Занятие 1

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением *с разделяющимися переменными* называют уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y). \tag{1.1}$$

С такими уравнениями вы уже не раз встречались. Мы лишь напомним, как они решаются.

Прежде всего заметим, что если в какой-либо точке $y = c_0$ функция $g(y)$ обращается в ноль, то функция $y(x) \equiv c_0$ является решением уравнения (1.1), т.к обращает его в тождество.

Чтобы найти другие решения, представим производную $y'(x)$ как отношение дифференциалов: $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, и «разделим переменные», приведя уравнение (1.1) к виду

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Проинтегрируем правую и левую части уравнения:

$$G(y) = F(x) + C. \tag{1.2}$$

Здесь $G(y)$ и $F(x)$ — *некоторые* первообразные от функций $\dfrac{1}{g(y)}$ и $f(x)$ соответственно, а C означает *произвольную* постоянную.

Соотношение (1.2) определяет зависимость между переменными x и y. Заметим, что разрешить это соотношение относительно переменной y зачастую бывает технически сложно, да и не всегда целесообразно.

Пример 1. Решим уравнение $y' = x \cdot (1 + y^2)$, следуя описанному выше алгоритму:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = x \cdot dx$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C \quad \square$$

Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными достаточно прост, что позволит нам, не отвлекаясь на технические проблемы, обсудить основные вопросы, возникающие при решении любого дифференциального уравнения.

И самый первый вопрос — что такое «решение дифференциального уравнения»? Дадим определение.

Решением дифференциального уравнения на интервале $(a; b)$ называется непрерывно дифференцируемая на $(a; b)$ функция $y = \varphi(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

Почему так важно указывать интервал, на котором функция $\varphi(x)$ является решением? Рассмотрим примеры.

Пример 2. Функция $y(x) = \dfrac{1}{x-2}$ является решением уравнения

$$y' = -y^2 \tag{1.3}$$

на интервале $(2; +\infty)$, но не является решением ни на каком более широком интервале, так как она не определена в точке $x = 2$.

Эта же функция является решением уравнения (1.3) на интервале $(-\infty; 2)$. Но правильнее было бы говорить о двух функциях, являющихся различными решениями уравнения: $y_1(x) = \dfrac{1}{x-2}$ с областью определения $(-\infty; 2)$ и $y_2(x) = \dfrac{1}{x-2}$ с областью определения $(2; +\infty)$. $\square$

Пример 3. Функция $y = \sin x$ является решением уравнения

$$y' = \sqrt{1-y^2} \tag{1.4}$$

на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, однако не является решением на более широком интервале, хотя и определена для любых значений переменной x.

Действительно, подставив функцию $y = \sin x$ и ее производную в уравнение (1.4), мы получим равенство $\cos x = |\cos x|$, которое является тождеством на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Это равенство подскажет нам, на каких интервалах, кроме указанного, функция $y = \sin x$ также является решением. □

Зачастую требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Например, в точке $x = x_0$ решение уравнения $y'(x) = f(x; y)$ должно принимать заданное значение y_0, то есть $y(x_0) = y_0$. Задача отыскания такого решения называется *задачей Коши*.

Поскольку в физических задачах независимая переменная, как правило, ассоциируется со временем, а решение ищут при $x \geqslant x_0$, то условия, поставленные в точке $x = x_0$, традиционно называются *начальными данными*.

Общим решением уравнения $y'(x) = f(x; y)$ называется функция $y = \varphi(x; C)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. при любом значении C функция $y(x) = \varphi(x, C)$ является решением этого уравнения,

2. если задача Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$ имеет решение в некоторой окрестности точки x_0, то, *как правило*, можно указать такое значение C_0, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет условию Коши $y(x_0) = y_0$.

Это позволяет сформулировать алгоритм решения задачи Коши, который состоит в том, чтобы:

1. найти общее решения дифференциального уравнения,

2. определить значение параметра C из условия $\varphi(x_0, C) = y_0$.

Вернемся к примеру 2 и решим для уравнения $y' = -y^2$ задачу Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$.

1. Проинтегрировав уравнение, найдем его общее решение: $y = \dfrac{1}{x + C}$.

2. Определим значение C из условия $y_0 = \dfrac{1}{x_0 + C}$. Это возможно, если $y_0 \neq 0$. Тогда $C = \dfrac{1}{y_0} - x_0$.

Например, поставим задачу Коши $\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$

Значение C в формуле общего решения равно -2, то есть решением является функция $y = \dfrac{1}{x - 2}$, а точнее, та ее ветвь, которая определена в окрестности точки $x_0 = 1$.

Теперь рассмотрим для уравнения $y' = -y^2$ задачу Коши с начальными данными $y(x_0) = 0$, то есть $y_0 = 0$. Ее решением, очевидно, будет функция $y \equiv 0$ (мы получили ее на первом шаге разделения переменных). Однако это решение не может быть получено из формулы общего решения $y = \dfrac{1}{x + C}$.

Таким образом, несмотря на свое название, формула общего решения не всегда описывает все семейство решений уравнения.

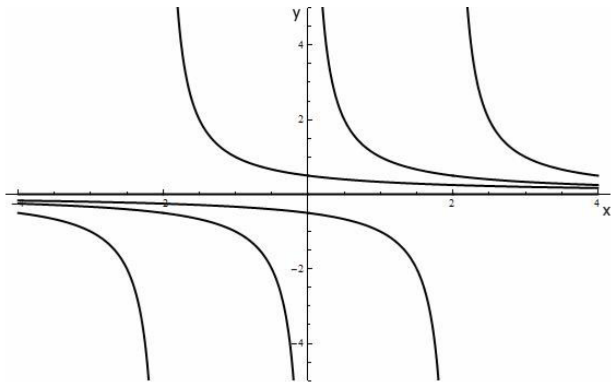


Рис. 1.1. Графики решений уравнения $y' = -y^2$

На рис. 1.1 изображены графики решений уравнения $y' = -y^2$. Они заполняют всю плоскость xOy, причем через каждую точку $(x_0; y_0)$ проходит ровно одна линия, и прямая $y = 0$ в этом смысле ничем не отличается от других линий.

Как правило, интегрируя дифференциальное уравнение, мы получаем соотношение $\Phi(x; y; C) = 0$, определяющее зависимость y от x неявным образом. В таком случае говорят, что получен *общий интеграл* дифференциального уравнения.

Обратимся к примеру 3. Общий интеграл уравнения $y' = \sqrt{1-y^2}$ дается формулой $\arcsin y = x + C$. Это соотношение легко разрешить относительно переменной x, что позволяет получить графики всех решений уравнения $y' = \sqrt{1-y^2}$ из графика функции $x = \arcsin y$ параллельным переносом вдоль оси Ox (рис. 1.2).

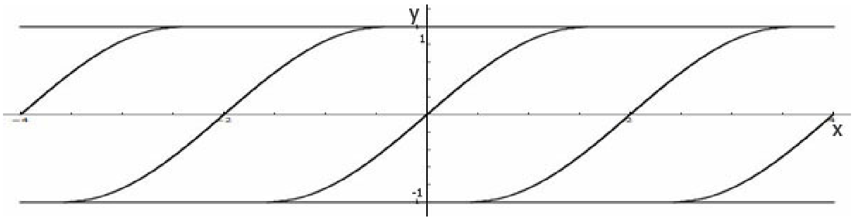


Рис. 1.2. Графики решений уравнения $y' = \sqrt{1-y^2}$

Однако уравнение $y' = \sqrt{1-y^2}$ имеет еще два решения: $y_1(x) \equiv -1$ и $y_2(x) \equiv 1$, которые невозможно получить из общего интеграла ни при каком значении C. Добавим прямые $y = -1$ и $y = 1$ к картине решений уравнения. Как видим, эти прямые в каждой своей точке касаются одной из линий семейства $\arcsin y = x + C$, то есть являются *огибающими* указанного семейства.

Другими словами, поставив для уравнения $y' = \sqrt{1-y^2}$ задачу Коши с начальными данными $y(x_0) = -1$ или $y(x_0) = 1$, мы обнаружим, что решение этой задачи Коши не единственно. Например, условию $y(0) = -1$ удовлетворяют как решение $y(x) = -\cos x$, так и решение $y(x) \equiv -1$.

Решение уравнения $y' = f(x; y)$, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением.* Таким образом, уравнение $y' = \sqrt{1-y^2}$ имеет два особых решения: $y_1(x) \equiv -1$ и $y_2(x) \equiv 1$.

Так как исторически многие дифференциальные уравнения были связаны не только с физическими, но и с геометрическими задачами, то в теории дифференциальных уравнений прочно утвердилась «геометрическая» лексика. Так, задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x;y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

можно понимать следующим образом: на плоскости xOy требуется найти кривую, которая проходит через точку $(x_0; y_0)$ и в каждой своей точке $(x;y)$ имеет касательную, угловой коэффициент которой равен $f(x;y)$. Такую кривую принято называть *интегральной линией* дифференциального уравнения.

Решение задачи Коши и его геометрический образ — интегральная линия — настолько тесно связаны между собой, что вместо фразы «функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши (1.5)» часто говорят «решение $y = y(x)$ проходит через точку $(x_0; y_0)$».

В геометрических задачах, где переменные x и y равноправны, понятие интегральной линии дифференциального уравнения можно рассматривать в более широком смысле.

Пример 4. Рассмотрим семейство окружностей $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = R^2$. Ее угловой коэффициент по отношению к оси Ox равен $(-\frac{x_0}{y_0})$, что приводит нас к дифференциальному уравнению $y' = -\frac{x}{y}$. Решениями этого уравнения несомненно будут функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, каждая из которых описывает лишь половину окружности.

В точках $(x; 0)$ уравнение $y' = -\frac{x}{y}$ не определяет значение производной y', то есть не определяет угловой коэффициент интегральной кривой $y = y(x)$ по отношению к оси Ox. С геометрической точки зрения в этом случае совершенно естественно перейти к «перевернутому» уравнению $x' = -\frac{y}{x}$ и рассмотреть угловой коэффициент кривой по отношению к оси Oy. В точках $(x; 0)$, где $x \neq 0$, угловой коэффициент x' равен нулю, то есть касательная к кривой $x = x(y)$ параллельна оси Oy.

И только в точке $(0; 0)$ мы не можем определить ни значение y', ни значение x'. Такие точки называются *особыми* точками дифференциального уравнения.

Чтобы обеспечить «равноправие» переменных x и y, вместе с уравнением $y' = -\dfrac{x}{y}$ нам пришлось рассматривать уравнение $x' = -\dfrac{y}{x}$. Однако проще всего сразу записать уравнение в «симметричном» виде

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \quad \text{или} \quad x\,dx + y\,dy = 0,$$

и дать ему следующую интерпретацию: требуется найти на плоскости кривые, которые в каждой своей точке $(x; y)$ имеют касательный вектор $(dx; dy)$, коллинеарный вектору $(y; -x)$ или, что то же самое, перпендикулярный вектору $(x; y)$.

Эти кривые мы также будем называть интегральными линиями дифференциального уравнения. Таким образом, интегральными линиями уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$ являются целые окружности $x^2 + y^2 = R^2$. $\square$

В процессе решения дифференциального уравнения мы подвергли его различным преобразованиям:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \to \quad x' = -\frac{y}{x} \quad \to \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \quad \to \quad x\,dx + y\,dy = 0.$$

Возникает естественный вопрос: можно ли считать, что мы имеем дело с одним и тем же уравнением в разных видах или это разные уравнения?

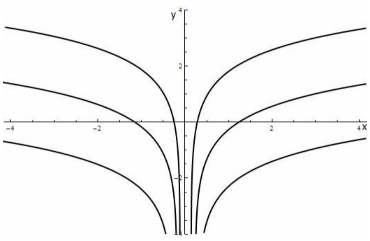
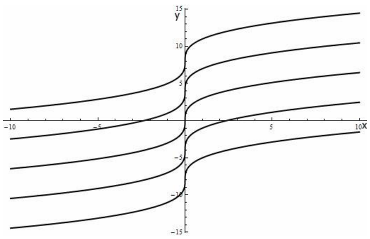
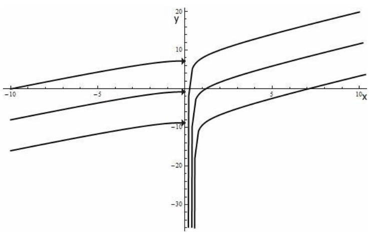
Ответ на этот вопрос, как правило, содержится в постановке задачи. Например, если нужно найти *решения* дифференциального уравнения $y' = 1/x$, то функцию $x \equiv 0$ нельзя считать решением, если же нужно описать *интегральные линии* этого уравнения, то $x \equiv 0$ является одной из них. Мы не будем далее акцентировать внимание на этих различиях, поскольку из контекста всегда понятно, что имеется в виду.

Если в уравнении $y' = f(x)$ правая часть $f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$, то общее решение дифференциального уравнения на этом интервале имеет вид $y = F(x) + C$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$. Задача Коши с начальными данными $(x_0; y_0)$, где $x_0 \in (a; b)$, имеет решение при любом $y_0 \in \mathbb{R}$ и записывается формулой

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + y_0.$$

Картина интегральных линий остается инвариантной при параллельном переносе вдоль оси Oy.

Для иллюстрации этих утверждений рассмотрим три типичных примера (см. таблицу).

Дифф. уравнение	Общее решение	Решение задачи Коши $y(x_0) = y_0$	Вид интегр. кривых
$y' = 1/x$	$y = \ln\|x\| + C$	$y = \ln\|x/x_0\| + y_0$	
$y' = x^{-2/3}$	$y = 3x^{1/3} + C$	$y = 3x^{1/3} - 3x_0^{1/3} + y_0$	
$y' = e^{1/x}$	$y = \int\limits_{1}^{x} e^{\frac{1}{\xi}} d\xi + C$	$y = \int\limits_{x_0}^{x} e^{1/\xi} d\xi + y_0$	

В первых двух примерах прямая $x = 0$ является интегральной линией, но в первом случае она не касается других интегральных линий, а во втором — касается. В третьем примере прямая $x = 0$ не является интегральной линией.

Теперь рассмотрим уравнения вида $y' = f(y)$ с непрерывной на интервале $(a; b)$ функцией $f(y)$. Как мы уже видели ранее, если $f(c) = 0$ при каком-то $c \in (a; b)$, то функция $y(x) \equiv c$ является решением уравнения $y' = f(y)$. Однако прямая $y = c$ может касаться других интегральных линий (рис. 1.2), а может и не касаться (рис. 1.1). Напомним, что решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым.

Как же выяснить, является решение $y(x) \equiv c$ особым? Рассмотрим полосу $x \in \mathbb{R}$, $y \in (a; b)$. Через каждую точку $(x_0; y_0)$ этой полосы $(y \neq c)$ проходит интегральная линия

$$x = x_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau)}, \tag{1.6}$$

а все остальные интегральные линии в этой полосе получаются из нее параллельным переносом вдоль оси Ox.

Теперь посмотрим, как ведет себя функция $x = x(y)$, заданная формулой (1.6), при $y \to c$, предполагая, что у точки $y = c$ есть некоторая окрестность, в которой нет других нулей функции $f(y)$, кроме $y = c$.

Допустим, интеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau)}$ расходится в точке c. Поскольку непрерывная функция $f(\tau)$ сохраняет знак в правой и левой полуокрестностях точки c, то функция (1.6) монотонна и неограничена, и значит $x(y) \to \infty$ при $y \to c \pm 0$.

Если же интеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau)}$ сходится в точке c, это означает, что $x(y)$ имеет конечный предел $x_1 = x_0 + \int\limits_{y_0}^{c} \frac{d\tau}{f(\tau)}$ при $y \to c$. Другими словами, через точку $(x_1; c)$ проходит две интегральных линии: кривая (1.6) и прямая $y = c$. Поскольку картина интегральных линий не меняется при параллельном переносе вдоль оси Ox, то в каждой точке прямой $y = c$ нарушается единственность решения задачи Коши.

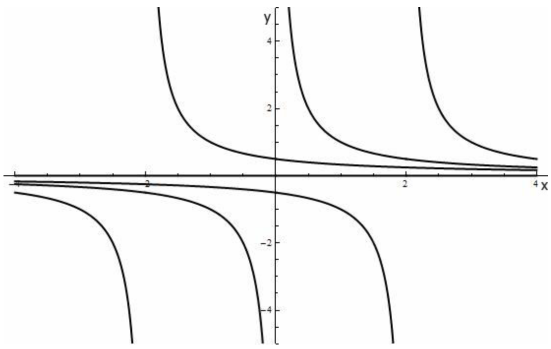
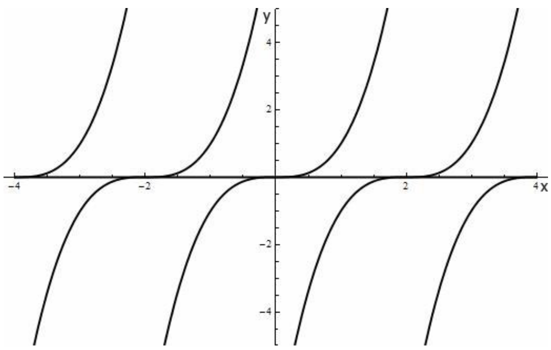
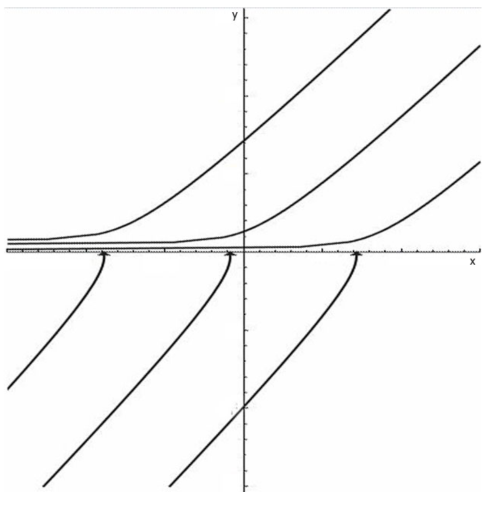
Таким образом, мы получили простой критерий: если $f(c) = 0$, то функция $y \equiv c$ является особым решением уравнения $y' = f(y)$, если и только если интеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau)}$ сходится в точке $y = c$.

Напомним, что вопрос о сходимости решается легко, если при $y \to c$ функция $f(y) \sim k \cdot (y - c)^p$, а именно:

если $p \geqslant 1$, то интеграл расходится — решение $y(x) \equiv c$ не особое;

если $0 < p < 1$, то интеграл сходится — решение $y(x) \equiv c$ особое.

Рассмотрим три характерных примера (см. таблицу).

Дифф. уравнение	Общий интеграл	Вид интегр. кривых
$y' = -y^2$	$y = \dfrac{1}{x + C}$, $y \equiv 0$	
$y' = 3y^{2/3}$	$y = (x + C)^3$, $y \equiv 0$	
$y' = e^{-1/y}$	$x = \int\limits_{1}^{y} e^{1/\tau} d\tau + C$	

В первом примере функция $y \equiv 0$ является не особым решением дифференциального уравнения, а во втором — особым. В третьем примере функция $y \equiv 0$ не является решением (при $y = 0$ уравнение не определяет направления интегральных линий).

Наконец, обсудим вопрос о поведении интегральных кривых «в целом». Дело в том, что классические теоремы существования и единственности решения задачи Коши, о которых будет идти речь на пятом занятии, носят существенно локальный характер, то есть гарантируют существование и единственность решения только в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$. А вопрос о поведении интегральных кривых на всей области определения дифференциального уравнения достаточно сложен.

Так, формула $y = (x + C)^3$ дает общее решение уравнения $y' = 3y^{2/3}$. Однако решением задачи Коши $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ следует считать функцию $y = x^3$ с областью определения $(0; +\infty)$, поскольку расширение интервала приводит к потере единственности решения. Так, функции $y_1(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, и $y_2(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^3, x \geqslant 0 \end{cases}$ являются решением дифференциального уравнения и удовлетворяет одним и тем же условиям Коши $y(1) = 1$.

Для уравнения $y' = f(y)$ с непрерывной на интервале $(a; b)$ функцией $f(y)$ мы можем описать максимальную область существования решения, проходящего через точку $(x_0; y_0)$. Такое решение называется *непродолжаемым* или *максимальным.*

Мы уже видели, что если на интервале $(a; b)$ функция $f(y)$ не имеет нулей, то каждая интегральная линия может быть задана соотношением (1.6). Так как функция $f(y)$ непрерывна и не обращается в ноль на $(a; b)$, то она знакопостоянна. Допустим для определенности, что $f(y) > 0$ на $(a; b)$. Тогда функция $x = x(y)$, заданная формулой (1.6), монотонно возрастает, а следовательно, монотонно возрастает и обратная ей функция $y = y(x)$, являющаяся решением дифференциального уравнения.

Поведение этого решения при $x \to \pm\infty$ определяется сходимостью или расходимостью интеграла $\int\limits_{y_0}^{\pm\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)}$. Так, если интеграл сходится при $y \to +\infty$, то это означает, что переменная x имеет конечный предел x^*, следовательно решение $y = y(x)$ имеет вертикальную асимптоту. Если же интеграл расходится, то $x \to +\infty$, и вертикальной асимптоты нет — решение существует на луче $(x_0; +\infty)$.

Аналогично решается вопрос при $y \to -\infty$.

Пример 5. Исследуя сходимость соответствующих интегралов, выясним, будет ли решение задачи Коши $\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ существовать на всей вещественной прямой.

Интегралы $\int\limits_{0}^{\pm\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^2}$ сходятся, поскольку $\frac{1}{1+\tau^2} \sim \frac{1}{\tau^2}$ при $\tau \to \pm\infty$. Следовательно, областью определения непродолжаемого решения является ограниченный интервал $(-x^*; x^*)$ (в силу нечетности функции $\int\limits_{0}^{y} \frac{d\tau}{1+\tau^2}$ этот интервал симметричен относительно точки $x = 0$).

Мы можем также получить решение этой задачи Коши в явном виде, проинтегрировав уравнение. Из общего интеграла $\operatorname{arctg} y = x + C$ выделим решение, удовлетворяющее начальному условию: $\operatorname{arctg} 0 = 0 + C$. Отсюда $C = 0$, и решение задачи Коши дается формулой $\operatorname{arctg} y = x$, или $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Интегральная линия $y = \operatorname{tg} x$, проходящая через точку $(0; 0)$, имеет две вертикальных асимптоты. Остальные интегральные линии получаются из нее параллельным переносом вдоль оси Ox (рис. 1.3). Таким образом, несмотря на то, что правая часть уравнения $y' = 1 + y^2$ непрерывна при всех значениях $(x; y)$, каждое решение этого уравнения существует только на ограниченном интервале. $\square$

Вернемся к уравнению $y' = f(x) \cdot g(y)$.

Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны при $x \in (a; b)$ и

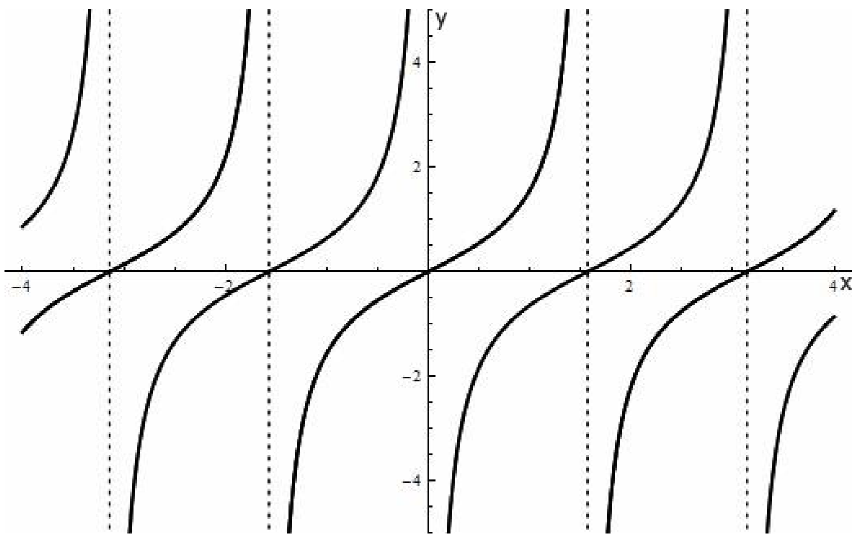


Рис. 1.3. Интегральные линии в примере 5.

$y \in (c; d)$, причем $g(y)$ не обращается в нуль на $(c; d)$, то через каждую точку $(x_0; y_0)$ прямоугольника $a < x < b$; $c < y < d$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения, и уравнение этой кривой имеет вид

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi.$$

Пример 6. Нарисовать картину интегральных линий уравнения

$$y\,' = -\frac{x(y^2-1)}{y(x^2-1)} = -\frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{y^2-1}{y}.$$

Уравнение не определяет направление, касательное к интегральной линии, в пяти точках: $(0; 0)$, $(\pm 1; \pm 1)$. Это особые точки уравнения.

Заметим, что прямые $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$ с выколотыми точками $(\pm 1; \pm 1)$ являются интегральными линиями.

Перепишем уравнение в виде $\dfrac{x\,dx}{x^2-1} + \dfrac{y\,dy}{y^2-1} = 0$ и проинтегрируем его:

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln|y^2-1| = C_1$$

$$\ln|(x^2-1)\cdot(y^2-1)| = C_2$$

$$|(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1)| = e^{C_2} = C_3, \quad C_3 > 0$$

Функция $\Phi(x; y) = (x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1)$ должна быть непрерывна вдоль решения, так как решение $y = y(x)$ непрерывно, и следовательно, должна принимать либо значение C_3, либо значение $-C_3$, но не может менять знак. Поэтому в последнем равенстве мы можем освободиться от модуля, записав общий интеграл в виде

$$(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1) = C, \quad C \neq 0.$$

Заметим, что прямые $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$ также описываются этой формулой, если отказаться от требования $C \neq 0$. Таким образом, все интегральные линии описываются формулой

$$(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1) = C,$$

где C — произвольное число.

Такого рода преобразования общего интеграла к более простому виду используются довольно часто. При этом возникающие константы C_1, C_2, C_3 как правило обозначаются одной и той же буквой C. В дальнейшем мы будем поступать так же, не вдаваясь в подробные разъяснения.

Теперь, когда мы получили простую формулу общего интеграла, воспользуемся современными компьютерными программами, чтобы изобразить картину интегральных линий (рис. 1.4).

В «докомпьютерную» эру мы получили бы эту картину, применяя аппарат математического анализа. Попробуйте и вы обосновать те особенности, которые видны на рисунке: вблизи особой точки $(0; 0)$ интегральные кривые похожи на окружности, а вблизи остальных особых точек — на гиперболы, также обоснуйте наличие вертикальных и горизонтальных асимптот. $\square$

В заключение рассмотрим поведение «в целом» интегральных кривых уравнения $y' = \dfrac{g(y)}{f(x)}$ при следующих условиях: функции $f(x)$ и

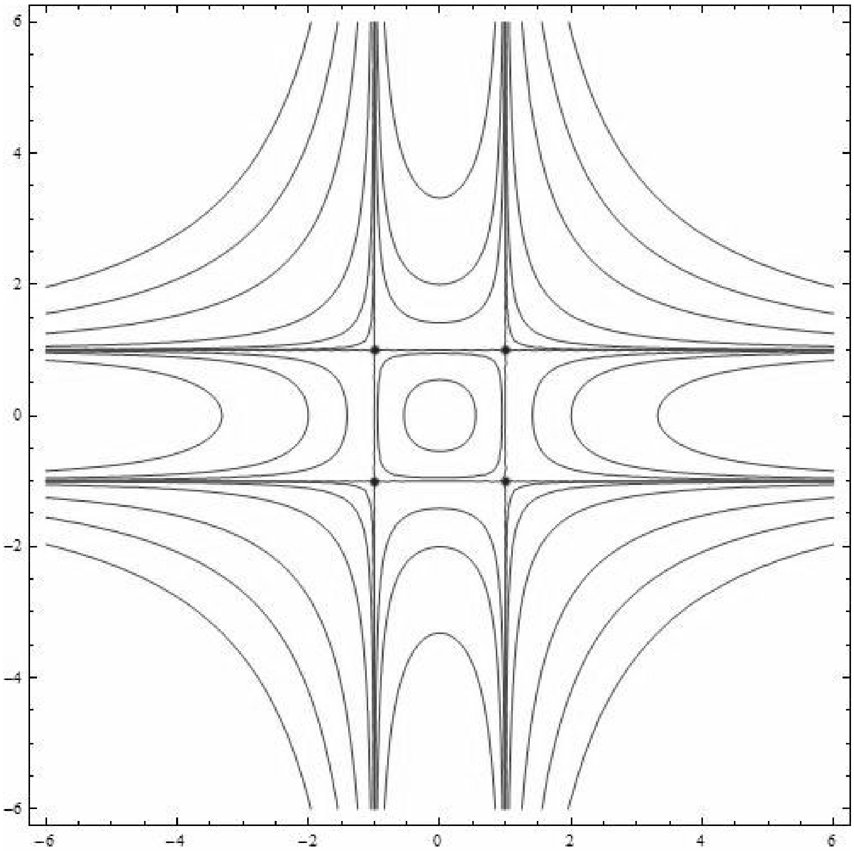
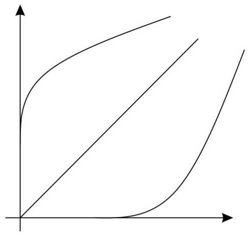
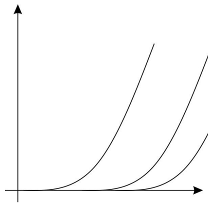
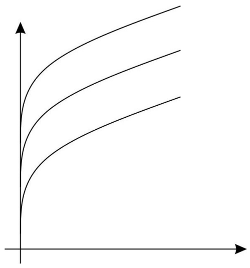
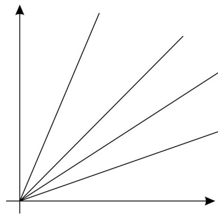


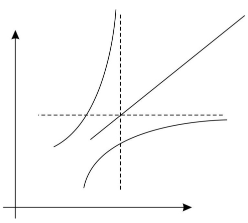
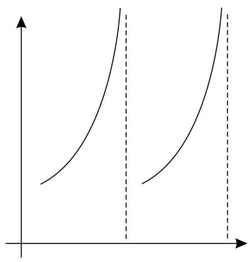
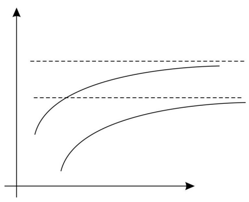
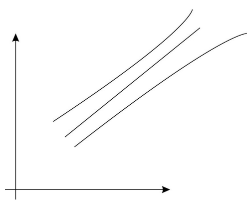
Рис. 1.4. Интегральные линии в примере 6.

$g(y)$ определены и непрерывны при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, и $f(x) > 0$, $g(y) > 0$ при $x > 0$, $y > 0$. Заметим, что при этих условиях через каждую точку области $\{x > 0; y > 0\}$ проходит единственная интегральная кривая, и наклон касательной в этой точке положителен, то есть каждое решение $y = y(x)$ является монотонно возрастающим.

Точка $(0; 0)$ является единственной особой точкой уравнения. Поведение интегральных линий в окрестности этой точки определяется сходимостью или расходимостью интегралов $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}$ и $G(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{g(\tau)}$ в нуле (см. таблицу)

$G(y) \diagdown F(x)$	сходится	расходится
сходится		
расходится		

Поведение интегральных линий при $x \to +\infty$ или $y \to +\infty$ определяется сходимостью или расходимостью интегралов $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}$ и $G(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{g(\tau)}$ на бесконечности (см. таблицу)

$G(y) \diagdown F(x)$	сходится	расходится
сходится		
расходится		

Получается 16 комбинаций, и любая из них возможна. Например, для уравнения $y' = \dfrac{y^2 + \sqrt{y}}{x^2}$ интеграл $F(x)$ расходится при $x \to +0$ и сходится при $x \to +\infty$, а интеграл $G(y)$ сходится при $y \to +0$ и при $y \to +\infty$.