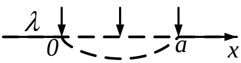
Урок 16

Фазовые решетки и другие задачи

1. (Задача 3.99.) На щель шириной a перпендикулярно плоскости экрана падает плоская



волна. Длина волны — λ. На щель нанесли прозрачное покрытие, которое изменяет амплитуду проходящей волны по закону $E = E_0 \sin(\frac{\pi x}{a})$, где x отсчитывается от края щели. Найти интенсивность $I(\theta)$ волны, прошедшей через щель под углом θ к первоначальному направлению.

Решение

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$E = \int\limits_0^a E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{ikx\sin\theta} dx = E_0 \int\limits_0^a \frac{e^{\frac{i\pi x}{a}} - e^{\frac{-i\pi x}{a}}}{2i} \cdot e^{ikx\sin\theta} dx =$$
$$= \frac{E_0}{2i}\left\{ \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{a}+\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\right)a}-1}{i\left(\frac{\pi}{a}+\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\right)} - \frac{e^{-i\left(\frac{\pi}{a}-\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\right)a}-1}{i\left(\frac{\pi}{a}-\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\right)}\right\} =$$
$$= \frac{E_0}{2i}\left\{ -\frac{e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\sin\theta\cdot a}+1}{i\left(\frac{\pi}{a}+\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\right)} + \frac{e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\sin\theta\cdot a}+1}{i\left(\frac{\pi}{a}-\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\right)}\right\} =$$
$$= \frac{E_0}{2} e^{\frac{\pi i}{\lambda}a\sin\theta}\left\{ \frac{e^{\frac{\pi i a}{\lambda}\sin\theta}+e^{\frac{-\pi i a}{\lambda}\sin\theta}}{i\left(\frac{\pi}{a}+\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\right)} + \frac{e^{\frac{\pi i a}{\lambda}\sin\theta}+e^{\frac{-\pi i a}{\lambda}\sin\theta}}{i\left(\frac{\pi}{a}-\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\right)}\right\} =$$
$$= E_0 e^{\frac{\pi i}{\lambda}a\sin\theta}\cos\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)\left\{-\frac{\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta}{\frac{\pi^2}{a^2}-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin^2\theta}\right\}$$

$$I = |E|^2 = E_0^2\cos^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)\frac{\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin^2\theta}{\left(\frac{\pi^2\lambda^2}{a^2\lambda^2}-\frac{4\pi^2\cdot a^2}{a^2\lambda^2}\sin^2\theta\right)^2}$$

$$E_0\int\limits_0^a e^{ikx\sin\theta}\sin\frac{\pi x}{a}dx = \frac{E_0}{2i}\int\limits_0^a e^{ikx\sin\theta}\left\{e^{\frac{i\pi x}{a}} - e^{-\frac{i\pi x}{a}}\right\}dx =$$
$$= \frac{E_0}{2i}\int\limits_0^a \left\{\exp\left[ikx\sin\theta + i\frac{\pi x}{a}\right] - \exp\left[ikx\sin\theta - i\frac{\pi x}{a}\right]\right\}dx =$$
$$= \frac{E_0}{2i}\left\{\frac{e^{i\pi a\left(\frac{2\sin\theta}{\lambda}+\frac{1}{a}\right)}-1}{i\pi\left(\frac{2\sin\theta}{\lambda}+\frac{1}{a}\right)} - \frac{e^{i\pi a\left(\frac{2\sin\theta}{\lambda}-\frac{1}{a}\right)}-1}{i\pi\left(\frac{2\sin\theta}{\lambda}-\frac{1}{a}\right)}\right\} =$$
$$= \frac{E_0}{2}\left\{\frac{e^{\frac{i2\pi a}{\lambda}\sin\theta}+1}{\pi\left(\frac{2\sin\theta}{\lambda}+\frac{1}{a}\right)} - \frac{e^{\frac{i2\pi a}{\lambda}\sin\theta}+1}{\pi\left(\frac{2\sin\theta}{\lambda}-\frac{1}{a}\right)}\right\} =$$
$$= \frac{E_0}{2\pi}\left[\left(e^{\frac{i2\pi a}{\lambda}\sin\theta}+1\right)\cdot\left\{\frac{1}{\left(\frac{2\sin\theta}{\lambda}+\frac{1}{a}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{2\sin\theta}{\lambda}-\frac{1}{a}\right)}\right\}\right] =$$
$$= \frac{2E_0}{\pi a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{4\sin^2\theta}{\lambda^2}-\frac{1}{a^2}\right)}\cdot e^{\frac{i\pi a}{\lambda}\sin\theta}\cdot\frac{e^{\frac{i\pi a}{\lambda}\sin\theta}+e^{\frac{-i\pi a}{\lambda}\sin\theta}}{2} =$$
$$= \frac{2E_0}{\frac{4\pi a}{a^2}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{\lambda^2}-\frac{1}{4}\right)}\cdot e^{\frac{i\pi a}{\lambda}\sin\theta}\cos\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)$$

$$I = ||^2 = \frac{E_0^2 a^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi a}{\lambda}\theta}{\left(\frac{a^2\theta^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4}\right)^2}$$

$I\left(\theta\right) \simeq I_0 \frac{\cos^2(\pi a\theta/\lambda)}{(1/4 - a^2\theta^2/\lambda^2)^2}$.

2. (Задача 3.100.) Определить дифракционную картину при нормальном падении света на фазовую синусоидальную решетку конечной апертуры.

Решение Распределение поля на экране определяется с помощью интеграла Кирхгофа в приближении Фраунгофера

$$E(\varphi) = \frac{E_0}{b}\int\limits_0^b T(x)\cdot\exp[-ikx\sin(\varphi)]dx,$$

где $T(x) = \exp[im\sin(\omega_0 x)/2]$. Используя представление функции $T(x)$ в виде ряда из задачи 3.84, (это представление называется формулой Якоби-Ангера, см. Г.Бейтмен и А. Эрдей, Высшие трансцендентные функции, ч. II. М:Наука, 1974, стр.15) и имеет вид:

$$e^{ia\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a)e^{in\varphi}$$

запишем интеграл в виде

$$E(\varphi) = \frac{E_0}{b}\int\limits_0^b \exp[-ikx\sin(\varphi)]\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right)\exp[in\omega_0 x]dx,$$

или преобразуя это выражение, получим

$$E(\varphi) = \frac{E_0}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right)\int\limits_0^b \exp\left[-ix(k\sin(\varphi) - n\omega_0)\right]dx.$$

Вычисляя этот интеграл, получим

$$E(\varphi) = \frac{E_0}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right)\frac{\exp\left[-ib(k\sin(\varphi) - n\omega_0)\right] - 1}{-i(k\sin\varphi - n\omega_0)}$$

Учитывая, что интенсивность пропорциональна квадрату модуля поля, получим

$$I(\varphi) = E(\varphi)E^*(\varphi) =$$
$$= I_0\sum_{n,p=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right)J_p\left(\frac{m}{2}\right)e^{-i\psi_n}e^{i\psi_p}\frac{(e^{-i\psi_n} - e^{i\psi_n})(e^{i\psi_p} - e^{-i\psi_p})}{-4\psi_n\psi_p},$$

где $\psi_n = b(k\sin\varphi - n\omega_0)/2$. Следует отметить, что $bn\omega_0/2 = Nn\pi, \quad bp\omega_0/2 = Np\pi$, N-целое число.

Подставив эти значения, приведем двойную сумму к виду

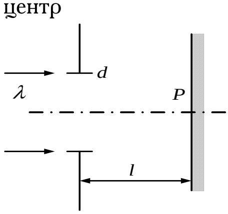
$$I(\varphi) = E(\varphi)E^*(\varphi) =$$
$$= -I_0 \sum_{n,p=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) J_p\left(\frac{m}{2}\right) e^{i\pi N(p-n)} \operatorname{sinc}(\psi_p) \operatorname{sinc}(\psi_n),$$

Поскольку разность аргументов у функций sinc, входящих в сумму при $n \neq p$ равна $N(n-p)\pi$, то даже при $n - p = \pm 1$ разность аргументов не меньше $N\pi$, а это значит, что максимум одной функции находится в области N — го максимума второй функции, величина которого порядка $1/(N\pi)$, а значит их произведением можно пренебречь. Таким образом сумма превращается в одинарную, поскольку значимо отличны от нуля только члены с равными аргументами. Тогда

$$I_\varphi = I_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2\left(\frac{m}{2}\right) \operatorname{sinc}^2 \frac{b\,(k\sin\varphi - n\omega_0)}{2},$$

где J_n — функция Бесселя. *Указание*. Функцию пропускания решетки $T(x)$ взять в виде $T(x) = \exp\left[im\sin(\omega_0 x)/2\right]$. Решетка помещена в щель шириной b; воспользоваться также разложением для $\exp(ia\sin\omega_0 x)$, приведенном в указании к задаче 3.84.

3. (Задача 3.104.) На экран с отверстием диаметром d падает свет от Солнца, пропущенный через светофильтр (длина волны — λ). На втором экране точка P — центр



светлого кружка. Расстояние между экранами ℓ. С целью компенсировать разность фаз, создаваемую разностью хода от разных точек отверстия до точки P экрана, в отверстие поместили прозрачное покрытие с толщиной, плавно спадающей от оси к периферии. Пренебрегая возникшим при этом отражением от покрытия, оценить, во сколько раз увеличилась освещенность в точке P. Угловой размер Солнца $\alpha_\odot$ невелик.

Решение $I_2 \simeq I_1 \left(\frac{d}{\ell}\right)^2 \left(\frac{1+\ell\lambda/d^2}{d_\odot+\lambda/d}\right)^2 \simeq I_1 \left(\frac{d}{\alpha_\odot \ell}\right)^2$.

4. (Задача 3.105.) Во сколько раз возрастает освещенность, если свет от Солнца концентрируется линзой с относительным отверстием $d/f = 0,2$?

Решение $I_n \simeq I_0 \left(\frac{d}{\alpha_\odot f}\right)^2 \simeq 1600\, I_0$.