Домашняя работа к занятию 3

Для каждого из уравнений **1.1 — 1.3** найдите общее решение и решите поставленную задачу Коши.

1.1 $\begin{cases} y' = 2y + \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **1.2** $\begin{cases} xy' = y + x^3 e^{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ **1.3** $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^3 - x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

Для каждого из уравнений **2.1 — 2.2** найдите общее решение, решите задачу Коши и укажите максимальный интервал существования полученного решения.

2.1 $\begin{cases} y' + y = y^3 e^{2x} \\ y(0) = -1 \end{cases}$ **2.2** $\begin{cases} (x^2 \sin y + x)y' = y \\ y(\pi/2) = \pi/2 \end{cases}$

3.1 Функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Найдите решение уравнения $(x^2 - 1)y' + 2xy = f(x)$, имеющее конечный предел при $x \to 1$. Найдите этот предел.

3.2 Найдите периодическое решение уравнения $y' = 2y\sin^2 x - 1$. Каков его наименьший положительный период?

Ответы и указания

1.1 1) $y = Ce^{2x} - \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$ 2) $y = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$

1.2 1) $y = Cx + \frac{1}{2}xe^{x^2}$ 2) $y = \frac{1}{2}x(e^{x^2} - e)$

1.3 1) *Замечание*: уравнение становится линейным, если рассматривать x как функцию от y.

Ответ: $x = Ce^{-y} + y^3 - 3y^2 + 6y - 6$

2) $x = 7e^{-y} + y^3 - 3y^2 + 6y - 6$

2.1 1) *Замечание*: это уравнение Бернулли, и оно сводится к линейному уравнению заменой $u = y^{-2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x} - 2xe^{2x}$; функция $y \equiv 0$ также является решением.

2) $y = -\dfrac{1}{e^x\sqrt{1-2x}}$, $x \in (-\infty; 0,5)$

2.2 1) *Замечание*: если рассматривать x как функцию от y, то получим уравнение Бернулли.

Ответ: $x = \dfrac{y}{C + \cos y}$

2) $x = \dfrac{y}{1+\cos y}$, $x \in (-\infty; +\infty)$

3.1 $y(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\displaystyle\int\limits_1^x f(\tau)d\tau$; $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = \dfrac{f(1)}{2}$.

3.2 $y_{\text{о.о.}} = Ce^{x-0,5\sin 2x}$; периодическое решение (с периодом π)

$$y_{\text{ч.н.}} = e^{x-0,5\sin 2x}\int\limits_x^{+\infty} e^{-\tau}e^{0,5\sin 2\tau}d\tau = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}e^{\sin t\cos(t+2x)}dt.$$