# Матричные уравнения

## Задача 1 (повторение)

Решить $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1, \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+2x_2-2x_3=1. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{array}{rrr|rl}
4 & 2 & -1 & 1 & A1 \\
5 & 3 & -2 & 2 & A2 \\
3 & 2 & -2 & 1 & A3 \\
1 & 1 & -1 & 1 & A4 = A2 - A1 \\
0 & -2 & 3 & -3 & A5 = A1 - 4A1 \\
0 & -1 & 1 & -2 & A6 = A3 - 3A4 \\
0 & 0 & 3 & 3 & A7 = A5 - 2A6 \\
0 & 0 & 1 & 1 & A8 = A7 : 3
\end{array}$$

← записали расширенную матрицу

Ступенчатая матрица:

$$\begin{array}{rrr|rl}
1 & 1 & -1 & 1 & B1 \\
0 & 1 & -1 & 2 & B2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & B3 \\
1 & 1 & 0 & 2 & B4 = B1 + B3 \\
0 & 1 & 0 & 3 & B5 = B2 + B3 \\
1 & 0 & 0 & -1 & B6 = B4 - B5
\end{array}$$

Разрешённая матрица: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ Проверка: $4\cdot(-1)+2\cdot 3-1 \overset{\checkmark}{=} 1$

Итого: умеем решать систему $Ax = b$, где

$A$ - матрица, $x$ - вектор, $b$ - вектор

## Задача №861

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

т.е. надо решить матричное уравнение $AX = B$, где

$A, X, B$ - матрицы.

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

по правилу умножения матриц имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Такие системы мы уже умеем решать!

$$\begin{array}{cc|cl} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & A1 \\ \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} & A2 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-4} & A3 = A2 - 3A1 \\ 0 & 1 & 2 & A4 = A3 : (-2) \\ 1 & 0 & -1 & A5 = A1 - 2A4 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cl} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{5} & A1 \\ \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{9} & A2 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-6} & A3 = A2 - 3A1 \\ 0 & 1 & 3 & A4 = A3 : (-2) \\ 1 & 0 & -1 & A5 = A1 - 2A4 \end{array}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{12} = -1 \\ x_{22} = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_{11} = -1 \\ x_{21} = 2 \end{cases}$

отличие ТОЛЬКО в правых частях, поэтому можем решать две системы одновременно

А именно:

$$\begin{array}{cc|ccl} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{5} & A1 \\ \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{9} & A2 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-4} & \cancel{-6} & A3 = A2 - 3A1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & A4 = A3 : (-2) \\ 1 & 0 & -1 & -1 & A5 = A1 - 2A4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_{11} = -1, \quad x_{12} = \cancel{5}\,-1 \\ x_{21} = 2, \quad x_{22} = \cancel{9}\,3 \end{array}$$

вот он ответ!

**Ответ:** $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

<u>Задача</u> Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

Обозначение: $E$

(в англ: $I$)

Identity matrix

<u>Решение:</u>

$$\begin{array}{ccc|ccc|l}
2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & A1 \\
3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & A2 \\
1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & A3 \\
0 & 3 & -5 & 1 & 0 & -2 & A4 = A1 - 2A3 \\
0 & 5 & -8 & 0 & 1 & -3 & A5 = A2 - 3A3 \\
0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 1 & A6 = A5 - 2A4 \\
0 & 0 & 1 & -5 & 3 & 1 & A7 = A4 + 3A6 \\
0 & -1 & 0 & 8 & -5 & -1 & A8 = A6 - 2A7 \\
1 & -1 & 0 & 10 & -6 & -1 & A9 = A3 - 2A7 \\
1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & A10 = A9 - A8
\end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \end{pmatrix}$

<u>Опр</u> <u>Обратная</u> матрица к $A$ - это такая матрица $A^{-1}$, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Алгоритм нахождения: $(A|E) \rightsquigarrow (E|A^{-1})$

Т.е. по сути мы решаем матричное ур-е $AX = E$.

<u>Задача</u> N 862 $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Имеем $X \cdot A = B$

$XAA^{-1} = BA^{-1}$

$XE = BA^{-1}$

$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ответ

подставляем

Находим $A^{-1}$:

$$\begin{array}{cc|cc|l}
3 & -2 & 1 & 0 & A1 \\
5 & -4 & 0 & 1 & A2 \\
-1 & 0 & -2 & 1 & A3 = A2 - 2A1 \\
0 & -2 & -5 & 3 & A4 = A1 + 3A3 \\
0 & 1 & 5/2 & -3/2 & A5 = A4 : (-2)
\end{array}
\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

__Задание__ Решите матричное ур-е

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 1 & 7 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

__Решение__

$$\begin{array}{ccc|ccc|l} 3 & 2 & -1 & 3 & 7 & 9 & A1 \\ 4 & 3 & -3 & 1 & 7 & 11 & A2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 2 & A3 \\ 0 & -1 & 5 & 9 & 7 & 3 & A4 = A1 - 3A3 \\ 0 & -1 & 5 & 9 & 7 & 3 & A5 = A2 - 4A3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & 7 & 5 & A6 = A3 + A4 \end{array}$$

— позволим себе вольность и зачёркнем строчку после визуального сравнения

$\Rightarrow$ Разрешённая матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 7 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -9 & -7 & -3 \end{array}\right)$$

вот эта матрица разрешённая

тут мы снова позволили себе вольность и в уме умножили A4 на (-1)

Таким образом имеем:

$$\begin{cases} x_{11} + 3x_{31} = 7 \\ x_{21} - 5x_{31} = -9 \end{cases}$$

выражаем главные переменные

$$\begin{cases} x_{11} = 7 - 3x_{31} \\ x_{21} = -9 + 5x_{31} \end{cases}, \quad x_{31} \in \mathbb{R}$$

И так для каждого столбца матрицы X:

$$\begin{cases} x_{12} = 7 - 3x_{32} \\ x_{22} = -7 + 5x_{32} \end{cases}, \quad x_{32} \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x_{13} = 5 - 3x_{33} \\ x_{23} = -3 + 5x_{33} \end{cases}, \quad x_{33} \in \mathbb{R}$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 7 - 3x_{31} & 7 - 3x_{32} & 5 - 3x_{33} \\ -9 + 5x_{31} & -7 + 5x_{32} & -3 + 5x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = , \quad x_{31}, x_{32}, x_{33} \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ -9 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

не думайте об этом

На дом можно задать (или обсудить в классе)

**Задача 1**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Какого размера $X$? $X \in M_{3\times 2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 = A2 + A3 \\ A5 = A3 - 3A1 \\ A6 = A5 - 5A4 \\ A7 = A1 + A6 \\ A8 = A7 + 2A4 \end{array}$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**Задача 2** №868

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ обратной матрицы не сущ-ет

Что же делать? $XA = B$

чайник

Свести задачу к уже решённой!

$$(XA)^T = B^T$$

$$A^T X^T = B^T$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}, \quad X^T = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$(A^T | B^T) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 9 \\ 6 & 8 & 4 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad 3x_{11} + 4x_{12} = 2 \quad$ и $\quad 3x_{21} + 4x_{22} = 9$

$x_{11} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x_{12} \qquad x_{21} = 9/3 - 4/3\, x_{22} = 3 - 4/3\, x_{22}$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 - 4/3\, x_{12} & x_{12} \\ 3 - 4/3\, x_{22} & x_{22} \end{pmatrix}$$