Теория игр в топологии

Содержание

Theorem 1.1.

Если $BM(X, M)$ β-благоприятна, то M тощее.

Пусть s выигрышная стратегия β. Положим $\mathcal{B}_{-1} = \{X\}$;
Построим последовательность семейств открытых множеств

$$\mathcal{B}_{-1}, \mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \ldots$$

Так что

1. $\mathcal{B}_n$ дизьюнктные семейства;
2. $\overline{\bigcup \mathcal{A}_n} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_n} = X$;
3. $\mathcal{B}_n$ вписанно в $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}_{n+1}$ вписанно в $\mathcal{B}_n$: заданы отображения $\varphi_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_{n-1}$, $\psi_n : \mathcal{B}_n \to \mathcal{A}_n$ таким образом, что
   (a) если $U_n \in \mathcal{A}_n$, то $U_n \subset \varphi_n(U_n) \in \mathcal{B}_{n-1}$;
   (b) если $V_n \in \mathcal{B}_n$, то $V_n \subset \psi_n(V_n) \in \mathcal{A}_n$.
4. пусть
   (a) $\mathfrak{A}_n = \{(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n) : U_i \in \mathcal{A}_i$ для $i \leq n$, $V_i \in \mathcal{B}_i$ для $i < n$, $\varphi_i(U_i) = V_{i-1}$ для $0 < i \leq n$, $\psi_i(V_i) = U_i$ для $i < n\ \} =$ $\{(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n) : (U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}) \in \mathfrak{B}_{n-1}$ и $\varphi_n(U_n) = V_{n-1}\ \}$;
   (b) $\mathfrak{B}_n = \{(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n, V_n) :$ $(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n) \in \mathfrak{A}_n$ и $\psi_n(V_n) = U_n\ \}$;

   Тогда $s(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n) = V_n$ для $(U_0, V_0, U_1, ..., V_{n-1}, U_n, V_n) \in \mathfrak{B}_n$.

Доказательство.

Обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x_0, x_1, \dots x_m) & \bar{y} &= (y_0, y_1, \dots y_l) \\ \bar{x}^\frown\bar{y} &= (x_0, x_1, \dots x_m, y_0, y_1, \dots y_l) & \bar{x}^\frown x &= (x_0, x_1, \dots x_m, x) \\ \mathcal{A}_0^* &= \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0^* &= \mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0 \\ \mathcal{A}_n^* &= \mathcal{B}_{n-1}^* \times \mathcal{A}_n & \mathcal{B}_n^* &= \mathcal{A}_n^* \times \mathcal{B}_n \end{aligned}$$

1. $\mathcal{B}_n$ дизьюнктные семейства;
2. $\overline{\bigcup \mathcal{A}_n} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_n} = X$;
3. Заданы отображения $\varphi_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_{n-1}$, $\psi_n : \mathcal{B}_n \to \mathcal{A}_n$ таким образом, что
   (a) если $U_n \in \mathcal{A}_n$, то $U_n \subset \varphi_n(U_n) \in \mathcal{B}_{n-1}$;
   (b) если $V_n \in \mathcal{B}_n$, то $V_n \subset \psi_n(V_n) \in \mathcal{A}_n$.
4. пусть
   (a) $\mathfrak{A}_n = \{\widetilde{U}^\frown(V_{n-1}, U_n) \in \mathcal{A}_n^* : \widetilde{U}^\frown V_{n-1} \in \mathfrak{B}_{n-1}$ и $\varphi_n(U_n) = V_{n-1} \}$;
   (b) $\mathfrak{B}_n = \{\widetilde{V}^\frown(U_n, V_n) \in \mathcal{B}_n^* :$ и $\psi_n(V_n) = U_n \}$;

   Тогда $s(\widetilde{U}) = V_n$ для $\widetilde{U}^\frown V_n \in \mathfrak{B}_n$.

Пусть $\tau_*(V)$ — все непустые открытые подмножества $V \subset X$. Индукцией по n. Положим $\mathfrak{B}_{-1} = \{X\}$. Пусть $n \geq 0$. Положим

$$\mathcal{B} = \{s(\widetilde{U}^\frown V_{n-1}{}^\frown U) : \widetilde{U}^\frown V_{n-1} \in \mathcal{B}_{n-1}, U \in \tau_*(V_{n-1})\}.$$

$\mathcal{B}$ — π-база X.