так и в прикладных исследованиях.

Третья глава посвящена изложению элементов стохастического анализа (предел, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов) с использованием понятия сходимости в смысле среднего квадратичного как наиболее приемлемого для практических приложений. В теории случайных процессов используют и другие виды сходимости и, как следствие, другие виды непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости — эту информацию читатель может найти в специальной литературе, например в книге А.Д. Вентцеля.

При рассмотрении технических приложений, в частности при решении задач о реакции линейных динамических систем на „шумы“ входных сигналов, в данной и последующих главах соответствующие стохастические дифференциальные уравнения следует воспринимать формально, так как их теория изложена лишь в седьмой главе. В последнем разделе третьей главы введены основные понятия эргодических случайных процессов и изучены их свойства.

В четвертой главе рассмотрены основные положения спектральной теории стационарных (в широком смысле) случайных процессов: представимость стационарных случайных процессов в виде конечных или счетных сумм гармоник с различными частотами и случайными амплитудами; интегральное представление стационарного случайного процесса. Следует отметить, что в данном учебнике изложена лишь принципиальная схема обоснования возможности интегрального представления стационарного случайного процесса, так как строгое доказательство является достаточно сложным, в чем читатель может убедиться сам, ознакомившись, например, с соответствующим разделом книги А.Д. Вентцеля. В процессе анализа достаточных условий существования интегрального представления стационарного случайного процесса введено понятие спектральной плотности как изображения экспоненциального интегрального преобразования Фурье его ковариационной функции. Приведены содержательные интерпретации спектральной плотности и рассмотрены ее основные свойства. Далее дано определение „белого шума“ как стационарного (в широком смысле) случайного процесса, обладающего постоянной спектральной плотностью, изучены его свойства и возможности использования при решении практических задач. В качестве одного из возможных приложений спектральной теории рассмотрены задачи, связанные с преобразованиями стационарных случайных процессов при их прохождении через линейные динамические системы.

Следующие две главы посвящены изучению теоретических и прикладных аспектов теории марковских процессов с дискрет-

ными множествами состояний. Заметим, что многие реальные физические системы имеют не более, чем счетное множество возможных состояний, а их поведение адекватно моделируется посредством марковских процессов. Поэтому аппарат теории марковских процессов с дискретными состояниями широко используется в теории систем, в исследовании операций и других прикладных дисциплинах.

В пятой главе, после введения основных понятий теории марковских процессов с дискретными состояниями и их обсуждения, основное внимание уделяется обоснованию и анализу системы уравнений Колмогорова для вероятностей состояний. Детально изучаются свойства решения задачи Коши для системы уравнений Колмогорова, для чего использовано представление соответствующей нормированной фундаментальной системы решений в виде матричной экспоненты, основные сведения о которой читатель может найти в приложении 2. Для иллюстрации основных положений теории марковских процессов с дискретными состояниями даны определения процесса „гибели — размножения“ и циклического процесса, проанализированы их свойства и предельные ( $t \rightarrow +\infty$ ) характеристики.

В шестой главе изложена элементарная теория массового обслуживания, которая опирается на методы исследования марковских процессов с дискретными состояниями. Материал этой главы предназначен для первого знакомства с теорией массового обслуживания и ее возможными приложениями, а также для подготовки читателя к освоению специальной литературы по этому разделу.

Для усвоения материала седьмой и восьмой глав, в которых содержатся основные положения теории марковских процессов с непрерывными состояниями и некоторые ее приложения, читатель должен быть знаком с элементами теории дифференциальных уравнений математической физики, иметь представление о постановках задач для дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа и методах их решения.

В седьмой главе сформулирован основной принцип построения детерминированной модели состояния динамической системы, обоснована необходимость введения в нее случайных возмущений. Доказано, что процесс случайных возмущений является „белым шумом“, и выписана стохастическая модель состояния, представляющая собой задачу Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений. Далее изучены свойства решения задачи Коши для системы линейных стохастических дифференциальных уравнений и доказано, что этим решением является нормальный марковский процесс, математическое ожидание и ковариационная матрица которого являются решениями соответствующих детерминированных задач Коши. Кроме того, определены условия, при выполнении которых этот случайный процесс является стационарным или может считаться стационарным. В этой же главе введены понятия стохастических интегралов и дифференциалов, рассмотрены их свойства и возможности применения при изучении нелинейных стохастических моделей состояния.

В восьмой главе рассмотрены общие свойства марковских процессов с непрерывными состояниями, обосновано уравнение Маркова — Смолуховского — Чепмена — Колмогорова, на базе которого выведены первое и второе уравнения Колмогорова для условных вероятностей. Значительное внимание уделено анализу возможных постановок задач для уравнений Колмогорова и методам их решения. Доказано, что любая стохастическая модель состояния определяет некоторый марковский процесс и любой марковский процесс удовлетворяет некоторой стохастической модели состояния. В качестве иллюстраций рассмотрены: задача об определении вероятности пребывания значений марковского процесса в заданной области; задача об определении закона распределения времени пребывания значений марковского процесса в заданной области; задача об определении среднего числа выбросов значений марковского процесса за данный уровень.

Последние две главы посвящены задаче оценивания неизвестных параметров случайного процесса по дискретным значениям его выборочных реализаций. Эта задача занимает особое место в статистике случайных процессов в связи с ее прикладной значимостью. Мы предполагаем, что читатель может оперировать основными понятиями математической статистики в объеме базового курса.

В девятой главе, после анализа различных возможных вариантов наблюдений и статистических моментов случайного процесса, сформулированы задача оценивания его неизвестных параметров и требования, предъявляемые к ее решению. Для изучения свойств оценок и методов их определения рассмотрены случайные выборки, соответствующие различным возможным вариантам данных наблюдений, и их совместные функции плотности вероятностей. Дано определение эффективной оценки вектора неизвестных параметров случайного процесса и проведен анализ неравенства Рао — Крамера. Сформулирована и доказана теорема о единственности решения задачи оценивания. Рассмотрены методы максимального правдоподобия и наименьших квадратов для нахождения оценок неизвестных параметров случайного процесса по данным наблюдений и проанализированы их свойства.

Результаты, полученные в девятой главе, использованы в следующей десятой главе для решения задачи оценивания неизвестных параметров стохастической модели состояния по данным наблюдений. Установлены условия единственности решения этой задачи и рассмотрен случай, когда данные наблюдений содержат случайную ошибку измерений. Последнее сделало уместным рассмотрение основ теории фильтрации, а именно, фильтра Калмана.

# 1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория *случайных функций* является разделом теории вероятностей и, как следствие, относится к классической математике, которая строится дедуктивно, исходя из некоторой системы аксиом. Основой теории случайных функций являются фундаментальные понятия и результаты базовых разделов теории вероятностей.

## 1.1. Случайная функция, случайный процесс и случайная последовательность

Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — вероятностное пространство;  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$  — измеримое пространство;  $t$  — параметр, совокупность значений которого  $T$  в общем случае является произвольным множеством;  $\omega \in \Omega$  — элементарное событие.

**Определение 1.1.** *Случайной функцией*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют измеримое отображение  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  пространства элементарных событий  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$ , зависящее от параметра  $t$ .

Если  $T = [a, b]$  — отрезок числовой оси, а параметр  $t$  интерпретируют как время, то вместо термина „случайная функция“ используют термин „**случайный процесс**“. При  $n = 1$  случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют **скалярным случайным процессом**, а при  $n \geq 2$  его называют **векторным случайным процессом** или  **$n$ -мерным случайным процессом**. Векторный ( $n$ -мерный) случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно записать в виде  $\xi(t, \omega) = (\xi_1(t, \omega) \dots \xi_n(t, \omega))^T$ . При этом скалярные случайные процессы  $\xi_i(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют его **координатными случайными процессами**.



Если  $T = \mathbb{N}$ , то вместо случайной функции  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , говорят о **случайной последовательности**, которую обозначают также  $\{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ .

При любом фиксированном значении параметра  $t \in T$  случайная функция  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является **случайным вектором**, называемым **сечением** этого **случайного процесса**.

Если зафиксировать элементарное событие  $\omega \in \Omega$ , то в этом случае  $\xi(t, \omega)$  является (неслучайной) функцией параметра  $t$ , которую называют **траекторией случайного процесса**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , или его **реализацией**.

**Пример 1.1.** Предположим, что разработан реактивный двигатель новой конструкции и  $p(t)$  — функция времени  $t \in T = [0, t_0]$ , описывающая теоретический закон изменения давления в камере сгорания, причем  $t = 0$  — момент запуска двигателя. Так как реально невозможно изготовить даже два абсолютно идентичных двигателя, то изменение давления в камере сгорания — скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , где  $\omega$  — вектор конструктивно-технологических характеристик реактивного двигателя.

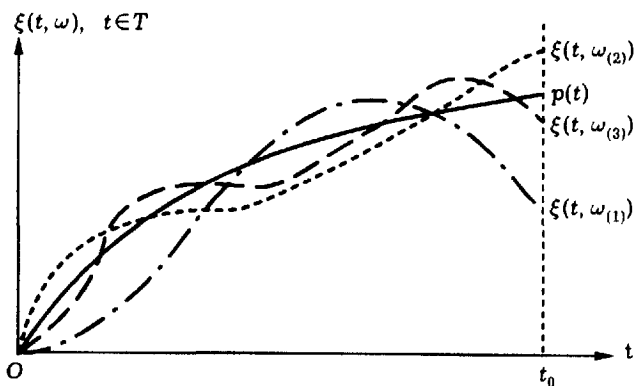


Рис. 1.1

Пусть изготовлены три опытных образца рассматриваемого реактивного двигателя и проведены их испытания. На рис. 1.1 схематично изображены реализации случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,

$t \in T = [0, t_0]$ . При этом  $\omega_{(k)}$  — вектор конструктивно-технологических характеристик  $k$ -го образца;  $\xi(t, \omega_{(k)})$  — изменение давления в камере сгорания  $k$ -го образца реактивного двигателя;  $t_0$  — момент окончания фиксации давления. #

Если для случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зафиксировать произвольное значение параметра  $t$ , то получим  $n$ -мерный случайный вектор  $\xi(t, \omega)$ , являющийся сечением случайного процесса. Закон распределения вероятностей этого случайного вектора называют **одномерным законом распределения случайного процесса**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Функцию распределения (вероятностей) случайного вектора  $\xi(t, \omega)$

$$F_{\xi}(x|t) \triangleq \mathbf{P}[\xi(t, \omega) < x] = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(y|t) dy,$$

где

$$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y \triangleq \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$\int_{-\infty}^x f_{\xi}(y|t) dy \triangleq \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi}(y_1, \dots, y_n|t) dy_1 \dots dy_n,$$

называют **одномерной функцией распределения случайного процесса**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , а  $f_{\xi}(x|t)$  — **одномерной функцией плотности вероятностей случайного процесса**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , которая может быть и обобщенной (см. П1).

Если зафиксировать значения  $t_k$  параметра  $t \in T$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то приходим к совокупности из  $N$  случайных  $n$ -мерных векторов  $\{\xi(t_k, \omega)\}_{k=1}^N$  с функцией распределения (вероятностей)

$$F_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}|t_1, \dots, t_N) \triangleq \mathbf{P}[\xi(t_k, \omega) < x_{(k)}, k = \overline{1, N}] =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_{(1)}} \dots \int_{-\infty}^{x_{(N)}} f_{\xi}(y_{(1)}, \dots, y_{(N)}|t_1, \dots, t_N) dy_{(1)} \dots dy_{(N)},$$

называемой **конечномерной** ( $N$ -мерной) **функцией распределения случайного процесса**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . В этом случае  $f_\xi(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N)$  — **конечномерная** ( $N$ -мерная) **функция плотности вероятностей случайного процесса**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , (возможно обобщенная). Функции

$$f_\xi(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N), \quad F_\xi(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N),$$

задают **конечномерный** ( $N$ -мерный) **закон распределения случайного процесса**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

Не следует путать конечномерные функции плотности вероятностей (функции распределения) случайного процесса и конечномерные функции плотности вероятностей (функции распределения) его сечений. В зависимости от контекста может идти речь об  $N$ -мерной функции плотности вероятностей (функции распределения) скалярного случайного процесса и об одномерной функции плотности вероятностей (функции распределения) векторного случайного процесса.

Фактически случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно рассматривать как совокупность всех его возможных сечений. Таким образом, в общем случае случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , не может быть полностью определенным, так как он представим несчетной совокупностью своих сечений и невозможно построить совместный закон распределения всех его сечений. Поэтому любой случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , в общем случае не является полностью определенным и при решении различных задач, как теоретического, так и прикладного характера, исследователь вынужден ограничиваться использованием конечномерных законов распределений.

**Определение 1.2.** Случайные процессы  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определенные на одном и том же множестве  $T$ , в одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  и принимающие значения в одном и том же измеримом пространстве  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ , называют **стохастически эквивалентными**, если  $\mathbf{P}[\xi(t, \omega) \neq \eta(t, \omega)] = 0$  для любого  $t \in T$ .

Таким образом, стохастически эквивалентные случайные процессы  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , могут отличаться друг от друга лишь на подмножестве  $\Omega_0$  множества  $\Omega$ , имеющем нулевую вероятность.

Если случайные процессы  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , являются стохастически эквивалентными, то их конечномерные функции распределения совпадают, т.е.

$$F_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N) \equiv F_{\eta}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N)$$

для любого  $N \geq 1$  и для любых  $t_k \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Реализации стохастически эквивалентных случайных процессов могут быть совершенно различными.

**Пример 1.2.** Пусть  $T = [0, 1]$  и случайная величина  $\tau(\omega)$  распределена равномерно на множестве  $T$ . Рассмотрим два случайных процесса:

$$\xi(t, \omega) \triangleq 0, \quad t \in T, \quad \text{и} \quad \eta(t, \omega) \triangleq \begin{cases} 1, & t = \tau(\omega), \\ 0, & t \neq \tau(\omega), \end{cases} \quad t \in T.$$

Эти скалярные случайные процессы являются стохастически эквивалентными. Действительно, при любом  $t \in T$  имеем

$$\mathbf{P}[\xi(t, \omega) \neq \eta(t, \omega)] \equiv \mathbf{P}[t = \tau(\omega)] \equiv 0,$$

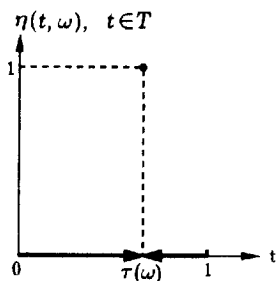


Рис. 1.2

так как в случае непрерывной скалярной случайной величины вероятность попадания в точку равна нулю. Любая реализация случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — тождественный нуль, а реализация случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , имеет разрыв в случайной точке  $t = \tau(\omega)$  (рис. 1.2). #

При решении различных задач теоретического и прикладного характера в ряде случаев бывает удобной замена исходного

случайного процесса стохастически эквивалентным. Тогда получаемые выводы с точностью до случайных событий, обладающих нулевой вероятностью реализации, могут быть отнесены к исходной задаче.

## 1.2. Математическое ожидание и ковариационная функция случайного процесса

Совокупность всех *конечномерных законов распределения случайного процесса* является полной его характеристикой. Но при решении многих прикладных задач по разным причинам ограничиваются использованием одно- и двумерных законов распределений случайных процессов и связанных с ними моментов первого и второго порядков, существование которых предполагается. Отметим, что *моментами  $k$ -го порядка случайного процесса* называют соответствующие моменты его сечений.

**Определение 1.3.** *Математическим ожиданием* векторного *случайного процесса*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют неслучайную вектор-функцию  $m_\xi(t)$ , значение которой при каждом фиксированном  $t \in T$  равно *математическому ожиданию случайного вектора*  $\xi(t, \omega)$ , являющегося сечением исходного случайного процесса, соответствующего рассматриваемому значению  $t$ .

Если  $f_\xi(x|t)$  — *одномерная функция плотности вероятностей  $n$ -мерного случайного процесса*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , т.е. плотность распределения (вероятностей) его сечения (возможно обобщенная), соответствующего рассматриваемому значению  $t \in T$ , то, согласно определению П1.13 математического ожидания случайного вектора, имеем

$$m_\xi(t) \triangleq \mathbf{M}[\xi(t, \omega)] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} x f_\xi(x|t) dx,$$

где  $f_{\xi}(x|t) = f_{\xi}(x_1, \dots, x_n|t)$ ,  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ,

$$\xi(t, \omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi_1(t, \omega) \\ \vdots \\ \xi_n(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad m_{\xi}(t) \triangleq \begin{pmatrix} m_1(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{pmatrix}, \quad x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

и для любого фиксированного  $k = \overline{1, n}$  имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\xi}(x_1, \dots, x_n|t) \prod_{m=1 \wedge m \neq k}^n dx_m \equiv f_{\xi_k}(x_k|t),$$

где  $f_{\xi_k}(x_k|t)$  — плотность распределения (вероятностей)  $k$ -й компоненты сечения исходного случайного процесса в момент времени  $t \in T$ . Таким образом

$$\begin{aligned} m_k(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} x_k f_{\xi}(x|t) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_k \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\xi}(x_1, \dots, x_n|t) \prod_{m=1 \wedge m \neq k}^n dx_m \right\} dx_k = M[\xi_k(t, \omega)] \end{aligned}$$

и окончательно

$$M[\xi(t, \omega)] = M \left[ \begin{pmatrix} \xi_1(t, \omega) \\ \vdots \\ \xi_n(t, \omega) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} M[\xi_1(t, \omega)] \\ \vdots \\ M[\xi_n(t, \omega)] \end{pmatrix}, \quad t \in T.$$

Математическое ожидание  $m_{\xi}(t)$  случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно интерпретировать как его усредненную траекторию.

Если  $f: X \rightarrow Y$ , где  $X$  — некоторое множество и  $Y \subset M_{mn}(R)$ , то при дальнейших рассуждениях будем говорить, что определена **матричная функция** типа  $m \times n$  с областью определения  $X$  и областью значений  $Y \subset M_{mn}(R)$

**Определение 1.4.** *Ковариационной матрицей (матрицей ковариаций)  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют неслучайную матричную функцию  $\Sigma_\xi(t)$  типа  $n \times n$ , которая при каждом фиксированном  $t \in T$  представляет собой ковариационную матрицу случайного вектора  $\xi(t, \omega)$ , являющегося сечением исходного случайного процесса, соответствующего рассматриваемому значению  $t$ .*

Если  $f_\xi(x|t)$  — одномерная функция плотности вероятностей  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , то

$$\begin{aligned}\Sigma_\xi(t) &\triangleq \mathbf{M}[(\xi(t, \omega) - m_\xi(t))(\xi(t, \omega) - m_\xi(t))^T] \equiv \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^n} (x - m_\xi(t))(x - m_\xi(t))^T f_\xi(x|t) dx,\end{aligned}$$

где

$$\xi(t, \omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi_1(t, \omega) \\ \vdots \\ \xi_n(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad m_\xi(t) \triangleq \begin{pmatrix} m_1(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{pmatrix}, \quad x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_\xi(t) = (\Sigma_{ij}(t)) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),$$

$$\Sigma_{ij}(t) = \mathbf{M}[(\xi_i(t, \omega) - m_i(t))(\xi_j(t, \omega) - m_j(t))] = \Sigma_{ji}(t),$$

и поэтому ковариационная матрица  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является симметрической. Ее диагональные элементы имеют вид

$$\Sigma_{kk}(t) = \mathbf{M}[(\xi_k(t, \omega) - m_k(t))^2] = \mathbf{D}[\xi_k(t, \omega)] = \sigma_{\xi_k}^2(t), \quad k = \overline{1, N}.$$

Таким образом, при каждом фиксированном  $t \in T$  значение  $\Sigma_{kk}(t)$  равно дисперсии скалярной случайной величины, являющейся  $k$ -й компонентой сечения исходного случайного процесса,

соответствующего рассматриваемому значению  $t$ . При  $i \neq j$  получаем, что

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij}(t) &= \mathbf{M}[(\xi_i(t, \omega) - m_i(t))(\xi_j(t, \omega) - m_j(t))] = \\ &= \text{cov}[\xi_i(t, \omega), \xi_j(t, \omega)],\end{aligned}$$

т.е. при каждом фиксированном  $t \in T$  значение  $\Sigma_{ij}(t)$ ,  $i \neq j$ , равно ковариации двух скалярных случайных величин, являющихся  $i$ -й и  $j$ -й компонентами сечения исходного случайного процесса, соответствующего рассматриваемому значению  $t$ .

При решении прикладных задач используют понятие **дисперсии**  $\sigma_\xi^2(t)$   $n$ -мерного **случайного процесса**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . По определению полагают, что

$$\sigma_\xi^2(t) = \mathbf{D}[\xi(t, \omega)] \triangleq \sum_{k=1}^n \sigma_{\xi_k}^2(t),$$

т.е. она равна следу  $\text{Sp } \Sigma_\xi(t)$  ковариационной матрицы этого векторного случайного процесса. При этом очевидно, что

$$\sigma_\xi^2(t) \equiv \mathbf{M}[(\xi(t, \omega) - m_\xi(t))^T (\xi(t, \omega) - m_\xi(t))].$$

**Определение 1.5.** **Ковариационной функцией**  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют матричную функцию  $K_\xi(t_1, t_2)$  типа  $n \times n$  двух скалярных переменных  $t_1$  и  $t_2$ , значение которой при фиксированных  $t_1, t_2 \in T$  равно **ковариации двух случайных векторов**  $\xi(t_1, \omega)$  и  $\xi(t_2, \omega)$ , определяемой следующим образом:

$$\begin{aligned}K_\xi(t_1, t_2) &\triangleq \mathbf{M}[(\xi(t_1, \omega) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2, \omega) - m_\xi(t_2))^T] = \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n} (x_{(1)} - m_\xi(t_1))(x_{(2)} - m_\xi(t_2))^T f_\xi(x_{(1)}, x_{(2)} | t_1, t_2) dx_{(1)} dx_{(2)},\end{aligned}$$

где  $x_{(k)} = (x_{1(k)} \dots x_{n(k)})^T \in \mathbb{R}^n$  и  $f_\xi(x_{(1)}, x_{(2)} | t_1, t_2)$  — двумерная функция плотности вероятностей (возможно обобщенная) исходного случайного процесса.



Согласно определению 1.5, на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца ковариационной функции  $K_{\xi}(t_1, t_2)$   $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , находится скалярная функция

$$K_{\xi, \xi_j}(t_1, t_2) \equiv M[(\xi_i(t_1, \omega) - m_i(t_1))(\xi_j(t_2, \omega) - m_j(t_2))]$$

двух скалярных переменных  $t_1$  и  $t_2$ . Ее значение при фиксированных  $t_1, t_2 \in T$  равно ковариации двух скалярных случайных величин  $\xi_i(t_1, \omega)$  и  $\xi_j(t_2, \omega)$ , обладающих математическими ожиданиями  $m_i(t_1)$ ,  $m_j(t_2)$  и являющихся  $i$ -й и  $j$ -й компонентами  $n$ -мерных случайных векторов  $\xi(t_1, \omega)$  и  $\xi(t_2, \omega)$  соответственно, т.е.

$$K_{\xi, \xi_j}(t_1, t_2) = \text{cov}[\xi_i(t_1, \omega), \xi_j(t_2, \omega)].$$

**Пример 1.3.** Пусть  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  — скалярные случайные величины с числовыми характеристиками:  $M[\alpha(\omega)] = m_{\alpha}$ ;  $M[\beta(\omega)] = m_{\beta}$ ;  $D[\alpha(\omega)] = \sigma_{\alpha}^2$ ;  $D[\beta(\omega)] = \sigma_{\beta}^2$ ;  $\text{cov}[\alpha(\omega), \beta(\omega)] = \kappa$ . Определим математическое ожидание и ковариационную функцию скалярного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) \triangleq \alpha(\omega) \cos(\varphi t) + \beta(\omega) \sin(\varphi t), \quad t \in T = [0, \infty),$$

где  $\varphi \in \mathbb{R}$  — постоянная. Имеем

$$\begin{aligned} m_{\xi}(t) &= M[\alpha(\omega) \cos(\varphi t) + \beta(\omega) \sin(\varphi t)] = \\ &= M[\alpha(\omega)] \cos(\varphi t) + M[\beta(\omega)] \sin(\varphi t) = m_{\alpha} \cos(\varphi t) + m_{\beta} \sin(\varphi t). \end{aligned}$$

Пусть далее

$$\overset{\circ}{\alpha}(\omega) \triangleq \alpha(\omega) - m_{\alpha}; \quad \overset{\circ}{\beta}(\omega) \triangleq \beta(\omega) - m_{\beta}.$$

Тогда

$$\overset{\circ}{\xi}(t, \omega) = \xi(t, \omega) - m_{\xi}(t) = \overset{\circ}{\alpha}(\omega) \cos(\varphi t) + \overset{\circ}{\beta}(\omega) \sin(\varphi t).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} K_{\xi}(t_1, t_2) &= M[\dot{\xi}(t_1, \omega) \dot{\xi}(t_2, \omega)] = M[(\dot{\alpha}(\omega))^2] \cos(\varphi t_1) \cos(\varphi t_2) + \\ &+ M[\dot{\alpha}(\omega) \dot{\beta}(\omega)] \{ \cos(\varphi t_1) \sin(\varphi t_2) + \sin(\varphi t_1) \cos(\varphi t_2) \} + \\ &+ M[(\dot{\beta}(\omega))^2] \sin(\varphi t_1) \sin(\varphi t_2) = \sigma_{\alpha}^2 \cos(\varphi t_1) \cos(\varphi t_2) + \\ &+ \kappa \sin[\varphi(t_1 + t_2)] + \sigma_{\beta}^2 \sin(\varphi t_1) \sin(\varphi t_2). \end{aligned}$$

В частности, если случайные величины  $\alpha(\omega)$ ,  $\beta(\omega)$  являются некоррелированными ( $\kappa = 0$ ) и  $\sigma_{\alpha}^2 = \sigma^2 = \sigma_{\beta}^2$ , то

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos[\varphi(t_2 - t_1)].$$

**Теорема 1.1.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $n$ -мерный случайный процесс, для которого существует ковариационная функция  $K_{\xi}(t_1, t_2)$ . Тогда

$$1) K_{\xi}^T(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_2, t_1);$$

$$2) K_{\xi}(t, t) = \Sigma_{\xi}(t);$$

3) *евклидова норма* ковариационной функции, т.е. корень квадратный из суммы квадратов ее элементов, удовлетворяет неравенству Коши — Буняковского

$$\|K_{\xi}(t_1, t_2)\| \leq \sqrt{\sigma_{\xi}^2(t_1) \sigma_{\xi}^2(t_2)};$$

4) если  $\varphi(t)$  — неслучайная  $n$ -мерная вектор-функция скалярного аргумента  $t \in T$ ,  $A(t)$  — матричная неслучайная функция типа  $n \times n$ , определенная на  $T$ , и

$$\eta(t, \omega) \triangleq A(t) \xi(t, \omega) + \varphi(t), \quad t \in T,$$

то в этом случае

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = A(t_1) K_{\xi}(t_1, t_2) A^T(t_2);$$

5) если ковариационная функция  $K_{\xi}(t_1, t_2)$  непрерывна в точках диагонали  $t_1 = t_2$  квадрата  $T \times T$ , то она непрерывна в любой другой точке этого квадрата;

6) для любого  $m \geq 1$  и для любого множества  $\{t_k\}_{k=1}^m \in T$  точек отсчета квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Z_{(i)}^T K_{\xi}(t_i, t_j) Z_{(j)}, \quad Z_{(k)} = (z_{1k} \dots z_{nk})^T \in \mathbb{R}^n, \quad k = \overline{1, m},$$

$nm$  переменных  $z_{ik}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ , является неотрицательно определенной.

◀ Первое утверждение следует непосредственно из определения ковариационной функции и свойств операции транспонирования матриц, так как

$$\begin{aligned} K_{\xi}^T(t_1, t_2) &= \{M[(\xi(t_1, \omega) - m_{\xi}(t_1))(\xi(t_2, \omega) - m_{\xi}(t_2))^T]\}^T = \\ &= M[(\xi(t_2, \omega) - m_{\xi}(t_2))(\xi(t_1, \omega) - m_{\xi}(t_1))^T] = K_{\xi}(t_2, t_1). \end{aligned}$$

Второе утверждение следует непосредственно из определения 1.4 ковариационной матрицы и определения 1.5 ковариационной функции случайного процесса, так как

$$K_{\xi}(t, t) = M[(\xi(t, \omega) - m_{\xi}(t))(\xi(t, \omega) - m_{\xi}(t))^T] = \Sigma_{\xi}(t).$$

Третье утверждение следует из **неравенства Шварца** для математического ожидания

$$\|M[\alpha(\omega)\beta^T(\omega)]\|^2 \leq M[\alpha^T(\omega)\alpha(\omega)]M[\beta^T(\omega)\beta(\omega)],$$

в котором

$$\alpha(\omega) = (\alpha_1(\omega) \dots \alpha_n(\omega))^T, \quad \beta(\omega) = (\beta_1(\omega) \dots \beta_n(\omega))^T,$$

если считать, что

$$\alpha(\omega) \triangleq \xi(t_1, \omega) - m_{\xi}(t_1), \quad \beta(\omega) \triangleq \xi(t_2, \omega) - m_{\xi}(t_2).$$

Для доказательства неравенства Шварца предположим, что  $\lambda \in \mathbb{R}$  — неслучайный параметр. Тогда для любого  $\lambda$

$$\begin{aligned} 0 &\leq M[(\alpha(\omega) + \lambda\beta(\omega))^T(\alpha(\omega) + \lambda\beta(\omega))] = \\ &= M[\alpha^T(\omega)\alpha(\omega)] + 2\lambda M[\alpha^T(\omega)\beta(\omega)] + \lambda^2 M[\beta^T(\omega)\beta(\omega)] \end{aligned}$$

и поэтому дискриминант этого квадратного трехчлена неотрицателен. Это дает неравенство

$$(M[\alpha^T(\omega)\beta(\omega)])^2 \leq M[\alpha^T(\omega)\alpha(\omega)]M[\beta^T(\omega)\beta(\omega)].$$

В случае скалярных случайных величин  $\alpha(\omega) = \alpha_i(\omega)$ ,  $\beta(\omega) = \beta_j(\omega)$  это неравенство превращается для них в неравенство Шварца

$$(M[\alpha_i(\omega)\beta_j(\omega)])^2 \leq M[\alpha_i^2(\omega)]M[\beta_j^2(\omega)].$$

Используя его в векторном случае, получаем

$$\begin{aligned} \|M[\alpha(\omega)\beta^T(\omega)]\|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M[\alpha_i(\omega)\beta_j(\omega)])^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[\alpha_i^2(\omega)]M[\beta_j^2(\omega)] = \sum_{i=1}^n M[\alpha_i^2(\omega)] \sum_{j=1}^n M[\beta_j^2(\omega)] = \\ &= M[\alpha^T(\omega)\alpha(\omega)]M[\beta^T(\omega)\beta(\omega)], \end{aligned}$$

что и завершает доказательство неравенства Шварца.

Чтобы доказать четвертое утверждение, достаточно воспользоваться очевидными равенствами:

$$m_\eta(t) = A(t)m_\xi(t) + \varphi(t), \quad t \in T;$$

$$\eta(t, \omega) - m_\eta(t) = A(t)(\xi(t, \omega) - m_\xi(t)), \quad t \in T,$$

и определением 1.5 ковариационной функции. Действительно,

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= \\ &= M[A(t_1)(\xi(t_1, \omega) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2, \omega) - m_\xi(t_2))^T A^T(t_2)] = \\ &= A(t_1)M[(\xi(t_1, \omega) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2, \omega) - m_\xi(t_2))^T]A^T(t_2) = \\ &= A(t_1)K_\xi(t_1, t_2)A^T(t_2). \end{aligned}$$

Для доказательства пятого утверждения положим

$$\overset{\circ}{\xi}(t, \omega) \triangleq \xi(t, \omega) - m_\xi(t), \quad t \in T,$$

и рассмотрим

$$\begin{aligned}
 & \|K_{\xi}(t_1 + h_1, t_2 + h_2) - K_{\xi}(t_1, t_2)\| = \\
 & = \|\mathbf{M}[\dot{\xi}(t_1 + h_1, \omega) \dot{\xi}^T(t_2 + h_2, \omega) - \dot{\xi}(t_1, \omega) \dot{\xi}^T(t_2, \omega)]\| = \\
 & = \|\mathbf{M}[\dot{\xi}(t_1 + h_1, \omega) (\dot{\xi}(t_2 + h_2, \omega) - \dot{\xi}(t_2, \omega))^T + \\
 & \quad + (\dot{\xi}(t_1 + h_1, \omega) - \dot{\xi}(t_1, \omega)) \dot{\xi}^T(t_2, \omega)]\| \leq \\
 & \leq \|\mathbf{M}[\dot{\xi}(t_1 + h_1, \omega) (\dot{\xi}(t_2 + h_2, \omega) - \dot{\xi}(t_2, \omega))^T]\| + \\
 & \quad + \|\mathbf{M}[(\dot{\xi}(t_1 + h_1, \omega) - \dot{\xi}(t_1, \omega)) \dot{\xi}^T(t_2, \omega)]\| \leq \\
 & \leq \sqrt{\sigma_{\xi}^2(t_1 + h_1) \mathbf{M}[(\dot{\xi}(t_2 + h_2, \omega) - \dot{\xi}(t_2, \omega))^T (\dot{\xi}(t_2 + h_2, \omega) - \dot{\xi}(t_2, \omega))]} + \\
 & \quad + \sqrt{\mathbf{M}[(\dot{\xi}(t_1 + h_1, \omega) - \dot{\xi}(t_1, \omega))^T (\dot{\xi}(t_1 + h_1, \omega) - \dot{\xi}(t_1, \omega))] \sigma_{\xi}^2(t_2, \omega)},
 \end{aligned}$$

где использованы неравенство треугольника [IV] и неравенство Шварца. А так как

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}[(\dot{\xi}(t + h, \omega) - \dot{\xi}(t, \omega))^T (\dot{\xi}(t + h, \omega) - \dot{\xi}(t, \omega))] \leq \\
 & \leq \|\mathbf{M}[(\dot{\xi}(t + h, \omega) - \dot{\xi}(t, \omega)) (\dot{\xi}(t + h, \omega) - \dot{\xi}(t, \omega))^T]\|^2 = \\
 & = \|K_{\xi}(t + h, t + h) - K_{\xi}(t, t + h) - K_{\xi}(t + h, t) + K_{\xi}(t, t)\|^2
 \end{aligned}$$

и по условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} K_{\xi}(t + h, t + h) = \lim_{h \rightarrow 0} K_{\xi}(t + h, t) = \lim_{h \rightarrow 0} K_{\xi}(t, t + h) = K_{\xi}(t, t)$$

для любого  $t \in T$ , то утверждение 5 доказано полностью.

Для доказательства шестого утверждения теоремы 1.1 рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\left[\left(\sum_{i=1}^m Z_{(i)}^T \dot{\xi}(t_i, \omega)\right)^2\right] &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Z_{(i)}^T \mathbf{M}[\dot{\xi}(t_i, \omega) \dot{\xi}^T(t_j, \omega)] Z_{(j)} = \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Z_{(i)}^T K_{\xi}(t_i, t_j) Z_{(j)}.
 \end{aligned}$$

А так как в левой части записано математическое ожидание неотрицательной случайной величины, то оно неотрицательно, и утверждение б доказано. ►

**Замечание 1.1.** По аналогии с коэффициентом корреляции двух скалярных случайных величин в теории случайных процессов используют понятие **корреляционной функции**

$$k_{\xi, \xi_j}(t_1, t_2) \triangleq \frac{K_{\xi, \xi_j}(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_{\xi}^2(t_1)} \sqrt{\sigma_{\xi_j}^2(t_2)}}.$$

**Замечание 1.2.** Если случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , принимает значение в измеримом пространстве  $X \subset \mathbb{C}$ , то его называют **комплексным случайным процессом**. Для него полагают, что

$$K_{\xi}(t_1, t_2) \triangleq \mathbf{M}[(\xi(t_1, \omega) - m_{\xi}(t_1))^* (\xi(t_2, \omega) - m_{\xi}(t_2))],$$

где символ „\*“ означает операцию комплексного сопряжения. Таким образом, если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — комплексный случайный процесс, то

$$\text{а) } K_{\xi}(t_1, t_2) = (K_{\xi}(t_2, t_1))^*;$$

$$\text{б) } K_{\xi}(t_1, t_2) = (K_{\xi_1 \xi_1}(t_1, t_2) + K_{\xi_2 \xi_2}(t_1, t_2)) + \\ + i(K_{\xi_1 \xi_2}(t_1, t_2) - K_{\xi_2 \xi_1}(t_1, t_2)),$$

где  $\xi(t, \omega) \triangleq \xi_1(t, \omega) + i\xi_2(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , а  $\xi_1(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\xi_2(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярные случайные процессы.

**Пример 1.4.** Пусть  $A(\omega) \triangleq a(\omega) + ib(\omega)$  — комплексная случайная величина с нулевым математическим ожиданием,  $\varphi \in \mathbb{R}$  — неслучайный скалярный параметр и комплексный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , имеет вид

$$\xi(t, \omega) \triangleq A(\omega)e^{i\varphi t} = (a(\omega)\cos(\varphi t) - b(\omega)\sin(\varphi t)) + \\ + i(b(\omega)\cos(\varphi t) + a(\omega)\sin(\varphi t)), \quad t \in T = [0, \infty).$$

Тогда

$$\mathbf{M}[\xi(t, \omega)] = \mathbf{M}[A(\omega)e^{i\varphi t}] = \mathbf{M}[A(\omega)]e^{i\varphi t} \equiv \Theta;$$

$$\Theta \triangleq 0 + i0 \in \mathbb{C};$$

$$\begin{aligned} K_{\xi}(t_1, t_2) &= \mathbf{M}[\{A(\omega) \exp(i\varphi t_1)\}^* \{A(\omega) \exp(i\varphi t_2)\}] = \\ &= \mathbf{M}[A^*(\omega)A(\omega)] \exp[i\varphi(t_2 - t_1)] = \\ &= \mathbf{M}[a^2(\omega) + b^2(\omega)] \cos(\varphi(t_2 - t_1)) + \\ &\quad + i \mathbf{M}[a^2(\omega) - b^2(\omega)] \sin(\varphi(t_2 - t_1)). \end{aligned}$$

**Определение 1.6.** *Взаимной ковариационной функцией* двух  $n$ -мерных случайных процессов  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определенных на одном и том же множестве  $T \subset \mathbb{R}$  и на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , принимающих значения в одном и том же измеримом пространстве  $X \subset \mathbb{R}^n$ , называют неслучайную матричную функцию  $K_{\xi\eta}(t_1, t_2)$  типа  $n \times n$  двух скалярных аргументов  $t_1$  и  $t_2$ , значение которой при фиксированных  $t_1, t_2 \in T$  равно ковариации случайных векторов  $\xi(t_1, \omega)$  и  $\eta(t_2, \omega)$ , определяемой следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{\xi\eta}(t_1, t_2) &\triangleq \mathbf{M}[(\xi(t_1, \omega) - m_{\xi}(t_1)) (\eta(t_2, \omega) - m_{\eta}(t_2))^T] \equiv \\ &\equiv \int \int_{\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n} (x - m_{\xi}(t_1)) (y - m_{\eta}(t_2))^T f_{\xi\eta}(x, y | t_1, t_2) dx dy, \end{aligned}$$

где  $f_{\xi\eta}(x, y | t_1, t_2)$  — функция плотности вероятностей  $(2n)$ -мерного случайного вектора  $(\xi^T(t_1, \omega) \ \eta^T(t_2, \omega))^T$ .

Согласно определению 1.6, на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца взаимной ковариационной функции  $K_{\xi\eta}(t_1, t_2)$  находится скалярная функция

$$\begin{aligned} K_{\xi, \eta_j}(t_1, t_2) &\equiv \mathbf{M}[(\xi_i(t_1, \omega) - m_{\xi_i}(t_1)) (\eta_j(t_2, \omega) - m_{\eta_j}(t_2))] \equiv \\ &\equiv \text{cov}[\xi_i(t_1, \omega), \eta_j(t_2, \omega)]. \end{aligned}$$

Взаимная ковариационная функция обладает следующими свойствами:

$$а) K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_{\eta\xi}^T(t_2, t_1);$$

$$б) \|K_{\xi\eta}(t_1, t_2)\| \leq \sqrt{\sigma_{\xi}^2(t_1)\sigma_{\eta}^2(t_2)};$$

в) если  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  — неслучайные  $n$ -мерные вектор-функции,  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$  — неслучайные матричные функции типа  $n \times n$ , определенные на  $T \subset \mathbb{R}$ , и при  $k = 1, 2$

$$\eta_{(k)}(t, \omega) \triangleq A_k(t) \xi_{(k)}(t, \omega) + \varphi_k(t), \quad t \in T,$$

где  $\xi_{(1)}(t, \omega)$  и  $\xi_{(2)}(t, \omega)$  —  $n$ -мерные случайные процессы, определенные на одном и том же множестве  $T \subset \mathbb{R}$ , одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  и принимающие значения в одном и том же измеримом пространстве  $X \subset \mathbb{R}^n$ , то

$$K_{\eta_{(1)}\eta_{(2)}}(t_1, t_2) = A_1(t_1) K_{\xi_{(1)}\xi_{(2)}}(t_1, t_2) A_2^T(t_2).$$

## Вопросы и задачи

**1.1.** Почему любое сечение  $n$ -мерного векторного случайного процесса является  $n$ -мерным случайным вектором?

**1.2.** Существует ли связь между  $N$ -мерным и  $(N - 1)$ -мерным законами распределения случайного процесса, где  $N \geq 2$ ? Если эта связь существует, то укажите ее с использованием: а) функций распределения; б) функций плотности вероятностей.

**1.3.** Возможно ли в общем случае адекватное описание случайного процесса с помощью конечномерных законов распределения?

**1.4.** Можно ли определить математическое ожидание случайного процесса, если известна его: а) одномерная функция распределения; б) двумерная функция плотности вероятностей?

**1.5.** Как связаны между собой дисперсия и ковариационная матрица случайного процесса?



**1.6.** В чем заключается принципиальное отличие ковариационной функции случайного процесса от его ковариационной матрицы?

**1.7.** Можно ли ввести корреляционную функцию для скалярного случайного процесса? В случае положительного ответа, сформулируйте ее основные свойства.

**1.8.** Постройте семейство реализаций (траекторий) скалярного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) \triangleq (1 + t^2)^{-1} u(\omega), \quad t \in T = [a, b],$$

где  $u(\omega)$  — скалярная случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром  $\mu = 0,5$ .

О т в е т:  $(1 + t^2)^{-1} n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$

**1.9.** Докажите, что конечномерные распределения стохастически эквивалентных случайных процессов совпадают.

**1.10.** Являются ли стохастически эквивалентными скалярные случайные процессы  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , если  $T = [a, b]$  и:

а)  $\eta(t, \omega) \triangleq \xi(t, \omega) \{J(t - a) - J[t - (a + b)/2]\}$ ;

б)  $\eta(t, \omega) \triangleq \xi(t, \omega) \{1 - \delta[t - (a + b)/2]\}$ , где  $J(t)$  — единичная функция, а  $\delta(t)$  —  $\delta$ -функция Дирака.

О т в е т: а) нет; б) да.

**1.11.** Пусть  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  — неотрицательные скалярные случайные величины с известным совместным законом распределения, а скалярная случайная величина  $\gamma(\omega)$  не зависит от них и равномерно распределена на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Докажите, что любое конечномерное распределение скалярного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) \triangleq \alpha(\omega) \cos[\beta(\omega)t + \gamma(\omega)], \quad t \in T \subset \mathbb{R},$$

не зависит от сдвига по времени, т.е. для любых  $N \geq 1$ ,  $t_k \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ , и  $h \in \mathbb{R}$ , такого, что  $t_k + h \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ , имеет место

тождество

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_N | t_1, \dots, t_N) \equiv F_{\xi}(x_1, \dots, x_N | t_1 + h, \dots, t_N + h).$$

**1.12.** Для случайного процесса из задачи 1.8 определите математическое ожидание и дисперсию.

Ответ:  $m_{\xi}(t) = 1/2(1 + t^2)$ ;  $\sigma_{\xi}^2(t) = 1/2(1 + t^2)^2$ .

**1.13.** Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию скалярного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) \triangleq 2u(\omega) \sin(\nu t) + 3v(\omega)t^2 + 5, \quad t \in T,$$

где  $\nu$  — известный неслучайный параметр, а  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  — скалярные случайные величины с известными числовыми характеристиками:  $M[u(\omega)] = 1$ ;  $M[v(\omega)] = 2$ ;  $D[u(\omega)] = 0,1$ ;  $D[v(\omega)] = 0,9$ ;  $\rho(u(\omega); v(\omega)) = -0,3$ .

Ответ:

$$m_{\xi}(t) = 2 \sin(\nu t) + 6t^2 + 5;$$

$$\sigma_{\xi}^2(t) = 0,4 \sin^2(\nu t) + 8,1t^4 - 1,08t^2 \sin(\nu t);$$

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = 0,4 \sin(\nu t_1) \sin(\nu t_2) + 8,1t_1^2 t_2^2 - 0,54(t_1^2 \sin(\nu t_2) + t_2^2 \sin(\nu t_1)).$$

**1.14.** Пусть известны числовые характеристики двумерного случайного вектора  $u(\omega) = (u_1(\omega) \ u_2(\omega))^T$ :

$$M[u(\omega)] = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{cov}[u(\omega)] = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2,9 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию скалярного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) \triangleq u_1(\omega) \cos t + u_2(\omega) \sin t + t, \quad t \in T.$$

Ответ:

$$m_{\xi}(t) = -0,5 \cos t + \sin t + t;$$

$$\sigma_{\xi}^2(t) = 3 \cos^2 t + 2,9 \sin^2 t - 2 \sin 2t;$$

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = 3 \cos t_1 \cos t_2 + 2,9 \sin t_1 \sin t_2 - 2 \sin(t_1 + t_2).$$

**1.15.** Найдите математическое ожидание, ковариационную функцию, дисперсию и одномерный закон распределения скалярного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) \triangleq \alpha(\omega)t + \beta(\omega)t^2, \quad t \in T = [0, \infty),$$

где  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  — независимые скалярные случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2 = 0,25$ .

О т в е т:

$$m_\xi(t) \equiv 0; \quad K_\xi(t_1, t_2) = 0,25t_1t_2 + 0,25t_1^2t_2^2;$$

$$\sigma_\xi^2(t) = 0,25t^2(1+t^2); \quad f_\xi(x|t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^2(1+t^2)}} \exp \left[ -\frac{2x}{t^2(1+t^2)} \right].$$

**1.16.** Найдите ковариационную функцию и дисперсию скалярного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) \triangleq \sum_{k=1}^n [\alpha_k(\omega) \cos(\nu_k t) + \beta_k(\omega) \sin(\nu_k t)], \quad t \in T \subset \mathbb{R},$$

если  $\nu_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — известные неслучайные параметры, некоррелированные скалярные случайные величины  $\alpha_k(\omega)$ ,  $\beta_k(\omega)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , имеют нулевые математические ожидания и равные дисперсии  $D[\alpha_k(\omega)] = D[\beta_k(\omega)] = \sigma_k^2$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

О т в е т:

$$K_\xi(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \cos[\nu_k(t_2 - t_1)]; \quad \sigma_\xi^2(t) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2.$$

**1.17.** Найдите взаимную ковариационную функцию скалярных случайных процессов

$$\xi(t, \omega) \triangleq \alpha(\omega) \sin(\nu t) + \beta(\omega) \cos(\nu t), \quad t \in T \subset \mathbb{R},$$

$$\eta(t, \omega) \triangleq \alpha(\omega) \sin(\nu t) + \gamma(\omega) \cos(\nu t), \quad t \in T \subset \mathbb{R},$$

если  $\nu$  — известный неслучайный параметр, а скалярные случайные величины  $\alpha(\omega)$ ,  $\beta(\omega)$ ,  $\gamma(\omega)$  являются попарно некоррелированными.

О т в е т:  $K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \sin(\nu t_1) \sin(\nu t_2) \mathbf{D}[\alpha(\omega)]$ .

1.18. Пусть  $\xi_1(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\xi_2(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — два скалярных случайных процесса, для которых известны ковариационные функции  $K_{\xi_1}(t_1, t_2)$ ,  $K_{\xi_2}(t_1, t_2)$  и взаимная ковариационная функция  $K_{\xi_1 \xi_2}(t_1, t_2)$ . Найдите ковариационную функцию комплексного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) \triangleq [a(t) \xi_1(t, \omega) + b(t)] + i [c(t) \xi_2(t, \omega) + d(t)], \quad t \in T,$$

если  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $d(t)$  — известные неслучайные функции, определенные при  $t \in T$ .

О т в е т:

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = [a(t_1) a(t_2) K_{\xi_1}(t_1, t_2) + c(t_1) c(t_2) K_{\xi_2}(t_1, t_2)] + \\ + i [a(t_1) c(t_2) K_{\xi_1 \xi_2}(t_1, t_2) - c(t_1) a(t_2) K_{\xi_2 \xi_1}(t_1, t_2)].$$

## 2. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для построения конструктивной теории, позволяющей решать различные задачи как теоретического, так и прикладного характера, необходимо конкретизировать общее определение *случайного процесса* (см. 1). Рассмотрим важнейшие типы случайных процессов, представляющих особый интерес для приложений.

### 2.1. Стационарные случайные процессы

**Определение 2.1.** Случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , называют **стационарным в узком смысле**, если для любых  $N \geq 1$ ,  $t_k \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ , и  $h \in \mathbb{R}$ , такого, что  $t_k + h \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ , имеет место тождество

$$F_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N) \equiv F_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1 + h, \dots, t_N + h),$$

или, что то же самое,

$$f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N) \equiv f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1 + h, \dots, t_N + h).$$

Если стационарный в узком смысле случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , имеет *моменты первого и второго порядков*, то его *математическое ожидание*  $M[\xi(t, \omega)] \equiv m_{\xi}$  — постоянный вектор, а *ковариационная функция* зависит лишь от разности аргументов, т.е.

$$\text{cov}[\xi(t_1, \omega); \xi(t_2, \omega)] \equiv K_{\xi}(t_2 - t_1).$$

Действительно, полагая  $h = a - t$ , получаем

$$M[\xi(t, \omega)] = \int_{\mathbb{R}^n} x f_{\xi}(x | t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} x f_{\xi}(x | a) dx = m_{\xi}(a) \triangleq m_{\xi}.$$

Совершенно аналогично, полагая  $h = a - t_1$ , приходим ко второму тождеству:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\xi(t_1, \omega); \xi(t_2, \omega)] &= \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n} (x_{(1)} - m_\xi)(x_{(2)} - m_\xi)^T f_\xi(x_{(1)}, x_{(2)} | t_1, t_2) dx_{(1)} dx_{(2)} = \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n} (x_{(1)} - m_\xi)(x_{(2)} - m_\xi)^T f_\xi(x_{(1)}, x_{(2)} | a, (t_2 - t_1) + a) dx_{(1)} dx_{(2)} \triangleq \\ &\triangleq K_\xi(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

**Определение 2.2.** Случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют **стационарным в широком смысле**, если его математическое ожидание — постоянный вектор, а ковариационная функция зависит от разности аргументов, т.е.

$$M[\xi(t, \omega)] \equiv m_\xi = \text{const}, \quad K_\xi(t_1, t_2) \equiv K_\xi(t_2 - t_1).$$

Таким образом, из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле.

В той мере, в какой теория случайных процессов отражает явления реального мира, понятие стационарности случайного процесса отражает идею неизменности (стационарности) условий, в которых он протекает.

Заметим, что случайный процесс, рассмотренный в примере 1.3, является стационарным в широком смысле, если *случайные величины*  $\alpha(\omega)$ ,  $\beta(\omega)$  являются *некоррелированными*, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые *дисперсии*.

**Пример 2.1.** Пусть скалярные случайные величины  $\alpha(\omega)$ ,  $\beta(\omega)$ ,  $\gamma(\omega)$  обладают следующими свойствами:

- а)  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  положительны и  $f_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  — *плотность распределения (вероятностей) случайного вектора*  $(\alpha(\omega) \ \beta(\omega))^T$ ;
- б)  $\gamma(\omega)$  не зависит от  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  и распределена по равномерному закону на отрезке  $[0, \pi]$ .

Докажем, что случайный процесс

$$\xi(t, \omega) \triangleq \alpha(\omega) \cos[\beta(\omega)t + \gamma(\omega)], \quad t \in T = [a, b],$$

является стационарным в узком смысле, начав с определения его *одномерного закона распределения*.

Фиксируем значение  $t \in T$ . В этом случае сечением рассматриваемого случайного процесса является случайная величина

$$\xi(t, \omega) \triangleq \varphi(\alpha(\omega), \beta(\omega), \gamma(\omega)) \equiv \alpha(\omega) \cos[\beta(\omega)t + \gamma(\omega)],$$

представляющая собой функцию случайных величин  $\alpha(\omega)$ ,  $\beta(\omega)$ ,  $\gamma(\omega)$ . Функция плотности вероятностей случайного вектора  $(\alpha(\omega) \ \beta(\omega) \ \gamma(\omega))^T$  имеет вид

$$f_{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3) = f_{\alpha\beta}(x_1, x_2) f_{\gamma}(x_3).$$

Из равенства

$$y = \varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 \cos(x_2 t + x_3)$$

следует, что

$$x_3 = \varphi^{-1}(x_1, x_2, y) \equiv \begin{cases} \arccos \frac{y}{x_1} - x_2 t, & |y| \leq |x_1|; \\ 0, & |y| > |x_1|. \end{cases}$$

Поэтому, согласно теории построения законов *распределения функций случайных величин*, находим [XVI]

$$f_{\xi}(y|t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha\beta}(x_1, x_2) f_{\gamma}(\varphi^{-1}(x_1, x_2, y)) \left| \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y} \right| dx_1 dx_2,$$

где

$$\left| \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y} \right| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - y^2}}, & |x_1| > |y|; \\ 0, & |x_1| \leq |y|. \end{cases}$$

и не зависит от значения  $t$ . Кроме того, по условию случайная величина  $\gamma(\omega)$  распределена равномерно на отрезке  $[0, \pi]$ , т.е. функция плотности вероятностей  $f_\gamma$  инвариантна относительно сдвига аргумента. Таким образом,

$$f_\xi(y|t) \equiv f_\xi(y|t+h).$$

Для  $N > 1$  нужно определить закон распределения  $N$ -мерного случайного вектора с компонентами

$$\xi_k(\omega) \triangleq \varphi_k(\alpha(\omega), \beta(\omega), \gamma(\omega)) \equiv \alpha(\omega) \cos[\beta(\omega)t_k + \gamma(\omega)]$$

и доказать, что

$$f_\xi(y_1, \dots, y_N | t_1, \dots, t_N) \equiv f_\xi(y_1, \dots, y_N | t_1 + h, \dots, t_N + h).$$

Далее принципиальная схема рассуждений аналогична использованной в одномерном случае и потому не приводится.

## 2.2. Нормальные процессы

**Определение 2.3.** Случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , называют **нормальным**, или **гауссовым процессом**, если любые его конечномерные законы распределения являются нормальными.

Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $n$ -мерный нормальный процесс с математическим ожиданием  $m_\xi(t)$  и ковариационной функцией  $K_\xi(t, \tau)$ . В этом случае для любого  $N \geq 1$  и для любых  $t_k \in T$  известны значения его математического ожидания

$$m_\xi(t_k) \equiv \mathbf{M}[\xi(t_k, \omega)], \quad k = \overline{1, N},$$

и ковариационной функции

$$K_\xi(t_k, t_j) = \mathbf{M}[(\xi(t_k, \omega) - m_\xi(t_k))(\xi(t_j, \omega) - m_\xi(t_j))^T], \quad k, j = \overline{1, N}.$$



Введем в рассмотрение блочные матрицы-столбцы, которые при дальнейших рассуждениях будем называть **блочными векторами**:

$$\eta_N(\omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi(t_1, \omega) \\ \xi(t_2, \omega) \\ \vdots \\ \xi(t_N, \omega) \end{pmatrix}, \quad m_N \triangleq \begin{pmatrix} m_\xi(t_1) \\ m_\xi(t_2) \\ \vdots \\ m_\xi(t_N) \end{pmatrix}$$

и блочную матрицу

$$V_N \triangleq \begin{pmatrix} K_\xi(t_1, t_1) & K_\xi(t_1, t_2) & \dots & K_\xi(t_1, t_N) \\ K_\xi(t_2, t_1) & K_\xi(t_2, t_2) & \dots & K_\xi(t_2, t_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_\xi(t_N, t_1) & K_\xi(t_N, t_2) & \dots & K_\xi(t_N, t_N) \end{pmatrix}.$$

Не останавливаясь на анализе особых случаев, связанных с возможной линейной зависимостью сечений рассматриваемого случайного процесса, будем считать, что  $|V_N| \neq 0$ .

Блочный вектор  $\eta_N(\omega)$  является  $(nN)$ -мерным *случайным вектором* с математическим ожиданием  $m_N$  и ковариационной матрицей  $V_N$ . А так как  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — нормальный случайный процесс, то случайный вектор  $\eta_N(\omega)$  распределен по нормальному закону и

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{nN} |V_N|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (y - m_N)^T V_N^{-1} (y - m_N) \right]$$

является  $N$ -мерной *функцией плотности вероятностей* для *случайного процесса*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

Таким образом, любой конечномерный закон распределения нормального случайного процесса полностью определяется его математическим ожиданием и ковариационной функцией.

Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $n$ -мерный *стационарный* нормальный случайный процесс, то его математическое ожидание — постоянный  $n$ -мерный вектор, а аргументом ковариационной функции является параметр  $\tau \triangleq t_2 - t_1$ .

В силу центральной предельной теоремы [XVI] нормальные случайные процессы в ряде случаев оказываются предельными для сумм возрастающего числа случайных процессов.

### 2.3. Процессы с независимыми приращениями

**Определение 2.4.** Случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , называют **процессом с независимыми приращениями**, если для любых  $N > 1$  и  $t_k \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ , таких, что  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ , случайные величины

$$\xi(t_1, \omega), \quad \xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega), \quad \dots, \quad \xi(t_N, \omega) - \xi(t_{N-1}, \omega)$$

являются **независимыми**.

В практике научных исследований встречаются случайные процессы, родственные (в определенном смысле) случайным процессам с независимыми приращениями. Отметим некоторые из них.

1. Если  $n$ -мерные случайные векторы  $\xi(t_1, \omega)$ ,  $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$ ,  $\dots$ ,  $\xi(t_N, \omega) - \xi(t_{N-1}, \omega)$  являются, вообще говоря, зависимыми, но некоррелированными, то  $n$ -мерный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют **процессом с некоррелированными (ортгональными) приращениями**.

2. Если для любых  $N > 1$  и  $t_k \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ , закон распределения приращения  $\xi(t_{k+1}, \omega) - \xi(t_k, \omega)$  зависит лишь от  $t_{k+1} - t_k$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , то случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , с независимыми приращениями называют **процессом со стационарными независимыми приращениями**.

Случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , с независимыми приращениями полностью определен одномерным **законом распределения**  $f_\xi(x|t)$ , характеризующим случайный вектор  $\xi(t_1, \omega)$ , и двумерным законом распределения  $f_\xi(x_{(1)}, x_{(2)}|t_1, t_2)$ , характеризующим приращения  $\xi(t_{k+1}, \omega) - \xi(t_k, \omega)$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ .

**Пример 2.2.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , — случайный процесс с ортогональными приращениями и требуется определить его *ковариационную функцию*.

Полагая  $t_2 > t_1$ , имеем

$$\begin{aligned} K_{\xi}(t_1, t_2) &= \text{cov}[\xi(t_1, \omega); \xi(t_2, \omega)] = \\ &= \text{cov}[\xi(t_1, \omega); \xi(t_1, \omega) + (\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega))] = \\ &= \text{cov}[\xi(t_1, \omega); \xi(t_1, \omega)] + \\ &\quad + \text{cov}[\xi(t_1, \omega); \xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)] = \Sigma_{\xi}(t_1), \end{aligned}$$

где последние равенства следуют из свойств ковариации и некоррелированности случайных величин  $\xi(t_1, \omega)$  и  $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$ .

Рассуждая аналогично, при  $t_1 > t_2$  получаем

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \Sigma_{\xi}(t_2).$$

Таким образом, с учетом связи ковариационной функции случайного процесса и его *ковариационной матрицы*, имеем

$$K_{\xi}(t, s) = \begin{cases} \Sigma_{\xi}(t), & s \geq t; \\ \Sigma_{\xi}(s), & s \leq t. \quad \# \end{cases}$$

Отметим, что процесс с независимыми приращениями является процессом с ортогональными приращениями. Поэтому результат, полученный при рассмотрении примера 2.2, имеет место для любого процесса с независимыми приращениями.

**Пример 2.3.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , — процесс с ортогональными приращениями. Для  $t, s \in T$ ,  $s < t$ , положим

$$R_{\xi}(t - s) \triangleq \text{cov}[\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega); \xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)].$$

Так как исходный случайный процесс является процессом с ортогональными приращениями и  $s < t$ , то

$$\text{cov}[\xi(s, \omega); \xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)] \equiv 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 R_{\xi}(t-s) &= \text{cov}[\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega); \xi(t, \omega)] = \\
 &= \text{cov}[\xi(t, \omega); \xi(t, \omega)] - \text{cov}[\xi(s, \omega); \xi(t, \omega)] = \\
 &= \Sigma_{\xi}(t) - \text{cov}[\xi(s, \omega); (\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)) + \xi(s, \omega)] = \\
 &= \Sigma_{\xi}(t) - \text{cov}[\xi(s, \omega); \xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)] - \\
 &\quad - \text{cov}[\xi(s, \omega); \xi(s, \omega)] = \Sigma_{\xi}(t) - \Sigma_{\xi}(s),
 \end{aligned}$$

т.е. ковариационная матрица приращения  $\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)$  равна разности ковариационных матриц соответствующих сечений  $\xi(t, \omega)$  и  $\xi(s, \omega)$  исходного случайного процесса. #

Если воспользоваться формальным определением функции  $R_{\xi}(t-s)$ , приведенным в примере 2.3, то при  $s < t$  и  $s, t > 0$

$$\begin{aligned}
 R_{\xi}(t) &= \text{cov}[\xi(t, \omega) - \xi(0, \omega); \xi(t, \omega) - \xi(0, \omega)], \\
 R_{\xi}(s) &= \text{cov}[\xi(s, \omega) - \xi(0, \omega); \xi(s, \omega) - \xi(0, \omega)].
 \end{aligned}$$

Но в этом случае

$$\begin{aligned}
 R_{\xi}(t-s) &= \text{cov}[(\xi(t, \omega) - \xi(0, \omega)) - \\
 &\quad - (\xi(s, \omega) - \xi(0, \omega)); (\xi(t, \omega) - \xi(0, \omega)) - (\xi(s, \omega) - \xi(0, \omega))] = \\
 &= R_{\xi}(t) + R_{\xi}(s) - 2 \text{cov}[\xi(s, \omega) - \xi(0, \omega); \xi(t, \omega) - \xi(0, \omega)] = \\
 &= R_{\xi}(t) + R_{\xi}(s) - 2 \text{cov}[\xi(s, \omega); \xi(t, \omega) - \xi(0, \omega)].
 \end{aligned}$$

А так как

$$\begin{aligned}
 \text{cov}[\xi(s, \omega); \xi(t, \omega) - \xi(0, \omega)] &= \\
 &= \text{cov}[\xi(s, \omega); (\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)) + (\xi(s, \omega) - \xi(0, \omega))] = \\
 &= \text{cov}[\xi(s, \omega); \xi(s, \omega) - \xi(0, \omega)] = \\
 &= \text{cov}[(\xi(s, \omega) - \xi(0, \omega)) + \xi(0, \omega); \xi(s, \omega) - \xi(0, \omega)] = R_{\xi}(s),
 \end{aligned}$$

то приходим к равенству

$$R_{\xi}(t-s) = R_{\xi}(t) - R_{\xi}(s),$$

которое имеет место для любых  $t, s \in T$ , удовлетворяющих неравенству  $s < t$ . Можно показать, что если  $R_\xi(t)$  — непрерывная функция, то

$$R_\xi(t) = At.$$

Кроме того, для процесса с ортогональными приращениями  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , такого, что

$$\xi(0, \omega) \equiv 0,$$

имеют место равенства

$$R_\xi(t) = \Sigma_\xi(t) = At.$$

Значит, ковариационная функция равна

$$K_\xi(s, t) = \begin{cases} At, & s \geq t; \\ As, & s \leq t, \end{cases}$$

или

$$K_\xi(s, t) = A \min\{t; s\}.$$

## 2.4. Винеровский процесс

**Определение 2.5.** Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , —  $n$ -мерный случайный процесс, то его называют **винеровским процессом**, выходящим из  $0$ , если выполнены три условия:

- 1)  $\xi(0, \omega) \equiv 0$ ;
- 2) для любых  $N > 1$  и  $t_k \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ , таких, что  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ , случайные векторы  $\xi(t_1, \omega)$ ,  $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$ ,  $\dots$ ,  $\xi(t_N, \omega) - \xi(t_{N-1}, \omega)$  являются независимыми;
- 3) для любых  $t_1, t_2 \in T$ , таких, что  $0 \leq t_1 < t_2$ , случайный вектор  $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$  распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $(t_2 - t_1)\sigma^2 I_n$ , где  $I_n \in M_n(\mathbb{R})$  — единичная матрица.

Винеровский процесс, или процесс броуновского движения, имел большое значение при разработке теории случайных процессов. Многие распределения, используемые в теории управ-

вления, можно моделировать процессами, порождаемыми винеровскими процессами.

В 1827 г. английский ботаник Р. Броун заметил, что маленькие частицы диаметром около микрона, погруженные в жидкость, находятся в постоянном хаотическом движении. В 1905 г. А. Эйнштейн объяснил это движение как результат столкновения частиц с молекулами жидкости. Он разработал математическую модель броуновского движения и определил число Авогадро, равное числу молекул в объеме, занятом молекул газа.

Строгий математический анализ броуновского движения дал Н. Винер в 1923 г. Эвристически броуновское движение можно объяснить следующим образом. Рассмотрим отдельную частицу, погруженную в жидкость, обозначив через  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$ ,  $\xi_3(t)$  ее координаты в момент времени  $t > 0$ . Будем считать, что в начальный момент времени  $t = 0$  она находится в начале координат, т.е.  $\xi_k(0) = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Движение частицы на любом конечном временном интервале является результатом изменения импульса (количества движения) вследствие практически бесконечно большого числа независимых друг от друга соударений с молекулами жидкости. Поэтому естественно считать, что применима центральная предельная теорема [XVI]. Кроме того, можно допустить, что:

а) смещения частицы в ортогональных направлениях происходят независимо;

б)  $\xi_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2(t)$ ;

в) смещение частицы в каждом  $k$ -ом ортогональном направлении на различных непересекающихся временных интервалах  $0 < t_1 < \dots < t_N$  представляется независимыми случайными величинами  $\xi_k(t_1)$ ,  $\xi_k(t_2) - \xi_k(t_1)$ ,  $\dots$ ,  $\xi_k(t_N) - \xi_k(t_{N-1})$ ;

г) смещение частицы в каждом  $k$ -ом ортогональном направлении на временном интервале  $(t, t+h)$ , равное  $\xi_k(t+h) - \xi_k(t)$ , имеет ту же функцию распределения, что и смещение  $\xi_k(h) - \xi_k(0)$ , где  $\xi_k(0) \equiv 0$ .

Отметим также, что дисперсия  $\sigma^2(t) = D[\xi_k(t)]$  обладает любопытным свойством:

$$\sigma^2(t) = \sigma^2 t, \quad t \geq 0,$$

где постоянную  $\sigma^2$  интерпретируют как **коэффициент диффузии**. Действительно, согласно допущению в), случайные величины  $\xi_k(t)$  и  $\xi_k(t+h) - \xi_k(t)$  являются независимыми. Поэтому

$$D[\xi_k(t+h)] = D[\xi_k(t)] + D[\xi_k(t+h) - \xi_k(t)],$$

или

$$\sigma^2(t+h) \equiv \sigma^2(t) + D[\xi_k(t+h) - \xi_k(t)].$$

А так как, согласно допущению г),

$$D[\xi_k(t+h) - \xi_k(t)] = D[\xi_k(h)],$$

то

$$\sigma^2(t+h) \equiv \sigma^2(t) + \sigma^2(h),$$

откуда и следует отмеченное свойство (см. пример 2.3). Заметим, что этот результат является следствием из рассмотренных свойств процессов с ортогональными приращениями.

**Замечание 2.1.** Если в определении винеровского процесса условие  $\xi(0, \omega) \equiv 0$  заменить условием  $\xi(0, \omega) \equiv x$ , где  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ , то получим определение винеровского процесса, выходящего из точки  $x$ .

**Замечание 2.2.** Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — винеровский процесс с коэффициентом диффузии  $\sigma^2$ , то случайный процесс  $\xi(t, \omega)/\sqrt{\sigma^2}$ ,  $t \in T$ , называют **стандартным винеровским процессом**. Для любых  $t_1, t_2 \in T$ , таких, что  $0 < t_1 < t_2$ , случайный вектор  $\xi(t_2, \omega)\sqrt{\sigma^2} - \xi(t_1, \omega)\sqrt{\sigma^2}$  распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $(t_2 - t_1)I_n$ . #

Следует также отметить два характерных свойства винеровских процессов.

1. Винеровский процесс является *процессом со стационарными приращениями*.

2. Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — винеровский процесс и  $\sigma^2$  — его коэффициент диффузии, то для любых  $t_1, t_2 \in T$ , таких, что  $0 \leq t_1 < t_2$ , ковариационная функция равна

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = t_1 \sigma^2 I_n,$$

так как винеровский процесс является *процессом с независимыми приращениями*.

**Пример 2.4.** Докажем, что винеровский процесс является *нормальным процессом*.

Для упрощения дальнейших рассуждений ограничимся рассмотрением скалярного винеровского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , предполагая, что он является стандартным. Докажем, что для любых  $N \geq 1$  и  $\{t_k\}_{k=1}^N \in T$ , таких, что  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ , случайный вектор

$$\xi(\omega) = (\xi(t_1, \omega) \ \xi(t_2, \omega) \ \dots \ \xi(t_N, \omega))^T$$

распределен по нормальному закону.

Пусть далее

$$t_0 = 0;$$

$$\eta_k(\omega) \triangleq \xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega), \quad k = \overline{1, N};$$

$$\eta(\omega) \triangleq (\eta_1(\omega) \ \eta_2(\omega) \ \dots \ \eta_N(\omega))^T.$$

Согласно определению 2.5 винеровского процесса, *плотность распределения (вероятностей)* случайного вектора  $\eta(\omega)$  является плотностью  $N$ -мерного нормального распределения [XVI], которая в данном случае имеет вид

$$f_{\eta}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{k=1}^N \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \exp \left[ -\frac{x_k^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right].$$



Если ввести в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_N(\mathbb{R}),$$

то, согласно общей теории построения законов распределения функций случайных величин [XVI], с учетом очевидных равенств

$$\eta(\omega) = A\xi(\omega), \quad \det A = 1$$

имеем

$$f_{\xi}(y_1, y_2, \dots, y_N) \equiv f_{\xi}(y) = f_{\eta}(Ay) = f_{\eta}(y_1, y_2 - y_1, \dots, y_N - y_{N-1}).$$

Таким образом, если  $y_0 \triangleq 0$ , то  $N$ -мерная плотность распределения (вероятностей)

$$\begin{aligned} f_{\xi}(y_1, y_2, \dots, y_N) &= \\ &= \prod_{k=1}^N \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \exp \left[ -\frac{(y_k - y_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right] = \\ &= \prod_{k=1}^N \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \exp \left[ -\sum_{k=1}^N \frac{(y_k - y_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right] \end{aligned}$$

является плотностью  $N$ -мерного нормального распределения, что и требовалось доказать.

## 2.5. Марковские процессы

В теоретических и прикладных исследованиях, связанных с марковскими процессами, для их конечномерных ( $N$ -мерных) функций плотности вероятностей  $f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N)$  используют сокращенные обозначения  $f(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)})$ .

**Определение 2.6.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , —  $n$ -мерный случайный процесс, конечномерные функции плотности вероятностей которого (возможно обобщенные)  $f(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)})$  заданы для любых  $N \geq 1$  и  $t_k \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ , таких, что  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ . Если при этом условная функция плотности вероятностей имеет вид

$$f(x_{(N)} | x_{(N-1)}, \dots, x_{(1)}) \equiv f(x_{(N)} | x_{(N-1)}),$$

то  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют **марковским процессом**.

В связи с тем, что марковские процессы занимают особое положение в теории случайных процессов и ее приложениях, они будут рассмотрены отдельно. На данном этапе отметим лишь, что любой конечномерный закон распределения марковского процесса выражается через его двумерный закон распределения, так как

$$\begin{aligned} f(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}) &= \\ &= f(x_{(N)} | x_{(N-1)}, \dots, x_{(1)}) f(x_{(1)}, \dots, x_{(N-1)}) = \\ &= f(x_{(N)} | x_{(N-1)}) f(x_{(1)}, \dots, x_{(N-1)}) = \dots = \\ &= f(x_{(N)} | x_{(N-1)}) f(x_{(N-1)} | x_{(N-2)}) \dots f(x_{(2)} | x_{(1)}) f(x_{(1)}). \end{aligned}$$

**Пример 2.5.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — винеровский скалярный процесс, выходящий из нуля. Для винеровского скалярного процесса  $N$ -мерная функция плотности вероятностей  $f_\xi(x_1, \dots, x_N | t_1, \dots, t_N)$  равна (см. пример 2.4)

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_N) &= \\ &= \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \exp \left[ -\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right]; \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 f(x_N | x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, x_1) &= \\
 &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_N} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{f(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_N - t_{N-1})}} \exp \left[ -\frac{(x_N - x_{N-1})^2}{2(t_N - t_{N-1})} \right] = f(x_N | x_{N-1})
 \end{aligned}$$

и, согласно определению 2.6, винеровский процесс является марковским процессом.

## 2.6. Пуассоновский процесс

**Определение 2.7.** *Пуассоновским процессом* с параметром  $\lambda > 0$  называют скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , обладающий следующими свойствами:

- 1)  $\xi(0, \omega) \equiv 0$ ;
- 2) для любых  $N > 1$  и  $t_k \in T$ ,  $k = \overline{1, N}$ , таких, что  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$  случайные величины  $\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , являются независимыми;
- 3) для любых  $t_1, t_2 \in T$ , таких, что  $0 \leq t_1 < t_2$ , случайная величина  $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$  распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda(t_2 - t_1)$ , т.е.

$$\begin{aligned}
 P[\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega) = k] &= \\
 &= \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
 \end{aligned}$$

**Замечание 2.3.** Пуассоновский процесс играет важную роль в различных приложениях теории случайных процессов, в частности, в теории массового обслуживания.

## Вопросы и задачи

**2.1.** Докажите, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот.

**2.2.** Является ли винеровский процесс: а) гауссовским процессом; б) марковским процессом?

**2.3.** Определите  $N$ -мерный закон распределения пуассоновского процесса.

**2.4.** Какими общими свойствами обладают винеровские и пуассоновские процессы?

**2.5.** Докажите, что пуассоновский процесс является марковским.

**2.6.** Пусть  $\nu$  — неслучайный параметр, а  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  — некоррелированные скалярные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковой дисперсией, равной  $\sigma^2$ . Является ли скалярный случайный процесс

$$\xi(t, \omega) \triangleq \alpha(\omega) \sin(\nu t) + \beta(\omega) \cos(\nu t), \quad t \in T \subset \mathbb{R} :$$

а) стационарным в широком смысле; б) стационарным в узком смысле?

Ответ: а) да, так как для такого процесса  $m_\xi(t) \equiv 0$  и  $K_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos[\nu(t_2 - t_1)]$ ; б) в общем случае нет, так как

$$f_\xi(x_1, x_2 | t_1, t_2) = \frac{1}{|\sin[\nu(t_2 - t_1)]|} \times \\ \times f_{\alpha\beta}\left(\frac{x_1 \sin(\nu t_2) - x_2 \sin(\nu t_1)}{\sin[\nu(t_2 - t_1)]}, \frac{x_2 \cos(\nu t_2) - x_1 \cos(\nu t_1)}{\sin[\nu(t_2 - t_1)]}\right).$$

**2.7.** Решите задачу 2.6, если известна совместная функция плотности вероятностей случайных величин  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$ :

$$f_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} \frac{24}{\pi} x^2 y^2, & x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Ответ: а) да, так как для такого случайного процесса  $m_\xi(t) \equiv 0$  и  $K_\xi(t_1, t_2) = (3/8) \cos[\nu(t_2 - t_1)]$ ; б) нет, так как

$$f_\xi(x_1, x_2 | t_1, t_2) = \frac{24 [x_1 \sin(\nu t_2) - x_2 \sin(\nu t_1)]^2 [x_1 \cos(\nu t_1) - x_2 \cos(\nu t_2)]^2}{\pi |\sin[\nu(t_2 - t_1)]|^5}.$$

## 2.8. Является ли случайный процесс

$$\eta(t, \omega) \triangleq \xi(t, \omega) + u(\omega), \quad t \in T \subset \mathbb{R},$$

стационарным в широком смысле, если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стационарный случайный процесс и: а) для любого фиксированного  $t \in T$  случайные векторы  $\xi(t, \omega)$  и  $u(\omega)$  являются независимыми; б)  $u(\omega) \triangleq \xi(t_0, \omega)$ , где  $t_0 \in T$ .

Ответ: а) да; б) нет.

2.9. Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный нормальный стационарный в узком смысле случайный процесс. Найдите одномерную и двумерную функции плотности вероятностей этого случайного процесса.

Ответ:

$$f_\xi(x | t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K_\xi(0)}} \exp \left[ -\frac{(x - m_\xi)^2}{2K_\xi(0)} \right];$$

$$f_\xi(x_1, x_2 | t_1, t_2) \equiv f_\xi(x_1, x_2 | \tau) = \frac{e^z}{2\pi \sqrt{K_\xi^2(0) - K_\xi^2(\tau)}},$$

где

$$z = \frac{[(x_1 - m_\xi)^2 + (x_2 - m_\xi)^2] K_\xi(0) - 2K_\xi(\tau) (x_1 - m_\xi)(x_2 - m_\xi)}{-2[K_\xi^2(0) - K_\xi^2(\tau)]}.$$

**2.10.** Ковариационная функция  $K_{\vartheta}(\tau)$  угла крена корабля  $\vartheta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , имеет вид

$$K_{\vartheta}(\tau) = \alpha e^{-\beta|\tau|} \cos(\nu\tau).$$

Определите вероятность того, что в момент времени  $t_2 = t_1 + \tau$  угол крена будет больше  $15^\circ$ , если  $\vartheta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный нормальный стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и  $\vartheta(t_1, \omega) \equiv 5^\circ$ ,  $\tau = 2$  с,  $\alpha = 30$  град<sup>2</sup>,  $\beta = 0,02$  1/с,  $\nu = 0,75$  1/с.

О т в е т:  $P[\vartheta(t_1 + \tau, \omega) > 15^\circ | \vartheta(t_1, \omega) \equiv 5^\circ] = 0,0037$ .

У к а з а н и е: использовать результаты решения задачи 2.9.

**2.11.** Использование эхолота с корабля, испытывающего бортовую качку, возможно, если угол крена корабля  $\vartheta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет условию:  $|\vartheta(t, \omega)| \leq \vartheta_0$ . Определите вероятность того, что второе измерение возможно через  $\tau_0$  секунд после удачного первого измерения, если угол крена корабля — скалярный нормальный стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и известной ковариационной функцией  $K_{\vartheta}(\tau)$ .

О т в е т:

$$\begin{aligned} P[|\vartheta(t + \tau_0, \omega)| \leq \vartheta_0 | |\vartheta(t, \omega)| \leq \vartheta_0] = \\ = \sqrt{\frac{K_{\vartheta}(0)}{2\pi[K_{\vartheta}^2(0) - K_{\vartheta}^2(\tau_0)]}} \left\{ \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \exp\left[-\frac{x^2}{2K_{\vartheta}(0)}\right] dx \right\}^{-1} \times \\ \times \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \exp\left[-\frac{(x_1^2 + x_2^2)K_{\vartheta}(0) - 2x_1x_2K_{\vartheta}(\tau_0)}{2[K_{\vartheta}^2(0) - K_{\vartheta}^2(\tau_0)]}\right] dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

У к а з а н и е: использовать результаты решения задачи 2.9.

**2.12.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — гауссовский стационарный скалярный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и известной ковариационной функцией  $K_{\xi}(\tau)$ . Определите

математическое ожидание случайного процесса

$$\eta(t, \omega) \triangleq \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\xi(t, \omega) \xi(t + \tau, \omega)}{|\xi(t, \omega) \xi(t + \tau, \omega)|} \right], \quad t \in T,$$

считая  $\tau$  параметром.

О т в е т:  $M[\eta(t, \omega)] = \pi^{-1} \arccos[-K_{\xi}(\tau) K_{\xi}^{-1}(0)]$ .

**2.13.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, b]$ , — винеровский скалярный процесс, выходящий из нуля и имеющий единичный коэффициентом диффузии. Докажите, что

$$\mathbf{P} \left[ \max_{t \in T} \xi(t, \omega) \geq a \right] = 2\mathbf{P} [\xi(b, \omega) \geq a] = \sqrt{\frac{2}{\pi b}} \int_a^{\infty} \exp \left( -\frac{x^2}{2b} \right) dx.$$

### 3. ЭЛЕМЕНТЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Стохастический анализ** — это раздел математики, в котором *случайные функции* и их обобщения изучают методами математического анализа. Термин „стохастический анализ“ часто употребляют для наименования лишь основ стохастического анализа, объединяющих теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление и их непосредственные приложения.

Понятие сходимости является основополагающим не только в классическом математическом, но и в стохастическом анализе. В теории *случайных процессов* рассматривают различные виды сходимости и, как следствие, различные виды непрерывности, дифференцируемости и т.д. Напомним, что в теории вероятностей используют следующие виды сходимости. Говорят, что последовательность случайных величин  $\{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$  сходится к случайной величине  $\xi(\omega)$ :

- 1) по вероятности, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P[|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon] = 0;$$

- 2) сильно, или почти наверное, если

$$P\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k(\omega) = \xi(\omega)\right] = 1;$$

- 3) в среднем квадратичном, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M[(\xi_k(\omega) - \xi(\omega))^2] = 0.$$

Далее используем лишь одно понятие сходимости — сходимость в смысле среднего квадратичного, или СК-сходимость. Это связано с тем, что понятие СК-сходимости является наиболее приемлемым с точки зрения приложений. В соответствии



с этим авторы сочли возможным сохранить стандартные обозначения математического анализа и в дальнейшем изложении опускать пояснения типа „в смысле средней квадратичной сходимости“, если это не может вызвать недоразумений.

Следует также отметить, что при использовании СК-сходимости изучение векторных случайных процессов в значительной степени сводится к изучению их *координатных случайных процессов*, а анализ существования *предела, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости* скалярных случайных процессов — к изучению соответствующих свойств их *математических ожиданий и ковариационных функций*.

### 3.1. Сходимость в смысле среднего квадратичного (СК-сходимость)

**Определение 3.1.** *Пределом  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega) \triangleq (\xi_1(t, \omega) \dots \xi_n(t, \omega))^T$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , при  $t \rightarrow t_0 \in T$  в смысле СК-сходимости называют случайный вектор  $\eta(\omega) \triangleq (\eta_1(\omega) \dots \eta_n(\omega))^T$  и обозначают*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega) = \eta(\omega),$$

если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M[||\xi(t, \omega) - \eta(\omega)||^2] = 0,$$

где

$$||\xi(t, \omega) - \eta(\omega)|| \triangleq \sqrt{\sum_{k=1}^n [\xi_k(t, \omega) - \eta_k(\omega)]^2} \quad —$$

*евклидова норма  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega) - \eta(\omega)$ ,  $t \in T$ .*

Приняв за основу понятие СК-сходимости, мы тем самым определили выбор нормы [IV] для анализа случайных процес-

сов:

$$\|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}} \triangleq \sqrt{\mathbf{M}[\|\xi(t, \omega)\|^2]} \equiv \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} x^T x f_{\xi}(x|t) dx}.$$

В соответствии с этим, в данной книге ограничимся рассмотрением только таких случайных процессов, для которых указанная **СК-норма** является конечной. Случайные процессы, удовлетворяющие этому условию, называют **случайными процессами второго порядка**.

Таким образом, видим, что в основе понятия сходимости в смысле среднего квадратичного лежит понятие СК-нормы, которую мы ввели как неотрицательную скалярную функцию параметра  $t \in T$ . Убедимся в том, что при любом фиксированном  $t \in T$  эта функция действительно определяет норму. Для этого рассмотрим множество  $H_T^n(\mathbb{R})$   $n$ -мерных случайных процессов второго порядка, определенных на  $T \subset \mathbb{R}$ , и будем считать, что **случайные процессы**  $\xi(t, \omega), t \in T$ , и  $\eta(t, \omega), t \in T$ , из этого множества **равны**, если

$$\|\xi(t, \omega) - \eta(t, \omega)\|_{\text{СК}} = 0, \quad t \in T.$$

В этом случае множество  $H_T^n(\mathbb{R})$  со стандартными операциями сложения своих элементов и их умножения на число является линейным пространством, а  $n$ -мерный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega), t \in T$ , является нулевым, т.е. является нейтральным элементом линейного пространства  $H_T^n(\mathbb{R})$ , если

$$\|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}} = 0, \quad t \in T.$$

Пусть теперь для любых двух элементов  $\xi(t, \omega), t \in T$ , и  $\eta(t, \omega), t \in T$ , линейного пространства  $H_T^n(\mathbb{R})$  определена скалярная функция параметра  $t \in T$ :

$$\begin{aligned} (\xi(t, \omega), \eta(t, \omega))_{\text{СК}} &\triangleq \mathbf{M}[\xi^T(t, \omega) \eta(t, \omega)] \equiv \\ &\equiv \int \int_{\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n} x^T y f_{\xi}(x, y|t) dx dy, \end{aligned}$$

где  $f_\varepsilon(x, y|t)$  — *одномерная функция плотности вероятностей*  $(2n)$ -мерного случайного процесса

$$\varepsilon(t, \omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi(t, \omega) \\ \eta(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad t \in T.$$

Непосредственной проверкой читатель может убедиться в том, что при каждом фиксированном  $t \in T$  скалярная функция  $(\cdot, \cdot)_{\text{СК}}$  удовлетворяет аксиомам скалярного умножения:

1) для любого  $\xi(t, \omega) \in H_T^n(\mathbb{R})$  имеет место неравенство

$$(\xi(t, \omega), \xi(t, \omega))_{\text{СК}} \geq 0,$$

причем равенство  $(\xi(t, \omega), \xi(t, \omega))_{\text{СК}} \equiv 0$  выполняется тогда и только тогда, когда  $\xi(t, \omega) = 0$ ;

2) для любых  $\xi(t, \omega), \eta(t, \omega) \in H_T^n(\mathbb{R})$  и  $t \in T$  имеет место равенство

$$(\xi(t, \omega), \eta(t, \omega))_{\text{СК}} = (\eta(t, \omega), \xi(t, \omega))_{\text{СК}};$$

3) для любых  $\xi(t, \omega), \eta(t, \omega) \in H_T^n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $t \in T$  имеет место равенство

$$(\lambda \xi(t, \omega), \eta(t, \omega))_{\text{СК}} = \lambda (\xi(t, \omega), \eta(t, \omega))_{\text{СК}};$$

4) для любых  $\xi(t, \omega), \eta(t, \omega), \alpha(t, \omega) \in H_T^n(\mathbb{R})$  и  $t \in T$  имеет место равенство

$$(\xi(t, \omega) + \eta(t, \omega), \alpha(t, \omega))_{\text{СК}} = (\xi(t, \omega), \alpha(t, \omega))_{\text{СК}} + (\eta(t, \omega), \alpha(t, \omega))_{\text{СК}}.$$

Так как линейное пространство  $H_T^n(\mathbb{R})$  с введенным скалярным произведением является евклидовым пространством, то при любом фиксированном  $t \in T$  норма может быть введена стандартным способом [IV]:

$$\|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}} \triangleq \sqrt{(\xi(t, \omega), \xi(t, \omega))_{\text{СК}}},$$

и при этом автоматически удовлетворяются все аксиомы нормы:

1) для любого  $\xi(t, \omega) \in H_T^n(\mathbf{R})$  имеет место неравенство

$$\|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}} \geq 0,$$

причем  $\|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}} = 0$ ,  $t \in T$ , тогда и только тогда, когда  $\xi(t, \omega) = 0$ ;

2) для любых  $\xi(t, \omega) \in H_T^n(\mathbf{R})$ ,  $t \in T$  и  $\lambda \in \mathbf{R}$  имеет место равенство

$$\|\lambda \xi(t, \omega)\|_{\text{СК}} = |\lambda| \|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}}, \quad t \in T;$$

3) для любых  $\xi(t, \omega), \eta(t, \omega) \in H_T^n(\mathbf{R})$  и  $t \in T$  имеет место неравенство треугольника

$$\|\xi(t, \omega) + \eta(t, \omega)\|_{\text{СК}} \leq \|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}} + \|\eta(t, \omega)\|_{\text{СК}}.$$

Заметим, что СК-норма и порождающее ее скалярное произведение, введенное на линейном пространстве  $n$ -мерных случайных процессов  $H_T^n(\mathbf{R})$ , обладают известными свойствами [IV]. В частности, для любых  $\xi(t, \omega), \eta(t, \omega) \in H_T^n(\mathbf{R})$  выполняется неравенство Коши — Буняковского

$$|(\xi(t, \omega), \eta(t, \omega))_{\text{СК}}| \leq \|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}} \|\eta(t, \omega)\|_{\text{СК}}, \quad t \in T.$$

**Теорема 3.1.**  $n$ -мерный случайный вектор

$$\eta(\omega) \triangleq \begin{pmatrix} \eta_1(\omega) \\ \vdots \\ \eta_n(\omega) \end{pmatrix}$$

является пределом  $n$ -мерного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi_1(t, \omega) \\ \vdots \\ \xi_n(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

при  $t \rightarrow t_0 \in T$  тогда и только тогда, когда для любого  $k = \overline{1, n}$  случайная величина  $\eta_k(\omega)$  является пределом при  $t \rightarrow t_0$  скалярного случайного процесса  $\xi_k(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

◀ **Необходимость.** Обозначим через

$$\mathring{V}(t_0, \delta) \triangleq \{t \in T \subset \mathbb{R} : 0 < |t - t_0| < \delta\}$$

проколотую  $\delta$ -окрестность точки  $t_0 \in T$ . Пусть существует

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega) = \eta(\omega),$$

т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что

$$\mathbf{M}[\|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)\|^2] < \varepsilon, \quad t \in \mathring{V}(t_0, \delta).$$

А так как для любого  $k = \overline{1, n}$  имеет место неравенство

$$|\xi_k(t, \omega) - \eta_k(\omega)|^2 \leq \sum_{m=1}^n [\xi_m(t, \omega) - \eta_m(\omega)]^2 = \|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)\|^2,$$

то очевидно, что

$$\mathbf{M}[|\xi_k(t, \omega) - \eta_k(\omega)|^2] < \varepsilon, \quad t \in \mathring{V}(t_0, \delta), \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, из существования предела

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega) = \eta(\omega)$$

следует существование пределов

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi_k(t, \omega) = \eta_k(\omega), \quad k = \overline{1, n}.$$

**Достаточность.** Пусть для  $k = \overline{1, n}$  существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi_k(t, \omega) = \eta_k(\omega),$$

т.е. для любых  $\varepsilon > 0$  и  $k = \overline{1, n}$  существует  $\delta_k(\varepsilon) > 0$ , такое, что

$$\mathbf{M}[|\xi_k(t, \omega) - \eta_k(\omega)|^2] < \frac{\varepsilon}{n}, \quad t \in \mathring{V}(t_0, \delta_k).$$

Если

$$\delta(\varepsilon) \triangleq \min_{k=1, n} \{\delta_k(\varepsilon)\},$$

то при  $t \in \overset{\circ}{V}(t_0, \delta)$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)\|^2] &= \mathbf{M}\left[\sum_{k=1}^n |\xi_k(t, \omega) - \eta_k(\omega)|^2\right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{M}[|\xi_k(t, \omega) - \eta_k(\omega)|^2] < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, из существования пределов

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi_k(t, \omega) = \eta_k(\omega), \quad k = \overline{1, n},$$

следует существование предела

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega) = \eta(\omega),$$

и теорема доказана. ►

**Определение 3.2.**  $n$ -мерный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , называют **пределом последовательности**  $n$ -мерных **случайных процессов**  $\{\xi_{(m)}(t, \omega), t \in T \subset \mathbb{R}\}_{m=1}^{\infty}$  и обозначают

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{(m)}(t, \omega) = \xi(t, \omega), \quad t \in T,$$

если существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{M}[\|\xi_{(m)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)\|^2] = 0, \quad t \in T,$$

где

$$\xi_{(m)}(t, \omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi_{(m)1}(t, \omega) \\ \vdots \\ \xi_{(m)n}(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad \xi(t, \omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi_1(t, \omega) \\ \vdots \\ \xi_n(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad t \in T.$$

**Теорема 3.2.**  $n$ -мерный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является пределом последовательности  $n$ -мерных случайных процессов  $\{\xi_{(m)}(t, \omega), t \in T\}_{m=1}^{\infty}$  тогда и только тогда, когда для любого  $k = \overline{1, n}$  скалярный случайный процесс  $\xi_k(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является пределом последовательности скалярных случайных процессов  $\{\xi_{(m)k}(t, \omega), t \in T\}_{m=1}^{\infty}$ .

◀ Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1. ▶

Как следует из теорем 3.1, 3.2, сходимость векторного случайного процесса и сходимость последовательности векторных случайных процессов эквивалентны сходимости координатных скалярных случайных процессов и их последовательностей. Поэтому далее основное внимание уделено скалярным случайным процессам.

**Пример 3.1.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — винеровский скалярный процесс, выходящий из нуля и имеющий единичный коэффициент диффузии. Пусть  $[a, b] \subset T$  и  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ . Покажем, что в смысле СК-сходимости существует предел

$$\lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N |\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)|^2 = b - a.$$

Согласно определению винеровского процесса, случайные величины  $\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , являются независимыми, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии

$$\mathbf{D}[\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)] = \mathbf{M}[|\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)|^2] = t_k - t_{k-1}.$$

А так как

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left[\sum_{k=1}^N |\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)|^2\right] &= \\ &= \sum_{k=1}^N \mathbf{M}[|\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)|^2] = \sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1}) = b - a, \end{aligned}$$

то очевидно, что

$$\begin{aligned} \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} M \left[ \left( \sum_{k=1}^N |\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)|^2 - (b-a) \right)^2 \right] = \\ = \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} D \left[ \sum_{k=1}^N |\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)|^2 \right] = \\ = \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N D [|\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)|^2]. \end{aligned}$$

Кроме того, случайная величина

$$\eta_k(\omega) = \frac{\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}$$

распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а случайная величина  $\eta_k^2(\omega)$  распределена по закону  $\chi_1^2$ . Поэтому [XVII]  $D[\eta_k^2(\omega)] \equiv 2$  и

$$D[|\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)|^2] \equiv 2(t_k - t_{k-1})^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} M \left[ \left( \sum_{k=1}^N |\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)|^2 - (b-a) \right)^2 \right] = \\ = 2 \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1})^2 \leq \\ \leq 2 \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \max_k (t_k - t_{k-1}) \sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1}) = \\ = 2(b-a) \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \max_k (t_k - t_{k-1}) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.



**Теорема 3.3.** Если существует предел скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , второго порядка при  $t \rightarrow t_0 \in T$ , равный случайной величине  $\eta(\omega)$ , то существует и предел скалярной функции  $M[\xi(t, \omega)]$  при  $t \rightarrow t_0 \in T$ , равный  $M[\eta(\omega)]$ .

« Предварительно отметим два неравенства. Во-первых, верно неравенство

$$|M[\xi(t, \omega)]| \leq M[|\xi(t, \omega)|],$$

так как

$$|M[\xi(t, \omega)]| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x|t) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x|t) dx = M[|\xi(t, \omega)|].$$

Во-вторых, верно *неравенство Шварца*

$$M[|\xi(t, \omega)\eta(t, \omega)|] \leq \sqrt{M[|\xi(t, \omega)|^2] M[|\eta(t, \omega)|^2]},$$

которое можно рассматривать как неравенство Коши — Буняковского для скалярных случайных процессов второго порядка  $|\xi(t, \omega)|$ ,  $t \in T$ , и  $|\eta(t, \omega)|$ ,  $t \in T$ , так как

$$\begin{aligned} M[|\xi(t, \omega)\eta(t, \omega)|] &= |(|\xi(t, \omega)|, |\eta(t, \omega)|)_{\text{CK}}| \leq \\ &\leq \|\xi(t, \omega)\|_{\text{CK}} \|\eta(t, \omega)\|_{\text{CK}} = \sqrt{M[|\xi(t, \omega)|^2] M[|\eta(t, \omega)|^2]}. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы запишем неравенства

$$\begin{aligned} |M[\xi(t, \omega) - \eta(\omega)]| &\leq M[|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)|] \leq \\ &\leq \sqrt{M[1^2] M[|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)|^2]}. \end{aligned}$$

По условию при  $t \rightarrow t_0 \in T$  случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , сходится к случайной величине  $\eta(\omega)$ . Следовательно, при  $t \rightarrow t_0 \in T$  правая часть неравенства, а как следствие, и его левая

часть стремятся к нулю. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M[\xi(t, \omega) - \eta(\omega)] = 0,$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M[\xi(t, \omega)] = M[\eta(\omega)]. \quad \blacktriangleright$$

**Замечание 3.1.** Можно показать, что для последовательности  $\{\xi_{(k)}(t, \omega), t \in T\}_{k=1}^{\infty}$  скалярных случайных процессов второго порядка из существования предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{(k)}(t, \omega) = \xi(t, \omega), \quad t \in T,$$

следует существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M[\xi_{(k)}(t, \omega)] = M[\xi(t, \omega)].$$

**Теорема 3.4.** Если  $\xi(t, \omega), t \in T$ , — скалярный случайный процесс второго порядка и существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega) = \eta(\omega), \quad t_0 \in T,$$

то существует и предел

$$\lim_{(t, \tau) \rightarrow (t_0, t_0)} M[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] = 0.$$

◀ Пусть выполнены условия теоремы, т.е. существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M[|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)|^2] = 0.$$

Согласно очевидному неравенству  $2|a||b| \leq a^2 + b^2$ , получаем

$$\begin{aligned} |\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2 &\equiv |[\xi(t, \omega) - \eta(\omega)] - [\xi(\tau, \omega) - \eta(\omega)]|^2 \leq \\ &\leq |\xi(t, \omega) - \eta(\omega)|^2 + 2|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)||\xi(\tau, \omega) - \eta(\omega)| + \\ &+ |\xi(\tau, \omega) - \eta(\omega)|^2 \leq 2|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)|^2 + 2|\xi(\tau, \omega) - \eta(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойствами математического ожидания (см. П1, свойства а) и б) математического ожидания), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] &\leq \\ &\leq 2\mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)|^2] + 2\mathbf{M}[|\xi(\tau, \omega) - \eta(\omega)|^2], \end{aligned}$$

из которого и следует утверждение теоремы. ►

**Замечание 3.2.** Воспользовавшись определением 3.2 предела последовательности случайных процессов и техникой доказательства теоремы 3.4, можно доказать, что для последовательности  $\{\xi_{(k)}(t, \omega), t \in T\}_{k=1}^{\infty}$ , случайных процессов второго порядка из существования предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{(k)}(t, \omega) = \xi(t, \omega)$$

следует существование предела

$$\lim_{k, m \rightarrow \infty} \mathbf{M}[|\xi_{(k)}(t, \omega) - \xi_{(m)}(t, \omega)|^2] = 0, \quad t \in T. \quad \#$$

Условия, сформулированные в теореме 3.4 и в замечании 3.2, являются не только необходимыми, но и достаточными условиями существования соответствующих пределов. Это следует из теоремы Фишера — Рисса\*, однако обсуждение этих вопросов выходит за рамки данного учебника. Они известны как **стохастические критерии Коши** для случайных процессов и для последовательностей случайных процессов.

**Теорема 3.5.** Пусть  $\xi(t, \omega), t \in T$ , — скалярный случайный процесс второго порядка. Предел  $\xi(t, \omega), t \in T$ , при  $t \rightarrow t_0 \in T$  существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел скалярной функции  $\mathbf{M}[\xi(t, \omega)\xi(\tau, \omega)]$  двух переменных  $t$  и  $\tau$  при  $(t, \tau) \rightarrow (t_0, t_0)$ .

---

\*См.: Острем К.Ю.

◀ Доказательство опирается на очевидное равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] &= \\ &= \mathbf{M}[|\xi(t, \omega)|^2] + \mathbf{M}[|\xi(\tau, \omega)|^2] - 2\mathbf{M}[\xi(t, \omega)\xi(\tau, \omega)]. \end{aligned}$$

Пусть существует и конечен предел

$$\lim_{t, \tau \rightarrow t_0} \mathbf{M}[\xi(t, \omega)\xi(\tau, \omega)],$$

тогда существует и конечен предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{M}[|\xi(t, \omega)|^2] = \lim_{t, \tau \rightarrow t_0} \mathbf{M}[\xi(t, \omega)\xi(\tau, \omega)].$$

Следовательно, существует и предел

$$\begin{aligned} \lim_{t, \tau \rightarrow t_0} \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] &= \\ &= \lim_{t, \tau \rightarrow t_0} \left\{ \mathbf{M}[|\xi(t, \omega)|^2] + \mathbf{M}[|\xi(\tau, \omega)|^2] - 2\mathbf{M}[\xi(t, \omega)\xi(\tau, \omega)] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом (см. стохастический критерий Коши), существует предел  $\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega)$ .

Докажем обратное утверждение. Если существует предел  $\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega)$ , то, согласно стохастическому критерию Коши, существует предел

$$\lim_{t, \tau \rightarrow t_0} \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] = 0.$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{t, \tau \rightarrow t_0} \left\{ \mathbf{M}[|\xi(t, \omega)|^2] + \mathbf{M}[|\xi(\tau, \omega)|^2] - 2\mathbf{M}[\xi(t, \omega)\xi(\tau, \omega)] \right\} = 0.$$

Отсюда следует существование конечного предела

$$\lim_{t, \tau \rightarrow t_0} \mathbf{M}[\xi(t, \omega)\xi(\tau, \omega)],$$

так как  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — случайный процесс второго порядка. ▶

**Следствие 3.1.** Для скалярного случайного процесса второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega), \quad t_0 \in T,$$

существует тогда и только тогда, когда существуют и конечны пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M[\xi(t, \omega)] = m_0, \quad \lim_{t, \tau \rightarrow t_0} K_\xi(t, \tau) = K_0.$$

◀ Для доказательства утверждения достаточно воспользоваться очевидным равенством

$$K_\xi(t, \tau) = M[\xi(t, \omega) \xi(\tau, \omega)] - M[\xi(t, \omega)] M[\xi(\tau, \omega)]$$

и обратиться к теоремам 3.3 и 3.5. ▶

### 3.2. Непрерывность случайного процесса

**Определение 3.3.** Скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют **непрерывным в точке**  $\tau \in T$ , если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \tau} M[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] = 0,$$

или, что то же самое,

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)\|_{\text{ск}}^2 = 0.$$

**Определение 3.4.** Если скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является непрерывным в каждой точке  $t \in T$ , то его называют **непрерывным на множестве**  $T$ .

**Пример 3.2.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — скалярный винеровский процесс. Тогда для любых  $t, \tau \in T$ ,  $t > \tau$ , имеет место равенство

$$M[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] = (t - \tau)\sigma^2.$$

Таким образом, скалярный винеровский процесс является непрерывным на  $T$ , так как

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \tau} \|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)\|_{\text{ск}}^2 &= \lim_{t \rightarrow \tau} \mathbf{M} [|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \tau} (t - \tau) \sigma^2 = 0, \quad \tau \in T.\end{aligned}$$

**Теорема 3.6.** Скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , непрерывен на  $T$  тогда и только тогда, когда на  $T$  непрерывно его математическое ожидание  $m_\xi(t)$ , а на  $T \times T$  непрерывна его ковариационная функция  $K_\xi(t, \tau)$ .

◀ При доказательстве воспользуемся соотношениями

$$\{\mathbf{M}[\eta(\omega)]\}^2 \leq \mathbf{M}[\eta^2(\omega)],$$

$$\text{cov}[\eta_1(\omega); \eta_2(\omega)] = \mathbf{M}[\eta_1(\omega) \eta_2(\omega)] - \mathbf{M}[\eta_1(\omega)] \mathbf{M}[\eta_2(\omega)],$$

вытекающими из свойств математического ожидания и ковариации (см. П1).

**Необходимость.** Для непрерывного на  $T$  скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , при  $t, \tau \in T$  имеем

$$\begin{aligned}|m_\xi(t) - m_\xi(\tau)|^2 &= |\mathbf{M}[\xi(t, \omega)] - \mathbf{M}[\xi(\tau, \omega)]|^2 = \\ &= |\mathbf{M}[\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)]|^2 \leq \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2].\end{aligned}$$

Таким образом, из существования предела

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] = 0$$

следует существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \tau} |m_\xi(t) - m_\xi(\tau)| = 0,$$

т.е. функция  $m_\xi(t)$  непрерывна на  $T$ . Для доказательства непрерывности ковариационной функции на  $T \times T$  воспользуемся

отмеченным свойством ковариации и неравенством Шварца. Имеем

$$\begin{aligned}
 |K_{\xi}(t_1, \tau_1) - K_{\xi}(t, \tau)| &= |\mathbf{M}[\xi(t_1, \omega) \xi(\tau_1, \omega)] - m_{\xi}(t_1) m_{\xi}(\tau_1) - \\
 &\quad - \mathbf{M}[\xi(t, \omega) \xi(\tau, \omega)] + m_{\xi}(t) m_{\xi}(\tau)| = \\
 &= |\mathbf{M}[\xi(t_1, \omega) (\xi(\tau_1, \omega) - \xi(\tau, \omega)) + (\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega)) \xi(\tau, \omega)] + \\
 &\quad + (m_{\xi}(t) m_{\xi}(\tau) - m_{\xi}(t_1) m_{\xi}(\tau_1))| \leq \\
 &\leq |\mathbf{M}[\xi(t_1, \omega) (\xi(\tau_1, \omega) - \xi(\tau, \omega))]| + \\
 &+ |\mathbf{M}[(\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega)) \xi(\tau, \omega)]| + |m_{\xi}(t) m_{\xi}(\tau) - m_{\xi}(t_1) m_{\xi}(\tau_1)| \leq \\
 &\leq \sqrt{\mathbf{M}[|\xi(t_1, \omega)|^2] \mathbf{M}[|\xi(\tau_1, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2]} + \\
 &+ \sqrt{\mathbf{M}[|\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega)|^2] \mathbf{M}[|\xi(\tau, \omega)|^2]} + \\
 &\quad + |m_{\xi}(t) m_{\xi}(\tau) - m_{\xi}(t_1) m_{\xi}(\tau_1)|.
 \end{aligned}$$

Итак, из существования предела

$$\begin{aligned}
 \lim_{(t_1, \tau_1) \rightarrow (t, \tau)} \left\{ \sqrt{\mathbf{M}[|\xi(t_1, \omega)|^2] \mathbf{M}[|\xi(\tau_1, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2]} + \right. \\
 \left. + \sqrt{\mathbf{M}[|\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega)|^2] \mathbf{M}[|\xi(\tau, \omega)|^2]} \right\} + \\
 + |m_{\xi}(t) m_{\xi}(\tau) - m_{\xi}(t_1) m_{\xi}(\tau_1)| = 0
 \end{aligned}$$

следует существование предела

$$\lim_{(t_1, \tau_1) \rightarrow (t, \tau)} |K_{\xi}(t_1, \tau_1) - K_{\xi}(t, \tau)| = 0,$$

т.е.  $K_{\xi}(t, \tau)$  непрерывна на  $T \times T$ .

Достаточность. Полагаем, что  $m_{\xi}(t)$  и  $K_{\xi}(t, \tau)$  непрерывны на  $T$  и на  $T \times T$  соответственно. В этом случае

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] &= \\
 &= \mathbf{M}[|(\xi(t, \omega) - m_{\xi}(t)) - (\xi(\tau, \omega) - m_{\xi}(\tau)) + (m_{\xi}(t) - m_{\xi}(\tau))|^2] \equiv \\
 &\equiv K_{\xi}(t, t) + K_{\xi}(\tau, \tau) + (m_{\xi}(t) - m_{\xi}(\tau))^2 - 2K_{\xi}(t, \tau).
 \end{aligned}$$

Таким образом, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \tau} M[|\xi(t, \omega) - \xi(\tau, \omega)|^2] \equiv 0,$$

что и требовалось доказать. ►

### Пример 3.3. Случайный процесс

$$\xi(t, \omega) \triangleq \alpha(\omega) \cos(\varphi t) + \beta(\omega) \sin(\varphi t), \quad t \in T = [0, \infty),$$

из примера 1.3, имеющий параметры  $M[\alpha(\omega)] = m_\alpha$ ,  $M[\beta(\omega)] = m_\beta$ ,  $D[\alpha(\omega)] = \sigma_\alpha^2$ ,  $D[\beta(\omega)] = \sigma_\beta^2$ ,  $\text{cov}[\alpha(\omega); \beta(\omega)] = \kappa$ , является непрерывным на  $T$ , так как функция

$$m_\xi(t) \triangleq M[\xi(t, \omega)] = m_\alpha \cos(\varphi t) + m_\beta \sin(\varphi t)$$

непрерывна на  $T$ , а функция

$$\begin{aligned} K_\xi(t_1, t_2) &\triangleq M[(\xi(t_1, \omega) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2, \omega) - m_\xi(t_2))] = \\ &= \sigma_\alpha^2 \cos(\varphi t_1) \cos(\varphi t_2) + \kappa \sin[\varphi(t_1 + t_2)] + \sigma_\beta^2 \sin(\varphi t_1) \sin(\varphi t_2) \end{aligned}$$

непрерывна на  $T \times T$ .

### 3.3. Дифференцируемость случайного процесса

**Определение 3.5.** Скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют **дифференцируемым в точке**  $t_0 \in T$ , если существует случайная величина  $\dot{\xi}(t_0, \omega)$ , для которой

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M \left[ \left| \frac{\xi(t, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] = 0. \quad (3.1)$$

**Определение 3.6.** Если скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является дифференцируемым в точке  $t_0 \in T$ , то случайную величину  $\dot{\xi}(t_0, \omega)$  называют его **производной в этой точке**.



**Определение 3.7.** Если скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является дифференцируемым в каждой точке открытого множества  $T_0 \subset T$ , то его называют **дифференцируемым на множестве  $T_0$** , а случайный процесс  $\dot{\xi}(t, \omega)$ ,  $t \in T_0$ , — **производной случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , на множестве  $T_0$** .

**Теорема 3.7.** Для того чтобы скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , был дифференцируем в точке  $t_0 \in T$ , а для случайной величины  $\dot{\xi}(t_0, \omega)$  существовали математическое ожидание и дисперсия, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке была дифференцируема функция  $m_\xi(t)$  и существовала вторая смешанная производная функции  $K_\xi(t_1, t_2)$  при  $t_1 = t_2 = t_0$ .

◀ **Необходимость.** Пусть скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , дифференцируем в точке  $t_0 \in T$ , для случайной величины  $\dot{\xi}(t_0, \omega)$  имеет место равенство (3.1), а также существуют  $M[\dot{\xi}(t_0, \omega)]$  и  $D[\dot{\xi}(t_0, \omega)]$ .

Воспользовавшись свойствами математического ожидания и ковариационной функции (см. доказательство теоремы 3.6), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} M \left[ \left| \frac{\xi(t, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] &\geq \\ &\geq \left| M \left[ \frac{\xi(t, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right] \right|^2 = \\ &= \left| \frac{M[\xi(t, \omega)] - M[\xi(t_0, \omega)]}{t - t_0} - M[\dot{\xi}(t_0, \omega)] \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

А так как выполняется равенство (3.1), то существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{M[\xi(t, \omega)] - M[\xi(t_0, \omega)]}{t - t_0} - M[\dot{\xi}(t_0, \omega)] \right|^2 = 0.$$

Отсюда следует существование предела

$$\dot{m}_\xi(t_0) \triangleq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{M[\xi(t, \omega)] - M[\xi(t_0, \omega)]}{t - t_0}$$

и выполнение равенства

$$\dot{m}_{\xi}(t_0) \triangleq \frac{d}{dt} M[\xi(t, \omega)] \Big|_{t=t_0} = M[\dot{\xi}(t_0, \omega)]. \quad (3.2)$$

Чтобы доказать существование второй смешанной производной от ковариационной функции  $K_{\xi}(t_1, t_2)$  в точке  $(t_0, t_0)$ , рассмотрим неотрицательную функцию

$$\varphi(t_0, t_1, t_2) \triangleq M \left[ \left| \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} \right|^2 \right].$$

С учетом неравенства Шварца получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(t_0, t_1, t_2) &\equiv M \left[ \left( \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right) \right]^2 \leq \\ &\leq M \left[ \left| \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] + \\ &+ 2M \left[ \left( \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right) \right] + \\ &+ M \left[ \left| \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] \leq \\ &\leq M \left[ \left| \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] + \\ &+ M \left[ \left| \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] + \\ &+ 2 \left\{ M \left[ \left| \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times M \left[ \left| \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

А так как имеет место равенство (3.1), то существует предел

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} \varphi(t_0, t_1, t_2) = 0. \quad (3.3)$$

Далее, опять используя неравенство Шварца, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left[ \left| \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] \times \\ & \quad \times \mathbf{M} \left[ \left| \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right|^2 \right] \geq \\ & \geq \left\{ \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left( \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} - \dot{\xi}(t_0, \omega) \right) \right] \right\}^2 = \\ & = \left\{ \mathbf{M} \left[ \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} \cdot \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} \right] - \mathbf{M}[(\dot{\xi}(t_0, \omega))^2] + \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{M} \left[ \dot{\xi}(t_0, \omega) \left( \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} \right) \right] \right\}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

А так как

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{M} \left[ \dot{\xi}(t_0, \omega) \left( \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} \right) \right] \right|^2 \leq \\ & \leq \mathbf{M}[(\dot{\xi}(t_0, \omega))^2] \mathbf{M} \left[ \left| \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} \right|^2 \right] \equiv \\ & \equiv \{ \mathbf{D}[\dot{\xi}(t_0, \omega)] - (\mathbf{M}[\dot{\xi}(t_0, \omega)])^2 \} \varphi(t_0, t_1, t_2) \end{aligned}$$

и имеют место равенства (3.1), (3.3), то существует предел

$$\begin{aligned} & \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t_0, t_0)} \left\{ \mathbf{M} \left[ \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} \cdot \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} \right] - \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{M}[(\dot{\xi}(t_0, \omega))^2] \right\} \equiv 0, \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t_0, t_0)} \left\{ \frac{K_\xi(t_1, t_2) - K_\xi(t_0, t_2) - K_\xi(t_1, t_0) + K_\xi(t_0, t_0)}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)} + \right. \\ \left. + \frac{M[\xi(t_1, \omega)] - M[\xi(t_0, \omega)]}{t_1 - t_0} \cdot \frac{M[\xi(t_2, \omega)] - M[\xi(t_0, \omega)]}{t_2 - t_0} - \right. \\ \left. - D[\dot{\xi}(t_0, \omega)] - (M[\dot{\xi}(t_0, \omega)])^2 \right\} \equiv 0.$$

Таким образом, существует предел

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t_0, t_0)} \frac{K_\xi(t_1, t_2) - K_\xi(t_0, t_2) - K_\xi(t_1, t_0) + K_\xi(t_0, t_0)}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)} = \\ = D[\dot{\xi}(t_0, \omega)]. \quad (3.4)$$

Кроме того, с учетом (3.3) имеем

$$0 = \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t_0, t_0)} \varphi(t_0, t_1, t_2) = \\ = \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t_0, t_0)} M \left[ \left| \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} \right|^2 \right] = \\ = \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t_0, t_0)} \left\{ \frac{[K_\xi(t_1, t_1) - K_\xi(t_1, t_0)] - [K_\xi(t_0, t_1) - K_\xi(t_0, t_0)]}{(t_1 - t_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{[K_\xi(t_2, t_2) - K_\xi(t_2, t_0)] - [K_\xi(t_0, t_2) - K_\xi(t_0, t_0)]}{(t_2 - t_0)^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{[K_\xi(t_1, t_2) - K_\xi(t_0, t_2)] - [K_\xi(t_1, t_0) - K_\xi(t_0, t_0)]}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)} \right\}. \quad (3.5)$$

В фигурных скобках в правой части последнего равенства записана линейная комбинация разностных аппроксимаций вторых смешанных производных для ковариационной функции  $K_\xi(t_1, t_2)$  в точке  $(t_0, t_0)$ . Поэтому существование для нее нулевого предела при  $t_1, t_2 \rightarrow t_0$  с учетом равенства (3.4) означает

существование вторых смешанных производных для  $K_\xi(t_1, t_2)$  в точке  $(t_0, t_0)$  и выполнение следующих равенств:

$$D[\dot{\xi}(t_0, \omega)] = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \bigg|_{t_1=t_2=t_0} = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1} \bigg|_{t_1=t_2=t_0} \quad (3.6)$$

**Достаточность.** Предполагаем, что условия (3.2), (3.6) выполняются. В этом случае для доказательства равенства 3.1 достаточно проверить *стохастический критерий Коши*:

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} M \left[ \left| \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} \right|^2 \right] = 0.$$

Это может быть реализовано повторением в обратном порядке цепочки равенств, приводящих к равенству (3.5). Действительно, если (3.2) и (3.5) выполняются и

$$\begin{aligned} A(t_0, t_1, t_2) &\triangleq \left[ \frac{m_\xi(t_1) - m_\xi(t_0)}{t_1 - t_0} - \frac{m_\xi(t_2) - m_\xi(t_0)}{t_2 - t_0} \right]^2, \\ B(t_0, t_1, t_2) &\triangleq \\ &\triangleq \frac{[K_\xi(t_1, t_1) - K_\xi(t_1, t_0)] - [K_\xi(t_0, t_1) - K_\xi(t_0, t_0)]}{(t_1 - t_0)^2} + \\ &+ \frac{[K_\xi(t_2, t_2) - K_\xi(t_2, t_0)] - [K_\xi(t_0, t_2) - K_\xi(t_0, t_0)]}{(t_2 - t_0)^2} - \\ &- 2 \frac{[K_\xi(t_1, t_2) - K_\xi(t_0, t_2)] - [K_\xi(t_1, t_0) - K_\xi(t_0, t_0)]}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)}, \end{aligned}$$

то существуют пределы

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} A(t_0, t_1, t_2) = 0, \quad \lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} B(t_0, t_1, t_2) = 0.$$

Но тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} [A(t_0, t_1, t_2) + B(t_0, t_1, t_2)] = \\ &= \lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} M \left[ \left| \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_1 - t_0} - \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t_2 - t_0} \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, существует случайная величина  $\dot{\xi}(t_0, \omega)$ , такая, что верно равенство (3.1). ►

**Следствие 3.2.** Для дифференцируемого на множестве  $T$  скалярного случайного процесса второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , с математическим ожиданием  $m_\xi(t)$  и ковариационной функцией  $K_\xi(t_1, t_2)$  определен скалярный случайный процесс  $\dot{\xi}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . При этом, если  $\eta(t, \omega) \triangleq \dot{\xi}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — случайный процесс второго порядка, то

$$m_\eta(t) = \frac{dm_\xi(t)}{dt}, \quad K_\eta(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1}.$$

**Следствие 3.3.** Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — дифференцируемый в  $T$  стационарный скалярный случайный процесс второго порядка с математическим ожиданием  $m_\xi = \text{const}$  и ковариационной функцией  $K_\xi(\tau)$ ,  $\tau = t_2 - t_1$ , а  $\eta(t, \omega) \triangleq \dot{\xi}(t, \omega)$ ,  $t \in T$  — случайный процесс второго порядка, то

$$m_\eta(t) \equiv 0, \quad K_\eta(\tau) = -K_\xi''(\tau).$$

**Пример 3.4.** Рассмотрим скалярный случайный процесс

$$\xi(t, \omega) \triangleq \alpha(\omega) \cos(\varphi t) + \beta(\omega) \sin(\varphi t), \quad t \in T = [0, \infty),$$

где  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  — независимые случайные величины с математическими ожиданиями  $m_\alpha$  и  $m_\beta$  соответственно, одинаковыми дисперсиями, равными  $\sigma^2$ , а  $\varphi \in \mathbb{R}$  — известная постоянная. В этом случае (см. пример 1.3)

$$m_\xi(t) = m_\alpha \cos(\varphi t) + m_\beta \sin(\varphi t),$$

$$K_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos[\varphi(t_2 - t_1)].$$

А так как существуют производные

$$\frac{dm_\xi(t)}{dt} = \varphi [m_\beta \cos(\varphi t) - m_\alpha \sin(\varphi t)], \quad t \in T,$$

$$\left. \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t} \equiv \left. \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1} \right|_{t_1=t_2=t} \equiv \sigma^2 \varphi^2, \quad t \in T,$$

то исходный случайный процесс является дифференцируемым на множестве  $T$ . При этом, если  $\eta(t, \omega) \triangleq \dot{\xi}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , то

$$m_\eta(t) = \varphi[m_\beta \cos(\varphi t) - m_\alpha \sin(\varphi t)],$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = \sigma^2 \varphi^2 \cos[\varphi(t_2 - t_1)],$$

и можно утверждать, что скалярный случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , также является дифференцируемым на множестве  $T$ , т.е. определен скалярный случайный процесс  $\ddot{\xi}(t, \omega)$ ,  $t \in T$  и т.д.

**Пример 3.5.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стационарный скалярный случайный процесс с ковариационной функцией

$$K_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha^2 |\tau|), \quad \tau = t_2 - t_1.$$

На первый взгляд этот случайный процесс не является дифференцируемым, так как при  $\tau = 0$  функция  $K_\xi(\tau)$  не имеет даже первой производной. Но при более внимательном рассмотрении с учетом существования и равенства пределов

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} K_\xi''(\tau) = \sigma^2 \alpha^2 = \lim_{\tau \rightarrow -0} K_\xi''(\tau)$$

убеждаемся в ошибочности этого вывода.

**Пример 3.6.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — пуассоновский процесс с параметром  $\lambda > 0$ . В этом случае, согласно определению 2.7, для любых  $t_1, t, t_2 \in T$ ,  $t_1 < t < t_2$ , случайные величины  $\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega)$  и  $\xi(t, \omega) - \xi(t_2, \omega)$  являются независимыми и распределены по закону Пуассона с параметрами  $\lambda(t - t_1)$  и  $\lambda(t_2 - t)$  соответственно. Рассматриваемый случайный процесс не является дифференцируемым ни в одной точке  $t \in T$ . Это объясняется тем, что не удовлетворяется стохастический критерий Коши:

$$\begin{aligned} \lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} \mathbf{M} \left[ \left| \frac{\xi(t_2, \omega) - \xi(t, \omega)}{t_2 - t} - \frac{\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega)}{t_1 - t} \right|^2 \right] = \\ = \lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} \left\{ \frac{\mathbf{M}[(\xi(t_2, \omega) - \xi(t, \omega))^2]}{(t_2 - t)^2} + \frac{\mathbf{M}[(\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega))^2]}{(t_1 - t)^2} \right\} \equiv \infty, \end{aligned}$$

так как из независимости случайных величин  $\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega)$ ,  $\xi(t, \omega) - \xi(t_2, \omega)$  следуют равенства

$$\begin{aligned} \lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} M \left[ (\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega)) (\xi(t, \omega) - \xi(t_2, \omega)) \right] = \\ = \lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} M [\xi(t_1, \omega) - \xi(t, \omega)] M [\xi(t, \omega) - \xi(t_2, \omega)] = 0 \end{aligned}$$

и для  $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} M [(\xi(t_k, \omega) - \xi(t, \omega))^2] &= D [\xi(t_k, \omega) - \xi(t, \omega)] + \\ &+ \{M[\xi(t_k, \omega) - \xi(t, \omega)]\}^2 = \lambda(t_k - t) + \lambda^2(t_k - t)^2. \end{aligned}$$

### 3.4. Интегрируемость случайного процесса

**Определение 3.8.** Скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , называют **интегрируемым** на множестве  $T$  с **весом**  $\varphi(t, t')$ , где  $\varphi(t, t')$  — неслучайная функция, определенная на  $T \times T$ , если существует скалярный случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , такой, что независимо от выбора разбиения  $\Pi = \Pi(a, b) = \{t_k\}_{k=0}^n \cup \{t'_m\}_{m=0}^{n-1} \subset T$ ,  $a = t_0 \leq t'_0 \leq \leq t_1 \leq t'_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t'_{n-1} \leq t_n = b$ , с параметром  $d(\Pi) = \max_k \Delta t_k \equiv \max_k (t_{k+1} - t_k)$  существует предел

$$\lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} M \left[ \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t, t'_k) \xi(t'_k, \omega) \Delta t_k - \eta(t, \omega) \right|^2 \right] \equiv 0, \quad t \in T. \quad (3.7)$$

По поводу интегрируемых случайных процессов второго порядка отметим следующее.

1. Если скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , является интегрируемым на  $T$  с весом  $\varphi(t, t')$ , то скалярный случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , обозначают как интеграл:

$$\eta(t, \omega) \triangleq \int_T \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt' \equiv \int_a^b \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T.$$



2. Если  $\varphi(t, t') \equiv \lambda = \text{const}$ , то для интегрируемого на  $T$  случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ,

$$\int_T \lambda \xi(t', \omega) dt' = \lambda \int_T \xi(t', \omega) dt' = \eta(\omega) \quad —$$

случайная величина.

3. Если

$$\varphi(t, t') \equiv J(t - t') = \begin{cases} 1, & t > t'; \\ 0, & t < t' \end{cases} \quad —$$

единичная функция, то

$$\eta(t, \omega) = \int_T \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt' \equiv \int_a^t \xi(t', \omega) dt' \quad —$$

скалярный случайный процесс, который называют **интегралом с переменным верхним пределом** от скалярного интегрируемого **случайного процесса**.

**Теорема 3.8.** Скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , является интегрируемым на множестве  $T$  с весом  $\varphi(t, t')$  тогда и только тогда, когда на  $T$  с весом  $\varphi(t, t')$  интегрируемо его *математическое ожидание* и на  $T \times T$  с весом  $\varphi(t, t_1)\varphi(t, t_2)$  интегрируема его *ковариационная функция*.

◀ Доказательство данной теоремы имеет много общего с доказательством теоремы 3.7. Поэтому известные свойства и оценки будем использовать без дополнительных пояснений.

**Необходимость.** При доказательстве необходимости предполагаем интегрируемость скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , на множестве  $T$  с весом  $\varphi(t, t')$ . В этом случае для любого разбиения  $\Pi(a, b)$  имеет место тождество

(3.7). Таким образом,

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \mathbf{M} \left[ \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t, t'_k) \xi(t'_k, \omega) \Delta t_k - \eta(t, \omega) \right|^2 \right] \geq \\ &\geq \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \left| \mathbf{M} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t, t'_k) \xi(t'_k, \omega) \Delta t_k - \eta(t, \omega) \right] \right|^2 = \\ &= \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t, t'_k) \mathbf{M}[\xi(t'_k, \omega)] \Delta t_k - \mathbf{M}[\eta(t, \omega)] \right|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда и следует интегрируемость математического ожидания, т.е. существует

$$\int_T \varphi(t, t') m_\xi(t') dt' \equiv \mathbf{M}[\eta(t, \omega)] \equiv \mathbf{M} \left[ \int_T \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt' \right].$$

Далее, кроме произвольного разбиения  $\Pi(a, b)$  множества  $T$ , выберем произвольным образом еще одно разбиение  $\Pi^*(a, b) = \{t_i^*\}_{i=0}^m \cup \{t_j^*\}_{j=0}^{m-1} \subset T$ ,  $a = t_0^* \leq t_0^* \leq t_1^* \leq t_1^* \leq t_2^* \leq \dots \leq t_{m-1}^* \leq t_m^* = b$ , с параметром  $d(\Pi^*) = \max \Delta t_i^* \equiv \max(t_{i+1}^* - t_i^*)$  и введем функции разбиений

$$A(\Pi) \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t, t'_k) \xi(t'_k, \omega) \Delta t_k, \quad A(\Pi^*) \triangleq \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(t, t_j^*) \xi(t_j^*, \omega) \Delta t_j^*,$$

$$b(t) \triangleq \lim_{\substack{d(\Pi) \rightarrow 0 \\ d(\Pi^*) \rightarrow 0}} \mathbf{M}[|A(\Pi) - A(\Pi^*)|^2].$$

С учетом тождества (3.7) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq b(t) &\equiv \lim_{\substack{d(\Pi) \rightarrow 0 \\ d(\Pi^*) \rightarrow 0}} \mathbf{M}[|(A(\Pi) - \eta(t, \omega)) - (A(\Pi^*) - \eta(t, \omega))|^2] \leq \\ &\leq \lim_{\substack{d(\Pi) \rightarrow 0 \\ d(\Pi^*) \rightarrow 0}} \left\{ \mathbf{M}[|A(\Pi) - \eta(t, \omega)|^2] + \mathbf{M}[|A(\Pi^*) - \eta(t, \omega)|^2] + \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{\mathbf{M}[|A(\Pi) - \eta(t, \omega)|^2] \mathbf{M}[|A(\Pi^*) - \eta(t, \omega)|^2]} \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$0 \equiv b(t) = \lim_{\substack{d(\Pi) \rightarrow 0 \\ d(\Pi^*) \rightarrow 0}} \left( M[A(\Pi)A(\Pi)] - \right. \\ \left. - 2M[A(\Pi)A(\Pi^*)] + M[A(\Pi^*)A(\Pi^*)] \right),$$

откуда следует интегрируемость ковариационной функции, так как, например,

$$M[A(\Pi)A(\Pi^*)] = \\ = M \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(t, t'_k) \varphi(t, t'_j) \xi(t'_k, \omega) \xi(t'_j, \omega) \Delta t_k \Delta t_j^* \right] = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(t, t'_k) \varphi(t, t'_j) \left( K_\xi(t'_k, t'_j) - m_\xi(t'_k) m_\xi(t'_j) \right) \Delta t_k \Delta t_j^*,$$

а условие интегрируемости математического ожидания выполняется.

**Достаточность.** Пусть теперь выполнены условия (3.5). С учетом обозначений, введенных при доказательстве необходимости и существования интеграла, имеем

$$q(t) \triangleq \int_T \int_T \varphi(t, t_1) \varphi(t, t_2) K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \left( \int_T \varphi(t, t') m_\xi(t') dt' \right)^2 = \\ = \lim_{\substack{d(\Pi) \rightarrow 0 \\ d(\Pi^*) \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(t, t'_k) \varphi(t, t'_j) \left( K_\xi(t'_k, t'_j) - \right. \\ \left. - m_\xi(t'_k) m_\xi(t'_j) \right) \Delta t_k \Delta t_j^* = \lim_{\substack{d(\Pi) \rightarrow 0 \\ d(\Pi^*) \rightarrow 0}} M[A(\Pi)A(\Pi^*)].$$

Совершенно аналогично можно доказать равенства

$$q(t) = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} M[A(\Pi)A(\Pi)], \quad q(t) = \lim_{d(\Pi^*) \rightarrow 0} M[A(\Pi^*)A(\Pi^*)].$$

Таким образом,

$$0 \equiv \lim_{\substack{d(\Pi) \rightarrow 0 \\ d(\Pi^*) \rightarrow 0}} \left\{ M[A(\Pi)A(\Pi)] - 2M[A(\Pi)A(\Pi^*)] + \right. \\ \left. + M[A(\Pi^*)A(\Pi^*)] \right\} \equiv \lim_{\substack{d(\Pi) \rightarrow 0 \\ d(\Pi^*) \rightarrow 0}} M[|A(\Pi) - A(\Pi^*)|^2],$$

откуда, согласно *стохастическому критерию Коши*, и следует достаточность в утверждении теоремы. ►

**Следствие 3.4.** Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , — интегрируемый на множестве  $T$  с весом  $\varphi(t, t')$  скалярный случайный процесс второго порядка и

$$\eta(t, \omega) \triangleq \int_T \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T,$$

то

$$m_\eta(t) = \int_T \varphi(t, t') m_\xi(t') dt',$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_T \int_T \varphi(t_1, t'_1) \varphi(t_2, t'_2) K_\xi(t'_1, t'_2) dt'_1 dt'_2,$$

$$D[\eta(t, \omega)] \equiv K_\eta(t, t) \equiv \int_T \int_T \varphi(t, t'_1) \varphi(t, t'_2) K_\xi(t'_1, t'_2) dt'_1 dt'_2 \geq 0.$$

**Следствие 3.5.** Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , — скалярный случайный процесс второго порядка, интегрируемый на множестве  $T$  с весом  $\varphi(t, t') \equiv J(t - t')$ , где  $J(t - t')$  — единичная функция, то скалярный случайный процесс

$$\eta(t, \omega) \triangleq \int_T \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt' \equiv \int_a^t \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T,$$

является дифференцируемым на множестве  $T$  и  $\xi(t, \omega) = \dot{\eta}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

◀ Действительно, в рассматриваемом случае из равенств

$$m_{\eta}(t) = \int_a^t m_{\xi}(t') dt', \quad K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} K_{\xi}(t', t'') dt' dt''$$

в точках непрерывности подынтегральных функций следуют равенства [VI], [VII]

$$m_{\xi}(t) = \frac{d}{dt} m_{\eta}(t), \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_{\eta}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2},$$

и осталось воспользоваться теоремой 3.7. ▶

**Следствие 3.6.** Если скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , интегрируем на множестве  $T$  с весом  $\varphi(t, t')$  и

$$\eta(t, \omega) \triangleq \int_T \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T,$$

то

$$\begin{aligned} K_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= \mathbf{M}[(\xi(t_1, \omega) - m_{\xi}(t_1))(\eta(t_2, \omega) - m_{\eta}(t_2))] = \\ &= \int_T \varphi(t_2, t') K_{\xi}(t_1, t') dt'. \end{aligned}$$

**Пример 3.7.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$  — скалярный винеровский процесс, выходящий из нуля. Докажем, что он является интегрируемым на  $T$  с весом  $\varphi(t, t') \equiv J(t - t')$ .

В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} f_{\xi}(x_1, x_2 | t_1, t_2) &= \frac{(2\pi)^{-1}}{\sqrt{t_1(t_2 - t_1)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{x_1^2}{t_1} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} \right] \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left( -\frac{1}{2} X^T \Sigma^{-1} X \right), \end{aligned}$$

где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{t_1(t_2 - t_1)} \begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$m_\xi(t) \equiv 0, \quad K_\xi(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1, & t_1 \leq t_2; \\ t_2, & t_1 \geq t_2. \end{cases}$$

Но в этом случае существует

$$\eta(t, \omega) = \int_0^\infty \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt' \equiv \int_0^t \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T,$$

причем

$$m_\eta(t) = \int_0^t m_\xi(\tau) d\tau \equiv 0,$$

и существует

$$\begin{aligned} D[\eta(t, \omega)] &= \int_0^t \int_0^t K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} t_2 dt_2 + \int_0^t t_1 dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 = \frac{t^3}{3}. \end{aligned}$$

**Пример 3.8.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярные случайные процессы, определенные в примере 3.7. Найдем их **совместный закон распределения** при каждом фиксированном  $t \geq 0$ , т.е. **одномерный закон распределения** векторного случайного процесса

$$\varepsilon(t, \omega) = \begin{pmatrix} \xi(t, \omega) \\ \eta(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, \infty).$$

Предварительно отметим, что в смысле СК-сходимости операции интегрирования и дифференцирования случайных процессов сводятся к суммированию с весами их сечений и последующему предельному переходу. А из курса теории вероятностей [XVI] известно, что линейная комбинация конечного числа случайных величин, распределенных по нормальному закону, — случайная величина, распределенная по нормальному закону. Таким образом, можно утверждать, что, как при интегрировании, так и при дифференцировании *нормальных процессов*, являющихся соответственно интегрируемыми или дифференцируемыми, получаем нормальные процессы.

В рассматриваемом случае  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , — скалярный винеровский процесс, выходящий из нуля. Он является нормальным скалярным процессом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $D[\xi(t, \omega)] \equiv t$  (см. пример 2.4). А так как

$$\eta(t, \omega) \triangleq \int_0^t \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T,$$

то и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — нормальный скалярный процесс с математическим ожиданием  $m_\eta(t) \equiv 0$  и дисперсией  $D[\eta(t, \omega)] \equiv t^3/3$  (см. пример 3.7). При этом, согласно следствию 3.6,

$$K_{\xi\eta}(t, t) = \int_0^t K_\xi(t, \tau) d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}, \quad t \in T.$$

Поэтому при любом фиксированном  $t \geq 0$  можно считать, что двумерный случайный вектор  $\varepsilon(t, \omega)$  распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и *ковариационной матрицей*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4/t & -6/t^2 \\ -6/t^2 & 12/t^3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, одномерная функция плотности вероятностей двумерного векторного случайного процесса  $\varepsilon(t, \omega)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , имеет вид

$$f_{\varepsilon}(X | t) \equiv f_{\varepsilon}(x_1, x_2 | t) = \frac{\sqrt{12}}{2\pi t^2} \exp \left( -\frac{2x_1^2}{t} + \frac{6x_1x_2}{t^2} - \frac{6x_2^2}{t^3} \right).$$

### 3.5. Действие линейного оператора на случайный процесс

Пусть скалярный случайный процесс

$$\eta(t, \omega) \triangleq L_t[\xi(t, \omega)], \quad t \in T \subset \mathbf{R}, \quad (3.8)$$

есть результат воздействия линейного оператора  $L_t$  на исходный скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , обладающий необходимыми свойствами (дифференцируемость, интегрируемость и т.д.). Если  $L_t$  — это оператор умножения на неслучайную функцию, определенную на множестве  $T$ , либо оператор дифференцирования, интегрирования или их композиция, то с учетом результатов, изложенных в 1.2, 3.3, 3.4, приходим к следующим равенствам:

$$m_{\eta}(t) = L_t[m_{\xi}(t)], \quad K_{\eta}(t_1, t_2) = L_{t_1}L_{t_2}[K_{\xi}(t_1, t_2)]. \quad (3.9)$$

При этом следует отметить, что равенства (3.9) могут быть получены непосредственно из определения *математического ожидания* и определения линейного оператора, которым также является и оператор математического ожидания.

Равенства (3.8), (3.9) являются весьма полезными при решении многих прикладных задач.

**Пример 3.9.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — дифференцируемый скалярный случайный процесс с известными математическим ожиданием  $m_{\xi}(t)$  и ковариационной функцией  $K_{\xi}(t_1, t_2)$ .



Найдем математическое ожидание и ковариационную функцию скалярного случайного процесса

$$\eta(t, \omega) \triangleq \alpha(t) \xi(t, \omega) + \beta(t) \frac{d}{dt} \xi(t, \omega) + \gamma(t) \int_0^t e^{-\tau} \xi(\tau, \omega) d\tau, \quad t \in T,$$

где  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  — неслучайные скалярные функции, определенные при  $t \geq 0$ .

В рассматриваемом случае оператор

$$L_t[\cdot] \triangleq \alpha(t)[\cdot] + \beta(t) \frac{d}{dt}[\cdot] + \gamma(t) \int_0^t e^{-\tau}[\cdot] d\tau$$

является линейным и для решения исходной задачи можно воспользоваться равенствами (3.9). Таким образом,

$$m_\eta(t) = L_t[m_\xi(t)] = \alpha(t) m_\xi(t) + \beta(t) \frac{dm_\xi(t)}{dt} + \gamma(t) \int_0^t e^{-\tau} m_\xi(\tau) d\tau.$$

А так как

$$\begin{aligned} L_{t_1} L_{t_2}[\cdot] = & \alpha(t_1) \alpha(t_2)[\cdot] + \alpha(t_2) \beta(t_1) \frac{\partial}{\partial t_1}[\cdot] + \\ & + \alpha(t_2) \gamma(t_1) \int_0^{t_1} e^{-\tau_1}[\cdot] d\tau_1 + \alpha(t_1) \beta(t_2) \frac{\partial}{\partial t_2}[\cdot] + \\ & + \beta(t_1) \beta(t_2) \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}[\cdot] + \gamma(t_1) \beta(t_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \int_0^{t_1} e^{-\tau_1}[\cdot] d\tau_1 + \\ & + \alpha(t_1) \gamma(t_2) \int_0^{t_2} e^{-\tau_2}[\cdot] d\tau_2 + \beta(t_1) \gamma(t_2) \frac{\partial}{\partial t_1} \int_0^{t_2} e^{-\tau_2}[\cdot] d\tau_2 + \\ & + \gamma(t_1) \gamma(t_2) \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-(\tau_1 + \tau_2)}[\cdot] d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

то искомая ковариационная функция равна

$$\begin{aligned}
 K_{\eta}(t_1, t_2) &= L_{t_1} L_{t_2} [K_{\xi}(t_1, t_2)] = \alpha(t_1) \alpha(t_2) K_{\xi}(t_1, t_2) + \\
 &+ \alpha(t_2) \beta(t_1) \frac{\partial K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \alpha(t_1) \beta(t_2) \frac{\partial K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_2} + \\
 &+ \beta(t_1) \beta(t_2) \frac{\partial^2 K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + \alpha(t_2) \gamma(t_1) \int_0^{t_1} e^{-\tau_1} K_{\xi}(\tau_1, t_2) d\tau_1 + \\
 &+ \alpha(t_1) \gamma(t_2) \int_0^{t_2} e^{-\tau_2} K_{\xi}(t_1, \tau_2) d\tau_2 + \\
 &+ \beta(t_2) \gamma(t_1) \int_0^{t_1} e^{-\tau_1} \frac{\partial K_{\xi}(\tau_1, t_2)}{\partial t_2} d\tau_1 + \\
 &+ \beta(t_1) \gamma(t_2) \int_0^{t_2} e^{-\tau_2} \frac{\partial K_{\xi}(t_1, \tau_2)}{\partial t_1} d\tau_2 + \\
 &+ \gamma(t_1) \gamma(t_2) \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-(\tau_1 + \tau_2)} K_{\xi}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad \#
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что если случайные процессы  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определены и связаны равенством (3.8), а линейный оператор  $L_t$  является обратимым, то обратный оператор  $L_t^{-1}$  также является линейным оператором и в этом случае имеют место равенства, аналогичные равенствам (3.9). Во многих технических дисциплинах\* широко используют понятие **линейного динамического звена**  $n$ -го порядка, под которым понимают подсистему любой динамической системы, состояние которой  $y(t)$  адекватно описывает математическая модель, представляющая собой задачу Коши для

\*См.: Директор С., Рорер Р.

линейного неоднородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка:

$$L_t[y(t)] \equiv y^{(n)}(t) + \alpha_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1}(t)y'(t) + \alpha_n(t)y(t) = f(t),$$

$$y(0) = y_0, \quad y^{(k)}(0) = y_{0k}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

где  $\alpha_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — известные неслучайные функции, определенные при  $t > 0$ , а  $f(t)$  — известная неслучайная функция (**входной сигнал**). Если  $y_0 = 0 = y_{0k}$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ , то линейное динамическое звено называют **невозмущенным** и функцию  $y(t)$  — его **реакцией на входной сигнал**. Если на вход линейного динамического звена поступает случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , то реакция линейного динамического звена — случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и мы приходим к равенству

$$L_t[\eta(t, \omega)] = \xi(t, \omega), \quad t \in T,$$

которое фактически является **стохастическим дифференциальным уравнением, линейным** относительно случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

Теория стохастических дифференциальных уравнений будет рассмотрена в гл. 7. А так как реакция линейного динамического звена на входной сигнал — удобный объект для иллюстраций, то в данной и последующих главах под стохастическим дифференциальным уравнением будем понимать **равенство двух случайных процессов**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $L_t[\eta(t, \omega)]$ ,  $t \in T$ , которое будем использовать для определения связей между их характеристиками.

**Пример 3.10.** Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t, \omega) + \alpha(t)\eta(t, \omega) = \xi(t, \omega), \\ \eta(0, \omega) \equiv 0, \end{cases}$$

которую можно записать в операторном виде

$$L_t[\eta(t, \omega)] = \xi(t, \omega)$$

и интерпретировать как задачу о нахождении реакции невозмущенного (по начальному состоянию) линейного динамического звена первого порядка с параметром  $\alpha(t)$  ( $\alpha(t)$  — непрерывная неслучайная функция при  $t > 0$ ) на входной сигнал  $\xi(t, \omega)$ ,  $t > 0$ , который представляет собой скалярный случайный процесс с математическим ожиданием  $m_\xi(t)$  и ковариационной функцией  $K_\xi(t_1, t_2)$ . Определим математическое ожидание и ковариационную функцию скалярного случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ .

В рассматриваемом случае [VIII]

$$\eta(t, \omega) = L_t^{-1}[\xi(t, \omega)] \equiv \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \alpha(s) ds\right) \xi(\tau, \omega) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Таким образом,

$$m_\eta(t) = L_t^{-1}[m_\xi(t)] \equiv \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \alpha(s) ds\right) m_\xi(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= L_{t_1}^{-1} L_{t_2}^{-1}[K_\xi(t_1, t_2)] \equiv \\ &\equiv \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \exp\left(-\int_{\tau_1}^{t_1} \alpha(s) ds - \int_{\tau_2}^{t_2} \alpha(s) ds\right) K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad \# \end{aligned}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [VIII] известно, что если  $\{y_k(t)\}_{k=1}^n$  — фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения

$$L_n[y(t)] \equiv y^{(n)}(t) + \alpha_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1}(t)y'(t) + \alpha_n(t)y(t) = 0,$$

где  $\alpha_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — неслучайные непрерывные при  $t > 0$  функции, то решение задачи Коши

$$\begin{cases} L_n[y(t)] = f(t), \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

или в операторном виде

$$L_t[y(t)] = f(t),$$

может быть представлено следующим образом [VIII]:

$$y(t) = L_t^{-1}[f(t)] \equiv \int_0^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где

$$R(t, \tau) \equiv \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y'_1(\tau) & \dots & y'_n(\tau) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\tau) & \dots & y_n^{(n-2)}(\tau) \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y'_1(\tau) & \dots & y'_n(\tau) \\ y''_1(\tau) & \dots & y''_n(\tau) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(\tau) & \dots & y_n^{(n-1)}(\tau) \end{vmatrix}^{-1}$$

Если теперь рассмотреть задачу о реакции  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , невозмущенного (по начальному состоянию) линейного динамического звена  $n$ -го порядка, параметрами  $\alpha_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , которого являются неслучайные непрерывные при  $t > 0$  функции, на входной сигнал  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , с характеристиками  $m_\xi(t)$ ,  $K_\xi(t_1, t_2)$ , то приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} L_n[\eta(t, \omega)] = \xi(t, \omega), \\ \eta(0, \omega) \equiv \eta'(0, \omega) \equiv \dots \equiv \eta^{(n-1)}(0, \omega) \equiv 0, \end{cases}$$

которую можно записать в операторном виде

$$L_t[\eta(t, \omega)] = \xi(t, \omega).$$

Таким образом,

$$\eta(t, \omega) = L_t^{-1}[\xi(t, \omega)] \equiv \int_0^t R(t, \tau) \xi(\tau, \omega) d\tau, \quad t \geq 0;$$

$$m_\eta(t) = L_t^{-1}[m_\xi(t)] \equiv \int_0^t R(t, \tau) m_\xi(\tau) d\tau;$$

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= L_{t_1}^{-1} L_{t_2}^{-1}[K_\xi(t_1, t_2)] \equiv \\ &\equiv \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R(t_1, \tau_1) R(t_2, \tau_2) K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Как следует из проведенных рассуждений, исходная задача фактически сведена к нахождению функции  $R(t, \tau)$ , зачастую называемой **передаточной функцией** линейного динамического звена. Если  $\alpha_k(t) \equiv \alpha_k = \text{const}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то для нахождения функции  $R(t, \tau)$  можно воспользоваться интегральным преобразованием Лапласа с параметром  $s$ . Действительно, в изображениях интегрального преобразования Лапласа

$$Y(s) \triangleq L[y(t)] \equiv \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt,$$

$$F(s) \triangleq L[f(t)] \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

задача Коши (3.10) принимает вид

$$L_n[s] Y(s) \equiv (s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n) Y(s) = F(s).$$

Таким образом,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{L_n[s]}.$$

Если при этом

$$R(t) \triangleq L^{-1} \left[ \frac{1}{L_n[s]} \right] \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \frac{1}{L_n[s]} ds,$$

то для получения окончательного результата достаточно воспользоваться теоремой о свертке [XI]:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] \equiv \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau \equiv L_t^{-1}[f(t)].$$

В рассматриваемом случае  $R(t, \tau) \equiv R(t - \tau)$ .

**Пример 3.11.** Найдем математическое ожидание  $m_\eta(t)$  и дисперсию  $D_\eta(t)$  реакции невозмущенного (по начальному состоянию) линейного динамического звена второго порядка:

$$\begin{cases} L_2[\eta(t, \omega)] \equiv \ddot{\eta}(t, \omega) + 2h\dot{\eta}(t, \omega) + k^2\eta(t, \omega) = k^2\xi(t, \omega), \\ \eta(0, \omega) \equiv 0, \quad \dot{\eta}(0, \omega) \equiv 0, \quad k > h > 0, \end{cases}$$

на входной сигнал  $k^2\xi(t, \omega)$ , где  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — скалярный стационарный случайный процесс со следующими характеристиками:

$$m_\xi(t) \equiv 0, \quad K_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left[ \cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right],$$

где  $\sigma^2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — известные постоянные, а  $\tau \triangleq t_2 - t_1$ .

Следует отметить, что сформулированная задача может иметь различную интерпретацию. В частности, к подобной задаче сводится задача определения вероятностных характеристик бортовой качки корабля при волнении (угловые наклоны на правый и левый борт судна). В этом случае  $\eta(t, \omega)$  — угол наклона палубы корабля в момент времени  $t > 0$ , а  $\xi(t, \omega)$  — угол наклона касательной плоскости к поверхности моря в данной точке в момент времени  $t > 0$  относительно линии горизонта, ортогональной направлению килля корабля.

В рассматриваемом примере

$$L_2[s] \equiv s^2 + 2hs + k^2 \equiv (s + h)^2 + (k^2 - h^2).$$

Воспользовавшись соответствующими теоремами и таблицами интегрального преобразования Лапласа [XI], находим

$$R(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{L_2[s]} \right] = \frac{1}{\varphi} e^{-ht} \sin(\varphi t), \quad \varphi = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

Таким образом,

$$\eta(t, \omega) \triangleq L_t^{-1}[\xi(t, \omega)] \equiv \frac{k^2}{\varphi} \int_0^t e^{-h(t-\tau)} \sin[\varphi(t-\tau)] \xi(\tau, \omega) d\tau, \quad t \geq 0,$$

и можно записать решение исходной задачи:

$$m_\eta(t) = L_t^{-1}[m_\xi(t)] \equiv L_t^{-1}[0] \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} D_\eta(t) &= K_\eta(t, t) = L_{t_1} L_{t_2} [K_\xi(t_1, t_2)]|_{t_1=t_2=t} \equiv \\ &\equiv \frac{k^4}{\varphi^2} \int_0^t \int_0^t e^{h(\tau_1 + \tau_2 - 2t)} \sin[\varphi(t-\tau_1)] \sin[\varphi(t-\tau_2)] K_\xi(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления уже не вызывают трудностей, и мы их опускаем.

### 3.6. Эргодические случайные процессы

При решении прикладных задач, когда по наблюдаемым значениям изучаемого *случайного процесса* требуется оценить его *моменты*, большое значение приобретает информативность *выборочных реализаций*. Это особенно важно в тех случаях, когда условия, в которых проводят наблюдения, позволяют получить лишь одну реализацию.

В связи с этим возникает естественный вопрос — можно ли по одной *реализации случайного процесса* делать какие-либо заключения о его свойствах? Оказывается, что можно, но



не для всех случайных процессов, а лишь для тех, которые удовлетворяют определенным условиям.

**Определение 3.9.** Скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , интегрируемый на множестве  $T$  с весом  $\varphi(t, t') = 1/l$ ,  $t, t' \in T$ , и обладающий постоянным математическим ожиданием  $m_\xi$ , называют эргодическим по отношению к математическому ожиданию  $m_\xi$ , если существует предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) dt = m_\xi,$$

или, что тоже самое,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} M \left[ \left| \frac{1}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) dt - m_\xi \right|^2 \right] = 0.$$

**Теорема 3.9.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , — скалярный случайный процесс второго порядка, интегрируемый на множестве  $T$  с весом  $\rho(t)$ , где  $\rho(t)$  — некоторая произвольная неслучайная интегрируемая на  $T$  функция. Предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l \rho(t) [\xi(t, \omega) - m_\xi(t)] dt = 0$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l \int_0^l \rho(t_1) \rho(t_2) K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0.$$

◀ Из условий теоремы следует существование случайной величины

$$\eta(\omega) \triangleq \int_T \rho(t) \xi(t, \omega) dt \quad (3.11)$$

с математическим ожиданием

$$m_\eta \triangleq \mathbf{M}[\eta(\omega)] = \int_T \rho(t) m_\xi(t) dt \quad (3.12)$$

и дисперсией

$$D_\eta \triangleq \mathbf{D}[\eta(\omega)] = \int_T \int_T \rho(t_1) \rho(t_2) K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (3.13)$$

Если воспользоваться определением дисперсии скалярной случайной величины, то с учетом (3.11), (3.12) получаем

$$D_\eta = \mathbf{M}[|\eta(\omega) - \mathbf{M}[\eta(\omega)]|^2] = \mathbf{M}\left[\left|\int_T \rho(t) [\xi(t, \omega) - m_\xi(t)] dt\right|^2\right].$$

Сопоставив этот результат с (3.13), приходим к равенству

$$\mathbf{M}\left[\left|\int_T \rho(t) [\xi(t, \omega) - m_\xi(t)] dt\right|^2\right] = \int_T \int_T \rho(t_1) \rho(t_2) K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Из определения предела следует, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l \rho(t) [\xi(t, \omega) - m_\xi(t)] dt = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{M}\left[\left|\int_0^l \rho(t) [\xi(t, \omega) - m_\xi(t)] dt\right|^2\right] = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l \int_0^l \rho(t_1) \rho(t_2) K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Значит, теорема доказана. ►

**Следствие 3.7.** Если в условиях теоремы 3.9  $\rho(t) = 1/l$ ,  $t \in T = [0, l]$ , то

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l [\xi(t, \omega) - m_\xi(t)] dt = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0.$$

**Следствие 3.8.** Если скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , интегрируем на множестве  $T$  с весом  $\rho(t) \equiv 1/l$  и  $m_\xi(t) \equiv m_\xi = \text{const}$ , то условие

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0 \quad (3.14)$$

является необходимым и достаточным для эргодичности этого случайного процесса по отношению к математическому ожиданию.

Следствие 3.8 — отражение общей *эргодической теоремы*, утверждающей следующее. Для скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , с постоянным математическим ожиданием условие, что среднее значение этого случайного процесса по области  $T$  в пределе при  $l \rightarrow \infty$  равно его математическому ожиданию, равносильно условию, что среднее значение по области  $T \times T$  *ковариационной функции* при  $l \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Практическая проверка реализуемости необходимого и достаточного условия (3.14) эргодичности случайного процесса относительно его математического ожидания может быть связана с преодолением значительных трудностей. Поэтому

зачастую, особенно в случае *стационарных случайных процессов*, целесообразно использовать достаточные условия эргодичности.

**Теорема 3.10.** Пусть скалярный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , интегрируемый на множестве  $T$  с весом  $1/l$ , имеет постоянное математическое ожидание  $m_\xi$ . Тогда для его эргодичности относительно математического ожидания достаточно существования предела

$$\lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} K_\xi(t_1, t_2) \equiv 0. \quad (3.15)$$

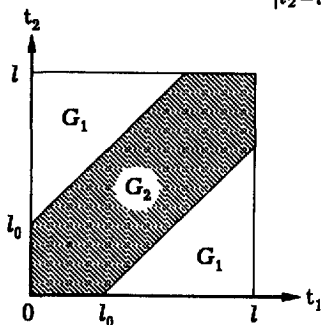


Рис. 3.1

◀ Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $l_0 > 0$ , что при  $|t_2 - t_1| > l_0$  верно неравенство  $|K_\xi(t_1, t_2)| < \varepsilon$ . Обозначим  $G_1 \triangleq \{(t_1, t_2) \in T \times T : |t_1 - t_2| > l_0\}$ ,  $G_2 \triangleq T \times T \setminus G_1$  (рис. 3.1). Если

$$N = \max_T D[\xi(t, \omega)] \equiv \max_T K(t, t),$$

а  $m(G_1)$ ,  $m(G_2)$  — площади областей  $G_1$  и  $G_2$  соответственно, то

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right| &= \\ &= \frac{1}{l^2} \left| \iint_{G_1} K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \iint_{G_2} K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{l^2} \left( \iint_{G_1} |K_\xi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 + \iint_{G_2} |K_\xi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 \right) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon m(G_1) + N m(G_2)}{l^2} \leq \varepsilon + 2N \frac{l_0}{l}, \end{aligned}$$

так как имеют место неравенства (см. рис. 3.1)

$$m(G_1) < l^2, \quad m(G_2) < 2ll_0.$$

Таким образом, из (3.15) следует (3.14), что и требовалось доказать. ►

**Пример 3.12.** Скалярный стационарный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , с характеристиками

$$m_\xi(t) \equiv 0, \quad K_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left[ \cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right], \quad \alpha > 0,$$

(см. пример 3.11) является эргодическим относительно математического ожидания. Действительно:

а) по условию  $M[\xi(t, \omega)] = 0$ ,  $t \in T$ , т.е. случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , имеет постоянное математическое ожидание;

б) он является интегрируемым на любом отрезке  $[0, l] \subset T$ ,  $l > 0$ , с весом  $1/l$ , так как существуют интегралы

$$\frac{1}{l} \int_0^l m_\xi(t) dt \equiv 0, \quad \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l K_\xi(t_2 - t_1) dt_1 dt_2;$$

в) выполняется достаточное условие (3.15), которое при  $\tau = t_2 - t_1$  означает существование предела

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} K_\xi(\tau) = 0.$$

**Замечание 3.3.** Для эргодического по отношению к математическому ожиданию скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , с известной реализацией  $x(t)$  в качестве оценки его математического ожидания можно использовать величину

$$\hat{m}_\xi \triangleq \frac{1}{l} \int_0^l x(t) dt.$$

При этом, как известно из курса математической статистики [XVII], качество этой оценки возрастает с ростом  $l$ .

**Замечание 3.4.** Возможность получения оценки математического ожидания эргодического случайного процесса по одной его реализации, т.е. по результатам одного эксперимента, зачастую избавляет исследователей от проведения многочисленных экспериментов, связанных с затратами материальных и временных ресурсов.

**Замечание 3.5.** Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , — скалярный стационарный случайный процесс, то

$$m_\xi \triangleq M[\xi(t, \omega)] \equiv \text{const}; \quad D_\xi \triangleq D[\xi(t, \omega)] \equiv \text{const}.$$

Скалярный случайный процесс  $(\xi(t, \omega) - m_\xi)^2$ ,  $t \in T$ , имеет постоянное математическое ожидание  $D_\xi$  и при выполнении соответствующих условий является эргодическим по отношению к математическому ожиданию. Таким образом, можно вести речь о том, что исходный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является *эргодическим по отношению к дисперсии* и рассматривать возможность построения качественной оценки для его дисперсии по одной реализации.

**Определение 3.10.** Скалярный стационарный случайный процесс второго порядка  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , интегрируемый на  $T$  с весом  $1/l$ , называют эргодическим по отношению к дисперсии  $D_\xi$ , если существует предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l [\xi(t, \omega) - m_\xi]^2 dt = D_\xi,$$

или, что тоже самое,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} M \left[ \left| \frac{1}{l} \int_0^l [\xi(t, \omega) - m_\xi]^2 dt - D_\xi \right|^2 \right] = 0.$$

В заключение отметим, что если скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, l]$ , эргодический по отношению к дисперсии  $D_\xi$ , то скалярный случайный процесс  $\eta(t, \omega) \triangleq (\xi(t, \omega) - m_\xi)^2$ ,  $t \in T$ , согласно определению 3.6, эргодический относительно математического ожидания  $M[\eta(t, \omega)] \equiv D_\xi \equiv \text{const.}$  Таким образом, условие

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l K_\eta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0$$

необходимо и достаточно, а условие

$$\lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} K_\eta(t_1, t_2) \equiv 0$$

достаточно для эргодичности исходного скалярного стационарного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , относительно дисперсии.

## Вопросы и задачи

**3.1.** Являются ли: а) стохастически эквивалентные случайные процессы равными в смысле СК-нормы; б) случайные процессы, равные в смысле СК-нормы, стохастически эквивалентными?

**3.2.** Можно ли утверждать, что предел случайного процесса обладает обычными свойствами предела неслучайной функции?

**3.3.** Можно ли утверждать, что предел последовательности случайных процессов обладает обычными свойствами предела последовательности?

**3.4.** Докажите теорему 3.2.

**3.5.** Докажите утверждение из замечания 3.1.

**3.6.** Определение 3.3 непрерывности случайного процесса в точке является аналогом первого из двух эквивалентных

определений непрерывности функции в точке. Сформулируйте определение непрерывности случайного процесса в точке, аналогичное второму определению непрерывности функции в точке.

**3.7.** Пусть  $\xi(t, \omega) = (\xi_1(t, \omega) \ \xi_2(t, \omega))^T$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — двумерный винеровский процесс, выходящий из  $0$ . Пусть  $[a, b] \subset T$  и  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . Докажите, что существует предел

$$\lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} [\xi_1(t_{k+1}, \omega) - \xi_1(t_k, \omega)] [\xi_2(t_{k+1}, \omega) - \xi_2(t_k, \omega)] = 0,$$

где  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

**3.8.** Докажите следствие 3.1 из теоремы 3.5.

**3.9.** Докажите, что линейная комбинация и произведение непрерывных на  $T$  скалярных случайных процессов — непрерывные на  $T$  скалярные случайные процессы.

**3.10.** Пусть  $\xi_k(\omega)$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , — некоррелированные случайные величины и

$$\eta_n(\omega) \triangleq \sum_{k=1}^n \xi_k(\omega), \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажите, что последовательность случайных величин  $\{\eta_n(\omega)\}$  сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} M[\xi_k(\omega)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} D[\xi_k(\omega)].$$

**3.11.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $\xi_{(k)}(t, \omega)$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ ,  $\eta(t, \omega)$ ,  $\eta_{(n)}(t, \omega)$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , — скалярные случайные процессы,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , причем

$$M[|\xi(t, \omega)|^2] < \infty, \quad M[|\eta(t, \omega)|^2] < \infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{(k)}(t, \omega) = \xi(t, \omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{(n)}(t, \omega) = \eta(t, \omega).$$



Докажите, что

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} M[\xi_{(k)}(t, \omega) \eta_{(n)}(t, \omega)] = M[\xi(t, \omega) \eta(t, \omega)].$$

**3.12.** Докажите следствия 3.2, 3.3.

**3.13.** Докажите, что скалярный случайный процесс

$$\xi(t, \omega) \triangleq e^{-2t} \sin[t + \varphi(\omega)], \quad t \in T,$$

где  $\varphi(\omega)$  — случайная величина, распределенная по равномерному закону на отрезке  $[0, 2\pi]$ , дифференцируем на  $T$ .

У к а з а н и е: воспользоваться критерием дифференцируемости случайного процесса.

**3.14.** Пусть  $\varphi(\omega)$  — случайная величина, распределенная по равномерному закону на  $[0, 2\pi]$  и

$$\xi(t, \omega) \triangleq |\sin t| \sin[2t + \varphi(\omega)], \quad t \in T = [0, \infty).$$

Является ли: а) случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , дифференцируемым? б) произвольная реализация случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , дифференцируемой?

О т в е т: а) случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является дифференцируемым при любом  $t \in T$ ; б) любая реализация не имеет производных в точках  $t = k\pi$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ .

**3.15.** Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса

$$\eta(t, \omega) \triangleq \dot{\xi}(t, \omega), \quad t \in T \subset \mathbb{R},$$

если известно, что

$$\xi(t, \omega) \triangleq 2 + t + \alpha(\omega)t^2 + \beta(\omega)t^3, \quad t \in T,$$

где  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  — некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, равными 0,1.

О т в е т:  $m_\eta(t) \equiv 1$ ;  $\sigma_\eta^2(t) = 0,4t^2 + 0,9t^4$ ;  $K_\eta(t_1, t_2) = 0,4t_1t_2 + 0,9t_1^2t_2^2$ .

**3.16.** Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию скалярного случайного процесса

$$\eta(t, \omega) \triangleq \dot{\xi}(t, \omega), \quad t \in T,$$

если известно, что

$$\xi(t, \omega) \triangleq \alpha_1(\omega)t + \alpha_2(\omega)\sin t, \quad t \in T,$$

$$\alpha(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\omega) \\ \alpha_2(\omega) \end{pmatrix}, \quad M[\alpha(\omega)] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{cov}(\alpha(\omega)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

О т в е т:  $m_\eta(t) = 2\sin^2(0,5t)$ ;  $K_\eta(t_1, t_2) = 2 + \cos t_2 + \cos t_1 + 3\cos t_1 \cos t_2$ .

**3.17.** Дифференцируемый случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , имеет математическое ожидание  $m_\xi(t)$  и ковариационную функцию  $K_\xi(t_1, t_2)$ . Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса

$$\eta(t, \omega) \triangleq \xi(t, \omega) + \dot{\xi}(t, \omega), \quad t \in T.$$

О т в е т:  $m_\eta(t) = m_\xi(t) + m'_\xi(t)$ ;  $K_\eta(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2) + \frac{\partial K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ .

**3.18.** Является ли дифференцируемым винеровский процесс?

О т в е т: нет.

**3.19.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стационарный в широком смысле случайный процесс, дифференцируемый на  $T$ . Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\dot{\xi}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ?

О т в е т: да.

**3.20.** Докажите, что производная от гауссовского процесса — гауссовский процесс.

**3.21.** Найдите вероятность того, что производная от гауссовского стационарного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , будет иметь значения большие, чем  $d = \sqrt{5} \text{ м/с}$ , если  $M[\xi(t, \omega)] \equiv 10 \text{ м}$ ,  $K_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} [\cos(\nu\tau) + (\alpha/\beta) \sin(\nu|\tau|)]$ ,  $\sigma^2 = 4 \text{ м}^2$ ,  $\alpha = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $\beta = 2 \text{ с}^{-1}$ .

О т в е т: 0,3085.

**3.22.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стационарный в широком смысле случайный процесс с ковариационной функцией

$$K_\xi(\tau) = (1 + |\tau| + 0,125\tau^2)e^{-|\tau|}.$$

Сколько раз он дифференцируем?

О т в е т: два раза.

**3.23.** Найдите одномерный закон распределения векторного случайного процесса  $\eta(t, \omega) \triangleq (\xi(t, \omega) \quad \dot{\xi}(t, \omega))^T$ ,  $t \in T$ , если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — нормальный скалярный стационарный в широком смысле случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией  $K_\xi(\tau) = (1 + \tau^2)^{-1}$ .

**3.24.** Докажите следствие 3.6.

**3.25.** Найдите дисперсию случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , при  $t = 10 \text{ с}$ , если

$$\eta(t, \omega) \triangleq \int_0^t \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T,$$

а  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — интегрируемый на  $T$  скалярный случайный процесс и  $K_\xi(\tau) = \sigma^2 (1 + \alpha|\tau|e^{-\alpha|\tau|})$ ,  $\sigma^2 = 10 (\text{см/с})^2$ ,  $\alpha = 0,5 \text{ с}^{-1}$ .

О т в е т:  $1366 \text{ см}^2$ .

**3.26.** Найдите математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса:

$$\text{а) } \eta(t, \omega) \triangleq \int_0^t \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T,$$

если  $m_\xi(t) = 0,2 \cos^2(\nu t)$ ,  $K_\xi(t_1, t_2) = 0,4 \cos(\nu t_1) \cos(\nu t_2)$  и  $\nu$  — известная постоянная;

б)  $\xi(t, \omega) \triangleq t + \alpha(\omega) \cos t + \beta(\omega) \sin t$ ,  $t \in T$ , где  $\alpha(\omega)$ ,  $\beta(\omega)$  — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и  $D[\alpha(\omega)] = 0,1$ ,  $D[\beta(\omega)] = 0,2$ .

Ответ: а)  $m_\eta(t) = 0,1 [t + (2\nu)^{-1} \sin(2\nu t)]$ ,  $K_\eta(t_1, t_2) = 0,4\nu^{-2} \sin(\nu t_1) \sin(\nu t_2)$ ,  $\sigma_\eta^2 = 0,4\nu^{-2} \sin^2(\nu t)$ ; б)  $m_\eta(t) = 0,5t^2$ ,  $K_\eta(t_1, t_2) = 0,1 \sin(t_1) \sin(t_2) + 0,2 [1 - \cos(t_1)] [1 - \cos(t_2)]$ ,  $\sigma_\eta^2(t) = 0,1 \sin^2(t) + 0,8 \sin^2(0,5t)$ .

**3.27.** Пусть  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — скалярный стационарный в широком смысле дифференцируемый на  $T$  случайный процесс. Выясните, является ли стационарным в широком смысле случайный процесс

$$\eta(t, \omega) \triangleq \int_0^t \dot{\xi}(t', \omega) dt', \quad t \in T.$$

Ответ: да.

**3.28.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — интегрируемый на  $T$  скалярный случайный процесс с известной ковариационной функцией  $K_\xi(t_1, t_2)$ . Найдите взаимную ковариационную функцию  $K_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ , если

$$\eta(t, \omega) \triangleq \int_0^t \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T.$$

Ответ:

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} K_\xi(t_2, t) dt.$$

**3.29.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — винеровский скалярный процесс, выходящий из нуля. Докажите, что случайный про-

цесс

$$\eta(t, \omega) \triangleq \int_t^{\infty} (e^{t-t'} - 2e^{2(t-t')}) \xi(t', \omega) dt', \quad t \in T,$$

является стационарным в широком смысле случайным процессом; найдите его математическое ожидание и ковариационную функцию.

О т в е т:  $m_{\eta} = 0$ ,  $K_{\eta}(\tau) = 6^{-1}e^{-|\tau|} - 12^{-1}e^{-2|\tau|}$ .

**3.30.** Найдите дисперсию случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , если  $\ddot{\xi}(t, \omega) + \nu^2 \xi(t, \omega) = \varepsilon(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , а  $\varepsilon(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный нормальный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией  $K_{\varepsilon}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma^2$  — неслучайные параметры,  $\alpha > 0$ .

О т в е т:

$$\sigma_{\xi}^2(t) = \frac{\sigma^2}{\nu^2(\nu^2 + \alpha^2)} \left( \alpha t + \frac{3\nu^2 - \alpha^2}{2(\nu^2 + \alpha^2)} - \frac{\alpha}{2\nu} - \frac{\alpha}{2\nu} \sin(\nu t) + \frac{1}{2} \cos(\nu t) \right).$$

**3.31.** Является скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , эргодическим по отношению к математическому ожиданию, если

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t, \omega) = 0, \\ \xi(0, \omega) = \xi_0(\omega), \end{cases}$$

где  $\xi_0(\omega)$  — случайная величина, распределенная по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ ?

О т в е т: нет.

**3.32.** Выясните, является ли двумерный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , эргодическим по отношению к математическому ожиданию, если

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t, \omega) = A\xi(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) = \xi_0(\omega), \end{cases}$$

где  $\xi_0(\omega)$  — двумерный случайный вектор, распределенный по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma$ ,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

О т в е т: нет.

**3.33.** Рассмотрим дифференцируемый на  $T$  скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , имеющий постоянное математическое ожидание и ковариационную функцию  $K_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}$ . Пусть  $\alpha > 0$  и  $\eta(t, \omega) \triangleq \dot{\xi}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Найдите  $K_\eta(t_1, t_2)$  и определите ее наибольшее значение. Докажите эргодичность случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , относительно его математического ожидания.

О т в е т:  $K_\eta(t_1, t_2) = 2\alpha\sigma^2 \exp[-\alpha(t_2 - t_1)^2] [1 - 2\alpha(t_2 - t_1)^2]$ ;  $\max K_\eta(t_1, t_2) = 2\alpha\sigma^2$ .

## 4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В классическом математическом анализе теории рядов и интегралов Фурье объединяет *гармонический анализ*. Своим названием он обязан простейшей периодической функции  $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , которую в приложениях называют *гармоникой*. Константы  $A$ ,  $\omega$  и  $\varphi$  представляют собой соответственно *амплитуду*, *частоту* и *начальную фазу гармоник*. Одной из задач гармонического анализа является задача о представимости функции в виде суммы гармоник, каждая из которых соответствует определенной частоте. Множество этих частот образует *спектр функции*, который играет существенную роль для решения широкого класса прикладных задач, поскольку, располагая спектром, всегда можно восстановить исходную функцию с наперед заданной точностью.

При изучении *случайных процессов* гармонический анализ приобретает особо важное значение. В самом деле, ни одна из *реализаций случайного процесса* не может быть известна заранее. Однако заранее можно установить, как распределяется *дисперсия случайного процесса* по частотам составляющих его гармоник. Такая информация не уступает по значимости спектру *детерминированной*, т.е. неслучайной *функции*. Использование этой информации при изучении *стационарных* (в широком смысле) *случайных процессов* составляет существо их *спектральной теории*.

Напомним, что скалярный случайный процесс (вещественный или комплексный)  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , является стационарным (в широком смысле), если он обладает двумя свойствами:

$$M[\xi(t, \omega)] \equiv m_\xi = \text{const}, \quad t \in T;$$

$$K_\xi(t_1, t_2) = M[\xi(t_1, \omega) - m_\xi]^* (\xi(t_2, \omega) - m_\xi) \equiv K_\xi(\tau), \quad t_1, t_2 \in T,$$

где символ  $*$  означает переход к комплексно сопряженному выражению в случае *комплексного случайного процесса*, а  $\tau \triangleq t_2 - t_1$ . При этом из общих свойств *ковариационных функций* (см. 1.2) следует, что если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , — скалярный стационарный случайный процесс, то

$$D[\xi(t, \omega)] = K_\xi(0); \quad K_\xi(\tau) = K_\xi^*(\tau); \quad |K_\xi(\tau)| \leq D[\xi(t, \omega)] = K_\xi(0).$$

Спектральная теория позволяет заменить исследование исходного стационарного случайного процесса исследованием его изображения при интегральном преобразовании Фурье, являющегося *случайной функцией* некоторого вспомогательного переменного, которое во многих приложениях имеет размерность частоты. А так как применение интегрального преобразования Фурье зачастую существенно упрощает выкладки, то оно получило широкое распространение как в теоретических, так и в прикладных исследованиях.

#### 4.1. Стационарные случайные процессы с дискретным спектром

В этом разделе, говоря о стационарных случайных процессах, будем иметь в виду *стационарные случайные процессы в широком смысле*.

Одним из основных вопросов является представимость *стационарных случайных процессов* в виде конечных или бесконечных сумм *гармоник* с различными частотами и случайными амплитудами.

**Определение 4.1.** Случайный процесс  $\xi(t, \omega) = \alpha(\omega)\varphi(t)$ ,  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , где  $\alpha(\omega)$  — случайная величина, а  $\varphi(t)$  — неслучайная функция, определенная на множестве  $T$ , называют *элементарным случайным процессом*.

**Пример 4.1.** Рассмотрим скалярный случайный процесс

$$S_n(t, \omega) \triangleq \sum_{k=1}^n \alpha_k(\omega) \cos \frac{2\pi kt}{l} + \beta_k(\omega) \sin \frac{2\pi kt}{l}, \quad t \in T = [0, l], \quad (4.1)$$



представляющий собой конечную сумму элементарных случайных процессов. Предполагая, что

$$M[S_n(t, \omega)] = 0, \quad t \in T, \quad (4.2)$$

найдем условия стационарности случайного процесса  $S_n(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

Из определения 4.1 элементарного случайного процесса  $S_n(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и свойств математического ожидания (см. П.1) имеем

$$M[S_n(t, \omega)] = \sum_{k=1}^n M[\alpha_k(\omega)] \cos \frac{2\pi kt}{l} + M[\beta_k(\omega)] \sin \frac{2\pi kt}{l}.$$

Поскольку тригонометрические функции из этой суммы линейно независимы на отрезке  $[0, l]$  [IX], то условие (4.2) выполнено тогда и только тогда, когда

$$M[\alpha_k(\omega)] = M[\beta_k(\omega)] = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (4.3)$$

Далее, в соответствии с определением ковариационной функции, свойствами математического ожидания (см. П.1) и равенствами (4.2), (4.3), имеем

$$\begin{aligned} K_{S_n}(t_1, t_2) &\equiv M[S_n(t_1, \omega) S_n(t_2, \omega)] = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n M[\alpha_k(\omega) \alpha_m(\omega)] \cos \frac{2\pi kt_1}{l} \cos \frac{2\pi mt_2}{l} + \\ &\quad + M[\beta_k(\omega) \beta_m(\omega)] \sin \frac{2\pi kt_1}{l} \sin \frac{2\pi mt_2}{l} + \\ &\quad + M[\alpha_k(\omega) \beta_m(\omega)] \cos \frac{2\pi kt_1}{l} \sin \frac{2\pi mt_2}{l} + \\ &\quad + M[\beta_k(\omega) \alpha_m(\omega)] \sin \frac{2\pi kt_1}{l} \cos \frac{2\pi mt_2}{l}. \end{aligned}$$

Преобразуя произведения тригонометрических функций в их суммы или разности, получаем, что ковариационная функция будет зависеть лишь от  $\tau \triangleq t_2 - t_1$ , т.е.

$$K_{S_n}(t_1, t_2) \equiv K_{S_n}(t_2 - t_1)$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{D}[\alpha_k(\omega)] = \mathbf{D}[\beta_k(\omega)] = \sigma_k^2, \quad k = \overline{1, n};$$

$$\text{cov}[\alpha_k(\omega); \alpha_m(\omega)] = \text{cov}[\beta_k(\omega); \beta_m(\omega)] = 0, \quad k, m = \overline{1, n}, \quad k \neq m;$$

$$\text{cov}[\alpha_k(\omega); \beta_m(\omega)] = 0, \quad k, m = \overline{1, n}.$$

Следовательно, случайный процесс  $S_n(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , вида (4.1), удовлетворяющий условию (4.2), является стационарным тогда и только тогда, когда  $\alpha_k(\omega)$ ,  $\beta_k(\omega)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , являются некоррелированными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсией  $\mathbf{D}[\alpha_k(\omega)] = \mathbf{D}[\beta_k(\omega)] = \sigma_k^2$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Заметим, что в этом случае

$$K_{S_n}(\tau) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \cos \frac{2\pi k\tau}{l}, \quad \mathbf{D}[S_n(t, \omega)] = K_{S_n}(0) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2,$$

где  $\sigma_k^2$  — дисперсии случайных амплитуд  $\alpha_k(\omega)$  и  $\beta_k(\omega)$ , соответствующих частоте  $\frac{2\pi k}{l}$ . #

Пусть скалярный стационарный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию  $K_\xi(\tau) \equiv K_\xi(t_2 - t_1)$ , которая является непрерывной на отрезке  $[-l, l]$  и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле. Принимая во внимание четность ковариационной функции  $K_\xi(\tau)$ , имеем

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos \frac{\pi k\tau}{l}; \quad \sigma_k^2 = \frac{2}{l} \int_0^l K_\xi(\tau) \cos \frac{\pi k\tau}{l} d\tau; \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Далее предполагаем, что в этих разложениях отсутствуют нечетные гармоники, т.е.

$$\begin{cases} K_{\xi}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos \frac{2\pi k\tau}{l}, \\ \sigma_k^2 = \frac{2}{l} \int_0^l K_{\xi}(\tau) \cos \frac{2\pi k\tau}{l} d\tau, \quad k = \overline{0, \infty}. \end{cases} \quad (4.4)$$

В соответствии с принятыми допущениями ряды Фурье (4.4) сходятся равномерно, а рассматриваемый скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является интегрируемым на множестве  $T$  с весами  $\{\cos \frac{2\pi kt}{l}\}_{k=0}^{\infty}$  и  $\{\sin \frac{2\pi kt}{l}\}_{k=1}^{\infty}$ , что следует из теоремы 3.4, так как при любых значениях  $k, m \geq 0$  в силу непрерывности подынтегральных функций существуют и ограничены интегралы

$$\frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l K_{\xi}(t_2 - t_1) \cos \frac{2\pi kt_1}{l} \cos \frac{2\pi mt_2}{l} dt_1 dt_2,$$

$$\frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l K_{\xi}(t_2 - t_1) \sin \frac{2\pi kt_1}{l} \cos \frac{2\pi mt_2}{l} dt_1 dt_2,$$

$$\frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l K_{\xi}(t_2 - t_1) \sin \frac{2\pi kt_1}{l} \sin \frac{2\pi mt_2}{l} dt_1 dt_2.$$

Таким образом, на множестве  $T$  определен скалярный случайный процесс

$$S_n^{\xi}(t, \omega) \triangleq \frac{\alpha_0(\omega)}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k(\omega) \cos \frac{2\pi kt}{l} + \beta_k(\omega) \sin \frac{2\pi kt}{l}, \quad t \in T, \quad (4.5)$$

где

$$\alpha_k(\omega) \triangleq \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) \cos \frac{2\pi kt}{l} dt, \quad k = \overline{0, n};$$

$$\beta_k(\omega) \triangleq \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) \sin \frac{2\pi kt}{l} dt, \quad k = \overline{1, n}.$$

Если случайный процесс  $S_n^\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является стационарным и сходится к исходному случайному процессу  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , то можно говорить о дискретном спектре  $\{2\pi k/l\}_{k=0}^\infty$  частот стационарного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Корректность данной гипотезы подтверждается следующими теоремами.

**Теорема 4.1.** Если ковариационная функция  $K_\xi(\tau)$  скалярного стационарного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , с нулевым математическим ожиданием является непрерывной на отрезке  $[-l, l]$ , удовлетворяет на нем условиям Дирихле и представима в виде (4.4), то случайный процесс  $S_n^\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определяемый согласно (4.5), является стационарным.

◀ Так как по условию  $M[\xi(t, \omega)] \equiv 0$ ,  $t \in T$ , то в соответствии с (4.5)

$$M[\alpha_k(\omega)] = \frac{2}{l} \int_0^l M[\xi(t, \omega)] \cos \frac{2\pi kt}{l} dt = 0, \quad k = \overline{0, n};$$

$$M[\beta_k(\omega)] = \frac{2}{l} \int_0^l M[\xi(t, \omega)] \sin \frac{2\pi kt}{l} dt = 0, \quad k = \overline{1, n};$$

$$M[S_n^\xi(t, \omega)] = \frac{M[\alpha_0(\omega)]}{2} + \sum_{k=1}^n \left( M[\alpha_k(\omega)] \cos \frac{2\pi kt}{l} + M[\beta_k(\omega)] \sin \frac{2\pi kt}{l} \right) = 0.$$

Далее, с учетом равномерной сходимости рядов Фурье (4.4) и ортонормированности на отрезке  $[0, l]$  системы тригонометрических функций

$$\frac{1}{\sqrt{l}}; \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi kt}{l}; \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi kt}{l}; \quad k = \overline{1, \infty},$$

имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}[\alpha_p(\omega); \alpha_q(\omega)] &= \\ &= \text{M} \left[ \left( \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t_1, \omega) \cos \frac{2\pi pt_1}{l} dt_1 \right) \left( \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t_2, \omega) \cos \frac{2\pi qt_2}{l} dt_2 \right) \right] = \\ &= \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \text{M}[\xi(t_1, \omega) \xi(t_2, \omega)] \cos \frac{2\pi pt_1}{l} \cos \frac{2\pi qt_2}{l} dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l K_\xi(t_2 - t_1) \cos \frac{2\pi pt_1}{l} \cos \frac{2\pi qt_2}{l} dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{4}{l^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \int_0^l \int_0^l \left( \cos \frac{2\pi kt_1}{l} \cos \frac{2\pi kt_2}{l} - \sin \frac{2\pi kt_1}{l} \sin \frac{2\pi kt_2}{l} \right) \times \\ &\quad \times \cos \frac{2\pi pt_1}{l} \cos \frac{2\pi qt_2}{l} dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{4}{l^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \left( \int_0^l \cos \frac{2\pi kt_1}{l} \cos \frac{2\pi pt_1}{l} dt_1 \int_0^l \cos \frac{2\pi kt_2}{l} \cos \frac{2\pi qt_2}{l} dt_2 - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l \sin \frac{2\pi kt_1}{l} \cos \frac{2\pi pt_1}{l} dt_1 \int_0^l \sin \frac{2\pi kt_2}{l} \cos \frac{2\pi qt_2}{l} dt_2 \right) = \\ &= \begin{cases} \sigma_p^2, & p = q; \\ 0, & p \neq q. \end{cases} \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно доказать равенства

$$\text{cov}[\beta_i(\omega); \beta_q(\omega)] = \begin{cases} \sigma_p^2, & p = q; \\ 0, & p \neq q, \end{cases} \quad \text{cov}[\alpha_p(\omega); \beta_q(\omega)] = 0.$$

Таким образом, можно утверждать (см. пример 4.1), что  $S_n^\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , — стационарный скалярный случайный процесс. ►

**Следствие 4.1.** Если выполнены условия теоремы 4.1, то имеют место равенства:

$$\begin{cases} D[0,5 \alpha_0(\omega)] = \sigma_0^2; \\ D[\alpha_k(\omega)] = D[\beta_k(\omega)] = \sigma_k^2, \quad k = \overline{1, n}; \\ D[S_n^\xi(t, \omega)] = \sum_{k=0}^n \sigma_k^2; \\ D[\xi(t, \omega)] = K_\xi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2. \end{cases} \quad (4.6)$$

**Теорема 4.2.** Если ковариационная функция  $K_\xi(\tau)$  стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , с нулевым математическим ожиданием является непрерывной на отрезке  $[-l, l]$ , удовлетворяет на нем условиям Дирихле и представима в виде (4.4), то при  $n \rightarrow \infty$  случайный процесс  $S_n^\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определяемый согласно (4.5), сходится к исходному случайному процессу:

$$\xi(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\xi(t, \omega), \quad t \in T,$$

или, что то же самое, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[|\xi(t, \omega) - S_n^\xi(t, \omega)|^2] = 0, \quad t \in T.$$

◀ Воспользовавшись видом (4.5) скалярного случайного процесса  $S_n^\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\xi(t, \omega) S_n^\xi(t, \omega)] &= \frac{1}{2} \mathbf{M}[\xi(t, \omega) \alpha_0(\omega)] + \\ &+ \sum_{k=1}^n \mathbf{M}[\xi(t, \omega) \alpha_k(\omega)] \cos \frac{2\pi kt}{l} + \mathbf{M}[\xi(t, \omega) \beta_k(\omega)] \sin \frac{2\pi kt}{l}. \end{aligned}$$

При этом из (4.5) и равномерной сходимости ряда Фурье (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\xi(t, \omega) \alpha_k(\omega)] \cos \frac{2\pi kt}{l} + \mathbf{M}[\xi(t, \omega) \beta_k(\omega)] \sin \frac{2\pi kt}{l} &= \\ &= \mathbf{M} \left[ \xi(t, \omega) \frac{2}{l} \int_0^l \xi(s, \omega) \cos \frac{2\pi ks}{l} ds \right] \cos \frac{2\pi kt}{l} + \\ &+ \mathbf{M} \left[ \xi(t, \omega) \frac{2}{l} \int_0^l \xi(s, \omega) \sin \frac{2\pi ks}{l} ds \right] \sin \frac{2\pi kt}{l} = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \mathbf{M}[\xi(t, \omega) \xi(s, \omega)] \left[ \cos \frac{2\pi kt}{l} \cos \frac{2\pi ks}{l} + \right. \\ &+ \left. \sin \frac{2\pi kt}{l} \sin \frac{2\pi ks}{l} \right] ds = \frac{2}{l} \int_0^l K_\xi(t-s) \cos \frac{2\pi k(t-s)}{l} ds = \\ &= \frac{2}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m^2 \int_0^l \cos \frac{2\pi m(t-s)}{l} \cos \frac{2\pi k(t-s)}{l} ds = \sigma_k^2, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно доказать равенство

$$\mathbf{M}[\xi(t, \omega) \alpha_0(\omega)] = 2\sigma_0^2.$$

Таким образом, с учетом (4.6), получаем

$$\mathbf{M}[\xi(t, \omega) S_n^\xi(t, \omega)] = \sum_{k=0}^n \sigma_k^2 = \mathbf{D}[S_n^\xi(t, \omega)]. \quad (4.7)$$

Для завершения доказательства теоремы рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - S_n^\xi(t, \omega)|^2] &\equiv \mathbf{M}[\xi(t, \omega)\xi(t, \omega)] - \\ &- 2\mathbf{M}[\xi(t, \omega)S_n^\xi(t, \omega)] + \mathbf{M}[S_n^\xi(t, \omega)S_n^\xi(t, \omega)]. \end{aligned}$$

Из условия

$$\mathbf{M}[\xi(t, \omega)] = \mathbf{M}[S_n^\xi(t, \omega)] = 0, \quad t \in T,$$

и равенств (4.6), (4.7) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - S_n^\xi(t, \omega)|^2] &= \mathbf{D}[\xi(t, \omega)] - 2\mathbf{D}[S_n^\xi(t, \omega)] + \\ &+ \mathbf{D}[S_n^\xi(t, \omega)] \equiv \mathbf{D}[\xi(t, \omega)] - \mathbf{D}[S_n^\xi(t, \omega)] = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_k^2 - \end{aligned}$$

$n$ -й остаток сходящегося знакоположительного числового ряда с общим членом  $\{\sigma_k^2\}$ . Таким образом, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}[|\xi(t, \omega) - S_n^\xi(t, \omega)|^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_k^2 = 0,$$

что и требовалось доказать. ►

**Следствие 4.2.** Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , — стационарный скалярный случайный процесс с математическим ожиданием  $m_\xi$ , а его ковариационная функция  $K_\xi(\tau)$  непрерывна на отрезке  $[-l, l]$ , удовлетворяет на нем условиям Дирихле и представима в виде (4.4), то *центрированный случайный процесс*

$$\overset{\circ}{\xi}(t, \omega) \triangleq \xi(t, \omega) - m_\xi, \quad t \in T,$$



может быть представлен суммой ряда Фурье:

$$\overset{\circ}{\xi}(t, \omega) = \frac{\alpha_0(\omega)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\omega) \cos \frac{2\pi kt}{l} + \beta_k(\omega) \sin \frac{2\pi kt}{l}, \quad t \in T,$$

где равенство следует понимать в смысле СК-нормы и

$$\begin{aligned} \alpha_k(\omega) &\triangleq \frac{2}{l} \int_0^l \overset{\circ}{\xi}(t, \omega) \cos \frac{2\pi kt}{l} dt = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) \cos \frac{2\pi kt}{l} dt, \quad k = \overline{0, \infty}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_k(\omega) &\triangleq \frac{2}{l} \int_0^l \overset{\circ}{\xi}(t, \omega) \sin \frac{2\pi kt}{l} dt = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) \sin \frac{2\pi kt}{l} dt, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

**Следствие 4.3.** Некоррелированные амплитуды гармоник имеют нулевые математические ожидания, а их дисперсии являются коэффициентами ряда Фурье для ковариационной функции исходного случайного процесса при соответствующих частотах.

◀ Это утверждение вытекает из результатов примера 4.1, а также теорем 4.1 и 4.2. ▶

**Пример 4.2.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , — стационарный скалярный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$K_{\xi}(\tau) = \begin{cases} e^{-\alpha|\tau|}, & |\tau| \leq l/2, \\ e^{-\alpha(l-|\tau|)}, & l/2 \leq |\tau| \leq l, \end{cases}$$

где  $\alpha > 0$  — известная постоянная (рис. 4.1). Убедимся в том, что этот случайный процесс может быть представлен суммой ряда Фурье.

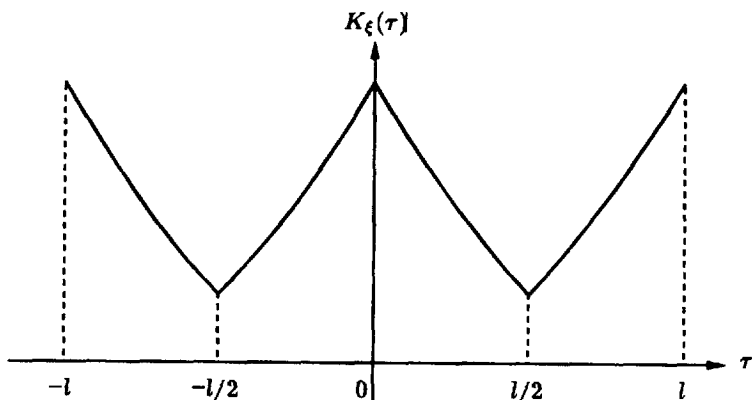


Рис. 4.1

Действительно, ковариационная функция  $K_\xi(\tau)$  непрерывна и на отрезке  $[-l, l]$  удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. она может быть представлена суммой ряда Фурье:

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos \frac{\pi k \tau}{l},$$

где для  $k = \overline{0, \infty}$

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= \frac{2}{l} \int_0^l K_\xi(\tau) \cos \frac{\pi k \tau}{l} d\tau = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} e^{-\alpha \tau} \cos \frac{\pi k \tau}{l} d\tau + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l e^{-\alpha(l-\tau)} \cos \frac{\pi k \tau}{l} d\tau = \\ &= \frac{2\alpha l}{(\pi k)^2 + \alpha^2} \left( 1 + (-1)^k - 2e^{-\alpha l/2} \cos \frac{\pi k}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при  $m = \overline{0, \infty}$

$$\sigma_{2m+1}^2 \equiv 0, \quad \sigma_{2m}^2 \equiv \frac{4\alpha l}{(2\pi m)^2 + \alpha^2} (1 - (-1)^m e^{-\alpha l/2}).$$

Таким образом, для ковариационной функции  $K_\xi(\tau)$  имеет место представление (4.4):

$$K_\xi(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4\alpha l}{(2\pi m)^2 + \alpha^2} (1 - (-1)^m e^{-\alpha l/2}) \cos \frac{2\pi m \tau}{l},$$

и, согласно следствию 4.2, случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , может быть представлен суммой ряда Фурье. #

В заключение заметим, что ограничения, накладываемые на ковариационную функцию  $K_\xi(\tau)$  стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$  (в том числе и требование четности гармоник), являются излишне жесткими. Они необходимы лишь для получения более или менее простых и наглядных доказательств соответствующих утверждений. Это тем более очевидно, что мы понимаем равенство случайных процессов в смысле СК-нормы.

Из теории рядов Фурье известно [IX], что тригонометрическая система функций полна на  $T$  и что любая функция  $K_\xi(\tau)$ , интегрируемая на  $T$  с квадратом, может быть представлена рядом Фурье по тригонометрической системе. При этом рассматривают сходимость по норме в классе функций, интегрируемых с квадратом на  $T$ , являющейся аналогом СК-нормы. Именно поэтому возможно разложение в ряд Фурье даже *обобщенных функций*, представителем которых является  $\delta$ -функция Дирака\*, что и использовано далее без дополнительных разъяснений.

## 4.2. Стационарные случайные процессы с непрерывным спектром

В этом разделе, как и выше, под стационарным случайным процессом будем понимать *стационарные случайные процессы в широком смысле*.

---

\*См. также Пугачев В.С.

Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, l]$ , — стационарный скалярный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией  $K_\xi(\tau)$ , которая является непрерывной на отрезке  $[-l, l]$ , удовлетворяет на нем условиям Дирихле и представима в виде (4.4). В этом случае, согласно теореме 4.2, рассматриваемый случайный процесс представим суммой ряда Фурье:

$$\xi(t, \omega) = \frac{\alpha_0(\omega)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\omega) \cos \frac{2\pi kt}{l} + \beta_k(\omega) \sin \frac{2\pi kt}{l}, \quad t \in T,$$

где

$$\alpha_k(\omega) = \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) \cos \frac{2\pi kt}{l} dt, \quad k = \overline{0, \infty},$$

$$\beta_k(\omega) = \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) \sin \frac{2\pi kt}{l} dt, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

При этом амплитуды гармоник  $\alpha_k(\omega)$  и  $\beta_k(\omega)$  ( $k = \overline{1, \infty}$ ) являются некоррелированными случайными величинами, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии

$$D[\alpha_k(\omega)] = \sigma_k^2, \quad k = \overline{0, \infty}; \quad D[\beta_k(\omega)] = \sigma_k^2, \quad k = \overline{1, \infty},$$

где  $\sigma_k^2$  — коэффициенты ряда Фурье для ковариационной функции  $K_\xi(\tau)$ :

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos \frac{2\pi k\tau}{l}.$$

Если воспользоваться формулами Эйлера и ввести случайные величины

$$\Phi_k(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\alpha_k(\omega) - i\beta_k(\omega)], & k \geq 1; \\ \frac{1}{2} \alpha_0(\omega), & k = 0; \\ \frac{1}{2} [\alpha_{|k|}(\omega) + i\beta_{|k|}(\omega)], & k \leq -1, \end{cases}$$

то приходим к следующему представлению исходного скалярного случайного процесса:

$$\begin{aligned}\xi(t, \omega) &= \frac{\alpha_0(\omega)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k(\omega) \cos \frac{2\pi kt}{l} + \beta_k(\omega) \sin \frac{2\pi kt}{l} \right) = \\ &= \frac{\alpha_0(\omega)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k(\omega) \frac{e^{i\frac{2\pi kt}{l}} + e^{-i\frac{2\pi kt}{l}}}{2} + \beta_k(\omega) \frac{e^{i\frac{2\pi kt}{l}} - e^{-i\frac{2\pi kt}{l}}}{2i} \right) = \\ &= \frac{\alpha_0(\omega)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(\omega) + i\beta_k(\omega)}{2} \exp\left(-i\frac{2\pi kt}{l}\right) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(\omega) - i\beta_k(\omega)}{2} \exp\left(i\frac{2\pi kt}{l}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k(\omega) \exp\left(i\frac{2\pi kt}{l}\right), \quad t \in T.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что комплексные случайные величины  $\Phi_k(\omega)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , являются некоррелированными, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии

$$D[\Phi_k(\omega)] \equiv M[\Phi_k^*(\omega)\Phi_k(\omega)] \equiv \frac{\sigma_k^2}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Кроме того, их можно представить в виде

$$\Phi_k(\omega) = \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) \exp\left(-i\frac{2\pi kt}{l}\right) dt, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

При этом

$$K_{\xi}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D[\Phi_k(\omega)] \exp\left(i\frac{2\pi k\tau}{l}\right).$$

Если  $\nu_k = \frac{2\pi k}{l}$  — частота  $k$ -й гармоники, то при  $l \rightarrow +\infty$  приходим к случаю непрерывного изменения частот и переходим от ряда Фурье к интегралу Фурье. При выполнении

определенных условий этот переход приводит к интегральному представлению ковариационной функции  $K_\xi(\tau)$ , и становится естественной задача об аналогичном представлении стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ .

**Определение 4.2.** Если ковариационная функция  $K_\xi(\tau)$  стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , является оригиналом интегрального преобразования Фурье, т.е. на любом конечном интервале  $[-l, l]$  она удовлетворяет условиям Дирихле и является абсолютно интегрируемой в  $\mathbb{R}$ , то ее изображение

$$s_\xi(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau$$

называют **спектральной плотностью** этого случайного процесса.

Приведем некоторые свойства спектральной плотности.

**Свойство 4.1.** Если ковариационная функция  $K_\xi(\tau)$  стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , является оригиналом интегрального преобразования Фурье и  $s_\xi(\nu)$  — его спектральная плотность, то

$$K_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu.$$

**Свойство 4.2.** Если исходный случайный процесс является вещественным, то:

- а)  $s_\xi(\nu) \geq 0$ ;
- б)  $s_\xi(-\nu) = s_\xi(\nu)$ ;
- в)  $\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} s_\xi(\nu) = 0$ ;

$$\text{г) } s_{\xi}(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\tau) \cos(\nu\tau) d\tau;$$

$$\text{д) } K_{\xi}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} s_{\xi}(\nu) \cos(\nu\tau) d\nu;$$

$$\text{е) } \mathbf{D}[\xi(t, \omega)] = K_{\xi}(0) = 2 \int_0^{\infty} s_{\xi}(\nu) d\nu.$$

Из свойства 4.2 е) следует, что спектральная плотность  $s_{\xi}(\nu)$  представляет собой плотность распределения *дисперсии случайного процесса* по частотам его гармоник.

Спектральная плотность  $s_{\xi}(\nu)$  стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , является аналогом последовательности  $\{\mathbf{D}[\Phi_k(\omega)]\}$ , т.е. является аналогом последовательности  $\{\sigma_k^2\}$  дисперсий некоррелированных случайных амплитуд гармоник исходного случайного процесса.

**Пример 4.3.** Пусть стационарный скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , имеет ковариационную функцию

$$K_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

где  $\alpha > 0$  и  $\sigma^2 = K_{\xi}(0) = \mathbf{D}[\xi(t, \omega)]$ . В этом случае спектральная плотность случайного процесса равна

$$\begin{aligned} s_{\xi}(\nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\nu\tau} d\tau = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\nu)\tau} d\tau - \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\nu)\tau} d\tau \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( \frac{1}{\alpha - i\nu} + \frac{1}{\alpha + i\nu} \right) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\alpha^2 + \nu^2)}. \end{aligned}$$

При увеличении параметра  $\alpha$  вне  $\varepsilon$ -окрестности нуля значения ковариационной функции  $K_\xi(\tau)$  уменьшаются, а график спектральной плотности  $s_\xi(\nu)$  становится все более пологим (рис. 4.2). При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(\nu) d\nu = \frac{\sigma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \nu^2} d\nu = \frac{\sigma^2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\alpha} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \sigma^2 = K_\xi(0),$$

т.е. площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком спектральной плотности и осью  $0\nu$ , численно равна дисперсии исходного стационарного скалярного случайного процесса (см. свойство 4.2 спектральной плотности). #

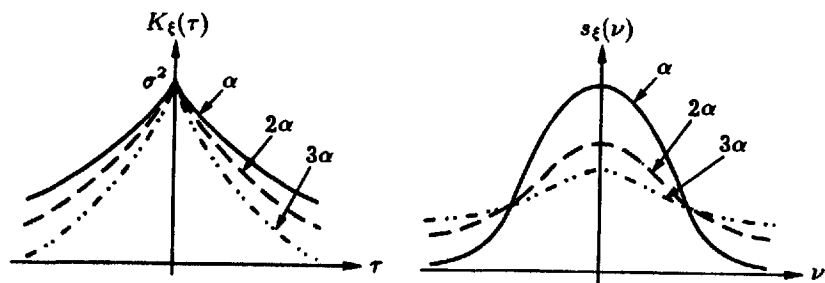


Рис. 4.2

В различных приложениях теории случайных процессов величину  $K_\xi(0) = \mathbf{D}[\xi(t, \omega)]$  зачастую интерпретируют как энергию стационарного скалярного случайного процесса, а величину  $s_\xi(\nu)$  — как плотность энергии на единицу частоты. Термин „энергия стационарного случайного процесса“ обязан своим появлением реализациям стационарных случайных процессов в электротехнике (напряжение или сила электрического тока). В этом случае величина  $s_\xi(\nu) d\nu$  пропорциональна энергии, приходящейся в среднем на гармоническое колебание частоты  $\nu$ , так как энергия электрического тока пропорциональна квадрату амплитуды соответствующей гармоники.



Перейдем к рассмотрению вопроса о существовании интегрального представления стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией  $K_\xi(\tau)$ , являющейся оригиналом интегрального преобразования Фурье. При этом в соответствии с проведенными рассуждениями нетрудно показать, что для любого конечного  $l > 0$  имеют место равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(t, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k(\omega) e^{i\nu_k t}, \quad t \in T; \\ \nu_k \triangleq \frac{2\pi k}{l}; \quad \Delta\nu_k \triangleq \nu_k - \nu_{k-1} = \frac{2\pi}{l}; \\ \Phi_k(\omega) \triangleq \frac{2}{l} \int_0^l \xi(t, \omega) e^{-i\nu_k t} dt; \\ M[\Phi_k(\omega)] = 0; \quad \text{cov}[\Phi_k(\omega); \Phi_n(\omega)] = 0, \quad k \neq j; \\ K_\xi(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M[\Phi_k^*(\omega) \Phi_k(\omega)] e^{i\nu_k \tau}. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Если ввести в рассмотрение случайную функцию

$$\psi(\nu_k, \omega, l) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^l \xi(t, \omega) e^{-i\nu_k t} dt,$$

то, согласно (4.8), имеем

$$\Phi_k(\omega) \equiv \psi(\nu_k, \omega, l) \Delta\nu_k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\xi(t, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\nu_k, \omega, l) e^{i\nu_k t} \Delta\nu_k, \quad t \in T.$$

Если  $l \rightarrow +\infty$ , то  $\Delta\nu_k \rightarrow 0$  и значения частот  $\nu_k$  заполняют всю числовую прямую, т.е. реализуется переход от дискретного спектра к непрерывному. Так как ковариационная функция

$K_{\xi}(\tau)$ , согласно принятому допущению, является оригиналом интегрального преобразования Фурье, то можно доказать, что существует предел

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \psi(\nu_k, \omega, l) = \psi(\nu, \omega) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi(t, \omega) e^{-i\nu t} dt \quad (4.9)$$

и

$$\xi(t, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\nu_k, \omega, l) e^{i\nu_k t} \Delta \nu_k \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\nu, \omega) e^{i\nu t} d\nu$$

при  $l \rightarrow \infty$ . Таким образом, для стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , получаем интегральное представление

$$\xi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\nu, \omega) e^{i\nu t} d\nu, \quad t \in T, \quad (4.10)$$

где  $\psi(\nu, \omega)$  — изображение интегрального преобразования Фурье для этого случайного процесса.

Следует отметить, что случайная функция  $\psi(\nu, \omega)$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$ , связана с последовательностью  $\{\Phi_k(\omega)\}_{k=-\infty}^{\infty}$  и в определенном смысле является аналогом последовательности случайных комплексных амплитуд гармоник при переходе к непрерывному спектру частот. Определим математическое ожидание и ковариационную функцию случайной функции  $\psi(\nu, \omega)$ .

В соответствии с (4.9) имеем

$$\begin{aligned} M[\psi(\nu, \omega)] &= M\left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi(t, \omega) e^{-i\nu t} dt\right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} M[\xi(t, \omega)] e^{-i\nu t} dt = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

так как

$$M[\xi(t, \omega)] = 0, \quad t \in T.$$

Если воспользоваться интегральным представлением  $\delta$ -функции Дирака

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\lambda x} dx = 1, \quad (4.11)$$

то, полагая  $\tau = t_2 - t_1$ , приходим к следующему представлению ковариационной функции  $K_\psi(\nu, \nu_1)$ :

$$\begin{aligned} K_\psi(\nu, \nu_1) &= M[\psi^*(\nu, \omega) \psi(\nu_1, \omega)] = \\ &= M\left[\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \xi(t_1, \omega) \xi(t_2, \omega) \exp(i\nu t_1 - i\nu_1 t_2) dt_1 dt_2\right] = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty M[\xi(t_1, \omega) \xi(t_2, \omega)] \exp[-i\nu_1(t_2 - t_1) + i(\nu - \nu_1)t_1] dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty K_\xi(t_2 - t_1) \exp[-i\nu_1(t_2 - t_1)] \exp[i(\nu - \nu_1)t_1] dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_\xi(\tau) e^{-i\nu_1 \tau} d\tau \right] e^{i(\nu - \nu_1)t_1} dt_1 = \\ &= s_\xi(\nu_1) \delta(\nu - \nu_1). \end{aligned}$$

Из проведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

**Теорема 4.3.** Если ковариационная функция  $K_\xi(\tau)$  стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , обладающего нулевым математическим ожиданием, является

оригиналом интегрального преобразования Фурье (т.е. удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном интервале  $[-l, l]$  и абсолютно интегрируема в  $\mathbb{R}$ ), то существует скалярная случайная функция  $\psi(\nu, \omega)$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$ , такая, что

$$M[\psi(\nu, \omega)] \equiv 0, \quad \nu \in \mathbb{R}; \quad K_\psi(\nu, \nu_1) = s_\xi(\nu_1) \delta(\nu - \nu_1);$$

$$\xi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\nu, \omega) e^{i\nu t} d\nu, \quad t \in T.$$

С позиций теории интегральных преобразований Фурье интегральное представление (4.10) стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяющего условиям теоремы 4.3, указывает на то, что он является оригиналом экспоненциального интегрального преобразования Фурье. Но в этом случае случайная функция  $\psi(\nu, \omega)$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$ , — его изображение и должно иметь место равенство (4.9):

$$\psi(\nu, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi(t, \omega) e^{-i\nu t} dt, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Если  $m_\xi \neq 0$ , а все остальные условия теоремы 4.3 выполняются, то интегральное представление случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , принимает вид

$$\xi(t, \omega) = m_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\nu, \omega) e^{i\nu t} d\nu, \quad t \in T.$$

В условиях теоремы 4.2 имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_\psi(\nu, \nu_1) d\nu d\nu_1.$$

Действительно,

$$D[\xi(t, \omega)] = K_{\xi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi}(\nu) d\nu,$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\psi}(\nu, \nu_1) d\nu d\nu_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi}(\nu_1) \delta(\nu - \nu_1) d\nu_1 d\nu = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi}(\nu_1) d\nu_1 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_1) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi}(\nu_1) d\nu_1. \end{aligned}$$

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. „Средняя энергия“ стационарного скалярного случайного процесса может быть получена путем „суммирования“ квадратов модулей амплитуд гармоник, соответствующих всем частотам.

### 4.3. Белый шум

**Определение 4.3.** Скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , называют **белым шумом**, если он является стационарным (в широком смысле) и обладает постоянной спектральной плотностью  $s$ , называемой **интенсивностью белого шума**.

Рассмотрим свойства белого шума.

**Свойство 4.3.** Ковариационная функция  $K_{\xi}(\tau)$  для белого шума имеет вид

$$K_{\xi}(\tau) = 2\pi s \delta(\tau). \quad (4.12)$$

◄ Если скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , является белым шумом, то для любого действительного  $\nu$

$$s_{\xi}(\nu) = c = \text{const.} \quad (4.13)$$

Таким образом, из свойств спектральной плотности и интегрального представления  $\delta$ -функции Дирака (4.11) следует (4.12). ►

**Свойство 4.4.** Если ковариационная функция стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , имеет вид (4.12), то этот случайный процесс является белым шумом.

◄ Это свойство непосредственно следует из определения 4.2 и равенства (4.12). ►

**Пример 4.4.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — скалярный винеровский процесс с коэффициентом диффузии  $\sigma^2$ . Он имеет ковариационную функцию

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \sigma^2 \min\{t_1, t_2\}, \quad t_1, t_2 \in T.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \begin{cases} \sigma^2, & t_1 < t_2; \\ 0, & t_1 > t_2; \end{cases}$$

и смешанная вторая производная не существует, т.е. (см. теорему 3.7) рассматриваемый случайный процесс недифференцируем ни в одной точке в  $T$ . Но переходя к обобщенным функциям, к которым относится и  $\delta$ -функция Дирака, формально получаем

$$\frac{\partial^2 K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1} = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1),$$

т.е. в классе обобщенных функций производная винеровского процесса есть белый шум с интенсивностью  $c = \sigma^2/2\pi$ .

**Свойство 4.5.** *Случайные величины, являющиеся сечениями белого шума, некоррелированы.*

◀ Это следует из (4.12), так как для любых  $t_1, t_2 \in T = [0, \infty)$ ,  $t_1 \neq t_2$ , имеем  $\tau = t_2 - t_1 \neq 0$  и  $K_\xi(\tau) = 2\pi c\delta(\tau) = 0$ . ▶

**Свойство 4.6.** Белый шум обладает бесконечной дисперсией.

◀ Это вытекает из равенства

$$D[\xi(t, \omega)] = K_\xi(0) = 2\pi c\delta(0) = \infty,$$

выполняющегося в силу (4.12). ▶

Появление термина „белый шум“ объясняется следующим. Слово „белый“ указывает на сходство с белым светом, у которого спектральный состав примерно однороден, а слово „шум“ говорит о том, что подобные процессы впервые привлекли к себе внимание в радиотехнике, где их наличие приводит к возникновению шумов в линиях радиопередач.

Белый шум обладает бесконечной дисперсией и практически не может быть реализован. Но из физических соображений ясно, что любая динамическая система является инерционной и очень высокие частоты не могут оказывать значимого влияния на ее поведение. Это открывает возможность моделирования с помощью белого шума реальных случайных процессов. Например, белый шум часто используют для моделирования случайных процессов, имеющих постоянную (или почти постоянную) спектральную плотность в определенной полосе частот, пренебрегая поведением спектральной плотности вне этой полосы. Подобные ситуации возникают при изучении многих физических явлений, связанных с воздействием отдельных молекул или электронов на макроскопические системы (например, во всех явлениях, родственных броуновскому движению). Подобные

случайные процессы мы также будем называть „белым шумом“, отмечая кавычками условность такого подхода.

**Пример 4.5.** Пусть скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , является стационарным и его спектральная плотность равна

$$s_{\xi}(\nu) = \begin{cases} c, & |\nu| < N; \\ 0, & |\nu| > N. \end{cases}$$

Рассматриваемый случайный процесс имеет ковариационную функцию

$$K_{\xi}(\tau) = \int_{-N}^N c e^{i\nu\tau} d\nu = \frac{2c}{\tau} \sin(N\tau). \quad (4.14)$$

Чтобы он обладал свойствами „белого шума“, значение параметра  $N$  должно быть достаточно большим, но в этом случае достаточно большой будет и дисперсия

$$D[\xi(t, \omega)] = K_{\xi}(0) = 2cN.$$

А так как

$$|K_{\xi}(\tau)| = \frac{2c}{|\tau|} |\sin(N\tau)| \leq \frac{2c}{|\tau|},$$

то можно получить сколь угодно малое абсолютное значение коэффициента корреляции для любых двух сечений  $\xi(t_1, \omega)$  и  $\xi(t_2, \omega)$  при достаточно большом значении  $|\tau| = |t_2 - t_1|$ . При фиксированном значении  $N$  абсолютное значение коэффициента корреляции сечений  $\xi(t_1, \omega)$  и  $\xi(t_2, \omega)$  значимо, когда величина  $|t_2 - t_1|$  достаточно мала.

Чтобы найти предел ковариационной функции (4.14) при  $N \rightarrow +\infty$ , введем функцию

$$\mathbf{R}_{\xi}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\tau} K_{\xi}(\lambda) d\lambda = 2c \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\sin(N\lambda)}{\lambda} d\lambda = 2c \int_{-\infty}^{N\tau} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu.$$



Так как

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

то нетрудно убедиться, что существует предел

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{R}_{\xi}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0; \\ \pi c, & \tau = 0; \\ 2\pi c, & \tau > 0. \end{cases}$$

Формально дифференцируя полученную функцию, приходим к  $\delta$ -функции Дирака:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_{\xi}(\tau) = 2\pi c \delta(\tau).$$

Рассмотренный случайный процесс является одной из возможных моделей „белого шума“. #

Помимо ограниченного в некоторой полосе частот (см. пример 4.5), часто используют скалярный случайный процесс (см. пример 4.3) с ковариационной функцией

$$K_{\xi}(\tau) = \pi \alpha e^{-\alpha |\tau|}, \quad \alpha > 0,$$

и спектральной плотностью

$$s_{\xi}(\nu) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \nu^2}.$$

В этом случае

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} s_{\xi}(\nu) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} K_{\xi}(\tau) = 2\pi \delta(\tau).$$

Некоррелированность случайных величин, являющихся сечениями белого шума в различные моменты времени — одна

из основных причин его широкого применения. При использовании ограниченного по полосе шума мы все же получаем значимое абсолютное значение коэффициента корреляции для случайных величин, являющихся сечениями случайного процесса при близких значениях  $t_1$  и  $t_2$ , что зачастую существенно затрудняет анализ полученных результатов. Использование белого шума в теории случайных процессов во многом аналогично использованию  $\delta$ -функции Дирака в теории линейных систем и математической физике.

#### 4.4. Преобразование стационарного случайного процесса при его прохождении через линейную динамическую систему

В 3.5 уже рассмотрена задача о преобразовании *случайного процесса* при его прохождении через линейную динамическую систему и отмечались трудности, возникающие при ее решении. *Спектральная теория стационарных (в широком смысле) случайных процессов* открывает новые возможности исследования подобных задач. Они аналогичны возможностям теории интегральных преобразований применительно к решению задач математической физики и задач Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений.

В этом разделе под стационарным случайным процессом будем понимать стационарные случайные процессы в широком смысле.

**Теорема 4.4.** Пусть  $T = [0, \infty)$ , а  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стационарные скалярные случайные процессы со спектральными плотностями  $s_\xi(\nu)$  и  $s_\eta(\nu)$  соответственно. Пусть случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является  $n$  раз дифференцируемым на множестве  $T$ . Если

$$\eta(t, \omega) \triangleq d^n \xi(t, \omega) / dt^n, \quad t \in T,$$

то имеет место равенство

$$s_{\eta}(\nu) = \nu^{2n} s_{\xi}(\nu).$$

◀ Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться свойствами 4.1, 4.2 д)–е) *ковариационной функции*, определением спектральной плотности и ее свойствами 4.2 а)–г). Действительно, если

$$\eta(t, \omega) \triangleq \frac{d^n \xi(t, \omega)}{dt^n}, \quad t \in T,$$

то имеет место равенство (см. следствие 3.3)

$$K_{\eta}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{2n} K_{\xi}(\tau)}{d\tau^{2n}},$$

или, что тоже самое,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\tau} s_{\eta}(\nu) d\nu &= (-1)^n \frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\tau} s_{\xi}(\nu) d\nu = \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} (i\nu)^{2n} e^{i\nu\tau} s_{\xi}(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\tau} \nu^{2n} s_{\xi}(\nu) d\nu, \end{aligned}$$

откуда и вытекает нужный результат. Законность дифференцирования под знаком интеграла следует из существования  $n$ -й производной для исходного случайного процесса, что эквивалентно сходимости несобственного интеграла [VI]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu^{2n} s_{\xi}(\nu) d\nu. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 4.5.** Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — стационарный  $n$  раз дифференцируемый на  $T$  скалярный случайный процесс

со спектральной плотностью  $s_\xi(\nu)$  и

$$\eta(t, \omega) \triangleq \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \xi(t, \omega), \quad t \in T,$$

где  $b_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  — известные постоянные, то  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стационарный скалярный случайный процесс со спектральной плотностью

$$s_\eta(\nu) = \left| \sum_{k=0}^n b_k (i\nu)^{n-k} \right|^2 s_\xi(\nu).$$

◀ Так как  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стационарный случайный процесс, то его математическое ожидание  $m_\xi$  является величиной постоянной и

$$\begin{aligned} M[\eta(t, \omega)] &= M \left[ \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \xi(t, \omega) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} M[\xi(t, \omega)] = b_n m_\xi = \text{const.} \end{aligned}$$

Согласно теореме 4.3,

$$\xi(t, \omega) = m_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\nu, \omega) e^{i\nu t} d\nu, \quad t \in T.$$

А так как случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является  $n$  раз дифференцируемым на  $T$ , то, как и при доказательстве теоремы 4.3, приходим к равенству

$$\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \xi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} (i\nu)^{n-k} \psi(\nu, \omega) d\nu, \quad k = \overline{0, n},$$

и, как следствие, получаем

$$\eta(t, \omega) = b_n m_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \left[ \sum_{k=0}^n b_k (i\nu)^{n-k} \right] \psi(\nu, \omega) d\nu, \quad t \in T.$$

Таким образом, с учетом равенства  $M[\eta(t, \omega)] = b_n m_\xi$  и теоремы 4.3 имеем

$$\begin{aligned}
 K_\eta(\tau) &= K_\eta(t, t + \tau) = \\
 &= M \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu_1 t} \sum_{k=0}^n b_k (i\nu_1)^{n-k} \psi(\nu_1, \omega) d\nu_1 \right)^* \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(t+\tau)} \sum_{k=0}^n b_k (i\nu)^{n-k} \psi(\nu, \omega) d\nu \right) \right] = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\tau + i(\nu - \nu_1)t} \left( \sum_{k=0}^n b_k (i\nu_1)^{n-k} \right)^* \times \\
 &\quad \times \left( \sum_{k=0}^n b_k (i\nu)^{n-k} \right) M[\psi^*(\nu_1, \omega) \psi(\nu, \omega)] d\nu_1 d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\tau + i(\nu - \nu_1)t} \left( \sum_{k=0}^n b_k (i\nu_1)^{n-k} \right)^* \times \\
 &\quad \times \left( \sum_{k=0}^n b_k (i\nu)^{n-k} \right) s_\xi(\nu_1) \delta(\nu_1 - \nu) d\nu_1 d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\tau} \left| \sum_{k=0}^n b_k (i\nu)^{n-k} \right|^2 s_\xi(\nu) d\nu,
 \end{aligned}$$

откуда и следует искомый результат. ►

На практике встречаются весьма разнообразные варианты преобразований стационарного случайного процесса при его прохождении через линейную динамическую систему. Рассмотрим достаточно общий случай. Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — стационарный  $m$  раз дифференцируемый на  $T$  скалярный случайный процесс с математическим ожиданием  $m_\xi$  и спектральной плотностью  $s_\xi(\nu)$ , а скалярный случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является  $n$  раз дифференцируемым на  $T$  и удовлетворяет

уравнению

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \eta(t, \omega) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{m-j}}{dt^{m-j}} \xi(t, \omega), \quad t > 0, \quad (4.15)$$

в котором  $a_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ) и  $b_j$  ( $j = \overline{0, m}$ ) — известные постоянные.

Случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно рассматривать как стационарный скалярный случайный процесс с математическим ожиданием  $m_\eta$  и спектральной плотностью  $s_\eta(\nu)$  лишь при достаточно больших значениях времени  $t$ , т.е. лишь после затухания переходных процессов. В этом случае имеем

$$a_n m_\eta = b_m m_\xi \quad \text{и} \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k (i\nu)^{n-k} \right|^2 s_\eta(\nu) = \left| \sum_{j=0}^m b_j (i\nu)^{m-j} \right|^2 s_\xi(\nu),$$

откуда

$$m_\eta = \frac{b_m}{a_n} m_\xi, \quad s_\eta(\nu) = |\Phi(i\nu)|^2 s_\xi(\nu), \quad (4.16)$$

где функцию

$$\Phi(i\nu) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (i\nu)^{m-j}}{\sum_{k=0}^n a_k (i\nu)^{n-k}} \quad (4.17)$$

называют **частотной характеристикой динамической системы**, которая описывается дифференциальным уравнением (4.15).

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим два примера.

**Пример 4.6.** Рассмотрим задачу прохождения *белого шума*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , через линейную динамическую систему первого порядка, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{\eta}(t, \omega) + \alpha \eta(t, \omega) = \xi(t, \omega),$$

где  $\alpha \in \mathbf{R}$  — известный параметр, а случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , имеет постоянную спектральную плотность.

Согласно равенствам (4.15), (4.16) и (4.17),

$$s_{\eta}(\nu) = \frac{1}{|i\nu + \alpha|^2} s_{\xi}(\nu) = \frac{c}{\nu^2 + \alpha^2}.$$

Реально скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , не является белым шумом, но его можно аппроксимировать „белым шумом“ со спектральной плотностью (см. пример 4.5)

$$s_{\xi}(\nu) = \begin{cases} c, & |\nu| < N; \\ 0, & |\nu| > N. \end{cases}$$

В этом случае при определении дисперсии  $\mathbf{D}[\eta(t, \omega)]$  случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t > 0$ ,

$$\mathbf{D}[\eta(t, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\eta}(\nu) d\nu = c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2 + \alpha^2} = \frac{\pi c}{\alpha},$$

возникает погрешность  $\Delta$ . Оценим ее:

$$\begin{aligned} |\Delta| &< \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cd\nu}{\nu^2 + \alpha^2} - \int_{-N}^N \frac{cd\nu}{\nu^2 + \alpha^2} = 2c \int_N^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2 + \alpha^2} = \\ &= \frac{2c}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\alpha} \Big|_N^{\infty} = \frac{2c}{\alpha} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{N}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Относительная погрешность для дисперсии  $\mathbf{D}[\eta(t, \omega)]$  оценивается следующим образом:

$$\left| \frac{\Delta}{\mathbf{D}[\eta(t, \omega)]} \right| < 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{N}{\alpha}.$$

**Пример 4.7.** Пусть функционирование линейной динамической системы описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$a_1 \dot{\eta}(t, \omega) + a_0 \eta(t, \omega) = b_1 \dot{\xi}(t, \omega) + b_0 \xi(t, \omega),$$

где  $a_0, a_1, b_0, b_1$  — известные параметры, а  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — стационарный скалярный случайный процесс с математическим ожиданием  $m_\xi$  и ковариационной функцией  $K_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha^2 |\tau|)$ . Найдем математическое ожидание  $m_\eta$  и дисперсию  $\sigma_\eta^2$  реакции системы на входной сигнал  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , если его производная рассматривается в классе обобщенных функций (см. пример 4.5).

Согласно равенствам (4.15), (4.16) и (4.17),

$$m_\eta = \frac{b_0}{a_0} m_\xi, \quad |\Phi(i\nu)|^2 = \left| \frac{b_1(i\nu) + b_0}{a_1(i\nu) + a_0} \right|^2 = \frac{b_1^2 \nu^2 + b_0^2}{a_1^2 \nu^2 + a_0^2}.$$

А так как (см. пример 4.3)

$$s_\xi(\nu) = \frac{\alpha^2 \sigma^2}{\pi(\alpha^4 + \nu^2)},$$

то спектральная плотность реакции изучаемой динамической системы равна

$$s_\eta(\nu) = |\Phi(i\nu)|^2 s_\xi(\nu) = \frac{\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{b_1^2 \nu^2 + b_0^2}{a_1^2 \nu^2 + a_0^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\nu^2 + \alpha^4}.$$

Воспользовавшись свойством 4.2 е) спектральной плотности, находим

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 &= 2 \int_0^\infty s_\eta(\nu) d\nu = \frac{2\alpha^2 \sigma^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{b_1^2 \nu^2 + b_0^2}{(a_1^2 \nu^2 + a_0^2)(\nu^2 + \alpha^4)} d\nu = \\ &= \frac{2\alpha^2 \sigma^2}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\lambda}{\nu^2 + \alpha^4} + \frac{\mu}{a_1^2 \nu^2 + a_0^2} \right) d\nu = \\ &= \frac{2\alpha^2 \sigma^2}{\pi} \left( \frac{\lambda}{\alpha^2} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\alpha^2} + \frac{\mu}{a_1 a_0} \operatorname{arctg} \frac{a_1 \nu}{a_0} \right) \Big|_0^\infty = \\ &= \alpha^2 \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{\alpha^2} + \frac{\mu}{a_1 a_0} \right), \end{aligned}$$



где использованы обозначения

$$\lambda \triangleq \frac{\alpha^4 b_1^2 - b_0^2}{\alpha^4 a_1^2 - a_0^2}, \quad \mu \triangleq \frac{a_1^2 b_0^2 - a_0^2 b_1^2}{\alpha^4 a_1^2 - a_0^2}.$$

Окончательный результат можно представить в следующем виде:

$$\sigma_\eta^2 = \sigma^2 \frac{\alpha^2 a_0 b_1^2 + a_1 b_0^2}{a_0 a_1 (\alpha^2 a_1 + a_0)}.$$

## Вопросы и задачи

**4.1.** Можно ли в условиях теоремы 4.2 считать, что ковариационная функция удовлетворяет условию  $K_\xi(\tau) \in L^2[-l, l]$ , но не удовлетворяет условиям теоремы Дирихле?

**4.2.** Определена ли спектральная плотность стационарного случайного процесса, ковариационная функция которого удовлетворяет условию  $K_\xi(\tau) \in L^2[-\infty, +\infty]$ ?

**4.3.** Пусть для стационарных случайных процессов  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , выполнены условия теоремы 4.3, т.е. существуют интегральные представления

$$\xi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\nu, \omega) e^{i\nu t} d\nu, \quad \eta(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\nu, \omega) e^{i\nu t} d\nu.$$

Пусть случайные функции  $\psi(\nu, \omega)$  и  $\varphi(\nu, \omega)$  обладают свойством

$$M[\psi^*(\nu_1, \omega) \varphi(\nu_2, \omega)] = s_{\xi\eta}(\nu_1) \delta(\nu_1 - \nu_2)$$

(функцию  $s_{\xi\eta}(\nu)$  называют **взаимной спектральной плотностью** исходных случайных процессов). Докажите, что в этом случае:

а)  $K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_{\xi\eta}(\tau)$ ,  $\tau \triangleq t_2 - t_1$ ;

$$\text{б) } K_{\xi\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi\eta}(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu;$$

$$\text{в) } s_{\xi\eta}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi\eta}(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau;$$

г) если исходные случайные процессы являются комплексными, то  $s_{\xi\eta}^*(\nu) = s_{\eta\xi}(\nu)$ ;

д) если исходные случайные процессы являются вещественными, то  $s_{\xi\eta}(-\nu) = s_{\eta\xi}(\nu)$ .

4.4. Найдите ковариационную функцию  $K_{\xi}(\tau)$  стационарного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , если его спектральная плотность равна

$$s_{\xi}(\nu) = \begin{cases} c, & |\nu| \in [\nu_1, \nu_2]; \\ 0, & |\nu| \notin [\nu_1, \nu_2]. \end{cases}$$

О т в е т:  $K_{\xi}(\tau) = \frac{2c}{\tau} [\sin(\nu_2\tau) - \sin(\nu_1\tau)].$

4.5. Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — дифференцируемый стационарный скалярный случайный процесс и  $\eta(t, \omega) \triangleq \dot{\xi}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Определите  $\mathbf{D}[\eta(t, \omega)]$ , если известна спектральная плотность

$$s_{\xi}(\nu) = \frac{a^2}{(\nu^2 + \alpha^2)^2},$$

где  $a^2$  и  $\alpha^2$  — известные величины.

О т в е т:  $\mathbf{D}_{\eta} = \mathbf{D}[\eta(t, \omega)] = 0,5\pi a^2 \alpha^{-1}.$

У к а з а н и е: предварительно докажите равенство  $s_{\eta}(\nu) = a^2 \nu^2 (\nu^2 + \alpha^2)^{-2}.$

4.6. Определите ковариационную функцию  $K_{\xi}(\tau)$  стационарного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , если извест-

на его спектральная плотность

$$s_{\xi}(\nu) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\nu_k^2 + \alpha_k^2},$$

где  $\alpha_k, a_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) — известные величины.

О т в е т:  $K_{\xi}(\tau) = \pi \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\alpha_k} \exp(-\alpha_k \tau).$

4.7. Определите спектральную плотность стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , если известна его дисперсия  $\sigma^2$  и корреляционная функция

$$k_{\xi}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{\tau_0}, & |\tau| < \tau_0; \\ 0, & |\tau| \geq \tau_0, \end{cases}$$

где  $\tau_0$  — известная величина.

О т в е т:  $s_{\xi}(\nu) = \frac{2\sigma^2}{\pi\nu^2} \sin^2 \frac{\nu\tau_0}{2}.$

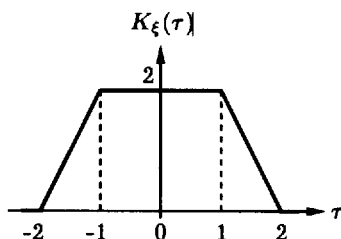


Рис. 4.3

4.8. Найдите спектральную плотность стационарного скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , ковариационная функция которого:

а) равна  $K_{\xi}(\tau) = \sigma^2(1 + \alpha|\tau|) \exp(-\alpha|\tau|)$ , где  $\sigma^2, \alpha$  — известные величины;

б) задана графически (рис. 4.3).

О т в е т: а)  $s_{\xi}(\nu) = \frac{2\sigma^2\alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \nu^2)^2}$ , б)  $s_{\xi}(\nu) = \frac{4}{\pi\nu^2} \sin \frac{3\nu}{2} \sin \frac{\nu}{2}.$

4.9. Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — нормальный стационарный скалярный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией  $K_{\xi}(\tau)$ . Пусть  $\eta(t, \omega) \triangleq \xi^2(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Докажите, что

$$s_{\eta}(\nu) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi}(\nu_1) s_{\xi}(\nu - \nu_1) d\nu_1.$$

У к а з а н и е: последовательно докажите следующие утверждения:

$$1) K_{\eta}(\tau) = M[\xi^2(t_1, \omega) \xi^2(t_2, \omega)] - K_{\xi}^2(0);$$

$$2) M[\xi^2(t_1, \omega) \xi^2(t_2, \omega)] = 2K_{\xi}^2(\tau) + K_{\xi}^2(0);$$

$$3) s_{\eta}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2K_{\xi}^2(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi}(\nu_1) s_{\xi}(\nu - \nu_1) d\nu_1.$$

4.10. Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — нормальный стационарный скалярный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$K_{\xi}(\tau) = \sigma^2 \left[ \cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right] e^{-\alpha|\tau|},$$

где  $\sigma^2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — известные положительные величины. Определите спектральную плотность случайного процесса

$$\eta(t, \omega) \triangleq \dot{\xi}(t, \omega) \xi(t, \omega), \quad t \in T.$$

$$\text{О т в е т: } s_{\eta}(\nu) = \frac{2\sigma^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)\nu^2(\nu^2 + 20\alpha^2 + 4\beta^2)}{\pi[(\nu^2 + 4\alpha^2 + 4\beta^2)^2 - 16\beta^2\nu^2](\nu^2 + 4\alpha^2)}.$$

У к а з а н и е: используя равенство  $[y^2(x)]' = 2y'(x)y(x)$ , результаты задачи 4.9 и свойства спектральной плотности, докажите, что

$$s_{\eta}(\nu) = \frac{\nu^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi}(\nu_1) s_{\xi}(\nu - \nu_1) d\nu_1.$$

4.11. Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — нормальные стационарные скалярные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и  $\alpha(t, \omega) \triangleq \xi(t, \omega)\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

Докажите, что

$$s_{\alpha}(\nu) = \sigma_{\xi}^2 s_{\eta}(\nu) + \sigma_{\eta}^2 s_{\xi}(\nu) + \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi}(\nu - \nu_1) s_{\eta}(\nu_1) d\nu_1 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} s_{\xi\eta}(\nu - \nu_1) s_{\eta\xi}(\nu_1) d\nu_1,$$

где  $s_{\xi\eta}(\nu)$  и  $s_{\eta\xi}(\nu)$  — взаимные спектральные плотности.

**4.12.** Два стационарных скалярных случайных процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , связаны равенством

$$5\dot{\eta}(t, \omega) + \eta(t, \omega) = 4\dot{\xi}(t, \omega) + 3\xi(t, \omega), \quad t \in T.$$

Определите математическое ожидание и дисперсию случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , если  $m_{\xi} = 0$  и  $K_{\xi}(\tau) = 2e^{-\alpha|\tau|}$ , где  $\alpha$  — известная положительная величина.

О т в е т:  $m_{\eta} = 0$ ;  $\sigma_{\eta}^2 = 0,4 \frac{16\alpha^2 + 45}{5\alpha + 1}$ .

У к а з а н и е: используйте свойства спектральной плотности.

**4.13.** Работу дифференцирующей  $RC$ -цепочки (рис. 4.4) описывает уравнение

$$RC\dot{\eta}(t, \omega) + \eta(t, \omega) = RC\dot{\xi}(t, \omega), \quad t \in T = [0, \infty).$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , если  $m_{\xi} = 0$  и  $K_{\xi}(\tau) = \sigma^2 \cos(\beta\tau)$ , где  $\sigma^2$  и  $\beta$  — известные величины.

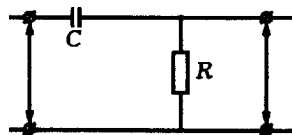


Рис. 4.4

О т в е т:  $m_{\eta} = 0$ ;  $\sigma_{\eta}^2 = \frac{2\sigma^2 R^2 C^2 \beta^2}{1 + R^2 C^2 \beta^2}$ .

4.14. Функционирование интегрирующего устройства моделируется уравнением

$$\left(1 + \frac{R}{R_1}\right) \dot{\eta}(t, \omega) + \frac{1}{CR_1} \eta(t, \omega) = \dot{\xi}(t, \omega) + \frac{1}{CR_1} \xi(t, \omega), \quad t \in T = [0, \infty),$$

где  $C, R, R_1$  — известные положительные величины, а  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — белый шум с интенсивностью  $N_0/4\pi$ . Определите спектральную плотность и ковариационную функцию случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

О т в е т:  $s_\eta(\nu) = \frac{N_0[1 + (RC\nu)^2]}{4\pi\{1 + [C(R_1 + R_2)\nu]^2\}};$

$$K_\eta(\tau) = \frac{N_0 R_1^2}{2(R + R_1)^2} \delta(\tau) + \frac{N_0 R(R + 2R_1)}{4C(R + R_1)^3} \exp\left(-\frac{|\tau|}{C(R + R_1)}\right).$$

4.15. Ошибка  $\varepsilon(t, \omega)$  измерения ускорения самолета акселерометром определяется уравнением

$$\ddot{\varepsilon}(t, \omega) + 2h\dot{\varepsilon}(t, \omega) + n^2\varepsilon(t, \omega) = gn^2\eta(t, \omega), \quad t \in T = [0, \infty),$$

где  $h, n, g$  — известные постоянные, а случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , характеризующий случайные возмущения, испытываемые чувствительным элементом акселерометра, является белым шумом с интенсивностью  $c^2$ . Найдите дисперсию скорости самолета, определяемой путем интегрирования показаний акселерометра в течение времени  $t$ , если при интегрировании не возникает дополнительных ошибок, а время переходного процесса много меньше  $t$ .

О т в е т:

$$D[\Delta v(t, \omega)] = \int_0^t \int_0^t K_\varepsilon(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \approx 2t \int_0^t K_\varepsilon(\tau) d\tau = 2\pi g^2 c^2 t.$$

У к а з а н и е: ошибка в определении скорости самолета равна

$$\Delta v(t, \omega) = \int_0^t \varepsilon(t_1, \omega) dt_1, \quad t \in T.$$

**4.16.** Пусть дана система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами  $a_{lj}$ ,  $l, j = \overline{1, n}$ , соответствующая устойчивой динамической системе

$$\dot{\eta}_k(t, \omega) + \sum_{j=1}^n a_{kj} \eta_j(t, \omega) = \xi_k(t, \omega), \quad t \in T = [0, \infty), \quad k = \overline{1, n},$$

где  $\xi_k(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — стационарные скалярные случайные процессы с известными ковариационными и взаимными ковариационными функциями. Пусть время  $t$  велико. Докажите, что  $\eta_k(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — стационарные случайные процессы, спектральные и взаимные спектральные плотности которых определяются равенствами:

$$s_{\eta_k}(\nu) = |\Delta(\nu)|^{-2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n A_{lk}^*(\nu) A_{jk}(\nu) s_{\xi_l \xi_j}(\nu),$$

$$s_{\eta_m \eta_k}(\nu) = |\Delta(\nu)|^{-2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n A_{lm}^*(\nu) A_{jk}(\nu) s_{\xi_l \xi_j}(\nu),$$

где  $\Delta(\nu)$  — определитель матрицы  $(a_{jk}) + i\nu E$  ( $E$  — единичная матрица);  $A_{jk}(\nu)$ ,  $j, k = \overline{1, n}$ , — алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя  $\Delta(\nu)$ ;

$$s_{\xi_l \xi_j}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi_l \xi_j}(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau \quad —$$

взаимная спектральная плотность, а

$$K_{\xi_l \xi_j}(t_2 - t_1) \triangleq \mathbf{M}[(\xi_l(t_1) - m_{\xi_l})^* (\xi_j(t_2) - m_{\xi_j})] \quad —$$

взаимная ковариационная функция стационарных случайных процессов  $\xi_i(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\xi_j(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

**4.17.** Пусть  $\xi_1(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , и  $\xi_2(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стационарные скалярные случайные процессы с известными

спектральными плотностями

$$s_{\xi_1}(\nu) = \frac{\sigma_1^2}{\pi(\nu^2 + 1)}, \quad s_{\xi_2}(\nu) = \frac{\sigma_2^2}{\pi(\nu^2 + 4)}$$

и взаимной спектральной плотностью

$$s_{\xi_1 \xi_2}(\nu) = \frac{a}{(\nu^2 - 2)^2 + i\nu},$$

где  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$ ,  $a$  — известные величины. При больших значениях времени  $t \in T$  определите  $s_{\eta_1}(\nu)$ ,  $s_{\eta_2}(\nu)$ ,  $s_{\eta_1 \eta_2}(\nu)$ , если при  $t \in T$

$$\ddot{\eta}_1(t, \omega) + 2\dot{\eta}_1(t, \omega) + 4\eta_1(t, \omega) = \xi_1(t, \omega) - \eta_2(t, \omega),$$

$$\dot{\eta}_2(t, \omega) + 9\eta_2(t, \omega) = \xi_2(t, \omega).$$

О т в е т:

$$s_{\eta_2}(\nu) = \frac{2\sigma_2^2}{\pi(\nu^2 + 4)(\nu^2 + 81)};$$

$$s_{\eta_1}(\nu) = \frac{1}{(\nu^2 + 81)[(\nu^2 - 4)^2 + 4\nu^2]} \left( \frac{\sigma_1^2(\nu^2 + 81)}{\pi(\nu^2 + 1)} + \right. \\ \left. + \frac{2\sigma_2^2}{\pi(\nu^2 + 4)} - \frac{2a[\nu^2 - 9(\nu^2 - 2)^2]}{(\nu^2 - 2)^4 + \nu^2} \right);$$

$$s_{\eta_1 \eta_2}(\nu) = \frac{1}{[(\nu^2 - 4) + 2i\nu](\nu^2 + 81)} \left( \frac{a(i\nu - 9)}{(\nu^2 - 2)^2 + i\nu} + \frac{2\sigma_2^2}{\pi(\nu^2 + 4)} \right).$$



## 5. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И ЦЕПИ МАРКОВА

Аппарат теории *марковских процессов с дискретными состояниями и цепей Маркова* широко используют в теории систем, в исследовании операций и других прикладных дисциплинах. Это обусловлено многими причинами, среди которых отметим следующие:

1) многие реальные технические системы имеют конечные множества возможных состояний, а их поведение в процессе функционирования адекватно моделируется *марковскими процессами*;

2) теория марковских процессов с дискретными состояниями и цепей Маркова разработана настолько глубоко, что позволяет решать широкий класс прикладных задач.

Именно поэтому основной материал главы связан с изучением прикладных аспектов теории марковских процессов с дискретными состояниями и цепей Маркова.

### 5.1. Основные понятия

**Определение 5.1.** *Марковский скалярный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$  называют **марковским процессом с дискретными состояниями**, если для любого фиксированного момента времени  $t \in T$  случайная величина  $\xi(t, \omega)$  является дискретной.*

Пусть  $S$  — некоторая физическая система с возможными дискретными состояниями  $\{S_k\}_{k=1}^n$ , которая случайным образом время от времени скачком (мгновенно) переходит из со-

стояния в состояние. Если этот процесс является марковским, то имеем марковский случайный процесс с дискретными состояниями.

При анализе марковских процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой — **графом состояний**, который изображает возможные состояния системы и возможные переходы этой системы из одного состояния в другое, указываемые стрелками.

**Пример 5.1.** Техническая система  $S$  состоит из двух узлов с номерами 1 и 2, каждый из которых в процессе функционирования системы может выйти из строя. Возможные состояния системы:

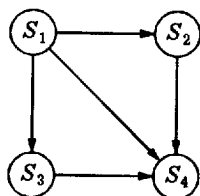


Рис. 5.1

- $S_1$  — оба узла работают;
- $S_2$  — первый узел отказал, а второй работает;
- $S_3$  — первый узел работает, а второй отказал;
- $S_4$  — оба узла отказали.

На рис. 5.1 изображен граф состояний рассматриваемой системы  $S$  в предположении, что ремонт узлов в процессе ее функционирования не производится.

**Определение 5.2.** Случайную последовательность  $\{\xi_k(\omega)\}$  называют **цепью Маркова**, если для любого натурального числа  $n > 1$  имеет место тождество

$$f(x_n | x_{n-1}; x_{n-2}; \dots; x_1) \equiv f(x_n | x_{n-1}),$$

где  $f(x_n | x_{n-1}; x_{n-2}; \dots; x_1)$  и  $f(x_n | x_{n-1})$  — условные плотности распределения случайного вектора  $(\xi_1(\omega) \ \xi_2(\omega) \ \dots \ \xi_n(\omega))^T$ .

Пусть некоторая физическая система  $S$  может находиться лишь в одном из возможных состояний  $\{S_k\}_{k=1}^n$ , а  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — соответствующий марковский процесс с дискретными состояниями. Если для системы  $S$  переход из состояния в

состояние возможен лишь в фиксированные моменты времени  $t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , где  $t_1 < t_2 < \dots < t_j < \dots$ , то эти моменты времени принято называть **шагами** или **этапами марковского процесса**  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . А так как в данном случае  $T = \{t_j\}_{j=1}^{\infty}$  и  $\xi_j(\omega) \triangleq \xi(t_j, \omega)$ , то имеем дело со случайной последовательностью, которая является цепью Маркова, если для каждого шага вероятность перехода системы  $S$  из любого состояния  $S_k$  в любое состояние  $S_m$  не зависит от того, когда и как она попала в состояние  $S_k$ .

Во многих прикладных дисциплинах зачастую вместо термина „случайная последовательность“ употребляют термин **случайный процесс с дискретным временем**.

Если ввести *случайное событие*  $s_k^j$ , состоящее в том, что после  $j$  этапов исходная система  $S$  находится в состоянии  $S_k$ , то для каждого фиксированного  $j \geq 1$  имеем полную группу событий  $\{s_k^j\}_{k=1}^n$ , т.е.

$$\sum_{k=1}^n P[s_k^j] = 1, \quad j \geq 1.$$

**Пример 5.2.** Цель (самолет) обстреляна из зенитного автомата очередь в четыре снаряда. Если  $\Delta t$  — интервал между последовательными выстрелами, а  $t_1$  — время первого выстрела, то  $t_2 = t_1 + \Delta t$ ,  $t_3 = t_1 + 2\Delta t$ ,  $t_4 = t_1 + 3\Delta t$ .

Возможные состояния цели (системы  $S$ ):

$S_1$  — цель невредима;

$S_2$  — цель получила незначительные повреждения;

$S_3$  — цель получила существенные повреждения, но еще может функционировать;

$S_4$  — цель поражена, т.е. не может функционировать (самолет сбит).

Если в начальный момент времени  $t = t_0$  система  $S$  находилась в состоянии  $S_1$ , то граф ее состояний изображен на рис. 5.2.

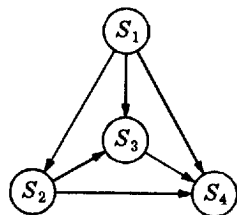


Рис. 5.2

## 5.2. Цепи Маркова

Для формализованного описания цепи Маркова удобно использовать понятия *вероятностей состояний* и *переходных вероятностей*. Поэтому введем следующие обозначения.

Пусть  $\{S_k\}_{k=1}^n$  — множество возможных состояний системы  $S$ . Вероятность реализации случайного события  $s_k^j$ , состоящего в том, что после  $j$  этапов система находится в состоянии  $S_k$ , обозначают  $p_k(j) \triangleq P[s_k^j]$  и называют *вероятностью состояния*. Вектор вероятностей состояний системы  $S$  после  $j$  этапов обозначим

$$p(j) \triangleq (p_1(j) \ p_2(j) \ \dots \ p_n(j))^T,$$

а вектор вероятностей начальных состояний —

$$p(0) \triangleq (p_1(0) \ p_2(0) \ \dots \ p_n(0))^T.$$

Если ввести матрицу-строку

$$I \triangleq (1 \ 1 \ \dots \ 1) \in M_{1n}(\mathbb{R}),$$

то равенство

$$\sum_{k=1}^n P[s_k^j] = \sum_{k=1}^n p_k(j) = 1, \quad j \geq 0,$$

можно представить в виде

$$Ip(j) = 1, \quad j \geq 0.$$

Если  $\{S_k\}_{k=1}^n$  — множество возможных состояний системы  $S$ , а  $s_k^j$  — случайное событие, состоящее в том, что после  $j$  этапов система находится в состоянии  $S_k$ , то условную вероятность события  $s_k^j$  при условии  $s_m^{j-1}$  обозначают

$$p_{mk}^j \triangleq P[s_k^j | s_m^{j-1}]$$

и называют *переходной вероятностью*.

**Определение 5.3.** Матрицу  $P^{(j)} = (p_{mk}^j) \in M_n(\mathbb{R})$  для каждого фиксированного  $j \geq 1$  называют **матрицей переходных вероятностей**.

**Определение 5.4.** Цепь Маркова называют **однородной**, если матрица  $P$  переходных вероятностей системы не зависит от номера этапа  $j$ ,  $j \geq 1$ . В противном случае цепь Маркова называют **неоднородной**.

Рассмотрим некоторые свойства матриц переходных вероятностей.

**Свойство 5.1.** Сумма элементов любой строки матрицы переходных вероятностей равна 1, т.е.  $I^T = P^{(j)} I^T$ ,  $j \geq 1$ .

◀ Действительно,  $\{s_k^j\}_{k=1}^n$  — полная группа событий для любого  $j \geq 1$ . Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n p_{mk}^j = \sum_{k=1}^n P[s_k^j | s_m^{j-1}] = 1, \quad m = \overline{1, n}, \quad j \geq 1. \quad \blacktriangleright$$

**Свойство 5.2.** Вектор вероятностей состояний после  $j$  этапов равен произведению транспонированной матрицы переходных вероятностей  $P^{(j)}$  на вектор вероятностей состояний после  $(j-1)$  этапов, т.е.  $p(j) = (P^{(j)})^T p(j-1)$ ,  $j \geq 1$ .

◀ Так как  $\{s_k^j\}_{k=1}^n$  — полная группа событий при любом натуральном  $j$ , то по формуле полной вероятности имеем

$$\sum_{m=1}^n P[s_k^j | s_m^{j-1}] P[s_m^{j-1}] = P[s_k^j], \quad j \geq 1, \quad k = \overline{1, n},$$

или, что то же самое,

$$\sum_{m=1}^n p_{mk}^j p_m(j-1) = p_k(j), \quad j \geq 1, \quad k = \overline{1, n}. \quad \blacktriangleright$$

**Свойство 5.3.** Вектор вероятностей состояний  $p(j)$  после  $j$  этапов однозначно определяется матрицами переходных вероятностей  $P^{(1)}, \dots, P^{(j)}$  и вектором вероятностей начального

состояния  $p(0)$ :  $p(j) = (P^{(1)}P^{(2)} \dots P^{(j)})^T p(0)$ . При этом, если цепь Маркова является однородной, то  $P^{(j)} \equiv P$ ,  $j \geq 1$  и

$$p(j) = (P^j)^T p(0),$$

где  $P^j$  —  $j$ -я степень матрицы  $P$ .

◀ С учетом свойства 5.2 имеем

$$\begin{aligned} p(j) &= (P^{(j)})^T p(j-1) = (P^{(j)})^T (P^{(j-1)})^T p(j-2) = \\ &= (P^{(j-1)}P^{(j)})^T p(j-2) = \dots = (P^{(1)}P^{(2)} \dots P^{(j)})^T p(0). \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

**Замечание 5.1.** При рассмотрении однородных цепей Маркова зачастую бывает удобно пользоваться *графом состояний*, на котором у стрелок выписаны соответствующие переходные вероятности. Такой граф принято называть *размеченным графом состояний*.

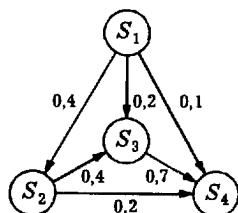


Рис. 5.3

**Пример 5.3.** Определим вероятности состояний цели из примера 5.2 после обстрела, если в начальный момент времени она находилась в состоянии  $S_1$ , а размеченный граф состояний изображен на рис. 5.3.

Из графа состояний имеем

$$\begin{array}{llll} p_{12} = 0,4, & p_{13} = 0,2, & p_{14} = 0,1, & p_{11} = 0,3, \\ p_{21} = 0, & p_{23} = 0,4, & p_{24} = 0,2, & p_{22} = 0,4, \\ p_{31} = 0, & p_{32} = 0, & p_{34} = 0,7, & p_{33} = 0,3, \\ p_{41} = 0, & p_{42} = 0, & p_{43} = 0, & p_{44} = 1, \end{array}$$

где вероятности  $p_{ii}$  найдены из соотношений  $\sum_{k=1}^4 p_{ik} = 1$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

Таким образом, матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А так как по условию  $p(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ , то, согласно свойству 5.3 матрицы переходных вероятностей, находим

$$p(4) = (P^T)^4 p(0) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0081 \\ 0,0700 \\ 0,1288 \\ 0,7931 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, найдены вероятности всех исходов обстрела цели одной очередью из четырех выстрелов:

цель не повреждена:  $p_1(4) = 0,0081$ ;

цель получила незначительные повреждения:  $p_2(4) = 0,07$ ;

цель получила значительные повреждения:  $p_3(4) = 0,1288$ ;

цель поражена:  $p_4(4) = 0,7931$ .

**Пример 5.4.** Цель (самолет) обстреляна из зенитного орудия тремя выстрелами с корректировкой наводки после каждого из них. Цель может находиться в одном из четырех состояний, определенных в примере 5.2, а матрицы переходных вероятностей равны:

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,3 & 0,4 & 0,25 \\ 0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим вероятности состояний цели после каждого выстрела, если в начальный момент цель находилась в состоянии  $S_1$ , т.е.  $p(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ .

Согласно свойству 5.2, имеем

$$\begin{aligned} p(1) &= (P^{(1)})^T p(0) = (0,3 \ 0,4 \ 0,2 \ 0,1)^T, \\ p(2) &= (P^{(2)})^T p(1) = (0,03 \ 0,20 \ 0,33 \ 0,44)^T, \\ p(3) &= (P^{(3)})^T p(2) = (0,002 \ 0,029 \ 0,165 \ 0,804)^T. \end{aligned}$$

### 5.3. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний

При рассмотрении *цепей Маркова* (с конечным числом возможных состояний) с использованием *матриц переходных вероятностей* и *вектора вероятностей начальных состояний* удается эффективно определять *вектор вероятностей состояний* исходной системы после любого числа *этапов*. Также решается и аналогичная задача для *марковских процессов с дискретными состояниями* и непрерывным временем, при анализе которых широко используются *графы состояний*.

Рассмотрим марковский процесс с дискретными состояниями, описывающий поведение системы  $S$  с множеством возможных состояний  $\{S_k\}_{k=1}^n$ . Обозначим через  $s_k^t$  случайное событие, состоящее в том, что в момент времени  $t \in T = [a, b]$  система  $S$  находится в состоянии  $S_k$ , а вероятность реализации этого события обозначим

$$p_k(t) \triangleq P[s_k^t], \quad t \in T.$$

В этом случае вектор вероятностей состояний

$$p(t) = (p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_n(t))^T$$

определяет вероятности состояний системы  $S$  в момент времени  $t \in T$ . А так как в любой фиксированный момент времени  $t$  совокупность случайных событий  $\{s_k^t\}_{k=1}^n$  — полная группа, то

$$Ip(t) = \sum_{k=1}^n p_k(t) = 1, \quad t \in T, \quad (5.1)$$

где  $I = (1 \ \dots \ 1) \in M_{1n}(\mathbb{R})$ .



**Определение 5.5.** Пусть  $S$  — некоторая система с возможными дискретными состояниями  $\{S_k\}_{k=1}^n$ . Под **плотностью вероятности перехода** этой системы из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  в момент времени  $t$  понимают число

$$\lambda_{ij}(t) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{P_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t},$$

где  $P_{ij}(t; \Delta t)$  — вероятность того, что система  $S$ , находившаяся в момент времени  $t$  в состоянии  $S_i$ , за время  $\Delta t > 0$  перейдет в состояние  $S_j$ .

Заметим, что в определении 5.5  $P_{ij}(t; \Delta t) = P[s_j^{t+\Delta t} | s_i^t]$ . Таким образом, с точностью  $o(\Delta t)$  имеет место равенство

$$P[s_j^{t+\Delta t} | s_i^t] = \lambda_{ij}(t) \Delta t,$$

т.е. плотности вероятностей перехода системы из одного возможного состояния в другое обладают обычными свойствами условных вероятностей и, в частности, являются неотрицательными.

**Определение 5.6.** Скалярный марковский процесс с дискретными состояниями, описывающий поведение системы  $S$ , называют **однородным**, если для любых  $i, j = \overline{1, n}$

$$\lambda_{ij}(t) \equiv \lambda_{ij} = \text{const}, \quad t \in T.$$

В противном случае его называют **неоднородным**.

Если для всех пар состояний  $S_i$  и  $S_j$  из множества возможных состояний системы  $S$  известны плотности вероятностей перехода  $\{\lambda_{ij}(t)\}$ , то граф состояний системы  $S$  можно превратить в *размеченный граф состояний*, проставив у стрелок не переходные вероятности, а плотности вероятностей перехода (рис. 5.4).

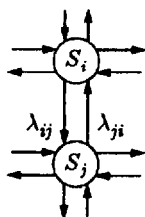


Рис. 5.4

**Теорема 5.1.** Пусть система  $S$  имеет множество возможных состояний  $\{S_k\}_{k=1}^n$ , а процесс изменения состояний этой системы представляет собой случайный процесс, причем для всех пар возможных состояний  $S_i$  и  $S_j$  определены плотности вероятностей переходов  $\lambda_{ij}(t)$  и  $\lambda_{ji}(t)$ . Тогда вероятности состояний системы  $p_k(t)$  удовлетворяют **системе уравнений Колмогорова**:

$$p'_k(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ik}(t) p_i(t) - \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ki}(t) \right) p_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in T. \quad (5.2)$$

◀ Так как процесс изменения состояний системы  $S$  представляет собой марковский процесс и  $\{s_k^t\}_{k=1}^n$  — полная группа событий, то по формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} P[s_k^{t+\Delta t}] &= \sum_{i=1}^n P[s_k^{t+\Delta t} | s_i^t] P[s_i^t] = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n P[s_k^{t+\Delta t} | s_i^t] P[s_i^t] + P[s_k^{t+\Delta t} | s_k^t] P[s_k^t]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из определения 5.5 следует, что с точностью  $o(\Delta t)$

$$P[s_k^{t+\Delta t} | s_i^t] = \lambda_{ik}(t) \Delta t, \quad i \neq k.$$

Если  $i = k$ , то, переходя к противоположному событию, находим с точностью  $o(\Delta t)$

$$P[s_k^{t+\Delta t} | s_k^t] = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ki}(t) \Delta t.$$

Таким образом, с точностью  $o(\Delta t)$  равенство (5.3) может быть преобразовано к следующему:

$$p_k(t + \Delta t) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ik}(t) \Delta t p_i(t) + \left( 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ki}(t) \Delta t \right) p_k(t),$$

или, что то же самое,

$$\frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ik}(t) p_i(t) - \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ki}(t) \right) p_k(t),$$

и для завершения доказательства достаточно перейти к пределу при  $\Delta t \rightarrow +0$ . ►

Система уравнений Колмогорова (5.2) не является линейно независимой, т.е. она является избыточной, что следует из равенства (5.1).

Если  $I = (1 \ \dots \ 1) \in M_{1n}(\mathbb{R})$ , а компонентами вектора

$$\lambda_k^0(t) = (\lambda_{k1}(t) \ \dots \ \lambda_{k,k-1}(t) \ 0 \ \lambda_{k,k+1}(t) \ \dots \ \lambda_{kn}(t))^T$$

являются плотности вероятностей переходов системы  $S$  из состояния  $S_k$  во все иные возможные состояния, то

$$\lambda_{kk}(t) \triangleq -I\lambda_k^0(t) = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ki}(t) \quad (5.4)$$

суммарная плотность вероятности перехода системы из состояния  $S_k$ , взятая со знаком „минус“. При этом, если ввести матрицу

$$\lambda(t) \triangleq (\lambda_{ij}(t)) \in M_n(\mathbb{R}), \quad (5.5)$$

диагональные элементы которой определены согласно (5.4), то (5.2) переходит в **матричное уравнение Колмогорова**

$$p'(t) = \lambda(t)p(t), \quad t \in T = [a, b], \quad (5.6)$$

где  $p(t)$  — вектор вероятностей состояния системы  $S$  в момент времени  $t$ .

Если определен вектор вероятностей  $p_a$  начальных состояний системы  $S$  в момент  $t = a$  и определена матрица  $\lambda(t)$ , то с учетом (5.6) приходим к задаче Коши для матричного уравне-

ния Колмогорова:

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda(t)p(t), & t > a; \\ p(a) = p_a. \end{cases} \quad (5.7)$$

Если  $\lambda(t)$  непрерывна при  $t > a$ , то задача Коши (5.7) имеет единственное решение и, следовательно, вектор вероятностей состояний исходной системы  $S$  определен однозначно в любой момент времени  $t > a$ . Если при этом матрицы  $\lambda(t)$  и  $\int_a^t \lambda(\tau) d\tau$  коммутируют при каждом фиксированном  $t \in T = [a, b]$ , то решение задачи Коши (5.7) с использованием *матричной экспоненты* можно записать в явном виде (см. П2):

$$p(t) = \exp\left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right) p_a, \quad t \in T. \quad (5.8)$$

Согласно (5.5),  $k$ -м столбцом матрицы  $\lambda(t)$  является вектор  $\lambda_k^0(t)$ , у которого  $k$ -я компонента заменена, согласно (5.4), на  $\lambda_{kk}(t) = -I\lambda_k^0(t)$ , а все остальные — соответствующие плотности вероятностей переходов из состояния  $S_k$ . Эту информацию проставляют на размеченном графе состояний системы на стрелках, „выходящих из состояния  $S_k$ “ (при их отсутствии соответствующая компонента равна нулю). При этом

$$I\lambda(t) \equiv 0. \quad (5.9)$$

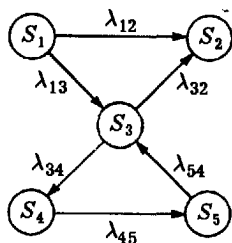


Рис. 5.5

**Пример 5.5.** Размеченный граф состояний системы  $S$ , процесс изменения состояния которой представляет собой *однородный марковский процесс с дискретными состояниями*, изображен на рис. 5.5. Сформулируем задачу Коши для системы уравнений Колмогорова, е-

ли  $T = [0, \infty)$  и в начальный момент времени  $t = 0$  система находится в состоянии  $S_1$ .

Согласно заданному размеченному графу состояний, имеем

$$\lambda(t) \equiv \lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{12} - \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{32} & 0 & 0 \\ \lambda_{13} & 0 & -\lambda_{32} - \lambda_{34} & 0 & \lambda_{53} \\ 0 & 0 & \lambda_{34} & -\lambda_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{45} & -\lambda_{53} \end{pmatrix},$$

$$p(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

Таким образом, вектор  $p(t)$  вероятностей состояний изучаемой системы  $S$  является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} p'_1(t) = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1(t), \\ p'_2(t) = \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{32}p_3(t), \\ p'_3(t) = \lambda_{13}p_1(t) - (\lambda_{32} + \lambda_{34})p_3(t) + \lambda_{53}p_5(t), \\ p'_4(t) = \lambda_{34}p_3(t) - \lambda_{45}p_4(t), \\ p'_5(t) = \lambda_{45}p_4(t) - \lambda_{53}p_5(t), \\ p_1(0) = 1, \quad p_k(0) = 0, \quad k = \overline{2, 5}, \quad \# \end{cases}$$

Если решение задачи Коши (5.7) представимо в виде (5.8), то оно удовлетворяет равенству (5.1).

Действительно, имеет место тождество (5.9):  $I\lambda(t) \equiv 0$ , где  $I \triangleq (1 \ \dots \ 1) \in M_{1n}(\mathbb{R})$ . Кроме того,  $I p(a) = 1$ . Таким образом, из (5.8), свойств матричной экспоненты (см. П2) и тождества (5.9) следует, что

$$\begin{aligned} I p(t) &= I \exp\left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right) p(a) = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right)^k p(a) = \\ &= I \left[ I_n + \int_a^t \lambda(\tau) d\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right)^{k-1} \right] p(a) = \\ &= I p(a) + \int_a^t I \lambda(\tau) d\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right)^{k-1} p(a) = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

По своему смыслу компоненты  $p_k(t)$  вектора вероятностей состояний системы  $S$  не могут быть отрицательными, т.е.

$$p_k(t) \geq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in T = [a, b]. \quad (5.10)$$

Условия (5.10) накладывают вполне определенные ограничения на компоненты матрицы  $\lambda(t)$ , т.е. на плотности вероятностей переходов системы  $S$  из одного состояния в другое. Эти ограничения имеют важное значение при изучении так называемых предельных режимов однородных марковских случайных процессов с дискретными состояниями, играющих существенную роль в различных приложениях.

**Теорема 5.2.** Решение задачи Коши (5.7) для матричного уравнения Колмогорова при любом векторе вероятностей начальных состояний системы  $S$  имеет неотрицательные компоненты.

◀ Для упрощения дальнейших рассуждений будем считать, что решение задачи Коши (5.7) может быть представлено в виде (5.8). А так как компоненты вектора вероятностей начальных состояний  $p_a$  изучаемой системы являются неотрицательными, то достаточно доказать неотрицательность элементов *матричной функции*

$$\exp\left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right), \quad t \in T.$$

Из определения плотности вероятности перехода системы  $S$  из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ , где  $i \neq j$ , следует, что  $\lambda_{ij}(t) \geq 0$  при любых  $t \in T$ . Таким образом,

$$C(t) \triangleq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \int_a^t \lambda_{ij}(\tau) d\tau \geq 0, \quad t \in T,$$

и, согласно (5.4), (5.5), все элементы матричной функции

$$\int_a^t \lambda(\tau) d\tau + C(t)I_n$$

являются неотрицательными. Но в этом случае (см. П.2) неотрицательными являются и все элементы матричной функции

$$\exp\left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau + C(t)I_n\right),$$

коммутирующей с матричной функцией

$$\exp\left[-C(t)I_n\right] \equiv e^{-C(t)}I_n.$$

А так как  $e^{-C(t)} > 0$  при  $t \in T$  и

$$\exp\left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right) = \exp\left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau + C(t)I_n\right) \exp\left(-C(t)I_n\right),$$

то теорема доказана (произведение матриц с неотрицательными элементами является матрицей с неотрицательными элементами). ►

**Следствие 5.1.** Если решение задачи Коши (5.7) представимо в виде (5.8), то для выполнения неравенств

$$p_k(t) > 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in (a, b],$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^t \lambda_{ij}(\tau) d\tau > 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad t \in (a, b].$$

◄ Сформулированное утверждение вытекает из доказательства теоремы 5.2. ►

**Следствие 5.2.** Если процесс изменения состояния системы  $S$  представляет собой однородный марковский процесс с

дискретными состояниями, то неравенства

$$p_k(t) > 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in (a, b],$$

выполняются тогда и только тогда, когда

$$\lambda_{ij} > 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

Утверждение следствия 5.2 означает следующее. Вероятности состояний ненулевые в любой момент времени  $t > a$  тогда и только тогда, когда по графу состояний можно перейти из любого состояния  $S_i$  в любое состояние  $S_j$  за конечное число шагов.

**Определение 5.7.** Пусть  $\{S_k\}_{k=1}^n$  — множество возможных состояний системы  $S$ , а процесс ее перехода из одного возможного состояния в другое представляет собой однородный марковский процесс с дискретными состояниями, определенный на множестве  $T = [a, \infty)$ . Если  $p(t) = (p_1(t) \dots p_n(t))^T$  — вектор вероятностей состояний системы  $S$  в момент времени  $t \in T$  и существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t),$$

то вектор  $p$  называют **вектором предельных вероятностей состояний** системы.

Существование вектора предельных вероятностей состояний означает, что с течением времени в системе  $S$  наступает некоторый стационарный режим. Он состоит в том, что система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них уже не зависит от времени. Каждое из состояний реализуется с некоторой постоянной вероятностью, интерпретация которой может быть связана со средним относительным временем пребывания системы  $S$  в данном состоянии.

Равенство (5.8), полученное без учета каких бы то ни было ограничений на область  $T = [a, b]$ , для однородного марковского случайного процесса позволяет сформулировать следующее утверждение: для существования вектора предельных вероят-



ностей состояний системы  $S$  необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\{\lambda(t-a)\} p_a.$$

Если  $p(t)$  — вектор вероятностей состояний системы  $S$  и  $I = (1 \dots 1)$ , то для любого  $t \in T = [0, \infty)$  решение задачи Коши для матричного уравнения Колмогорова

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda p(t), \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

удовлетворяет равенству  $I p(t) = 1$ .

Таким образом, вектор  $p$  предельных вероятностей состояний системы  $S$  представляет собой асимптотически устойчивую точку покоя для нормальной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами  $p'(t) = \lambda p(t)$ , имеющую неотрицательные координаты и расположенную на гиперплоскости  $p_1 + \dots + p_n = 1$ . Как следствие, вектор  $p$  удовлетворяет матричной системе

$$\begin{cases} \lambda p = 0, \\ I p = 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Следующий пример поясняет проведенные рассуждения.

**Пример 5.6.** Размеченный граф состояний системы  $S$ , для которой процесс изменения состояния представляет собой однородный марковский процесс, изображен на рис. 5.6. Необходимо найти предельные вероятности состояний системы  $S$ .

Согласно заданному графу состояний, имеем

$$\lambda = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

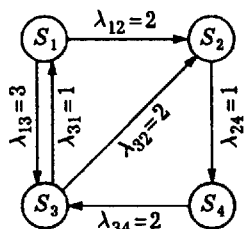


Рис. 5.6

и, согласно (5.11), приходим к системе

$$\begin{cases} -5p_1 + 0p_2 + 1p_3 + 0p_4 = 0, \\ 2p_1 - p_2 + 2p_3 + 0p_4 = 0, \\ 3p_1 + 0p_2 - 3p_3 + 2p_4 = 0, \\ 0p_1 + p_2 + 0p_3 - 2p_4 = 0, \\ 1p_1 + 1p_2 + 1p_3 + 1p_4 = 1, \end{cases}$$

решение которой нетрудно найти:

$$p_1 = \frac{1}{24}, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad p_3 = \frac{5}{24}, \quad p_4 = \frac{1}{4}.$$

#### 5.4. Процесс гибели — размножения и циклический процесс

**Определение 5.8.** Марковский процесс с дискретными состояниями  $\{S_k\}_{k=1}^n$  называют **процессом гибели — размножения**, если он имеет размеченный граф состояний, изображенный на рис. 5.7.

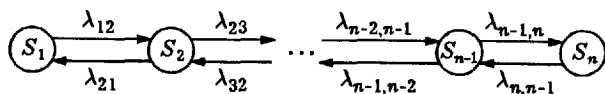


Рис. 5.7

Для процесса гибели — размножения граф состояний можно вытянуть в цепочку, в которой каждое из состояний  $S_k$  прямой и обратной связью связано с каждым из соседних состояний (крайние состояния  $S_1$  и  $S_n$  имеют лишь одно соседнее состояние).

Название „процесс гибели — размножения“ имеет своими истоками биологические задачи, в которых такими процессами описывают изменение численности особей в популяциях.

**Пример 5.7.** Техническое устройство состоит из трех одинаковых узлов, каждый из которых может выходить из строя.

При этом отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Возможные состояния системы:

$S_0$  — все три узла исправны;

$S_1$  — один узел отказал и восстанавливается, а два исправны;

$S_2$  — два узла отказали и восстанавливаются, а один исправен;

$S_3$  — все три узла отказали и восстанавливаются.

Необходимо найти вектор предельных вероятностей состояний исходной системы, имеющей размеченный граф состояний, который изображен на рис. 5.8.

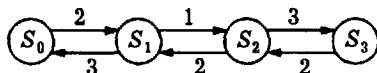


Рис. 5.8

Согласно заданному графу состояний, имеем

$$\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

и, согласно (5.11), приходим к системе

$$\begin{cases} -2p_0 + 3p_1 + 0p_2 + 0p_3 = 0, \\ 2p_0 - 4p_1 + 2p_2 + 0p_3 = 0, \\ 0p_0 + p_1 - 5p_2 + 2p_3 = 0, \\ 0p_0 + 0p_1 + 3p_2 - 2p_3 = 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1, \end{cases}$$

имеющей решение

$$p_0 = \frac{6}{15}, \quad p_1 = \frac{4}{15}, \quad p_2 = \frac{2}{15}, \quad p_3 = \frac{3}{15}. \quad \#$$

Если процесс гибели — размножения представляет собой однородный марковский процесс с дискретными состояниями,





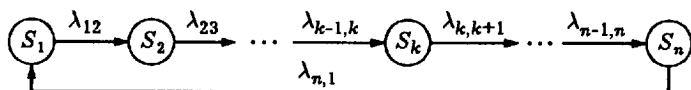


Рис. 5.9

Характерным признаком циклических процессов является кольцевая (циклическая) связь возможных состояний с односторонними переходами (см. рис. 5.9).

Согласно виду размеченного графа состояний однородного циклического процесса, матрица  $\lambda$  плотностей вероятностей переходов системы  $S$  из одного состояния в другое имеет вид

$$\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{12} & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & -\lambda_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_{n-1,n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1,n} & -\lambda_{n1} \end{pmatrix}.$$

По известной матрице  $\lambda$  можно записать однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора предельных вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \lambda_{12}p_1 - \lambda_{23}p_2 = 0, \\ \lambda_{23}p_2 - \lambda_{34}p_3 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_{n-2,n-1}p_{n-2} - \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = 0, \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} - \lambda_{n1}p_n = 0, \\ \lambda_{12}p_1 - \lambda_{n1}p_n = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что

$$p_k = \begin{cases} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{k,k+1}}p_1, & k = \overline{1, n-1}; \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n1}}p_1, & k = n. \end{cases}$$

Таким образом, с учетом условия (5.1) имеем

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{k,k+1}} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{j,j+1}} + \frac{1}{\lambda_{n1}} \right)^{-1}, & k = \overline{1, n-1}; \\ \frac{1}{\lambda_{n1}} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{j,j+1}} + \frac{1}{\lambda_{n1}} \right)^{-1}, & k = n. \end{cases} \quad (5.15)$$

В соответствии с формулами (5.15) и определением 5.7 можно показать\*, что для однородного циклического процесса среднее время пребывания системы в состоянии  $S_k$  равно

$$\bar{t}_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{k,k+1}}, & k = \overline{1, n-1}; \\ \frac{1}{\lambda_{n1}}, & k = n. \end{cases} \quad (5.16)$$

Но в этом случае, согласно (5.15), (5.16), получаем

$$p_k = \frac{\bar{t}_k}{\sum_{j=1}^n \bar{t}_j}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.17)$$

**Пример 5.8.** ЭВМ может находиться в одном из следующих состояний:

$S_1$  — исправна, работает;

$S_2$  — неисправна (остановлена) и идет поиск неисправности;

$S_3$  — неисправность обнаружена и идет ремонт;

$S_4$  — ремонт закончен и идет подготовка к пуску.

Необходимо определить предельные вероятности состояний рассматриваемой системы, если известно следующее: среднее время безотказной работы ЭВМ равно 12 часам; для ремонта ее приходится останавливать в среднем на 6 часов; поиск неисправностей длится в среднем 0,5 часа; подготовка к пуску занимает 1 час.

---

\*См.: Вентцель Е.С.

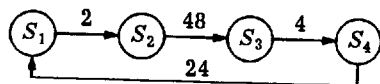


Рис. 5.10

Рассматриваемая система имеет граф состояний, изображенный на рис. 5.10, так как по условию среднее время (в сутках) ее пребывания

в каждом из возможных состояний равно:  $\bar{t}_1 = 1/2$ ,  $\bar{t}_2 = 1/48$ ,  $\bar{t}_3 = 1/4$ ,  $\bar{t}_4 = 1/24$ . Для определения предельных вероятностей достаточно воспользоваться формулами (5.17):

$$p_1 = \frac{24}{39}, \quad p_2 = \frac{1}{39}, \quad p_3 = \frac{12}{39}, \quad p_4 = \frac{2}{39}.$$

## Вопросы и задачи

**5.1.** В чем состоит принципиальное отличие марковского процесса с дискретными состояниями от цепи Маркова?

**5.2.** Чем неоднородная цепь Маркова отличается от однородной?

**5.3.** Как с помощью матрицы переходных вероятностей для цепи Маркова можно определить вероятности состояний после  $j$  шагов, если цепь Маркова является: а) однородной; б) неоднородной?

**5.4.** Запишите систему уравнений Колмогорова для марковского процесса с множеством возможных состояний  $\{S_k\}_{k=1}^n$ . Почему эта система является избыточной? В каких случаях вероятности состояний определяются однозначно?

**5.5.** Всегда ли задача Коши для системы уравнений Колмогорова имеет неотрицательное решение?

**5.6.** Пусть система  $S$  — это автомашина, которая может находиться в одном из следующих состояний:  $S_1$  — исправна, работает;  $S_2$  — неисправна, ожидает осмотра;  $S_3$  — осматривается;  $S_4$  — ремонтируется;  $S_5$  — списана. Как выглядит граф состояний системы  $S$ ?

Ответ: граф состояний системы представлен на рис. 5.11.



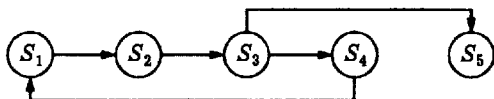


Рис. 5.11

**5.7.** Постройте граф состояний системы  $S$  из примера 5.1, если отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться.

Ответ: граф состояний системы представлен на рис. 5.12, при этом использованы обозначения:

$S_1$  — оба узла работают;

$S_2$  — первый узел работает, а второй восстанавливается;

$S_3$  — второй узел работает, а первый восстанавливается;

$S_4$  — оба узла восстанавливаются.

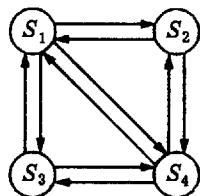


Рис. 5.12

**5.8.** Из таблицы, содержащей все целые положительные числа от 1 до  $m$  включительно, наудачу последовательно выбирают числа. Система находится в состоянии  $S_j$ , если число  $j$  является наибольшим из выбранных. Найдите вероятность того, что после выбора из таблицы  $n$  чисел наибольшее число будет равно  $k$ , если перед этим наибольшим было число  $i$ .

$$\text{Ответ: } p_{ik}^n = \begin{cases} 0, & i > k; \\ \left(\frac{k}{m}\right)^n, & i = k; \\ \left(\frac{k}{m}\right)^n - \left(\frac{k-1}{m}\right)^n, & i < k. \end{cases}$$

**5.9.** Для однородной цепи Маркова заданы матрица переходных вероятностей и вектор вероятностей состояний на нулевом шаге:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите векторы вероятностей состояний после первого и второго шагов.

Ответ:  $p(1) = (0 \ 1 \ 0)^T$ ;  $p(2) = (0,6 \ 0 \ 0,4)^T$ .

**5.10.** Известна матрица  $P$  переходных вероятностей однородной цепи Маркова. Определите: а) число возможных состояний этой цепи; б) вероятности состояний после двух шагов, если на нулевом шаге вероятности состояний одинаковы, а

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) 3; б)  $p(2) = (1/2 \ 1/3 \ 1/6)^T$ .

**5.11.** Матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Определите: а) состояния, из которых достигается состояние  $S_k$ ,  $k = \overline{1,4}$ ; б) состояния, которые достигаются из состояния  $S_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

Ответ: а) состояния  $S_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , достигаются из любого состояния, а состояние  $S_4$  не достигается ни из одного состояния; б) из состояний  $S_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , достигаются все состояния, кроме  $S_4$ , а из состояния  $S_4$  достигаются все состояния.

**5.12.** Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  система с равной вероятностью находится в одном из возможных состояний, изображаемых точкой на оси  $Ox$ :  $x = -1$  — состояние  $S_1$ ;  $x = 0$  — состояние  $S_2$ ;  $x = 1$  — состояние  $S_3$ ;  $x = 2$  — состояние  $S_4$ . В зависимости от случая точка может перемещаться вправо или влево на единичное расстояние: вправо с вероятностью

$1/6$ , влево с вероятностью  $5/6$ . Из состояний  $S_1$  и  $S_4$  перемещения невозможны. Найдите матрицу переходных вероятностей и векторы вероятностей состояний на нулевом, первом и втором шагах.

Ответ:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$P(1) = \begin{pmatrix} \frac{11}{24} \\ \frac{5}{24} \\ \frac{1}{24} \\ \frac{7}{24} \end{pmatrix}, \quad P(2) = \begin{pmatrix} \frac{91}{144} \\ \frac{5}{144} \\ \frac{5}{144} \\ \frac{43}{144} \end{pmatrix}.$$

**5.13.** Граф состояний системы представлен на рис. 5.13. Запишите систему линейных алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний.

Ответ:

$$\begin{cases} (\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1 - \lambda_{21}p_2 - \lambda_{31}p_3 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 - (\lambda_{23} + \lambda_{24})p_2 = 0, \\ \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - \lambda_{31}p_3 + \lambda_{43}p_4 = 0, \\ \lambda_{24}p_2 - \lambda_{43}p_4 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases}$$

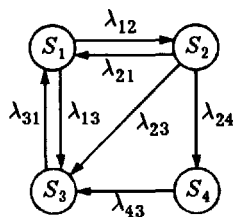


Рис. 5.13

**5.14.** Размеченный граф состояний системы представлен на рис. 5.14. Определите: а) тип процесса; б) предельные вероятности состояний, если они существуют.

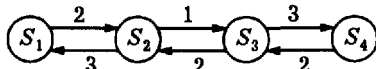


Рис. 5.14

Ответ: а) процесс гибели — размножения; б)  $p_1 = 6/15$ ,  $p_2 = 4/15$ ,  $p_3 = 2/15$ ,  $p_4 = 3/15$ .

5.15. Граф состояний системы представлен на рис. 5.15.

Определите предельные вероятности ее состояний.

Ответ:

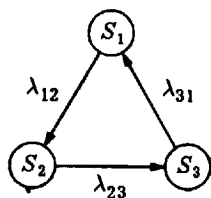


Рис. 5.15

$$p_1 = \frac{1}{K}, \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}K}, \quad p_3 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}K},$$

$$\text{где } K = 1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}.$$

5.16. Вычислительный комплекс может находиться в следующих состояниях:  $S_1$  — исправен, работает;  $S_2$  — неисправен, остановлен и ведется поиск неисправности;  $S_3$  — неисправность оказалась незначительной и устраняется местными средствами;  $S_4$  — неисправность оказалась значительной и устраняется специалистами;  $S_5$  — подготовка к пуску. Процесс перехода комплекса из одного состояния в другое марковский. Среднее время непрерывной работы комплекса  $\bar{t}_1$ , среднее время поиска неисправностей  $\bar{t}_2$ , среднее время ремонта местными средствами  $\bar{t}_3$ , среднее время ремонта специалистами  $\bar{t}_4$ , среднее время подготовки к пуску  $\bar{t}_5$ . Неисправность может быть устранена местными средствами с вероятностью  $P$  и с вероятностью  $1 - P$

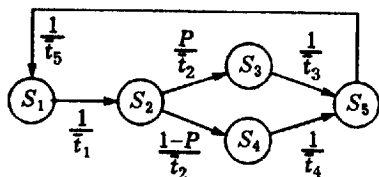


Рис. 5.16

требуется вызова специалистов. Определите предельные вероятности состояний, если они существуют.

Указание: воспользуйтесь графом состояний, который изображен на рис. 5.16.

Ответ:  $p_1 = \bar{t}_1 \Delta$ ,  $p_2 = \bar{t}_2 \Delta$ ,  $p_3 = P \bar{t}_3 \Delta$ ,  $p_4 = (1 - P) \bar{t}_4 \Delta$ ,  $p_5 = \bar{t}_5 \Delta$ ,  $\Delta = [\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + P \bar{t}_3 + (1 - P) \bar{t}_4 + \bar{t}_5]^{-1}$ .

## 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

### 6.1. Процессы массового обслуживания (основные понятия)

При решении многих прикладных задач исследователи сталкиваются с процессами, для которых характерна следующая общая структура (рис. 6.1): в определенную совокупность пунктов, называемую **системой обслуживания**, через некоторые промежутки времени поступают объекты (**входной поток**), которые подвергаются там соответствующим операциям (обслуживанию) и затем покидают систему (**выходной поток**), освобождая место для следующих объектов. Промежутки времени, через которые поступают объекты, и время их обслуживания, как правило, имеют случайный характер. Поэтому при массовом поступлении объектов в системе обслуживания могут возникнуть **очереди**.

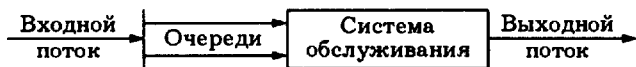


Рис. 6.1

Процессы, объединенные общей структурой, изображенной на рис. 6.1, называют **процессами массового обслуживания**. Они типичны для связи (телефон, телеграф, почта), транспорта (воздушные, наземные и морские перевозки), культурно-бытовых предприятий (театры, магазины, поликлиники), производственных процессов (сборочные линии, ремонт и обслуживание оборудования) и так далее.

Вне зависимости от конкретной природы и характера объектов, поступающих в систему обслуживания, их называют **заявками**, или **требованиями**. Входной поток заявок рассматривают как последовательность *случайных событий*, следующих через какие-то промежутки времени (например, вызовы на станции скорой помощи, выход из строя станков и так далее). *Закон распределения* входного потока в значительной степени обуславливает и характер процесса массового обслуживания.

Структура очередей и поступление из них заявок на обслуживание определяются как свойствами и возможностями систем обслуживания, так и установленными правилами прохождения заявок через эти системы (*дисциплина очереди*). Заявки могут выполняться в порядке поступления (операции на конвейере), с приоритетом (внеочередное право получения билета), в случайном порядке (отбор образцов для статистического анализа), в порядке первого очередного поступления при освободившемся канале обслуживания (прием вызова телефонной станцией) и так далее.

Очереди могут ограничиваться по длине, т.е. по числу находящихся в ней заявок, и по времени ожидания обслуживания. Эти ограничения обусловлены либо возможностями самой системы массового обслуживания (число мест в театре, объем оперативной памяти ЭВМ), либо поведением объектов обслуживания (отказ от обслуживания из-за неприемлемости длины очереди или времени ожидания в ней, регламентация порядка обслуживания, т.е. дисциплина очереди, и так далее). В конечном счете основной характеристикой очереди является **время ожидания** обслуживания. Система обслуживания состоит из определенного числа обслуживающих единиц, называемых **каналами обслуживания**, и может иметь различную организацию: с последовательными, параллельными и комбинированными каналами, некоторые из которых могут быть специализированными. При этом в зависимости от поступления заявок и образования очередей эта система может обладать

способностями к изменению своей организации. В свою очередь, изменение организации системы обслуживания влияет на структуру очереди и на отношение к ней объектов обслуживания. Так, при занятости всех каналов обслуживания поступающие заявки могут получить отказ (**системы обслуживания с отказом**) или становится в очередь (**системы обслуживания с очередями**, которые называют также **системами обслуживания с ожиданием**).

Изучение процессов массового обслуживания составляет предмет **теории массового обслуживания**. Она является весьма развитой математической дисциплиной с обширными приложениями в различных областях знаний. Математические модели теории массового обслуживания используют и в различных задачах принятия решений, связанных с рациональной организацией систем массового обслуживания или выбора оптимального варианта из некоторой их совокупности.

## 6.2. Простейший поток

**Определение 6.1.** *Входной поток называют простейшим, если:*

1) *вероятность появления того или иного числа заявок на временном интервале зависит лишь от его длительности и не зависит от его расположения на временной оси (**стационарность входного потока**)*, причем заявки поступают поодиночке (***ординарность входного потока***) и независимо друг от друга (***отсутствие последовательности во входном потоке***);

2) *вероятность реализации отдельного случайного события (появление заявки) на временном интервале малой длительности  $\Delta t$  пропорциональна  $\Delta t$  с точностью до бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с  $\Delta t$ , т.е. равна  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ , где  $\lambda > 0$ .*

3) вероятность реализации двух и более случайных событий (появление двух или более заявок) на временном интервале малой длительности  $\Delta t$  есть величина  $o(\Delta t)$ .

Отсутствие последствия в определении простейшего входного потока означает, что для любых непересекающихся временных интервалов число заявок, поступающих на одном из этих интервалов, не зависит от числа заявок, поступающих на других интервалах.

Несмотря на то, что *входные и выходные потоки* многих реальных систем обслуживания не удовлетворяют полностью определению простейшего потока, понятие простейшего потока широко используют в теории массового обслуживания\*. Это обстоятельство связано не только с тем, что простейшие потоки достаточно часто встречаются на практике, но и с тем, что сумма неограниченного числа стационарных ординарных потоков с практически любым последствием является простейшим потоком. В связи с этим рассмотрим основные свойства простейшего потока.

**Теорема 6.1.** *Дискретная случайная величина  $\eta(\omega)$ , принимающая значения 0, 1, 2, ... и характеризующая при простейшем входном потоке число заявок, поступающих в систему обслуживания на временном интервале длительности  $t$ , распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda t$ .*

◀ Рассмотрим скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , с дискретными состояниями  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$  (т.е. для любого фиксированного момента времени  $t \in T$  его сечение  $\xi(t, \omega)$  является дискретной случайной величиной с множеством возможных значений  $\{S_k\}$ ). Пусть его пребывание в состоянии  $S_k$  означает наличие в системе обслуживания  $k$  заявок. В соответствии с условиями теоремы и определением простейшего потока случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является марковским однородным процессом с дискретными состояниями, причем

\*См.: Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.



для любых целых неотрицательных  $i$  и  $j$  плотность вероятностей перехода системы обслуживания из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  в любой момент времени  $t \geq 0$  определяется равенством

$$\lambda_{ij}(t) = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1; \\ 0, & j \neq i + 1. \end{cases}$$

Поэтому в данном случае система уравнений Колмогорова имеет следующий вид:

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t), \\ p'_{k+1}(t) = -\lambda p_{k+1}(t) + \lambda p_k(t), & k \geq 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

где  $p_k(t)$  — вероятность того, что на временном интервале длительности  $t$  в изучаемую систему обслуживания поступит  $k$  заявок. А так как из определения 6.1 простейшего потока заявок следует, что

$$p_k(0) = \lim_{t \rightarrow +0} p_k(t) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k > 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

то приходим к задачам Коши относительно функции  $p_0(t)$ :

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t), \\ p_0(0) = 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

и функций  $p_k(t)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{cases} p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t), \\ p_k(0) = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Последовательно решая задачи Коши (6.3), (6.4), в случае простейшего входного потока находим вероятность  $P[\eta(\omega) = n]$  того, что число заявок  $\eta(\omega)$  на временном интервале длительности  $t$  будет равно  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ :

$$P[\eta(\omega) = n] = p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad (6.5)$$

Соотношения (6.5) означают, что случайная величина  $\eta(\omega)$  распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda t$ . ►

**Следствие 6.1.** Если входной поток является простейшим, то среднее число заявок, поступающих в систему обслуживания на временном интервале длительности  $t$ , равно  $\lambda t$ .

◄ Чтобы определить среднее число заявок, нужно найти математическое ожидание случайной величины  $\eta(\omega)$ . А так как, согласно (6.5), она распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda t$ , то [XVI]

$$M[\eta(\omega)] = \lambda t. \quad \blacktriangleright \quad (6.6)$$

Согласно доказанному следствию, параметр  $\lambda$  представляет собой среднее число заявок, поступающих в единицу времени. Поэтому его называют **интенсивностью**, или **плотностью простейшего потока**.

**Следствие 6.2.** Если входной поток заявок является простейшим, то дисперсия скалярной случайной величины  $\eta(\omega)$ , характеризующая рассеивание числа заявок, поступающих в систему массового обслуживания на временном интервале длительности  $t$ , относительно их среднего значения, равно  $\lambda t$ .

◄ Если входной поток простейший, то, согласно (6.5), случайная величина  $\eta(\omega)$  распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda t$ . Следовательно,

$$D[\eta(\omega)] = \lambda t. \quad \blacktriangleright \quad (6.7)$$

Обратим внимание на то, что, согласно (6.6) и (6.7), у случайной величины, распределенной по закону Пуассона, математическое ожидание и дисперсия совпадают.

**Пример 6.1.** В бюро обслуживания в среднем поступает 12 заказов в час. Считая поток заказов простейшим, определим вероятность того, что: а) за 1 минуту не поступит ни одного заказа; б) за 10 минут поступит не более трех заказов.

Так как поток заказов является простейшим и интенсивность  $\lambda = 12(\text{заказов/час}) = 0,2(\text{заказа/мин})$ , то, согласно (6.5), имеем:

$$\text{а) } P[\eta(\omega) = 0 | t = 1] = e^{-0,2} \approx 0,819;$$

$$\text{б) } P[\eta(\omega) \leq 3 | t = 10] =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^3 P[\eta(\omega) = k | t = 10] = \sum_{k=0}^3 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \Big|_{\substack{\lambda=0,2 \\ t=10}} = \\ &= \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots\right) e^{-2} \approx 0,857. \quad \# \quad (6.8) \end{aligned}$$

В соответствии с определением 6.1 простейшего потока, длительность  $\tau$  временного интервала между двумя последовательно поступающими заявками является случайной величиной  $\tau(\omega)$ . Для построения *математических моделей* систем обслуживания необходимо знание *функции распределения*  $F_\tau(T) \triangleq \triangleq P[\tau(\omega) < T]$  *случайной величины*  $\tau(\omega)$  или ее *плотности распределения (вероятностей)*  $f_\tau(T)$ .

**Теорема 6.2.** В случае простейшего входного потока с интенсивностью  $\lambda$  длительность  $\tau(\omega)$  временного интервала между двумя последовательными заявками имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ .

◀ Вероятность реализации случайного события  $\{\tau(\omega) \geq T\}$ , означающего, что длительность временного интервала между поступлениями двух заявок будет больше некоторой величины  $T$ , равна вероятности отсутствия заявок в этом интервале. Поэтому

$$P[\tau(\omega) \geq T] = p_0(T).$$

С учетом (6.5) при  $T > 0$  имеем

$$P[\tau(\omega) < T] = 1 - P[\tau(\omega) \geq T] = 1 - p_0(T) = 1 - e^{-\lambda T}.$$

Очевидно, что  $P[\tau(\omega) < T] = 0$  при  $T \leq 0$ . Согласно определению функции распределения случайных величин (см. П1),

$$F_{\tau}(T) \triangleq P\{\tau(\omega) < T\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda T}, & T > 0; \\ 0, & T \leq 0, \end{cases}$$

т.е. случайная величина  $\tau(\omega)$  распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda$ . ►

**Следствие 6.3.** В случае простейшего входного потока с интенсивностью  $\lambda$  длительность  $\tau(\omega)$  временного интервала между двумя последовательно поступающими заявками является случайной величиной с плотностью распределения (вероятностей)

$$f_{\tau}(T) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda T}, & T > 0; \\ 0, & T \leq 0, \end{cases}$$

математическое ожидание и дисперсия которой определяются равенствами

$$M[\tau(\omega)] = \frac{1}{\lambda}, \quad (6.9)$$

$$D[\tau(\omega)] = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (6.10)$$

Согласно следствию 6.3,

$$\begin{aligned} P[\tau(\omega) \geq T + s | \tau(\omega) > s] &= \\ &= \frac{P[(\tau(\omega) \geq T + s) \wedge (\tau(\omega) > s)]}{P[\tau(\omega) > s]} = \frac{P[\tau(\omega) \geq T + s]}{P[\tau(\omega) > s]} = \\ &= \frac{e^{-\lambda(T+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda T} = P[\tau(\omega) \geq T]. \quad (6.11) \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность появления очередной заявки по прошествии времени  $T$  при простейшем потоке не зависит от момента появления предшествующей, что является следствием отсутствия последдействия в простейшем входном потоке.

### 6.3. Время ожидания и время обслуживания

В теории массового обслуживания **время обслуживания**, т.е. время пребывания одной заявки в канале обслуживания считают случайной величиной, распределенной, как правило, по экспоненциальному закону с *плотностью распределения (вероятностей)*

$$g(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Это обусловлено многими причинами, среди которых следует отметить: 1) отсутствие последствий; 2) достаточно корректное отражение свойств многих реальных систем обслуживания; 3) простоту и удобство аналитических выражений.

Согласно (6.12), среднее время обслуживания заявки равно  $1/\mu$  (ср. (6.9)). Величину  $\mu$  называют **интенсивностью обслуживания**. *Функция распределения* времени обслуживания заявки равна

$$G(t) = \int_{-\infty}^t g(x) dx = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

Ее значение равно *вероятности* того, что к моменту времени  $t$  обслуживание заявки будет завершено, т.е. освободится канал обслуживания.

**Время ожидания** (время пребывания заявки в очереди, если последняя существует) также считают случайной величиной, распределенной, как правило, по экспоненциальному закону с плотностью распределения (вероятностей)

$$h(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (6.14)$$

и функцией распределения

$$H(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx = \begin{cases} 1 - e^{-\nu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (6.15)$$

где  $\nu$  — величина, обратная среднему времени ожидания, а значение  $H(t)$  равно вероятности того, что в момент  $t$  начнется обслуживание заявки.

#### 6.4. Основные принципы построения марковских моделей массового обслуживания

1. *Процессы массового обслуживания* представляют собой случайные процессы с дискретными состояниями. Переход из одного возможного состояния в другое происходит скачком в момент, когда реализуется какое-то случайное событие (поступление новой заявки, начало или окончание обслуживания, уход заявки из очереди и т.п.), вызывающее такой переход.

2. Для процессов массового обслуживания с простейшим входным потоком и экспоненциальным законом распределения времени обслуживания характерно отсутствие последействия. Таким образом, будущее развитие рассматриваемых процессов зависит лишь от их текущих состояний и не зависит от того, как происходило их развитие в прошлом. А это означает, что процессы массового обслуживания с простейшим входным потоком заявок и экспоненциальным законом распределения времени обслуживания являются марковскими процессами с дискретными состояниями.

3. Предположим, что в систему обслуживания с  $m$  идентичными параллельными каналами обслуживания поступает простейший входной поток. При наличии хотя бы одного свободного канала немедленно начинается обслуживание заявки, а если все каналы заняты, то заявка становится в очередь (в системах обслуживания с отказами заявка покидает систему; в

*системах обслуживания с ограниченной длиной очереди* заявка становится в очередь, если там есть свободное место, и покидает систему в противном случае).

Пусть  $S_i$  — возможное состояние рассматриваемой системы обслуживания, характеризуемое тем, что в ней занято ровно  $i$  каналов обслуживания,  $i = \overline{0, m}$ , а возможное состояние системы  $S_{m+r}$  характеризуется тем, что все  $m$  каналов обслуживания заняты и очередь состоит из  $r$  заявок, где  $r \geq 1$ . Если на длину очереди не накладывают ограничений, то  $r$  может быть сколь угодно большим и система может иметь счетное множество состояний. Системы обслуживания с отказами и с ограничениями на длину очереди могут иметь лишь конечные множества возможных состояний.

4. За бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$  система обслуживания с простейшим входным потоком заявок и экспоненциальным законом распределения времени обслуживания либо остается в прежнем состоянии ( $S_i$ ), либо переходит в соседнее ( $S_{i+1}$  или  $S_{i-1}$  при  $i \geq 1$ ,  $S_1$  при  $i = 0$ ).

Таким образом, в любой момент времени  $t$  система обслуживания с  $m$  идентичными параллельными каналами обслуживания находится в одном из своих возможных состояний  $\{S_i\}_{i=0}^n$ ,  $n \in N$  или  $n = \infty$ . При этом:

если  $i = \overline{0, m}$ , то занято  $i$  каналов и очереди нет;

если  $i = \overline{m+1, n}$ , то заняты все  $m$  каналов и в очереди находится  $(n - m)$  заявок;

если  $n = m$ , то рассматривают систему обслуживания с отказами;

если  $m < n < \infty$ , то рассматривают систему обслуживания с ограниченной длиной очереди;

если  $n = \infty$ , то рассматривают систему обслуживания с ожиданием без ограничений на длину очереди.

5. Пусть  $\{S_i\}_{i=0}^n$  — множество возможных состояний рассматриваемой системы обслуживания. Для  $i = \overline{0, n}$  введем случайное событие  $\alpha_i$ , заключающееся в том, что в момент

времени  $t \geq 0$  система находится в состоянии  $S_i$ , и обозначим *вероятность* его реализации через  $p_i(t)$ :  $p_i(t) \triangleq P[\alpha_i]$ . В любой момент времени исходная система может находиться лишь в одном из возможных состояний, поэтому  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  — полная группа событий и, как следствие,

$$\sum_{i=0}^n p_i(t) \equiv 1. \quad (6.16)$$

Одна из задач теории массового обслуживания сводится к определению вероятностей  $p_i(t)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , как функций времени.

6. Из приведенных выше рассуждений и определения 5.8 марковского процесса с дискретными состояниями следует, что рассматриваемые процессы массового обслуживания являются *процессами гибели — размножения*. К изложенному в 5.4 добавим следующее:

а) элемент размеченного графа состояний системы  $S$ , соответствующий возможному состоянию  $S_k$ , будем называть  $k$ -й **вершиной графа**; стрелки, указывающие возможные переходы системы  $S$  из состояния в состояние, с записанными *переходными вероятностями*, — **нагруженными дугами**, а переходные вероятности — **весами**;

б) при составлении *системы уравнений Колмогорова* можно использовать следующее правило: производная от вероятности пребывания системы в состоянии  $S_i$  в момент времени  $t$  равна сумме произведений весов дуг, инцидентных  $i$ -й вершине размеченного графа состояний, на *вероятности состояний*, к которым они направлены; при этом вес дуги берется со знаком „плюс“, если дуга направлена к  $i$ -й вершине, соответствующей состоянию  $S_i$ , и со знаком „минус“ в противном случае;

в) *плотности вероятностей переходов*  $\{\lambda_{ij}\}$ , а следовательно, и переходные вероятности могут зависеть от структуры системы, характеристик *входного потока* и параметров законов распределения *времени ожидания* и *времени обслуживания*.



**Пример 6.2.** Рассмотрим простейшую задачу теории массового обслуживания — задачу о функционировании одноканальной системы обслуживания с отказами, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$  (заявка, заставшая канал занятым, покидает систему), а время обслуживания заявки — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром  $\mu = \text{const}$ .

В данном случае система имеет лишь два возможных состояния:  $S_0$  — канал свободен;  $S_1$  — канал занят. Ее размеченный граф состояний изображен на рис. 6.2.

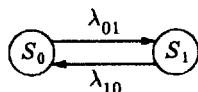


Рис. 6.2

Далее (см. 6.5) мы докажем, что  $\lambda_{01} \equiv \lambda$  и  $\lambda_{10} \equiv \mu$ . Если считать, что в начальный момент времени  $t = 0$  система находилась в состоянии  $S_0$ , то математическая модель изучаемого процесса массового обслуживания имеет следующий вид:

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p'_1(t) = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t), \\ p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0. \end{cases}$$

При этом, учитывая, что, согласно (6.16),

$$p_1(t) = 1 - p_0(t), \quad t \geq 0,$$

математическую модель можно упростить:

$$\begin{cases} p'_0(t) = -(\lambda + \mu)p_0(t) + \mu, \\ p_0(0) = 1. \end{cases}$$

Решив полученную задачу Коши, находим (рис. 6.3)

$$\begin{cases} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, & t \geq 0, \\ p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, & t \geq 0. \quad \# \end{cases}$$

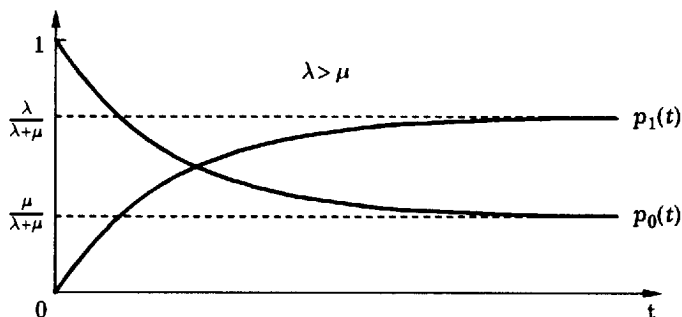


Рис. 6.3

Важнейшими характеристиками системы обслуживания с отказами являются:

а) **абсолютная пропускная способность** — среднее число заявок, которое может обслужить система в единицу времени;

б) **относительная пропускная способность** — отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступивших за это время заявок.

Нетрудно убедиться в том, что в примере 6.2 функцию  $p_0(t)$  можно интерпретировать как относительную пропускную способность системы. Действительно,  $p_0(t)$  есть вероятность того, что в момент  $t$  канал обслуживания свободен, т.е. что заявка, поступившая в момент  $t$ , будет обслужена. А это означает, что  $p_0(t)$  есть отношение числа обслуженных заявок к их общему числу, или относительная пропускная способность системы.

При **стационарном** (установившемся) **режиме функционирования** имеем

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае относительная пропускная способность системы обслуживания равна  $\mu/(\lambda + \mu)$ . Можно показать, что абсолютная пропускная способность равна

величине обратной сумме среднего времени ожидания заявки и среднего времени ее обслуживания:

$$\frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

**Пример 6.3.** Одноканальная система обслуживания представляет собой телефонную линию. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Интенсивность потока заявок 0,8 (вызовов в минуту). Средняя продолжительность разговора 1,5 минуты. Считая поток заявок простейшим, а время обслуживания распределенным по экспоненциальному закону, определим в стационарном режиме функционирования:

- 1) абсолютную пропускную способность канала связи  $Q$ ;
- 2) относительную пропускную способность канала связи  $q$ ;
- 3) вероятность отказа  $p_{\text{от}}$ .

Имеем

$$\lambda = 0,8, \quad \mu = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом,

$$Q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,8 \cdot 2/3}{0,8 + 2/3} \approx 0,3636.$$

Относительная пропускная способность канала связи

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{Q}{\lambda} \approx 0,4545$$

есть вероятность того, что заявка будет обслужена, не получив отказа. Поэтому

$$p_{\text{от}} = 1 - q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \approx 0,5454.$$

Отметим, что номинальная пропускная способность рассматриваемого канала связи  $Q_{\text{ном}}$ , являясь величиной обратной по

отношению к средней продолжительности времени разговора ( $Q_{\text{ном}} = \mu = 2/3 \approx 0,66$ ), почти вдвое больше его пропускной способности  $Q$ , определенной с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

### 6.5. Системы массового обслуживания с ожиданием

При рассмотрении примера 6.2 мы уже столкнулись с необходимостью определения *плотностей вероятностей переходов* при разметке *графа состояний* простейшей одноканальной системы обслуживания. В дальнейших рассуждениях в качестве объекта исследований будем использовать *систему обслуживания с ожиданием*, имеющую  $m$  идентичных каналов обслуживания и *простейший поток с интенсивностью  $\lambda$* , предполагая что *время обслуживания и время ожидания — случайные величины*, распределенные по экспоненциальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\nu$  соответственно.

Предположим, что в момент времени  $t$  рассматриваемая система находилась в состоянии  $S_i$ . Вероятность того, что за временной интервал бесконечно малой длительности  $\Delta t$  она из состояния  $S_i$  перейдет в „старшее“ состояние  $S_{i+1}$ , зависит лишь от потока заявок, каждая из которых либо поступает в канал обслуживания, либо становится в очередь. А так как поток заявок является простейшим с интенсивностью  $\lambda$ , то вероятность  $P_{i,i+1}(t; \Delta t)$  того, что за время  $\Delta t$  поступит одна заявка (вероятность перехода из состояния  $S_i$  в состояние  $S_{i+1}$ ), согласно определению 6.1, равна

$$P_{i,i+1}(t; \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Следовательно,

$$\lambda_{i,i+1}(t) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{i,i+1}(t; \Delta t)}{\Delta t} \equiv \lambda.$$

Переход из состояния  $S_i$  в „младшее“ состояние  $S_{i-1}$  зависит лишь от освобождения каналов обслуживания. Если  $\mu$  — *интенсивность обслуживания*, то *функция распределения* времени обслуживания определяется по формуле (6.13). Поэтому

$$P_{i,i-1}(t; \Delta t) = G(\Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

и, следовательно,

$$\lambda_{i,i-1}(t) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{i,i-1}(t; \Delta t)}{\Delta t} \equiv \mu.$$

Таким образом, при наличии лишь одного канала обслуживания плотность вероятности перехода в „младшее“ состояние равна  $\mu$ . Если занято  $i$  каналов и  $i \leq m$  ( $m$  — число каналов обслуживания), то в силу независимости их функционирования интенсивность обслуживания возрастает в  $i$  раз, т.е.  $\lambda_{i,i-1} = i\mu$ .

При возникновении очереди каждое состояние рассматриваемой системы обслуживания характеризуется занятостью каналов обслуживания. Поэтому интенсивность освобождения каналов становится постоянной и равной  $m\mu$ . Как только канал обслуживания освобождается, он немедленно приступает к обслуживанию следующей заявки из очереди и система переходит в „младшее“ состояние. Такой переход может быть вызван также уходом из очереди одной заявки, если время ожидания превышает допустимое.

*Закон распределения* времени ожидания определяется *интенсивностью  $\nu$  ухода из очереди* при наличии в ней одной заявки (см. равенства (6.14), (6.15)). В силу независимости поступления заявок (см. определение 6.1 для очереди длины  $r \geq 1$ ) интенсивность, с которой заявки отказываются от обслуживания и уходят из очереди, равна  $r\nu$ . Таким образом, плотность вероятности перехода системы из состояния  $S_{m+r}$  в состояние  $S_{m+r-1}$  равна сумме интенсивностей освобождения каналов обслуживания и отказа от обслуживания:

$$\lambda_{m+r,m+r-1} = m\mu + r\nu.$$

Проведенные рассуждения позволяют построить *размеченный граф состояний* рассматриваемой системы обслуживания (рис. 6.4).

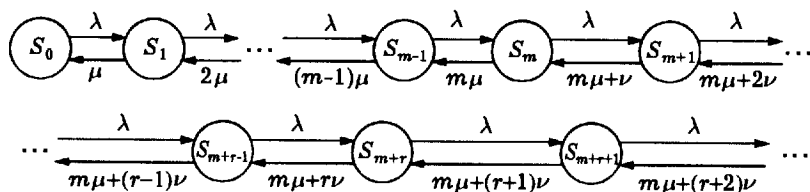


Рис. 6.4

Воспользовавшись этим графом и правилом построения *системы уравнений Колмогорова*, получаем

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p'_i(t) = \lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)p_i(t) + \\ \quad + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \quad i = \overline{1, m-1}, \\ p'_{m+r}(t) = \lambda p_{m+r-1}(t) - (\lambda + m\mu + r\nu)p_{m+r}(t) + \\ \quad + (m\mu + (r+1)\nu)p_{m+r+1}(t), \quad r \geq 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Если на длину очереди, т.е. на возможные значения  $r$ , не накладывают ограничений, то линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.17) является бесконечной.

Если в начальный момент времени  $t = 0$  рассматриваемая система обслуживания находилась в одном из своих возможных состояний  $S_j$ , то начальные условия для нее выглядят следующим образом:

$$p_k(0) = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \geq 0, k \neq j. \end{cases} \quad (6.18)$$

**Пример 6.4.** Построим *математическую модель* одноканальной ( $m = 1$ ) системы обслуживания с ожиданием, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda = \text{const}$ , если интенсивность обслуживания  $\mu = \text{const}$ , количество мест в очереди ограничено числом  $N < \infty$ , т.е. заявка,

поступившая в момент, когда в очереди уже находится  $N$  заявок, покидает систему.

В рассматриваемом случае система обслуживания имеет следующие возможные состояния:

$S_0$  — канал свободен;

$S_1$  — канал занят, но очереди нет;

$S_{1+j}$  — канал занят и в очереди находится  $j$  заявок,  $1 \leq j \leq N$ .

При этом единственной причиной отказа от обслуживания является отсутствие места в очереди, и, значит, интенсивность ухода из очереди равна  $\nu \equiv 0$ .

Размеченный граф состояний исходной системы обслуживания, изображенный на рис. 6.5, позволяет записать систему уравнений Колмогорова на интервале  $t > 0$ , если считать  $t = 0$  моментом начала функционирования системы

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p'_j(t) = \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + \mu) p_j(t) + \mu p_{j+1}(t), \quad j = \overline{1, N}, \\ p'_{N+1}(t) = \lambda p_N(t) - \mu p_{N+1}(t). \end{cases}$$

Для завершения построения математической модели достаточно задать начальные условия согласно (6.18).

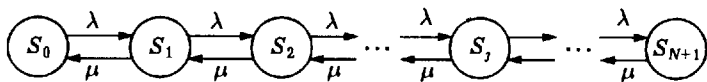


Рис. 6.5

## 6.6. Стационарный режим функционирования системы обслуживания (основные понятия и соотношения)

В теории массового обслуживания и ее приложениях основное внимание уделяется анализу стационарных режимов функционирования систем обслуживания. Математическая модель

стационарного режима функционирования любой системы обслуживания, в предположении его существования, формально является предельным ( $t \rightarrow \infty$ ) случаем ее общей математической модели. При стандартных предположениях относительно исходного *процесса массового обслуживания* эта модель представляет собой задачу Коши для соответствующей *системы уравнений Колмогорова* и является частным случаем математической модели *процессов гибели — размножения*.

Базируясь на результатах анализа стационарных режимов процессов гибели — размножения (см. 5.4), проведем анализ стационарного режима функционирования *системы обслуживания с ожиданием* как наиболее общей. Согласно (6.16), (6.17), для стационарного режима функционирования имеем

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu)p_i + (i+1)\mu p_{i+1} = 0, & i = \overline{1, m-1}, \\ \lambda p_{m+r-1} - (\lambda + m\mu + r\nu)p_{m+r} + \\ \quad + (m\mu + (r+1)\nu)p_{m+r+1} = 0, & r \geq 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \end{cases} \quad (6.19)$$

В стационарном режиме функционирования изучаемая система также меняет свое состояние случайным образом, но *вероятности состояний* уже не зависят от текущего времени. Каждая из них, являясь постоянной величиной, характеризует относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Из первого уравнения системы (6.19) находим

$$p_1 = \alpha p_0,$$

где величина

$$\alpha \triangleq \frac{\lambda}{\mu} \quad (6.20)$$

определяет среднее число *требований*, поступающих в систему обслуживания за среднее время обслуживания одной *заявки*,



так как *интенсивность  $\lambda$  простейшего потока* определяет среднее число заявок, поступающих в систему обслуживания в единицу времени, а величина  $1/\mu$ , обратная *интенсивности обслуживания  $\mu$* , численно равна среднему времени обслуживания одной заявки. Эту величину называют **приведенной плотностью потока заявок**.

Последовательно разрешив каждое из уравнений системы (6.19) относительно  $p_{i+1}$  и подставив в полученные равенства выражения  $p_i = p_i(p_0)$  и  $p_{i-1} = p_{i-1}(p_0)$ , находим

$$p_i = \frac{\alpha^i}{i!} p_0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (6.21)$$

Точно так же

$$p_{m+r} = \frac{\alpha^m}{m!} \cdot \frac{\alpha^r}{\prod_{k=1}^r (m+k\beta)} p_0 = \frac{\alpha^r}{\prod_{k=1}^r (m+k\beta)} p_m, \quad r \geq 1, \quad (6.22)$$

где величину

$$\beta \triangleq \frac{\nu}{\mu}, \quad (6.23)$$

равную отношению среднего времени обслуживания одной заявки ( $1/\mu$ ) к среднему времени ожидания, называют **приведенной плотностью потока ухода заявок из очереди**. Подставив (6.21), (6.22) в последнее уравнение системы (6.19), находим

$$p_0 = \left( \sum_{i=0}^m \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \alpha^r}{\prod_{k=1}^r (m+k\beta)} \right)^{-1}. \quad (6.24)$$

Среднюю длину очереди  $\bar{r}$  определяют как *математическое ожидание* числа заявок, находящихся в очереди. Из (6.22), (6.24) находим

$$\bar{r} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{m+r} = \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \alpha^r}{\prod_{k=1}^r (m+k\beta)} p_0. \quad (6.25)$$

А так как некоторые требования, не дождавшись обслуживания, уходят из очереди с интенсивностью  $\nu$ , то без обслуживания систему покидает в среднем  $\nu\bar{r}$  заявок в единицу времени. Значит, из  $\lambda$  поступивших заявок будет обслужено лишь  $(\lambda - \nu\bar{r})$ . Можно найти относительную пропускную способность системы

$$q \triangleq \frac{\lambda - \nu\bar{r}}{\lambda} = 1 - \frac{\nu\bar{r}}{\lambda} \quad (6.26)$$

и среднее число занятых каналов обслуживания, которое с учетом (6.20) и (6.23) можно записать в виде

$$\bar{m} \triangleq \frac{\lambda - \nu\bar{r}}{\mu} = \alpha - \beta\bar{r}. \quad (6.27)$$

Величина  $q$  определяемая равенством (6.26), характеризует вероятность того, что заявка, поступившая в систему обслуживания, будет обслужена. При отсутствии очереди  $\bar{r} = 0$  и  $q = 1$ , т.е. все заявки обслуживаются.

Величина  $\bar{m}$ , определяемая равенством (6.27), есть математическое ожидание числа занятых каналов обслуживания. Воспользовавшись тождеством (6.16) при  $n = \infty$  и тем обстоятельством, что в состояниях  $\{S_{m+r}\}_{r \geq 0}$  все каналы обслуживания заняты, находим

$$\bar{m} = \sum_{i=0}^{m-1} i p_i + \sum_{r=0}^{\infty} m p_{m+r} = \sum_{i=0}^{m-1} i p_i + m \left( 1 - \sum_{i=0}^{m-1} i p_i \right),$$

или

$$\bar{m} = m - m p_0 - \sum_{i=0}^{m-1} (m-i) p_i, \quad (6.28)$$

где  $m$  — число одинаковых параллельных каналов обслуживания в исходной системе, а вероятности  $p_k$ ,  $k = \overline{0, m-1}$ , находят по формулам (6.21), (6.24).

Значение  $\bar{m}$ , определяемое равенством (6.28), вычислить много проще, чем значение  $\bar{r}$ , определяемое формулой (6.25).

Поэтому, учитывая (6.26), (6.27), находим

$$\begin{cases} \bar{r} = \frac{\alpha - \bar{m}}{\beta} = \frac{\lambda - \mu \bar{m}}{\nu}, \\ q = 1 - \frac{\nu}{\lambda} \cdot \frac{\lambda - \mu \bar{m}}{\nu} = \frac{\mu}{\lambda} \bar{m} = \frac{\bar{m}}{\alpha}. \end{cases} \quad (6.29)$$

Отметим, что, согласно (6.29), *относительная пропускная способность*  $q$  системы обслуживания равна отношению среднего числа занятых каналов к приведенной плотности потока заявок.

## 6.7. Стационарные режимы функционирования некоторых вариантов систем обслуживания

Из результатов достаточно общего характера (см. 6.6) можно сделать весьма интересные для практических приложений выводы. Исследуем *стационарные режимы функционирования* некоторых вариантов *систем обслуживания* при сделанных выше (см. 6.2–6.4) предположениях относительно *входного потока*, структуры системы и законов распределения *времени обслуживания* и *времени ожидания*. Другие варианты систем обслуживания анализируются аналогично, а результаты анализа подробно описаны в специальной литературе\*.

**Чистые системы обслуживания с ожиданием.** *Чистой системой обслуживания с ожиданием* называют такую систему, в которой заявки не покидают очереди. Отметим особенности таких систем.

1. Эти системы имеют неограниченное время ожидания.

2. *Интенсивность ухода* заявок из очереди нулевая:  $\nu = 0$ , и, согласно (6.23),  $\beta = 0$ . Из (6.24) следует, что

$$p_0 = \left( \sum_{i=0}^m \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha^r}{m^r} \right)^{-1}. \quad (6.30)$$

\*См.: Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.

3. Если приведенная плотность потока заявок  $\alpha$  не меньше числа каналов обслуживания  $m$  ( $\alpha \geq m$ ), то ряд с общим членом  $(\alpha/m)^r$  будет расходящимся. Значит, согласно (6.30),  $p_0 = 0$ , а из (6.21), (6.22) получаем, что  $p_k \equiv 0$ ,  $k \geq 0$ , и тождество (6.16) нарушается, т.е. стационарного режима нет.

В рассматриваемом случае среднее число требований, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки, не меньше числа каналов обслуживания. Поэтому длина очереди неограниченно возрастает.

4. Если приведенная плотность потока заявок  $\alpha$  меньше числа каналов обслуживания  $m$  ( $\alpha < m$ ), то ряд в (6.30) с общим членом  $(\alpha/m)^r$  сходится, его сумму легко найти (это геометрическая прогрессия) и равенство (6.30) равносильно следующему:

$$p_0 = \left( \sum_{i=0}^m \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{m+1}}{m!(m-\alpha)} \right)^{-1}. \quad (6.31)$$

Средняя длина очереди  $\bar{r}$  может быть найдена из (6.25) при  $\beta = 0$ :

$$\bar{r} = \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} r \left( \frac{\alpha}{m} \right)^r p_0 = \frac{\alpha^m}{m!} \cdot \frac{\alpha}{m(1 - \alpha/m)^2} p_0. \quad (6.32)$$

**Пример 6.5.** На железнодорожную сортировочную горку прибывают составы с интенсивностью 2 состава в час. Среднее время обработки состава равно 0,4 часа. Составы, прибывшие в момент, когда сортировочная горка занята, становятся в очередь в парке ожидания с тремя путями, каждый из которых предназначен для одного состава. Если все пути в парке ожидания заняты, то прибывший состав ожидает свою очередь на внешней ветке. При отмеченных выше предположениях необходимо найти:

- 1) среднее число составов, ожидающих обработки;
- 2) среднее время пребывания состава в парке ожидания;

- 3) среднее время пребывания состава на внешней ветке;
- 4) среднее время пребывания состава на сортировочной горке, включая время ожидания и время обслуживания;
- 5) *вероятность* того, что прибывший состав займет место на внешней ветке.

Имеем интенсивность входного потока  $\lambda = 2$ , интенсивность обслуживания  $\mu = 1/0,4 = 2,5$ , приведенную плотность потока заявок  $\alpha = \lambda/\mu = 0,8$ . В системе один канал обслуживания (сортировочная горка), поэтому  $m = 1$ . А так как  $\alpha = 0,8 < 1 = m$ , то система справляется с обслуживанием входного потока и, согласно (6.31) при  $m = 1$ ,  $p_0 = 1 - \alpha$ . По формуле (6.32) вычисляем среднюю длину очереди (в составах):

$$\bar{r} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{0,8^2}{1 - 0,8} = 3,2.$$

Вероятность того, что прибывший состав займет место на внешней ветке, находим из (6.22) при  $m = 1$ ,  $p_0 = 1 - \alpha$  и  $\beta = 0$ , так как имеем дело с чистой системой обслуживания с ожиданием, для которой  $\nu = 0$  и, согласно (6.23),  $\beta = 0$ . Искомая вероятность равна вероятности того, что длина очереди будет больше трех:

$$P_{bb} = \sum_{k=4}^{\infty} p_k = \sum_{r=3}^{\infty} p_{1+r} = \sum_{r=3}^{\infty} \alpha^{r+1} (1 - \alpha) = \alpha^4 = 0,4096.$$

Среднее время ожидания на внешней ветке (в часах) равно

$$\begin{aligned} \bar{t}_{bb} &= \frac{1}{\mu} p_4 + \frac{2}{\mu} p_5 + \frac{3}{\mu} p_6 + \dots = \sum_{r=3}^{\infty} \frac{(r+1) - 3}{\mu} p_{1+r} = \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{r=3}^{\infty} (r-2) \alpha^{r+1} (1 - \alpha) = \frac{\alpha^4 (1 - \alpha)}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha^{k-1} = \\ &= \frac{\alpha^4}{\mu (1 - \alpha)} = 0,8192. \end{aligned}$$

Среднее время ожидания (в часах) в парке с тремя путями, на каждом из которых может находиться лишь один состав, равно

$$\begin{aligned}\bar{t}_{no} &= \frac{1}{\mu}p_1 + \frac{2}{\mu}p_2 + \frac{3}{\mu}\sum_{k=3}^{\infty}p_k = \frac{1}{\mu}\left(\alpha p_0 + 2\alpha^2 p_0 + 3\sum_{k=3}^{\infty}\alpha^k p_0\right) = \\ &= \frac{1-\alpha}{\mu}\left(\alpha + 2\alpha^2 + 3\frac{\alpha^3}{1-\alpha}\right) = \frac{\alpha(1-\alpha^3)}{\mu(1-\alpha)} = 0,7808.\end{aligned}$$

Таким образом, среднее время ожидания обслуживания в рассматриваемой системе ( в часах) равно

$$\bar{t}_{oo} = \bar{t}_{no} + \bar{t}_{bb} = 1,6,$$

а среднее время пребывания состава на сортировочной горке составляет

$$\bar{t} = \bar{t}_{oo} + \frac{1}{\mu} = 2. \quad \#$$

**Системы обслуживания с отказами.** Эти системы имеют следующие особенности.

1. Заявка, поступающая в такую систему в момент, когда все каналы обслуживания заняты, покидает систему. Это означает, что в рассматриваемом случае очередь отсутствует и система имеет конечное множество состояний  $\{S_k\}_{k=0}^m$ , где  $m$  — число каналов обслуживания.

2. В соответствии с (6.16)–(6.18) математическая модель системы обслуживания с отказами имеет следующий вид:

$$\begin{cases} p'_i(t) = \lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), & t > 0, \quad i = \overline{0, m}, \\ p_{-1}(t) \equiv 0, \quad p_{m+1}(t) \equiv 0, \\ \sum_{i=0}^m p_i(t) = 1, & t \geq 0, \\ p_i(0) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{cases}$$

3. При изучении стационарных режимов функционирования систем обслуживания с отказами можно использовать результаты из 6.6, учитывая, что в данном случае интенсивность ухода из очереди равна  $\nu = \infty$ . Согласно (6.23), из  $\nu = \infty$  следует  $\beta = \infty$ , поэтому из (6.21), (6.24) получаем

$$p_0 = \left( \sum_{k=0}^m \frac{\alpha^k}{k!} \right)^{-1}, \quad p_i = \frac{\alpha^i}{i!} p_0, \quad i = \overline{1, m}.$$

При этом, полагая

$$P(i; \alpha) \triangleq \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha}, \quad i = \overline{0, m}, \quad R(m; \alpha) \triangleq \sum_{i=0}^m P(i; \alpha), \quad (6.33)$$

приходим к формулам

$$p_i = \frac{R(i; \alpha) - R(i-1; \alpha)}{R(m; \alpha)}, \quad i = \overline{0, m}. \quad (6.34)$$

Формулы (6.33), (6.34), известные как **формулы Эрланга**, названы по имени датского инженера А.К. Эрланга, который в 20-х гг. XX в. впервые исследовал систему обслуживания с отказами применительно к телефонной связи.

4. Формулами Эрланга (6.33), (6.34) удобно пользоваться при больших значениях  $i$ , так как в этом случае

$$R(i; \alpha) = \sum_{k=0}^i \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{i + 0,5 - \alpha}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

где  $\Phi(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$  — *функция Лапласа*.

5. Полагая  $i = m$  в формулах (6.33), (6.34) (все каналы заняты), находим вероятность отказа

$$p_{\text{отк}} = p_m = 1 - \frac{R(m-1; \alpha)}{R(m; \alpha)}. \quad (6.35)$$

Все заявки, не получившие отказа, должны быть обслужены. Поэтому вероятность того, что заявка, поступившая в систему, будет обслужена, есть не что иное как *относительная пропускная способность*  $q$  изучаемой системы. Итак,

$$q = 1 - p_{\text{отк}} = \frac{R(m-1; \alpha)}{R(m; \alpha)}. \quad (6.36)$$

6. Согласно определению *математического ожидания* для *дискретной случайной величины*, среднее число занятых каналов в исходной системе обслуживания равно

$$K_{\text{ср}} = \sum_{k=0}^m k p_k = \sum_{k=0}^m k \frac{R(k; \alpha) - R(k-1; \alpha)}{R(m; \alpha)}.$$

В вычислительном аспекте величину  $K_{\text{ср}}$  удобнее определять как отношение абсолютной производительности системы (среднее число заявок, обслуженных в единицу времени) к *интенсивности обслуживания*  $\mu$  (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени одним каналом):

$$K_{\text{ср}} = \frac{\lambda(1 - p_{\text{отк}})}{\mu} = \alpha q = \alpha \frac{R(m-1; \alpha)}{R(m; \alpha)}. \quad (6.37)$$

**Пример 6.6.** Автоматическая телефонная станция обеспечивает не более 120 переговоров одновременно. Средняя продолжительность разговора 60 секунд, а вызовы поступают в среднем через 0,5 секунды. Рассматривая такую станцию как многоканальную систему обслуживания с отказами и *простейшим входным потоком*, определим:

- 1) среднее число занятых каналов  $K_{\text{ср}}$ ;
- 2) относительную пропускную способность  $q$ ;
- 3) среднее время  $t_{\text{ср}}$  пребывания вызова на станции с учетом того, что разговор может и не состояться.



Рассматриваемая система представляет собой систему обслуживания с отказами, находящуюся в стационарном режиме функционирования. Она обладает следующими характеристиками: число каналов обслуживания  $m = 120$  велико; интенсивность входного потока  $\lambda = 1/0,5 = 2$ ; интенсивность обслуживания  $\mu = 1/60$ ; приведенная плотность потока заявок  $\alpha = \lambda/\mu = 120$ .

Учитывая (6.37) и используя таблицы функции Лапласа [XVI], получаем

$$K_{\text{ср}} = 120 \frac{R(119; 120)}{R(120; 120)} \approx 112,$$

так как

$$\begin{aligned} R(119; 120) &\approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{119 + 0,5 - 120}{\sqrt{120}}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} + \Phi(-0,046) = 0,5 - \Phi(0,046) \approx 0,482, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(120; 120) &\approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{120 + 0,5 - 120}{\sqrt{120}}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} + \Phi(0,046) \approx 0,518. \end{aligned}$$

Далее, согласно (6.37), находим

$$q = \frac{K_{\text{ср}}}{\alpha} \approx 0,931.$$

А так как  $\lambda$  есть интенсивность входного потока (число заявок в единицу времени), то  $\lambda t_{\text{ср}} = K_{\text{ср}}$  и

$$t_{\text{ср}} = \frac{K_{\text{ср}}}{\lambda} \approx 112/2 = 61.$$

**Системы обслуживания с ограниченной длиной очереди.** Отметим особенности стационарных режимов функционирования таких систем.

1. Для  $m$ -канальной системы обслуживания, длина очереди которой ограничена числом  $N < \infty$ , интенсивность  $\nu$  ухода заявок из очереди зависит от ее возможного состояния  $S_i$ :

$$\nu = \begin{cases} 0, & 0 \leq i \leq m + N; \\ \infty, & i > m + N. \end{cases} \quad (6.38)$$

При стандартных предположениях относительно входного потока и законов распределений времени обслуживания и времени ожидания (см. 6.2, 6.3) математическая модель исходной системы в соответствии с (6.16)–(6.18) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} p'_i(t) = \lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), & i = \overline{0, m-1}, \\ p_{-1}(t) = 0, & t > 0, \\ p'_{m+r}(t) = \lambda p_{m+r-1}(t) - (\lambda + m\mu)p_{m+r}(t) + \\ \quad + m\mu p_{m+r+1}(t), & r = \overline{0, N-1}, t > 0, \\ \sum_{k=0}^{m+N} p_k(t) \equiv 1, \\ p_k(0) = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \end{cases}$$

где  $k = \overline{1, m+N}$  и  $j$  — некоторый фиксированный элемент множества  $\{0, 1, \dots, m+N\}$ .

2. При изучении стационарных режимов функционирования систем обслуживания с ограниченной длиной очереди можно использовать результаты из 6.6, учитывая, что в данном случае множество возможных состояний системы  $\{S_k\}_{k=0}^{m+N}$  конечно, а интенсивность ухода заявок из системы нулевая ( $\nu = 0$ ) и,

согласно (6.23),  $\beta = 0$ . Из (6.21), (6.22), (6.24) с учетом (6.38), (6.23) находим вероятности состояний:

$$\begin{cases} p_0 = \left( \sum_{i=0}^m \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^N \left( \frac{\alpha}{m} \right)^r \right)^{-1}, \\ p_i = \frac{\alpha^i}{i!} p_0, \quad i = \overline{1, m}, \\ p_{m+r} = \frac{\alpha^m}{m!} \left( \frac{\alpha}{m} \right)^r p_0, \quad r = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Вероятность отказа равна  $p_{\text{отк}} = p_{m+N}$ , а относительную пропускную способность системы вычисляем через вероятность отказа:  $q = 1 - p_{\text{отк}}$ .

**Пример 6.7.** Два рабочих обслуживают шесть однотипных станков. Остановка каждого работающего станка происходит в среднем каждые полчаса, а процесс наладки занимает в среднем 10 минут. Необходимо определить:

- 1) среднюю занятость рабочих;
- 2) среднее количество неисправных станков;
- 3) *абсолютную пропускную способность* рабочей бригады.

В данном случае интенсивность входного потока  $\lambda = 1/0,5 = 2$ , интенсивность обслуживания  $\mu = 6$ , число каналов обслуживания  $m = 2$  (два рабочих с одинаковой квалификацией). Возможны следующие состояния системы:

$S_0$  — все станки работают и рабочие свободны;

$S_1$  — один станок остановился и один рабочий занят, а второй свободен;

$S_2$  — два станка остановились и оба рабочих заняты;

$S_{2+r}$  — остановились  $2 + r$  станков,  $r = \overline{1, 4}$ , оба рабочих заняты и  $r$  станков ждут обслуживания.

На рис. 6.6 изображен *размеченный граф состояний* рассматриваемой системы обслуживания — типичного представителя так называемых *замкнутых систем обслуживания*. В

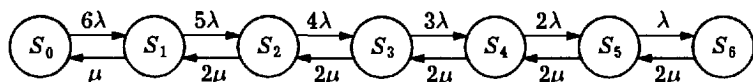


Рис. 6.6

этих системах интенсивность потока заявок зависит от состояния самой системы обслуживания. Данная специфика не позволяет непосредственно использовать результаты, приведенные выше.

Для построения системы линейных алгебраических уравнений относительно стационарных вероятностей  $p_k$  ( $k = \overline{0, 6}$ ) пребывания системы в возможных состояниях  $S_k$  воспользуемся размеченным графом состояний и результатами анализа стационарных режимов *процессов гибели — размножения* (см. 5.4). На основании этих результатов получим

$$\begin{cases} -6\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ 6\lambda p_0 - (5\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2 = 0, \\ 5\lambda p_1 - (4\lambda + 2\mu)p_2 + 2\mu p_3 = 0, \\ 4\lambda p_2 - (3\lambda + 2\mu)p_3 + 2\mu p_4 = 0, \\ 3\lambda p_3 - (2\lambda + 2\mu)p_4 + 2\mu p_5 = 0, \\ 2\lambda p_4 - (\lambda + 2\mu)p_5 + 2\mu p_6 = 0, \\ \lambda p_5 - 2\mu p_6 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений при  $\lambda = 2$  и  $\mu = 6$ , находим

$$p_1 = 2p_0, \quad p_2 = \frac{5}{3}p_0, \quad p_3 = \frac{10}{9}p_0, \quad p_4 = \frac{5}{9}p_0, \quad p_5 = \frac{5}{27}p_0, \quad p_6 = \frac{5}{162}p_0.$$

Тождество (6.16) принимает вид

$$\left(1 + 2 + \frac{5}{3} + \frac{10}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{162}\right)p_0 = 1.$$

Отсюда находим вероятность пребывания исходной системы в состоянии  $S_0$ :

$$p_0 = \frac{162}{1061}.$$

Среднее число неисправных станков есть математическое ожидание числа станков, связанных с процессом обслуживания (ремонтируются или ждут обслуживания):

$$\omega_{\text{ср}} = \sum_{k=1}^6 k p_k = \left( 1 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{10}{9} + 4 \cdot \frac{5}{9} + 5 \cdot \frac{5}{27} + 6 \cdot \frac{5}{162} \right) p_0 = 12 p_0 \approx 1,832.$$

Среднюю занятость рабочих  $\rho$  находим как математическое ожидание числа налаживаемых станков:

$$\begin{aligned} \rho &= 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 2 \cdot p_5 + 2 \cdot p_6 = \\ &= p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) = 2(1 - 2p_0) \approx 1,389. \end{aligned}$$

При интенсивности обслуживания  $\mu = 6$  станков в час абсолютная пропускная способность рабочей бригады равна  $\mu\rho = 8,336$ .

## Вопросы и задачи

**6.1.** Сформулируйте определение простейшего входного потока. Какие вероятностные характеристики простейшего потока Вы знаете?

**6.2.** Какую простейшую процедуру проверки статистической гипотезы о соответствии реального входного потока простейшему потоку Вы можете предложить?

**6.3.** Какие законы распределения обычно используют в теории массового обслуживания при анализе времени обслуживания и времени ожидания? Каким образом интерпретируют параметры этих законов?

**6.4.** При каких допущениях процессы массового обслуживания являются марковскими случайными процессами?

**6.5.** Докажите тождественность правых частей равенств (6.25), (6.29) для определения среднего числа занятых каналов обслуживания.

**6.6.** Что можно сказать о существовании стационарных режимов функционирования чистых систем обслуживания с ожиданием?

**6.7.** Чем чистая система с ожиданием отличается от обычной системы обслуживания с ожиданием?

**6.8.** В чем заключается принципиальное отличие замкнутых систем обслуживания от следующих систем: а) чистой системы с ожиданием; б) системы с отказами; в) системы с ограниченной длиной очереди?

**6.9.** Выясните, можно ли использовать расчетные формулы (6.20)–(6.24) для определения предельных вероятностей следующих типов систем обслуживания: а) чистых систем с ожиданием; б) систем с отказами; в) систем с ограниченной длиной очереди; г) замкнутых систем. Дайте обоснование ответа.

**6.10.** В систему обслуживания поступает в среднем две заявки в час. Считая входной поток простейшим, определите: а) среднее число заявок, поступающих в систему обслуживания за 8 часов; б) вероятность того, что в течение одного часа поступит по крайней мере одна заявка.

О т в е т: а) 16; б) 0,865.

**6.11.** В ресторан прибывает в среднем 20 посетителей в час. Считая поток посетителей простейшим и зная, что ресторан открывается в 11.00, определите:

а) вероятность того, что в 11.12 в ресторан придет 20 посетителей при условии, что в 11.07 их было 18;

б) вероятность того, что между 11.28 и 11.30 в ресторане окажется новый посетитель, если известно, что предшествующий посетитель прибыл в 11.25.

О т в е т: а) 0,262; б) 0,487.

**6.12.** Система обслуживания представляет собой автоматическую телефонную станцию, которая может обеспечить не более трех переговоров одновременно. Заявка-вызов, поступившая в тот момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему. В среднем на станцию поступает 0,8 вызовов в минуту, а средняя продолжительность одних переговоров равна 1,5 минуты. Для стационарного режима функционирования системы необходимо определить: а) вероятности состояний системы; б) абсолютную и относительную пропускные способности; в) вероятность отказа; г) среднее число занятых каналов.

Ответ: а)  $p_0 \approx 0,312$ ,  $p_1 \approx 0,374$ ,  $p_2 \approx 0,224$ ,  $p_3 \approx 0,090$ ; б) 0,728, 0,910; в) 0,090; г) 1,09.

**6.13.** Автозаправочная станция имеет одну бензоколонку с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более трех автомашин одновременно. Если в очереди на заправку уже находятся три автомашины, то очередная автомашина, прибывшая на станцию, проезжает мимо. В среднем на заправку прибывает одна автомашина в минуту, а сам процесс заправки в среднем длится 1,25 минуты. Для стационарного режима функционирования автозаправочной станции необходимо определить: а) вероятность отказа; б) относительную и абсолютную пропускные способности; в) среднее число автомашин в очереди на заправку; г) среднее число автомашин, находящихся на автозаправочной станции; д) среднее время ожидания в очереди; е) среднее время пребывания автомобиля на автозаправочной станции.

Ответ: а) 0,297; б) 0,703, 0,703; в) 1,56; г) 2,44; д) 1,56; е) 2,44.

**6.14.** Найдите решение задачи 6.13, если в ее условия внесены следующие изменения: автозаправочная станция располагает двумя бензоколонками; в среднем на автозаправочную

станцию прибывает две автомашины в минуту; в среднем время обслуживания — две автомашины в минуту.

О т в е т: а) 0,502; б) 0,488, 0,496; в) 2,18; г) 4,14; д) 1,09; е) 2,07.

**6.15.** Рабочий обслуживает три однотипных станка. Каждый станок останавливается в среднем два раза в час, а процедура наладки занимает в среднем 10 минут. В стационарном режиме функционирования системы нужно определить: а) вероятность занятости рабочего; б) абсолютную пропускную способность рабочего; в) среднее количество неисправных станков; г) среднюю относительную потерю производительности обслуживаемых станков за счет неисправностей.

О т в е т: а) 0,654; б) 3,94; в) 1,04; г) 0,347.



## 7. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОСТОЯНИЯ

Решение практически важных задач, будь то расчет подъемной силы крыла самолета или прогнозирование динамики распространения инфекции в определенном регионе, предполагает наличие *математических моделей* изучаемых явлений, позволяющих применять количественные методы исследования. Напомним, что под математической моделью понимают приближенное описание какого-либо класса явлений реального мира, выраженное с помощью математической символики. На данном этапе мы не будем заниматься разработкой математических моделей конкретных явлений, тем более, что, согласно высказываниям многих видных специалистов в области математического моделирования, искусство построения математической модели есть именно искусство и опыт в этом деле приобретается постепенно.

В данной главе рассматриваются математические модели, представляющие собой системы обыкновенных *стохастических дифференциальных уравнений*, дополненные соответствующими начальными условиями. Эти модели описывают обширный класс явлений реального мира.

### 7.1. Случайные возмущения в динамической системе

Рассмотрим *математическую модель*, описывающую эволюцию изучаемого объекта на отрезке времени  $T = [0, t_*]$ :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = A(X, \alpha, t), & 0 < t \leq t_*, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (7.1)$$

где  $X(t)$  —  $n$ -мерная вектор-функция, которую называют **вектором состояния**;  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  — вектор параметров, не зависящий от времени  $t$ ;  $A$  —  $n$ -мерная векторная функция  $n + m + 1$  переменного, удовлетворяющая условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши (7.1);  $X_0$  — начальное значение вектора состояния  $X(t)$ . Из (7.1) следует, что скорость изменения состояния в любой момент времени  $t > 0$  определена его текущим состоянием в этот момент времени и вектором параметров  $\alpha$ . Математическая модель (7.1), которую называют **детерминированной** (неслучайной) **моделью состояния**, является достаточно общей и может быть использована для описания обширного класса динамических систем. Поясним сказанное примером.

**Пример 7.1.** Рассмотрим математическую модель простейшей следящей системы:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda(x(t) - x_*(t)), & 0 < t \leq t_*, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (7.2)$$

где  $x_0 \in \mathbb{R}$  — начальное значение состояния системы  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  — параметр системы;  $x_*(t)$  — скалярная функция времени, заданная на отрезке  $T = [0, t_*]$ .

Система функционирует таким образом, что отклонение от заданного состояния  $x_*(t)$  уменьшается со скоростью, пропорциональной текущей величине отклонения. Причем реакция системы на изменение состояния тем быстрее, чем больше значение параметра  $\lambda > 0$ .

Математическая модель позволяет заранее рассчитывать изменение состояния изучаемой системы на отрезке  $T$  путем решения задачи Коши (7.2). Если же требуемые значения состояния  $x_*(t)$  в моменты времени  $t \in T$  заранее неизвестны, например, вследствие их зависимости от множества непрогнозируемых факторов, то  $x_*(t)$  следует рассматривать как **случайный процесс**  $x_*(t, \omega)$ ;  $t \in T$ , **математическое ожидание**

которого  $m(t) \triangleq M[x_*(t, \omega)]$ , как правило, известно. В этом случае случайный процесс  $x_*(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} x_*(t, \omega) \equiv m(t) + \xi_*(t, \omega), & t \in T, \\ M[\xi_*(t, \omega)] = 0, & t \in T, \end{cases}$$

а математическую модель (7.2) записать так:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda[x(t) - m(t)] + \xi(t, \omega), & 0 < t \leq t_*, \\ x(0) = x_0, & \xi(t, \omega) \triangleq \lambda \xi_*(t, \omega), \quad t \in T. \end{cases} \quad (7.3)$$

При этом состояние  $x(t)$  следящей системы уже не является *детерминированной функцией*, а представляет собой случайный процесс  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

Таким образом, математическая модель (7.3) может рассматриваться как результат случайных возмущений детерминированной модели (7.2). В этом случае невозможно заранее рассчитать изменения состояния следящей системы на  $T$ , а можно лишь анализировать вероятностные характеристики случайного процесса  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . #

Используя аналогию с рассмотренным примером, перейдем к анализу общего случая. Ограничимся математической моделью (7.1) и установим условия, которым должен удовлетворять процесс случайных возмущений.

В правую часть *нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)* (7.1) добавим  $n$ -мерный случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , который будем называть **процессом случайных возмущений**. При этом отметим, что в общем случае этот случайный процесс может зависеть и от текущего состояния, и от вектора параметров  $\alpha$ , т.е.  $\eta = \eta(X, \alpha, t, \omega)$  —  $n$ -мерная *случайная функция*. Но для упрощения дальнейших рассуждений будем считать, что процесс случайных возмущений является линейным относительно некоторого  $n$ -мерного

случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ :

$$\eta(X, \alpha, t, \omega) = B_*(X, \alpha, t)\xi(t, \omega), \quad t \in T = [0, t_*],$$

где  $B_*$  — *матричная функция*  $n + m + 1$  переменного типа  $n \times n$ . При добавлении  $\eta(X, \alpha, t, \omega)$  в правую часть нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, входящих в математическую модель (7.1), ее вектор состояния будет  $n$ -мерным случайным процессом  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Поэтому и начальное состояние в общем случае следует считать  $n$ -мерным *случайным вектором*  $X_0(\omega)$ . Если же по смыслу решаемой задачи начальное состояние изучаемой системы задано, т.е.  $X(0, \omega) \equiv X_0$ , то  $X(0, \omega)$  всегда можно рассматривать как  $n$ -мерный случайный вектор, который с вероятностью 1 принимает значение  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Таким образом, приходим к так называемой *стохастической модели состояния*

$$\begin{cases} \dot{X}(t, \omega) = A(X, \alpha, t) + B_*(X, \alpha, t)\xi(t, \omega), & 0 < t \leq t_*, \\ X(0, \omega) = X_0(\omega), \end{cases} \quad (7.4)$$

где  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, t_*]$  —  $n$ -мерный случайный процесс, без конкретизации свойств которого дальнейший анализ не представляется возможным.

Для процесса случайных возмущений естественно требовать выполнение следующих условий.

1. Не теряя общности дальнейших рассуждений, можно считать, что

$$M[\xi(t, \omega)] = 0, \quad t \in T.$$

Действительно, если  $m(t) = M[\xi(t, \omega)] \neq 0$  на  $T$ , то достаточно ввести *центрированный случайный процесс*

$$\overset{\circ}{\xi}(t, \omega) \triangleq \xi(t, \omega) - m(t), \quad t \in T,$$

с нулевым математическим ожиданием, а затем стохастическую модель состояния (7.4) преобразовать к виду

$$\begin{cases} \dot{X}(t, \omega) = A_*(X, \alpha, t) + B_*(X, \alpha, t) \overset{\circ}{\xi}(t, \omega), & 0 < t \leq t_*, \\ X(0, \omega) = X_0(\omega), \\ A_*(X, \alpha, t) \equiv A(X, \alpha, t) + B_*(X, \alpha, t)m(t). \end{cases}$$

2. Чтобы сохранить основное свойство исходной математической модели (7.1), состоящее в том, что скорость изменения состояния определяется текущим состоянием и не зависит от его предыстории, следует потребовать, чтобы любые два **сечения** процесса случайных возмущений были **независимы**, т.е. чтобы для любых различных  $t_1, t_2 \in T$  были **независимы случайные векторы**  $\xi(t_1, \omega)$  и  $\xi(t_2, \omega)$ .

3. Для сохранения непрерывности *производной случайного процесса*  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , следует потребовать непрерывности процесса случайных возмущений  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Это требование сводится к существованию ограниченной *дисперсии* (см. теорему 3.6). Таким образом, в предположении, что случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , центрирован, имеем

$$M[\xi^T(t, \omega)\xi(t, \omega)] < C < \infty, \quad t \in T.$$

Рассмотрим процесс случайных возмущений  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяющий требованиям 1–3, и попытаемся понять, что он из себя представляет. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема 7.1.** Пусть  $n$ -мерный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, t_*]$ , удовлетворяет условиям:

- 1)  $M[\xi(t, \omega)] = 0$ ,  $t \in T$ ;
- 2) для любых различных  $t_1, t_2 \in T$  сечения  $\xi(t_1, \omega)$  и  $\xi(t_2, \omega)$  являются независимыми случайными векторами;
- 3)  $M[\xi^T(t, \omega)\xi(t, \omega)] < C < \infty$ ,  $t \in T$ .

Тогда

$$M[\xi^T(t, \omega)\xi(t, \omega)] = 0, \quad t \in T.$$

◀ В соответствии с принятыми допущениями определен  $n$ -мерный случайный процесс (см. 3.4)

$$\varepsilon(t, \omega) \triangleq \int_0^t \xi(\tau, \omega) d\tau, \quad t \in T,$$

и с учетом условия 1 теоремы

$$\mathbf{M}[\varepsilon(t, \omega)] = \mathbf{M}\left[\int_0^t \xi(\tau, \omega) d\tau\right] = \int_0^t \mathbf{M}[\xi(\tau, \omega)] d\tau = \mathbf{0}, \quad t \in T.$$

Кроме того, из существования случайного процесса  $\varepsilon(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и условия 2 теоремы вытекает, что для любых  $t_i \in T$ ,  $i = \overline{0, N}$ , таких, что  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t \leq t_*$ , имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\varepsilon^T(t, \omega) \varepsilon(t, \omega)] &= \mathbf{M}\left[\left(\int_0^t \xi(t', \omega) dt'\right)^T \left(\int_0^t \xi(t'', \omega) dt''\right)\right] = \\ &= \mathbf{M}\left[\left(\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \xi(t_i, \omega) \Delta t_i\right)^T \left(\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} \xi(t_j, \omega) \Delta t_j\right)\right] = \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{M}[\xi^T(t_i, \omega) \xi(t_i, \omega)] (\Delta t_i)^2, \end{aligned}$$

где

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad d = \max_i \{\Delta t_i\}.$$

Пусть

$$\Delta t_i \leq \frac{Q}{N}, \quad Q = \text{const} > 0.$$

Тогда с учетом условия 3 теоремы имеем

$$\mathbf{M}[\varepsilon^T(t, \omega) \varepsilon(t, \omega)] < C \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta t_i)^2 \leq C \lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{Q^2}{N^2} = 0.$$

Таким образом, при  $t \in T$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\xi^T(t, \omega)\xi(t, \omega)] &= \mathbf{M}\left[\left(\frac{d\varepsilon(t, \omega)}{dt}\right)^T \frac{d\varepsilon(t, \omega)}{dt}\right] = \\ &= \mathbf{M}\left[\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t+h, \omega) - \varepsilon(t, \omega)}{h}\right)^T \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t+\Delta, \omega) - \varepsilon(t, \omega)}{\Delta}\right] \leq \\ &\leq \lim_{h, \Delta \rightarrow 0} \frac{1}{h\Delta} \left( \mathbf{M}[|\varepsilon^T(t+h, \omega)\varepsilon(t+\Delta, \omega)|] + \right. \\ &\quad + \mathbf{M}[|\varepsilon^T(t, \omega)\varepsilon(t+\Delta, \omega)|] + \mathbf{M}[|\varepsilon^T(t+h, \omega)\varepsilon(t, \omega)|] + \\ &\quad \left. + \mathbf{M}[\varepsilon^T(t, \omega)\varepsilon(t, \omega)] \right) = 0, \end{aligned}$$

так как в силу *неравенства Шварца*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\varepsilon^T(t_1, \omega)\varepsilon(t_2, \omega)] &\leq \\ &\leq \sqrt{\mathbf{M}[\varepsilon^T(t_1, \omega)\varepsilon(t_1, \omega)] \mathbf{M}[\varepsilon^T(t_2, \omega)\varepsilon(t_2, \omega)]} \equiv 0. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Следствие 7.1.** Если случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет условиям теоремы 7.1, то в смысле среднего квадратичного (см. 3.1)

$$\xi(t, \omega) = 0, \quad t \in T,$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{M}[\|\xi(t, \omega)\|^2] = 0, \quad t \in T.$$

**Следствие 7.2.** Если  $X(t)$  — решение задачи Коши (7.1), а  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — решение стохастической задачи Коши (7.4), в которой процесс случайных возмущений  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет условиям теоремы 7.1 и  $X_0(\omega) \equiv X_0$ , то в смысле среднего квадратичного

$$X(t, \omega) = X(t), \quad t \in T,$$

или, что то же самое,

$$M[\|X(t, \omega) - X(t)\|^2] = 0, \quad t \in T,$$

так как случайная величина с нулевой дисперсией является детерминированной [XVI].

**Следствие 7.3.** Не существует ненулевых случайных процессов с независимыми сечениями и ограниченной дисперсией.

Итак, стохастическая модель (7.4) не дает никакой новой информации по сравнению с исходной детерминированной моделью (7.1). Нетрудно догадаться, что этот результат является следствием слишком жестких требований, предъявляемых к процессу случайных возмущений. Проанализируем эти требования с точки зрения их возможного ослабления или устранения.

Первое требование не является принципиальным, что уже было отмечено, а второе отражает основной принцип построения математической модели, согласно которому скорость изменения состояния объекта определяется его текущим состоянием. Таким образом, мы можем отказаться лишь от третьего требования, предъявляемого к процессу случайных возмущений. Этот шаг является естественным, так как в силу независимости сечений случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , его ковариационная функция имеет следующий вид:

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = 2\pi\Gamma\delta(t_2 - t_1), \quad t_1, t_2 \in T, \quad (7.5)$$

где  $\delta(t)$  —  $\delta$ -функция Дирака, а  $\Gamma \in M_n(\mathbb{R})$  — постоянная матрица. Таким образом, случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , с независимыми сечениями является белым шумом. Его спектральная плотность

$$s_{\xi}(\nu) \equiv \Gamma$$

постоянна и не зависит от частоты  $\nu$ . Матрицу  $\Gamma$  называют **матрицей спектральных интенсивностей**.



Отказ от требования ограниченности дисперсии процесса случайных возмущений является основополагающим при построении стохастических моделей состояния. Действительно, при проведении *гармонического анализа* в детерминированной модели состояния (7.1) каждой компоненте  $x_k(t)$  вектора состояния  $X(t)$  соответствует вполне определенный ограниченный спектр частот. Пусть относительно процесса случайных возмущений  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , приняты самые общие допущения, но полоса спектра каждой его компоненты  $\xi_k(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , содержит весь спектр частот компоненты  $x_k(t)$  вектора состояния  $X(t)$ . В этом случае для каждого  $k = \overline{1, n}$  спектр случайного процесса  $\xi_k(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно считать постоянным в пределах ограниченного спектра  $k$ -й компоненты вектора состояния. А это означает, что для вектора состояния  $X(t)$  детерминированной модели состояния (7.1) процесс случайных возмущений — белый шум.

При проведении дальнейших рассуждений воспользуемся положительной определенностью и симметричностью матрицы  $\Gamma$  спектральных интенсивностей случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , обладающего нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией (7.5). Из теории матриц известно [IV], что существует квадратная невырожденная матрица  $\beta \in M_n(\mathbb{R})$ , такая, что

$$\Gamma = \beta \beta^T.$$

Введем в рассмотрение  $n$ -мерный случайный процесс

$$\varepsilon(t, \omega) \triangleq \beta^{-1} \xi(t, \omega), \quad t \in T,$$

который также является белым шумом. Действительно,

$$\mathbf{M}[\varepsilon(t, \omega)] = \beta^{-1} \mathbf{M}[\xi(t, \omega)] = \mathbf{0}, \quad t \in T,$$

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(t_1, t_2) &= \mathbf{M}[\beta^{-1} \xi(t_1, \omega) (\beta^{-1} \xi(t_2, \omega))^T] = \beta^{-1} K_\xi(t_1, t_2) (\beta^{-1})^T = \\ &= 2\pi \delta(t_2 - t_1) \beta^{-1} \Gamma (\beta^{-1})^T = 2\pi \delta(t_2 - t_1) I_n, \quad t_1, t_2 \in T. \end{aligned}$$

Полагая  $t_* = \infty$  (т.е.  $T = [0, \infty)$ ), заключаем, что случайный процесс  $\varepsilon(t, \omega)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , в классе обобщенных функций (см. пример 4.4) можно рассматривать как производную  $n$ -мерного винеровского процесса  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , с коэффициентом диффузии  $\sigma^2 = 1$ . Таким образом,

$$\xi(t, \omega) = \beta \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \quad t \in T = [0, \infty).$$

Полагая в (7.4), что

$$B(X, \alpha, t) = B_*(X, \alpha, t)\beta,$$

приходим к следующей стохастической модели состояния:

$$\begin{cases} \frac{dX(t, \omega)}{dt} = A(X, \alpha, t) + B(X, \alpha, t) \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \\ X(0, \omega) = X_0(\omega). \end{cases} \quad (7.6)$$

Выше доказано (см. пример 4.4), что винеровский процесс не является дифференцируемым в смысле сходимости в среднем квадратичном. Поэтому для корректности представления стохастической модели состояния (7.6) используем следующую форму записи:

$$\begin{cases} dX(t, \omega) = A(X, \alpha, t) dt + B(X, \alpha, t) dw(t, \omega), \\ X(0, \omega) = X_0(\omega), \end{cases} \quad (7.7)$$

поскольку винеровский процесс имеет непрерывные траектории в смысле среднего квадратичного\*.

Заметим, что при изложении элементов стохастического анализа мы не ввели понятия стохастического дифференциала и восполним этот пробел лишь в 7.3. А здесь будем считать, что дифференциал случайного процесса — главная линейная часть его приращения в смысле среднего квадратичного, и от дальнейших комментариев воздержимся.

\*См.: Вентцель А.Д., а также Пугачев В.С., Синицын И.Н.

Стохастические модели состояния (7.6), (7.7) представляют собой задачи Коши для *стохастических дифференциальных уравнений*, простейшими представителями которых являются *линейные стохастические дифференциальные уравнения*.

## 7.2. Линейные стохастические дифференциальные уравнения

Исследование нелинейных *стохастических моделей состояния* (7.6), (7.7) в общем случае связано со значительными трудностями принципиального характера. Однако оно существенно упрощается, если возможна линеаризация исходной *математической модели*, т.е. замена нелинейной стохастической модели состояния некоторым ее линейным приближением.

**Определение 7.1.** *Стохастической задачей Коши* (задачей Коши для системы *линейных стохастических дифференциальных уравнений*) называют систему уравнений

$$\begin{cases} dX(t, \omega) = a(\alpha, t)X(t, \omega) dt + b(\alpha, t) dw(t, \omega), \\ X(0, \omega) = X_0(\omega), \end{cases} \quad (7.8)$$

где  $a(\alpha, t)$  и  $b(\alpha, t)$  — известные *матричные функции* типа  $n \times n$ , зависящие от переменного  $t \in T = [0, \infty)$  и от  $m$ -мерного вектора  $\alpha$  параметров;  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $n$ -мерный *винеровский процесс*, выходящий из 0 и имеющий *коэффициент диффузии*  $\sigma^2 = 1$ ;  $X_0(\omega)$  —  $n$ -мерный *случайный вектор* с известным *законом распределения*, характеризующий начальное состояние неизвестного  $n$ -мерного случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

При дальнейших рассуждениях будем предполагать, что матричные функции  $a(\alpha, t)$  и  $b(\alpha, t)$  являются непрерывными в промежутке  $T = [0, \infty)$ .

Для любого фиксированного  $\omega \in \Omega$  стохастическая задача Коши (7.8) переходит в задачу Коши для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. А так как при

этом выполнены условия теоремы существования и единственности ее решения, то при любом фиксированном  $\omega \in \Omega$  задача Коши (7.8) однозначно определяет соответствующую *реализацию случайного процесса*  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

Пусть  $X(t)$  — фундаментальная матрица решений для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $x'(t) = a(\alpha, t)x(t)$ . Для любого фиксированного  $\omega \in \Omega$  решение задачи Коши (7.8) можно записать в следующем виде [VIII]:

$$X(t, \omega) = R(t, 0)X_0(\omega) + \int_0^t R(t, s)b(\alpha, s)dw(s, \omega), \quad t \geq 0, \quad (7.9)$$

где  $R(t, s) \triangleq X^{-1}(s)X(t)$  — нормированная фундаментальная матрица решений, или **резольвента**. Резольвента удовлетворяет матричному уравнению

$$R'_t(t, s) = a(\alpha, t)R(t, s)$$

и начальному условию

$$R(s, s) \equiv I_n.$$

При этом, если матричные функции  $a(\alpha, t)$  и  $\int_0^t a(\alpha, s)ds$  коммутативны относительно умножения, то (см. П2)

$$R(t, s) = \exp\left(\int_s^t a(\alpha, \tau)d\tau\right). \quad (7.10)$$

Стохастическая задача Коши (7.8) определяет всю совокупность возможных реализаций рассматриваемого случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . О решении этой задачи можно судить лишь по вероятностным характеристикам  $n$ -мерного случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ .

**Теорема 7.2.** Если  $a(\alpha, t)$  и  $b(\alpha, t)$  — матричные функции типа  $n \times n$ , непрерывные на промежутке  $T = [0, \infty)$ ,  $w(t, \omega)$ ,

$t \in T$ , —  $n$ -мерный винеровский процесс с коэффициентом диффузии  $\sigma^2 = 1$ , выходящий из  $0$ , а  $X_0(\omega)$  —  $n$ -мерный случайный вектор, распределенный по нормальному закону с математическим ожиданием  $m_0$  и ковариационной матрицей  $\Sigma_0$ , то решение задачи Коши (7.8) является  $n$ -мерным нормальным марковским процессом.

◀ Воспользовавшись разностной аппроксимацией задачи Коши (7.8), в соответствии с определением винеровского процесса, выходящего из  $0$ , при  $t = 0$  имеем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} \left( X(\Delta t, \omega) - [I_n + a(\alpha, 0)\Delta t] X_0(\omega) - b(\alpha, 0) w(\Delta t, \omega) \right) = 0, \quad (7.11)$$

а при  $t > 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} \left( X(t + \Delta t, \omega) - [I_n + a(\alpha, t)\Delta t] X(t, \omega) - b(\alpha, t) [w(t + \Delta t, \omega) - w(t, \omega)] \right) = 0. \quad (7.12)$$

А так как в соответствии с определением винеровского процесса для любого  $N > 1$  и для любых  $t_k \in T$ , таких, что  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ , случайные векторы  $w(t_1, \omega)$ ,  $w(t_2, \omega) - w(t_1, \omega)$ , ...,  $w(t_N, \omega) - w(t_{N-1}, \omega)$  являются независимыми, то состояние  $X(t + \Delta t, \omega)$  определяется текущим состоянием  $X(t, \omega)$  и значением  $n$ -мерного случайного вектора  $b(\alpha, t)[w(t + \Delta t, \omega) - w(t, \omega)]$ . При этом значение указанного вектора не зависит от предыдущих состояний  $X(t - \Delta t, \omega)$ ,  $X(t - 2\Delta t, \omega)$  и т.д. Таким образом, если  $N > 1$ ,  $t + k\Delta t \in T$ ,  $k = \overline{2-N, 1}$ , и  $N$ -мерная функция плотности вероятностей  $n$ -мерного случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , имеет вид

$$f(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)}) \triangleq \\ \triangleq f_X(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)} | t + (2-N)\Delta t, t + (3-N)\Delta t, \dots, t + \Delta t),$$

то его условная функция плотности вероятностей обладает свойством

$$f(x_{(N)} | x_{(1)}, \dots, x_{(N-1)}) = f(x_{(N)} | x_{(N-1)}),$$

т.е.  $n$ -мерный случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является марковским процессом. При этом, согласно условиям теоремы и определению винеровского процесса,  $n$ -мерные случайные векторы  $X_0(\omega)$ ,  $w(\Delta t, \omega)$ ,  $w(t + \Delta t, \omega) - w(t, \omega)$  распределены по нормальному закону. Поэтому из (7.11) и (7.12) следует, что все условные и одномерные законы распределения случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , являются нормальными. А так как  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — марковский процесс, то его  $N$ -мерная функция плотности вероятностей имеет вид

$$\begin{aligned} f(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}) &= \\ &= f(x_{(N)} | x_{(N-1)}) f(x_{(N-1)} | x_{(N-2)}) \dots f(x_{(2)} | x_{(1)}) f(x_{(1)}), \end{aligned}$$

а все его конечномерные законы распределения являются нормальными законами распределения, что и требовалось доказать. ►

Если проанализировать доказательство теоремы 7.2, то нетрудно убедиться в том, что в условиях, относящихся к  $X_0(\omega)$ , можно добавить: „или  $X_0(\omega) \equiv X_0$  — **детерминированный** (неслучайный)  $n$ -мерный **вектор**“. В этом случае плотность распределения начального состояния является обобщенной (см. П1) и ее можно рассматривать как предельный случай для  $f_{X_0}$  плотности распределения случайного вектора  $X_0(\omega)$ , когда его ковариационная матрица  $\Sigma_0 \rightarrow \Theta$ .

**Следствие 7.4.** Решение  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , стохастической задачи Коши (7.8) полностью определяется своим математическим ожиданием и *ковариационной функцией*.

◀ Действительно, решение  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является  $n$ -мерным нормальным марковским процессом. ►

**Теорема 7.3.** Если выполнены условия теоремы 7.2 и случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является решением стохастической задачи Коши (7.8), то его математическое ожидание  $m(t)$  и ковариационная функция  $K(t_1, t_2)$  удовлетворяют соотношениям

$$m(t) = R(t, 0) m_0, \quad t \in T; \quad (7.13)$$

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} R(t_1, t_2) \Sigma(t_2), & t_1 \geq t_2; \\ \Sigma(t_1) R^T(t_2, t_1), & t_1 \leq t_2, \end{cases} \quad (7.14)$$

где  $R(t, s)$  — резольвента нормальной системы линейных дифференциальных уравнений  $\dot{m}(t) = a(\alpha, t) m(t)$ ,  $m_0 \triangleq M[X_0(\omega)]$ ,  $t_1, t_2 \in T = [0, \infty)$ , а ковариационная матрица  $\Sigma(t)$  случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\Sigma(t)}{dt} = a(\alpha, t)\Sigma(t) + \Sigma(t)a^T(\alpha, t) + b(\alpha, t)b^T(\alpha, t), \\ \Sigma(0) = \Sigma_0. \end{cases} \quad (7.15)$$

◀ Решение стохастической задачи Коши (7.8) при каждом фиксированном  $\omega \in \Omega$  может быть представлено в виде (7.9). При этом, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, для любого фиксированного  $\tau \geq 0$  решение задачи Коши (7.8) с использованием резольвенты при  $t \geq \tau$  может быть записано так [VIII]:

$$X(t, \omega) = R(t, \tau) X(\tau, \omega) + \int_{\tau}^t R(t, s) b(\alpha, s) dw(s, \omega).$$

В общем случае интеграл в правой части равенства (7.9) представляет собой интеграл от *детерминированной функции*  $R(t, s) b(\alpha, s)$  по винеровскому процессу  $w(s, \omega)$ ,  $s \in [0, t]$ . Так

как *стохастические интегралы по винеровскому процессу* рассматриваются в 7.3, то на данном этапе ограничимся лишь их формальной записью.

Определяя математическое ожидание левой и правой частей (7.9), получаем (7.13), поскольку можно показать, что  $M[dw(s, \omega)] \equiv 0$  при  $s \geq 0$ .

Доказывая равенство (7.14), можем считать, что  $m_0 = 0$ , так как в силу линейности стохастической задачи Коши (7.8) всегда можно перейти к *центрированному случайному процессу*

$$\overset{\circ}{X}(t, \omega) \triangleq X(t, \omega) - m(t), \quad t \geq 0,$$

имеющему нулевое математическое ожидание при  $t \geq 0$ . Для  $t_1 \leq t_2$  с учетом предположения о центрированности случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , имеем

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M[X(t_1, \omega) X^T(t_2, \omega)] = \\ &= M\left[X(t_1, \omega) \left(R(t_2, t_1) X(t_1, \omega) + \int_{t_1}^{t_2} R(t_2, s) b(\alpha, s) dw(s, \omega)\right)^T\right] = \\ &= M[X(t_1, \omega) X^T(t_1, \omega)] R^T(t_2, t_1) + \\ &\quad + M\left[X(t_1, \omega) \left(\int_{t_1}^{t_2} R(t_2, s) b(\alpha, s) dw(s, \omega)\right)^T\right]. \end{aligned}$$

В последней сумме второе слагаемое равно нуль-матрице, поскольку  $w(s, \omega)$ ,  $s \in [0, t]$ , не зависит от  $X(t_1, \omega)$  для любых  $s \geq t_1$ , а математические ожидания сомножителей в квадратных скобках равны нулю. Поэтому

$$K(t_1, t_2) = \Sigma(t_1) R^T(t_2, t_1).$$

Аналогично можно доказать, что при  $t_1 \geq t_2$

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) \Sigma(t_2).$$



Чтобы получить уравнение, которому удовлетворяет ковариационная матрица  $\Sigma(t)$ , рассмотрим разность

$$\begin{aligned}\Sigma(t+h) - \Sigma(t) &= \\ &= \mathbf{M}[X(t+h, \omega) X^T(t+h, \omega)] - \mathbf{M}[X(t, \omega) X^T(t, \omega)] = \\ &= \mathbf{M}\left[(X(t+h, \omega) - X(t, \omega))(X(t+h, \omega) - X(t, \omega))^T + \right. \\ &\quad \left. + X(t, \omega)(X(t+h, \omega) - X(t, \omega))^T + \right. \\ &\quad \left. + (X(t+h, \omega) - X(t, \omega))X^T(t, \omega)\right].\end{aligned}$$

Пусть  $0 < h \ll 1$ . Согласно (7.8), при  $dt = h$  с точностью  $o(h)$  имеем

$$\begin{aligned}X(t+h, \omega) - X(t, \omega) &= a(\alpha, t) X(t, \omega)h + b(\alpha, t) \Delta w(h, \omega), \\ \Delta w(h, \omega) &\triangleq w(t+h, \omega) - w(t, \omega).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Sigma(t+h) - \Sigma(t) &= \mathbf{M}\left[(a(\alpha, t) X(t, \omega)h + b(\alpha, t) \Delta w(h, \omega)) \times \right. \\ &\quad \times (a(\alpha, t) X(t, \omega)h + b(\alpha, t) \Delta w(h, \omega))^T + \\ &\quad \left. + X(t, \omega)(a(\alpha, t) X(t, \omega)h + b(\alpha, t) \Delta w(h, \omega))^T + \right. \\ &\quad \left. + (a(\alpha, t) X(t, \omega)h + b(\alpha, t) \Delta w(h, \omega))X^T(t, \omega)\right].\end{aligned}$$

А так как  $\Delta w(h, \omega)$  не зависит от  $X(t, \omega)$  и  $\mathbf{M}[\Delta w(h, \omega)] \equiv \mathbf{0}$ , то

$$\begin{aligned}\Sigma(t+h) - \Sigma(t) &= a(\alpha, t) \mathbf{M}[X(t, \omega) X^T(t, \omega)] a^T(\alpha, t) h^2 + \\ &\quad + b(\alpha, t) \mathbf{M}[\Delta w(h, \omega) (\Delta w(h, \omega))^T] b^T(\alpha, t) + \\ &\quad + \mathbf{M}[X(t, \omega) X^T(t, \omega)] a^T(\alpha, t) h + a(\alpha, t) \mathbf{M}[X(t, \omega) X^T(t, \omega)] h\end{aligned}$$

и для получения окончательного результата достаточно разделить правую и левую части полученного равенства на  $h$  и перейти к пределу при  $h \rightarrow +0$  с учетом того, что

$$\mathbf{M}[\Delta w(h, \omega) (\Delta w(h, \omega))^T] = h I_n, \quad \mathbf{M}[X(t, \omega) X^T(t, \omega)] \equiv \Sigma(t). \quad \blacktriangleright$$

**Пример 7.2.** Пусть в стохастической задаче Коши (7.8)  $n = 2$  и

$$a(\alpha, t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(\alpha, t) \equiv I_2, \quad X_0(\omega) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае резольвенту  $R(t, \tau)$  можно найти в виде (7.10):

$$R(t, \tau) \equiv R(t - \tau) = \exp \left\{ (t - \tau) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \text{sh}(t - \tau) & \text{ch}(t - \tau) \\ \text{ch}(t - \tau) & \text{sh}(t - \tau) \end{pmatrix}$$

и, согласно (7.13), математическое ожидание решения стохастической задачи Коши (7.8) определено равенством

$$m(t) = \begin{pmatrix} \text{sh}(t - \tau) + 2\text{ch}(t - \tau) \\ 2\text{sh}(t - \tau) + \text{ch}(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

В рассматриваемом примере начальное состояние является детерминированным, поэтому  $\Sigma_0 = \Theta \in M_2(\mathbb{R})$  и задача Коши (7.15) для определения ковариационной матрицы  $\Sigma(t) = (\Sigma_{ij}(t))$  с учетом ее симметричности может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \Sigma'_{11}(t) = 2\Sigma_{12}(t) + 1, \\ \Sigma'_{12}(t) = \Sigma_{11}(t) + \Sigma_{22}(t), \\ \Sigma'_{22}(t) = 2\Sigma_{12}(t) + 1, \\ \Sigma_{11}(0) = \Sigma_{12}(0) = \Sigma_{22}(0) = 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи Коши можно найти стандартными методами [VIII], **П2**, и оно имеет вид

$$\Sigma(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{sh}(2t) & \text{ch}(2t) - 1 \\ \text{ch}(2t) - 1 & \text{sh}(2t) \end{pmatrix}.$$

Для завершения рассмотрения примера достаточно подставить полученные результаты в правую часть (7.14). #

Из теорем 7.2, 7.3 можно сделать следующие выводы.

1. Так как решение  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , стохастической задачи Коши (7.8) является  $n$ -мерным нормальным марковским процессом, то его одномерная функция плотности вероятностей является плотностью  $n$ -мерного нормального распределения [XVI] и имеет следующий вид:

$$f(x|t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma(t)|}} \exp\left(-\frac{1}{2} [x - m(t)]^T [\Sigma(t)]^{-1} [x - m(t)]\right),$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор-столбец, математическое ожидание  $m(t)$  определяют согласно (7.13), а ковариационная матрица  $\Sigma(t)$  является решением задачи Коши (7.15).

2. Поскольку  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — марковский процесс, то его  $N$ -мерная функция плотности вероятностей  $f(x_{(0)}, x_{(1)}, \dots, x_{(N)})$  может быть представлена в следующем виде (см. 2.5):

$$f(x_{(0)}, x_{(1)}, \dots, x_{(N)}) = f(x_{(0)}) \prod_{k=1}^N f(x_{(k)} | x_{(k-1)}),$$

где *условная функция плотности вероятностей*

$$f(x_{(k)} | x_{(k-1)}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma(t_k | t_{k-1})|}} \exp\left(-\frac{1}{2} [x_{(k)} - m(t_k | t_{k-1})]^T [\Sigma(t_k | t_{k-1})]^{-1} [x_{(k)} - m(t_k | t_{k-1})]\right) \quad (7.16)$$

является *условной плотностью распределения*  $n$ -мерного случайного вектора  $X(t_k, \omega)$  при условии, что  $n$ -мерный случайный вектор  $X(t_{k-1}, \omega)$  принял некоторое фиксированное значение  $x_{(k-1)} \in \mathbb{R}^n$ , а  $(2n)$ -мерный случайный вектор

$$\begin{pmatrix} X(t_{k-1}, \omega) \\ X(t_k, \omega) \end{pmatrix}$$

имеет нормальное распределение. При этом можно показать, что *условное математическое ожидание*  $m(t_k | t_{k-1})$  и ковариационная матрица  $\Sigma(t_k | t_{k-1})$  являются решениями следующих

задач Коши:

$$\begin{cases} \frac{dm(t|t_{k-1})}{dt} = a(\alpha, t)m(t|t_{k-1}), & t_{k-1} < t \leq t_k, \\ m(t_{k-1}|t_{k-1}) = x_{(k-1)}, \end{cases} \quad (7.17)$$

$$\begin{cases} \frac{d\Sigma(t|t_{k-1})}{dt} = a(\alpha, t)\Sigma(t|t_{k-1}) + \Sigma(t|t_{k-1})a^T(t, \alpha) + \\ \quad + b(\alpha, t)b^T(\alpha, t), & t_{k-1} < t \leq t_k, \\ \Sigma(t_{k-1}|t_{k-1}) = \Theta. \end{cases} \quad (7.18)$$

3. Условную функцию плотности вероятностей для нормального процесса можно получить и не прибегая к условным математическим ожиданиям и ковариационным матрицам. Действительно, пусть  $0 < t_1 < t_2 < \infty$  и  $X(t_1, \omega)$ ,  $X(t_2, \omega)$  — два сечения  $n$ -мерного нормального марковского процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , являющегося решением стохастической задачи Коши (7.8). Его условная функция плотности вероятностей может быть представлена в виде

$$f(x_{(2)}|x_{(1)}) = \sqrt{\frac{|V_{22}|}{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[x_{(2)} - m(t_2) + V_{22}^{-1}V_{12}^T \times \right.\right. \\ \left.\left. \times (x_{(1)} - m(t_1))\right]^T V_{22} \left[x_{(2)} - m(t_2) + V_{22}^{-1}V_{21}(x_{(1)} - m(t_1))\right]\right), \quad (7.19)$$

где математическое ожидание  $m(t)$ , ковариационная функция  $K(t_1, t_2)$  и ковариационная матрица  $\Sigma(t)$  случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определены равенствами (7.13), (7.14) и (7.15) соответственно, а

$$V_{11} = [\Sigma(t_1) - K(t_1, t_2)(\Sigma(t_2))^{-1}K(t_2, t_1)]^{-1},$$

$$V_{12} = [K(t_2, t_1) - \Sigma(t_2)(K(t_1, t_2))^{-1}\Sigma(t_1)]^{-1},$$

$$V_{21} = [K(t_1, t_2) - \Sigma(t_1)(K(t_2, t_1))^{-1}\Sigma(t_2)]^{-1},$$

$$V_{22} = [\Sigma(t_2) - K(t_2, t_1)(\Sigma(t_1))^{-1}K(t_1, t_2)]^{-1}.$$

Чтобы доказать равенство (7.19), рассмотрим  $(2n)$ -мерный случайный вектор  $\gamma(\omega)$ , для которого

$$\gamma(\omega) \triangleq \begin{pmatrix} X(t_1, \omega) \\ X(t_2, \omega) \end{pmatrix}, \quad m \triangleq \mathbf{M}[\gamma(\omega)] = \begin{pmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \end{pmatrix},$$

$$\Sigma \triangleq \text{cov}[\gamma(\omega)] = \begin{pmatrix} \Sigma(t_1) & K(t_1, t_2) \\ K(t_2, t_1) & \Sigma(t_2) \end{pmatrix},$$

$$V \triangleq \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \Sigma^{-1},$$

и который имеет  $(2n)$ -мерное нормальное распределение. В этом случае его плотность распределения равна

$$f(x_{(1)}, x_{(2)}) = \sqrt{\frac{|V|}{(2\pi)^{2n}}} \exp\left(-\frac{1}{2}[Y - m]^T V [Y - m]\right),$$

где  $Y \triangleq \begin{pmatrix} x_{(1)}^T & x_{(2)}^T \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n}$ . При этом из условия  $\Sigma V = I_{2n}$  получаем систему матричных уравнений

$$\begin{cases} \Sigma(t_1)V_{11} + K(t_1, t_2)V_{21} = I_n, \\ K(t_2, t_1)V_{11} + \Sigma(t_2)V_{21} = \Theta, \\ \Sigma(t_1)V_{12} + K(t_1, t_2)V_{22} = \Theta, \\ K(t_2, t_1)V_{12} + \Sigma(t_2)V_{22} = I_n. \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения  $V_{21} = -[\Sigma(t_2)]^{-1}K(t_2, t_1)V_{11}$  и подставив в первое уравнение, приходим к равенству

$$[\Sigma(t_1) - K(t_1, t_2)(\Sigma(t_2))^{-1}K(t_2, t_1)]V_{11} = I_n,$$

из которого и определяем матрицу  $V_{11}$ . Совершенно аналогично находим матрицы  $V_{12}$ ,  $V_{21}$ ,  $V_{22}$  и устанавливаем равенство

$$\Sigma(t_1) = (V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21})^{-1}.$$

Блочная матрица  $V = \Sigma^{-1}$  является симметрической, т.е.  $V_{11}^T = V_{11}$ ,  $V_{22}^T = V_{22}$ ,  $V_{12}^T = V_{21}$ , так как симметрической является ковариационная матрица  $\Sigma$   $(2n)$ -мерного случайного вектора  $\gamma(\omega)$ . Для вычисления определителя матрицы  $V$  используем основное свойство блочных матриц, согласно которому операции над блочными матрицами выполняются по тем же правилам, что и операции над числовыми матрицами [III]. Таким образом,

$$\begin{aligned} |\Sigma^{-1}| = |V| &= \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21} & \Theta \\ V_{21} & V_{22} \end{vmatrix} = \\ &= |V_{22}| |V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}|. \end{aligned}$$

А так как непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости равенств

$$\begin{aligned} (Y - m)^T V (Y - m) &= \\ &= \begin{pmatrix} x_{(1)} - m(t_1) \\ x_{(2)} - m(t_2) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{(1)} - m(t_1) \\ x_{(2)} - m(t_2) \end{pmatrix} = \\ &= [x_{(2)} - m(t_2) + V_{22}^{-1}V_{12}^T(x_{(1)} - m(t_1))]^T \times \\ &\times V_{22} [x_{(2)} - m(t_2) + V_{22}^{-1}V_{21}(x_{(1)} - m(t_1))] + \\ &+ [x_{(1)} - m(t_1)]^T (V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}) [x_{(1)} - m(t_1)], \end{aligned}$$

то плотность распределения  $(2n)$ -мерного случайного вектора  $\gamma(\omega)$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x_{(1)}, x_{(2)}) &= \sqrt{\frac{|V_{22}|}{(2\pi)^n}} \exp \left( -\frac{1}{2} [x_{(2)} - m(t_2) + V_{22}^{-1}V_{12}^T \times \right. \\ &\times (x_{(1)} - m(t_1))]^T V_{22} [x_{(2)} - m(t_2) + V_{22}^{-1}V_{21}(x_{(1)} - m(t_1))] \Big) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma(t_1)|}} \exp \left( -\frac{1}{2} [x_{(1)} - m(t_1)]^T [\Sigma(t_1)]^{-1} [x_{(1)} - m(t_1)] \right), \end{aligned}$$

где множитель

$$f(x_{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma(t_1)|}} \exp \left( -\frac{1}{2} [x_{(1)} - m(t_1)]^T [\Sigma(t_1)]^{-1} [x_{(1)} - m(t_1)] \right)$$

есть не что иное, как плотность распределения случайного вектора  $X(t_1, \omega)$ . Но тогда условная плотность распределения  $n$ -мерного случайного вектора  $X(t_2, \omega)$  при условии, что  $n$ -мерный случайный вектор  $X(t_1, \omega)$  принял некоторое фиксированное значение  $x_{(1)} \in \mathbb{R}^n$ , действительно задается равенством (7.19), так как

$$f(x_{(2)} | x_{(1)}) = \frac{f(x_{(1)}, x_{(2)})}{f(x_{(1)})}.$$

4. Если в стохастической задаче Коши (7.8)  $a(\alpha, t) \equiv a$ ,  $b(\alpha, t) \equiv b$  при любых  $t \in T$ , где  $a, b \in M_n(\mathbb{R})$  — постоянные матрицы, причем действительные части всех собственных чисел матрицы  $a$  отрицательны, то при больших значениях времени  $t$  решение  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно считать *стационарным (в широком смысле) нормальным марковским случайным процессом*.

В самом деле,  $m(t)$  является решением задачи Коши для нормальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = am(t), \\ m(0) = m_0, \end{cases}$$

которая в силу отрицательности вещественных частей собственных чисел матрицы  $a$  является *асимптотически устойчивой*, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0.$$

Поэтому для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $t^*$ , что для любых  $t \geq t^*$  имеет место неравенство

$$\|m(t)\| < \varepsilon,$$

т.е. можно считать, что  $m(t) \approx 0$  для всех  $t \geq t^*$ . Теперь осталось показать, что при больших значениях  $t_1, t_2 \in T$ , где  $t_1 < t_2$ , имеет место приближенное равенство

$$K(t_1, t_2) \approx K(t_2 - t_1).$$

Для упрощения дальнейших рассуждений ограничимся скалярным случаем стохастической задачи Коши (7.8), в которой  $a(\alpha, t) = -d^2$ ,  $b(\alpha, t) = b$  при любых  $t \in T$ , где  $b$  и  $d$  — действительные числа, т.е. рассмотрим скалярную стохастическую задачу Коши:

$$\begin{cases} dy(t, \omega) = -d^2 y(t, \omega) dt + b d\omega(t, \omega), \\ y(0, \omega) \equiv 0, \end{cases}$$

где  $\omega(t, \omega)$ ,  $t > 0$ , — скалярный винеровский процесс, выходящий из 0 и имеющий коэффициент диффузии  $\sigma^2 = 1$ .

В сформулированной стохастической задаче Коши начальное условие является детерминированным, а резольвента  $R(t, \tau)$  соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения  $u'(t) = -d^2 u(t)$  имеет следующий вид:

$$R(t, \tau) = e^{-d^2(t-\tau)}.$$

Согласно (7.15), ковариационная матрица  $\Sigma(t)$  — дисперсия скалярного случайного процесса  $y(t, \omega)$ ,  $t > 0$ , — в данном случае является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \Sigma'(t) = -2d^2 \Sigma(t) + b^2, \\ \Sigma(0) = 0, \end{cases}$$

которое можно найти стандартными методами [VIII]:

$$\Sigma(t) = \frac{b^2}{2d^2} (1 - e^{-2d^2 t}), \quad t \geq 0.$$



Чтобы показать, что при больших значениях  $t_1, t_2 \in T$  значение ковариационной функции  $K(t_1, t_2)$  определяется в основном разностью  $t_2 - t_1$ , достаточно воспользоваться равенством (7.14) при  $t_1 < t_2$ . Действительно, в данном случае

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= \Sigma(t_1) R^T(t_2, t_1) = \\ &= \frac{b^2}{2d^2} \left( \exp[-d^2(t_2 - t_1)] - \exp[-d^2(t_1 + t_2)] \right) \approx \\ &\approx \frac{b^2}{2d^2} \exp[-d^2(t_2 - t_1)], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Замечание 7.1.** Марковский процесс с течением времени „забывает“ свое исходное состояние. Покажем это в частном случае. Пусть в стохастической задаче Коши (7.8)  $a(\alpha, t) = a$ ,  $b(\alpha, t) = b$  при любых  $t \in T$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные квадратные матрицы порядка  $n$ , причем действительные части всех собственных чисел матрицы  $a$  отрицательны. Выберем произвольный момент времени  $s \in T$ , обозначим его через  $t_{k-1}$  и зафиксируем значение случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , т.е. полагаем  $X(s, \omega) \equiv x(s)$ . При сделанных предположениях из (7.17) следует, что условное математическое ожидание удовлетворяет соотношению  $m(t|s) \rightarrow m_\infty = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Кроме того, можно показать, что  $\Sigma(t|s) \rightarrow \Sigma_\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , где матрица  $\Sigma_\infty \in M_n(\mathbb{R})$  удовлетворяет матричному уравнению

$$a\Sigma_\infty + \Sigma_\infty a^T + bb^T = \Theta$$

и, согласно теории матриц\*, может быть представлена в следующем виде:

$$\Sigma_\infty = \int_0^\infty \exp(at) bb^T \exp(a^T t) dt.$$

---

\*См.: Беллман Р.

Поэтому  $f(x_{(t)} | x_{(s)}) \rightarrow f(x_{(t)})$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $f(x_{(t)})$  — функция плотности вероятностей  $n$ -мерного случайного вектора, распределенного по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma_\infty$ .

**Замечание 7.2.** Если выполняются предположения из замечания 7.1, то ковариационную матрицу  $\Sigma(t)$  можно представить в виде

$$\Sigma(t) = u(t) + \Sigma_\infty,$$

где  $u(t)$  — некоторая матричная функция. Эта функция, согласно (7.15), является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = au(t) + u(t)a^T, \\ u(0) = \Sigma_0 - \Sigma_\infty. \end{cases}$$

Так как решение этой задачи известно:

$$u(t) = \exp(at) (\Sigma_0 - \Sigma_\infty) \exp(a^T t),$$

то ковариационная функция  $\Sigma(t)$  имеет следующий вид:

$$\Sigma(t) = \exp(at) (\Sigma_0 - \Sigma_\infty) \exp(a^T t) + \Sigma_\infty.$$

В рассматриваемом случае математическое ожидание  $m(t)$  решения стохастической задачи Коши (7.8) удовлетворяет нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений  $\dot{m}(t) = am(t)$ , резольвента которой (см. П2)

$$R(t_1, t_2) = \exp(a(t_2 - t_1)) = R(t_2 - t_1).$$

Поэтому, если в стохастической задаче Коши (7.8) вектор начального состояния  $X_0(\omega)$  обладает нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma_0 = \Sigma_\infty$ , то ее решением является стационарный (в широком смысле) случайный процесс, что следует из (7.13), (7.14), тождества  $\Sigma(t) \equiv \Sigma_\infty$  и вида резольвенты  $R(t_1, t_2)$ .

**Замечание 7.3.** Пусть в стохастической задаче Коши (7.8)  $X_0(\omega) \equiv x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $a(\alpha, t) = a$  и  $b(\alpha, t) = b$  при любых  $t \geq 0$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные квадратные матрицы порядка  $n$  и действительные части собственных чисел матрицы  $a$  отрицательны. Если эту стохастическую задачу Коши интерпретировать как математическую модель линейной динамической системы с невозмущенным начальным состоянием, на вход которой поступает *белый шум*, то ее реакцию можно рассматривать как стационарный (в широком смысле) нормальный марковский случайный процесс лишь при больших значениях текущего времени  $t$ , так как в рассматриваемом случае  $\Sigma_0 = \Theta \neq \Sigma_\infty$  (см. замечания 7.1 и 7.2). При больших значениях текущего времени в любой динамической системе, обладающей свойством асимптотической устойчивости (решение соответствующей нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений является асимптотически устойчивым), происходит фактическое затухание переходных процессов. На этот факт мы уже обращали внимание, анализируя преобразование стационарного случайного процесса при его прохождении через линейную динамическую систему.

### 7.3. Стохастические интегралы и дифференциалы

Изучение нелинейных *стохастических моделей состояния* вида (7.7)

$$\begin{cases} dX(t, \omega) = A(X, \alpha, t)dt + B(X, \alpha, t)dw(t, \omega), \\ X(0, \omega) = X_0(\omega) \end{cases}$$

представляет собой сложную задачу, успех решения которой в значительной степени зависит от конкретного вида правой части матричного нелинейного *стохастического дифференциального уравнения*. Но общие принципы и особенности исследования таких моделей можно установить. Именно этому и

посвящен данный параграф. Предполагается, что для любого фиксированного  $\omega \in \Omega$  соответствующая детерминированная задача Коши удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения. Это означает, что матричные функции  $A(X, \alpha, t)$  и  $B(X, \alpha, t)$  удовлетворяют определенным условиям гладкости, а исходная математическая модель может быть представлена в виде интегрального уравнения

$$X(t, \omega) = X_0(\omega) + \int_0^t A(X(\tau, \omega), \alpha, \tau) d\tau + \\ + \int_0^t B(X(\tau, \omega), \alpha, \tau) dw(\tau, \omega), \quad t \geq 0. \quad (7.20)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (7.20) представляет собой интеграл от *случайной функции* по времени, а второй — интеграл от случайной функции по *винеровскому процессу*. Понятие *стохастического интеграла по винеровскому процессу* и его свойства требуют обстоятельного изучения. Изучение таких интегралов начнем с простого примера.

**Пример 7.3.** Пусть  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — скалярный винеровский процесс с *коэффициентом диффузии*  $\sigma^2 = 1$ . Рассмотрим интеграл  $I(t, s)$  от винеровского процесса по этому же винеровскому процессу:

$$I(t, s) \triangleq \int_s^t w(\tau, \omega) dw(\tau, \omega), \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

Отметим сразу, что если  $w(\tau, \omega) \equiv w(\tau)$  — непрерывно дифференцируемая неслучайная функция, то

$$I(t, s) = \frac{1}{2} (w^2(t) - w^2(s)).$$

Для любых  $t, s \in T$ ,  $t > s$ , интеграл  $I(t, s)$  определяют следующим образом. Пусть  $\gamma \in [0, 1]$  — параметр,  $\Delta t \triangleq (t - s)/N$ ,  $t_k \triangleq s + (k - 1)\Delta t$ ,  $k = \overline{1, N+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} I(t, s) &\triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N [\gamma w(t_{k+1}, \omega) + (1 - \gamma) w(t_k, \omega)] \times \\ &\times [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)] \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [w^2(t_{k+1}, \omega) - w^2(t_k, \omega)] + \right. \\ &+ \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^N [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]^2 \Big) \equiv \frac{1}{2} [w^2(t, \omega) - w^2(s, \omega)] + \\ &+ \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]^2. \end{aligned}$$

А так как  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — винеровский процесс, то  $w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной  $\Delta t$ . Таким образом, случайная величина

$$\varepsilon(\omega) \triangleq \left( \frac{w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)}{\sqrt{\Delta t}} \right)^2$$

распределена по закону  $\chi^2$  с одной степенью свободы и, значит [XVII],

$$\mathbf{M}[\varepsilon(\omega)] = 1, \quad \mathbf{D}[\varepsilon(\omega)] = 2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[(w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega))^2] &\equiv \mathbf{D}[w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)] \equiv \Delta t, \\ \mathbf{D}[(w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega))^2] &\equiv \\ &\equiv \mathbf{M}[(w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega))^2 - \Delta t]^2 \equiv 2(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Введем случайные величины

$$\eta_k(\omega) \triangleq [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]^2 - \Delta t, \quad k = \overline{1, N}.$$

Они являются независимыми как функции от независимых случайных величин и

$$\mathbf{M}[\eta_k(\omega)] = 0, \quad \mathbf{D}[\eta_k(\omega)] = 2(\Delta t)^2 = \frac{2(t-s)^2}{N^2}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]^2 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N [\Delta t + \eta_k(\omega)] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (N \Delta t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \eta_k(\omega) = t - s, \end{aligned}$$

так как  $N \Delta t = t - s$ ,

$$\mathbf{M}\left[\sum_{k=1}^N \eta_k(\omega)\right] = \sum_{k=1}^N \mathbf{M}[\eta_k(\omega)] = 0,$$

$$\mathbf{D}\left[\sum_{k=1}^N \eta_k(\omega)\right] = \sum_{k=1}^N \mathbf{D}[\eta_k(\omega)] = 2N(\Delta t)^2 \rightarrow 0$$

при  $\Delta t \rightarrow 0$ , а любая случайная величина с нулевым математическим ожиданием и нулевой дисперсией есть нуль. Таким образом,

$$I(t, s) \equiv I_\gamma(t, s) = 0,5[w^2(t, \omega) - w^2(s, \omega)] - (\gamma - 0,5)(t - s),$$

и мы имеем однопараметрическое семейство интегралов с параметром  $\gamma \in [0, 1]$ .

**Замечание 7.4.** В практике научных исследований используют два типа стохастических интегралов из множества  $I_\gamma(t, s)$ :

$$I_0(t, s) = 0,5(w^2(t, \omega) - w^2(s, \omega)) - 0,5(t - s),$$

$$I_{0,5}(t, s) = 0,5(w^2(t, \omega) - w^2(s, \omega)).$$

Интеграл  $I_{0,5}(t, s)$  внешне совпадает с интегралом от неслучайной функции  $w(\tau)$ . На первый взгляд, следовало бы именно его использовать при анализе стохастических моделей состояния. Но далее убедимся, что интеграл  $I_0(t, s)$  имеет ряд преимуществ при решении задач о нахождении математического ожидания случайного процесса.

Рассмотрим интеграл по случайному процессу от неслучайной функции:

$$I(t, s) = \int_s^t \varphi(\tau) dv(\tau, \omega),$$

где  $\varphi(t)$ ,  $t \in T$ , — непрерывная неслучайная скалярная функция, а  $v(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — дифференцируемый скалярный случайный процесс с ортогональными приращениями, причем для любых  $t, s \in T$

$$m_v(t) \triangleq \mathbf{M}[v(t, \omega)] = m_v(s) + \int_s^t m'_v(\tau) d\tau,$$

$$D_v(t) = \mathbf{M}[(v(t, \omega) - m_v(t))^2] = D_v(s) + \int_s^t D'_v(\tau) d\tau.$$

**Определение 7.2.** *Стохастическим интегралом от неслучайной скалярной функции  $\varphi(t)$ ,  $t \in T$ , по дифференцируемому скалярному случайному процессу со стационарными независимыми приращениями  $v(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , в пределах от  $s \in T$  до  $t \in T$  называют случайную величину*

$$I(t, s) \triangleq \int_s^t \varphi(\tau) dv(\tau, \omega),$$

определяемую равенством

$$I(t, s) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi(t_k) [v(t_{k+1}, \omega) - v(t_k, \omega)],$$

где  $t_k = s + (k-1)\Delta t$ ,  $k = \overline{1, N+1}$ ,  $\Delta t = (t-s)/N$ .

Покажем, что при сделанных предположениях относительно неслучайной функции  $\varphi(t)$  и случайного процесса  $v(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ,

$$\mathbf{M}[I(t, s)] = \int_s^t \varphi(\tau) m'_v(\tau) d\tau, \quad (7.21)$$

$$\mathbf{D}[I(t, s)] = \int_s^t \varphi^2(\tau) D'_v(\tau) d\tau. \quad (7.22)$$

Действительно, согласно определению 7.2, из свойств скалярного случайного процесса  $v(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[I(t, s)] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi(t_k) \mathbf{M}[v(t_{k+1}, \omega) - v(t_k, \omega)] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi(t_k) [m_v(t_{k+1}) - m_v(t_k)] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi(t_k) [m'_v(t_k) \Delta t + o(\Delta t)] = \int_s^t \varphi(\tau) m'_v(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где в соответствии с принятыми допущениями использовано свойство дифференцируемости функции. Таким образом, равенство (7.21) доказано.

Для доказательства равенства (7.22) рассмотрим *центрированный случайный процесс*

$$\overset{\circ}{v}(t, \omega) = v(t, \omega) - m_v(t), \quad t \in T,$$



и напомним (см. пример 2.3), что для случайного процесса с ортогональными приращениями

$$\text{cov}[v(t, \omega) - v(s, \omega); v(t, \omega) - v(s, \omega)] = D_v(t) - D_v(s).$$

С учетом этого рассмотрим разность

$$\begin{aligned} I(t, s) - \mathbf{M}[I(t, s)] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi(t_k) [v(t_{k+1}, \omega) - v(t_k, \omega)] - \\ &- \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi(t_k) [m_v(t_{k+1}, \omega) - m_v(t_k, \omega)] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi(t_k) [\overset{\circ}{v}(t_{k+1}, \omega) - \overset{\circ}{v}(t_k, \omega)]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[I(t, s)] &= \mathbf{M}[(I(t, s) - \mathbf{M}[I(t, s)])^2] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi(t_k) \varphi(t_j) \mathbf{M}[(\overset{\circ}{v}(t_{k+1}, \omega) - \overset{\circ}{v}(t_k, \omega)) (\overset{\circ}{v}(t_{j+1}, \omega) - \\ &- \overset{\circ}{v}(t_j, \omega))] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi^2(t_k) \mathbf{M}[(\overset{\circ}{v}(t_{k+1}, \omega) - \overset{\circ}{v}(t_k, \omega))^2] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi^2(t_k) [D_v(t_{k+1}) - D_v(t_k)] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \varphi^2(t_k) [D'_v(t_k) \Delta t + o(\Delta t)] = \int_s^t \varphi^2(\tau) D'_v(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

Где в соответствии с принятыми допущениями использовано определение дифференцируемости функции. Таким образом, равенство (7.22) также доказано полностью.

Теперь перейдем к рассмотрению важного случая, когда подынтегральная функция зависит от винеровского процесса.

**Определение 7.3.** Пусть  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$  —  $n$ -мерный винеровский процесс, выходящий из  $0$ , и  $\Psi(w(t, \omega); t)$  — *матричная функция* типа  $n \times n$ , определенная для всех  $t \in T$ . Если для любых  $s, t \in T$ , таких, что  $s > t$ , и для любого  $\gamma \in [0, 1]$  существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Psi \left( \gamma w(t_{k+1}, \omega) + (1 - \gamma) w(t_k, \omega); \gamma t_{k+1} + (1 - \gamma) t_k \right) \times \\ \times (w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)),$$

где  $\Delta t = (t - s)/N$ ,  $t_k = s + (k - 1)\Delta t$ ,  $k = \overline{1, N+1}$ , то его называют **стохастическим интегралом** функции  $\Psi$  по **винеровскому процессу**  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и обозначают  $I_\gamma(t, s)$ . При этом, если  $\gamma = 0$ , то его называют **стохастическим интегралом Ито**, а при  $\gamma = 0,5$  — **стохастическим интегралом Стратоновича**.

**Замечание 7.5.** Прежде, чем приступать к изучению свойств стохастического интеграла по винеровскому процессу, отметим три важных момента, относящихся к дальнейшим рассуждениям.

Во-первых, будем далее предполагать, что матричная функция  $\Psi(x, t)$  удовлетворяет определенным условиям гладкости, в частности, имеет непрерывные первые и вторые частные производные по  $x$  для всех  $t$ .

Во-вторых, чтобы избежать недоразумений и не путать стохастические интегралы Ито и Стратоновича, интеграл Ито будем записывать как и выше:

$$I_0(t, s) \triangleq \int_s^t \Psi(w(\tau, \omega); \tau) dw(\tau, \omega),$$

а в интеграле Стратоновича будем ставить „звездочку“ при дифференциале:

$$I_{0,5}(t, s) \triangleq \int_s^t \Psi(w(\tau, \omega); \tau) d_* w(\tau, \omega).$$

В-третьих, для упрощения выкладок при доказательстве свойств стохастических интегралов Ито и Стратоновича, будем рассматривать случай скалярной функции  $\Psi(x; t)$  и скалярного винеровского процесса. Обобщение результатов на случай матричной функции  $\Psi(x; t)$  и векторного винеровского процесса связано лишь с техническими трудностями.

**Теорема 7.4.** Интеграл Ито  $I_0(t, s)$  имеет нулевое математическое ожидание и

$$D[I_0(t, s)] = \int_s^t M[\Psi^2(w(\tau, \omega); \tau)] d\tau. \quad (7.23)$$

◀ По определению интеграла Ито имеем

$$\begin{aligned} M[I_0(t, s)] &= M \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Psi(w(t_k, \omega); t_k) (w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)) \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N M[\Psi(w(t_k, \omega); t_k)] M[w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)] \equiv 0, \end{aligned}$$

так как математическое ожидание винеровского процесса равно нулю и для любых  $\tau_1, \tau_2 \in T$ ,  $\tau_1 < \tau_2$ , случайные величины  $w(\tau_1, \omega)$  и  $w(\tau_2, \omega) - w(\tau_1, \omega)$  независимы.

Равенство (7.23) можно доказать аналогично. Следует лишь учесть, что в соответствии с определением 2.6 винеровского процесса с коэффициентом диффузии  $\sigma^2 = 1$  при  $t > s$  ( $t, s \in T$ )

$$M[(w(t, \omega) - w(s, \omega))^2] = t - s.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}[I_0(t, s)] &= \mathbf{M}[I_0^2(t, s)] = \\
 &= \mathbf{M}\left[\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^N \Psi(w(t_k, \omega); t_k) (w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega))\right)^2\right] = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{M}\left[\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \Psi(w(t_k, \omega); t_k) \Psi(w(t_j, \omega); t_j) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)) (w(t_{j+1}, \omega) - w(t_j, \omega))\right] = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \mathbf{M}[\Psi^2(w(t_k, \omega); t_k)] \mathbf{M}[(w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega))^2] = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \mathbf{M}[\Psi^2(w(t_k, \omega); t_k)] \Delta t = \int_s^t \mathbf{M}[\Psi^2(w(\tau, \omega); \tau)] d\tau. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Для того чтобы определить математическое ожидание и дисперсию для интеграла Стратоновича, установим связь между  $I_0(t, s)$  и  $I_{0,5}(t, s)$ .

**Теорема 7.5.** Интегралы Ито и Стратоновича связаны следующим равенством:

$$I_{0,5}(t, s) = I_0(t, s) + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{\partial \Psi(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=w(\tau, \omega)} d\tau. \quad (7.24)$$

◀ По определению 7.3 интеграла Стратоновича имеем

$$\begin{aligned}
 I_{0,5}(t, s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Psi\left(\frac{w(t_{k+1}, \omega) + w(t_k, \omega)}{2}; \frac{t_{k+1} + t_k}{2}\right) \times \\
 &\quad \times (w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)). \quad (7.25)
 \end{aligned}$$

Используя формулу Тейлора в окрестности точки  $(w(t_k, \omega); t_k)$  и ограничиваясь линейными членами, получаем

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{w(t_{k+1}, \omega) + w(t_k, \omega)}{2}; \frac{t_{k+1} + t_k}{2}\right) &= \\ &= \Psi\left(w(t_k, \omega) + \frac{w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)}{2}; t_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right) \approx \\ &\approx \Psi(w(t_k, \omega); t_k) + \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \cdot \frac{\partial \Psi(w(t_k, \omega); t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} + \\ &\quad + \frac{w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)}{2} \cdot \frac{\partial \Psi(x, t_k)}{\partial x} \Big|_{x=w(t_k, \omega)}, \end{aligned}$$

где приближенное равенство понимают в смысле среднего квадратичного **3.1**. Подставляя это выражение в правую часть (7.25), находим

$$\begin{aligned} I_{0,5}(t, s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Psi(w(t_k, \omega); t_k) (w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)) + \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Delta t \left( w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega) \right) \frac{\partial \Psi(w(t_k, \omega); t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} + \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left( w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega) \right)^2 \frac{\partial \Psi(x, t_k)}{\partial x} \Big|_{x=w(t_k, \omega)}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства по определению 7.3 является интегралом Ито. Второе слагаемое тождественно равно нулю, так как элементы суммы в смысле среднего квадратичного имеют порядок  $(\Delta t)^{1,5}$ . Действительно (см. пример 7.3, также **3.1**),

$$\mathbf{M}[(w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega))^2] = \Delta t,$$

$$\begin{aligned} \|\Delta t (w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega))\|_{CK} &= \Delta t \|w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)\|_{CK} = \\ &= \Delta t \sqrt{\mathbf{M}[(w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega))^2]} = (\Delta t)^{1,5}. \end{aligned}$$

Можно также показать, что третье слагаемое равно

$$\frac{1}{2} \int_s^t \frac{\partial \Psi(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=w(\tau, \omega)} d\tau$$

и доказательство завершено. ►

Из теорем 7.4, 7.5 следуют равенства

$$\mathbf{M}[I_{0,5}(t, s)] = \frac{1}{2} \int_s^t \mathbf{M} \left[ \frac{\partial \Psi(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=w(\tau, \omega)} \right] d\tau, \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[I_{0,5}^2(t, s)] &= \int_s^t \mathbf{M}[\Psi^2(w(\tau, \omega); \tau)] d\tau + \\ &+ \frac{1}{4} \mathbf{M} \left[ \left( \int_s^t \frac{\partial \Psi(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=w(\tau, \omega)} d\tau \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Если  $\Psi(x, t)$  — матричная функция типа  $n \times n$ , а  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $n$ -мерный винеровский процесс, то

$$I_{0,5}(t, s) = I_0(t, s) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_s^t \frac{\partial \Psi_j(x, \tau)}{\partial x_j} \Big|_{x=w(t, \omega)} d\tau, \quad (7.28)$$

где  $\Psi_j(x, \tau)$  —  $j$ -й столбец матричной функции  $\Psi(x, t)$ ;

$$\mathbf{M}[I_0(t, s)] \equiv \mathbf{0}, \quad (7.29)$$

$$\mathbf{M}[I_0(t, s) I_0^T(t, s)] = \int_s^t \mathbf{M}[\Psi(w(\tau, \omega); \tau) \Psi^T(w(\tau, \omega); \tau)] d\tau. \quad (7.30)$$

Эти результаты, равно как и выражения для математического ожидания и ковариационной функции для интеграла Страто-

новича, можно получить\*, используя технику доказательства теорем 7.4, 7.5.

Теперь вернемся к исходной нелинейной стохастической модели состояния (7.7) в интегральном представлении (7.20). Возникает естественный вопрос: какой стохастический интеграл по винеровскому процессу записан в правой части этого уравнения — Ито или Стратоновича?

Можно показать\*\*, что в интегральном представлении (7.20) исходной стохастической модели состояния (7.7), полученной как результат введения *процесса случайных возмущений* в *детерминированную модель*, стохастический интеграл по винеровскому процессу представляет собой интеграл Стратоновича. Таким образом, в соответствии с замечанием 7.5 исходная нелинейная стохастическая модель состояния в интегральном представлении имеет следующий вид:

$$X(t, \omega) = X_0(\omega) + \int_0^t A(X(\tau, \omega), \alpha, \tau) d\tau + \\ + \int_0^t B(X(\tau, \omega), \alpha, \tau) d_* w(\tau, \omega), \quad t \geq 0. \quad (7.31)$$

Ее называют **стохастической моделью состояния в форме Стратоновича**. При этом, чтобы подчеркнуть, что именно она соответствует рассматриваемой стохастической модели состояния (7.7), при записи последней вместо  $dw(t, \omega)$  пишут  $d_* w(t, \omega)$ . Соответственно и исходную стохастическую модель состояния представляют в виде

$$\begin{cases} dX(t, \omega) = A(X(t, \omega), \alpha, t) dt + \\ \quad + B(X(t, \omega), \alpha, t) d_* w(t, \omega), \quad t > 0, \\ X(0, \omega) = X_0(\omega), \end{cases} \quad (7.32)$$

\*См.: Пугачев В.С., Синицын И.Н.

\*\*См. там же.

Если  $n$ -мерный случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , задан стохастической моделью состояния (7.32) или стохастической моделью состояния в форме Стратоновича (7.31), то он зависит от винеровского процесса  $w(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ . Поэтому в рассуждениях случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , более удобно и корректно обозначать как  $X(t, w(t, \omega))$ ,  $t \geq 0$ . Используя это обозначение и равенство (7.28), связывающее интеграл Стратоновича с интегралом Ито, можно показать, что стохастическая модель состояния в форме Стратоновича (7.31) может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 X(t, \omega) = & X_0(\omega) + \int_0^t \left( A(X(\tau, \omega), \alpha, \tau) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_k(u, \alpha, \tau)}{\partial u} \Big|_{u=X(\tau, \omega)} b_k(X(\tau, \omega), \alpha, \tau) \right) d\tau + \\
 & + \int_0^t B(X(\tau, \omega), \alpha, \tau) dw(\tau, \omega), \quad t \geq 0, \quad (7.33)
 \end{aligned}$$

где  $b_k(X(t, \omega), \alpha, t)$  представляет собой  $k$ -й столбец матричной функции  $B(X(t, \omega), \alpha, t)$ . Интегральное представление (7.33) исходной стохастической модели состояния (7.32) называют **стохастической моделью состояния в форме Ито**.

**Определение 7.4.** Пусть случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , удовлетворяет уравнению (7.31). В этом случае выражение

$$dX(t, \omega) = A(X(t, \omega), \alpha, t)dt + B(X(t, \omega), \alpha, t)dw_*(t, \omega)$$

называют **стохастическим дифференциалом** случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , **в форме Стратоновича**.



**Стохастический дифференциал в форме Ито** для исходной стохастической модели состояния имеет вид

$$dX(t, \omega) = \left( A(X(t, \omega), \alpha, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_k(u, \alpha, \tau)}{\partial u} \Big|_{u=X(\tau, \omega)} b_k(X(\tau, \omega), \alpha, \tau) \right) dt + \\ + B(X(\tau, \omega), \alpha, t) dw(t, \omega), \quad (7.34)$$

что следует из (7.33).

Обратим внимание на то, что в случае  $B(X(t, \omega), \alpha, t) \equiv B(\alpha, t)$ ,  $t \in T$ , вид соответствующих представлений исходной стохастической модели состояния в форме Ито и Стратоновича (7.34) и (7.32), (7.33) и (7.31) совпадает с точностью до обозначений соответствующих интегралов.

В этой книге даны лишь минимальные сведения из дифференциального исчисления Ито и Стратоновича, необходимые для усвоения основного материала. Более полную информацию по этому вопросу можно получить из специальной литературы<sup>3</sup>. Отметим, что основные правила дифференциального и интегрального исчислений Стратоновича аналогичны обычным правилам дифференцирования и интегрирования функций одного и многих переменных [II], [V], [VI], [VII]. Сказанное не относится к дифференциальному и интегральному исчислениям Ито.

**Пример 7.4.** Рассмотрим скалярную стохастическую модель состояния в форме Ито:

$$\begin{cases} dx(t, \omega) = a(x(t, \omega), t) dt + b(x(t, \omega), t) dw(t, \omega), \\ x(0, \omega) = x_0(\omega) \end{cases}$$

<sup>3</sup>См., например: Евланов Л.Г., Константинов В.М., а также Пугачев В.С., Синицын И.Н.

и найдем дифференциал скалярной функции  $y(x(t, \omega), t)$ , предполагая, что она удовлетворяет необходимым условиям гладкости.

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора и ограничившись в нем членами второго порядка, получаем

$$\Delta y(x(t, \omega), t) \approx \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t \partial x} dt dx + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x \partial t} dx dt \right] \right) \Big|_{x=x(t, \omega)}.$$

Поскольку в смысле среднего квадратичного элементы в правой части равенства, заключенные в квадратные скобки, имеют порядки малости  $O(dt^2)$ ,  $O(dt^{1,5})$ ,  $O(dt^{1,5})$  соответственно, то при дальнейшем анализе ими можно пренебречь. Таким образом, с учетом исходной стохастической модели состояния имеем

$$\Delta y(x(t, \omega), t) \approx \left\{ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dt + \right. \\ \left. + \left( a(x, t) dt + b(x, t) dw(t, \omega) \right) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( a^2(x, t) dt^2 + 2a(x, t)b(x, t) dt dw(t, \omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + b^2(x, t) (dw(t, \omega))^2 \right) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right\} \Big|_{x=x(t, \omega)}.$$

В правой части этого равенства во второй квадратной скобке лишь третье слагаемое имеет порядок малости  $O(dt)$ , поскольку

$$\mathbf{M}[(dw(t, \omega))^2] = \mathbf{D}[dw(t, \omega)] = dt.$$

Таким образом,

$$dy(x(t, \omega), t) = \left( \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] dt + b(x, t) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dw(t, \omega) \right) \Big|_{x=x(t, \omega)}. \quad \# \quad (7.35)$$

Равенство (7.35) известно как **правило дифференцирования Ито**. В общем случае, когда  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $n$ -мерный случайный процесс,  $a(x, t) = (a_1(x, t) \dots a_n(x, t))^T$  —  $n$ -мерная векторная функция, а  $b(x, t) = (b_{ij}(x, t))$  — матричная функция типа  $n \times n$ , правило дифференцирования Ито имеет вид

$$dy(x(t, \omega), t) = \left\{ \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^n b_{ik}(x, t) b_{kj}(x, t) \right] dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y(x, t)}{\partial x_i} [b(x, t) dw(t, \omega)]_{(i)} \right\} \Big|_{x=x(t, \omega)},$$

где  $x = (x_1 \dots x_n)^T$ , а  $(b(x, t) dw(t, \omega))_{(i)}$  —  $i$ -й элемент вектора  $b(x, t) dw(t, \omega)$ .

Отметим, что в обычном дифференциальном исчислении, в отличие от дифференциального исчисления Ито,

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} (dx)^2 \Big|_{x=x(t, \omega)} = O(dt^2).$$

**Пример 7.5.** Рассмотрим скалярную стохастическую модель состояния

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \omega) = -[\lambda + \xi(t, \omega)]x(t, \omega), \\ x(0, \omega) \equiv 1, \end{cases}$$

где  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — белый шум с нулевым математическим ожиданием и спектральной интенсивностью  $b^2$ , а  $\lambda > 0$  — параметр.

Представив процесс случайных возмущений как производную от винеровского процесса, запишем исходную стохастическую модель состояния в форме Стратоновича (7.32):

$$\begin{cases} dx(t, \omega) = -\lambda x(t, \omega) + bx(t, \omega) d_* w(t, \omega), \\ x(0, \omega) \equiv 1 \end{cases}$$

с последующим переходом к форме Ито (7.34):

$$\begin{cases} dx(t, \omega) = (0,5b^2 - \lambda) x(t, \omega) dt + bx(t, \omega) dw(t, \omega), \\ x(0, \omega) \equiv 1. \end{cases} \quad (7.36)$$

Применив к стохастической задаче Коши (7.36) оператор математического ожидания с учетом того, что  $m(t) \triangleq \mathbf{M}[x(t, \omega)]$ , получаем

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = (0,5b^2 - \lambda)m(t), \\ m(0) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, математическое ожидание состояния равно

$$m(t) = \exp\left[\left(\frac{b^2}{2} - \lambda\right)t\right], \quad t \in T.$$

Для нахождения дисперсии  $D(t)$  состояния введем функцию

$$y(x(t, \omega), t) = x(t, \omega) - m(t), \quad t \in T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} dy(x(t, \omega), t) &= dx(t, \omega) - dm(t) = \\ &= (0,5b^2 - \lambda) y(x(t, \omega), t) + bx(t, \omega) dw(t, \omega), \end{aligned}$$

$$D(t) = \mathbf{M}[y^2(x(t, \omega), t)], \quad \mathbf{M}[y(x(t, \omega), t)] = 0.$$

По правилу дифференцирования Ито (7.35) находим

$$dy^2(x(t, \omega), t) = [(b^2 - 2\lambda)y^2(x(t, \omega), t) + b^2x^2(t, \omega)] dt + \\ + 2by(x(t, \omega), t)x(t, \omega)dw(t, \omega).$$

А так как

$$M[x^2(t, \omega)] = D(t) - m^2(t),$$

то приходим к задаче Коши для  $D(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{D}(t) = 2(b^2 - \lambda)D(t) + b^2m^2(t), \\ D(0) = 0, \end{cases}$$

решив которую, находим

$$D(t) = b^2te^{2(b^2 - \lambda)t}.$$

Для определения типа закона распределения случайного процесса  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , введем функцию

$$z(x(t, \omega), t) \triangleq \ln x(t, \omega), \quad t \in T,$$

и воспользуемся правилом дифференцирования Ито (7.35). После преобразований получаем

$$d \ln x(t, \omega) = -\lambda dt + b dw(t, \omega), \quad t > 0. \quad (7.37)$$

А так как уравнение (7.37) является линейным относительно функции  $\ln x(t, \omega)$ , то этот случайный процесс имеет нормальное распределение, а случайный процесс  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — логарифмически нормальное распределение.

Отметим, что уравнение (7.37) непосредственно вытекает из исходной математической модели, представленной в форме Стратоновича. Но при использовании дифференциала Стратоновича нам не удалось бы так просто получить уравнения для определения математического ожидания и дисперсии случайного процесса  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . #

В заключение отметим следующие моменты.

1. Совершенно очевидно, что в общем случае установить даже одномерный закон распределения случайного процесса  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяющего нелинейной стохастической задаче Коши (7.7), не так-то просто.

2. Практически полностью повторив доказательство теоремы 7.2 для нелинейной стохастической задачи Коши (7.7) в предположении, что для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$  выполнены условия теоремы существования и единственности ее решения, приходим к выводу, что случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является  $n$ -мерным марковским процессом. Поэтому дальнейшая перспектива в изучении нелинейных стохастических моделей состояния связана с изучением специфических свойств марковских процессов, чему и посвящена следующая глава.

## Вопросы и задачи

**7.1.** Сформулируйте основной принцип построения математической модели (7.1).

**7.2.** Чем обусловлена необходимость введения случайных возмущений в математическую модель состояния (7.1)?

**7.3.** Сформулируйте и обоснуйте основные свойства процесса случайных возмущений.

**7.4.** Случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , задан линейной стохастической моделью состояния при стандартных допущениях. Какими свойствами обладает этот случайный процесс?

**7.5.** Почему решение стохастической задачи Коши (7.8) может быть представлено в виде (7.9)?

**7.6.** В каких случаях решение линейной стохастической задачи Коши (7.8):

а) можно считать стационарным (в широком смысле) нормальным марковским случайным процессом;

б) является стационарным (в широком смысле) нормальным марковским случайным процессом?

**7.7.** Докажите равенства (7.26)–(7.30).

**7.8.** Докажите правило дифференцирования Ито для общего случая.

**Указание:** см. пример 7.4 и комментарии к этому примеру.

**7.9.** Докажите, что решение нелинейной стохастической задачи Коши (7.7) является марковским процессом.

**Указание:** предполагая, что для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$  выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши (7.7), воспользуйтесь логикой доказательства теоремы 7.2.

**7.10.** Пусть в стохастической задаче Коши (7.8)  $n = 2$ ,

$$a(\alpha, t) \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b(\alpha, t) \equiv I_2, \quad X_0(\omega) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Определите ковариационную матрицу и математическое ожидание ее решения.

**Ответ:**

$$R(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-(t-s)} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2(t-s)},$$

$$m(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad \Sigma_\infty = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma(t) = \frac{1}{12} \left[ \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} e^{-4t} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right].$$

**Указание:** воспользуйтесь замечанием 7.5.

**7.11.** Пусть в стохастической задаче Коши (7.8)  $n = 2$ ,

$$a(\alpha, t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad b(\alpha, t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$m_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 22 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определите математическое ожидание, ковариационную матрицу и ковариационную функцию ее решения.

О т в е т:

$$m(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-3t}, \quad \Sigma(t) \equiv \Sigma_0,$$

$$K(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} e^{-(t-s)} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} e^{-3(t-s)}, & t \geq s; \\ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} e^{-(s-t)} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{-3(s-t)}, & t \leq s. \end{cases}$$

**7.12.** Пусть скалярный случайный процесс  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , является решением стохастической задачи Коши

$$\begin{cases} dx(t, \omega) = \lambda x(t, \omega) dt + b dw(t, \omega), \\ x(0, \omega) \equiv 0, \end{cases}$$

где  $\lambda$  и  $b$  — неслучайные параметры. Можно ли этот процесс по прошествии некоторого времени считать стационарным (в широком смысле)?

Если процесс  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно считать стационарным (в широком смысле), то чему равна его спектральная плотность?

О т в е т: можно при всех  $\lambda < 0$ . В этом случае

$$s(\nu) = \frac{b^2}{2\pi(\lambda^2 + \nu^2)}.$$



**7.13.** Найдите математическое ожидание и дисперсию стохастического интеграла

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dw(t, \omega)$$

по винеровскому процессу с  $\sigma^2 = 1$ , где  $\alpha$  — положительный неслучайный параметр.

О т в е т:  $M[I(\omega)] = 0$ ,  $D[I(\omega)] = 1/2\alpha$ .

**7.14.** Найдите математическое ожидание и дисперсию интеграла Ито

$$I_0(t, 0) = \int_0^t e^{-\alpha w(\tau, \omega)} dw(\tau, \omega).$$

О т в е т:  $M[I_0(t, 0)] \equiv 0$ ,  $D[I_0(t, 0)] = [\exp(2\alpha^2 t) - 1]/(2\alpha^2)$ .

**7.15.** Найдите дисперсию стохастического интеграла Ито

$$I_0(t, 0) = \int_0^t x(\tau, \omega) dw(\tau, \omega),$$

где  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$  — скалярный случайный процесс;  $m_x(t) = ct$ ;  $K_x(t, s) = \exp[\alpha(t+s) - \beta|t-s|]$ ;  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — неслучайные параметры.

О т в е т:  $D[I_0(t, 0)] = \frac{c^2 t^3}{3} + \frac{\exp(2\alpha t) - 1}{2\alpha}$ .

**7.16.** Докажите равенство

$$\int_0^t (w(\tau, \omega))^{n-1} d\tau = \frac{2}{n} \left( \frac{(w(t, \omega))^{n+1}}{n+1} - \int_0^t (w(\tau, \omega))^n dw(\tau, \omega) \right).$$

**7.17.** Докажите, что случайный процесс  $x(t, \omega) = [w(t, \omega)]^{-1}$ ,  $t \in T$ , имеет стохастический дифференциал в форме Ито:

$$dx(t, \omega) = x^3(t, \omega) dt - x^2(t, \omega) dw(t, \omega).$$

**7.18.** Докажите, что стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t, \omega) = 0,25 dt + \sqrt{x(t, \omega)} dw(t, \omega)$$

имеет решение

$$x(t, \omega) = (1 + 0,5w(t, \omega))^2, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальному условию  $x(0, \omega) \equiv 1$ .

**7.19.** Докажите, что стохастическая задача Коши

$$\begin{cases} dx(t, \omega) = -0,5x(t, \omega) + y(t, \omega) dw(t, \omega), \\ dy(t, \omega) = -0,5y(t, \omega) - x(t, \omega) dw(t, \omega), \\ x(0, \omega) \equiv 0, \quad y(0, \omega) \equiv 1 \end{cases}$$

имеет решение

$$x(t, \omega) = \sin(w(t, \omega)), \quad y(t, \omega) = \cos(w(t, \omega)).$$

**7.20.** Пусть случайный процесс  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx(t, \omega) = -\lambda x(t, \omega) dt + b x(t, \omega) dw(t, \omega), \quad t \in T.$$

Докажите, что его условная функция плотности вероятностей равна

$$f(x_{(t)} | x_{(s)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{[\ln(x_{(t)} x_{(s)}^{-1} + \lambda(t-s))]^2}{2b^2(t-s)}\right),$$

где  $\lambda$  и  $b$  — неслучайные параметры.

## 8. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С НЕПРЕРЫВНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

В соответствии с определением 2.6 *марковского процесса* и результатами исследований *стохастических моделей состояния*, в основе понятия марковского процесса лежит представление об эволюционирующей во времени системе  $S$ , обладающей свойством отсутствия последействия — отсутствием „памяти“. Иными словами, для марковского процесса будущее состояние определяется настоящим и не зависит от прошлого.

**Пример 8.1.** Пусть  $S$  — техническая система, которая уже эксплуатировалась определенное время и пришла в некоторое состояние, характеризуемое определенной степенью изношенности. Нас интересует, как она будет работать в будущем.

Ясно, что по крайней мере в первом приближении характеристики функционирования системы  $S$  в будущем зависят от состояния этой системы в настоящий момент и не зависят от того, когда и как она достигла своего настоящего состояния. При этом, если учесть результаты исследований стохастических моделей состояния, то становится понятным, что состояние изучаемой системы должно являться марковским процессом и, вообще говоря, удовлетворять некоторой *стохастической модели состояния в форме Ито*

$$\begin{cases} d\xi(t, \omega) = \Psi(\xi(t, \omega), t) + G(\xi(t, \omega), t) dw(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) = \xi_0(\omega). \quad \# \end{cases}$$

Характерной особенностью марковских процессов является возможность выражения любых *конечномерных законов распределения* через двумерные законы распределения (см. 2.5).

В данной главе мы рассмотрим *марковские процессы с непрерывными состояниями*, в которых сечения являются  $n$ -мерными *непрерывными случайными векторами*.

### 8.1. Общие свойства марковских процессов

Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , —  $n$ -мерный марковский процесс с непрерывными состояниями и  $t, \tau \in T$ ,  $t < \tau$ , — два фиксированных момента времени. Введем обозначения для одномерных, двумерных и условных функций плотности вероятностей случайного процесса:

$$\begin{cases} f_1(X) \triangleq f_\xi(X|t), & f_1(Y) \triangleq f_\xi(Y|\tau), \\ f_2(X, Y) \triangleq f_\xi(X, Y|t, \tau), & f(t, X, \tau, Y) \triangleq f_\xi(Y|X), \end{cases} \quad (8.1)$$

где  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^n$ . Если случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является скалярным ( $n = 1$ ), то вместо  $X$  и  $Y$  используют обозначения  $x$  и  $y$  соответственно. Напомним (см. 2.5), что любая конечномерная функция плотности вероятностей марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , может быть выражена через его двумерную функцию плотности вероятностей  $f_2(X, Y)$ . Отметим, что условную функцию плотности вероятностей  $f_\xi(Y|X) \equiv f_2(X, Y)/f_1(X)$  в теории марковских процессов рассматривают как функцию четырех аргументов  $t, X, \tau, Y$ , что и отражено в обозначениях (8.1). Условная функция плотности вероятностей любого случайного процесса представляет собой условную плотность распределения одного из его сечений при условии, что другое его сечение приняло некоторое фиксированное значение. Поэтому, исходя из свойств условной плотности распределения и определения  $\delta$ -функции Дирака [XII], можно показать, что условная функция плотности вероятностей  $f(t, X, \tau, Y)$  имеет следующие свойства:

$$f(t, X, \tau, Y) \geq 0, \quad f(t, X, \tau, Y)|_{t=\tau} = \delta(X - Y),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t, X, \tau, Y) dY = 1, \quad f_2(X, Y) = f(t, X, \tau, Y) f_1(X),$$

$$f_1(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, X, \tau, Y) f_1(X) dX.$$

**Теорема 8.1.** Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , —  $n$ -мерный марковский процесс и  $t, \tau \in T$  ( $t < \tau$ ) — любые два фиксированных момента времени, то для любого значения  $t' \in (t, \tau)$  имеет место равенство

$$f(t, X, \tau, Y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, X, t', Z) f(t', Z, \tau, Y) dZ. \quad (8.2)$$

◀ Для упрощения и наглядности проводимых рассуждений ограничимся скалярным случаем, т.е. полагаем  $n = 1$ . Пусть  $t, t', \tau \in T$ ,  $t < t' < \tau$  — любые три фиксированных момента времени и  $f_2(x, y)$  — двумерная функция плотности вероятностей изучаемого случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , соответствующая моментам времени  $t$  и  $\tau$ , а  $f_3(x, z, y)$  — его трехмерная функция плотности вероятностей, соответствующая моментам времени  $t, t', \tau$ . При этом

$$f_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x, z, y) dz. \quad (8.3)$$

А так как случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является марковским, то

$$f_2(x, y) = f_{\xi}(y|x) f_1(x), \quad f_3(x, z, y) = f_{\xi}(y|z) f_{\xi}(z|x) f_1(x)$$

и равенство (8.3) преобразуется к следующему:

$$f_{\xi}(y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(y|z) f_{\xi}(z|x) dz.$$

Для завершения доказательства достаточно перейти к обозначениям (8.1). ►

Равенство (8.2) известно как **уравнение Маркова — Смолуховского — Чепмена — Колмогорова**. В конце XIX в. русский математик А.А. Марков получил аналог уравнения (8.2) для марковских процессов с дискретным временем (*цепи Маркова*), польский физик-теоретик М.Ф. Смолуховский

в начале XX в. использовал уравнение (8.2) при изучении броуновского движения, английский геофизик С. Чепмен в 30-х гг. XX в. использовал уравнение (8.2) для решения кинетического уравнения Больцмана, а русский математик А.Н. Колмогоров в 40-х гг. XX в. разработал общую аналитическую теорию марковских процессов.

## 8.2. Уравнения Колмогорова

Основная особенность *марковских процессов* связана с тем, что их *условные функции плотности вероятностей*  $f(t, X, \tau, Y)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа. Это не только существенно упрощает процедуру нахождения  $f(t, X, \tau, Y)$ , но и позволяет найти решения многих задач прикладного характера.

Условная функция плотности вероятностей  $f(t, X, \tau, Y)$   $n$ -мерного *марковского процесса*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , с *непрерывными состояниями*, рассматриваемая как функция параметров начального состояния  $t \in T$  и  $X = (x_1 \dots x_n)^T$ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k(X, t) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n b_{km}(X, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} = 0, \quad (8.4)$$

в котором векторная функция векторного аргумента

$$a(X, t) = \begin{pmatrix} a_1(X, t) \\ \vdots \\ a_n(X, t) \end{pmatrix} \equiv \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\mathbf{M}[\xi(\tau, \omega) - \xi(t, \omega) | \xi(t, \omega) = X]}{\tau - t} \quad (8.5)$$

характеризует скорость изменения значений исходного случайного процесса. *Матричная функция* векторного аргумента

$$\begin{aligned} b(X, t) &= (b_{km}(X, t)) \equiv \\ &\equiv \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\mathbf{M}[(\xi(\tau, \omega) - \xi(t, \omega)) (\xi(\tau, \omega) - \xi(t, \omega))^T | \xi(t, \omega) = X]}{\tau - t}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

принимая значения в множестве  $M_n(\mathbb{R})$ , характеризует скорость изменения условной *дисперсии* этого случайного процесса. В литературе  $a(X, t)$  и  $b(X, t)$  часто называют **вектором сноса** и **матрицей диффузии** соответственно. Из неотрицательной определенности любой ковариационной матрицы и тождества (8.6) следует неотрицательная неопределенность матрицы диффузии.

Условная функция плотности вероятностей  $f(t, X, \tau, Y)$ , рассматриваемая как функция параметров конечного состояния  $\tau \in T$  и  $Y = (y_1 \dots y_n)^T$ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} (a_k(Y, \tau) f) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_m} (b_{km}(Y, \tau) f) = 0. \quad (8.7)$$

Уравнения (8.4) и (8.7) называют **первым** и **вторым уравнениями Колмогорова** соответственно. Уравнение (8.7) называют также **уравнением Колмогорова — Фоккера — Планка**, поскольку оно встречалось в работах М.К. Планка, А.Д. Фоккера и других физиков еще до того, как его обосновал А.Н. Колмогоров.

Вывод уравнений Колмогорова (8.4), (8.7), приведенный ниже, весьма схематичен и реализован для скалярного марковского процесса ( $n = 1$ ) при излишне жестких ограничениях. Но он позволяет уяснить как содержательный смысл самих уравнений, так и входящих в них параметров.

**Вывод первого уравнения Колмогорова.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , — скалярный марковский случайный процесс и  $f(t, x, \tau, y)$  — его условная функция плотности вероятностей. В *уравнении Маркова — Смолуховского — Чепмена — Колмогорова* (8.2) при  $n = 1$  полагаем  $t' = t + \Delta$ , где  $0 < \Delta < \tau - t$ , и

записываем его в следующем виде:

$$f(t, x, \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, t + \Delta, z) f(t + \Delta, z, \tau, y) dz. \quad (8.8)$$

Предположим, что условная функция плотности вероятностей  $f(t + \Delta, z, \tau, y)$ , как функция скалярного аргумента  $z$ , в окрестности точки  $z = x$  может быть разложена по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} f(t + \Delta, z, \tau, y) = & f(t + \Delta, x, \tau, y) + \\ & + \frac{\partial f(t + \Delta, x, \tau, y)}{\partial x} (z - x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t + \Delta, x, \tau, y)}{\partial x^2} (z - x)^2 + \\ & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f(t + \Delta, x, \varepsilon(z - x), \tau, y)}{\partial x^3} (z - x)^3, \end{aligned}$$

где  $|\varepsilon| \leq 1$ . Тогда, согласно (8.8), получим

$$\begin{aligned} f(t, x, \tau, y) = & f(t + \Delta, x, \tau, y) \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, t + \Delta, z) dz + \\ & + \frac{\partial f(t + \Delta, x, \tau, y)}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x) f(t, x, t + \Delta, z) dz + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t + \Delta, x, \tau, y)}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x)^2 f(t, x, t + \Delta, z) dz + \\ & + \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 f(t + \Delta, x + \varepsilon(z - x), \tau, y)}{\partial x^3} (z - x)^3 f(t, x, t + \Delta, z) dz. \quad (8.9) \end{aligned}$$



Учитывая, что в силу свойств условной функции плотности вероятностей  $f(t, x, \tau, y)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, t + \Delta, z) dz \equiv 1,$$

переносим первое слагаемое в правой части (8.9) в левую часть, делим обе части полученного равенства на  $\Delta$  и переходим к пределу при  $\Delta \rightarrow +0$ . Этот предельный переход возможен, если существует предел

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \left( \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 f(t + \Delta, x + \varepsilon(z - x), \tau, y)}{\partial x^3} \times \right. \\ \left. \times (z - x)^3 f(t, x, t + \Delta, z) dz \right) \equiv 0. \quad (8.10)$$

В результате получаем первое уравнение Колмогорова (8.4) при  $n = 1$ , в котором функции  $a(x, t)$  и  $b(x, t)$  заданы соотношениями (8.5) и (8.6) соответственно.

Предположение (8.10) в сущности означает, что *вероятность* больших отклонений  $|\xi(t', \omega) - \xi(t, \omega)|$  снижается при уменьшении  $\Delta = t' - t$ , причем все моменты *случайной величины*  $|\xi(t', \omega) - \xi(t, \omega)|$ , начиная с третьего, имеют порядок малости  $o(\Delta)$ .

В предельном переходе к уравнению (8.4) для функций  $a(x, t)$  и  $b(x, t)$  получаем соотношения

$$a(x, t) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x) f(t, x, t + \Delta, z) dz, \\ b(x, t) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x)^2 f(t, x, t + \Delta, z) dz,$$

которые эквивалентны представлениям (8.5), (8.6), если в них положить  $\tau = t + \Delta$ .

**Вывод второго уравнения Колмогорова.** Второе уравнение Колмогорова (8.7) является сопряженным\* по отношению к первому уравнению Колмогорова (8.4). Поэтому его вывод осуществляется несколько более искусственным способом, чем вывод (8.4).

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — границы интервала изменения значений скалярного марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , с условной функцией плотности вероятностей  $f(t, x, \tau, y)$ , а  $R(y)$  — любая дважды непрерывно дифференцируемая на этом интервале неслучайная функция, удовлетворяющая условиям

$$R(\alpha) = R'(\alpha) = R(\beta) = R'(\beta) = 0. \quad (8.11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x, \tau, y)}{\partial \tau} R(y) dy = \\ = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha}^{\beta} (f(t, x, \tau + \Delta, y) - f(t, x, \tau, y)) R(y) dy, \end{aligned} \quad (8.12)$$

так как в правой части равенства возможен предельный переход под знаком интеграла [VII]. Согласно уравнению Маркова — Смолуховского — Чепмена — Колмогорова (8.2),

$$f(t, x, \tau + \Delta, y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x, \tau, z) f(\tau, z, \tau + \Delta, y) dz.$$

Поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t, x, \tau + \Delta, y) R(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x, \tau, z) f(\tau, z, \tau + \Delta, y) R(y) dz dy.$$

Если в двойном интеграле справа изменить обозначения переменных интегрирования, заменив  $z$  на  $y$  и  $y$  на  $z$ , то с его

---

\*См.: Марчук Г.И.

помощью равенство (8.12) приводится к следующему:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x, \tau, y)}{\partial \tau} R(y) dy = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \left[ \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x, \tau, y) \times \right. \\ \left. \times \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, y, \tau + \Delta, z) R(z) dz - R(y) \right) dy \right]. \quad (8.13)$$

Согласно принятому допущению, функция  $R(z)$  дважды непрерывно дифференцируема на интервале интегрирования. Поэтому ее можно представить в виде

$$R(z) = R(y) + R'(y)(z - y) + \frac{1}{2}R''(y)(z - y)^2 + o(|z - y|^2).$$

С учетом обозначений (8.5), (8.6) и в силу принятого допущения (8.10) о вероятности больших отклонений  $|\xi(t', \omega) - \xi(t, \omega)|$  получим

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \left( \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, y, \tau + \Delta, z) (R(y) + R'(y)(z - y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}R''(y)(z - y)^2 + o(|z - y|^2)) dz - R(y) \right) = \\ = R'(y) a(y, \tau) + \frac{1}{2}R''(y) b(y, \tau).$$

Подставив этот результат в (8.13), приходим к равенству

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t, x, \tau, y)}{\partial \tau} R(y) dy = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left( a(y, \tau) R'(y) + \frac{1}{2}b(y, \tau) R''(y) \right) f(t, x, \tau, y) dy,$$

которое интегрированием по частям [VI] с учетом условий (8.11) преобразуется к виду

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{\partial f(t, x, \tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} (a(y, \tau) f(t, x, \tau, y)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(y, \tau) f(t, x, \tau, y)) \right] R(y) dy = 0.$$

Полученное уравнение в силу произвольности функции  $R(y)$  приводит ко второму уравнению Колмогорова (8.7).

**Пример 8.2.** Рассмотрим  $n$ -мерный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , удовлетворяющий стохастической модели состояния в форме Ито:

$$\begin{cases} d\xi(t, \omega) = \Psi(\xi(t, \omega), t) dt + G(\xi(t, \omega), t) dw(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) = \xi_0(\omega), \end{cases} \quad (8.14)$$

где  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $n$ -мерный винеровский процесс, выходящий из  $0$ . Пусть при каждом фиксированном  $\omega \in \Omega$  и  $X \triangleq \xi(t, \omega)$  векторная функция  $\Psi(X, t)$  и матричная функция  $G(X, t)$  удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши (8.14) и являются непрерывными по  $t$  на промежутке  $T$ . В этом случае, как уже отмечалось в 7.2, стохастическая модель состояния (8.14) задает марковский процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и его условная функция плотности вероятностей должна удовлетворять уравнениям Колмогорова (8.4), (8.7). Определим коэффициенты этих уравнений, для чего воспользуемся интегральным представлением стохастической модели состояния (8.14). Имеем

$$\xi(t + \Delta, \omega) - \xi(t, \omega) = \int_t^{t+\Delta} \Psi(\xi, \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta} G(\xi, \tau) dw(\tau, \omega). \quad (8.15)$$

Второй интеграл в правой части (8.15) является *стохастическим интегралом Ито*. Повторив рассуждения, проведенные в 7.3 (см. доказательство теоремы 7.4), получим

$$\mathbf{M} \left[ \int_t^{t+\Delta} G(\xi, \tau) dw(\tau, \omega) \mid \xi = X \right] \equiv \mathbf{0}, \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left[ \left( \int_t^{t+\Delta} G(\xi, \tau) dw(\tau, \omega) \right) \left( \int_t^{t+\Delta} G(\xi, \tau) dw(\tau, \omega) \right)^T \mid \xi = X \right] = \\ = \int_t^{t+\Delta} G(X, \tau) G^T(X, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.17)$$

А так как  $\Psi(X, t)$  непрерывна по  $t$ , то из (8.15), согласно (8.16) и теореме о среднем [VI], имеем

$$\mathbf{M} [\xi(t + \Delta, \omega) - \xi(t, \omega) \mid \xi = X] = \int_t^{t+\Delta} \Psi(X, \tau) d\tau = \Psi(X, \tau_*) \Delta,$$

где  $t \leq \tau_* \leq t + \Delta$ . Подставив полученный результат в (8.5) и перейдя к пределу при  $\Delta \rightarrow +0$ , находим

$$a(X, t) = \Psi(X, t). \quad (8.18)$$

А так как

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} \left( \int_t^{t+\Delta} \Psi(X, \tau) d\tau \right) \left( \int_t^{t+\Delta} \Psi(X, \tau) d\tau \right)^T \equiv \Theta,$$

то, согласно (8.6), (8.15)–(8.17),

$$b(X, t) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} G(X, \tau) G^T(X, \tau) d\tau = G(X, t) G^T(X, t). \quad (8.19)$$

### 8.3. Стохастические модели состояния и уравнения Колмогорова

Равенства (8.18), (8.19) устанавливают связь между *стохастической моделью состояния в форме Ито* (8.14) и *уравнениями Колмогорова* при довольно жестких ограничениях. Поэтому возникает естественное желание ослабить эти ограничения и получить уравнения Колмогорова непосредственно исходя из *стохастической модели состояния*.

Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $n$ -мерный случайный процесс, удовлетворяющий стохастической модели состояния (8.14) в форме Ито, а  $f_\xi(X|t)$  — его одномерная функция плотности вероятностей. Определим *характеристическую функцию* изучаемого *случайного процесса*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ :

$$g(\lambda, t) \triangleq \mathbf{M}[e^{i\lambda\xi(t, \omega)}] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda X} f_\xi(X|t) dX,$$

где  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ , и рассмотрим разность

$$\begin{aligned} g(\lambda, t + \Delta t) - g(\lambda, t) &= \mathbf{M}[e^{i\lambda\xi(t+\Delta t, \omega)} - e^{i\lambda\xi(t, \omega)}] = \\ &= \mathbf{M}[(e^{i\lambda(\xi(t+\Delta t, \omega) - \xi(t, \omega))} - 1)e^{i\lambda\xi(t, \omega)}]. \end{aligned}$$

Нас будет интересовать предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{g(\lambda, t + \Delta t) - g(\lambda, t)}{\Delta t}.$$

Поэтому в дальнейших рассуждениях с целью упрощения выкладок будем пренебрегать слагаемыми порядка малости  $o(\Delta t)$  и писать:

$$\xi(t + \Delta t, \omega) - \xi(t, \omega) = \Psi(\xi(t, \omega), t)\Delta t + G(\xi(t, \omega), t)\Delta w(t, \omega),$$

$$\Delta w(t, \omega) = w(t + \Delta t, \omega) - w(t, \omega),$$

$$e^{i\lambda\Psi(\xi(t, \omega), t)\Delta t} - 1 = i\lambda\Psi(\xi(t, \omega), t)\Delta t.$$

Таким образом, при  $\xi \equiv \xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ,

$$\begin{aligned} g(\lambda, t + \Delta t) - g(\lambda, t) &= \mathbf{M}[(e^{i\lambda[\Psi(\xi, t)\Delta t + G(\xi, t)\Delta w]} - 1)e^{i\lambda\xi}] = \\ &= \mathbf{M}[(e^{i\lambda G(\xi, t)\Delta w}(e^{i\lambda\Psi(\xi, t)\Delta t} - 1) + e^{i\lambda G(\xi, t)\Delta w} - 1)e^{i\lambda\xi}] = \\ &= \mathbf{M}[(i\lambda\Psi(\xi, t)\Delta t e^{i\lambda G(\xi, t)\Delta w} + e^{i\lambda G(\xi, t)\Delta w} - 1)e^{i\lambda\xi}]. \end{aligned}$$

Фиксируем  $t \in T$ . Обозначим через  $f_*(X, Z|t)$  плотность распределения случайного вектора  $(\xi^T(t, \omega) \Delta w^T(t, \omega))^T$ , а через  $f_w(Z|t)$  — плотность распределения случайного вектора  $\Delta w(t, \omega)$ . Тогда в силу независимости сечений  $\Delta w(t, \omega)$  от  $\xi(t, \omega)$  имеем

$$f_*(X, Z|t) = f_\xi(X|t) f_w(Z|X, t) = f_\xi(X|t) f_w(Z|t).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} g(\lambda, t + \Delta t) - g(\lambda, t) &= \int \int_{\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n} (i\lambda\Psi(X, t)\Delta t e^{i\lambda G(X, t)Z} + \\ &+ e^{i\lambda G(X, t)Z} - 1) e^{i\lambda X} f_\xi(X|t) f_w(Z|t) dX dZ = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( i\lambda\Psi(X, t)\Delta t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda G(X, t)Z} f_w(Z|t) dZ + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda G(X, t)Z} f_w(Z|t) dZ - 1 \right) e^{i\lambda X} f_\xi(X|t) dX. \end{aligned}$$

А так как  $w(t, \omega)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , —  $n$ -мерный винеровский процесс и

$$\mathbf{M}[\Delta w(t, \omega)] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}[\Delta w(t, \omega) (\Delta w(t, \omega))^T] = I_n \Delta t,$$

то плотность распределения  $f_w(Z|t)$  для случайного вектора  $\Delta w(t, \omega)$  есть плотность  $n$ -мерного нормального распределения [XVI] с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma = I_n \Delta t$  и определяется равенством

$$f_w(Z|t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\Delta t)^n}} \exp\left(-\frac{Z^T Z}{2\Delta t}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda G(X,t)Z} f_w(Z|t) dZ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\Delta t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\lambda G(X,t)Z - \frac{Z^T Z}{2\Delta t}\right) dZ = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda G(X,t) G^T(X,t) \lambda^T \Delta t\right) \frac{1}{\sqrt{(2\pi\Delta t)^n}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta t} \left(Z - i(\lambda G(X,t))^T \Delta t\right)^T \left(Z - i(\lambda G(X,t))^T \Delta t\right)^T\right) dZ = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda G(X,t) G^T(X,t) \lambda^T \Delta t\right), \end{aligned}$$

так как функция

$$\begin{aligned} f(Z) &\triangleq \frac{1}{\sqrt{(2\pi\Delta t)^n}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2\Delta t} \left(Z - i(\lambda G(X,t))^T \Delta t\right)^T \left(Z - i(\lambda G(X,t))^T \Delta t\right)^T\right) \end{aligned}$$

является  $n$ -мерной плотностью нормального распределения и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Z) dZ = 1.$$

Используя полученный результат, заменяя экспоненту первыми двумя членами ее разложения по формуле Тейлора и отбрасывая



слагаемые порядка малости  $o(\Delta t)$ , получаем

$$\begin{aligned}
 g(\lambda, t + \Delta t) - g(\lambda, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( i\lambda \Psi(X, t) \Delta t e^{-0,5\lambda G(X, t) G^T(X, t) \lambda^T \Delta t} + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-0,5\lambda G(X, t) G^T(X, t) \lambda^T \Delta t} - 1 \right) e^{i\lambda X} f_{\xi}(X|t) dX = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( i\lambda \Psi(X, t) \Delta t (1 - 0,5\lambda G(X, t) G^T(X, t) \lambda^T \Delta t) - \right. \\
 &\quad \left. - 0,5\lambda G(X, t) G^T(X, t) \lambda^T \Delta t \right) e^{i\lambda X} f_{\xi}(X|t) dX = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( i\lambda \Psi(X, t) \Delta t - 0,5\lambda G(X, t) G^T(X, t) \lambda^T \Delta t \right) e^{i\lambda X} f_{\xi}(X|t) dX.
 \end{aligned}$$

Разделив правую и левую части полученного равенства на  $\Delta t$  и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , найдем

$$\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^n} \left( i\lambda \Psi(X, t) - \frac{1}{2} \lambda G(X, t) G^T(X, t) \lambda^T \right) e^{i\lambda X} f_{\xi}(X|t) dX.$$

Для перехода от характеристической функции к функции плотности вероятностей достаточно воспользоваться формулой обращения экспоненциального интегрального преобразования Фурье:

$$f(Y|t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda Y} g(\lambda, t) d\lambda.$$

В результате [XI] приходим к следующему уравнению относительно функции  $f_{\xi}(Y|t)$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{\xi}(Y|t)}{\partial t} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( i\lambda \Psi(X, t) - \frac{1}{2} \lambda G(X, t) G^T(X, t) \lambda^T \right) \times \\
 &\quad \times e^{i\lambda(X-Y)} f_{\xi}(X|t) dX d\lambda. \quad (8.20)
 \end{aligned}$$

Прежде чем приступить к анализу полученного уравнения (8.20), приведем без доказательства некоторые свойства  $\delta$ -функции Дирака\*:

1) если  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$  и  $X = (x_1 \dots x_n)^T$ , то

$$\delta(X) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda X} dX = \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_k x_k} dx_k \right) = \prod_{k=1}^n \delta(x_k);$$

2) если функция  $\varphi(X)$  непрерывна в  $\mathbb{R}^n$ , то для любого  $Y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(X) \delta(X - Y) dX = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(X) \delta(Y - X) dX = \varphi(Y);$$

3) если функции  $\varphi(X)$  и  $\varphi'_{x_k}(X)$  непрерывны в  $\mathbb{R}^n$ , то для любого  $Y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(X) \frac{\partial \delta(Y - X)}{\partial x_k} dX = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_k} \delta(Y - X) dX = - \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_k} \Big|_{X=Y};$$

4) если функции  $\varphi(X)$  и  $\varphi''_{x_i x_j}(X)$  непрерывны в  $\mathbb{R}^n$ , то для любого  $Y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(X) \frac{\partial^2 \delta(Y - X)}{\partial x_i \partial x_j} dX = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 \varphi(X)}{\partial x_i \partial x_j} \delta(Y - X) dX = \frac{\partial^2 \varphi(X)}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{X=Y};$$

5) в интегралах, содержащих  $\delta$ -функцию Дирака и ее производные, можно выполнить дифференцирование по параметру под знаком интеграла сколько угодно раз;

6) для частных производных  $\delta$ -функции Дирака имеют место интегральные представления

$$\frac{\partial \delta(X)}{\partial x_k} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} i\lambda_k e^{i\lambda X} d\lambda, \quad \frac{\partial^2 \delta(X)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{-1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_i \lambda_j e^{i\lambda X} d\lambda.$$

\*См.: [XII], а также Пугачев В.С.

Обратимся теперь к уравнению (8.20). Если  $\Psi_k(X, t)$  —  $k$ -я координатная функция для векторной функции  $\Psi(X, t)$ , а  $G_{ij}(X, t)$  — скалярная функция, расположенная на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца *матричной функции*  $G(X, t)G^T(X, t)$ , то (8.20) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(Y, t)}{\partial t} = & \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_k(X, t) f_{\xi}(X|t) \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} i\lambda_k e^{i\lambda(X-Y)} d\lambda \right) dX - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} G_{ij}(X, t) f_{\xi}(X|t) \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_i \lambda_j e^{i\lambda(X-Y)} d\lambda \right) dX. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно свойствам  $\delta$ -функции Дирака,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_k(X, t) f_{\xi}(X|t) \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} i\lambda_k e^{i\lambda(X-Y)} d\lambda \right) dX = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_k(X, t) f_{\xi}(X|t) \frac{\partial \delta(X-Y)}{\partial x_k} dX = \\ = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\Psi_k(X, t) f_{\xi}(X|t)] \Big|_{X=Y} = -\frac{\partial}{\partial y_k} [\Psi_k(Y, t) f_{\xi}(Y|t)], \\ \int_{\mathbb{R}^n} G_{ij}(X, t) f_{\xi}(X|t) \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_i \lambda_j e^{i\lambda(X-Y)} d\lambda \right) dX = \\ = -\int_{\mathbb{R}^n} G_{ij}(X, t) f_{\xi}(X|t) \frac{\partial^2 \delta(X-Y)}{\partial x_i \partial x_j} dX = \\ = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [G_{ij}(X, t) f_{\xi}(X|t)] \Big|_{X=Y} = -\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [G_{ij}(Y, t) f_{\xi}(Y|t)], \end{aligned}$$

и мы приходим ко *второму уравнению Колмогорова* (8.7) при замене  $t$  на  $\tau$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} (\Psi_k f) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (G_{ij} f) = 0.$$

Если вспомнить, что  $\Psi_k$  —  $k$ -я координатная функция векторной функции  $\Psi$ , а  $G_{ij}$  — скалярная функция, расположенная на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матричной функции  $G(X, t)G^T(X, t)$ , то из сопоставления полученного уравнения с (8.7) можно получить (8.18) и (8.19). Заметим также, что при выводе второго уравнения Колмогорова в данном случае не использовалось ограничение (8.10), а равенства (8.18) и (8.19) верны и при отсутствии непрерывности функций  $\Psi(X, t)$ ,  $G(X, t)$  по  $t \in T$ .

Равенства (8.18), (8.19) позволяют реализовать переход от стохастической модели состояния (8.14) к уравнениям Колмогорова (8.4), (8.7), которым удовлетворяет *условная функция плотности вероятностей*  $f(t, X, \tau, Y)$  марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определяемого стохастической моделью состояния (8.14). А так как уравнения Колмогорова (8.4), (8.7) полностью определяются матричной функцией  $b(X, t)$  и векторной функцией  $a(X, t)$ , то равенства (8.18), (8.19) позволяют реализовать и обратный переход от уравнений Колмогорова к *стохастическому дифференциальному уравнению*.

**Пример 8.3.** Пусть второе уравнение Колмогорова для условной функции плотности вероятностей  $f(t, x, \tau, y)$  скалярного марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 f) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sin(\tau y) f).$$

Согласно (8.7), имеем

$$a(x, t) = -x^2, \quad b(x, t) = 2 \sin(tx).$$

Так как (см. 8.2) *матрица диффузии* неотрицательно определена, то уравнение Колмогорова определено лишь для значений  $\tau$  и  $y$ , удовлетворяющих неравенству  $\sin(\tau y) \geq 0$ . Таким образом, из соотношений (8.18), (8.19) следует, что

$$\Psi(x, t) = -x^2, \quad G(x, t) = \sqrt{2 \sin(tx)},$$

т.е. скалярный марковский процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ито:

$$d\xi(t, \omega) = -\xi^2(t, \omega) dt + \sqrt{2 \sin(t\xi(t, \omega))} dw(t, \omega),$$

где  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный винеровский процесс, выходящий из 0. Знак перед радикалом в выражении для  $G(x, t)$  не играет роли в силу свойств случайного процесса  $w(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ . #

Если векторная функция  $a(X, t)$  известна, то векторную функцию  $\Psi(X, t)$ , входящую в стохастическую модель состояния (8.14), можно однозначно определить из (8.18). Пусть известна матричная функция  $b(X, t)$ . Рассмотрим (8.19) как нелинейную систему алгебраических уравнений относительно элементов  $g_{ij}(X, t)$  матричной функции  $G(X, t)$ . Нелинейная система (8.19) вследствие симметричности матричной функции  $b(X, t)$  (это следует из равенства (8.6)) имеет лишь  $n(n+1)/2$  линейно независимых уравнений и  $n^2$  неизвестных  $g_{ij}(X, t)$ . А так как при  $n > 1$  имеет место очевидное неравенство  $n^2 > n(n+1)/2$ , то в общем случае система (8.19) имеет бесконечное множество решений.

Итак, в общем случае переход от уравнений Колмогорова к стохастическим моделям состояния, определяющим исходные марковские процессы, не является однозначным. Более того, эта неоднозначность возможна и в скалярном случае, т.е. при  $n = 1$  (см. задачу 8.11, пример 8.3).

В практике научных исследований для матричной функции  $G(X, t)$  вводят, как правило, дополнительное ограничение

$$G^T(X, t) = G(X, t),$$

позволяющее преобразовать матричное уравнение (8.19) к стандартному виду

$$G^2(X, t) = b(X, t).$$

Тогда можно достаточно просто найти решение этого уравнения с помощью **квадратного корня из квадратной симметрической матрицы\***, который определяется с точностью до знака:

$$G(X, t) = \sqrt{b(X, t)}. \quad (8.21)$$

**Пример 8.4.** Определим систему стохастических дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет двумерный марковский процесс

$$\xi(t, \omega) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, \omega) \\ \xi_2(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, \infty),$$

если условная функция плотности вероятностей этого случайного процесса  $f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2)$  удовлетворяет *первому уравнению Колмогорова* с известными параметрами  $k, \sigma^2, h$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - (k^2 x_1 + 2h x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0.$$

Согласно (8.4), имеем

$$\begin{aligned} a_1(X, t) &= x_2, & a_2(X, t) &= -(k^2 x_1 + 2h x_2), \\ b_{11}(X, t) &\equiv b_{12}(X, t) \equiv b_{21}(X, t) \equiv 0, & b_{22}(X, t) &\equiv \sigma^2. \end{aligned}$$

Таким образом, матричная функция  $b(X, t)$  является симметрической и для завершения решения исходной задачи достаточно воспользоваться равенствами (8.18), (8.21):

$$\Psi_1(X, t) = x_2, \quad \Psi_2(X, t) = -k^2 x_1 - 2h x_2,$$

$$G(X, t) = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

и выписать систему стохастических дифференциальных уравнений, входящих в стохастическую модель состояния (8.14):

$$\begin{aligned} d\xi_1(t, \omega) &= \xi_2(t, \omega) dt, \\ d\xi_2(t, \omega) &= -[k^2 \xi_1(t, \omega) + 2h \xi_2(t, \omega)] dt + \sigma dw(t, \omega), \end{aligned}$$

\*См.: Директор С., Рорер Р.

где  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный винеровский процесс, выходящий из нуля. #

В заключение отметим следующее.

1. При любых фиксированных значениях  $X$  и  $t$  матрица диффузии  $b(X, t)$  является симметрической и неотрицательно определенной. Поэтому с помощью ортогонального преобразования ее можно привести к диагональному виду, т.е. существует такая ортогональная матрица  $T(X, t)$ , что

$$T^T(X, t) b(X, t) T(X, t) = \beta(X, t) = \text{diag} (\beta_1^2(X, t), \dots, \beta_n^2(X, t)).$$

При этом для определенности полагаем

$$\sqrt{\beta(X, t)} \triangleq \text{diag} (|\beta_1(X, t)|, \dots, |\beta_n(X, t)|).$$

А так как равенство

$$G^2(X, t) = b(X, t)$$

эквивалентно равенству

$$(T^T(X, t) G(X, t) T(X, t))^2 = T^T(X, t) b(X, t) T(X, t) = \beta(X, t),$$

то

$$G(X, t) = T(X, t) \sqrt{\beta(X, t)} T^T(X, t).$$

**Пример 8.5.** Чтобы вычислить квадратный корень из неотрицательно определенной симметрической матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2,5 & -1,5 \\ -1,5 & 2,5 \end{pmatrix},$$

находим ее собственные числа  $\beta_1^2 = 1$ ,  $\beta_2^2 = 4$  и соответствующие им единичные собственные векторы, которые образуют ортонормированную систему. Затем записываем матрицу

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\sqrt{b} &= T\sqrt{\beta}T^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}. \quad \# \end{aligned}$$

2. Переход от уравнений Колмогорова к соответствующим системам стохастических дифференциальных уравнений в общем случае не является однозначным, но представляет интерес, так как эти системы определяют марковские случайные процессы, эквивалентные по своим вероятностным свойствам процессам, для которых заданы соответствующие уравнения Колмогорова.

3. Случайные процессы  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют **независимыми случайными процессами (некоррелированными случайными процессами)**, если для любых  $t, \tau \in T$  случайные величины  $\xi(t, \omega)$  и  $\eta(t, \omega)$  независимые (некоррелированные).

#### 8.4. Постановки задач для нахождения условной функции плотности вероятностей

Уравнения Колмогорова (8.4), (8.7) являются уравнениями в частных производных параболического типа. Для того чтобы их решение определялось однозначно, необходимо задать *начальные и граничные условия*.

Начальное условие определяет зависимость искомой функции  $f(t, X, \tau, Y)$  от „пространственных координат“, представленных  $n$ -мерным вектором  $X$  для *первого уравнения Колмогорова* и  $n$ -мерным вектором  $Y$  для *второго уравнения Колмогорова*, в заданный (начальный) момент времени, определяемый значением переменного  $t$  или  $\tau$  соответственно.



Начальные условия для уравнений Колмогорова, как правило, устанавливают из смысла решаемой задачи. Для второго уравнения Колмогорова (8.7) естественно считать начальным значением временной переменной  $\tau$  настоящий момент времени  $t$ . Если начальное значение исходного марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , предполагается заданным, то *условная функция плотности вероятностей*  $f(t, X, \tau, Y)$  в начальный момент времени  $\tau = t$  обращается в  $\delta$ -функцию Дирака. Таким образом, в данной ситуации начальное условие имеет вид

$$f(t, X, \tau, Y) \Big|_{\tau=t} = \delta(X - Y). \quad (8.22)$$

Если начальное состояние изучаемого *случайного процесса* не известно, оно должно рассматриваться как *случайный вектор с плотностью распределения*  $f_0(Y)$ , а начальное условие принимает следующий вид:

$$f(t, X, \tau, Y) \Big|_{\tau=t} = f_0(Y). \quad (8.23)$$

Начальное условие для первого уравнения Колмогорова вводят аналогично начальным условиям (8.22), (8.23) для второго.

Уравнения Колмогорова (8.4), (8.7) можно интерпретировать с позиций математической физики [XII] как уравнения массопереноса. При таком подходе функции  $a$  и  $b$ , определяемые равенствами (8.5), (8.6), будут характеризовать конвективные и диффузионные составляющие процесса массопереноса. Поэтому их элементы зачастую называют **коэффициентами сноса и диффузии** соответственно.

Граничные условия для каждого из уравнений Колмогорова фактически являются условиями изолированности области  $G \subset \mathbb{R}^n$  изменения рассматриваемого  $n$ -мерного *марковского процесса*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ . В рамках рассматриваемой интерпретации этих уравнений условия изолированности области  $G \subset \mathbb{R}^n$  означают, что соответствующие суммарные потоки

обращаются в нуль на границе области  $\Gamma_G$ . С учетом этого граничные условия (8.7) можно задать следующим образом:

для второго уравнения Колмогорова

$$\left( a_k(Y, \tau) f - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial y_m} (b_{km}(Y, \tau) f) \right) \Big|_{y \in \Gamma_G} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (8.24)$$

для первого уравнения Колмогорова (8.4)

$$\left\{ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n b_{km}(X, t) \frac{\partial f}{\partial x_m} - \left[ a_k(X, t) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \frac{\partial b_{mk}(X, t)}{\partial x_m} \right] f \right\} \Big|_{X \in \Gamma_G} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.25)$$

Если  $G = \mathbb{R}^n$ , то граничные условия (8.24), (8.25) можно упростить:

для первого уравнения Колмогорова

$$\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} f(t, X, \tau, Y) \equiv 0, \quad (8.26)$$

для второго уравнения Колмогорова

$$\lim_{\|Y\| \rightarrow \infty} f(t, X, \tau, Y) \equiv 0. \quad (8.27)$$

Решения уравнений Колмогорова (8.4), (8.7) для начальных и граничных условиях вида (8.14)–(8.19) должны удовлетворять стандартным требованиям, предъявляемым к любой условной функции плотности вероятностей:

$$f(t, X, \tau, Y) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(t, X, \tau, Y) dY \equiv 1.$$

**Пример 8.6.** Рассмотрим скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , который является решением стохастической задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t, \omega) + \alpha \xi(t, \omega) = m \eta(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) \equiv x_0, \end{cases}$$

где  $\alpha$ ,  $m$ ,  $x_0$  — неслучайные величины, а  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — белый шум с единичной интенсивностью.

Исходная стохастическая модель состояния может быть записана в форме Стратоновича:

$$\begin{cases} d\xi(t, \omega) = -\alpha\xi(t, \omega) dt + m d_* w(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) \equiv x_0. \end{cases}$$

В данном случае  $m$  не зависит от состояния  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Следовательно, стохастическая модель состояния в форме Ито имеет тот же вид. Таким образом,  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является марковским процессом и его стохастическую модель состояния характеризуют функции

$$\Psi(x, t) = -\alpha x, \quad G(x, t) = m$$

и детерминированное начальное состояние  $x_0$ .

Для определения коэффициентов сноса и диффузии достаточно воспользоваться равенствами (8.18) и (8.19):

$$a(x, t) = \Psi(x, t) = -\alpha x, \quad b(x, t) = G^2(x, t) = m^2.$$

А так как начальное состояние является детерминированным, то, согласно (8.7), (8.22), (8.27), можно сформулировать задачу для нахождения условной функции плотности вероятностей  $f(t, x, \tau, y)$  случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial(yf)}{\partial y} + \frac{m^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, & \tau > t, \quad x, y \in \mathbb{R}, \\ f(t, x, \tau, y) \Big|_{\tau=t} = \delta(x - y), \\ \lim_{y \rightarrow \infty} f(t, x, \tau, y) = 0, \end{cases} \quad (8.28)$$

решение которой может быть получено с помощью интегральных преобразований [XI].

Полагая  $\rho = \tau - t$ , к задаче (8.28) применяем экспоненциальное интегральное преобразование Фурье по переменному  $y$ . В этом случае изображением экспоненциального интегрального преобразования Фурье условной функции плотности вероятностей  $f(t, x, \tau, y)$  является *характеристическая функция случайного процесса*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ :

$$g(\lambda, \rho, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y} f(t, x, \tau, y) dy,$$

которая, в силу (8.28) и свойств экспоненциального преобразования Фурье [XI], является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \rho} = -\frac{m^2}{2} \lambda^2 g + \alpha \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda}, & \rho > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ g(\lambda, \rho, x) \Big|_{\rho=0} = e^{i\lambda x}, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln g}{\partial \rho} = -\frac{m^2}{2} \lambda^2 + \alpha \lambda \frac{\partial \ln g}{\partial \lambda}, & \rho > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \ln g(\lambda, \rho, x) \Big|_{\rho=0} = i\lambda x. \end{cases}$$

Применив *интегральное преобразование Лапласа* по переменному  $\rho$ , приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка относительно *изображения* по Лапласу  $E(\lambda, s, x)$  функции  $\ln g(\lambda, \rho, x)$ :

$$\alpha \lambda \frac{\partial E}{\partial \lambda} - sE = \frac{m^2 \lambda^2}{2s} - i\lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

которое можно решить стандартными методами [VIII]. Из свойств условной функции плотности вероятностей  $f(t, x, \tau, y)$

(см. 8.1) и связи между характеристической функцией  $g(\lambda, \rho, x)$  и функцией  $f(t, x, \tau, y)$  следует, что

$$g(0, \rho, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, \tau, y) dy \equiv 1.$$

Поэтому

$$\ln g(0, \rho, x) \equiv 0, \quad E(0, s, x) \equiv 0$$

и

$$E(\lambda, s, x) = -\frac{m^2}{2s(s-2\alpha)}\lambda^2 + \frac{ix}{s-\alpha}\lambda.$$

По изображению  $E$  находим оригинал  $\ln g$ :

$$\ln g(\lambda, \rho, x) = i\lambda x e^{-\alpha\rho} - \frac{\lambda^2 m^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha\rho}).$$

Теперь достаточно записать выражение для характеристической функции  $g(\lambda, \rho, x)$  и при помощи обратного экспоненциального преобразования Фурье перейти к условной функции плотности вероятностей  $f(t, x, \tau, y)$ . Но обратим внимание на то, что в правой части полученного равенства записан натуральный логарифм характеристической функции для нормального распределения [XVI] с математическим ожиданием  $x e^{-\alpha\rho}$  и дисперсией  $(m^2/2\alpha)(1 - e^{-2\alpha\rho})$ . Поэтому с учетом обозначения  $\rho \triangleq \tau - t$  получаем

$$f(t, x, \tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau-t)}} \exp\left(-\frac{[y - m(x, \tau-t)]^2}{2\sigma^2(\tau-t)}\right),$$

где

$$m(x, \tau-t) = x e^{-\alpha(\tau-t)}, \quad \sigma^2(\tau-t) = \frac{m^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(\tau-t)}).$$

### 8.5. Три характерные задачи теории марковских случайных процессов с непрерывными состояниями

В практике прикладных исследований встречаются задачи, для корректного решения которых аппарат корреляционной теории *случайных процессов* недостаточен. К подобным задачам в первую очередь относятся задачи определения вероятности выброса значений случайного процесса за пределы заданной области и задачи определения *закона распределения* времени этого выброса. Решение этих задач для случайных процессов произвольного типа связано с преодолением значительных трудностей принципиального характера\*. Но если случайный процесс является *марковским*, то решения удастся получить относительно просто.

**Вероятность пребывания марковского случайного процесса в заданной области.** Простейшей задачей данного класса является вычисление *вероятности* того, что скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , в течение интервала времени  $(t, t + t_0) \subset T$  удовлетворяет неравенству

$$u_1 < \xi(t, \omega) < u_2, \quad (8.29)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  заданы.

Определение вероятности пребывания значений случайного процесса в заданной области необходимо при решении многих прикладных задач. В частности, к ним относятся задачи теории надежности, в которых для нормального функционирования изучаемой системы нужно, чтобы параметры, характеризующие систему во время ее работы, не выходили за некоторые допустимые пределы.

Рассмотрим решение подобных задач для скалярного марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Пусть значения изучаемого

---

\*См.: Фомин Я.А., а также Свешников А.А.

случайного процесса в интервале времени  $(t, \tau) \subset T$  ни разу не вышли за границы области, определенной неравенствами (8.29), а вероятность того, что в момент времени  $\tau \in T$  его значения будут находиться в интервале  $(y, y + dy)$ , с точностью до  $o(dy)$  равна  $W(\tau, y)dy$ . Очевидно, что  $W(\tau, y)$  — это *условная функция плотности вероятностей*, а искомая вероятность  $P(\tau)$  того, что граница области к моменту времени  $\tau = t + t_0$  не будет достигнута, определяется равенством

$$P(\tau) = \int_{u_1}^{u_2} W(\tau, y) dy. \quad (8.30)$$

Если условие (8.29) выполнено, то функция  $W(\tau, y)$ , будучи условной функцией плотности вероятностей скалярного марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет *второму уравнению Колмогорова*, т.е.

$$\frac{\partial W(\tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} (a(y, \tau)W(\tau, y)) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(y, \tau)W(\tau, y)) = 0 \quad (8.31)$$

при  $u_1 < y < u_2$ . Нарушение условия (8.29) связано с моментом, когда значение случайного процесса достигнет („коснется“) границы, т.е. при  $y = u_1$  или  $y = u_2$ . В этом случае попадание значений случайного процесса в интервал  $(y, y + dy)$  без достижения границ становится невозможным и для любого  $\tau \in T$  условная функция плотности вероятностей равна  $W(\tau, y) \equiv 0$ , т.е. имеют место *граничные условия*

$$W(\tau, u_1) \equiv 0, \quad W(\tau, u_2) \equiv 0, \quad \tau > t. \quad (8.32)$$

Если *начальные условия* для  $W(\tau, y)$  заданы равенствами (8.22) или (8.23), то исходная задача может быть сведена к смешанной задаче для уравнения Колмогорова (8.31) с граничными условиями (8.32) и начальными условиями (8.22) или (8.23).

**Пример 8.7.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный марковский процесс, определенный в примере 8.6. Найдем вероятность

того, что в течение времени  $\tau$  значения рассматриваемого случайного процесса не выйдут за пределы  $\pm h$ , если  $\xi(0, \omega) \equiv 0$ .

В соответствии с результатами, полученными в примере 8.6, приходим к смешанной задаче (8.31), (8.32), (8.22) для уравнения Колмогорова, решением которой является функция плотности вероятностей  $W(\tau, y)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial W(\tau, y)}{\partial \tau} = \frac{m^2}{2} \frac{\partial^2 W(\tau, y)}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial (yW(\tau, y))}{\partial y}, & \tau > 0, |y| < h, \\ W(0, y) = \delta(y), \\ W(\tau, -h) = W(\tau, h) = 0. \end{cases} \quad (8.33)$$

Для решения задачи (8.33) можно воспользоваться методом Фурье разделения переменных [XII]. В этом случае

$$W(\tau, y) = A(\tau) B(y),$$

где функция  $B(y)$  является решением задачи Штурма — Лиувилля [XI]:

$$\begin{cases} B''(y) + 2\alpha m^{-2} [yB(y)]' + \lambda^2 B(y) = 0, & |y| < h, \\ B(-h) = B(h) = 0, \end{cases} \quad (8.34)$$

а функция  $A(\tau)$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$A'(\tau) + \frac{1}{2} m^2 \lambda^2 A(\tau) = 0, \quad \tau > 0. \quad (8.35)$$

Как известно [XII], ортонормированная система решений задачи Штурма — Лиувилля (8.34) может быть представлена в виде

$$B_k(y) = c_k \exp\left(-\frac{\alpha}{2m^2} y^2\right) D_{\nu_k}\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{m} y\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$



где  $D_\nu(z)$  — функция параболического цилиндра (функция Вебера — Эрмита [XII]);  $\nu_k = m^2 \lambda_k^2 / \alpha$  — порядок функции параболического цилиндра, определяемый из уравнения

$$D_\nu\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{m}h\right) = 0;$$

$c_k$  — нормирующий множитель, который можно вычислить по формуле

$$c_k = \left( \int_{-h}^h D_{\nu_k}^2\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{m}y\right) dy \right)^{-1/2}.$$

Используя свойство ортонормированности системы функций  $\{B_k(y)\}$  с весом  $\rho(y) = \exp(\alpha m^{-2}y^2)$  и равенства  $D_{\nu_k}(0) = 1$ , получим разложение

$$W(0, y) = \delta(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\delta(y), B_k(y)) B_k(y),$$

где

$$\begin{aligned} (\delta(y), B_k(y)) &= \int_{-h}^h \exp\left(\frac{\alpha}{m^2}y^2\right) \delta(y) \times \\ &\times c_k \exp\left(-\frac{\alpha}{2m^2}y^2\right) D_{\nu_k}\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{m}y\right) dy \equiv c_k. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\lambda^2 = \lambda_k^2 \equiv \alpha \nu_k / m^2$ , то решение уравнения (8.35) имеет вид  $A_k(\tau) = c_k \exp(-0,5\alpha \nu_k \tau)$  и можно записать разложение для условной функции плотности вероятностей

$$W(\tau, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\tau) B_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \exp\left(-\frac{\alpha \nu_k \tau}{2} - \frac{\alpha y^2}{2m^2}\right) D_{\nu_k}\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{m}y\right).$$

Для получения окончательного результата достаточно воспользоваться (8.30) при  $u_1 = -h$  и  $u_2 = h$ :

$$P(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \exp\left(-\frac{\alpha \nu_k \tau}{2}\right) \int_{-h}^h \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{2m^2}\right) D_{\nu_k}\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{m}y\right) dy,$$

где  $\nu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  — корни уравнения  $D_\nu(\sqrt{2\alpha}h/m) = 0$ ;

$$c_k = \left( \int_{-h}^h D_{\nu_k}^2 \left( \frac{\sqrt{2\alpha}}{m} y \right) dy \right)^{-1/2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad \#$$

Если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $n$ -мерный марковский процесс, то можно рассматривать различные постановки задач о вероятности пребывания его значений в заданной области  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Эти различия главным образом связаны с видом области  $G$ , а основная идея решения исходной задачи практически та же, что и в скалярном случае.

Действительно, пусть к моменту времени  $\tau \in T$  значение  $n$ -мерного марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , ни разу не пересекало границы  $\Gamma_G$  области  $G \subset \mathbb{R}^n$ , а вероятность того, что в момент времени  $\tau$  значение случайного процесса попадает в  $n$ -мерный интервал  $(Y, Y + dY)$ , т.е. для любого  $k = \overline{1, n}$  его  $k$ -я компонента попадает в интервал  $(y_k, y_k + dy_k)$ , с точностью  $o(\|dY\|)$  равна  $W(\tau, Y)dY$ . Тогда, рассуждая так же, как и в скалярном случае, приходим к выводу, что функция  $W(\tau, Y)$  удовлетворяет второму уравнению Колмогорова, граничным условиям

$$W(\tau, Y) \Big|_{Y \in \Gamma_G} = 0,$$

одному из начальных условий (8.22) или (8.23), а искомая вероятность  $P(\tau)$  того, что граница области не достигнута, равна

$$P(\tau) = \int_G W(\tau, Y) dY.$$

**Закон распределения времени пребывания марковского процесса в заданной области.** Пусть  $f_\rho(z)$  — функция плотности вероятностей времени пребывания скалярного марковского процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , в заданной области, опре-

деленной неравенствами (8.29). Если к моменту времени  $\tau$  значения рассматриваемого случайного процесса еще ни разу не достигали границ области, то время  $\rho$  их пребывания в допустимой области будет не менее, чем  $(\tau - t)$ . Вероятность реализации этого события равна

$$\int_{\tau-t}^{\infty} f_{\rho}(z) dz.$$

С другой стороны, эта же вероятность определена равенством (8.30), т.е.

$$\int_{\tau-t}^{\infty} f_{\rho}(z) dz = \int_{u_1}^{u_2} W(\tau, y) dy.$$

Таким образом,

$$f_{\rho}(z) = -P'(\tau) \Big|_{\tau=t+z} = - \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial W(\tau, y)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t+z} dy. \quad (8.36)$$

1. Если за начальный момент времени взят момент пересечения значениями случайного процесса границы допустимой области, то функция  $f_{\rho}(z)$ , определяемая равенством (8.36), устанавливает закон распределения времени пребывания значений этого случайного процесса в допустимой области от момента входа в нее и до момента выхода.

2. Если  $u_2 = +\infty$ , то функция  $f_{\rho}(z)$  устанавливает закон распределения времени выброса значений рассматриваемого случайного процесса за уровень  $u_1$  „снизу вверх“.

3. Если функция  $f_{\rho}(z)$  плотности вероятностей времени пребывания значений скалярного марковского процесса  $\xi(t, \omega)$  в допустимой области определена, то математическое ожидание этого времени пребывания равно

$$\bar{\rho} = \int_0^{\infty} z f_{\rho}(z) dz = \int_t^{\infty} P(\tau) d\tau. \quad (8.37)$$

Выражение в правой части (8.37) отвечает определению математического ожидания, если для функции плотности вероятностей  $f_p(z)$  воспользоваться представлением (8.36) с последующим интегрированием по частям.

4. Если в уравнениях Колмогорова, соответствующих рассматриваемому скалярному марковскому процессу  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , коэффициенты сноса и диффузии не зависят от времени, т.е.

$$a(x, t) \equiv a(x), \quad b(x, t) \equiv b(x),$$

то математическое ожидание  $\bar{p}$  можно определить, не используя (8.37). Действительно, в этом случае (см. пример 8.6) условная функция плотности вероятностей  $W(\tau, y)$  будет зависеть не от  $t$  и  $\tau$ , а от разности  $\tau - t$ . Поэтому

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial \tau}.$$

До того момента, когда значения случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , достигают границы допустимой области, функция  $W(t, x)$  является решением первого уравнения Колмогорова:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a(x) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

Заменив в этом уравнении  $W'_t$  на  $-W'_\tau$  и проинтегрировав его по переменному  $y$  в пределах от  $u_1$  до  $u_2$ , с учетом равенства (8.30) приходим к дифференциальному уравнению в частных производных относительно  $P(\tau)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = a(x) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

Так как, согласно определению вероятности  $P(\tau)$ , имеют место равенства

$$P(t) = 1, \quad P(\infty) = 0,$$

то после интегрирования этого уравнения по  $\tau$  в пределах от  $t$  до  $+\infty$  в соответствии с равенством (8.37) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(x)$ :

$$\frac{1}{2}b(x)\bar{\rho}''(x) + a(x)\bar{\rho}'(x) + 1 = 0, \quad u_1 < x < u_2, \quad (8.38)$$

дополняемому очевидными краевыми условиями

$$\bar{\rho}(u_1) = \bar{\rho}(u_2) = 0. \quad (8.39)$$

**Пример 8.8.** В условиях примера 8.7 примем коэффициент диффузии равным  $b(x) \equiv m^2$ , а коэффициент сноса  $a(x) \equiv -\alpha x$ . Тогда краевая задача (8.38), (8.39) относительно  $\bar{\rho}(x)$  примет следующий вид:

$$\frac{1}{2}m^2\bar{\rho}''(x) - \alpha x\bar{\rho}'(x) + 1 = 0, \quad |x| < h,$$

$$\bar{\rho}(-h) = \bar{\rho}(h) = 0.$$

Понизив порядок уравнения, без особых трудностей находим значение математического ожидания времени пребывания значений исходного случайного процесса в пределах  $\pm h$  в зависимости от его начального значения  $x$ :

$$\bar{\rho}(x) = \frac{2}{m^2} \int_{-h}^x \left( C - \int_{-h}^z \exp\left(-\frac{\alpha z^2}{m^2}\right) dz \right) \exp\left(\frac{\alpha y^2}{m^2}\right) dy,$$

$$C = \left( \int_{-h}^h \exp\left(\frac{\alpha y^2}{m^2}\right) dy \right)^{-1} \int_{-h}^h \int_{-h}^y \exp\left(\frac{\alpha}{m^2}(y^2 - z^2)\right) dz dy.$$

Отметим, что (8.36), (8.37) справедливы и для векторных марковских процессов.

**Среднее число выбросов значений марковского процесса за данный уровень.** Задача определения среднего числа выбросов значений марковского процесса за данный уро-

вень в единицу времени, для каждого из которых время пребывания вне допустимой области больше заданного значения  $\rho_0$ , сводится к решению соответствующих задач для уравнений Колмогорова. При этом логика решения исходной задачи аналогична логике решения задачи об определении вероятности пребывания значений марковского процесса в заданной области.

Рассмотрим временной интервал  $(t, t + \Delta) \subset T$ , в течение которого значения марковского скалярного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , пересекли уровень  $y = u_2$ . При этом условии вероятность того, что к моменту времени  $\tau \in T$  значения изучаемого случайного процесса принадлежат интервалу  $(y, y + dy)$  и ни разу за промежуток времени  $(t, \tau)$  не опускаются ниже уровня  $y = u_2$ , представим в виде произведения  $v(\tau, y)\Delta$ . Это представление верно с точностью  $o(\Delta)$ . А так как длина  $\Delta$  временного интервала  $(t, t + \Delta)$  не зависит ни от  $\tau$ , ни от  $y$ , то функция  $v(\tau, y)$  должна удовлетворять второму уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial v(\tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(a(y, \tau)v(\tau, y)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(b(y, \tau)v(\tau, y)) = 0. \quad (8.40)$$

Начальное и граничные условия для уравнения (8.40) должны отражать два обстоятельства:

- 1) для моментов времени, предшествующих  $t$ , значения случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , находятся ниже уровня  $y = u_2$ ;
- 2) в некоторый момент времени из интервала  $(t, t + \Delta)$  значения случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , пересекают уровень  $y = u_2$ .

Из первого условия следует, что

$$v(\tau, y) \Big|_{\tau < t} \equiv 0, \quad (8.41)$$

так как для моментов времени, предшествующих  $t$ , значения случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , не могут быть больше, чем  $u_2$ , ни разу не опускаясь ниже этого уровня, поскольку предполагается наличие выброса в окрестности значения  $t$ .

Так как время выброса точно не известно, а известно лишь, что выброс произошел в интервале времени  $(t, t + \Delta)$ , то второе условие означает, что интеграл от  $v(\tau, y)\Delta$  по переменному  $\tau$  в пределах от  $t$  до  $t + \Delta$  при  $y = u_2$  должен определять вероятность попадания значений случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , в окрестность значения  $u_2$ . Таким образом,

$$v(\tau, u_2)\Delta = \delta(\tau - t) f(t, u_2)\Delta$$

и окончательно

$$v(\tau, u_2) = \delta(\tau - t) f(t, u_2), \quad (8.42)$$

где  $f(t, x)$  — функция плотности вероятностей случайной величины  $\xi(t, \omega)$  в заданный момент времени  $t$ . Условия (8.41), (8.42) полностью определяют частное решение уравнения (8.40).

Число выбросов  $n(u_2, \rho_0)\Delta$ , длительность которых не меньше заданной величины  $\rho_0$  и которые происходят в среднем в течение интервала времени  $(t, t + \Delta)$ , равно вероятности того, что выброс, начавшийся в интервале  $(t, t + \Delta)$ , не закончится к моменту  $\tau = t + \Delta$ . А так как *условная вероятность реализации этого случайного события* в принятых обозначениях равна

$$\Delta \int_{u_2}^{\infty} v(\rho_0, y) dy,$$

то окончательное решение исходной задачи имеет вид

$$n(u_2, \rho_0) = \int_{u_2}^{\infty} v(\rho_0, y) dy. \quad (8.43)$$

В заключение отметим следующее.

1. Введем в рассмотрение функцию  $u(\tau, y)$ , определяемую равенством

$$v(\tau, y) = f(t, u_2) u(\tau, y).$$

Тогда из (8.40)–(8.43) следует, что

$$\begin{cases} n(u_2, \rho_0) = f(t, u_2) \int_{u_2}^{\infty} u(\rho_0, y) dy, \\ \frac{\partial u(\tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} (a(y, \tau) u(\tau, y)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(y, \tau) u(\tau, y)) = 0, \\ u_2 < y < \infty, \quad u(\tau, y) \Big|_{\tau < t} = 0, \quad u(\tau, u_2) \Big|_{\tau \geq t} = \delta(\tau - t). \end{cases} \quad (8.44)$$

На практике при определении среднего числа выбросов марковского процесса за заданный уровень удобно представлять исходную задачи в виде (8.44), так как в таком виде легче обеспечить численное решение.

2. Если исходный случайный процесс является стационарным в широком смысле, то

$$f(\tau, y) \equiv f(y), \quad a(\tau, y) \equiv a(y), \quad b(\tau, y) \equiv b(y) \quad (8.45)$$

и функция  $f(y)$  должна удовлетворять второму уравнению Колмогорова, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dy} (a(y) f(y)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} (b(y) f(y)) = 0, \quad (8.46)$$

стандартному свойству функции плотности вероятностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$$

и граничным условиям (8.24) в виде

$$\left( \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (b(y) f(y)) - a(y) f(y) \right) \Big|_{y \in \{\alpha, \beta\}} = 0, \quad (8.47)$$

где  $\Gamma_G = \{\alpha, \beta\}$  — множество граничных точек области  $G$  изменения значений рассматриваемого случайного процесса,



представляющей собой конечный или бесконечный интервал  $(\alpha, \beta)$ . Интегрируя правую и левую части уравнения (8.48) по  $y$  в пределах от  $\alpha = -\infty$  до  $y \in G$  с учетом граничного условия (8.47) при  $y = \alpha$ , приходим к следующей задаче относительно функции  $f(y)$ :

$$\begin{cases} b(y)f'(y) + (b'(y) - 2a(y))f(y) = 0, \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = 1. \end{cases} \quad (8.48)$$

3. Пусть исходный случайный процесс является стационарным в широком смысле и

$$U(s, y) = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau-t)} u(\tau, y) d\tau \quad —$$

изображение по Лапласу для оригинала  $u(\tau, y)$ . В соответствии с (8.44) и (8.45) функция  $U(s, y)$  является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b(y)U(s, y)) - 2\frac{\partial}{\partial y} (a(y)U(s, y)) - 2sU(s, y) = 0, \\ u_2 < y < \infty, \quad U(s, u_2) = 1, \quad U(s, \infty) \equiv 0, \end{cases} \quad (8.49)$$

где условие  $U(s, \infty) \equiv 0$  соответствует граничному условию (8.27). Кроме того, если

$$N(u_2, s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-s(\tau-t)} n(u_2, \tau) d\tau,$$

то из первого уравнения (8.44) следует, что

$$N(u_2, s) = f(u_2) \int_{u_2}^{\infty} U(s, y) dy.$$

Интегрируя уравнение (8.49) по  $y$  в пределах от  $u_2$  до  $+\infty$ , получаем

$$\int_{u_2}^{\infty} U(s, y) dy = \left( \frac{1}{s} a(y) - \frac{1}{2s} \frac{\partial}{\partial y} (b(y) U(s, y)) \right) \Big|_{y=u_2},$$

так как по условию  $U(s, \infty) \equiv 0$ . Таким образом,

$$N(u_2, s) = f(u_2) \left( \frac{1}{s} a(y) - \frac{1}{2s} \frac{\partial}{\partial y} (b(y) U(s, y)) \right) \Big|_{y=u_2}, \quad (8.50)$$

и для того, чтобы найти среднее число выбросов значений марковского процесса за уровень  $y = u_2$  в единицу времени, каждый из которых имеет длительность более заданного значения  $\rho_0$ , достаточно обратить интегральное преобразование Лапласа.

**Пример 8.9.** Для случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определенного в примере 8.6, определим среднее число выбросов  $n(0, \rho_0)$  за нулевой уровень, длительность которых превосходит  $\rho_0$ ,

В рассматриваемом случае

$$a(y, \tau) \equiv -\alpha y, \quad b(y, \tau) \equiv m^2.$$

Согласно (8.48),

$$m^2 f'(y) + 2\alpha y f(y) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1.$$

Следовательно,

$$f(y) = \frac{\sqrt{\alpha}}{m\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{m^2}\right)$$

является функцией плотности вероятностей нормального закона распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2 = m^2/(2\alpha)$ . А так как по условию  $u_2 = 0$ , то

$$f(u_2) = f(0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi m^2}}.$$

В соответствии с (8.49) изображение по Лапласу  $U(s, y)$  функции  $u(\tau, y)$  является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(s, y)}{\partial y^2} + \frac{2\alpha y}{m^2} \frac{\partial U(s, y)}{\partial y} + \frac{2\alpha - 2s}{m^2} U(s, y) = 0, & y > 0, \\ U(s, 0) = 1, & U(s, \infty) = 0. \end{cases}$$

Таким образом [XII],

$$U(s, y) = \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{2m^2}\right) \frac{D_{-s/\alpha}(y/\alpha)}{D_{-s/\alpha}(0)}.$$

Подставив полученные результаты в (8.50), с учетом свойств функции параболического цилиндра найдем

$$N(0, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{D_{-s/\alpha-1}(0)}{D_{-s/\alpha}(0)},$$

откуда

$$n(0, \rho_0) = \frac{\alpha e^{-\alpha\tau}}{\pi \sqrt{1 - e^{-2\alpha\tau}}} \Big|_{\tau=\rho_0}. \quad \#$$

4. Все полученные результаты могут быть обобщены и на случай  $m$ -мерного марковского процесса.

## Вопросы и задачи

8.1. Напишите уравнение Маркова — Смолуховского — Чепмена — Колмогорова. Почему оно справедливо лишь для марковских процессов?

8.2. Докажите теорему 8.1 при  $n > 1$ .

8.3. Перечислите типовые постановки задач для определения условной функции плотности вероятностей  $f(t, X, \tau, Y)$ .

8.4. Можно ли утверждать, что:

а) каждая стохастическая модель состояния однозначно определяет марковский процесс;

б) каждый марковский процесс порожден стохастической моделью состояния;

в) каждый марковский процесс однозначно определяет стохастическую модель состояния?

**8.5.** Как связаны между собой параметры уравнений Колмогорова и соответствующей стохастической модели состояния?

**8.6.** Изложите основную идею решения задачи определения вероятности пребывания значений марковского процесса в заданной области.

**8.7.** Изложите основную идею решения задачи определения закона распределения времени пребывания значений марковского процесса в заданной области.

**8.8.** Возможно ли обобщение краевой задачи (8.38), (8.39) для определения математического ожидания времени пребывания значений скалярного марковского процесса в заданной области на случай векторного марковского процесса?

**8.9.** Почему при постановке задачи определения среднего числа выбросов значений марковского процесса за заданный уровень накладывается ограничение на время пребывания значений случайного процесса вне допустимой области?

**8.10.** Изложите основную идею решения задачи определения среднего числа выбросов значений марковского процесса за заданный уровень.

**8.11.** Пусть  $w_1(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , и  $w_2(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — независимые винеровские скалярные процессы, а скалярный случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определен стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\eta(t, \omega) + \eta^2(t, \omega)dt = \sqrt{2\sin(t\eta(t, \omega)) - c^2}dw_1(t, \omega) + c dw_2(t, \omega),$$

где  $c$  — произвольная постоянная. Докажите, что  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — марковский процесс, которому соответствует уравнение Колмогорова, приведенное в примере 8.3.

**8.12.** Предположим, что условная функция плотности вероятностей  $f(t, X, \tau, Y)$   $n$ -мерного марковского процесса удовлетворяет второму уравнению Колмогорова (8.7), в котором коэффициенты сноса заданы равенствами

$$a_k(Y, \tau) = \sum_{m=1}^n \alpha_{km} y_m + \beta_k, \quad k = \overline{1, n},$$

а коэффициенты диффузии  $b_{km}(Y, \tau)$ ,  $k, m = \overline{1, n}$ , равно как и параметры  $\alpha_{km}$ ,  $\beta_k$ ,  $k, m = \overline{1, n}$ , являются известными постоянными. Воспользовавшись начальным условием (8.22), обобщите результат, полученный при рассмотрении примера 8.6, и докажете, что исходный случайный процесс является гауссовским.

**8.13.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — скалярный гауссовский стационарный (в широком смысле) случайный процесс, спектральная плотность которого равна

$$s_{\xi}(\nu) = \frac{c^2 \nu^2}{(\nu^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2 \nu^2},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  — известные постоянные. Докажите, что  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно рассматривать как компоненту векторного марковского процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Определите размерность такого случайного процесса и коэффициенты уравнений Колмогорова для него.

Ответ:  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — первая компонента двумерного марковского процесса. При этом  $a_1(X, t) = x_2$ ,  $a_2(X, t) = -(\alpha^2 + \beta^2)x_1 - 2\alpha x_2$ ,  $b_{11}(X, t) = c^2$ ,  $b_{12}(X, t) = b_{21}(X, t) = -2\alpha c^2$ ,  $b_{22}(X, t) = 4\alpha^2 c^2$ .

**8.14.** Получите систему стохастических дифференциальных уравнений, определяющих двумерный марковский процесс, если его условная функция плотности вероятностей удовлетворяет уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{\mu} \left( y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \varphi(y_1) \frac{\partial f}{\partial y_2} \right) - \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\partial^2 (y_2 f)}{\partial y_1^2} + \frac{\chi^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} \right) = 0,$$

где  $\mu$  и  $\chi$  — известные постоянные, а  $\varphi$  — известная неслучайная скалярная функция.

О т в е т:

$$\begin{cases} d\xi_1(t, \omega) = \mu^{-1} \xi_2(t, \omega) dt + \mu^{-1} \sqrt{2\xi_2(t, \omega)} dw_1(t, \omega), \\ d\xi_2(t, \omega) = \mu^{-1} \varphi(\xi_1(t, \omega)) dt + \mu^{-1} \chi dw_2(t, \omega), \end{cases}$$

где  $w(t, \omega) = (w_1(t, \omega) \ w_2(t, \omega))^T$ ,  $t \in T$ , — двумерный винеровский процесс, выходящий из  $\Theta$ .

**8.15.** Закон отклонения руля высоты самолета, которое сообщается автопилотом для ликвидации воздействия пульсаций ветра, характеризуемых случайным процессом  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно приближенно описать стохастическим дифференциальным уравнением

$$T_0 \dot{\eta}(t, \omega) + \eta(t, \omega) = l_0 \xi(t, \omega), \quad t \in T,$$

где  $T_0$ ,  $l_0$  — известные постоянные. Определите условную функцию плотности вероятностей  $f(t, x, \tau, y)$  для случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , если известно, что  $M[\xi(t, \omega)] \equiv 0$ ,  $K_\xi(t_1, t_2) = \sigma_\xi^2 \delta(t_2 - t_1)$  и  $\eta(\tau, \omega) \equiv x$  при  $\tau = t$ .

О т в е т:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{T_0} \frac{\partial(yf)}{\partial y} - \frac{l_0^2 \sigma_\xi^2}{2T_0^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

$$f(t, x, \tau, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2(\tau-t)}} \exp\left(-\frac{(y - m_\eta(x, \tau-t))^2}{2\sigma_\eta^2(\tau-t)}\right),$$

$$m_\eta(x, \tau-t) = x \exp\left(-\frac{\tau-t}{T_0}\right),$$

$$\sigma_\eta^2(\tau-t) = \frac{l_0 \sigma_\xi^2}{2T_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{2(\tau-t)}{T_0}\right)\right].$$

**8.16.** Пусть  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $m$ -мерный марковский процесс. Определите вероятность того, что в момент времени  $\tau \in T$

значение его первой компоненты будет находиться в интервале  $(\alpha, \beta)$ .

$$\text{О т в е т: } P_1(\tau) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau, y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 dy_2 \dots dy_m.$$

**8.17.** Угловые отклонения  $\eta_1$  и  $\eta_2$  оси гироскопического маятника от вертикали в первом приближении удовлетворяют системе стохастических уравнений

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 - \chi g \eta_2 = -\chi \xi_1, \\ \dot{\eta}_2 + \chi g \eta_1 = \chi \xi_2, \end{cases}$$

где  $\chi, g$  — известные постоянные, а  $\xi_1(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , и  $\xi_2(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — горизонтальные ускорения точки подвеса маятника, которые можно считать независимыми случайными процессами, обладающими свойствами белого шума:

$$M[\xi_k(t)] \equiv 0, \quad K_{\xi_k}(\tau) \equiv c\delta(\tau).$$

Определите вероятность того, что в течение интервала времени  $T$  ось маятника ни разу не выйдет за пределы конуса, образующая которого составляет угол  $\gamma$  с вертикалью, если в начальный момент времени ось маятника вертикальна.

О т в е т:

$$P(T) = \iint_{y_1^2 + y_2^2 \leq \gamma^2} W(T, y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

где  $W(T, y_1, y_2)$  — решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \chi g y_2 \frac{\partial W}{\partial y_1} - \chi g y_1 \frac{\partial W}{\partial y_2} - \frac{\chi^2 c^2}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} \right) = 0, \\ W(0, y_1, y_2) = \delta(y_1) \delta(y_2), \quad y_1^2 + y_2^2 < \gamma^2, \\ W(\tau, y_1, y_2) \Big|_{y_1^2 + y_2^2 < \gamma^2} \equiv 0. \end{cases}$$

Решение смешанной задачи может быть получено методом Фурье разделения переменных [XII] в полярной системе координат и имеет вид

$$P(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\chi^2 c^2 T}{2\gamma^2}\right) \frac{2}{\gamma^2 I_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x I_0(x\mu_k) dx,$$

где  $\mu_k$  — корни уравнения  $I_0(\mu) = 0$ , а  $I_1(x)$  и  $I_0(x)$  — функции Бесселя [XI].

**8.18.** Пусть  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — двумерный марковский процесс с известными коэффициентами сноса и диффузии. Изложите общую схему решения задачи определения среднего числа выбросов его ординаты за уровень, определяемый уравнением  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = d$ , в направлении вектора нормали  $(\alpha_1 \ \alpha_2)^T$ .



## 9. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Подобно тому, как результаты теории вероятностей находят свое практическое применение в методах математической статистики, так и результаты, содержащиеся в предыдущих главах, являются теоретической основой для построения методов статистики случайных процессов.

Из всего многообразия задач статистики случайных процессов рассмотрим лишь *задачу оценивания параметров случайного процесса* по дискретным значениям его *выборочных реализаций*. Это оправдано, во-первых, тем, что ее постановка является типичной для весьма обширного класса прикладных задач, а во-вторых, тем, что ее решать можно различными методами. Применение таких методов показано в этой главе. Более полное изложение статистики случайных процессов читатель может найти в специальной литературе\*.

Приступая к обсуждению задачи оценивания параметров случайных процессов по дискретным значениям их выборочных реализаций, введем некоторые обозначения и рассмотрим типовые варианты данных наблюдений.

### 9.1. Данные наблюдений

Напомним, что если  $\xi(\omega)$  —  $n$ -мерный случайный вектор с множеством возможных значений  $X \subset \mathbb{R}^n$  и плотностью распределения вероятностей  $f_\xi(x|\beta) \equiv f_\xi(x_1, \dots, x_n|\beta_1, \dots, \beta_L)$ , где  $\beta \in \mathbb{R}^L$  — вектор параметров, то *случайной выборкой*

---

\*См.: Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.

объема  $N$  для  $\xi(\omega)$  называют блочный случайный вектор

$$Q_N[\xi(\omega)] \triangleq \begin{pmatrix} \xi_{(1)}(\omega) \\ \xi_{(2)}(\omega) \\ \vdots \\ \xi_{(N)}(\omega) \end{pmatrix}$$

с множеством возможных значений  $Y = X^N \subset \mathbb{R}^{nN}$  и функцией плотности вероятностей

$$f(y|\beta) \equiv \prod_{k=1}^N f_{\xi}(y_{(k)}|\beta),$$

который составлен из независимых  $n$ -мерных случайных векторов  $\xi_{(k)}(\omega)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , имеющих тот же закон распределения, что и  $n$ -мерный случайный вектор  $\xi(\omega)$ . Конкретное значение случайного вектора  $Q_N[\xi(\omega_*)]$  называют **реализацией случайной выборки**.

Пусть теперь  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , —  $n$ -мерный случайный процесс, характеризующий состояние изучаемого объекта, а  $\xi(t, \omega_{(k)})$ ,  $\omega_{(k)} \in \Omega$ , является его  $k$ -й реализацией,  $k = \overline{1, m}$ . Будем предполагать, что при проведении  $k$ -го испытания в результате наблюдений за состоянием изучаемого объекта в дискретные моменты времени  $t_{kj}$ ,  $j = \overline{1, N(k)}$ ,  $a \leq t_{k1} < t_{k2} < \dots < t_{kN(k)} \leq b$ , определена **выборочная реализация**

$$\xi(T_{(k)}, \omega_{(k)}) \triangleq \{\xi(t, \omega_{(k)}): t \in T_{(k)}\}, \quad T_{(k)} \triangleq \{t_{kj}\}_{j=1}^{N(k)}, \quad (9.1)$$

являющаяся совокупностью  $N(k)$  значений случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , в дискретные моменты времени, составляющие множество  $T_{(k)}$ , при фиксированном значении  $\omega = \omega_{(k)} \in \Omega$ . Совокупность  $m$  таких выборочных реализаций обозначим как множество

$$U_m \triangleq \{\xi(T_{(k)}, \omega_{(k)})\}_{k=1}^m, \quad (9.2)$$

а при  $m = 1$  вместо  $U_1$  будем просто писать  $U$ .

Предполагая, что случайные процессы  $\xi_{(k)}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ,  $k = \overline{1, m}$ , независимы и имеют те же конечномерные законы распределения, что и исходный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можем считать  $\xi(T_{(k)}, \omega_{(k)})$  выборочной реализацией случайного процесса  $\xi_{(k)}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и в этом смысле говорить о **независимости выборочных реализаций**, представленных множеством  $U_m$ .

Далее мы предполагаем, что для всех  $k = \overline{1, m}$  значения  $\xi(t_{kj}, \omega_{(k)})$ ,  $j = \overline{1, N(k)}$ , случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определены точно путем прямых измерений значений компонент вектора состояния изучаемого объекта. Таким образом, считаем, что выборочные реализации не содержат ни систематических, ни случайных ошибок измерений.

В практических задачах встречаются самые разнообразные варианты данных наблюдений в зависимости от возможностей их получения. Например, множества  $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(m)}$  могут не содержать общих элементов (рис. 9.1), но может иметь место ситуация, когда  $T_{(1)} = T_{(2)} = \dots = T_{(m)}$ , т.е. значения выборочных реализаций измерены в одни и те же моменты времени  $t_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , где для всех  $k = \overline{1, m}$  имеем  $N(k) \equiv N$  и  $t_{kj} \equiv t_j$ ,  $j = \overline{1, N}$  (рис. 9.2). На рис. 9.1 и 9.2 элементы множества  $U_m$  для скалярного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , представлены в виде точек, расположенных на его траекториях.

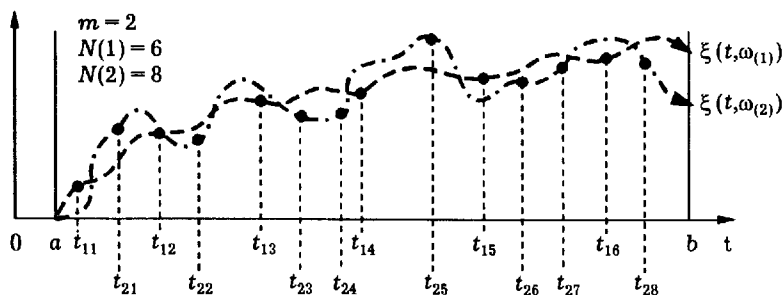


Рис. 9.1

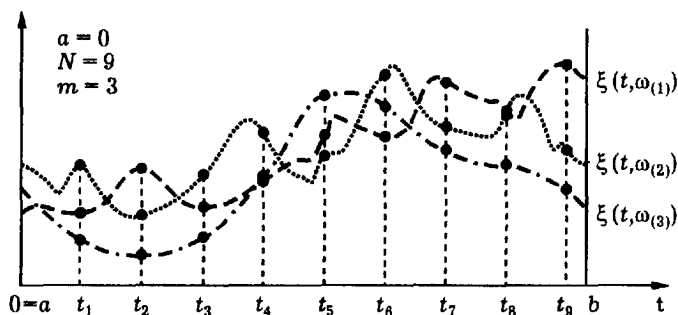


Рис. 9.2

Довольно часто встречается случай, когда одно испытание позволяет произвести лишь одно измерение вектора состояния (например, если в результате измерения или после него объект разрушается). В этом случае для получения данных о динамике вектора состояния используют  $N$  практически одинаковых объектов, испытания которых начинают одновременно, но измерение состояния  $j$ -го объекта производят в момент времени  $t_j \in T$ . При этом  $t_{j+1} > t_j$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ , а  $j$ -я выборочная реализация состоит из одного значения вектора состояния:

$$\xi(T_{(j)}, \omega_{(j)}) \triangleq \{\xi(t, \omega_{(j)}): t \in T_{(j)}\}, \quad T_{(j)} \triangleq \{t_j\}_{j=1}^N \subset T. \quad (9.3)$$

Множество  $U_N$  таких выборочных реализаций обозначим через  $U_{1N}$ , тем самым указывая, что оно представляет собой как бы одну выборочную реализацию, но состоящую из  $N$  **независимых значений** рассматриваемого **случайного процесса**, где независимость понимают в смысле независимости выборочных реализаций. Этот вариант является частным случаем более сложного испытания, когда в момент времени  $t=a$  одновременно начинают испытания  $M$  практически одинаковых объектов. В моменты времени  $t_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq b$ , производят измерения состояния соответственно у  $m_1, m_2, \dots, m_N$  объектов. После измерения состояния объект выбывает из рассмотрения. Поэтому после измерений в момент времени  $t = t_1$

будет получено  $m_1$  значений вектора состояния и останется  $M - m_1$  действующих объектов. После измерений в момент времени  $t = t_2$  будет получено еще  $m_2$  значений вектора состояния и останется  $M - (m_1 + m_2)$  действующих объектов и т.д. При этом  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ . Таким образом, в момент времени  $t_j$  имеется  $m_j$  независимых значений случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ :

$$\begin{cases} \xi(T_{(j)}, \omega_{I(j)}) \triangleq \{\xi(t, \omega_{(i)}): t \in T_{(j)}, i \in I_{(j)}\}, \\ T_{(j)} \triangleq \{t_j\}_{j=1}^N \subset T, \quad I_{(j)} \triangleq \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} m_k + l \right\}_{l=1}^{m_j}. \end{cases} \quad (9.4)$$

Множество таких реализаций обозначим через  $U_{MN}$  (рис. 9.3). Заметим, что если  $m_j = 1$  для всех  $j = \overline{1, N}$ , то приходим к предыдущему варианту испытаний.

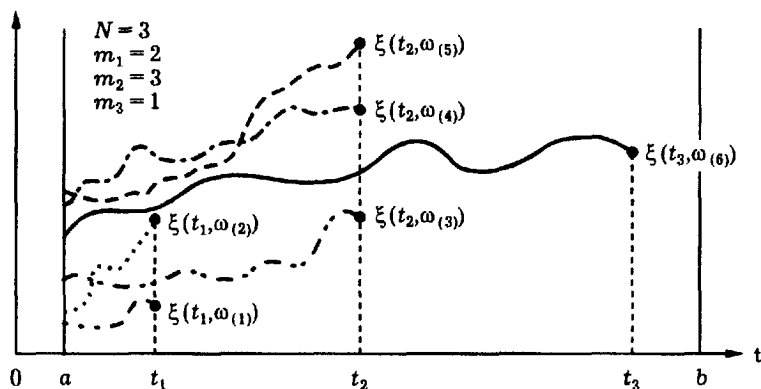


Рис. 9.3

Конечно, существуют выборки и других видов, но мы ограничимся данным рассмотрением, которого вполне достаточно для иллюстрации применения основных методов статистики случайных процессов. В заключение отметим лишь, что при правильном планировании проводимых исследований не вид выборки определяет выбор метода ее анализа, а наоборот — исходная задача и выбранный метод ее решения должны являться

основой для планирования необходимых измерений. К сожалению, это не всегда удается. Зачастую исследователь вынужден искать компромисс между этими крайностями, что требует определенного искусства и стимулирует его к созданию новых методов решения прикладных задач. В этой главе, рассматривая тот или иной метод статистики случайных процессов, мы будем использовать соответствующую этому методу выборку.

## 9.2. Статистические моменты случайного процесса

Рассмотрим случай, когда полностью отсутствует какая-либо априорная информация о закономерностях поведения изучаемого объекта и в результате испытаний получено множество *независимых выборочных реализаций*  $U_m$ , определяемое соотношениями (9.2), (9.1) при

$$T_{(k)} \equiv T_{(0)} \triangleq \{t_j\}_{j=1}^N \subset T, \quad k = \overline{1, m}. \quad (9.5)$$

При каждом фиксированном  $t \in T_{(0)}$  исследователь располагает *реализацией случайной выборки* объема  $m$  для  $n$ -мерного *случайного вектора*  $\xi(t, \omega)$ . Эта реализация представляется матрицей

$$W(t) \triangleq (\xi(t, \omega_{(1)}) \quad \xi(t, \omega_{(2)}) \quad \dots \quad \xi(t, \omega_{(m)})) \in M_{nm}(\mathbb{R}),$$

где

$$\xi(t, \omega_{(k)}) \equiv \begin{pmatrix} \xi_1(t, \omega_{(k)}) \\ \xi_2(t, \omega_{(k)}) \\ \vdots \\ \xi_n(t, \omega_{(k)}) \end{pmatrix}, \quad t \in T_{(0)}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Оценки основных **моментов** рассматриваемого **случайного процесса**, т.е. оценки его *математического ожидания*, *ковариационной матрицы* и *ковариационной функции*, могут

быть найдены с использованием известных формул математической статистики [XVII]. Так, для оценки математического ожидания имеем

$$\hat{m}_{\xi}(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \xi(t, \omega_{(k)}) \equiv \frac{1}{m} W(t) I, \quad t \in T_{(0)}, \quad (9.6)$$

где  $I = (1 \dots 1)^T \in M_{m1}(\mathbb{R})$  — единичная матрица-столбец. Оценку ковариационной матрицы можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\xi}(t) &= \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (\xi(t, \omega_{(k)}) - \hat{m}_{\xi}(t)) (\xi(t, \omega_{(k)}) - \hat{m}_{\xi}(t))^T = \\ &= \frac{1}{m-1} (W(t) - \hat{m}_{\xi}(t) I^T) (W(t) - \hat{m}_{\xi}(t) I^T)^T, \quad t \in T_{(0)}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Диагональными элементами матрицы  $\hat{\Sigma}_{\xi}(t)$  являются исправленные выборочные дисперсии компонент вектора состояния изучаемого объекта в момент времени  $t \in T_{(0)}$ . Совершенно аналогично вычисляют оценку ковариационной функции:

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\xi}(t, \tau) &= \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (\xi(t, \omega_{(k)}) - \hat{m}_{\xi}(t)) (\xi(\tau, \omega_{(k)}) - \hat{m}_{\xi}(\tau))^T = \\ &= \frac{1}{m-1} (W(t) - \hat{m}_{\xi}(t) I^T) (W(\tau) - \hat{m}_{\xi}(\tau) I^T)^T, \quad t, \tau \in T_{(0)}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Заметим, что множество  $U_m$  выбрано с условием (9.5) далеко неслучайно. Во-первых, указанное условие позволяет усреднять значения *выборочных реализаций* для каждого  $t \in T_{(0)}$ , а в противном случае пришлось бы проводить интерполяцию реализаций. Во-вторых, при нарушении условия (9.5) использование множества  $U_{MN}$  для оценки ковариационной функции некорректно, поскольку в этом случае оно представляет собой (по условиям испытаний) множество *независимых значений случайного процесса*.

**Пример 9.1.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — двумерный случайный процесс,  $T_{(0)} = \{t_1, t_2\} \subset T$ , а результаты испытаний представлены в следующей таблице.

$t = t_1$	$\omega_{(1)}$	$\omega_{(2)}$	$\omega_{(3)}$	$\omega_{(4)}$	$\omega_{(5)}$
$\xi_1(t, \omega_{(k)})$	1,2	0,9	1,1	0,8	1,0
$\xi_2(t, \omega_{(k)})$	3,3	2,9	3,1	2,5	3,2
$t = t_2$	$\omega_{(1)}$	$\omega_{(2)}$	$\omega_{(3)}$	$\omega_{(4)}$	$\omega_{(5)}$
$\xi_1(t, \omega_{(k)})$	0,7	0,9	1,1	0,6	1,2
$\xi_2(t, \omega_{(k)})$	2,1	2,3	2,0	1,9	1,7

В данном случае  $m = 5$  и  $n = 2$ . Согласно (9.6),

$$\hat{m}_{\xi}(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{m}_{\xi}(t_2) = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$W(t_1) - \hat{m}_{\xi}(t_1)I^T = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,1 & 0,1 & -0,2 & 0 \\ 0,3 & -0,1 & 0,1 & -0,5 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$W(t_2) - \hat{m}_{\xi}(t_2)I^T = \begin{pmatrix} -0,2 & 0 & 0,2 & -0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0 & -0,1 & -0,3 \end{pmatrix},$$

и для нахождения оценок ковариационной матрицы и ковариационной функции достаточно воспользоваться равенствами (9.7) и (9.8):

$$\hat{\Sigma}_{\xi}(t_1) = \begin{pmatrix} 0,025 & 0,045 \\ 0,045 & 0,100 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma}_{\xi}(t_2) = \begin{pmatrix} 0,065 & -0,020 \\ -0,020 & 0,050 \end{pmatrix},$$

$$\hat{K}_{\xi}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 0,0100 & 0,0025 \\ 0,0425 & -0,0025 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Если заранее известно, что процесс изменения состояния изучаемого объекта является эргодическим по отношению к рассматриваемому моменту, то для решения задачи оценивания этого момента можно обойтись одной реализацией

$$U \triangleq \{\xi(t_j, \omega_{(1)}): j = \overline{1, N}, a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq b\}.$$



Действительно, если изучаемый случайный процесс является эргодическим по отношению к математическому ожиданию и  $T = [0, \infty)$ , то

$$m_{\xi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \xi(\rho, \omega) d\rho$$

и для оценки математического ожидания имеем

$$\hat{m}_{\xi} = \frac{1}{t} \int_0^t \xi(\rho, \omega_{(1)}) d\rho,$$

где интеграл в правой части равенства находят численно с использованием выборочной реализации. В частности (рис. 9.4), если  $t_1 = 0,5\Delta t$  и  $\Delta t \equiv t_{j+1} - t_j$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ , то

$$\hat{m}_{\xi} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \xi(t_k, \omega_{(1)}) \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(t_k, \omega_{(1)}), \quad (9.9)$$

т.е. оценкой математического ожидания в рассматриваемом случае является среднее арифметическое выборочной реализации.

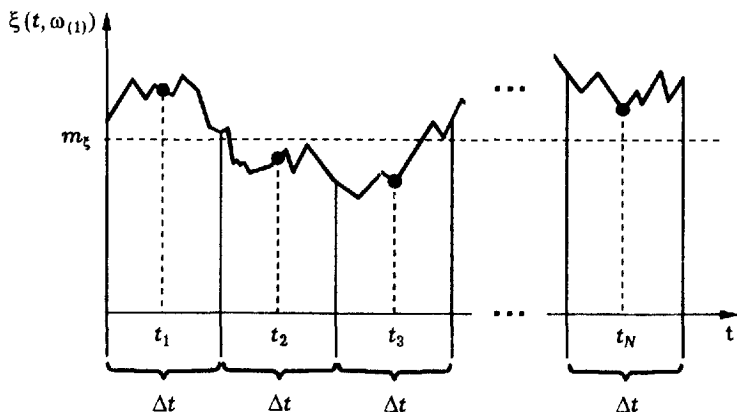


Рис. 9.4

Аналогично, если стационарный (в широком смысле) случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , является эргодическим относительно ковариационной функции (обобщение понятия эргодичности скалярного случайного процесса относительно дисперсии), то

$$K_{\xi}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \tau} \int_0^{t-\tau} (\xi(\rho, \omega) - m_{\xi}) (\xi(\rho + \tau, \omega) - m_{\xi})^T d\rho$$

и оценка ковариационной функции при  $t - \tau > 0$  имеет вид

$$\hat{K}_{\xi}(\tau) = \frac{1}{t - \tau} \int_0^{t-\tau} (\xi(\rho, \omega_{(1)}) - \hat{m}_{\xi}) (\xi(\rho + \tau, \omega_{(1)}) - \hat{m}_{\xi})^T d\rho,$$

где интеграл в правой части равенства находят численно, используя выборочную реализацию. В частности (см. рис. 9.4), если наблюдения являются равноотстоящими, то оценку  $\hat{m}_{\xi}$  получают согласно (9.9), а оценку ковариационной функции — по формуле

$$\hat{K}_{\xi}(m\Delta t) = \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^{N-m} (\xi(t_k, \omega_{(1)}) - \hat{m}_{\xi}) (\xi(t_{k+m}, \omega_{(1)}) - \hat{m}_{\xi})^T, \quad (9.10)$$

где  $N - m > 1$ ,  $t_{k+m} = t_k + m\Delta t$ . При  $m = 0$  из (9.10) получаем

$$\hat{\Sigma}_{\xi} = \hat{K}_{\xi}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\xi(t_k, \omega_{(1)}) - \hat{m}_{\xi}) (\xi(t_k, \omega_{(1)}) - \hat{m}_{\xi})^T. \quad (9.11)$$

**Пример 9.2.** В условиях горизонтального полета самолета произведена запись вертикальной перегрузки, действующей на самолет. Перегрузка регистрировалась с интервалом в 2 с в течение 200 с. Результаты измерений приведены в следующей таблице.

$t$	$x(t)$	$t$	$x(t)$	$t$	$x(t)$	$t$	$x(t)$	$t$	$x(t)$
0	1,0	40	0,5	80	1,5	120	1,3	160	0,9
2	1,3	42	1,0	82	1,0	122	1,6	162	1,3
4	1,1	44	0,9	84	0,6	124	0,8	164	1,5
6	0,7	46	1,4	86	0,9	126	1,2	166	1,2
8	0,7	48	1,4	88	0,8	128	0,6	168	1,4
10	1,1	50	1,0	90	0,8	130	1,0	170	1,4
12	1,3	52	1,1	92	0,9	132	0,6	172	0,8
14	0,8	54	1,5	94	0,9	134	0,8	174	0,8
16	0,8	56	1,0	96	0,6	136	0,7	176	1,3
18	0,4	58	0,8	98	0,4	138	0,9	178	1,0
20	0,3	60	1,1	100	1,2	140	1,3	180	0,7
22	0,3	62	1,1	102	1,4	142	1,5	182	1,1
24	0,6	64	1,2	104	0,8	144	1,1	184	0,9
26	0,3	66	1,0	106	0,9	146	0,7	186	0,9
28	0,5	68	0,8	108	1,0	148	1,0	188	1,1
30	0,5	70	0,8	110	0,8	150	0,8	190	1,2
32	0,7	72	1,2	112	0,8	152	0,6	192	1,3
34	0,8	74	0,7	114	1,4	154	0,9	194	1,3
36	0,6	76	0,7	116	1,6	156	1,2	196	1,6
38	1,0	78	1,1	118	1,7	158	1,3	198	1,5

Необходимо определить оценку корреляционной функции изучаемого случайного процесса, если известно, что он является эргодическим по отношению к ковариационной функции.

В данном примере  $x(t) \triangleq \xi(t, \omega_{(1)})$ , где  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный случайный процесс значений вертикальной перегрузки, действующей на самолет в горизонтальном полете. Имеем  $N = 100$  и в соответствии с формулами (9.9), (9.11) находим

$$\hat{m}_{\xi} = 0,98, \quad \hat{\sigma}_{\xi}^2 \equiv \hat{\Sigma}_{\xi} = 0,1045.$$

Так как  $\Delta t = 2$  и

$$\hat{k}_{\xi}(\tau) = \hat{K}_{\xi}(\tau) / \hat{\sigma}_{\xi}^2, \quad \tau = m\Delta t,$$

то для завершения анализа достаточно воспользоваться формулой (9.10) и учесть связь ковариационной и корреляционной

функций:

$$\begin{aligned}\hat{k}_\xi(2) &= 0,505, & \hat{k}_\xi(8) &= 0,231, & \hat{k}_\xi(14) &= 0,071, \\ \hat{k}_\xi(4) &= 0,276, & \hat{k}_\xi(10) &= -0,015, & \hat{k}_\xi(2m) &\approx 0 \quad (m > 7), \\ \hat{k}_\xi(6) &= 0,277, & \hat{k}_\xi(12) &= 0,014,\end{aligned}$$

Функция  $\hat{k}_\xi(\tau)$  изображена на рис. 9.5 набором точек, через которые проведена непрерывная кривая. Не совсем гладкий вид этой кривой объясняется недостаточным объемом экспериментальных данных. На рисунке также приведен вариант аппроксимации оценки  $\hat{k}_\xi(\tau)$  гладкой функцией. #

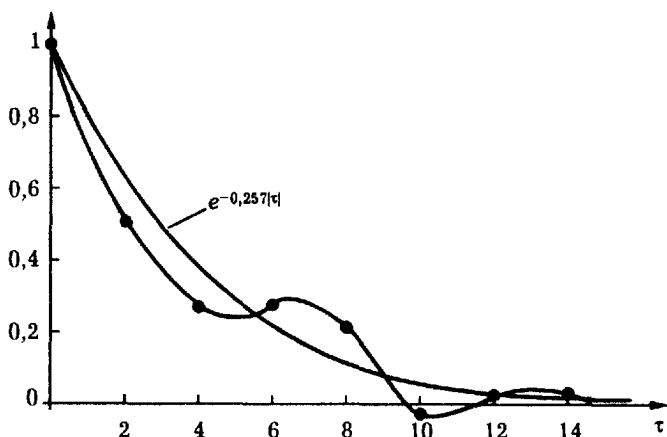


Рис. 9.5

При решении реальных задач математического моделирования наличие априорной информации об изучаемом процессе позволяет существенно сократить необходимый объем данных наблюдений, получение которых, как правило, связано со значительными затратами материальных и временных ресурсов. Априорная информация об изучаемом процессе может быть самой разнообразной, но в том или ином виде она всегда имеется в распоряжении исследователя. Поэтому далее рассмотрим методы, предполагающие определенные априорные знания об изучаемых случайных процессах.

### 9.3. Постановка задачи оценивания параметров случайного процесса

Задача, о которой пойдет речь, состоит в том, чтобы по данным выборочных реализаций случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , построить оценки неизвестных параметров, составляющих вектор  $\beta$ . Эту задачу, известную как **задача оценивания параметров случайного процесса** по данным его выборочных реализаций, будем рассматривать в предположении, что:

- 1) динамика состояния изучаемого объекта представляет собой  $n$ -мерный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ;
- 2) состояние изучаемого объекта от значений ряда параметров объекта, представленных вектором  $\beta \triangleq (\beta_1 \dots \beta_L)^T$ ;
- 3) невозможно прямое определение параметров изучаемого объекта, представленных вектором  $\beta$ .

Рассматривая сделанные предположения как априорную информацию относительно случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , приходим к выводу, что все его конечномерные законы распределения зависят от вектора параметров  $\beta$ . Таким образом,

$$f_{\xi}(x|t) \equiv f_{\xi}(x|t; \beta),$$

$$f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}|t_1, \dots, t_N) = f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}|t_1, \dots, t_N; \beta), \quad N > 1.$$

Из этого следует зависимость от вектора параметров  $\beta$  моментов изучаемого случайного процесса. В частности,

$$m_{\xi}(t) = m_{\xi}(t|\beta), \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2|\beta), \quad \Sigma_{\xi}(t) = \Sigma_{\xi}(t|\beta).$$

**Пример 9.3.** Пусть скалярный случайный процесс описывается стохастической моделью состояния:

$$\xi(t, \omega) \triangleq x_0 \exp(-\beta_1 t + \beta_2 w(t, \omega)), \quad t \in T = [0, \infty), \quad (9.12)$$

где  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный винеровский процесс, выходящий из 0, с коэффициентом диффузии  $\sigma^2 = 1$ ;  $x_0 > 0$  — известное детерминированное значение начального состояния;  $\beta = (\beta_1 \ \beta_2)^T$  — вектор неизвестных параметров.

Из (9.12) следует, что

$$\ln \left( \frac{\xi(t, \omega)}{x_0} \right) = -\beta_1 t + \beta_2 w(t, \omega), \quad t \in T.$$

Таким образом, при любом фиксированном  $t \in T$  случайная величина  $\ln(\xi(t, \omega)/x_0)$  распределена по нормальному закону с математическим ожиданием  $-\beta_1 t$  и дисперсией  $\beta_2^2 t$ . А это значит, что *одномерная функция плотности вероятностей* изучаемого случайного процесса является плотностью логарифмически нормального распределения и зависит от вектора параметров  $\beta$ , т.е.  $f_\xi(x|t) \equiv f_\xi(x|t; \beta)$ . #

По результатам качественного анализа изучаемого случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , с учетом содержательной интерпретации неизвестных параметров, составляющих вектор  $\beta$ , может быть выдвинуто предположение о том, что вектор  $\beta$  принадлежит некоторому *открытому выпуклому множеству*  $B \subset \mathbb{R}^L$ . Если ограничения на значения вектора параметров  $\beta$  отсутствуют, то полагают  $B = \mathbb{R}^L$ . Именно этот случай и исследуется далее.

Итак, мы приходим к следующей задаче: по известным значениям  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , представленным множеством  $U_*$ , где  $U_*$  — любое из рассмотренных в 9.1 множеств данных наблюдений, необходимо построить качественную оценку  $\hat{\beta} = \hat{\beta}(U_*) \in B$  вектора неизвестных параметров  $\beta$ .

Для уяснения понятия „качественная оценка“ рассмотрим *случайную выборку* объема  $K$  для случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от вектора неизвестных параметров  $\beta$ :

$$\varepsilon(\omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi_{(1)}(\omega) \\ \xi_{(2)}(\omega) \\ \dots \\ \xi_{(K)}(\omega) \end{pmatrix}, \quad (9.13)$$

где *случайные векторы*  $\xi_{(k)}(\omega)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , являющиеся функциями сечений случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , независимы и имеют один и тот же закон распределения.

Каждая случайная выборка объема  $K$  для случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , связана с конкретным видом функциональной зависимости случайных векторов  $\xi_{(k)}(\omega)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , от сечений случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ . Поэтому при решении практических задач способы формирования случайной выборки  $\varepsilon(\omega)$  определяются схемой испытаний, которые проводятся с целью получения данных наблюдений, представленных множеством  $U_*$ . Значит,  $U_*$  — реализация случайной выборки  $\varepsilon(\omega)$ .

Конкретные способы формирования случайной выборки  $\varepsilon(\omega)$ , соответствующие данным наблюдений, которые представлены множествами  $U_m$ ,  $U_{1N}$ ,  $U_{MN}$ , рассмотрены в 9.4.

Пусть  $\hat{\beta}_K(\omega)$  — оценка вектора неизвестных параметров  $\beta$ , полученная на основе случайной выборки  $\varepsilon(\omega)$ , определенной в (9.13), т.е. выборочная статистика. В этом случае оценка  $\hat{\beta}(U_*)$  является реализацией случайного вектора  $\hat{\beta}_K(\omega)$  и качество оценки  $\hat{\beta}(U_*)$  определяется требованиями, предъявляемыми к вероятностным свойствам случайного вектора  $\hat{\beta}_K(\omega)$ . Эти требования хорошо известны из курса математической статистики [XVII].

Во-первых, это требование, чтобы оценка была *несмещенной*:

$$M[\hat{\beta}_K(\omega)] = \beta.$$

Во-вторых, это требование, чтобы оценка была *состоятельной*, т.е. для любого числа  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} P\{\|\hat{\beta}_K(\omega) - \beta\| > \varepsilon\} = 0.$$

Это требование означает, что при неограниченном увеличении объема случайной выборки оценка  $\hat{\beta}_K(\omega)$  сходится по вероятности к истинному значению вектора параметров  $\beta$ . Заметим, что оценка  $\hat{\beta}_K(\omega)$  является состоятельной, если

$$\lim_{K \rightarrow \infty} D[\hat{\beta}_K(\omega)] = \lim_{K \rightarrow \infty} M[(\hat{\beta}_K(\omega) - \beta)^T (\hat{\beta}_K(\omega) - \beta)] = 0.$$

Наконец, в-третьих, это требование, чтобы оценка была *эффективной*, т.е. чтобы эта оценка как  $L$ -мерный случайный

вектор, имела минимальный разброс относительно истинного значения вектора параметров  $\beta$ , или минимальную дисперсию.

Если первые два требования понятны, то понятие эффективности оценки требует разъяснений.

#### 9.4. Эффективные оценки. Неравенство Рао — Крамера

При изучении свойств оценок и методов их определения будем использовать *функцию плотности вероятностей случайной выборки* объема  $K$  для  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от  $L$ -мерного вектора неизвестных параметров  $\beta \in B$ . В соответствии с (9.13) эту случайную выборку обозначим через  $\varepsilon(\omega)$ , а ее функцию плотности вероятностей через  $f(y|\beta)$ . Выясним, что представляют собой случайные выборки и их функции плотности вероятностей, соответствующие рассмотренным вариантам данных наблюдений.

Пусть  $f_\xi(X(k)|\beta)$  —  $k$ -мерная *функция плотности вероятностей случайного процесса*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ :

$$f_\xi(X(k)|\beta) \equiv f_\xi(x_{(1)}, \dots, x_{(k)} | t_1, \dots, t_k; \beta), \quad (9.14)$$

где  $X(k) \in \mathbb{R}^{nk}$ . Будем предполагать существование и ограниченность частной производной

$$\frac{\partial f_\xi(X(k)|\beta)}{\partial \beta}, \quad \beta \in B \subset \mathbb{R}^L. \quad (9.15)$$

Рассмотрим множество *реализаций* изучаемого случайного процесса, определенных в (9.2), (9.1):

$$\begin{cases} U_m \triangleq \{\xi(T_{(k)}, \omega_{(k)})\}_{k=1}^m, \\ \xi(T_{(k)}, \omega_{(k)}) \triangleq \{\xi(t, \omega_{(k)}): t \in T_{(k)}\}, \\ T_{(k)} \triangleq \{t_{kj}\}_{j=1}^{N(k)}. \end{cases}$$

Вследствие *независимости* этих реализаций данным наблюдений соответствует случайная выборка  $\varepsilon(\omega)$  объема  $K = m$ ,  $k$ -й



блок которой

$$\xi_{(k)}(\omega) \equiv \begin{pmatrix} \eta_{(k)}(t_{k1}, \omega) \\ \eta_{(k)}(t_{k2}, \omega) \\ \vdots \\ \eta_{(k)}(t_{kN(k)}, \omega) \end{pmatrix}$$

представляет собой случайный вектор размерности  $nN(k)$  с функцией плотности вероятностей  $f_{\xi}(X(N(k))|\beta)$ . При этом  $\eta_{(k)}(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ,  $k = \overline{1, m}$  — независимые  $n$ -мерные случайные процессы, имеющие те же конечномерные законы распределения, что и исходный случайный процесс. Поэтому функция плотности вероятностей рассматриваемой случайной выборки объема  $m$  имеет вид

$$f(y|\beta) = \prod_{k=1}^m f_{\xi}(X(N(k))|\beta). \quad (9.16)$$

Если данные наблюдений представляют собой множество  $U_{1N}$ , определяемое согласно (9.3):

$$\begin{cases} U_{1N} \triangleq \{\xi(T_{(j)}, \omega_{(j)})\}_{j=1}^N, \\ \xi(T_{(j)}, \omega_{(j)}) \triangleq \{\xi(t, \omega_{(j)}): t \in T_{(j)}\}, \quad T_{(j)} \triangleq \{t_j\}, \end{cases}$$

то  $K = N$  и в силу независимости значений случайного процесса в этом множестве ему соответствует случайная выборка объема  $N$  с функцией плотности вероятностей

$$f(y|\beta) = \prod_{j=1}^N f_{\xi}(x_{(j)}|t_j; \beta). \quad (9.17)$$

Для множества независимых значений  $U_{MN}$ , определяемого равенствами (9.4):

$$\begin{cases} U_{MN} = \{\xi(t, \omega_{(i)}) : t \in T_{(j)}, i \in I(j), j = \overline{1, N}\}, \\ T_{(j)} = \{t_j\}, \quad I(j) = \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} m_k + l \right\}_{l=1}^{m_j}, \end{cases}$$

функция плотности вероятностей соответствующей случайной выборки объема

$$K = \sum_{j=1}^N m_j$$

имеет вид

$$f(y|\beta) = \prod_{j=1}^N \prod_{i \in I(j)} f_{\xi}(x_{(i)}|t_j; \beta). \quad (9.18)$$

Пусть теперь  $\hat{\beta}_K(\omega)$  — оценка вектора неизвестных параметров  $\beta$ , полученная на основе случайной выборки  $\varepsilon(\omega)$  объема  $K$  для  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от  $L$ -мерного вектора  $\beta$ . Обозначим через  $b_K(\beta)$  **смещение оценки**  $\hat{\beta}_K(\omega)$ :

$$b_K(\beta) \triangleq M[\hat{\beta}_K(\omega) - \beta] = \int_Y (\hat{\beta}_K(y) - \beta) f(y|\beta) dy, \quad (9.19)$$

где в правой части равенства находится  $nK$ -кратный интеграл, а область интегрирования имеет вид

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^{nK} : f(y|\beta) > 0\}.$$

Смещение оценки зависит от вектора параметров  $\beta$ , поскольку оценка  $\hat{\beta}_K(\omega)$  определена по данным случайной выборки с функцией плотности вероятностей  $f(y|\beta)$ .

Известно, что неравенство

$$M[(\hat{\beta}_K(\omega) - \beta)(\hat{\beta}_K(\omega) - \beta)^T] \geq (I_L + b'_K(\beta)) A^{-1}(\beta) (I_L + b'_K(\beta))^T, \quad (9.20)$$

называемое *неравенством Рао — Крамера*, определяет нижнюю границу для дисперсии оценок вектора параметров. Это матричное неравенство понимают как поэлементное неравенство. Здесь  $b'_K(\beta) \in M_L(\mathbb{R})$  — производная смещения оценки

$b_K(\beta)$  по вектору параметров  $\beta$ ;  $I_L \in M_L(\mathbb{R})$  — единичная матрица;  $A(\beta)$  — информационная матрица Фишера:

$$\begin{aligned} A(\beta) &\triangleq \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \ln f(\varepsilon(\omega) | \beta)}{\partial \beta} \right)^T \left( \frac{\partial \ln f(\varepsilon(\omega) | \beta)}{\partial \beta} \right) \right] = \\ &= \int_Y \left( \frac{\partial \ln f(y | \beta)}{\partial \beta} \right)^T \left( \frac{\partial \ln f(y | \beta)}{\partial \beta} \right) f(y | \beta) dy; \quad (9.21) \end{aligned}$$

$\varepsilon(\omega)$  — случайная выборка объема  $K$  для  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от  $L$ -мерного вектора  $\beta$ .

Случайная выборка  $\varepsilon(\omega)$  определена равенством (9.13) и имеет функцию плотности вероятностей  $f(y | \beta)$ . Согласно (9.14)–(9.18), информационная матрица Фишера определена для любого  $\beta \in B$ .

Если неравенство Рао — Крамера переходит в равенство, то оценка  $\hat{\beta}_K(\omega)$  является эффективной оценкой вектора параметров  $\beta$ .

Для уяснения смысла неравенства Рао — Крамера ограничимся анализом скалярного случая, когда  $\beta \in \mathbb{R}$  и  $L = 1$ , а неравенство (9.20) имеет вид

$$\mathbf{D}[\hat{\beta}_K(\omega)] = \mathbf{M}[(\hat{\beta}_K(\omega) - \beta)^2] \geq \frac{(1 + b'_K(\beta))^2}{A(\beta)}, \quad (9.22)$$

где

$$A(\beta) = \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \ln f(\varepsilon(\omega) | \beta)}{\partial \beta} \right)^2 \right] = \int_Y \left( \frac{\partial \ln f(y | \beta)}{\partial \beta} \right)^2 f(y | \beta) dy. \quad (9.23)$$

Величина  $A(\beta)$  служит мерой информации, содержащейся в случайной выборке, и ее называют количеством информации по Фишеру. Согласно неравенству (9.22), чем больше  $A(\beta)$ , тем меньше дисперсия. Вопрос лишь в том, удастся ли использовать эту информацию полностью, чтобы получить оценку с минимально возможной дисперсией.

Определим количество информации по Фишеру, содержащееся в случайной выборке, соответствующей множеству  $U_m$ , для чего воспользуемся равенством (9.16):

$$\ln f(y|\beta) = \sum_{k=1}^m \ln f_{\xi}(X(N(k))|\beta).$$

Учитывая независимость реализаций и (9.23), находим

$$\begin{aligned} A(\beta) &= \mathbf{M} \left[ \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial \ln f_{\xi}(\xi_{(k)}(\omega) | \beta)}{\partial \beta} \right)^2 \right] = \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \ln f_{\xi}(\xi_{(k)}(\omega) | \beta)}{\partial \beta} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Так как количество информации по Фишеру, содержащееся в  $k$ -й выборочной реализации, равно

$$A_k(\beta) \triangleq \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \ln f_{\xi}(\xi_{(k)}(\omega) | \beta)}{\partial \beta} \right)^2 \right], \quad (9.24)$$

то общее количество информации, содержащееся в случайной выборке, соответствующей множеству  $U_m$ , равно

$$A(\beta) = \sum_{k=1}^m A_k(\beta). \quad (9.25)$$

В частности, если  $T_{(1)} = T_{(2)} = \dots = T_{(m)}$ , то

$$A(\beta) = m A_1(\beta). \quad (9.26)$$

Таким образом, учитывая (9.22)–(9.26), заключаем, что для случайной выборки, соответствующей данным наблюдений, представленным множеством  $U_m$ , неравенство Рао — Крамера имеет вид

$$\mathbf{D}[\hat{\beta}_K(\omega)] \geq \frac{(1 + b'_K(\beta))^2}{\sum_{i=1}^m A_i(\beta)}.$$

В частности, при  $T_{(1)} = T_{(2)} = \dots = T_{(m)}$  имеем

$$\mathbf{D}[\hat{\beta}_K(\omega)] \geq \frac{(1 + b'_K(\beta))^2}{m A_1(\beta)},$$

где  $b_K(\beta)$  — смещение оценки  $\hat{\beta}_K(\omega)$ , определенное в (9.19), и  $K = m$ .

Для случайной выборки, соответствующей данным наблюдений, представленным множеством  $U_{MN}$ , с учетом (9.17) получаем аналогичное соотношение:

$$\begin{aligned} A(\beta) &= \mathbf{M} \left[ \left( \sum_{i=1}^N \sum_{\varepsilon \in Y(j)} \frac{\partial \ln f_{\xi}(\varepsilon_{(i)}(\omega) | t_j; \beta)}{\partial \beta} \right)^2 \right] = \\ &= \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \ln f_{\xi}(\varepsilon_{(m_j)}(\omega) | t_j; \beta)}{\partial \beta} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$a_j(\beta) = \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \ln f_{\xi}(\varepsilon_{(m_j)}(\omega) | t_j; \beta)}{\partial \beta} \right)^2 \right], \quad (9.27)$$

то количество информации в момент времени  $t = t_j$  равно  $m_j a_j(\beta)$  и

$$A(\beta) = \sum_{j=1}^N m_j a_j(\beta). \quad (9.28)$$

В соответствии с (9.22), (9.23), (9.27), (9.28) имеем

$$\mathbf{D}[\hat{\beta}_K(\omega)] \geq \frac{(1 + b'_K(\beta))^2}{\sum_{j=1}^N m_j a_j(\beta)}, \quad K = M = \sum_{j=1}^N m_j.$$

Полученные неравенства наглядно показывают, что с увеличением объема выборки теоретически можно строить оценки

неизвестного параметра  $\beta$  со сколь угодно малой дисперсией. При этом, однако, следует учитывать, что мы имеем дело не с выборочными значениями случайной величины, а с выборочными реализациями случайного процесса. Специфическая особенность последних состоит в том, что задача оценивания параметров случайного процесса требует исследования единственности ее решения.

### 9.5. Единственность решения задачи оценивания параметров случайного процесса

Анализ единственности решения задачи оценивания параметров случайного процесса по данным наблюдений начнем с примера.

**Пример 9.4.** Рассмотрим скалярный случайный процесс

$$\xi(t, \omega) \triangleq \beta_1 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 + \sqrt{\beta_4} \eta(t, \omega), \quad t \in T = [0, t_*],$$

где  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией  $K_\eta(\tau) = e^{-\alpha^2 |\tau|}$ ,  $\alpha$  — известный параметр, а  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  — неизвестные положительные параметры.

В данном случае вектор  $\beta$  неизвестных параметров образован четырьмя компонентами  $\beta_i$ :  $\beta \triangleq (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4)^T$ . При  $t \in T$  имеем

$$m_\xi(t|\beta) = \beta_1 e^{-\beta_2 t} + \beta_3, \quad \sigma_\xi^2(t|\beta) \equiv \beta_4,$$

а случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , представляет собой скалярный гауссовский процесс.

Предположим, что для оценивания вектора  $\beta \in \mathbb{R}^4$  мы располагаем данными наблюдений, представленными множеством  $U_{MN}$ , где  $N = 2$ , т.е. наблюдения проводились лишь в моменты времени  $t = t_1$  и  $t = t_2$  из  $T$ .

Поскольку изучаемый случайный процесс является гауссовским, то его одномерные функции плотности вероятностей

$f_{\xi}(x|t_1; \beta)$  и  $f_{\xi}(x|t_2; \beta)$  полностью определены его математическим ожиданием и дисперсией, которые по условиям испытаний можно оценить с использованием стандартных формул (9.6), (9.7) с учетом того, что  $M = m_1 + m_2$ ,  $m_1 > 1$ ,  $m_2 > 1$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}\hat{m}_{\xi}(t_1) &= \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} \xi(t_1, \omega_{(i)}), & \hat{m}_{\xi}(t_2) &= \frac{1}{m_2} \sum_{i=m_1+1}^M \xi(t_2, \omega_{(i)}), \\ \hat{\sigma}_{\xi}^2(t_1) &= \frac{1}{m_1 - 1} \sum_{i=1}^{m_1} (\xi(t_1, \omega_{(i)}) - \hat{m}_{\xi}(t_1))^2, \\ \hat{\sigma}_{\xi}^2(t_2) &= \frac{1}{m_2 - 1} \sum_{i=m_1+1}^M (\xi(t_2, \omega_{(i)}) - \hat{m}_{\xi}(t_2))^2.\end{aligned}$$

Оценку параметра  $\beta_4$  можно строить на двух очевидных равенствах:

$$\hat{\beta}_4 = \hat{\sigma}_{\xi}^2(t_1), \quad \hat{\beta}_4 = \hat{\sigma}_{\xi}^2(t_2).$$

В качестве реализации такой оценки используем функцию [XVII]

$$\hat{\beta}_4 = \frac{m_1}{M} \hat{\sigma}_{\xi}^2(t_1) + \frac{m_2}{M} \hat{\sigma}_{\xi}^2(t_2).$$

Для построения оценок оставшихся неизвестных параметров мы не располагаем никакими данными, кроме оценок математического ожидания  $\hat{m}_{\xi}(t_1)$  и  $\hat{m}_{\xi}(t_2)$ , используя которые можно записать систему нелинейных алгебраических уравнений относительно оценок  $\hat{\beta}_1$ ,  $\hat{\beta}_2$ ,  $\hat{\beta}_3$  неизвестных параметров  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  соответственно:

$$\hat{\beta}_1 \exp(-\hat{\beta}_2 t_k) + \hat{\beta}_3 = \hat{m}_{\xi}(t_k), \quad k = 1, 2. \quad (9.29)$$

Эта система состоит из двух уравнений и содержит три неизвестных параметра, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, по данным наблюдений, представленным множеством  $U_{MN}$  с  $N = 2$ , задача оценивания неизвестных параметров изучаемого случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , решается неоднозначно не зависимо от того, сколько произведено измерений в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

Если  $N > 2$  и система (9.29) имеет решение, удовлетворяющее условиям положительности своих компонент, то это решение единственно.

Заметим, что рассматриваемый скалярный случайный процесс при  $t \rightarrow +\infty$  становится стационарным случайным процессом с математическим ожиданием  $\beta_3$  и дисперсией  $\beta_4$ . Пусть теперь  $T = [0, \infty)$  и  $t_0 \in T$  — момент времени, начиная с которого исходный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно считать стационарным. Если  $t_0 \in T$  принять за начало наблюдений, то параметры  $\beta_1$  и  $\beta_2$  оценить невозможно, как бы мы ни выбирали моменты измерений  $t_i > t_0$ , и сколько бы измерений ни проводилось в эти моменты времени, поскольку стационарные изменения состояния не зависят от значений параметров  $\beta_1, \beta_2$  и  $\xi(t, \omega) = \beta_3 + \sqrt{\beta_4} \eta(t, \omega)$ ,  $t > t_0$ . #

Для того чтобы сформулировать условие единственности решения задачи оценивания неизвестных параметров случайного процесса по данным наблюдений, напомним, что любой случайный процесс в общем случае не является полностью определенным и при решении различных задач как теоретического, так и прикладного характера исследователь вынужден ограничиваться использованием *конечномерных законов распределений*. Совокупность конечномерных законов распределений является более или менее полной характеристикой случайного процесса. При этом, если  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , —  $n$ -мерный случайный процесс, зависящий от  $L$ -мерного вектора неизвестных параметров  $\beta$ , а  $T_{(N)} \triangleq \{t_j\}_{j=1}^N \subset T$ , то  $N$ -мерная *функция плотности вероятностей*

$$f_{\xi}(X(N)|\beta) \triangleq f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}|t_1, \dots, t_N; \beta)$$



содержит исчерпывающую информацию об исходном случайном процессе на множестве  $T_{(N)}$ .

**Определение 9.1.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [a, b]$ , —  $n$ -мерный случайный процесс, зависящий от  $L$ -мерного вектора неизвестных параметров  $\beta$ . Говорят, что  $N$ -мерная функция плотности вероятностей  $f_\xi(X(N) | \beta)$  определяет на  $T_{(N)}$  исходный случайный процесс единственным образом, если равенство

$$f_\xi(X(N) | \beta) = f_\xi(X(N) | \alpha), \quad \alpha, \beta \in B \subset \mathbb{R}^L,$$

верно тогда и только тогда, когда  $\alpha = \beta$ .

Интуитивно понятно, что если по данным наблюдений удастся определить такую  $N$ -мерную функцию плотности вероятностей, которая на некотором множестве  $T_{(N)} \subset T$  задает изучаемый случайный процесс единственным образом, то существует и единственное решение задачи оценивания вектора его неизвестных параметров. Для того чтобы практически реализовать эту идею, будем считать, что  $\beta \in B$  — истинное значение вектора неизвестных параметров случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и введем скалярную функцию векторного аргумента

$$l(\alpha) \triangleq \mathbf{M}[\ln f_\xi(\eta(\omega) | \alpha)] = \int_Y (\ln f_\xi(y | \alpha)) f_\xi(y | \beta) dy, \quad (9.30)$$

где  $\alpha \in B$ ,  $Y \triangleq \{y \in \mathbb{R}^{nN}: f_\xi(y | \alpha) > 0\}$ , а

$$\eta(\omega) = \begin{pmatrix} \xi(t_1, \omega) \\ \xi(t_2, \omega) \\ \dots \\ \xi(t_N, \omega) \end{pmatrix} \quad —$$

блочный случайный вектор размерности  $nN$ . Нас интересует экстремум этой функции. В связи с этим напомним, что функцию  $\varphi(x)$  называют *выпуклой (вниз)* на множестве  $X$ ,

если для любых  $x, y \in X$  и для любого  $\lambda \in [0, 1]$  имеет место неравенство

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$

Известно [V], что для выпуклой (дифференцируемой) функции  $\varphi(x)$  справедливо неравенство

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0), \quad x, x_0 \in X.$$

Пусть  $x = x(\omega)$  — случайный вектор и  $x_0 = M[x(\omega)]$ . В этом случае

$$\varphi(x(\omega)) \geq \varphi(M[x(\omega)]) + \varphi'(M[x(\omega)])(x(\omega) - M[x(\omega)]).$$

Определив математические ожидания правой и левой частей этого неравенства, приходим к **неравенству Иенсена** для выпуклой функции:

$$M[\varphi(x(\omega))] \geq \varphi(M[x(\omega)]).$$

Теперь можно сформулировать и доказать теорему единственности решения задачи оценивания неизвестных параметров случайного процесса по данным наблюдений.

**Теорема 9.1.** Пусть  $N$ -мерная функция плотности вероятностей случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от вектора неизвестных параметров  $\beta \in B$ , определяет его на множестве  $T_{(N)}$  единственным образом. Тогда задача оценивания вектора неизвестных параметров этого случайного процесса по данным наблюдений имеет единственное решение  $\beta$ , определяемое условием

$$\max_{\alpha \in B} l(\alpha) = l(\beta),$$

где функция  $l(\alpha)$  определена равенством (9.30).

◀ Поскольку  $-\ln(\alpha)$  — выпуклая функция, то по неравенству Иенсена имеем

$$M \left[ -\ln \left( \frac{f_{\xi}(\eta(\omega) | \alpha)}{f_{\xi}(\eta(\omega) | \beta)} \right) \right] \geq -\ln \left( M \left[ \frac{f_{\xi}(\eta(\omega) | \alpha)}{f_{\xi}(\eta(\omega) | \beta)} \right] \right), \quad y \in Y,$$

или, что то же самое,

$$\int_Y \ln \left( \frac{f_\xi(y|\alpha)}{f_\xi(y|\beta)} \right) f_\xi(y|\beta) dy \leq \ln \left( \int_Y \frac{f_\xi(y|\alpha)}{f_\xi(y|\beta)} f_\xi(y|\beta) dy \right),$$

где  $Y \triangleq \{y \in \mathbb{R}^{nN}: f_\xi(y|\alpha) > 0, \alpha \in B\}$ . А так как для любого  $\alpha \in B$

$$\ln \left( \int_Y \frac{f_\xi(y|\alpha)}{f_\xi(y|\beta)} f_\xi(y|\beta) dy \right) = \ln \left( \int_Y f_\xi(y|\alpha) dy \right) = \ln(1) = 0,$$

то последнее неравенство принимает вид

$$\int_Y \ln \left( \frac{f_\xi(y|\alpha)}{f_\xi(y|\beta)} \right) f_\xi(y|\beta) dy \leq 0. \quad (9.31)$$

Это неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$f_\xi(y|\alpha) = f_\xi(y|\beta), \quad y \in Y.$$

Поэтому из неравенства (9.31) и условия теоремы получаем, что для любых  $\alpha \in B \setminus \{\beta\}$

$$\int_Y (\ln f_\xi(y|\beta)) f_\xi(y|\beta) dy > \int_Y (\ln f_\xi(y|\alpha)) f_\xi(y|\beta) dy,$$

или, что то же самое,

$$l(\beta) > l(\alpha), \quad \alpha \in B \setminus \{\beta\}.$$

Таким образом, функция  $l(\alpha)$  имеет на  $B$  единственный максимум в точке  $\alpha = \beta$ , что и требовалось доказать. ►

Доказанную теорему можно использовать для решения практических задач даже в тех случаях, когда вид  $N$ -мерной функции плотности вероятностей изучаемого случайного процесса

неизвестен, а на множестве  $T_{(N)}$  определены лишь его математическое ожидание и ковариационная матрица как функции неизвестных параметров.

Рассмотрим этот случай, поскольку он чаще других встречается в приложениях. Будем считать, что  $m(t|\alpha)$  и  $\Sigma(t|\alpha)$  при  $t \in T_{(N)}$  содержат все интересующие нас параметры. Это означает, что вся интересующая нас информация об изучаемом случайном процессе представлена в совокупности его одномерных функций плотности вероятностей  $\{f_{\xi}(x|t;\beta): t \in T_{(N)}\}$ . Отсюда следует, что для решения задачи оценивания его неизвестных параметров вполне подходит случайная выборка, соответствующая множеству  $U_{MN}$ , функция плотности вероятностей которой определена равенством (9.18):

$$f(y_{(M)}|\beta) = \prod_{j=1}^N \prod_{i \in I(j)} f_{\xi}(x_{(i)}|t_j;\beta),$$

$$I(j) = \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} m_k + i \right\}_{i=1}^{m_j}, \quad M = \sum_{j=1}^N m_j.$$

Для того чтобы выяснить достаточность этих данных для однозначного оценивания неизвестных параметров, рассмотрим следующую функцию плотности вероятностей

$$\tilde{f}(y|\beta) = \prod_{j=1}^N f_{\xi}(x_{(j)}|t_j;\beta)$$

и введем множества

$$G = \{y: \tilde{f}(y|\beta) > 0\}, \quad G_j = \{x: f_{\xi}(x|t_j;\beta) > 0\}, \quad j = \overline{1, N}.$$

При выполнении условий теоремы 9.1 при любых  $\alpha \neq \beta$  имеем

$$\int_G (\ln \tilde{f}(y|\beta)) \tilde{f}(y|\beta) dy > \int_G (\ln \tilde{f}(y|\alpha)) \tilde{f}(y|\beta) dy,$$

т.е. с учетом определения функции  $\tilde{f}$

$$\sum_{j=1}^N \int_{G_j} (\ln f_{\xi}(x|t_j; \beta)) f_{\xi}(x|t_j; \beta) dx > \\ > \sum_{j=1}^N \int_{G_j} (\ln f_{\xi}(x|t_j; \alpha)) f_{\xi}(x|t_j; \beta) dx$$

или

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{M}[\ln f_{\xi}(\xi(t_j, \omega) | \beta)] > \sum_{j=1}^N \mathbf{M}[\ln f_{\xi}(\xi(t_j, \omega) | \alpha)].$$

Однако по условию задачи вид функции плотности вероятностей  $f_{\xi}(x|t; \beta)$  неизвестен. Тем не менее, задачу можно решить, если в качестве  $f_{\xi}(x|t; \beta)$  использовать плотность нормального закона распределения и наложить на функции  $m(t|\alpha)$  и  $\Sigma(t|\alpha)$  дополнительные ограничения.

**Определение 9.2.** Будем говорить, что функции  $m(t|\alpha)$  и  $\Sigma(t|\alpha)$  **разделяют точки множества  $B$**  на множестве  $T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^N \subset T$ , если для любых  $\alpha, \gamma \in B$ ,  $\alpha \neq \gamma$ , существует хотя бы одно значение  $t_{\alpha\gamma} \in T_{(N)}$ , такое, что

$$m(t_{\alpha\gamma}|\alpha) \neq m(t_{\alpha\gamma}|\gamma), \quad \Sigma(t_{\alpha\gamma}|\alpha) \neq \Sigma(t_{\alpha\gamma}|\gamma).$$

**Теорема 9.2.** Пусть математическое ожидание  $m(t|\alpha)$  и ковариационная матрица  $\Sigma(t|\alpha)$   $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от  $L$ -мерного вектора неизвестных параметров  $\beta \in B$ , разделяют точки множества  $B$  на множестве  $T_{(N)} \subset T$ . Тогда задача оценивания неизвестного вектора параметров  $\beta \in B$  имеет единственное решение, определяемое условием

$$\max_{\alpha \in B} \tilde{l}(\alpha) = \tilde{l}(\beta),$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{l}(\alpha) &\triangleq \sum_{j=1}^N \mathbf{M}[\ln f_H(\xi(t_j, \omega) | m(t_j | \alpha), \Sigma(t_j | \alpha))] = \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{G_j} (\ln f_H(x | m(t_j | \alpha), \Sigma(t_j | \alpha))) f_{\xi}(x | t_j; \beta) dx,\end{aligned}$$

$f_H(x | m(t | \alpha), \Sigma(t | \alpha))$  — плотность нормального распределения:

$$\begin{aligned}f_H(x | m(t | \alpha), \Sigma(t | \alpha)) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma(t | \alpha)}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}(x - m(t | \alpha))^T \Sigma^{-1}(t | \alpha) (x - m(t | \alpha))\right),\end{aligned}$$

а  $f_{\xi}(x | t; \beta)$  — неизвестная истинная одномерная функция плотности вероятностей случайного процесса.

Доказательство теоремы 9.2 опирается на следующее утверждение.

**Лемма 9.1.** Пусть  $\eta(\omega)$  —  $n$ -мерный случайный вектор с функцией плотности вероятностей  $f_{\eta}(x)$ , математическим ожиданием  $m_{\eta}$  и ковариационной матрицей  $\Sigma_{\eta}$ , а  $f_H(x | m, \Sigma)$  — плотность распределения вероятностей  $n$ -мерного случайного вектора, распределенного по нормальному закону с математическим ожиданием  $m$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$ . Тогда для любых  $m \in \mathbb{R}^n$  и  $\Sigma \in M_n(\mathbb{R})$ , таких, что  $m \neq m_{\eta}$  и  $\Sigma \neq \Sigma_{\eta}$ , верно неравенство

$$\mathbf{M}[\ln f_H(\eta(\omega) | m_{\eta}, \Sigma_{\eta})] > \mathbf{M}[\ln f_H(\eta(\omega) | m, \Sigma)].$$

◀ Докажем, что

$$\max_{m, \Sigma} \mathbf{M}[\ln f_H(\eta(\omega) | m, \Sigma)] = \mathbf{M}[\ln f_H(\eta(\omega) | m_{\eta}, \Sigma_{\eta})].$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \max_{m, \Sigma} \mathbf{M}[\ln f_H(\eta(\omega) | m, \Sigma)] &= \max_{m, \Sigma} \left( -0,5n \ln(2\pi) - \right. \\ &\quad \left. - 0,5 \ln(\det \Sigma) - 0,5 \mathbf{M}[(\eta(\omega) - m)^T \Sigma^{-1} (\eta(\omega) - m)] \right) = \\ &= -0,5n \ln(2\pi) - 0,5 \min_{m, \Sigma} Z(m, \Sigma), \end{aligned}$$

где

$$Z(m, \Sigma) \triangleq \ln(\det \Sigma) + \mathbf{M}[(\eta(\omega) - m)^T \Sigma^{-1} (\eta(\omega) - m)].$$

Поскольку  $\mathbf{M}[\eta(\omega)] = m_\eta$ , то  $Z'_m(m, \Sigma) = \Theta_{1n}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{M}[(\eta(\omega) - m)^T \Sigma^{-1}] = \Theta_{1n}$ . Таким образом, функция  $Z(m, \Sigma)$  достигает минимума при  $m = m_\eta$ . А так как, согласно свойствам следа для произведения согласованных матриц\*, верно представление

$$Z(m, \Sigma) = \ln(\det \Sigma) + \text{Sp}(\Sigma^{-1} \mathbf{M}[(\eta(\omega) - m)(\eta(\omega) - m)^T]),$$

то очевидны равенства

$$Z(m_\eta, \Sigma) = \ln(\det \Sigma) + \text{Sp}(\Sigma^{-1} \Sigma_\eta), \quad Z(m_\eta, \Sigma_\eta) = \ln(\det \Sigma_\eta) + n.$$

При этом  $Z'_\Sigma(m_\eta, \Sigma) = \Theta_{nn}$  тогда и только тогда, когда  $\Sigma^{-1} - (\Sigma^{-1})^2 \Sigma_\eta = \Theta_{nn}$ . Таким образом,

$$\min_{m, \Sigma} Z(m, \Sigma) = Z(m_\eta, \Sigma_\eta) = \ln(\det \Sigma_\eta) + n,$$

т.е. при любых  $m \neq m_\eta$  и  $\Sigma \neq \Sigma_\eta$  имеем

$$\mathbf{M}[\ln f_H(\eta(\omega) | m_\eta, \Sigma_\eta)] > \mathbf{M}[\ln f_H(\eta(\omega) | m, \Sigma)]. \quad \blacktriangleright$$

Теперь вернемся к доказательству теоремы 9.2.

◀ Функция

$$\tilde{l}(\alpha) \triangleq \sum_{j=1}^N \mathbf{M}[\ln f_H(\xi(t_j, \omega) | \alpha)] \quad (9.32)$$

---

\*См.: Беллман Р.

при  $\alpha = \beta$  достигает максимума, так как при  $j = \overline{1, N}$

$$\mathbf{M}[\xi(t_j, \omega)] = m(t_j | \beta),$$

$$\mathbf{M}[(\xi(t_j, \omega) - m(t_j | \beta)) (\xi(t_j, \omega) - m(t_j | \beta))^T] = \Sigma(t_j | \beta)$$

и в соответствии с леммой 9.1 каждое слагаемое в правой части (9.32) достигает максимума, поскольку  $f_H(x | t; \alpha)$  — функция плотности вероятностей нормального закона распределения.

Этот максимум является единственным, т.е. для любого  $\alpha \in B$ , такого, что  $\alpha \neq \beta$ , имеем

$$\begin{aligned} \tilde{l}(\beta) &= \sum_{j=1}^N \mathbf{M}[\ln f_H(\xi(t_j, \omega) | \beta)] > \\ &> \sum_{j=1}^N \mathbf{M}[\ln f_H(\xi(t_j, \omega) | \alpha)] = \tilde{l}(\alpha), \end{aligned} \quad (9.33)$$

так как функции  $m(t, \alpha)$  и  $\Sigma(t | \alpha)$  определены на множестве  $T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^N$  единственным образом и при  $\alpha \neq \beta$  всегда найдется хотя бы один момент времени  $t_{\alpha\beta} \in T_{(N)}$ , такой, что

$$m(t_{\alpha\beta} | \alpha) \neq m(t_{\alpha\beta} | \beta), \quad \Sigma(t_{\alpha\beta} | \alpha) \neq \Sigma(t_{\alpha\beta} | \beta),$$

а значит, для соответствующих ему слагаемых в суммах неравенства (9.33) будем иметь

$$\mathbf{M}[\ln f_H(\xi(t_{\alpha\beta}, \omega) | \beta)] > \mathbf{M}[\ln f_H(\xi(t_{\alpha\beta}, \omega) | \alpha)].$$

Поэтому для любого  $\alpha \in B$ , такого, что  $\alpha \neq \beta$ , имеем

$$\tilde{l}(\beta) > \tilde{l}(\alpha),$$

а следовательно,

$$\max_{\alpha \in B} \tilde{l}(\alpha) = \tilde{l}(\beta). \quad \blacktriangleright$$

Итак, в ряде случаев, нередко встречающихся в приложениях, единственность решения задачи оценивания неизвестных



параметров изучаемого случайного процесса по данным наблюдений можно проверить непосредственно на основании полученных теоретических результатов.

Из теоремы 9.2 вытекает весьма важное следствие, состоящее в том, что в тех случаях, когда конечномерные функции плотности вероятностей исходного случайного процесса неизвестны, для решения задачи оценивания можно использовать функции плотности вероятностей нормального закона распределения.

Вопрос о том, как повлияет замена неизвестного конечномерного закона распределения изучаемого случайного процесса соответствующим нормальным законом распределения на качество оценок неизвестных параметров, пока оставим открытым и вернемся к нему при рассмотрении *квазиправдоподобных оценок*.

Прежде чем перейти к анализу методов оценивания неизвестных параметров изучаемых случайных процессов, отметим, что пример 9.4 наглядно иллюстрирует идею метода моментов [XVII]. Эта идея состоит в том, что для нахождения оценок неизвестных параметров исходного случайного процесса составляют систему уравнений путем приравнивания теоретических моментов, являющихся функциями неизвестных параметров, к соответствующим статистическим моментам, которые являются функциями данных наблюдений. Метод моментов далее мы рассматривать не будем.

## 9.6. Метод максимального правдоподобия

Метод, о котором пойдет речь, получил, пожалуй, наибольшее распространение в практике научных исследований. Он является весьма эффективным средством решения *задачи оценивания параметров случайного процесса по данным наблюдений при известном виде законов распределения соответствующих случайных выборок, зависящих от оцениваемых параметров*.

На первый взгляд может показаться, что необходимость знания вида этих законов распределения является слишком жестким ограничением для практического применения рассматриваемого метода. Однако, как станет ясно из дальнейших рассуждений, этот метод позволяет получать *состоятельные, асимптотически несмещенные и асимптотически нормальные оценки* неизвестных параметров даже в тех случаях, когда теоретический и фактический законы распределения *случайных выборок* изучаемого *случайного процесса* не совпадают.

Идея этого метода состоит в следующем. Пусть  $N$ -мерная *функция плотности вероятностей*

$$f_{\xi}(y|\beta) \triangleq f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}|t_1, \dots, t_N; \beta), \quad y \triangleq X(N)$$

изучаемого  $n$ -мерного *случайного процесса*  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от  $L$ -мерного вектора неизвестных параметров  $\beta \in B$ , определяет этот процесс на множестве  $T_{(N)} = \{t_k\}_{k=1}^N \subset T$  единственным образом. Если воспользоваться функцией  $l(\alpha)$ , определяемой равенством (9.30), то из теоремы 9.1 можно заключить, что в рассматриваемом случае для любого  $\alpha \in B \setminus \{\beta\}$  выполняется неравенство

$$l(\beta) = M[\ln f_{\xi}(\eta(\omega)|\beta)] > M[\ln f_{\xi}(\eta(\omega)|\alpha)] = l(\alpha),$$

откуда

$$\max_{\alpha \in B} M[\ln f_{\xi}(\eta(\omega)|\alpha)] = M[\ln f_{\xi}(\eta(\omega)|\beta)].$$

Для практического использования этого результата в последнем равенстве заменим *математическое ожидание* его оценкой, определяемой по данным наблюдений, представленным множеством  $U_m$ . Тогда с учетом (9.1), (9.2), (9.14), (9.16) получим

$$\max_{\alpha \in B} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln f_{\xi}(\xi(T_{(k)}, \omega_{(k)})|\alpha) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln f_{\xi}(\xi(T_{(k)}, \omega_{(k)})|\beta_m),$$

где  $\beta_m$  — оценка вектора неизвестных параметров  $\beta$ .

Такой метод оценивания, известный как *метод максимального правдоподобия*, был предложен К. Гауссом. Оценку  $\beta_m$  вектора неизвестных параметров  $\beta$  называют *оценкой максимального правдоподобия* (или *максимально правдоподобной оценкой*), а функцию

$$L(\alpha|U_m) \triangleq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln f_{\xi}(\xi(T_{(k)}, \omega_{(k)})|\alpha) \quad (9.34)$$

*функцией максимального правдоподобия*. В рассматриваемом случае оценку максимального правдоподобия  $\beta_m$  вектора неизвестных параметров  $\beta$  определяют из уравнения

$$L(\beta|U_m) = \max_{\alpha \in B} L(\alpha|U_m)$$

и записывают так:

$$\beta_m = \arg \max_{\alpha \in B} L(\alpha|U_m). \quad (9.35)$$

Если данные наблюдений представлены множеством  $U_{MN}$ , то с учетом (9.4) и (9.18) функцию максимального правдоподобия можно записать следующим образом:

$$L(\alpha|U_{MN}) \triangleq \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I(j)} \ln f_{\xi}(\xi(t_j, \omega_{(i)})|\alpha). \quad (9.36)$$

А так как в рассматриваемом случае множество  $U_{MN}$  является *реализацией* соответствующей *случайной выборки* объема  $M$  для изучаемого случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от вектора неизвестных параметров  $\beta \in B$ , то с учетом (9.36) оценка максимального правдоподобия равна

$$\beta_M = \arg \max_{\alpha \in B} L(\alpha|U_{MN}). \quad (9.37)$$

Из (9.34), (9.36) и (9.35), (9.37) видно, что влияние специфики данных наблюдений на формальную процедуру определения оценок максимального правдоподобия для вектора неизвестных параметров не является принципиально значимым для дальнейшего изложения. Поэтому, исходя исключительно из сообра-

жений компактности и наглядности представления материала, ограничимся данными наблюдений, представленными множеством  $U_m$ .

В литературе по математической статистике функцией максимального правдоподобия принято называть совместную функцию плотности вероятностей случайной выборки [XVII]. А так как при решении теоретических и практических задач, как правило, используют не саму функцию максимального правдоподобия, а ее натуральный логарифм, то сочтем возможным назвать функцией максимального правдоподобия функцию  $L(\alpha|U_*)$ . По этой же причине при рассмотрении теории квазиправдоподобных оценок функция  $\tilde{L}(\alpha|U_*)$  названа функцией квазиправдоподобия.

Оценку называют **асимптотически несмещенной**, если при неограниченном возрастании объема случайной выборки она становится несмещенной. Аналогично определяются понятия **асимптотически эффективной** и **асимптотически нормальной оценки**. Оценку называют **нормальной оценкой**, если она получена по данным случайной выборки, распределенной по нормальному закону.

**Теорема 9.3.** Пусть  $N$ -мерная функция плотности вероятностей

$$f_{\xi}(y|\beta) \triangleq f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}|t_1; \beta), \quad y = X(N),$$

$n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от  $L$ -мерного вектора неизвестных параметров  $\beta \in B$ , разделяет точки  $B$  на множестве  $T_{(N)} = \{t_k\}_{k=1}^N \subset T$ . Пусть для функции  $f_{\xi}(y|\alpha)$  при любом  $\alpha \in B$  существуют и ограничены все частные производные по компонентам вектора  $\alpha$  до третьего порядка включительно. Тогда, если данные наблюдений представлены множеством  $U_m$ , то оценка максимального правдоподобия  $\beta_m$ , определяемая равенствами (9.35), (9.34), является состоятельной, асимптотически несмещенной, асимптотически эффективной и асимптотически нормальной.

Доказательство сформулированной теоремы при сделанных предположениях практически ничем не отличается от доказательства соответствующей теоремы о свойствах максимально правдоподобной оценки параметра распределения случайной величины, которое можно найти в литературе по математической статистике\*. Не останавливаясь на доказательстве теоремы 9.3, проиллюстрируем метод максимального правдоподобия на примере скалярного случайного процесса (9.12) (см. пример 9.3).

**Пример 9.5.** Рассмотрим скалярный случайный процесс, определенный стохастической моделью состояния в форме Ито:

$$\begin{cases} d\xi(t, \omega) = -(\beta_1 - 0,5\beta_2^2)\xi(t, \omega) dt + \beta_2\xi(t, \omega) dw(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) \equiv x_0, \end{cases}$$

где  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — скалярный винеровский процесс с единичным коэффициентом диффузии;  $x_0 > 0$  — известное начальное состояние, а  $\beta = (\beta_1 \ \beta_2)^T$  — вектор неизвестных параметров с положительными компонентами.

Для того чтобы записать  $N$ -мерную функцию плотности вероятностей рассматриваемого случайного процесса, полагаем

$$\eta(t, \omega) \triangleq \ln \xi(t, \omega), \quad t \in T.$$

Как показано в примере 7.5, скалярный случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , определен следующей стохастической моделью состояния:

$$\begin{cases} d\eta(t, \omega) = -\beta_1 dt + \beta_2 dw(t, \omega), \\ \eta(0, \omega) \equiv y_0, \end{cases} \quad (9.38)$$

где  $y_0 = \ln x_0$ . Поэтому он является гауссовским скалярным процессом. Кроме того, непосредственно из стохастической модели состояния (9.38) вытекает, что математическое ожидание

\*См.: Крамер Г., Мудров В.И., Кушко В.Л.

$m_\eta(t|\beta)$  является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} dm_\eta(t|\beta) = -\beta_1 dt, \\ m_\eta(0|\beta) = y_0. \end{cases} \quad (9.39)$$

Чтобы определить дисперсию  $D_\eta(t|\beta)$ , рассмотрим случайный процесс

$$z(t, \omega) \triangleq \eta(t, \omega) - m_\eta(t|\beta), \quad t \in T,$$

который, согласно (9.38), (9.39), удовлетворяет стохастической модели состояния

$$\begin{cases} dz(t, \omega) = \beta_2 dw(t, \omega), \\ z(0, \omega) \equiv 0 \end{cases}$$

и имеет нулевое математическое ожидание. Так как в этом случае  $D_\eta(t|\beta) = M[z^2(t, \omega)]$ , то

$$\begin{cases} dD_\eta(t|\beta) = \beta_2^2 dt, \\ D_\eta(0|\beta) = 0. \end{cases} \quad (9.40)$$

Для того чтобы определить выражения для *условного математического ожидания*

$$m_\eta(t_{i+1}|t_i; \beta) = M[\eta(t_{i+1}, \omega) | \eta(t_i, \omega) = y(t_i); \beta]$$

и *условной дисперсии*

$$D_\eta(t_{i+1}|t_i; \beta) = M[(\eta(t_{i+1}, \omega) - m_\eta(t_{i+1}|t_i; \beta))^2 | \eta(t_i, \omega) = y(t_i); \beta],$$

*математические модели* (9.39), (9.40) следует рассматривать на временном интервале  $(t_i, t_{i+1}]$ :

$$\begin{cases} dm_\eta(t|t_i; \beta) = -\beta_1 dt, & t_i < t \leq t_{i+1}, \\ m_\eta(t_i|t_i; \beta) = y(t_i), \end{cases} \quad (9.41)$$

$$\begin{cases} dD_\eta(t|t_i; \beta) = \beta_2^2 dt, & t_i < t \leq t_{i+1}, \\ D_\eta(t_i|t_i; \beta) = 0. \end{cases} \quad (9.42)$$

Решая задачи Коши (9.41), (9.42), получаем

$$m_{\eta}(t_{i+1} | t_i; \beta) = y(t_i) - \beta_1(t_{i+1} - t_i), \quad D_{\eta}(t_{i+1} | t_i; \beta) = \beta_2^2(t_{i+1} - t_i).$$

Теперь можно записать *условную функцию плотности вероятностей*:

$$f_{\eta}(y(t_{i+1}) | y(t_i); \beta) = \frac{1}{\beta_2 \sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_i)}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{(y(t_{i+1}) - y(t_i) + \beta_1(t_{i+1} - t_i))^2}{2\beta_2^2(t_{i+1} - t_i)}\right). \quad (9.43)$$

Поскольку рассматриваемый случайный процесс  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является *марковским процессом*, его  $N$ -мерная функция плотности вероятностей имеет вид

$$f_{\eta}(y | \beta) = \prod_{i=1}^{N-1} f_{\eta}(y(t_{i+1}) | y(t_i); \beta). \quad (9.44)$$

Приступим к решению задачи оценивая неизвестных параметров  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , составляющих вектор  $\beta$ , методом максимального правдоподобия. Предположим, что данные наблюдений представлены множеством  $U_m$  и определены согласно (9.1), (9.2). Для упрощения записи введем обозначение:

$$x_j^k \triangleq \xi(t_{k,j}, \omega_{(k)}), \quad j = \overline{1, N(k)}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Тогда, согласно (9.34), (9.44) и равенству

$$\eta(t, \omega) \triangleq \ln \xi(t, \omega), \quad t \in T,$$

функцию максимального правдоподобия  $L(\beta | U_m)$  можно записать в виде

$$L(\beta | U_m) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N(k)-1} \ln f_{\eta}(\ln x_{j+1}^k | \ln x_j^k; \beta).$$

С учетом представления (9.43) получаем

$$L(\beta|U_m) = C - \frac{N}{2m} \ln \beta_2^2 - \\ - \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N(k)-1} \frac{(\ln(x_{j+1}^k/x_j^k) - \beta_1(t_{k,j+1} - t_{k,j}))^2}{\beta_2^2(t_{k,j+1} - t_{k,j})},$$

где

$$N = \sum_{k=1}^m N(k) - m, \quad C = -\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N(k)-1} \ln[2\pi(t_{k,j+1} - t_{k,j})].$$

Отметим, что  $C$  не зависит от  $\beta$ . Нетрудно убедиться в том, что функция максимального правдоподобия имеет единственный максимум в точке  $\hat{\beta}$  с координатами:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N(k)-1} \ln\left(\frac{x_j^k}{x_{j+1}^k}\right), \\ \hat{\beta}_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N(k)-1} \left( \frac{\ln(x_{j+1}^k/x_j^k)}{\sqrt{t_{k,j+1} - t_{k,j}}} - \hat{\beta}_1 \sqrt{t_{k,j+1} - t_{k,j}} \right)^2,$$

где

$$T = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N(k)-1} (t_{k,j+1} - t_{k,j}) \quad —$$

суммарное время наблюдений. Координаты  $\hat{\beta}_1$  и  $\hat{\beta}_1$  удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\frac{\partial L(\beta|U_m)}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial L(\beta|U_m)}{\partial \beta_2} = 0. \quad \#$$

Сделаем одно важное замечание, касающееся применения как метода максимального правдоподобия, так и других методов. Дело в том, что мы считаем известным вид функции плотности вероятностей  $f_\xi(y|\alpha)$ , которая при  $\alpha = \beta$  представляет



собой  $N$ -мерную функцию плотности вероятностей изучаемого случайного процесса. Ослабим это условие и предположим, что  $N$ -мерная функция плотности вероятностей рассматриваемого случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , задана функцией  $f_*(y|\alpha)$ , в то время как в действительности она представляет собой функцию  $f_\xi(y|\alpha)$ . В этом случае полагают

$$\tilde{l}(\alpha) \triangleq \int_Y (\ln f_*(y|\alpha)) f_\xi(y|\alpha) dy$$

и рассматривают **функцию квазиправдоподобия**

$$\tilde{L}(\alpha|U_m) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln f_*(\xi(T_{(k)}, \omega_{(k)})|\alpha).$$

В качестве оценки вектора  $\beta$  неизвестных параметров берут **квазиправдоподобную оценку**

$$\tilde{\beta}_m = \arg \max_{\alpha \in B} \tilde{L}(\alpha|U_m).$$

Это мы уже рассматривали в 9.5: в теореме 9.2 было показано, что при известных предположениях относительно функции плотности вероятностей нормального закона распределения задача оценивания вектора неизвестных параметров  $\beta$  имеет единственное решение. В общем случае следует потребовать выполнения неравенства

$$\tilde{l}(\beta) > \tilde{l}(\alpha), \quad \alpha \in B \setminus \{\beta\}.$$

Так как выборочное среднее является состоятельной оценкой для математического ожидания, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{L}(\alpha|U_m) = \tilde{l}(\alpha),$$

и с учетом предыдущего неравенства можно доказать состоятельность квазиправдоподобной оценки  $\tilde{\beta}_m$  вектора неизвестных параметров  $\beta$ .

Пусть

$$\Phi(y|\alpha) \triangleq \ln f_*(y|\alpha),$$

где  $\alpha \in B$  и  $y \in Y \triangleq \{y \in \mathbb{R}^{nN}: f_*(y|\alpha) f_\xi(y|\alpha) > 0\}$ . Предположим, что выполнены следующие условия.

1. При каждом  $\alpha \in B$  и  $y \in Y$  существуют все частные производные для функции  $\Phi(y|\alpha)$  по компонентам вектора  $\alpha$  до третьего порядка включительно и

$$A(y, \alpha) \triangleq \frac{\partial \Phi(y|\alpha)}{\partial \alpha}, \quad B(y, \alpha) \triangleq \left( \frac{\partial^2 \Phi(y|\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right).$$

2. При любых  $\alpha \in B$  и  $y \in Y$

$$\left| \frac{\partial^3 \Phi(y|\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right| < h(y), \quad i, j, k = \overline{1, L},$$

причем

$$\int_Y h(y) f_\xi(y|\alpha) dy < M < \infty (M > 0).$$

3. При каждом  $\alpha \in B$

$$\int_Y A(y|\alpha) f_\xi(y|\alpha) dy = \Theta.$$

4. При каждом  $\alpha \in B$  существуют матрицы

$$\Gamma(\alpha) \triangleq - \int_Y B(y|\alpha) f_\xi(y|\alpha) dy,$$

$$E(\alpha) \triangleq \int_Y A^T(y|\alpha) A(y|\alpha) f_\xi(y|\alpha) dy,$$

причем матрица  $\Gamma(\alpha)$  положительно определена.

**Теорема 9.4.** Если выполнены условия 1–4, то квазиправдоподобная оценка  $\tilde{\beta}_m$  сходится по вероятности к истинному значению неизвестного вектора параметров и является асимптотически несмещенной и асимптотически нормальной оценкой с ковариационной матрицей

$$\frac{1}{m} \Gamma^{-1}(\beta) E(\beta) \Gamma^{-1}(\beta).$$

Доказательство этой теоремы также можно найти в литературе по математической статистике\*. Не приводя его, поясним теорему на конкретном примере.

**Пример 9.6.** Рассмотрим скалярный случайный процесс  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , определяемый стохастической моделью состояния в форме Ито

$$\begin{cases} d\xi(t, \omega) = (\beta_3 - (\beta_1 - 0,5\beta_2^2)\xi(t, \omega)) dt + \\ + \beta_2 \xi(t, \omega) dw(t, \omega), \\ \xi(0, \omega) \equiv x_0, \end{cases} \quad (9.45)$$

где  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный винеровский процесс с коэффициентом диффузии  $\sigma^2 = 1$ ;  $x_0 > 0$  — известное начальное состояние, а  $\beta = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)^T$  — вектор неизвестных параметров с положительными компонентами.

При  $\beta_3 = 0$  получаем стохастическую модель состояния, рассмотренную в примере 9.5. Однако при  $\beta_3 > 0$  записать  $N$ -мерную функцию плотности вероятностей изучаемого случайного процесса, как это было сделано в примере 9.5, не удастся. Действительно, пусть

$$\eta(t, \omega) \triangleq \ln \xi(t, \omega), \quad t \in T.$$

В этом случае по правилу дифференцирования Ито получаем

$$\begin{cases} d\eta(t, \omega) = \left( \frac{\beta_3}{\xi(t, \omega)} - \beta_1 \right) dt + \beta_2 dw(t, \omega), \\ \eta(0, \omega) \equiv \ln x_0, \end{cases}$$

где  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — исходный случайный процесс.

Поскольку мы не можем определить  $N$ -мерную функцию плотности вероятностей случайного процесса  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , то для решения задачи оценивания неизвестных параметров модели (9.45) по данным наблюдений мы не можем использовать

\*См.: Мудров В.И., Кушко В.Л.

метод максимального правдоподобия. Для определенности будем считать, что располагаем данными наблюдений, представленными множеством  $U_{MN}$ . Получим квазиправдоподобные оценки неизвестных параметров модели (9.45), представленные вектором  $\beta$ .

Так как в рассматриваемом случае данные наблюдений представлены множеством  $U_{MN}$  и определены согласно (9.4), то функция квазиправдоподобия имеет вид

$$\tilde{L}(\beta|U_{MN}) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I_{(j)}} \ln f_H(\xi(t_j, \omega_{(i)}) | m(t_j|\beta), D(t_j|\beta)).$$

Если для упрощения записи ввести обозначение

$$x_j^i \triangleq \xi(t_j, \omega_{(i)}), \quad j = \overline{1, N}, \quad i \in I_{(j)} \triangleq \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} m_k + s \right\}_{s=1}^{m_j},$$

и подставить выражение для функции плотности вероятностей нормального закона распределения, то получим

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\beta|U_{MN}) = & -0,5N \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \ln D(t_j|\beta) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I_{(j)}} \frac{(x_j^i - m(t_j|\beta))^2}{D(t_j|\beta)}. \end{aligned} \quad (9.46)$$

В соответствии с результатами, приведенными в 7.2, функции  $m(t|\beta)$  и  $D(t|\beta)$  являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} \frac{dm(t|\beta)}{dt} = \left( \frac{\beta_2^2}{2} - \beta_1 \right) m(t|\beta) + \beta_3, \\ m(0|\beta) = x_0, \end{cases} \quad (9.47)$$

$$\begin{cases} \frac{dD(t|\beta)}{dt} = 2(\beta_2^2 - \beta_1) D(t|\beta) + \beta_2^2 m^2(t|\beta), \\ D(0|\beta) = 0. \end{cases} \quad (9.48)$$

Нетрудно убедиться в том, что при  $N > 3$  функции  $m(y|\beta)$  и  $D(y|\beta)$  разделяют точки области изменения параметров на множестве  $T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^N$ . Поэтому задача оценивания имеет единственное решение  $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1 \ \tilde{\beta}_2 \ \tilde{\beta}_3)^T$ , представляющее собой квазиправдоподобную оценку вектора неизвестных параметров  $\beta$ . Эта оценка обладает всеми свойствами, перечисленными в теореме 9.4, поскольку выбранная для решения задачи гауссова функция плотности вероятностей удовлетворяет условиям данной теоремы.

Заметим, что решения задач Коши (9.47), (9.48) можно записать в явном виде и подставить в правую часть (9.46). Однако сложность получаемых зависимостей не позволяет в явном виде записать координаты точки максимума для функции  $\tilde{L}(\beta|U_{MN})$ , как это было сделано в примере 9.5. Поэтому в данном случае квазиправдоподобную оценку находят с помощью численных методов решения экстремальных задач [XIV].

## 9.7. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим случай, когда данные наблюдений представлены множеством  $U_{MN}$ , а математическое ожидание  $m(t|\alpha)$  и ковариационная матрица  $\Sigma(t|\alpha)$  изучаемого  $n$ -мерного случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , зависящего от  $L$ -мерного вектора неизвестных параметров  $\beta \in B$ , разделяют точки  $B$  на множестве  $T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^N \subset T$ . Будем считать, что отсутствует априорная информация относительно одномерной функции плотности вероятностей  $f_\xi(x|t; \beta)$ . В этом случае, согласно теореме 9.2, при решении задачи оценивания вектора неизвестных параметров  $\beta \in B$  случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , можно использовать плотность нормального распределения.

Действительно, согласно теореме 9.2,

$$\max_{\alpha \in B} \tilde{l}(\alpha) = \tilde{l}(\beta), \quad (9.49)$$

где

$$\tilde{l}(\alpha) \triangleq \sum_{j=1}^N \mathbf{M} [\ln f_H(\xi(t_j, \omega) | m(t_j, \omega), \Sigma(t_j, \omega))].$$

Заменяв математическое ожидание его оценкой, приходим к функции, аналогичной функции максимального правдоподобия (9.36):

$$\tilde{L}(\alpha | U_{MN}) \triangleq \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I(j)} \ln f_H(\xi(t_j, \omega_{(i)}) | m(t_j | \alpha), \Sigma(t_j | \alpha)).$$

Так как

$$\begin{aligned} \ln f_H(x | m(t | \alpha), \Sigma(t | \alpha)) = & -\frac{1}{2} n \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det \Sigma(t | \alpha)) - \\ & - \frac{1}{2} (x - m(t | \alpha))^T \Sigma^{-1}(t | \alpha) (x - m(t | \alpha)), \end{aligned}$$

то точки максимума функции  $\tilde{L}(\alpha | U_{MN})$  совпадают с точками минимума функции

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha | U_{MN}) & \triangleq -2\tilde{L}(\alpha | U_{MN}) - nN \ln(2\pi) = \\ & = \sum_{j=1}^N \ln(\det \Sigma(t_j | \alpha)) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I(j)} (\xi(t_j, \omega_{(i)}) - m(t_j | \alpha))^T \times \\ & \quad \times \Sigma^{-1}(t_j | \alpha) (\xi(t_j, \omega_{(i)}) - m(t_j | \alpha)). \end{aligned}$$

Согласно теореме 9.2 и результатам, приведенным в 9.6, квазиправдоподобная оценка вектора неизвестных параметров  $\beta \in B$  равна

$$\tilde{\beta}_M = \arg \max_{\alpha \in B} \tilde{L}(\alpha | U_{MN}) = \arg \min_{\alpha \in B} \mathcal{L}(\alpha | U_{MN}).$$

Если ковариационная матрица изучаемого случайного процесса известна и не зависит от вектора неизвестных параметров, т.е.  $\Sigma(t | \alpha) \equiv \Sigma(t)$  при  $\alpha \in B$  и  $t \in T_{(N)}$ , то в этом случае

сумма

$$\sum_{j=1}^N \ln(\det \Sigma(t_j | \alpha))$$

не зависит от  $\alpha$  и для решения исходной задачи оценивания можно использовать функцию

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha | U_{MN}) \triangleq & \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I(j)} (\xi(t_j, \omega_{(i)}) - m(t_j | \alpha))^T \times \\ & \times \Sigma^{-1}(t_j) (\xi(t_j, \omega_{(i)}) - m(t_j | \alpha)), \quad (9.50) \end{aligned}$$

где  $\Sigma(t_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , — известные квадратные матрицы порядка  $n$ .

Функцию  $\Phi(\alpha | U_{MN})$  называют **критерием метода наименьших квадратов**, оценку

$$\beta_M = \arg \min_{\alpha \in B} \Phi(\alpha | U_{MN}) \quad (9.51)$$

**оценкой наименьших квадратов** для вектора  $\beta$ , а рассмотренный метод решения задачи оценивания — **методом наименьших квадратов**. Известные матрицы  $\Sigma(t_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , называют **весовыми матрицами** критерия.

Поскольку (9.51) в данном случае эквивалентно (9.37), то оценка наименьших квадратов обладает всеми свойствами квазиправдоподобной оценки, т.е. она является *состоятельной*, *асимптотически несмещенной* и *асимптотически нормальной*. Заметим также, что в случае, когда изучаемый случайный процесс является *гауссовым*, она представляет собой *оценку максимального правдоподобия* и, как следствие, является еще и *асимптотически эффективной*.

Отметим, что метод наименьших квадратов позволяет оценивать только те параметры изучаемого случайного процесса, от которых зависит его математическое ожидание, и лишь при условии, что оно определено на множестве  $T_{(N)}$  единственным

образом. Во многих практических задачах весовые матрицы  $\Sigma(t)$  при различных значениях  $t \in T_{(N)}$  неизвестны. В этих случаях „веса“ назначают исходя из каких-либо дополнительных соображений, а если таковые отсутствуют, то чаще всего просто полагают

$$\Sigma(t) \equiv I_n, \quad t \in T_{(N)}. \quad (9.52)$$

Для пояснения сказанного обратимся еще раз к скалярному случайному процессу, рассмотренному в примере 9.3:

$$\xi(t, \omega) \triangleq x_0 \exp(-\beta_1 t + \beta_2 w(t, \omega)), \quad t \in T = [0, \infty),$$

где  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный винеровский процесс с коэффициентом диффузии  $\sigma^2 = 1$ ,  $x_0 > 0$  — известное детерминированное значение начального состояния, а  $\beta = (\beta_1 \ \beta_2)^T$  — вектор неизвестных параметров. Как мы уже знаем,

$$m(t|\beta) \triangleq M[\xi(t, \omega)] = x_0 \exp((- \beta_1 + 0,5\beta_2^2)t), \quad t \in T.$$

Предположим, что мы располагаем данными наблюдений, представленными множеством  $U_{MN}$  и определяемыми согласно (9.4). Очевидно, что в этом случае функция  $m(t|\beta)$  не разделяет точки  $B$  на множестве  $T_{(N)}$ , поскольку она однозначно зависит лишь от параметра

$$\beta_0 = -\beta_1 + 0,5\beta_2^2.$$

Следовательно, методом наименьших квадратов можно оценить лишь параметр  $\beta_0$ . Для этого составим сумму квадратов отклонений (9.50). Предполагая, что дисперсия случайного процесса нам неизвестна, введем „веса“ в соответствии с (9.52) и в результате получим

$$\Phi(\beta_0|U_{MN}) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I(j)} (\xi(t_j, \omega_{(i)}) - x_0 \exp(\beta_0 t_j))^2.$$

В соответствии с проведенными рассуждениями оценка параметра  $\beta_0$  определяется как точка минимума функции  $\Phi(\beta_0|U_{MN})$ .



В заключение сделаем замечание, касающееся рассмотренных методов оценивания неизвестных параметров.

**Замечание 9.1.** Условие единственности решения задачи оценивания получены нами как условие единственности экстремума функции

$$l(\beta) = M[\ln f_{\xi}(\eta(\omega)|\beta)] = \int_Y (\ln f_{\xi}(y|\beta)) f_{\xi}(y|\beta) dy.$$

При решении конкретных задач, располагая *случайными выборками* ограниченного объема, мы заменяем математическое ожидание его оценкой. Получаемая при этом функция (функция правдоподобия или функция  $\Phi$  в методе наименьших квадратов) на самом деле может иметь несколько экстремумов. Полученные условия гарантируют единственность экстремума лишь при неограниченном увеличении объема *выборочных реализаций*.

## Вопросы и задачи

**9.1.** Что Вы знаете о данных наблюдений, представленных множествами  $U_m$  и  $U_{MN}$ ? В чем заключается их принципиальное отличие?

**9.2.** Сформулируйте задачу оценивания параметров случайного процесса по данным наблюдений.

**9.3.** Что представляют собой случайные выборки, реализациям которых соответствуют данные наблюдений, представленные множествами  $U_m$  и  $U_{MN}$ ?

**9.4.** Какой вид и почему имеют функции плотности вероятностей случайных выборок, соответствующих данным наблюдений, представленным множествами  $U_m$  и  $U_{MN}$ ?

**9.5.** Определите количество информации по Фишеру, содержащееся в случайных выборках, соответствующих данным наблюдений, представленным множествами  $U_m$  и  $U_{MN}$ .

**9.6.** При каких условиях  $N$ -мерная функция плотности вероятностей  $f_{\xi}(y|\beta)$  определяет исходный случайный процесс на множестве  $T_{(N)} \subset T$  единственным образом?

**9.7.** В каких случаях функции  $m(t|\alpha)$  и  $\Sigma(t|\alpha)$  определены на множестве  $T_{(N)} \subset T$  единственным образом?

**9.8.** Сформулируйте теорему единственности решения задачи оценивания вектора неизвестных параметров случайного процесса в случае, когда вид функции плотности вероятностей для этого случайного процесса неизвестен.

**9.9.** В чем состоит основная идея метода максимального правдоподобия?

**9.10.** При выполнении каких условий оценка максимального правдоподобия является состоятельной, асимптотически несмещенной, асимптотически эффективной и асимптотически нормальной?

**9.11.** Какую оценку вектора неизвестных параметров изучаемого случайного процесса называют квазиправдоподобной? В чем принципиальное отличие оценки максимального правдоподобия от квазиправдоподобной оценки?

**9.12.** В чем состоит основная идея метода наименьших квадратов?

**9.13.** Связаны ли между собой оценка наименьших квадратов, оценка максимального правдоподобия и квазиправдоподобная оценка? Если между перечисленными оценками существует связь, то какова она?

**9.14.** Пусть выполнены условия единственности решения задачи оценивания неизвестных параметров случайного процесса по данным наблюдений. Допустим, что решение задачи оценивания возможно одним из известных методов. Возможна ли ситуация, когда применение различных численных методов приводит к различным результатам решения задачи оценивания?

**9.15.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный случайный процесс, данные наблюдений представлены множеством  $U_m$ , а  $t_{kj} \equiv t_j$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, N}$ . Докажите, что оценка

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi(t, \omega_{(i)}), \quad t \in T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^N \subset T,$$

является эффективной оценкой математического ожидания  $m(t)$  рассматриваемого случайного процесса.

**9.16.** Пусть  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный стационарный гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием  $\beta^{1/3}$  и дисперсией 1, а данные наблюдений представлены множеством  $U_{1N}$ . Докажите, что:

а) оценка

$$\beta_N = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(t_k, \omega_{(k)}) \right)^3$$

является асимптотически несмещенной оценкой параметра  $\beta$  и имеет смещение  $b_N(\beta) = 3N^{-1}\beta^{1/3} + \beta$ ;

б) оценка

$$\hat{\beta}_N = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(t_k, \omega_{(k)}) \right)^3 - \frac{3}{N^2} \sum_{k=1}^N \xi(t_k, \omega_{(k)})$$

является несмещенной оценкой параметра  $\beta$ .

**9.17.** В условиях задачи 9.16 докажите, что оценка

$$\tilde{\beta}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi^3(t_k, \omega_{(k)})$$

является смещенной и асимптотически смещенной.

У к а з а н и е: убедитесь, что смещение оценки  $\tilde{\beta}_N$  имеет вид  $3\beta^{1/3} + \beta$ .

**9.18.** Покажите, что для оценки  $\beta_N$  в задаче 9.16 неравенство Рао — Крамера имеет вид  $\sigma_\beta^2 \geq 9N^{-1}\beta^{4/3}$ .

**9.19.** Докажите, что в примере 9.5 оценка  $\hat{\beta}_1$  является несмещенной, а оценка  $\hat{\beta}_2^2$  — смещенной. Определите несмещенную оценку для параметра  $\beta_2^2$ .

О т в е т:  $\hat{\beta}_2^2 = N/(N-1)$ .

**9.20.** Убедитесь в том, что в примере 9.5 функция правдоподобия имеет единственный экстремум.

**9.21.** Докажите, что в примере 9.6 математическое ожидание  $m(t|\beta)$  и дисперсия  $D(t|\beta)$  при  $N > 3$  разделяют точки области изменения параметров  $B$  на множестве  $T_{(N)}$ .

**9.22.** Докажите, что в примере 9.5 случайные величины

$$\frac{N\hat{\beta}_2^2}{\beta_2^2} \quad \text{и} \quad \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\beta}_2} \sqrt{\frac{N-1}{N}} T,$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — неизвестные истинные значения параметров, имеют соответственно распределения  $\chi^2$  и Стьюдента с числом степени свободы  $N-1$ .

## 10. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ

В этой главе продолжим изучение методов статистики *случайных процессов*, но от общих теоретических положений и иллюстративных примеров, приведенных в предыдущей главе, перейдем к задаче *параметрической идентификации стохастических моделей состояния*. Другими словами, будем рассматривать задачу оценивания неизвестных параметров, входящих в *стохастическую модель состояния*, по дискретным значениям его *выборочных реализаций*.

### 10.1. Еще раз о стохастической модели состояния

В 7.1 *стохастическая модель состояния*, представляющая собой задачу Коши для системы *стохастических дифференциальных уравнений* и описывающая изменения состояния изучаемого объекта во времени, была получена как результат возмущения исходной *детерминированной модели*. Разумеется, существуют и другие пути, приводящие к стохастическим моделям. Однако в рамках этой книги мы не будем на них останавливаться и продолжим обсуждение, начатое в 7, поскольку именно этот подход чаще всего используют в технических приложениях.

Пусть спроектирован некий объект и для описания изменений его состояния во времени разработана *математическая модель*, представляющая собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X'(t) = F(X, \alpha), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (10.1)$$

где  $X(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояния объекта в момент времени  $t$ ,  $X_0$  — его начальное состояние, а  $\alpha \in \mathbb{R}^L$  — вектор параметров объекта. В процессе эксплуатации объекта эти параметры „шумят“, т.е. по тем или иным непрогнозируемым причинам отклоняются от своих номинальных значений. Так, например, для электронного устройства компонентами вектора параметров  $\alpha$  могут являться значения емкостей, индуктивностей, сопротивлений и других характеристик его элементов, которые, например, могут зависеть от температуры, влажности и других внешних воздействий. Поэтому, повторив рассуждения, приведенные в 7.1, приходим к выводу, что реально наблюдаемые изменения состояния рассматриваемого объекта должны удовлетворять стохастической модели состояния

$$\begin{cases} \frac{dX(t, \omega)}{dt} = F(X, \alpha + \Pi \xi(t, \omega)), \\ X(0, \omega) \equiv X_0, \end{cases} \quad (10.2)$$

где  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , —  $m$ -мерный белый шум с единичной матрицей спектральных интенсивностей, а  $\Pi \in M_{Lm}(\mathbb{R})$  — в общем случае неизвестная матрица.

Далее будем говорить, что **детерминированная модель состояния** (10.1) **устойчива** к возмущениям  $\Pi \xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , вектора параметров  $\alpha$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $t_* \in T$ , что  $\|X(t, \omega) - X(t)\|_{\text{ск}} < \varepsilon$  при  $t \geq t_*$ , где случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , задан стохастической моделью состояния (10.2).

Следует отметить, что введение в детерминированную модель состояния изучаемого объекта случайных возмущений в виде белого шума может привести к нарушению ее устойчивости. Поясним сказанное на следующем примере.

**Пример 10.1.** Рассмотрим простейшую детерминированную модель состояния

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha x(t), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

в которой  $\alpha > 0$ . В этой модели состояние изучаемого объекта  $x(t) = e^{-\alpha t}$ ,  $t \geq 0$ , стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

Предположим, что случайным возмущениям подвержен параметр  $\alpha$ . Тогда стохастическая модель состояния, соответствующая исходной детерминированной модели, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx(t, \omega)}{dt} = -\alpha x(t, \omega) + \gamma x(t, \omega) \xi(t, \omega), \\ x(0, \omega) \equiv 1, \end{cases}$$

где  $\gamma^2$  — известная постоянная величина, называемая **спектральной интенсивностью процесса случайных возмущений**, а  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — белый шум с интенсивностью  $s = 1$ . Воспользовавшись результатами, изложенными в 7.3, запишем стохастическую модель состояния в форме Ито:

$$\begin{cases} dx(t, \omega) = -(\alpha - 0,5\gamma^2) x(t, \omega) dt + \gamma x(t, \omega) dw(t, \omega), \\ x(0, \omega) \equiv 1, \end{cases}$$

где  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — скалярный винеровский процесс с коэффициентом диффузии  $\sigma^2 = 1$ . В примере 7.5 мы показали, что математическое ожидание состояния  $x(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , в рассматриваемом случае равно

$$m(t) = \exp(-(\alpha - 0,5\gamma^2)t), \quad t \geq 0,$$

а его дисперсия равна

$$D(t) = \gamma^2 t \exp(-2(\alpha - \gamma^2)t), \quad t \geq 0.$$

Таким образом, если  $\alpha < \gamma^2$ , то математическое ожидание  $m(t)$  изучаемого случайного процесса  $x(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , неограниченно возрастает при  $t \rightarrow +\infty$ . То же самое происходит и с его дисперсией. А так как при  $\alpha < \gamma^2$  динамика состояния детерминированной модели принципиально отлична от динамики математического ожидания  $m(t)$  состояния ее стохастического аналога, то в этом случае исходная детерминированная модель состояния не обладает устойчивостью к возмущениям входящих в нее параметров.

Заканчивая анализ, заметим, что рассмотренная стохастическая модель состояния сохраняет устойчивость при  $\gamma^2 < \alpha$ , т.е. при малых случайных возмущениях. #

Заметим, что детерминированная модель состояния, рассмотренная в примере 10.1, будет обладать устойчивостью к возмущениям входящих в нее параметров, если процесс случайных возмущений ввести аддитивно:

$$\begin{cases} \frac{dx(t, \omega)}{dt} = -\alpha x(t, \omega) + \gamma \xi(t, \omega), \\ x(0, \omega) \equiv 1. \end{cases}$$

Но в этом случае интерпретация этих возмущений будет уже иной и может быть связана не с зависимостью значения параметра  $\alpha$  от случайных внешних воздействий, а с их непосредственным влиянием на скорость изменения состояния. В общем случае мы должны учитывать возможность как аддитивных, так и мультипликативных возмущений. Применительно к условиям примера 10.1 это означает необходимость рассмотрения следующей стохастической модели состояния:

$$\begin{cases} \frac{dx(t, \omega)}{dt} = -(\alpha + \gamma_1 \xi_1(t, \omega))x(t, \omega) + \gamma_2 \xi_2(t, \omega), & t > 0, \\ x(0, \omega) = x_0(\omega), \end{cases}$$

где  $\xi_1(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — мультипликативное, а  $\xi_2(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — аддитивное возмущения.

Детерминированные модели состояния, которые не обладают устойчивостью к возмущениям входящих в нее параметров, требуют специального рассмотрения, выходящего за рамки книги. Для упрощения дальнейших рассуждений ограничимся детерминированной моделью состояния (10.1), обладающей устойчивостью к малым возмущениям вектора параметров  $\alpha$ . Термин „малые возмущения“ указывает на необходимость введения малого параметра [XIII] в стохастическую модель состояния, а точнее — в „механизм“ случайных возмущений



исходной детерминированной модели состояния (10.1). В соответствии с этим приходим к следующей стохастической модели состояния:

$$\begin{cases} \frac{dX(t, \omega)}{dt} = F(X, \alpha + \varepsilon \Pi \xi(t, \omega)), \\ X(0, \omega) \equiv X_0, \end{cases}$$

где  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , —  $m$ -мерный белый шум с единичной матрицей спектральных интенсивностей,  $\Pi \in M_{Lm}(\mathbb{R})$  — неизвестная матрица, а  $\varepsilon$  — малый положительный параметр.

Естественно, что в каждом конкретном случае возмущения могут быть введены в исходную детерминированную модель состояния (10.1) различными способами. С этим мы уже столкнулись при обсуждении примера 10.1. Поэтому остановимся на рассмотрении достаточно общего случая, когда детерминированной модели состояния (10.1) соответствует стохастическая модель состояния вида

$$\begin{cases} \frac{dX(t, \omega)}{dt} = F(X, \alpha) + \varepsilon \sigma(X, \alpha) \Gamma \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \\ X(0, \omega) \equiv X_0, \end{cases} \quad (10.3)$$

где  $w(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , —  $m$ -мерный винеровский процесс с коэффициентом диффузии  $\sigma^2 = 1$ ,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $\Gamma \in M_{rm}(\mathbb{R})$  — неизвестная матрица.

**Теорема 10.1.** Пусть  $F(X, \alpha) = (F_1(X, \alpha) \dots F_n(X, \alpha))^T$  и  $\sigma(X, \alpha) = (\sigma_{ij}(X, \alpha)) \in M_{nr}(\mathbb{R})$ . Если для любых  $i = \overline{1, n}$  и  $j = \overline{1, r}$  скалярные функции  $F_i(X, \alpha)$  и  $\sigma_{ij}(X, \alpha)$  в некоторой окрестности точки  $(X, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+L}$  имеют ограниченные частные производные до второго порядка включительно по всем компонентам вектора  $X = (x_1 \dots x_n)^T$ , то решение стохастической задачи Коши (10.3) может быть представлено в виде

$$X(t, \omega) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t, \omega) + R(t, \omega), \quad t \geq 0,$$

где

$$\sup_{t \in T} \sqrt{\mathbf{M}[\|R(t, \omega)\|^2]} \leq C \varepsilon^2 \quad (0 < C < \infty),$$

вектор-функция  $X_0(t)$  определена исходной детерминированной моделью состояния (10.1):

$$\begin{cases} X'_0(t) = F(X_0, \alpha), \\ X_0(0) = X_0, \end{cases}$$

а  $n$ -мерный случайный процесс  $X_1(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , является решением стохастической задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dX_1(t, \omega)}{dt} = B(X_0(t), \alpha) X_1(t, \omega) + \sigma(X_0(t), \alpha) \Gamma \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \\ X_1(0, \omega) \equiv 0, \end{cases}$$

где  $B(X, \alpha) \triangleq (\partial F_i(X, \alpha) / \partial x_j)$ .

Доказательство этой теоремы приведено в книге А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейндлина, которую мы рекомендуем для изучения не только в связи с рассматриваемой задачей. Заметим лишь, что с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  решение стохастической задачи Коши (10.3) можно аппроксимировать *гауссовским процессом*

$$X_0(t) + \varepsilon X_1(t, \omega), \quad t \in T = [0, \infty).$$

Если  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — решение стохастической задачи Коши (10.3), а  $X_0(t)$  удовлетворяет исходной детерминированной модели состояния (10.1), то в соответствии с теоремой 10.1 **процесс случайных отклонений**

$$\delta X(t, \omega) \triangleq X(t, \omega) - X_0(t), \quad t \in T, \quad (10.4)$$

с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  должен удовлетворять стохастической модели состояния

$$\begin{cases} d\delta X(t, \omega) = B(X_0(t), \alpha) \delta X(t, \omega) dt + \\ \quad + \sigma(X_0(t), \alpha) Q dw(t, \omega), \quad t > 0, \\ \delta X(0, \omega) \equiv 0, \end{cases} \quad (10.5)$$

где  $Q = \varepsilon \Gamma$ .

В этой модели

$$\mathbf{M}[\delta X(t, \omega)] \equiv \mathbf{0}, \quad (10.6)$$

так как, согласно формулировке (10.5), свойствам винеровского процесса и математического ожидания, имеем

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{M}[\delta X(t, \omega)]}{dt} = B(X_0(t), \alpha) \mathbf{M}[\delta X(t, \omega)], \\ \mathbf{M}[\delta X(0, \omega)] = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Таким образом, из (10.4) и (10.6) следует, что с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  имеет место равенство

$$\mathbf{M}[X(t, \omega)] = X_0(t), \quad t \in T.$$

Заметим, что задача Коши для определения математического ожидания случайного процесса, удовлетворяющего стохастической модели состояния (10.5), была получена в 7.2. Там же доказано, что *ковариационная матрица*  $\Sigma(t|\alpha, G)$  этого процесса является решением следующей задачи Коши с  $G \triangleq QQ^T$ :

$$\begin{cases} \frac{d\Sigma(t|\alpha, G)}{dt} = B(X_0(t), \alpha) \Sigma(t|\alpha, G) + \\ \quad + \Sigma(t|\alpha, G) B^T(X_0(t), \alpha) + \\ \quad + \sigma(X_0(t), \alpha) G \sigma^T(X_0(t), \alpha), \quad t > 0, \\ \Sigma(0|\alpha, G) = \Theta. \end{cases} \quad (10.7)$$

Таким образом, процесс случайных отклонений  $\delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , с точностью  $\varepsilon^2$  полностью определен, поскольку в соответствии с результатами исследований стохастической модели состояния (10.5), приведенными в 7.2, он является гауссовским *марковским процессом*.

Процесс случайных отклонений зависит от  $L$ -мерного вектора параметров  $\alpha$  и матрицы  $G \triangleq QQ^T = \varepsilon^2 \Gamma \Gamma^T$ , которые будем считать неизвестными и предполагать, что для их оценивания мы располагаем данными наблюдений, отражающими изменения состояния изучаемого объекта.

## 10.2. Единственность решения задачи параметрической идентификации стохастической модели состояния

*Стохастическая модель состояния* (10.5) определяет  $n$ -мерный процесс случайных отклонений  $\delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ . А так как он является гауссовским и марковским процессом, то его  $N$ -мерная функция плотности вероятностей имеет вид

$$f_N(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)} | t_1, t_2, \dots, t_N, \alpha, G) = \\ = f_1(X_{(1)} | t_1, \alpha, G) \prod_{i=2}^N f(X_{(i)} | X_{(i-1)}, \alpha, G), \quad (10.8)$$

где условная функция плотности вероятностей равна

$$f(X_{(i)} | X_{(i-1)}, \alpha, G) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma(t_i | t_{i-1}, \alpha, G)}} \times \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} (X_{(i)} - m(t_i | t_{i-1}, \alpha) + X_0(t_{i-1}))^T \times \right. \\ \left. \times \Sigma^{-1}(t_i | t_{i-1}, \alpha, G) (X_{(i)} - m(t_i | t_{i-1}, \alpha) + X_0(t_{i-1})) \right). \quad (10.9)$$

При этом, согласно (10.4)–(10.7) и в соответствии с выводами из теорем 7.2 и 7.3 (см. 7.2), *условное математическое ожидание*

$$m(t_i | t_{i-1}, \alpha) \triangleq M[\delta X(t_i, \omega) | \delta X(t_{i-1}, \omega) = X_{(i-1)} - X_0(t_{i-1})]$$

является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dm(t | t_{i-1}, \alpha)}{dt} = B(X_0(t), \alpha) m(t | t_{i-1}, \alpha), & t_{i-1} < t \leq t_i, \\ m(t_{i-1} | t_{i-1}, \alpha) = X_{(i)} - X_0(t_{i-1}), \end{cases}$$

а условная ковариационная матрица

$$\Sigma(t_i | t_{i-1}, \alpha, G) \triangleq \text{cov}[\delta X(t_i, \omega) | \delta X(t_{i-1}, \omega) = X_{(i-1)} - X_0(t_{i-1})]$$

является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d\Sigma(t|t_{i-1}, \alpha, G)}{dt} = B(X_0(t), \alpha) \Sigma(t|t_{i-1}, \alpha, G) + \\ + \Sigma(t|t_{i-1}, \alpha, G) B^T(X_0(t), \alpha) + \\ + \sigma(X_0(t), \alpha) G \sigma^T(X_0(t), \alpha), \quad t_{i-1} < t \leq t_i, \\ \Sigma(t_{i-1}|t_{i-1}, \alpha, G) = \Theta. \end{cases} \quad (10.10)$$

Для этой матрицы в дальнейшем будем использовать обозначения

$$\Sigma(t_i|t_{i-1}, \alpha, G) = \Sigma_i(\alpha, G). \quad (10.11)$$

Поскольку ковариационные матрицы  $\{\Sigma(t_i|t_{i-1}, \alpha, G)\}$  не зависят от  $\{X_{(j)}\}$ , то представление  $N$ -мерной функции плотности вероятностей в виде (10.8), (10.9) означает, что  $n$ -мерные случайные векторы  $\{X(t_i, \omega) - m(t_i|t_{i-1}, \alpha)\}$  являются независимыми и

$$M[X(t_i, \omega) - m(t_i|t_{i-1}, \alpha)] = X_0(t_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

Теперь установим условия, при выполнении которых  $N$ -мерная функция плотности вероятностей (10.8), (10.9) разделяет точки области изменения параметров изучаемого случайного процесса на множестве

$$T_{(N)} = \{t_i\}_{i=1}^N \subset T.$$

Начнем с математического ожидания  $X_0(t)$  изучаемого случайного процесса  $X(t, \omega) \triangleq X_0(t) + \delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , который удовлетворяет исходной детерминированной модели состояния (10.1):

$$\begin{cases} \frac{dX_0(t)}{dt} = F(X_0(t), \alpha), \\ X_0(0) = X_0 \end{cases}$$

и зависит от вектора параметров  $\alpha$ . Рассмотрим случай, когда эта модель является линейной по параметрам, т.е.

$$F(X_0(t), \alpha) \equiv \Phi(X_0(t))\alpha, \quad (10.12)$$

где  $\Phi(X_0(t))$  — матричная функция, принимающая значения в  $M_{nL}(\mathbb{R})$ . Таким образом, согласно (10.1) и (10.12) будем использовать следующую детерминированную модель состояния:

$$\begin{cases} \frac{dX_0(t)}{dt} = \Phi(X_0(t))\alpha, \\ X_0(0) = X_0. \end{cases} \quad (10.13)$$

Согласно определению 9.2, функция  $X_0(t) = X_0(t, \alpha)$ ,  $t \in T$ , разделяет точки множества  $D = \mathbb{R}^L$  возможных значений вектора параметров на множестве  $T_{(N)} \subset T$ , если для любых  $\alpha \neq \beta$  из  $D$  существует значение  $t = t_{\alpha\beta} \in T_{(N)}$ , такое, что  $X_0(t_{\alpha\beta}, \alpha) \neq X_0(t_{\alpha\beta}, \beta)$ . В соответствии с этим определением вначале установим необходимые условия существования  $t_{\alpha\beta}$ .

**Теорема 10.2.** Пусть для любых  $\alpha \in D$  и  $t \in T = [0, \infty)$

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = \Phi(X_0(t))\alpha \neq 0$$

и существует хотя бы один момент времени  $s \in T$ , в который матрица

$$B(X_0(s), \alpha) \triangleq \left. \frac{\partial \Phi(X)\alpha}{\partial X} \right|_{X=X_0(s)}$$

является невырожденной для любых  $\alpha \in \mathbb{R}^L \setminus \{0\}$ . Тогда равенство  $X_0(t, \alpha) = X_0(t, \beta)$  выполнено для всех  $t \in T$  только в том случае, когда  $\alpha = \beta$ .

◀ Пусть выполнены условия теоремы и

$$Y(t) \triangleq X_0(t, \alpha) = X_0(t, \beta), \quad t \in T,$$

при некоторых  $\alpha, \beta \in D$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Тогда имеем

$$\mathbf{0} = \frac{dX_0(t, \alpha)}{dt} - \frac{dX_0(t, \beta)}{dt} = \Phi(Y(t))(\alpha - \beta).$$

Таким образом, для любых  $t \in T$

$$\mathbf{0} = \frac{d\Phi(Y(t))(\alpha - \beta)}{dt} = B(Y(s), \alpha - \beta) \frac{dY(t)}{dt}.$$

А так как  $\alpha \neq \beta$  и  $\alpha - \beta \in \mathbb{R}^L \setminus \{\mathbf{0}\}$ , то при  $t = s$  верно равенство

$$\left. \frac{dY(t)}{dt} \right|_{t=s} = \mathbf{0},$$

которое противоречит первому условию данной теоремы. ►

Заметим, что теорема 10.2 может быть доказана и при менее жестких ограничениях на матрицу\*  $\Phi(X)$ . Из теоремы 10.2 и непрерывности функции  $X_0(t)$  следует, что при  $\alpha \neq \beta$  всегда существует окрестность  $S \subset T$ , такая, что для любых  $\tau \in S$  имеет место неравенство

$$X_0(\tau, \alpha) \neq X_0(\tau, \beta).$$

Следовательно, в условиях теоремы 10.2 всегда можно выбрать множество  $T_{(N)} = \{t_i\}_{i=1}^N \subset T$  так, что математическое ожидание  $X_0(t)$  изучаемого случайного процесса, являющееся решением задачи Коши (10.13), будет разделять точки множества  $D$  возможных значений вектора параметров на множестве  $T_{(N)}$ . В частности, можно показать, что для этого достаточно выбрать  $N \geq L$ .

Заметим также, что исследуемый случайный процесс не должен быть стационарным. Это следует непосредственно из первого условия теоремы 10.2 и согласуется с результатами примера 9.4 и его обсуждением.

---

\*См.: Зуев С.М.

Теперь с учетом тождества (10.12) перейдем к рассмотрению ковариационных матриц  $\Sigma_i(\alpha, G)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , для чего выберем два набора неизвестных параметров:  $\{\alpha_1; G_1\}$  и  $\{\alpha_2; G_2\}$ . Предположим, что  $\alpha \triangleq \alpha_1 = \alpha_2$  и  $G_1 \neq G_2$ . Пусть

$$\Delta \Sigma_i(\alpha, G_1, G_2) \triangleq \Sigma_i(\alpha, G_1) - \Sigma_i(\alpha, G_2).$$

С учетом (10.10) и (10.11) приходим к выводу, что матричная функция

$$\Delta \Sigma(t|\alpha, G_1, G_2) \triangleq \Sigma(t|t_{i-1}, \alpha, G_1) - \Sigma(t|t_{i-1}, \alpha, G_2)$$

является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d\Delta \Sigma(t|\alpha, G_1, G_2)}{dt} = B(X_0(t), \alpha) \Delta \Sigma(t|\alpha, G_1, G_2) + \\ + \Delta \Sigma(t|\alpha, G_1, G_2) B^T(X_0(t), \alpha) + \\ + \sigma(X_0(t), \alpha) (G_1 - G_2) \sigma^T(X_0(t), \alpha), \quad t_{i-1} < t \leq t_i, \\ \Delta \Sigma(t_{i-1}|\alpha, G_1, G_2) = \Theta. \end{cases} \quad (10.14)$$

О задаче (10.14) известно (см. 7.2), что она имеет нулевое решение тогда и только тогда, когда является однородной — в рассматриваемом случае при  $G_1 = G_2$ . Таким образом, при  $\alpha_1 = \alpha_2$  и  $G_1 \neq G_2$  случайные векторы  $X(t_i, \omega) - m(t_i|t_{i-1}, \alpha)$  имеют одинаковые математические ожидания, но различные ковариационные матрицы, а при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  всегда найдутся два случайных вектора из указанной совокупности с различными математическими ожиданиями. Поэтому две  $N$ -мерные функции плотности вероятностей (10.8), (10.9) равны тогда и только тогда, когда  $\alpha_1 = \alpha_2$  и  $G_1 = G_2$ .

Отметим, что фактически мы получили условия единственности решения задачи параметрической идентификации нелинейной стохастической модели состояния (10.3), если рассмотренная линейная модель (10.5) содержит все неизвестные параметры исходной нелинейной модели (10.3). Поэтому при



выполнении условий единственности решения задачи параметрической идентификации линейной модели мы можем оценить все параметры исходной нелинейной стохастической модели состояния. Но при этом следует помнить, что сделанный вывод касается только условий единственности решения задачи параметрической идентификации, но не качества получаемых оценок. По вполне понятным причинам они будут смещенными, причем смещение будет стремиться к нулю при увеличении числа наблюдений, если  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 10.3. Выбор наблюдаемых переменных

Рассмотрим еще одну особенность задачи оценивания параметров случайного процесса

$$X(t, \omega) \triangleq X_0(t) + \delta X(t, \omega), \quad t \in T = [0, \infty),$$

по данным наблюдений, определяемого детерминированной моделью состояния (10.1):

$$\begin{cases} \frac{dX_0(t)}{dt} = F(X_0(t), \alpha), \\ X_0(0) = X_0, \end{cases}$$

и стохастической моделью состояния (10.5):

$$\begin{cases} d\delta X(t, \omega) = B(X_0(t), \alpha) \delta X(t, \omega) dt + \sigma(X_0(t), \alpha) Q dw(t, \omega), \\ \delta X(0, \omega) \equiv 0. \end{cases}$$

Эта особенность заключается в том, что в практических исследованиях нередкой является ситуация, когда в процессе наблюдений за изменениями состояния изучаемого объекта могут быть измерены значения не всех компонент его вектора состояния. Если в результате наблюдений за изменениями состояния изучаемого объекта могут быть измерены значения фиксированной компоненты его вектора состояния, то эту компоненту

называют **наблюдаемым переменным состоянием**. В противном случае компоненту вектора состояния называют **ненаблюдаемым переменным состоянием**.

Изучение указанной особенности задачи параметрической идентификации стохастической модели состояния (10.5) начнем с рассмотрения примера.

**Пример 10.2.** Пусть двумерный случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , задан стохастической моделью состояния (10.3), которой соответствует детерминированная модель состояния (10.1) следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 x_2 - \alpha_2 x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\alpha_3 x_2, \\ x_1(0) = C_1, \quad x_2(0) = C_2, \end{cases} \quad (10.15)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — известные положительные константы, характеризующие начальное состояние изучаемого объекта, а  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — неизвестные положительные параметры.

Выше было показано (см. 10.1), что решение задачи Коши (10.15)

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} x_{01}(t) \\ x_{02}(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

в линейном приближении представляет собой *математическое ожидание случайного процесса*  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ . Предположим, что  $N = 3$ , т.е.  $T_{(N)} = \{t_1, t_2, t_3\}$  и выполнены условия теоремы 10.1, а измерения проведены лишь для второй компоненты вектора состояния, причем так, что известны математические ожидания  $M[x_2(t_j, \omega)]$ ,  $j = \overline{1, 3}$ .

Решая задачу Коши (10.15), получаем

$$x_1(t) = C_1 \exp(-\alpha_2 t - \alpha_1 \alpha_3^{-1} C_2 (e^{-\alpha_3 t} - 1)), \quad x_2(t) = C_2 e^{-\alpha_3 t}.$$

В результате для определения оценки  $\alpha_{03}$  параметра  $\alpha_3$  мы располагаем системой уравнений

$$M[x_2(t_j, \omega)] = C_2 \exp(-\alpha_{03} t_j), \quad j = \overline{1, 3}.$$

У нас нет никаких данных для нахождения оценок  $\alpha_{01}$  и  $\alpha_{02}$  параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Таким образом, в рассматриваемом случае задача оценивания вектора неизвестных параметров  $\alpha$  имеет бесчисленное множество решений.

Наоборот, если известны  $M[x_1(t_j, \omega)]$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , то для определения оценки  $\alpha_0 = (\alpha_{01} \ \alpha_{02} \ \alpha_{03})^T$  вектора неизвестных параметров  $\alpha$  мы располагаем системой уравнений

$$M[x_1(t_j, \omega)] = C_1 \exp(-\alpha_{02} t_j + \alpha_{01} \alpha_{03}^{-1} C_2 (1 - e^{-\alpha_{03} t_j})), \quad j = \overline{1, 3}.$$

Если эта система совместна, то она позволяет найти оценки всех неизвестных параметров.

Таким образом, для решения задачи параметрической идентификации детерминированной модели состояния (10.15) в качестве наблюдаемого переменного состояния следует выбрать  $x_1(t)$  и провести измерения ее значений, как минимум, в три момента времени. #

В общем случае решение вопроса о выборе наблюдаемых переменных состояния связано с анализом **функций чувствительности**, которые представляют собой частные производные компонент вектора состояния

$$X(t) = X(t, \alpha) = (x_1(t, \alpha) \ \dots \ x_n(t, \alpha))^T$$

исходной детерминированной модели (10.1) по параметрам  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L$ , которые являются компонентами вектора  $\alpha \in D \subset \mathbb{R}^L$ . При этом, если ввести **матричную функцию чувствительности**

$$S(t) \triangleq \frac{\partial X(t, \alpha)}{\partial \alpha} \in M_{nL}(\mathbb{R})$$

детерминированной модели состояния (10.1), то эта матрица при выполнении некоторых условий является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = B(X(t), \alpha) S(t) + F_\alpha(X(t), \alpha), \\ S(0) = \Theta, \end{cases}$$

при записи которой использованы матрицы Якоби [V]

$$B(X, \alpha) = \frac{\partial F(X, \alpha)}{\partial X}, \quad F_\alpha(X, \alpha) = \frac{\partial F(X, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Можно показать, что если существует строка матрицы  $S(t)$  с номером  $k$ , элементы которой не обращаются в нуль ни при каких значениях  $t \geq 0$  и вектора параметров  $\alpha \in D$ , то для решения задачи параметрической идентификации детерминированной модели состояния (10.1) достаточно иметь данные измерений значений компоненты  $x_k(t)$  вектора состояния  $X(t)$  в дискретные моменты времени  $t_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , где  $N \geq L$ . Если же такой строки нет, то из строк матрицы  $S(t)$  следует сформировать такую матрицу  $S_*(t)$ , каждый столбец которой содержит хотя бы один элемент, отличный от нуля для всех  $t \geq 0$  и  $\alpha \in D$ . Номера строк матрицы  $S(t)$ , составляющих матрицу  $S_*(t)$ , и являются номерами тех компонент вектора состояния, значения которых следует измерять в дискретные моменты времени, чтобы обеспечить выполнение необходимого условия единственности решения рассматриваемой задачи.

Если матрица  $S_*(t)$  совпадает со всей матрицей  $S(t)$ , то следует измерять все компоненты вектора состояния. Если из матрицы  $S(t)$  можно выделить несколько матриц  $S_*(t)$ , то мы имеем несколько вариантов для набора наблюдаемых переменных и можно использовать любой из них. Конкретный выбор диктуется возможностью измерения входящих в нее переменных.

Пусть мы располагаем данными измерений значений  $k$  ( $1 \leq k < n$ ) наблюдаемых компонент  $n$ -мерного вектора состояния исходной детерминированной модели (10.1) в дискретные моменты времени  $t_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ . Тогда при  $N \geq L$  можно найти единственную оценку вектора параметров  $\alpha$ . Однако при переходе к стохастической модели состояния (10.3) с ее последующим преобразованием к стохастической модели состояния (10.5) необходимо оценить еще и элементы матрицы  $G \in M_r(\mathbb{R})$ . При этом, согласно (10.7) и (10.5), матрица  $G \triangleq QQ^T = \varepsilon^2 \Gamma \Gamma^T$  является симметрической, т.е. неизвестными параметрами являются  $r(r+1)/2$  ее элементов.

Пусть  $\Sigma(t)$  — ковариационная матрица  $n$ -мерного вектора состояния  $X(t, \omega)$ ,  $t > 0$ , стохастической модели (10.3). Так как наблюдают  $k$  компонент вектора состояния, естественно считать известными  $(k+1)k/2$  элементов матрицы  $\Sigma(t)$ . Приравнивая соответствующие элементы матрицы  $\Sigma(t|\alpha, G)$ , определяемой согласно (10.11), элементам матрицы  $\Sigma(t)$  в каждый момент времени  $t_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , получим  $k(k+1)/2$  уравнений, содержащих  $r(r+1)/2$  неизвестных. А так как число оцениваемых параметров не должно быть больше числа уравнений связи, то должно быть выполнено неравенство

$$\frac{Nk(k+1)}{2} \geq \frac{r(r+1)}{2}.$$

При этом мы должны учесть ограничение  $N \geq L$ , полученное при исследовании задачи оценивания вектора параметров  $\alpha$ . Таким образом, число  $N$  моментов времени для измерения значений наблюдаемых компонент вектора состояния следует выбирать так, чтобы выполнялось условие

$$N \geq \max \left\{ L; \frac{r(r+1)}{k(k+1)} \right\}, \quad (10.16)$$

где  $k$  — число наблюдаемых компонент  $n$ -мерного вектора состояния,  $r$  — порядок симметрической матрицы  $G$ , а  $L$  — размерность вектора параметров  $\alpha$ . Заметим, что если наблюдают

все компоненты вектора состояния ( $k = n$ ), а число оцениваемых параметров равно размеру вектора состояния ( $L = n$ ), то полученное условие принимает вид  $N \geq n$ .

Отметим, что при выполнении условия (10.16) изучаемый случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , однозначно определен на множестве  $T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^N$  своей  $N$ -мерной функцией плотности вероятностей (10.8), (10.9) и для оценивания входящих в нее неизвестных параметров можно использовать методы, рассмотренные в предыдущей главе.

#### 10.4. Специфика задачи оценивания при наличии ошибок измерений

До сих пор мы предполагали, что измерения значений компонент вектора состояния осуществляют точно, т.е. отсутствует случайная ошибка измерений. Это было удобно для выяснения тех вопросов, которые были рассмотрены в 10.1–10.3. Чтобы приблизить постановку задачи параметрической идентификации стохастической модели состояния к реальным условиям, откажемся от этого предположения и будем считать, что данные наблюдений могут быть представлены в виде

$$Y(t, \omega) = CX(t, \omega) + \eta(t, \omega), \quad t \in T_{(N)} \subset T, \quad (10.17)$$

где  $T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^N$ ;  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T_{(N)}$ , — ненаблюдаемое значение  $n$ -мерного вектора состояния;  $Y(t, \omega)$ ,  $t \in T_{(N)}$ , — наблюдаемое значение указанной функции вектора состояния;  $C \in M_{kn}(\mathbb{R})$  — известная матрица ранга  $k$ , причем  $1 \leq k \leq n$ ;  $\eta(t_j, \omega)$ ,  $j = \overline{1, N}$  — независимые как по отношению друг к другу, так и по отношению к вектору состояния, случайные векторы, распределенные по  $k$ -мерному нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma_\eta$ .

Как правило,  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T_{(N)}$ , интерпретируют как **сигнал**, задачи Коши (10.1), (10.5) — как **модель сигнала**, гауссовский

белый шум  $\eta(t, \omega)$ ,  $t \in T_{(N)}$ , с дискретным временем, имитирующий ошибки измерений, — как **помеху**, а уравнение (10.17) — как **модель канала связи**. В этой терминологии наша задача формулируется как задача оценивания параметров сигнала. Для ее решения мы располагаем моделью канала связи (10.17) и моделью сигнала (10.1), (10.5).

Отметим, что существуют два основных типа моделей канала связи, первый из которых соответствует **прямым измерениям** значений наблюдаемых компонент вектора состояния, а второй — **косвенным измерениям**. В первом случае данные наблюдений содержат сумму помехи и истинного значения соответствующей компоненты вектора состояния сигнала, а во втором — сумму помехи и линейной комбинации истинных значений компонент вектора состояния сигнала. В первом случае любая строка матрицы  $C$ , входящей в модель канала связи (10.17), состоит из одной единицы и нулей, а во втором случае эта матрица может иметь любую другую структуру, но при этом должна иметь максимальный ранг:  $\text{Rg} C = k$ . Конкретный вид матрицы  $C$  определяется как специфическими особенностями изучаемого *случайного процесса*, так и возможностями эксперимента.

Рассмотрим первый случай, предполагая, что расположение единиц в матрице  $C$  обеспечивает выбор *наблюдаемых переменных состояния* в соответствии с исследованием *функции чувствительности*, приведенным в 10.3. Поскольку измерения производят в дискретные моменты времени  $t \in T_{(N)}$ , то решение линейной по отношению к *процессу случайных отклонений стохастической задачи Коши* (10.5) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \delta X(t_i, \omega) = & R(t_i, t_{i-1}) \delta X(t_{i-1}, \omega) + \\ & + \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i, s) \sigma(X_0(s), \alpha) Q dw(s, \omega), \end{aligned}$$

где  $R(t, s)$  — *резольвента*. В данном случае резольвента является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} = B(X_0(t), \alpha) R(t, s), & t_{i-1} \leq s < t \leq t_i, \\ R(s, s) = I_n. \end{cases}$$

Обозначим

$$W_i(\omega) \triangleq \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i, s) \sigma(X_0(s), \alpha) Q dw(s, \omega)$$

и заметим, что  $n$ -мерные случайные векторы  $W_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , являются независимыми и имеют нулевые математические ожидания (см. 7.3).

С учетом введенных обозначений, включая и (10.4), модель, описывающая данные наблюдений, принимает вид

$$\begin{cases} Y(t_i, \omega) = CX_0(t_i) + C\delta X(t_i, \omega) + \eta(t_i, \omega), & i = \overline{1, N}, \\ \delta X(t_i, \omega) = R(t_i, t_{i-1}) \delta X(t_{i-1}, \omega) + W_i(\omega), & i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (10.18)$$

где  $\eta(t_i, \omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , — независимые как по отношению друг к другу, так и по отношению к  $W_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , случайные векторы, распределенные по  $k$ -мерному нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma_\eta$ , а  $X_0(t)$  — решение задачи Коши (10.1).

Чтобы решить задачу оценивания неизвестных параметров изучаемого случайного процесса, необходимо записать функцию плотности вероятностей блочного случайного вектора

$$(Y^T(t_1, \omega) \ Y^T(t_2, \omega) \ \dots \ Y^T(t_N, \omega))^T,$$

которую обозначим через

$$f(Y|\alpha, G, \Sigma_\eta) = f_N(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(N)}).$$



При этом, согласно (10.18), для всех  $i = \overline{1, N}$

$$\eta(t_i, \omega) = Y(t_i, \omega) - CX_0(t_i) - C\delta X(t_i, \omega),$$

$$W_i(\omega) = \delta X(t_i, \omega) - R(t_i, t_{i-1}) \delta X(t_{i-1}, \omega),$$

где  $\delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, \infty)$ , — наблюдаемый процесс случайных отклонений. Поэтому, если воспользоваться независимостью случайных векторов  $\eta(t_i, \omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , и  $W_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , то с учетом (10.18) можно сделать вывод, что функция плотности вероятностей  $f(Y|\alpha, G, \Sigma_\eta)$  зависит от ненаблюдаемой переменной и не может быть использована для решения задачи оценивания параметров изучаемого случайного процесса.

Учитывая соображения, высказанные в 10.2, представим функцию плотности вероятностей  $f(Y|\alpha, G, \Sigma_\eta)$  в виде (10.8):

$$f_N(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(N)}) = f_1(Y_{(1)}) \prod_{i=2}^N f(Y_{(i)} | Y_{(1)}, \dots, Y_{(i-1)}).$$

А поскольку каждый сомножитель в правой части этого равенства является функцией плотности вероятностей нормального закона распределения, то  $k$ -мерные случайные векторы

[illegible]

независимы, имеют нулевые математические ожидания и ковариационные матрицы  $V_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Таким образом, для решения задачи оценивания неизвестных параметров изучаемого случайного процесса необходимо определить величины

$$\mathbf{M}[Y(t_i, \omega) | Y_{(1)}, \dots, Y_{(i-1)}], \quad i = \overline{2, N}, \quad \text{и} \quad V_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

В соответствии с (10.18) найдем *условное математическое ожидание*

$$\begin{aligned} M[Y(t_i, \omega) | Y_{(1)}, \dots, Y_{(i-1)}] &= M[CX_0(t_i) + C\delta X(t_i, \omega) + \\ &+ \eta(t_i, \omega) | Y_{(1)}, \dots, Y_{(i-1)}] = CX_0(t_i) + C\delta \hat{X}_{(i)}, \end{aligned}$$

где  $i = \overline{2, N}$  и

$$\delta \hat{X}_{(i)} = M[\delta X(t_i, \omega) | Y_{(1)}, \dots, Y_{(i-1)}] —$$

оценка сигнала для момента времени  $t = t_1$  по наблюдаемым значениям  $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(i-1)}$ . Таким образом, при наличии ошибок измерений приходим к необходимости оценивания ненаблюдаемого состояния системы

$$X(t_i, \omega) = X_0(t_i) + \delta X(t_i, \omega)$$

по данным наблюдений  $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(i-1)}$ , содержащим линейные комбинации компонент неизвестного вектора состояния и ошибки измерения. Эта задача имеет самостоятельный интерес. Ей посвящен обширный раздел теории случайных процессов — **теория фильтрации и упреждения**. В связи с этим отвлечемся от рассматриваемой задачи параметрической идентификации, к которой вернемся позже.

### 10.5. Фильтр Калмана

Рассмотрим задачу оценивания *вектора состояния* объекта по данным наблюдений, содержащим случайные ошибки измерений, в ее простейшей стандартной постановке:

$$\begin{cases} X(t_{i+1}, \omega) = \Phi X(t_i, \omega) + \varepsilon_i(\omega), & i = \overline{1, N}, \\ Y(t_i, \omega) = QX(t_i, \omega) + \eta_i(\omega), & i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (10.20)$$

где  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T_{(N)} = \{y_i\}_{i=1}^N$ , —  $n$ -мерный вектор состояния изучаемого объекта;  $Y(t, \omega)$ ,  $t \in T_{(N)}$ , —  $p$ -мерный вектор наблюдаемых переменных состояния;  $\Phi \in M_n(\mathbb{R})$  и  $Q \in M_{pn}(\mathbb{R})$  —

известные матрицы;  $\varepsilon_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, T}$ , — независимые случайные векторы, распределенные по  $n$ -мерному нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma_\varepsilon$ ;  $\eta_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , — независимые случайные векторы, распределенные по  $p$ -мерному нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и положительно определенной ковариационной матрицей  $\Sigma_\eta$ .

Предположим, что случайные векторы  $\varepsilon_k(t, \omega)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , и  $\eta_k(t, \omega)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , независимы, а начальное состояние изучаемого объекта представляет собой независимый по отношению к ним  $n$ -мерный случайный вектор, распределенный по нормальному закону с математическим ожиданием  $m_0$  и ковариационной матрицей  $\Sigma_0$ . Отметим, что в общем случае матрицы  $\Phi$ ,  $Q$ ,  $\Sigma_\varepsilon$ ,  $\Sigma_\eta$  могут зависеть от времени  $t$ .

Дальнейшее рассмотрение опирается на следующие теоремы, касающиеся свойств многомерного нормального распределения.

**Теорема 10.3.** Пусть случайный вектор  $\alpha_i(\omega)$ ,  $i = 1, 2$ , имеет размерность  $n(i)$ , математическое ожидание  $m_i$  и ковариационную матрицу  $\Sigma_i$ . Если случайный вектор  $\beta(\omega) = (\alpha_1^T(\omega) \ \alpha_2^T(\omega))^T$  распределен по  $n$ -мерному нормальному закону,  $n = n(1) + n(2)$ , с математическим ожиданием  $m = (m_1^T \ m_2^T)^T$  и ковариационной матрицей

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_2 \end{pmatrix},$$

то случайные векторы  $\alpha_1(\omega) - \mathbf{M}[\alpha_1(\omega) | \alpha_2(\omega) = Y_2]$  и  $\alpha_2(\omega)$  являются независимыми.

◀ Доказательство этой теоремы фактически содержится в обосновании вывода 3 из теорем 7.2, 7.3. Действительно,

$$V_{11}^{-1} V_{21}^T = (\Sigma_1 - \Sigma_{12} \Sigma_2^{-1} \Sigma_{21}) (\Sigma_{21} - \Sigma_2 \Sigma_{12}^{-1} \Sigma_1)^{-1} = -\Sigma_{12} \Sigma_2^{-1}.$$

А так как плотность распределения вероятностей случайного вектора  $\beta(\omega)$  может быть представлена в виде

$$f_{\beta}(Y_1, Y_2) = f_{\beta}(Y_1 | Y_2) f_{\alpha_2}(Y_2),$$

где

$$f_{\beta}(Y_1 | Y_2) = \sqrt{\frac{|V_{11}|}{(2\pi)^{n(1)}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(Y_1 - m_1 + V_{11}^{-1}V_{21}^T(Y_2 - m_2))^T \times \right. \\ \left. \times V_{11}(Y_1 - m_1 + V_{11}^{-1}V_{21}^T(Y_2 - m_2))\right),$$

то теорема доказана полностью. ►

**Замечание 10.1.** Если выполнены условия теоремы 10.3, то непосредственно из вида условной плотности распределения  $f_{\beta}(Y_1 | Y_2)$  следует равенство [XVI]

$$M[\alpha_1(\omega) | \alpha_2(\omega)] = m_1 + \Sigma_{12}\Sigma_2^{-1}(Y_2 - m_2),$$

так как  $V_{11}^{-1}V_{21}^T = -\Sigma_{12}\Sigma_2^{-1}$ .

**Теорема 10.4.** Если закон распределения блочного случайного вектора  $(\alpha^T(\omega) \ \beta^T(\omega) \ \gamma^T(\omega))^T$  нормальный и  $\beta(\omega)$ ,  $\gamma(\omega)$  независимы, то

$$\mathbf{M}[\alpha(\omega) | \beta(\omega) = Y, \gamma(\omega) = Z] =$$

$$= \mathbf{M}[\alpha(\omega) | \beta(\omega) = Y] + \mathbf{M}[\alpha(\omega) | \gamma(\omega) = Z] + \mathbf{M}[\alpha(\omega)].$$

◄ Пусть случайные векторы  $\alpha(\omega)$ ,  $\beta(\omega)$ ,  $\gamma(\omega)$  имеют математические ожидания  $m_{\alpha}$ ,  $m_{\beta}$ ,  $m_{\gamma}$  и ковариационные матрицы  $\Sigma_{\alpha}$ ,  $\Sigma_{\beta}$ ,  $\Sigma_{\gamma}$  соответственно. Рассмотрим случайный вектор  $\delta(\omega) = (\beta^T(\omega) \ \gamma^T(\omega))^T$  с математическим ожиданием  $m_{\delta} = (m_{\beta}^T \ m_{\gamma}^T)^T$ . Так как по условию случайные векторы  $\beta(\omega)$  и

$\gamma(\omega)$  независимы, для ковариационной матрицы случайного вектора  $\delta(\omega)$  имеем

$$\Sigma_{\delta} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\beta} & \Theta \\ \Theta & \Sigma_{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{\delta}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\beta}^{-1} & \Theta \\ \Theta & \Sigma_{\gamma}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Введя обозначения

$$\Sigma_{\alpha\beta} \triangleq \mathbf{M}[(\alpha(\omega) - m_{\alpha})(\beta(\omega) - m_{\beta})^T],$$

$$\Sigma_{\alpha\gamma} \triangleq \mathbf{M}[(\alpha(\omega) - m_{\alpha})(\gamma(\omega) - m_{\gamma})^T],$$

нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\delta} &\triangleq \mathbf{M}[(\alpha(\omega) - m_{\alpha})(\delta(\omega) - m_{\delta})^T] = \\ &= \mathbf{M} \left[ (\alpha(\omega) - m_{\alpha}) \left( \begin{pmatrix} \beta(\omega) \\ \gamma(\omega) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{\beta} \\ m_{\gamma} \end{pmatrix} \right)^T \right] = (\Sigma_{\alpha\beta} \quad \Sigma_{\alpha\gamma}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Sigma_{\alpha\delta} \Sigma_{\delta}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\alpha\beta} \Sigma_{\beta}^{-1} & \Sigma_{\alpha\gamma} \Sigma_{\gamma}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой 10.3 и замечанием 10.1. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\alpha(\omega) | \beta(\omega) = Y, \gamma(\omega) = Z] &= \\ &= m_{\alpha} + \begin{pmatrix} \Sigma_{\alpha\beta} \Sigma_{\beta}^{-1} & \Sigma_{\alpha\gamma} \Sigma_{\gamma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y - m_{\beta} \\ Z - m_{\gamma} \end{pmatrix} = \\ &= m_{\alpha} + \Sigma_{\alpha\beta} \Sigma_{\beta}^{-1} (Y - m_{\beta}) + \Sigma_{\alpha\gamma} \Sigma_{\gamma}^{-1} (Z - m_{\gamma}) = \\ &= m_{\alpha} + \mathbf{M}[\alpha(\omega) | \beta(\omega) = Y] + \mathbf{M}[\alpha(\omega) | \gamma(\omega) = Z]. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Обратимся теперь к математической модели (10.20). Пусть

$$\begin{cases} Y_i(\omega) \triangleq (Y(t_1, \omega), Y(t_2, \omega), \dots, Y(t_i, \omega)), \\ \hat{X}(i+1 | i) \triangleq \mathbf{M}[X(t_{i+1}, \omega) | Y_i(\omega)]. \end{cases} \quad (10.21)$$

Из теоремы 10.3 следует, что  $Y_{i-1}(\omega)$  и

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_i(\omega) &\triangleq Y(t_i, \omega) - M[Y(t_i, \omega) | Y_{i-1}(\omega)] = \\ &= Y(t_i, \omega) - M[QX(t_i, \omega) + \eta_i(\omega) | Y_{i-1}(\omega)] = Y(t_i, \omega) - \\ &- Q\hat{X}(i|i-1) = Q(X(t_i, \omega) - \hat{X}(i|i-1)) + \eta_i(\omega) \quad (10.22)\end{aligned}$$

независимы. Величину  $\tilde{Y}_i(\omega)$  называют **невязкой оценивания**. При этом

$$\tilde{Y}_i(\omega) = Q\hat{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega), \quad \tilde{X}_i(\omega) \triangleq X(t_i, \omega) - \hat{X}(i|i-1). \quad (10.23)$$

В соответствии с исходными допущениями относительно математической модели (10.20) случайные векторы  $X(t_{i+1}, \omega)$ ,  $Y(t_{i-1}, \omega)$ ,  $\tilde{Y}(t_i, \omega)$  имеют нормальные законы распределения. При этом, согласно (10.21),

$$\hat{X}(i+1|i) = M[X(t_{i+1}, \omega) | Y_{i-1}(\omega), Y(t_i, \omega)].$$

А так как из (10.22) следует равенство

$$Y(t_i, \omega) = \tilde{Y}_i(\omega) + M[Y(t_i, \omega) | Y_{i-1}(\omega)],$$

то с учетом определения и свойств *условного математического ожидания* имеем

$$\begin{aligned}\hat{X}(i+1|i) &= M[X(t_{i+1}, \omega) | Y_{i-1}(\omega)] + \\ &+ M[X(t_{i+1}, \omega) | \tilde{Y}_i(\omega)] + M[X(t_{i+1}, \omega)]. \quad (10.24)\end{aligned}$$

Согласно (10.20), (10.21), получаем

$$\begin{aligned}M[X(t_{i+1}, \omega) | Y_{i-1}(\omega)] &= M[\Phi X(t_i, \omega) + \varepsilon_i(\omega) | Y_{i-1}(\omega)] = \\ &= \Phi M[X(t_i, \omega) | Y_{i-1}(\omega)] = \Phi \hat{X}(i|i-1). \quad (10.25)\end{aligned}$$

Для определения условного математического ожидания вектора  $X(t_{i+1}, \omega)$  относительно  $\tilde{Y}_i(\omega)$  воспользуемся теоремой 10.3 и замечанием 10.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[X(t_{i+1}, \omega) | \tilde{Y}_i(\omega)] &= \mathbf{M}[X(t_{i+1}, \omega)] + \\ &+ \Sigma_{X\tilde{Y}} \Sigma_{\tilde{Y}}^{-1} (Y(t_i, \omega) - \mathbf{M}[Y(t_i, \omega) | Y_{i-1}(\omega)]) = \\ &= \mathbf{M}[X(t_{i+1}, \omega)] + \Sigma_{X\tilde{Y}} \Sigma_{\tilde{Y}}^{-1} \tilde{Y}_i(\omega), \quad (10.26) \end{aligned}$$

где, согласно (10.20), (10.22), (10.23), для ковариационной матрицы  $\Sigma_{X\tilde{Y}}$  имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{X\tilde{Y}} &\triangleq \mathbf{cov}[X(t_{i+1}, \omega); \tilde{Y}_i(\omega)] = \\ &= \mathbf{M}[(\Phi X(t_i, \omega) + \varepsilon_i(\omega) - \Phi \mathbf{M}[X(t_i, \omega)]) (Q \tilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega))^T] = \\ &= \mathbf{M}[(\Phi(\hat{X}(i|i-1) + \hat{X}_i(\omega)) + \varepsilon_i(\omega) - \Phi \mathbf{M}[X(t_i, \omega)]) \times \\ &\quad \times (Q \hat{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega))^T] = \Phi \mathbf{M}[\hat{X}_i(\omega) \tilde{X}_i(\omega)] Q^T, \end{aligned}$$

так как  $\hat{X}(i|i-1)$  и  $\tilde{X}_i(\omega)$  независимы. Аналогично с учетом независимости  $\eta_i(\omega)$  и  $\tilde{X}_i(\omega)$  находим

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{Y}} &\triangleq \mathbf{cov}[\tilde{Y}_i(\omega); \tilde{Y}_i(\omega)] = \mathbf{M}[(Q \tilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega)) \times \\ &\quad \times (Q \tilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega))^T] = Q \mathbf{M}[\tilde{X}_i(\omega) \tilde{X}_i^T(\omega)] Q^T + \Sigma_{\eta}. \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$\begin{cases} P(i) \triangleq \mathbf{M}[\tilde{X}_i(\omega) \tilde{X}_i^T(\omega)], \\ K(i) \triangleq \Sigma_{X\tilde{Y}} \Sigma_{\tilde{Y}}^{-1} = \Phi P(i) Q^T (Q P(i) Q^T + \Sigma_{\eta})^{-1}, \end{cases} \quad (10.27)$$

то, подставляя (10.25)–(10.27) в (10.24), приходим к рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases} \hat{X}(i+1|i) = \Phi \hat{X}(i|i-1) + K(i) \tilde{Y}_i(\omega), \\ \tilde{Y}_i(\omega) = Y(t_i, \omega) - Q \hat{X}(i|i-1) \end{cases} \quad (10.28)$$

с начальным условием

$$\hat{X}(i|i-1)\Big|_{i=1} = m_0.$$

В (10.28) входит матрица  $K(i)$ , которая, согласно (10.27), определена через ковариационную матрицу  $P(i)$ . Эту матрицу нам и нужно найти для завершения процедуры оценивания. Для достижения этой цели из первого уравнения (10.20) вычтем первое уравнение (10.28) и с учетом (10.23) получим

$$\tilde{X}_{i+1}(\omega) = \Phi \tilde{X}_i(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - K(i) \tilde{Y}_i(\omega).$$

Но, согласно (10.23), имеем

$$\tilde{Y}_i(\omega) = Q \tilde{X}_i(\omega) + \eta_i(\omega).$$

Поэтому

$$\tilde{X}_{i+1}(\omega) = (\Phi - K(i)Q) \tilde{X}_i(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - K(i)\eta_i(\omega)$$

и в соответствии с (10.27) для ковариационной матрицы  $P(i)$  находим

$$\begin{aligned} P(i+1) &= \mathbf{M}[(\Phi - K(i)Q) \tilde{X}_i(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - K(i)\eta_i(\omega)] \times \\ &\quad \times [(\Phi - K(i)Q) \tilde{X}_i(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - K(i)\eta_i(\omega)]^T = \\ &= (\Phi - K(i)Q) P(i) (\Phi - K(i)Q)^T + \Sigma_\varepsilon - K(i) \Sigma_\eta K^T(i), \end{aligned}$$

где  $K(i)$  определено равенством (10.27) и  $P(1) = \Sigma_0$ .

Таким образом, если  $Y_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , — измеренные значения состояния  $p$ -мерного случайного процесса с дискретным временем  $Y(t, \omega)$ ,  $t \in T_{(N)} = \{t_j\}_{j=1}^N$ , то для оценки состояния

$$\hat{X}(i+1|i) \triangleq \mathbf{M}[X(t_{i+1}, \omega) | Y(t_j, \omega) = Y_j, j = \overline{1, i}]$$



окончательно получаем для  $i = \overline{1, N}$

$$\begin{cases} \hat{X}(i+1|i) = \Phi \hat{X}(i|i-1) + K(i)(Y_i - Q \hat{X}(i|i-1)), \\ \hat{X}(1|0) = m_0, \\ K(i) = \Phi P(i) Q^T (Q P(i) Q^T + \Sigma_\eta)^{-1}, \\ P(i+1) = (\Phi - K(i)Q) P(i) (\Phi - K(i)Q)^T + \\ \quad + \Sigma_\epsilon - K(i) \Sigma_\eta K^T(i), \\ P(1) = \Sigma_0. \end{cases} \quad (10.29)$$

Совокупность рекуррентных соотношений (10.29) для оценки состояния объекта по данным наблюдений, содержащим случайные ошибки измерений, известны в литературе\* как **теорема Калмана** или **фильтр Калмана**.

**Пример 10.3.** Пусть в задаче оценивания (10.20)

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\epsilon = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad m_0 = \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{20} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 \end{pmatrix},$$

$Q = (1, 0)$ ,  $\Sigma_\eta = 1$ ,  $\{Y_i\}_{i=1}^N$  — экспериментальные данные. Полагая  $i = 1$  в фильтре Калмана (10.29), вычисляем

$$\begin{aligned} K(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \left[ 1 + (1 \ 0) \begin{pmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{10}^2}{1 + \sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

---

\*См.: Острем К.Ю.

и находим оценку

$$\begin{aligned}\hat{X}(2|1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \left[ Y_1 - (1 \ 0) \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{20} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} m_{10} + m_{20} + \frac{(Y_1 - m_{10})\sigma_{10}^2}{1 + \sigma_{10}^2} \\ m_{20} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Полагая  $i = 2$  в фильтре Калмана (10.29), вычисляем

$$\begin{aligned}P(2) &= \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) \right] \begin{pmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 \end{pmatrix} \times \\ &\times \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) \right]^T + \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{10}^2}{1+\sigma_{10}^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_{10}^2}{1 + \sigma_{10}^2} & \frac{\sigma_{20}^2 + \sigma_{10}^2}{1 + \sigma_{10}^2} \\ 0 & \sigma_{20}^2 + \sigma_2^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K(2) &= \Phi P(2) Q^T (Q P(2) Q^T + \Sigma_\eta)^{-1} = \\ &= \frac{\sigma_{10}^2 + \sigma_1^2 (1 + \sigma_{10}^2)}{\sigma_{10}^2 + (1 + \sigma_{10}^2)(1 + \sigma_1^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

и находим оценку

$$\hat{X}(3|2) = \Phi \hat{X}(2|1) + K(2) (Y_2 - Q \hat{X}(2|1)) = \dots \quad \#$$

Из проведенных рассуждений следует, что рекуррентные соотношения (10.29), определяющие фильтр Калмана, остаются справедливыми и в случае, когда матрицы  $\Phi$ ,  $Q$ ,  $\Sigma_\epsilon$ ,  $\Sigma_\eta$  зависят от времени, т.е. при  $\Phi = \Phi(t_i)$ ,  $Q = Q(t_i)$ ,  $\Sigma_\epsilon = \Sigma_\epsilon(t_i)$ ,  $\Sigma_\eta = \Sigma_\eta(t_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

В заключение отметим, что мы рассмотрели лишь основы теории фильтрации. Для более серьезного изучения этой теории необходимо обратиться к специальной литературе\*.

\*См.: Балакришнан А.В., также Ярлыков М.С., Миронов М.А. и Пугачев В.С., Синицын И.Н.

## 10.6. Оценивание параметров при наличии ошибок измерений

Вернемся к математической модели (10.18), в которой неизвестные параметры представлены вектором  $\alpha \in D \subset \mathbb{R}^L$ , матрицей  $G \in M_{LL}(\mathbb{R})$  и ковариационной матрицей  $\Sigma_\eta \in M_{kk}(\mathbb{R})$ , где  $k$  — число наблюдаемых переменных состояния  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T_{(N)} = \{t_i\}_{i=1}^N$ , т.е. размерность вектора  $Y(t, \omega)$ ,  $t \in T_{(N)}$ . Итак, рассмотрим математическую модель

$$\begin{cases} Y(t_i, \omega) = CX_0(t_i) + C\delta X(t_i, \omega) + \eta(t_i, \omega), & i = \overline{1, N}, \\ \delta X(t_i, \omega) = R(t_i, t_{i-1})\delta X(t_{i-1}, \omega) + W_i(\omega), & i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (10.30)$$

где  $X_0(t)$  —  $n$ -мерная вектор-функция, удовлетворяющая исходной детерминированной модели состояния (10.1);  $C \in M_{kn}(\mathbb{R})$  — известная матрица ранга  $k$ , причем  $1 \leq k \leq n$ ;  $R(t, s)$  — резольвента линейной задачи Коши (10.5);  $\{\eta(t_i, \omega)\}_{i=1}^N$  — независимые случайные векторы, распределенные по  $k$ -мерному нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma_\eta$ ;

$$W_i(\omega) \triangleq \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i, s) \sigma(X_0(s), \alpha) Q dw(s, \omega).$$

Предполагаем, что  $n$ -мерные случайные векторы  $W_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , независимы, имеют нулевые математические ожидания, а их ковариационные матрицы определены непосредственно с использованием свойств винеровского процесса:

$$\Sigma(t_i, t_{i-1}, G, \alpha) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i, t) \sigma(X_0(t), \alpha) G \sigma^T(X_0(t), \alpha) R^T(t_i, t) dt,$$

где  $G \triangleq QQ^T$ .

Поскольку случайные векторы  $Z_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , определяемые равенствами (10.19), могут быть представлены в виде

$$Z_i(\omega) = Y(t_i, \omega) - CX_0(t_i) - C\delta\hat{X}_{(i)}, \quad i = \overline{1, N},$$

являются независимыми и распределены по нормальному закону, то

$$f(Y|\alpha, G, \Sigma_\eta) = \prod_{i=1}^N f_H(Z_{(i)}|\alpha, G, \Sigma_\eta),$$

где

$$\begin{aligned} f_H(Z_{(i)}|\alpha, G, \Sigma_\eta) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det \Sigma(t_i, t_{i-1}, G, \alpha)}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(Y_{(i)} - CX_0(t_i) - C\delta\hat{X}_{(i)}\right)^T \left(\Sigma(t_i, t_{i-1}, G, \alpha)\right)^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(Y_{(i)} - CX_0(t_i) - C\delta\hat{X}_{(i)}\right)\right). \end{aligned}$$

Матрицы  $\Sigma(t_i, t_{i-1}, G, \alpha)$  и  $\delta\hat{X}_{(i)}$  вычисляются с использованием *фильтра Калмана* (10.29), который в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} \delta\hat{X}_{(i+1)} = R(t_{i+1}, t_i) \delta X_{(i)} + K(i) (Y_i - CX_0(t_i) - C\delta X_{(i)}), \\ X_0(0) = X_0, \quad \delta X_{(0)} = \Theta, \\ K(i) = R(t_{i+1}, t_i) P(i) C^T (C P(i) C^T + \Sigma_\eta)^{-1}, \\ P(i+1) = (R(t_{i+1}, t_i) - K(i) C) P(i) R^T(t_{i+1}, t_i) + \Sigma(t_{i+1}, t_i, G, \alpha), \\ P(0) = \Sigma_0, \\ \Sigma(t_{i+1}, t_i, G, \alpha) = C P(i) C^T + \Sigma_\eta. \end{cases}$$

В соответствии с *методом максимального правдоподобия* оценки  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{G}$ ,  $\hat{\Sigma}_\eta$  неизвестных параметров, представленные вектором  $\alpha$  и матрицами  $G$ ,  $\Sigma_\eta$ , находят из условия

$$\max_{\alpha, G, \Sigma_\eta} \ln f(Y|\alpha, G, \Sigma_\eta) = \ln f(Y|\hat{\alpha}, \hat{G}, \hat{\Sigma}_\eta).$$

*Задача оценивания параметров* изучаемого случайного процесса имеет единственное решение, если выполнены условия, сформулированные в 10.2, 10.3.

В заключение сделаем следующие замечания.

**Замечание 10.2.** Рассматривая решение задачи оценивания параметров случайного процесса при наличии ошибок измерений, мы умышленно выбрали  $U_m$  в качестве данных наблюдений, чтобы прийти к фильтру Калмана. Если бы мы располагали данными наблюдений, представленными множеством  $U_{1N}$ , то для решения основной задачи не было бы необходимости использовать фильтр Калмана, чтобы оценить ненаблюдаемые состояния. Это связано со спецификой данных наблюдений, представленных множеством  $U_{1N}$  (см. 9.1). Действительно, в этом случае для любого  $i = \overline{2, N}$  справедливо равенство

$$M[Y(t_i, \omega) | Y_{(1)}, \dots, Y_{(i-1)}] = M[Y(t_i, \omega)].$$

Случайные векторы  $Z_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , определяемые по формулам (10.19), независимы и распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma(t | \alpha, G) + \Sigma_\eta$ . Это позволяет сразу записать их совместную функцию плотности вероятностей.

**Замечание 10.3.** В случаях, когда наблюдения зависимы, можно также обойтись без оценки ненаблюдаемых переменных состояний. Действительно, независимые случайные векторы  $Z_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , определяемые по формулам (10.19), используются лишь для того, чтобы записать их совместную функцию плотности вероятностей в виде произведения функций плотности вероятностей нормального закона распределения, зависящих от неизвестных параметров. Но независимые случайные векторы для этой цели можно получить и другим способом\*.

\*См.: Volkov I.K., Zuyev S.M. 1994, 1995

Рассмотрим задачу оценивания (10.30) в предположении, что  $N = 2N_*$ . Ее можно переформулировать так, что при этом *функция правдоподобия* не изменится. Из модели (10.18) получаем

$$Y(t_{2i-1}, \omega) - CX_0(t_{2i-1}) = C\delta X(t_{2i-1}, \omega) + \eta(t_{2i-1}, \omega), \quad (10.31)$$

$$Y(t_{2i}, \omega) - CX_0(t_{2i}) = CR(t_{2i}, t_{2i-1})\delta X(t_{2i-1}, \omega) + \\ + \eta(t_{2i}, \omega) + CW_{2i}(\omega), \quad (10.32)$$

где  $i = \overline{1, N_*}$ . Из (10.31) имеем

$$\delta X(t_{2i-1}, \omega) = C^{-1}(Y(t_{2i-1}, \omega) - CX_0(t_{2i-1})) - C^{-1}\eta(t_{2i-1}, \omega).$$

Подставляя это выражение в (10.32), для  $i = \overline{1, N_*}$  находим

$$\begin{cases} Y(t_{2i}, \omega) - CX_0(t_{2i}) - \\ - CR(t_{2i}, t_{2i-1})C^{-1}(Y(t_{2i-1}, \omega) - CX_0(t_{2i-1})), \\ \varepsilon_i(\omega) = \eta(t_{2i}, \omega) + CW_{2i}(\omega) - CR(t_{2i}, t_{2i-1})C^{-1}\eta(t_{2i-1}, \omega). \end{cases} \quad (10.33)$$

Случайные векторы  $\varepsilon_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, N_*}$  независимы, распределены по нормальному закону с математическим ожиданием

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\varepsilon_i(\omega)] &= \mathbf{M}[\eta(t_{2i}, \omega)] + C\mathbf{M}[W_{2i}(\omega)] + \\ &+ CR(t_{2i}, t_{2i-1})C^{-1}\mathbf{M}[\eta(t_{2i-1}, \omega)] = \Theta \end{aligned}$$

и ковариационными матрицами

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon(i) &= \mathbf{M}[(\eta(t_{2i}, \omega) - CR(t_{2i}, t_{2i-1})C^{-1}\eta(t_{2i-1}, \omega) + CW_{2i}(\omega)) \times \\ &\times (\eta(t_{2i}, \omega) - CR(t_{2i}, t_{2i-1})C^{-1}\eta(t_{2i-1}, \omega) + CW_{2i}(\omega))^T] = \\ &= \Sigma_\eta + C\Sigma(t_{2i}, t_{2i-1}, G, \alpha)C^T + \\ &+ CR(t_{2i}, t_{2i-1})C^{-1}\Sigma_\eta(C^{-1})^T R^T(t_{2i}, t_{2i-1})C^T. \end{aligned}$$

Таким образом, можно записать совместную функцию плотности вероятностей случайных векторов  $\varepsilon_i(\omega)$ ,  $i = \overline{1, N_*}$ , и с учетом равенств (10.33) избежать оценивания ненаблюдаемого состояния при решении основной задачи. Тем не менее, мы отказались от такого подхода с тем, чтобы сделать уместным изложение фильтра Калмана.

Мы закончили изучение методов статистики случайных процессов. Отметим, что вычислительные аспекты решения рассмотренных задач остались за рамками книги. Однако изложенного материала вполне достаточно для того, чтобы читатель мог самостоятельно применять конкретные вычислительные методы, изучив их в обширной литературе по вычислительной математике.

## Вопросы и задачи

**10.1.** Чем вызвана необходимость введения малого параметра в стохастическую модель состояния?

**10.2.** Пусть  $\delta X(t, \omega) = X(t, \omega) - X_0(t)$ ,  $t \in T$ , — процесс случайных отклонений для стохастической модели состояния (10.3).

1. Какой стохастической модели состояния удовлетворяет случайный процесс  $\delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ?

2. Чему равно математическое ожидание процесса случайных отклонений  $\delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ?

3. Какой математической модели удовлетворяет ковариационная матрица процесса случайных отклонений  $\delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ?

4. Почему процесс случайных отклонений  $\delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , является гауссовским марковским процессом?

**10.3.** Пусть случайный процесс  $X(t, \omega) = X_0(t) + \delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , и вектор-функция  $X_0(t)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяют задаче Коши (10.1), а случайный процесс  $\delta X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , — стохастической задаче Коши (10.5). В каких случаях его математическое

ожидание определено на множестве  $T_{(N)}$  единственным образом и может ли он в этих случаях быть стационарным?

**10.4.** Сформулируйте условия единственности решения задачи параметрической идентификации стохастической модели состояния, линейной по оцениваемым параметрам. Что можно сказать об условиях единственности решения задачи параметрической идентификации стохастической модели состояния, нелинейной по оцениваемым параметрам?

**10.5.** Изложите принципиальную схему выбора наблюдаемых переменных при решении задачи параметрической идентификации стохастической модели состояния по данным наблюдений.

**10.6.** Предположим, что решается задача параметрической идентификации стохастической модели состояния (10.1), (10.5) по данным измерений значений  $k$  наблюдаемых компонент  $n$ -мерного вектора состояния в  $N$  дискретных моментов времени. Какое ограничение должно быть наложено на  $N$ , если вектор параметров  $\alpha$  не выходит за пределы области  $D \subset \mathbb{R}^L$ ?

**10.7.** Какие типы моделей канала связи Вы знаете? В чем их принципиальное отличие?

**10.8.** В чем заключается специфика задачи оценивания неизвестных параметров стохастической модели состояния при наличии случайных ошибок измерений?

**10.9.** Что называют фильтром Калмана? Опишите принципиальную схему реализации фильтра Калмана.

**10.10.** Опишите принципиальную схему решения задачи параметрической идентификации стохастической модели состояния при наличии ошибок измерений.

**10.11.** Пусть  $y(\omega)$  — ненаблюдаемая случайная величина, которая зависит от наблюдаемого случайного вектора  $x(\omega)$ . Обозначим через  $\varphi(X)$  оценку случайной величины  $y(\omega)$ , полученную по данным наблюдений случайного вектора  $x(\omega)$ ,



представленным матрицей  $X$ . Докажите, что в смысле метода наименьших квадратов наилучшей оценкой является оценка  $\varphi(X) = M[y(\omega) | X]$ .

**10.12.** Случайный вектор  $x(\omega)$  распределен по  $n$ -мерному нормальному закону с математическим ожиданием  $m_x$  и ковариационной матрицей  $\Sigma_x$ . Пусть  $\bar{y}$  — выборочное среднее наблюдаемого  $m$ -мерного случайного вектора  $y(\omega) = Cx(\omega) + \varepsilon(\omega)$ , где  $C \in M_{mn}(\mathbb{R})$  — известная матрица, а ошибка измерения  $\varepsilon(\omega)$  не зависит от  $x(\omega)$ , распределена по  $m$ -мерному нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma_\varepsilon$ . Докажите, что наилучшая в смысле метода наименьших квадратов оценка  $\hat{x}$  для случайного вектора  $x(\omega)$ , полученная на основе измерений значений случайного вектора  $y(\omega)$ , имеет вид

$$\hat{x} = m_x + (C\Sigma_x)^T (C\Sigma_x C^T + \Sigma_\varepsilon)^{-1} (\bar{y} - C m_x).$$

**10.13.** Пусть  $x(\omega)$  и  $y(\omega)$  — случайные векторы, распределенные по  $n$ -мерному и  $m$ -мерному нормальным законам соответственно. Докажите, что всегда можно найти матрицу  $C \in M_{mn}(\mathbb{R})$  и  $m$ -мерный случайный вектор  $\varepsilon(\omega)$ , распределенный по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, такие, что

$$y(\omega) = Cx(\omega) + \varepsilon(\omega),$$

где  $\varepsilon(\omega)$  не зависит от  $x(\omega)$ . (Этот результат позволяет свести ряд практических задач к задаче 10.12).

**10.14.** Для математической модели

$$\begin{cases} X(t_{i+1}, \omega) = \Phi X(t_i, \omega) + \Gamma u(t_i) + \varepsilon_i(\omega), & i = \overline{1, N}, \\ Y(t_i, \omega) = Q X(t_i, \omega) + \eta_i(\omega), & i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

полагая, что функция  $u(t)$ ,  $t \in T$ , известна, докажите, что

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \Phi \hat{X}(t_i) + \Gamma u(t_i) + K(t_i)(Y(t_i) - Q \hat{X}(t_i)),$$

где  $Y(t_i)$  — реализация случайного вектора  $Y(t_i, \omega)$ , а матрица  $K(t_i)$  определена в 10.6.

**У к а з а н и е:** обратите внимание на то, что каждое из матричных уравнений, входящих в рассматриваемую математическую модель, при стандартных предположениях относительно случайных векторов с компонентами  $\varepsilon_i(\omega)$  и  $\eta_i(\omega)$  практически идентично соответствующему матричному уравнению в задаче 10.12.

**10.15.** Пусть математическая модель в задаче 10.12 имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{i+1}(\omega) = \alpha x_i(\omega) + \varepsilon_i(\omega), & i = \overline{1, 2N}, \\ y_i(\omega) = x_i(\omega) + \eta_i(\omega), & i = \overline{1, 2N}, \end{cases}$$

где скалярные случайные величины  $\varepsilon_i(\omega)$  и  $\eta_i(\omega)$  независимы как по отношению к скалярным случайным величинам  $x_i(\omega)$ , так и между собой, распределены по нормальным законам с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $\sigma_\varepsilon^2$ ,  $\sigma_\eta^2$  соответственно. Полагая, что параметры  $\alpha$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$  и  $\sigma_\eta^2$  неизвестны, докажите, что их оценки по данным наблюдений  $Y_{2N} = \{y_i\}_{i=1}^{2N}$  могут быть определены как координаты точки максимума функции

$$\begin{aligned} L(\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2 | Y_{2N}) = & N \ln(\sigma_\varepsilon^2 + (1 + \alpha^2)\sigma_\eta^2) + \\ & + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2 + (1 + \alpha^2)\sigma_\eta^2} \sum_{k=1}^N (y_{2k} - \alpha y_{2k-1})^2. \end{aligned}$$

**У к а з а н и е:** воспользуйтесь схемой рассуждений из замечания 10.3.

# Приложение 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Применение теории вероятностей базируется на понятии *случайного испытания*, т.е. такого эксперимента или опыта, результаты которого нельзя предсказать исходя из условий его проведения. Отказываясь от прогнозирования результатов конкретного испытания, теория вероятностей выявляет и исследует закономерности, возникающие при многократном проведении случайного испытания. Отметим, что во многих практических ситуациях оценка серий испытаний куда более важна, нежели оценка одиночного испытания. Из сказанного следует, что при построении вероятностной модели исследователь всегда предполагает, что условия проведения одиночного испытания могут быть воспроизведены сколь угодно раз.

Конкретные результаты проведенного случайного испытания называют его *исходом*. Эти результаты на практике могут, например, выражаться определенным сочетанием качественных факторов или значением измеряемых параметров. Важнейший принцип теории вероятностей состоит в *статистической устойчивости частот* возможных исходов испытаний. Под этим понимают то, что при неограниченном возрастании количества случайных испытаний доля испытаний, приведших к заданному исходу, в ряду всех проведенных испытаний стабилизируется около некоторого предельного числа.

При построении вероятностной модели выделяют такой набор исходов данного случайного испытания, который удовлетворяет двум условиям. Во-первых, при проведении случайного испытания должен наступить один из исходов в выбранном наборе исходов. Во-вторых, все исходы в наборе являются взаим-

но исключающими, т.е. случайное испытание не должно завершаться одновременно двумя исходами. Исходы в таком наборе называют **элементарными исходами** или **элементарными событиями**, а всю их совокупность — **пространством элементарных исходов\*** (**пространством элементарных событий**). Пространство элементарных событий принято обозначать через  $\Omega$ , а элементарные исходы — через  $\omega$  (возможно, с дополнительными индексами).

Часто об элементарных событиях говорят как о неделимых, подразумевая под этим следующее. Если в результате проведения случайного испытания могут наступить исход  $A$  и исход  $B$ , то в качестве исходов можно рассмотреть следующие:  $AB$  (оба исхода наступили одновременно),  $\bar{A}B$  (наступил исход  $B$ , а исход  $A$  не наступил) и т.д. В результате множество возможных исходов дробится, делится. Когда мы охватим все мыслимые варианты завершения случайного испытания и эти варианты не делятся в указанном выше смысле, то мы получим пространство элементарных исходов.

Важнейшим в теории вероятностей является понятие **события**, которое отождествляют с некоторым подмножеством пространства элементарных событий. Наступление события в результате проведения случайного испытания равнозначно тому, что это испытание завершилось одним из элементарных исходов, входящим в указанное множество. Здесь событие — это совокупность возможных вариантов завершения случайного испытания, значимых с точки зрения исследователя. В некоторых случаях термину „событие“ придают более содержательный смысл, связывая его с конкретными особенностями проводимых случайных испытаний. Тогда его отличают от соответствующего множества в пространстве элементарных исходов, которое в таком случае называют **характеристическим множеством события**.

---

\*Иногда термином „исход“ обозначают не вообще любой возможный вариант завершения испытания, а именно элементарный исход, т.е. один из взаимоисключающих вариантов.

Поскольку события — это подмножества пространства элементарных событий, с ними можно выполнять операции теории множеств, однако в теории вероятностей эти операции называются по-другому. Пересечение множеств превращается в произведение событий, объединение множеств — в сумму событий, дополнение множества в пространстве элементарных событий — это противоположное событие, пустое множество обозначает невозможное событие, а все пространство элементарных событий есть достоверное событие.

Уместен вопрос, всякое ли подмножество пространства элементарных событий можно рассматривать как событие. Это можно принять, если пространство элементарных событий конечно (т.е. содержит конечное число элементов). Однако в общем случае такой подход оказывается слишком общим и не приводит к содержательной теории. Значит, нужны понятия и условия, описывающие те подмножества, которые могут рассматриваться как события.

Современная теория вероятностей строится, как и многие другие математические дисциплины, на системе аксиом. Впервые аксиоматическое построение теории вероятностей предложил А.Н. Колмогоров\*. Изложим кратко суть современного подхода в изложении теории вероятностей.

**Определение П1.1.** Пусть  $\Omega$  — некоторое множество. Некоторое семейство  $\mathcal{A}$  подмножеств из  $\Omega$  называют  $\sigma$ -алгеброй, если:

- а) оно содержит множество  $\Omega$ , т.е.  $\Omega \in \mathcal{A}$ ;
- б) если  $B \in \mathcal{A}$ , то и его дополнение  $\bar{B}$  принадлежит  $\mathcal{A}$ ;
- в) если  $B_k \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A} \quad \text{и} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}.$$

---

\*А.Н. Колмогоров (1903–1987) — выдающийся советский математик, имеющий фундаментальные результаты в теории функций, теории вероятностей и ряде других областей современной математики.

Кратко можно сказать, что  $\sigma$ -алгебра — это некоторое множество  $\mathcal{A}$  подмножеств  $\Omega$ , замкнутое относительно теоретико-множественных операций, в том числе относительно счетного объединения и счетного пересечения.

**Определение П1.2.** Пару  $(\Omega, \mathcal{A})$  из множества  $\Omega$  и  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$  подмножеств из  $\Omega$  называют **измеримым пространством**.

**Определение П1.3.** Вероятностью (вероятностной мерой) на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{A})$  называют скалярную функцию  $\mathbf{P}: \mathcal{A} \rightarrow R$ , определенную на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , которая удовлетворяет трем условиям:

- а)  $\mathbf{P}[A] \geq 0, A \in \mathcal{A}$ ;
- б)  $\mathbf{P}[\Omega] = 1$ ;
- в) для любых попарно не пересекающихся множеств  $B_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$ , имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}[B_k].$$

Эти определения вводят основные понятия теории вероятностей. Множество  $\Omega$ , на котором задана  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}$ , — это пространство элементарных исходов, элементы  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$  — это события, а вероятностная мера  $\mathbf{P}$  — это функция, задающая вероятности всевозможных событий.

**Определение П1.4.** Тройку  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  из непустого множества  $\Omega$ , заданной на  $\Omega$   $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$  и определенной на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$  вероятностной меры  $\mathbf{P}$  называют **вероятностным пространством**.

**Определение П1.5.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  — вероятностное пространство и  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  — события, причем  $\mathbf{P}[A_1] > 0$ . Под **условной вероятностью** события  $A_2$  относительно события  $A_1$  понимают число

$$\mathbf{P}[A_2 | A_1] \triangleq \frac{\mathbf{P}[A_1 \cap A_2]}{\mathbf{P}[A_1]}.$$

**Определение П1.6.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  — вероятностное пространство. События  $A, B \in \mathcal{A}$ , для которых  $\mathbf{P}[A] > 0$  и  $\mathbf{P}[B] > 0$ , называют **независимыми**, если выполнены равенства

$$\mathbf{P}[A|B] = \mathbf{P}[A] \quad \text{и} \quad \mathbf{P}[B|A] = \mathbf{P}[B].$$

В противном случае события  $A$  и  $B$  называют **зависимыми**.

**Определение П1.7.** Отображение  $\xi: \Omega \rightarrow X$  измеримого пространства  $(\Omega, \mathcal{A})$  в измеримое пространство  $(X, \mathcal{B})$  называют **измеримой функцией**, если для любого  $B \in \mathcal{B}$  прообраз множества  $B$ , т.е. множество  $\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in B\}$ , принадлежит  $\mathcal{A}$ .

В теории вероятностей измеримое пространство  $(\Omega, \mathcal{A})$  входит в состав вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  (т.е. дополнительно задана вероятностная мера). В этом случае измеримая функция  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , преобразует вероятностную меру  $\mathbf{P}$  на  $(\Omega, \mathcal{A})$  в вероятностную меру  $\mathbf{P}_\xi$ , определяемую равенством  $\mathbf{P}_\xi[B] = \mathbf{P}[\xi^{-1}(B)]$  и тем самым превращает измеримое пространство  $(X, \mathcal{B})$  в вероятностное пространство  $(X, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\xi)$ . Таким способом можно заменить вероятностное пространство „данное от природы“, на более удобное и простое.

Особую роль играет случай, когда  $X = \mathbb{R}$ , а  $\mathcal{B}$  — **борелевская  $\sigma$ -алгебра**, т.е. минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все промежутки (открытые, замкнутые, полуоткрытые) на числовой оси. В этом случае измеримую функцию можно определить как функцию  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , для которой прообраз любого множества  $B$  вида  $B = \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$  принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , или, иначе, является событием. Такую измеримую функцию в теории вероятностей называют **случайной величиной**.

На множестве  $\mathbb{R}^n$  можно задать  $\sigma$ -алгебру, отталкиваясь от множеств вида

$$T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_i \in T_i, i = \overline{1, n}\},$$

где  $T_i$  — промежутки числовой оси (такие множества можно было бы условно назвать  $n$ -мерными параллелепипедами).

Борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{B}$  в  $\mathbb{R}^n$  — это наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая указанные множества. Измеримая функция, отображающая  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$ , представляет собой, по существу, совокупность  $n$  случайных величин — ее координатных функций. Такую функцию называют  $n$ -мерным **случайным вектором**. Случайный вектор можно рассматривать как многомерное обобщение понятия случайной величины. Поэтому далее мы будем иногда трактовать случайную величину как  $n$ -мерный случайный вектор с  $n = 1$ .

Случайный вектор можно определить как  $n$ -мерную векторную функцию  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , для которой при любом  $x \in \mathbb{R}^n$  множество

$$A_x \triangleq \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\}$$

принадлежит  $\mathcal{A}$  (является событием). В данном случае

$$\xi(\omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(\omega) \end{pmatrix}, \quad x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

и неравенство  $\xi(\omega) < x$  означает, что  $\xi_k(\omega) < x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Изучение случайной величины  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , сводится к анализу вероятностной меры  $P_\xi$ , которая порождается этой функцией на борелевской  $\sigma$ -алгебре. При этом исходное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  перестает играть роль. Отметим, что в силу свойств вероятности вероятностная мера  $P_\xi$  полностью определяется по своим значениям на промежутках вида  $(-\infty, a)$ , так как, комбинируя такие промежутки и используя свойства аддитивности и счетной аддитивности вероятности, можно найти значение вероятности на любом множестве борелевской  $\sigma$ -алгебры.

**Определение П1.8.** Пусть  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , — случайная величина (случайный вектор). Скалярную функцию  $F_\xi(x) \triangleq P_\xi[A_x]$ , где  $x \in \mathbb{R}$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) и  $A_x \triangleq \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\}$ , называют **функцией распределения (вероятностей) случайной величины (случайного вектора)**  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ .



Случайные величины  $\xi_i(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $i = \overline{1, n}$ , можно рассматривать как координаты  $n$ -мерного случайного вектора и ввести для этого вектора функцию распределения. Это объясняет, почему иногда функцию распределения случайного вектора называют **совместной функцией распределения**.

Для функции распределения  $n$ -мерного случайного вектора часто используют сокращенные формы записи, например:

$$F_{\xi}(x) = \mathbf{P}[\xi(\omega) < x], \quad F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}[\xi_k(\omega) < x_k, k = \overline{1, n}].$$

**Определение П1.9.** Случайную величину (случайный вектор), принимающую не более чем счетное множество значений, называют **дискретной случайной величиной (дискретным случайным вектором)**.

Для дискретного случайного вектора  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , множество значений можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности  $\{x_{(k)}\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^n$ , где  $N \leq \infty$ , а функция распределения имеет вид

$$F_{\xi}(x) \equiv \sum_{x_{(k)} < x} \mathbf{P}[\xi(\omega) = x_{(k)}].$$

**Определение П1.10.** **Непрерывным случайным вектором** называют  $n$ -мерный случайный вектор  $\xi(\omega)$ , функцию распределения которого можно представить в виде

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(y) dy,$$

где  $x \triangleq (x_1 \dots x_n)^T$ ,  $y \triangleq (y_1 \dots y_n)^T$ , или, что то же самое,

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n.$$

Функцию  $f_{\xi}(x) = f_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$  называют **плотностью распределения (вероятностей)**. В частном случае при  $n = 1$  непрерывный случайный вектор  $\xi(\omega)$  называют **непрерывной случайной величиной**.

Плотность распределения  $f_{\xi}(x)$   $n$ -мерного непрерывного случайного вектора  $\xi(\omega)$  имеет следующие свойства:

а)  $f_{\xi}(x) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

б) вероятность  $\mathbf{P}[\xi(\omega) \in G]$  попадания в произвольную  $n$ -мерную область  $G$  может быть представлена  $n$ -мерным интегралом:  $\mathbf{P}[\xi(\omega) \in G] = \int_G f_{\xi}(x) dx$ ; в частности,  $\int_{\mathbb{R}^n} f_{\xi}(x) dx = 1$ ; вероятность попадания значения случайного вектора в множество нулевой площади в  $\mathbb{R}^n$  (в том числе, в фиксированную точку) всегда равна нулю;

в) при соответствующей гладкости функции распределения  $F_{\xi}(x)$  плотность распределения  $f_{\xi}(x)$  в своих точках непрерывности совпадает с  $n$ -й смешанной производной  $F_{\xi}(x)$ :

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\xi}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n};$$

г) если  $\xi(\omega) \triangleq (\eta^T(\omega) \ \varepsilon^T(\omega))^T$ , где  $\xi(\omega)$  —  $n$ -мерный,  $\eta(\omega)$  —  $m$ -мерный ( $0 < m < n$ ), а  $\varepsilon(\omega)$  —  $(n - m)$ -мерный непрерывные случайные векторы с плотностями распределения  $f_{\xi}(x)$ ,  $f_{\eta}(y)$ ,  $f_{\varepsilon}(z)$ , то

$$f_{\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} f_{\xi}(y, z) dz, \quad f_{\varepsilon}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} f_{\xi}(y, z) dy,$$

где  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $x = (y^T \ z^T)^T \in \mathbb{R}^n$ .

Для дискретного случайного вектора  $\xi(\omega)$  с множеством возможных значений  $\{x_{(k)}\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^n$ ,  $N \leq \infty$ , можно ввести

**обобщенную плотность распределения (вероятностей)\***

$$f_{\xi}(x) = \sum_{k=1}^{N \leq \infty} \mathbf{P}[\xi(\omega) = x_{(k)}] \delta(x - x_{(k)}),$$

где  $\delta(x) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Это позволяет упростить изложение, в котором дискретные и непрерывные случайные векторы обсуждаются с единых позиций.

Функцию распределения и плотность распределения случайного вектора  $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega) \dots \xi_n(\omega))^T$  называют также **совместной функцией распределения** и **совместной плотностью распределения** случайных величин  $\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ . Если задана функция распределения или плотность распределения случайного вектора  $\xi(\omega)$ , то говорят, что для этого случайного вектора задан **закон распределения случайного вектора (случайной величины** при  $n = 1$ ). Закон распределения случайного вектора  $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega) \dots \xi_n(\omega))^T$  называют также **совместным законом распределения** случайных величин  $\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ .

**Определение П1.11.** Случайные векторы  $\xi_k(\omega)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , заданные на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , называют **независимыми в совокупности**, если функция распределения  $F_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$  блочного случайного вектора  $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega)^T \dots \xi_n(\omega)^T)^T$  имеет вид

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^N F_{\xi_k}(x_k),$$

где  $F_{\xi_k}(x_k)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , — функции распределения случайных векторов  $\xi_k(\omega)$ . Если  $\xi_k(\omega)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , — случайные величины, то говорят о **независимых случайных величинах**.

---

\*См.: Пугачев В.С.

**Определение П1.12.** Пусть  $\eta(\omega)$  —  $n$ -мерный,  $\varepsilon(\omega)$  —  $m$ -мерный,  $\xi(\omega) \triangleq (\eta^T(\omega) \ \varepsilon^T(\omega))^T$  —  $(n+m)$ -мерный случайные векторы с плотностями распределения (возможно, обобщенными)  $f_\eta(x)$ ,  $f_\varepsilon(y)$ ,  $f_\xi(x, y)$ . **Условной плотностью распределения (условным законом распределения)** случайного вектора  $\eta(\omega)$  при условии, что случайный вектор  $\varepsilon(\omega)$  принял некоторое фиксированное значение  $y \in \mathbb{R}^n$ , называют функцию

$$f(x|y) = \frac{f_\xi(x, y)}{f_\varepsilon(y)}.$$

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  задан  $n$ -мерный случайный вектор, множество возможных значений которого включается в множество  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Если  $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^m$  — измеримая (относительно борелевской алгебры  $\mathfrak{B}$  в  $\mathbb{R}^n$ ) векторная функция, то определена композиция функций  $\eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega))$ , которая является измеримой функцией на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{A})$  и, следовательно, представляет собой  $m$ -мерный случайный вектор. Этот случайный вектор называют **векторной (скалярной при  $m=1$ ) функцией случайного вектора (случайной величины при  $n=1$ )  $\xi(\omega)$** . Отметим, что в качестве измеримой функции  $\varphi(x)$  можно взять любую непрерывную или кусочно непрерывную векторную функцию. Измеримыми также являются интегрируемые функции.

**Определение П1.13.** **Математическим ожиданием**  $n$ -мерного случайного вектора  $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega) \ \dots \ \xi_n(\omega))^T$  с функцией плотности вероятностей  $f_\xi(x) = f_\xi(x_1, \dots, x_n)$  называют  $n$ -мерный вектор

$$\mathbb{M}[\xi(\omega)] \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} x f_\xi(x) dx,$$

компонентами которого являются числа

$$\mathbb{M}[\xi_k(\omega)] = \int_{\mathbb{R}^n} x_k f_\xi(x) dx, \quad k = \overline{1, n}.$$

Числа  $M[\xi_k(\omega)]$ , о которых говорится в определении, представляют собой математические ожидания координатных случайных функций  $\xi_k(\omega)$ . Отметим, что все или часть математических ожиданий  $M[\xi_k(\omega)]$  будут не определены, если представляющий их несобственный интеграл расходится. Тогда и математическое ожидание случайного вектора не определено. Так как математическое ожидание случайного вектора составляется из математических ожиданий координатных случайных функций, свойства математического ожидания достаточно описать лишь в одномерном случае.

Пусть  $\xi(\omega)$ ,  $\eta(\omega)$  — случайные величины, имеющие математические ожидания, а  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — произвольные постоянные. Тогда:

а) если  $\xi(\omega) \geq 0$  (т.е. принимает только неотрицательные значения), то  $M[\xi(\omega)] \geq 0$ ;

б)  $M[\alpha\xi(\omega) + \beta\eta(\omega)] = \alpha M[\xi(\omega)] + \beta M[\eta(\omega)]$ ;

в)  $|M[\xi(\omega)]| \leq M[|\xi(\omega)|]$ ;

г) если  $\xi(\omega)$ ,  $\eta(\omega)$  — независимые случайные величины, то  $M[(\xi(\omega)\eta(\omega))] = M[\xi(\omega)]M[\eta(\omega)]$ ;

д)  $(M[\xi(\omega)\eta(\omega)])^2 \leq M[\xi^2(\omega)]M[\eta^2(\omega)]$ .

Понятие математического ожидания является одним из основополагающих в теории вероятностей. Рассматривая математическое ожидание части компонент случайного вектора с использованием их условной плотности распределения вероятностей относительно других компонент, приходим к понятию **условного математического ожидания**. Например, пусть  $\eta(\omega)$  —  $n$ -мерный,  $\varepsilon(\omega)$  —  $m$ -мерный случайные векторы и  $f(x|y)$  — условная плотность распределения  $\eta(\omega)$  при условии, что  $\varepsilon(\omega)$  принял значение  $y$ . Тогда **значением**  $M[\eta(\omega)|y]$  **условного математического ожидания** случайного вектора  $\eta(\omega)$  при условии  $\varepsilon(\omega) = y$  называют  $m$ -мерный вектор

$$M[\eta(\omega)|y] \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} x f(x|y) dx.$$

Значение условного математического ожидания  $M[\eta(\omega) | y]$  является некоторой функцией  $\varphi(y)$  переменного  $y$ , меняющегося в области значений случайного вектора  $\varepsilon(\omega)$ . Функцию  $\varphi(\varepsilon(\omega)) \equiv M[\eta(\omega) | \varepsilon(\omega)]$  от случайного вектора  $\varepsilon(\omega)$  называют **условным математическим ожиданием** случайного вектора  $\eta(\omega)$  при условии  $\varepsilon(\omega)$ .

**Определение П1.14.** *Дисперсией*  $D[\xi(\omega)]$  скалярной случайной величины  $\xi(\omega)$  называют математическое ожидание случайной величины  $(\xi(\omega) - M[\xi(\omega)])^2$ , т.е. число

$$D[\xi(\omega)] \triangleq M[(\xi(\omega) - M[\xi(\omega)])^2].$$

Для случайной величины  $\xi(\omega)$  с плотностью распределения  $f_\xi(x)$  (возможно, обобщенной) дисперсия может быть вычислена интегрированием:

$$D[\xi(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[\xi(\omega)])^2 f_\xi(x) dx.$$

Непосредственно из определения и свойств математического ожидания получаем свойства дисперсии:

а)  $D[\xi(\omega)] \geq 0$ ;

б)  $D[\alpha\xi(\omega)] = \alpha^2 D[\xi(\omega)]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

в)  $D[\xi(\omega) + \alpha] = D[\xi(\omega)]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

г) если случайные величины  $\xi(\omega)$  и  $\eta(\omega)$  независимы, то  $D[\xi(\omega) + \eta(\omega)] = D[\xi(\omega)] + D[\eta(\omega)]$ ;

д)  $D[\alpha] = 0$ , т.е. дисперсия случайной величины, имеющей постоянное значение (детерминированной величины), равна нулю;

е)  $D[\xi(\omega)] = M[\xi^2(\omega)] - (M[\xi(\omega)])^2$ ;

**Определение П1.15.** *Ковариацией* двух случайных величин  $\xi(\omega)$  и  $\eta(\omega)$  называют число

$$\text{cov}[\xi(\omega), \eta(\omega)] \triangleq M[(\xi(\omega) - M[\xi(\omega)])(\eta(\omega) - M[\eta(\omega)])].$$

Если для случайных величин  $\xi(\omega)$  и  $\eta(\omega)$  задана совместная плотность распределения  $f_{\xi\eta}(x, y)$ , то ковариация этих случайных величин может быть вычислена интегрированием:

$$\text{cov}[\xi(\omega), \eta(\omega)] = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - M[\xi(\omega)])(y - M[\eta(\omega)]) f_{\xi\eta}(x, y) dx dy.$$

Ковариация имеет следующие свойства:

а)  $\text{cov}[\xi(\omega), \eta(\omega)] \equiv \text{cov}[\eta(\omega), \xi(\omega)];$

б)  $\text{cov}[\xi(\omega), \xi(\omega)] \equiv D[\xi(\omega)];$

в) если случайные величины  $\xi(\omega)$  и  $\eta(\omega)$  независимые, то  $\text{cov}[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 0;$

г)  $\text{cov}[\xi(\omega), \eta(\omega)] = M[\xi(\omega)\eta(\omega)] - M[\xi(\omega)]M[\eta(\omega)];$

д)  $2 \text{cov}[\xi(\omega), \eta(\omega)] = D[\xi(\omega) + \eta(\omega)] - D[\xi(\omega)] - D[\eta(\omega)].$

**Определение П1.16.** Коэффициентом корреляции скалярных случайных величин  $\xi(\omega)$  и  $\eta(\omega)$  называют число

$$\rho[\xi(\omega), \eta(\omega)] \triangleq \frac{\text{cov}[\xi(\omega), \eta(\omega)]}{\sqrt{D[\xi(\omega)] D[\eta(\omega)]}}.$$

Две случайные величины  $\xi(\omega)$  и  $\eta(\omega)$  называют **некоррелированными**, если  $\rho[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 0$ , или, что то же самое,  $\text{cov}[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 0$ .

Коэффициент корреляции двух скалярных случайных величин обладает двумя основными свойствами:

а)  $|\rho[\xi(\omega), \eta(\omega)]| \leq 1;$

б)  $|\rho[\xi(\omega), \eta(\omega)]| = 1$  тогда и только тогда, когда  $\eta(\omega) = \alpha\xi(\omega) + \beta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , причем  $\alpha > 0$  при  $\rho[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 1$  и  $\alpha < 0$  при  $\rho[\xi(\omega), \eta(\omega)] = -1$ .

**Определение П1.17.** Ковариационной матрицей случайного вектора  $\xi(\omega) \triangleq (\xi_1(\omega) \dots \xi_n(\omega))^T$  называют матрицу

$$\text{cov}[\xi(\omega)] \triangleq (\text{cov}[\xi_i(\omega), \xi_j(\omega)]).$$

Итак, ковариационная матрица  $n$ -мерного случайного вектора представляет собой квадратную матрицу порядка  $n$  из ковариаций пар координатных случайных функций. Из свойств ковариации двух случайных функций вытекают свойства ковариационной матрицы:

а)  $\text{cov}[\xi(\omega)]$  — симметрическая неотрицательно определенная квадратная матрица порядка  $n$ ;

б) если  $\eta(\omega) = A\xi(\omega) + b$ , где  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  — фиксированная матрица,  $b \in \mathbb{R}^m$  — фиксированный вектор, то  $\text{cov}[\eta(\omega)] = A \text{cov}[\xi(\omega)] A^T$ .

**Определение П1.18.** *Характеристической функцией  $n$ -мерного случайного вектора  $\xi$  называют функцию*

$$\varphi_{\xi}(\lambda) \triangleq M[\exp(i\lambda^T \xi(\omega))],$$

где  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , а  $i$  — мнимая единица.

Для случайного вектора  $\xi(\omega)$  с плотностью распределения  $f_{\xi}(x)$  (возможно, обобщенной) характеристическая функция может быть представлена интегралом:

$$\varphi_{\xi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\lambda^T x) f_{\xi}(x) dx,$$

т.е. характеристическая функция является изображением экспоненциального интегрального преобразования Фурье. Значит, в классе функций, интегрируемых с квадратом, существует взаимно однозначное соответствие между характеристическими функциями и плотностями распределения.

Отметим некоторые свойства характеристической функции:

а)  $|\varphi_{\xi}(\lambda)| \leq 1$ ;

б)  $\varphi_{\xi}(0) = 1$ ;

в)  $\varphi_{\xi}(-\lambda) = \varphi_{\xi}^*(\lambda)$ , т.е. при изменении знака аргумента значение характеристической функции меняется на комплексно сопряженное;



д) если  $\eta(\omega) = A\xi(\omega) + b$ , где матрица  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  и вектор  $b \in \mathbb{R}^m$  фиксированы, то  $\varphi_\eta(\mu) = \exp(i\mu^T b) \varphi_\xi(A^T \mu)$ ;

е) если случайные величины  $\xi_k(\omega)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , независимы в совокупности,  $\eta(\omega) = \xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)$ , то  $\varphi_\eta(\lambda) = \prod_{k=1}^N \varphi_{\xi_k}(\lambda)$ , где  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^T$ .

## Приложение 2. МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА

Рассмотрим линейное пространство  $M_n(\mathbb{R})$  квадратных матриц порядка  $n$ , в котором выбрана некоторая *кольцевая норма*  $\|\cdot\|$ , т.е. такая норма, что для любых матриц  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  выполняется неравенство  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . В качестве такой нормы можно взять *евклидову норму*, определяемую для матрицы  $A = (a_{ij})$  равенством

$$\|A\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}. \quad (\text{П2.1})$$

Введение нормы позволяет в линейном пространстве  $M_n(\mathbb{R})$  ввести сходимость последовательностей и рядов. Последовательность матриц  $\{A_n\} \subset M_n(\mathbb{R})$  сходится по норме  $\|\cdot\|$  к матрице  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , если числовая последовательность  $\|A_n - A\|$  является бесконечно малой, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$ . Аналогично вводится понятие сходимости матричного ряда (определения и основные свойства последовательностей и рядов в нормированных пространствах изложены в [IX]). Отметим, что сходимость последовательностей и рядов в конечномерном нормированном пространстве на самом деле не зависит от выбора конкретной нормы. При любом выборе нормы последовательность  $\{A_n\}$  матриц  $A_n = (a_{ij}^{(n)})$  сходится к матрице  $A = (a_{ij})$  тогда и только тогда, когда при любых фиксированных  $i, j = \overline{1, n}$  числовая последовательность  $\{a_{ij}^{(n)}\}$  сходится к  $a_{ij}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Удачный выбор нормы позволяет упростить анализ последовательностей и рядов — и только. В частности, именно этим объясняется требование, чтобы норма была кольцевой.

Для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{R})$  можно рассмотреть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad (\text{П2.2})$$

который сходится по норме при любом выборе  $A$ , причем абсолютно [IX], так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} < \infty.$$

**Определение П2.1.** Матричной экспонентой матрицы  $A$  называют матрицу  $e^A$ , равную сумме матричного ряда (П2.2).

**Пример П2.1.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$e^A \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \quad \#$$

Матричная экспонента позволяет определить матричную функцию  $e^{At}$ , которая действительному числу  $t \in \mathbb{R}$  сопоставляет матричную экспоненту матрицы  $At \equiv tA$ . Отметим, что часто именно эту матричную функцию и определяют как матричную экспоненту, так как с ней связаны наиболее важные приложения матричной экспоненты.

Рассмотрим свойства матричной экспоненты.

**Свойство П2.1.** Если матрицы  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  являются коммутирующими, то

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

◀ Используя определение матричной экспоненты, можем записать:

$$e^A e^B = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k B^m}{k! m!}.$$

Изменим порядок суммирования с помощью замены  $p \triangleq k + m$ ,  $q \triangleq k$ . Из этих соотношений получаем  $k = q$  и  $m = p - q$ , откуда с учетом неравенств  $k \geq 0$ ,  $m \geq 0$  получаем  $q \geq 0$ ,  $p - q \geq 0$ . Значит, двойное суммирование должно идти по таким парам  $(p, q)$ , для которых верны указанные два неравенства, т.е. мы можем записать

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k B^m}{k! m!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p \frac{A^q B^{p-q}}{q! (p-q)!} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^p \frac{p!}{q! (p-q)!} A^q B^{p-q}. \quad (\text{П2.3}) \end{aligned}$$

Так как матрицы  $A$  и  $B$  коммутирующие, то и их любые степени  $A^p$  и  $B^q$  являются коммутирующими. Поэтому

$$(A + B)^p = \sum_{q=0}^p \frac{p!}{q! (p-q)!} A^q B^{p-q}. \quad (\text{П2.4})$$

Сопоставляя (П2.3) с (П2.4), заключаем, что

$$e^A e^B = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (A + B)^p = e^{A+B}. \quad \blacktriangleright$$

**Свойство П2.2.** Для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ее матричная экспонента  $e^A$  является невырожденной, причем обратная матрица равна  $e^{-A}$ , т.е.  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

◀ Матрицы  $A$  и  $-A$  являются коммутирующими. Поэтому, согласно свойству П2.1,

$$e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^{A-A} = e^{\Theta},$$

где  $\Theta$  — нулевая матрица. Легко проверить непосредственно по определению матричной экспоненты, что  $e^{\Theta} = I$  — единичная матрица. Поэтому  $e^A e^{-A} = I$ . Но точно так же  $e^{-A} e^A = I$ . Значит, согласно определению обратной матрицы,  $e^A$  и  $e^{-A}$  являются обратными друг к другу. В заключение отметим, что матрица, имеющая обратную, невырождена. ►

**Свойство П2.3.** Для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A.$$

◄ Согласно определению матричной экспоненты, имеем

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

В силу равномерной (по  $t$ ) сходимости этого ряда на любом отрезке числовой оси имеем

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{At}.$$

Аналогично получаем равенство  $\frac{d}{dt} e^{At} = e^{At} A$ . ►

**Свойство П2.4.** Для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{R})$  решение однородной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{П2.5})$$

имеет вид

$$X(t) = e^{At} X_0, \quad t \geq 0, \quad (\text{П2.6})$$

т.е. матрица  $e^{At}$  является **резольвентой**, или **нормированной фундаментальной матрицей этой задачи Коши**.

◀ Ясно, что  $X(0) = e^0 X_0 = I X_0 = X_0$ . Согласно свойству П2.3,

$$\frac{d}{dt}(e^{At} X_0) = \left( \frac{d}{dt} e^{At} \right) X_0 = A(e^{At} X_0). \quad (\text{П2.7})$$

Таким образом,  $e^{At} X_0$  является решением задачи (П2.5), что и требовалось доказать. ▶

**Свойство П2.5.** Для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{R})$  и  $n$ -мерной непрерывной на  $(0, \infty)$  вектор-функции  $B(t)$  решение неоднородной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B(t), \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{П2.8})$$

может быть представлено в виде

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (\text{П2.9})$$

◀ Представление (П2.9) вытекает из *метода вариации постоянных* для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому доказательство сформулированного свойства можно было бы провести с помощью этого метода. Однако в данном случае проще проверить, что правая часть в (П2.9) удовлетворяет задаче Коши. Действительно, начальное условие выполнено и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(t) &= \frac{d}{dt} e^{At} X_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) d\tau = \\ &= A e^{At} X_0 + \left( \frac{d}{dt} e^{At} \right) \int_0^t e^{-A\tau} B(\tau) d\tau + e^{At} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{-A\tau} B(\tau) d\tau = \\ &= A e^{At} X_0 + A \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) d\tau + e^{At} e^{-At} B(t) = AX(t) + B(t). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Свойство П2.6.** Пусть  $X(t)$  является решением задачи Коши (П2.5) с матрицей  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  и вектором начальных условий  $X_0$  с неотрицательными компонентами. Тогда для того чтобы все компоненты функции  $X(t)$  были неотрицательными при любом  $t \geq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы все недиагональные элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A$  были неотрицательными, т.е.

$$a_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j. \quad (\text{П2.10})$$

◀ Обозначим  $R(t) = (R_{ij}(t)) \triangleq e^{At}$ ,  $X(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))^T$ ,  $X_0 = (x_{10} \dots x_{n0})^T$  и воспользуемся представлением решения задачи Коши (П2.5) в виде (П2.6). Тогда

$$x_k(t) = \sum_{m=1}^n R_{km}(t) x_{m0}, \quad k = \overline{1, n}.$$

А так как  $x_{m0}$ ,  $m = \overline{1, n}$ , — произвольные неотрицательные числа, то очевидно, что функции  $x_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , являются неотрицательными при  $t \geq 0$  тогда и только тогда, когда при  $t \geq 0$  являются неотрицательными функции  $R_{km}(t)$ ,  $k, m = \overline{1, n}$ .

Выберем произвольное  $\varepsilon \in (0, 1)$  и столь малое положительное число  $t_1$ , что

$$\max_{ij} |a_{ij}| t_1 \leq \frac{\varepsilon}{n}. \quad (\text{П2.11})$$

Тогда для любых неотрицательных  $t \leq t_1$  с учетом определения евклидовой нормы матриц имеем оценку

$$\|At\| = |t| \|A\| \leq \varepsilon$$

и с точностью  $o(\varepsilon)$  получаем

$$e^{At} \approx I_n + At = \begin{pmatrix} 1 + a_{11}t & a_{12}t & \dots & a_{1n}t \\ a_{21}t & 1 + a_{22}t & \dots & a_{2n}t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \dots & 1 + a_{nn}t \end{pmatrix}.$$

Следовательно, при малых неотрицательных значениях  $t$  условие (П2.10) является необходимым и достаточным условием неотрицательности компонент матричной экспоненты  $e^{At}$ .

Если  $t$  не является малым, то выбираем целое положительное число  $N$  столь большим, что  $t_1 \triangleq t/N$  будет удовлетворять условию (П2.11). Но тогда при выполнении условия (П2.10) матричная экспонента  $e^{At/N}$  имеет лишь неотрицательные элементы. Следовательно, и матричная экспонента

$$e^{At} = (e^{At/N})^N$$

имеет лишь неотрицательные элементы, так как является произведением конечного числа матриц с неотрицательными элементами. ►

Отметим, что матричная экспонента, как резольвента соответствующей задачи Коши, может быть найдена с помощью любых методов решения задач Коши, в том числе с помощью операционного исчисления [XI].

Переходим к рассмотрению линейных нестационарных моделей состояния. Пусть  $X(t)$  и  $B(t)$  —  $n$ -мерные вектор-функции, а  $A(t)$  — матричная функция порядка  $n$  скалярного аргумента  $t$ . При анализе задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t), \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{П2.12})$$

по аналогии со скалярным случаем возникает естественное предположение относительно ее резольвенты:

$$R(t, s) = \exp\left(\int_s^t A(\tau) d\tau\right), \quad (\text{П2.13})$$

так как в скалярном случае фундаментальная матрица может быть записана в виде

$$X(t) = \exp\left(\int_0^t A(\tau) d\tau\right),$$



а резольвента есть нормированная фундаментальная матрица, т.е.

$$R(t, s) = X^{-1}(s)X(t).$$

При этом верны равенства

$$R(0, 0) = \exp(\Theta_n) = I_n, \quad \dot{R}(t, 0) = A(t)R(t, 0).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \exp \left( \int_0^{t+h} A(\tau) d\tau \right) - \exp \left( \int_0^t A(\tau) d\tau \right) \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \exp \left( \int_0^t A(\tau) d\tau + \int_t^{t+h} A(\tau) d\tau \right) - \exp \left( \int_0^t A(\tau) d\tau \right) \right]. \end{aligned}$$

При  $h \approx 0$  можно считать, что

$$\int_t^{t+h} A(\tau) d\tau \approx A(t)h.$$

Кроме того, если при  $t > 0$  имеет место равенство

$$A(t) \int_0^t A(\tau) d\tau = \left( \int_0^t A(\tau) d\tau \right) A(t), \quad (\text{П2.14})$$

то, воспользовавшись свойством П2.1, получаем

$$\dot{R}(t, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \exp(A(t)h) - I_n \right) \exp \left( \int_0^t A(\tau) d\tau \right) = A(t)R(t, 0).$$

Таким образом, если выполняется условие (П2.14), то резольвента задачи Коши (П2.12) определена равенством (П2.13), а ее решение может быть представлено в виде

$$X(t) = R(t, 0)X_0 + \int_0^t R(t, \tau)B(\tau) d\tau. \quad (\text{П2.15})$$

На практике условия (П2.14), как правило, выполнены, но их проверкой не стоит пренебрегать.

**Пример П2.2.** Рассмотрим задачу Коши (П2.12) при  $n = 2$ ,  $B(t) \equiv \mathbf{0}$  и  $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . В этом случае

$$D(t) \triangleq \int_0^t A(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & -t \end{pmatrix}.$$

При этом

$$A(t)D(t) = \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad D(t)A(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

и равенство (П2.14) не выполняется.

Действительно, непосредственной проверкой легко убедиться в том, что в данном случае

$$R(t, 0) = \begin{pmatrix} e^t & \text{sh } t - te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Введя матрицу

$$c(t) \triangleq \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{t}D(t),$$

получим

$$\begin{aligned}\exp(D(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k(t)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} c(t) = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & t \operatorname{sh} t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \neq R(t, 0). \quad \# \end{aligned}$$

Здесь приведены лишь минимально необходимые сведения о матричной экспоненте и ее приложениях. Более подробную информацию можно найти в специальной литературе\*.

---

\*См.: Беллман Р., а также Директор С., Рорер Р.

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

## *Учебники и учебные пособия*

*Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1975. 320 с.

*Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: Учеб. для вузов. М.: Наука, 1969. 576 с.

*Гизман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1977. 568 с.

*Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1982. 256 с.

*Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 608 с.

*Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1979. 496 с.

*Пугачев В.С., Симицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1985. 560 с.

*Случайные функции:* Учеб. пособие / *Тескин О.И., Цветкова Г.М., Козлов Н.Е., Пашовкин Е.М.* М.: Изд-во МГТУ, 1994. 80 с.

## *Задачники*

*Емельянов Г.В., Скитович В.П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. 330 с.

*Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей. М.: Наука, 1986. 328 с.

*Сборник задач по математике для вузов / Под ред. А.В. Ефимова.* В 3 т. Т. 3. М.: Наука, 1984. 608 с.

*Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова.* М.: Наука, 1965. 632 с.

## *Монографии*

*Балакришнан А.В.* Теория фильтрации Калмана / Пер. с англ. Под ред. А.А. Новикова. М.: Мир, 1988. 168 с.

Беллман Р. Введение в теорию матриц / Пер. с англ. Под ред. В.Б. Лидского. М.: Наука, 1969. 368 с.

Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.

Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем / Пер. с англ. Под ред. Н.П. Бусленко. М.: Мир, 1974. 464 с.

Евланов Л.Г., Константинов В.М. Системы со случайными параметрами. М.: Наука, 1976. 568 с.

Зуев С.М. Статистическое оценивание параметров математических моделей заболеваний. М.: Наука, 1988. 176 с.

Карлин С. Основы теории случайных процессов / Пер. с англ. Под ред. И.Н. Коваленко. М.: Мир, 1971. 536 с.

Крамер Г. Математические методы статистики / Пер. с англ. Под ред. А.Н. Колмогорова. М.: Мир, 1975. 648 с.

Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение / Пер. с франц. Под ред. Н.Н. Ченцова. М.: Наука, 1972. 375 с.

Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.

Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. М.: Радио и связь, 1983. 303 с.

Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления / Пер. с англ. Под ред. Н.С. Райбмана. М.: Мир, 1973. 319 с.

Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464 с.

Фомин Я.А. Теория выбросов случайных процессов. М.: Связь, 1980. 216 с.

Шварц Л. Анализ / Пер. с франц. Под ред. С.Г. Крейна. В 2 т. Т.1. М.: Мир, 1972. 824 с.

Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993. 464 с.

### *Периодическая литература*

Volkov I.K., Zuyev S.M. On identifiability of mathematical models of evolutionary processes from data of discrete Measurements of state vector // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1994. V.9, N 4. 395-404 p.

Volkov I.K., Zuyev S.M. Conditions for identifiability of mathematical models of evolutionary processes with partially determined initial states. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1995. V.10, N 2. 149-157 p.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

**Аксиомы нормы IV, 70**

– скалярного умножения IV, 69

**Амплитуда гармоника IX, 121**

**Анализ гармонический 121**

– стохастический 66

**Вектор блочный 51**

– вероятностей состояний 166

--- начальных 166

--- предельных 178

– детерминированный 240

– случайный 418

-- дискретный 419

-- непрерывный 419

– сноса 281

– состояния 228

**Векторы случайные независимые в совокупности 421**

**Величина случайная 417**

-- дискретная 419

-- непрерывная 420

**Величины случайные независимые 421**

-- некоррелированные 425

**Вероятность 416**

– переходная 166

– состояния 166

– условная 416

**Вершина графа 202**

**Вес 202**

**Время обслуживания 199**

– ожидания 192

**Выборка случайная 323**

**Гармоника IX, 121**

**Граф состояний 164**

-- размеченный 168

**Дисперсия 424**

– случайного процесса 34

**Дисциплина очереди 192**

**Дифференциал случайного процесса 236**

– стохастический в форме Ито 267

---- Стратоновича 266

**Дополнение алгебраическое III**

**Дуга нагруженная 202**

**Задача Коши стохастическая 237**

– оценивания параметров случайного процесса 335

– параметрической идентификации стохастических моделей состояния 375

**Закон распределения случайного вектора 421**

--- процесса конечномерный ( $N$ -мерный) 29

---- одномерный 28

-- случайной величины 421

-- случайных процессов совместный 96

-- совместный 421

-- условный 422

**Заявка 192**

**Звено линейное динамическое 100**

--- невозмущенное 101

Значение условного  
математического ожидания 423

Значения процесса случайного  
независимые 326

**Измерение косвенное** 393

– прямое 393

**Изображение** XI

**Интеграл с переменным верхним  
пределом от случайного процесса**  
91

– стохастический Ито 260  
– от функции неслучайной по  
случайному процессу 257  
– по винеровскому процессу 260  
– Стратоновича 260

**Интенсивность белого шума** 143

– обслуживания 199  
– простейшего потока 196  
– спектральная процесса  
случайных возмущений 377  
– ухода из очереди 207

**Испытание случайное** 413

**Исход элементарный** 414

**Канал обслуживания** 192

**Ковариация** 424

– двух случайных векторов 34

**Количество информации по  
Фишеру** XVII, 341

**Корень квадратный из квадратной  
симметрической матрицы** 296

**Коэффициент диффузии** 57, 299

– корреляции 425  
– сноса 299

**Критерий Коши стохастический** 77

– метода наименьших квадратов  
369

**Матрица весовая** 369

– диффузии 281

– ковариационная случайного  
вектора 425

– – – процесса 33

– переходных вероятностей 167

– спектральных интенсивностей  
234

– Фишера информационная XVII,  
341

– фундаментальная VIII-147, 431

**Мера вероятностная** 416

**Метод вариации постоянных** VIII

– максимального правдоподобия  
XVII, 357

– наименьших квадратов 369

**Множество возможных значений  
случайного вектора** XVI

– выпуклое V

– открытое I-181

– характеристическое события 414

**Модель канала связи** 393

– математическая II

– сигнала 392

– состояния детерминированная  
228

– – – устойчивая 376

– – – стохастическая 230

– – – в форме Ито 266

– – – – – Стратоновича 265

**Моменты процесса случайного** 328

**Момент  $k$ -го порядка случайного  
процесса** 31

**Невязка оценивания** 400

**Нервенство Иенсена** 348

– Рао — Крамера XVII, 340

– Шварц 37

Норма евклидова IV, 428

— кольцевая IV, 428

— СК 68

**О**жидание математическое 422

— случайного процесса 31

— условное 423, 424

Ординарность входного потока 193

Оригинал XI

Отсутствие последствий во

входном потоке 193

Оценка асимптотически

несмещенная 358

— нормальная 358

— эффективная 358

— квазиправдоподобная 363

— максимального правдоподобия

XVII, 357

— наименьших квадратов 369

— несмещенная XVII, 337

— нормальная 358

— состоятельная XVII, 337

— эффективная XVII, 337

Очередь 191

**П**еременные состояния

наблюдаемое 388

— ненаблюдаемое 388

Плотность вероятности перехода

171

— потока заявок приведенная 211

— ухода заявок из очереди

приведенная 211

— простейшего потока 196

— распределения (вероятностей) 420

— обобщенная 421

— совместная 421

— условная 422

— спектральная 136

— взаимная 155

Помеха 393

Последовательность случайная 27

Поток входной 191

— простейший 193

— выходной 191

Правило дифференцирования Ито

269

Предел последовательности

случайных процессов 72

— случайного процесса 67

Преобразование интегральное

Лапласа XI

— Фурье экспоненциальное XI

Производная случайного процесса в

точке 82

— на множестве 83

Пространство вероятностное 416

— измеримое 416

— элементарных исходов 414

— событий 414

Процесс винеровский 55

— стандартный 57

— гауссов 50

— гибели — размножения 180

— однородный 182

— марковский 60

— с дискретными состояниями 163

— неоднородный 171

— однородный 171

— непрерывными состояниями

277

— массового обслуживания 191

— нормальный 50

— пуассоновский 61

— случайный 26

— векторный 26

— второго порядка 68

— дифференцируемый в точке 82

— на множестве 83

— интегрируемый с весом 90



**Процесс случайный комплексный 40**

- координатный 26
- непрерывный в точке 79
- на множестве 79
- с дискретным временем 165
- скалярный 26
- стационарный в узком смысле 47
- широким смысле 48
- центрированный 130
- элементарный 122
- эргодический по отношению к дисперсии 112
- математическому ожиданию 107
- $n$ -мерный 26
- случайных возмущений 229
- отклонений 380
- с приращениями независимыми 52

**Процессы случайные независимые 298**

- стационарными 52
- некоррелированными (ортогональными) 52
- циклический 183
- однородный 183
- Процессы случайные независимые 298
- некоррелированные 298
- равные 68
- стохастически эквивалентные 29

**Реакция на входной сигнал 101****Реализации выборочные независимые 325****Реализация выборочная 324**

- случайного процесса 27
- случайной выборки 324

**Режим функционирования**

стационарный 204

**Резольвента 238**

- задачи Коши 431

**Сечение случайного процесса 27****Сечения независимые 231****Сигнал 392**

- входной 101

**Система линейных ОДУ**

нормальная асимптотически

устойчивая VIII, 249

- обслуживания 191

- замкнутая 221

- с ограниченной длиной очереди 201

- ожиданием 193

- чистая 213

- отказом 193

- очередь 193

- ОДУ нормальная VIII

- уравнений Колмогорова 172

**Смещение оценки 340****Событие элементарное 414****События зависимые 417**

- независимые 417

**Спектр функции IX, 121****Способность пропускная**

абсолютная 204

- относительная 204

**Стационарность входного потока**

193

**Теорема Калмана 403**

- эргодическая 109

**Теория массового обслуживания**

193

- спектральная 121

- фильтрации и упреждения 396

**Траектория случайного процесса 27****Требование 192**

**Уравнение Колмогорова второе**

281

- матричное 173
- первое 281
- Колмогорова — Фоккера —  
Планка 281
- Маркова — Смолуховского —  
Чепмена — Колмогорова 279
- стохастическое  
дифференциальное линейное 101

**Условия граничные XII**

- начальные XII

**Устойчивость частоты**

статистическая 413

**Фаза начальная гармоники IX, 121**

Фильтр Калмана 403

Формулы Эрланга 217

**Функция выпуклая (вниз) II, 347**

- детерминированная 121
- измеримая 417
- интегрируемая с квадратом XI
- квазиправдоподобия 363
- ковариационная 34
- взаимная 41
- корреляционная 40
- Лапласа XVI, 217
- максимального правдоподобия  
XVII, 357
- матричная 32
- обобщенная XII
- передаточная 104
- плотности вероятностей  
случайного процесса  
конечномерная ( $N$ -мерная) 29
- одномерная 28
- разделяющая точки множества  
351

**Функция распределения**

(вероятностей) случайного

вектора 418

- случайной величины 418
- случайного процесса  
конечномерная ( $N$ -мерная) 29
- одномерная 28
- совместная 419, 421
- случайная 26
- случайного вектора векторная  
422
- скалярная 422
- случайной величины векторная  
422
- скалярная 422
- характеристическая случайного  
вектора 426
- процесса 288
- чувствительности 389
- матричная 389

**Характеристика частотная  
динамической системы 152****Цепь Маркова 164**

- неоднородная 167
- однородная 167

**Частота гармоники IX, 121****Шаг марковского процесса 165**

Шум белый 143

**Экспонента матричная 429**

Этап марковского процесса 165

 **$\delta$ -функция Дирака XII** $\sigma$ -алгебра 415

- борелевская 417

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>Основные обозначения</b>	<b>12</b>
<b>Введение</b>	<b>19</b>
<b>1. Исходные понятия и определения</b>	<b>26</b>
1.1. Случайная функция, случайный процесс и случайная последовательность . . . . .	26
1.2. Математическое ожидание и ковариационная функция случайного процесса . . . . .	31
Вопросы и задачи . . . . .	42
<b>2. Некоторые типы случайных процессов</b>	<b>47</b>
2.1. Стационарные случайные процессы . . . . .	47
2.2. Нормальные процессы . . . . .	50
2.3. Процессы с независимыми приращениями . . . . .	52
2.4. Винеровский процесс . . . . .	55
2.5. Марковские процессы . . . . .	59
2.6. Пуассоновский процесс . . . . .	61
Вопросы и задачи . . . . .	62
<b>3. Элементы стохастического анализа</b>	<b>66</b>
3.1. Сходимость в смысле среднего квадратичного (СК-сходимость) . . . . .	67
3.2. Непрерывность случайного процесса . . . . .	79
3.3. Дифференцируемость случайного процесса . . . . .	82
3.4. Интегрируемость случайного процесса . . . . .	90
3.5. Действие линейного оператора на случайный процесс . . . . .	98
3.6. Эргодические случайные процессы . . . . .	106
Вопросы и задачи . . . . .	113
<b>4. Спектральная теория стационарных случайных процессов</b>	<b>121</b>
4.1. Стационарные случайные процессы с дискретным спектром . . . . .	122
4.2. Стационарные случайные процессы с непрерывным спектром . . . . .	133

4.3. Белый шум . . . . .	143
4.4. Преобразование стационарного случайного процесса при его прохождении через линейную динамическую систему . . . . .	148
Вопросы и задачи . . . . .	155
<b>5. Марковские процессы с дискретными состояниями и цепи Маркова</b>	<b>163</b>
5.1. Основные понятия . . . . .	163
5.2. Цепи Маркова . . . . .	166
5.3. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний	170
5.4. Процесс гибели — размножения и циклический процесс	180
Вопросы и задачи . . . . .	186
<b>6. Элементы теории массового обслуживания</b>	<b>191</b>
6.1. Процессы массового обслуживания (основные понятия)	191
6.2. Простейший поток . . . . .	193
6.3. Время ожидания и время обслуживания . . . . .	199
6.4. Основные принципы построения марковских моделей массового обслуживания . . . . .	200
6.5. Системы массового обслуживания с ожиданием . . .	206
6.6. Стационарный режим функционирования системы об- служивания (основные понятия и соотношения) . . .	209
6.7. Стационарные режимы функционирования некоторых вариантов систем обслуживания . . . . .	213
Вопросы и задачи . . . . .	223
<b>7. Стохастические модели состояния</b>	<b>227</b>
7.1. Случайные возмущения в динамической системе . . .	227
7.2. Линейные стохастические дифференциальные уравне- ния . . . . .	237
7.3. Стохастические интегралы и дифференциалы . . . .	253
Вопросы и задачи . . . . .	272
<b>8. Марковские процессы с непрерывными состояни- ями</b>	<b>277</b>
8.1. Общие свойства марковских процессов . . . . .	278
8.2. Уравнения Колмогорова . . . . .	280
8.3. Стохастические модели состояния и уравнения Колмо- горова . . . . .	288
8.4. Постановки задач для нахождения условной функции плотности вероятностей . . . . .	298

8.5. Три характерные задачи теории марковских случайных процессов с непрерывными состояниями . . . . .	304
Вопросы и задачи . . . . .	317
<b>9. Элементы статистики случайных процессов</b>	<b>323</b>
9.1. Данные наблюдений . . . . .	323
9.2. Статистические моменты случайного процесса . . .	328
9.3. Постановка задачи оценивания параметров случайного процесса . . . . .	335
9.4. Эффективные оценки. Неравенство Рао — Крамера	338
9.5. Единственность решения задачи оценивания параметров случайного процесса . . . . .	344
9.6. Метод максимального правдоподобия . . . . .	355
9.7. Метод наименьших квадратов . . . . .	367
Вопросы и задачи . . . . .	371
<b>10. Оценивание параметров стохастических моделей состояния</b>	<b>375</b>
10.1. Еще раз о стохастической модели состояния . . . . .	375
10.2. Единственность решения задачи параметрической идентификации стохастической модели состояния . . . . .	382
10.3. Выбор наблюдаемых переменных . . . . .	387
10.4. Специфика задачи оценивания при наличии ошибок измерений . . . . .	392
10.5. Фильтр Калмана . . . . .	396
10.6. Оценивание параметров при наличии ошибок измерений . . . . .	405
Вопросы и задачи . . . . .	409
<b>Приложение 1. Основные понятия теории вероятностей</b>	<b>413</b>
<b>Приложение 2. Матричная экспонента</b>	<b>428</b>
<b>Список рекомендуемой литературы</b>	<b>438</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>440</b>

*Учебное издание*

**Математика в техническом университете  
Выпуск XVIII**

**Волков Игорь Куприянович  
Зуев Сергей Михайлович  
Цветкова Галина Михайловна**

**СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ**

*Редактор В.И. Трефилов  
Художник С.С. Водчиц  
Корректор О.В. Калашникова*

*Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
под руководством А.Н. Канатникова*

Изд. лиц. № 020523 от 25.04.97

Подписано в печать 07.06.98 Формат 60×88 1/16.

Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.

Усл. печ. л. 28. Уч.-изд. л. 27,82.

Тираж 1000 экз. Изд. № 121. Заказ № 1986

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ,  
140010, Люберцы, Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.  
Тел. 554-21-86