Классификация уравнений 2 порядка

“Уравнения математической физики”

Скопинцев Артур Маркович

Новосибирск, 2023

В этой главе мы описываем классификацию линейных уравнений в частных производных второго порядка. Это потребует обсуждения преобразований, характерных кривых и канонических форм. Мы покажем, что существует три типа уравнений, и установим, что эти три случая в определенном смысле типичны для того, что происходит в общей теории. Тип уравнения окажется решающим при установлении вида начальных и граничных условий, которые естественным образом служат для однозначного определения решения (см., например, Garabedian (1964)).

Уравнения в частных производных можно классифицировать как задачи равновесия и нестационарные задачи. Задачи первого класса, задачи равновесия или стационарного состояния, также известны как эллиптические. Например, уравнения Лапласа или Пуассона относятся к этому классу. Нестационарные задачи включают в себя как параболические, так и гиперболические задачи, то есть те, решение которых зависит от времени.

Классификация линейных PDE второго порядка

Напомним, что линейный PDE второго порядка по двум переменным задается формулой

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{2.2.1}$$

где все коэффициенты от A до F являются вещественными функциями независимых переменных x, y. Определим дискриминант Δ(x, y) с помощью

$$\Delta(x_0, y_0) = B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0). \tag{2.2.2}$$

Уравнение называется гиперболическим в точке (x_0, y_0) если $\Delta(x_0, y_0) > 0$, параболическим при $\Delta(x_0, y_0) = 0$, и эллиптическим если $\Delta(x_0, y_0) < 0$.

Классификация уравнений с более чем двумя независимыми переменными или с производными более высокого порядка в курсе не рассматривается. (см. Courant and Hilbert [5]).

Пример.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$A = 1, B = 0, C = -c^2$$

Тогда,

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1(-c^2) = 4c^2 \geq 0$$

Поэтому уравнение гиперболическое при $c \neq 0$ и параболическое для $c = 0$.

Пусть ξ, η - дважды непрерывно дифференцируемые функции от x, y

$$\xi = \xi(x, y), \tag{2.2.3}$$

$$\eta = \eta(x, y). \tag{2.2.4}$$

Предположим также, что якобиан J преобразования, определяемый

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \tag{2.2.5}$$

отличен от нуля. Это предположение необходимо для гарантии того, что можно выполнить преобразование обратно к исходным переменным x, y.

Используем цепное правило, чтобы получить все частные производные, имеющиеся в (2.2.1). Легко видеть, что

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \tag{2.2.6}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y. \tag{2.2.7}$$

Вторые частные производные:

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (u_x)_y = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_y \\ &= (u_\xi \xi_x)_y + (u_\eta \eta_x)_y \\ &= (u_\xi)_y \xi_x + u_\xi \xi_{xy} + (u_\eta)_y \eta_x + u_\eta \eta_{xy} \end{aligned}$$

Используя (2.2.7) получим

$$u_{xy} = (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y)\xi_x + u_\xi \xi_{xy} + (u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y)\eta_x + u_\eta \eta_{xy}.$$

Приведя подобные слагаемые

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}. \tag{2.2.8}$$

Схожим образом получаются u_{xx}, u_{yy}

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \tag{2.2.9}$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}. \tag{2.2.10}$$

Подставляя их в (2.2.1), имеем:

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_{\xi} + E^* u_{\eta} + F^* u = G^* \tag{2.2.11}$$

где все коэффициенты теперь являются функциями от ξ, η и

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \tag{2.2.12}$$
$$B^* = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \tag{2.2.13}$$
$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \tag{2.2.14}$$
$$D^* = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \tag{2.2.15}$$
$$E^* = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \tag{2.2.16}$$
$$F^* = F \tag{2.2.17}$$
$$G^* = G. \tag{2.2.18}$$

Полученное уравнение (2.2.11) имеет ту же форму, что и исходное. Тип уравнения (гиперболическое, параболическое или эллиптическое) при этом преобразовании не изменится. Причина этого в том, что

$$\Delta^* = (B^*)^2 - 4A^*C^* = J^2(B^2 - 4AC) = J^2\Delta \tag{2.2.19}$$

и поскольку $J \neq 0$, то знак Δ^* такой же как и у Δ.

Классификация зависит только от коэффициентов членов второй производной, и поэтому мы записываем (2.2.1) и (2.2.11) соответственно в виде

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = H(x, y, u, u_x, u_y) \tag{2.2.20}$$

и

$$A^*u_{\xi\xi} + B^*u_{\xi\eta} + C^*u_{\eta\eta} = H^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{2.2.21}$$

Канонические формы

В этом разделе описываются канонические формы, которые соответствуют особенно простому выбору коэффициентов вторых частных производных. Чтобы получить каноническую форму, мы должны преобразовать уравнения в частных производных с помощью метода характеристик.

Мы рассмотрим конкретные варианты выбора функций ξ, η. Это будет сделано таким образом, что некоторые коэффициенты из числа A^*, B^*, and C^* в (2.2.21) станут равными нулю.

Гиперболический тип

Заметим, что A^*, C^* в некотором роде схожи, и можно записать

$$A\zeta_x^2 + B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 \tag{2.3.1.1}$$

где ζ означает либо ξ, либо η. Предположим, что мы пытаемся выбрать ξ, η такими чтобы $A^* = C^* = 0$. Это, конечно, возможно только в том случае, если уравнение гиперболическое. (Напомним, что $\Delta^* = (B^*)^2 - 4A^*C^*$ и в данном случае $\Delta^* = (B^*)^2 > 0$. Поскольку тип не меняется при преобразовании, у нас должен быть гиперболический PDE.) Чтобы избавиться от A^* и C^* нужно найти такой ζ чтобы

$$A\zeta_x^2 + B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 = 0. \tag{2.3.1.2}$$

Поделив на ζ_y^2 , получаем

$$A\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right)^2 + B\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right) + C = 0. \tag{2.3.1.3}$$

Вдоль кривой

$$\zeta(x, y) = \text{constant}, \tag{2.3.1.4}$$

имеем

$$d\zeta = \zeta_x dx + \zeta_y dy = 0. \tag{2.3.1.5}$$

Тогда

$$\frac{\zeta_x}{\zeta_y} = -\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} \qquad (2.3.1.6)$$

и уравнение (2.3.1.3) станет

$$A\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2 + B\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right) + C = 0. \qquad (2.3.1.7)$$

Получили квадратное уравнение на $\frac{dy}{dx}$, его корнями являются

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \qquad (2.3.1.8)$$

Эти уравнения называются характеристическими уравнениями и являются обычными дифференциальными уравнениями для семейств кривых в плоскости x-y, вдоль которых $\zeta = constant$. Эти решения называются характеристическими кривыми. Обратите внимание, что дискриминант находится под корнем в (2.3.1.8) и поскольку задача гиперболическая, $B^2 - 4AC > 0$, существуют две различные характеристические кривые. Мы можем выбрать одну из них равной $\xi(x, y)$ и другую $\eta(x, y)$. Решая ОДУ (2.3.1.8), имеем

$$\varphi_1(x, y) = C_1, \qquad (2.3.1.9)$$

$$\varphi_2(x, y) = C_2. \qquad (2.3.1.10)$$

Таким образом, преобразование

$$\xi = \varphi_1(x, y) \tag{2.3.1.11}$$

$$\eta = \varphi_2(x, y) \tag{2.3.1.12}$$

приведёт к $A^* = C^* = 0$, и каноническая форма будет иметь вид

$$B^* u_{\xi\eta} = H^* \tag{2.3.1.13}$$

или после деления на B^*

$$u_{\xi\eta} = \frac{H^*}{B^*}. \tag{2.3.1.14}$$

Это называется *первой канонической формой* гиперболического уравнения.
Иногда мы находим другую каноническую форму для гиперболических PDE, которая получается путем преобразования

$$\alpha = \xi + \eta \tag{2.3.1.15}$$

$$\beta = \xi - \eta. \tag{2.3.1.16}$$

Используя (2.3.1.6)-(2.3.1.8) можно прийти к

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H^{**}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \tag{2.3.1.17}$$

Это называется второй канонической формой гиперболического уравнения.

Пример
$$y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0 \qquad \text{for} \quad x > 0, y > 0 \tag{2.3.1.18}$$

$$A = y^2$$

$$B = 0$$

$$C = -x^2$$

$$\Delta = 0 - 4y^2(-x^2) = 4x^2y^2 > 0$$

Уравнение является гиперболическим для всех интересующих нас x, y.

Характеристическое уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{4x^2y^2}}{2y^2} = \frac{\pm 2xy}{2y^2} = \pm\frac{x}{y}. \tag{2.3.1.19}$$

Имеем уравнения с разделяющимися переменными, и решениями являются

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = c_1$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c_2$$

Первое - это семейство гипербол, а второе - семейство окружностей (см. рис. 1).

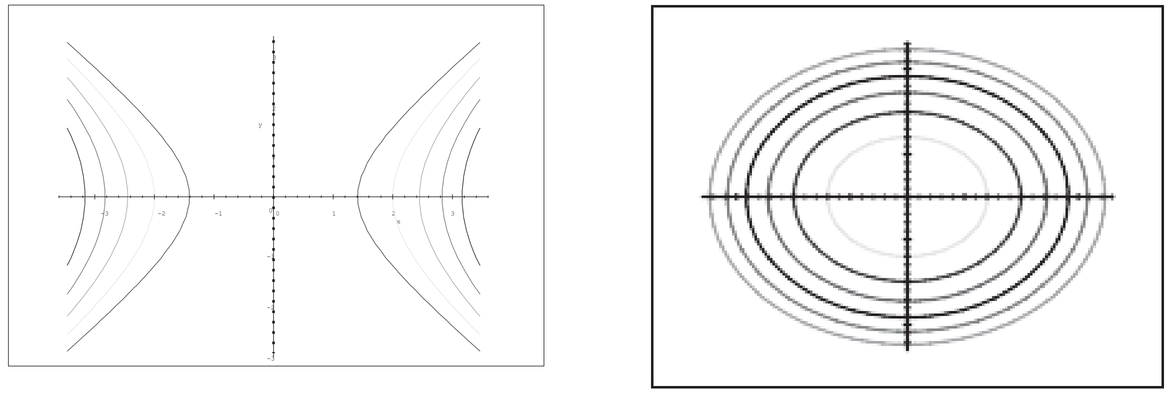


Рисунок 1: Семейства характеристик для данного примера

Затем мы выполняем следующее преобразование

$$\xi = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 \tag{2.3.1.20}$$

$$\eta = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 \tag{2.3.1.21}$$

Вычислим все производные от ξ, η необходимые для (2.2.6) - (2.2.10)

$$\xi_x = -x, \quad \xi_y = y, \quad \xi_{xx} = -1, \quad \xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = 1$$

$$\eta_x = x, \quad \eta_y = y, \quad \eta_{xx} = 1, \quad \eta_{xy} = 0, \quad \eta_{yy} = 1.$$

Подставляя все это в выражения на B^*, D^*, E^* (можете проверить что $A^* = C^* = 0$)

$$B^* = 2y^2(-x)x + 2(-x^2)y \cdot y = -2x^2y^2 - 2x^2y^2 = -4x^2y^2.$$

$$D^* = y^2(-1) + (-x^2) \cdot 1 = -x^2 - y^2.$$

$$E^* = y^2 \cdot 1 + (-x^2) \cdot 1 = y^2 - x^2.$$

Теперь решим (2.3.1.20) - (2.3.1.21) для x, y

$$x^2 = \eta - \xi,$$

$$y^2 = \xi + \eta,$$

и подставив в B^*, D^*, E^* получим

$$-4(\eta - \xi)(\xi + \eta)u_{\xi\eta} + (-\eta + \xi - \xi - \eta)u_\xi + (\xi + \eta - \eta + \xi)u_\eta = 0$$

$$4(\xi^2 - \eta^2)u_{\xi\eta} - 2\eta u_\xi + 2\xi u_\eta = 0$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)}u_\xi - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)}u_\eta \qquad (2.3.1.22)$$

Это первая каноническая форма для (2.3.1.18).

Параболический тип

Поскольку $\Delta^* = 0$, $B^2 - 4AC = 0$, и следовательно

$$B = \pm 2\sqrt{A}\sqrt{C} \tag{2.3.2.1}$$

Ясно, что мы не можем сделать так, чтобы и A^* и C^* были равны нулю, поскольку характеристическое уравнение (2.3.1.8) может иметь только одно решение. Это означает, что параболические уравнения имеют только одну характеристическую кривую. Предположим, мы выбираем решение $\varphi_1(x, y)$ из (2.3.1.8)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} \tag{2.3.2.2}$$

чтобы определить

$$\xi = \varphi_1(x, y). \tag{2.3.2.3}$$

Следовательно, $A^* = 0$.

Используя (2.3.2.1) покажем, что

$$\begin{aligned} 0 = A^* &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\ &= A\xi_x^2 + 2\sqrt{A}\sqrt{C}\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\ &= \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2 \end{aligned} \tag{2.3.2.4}$$

Также легко заметить, что

$$\begin{aligned} B^* &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ &= 2(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Последний шаг является результатом (2.3.2.4). Следовательно, $A^* = B^* = 0$. Чтобы получить каноническую форму, мы должны выбрать функцию $\eta(x, y)$. Для этого можно подобрать довольно произвольную функцию лишь бы якобиан не был равен нулю.

Тогда каноническая форма будет

$$C^* u_{\eta\eta} = H^*$$

и после деления на C^* (который не может быть равен нулю)

$$u_{\eta\eta} = \frac{H^*}{C^*} \tag{2.3.2.5}$$

Если мы выберем $\eta = \varphi\ (x, y)$ вместо (2.3.2.3), то получим $C^* = 0$. In this case $B^* = 0$ потому что последний множитель в $\sqrt{A}\ \eta_x + \sqrt{C}\ \eta_y$ равен нулю. Канонической формой в этом случае является

$$u_{\xi\xi} = \frac{H^*}{A^*} \tag{2.3.2.6}$$

Пример

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = e^x \tag{2.3.2.7}$$

$$A = x^2$$

$$B = -2xy$$

$$C = y^2$$

$$\Delta = (-2xy)^2 - 4 \cdot x^2 \cdot y^2 = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0.$$

Таким образом, уравнение является параболическим для всех x, y. Уравнение характеристик (2.3.2.2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{2x^2} = -\frac{y}{x}. \tag{2.3.2.8}$$

Решаем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln y + \ln x = C$$

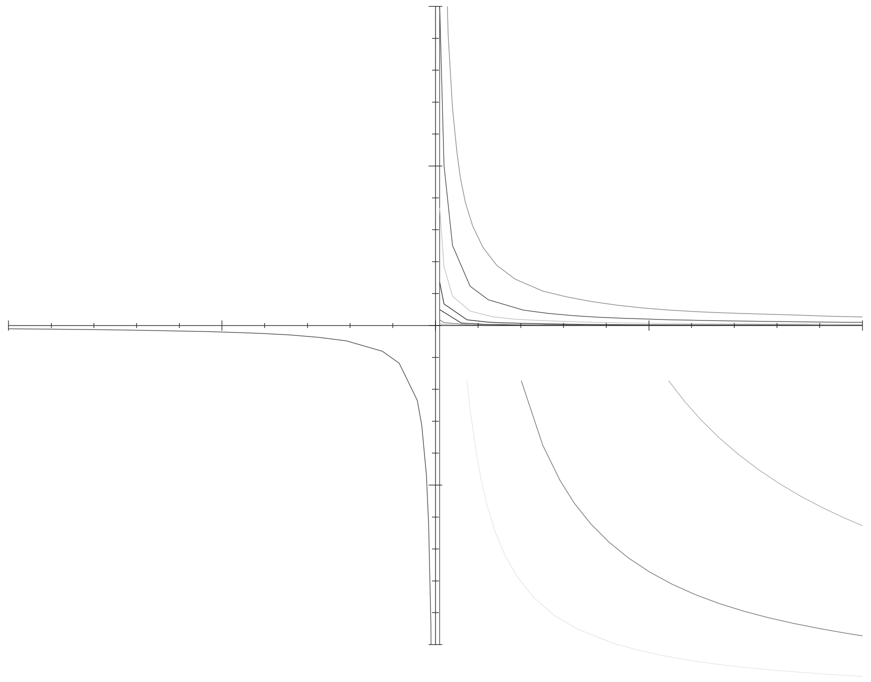
На рисунке схематично приведено семейство характеристик для (2.3.2.7). Обратите внимание, что поскольку задача параболическая, существует **<u>только</u>** одно семейство.

Поэтому мы можем считать ξ этим семейством

$$\xi = \ln y + \ln x \tag{2.3.2.9}$$

и η является произвольным пока $J \neq 0$. Положим

$$\eta = x. \tag{2.3.2.10}$$



Эллиптический тип

Поскольку $\Delta^* < 0$, то

$$\xi = \alpha + i\beta \tag{2.3.3.1}$$

$$\eta = \alpha - i\beta \tag{2.3.3.2}$$

где α и β являются действительной и мнимой частями ξ. Очевидно, что η будет комплексно сопряженным к ξ поскольку коэффициенты характеристического уравнения действительны. Если мы используем эти функции $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$, то получим уравнение, для которого

$$B^{**} = 0, \quad A^{**} = C^{**}. \tag{2.3.3.3}$$

Чтобы показать, что (2.3.3.3) верно, убедимся, что наш выбор ξ, η привел к $A^* = C^* = 0$:

$$A^* = (A\alpha_x^2 + B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2) - (A\beta_x^2 + B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2) + i[2A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + 2C\alpha_y\beta_y] = 0$$

$$C^* = (A\alpha_x^2 + B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2) - (A\beta_x^2 + B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2) - i[2A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + 2C\alpha_y\beta_y] = 0$$

Обратите внимание на сходство слагаемых с выражениями в (2.3.1.12)-(2.3.1.14)

$$A^* = (A^{**} - C^{**}) + iB^{**} = 0$$

$$C^* = (A^{**} - C^{**}) - iB^{**} = 0$$

где коэффициенты с двойной звездочкой приведены как в (2.3.1.12)-(2.3.1.14), за исключением того, что α, β заменяют ξ, η соответственно. Эти последние уравнения могут быть выполнены тогда и только тогда, когда выполняется (2.3.3.3).

Следовательно

$$A^{**}u_{\alpha\alpha} + A^{**}u_{\beta\beta} = H^{**}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

и канонической формой является

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{H^{**}}{A^{**}}. \tag{2.3.3.4}$$

<u>Пример</u>

$$e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u \tag{2.3.3.5}$$

$$A = e^x$$

$$B = 0$$

$$C = e^y$$

$$\Delta = 0^2 - 4e^x e^y < 0, \qquad \text{for all } x, y$$

Уравнение на характеристики

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{-4e^x e^y}}{2e^x} = \frac{\pm 2i\sqrt{e^x e^y}}{2e^x} = \pm i\sqrt{\frac{e^y}{e^x}}$$

$$\frac{dy}{e^{y/2}} = \pm i\frac{dx}{e^{x/2}}.$$

Следовательно

$$\xi = -2e^{-y/2} - 2ie^{-x/2}$$

$$\eta = -2e^{-y/2} + 2ie^{-x/2}$$

Действительная и мнимая части:

$$\alpha = -2e^{-y/2} \tag{2.3.3.6}$$

$$\beta = -2e^{-x/2}. \tag{2.3.3.7}$$

Вычислим все необходимые частные производные от α, β

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_y = e^{-y/2}, \quad \alpha_{xx} = 0, \quad \alpha_{xy} = 0, \quad \alpha_{yy} = -\frac{1}{2}e^{-y/2}$$

$$\beta_x = e^{-x/2}, \quad \beta_y = 0, \quad \beta_{xx} = -\frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad \beta_{xy} = 0, \quad \beta_{yy} = 0$$

Теперь, вместо использования обоих преобразований, напомним, что (2.3.1.12)-(2.3.1.18) справедливы при α, β вместо ξ, η. Таким образом

$$A^* = e^x \cdot 0 + 0 + e^y \left(e^{-y/2}\right)^2 = 1$$

$$B^* = 0 + 0 + 0 = 0 \qquad \text{как и следовало ожидать}$$

$$C^* = e^x \left(e^{-x/2}\right)^2 + 0 + 0 = 1 \qquad \text{как и следовало ожидать}$$

$$D^* = 0 + 0 + e^y \left(-\frac{1}{2}e^{-y/2}\right) = -\frac{1}{2}e^{y/2}$$

$$E^* = e^x \left(-\frac{1}{2}e^{-x/2}\right) + 0 + 0 = -\frac{1}{2}e^{x/2}$$

$$F^* = -1$$

$$H^* = -D^* u_\alpha - E^* u_\beta - F^* u = \frac{1}{2}e^{y/2}u_\alpha + \frac{1}{2}e^{x/2}u_\beta + u.$$

Следовательно

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{1}{2}e^{y/2}u_\alpha + \frac{1}{2}e^{x/2}u_\beta + u.$$

Используя (2.3.3.6)-(2.3.3.7) имеем

$$e^{x/2} = -\frac{2}{\beta}$$

$$e_{y/2} = -\frac{2}{\alpha}$$

и поэтому канонической формой будет

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{\alpha}u_\alpha - \frac{1}{\beta}u_\beta + u. \tag{2.3.3.8}$$

Задачи

1. Найдите характеристическое уравнение, характеристические кривые и получите каноническую форму

   a. $x\, u_{xx} + u_{yy} = x^2$
   b. $u_{xx} + u_{xy} - xu_{yy} = 0 \qquad (x \le 0,$ all $y)$
   c. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xyu_x + y^2u_y = 0$
   d. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$
   e. $u_{xx} + y^2u_{yy} = y$
   f. $\sin^2 xu_{xx} + \sin 2xu_{xy} + \cos^2 xu_{yy} = x$

2. Используйте Python/Matlab/Maple для построения семейств характеристических кривых для каждого из вышеперечисленных уравнений.

Уравнения с постоянными коэффициентами

В этом случае дискриминант является постоянным, и, таким образом, тип уравнения везде в области одинаков. Характеристическое уравнение легко интегрируется.

Гиперболический тип

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}. \tag{2.4.1.1}$$

Таким образом

$$dy = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} dx$$

и интегрирование дает два семейства прямых линий

$$\xi = y - \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} x \tag{2.4.1.2}$$

$$\eta = y - \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} x. \tag{2.4.1.3}$$

Обратите внимание, что если $A = 0$, то (2.4.1.1) недопустимо. В этом случае мы напомним, что (2.4.1.2) является

$$B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 = 0 \tag{2.4.1.4}$$

Если мы разделим на ζ_y^2, как и раньше , то получим

$$B\frac{\zeta_x}{\zeta_y} + C = 0 \tag{2.4.1.5}$$

которое является линейным, и, таким образом, мы получаем только одно семейство характеристик. Чтобы преодолеть эту трудность, мы делим (2.4.1.4) на ζ_x^2 чтобы получить

$$B\frac{\zeta_y}{\zeta_x} + C\left(\frac{\zeta_y}{\zeta_x}\right)^2 = 0 \tag{2.4.1.6}$$

который является квадратичным. Теперь

$$\frac{\zeta_y}{\zeta_x} = -\frac{dx}{dy}$$

и тогда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot 0 \cdot C}}{2C} = \frac{B \pm B}{2C}$$

или

$$\frac{dx}{dy} = 0, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{B}{C}. \tag{2.4.1.7}$$

Тогда имеем преобразование

$$\xi = x, \tag{2.4.1.8}$$

$$\eta = x - \frac{B}{C}y. \tag{2.4.1.9}$$

Каноническая форма похожа на (2.3.1.14).

Параболический тип

Единственным решением (2.4.1.1) является

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}. \tag{2.4.2.1}$$

Таким образом

$$\xi = y - \frac{B}{2A}x.$$

И снова η выбирается разумно/произвольно, но таким образом, чтобы якобиан преобразования не был равен нулю.
Может ли A быть равным нулю в этом случае? В параболическом случае A = 0 подразумевает B = 0 (поскольку $\Delta = B^2 - 4 \cdot 0 \cdot C$ должно быть равно нулю). Следовательно, исходное уравнение имеет вид

$$Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

которое уже находится в канонической форме

$$u_{yy} = -\frac{D}{C}u_x - \frac{E}{C}u_y - \frac{F}{C}u + \frac{G}{C}. \tag{2.4.2.2}$$

Эллиптический тип

Теперь у нас есть сложные сопряженные функции ξ, η

$$\xi = y - \frac{B + i\sqrt{-\Delta}}{2A}x, \tag{2.4.3.1}$$

$$\eta = y - \frac{B - i\sqrt{-\Delta}}{2A}x. \tag{2.4.3.2}$$

Следовательно

$$\alpha = y - \frac{B}{2A}x, \tag{2.4.3.3}$$

$$\beta = \frac{-\sqrt{-\Delta}}{2A}x. \tag{2.4.3.4}$$

(Обратите внимание, что $-\Delta > 0$ и квадратный корень дает действительное число.)
Каноническая форма аналогична (2.3.3.4).

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\dots,x_n)u_{x_ix_j} + F(x_1,\dots,x_n,u,\mathrm{grad}\ u) = 0,$$

где a_{ij} $(i,j=\overline{1,n})$, F — заданные вещественные функции, $a_{ij} = a_{ji}$.

Вообще говоря, в случае $n > 2$ матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ привести к диагональной с элементами на диагонали равными 0 или ± 1 *в области* нельзя.

В этом параграфе будем рассматривать случай, когда коэффициенты a_{ij} постоянные.

[source]: Абашеева, Сердюков, 2012

Главной части уравнения (1) соответствует квадратичная форма

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j = (A\mathbf{p}, \mathbf{p}),$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T$.

Как известно, квадратичная форма заменой $\mathbf{p} = S\mathbf{q}$ (где S — некоторая невырожденная матрица) приводится к каноническому виду, т. е. матрица

$$\widetilde{A} = S^T A S = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix}$$

диагональная с элементами на диагонали, равными 0 или ± 1.

[source]: Абашеева, Сердюков, 2012

После линейной замены

$$\mathbf{y} = S^T \mathbf{x},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$, уравнение (1) приводится к *каноническому виду*

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i u_{y_i y_i} + G(y_1, \ldots, y_n, u, \mathrm{grad}\ u) = 0.$$

Определение.

Уравнение (1) называется уравнением

- *гиперболического типа*, если квадратичная форма Φ знакопеременна, причем $n-1$ коэффициент δ_i — одного знака, а последний — другого;
- *эллиптического типа*, если квадратичная форма Φ знакоопределена, т. е. все коэффициенты δ_i одного знака;
- *параболического типа*, если квадратичная форма Φ вырождена, т. е. хотя бы один из коэффициентов δ_i равен нулю.

[source]: Абашеева, Сердюков, 2012