Следующие задачи решены:

2.8	2.9	2.13	2.17*
3.5	3.6	3.11	
4.1	4.2	4.6	4.8
5.2	5.4	5.5	5.9*
6.1	6.3	6.9*	6.10
7.1	7.3*	7.5	7.9
8.3*	8.5(б)	8.10	8.11
9.2(б,в)	9.5	9.9*	9.11
10.4	10.8	10.9	10.11*
11.4	11.5*	11.7	

* обозначает, что задача решена для варианта 14.

Задача 2.8

Не будем различать шары. Тогда в n ящиков можно разложить n шаров C_{2n-1}^{n-1} различными способами (док. см. ниже 2.9). Зафиксируем ящик, который будет пуст, это можно сделать n способами. Зафиксируем ящик, с двумя шарами, это можно сделать $n-1$ способами. Получаем

$$P = \frac{n(n-1)}{C_{2n-1}^{n-1}} = \frac{(n-1)(n!)^2}{(2n-1)!}.$$

Задача 2.9

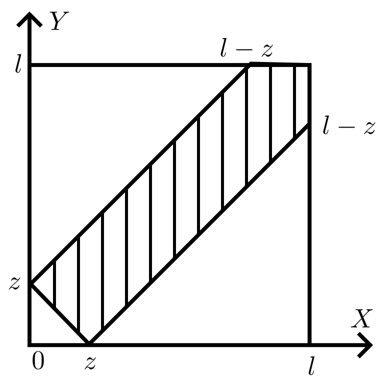
Не будем различать студентов. Тогда элементарым событием будет: n_1 студентов в 1-ой аудитории, n_2 студентов в 2-ой аудитории и т.д. Сколько есть элементарных событий? Поставим студентов в один ряд, тогда разделение по аудиториям эквивалентно разделению на группы. Группы будем разделять устанавливая ограждения. Чтобы разделить на k групп, нужно поставить $k-1$ ограждение. Всего есть $k-1+n$ мест: n для студентов, $k-1$ для ограждений. Из мест нужно выбрать $k-1$ для ограждений. Порядок не важен. Итого получаем

$$C_{k-1+n}^{k-1} = C_{k-1+n}^{n} = \frac{(k-1+n)!}{(k-1)!n!}$$

возможных групп, не различая студентов. Так как выбор чисел $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ всегда соответствует одному элементарному исходу, получаем ответ

$$P = \frac{1}{C_{k-1+n}^{n}} = \frac{(k-1)!n!}{(k-1+n)!}.$$

Задача 2.13



Чтобы из отрезков длины $x, y, z \in [0, l]$ можно было составить треугольник, эти числа должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} x + y > z, \\ z + x > y, \\ y + z > x. \end{cases}$$

Зафиксируем число z и перепишем систему

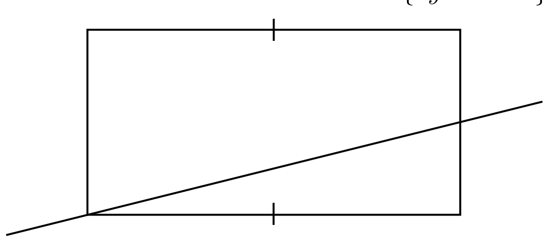
$$\begin{cases} y > z - x, \\ y < x + z, \\ y > x - z. \end{cases}$$

Изобразим на плоскости множество точек удовлетворяющих неравенству. считая z определенным. Площадь закрашеной части равна $S = 2lz - \frac{3}{2}z^2$. Для нахождения вероятности остается взять интеграл

$$\frac{1}{l^3}\int_0^l S(z)dz = ... = \frac{1}{2}.$$

Задача 2.17 (вар. 14)

$$P\{4y - x < t\} =?$$



Интересующие нас точки лежат ниже прямой $y = \frac{1}{4}(x + t)$. На рисунке она представлена для $t = 0$. Также из рисунка видно, что удобно рассмотреть случаи:

$$t < -2, \quad -2 \le t < 0, \quad 0 \le t < 2, \quad 2 \le t < 4, \quad 4 \le t.$$

Пропустим очевидные геометрические выкладки. Итого вероятность равна

$$P\{4y - x < t\} = \begin{cases} 0, \quad t < -2 \\ \frac{(t+2)^2}{16}, \quad -2 \le t < 0 \\ \frac{t+1}{4}, \quad 0 \le t < 2 \\ 1 - \frac{(t-4)^2}{16}, \quad 2 \le t < 4 \\ 1, \quad 4 \le t \end{cases}$$

Задача 3.5

Вероятность попасть в круг радиуса a равна

$$P\{r < a\} = \frac{a^2}{R^2}.$$

Вероятность n раз не попасть равна

$$P\{n \text{ раз не попасть}\} = \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)^n.$$

Задача 3.6

Учитывая независимость попадания одного стрелка от попадания другого, получаем

$$\begin{aligned} &P\{\text{две пули попали}\} = \\ &= P\{\text{А и В попали, С не попал}\} + P\{\text{С и А ..., В ...}\} + P\{\text{В и С ..., А ...}\} = \\ &\qquad = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,38 \end{aligned}$$

Задача 3.11

Станем искать вероятность победы первого. Тогда вероятность победы второго найдем по формуле дополнения.

$$P\{\text{А набрал 4, В набрал 0}\} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

В следующем случае нужно учесть, что последняя победа обязательно за А, а на остальные места разделяют победы А и В

$$P\{\text{А набрал 4, В набрал 1}\} = \frac{2}{3} C_4^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} = \frac{2^6}{3^5}.$$

Итого вероятность победы первного равна

$$P\{\text{А победил}\} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{2^6}{3^5} = \frac{112}{243}.$$

Второго –

$$P\{\text{В победил}\} = 1 - \frac{112}{243} = \frac{131}{243}.$$

$$P\{\text{В победил}\} > P\{\text{А победил}\}.$$

Задача 4.1

Распишем условную вероятность по определению, используем результат задания 3.6 и получим вероятность

$$P\{\text{С промахнулся}|\,2\text{ пули попали}\} = \\ = \frac{P(\{\text{С промахнулся}\} \cap \{2\text{ пули попали}\})}{P\{2\text{ пули попали}\}} = \frac{0{,}18}{0{,}38} = \frac{9}{19}.$$

Задача 4.2

Моя фамилия Мещеряков. $m = 9$. Пусть H_k – событие, когда переставляют k первых символов фамилии. Тогда события H_k разбивают множества всех исходов Ω на непересекающиеся $\Omega = H_2 \sqcup H_3 \sqcup ... \sqcup H_9$. Из условия следует, что для всех возможных H_k вероятность $P(H_k) = \frac{1}{m-1} = 1/8$. Пусть $\sigma_k \in S_k$ – произвольная перестановка длины k. Все перестановки длины k равновероятны и их количество равно $k!$. Тогда получаем условную вероятность $P(\sigma_k|H_k) = 1/k!$. Из формулы для условной вероятности получаем вероятность перестановки $P(\sigma_k) = P(\sigma_k|H_k)P(H_k) = \frac{1}{8\cdot k!}$.

Разрешено переставить только символы 2 и 4. Следовательно, нам подходят перестановки

$$\sigma_2 = e, \quad \sigma_3 = e,$$

$$\sigma_4 = e, \quad \sigma_4' = (2,4),$$

$$\dots$$

$$\sigma_9 = e, \quad \sigma_9' = (2,4),$$

где e – единичная перестановка, $(2,4)$ – цикл. Суммируем все вероятности и получаем вероятность получить фамилию:

$$P\{\text{фамилия}\} = \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{9}\frac{1}{k!} + \frac{1}{8}\sum_{k=4}^{9}\frac{1}{k!} \approx 0{,}096.$$

Пусть получилась фамилия. При этом условии найдем вероятность того, что $k = 2$. Учтем, что такое возможно только при тождественной перестановке. Итого получаем

$$P(H_k|\{\text{фамилия}\}) = \frac{P(H_2 \cap \{\text{фамилия}\})}{P\{\text{фамилия}\}} = \frac{P(\sigma_2)}{P\{\text{фамилия}\}} \approx 0{,}649.$$

Задача 4.6

AAAA, BBBB, CCCC будут всегда обозначать начальную последовательность, а ABCA – конечную. Найдем сначала вероятность получения ABCA. Ясно, что события AAAA, BBBB и CCCC не пересекаются. Следовательно

$$P(ABCA) = P(ABCA|AAAA) + P(ABCA|BBBB) + P(ABCA|CCCC) = \\ = 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}0624.$$

Далее воспользуемся формулой Байеса

$$P(AAAA|ABCA) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6}{P(ABCA)} = \frac{3}{13}.$$

Задача 4.8

Для первой урны введём обозначения: $2W$ – достали два белых шара, $2B$ – достали два чёрных шара, WB – достали один белый и один черный. Для второй урны будем использовать штрихи. Тогда

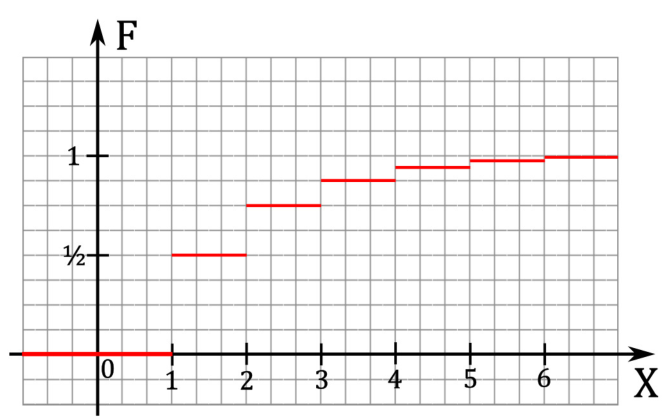
$$P(2W) = \frac{3}{10}, \quad P(2B) = \frac{1}{10}, \quad P(WB) = 1 - P(2W) - P(2B) = \frac{6}{10},$$

$$P(W'|2W) = \frac{6}{10}, \quad P(W'|2B) = \frac{4}{10}, \quad P(W'|WB) = \frac{5}{10}.$$

Используя формулу полной вероятности получаем ответ

$$P(W') = P(W'|2W)P(2W) + P(W'|2B)P(2B) + P(W'|WB)P(WB) = \\ = \frac{18 + 4 + 30}{100} = 0{,}52.$$

Задача 5.2



В этой задаче распределение случайной величины является дискретным. Вероятность выйграть за $n \in \mathbb{N}$ подбрасываний равна

$$P(X = n) = (1/2)^n.$$

Такое распределение называется геометрическим $G_{1/2}$ и описывается функцией распределения равной

$$F_X(y) = \begin{cases} 1 - (1/2)^{\{x\}-1}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Запись $\{x\}$ означает округление вверх. Такая изощрённая запись нужна для непрерывности слева.

Задача 5.4

Все функции в задании непрерывны, следовательно для нормировки достаточно требовать $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1$.
(а) Функция может быть плотностью вероятности, так как она всюду неотрицательна и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|y|} dy = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{y} dy + \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y} dy = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y} dy = 1.$$

(б) Нет, так как не удовлетворяет условию нормировки.
(в) Нет, так как не неотрицательна.
(г) Нет, так как не удовлетворяет условию нормировки.

Задача 5.5

Константу C находим из условия нормировки:

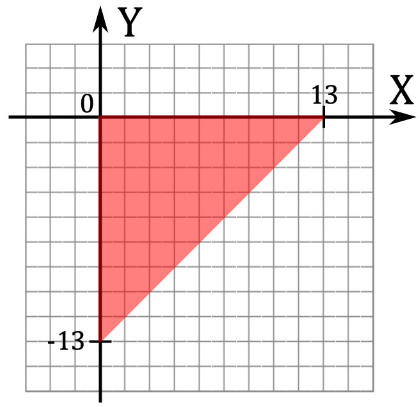
$$C \int\limits_{0}^{1} t^2 dt = C \frac{1}{3} = 1, \quad C = 3.$$

Функцию распределения находим как интеграл

$$F_X(y) = 3 \int\limits_{-\infty}^{y} t^2 dt = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ y^3, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Задача 5.9 (вар. 14)

$$N = 14, \quad (2N-15;0) = (13;0), \quad (0;15-2N) = (0;-13).$$



Напомним, что функция распределения случайной величины X определяется выражением

$$F_X(x) = P(\omega : X(\omega) < x).$$

Исходя из условия задачи ясно, что вероятности являются геометрическими:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где μ – мера Лебега подмножества (площадь подмножества), Ω – весь треугольник, A – произвольное измеримое подмножество. Очевидно $\mu(\Omega) = \frac{13^2}{2} = 84{,}5$. Так же ясно, что $\mu(\omega : X(\omega) < x) = 0$ при $x \le 0$ и $\mu(\omega : X(\omega) < x) = \mu(\Omega)$ при $x > 13$. В случае $0 < x \le 13$ множество $\{\omega : X(\omega) < x\}$ является трапецией с основаниями параллельными оси Y и высотой x. Таким образом

$$F_X(x) = \frac{x(13+13-x)}{13^2} = \frac{x(26-x)}{13^2}, \quad 0 < x \le 13.$$

Так как функция распределения $F_X(x)$ абсолютно непрерывна, то для нахождения плотности вероятности $f_X(x)$ достаточно продифференцировать:

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{26-2x}{13^2}, & 0 \le x \le 13; \\ 0, & 13 < x. \end{cases}$$

Для величины Y производим аналогичные рассуждения и получаем

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -13; \\ \frac{(13+y)^2}{13^2}, & -13 < y \le 0; \\ 1, & 0 < y. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y) = \begin{cases} 0, & y < -13; \\ \frac{26+2y}{13^2}, & -13 \le y \le 0; \\ 0, & 0 < y. \end{cases}$$

Задача 6.1

Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, \pi]$. Тогда для любого $t \in [0, \pi]$ выполняется

$$P(X < t) = \frac{t}{\pi}, \quad P(X > t) = \frac{\pi - t}{\pi}.$$

Найдем функцию распределения случайной величины $Y = \sin X$. Очевидно, что $\sin X$ принимает значения от 0 до 1, поэтому $F_Y(t) = 0$, при $t < 0$ и $F_Y(t) = 1$ при $t > 1$. Найдем $F_Y(t) = 1$ при $0 < t < 1$:

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(\sin X < t) = P(X < \arcsin t) + P(X > \pi - \arcsin t) = \frac{2 \arcsin t}{\pi}.$$

Тогда дифференцированием получаем плотность вероятности

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}, & 0 < t < 1; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Задача 6.3

Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F_X(y) = \int\limits_0^y \theta t^{\theta-1} dt, \quad y \in [0, 1].$$

Найдем плотность распределения случайной величины $Y = -\ln X$, то есть функцию $h(t)$ такую, что выполняется

$$F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^y h(t) dt.$$

Если обозначить $g(y) = -\ln y$, тогда

$$g^{-1}(y) = e^{-y}, \quad g^{-1}(-\infty, y) = (e^{-y}, +\infty).$$

Используем это, заметив, что

$$F_Y(y) = P(g(X) < y) = P(X \in g^{-1}(-\infty, y)) = \int\limits_{e^{-y}}^{+\infty} f_X(t) dt = \int\limits_{e^{-y}}^{1} \theta t^{\theta-1} dt.$$

Произведем замену $x = g(t)$:

$$F_Y(y) = \int\limits_0^y \theta e^{-\theta x} dx.$$

Следовательно

$$f_Y(t) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Задача 6.9 (вар. 14)

Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Аналогично предыдущему случаю для случайной величины $Y = 2^{X-1}$ получаем функцию вероятности

$$F_Y(y) = \log_2 y + 1, \quad 1/2 < y < 1,$$

и плотность вероятности

$$f_Y(t) = \frac{1}{t \ln 2}, \quad 1/2 < t < 0.$$

В иных точках функции имеют очевидные значения.

Задача 6.10

$$F_{X+Y}(y) = P(X+Y < y) = P(X = 0)P(Y < y) + P(X = 1)P(Y < y-1) = y/2, \quad 0 < y < 2.$$

$$F_{XY}(y) = P(X = 0)P(0 < y) + P(X = 1)P(Y < y) = \frac{y+1}{2}, \quad 0 < y < 1.$$

Задача 7.1

Случайная величина X равновероятно принимает значения от 1 до 6. Математическое ожидание равно

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}.$$

Найдем математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6}.$$

Дисперсия случайной величины X равна

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{35}{12}.$$

Задача 7.3 (Вар. 14)

а) Всего 10 ключей. Будем последовательно искать вероятность угадать ключ в одном, двух и трех испытаниях:

$$P(X=1)=\frac{1}{10},\quad P(X=2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{10},$$

$$P(X=3)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{10}.$$

Можно догадаться, что X имеет равновероятное распределение. Теперь можем найти мат. ожидание и второй момент:

$$\mathbb{E}X=\frac{1}{10}\frac{10\cdot 11}{2}=\frac{11}{2}.$$

$$\mathbb{E}X^2=\frac{1}{10}\frac{10\cdot 11\cdot 23}{6}=\frac{253}{6}.$$

Дисперсия случайной величины X равна

$$\mathbb{D}X=\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2=\frac{143}{12}.$$

б) Очевидно, здесь геометрическое распределение с параметром $p=1/10$. Ведь вероятность угадать на n попытке равна

$$P(X=n)=p(1-p)^{n-1}=\frac{9^{n-1}}{10^n}.$$

Из свойств геометрического распределения находим, что мат. ожидание и дисперсия равны

$$\mathbb{E}X=\frac{1}{p}=10,\quad \mathbb{D}X=\frac{1-p}{p^2}=90.$$

Задача 7.5

Очевидно, что случайные величины X и Y независимы. Следовательно

$$\mathbb{E}(X-Y)=\mathbb{E}X-\mathbb{E}Y=0-0=0.$$

$$\mathbb{D}(X-Y)=\mathbb{D}X+\mathbb{D}Y=2\int\limits_{-1}^{1}t^2dt=\frac{2}{3}(1+1)=\frac{4}{3}.$$

Задача 7.9

Константа C нахоодится из условия нормировки

$$C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}=1.$$

Ряд равнен значению широко известной дзета-функции Римана в точке 10. Таким образом константа

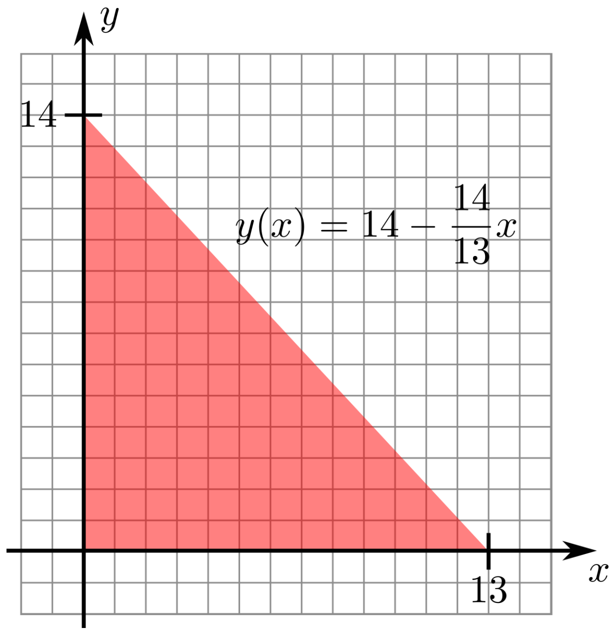
$$C = \frac{1}{\zeta(10)}.$$

Чтобы k-ый момент существовал ($k \in \mathbb{N}$), требуется сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n^{10}}.$$

Ряд сходится при $k = \overline{1,8}$.

Задача 8.3 (Вар. 14)



Случайный вектор (X, Y) – вектор координат точки, случайно бросаемой в треугольник Δ. Ясно, что (X, Y) имеет плотность распределения

$$f_{X,Y}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{91}, & (u, v) \in \Delta; \\ 0, & (u, v) \notin \Delta. \end{cases}$$

Плотности вероятности $f_X(u)$ и $f_Y(v)$ найдем, используя уравнение верхней границы треугольника: $y = 14(1 - x/13)$. Получаем:

$$f_X(u) = \frac{14(1 - u/13)}{91} = \frac{26 - 2u}{169}, \quad u \in (0, 13);$$

$$f_Y(v) = \frac{13(1-v/14)}{91} = \frac{28-2u}{196}, \quad v \in (0,14).$$

Далее последовательно находим $\mathbb{E}X, \mathbb{E}X^2, \mathbb{D}X, \mathbb{E}Y, \mathbb{E}Y^2, \mathbb{D}Y, \mathbb{E}XY$:

$$\mathbb{E}X = \int\limits_0^{13} u f_X(u) du = \frac{13}{3}; \quad \mathbb{E}X^2 = \int\limits_0^{13} u^2 f_X(u) du = \frac{169}{6};$$

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{169}{18};$$

$$\mathbb{E}Y = \int\limits_0^{14} v f_Y(v) dv = \frac{14}{3}; \quad \mathbb{E}Y^2 = \int\limits_0^{14} v^2 f_Y(v) dv = \frac{196}{6};$$

$$\mathbb{D}Y = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{196}{18};$$

$$\mathbb{E}XY = \iint\limits_{\Delta} uv f_{X,Y}(u,v) du\, dv = \frac{1}{91} \int\limits_0^{13} u\, du \int\limits_0^{14(1-u/13)} v\, dv = \frac{98}{91} \int\limits_0^{13} u(1-\frac{u}{13})^2\, du = \frac{91}{6}.$$

Остается найти коэффициент корреляции

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X\mathbb{D}Y}} = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}{\sqrt{\mathbb{D}X\mathbb{D}Y}} = -\frac{38}{91}.$$

Задача 8.5 (б)

Случайная величина X имеет показательное распределение ($X \sim E_\alpha$). Найдем $\mathbb{E}X^n$ используя гамма-функцию:

$$\mathbb{E}X^n = \alpha \int\limits_0^{+\infty} u^n e^{-\alpha u}\, du = \frac{1}{\alpha^n} \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^n} = \frac{n!}{\alpha^n}.$$

Тогда

$$\mathbb{D}X = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \mathbb{D}X^2 = \frac{24}{\alpha^4} - \left(\frac{2}{\alpha^2}\right)^2 = \frac{20}{\alpha^4}.$$

Окончательно имеем:

$$\rho(X,X^2) = \frac{\mathbb{E}X^3 - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^2}{\sqrt{\mathbb{D}X\mathbb{D}X^2}} = \frac{\frac{6}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha}\frac{2}{\alpha^2}}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}\frac{20}{\alpha^4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Задача 8.10

1) Пусть $X \sim E_\alpha$. Тогда

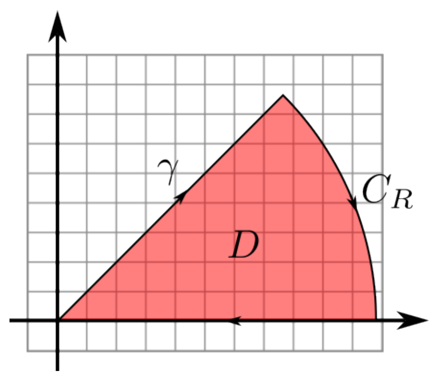
$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\alpha - it)u}\, du = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

2) Пусть $X \sim \Gamma_{\alpha,\lambda}$. Тогда

$$\varphi_X(t) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} u^{\lambda-1} e^{-(\alpha - it)u}\, du.$$

Произведем замену $z = (\alpha - it)u$. Тогда контур интегрирования – луч $\gamma = \{z = (\alpha - it)u \,|\, u \in (0, +\infty)\}$. Интеграл преобразуется к виду:

$$\varphi_X(t) = \frac{\alpha^\lambda}{(\alpha - it)^\lambda \Gamma(\lambda)} \int\limits_\gamma z^{\lambda-1} e^{-z}\, dz.$$



Для нахождения этого интеграла рассмотрим интеграл по замкнутому ориентированному контуру ∂D (см. рисунок). Этот интеграл раскладывается в сумму:

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\, dz = \int\limits_\gamma f(z)\, dz + \int\limits_{+\infty}^{0} f(z)\, dz + \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\, dz = \int\limits_\gamma f(z)\, dz - \int\limits_0^{+\infty} f(z)\, dz.$$

В предыдущем равенстве учтено, что $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$. Действительно, ведь при любых α луч всегда лежит в правой полуплоскости $\operatorname{Im} z \le 0$ $(\alpha > 0)$, следовательно при увеличении R подынтегральная функция $f(z)$ экспоненциально убывает на контуре C_R. Так как функция $f(z) = z^{\lambda-1}e^{-z}$ не имеет полюсов в D, то по теореме Коши $\oint_{\partial D} f(z)\, dz = 0$. Тогда

$$\int\limits_\gamma f(z)\, dz = \int\limits_0^{+\infty} f(z)\, dz.$$

Окончательно имеем:

$$\varphi_X(t) = \frac{\alpha^\lambda}{(\alpha - it)^\lambda \Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} z^{\lambda-1} e^{-z}\, dz = \frac{\alpha^\lambda}{(\alpha - it)^\lambda}.$$

3) Пусть $X \sim N_{0,1}$. Тогда

$$\varphi_{X^2}(t) = \mathbb{E}e^{itX^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itu^2 - u^2/2}\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1-2it)u^2/2}\, du.$$

Обозначим $a = \sqrt{1-2it}$, ветвь может быть любой, но выберем такую, что $\sqrt{1} = 1$. Произведем замену $z = au$, $(0, +\infty) \to \gamma$. Замкнем контур аналогично предыдущему случаю. Так как дуга C_R лежит в секторе $\{-\pi/4 \le \arg z \le \pi/4\}$, то $\operatorname{Im} t < \operatorname{Re} t$. Следовательно $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$. Окончательно имеем:

$$\varphi_{X^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2it}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_\gamma e^{-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{1-2it}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{1-2it}}.$$

4) Пусть $X_1, ..., X_n \sim N_{0,1}$ и $X_1, ..., X_n$ – независимы. Тогда

$$\varphi_{X_1^2+...+X_n^2}(t) = \mathbb{E}e^{it(X_1^2+...+X_n^2)} = \prod_j \mathbb{E}e^{itX_j^2} = \prod_j \frac{1}{\sqrt{1-2it}} = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}}.$$

Задача 8.11

1) Так как характеристическая функция, в сущности, есть Фурье-образ плотности распределения, то дискретная случайная величина всегда будет иметь периодическую характеристическую функцию. Обратное тоже верно. Тогда

$$\varphi_X(t) = \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \text{ следовательно } P(X=-1) = P(X=1) = 1/2.$$

2) Используем результат 8.10(1):

$$\varphi_X(t) = (1-4it)^{-1} = \frac{1/4}{1/4 - it}, \text{ следовательно } X \sim E_{1/4}.$$

3) Так как характеристическая функция, в сущности, есть Фурье-образ плотности распределения, то плотность распределения можно восстановить обратным Фурье-преобразованием:

$$f_X(u) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-2t^2 + 2it - itu}\, dt = ... = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(u-2)^2/8}.$$

Что означает $X \sim N_{2,2}$.

Задача 9.2 (б, в)

б) $X \sim U[0,1]$. Очевидно, $\mathbb{E}X^2 < +\infty$. Тогда

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}{n} \to \mathbb{E}X^2 < +\infty \text{ п. н.}; \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}{n}} \to 0 \text{ п.н.}$$

в) Найдем

$$\mathbb{E}(1+X)^{-1} = \int\limits_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln(2).$$

Тогда по УЗБЧ

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+X_1} + \frac{1}{1+X_2} + ... + \frac{1}{1+X_n}\right) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathbb{E}(1+X)^{-1} = \ln(2).$$

Задача 9.5

Распределение случайной величины X задается таблицей:

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Математическое ожидание и дисперсия были вычислены в задаче 7.1:

$$\mathbb{E}X = 17/6, \quad \mathbb{D}X = 35/12.$$

Вероятность того, что потребуется более чем 210 подбрасываний, равна вероятности того, что при 210 подбрасываниях выпадет менее 700 очков. Воспользуемся ЦПТ:

$$P(0 \leq S_n < 700) = P(-\frac{n\mathbb{E}X}{\sqrt{n\mathbb{D}X}} \leq \frac{S_n - n\mathbb{E}X}{\sqrt{n\mathbb{D}X}} < \frac{700 - n\mathbb{E}X}{\sqrt{n\mathbb{D}X}}) =$$

$$= P(-\frac{735}{\sqrt{612{,}5}} \leq \frac{S_{210} - 735}{\sqrt{612{,}5}} < -\frac{35}{\sqrt{612{,}5}}) \approx \Phi_{0,1}(-\frac{35}{\sqrt{612{,}5}}) \approx 0{,}08.$$

Причем неравенство Берри-Эссеена ($C = 1$) дает довольно печальную оценку для погрешности, которую мы допускаем, а именно 0,09. Усиленный вариант неравенства ($C = 1/2$) при этом дает 0,04.

Задача 9.9 (Вар. 14)

Обозначим X – количество чётных чисел выпавших при однократном подбрасывании кости. Очевидно, $X \sim B_{0,5}$. Для приближенного нахождения вероятности применим ЦПТ:

$$P(65 \leq S_n \leq 120) = P(\frac{5}{\sqrt{30}} \leq \frac{S_{120} - 60}{\sqrt{30}} \leq \frac{60}{\sqrt{30}}) \approx 1 - \Phi_{0,1}(\frac{5}{\sqrt{30}}) \approx 18\%.$$

Аналогично для количества шестерок ($X \sim B_{\frac{1}{6}}$):

$$P(0 \le S_n \le 20) = P(-2\sqrt{6} \le \frac{S_{120} - 20}{\sqrt{50/3}} \le 0) \approx \Phi_{0,1}(0) = 50\%.$$

Задача 9.11

В случае, когда $np < 10$, рекомендуется пользоваться теоремой Пуассона для схемы Бернулли. В настоящей задаче $np = 2 \cdot 10^7 \cdot 10^{-7} = 2$, следовательно используем теорему Пуассона. Обозначим X – число поврежденных пикселей. Тогда

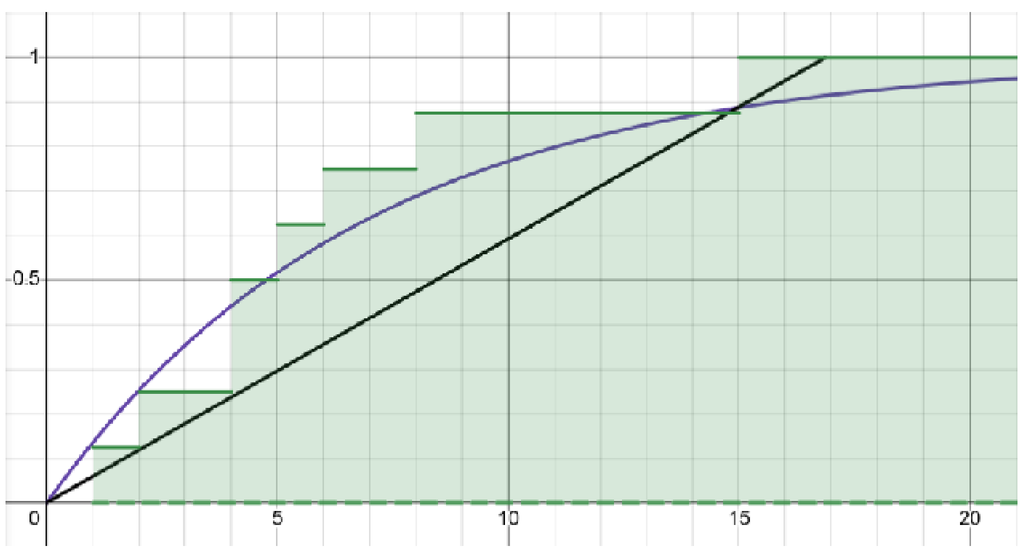
$$P(X > 3) = 1 - P(X = \overline{0,3}) = 1 - \sum_{j=0}^{3} P(X = j) \approx 1 - e^{-2}(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}) \approx 14\%.$$

Задача 10.4

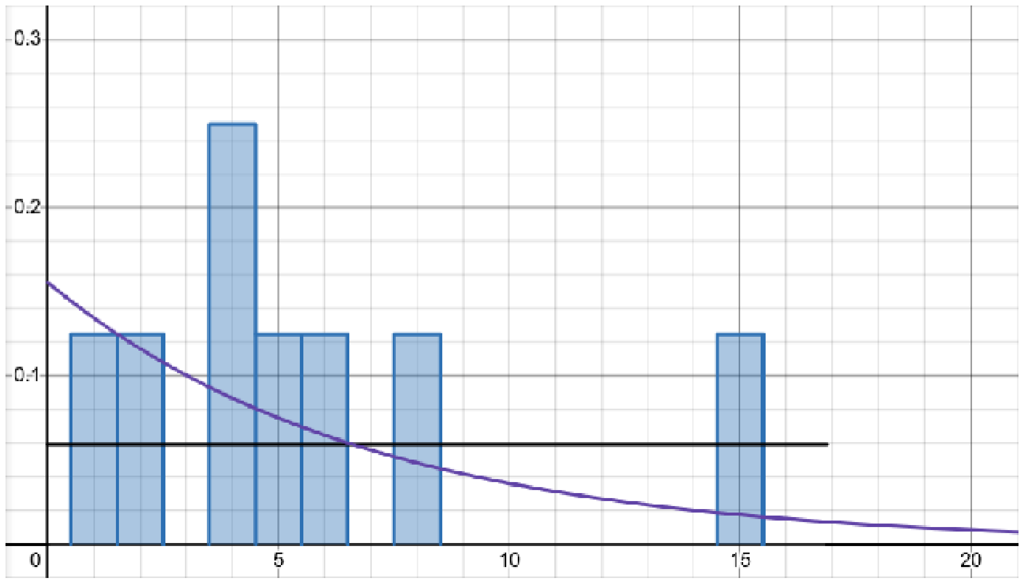
а) Находим:

$$\tilde{\theta} = \frac{135}{8}, \quad \overline{X} = \frac{45}{8}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{7}{45}.$$

б)



в)



г) показательное распределение лучше аппроксимирует данные.

Задача 10.8

а) выборочные моменты будем обозначать a_n^*. Для $X \sim B_{m,p}$ известны равенства

$$\mathbb{E}X = mp, \quad \mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = mp(1-p).$$

Из них выразим второй момент:

$$\mathbb{E}X^2 = mp(mp + 1 - p).$$

Тогда можно составить две различные оценки для параметра p:

$$p^* = \frac{a_1^*}{m}, \quad p^* = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{(m-1)^2} + \frac{4a_2^*}{m(m-1)}} - \frac{1}{m-1}, & m \neq 1; \\ a_2^*, & m = 1. \end{cases}$$

б) Из тех же равенств можно получить оценки для p и m:

$$p^* = 1 + a_1^* - \frac{a_2^*}{a_1^*}, \quad m^* = a_1^*/(1 + a_1^* - \frac{a_2^*}{a_1^*}).$$

В силу свойств сходимости по вероятности все оценки состоятельны.

Задача 10.9

Для $X \sim E_\alpha$ известно математическое ожидание:

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\alpha}.$$

Тогда

$$\alpha^* = \frac{1}{a_1^*}.$$

В силу свойств сходимости по вероятности оценка состоятельна. Попытаемся найти $\mathbb{E}\alpha^*$:

$$\mathbb{E}\alpha^* = n \int \cdots \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha(t_1+...+t_n)}}{t_1 + ... + t_n} \, dt_1 \dots dt_n.$$

Интеграл расходится, следовательно $\mathbb{E}\alpha^* \neq \alpha$ и оценка смещена.

Задача 10.11 (Вар. 14)

Плотность вероятности имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} e^{-\frac{2t}{\theta}}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Найдем моменты:

$$\mathbb{E}X = \frac{2}{\theta} \int\limits_0^{+\infty} t e^{-\frac{2t}{\theta}} \, dt = \frac{\theta}{2}\Gamma(2) = \frac{\theta}{2};$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{2}{\theta} \int\limits_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{2t}{\theta}} \, dt = \frac{\theta^2}{4}\Gamma(3) = \frac{\theta^2}{2}.$$

Получаем оценки:

$$\theta^* = 2a_1^*, \quad \theta^* = 2\sqrt{a_2^*}.$$

Задача 11.4

Будем обозначать k, l, m количество единиц, двоек, троек в выборке. Тогда длина выборки $n = k + l + m$. Вероятность получить такую выборку равна:

$$f(p) = p^k \cdot (1-2p)^l \cdot p^m = p^{k+m} \cdot (1-2p)^l = p^{n-l}(1-2p)^l.$$

Найдем максимум при фиксированных n, l:

$$\frac{df}{dp}(p) = (n-l)(p)^{n-l-1}(1-2p)^l + l(p)^{n-l}(1-2p)^{l-1} = 0;$$

$$(n-l)(1-2p) = 2lp; \quad p^* = \frac{n-l}{2n}.$$

Проверим оценку на состоятельность. Для этого введем случайную величину Y такую, что $P(Y=0) = 2p$, $P(Y=1) = 1-2p$, $\mathbb{E}X = 1-2p$, $S_n = \sum Y_i = l$. Тогда по закону больших чисел:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 1-2p, \quad p^* = \frac{n-l}{2n} = \frac{1-S_n}{2} \xrightarrow{P} \frac{1-1-2p}{2} = p.$$

То есть оценка состоятельна и, очевидно, несмещенна.

Задача 11.5 (Вар. 14)

Плотность распределения равна:

$$f(x) = \frac{4x^3}{\theta} e^{-x^4/\theta}.$$

Тогда функция правдоподобия равна:

$$g(\theta, x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{4x_i^3}{\theta} e^{-x_i^4/\theta}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия равна:

$$l(\theta, x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{4x_i^3}{\theta}\right) - \frac{x_i^4}{\theta} \right).$$

Найдем максимум при фиксированных $x_1, ..., x_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{x_i^3}{\theta^2} \right) = 0, \quad \theta^* = a_4^*.$$

Найдем четверный момент:

$$\mathbb{E}X^4 = \int\limits_{\theta}^{+\infty} x^4 \frac{4x^3}{\theta} e^{-x^4/\theta}\, dx = \left| t = x^4/\theta \right| = \theta \int\limits_{0}^{+\infty} te^{-t}\, dt = \theta \cdot \Gamma(2) = \theta.$$

Из этого и из определения следует, что оценка не смещена. Из этого же и ЗБЧ следует, что оценка состоятельна.

Задача 11.7

Плотность распределения равна:

$$f_\theta(t) = e^{\theta - t}.$$

1)Будем искать оценку методом моментов:

$$\mathbb{E}X = ... = \theta + 1.$$

$$\theta^* = a_1^* - 1.$$

Из ЗБЧ следует состоятельность:

$$\theta^* = a_1^* - 1 \xrightarrow{P} \mathbb{E}X - 1 = \theta.$$

Несмещенность очевидна:

$$\mathbb{E}a_1^* - 1 = \frac{\sum_i \mathbb{E}X_i}{n} - 1 = \theta.$$

2) Будем искать методом наилучшего правдоподобия. Для этого запишем функцию правдоподобия:

$$f(\theta, x_1, ..., x_n) = \prod_i e^{\theta - x_i}, \quad \theta \le X_i.$$

Очевидно, что максимум соответствует первой порядковой статистике

$$\theta^* = X_{(1)}.$$

Докажем состоятельность:

$$P\left(|X_{(1)} - \theta| \ge \varepsilon\right) = P\left(X_{(1)} \ge \varepsilon + \theta\right) = \left(1 - F_X(\theta + \varepsilon)\right)^n = e^{-n\varepsilon} \to 0, \text{ при } n \to +\infty.$$

Найдем смещение:

$$\mathbb{E}X_{(1)} = n \int\limits_{\theta}^{+\infty} t e^{-n(t-\theta)}\, dt = ... = \frac{1}{n} + \theta.$$

Тогда несмещенная оценка равна:

$$\theta_0^* = X_{(1)} - \frac{1}{n}.$$