

Дополнительные главы теории функций комплексного переменного

А. С. Романов

Новосибирский государственный университет

Новосибирск 2013

Основной целью курса

является знакомство слушателей с разнообразными приложениями комплексного анализа. В Новосибирском государственном университете на стандартный курс теории функций комплексного переменного для физиков отводится 9 – 10 лекций. Сохраняя достаточную степень строгости изложения материала, в итоге удастся лишь обсудить простейшие приложения теории вычетов к нахождению значений некоторых определенных интегралов. При этом комплексный анализ помимо непосредственных математических приложений в анализе, в теории дифференциальных уравнений, в теории интегральных преобразований и других разделах математики находит применение, к примеру, в гидродинамике, аэродинамике, теплотехнике, электростатике ... Именно приложения составляют основу курса, при этом следует отметить, что они не сводятся к чисто вычислительным вопросам и часто помогают понять содержательную суть физических процессов. Пособие содержит весь необходимый для понимания теоретический материал, изложение которого подчинено основной цели курса.

Обсуждаемые в рамках курса приложения относятся к разделам комплексного анализа, ставшим уже классическими и естественно нашедшим отражение в учебной и научной литературе. Существенную часть фактического материала рассматриваемого в данном курсе, хотя и в несколько ином изложении, можно найти в книге М.А. Лаврентьева и Б.В. Шабата «Методы теории функций комплексного переменного».

Для начала уточним определение *аналитической функции*.

В курсе лекций по ТФКП, читающемся на физическом факультете НГУ, по сложившейся традиции термин *аналитическая функция* означает дифференцируемую в смысле комплексного переменного функцию, производная которой является *непрерывной*. Такое определение основного класса функций позволяет упростить доказательства однако создает и некоторые проблемы, возникающие, к примеру, при чтении математической литературы.

Во-первых, термин *аналитическая функция* не связан конкретно с комплексным анализом, в современной математике *аналитической* принято называть функцию, представимую степенным рядом в окрестности каждой точки области определения. При этом рассматриваются аналитические функции не только комплексного переменного, но действительного переменного и даже абстрактные аналитические функции, связанные с банаховыми пространствами. В литературе по комплексному анализу вместо термина *аналитические функции* часто используют термины *голоморфные* или *регулярные* функции, при этом термин *аналитическая функция* используется для *многозначных* функций комплексного переменного.

Во-вторых, для функций, дифференцируемых в смысле комплексного переменного, требование непрерывности производных является *излишним*: всякая функция комплексного переменного один раз дифференцируемая в области $D \subset \mathbb{C}$ представима степенным рядом в окрестности каждой точки $a \in D$, бесконечно дифференцируема и все ее производные являются непрерывными функциями.

В общем случае аналитичность функции не является простым следствием ее дифференцируемости, к примеру, на действительной прямой даже бесконечно дифференцируемая функция может не быть аналитической. Рассматриваемая в ТФКП ситуация является исключительной в том смысле, что свойства дифференцируемости и аналитичности оказываются эквивалентными. Доказательство этого факта не является тривиальным, и одна из возможностей связана с дифференцированием интегральной формулы Коши.

В рамках лекционного курса мы попадаем в замкнутый цикл: мы можем доказать непрерывность производной, используя интегральную формулу Коши, являющуюся следствием интегральной теоремы Коши, при доказательстве которой мы уже использовали непрерывность производной ...

Дополнительные предположения о свойствах изучаемых объектов позволяют использовать неприменимые в общем случае методы и, конечно же, упрощают некоторые доказательства. В условиях ограниченности учебного времени такой подход может быть оправдан, однако тем кто желает научиться применять методы комплексного анализа не только при решении модельных задач, но и при серьезных научных исследованиях, на наш взгляд целесообразно иметь адекватное представление о базовых понятиях рассматриваемой теории и о методах доказательства основных утверждений.

Пожалуй основной теоремой в комплексном анализе является интегральная теорема Коши, поскольку она сама и ее различные следствия используются в доказательствах большинства важнейших утверждений теории функций комплексного переменного.

Основная часть данного курса будет посвящена различным приложениям комплексного анализа, но начнем курс мы с классического доказательства интегральной теоремы Коши. Кроме дифференцируемости мы не предполагаем никаких дополнительных свойств функции, что не позволяет нам (как это было сделано в лекционном курсе) воспользоваться формулой Грина. В этой общей ситуации классическое доказательство основано на изящной идее и остается вполне элементарным и наглядным.

Введение. § 1. Необходимые определения

Рассмотрим область $D \subset \mathbb{C}$ и точку $z_0 \in D$.

Определение.

Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется дифференцируемой в точке z_0 , если существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) - f(z_0) = \lambda(z - z_0) + o(z - z_0) \text{ при } z \rightarrow z_0. \quad (0.1.1)$$

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , то соответствующее число λ называется ее производной и обозначается символом $f'(z_0)$.

Функцию $f(z)$ будем называть *аналитической*^a в области D , если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$. Отметим, что мы требуем лишь существования в области D конечной производной и не предполагаем никаких дополнительных свойств.

^aЧтобы не вводить новых понятий, мы будем использовать для однозначных функций комплексного переменного термин *аналитическая функция*.

Введение. § 1. Необходимые определения

Рассмотрим область $D \subset \mathbb{C}$ и точку $z_0 \in D$.

Определение.

Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется дифференцируемой в точке z_0 , если существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) - f(z_0) = \lambda(z - z_0) + o(z - z_0) \text{ при } z \rightarrow z_0. \quad (0.1.1)$$

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , то соответствующее число λ называется ее производной и обозначается символом $f'(z_0)$.

Функцию $f(z)$ будем называть *аналитической^a в области D* , если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$. Отметим, что мы требуем лишь существования в области D конечной производной и не предполагаем никаких дополнительных свойств.

^aЧтобы не вводить новых понятий, мы будем использовать для однозначных функций комплексного переменного термин *аналитическая функция*.

Введение. § 1. Необходимые определения

Рассмотрим область $D \subset \mathbb{C}$ и точку $z_0 \in D$.

Определение.

Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется дифференцируемой в точке z_0 , если существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) - f(z_0) = \lambda(z - z_0) + o(z - z_0) \text{ при } z \rightarrow z_0. \quad (0.1.1)$$

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , то соответствующее число λ называется ее производной и обозначается символом $f'(z_0)$.

Функцию $f(z)$ будем называть *аналитической*^a в области D , если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$. Отметим, что мы требуем лишь существования в области D конечной производной и не предполагаем никаких дополнительных свойств.

^aЧтобы не вводить новых понятий, мы будем использовать для однозначных функций комплексного переменного термин *аналитическая функция*.

Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная гладкая кривая, $z = z(t)$ – ее гладкая параметризация, $t \in [\alpha, \beta]$.

Определение.

Интеграл от непрерывной функции $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ вдоль ориентированной кривой γ определяется равенством

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt.$$

Непосредственно из определения следует, что для всякого простого замкнутого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset \mathbb{C}$

$$\int_{\Gamma} dz = 0, \quad \int_{\Gamma} z dz = 0. \quad (0.1.2)$$

Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная гладкая кривая, $z = z(t)$ – ее гладкая параметризация, $t \in [\alpha, \beta]$.

Определение.

Интеграл от непрерывной функции $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ вдоль ориентированной кривой γ определяется равенством

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt.$$

Непосредственно из определения следует, что для всякого простого замкнутого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset \mathbb{C}$

$$\int_{\Gamma} dz = 0, \quad \int_{\Gamma} z dz = 0. \quad (0.1.2)$$

Введение. § 2. Интегральная теорема Коши

Утверждение теоремы доказывается вначале для произвольного треугольника, потом для многоугольника, а затем распространяется на произвольные кусочно-гладкие контуры.

Основная лемма.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для произвольного треугольника $\Delta \subset D$

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный треугольник $\Delta \subset D$, проведем в треугольнике средние линии и разобьем его на четыре треугольника $\Delta^{(k)}$. Тогда

$$M = \left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right| = \left| \sum_{k=1}^4 \int_{\partial \Delta^{(k)}} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\partial \Delta^{(k)}} f(z) dz \right|.$$



Введение. § 2. Интегральная теорема Коши

Утверждение теоремы доказывается вначале для произвольного треугольника, потом для многоугольника, а затем распространяется на произвольные кусочно-гладкие контуры.

Основная лемма.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для произвольного треугольника $\Delta \subset D$

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный треугольник $\Delta \subset D$, проведем в треугольнике средние линии и разобьем его на четыре треугольника $\Delta^{(k)}$. Тогда

$$M = \left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right| = \left| \sum_{k=1}^4 \int_{\partial \Delta^{(k)}} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\partial \Delta^{(k)}} f(z) dz \right|.$$



Введение. § 2. Интегральная теорема Коши

Утверждение теоремы доказывается вначале для произвольного треугольника, потом для многоугольника, а затем распространяется на произвольные кусочно-гладкие контуры.

Основная лемма.

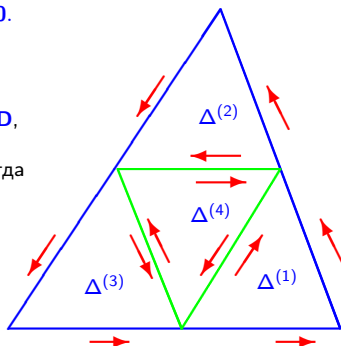
Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для произвольного треугольника $\Delta \subset D$

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный треугольник $\Delta \subset D$, проведем в треугольнике средние линии и разобьем его на четыре треугольника $\Delta^{(k)}$. Тогда

$$M = \left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right| = \left| \sum_{k=1}^4 \int_{\partial \Delta^{(k)}} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\partial \Delta^{(k)}} f(z) dz \right|.$$



Из неравенства видно, что модуль интеграла по границе хотя бы одного из треугольников $\Delta^{(k)}$ не меньше чем $M/4$. Фиксируем такой треугольник и обозначим его через Δ_1 . Применяя описанную ранее процедуру к

треугольнику Δ_1 , мы найдем треугольник Δ_2 , для которого $\left| \int_{\partial \Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}$.

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность треугольников $\{\Delta_k\}$, обладающую следующими свойствами:

1) $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, $k \in \mathbb{N}$;

2) периметр треугольника Δ_k равен $\frac{L}{2^k}$, где L – периметр исходного треугольника Δ ;

3) выполняется оценка $\left| \int_{\partial \Delta_k} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^k}$. (0.2.1)

Последовательность вложенных замкнутых треугольников имеет единственную общую точку $z_0 \in D$. Поскольку функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 , то согласно определению дифференцируемости (0.1.1) для всякого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0| \quad (0.2.2)$$

при всех z , лежащих в круге $B(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$.

Из неравенства видно, что модуль интеграла по границе хотя бы одного из треугольников $\Delta^{(k)}$ не меньше чем $M/4$. Фиксируем такой треугольник и обозначим его через Δ_1 . Применяя описанную ранее процедуру к

треугольнику Δ_1 , мы найдем треугольник Δ_2 , для которого $\left| \int_{\partial \Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}$.

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность треугольников $\{\Delta_k\}$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, $k \in \mathbb{N}$;
- 2) периметр треугольника Δ_k равен $\frac{L}{2^k}$, где L – периметр исходного треугольника Δ ;

- 3) выполняется оценка $\left| \int_{\partial \Delta_k} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^k}$. (0.2.1)

Последовательность вложенных замкнутых треугольников имеет единственную общую точку $z_0 \in D$. Поскольку функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 , то согласно определению дифференцируемости (0.1.1) для всякого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0| \quad (0.2.2)$$

при всех z , лежащих в круге $B(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$.

Из неравенства видно, что модуль интеграла по границе хотя бы одного из треугольников $\Delta^{(k)}$ не меньше чем $M/4$. Фиксируем такой треугольник и обозначим его через Δ_1 . Применяя описанную ранее процедуру к

треугольнику Δ_1 , мы найдем треугольник Δ_2 , для которого $\left| \int_{\partial \Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}$.

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность треугольников $\{\Delta_k\}$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, $k \in \mathbb{N}$;
- 2) периметр треугольника Δ_k равен $\frac{L}{2^k}$, где L – периметр исходного треугольника Δ ;

- 3) выполняется оценка $\left| \int_{\partial \Delta_k} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^k}$. (0.2.1)

Последовательность вложенных замкнутых треугольников имеет единственную общую точку $z_0 \in D$. Поскольку функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 , то согласно определению дифференцируемости (0.1.1) для всякого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0| \quad (0.2.2)$$

при всех z , лежащих в круге $B(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$.

Начиная с некоторого номера k_0 все треугольники Δ_k лежат в круге $B(z_0, \delta)$, при этом из равенств (0.1.2) следует, что

$$\int_{\partial \Delta_k} f(z_0) dz = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\partial \Delta_k} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0.$$

Учитывая эти соотношения и неравенство (0.2.2), мы можем получить следующую оценку для интеграла

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Delta_k} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial \Delta_k} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial \Delta_k} |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon \frac{L^2}{4k}. \end{aligned} \quad (0.2.3)$$

Из неравенств (0.2.1) и (0.2.3) следует оценка $M \leq \varepsilon L^2$, из которой в силу произвольности ε получаем $M = 0$, что и завершает доказательство леммы.

Начиная с некоторого номера k_0 все треугольники Δ_k лежат в круге $B(z_0, \delta)$, при этом из равенств (0.1.2) следует, что

$$\int_{\partial \Delta_k} f(z_0) dz = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\partial \Delta_k} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0.$$

Учитывая эти соотношения и неравенство (0.2.2), мы можем получить следующую оценку для интеграла

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Delta_k} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial \Delta_k} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial \Delta_k} |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon \frac{L^2}{4^k}. \end{aligned} \quad (0.2.3)$$

Из неравенств (0.2.1) и (0.2.3) следует оценка $M \leq \varepsilon L^2$, из которой в силу произвольности ε получаем $M = 0$, что и завершает доказательство леммы.

Начиная с некоторого номера k_0 все треугольники Δ_k лежат в круге $B(z_0, \delta)$, при этом из равенств (0.1.2) следует, что

$$\int_{\partial \Delta_k} f(z_0) dz = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\partial \Delta_k} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0.$$

Учитывая эти соотношения и неравенство (0.2.2), мы можем получить следующую оценку для интеграла

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Delta_k} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial \Delta_k} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial \Delta_k} |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon \frac{L^2}{4^k}. \end{aligned} \quad (0.2.3)$$

Из неравенств (0.2.1) и (0.2.3) следует оценка $M \leq \varepsilon L^2$, из которой в силу произвольности ε получаем $M = 0$, что и завершает доказательство леммы.

Лемма Гурса.

Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и γ – простой замкнутый кусочно-гладкий контур, лежащий в D . Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой многоугольник $P \subset D$ с вершинами на γ , что

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\partial P} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим через L длину контура γ . Рассмотрим такую ограниченную односвязную подобласть D_1 , что $\gamma \in D_1$ и $\overline{D_1} \subset D$. В силу компактности множества $\overline{D_1}$ непрерывная функция $f(z)$ на нем будет равномерно непрерывной. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $z_1, z_2 \in D_1$ из неравенства $|z' - z''| < \delta$ будет следовать оценка

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}. \quad (0.2.4)$$

Фиксируем положительное число $\delta_0 < \min\{\delta, \text{dist}(\gamma, \partial D_1)\}$ и разобьем точками z_1, z_2, \dots, z_n контур γ на дуги $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, n$, длина каждой из которых меньше чем δ_0 . Обозначим через P многоугольник с вершинами в точках z_k , а через I_k его соответствующие стороны. Отметим, что число δ_0 выбрано так, что $P \subset D_1 \subset D$.

Лемма Гурса.

Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и γ – простой замкнутый кусочно-гладкий контур, лежащий в D . Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой многоугольник $P \subset D$ с вершинами на γ , что

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\partial P} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим через L длину контура γ . Рассмотрим такую ограниченную односвязную подобласть D_1 , что $\gamma \in D_1$ и $\overline{D_1} \subset D$. В силу компактности множества $\overline{D_1}$ непрерывная функция $f(z)$ на нем будет равномерно непрерывной. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $z_1, z_2 \in D_1$ из неравенства $|z' - z''| < \delta$ будет следовать оценка

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}. \quad (0.2.4)$$

Фиксируем положительное число $\delta_0 < \min\{\delta, \text{dist}(\gamma, \partial D_1)\}$ и разобьем точками z_1, z_2, \dots, z_n контур γ на дуги $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, n$, длина каждой из которых меньше чем δ_0 . Обозначим через P многоугольник с вершинами в точках z_k , а через l_k его соответствующие стороны. Отметим, что число δ_0 выбрано так, что $P \subset D_1 \subset D$.

Лемма Гурса.

Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и γ – простой замкнутый кусочно-гладкий контур, лежащий в D . Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой многоугольник $P \subset D$ с вершинами на γ , что

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\partial P} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим через L длину контура γ . Рассмотрим такую ограниченную односвязную подобласть D_1 , что $\gamma \in D_1$ и $\overline{D_1} \subset D$. В силу компактности множества $\overline{D_1}$ непрерывная функция $f(z)$ на нем будет равномерно непрерывной. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $z_1, z_2 \in D_1$ из неравенства $|z' - z''| < \delta$ будет следовать оценка

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}. \quad (0.2.4)$$

Фиксируем положительное число $\delta_0 < \min\{\delta, \text{dist}(\gamma, \partial D_1)\}$ и разобьем точками z_1, z_2, \dots, z_n контур γ на дуги $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, n$, длина каждой из которых меньше чем δ_0 . Обозначим через P многоугольник с вершинами в точках z_k , а через l_k его соответствующие стороны. Отметим, что число δ_0 выбрано так, что $P \subset D_1 \subset D$.

Учитывая равенство

$$f(z_k) \Delta z_k = f(z_k)(z_{k+1} - z_k) = \int_{\gamma_k} f(z_k) dz = \int_{l_k} f(z_k) dz$$

и неравенство (0.2.4), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\partial P} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| + \left| \int_{\partial P} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)| dz + \sum_{k=1}^n \int_{l_k} |f(z) - f(z_k)| dz \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Интегральная теорема Коши.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для произвольного замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Доказательство следует из возможности аппроксимации контура γ многоугольником (лемма Гурса), разбиения многоугольника на треугольники и результата основной леммы.

На практике чаще приходится пользоваться более общим результатом, который для односвязной области является следствием интегральной теоремы Коши и аппроксимации границы контурами, лежащими внутри области. Переход к многосвязной области осуществляется стандартным образом.

Обобщенная теорема Коши.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная многосвязная область с ориентированной кусочно-гладкой границей Γ , функция $f(z)$ является аналитической в D и непрерывной в \bar{D} . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Интегральная теорема Коши.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для произвольного замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Доказательство следует из возможности аппроксимации контура γ многоугольником (лемма Гурса), разбиения многоугольника на треугольники и результата основной леммы.

На практике чаще приходится пользоваться более общим результатом, который для односвязной области является следствием интегральной теоремы Коши и аппроксимации границы контурами, лежащими внутри области. Переход к многосвязной области осуществляется стандартным образом.

Обобщенная теорема Коши.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная многосвязная область с ориентированной кусочно-гладкой границей Γ , функция $f(z)$ является аналитической в D и непрерывной в \bar{D} . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Интегральная теорема Коши.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для произвольного замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Доказательство следует из возможности аппроксимации контура γ многоугольником (лемма Гурса), разбиения многоугольника на треугольники и результата основной леммы.

На практике чаще приходится пользоваться более общим результатом, который для односвязной области является следствием интегральной теоремы Коши и аппроксимации границы контурами, лежащими внутри области. Переход к многосвязной области осуществляется стандартным образом.

Обобщенная теорема Коши.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная многосвязная область с ориентированной кусочно-гладкой границей Γ , функция $f(z)$ является аналитической в D и непрерывной в \bar{D} . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Интегральная теорема Коши.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для произвольного замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Доказательство следует из возможности аппроксимации контура γ многоугольником (лемма Гурса), разбиения многоугольника на треугольники и результата основной леммы.

На практике чаще приходится пользоваться более общим результатом, который для односвязной области является следствием интегральной теоремы Коши и аппроксимации границы контурами, лежащими внутри области. Переход к многосвязной области осуществляется стандартным образом.

Обобщенная теорема Коши.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная многосвязная область с ориентированной кусочно-гладкой границей Γ , функция $f(z)$ является аналитической в D и непрерывной в \bar{D} . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

I. Конформные отображения

В этой части мы познакомимся с приложениями теории конформных отображений к решению некоторых задач, имеющих физическое содержание.

Определение.

Отображение области $D \subset \mathbb{C}$ на область $D' \subset \mathbb{C}$ называют *конформным*, если оно

1. является взаимно однозначным;
- и в каждой точке $z \in D$ обладает свойствами:
2. постоянства растяжения по всем направлениям;
3. консерватизма углов.

Отображение обратное к конформному является конформным.

Аналитическая функция $f(z)$, у которой $f'(z) \neq 0$, локально осуществляет конформное отображение.

Теорема Римана.

Для произвольных односвязных областей D и D^* , границы которых состоят более чем из одной точки, существует конформное отображение области D на область D^* .

I. Конформные отображения

В этой части мы познакомимся с приложениями теории конформных отображений к решению некоторых задач, имеющих физическое содержание.

Определение.

Отображение области $D \subset \mathbb{C}$ на область $D' \subset \mathbb{C}$ называют *конформным*, если оно

1. *является взаимно однозначным;*
- и в каждой точке $z \in D$ обладает свойствами:
2. *постоянства растяжения по всем направлениям;*
3. *консерватизма углов.*

Отображение обратное к конформному является конформным.

Аналитическая функция $f(z)$, у которой $f'(z) \neq 0$, локально осуществляет конформное отображение.

Теорема Римана.

Для произвольных односвязных областей D и D^* , границы которых состоят более чем из одной точки, существует конформное отображение области D на область D^* .

I. Конформные отображения

В этой части мы познакомимся с приложениями теории конформных отображений к решению некоторых задач, имеющих физическое содержание.

Определение.

Отображение области $D \subset \mathbb{C}$ на область $D' \subset \mathbb{C}$ называют *конформным*, если оно

1. *является взаимно однозначным;*
- и в каждой точке $z \in D$ обладает свойствами:
2. *постоянства растяжения по всем направлениям;*
3. *консерватизма углов.*

Отображение обратное к конформному является конформным.

Аналитическая функция $f(z)$, у которой $f'(z) \neq 0$, локально осуществляет конформное отображение.

Теорема Римана.

Для произвольных односвязных областей D и D^* , границы которых состоят более чем из одной точки, существует конформное отображение области D на область D^* .

I. Конформные отображения

В этой части мы познакомимся с приложениями теории конформных отображений к решению некоторых задач, имеющих физическое содержание.

Определение.

Отображение области $D \subset \mathbb{C}$ на область $D' \subset \mathbb{C}$ называют *конформным*, если оно

1. *является взаимно однозначным;*
- и в каждой точке $z \in D$ обладает свойствами:
2. *постоянства растяжения по всем направлениям;*
3. *консерватизма углов.*

Отображение обратное к конформному является конформным.

Аналитическая функция $f(z)$, у которой $f'(z) \neq 0$, локально осуществляет конформное отображение.

Теорема Римана.

Для произвольных односвязных областей D и D^* , границы которых состоят более чем из одной точки, существует конформное отображение области D на область D^* .

I. Конформные отображения

В этой части мы познакомимся с приложениями теории конформных отображений к решению некоторых задач, имеющих физическое содержание.

Определение.

Отображение области $D \subset \mathbb{C}$ на область $D' \subset \mathbb{C}$ называют *конформным*, если оно

1. *является взаимно однозначным;*
- и в каждой точке $z \in D$ обладает свойствами:
2. *постоянства растяжения по всем направлениям;*
3. *консерватизма углов.*

Отображение обратное к конформному является конформным.

Аналитическая функция $f(z)$, у которой $f'(z) \neq 0$, локально осуществляет конформное отображение.

Теорема Римана.

Для произвольных односвязных областей D и D^* , границы которых состоят более чем из одной точки, существует конформное отображение области D на область D^* .

Для двух односвязных областей D и D^* , существует бесконечно много конформных отображений $f : D \rightarrow D^*$. Семейство таких отображений зависит от трех действительных параметров. Фиксируя значения *трех параметром*, мы получим *единственное* конформное отображение $f : D \rightarrow D^*$, удовлетворяющее указанным условиям. В зависимости от задачи могут выбираться различные наборы параметров, обеспечивающих единственность отображения.

Для многосвязных областей ситуация сложнее. Концентрическое кольцо $K(r, R) = \{r < |z| < R\}$ может быть конформно отображено на кольцо $K(r_1, R_1)$ тогда и только тогда, когда эти кольца подобны, т.е. $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r}$. Всякая двухсвязная область $D \subset \mathbb{C}$ может быть конформно отображена на некоторое концентрическое кольцо $K(r, R)$, при этом отношение $\frac{R}{r}$ определено однозначно и называется *конформным модулем* области D . Следовательно две двухсвязные области, имеющие разные конформные модули, не могут быть конформно отображены одна на другую.

Любую n -связную область $D \subset \mathbb{C}$, ограниченную простыми замкнутыми кривыми, можно конформно отобразить на всю расширенную комплексную плоскость \mathbb{C} с n разрезами по некоторым отрезкам прямых, параллельных действительной оси.

Для двух односвязных областей D и D^* , существует бесконечно много конформных отображений $f : D \rightarrow D^*$. Семейство таких отображений зависит от трех действительных параметров. Фиксируя значения *трех параметром*, мы получим *единственное* конформное отображение $f : D \rightarrow D^*$, удовлетворяющее указанным условиям. В зависимости от задачи могут выбираться различные наборы параметров, обеспечивающих единственность отображения.

Для многосвязных областей ситуация сложнее. Концентрическое кольцо $K(r, R) = \{r < |z| < R\}$ может быть конформно отображено на кольцо $K(r_1, R_1)$ тогда и только тогда, когда эти кольца подобны, т.е. $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r}$. Всякая двухсвязная область $D \subset \mathbb{C}$ может быть конформно отображена на некоторое концентрическое кольцо $K(r, R)$, при этом отношение $\frac{R}{r}$ определено однозначно и называется *конформным модулем* области D . Следовательно две двухсвязные области, имеющие разные конформные модули, не могут быть конформно отображены одна на другую.

Любую n -связную область $D \subset \mathbb{C}$, ограниченную простыми замкнутыми кривыми, можно конформно отобразить на всю расширенную комплексную плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ с n разрезами по некоторым отрезкам прямых, параллельных действительной оси.

Для двух односвязных областей D и D^* , существует бесконечно много конформных отображений $f : D \rightarrow D^*$. Семейство таких отображений зависит от трех действительных параметров. Фиксируя значения *трех параметром*, мы получим *единственное* конформное отображение $f : D \rightarrow D^*$, удовлетворяющее указанным условиям. В зависимости от задачи могут выбираться различные наборы параметров, обеспечивающих единственность отображения.

Для многосвязных областей ситуация сложнее. Концентрическое кольцо $K(r, R) = \{r < |z| < R\}$ может быть конформно отображено на кольцо $K(r_1, R_1)$ тогда и только тогда, когда эти кольца подобны, т.е. $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r}$. Всякая двухсвязная область $D \subset \mathbb{C}$ может быть конформно отображена на некоторое концентрическое кольцо $K(r, R)$, при этом отношение $\frac{R}{r}$ определено однозначно и называется *конформным модулем* области D . Следовательно две двухсвязные области, имеющие разные конформные модули, не могут быть конформно отображены одна на другую.

Любую n -связную область $D \subset \mathbb{C}$, ограниченную простыми замкнутыми кривыми, можно конформно отобразить на всю расширенную комплексную плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ с n разрезами по некоторым отрезкам прямых, параллельных действительной оси.

I. § 3. Плоскопараллельные векторные поля

Рассмотрим *стационарное плоскопараллельное* векторное поле \mathbf{V} в пространстве \mathbf{R}^3 , т.е. будем предполагать, что

1. векторы поля зависят лишь от координат точки приложения и не меняются с течением времени;
2. все векторы поля параллельны некоторой фиксированной плоскости α .

Такое поле однозначно определяется плоским полем векторов в плоскости α , вводя в которой систему декартовых координат (x, y) и полагая $\mathbf{z} = x + iy$, мы будем использовать для поля \mathbf{V} с компонентами (V_x, V_y) и комплексную форму записи $\mathbf{V} = V_x + iV_y$, где $V_x = V_x(x, y) = V_x(z)$, $V_y = V_y(x, y) = V_y(z)$.

Основными интегральными характеристиками плоского векторного поля \mathbf{V} являются *поток* N через кривую γ и *циркуляция* Γ вдоль замкнутого контура C :

$$N = \int_{\gamma} (\mathbf{V}, \vec{n}) dl = \int_{\gamma} -V_y dx + V_x dy, \quad \Gamma = \int_C (\mathbf{V}, \vec{\tau}) dl = \int_C V_x dx + V_y dy,$$

в этих формулах $\vec{\tau}$ – единичный касательный вектор, \vec{n} – единичная нормаль и $\vec{n} = -i\vec{\tau}$.

I. § 3. Плоскопараллельные векторные поля

Рассмотрим *стационарное плоскопараллельное* векторное поле \mathbf{V} в пространстве \mathbf{R}^3 , т.е. будем предполагать, что

1. векторы поля зависят лишь от координат точки приложения и не меняются с течением времени;
2. все векторы поля параллельны некоторой фиксированной плоскости α .

Такое поле однозначно определяется плоским полем векторов в плоскости α , вводя в которой систему декартовых координат (x, y) и полагая $\mathbf{z} = x + iy$, мы будем использовать для поля \mathbf{V} с компонентами (V_x, V_y) и комплексную форму записи $\mathbf{V} = V_x + iV_y$, где $V_x = V_x(x, y) = V_x(z)$, $V_y = V_y(x, y) = V_y(z)$.

Основными интегральными характеристиками плоского векторного поля \mathbf{V} являются *поток* N через кривую γ и *циркуляция* Γ вдоль замкнутого контура C :

$$N = \int_{\gamma} (\mathbf{V}, \vec{n}) dl = \int_{\gamma} -V_y dx + V_x dy, \quad \Gamma = \int_C (\mathbf{V}, \vec{\tau}) dl = \int_C V_x dx + V_y dy,$$

в этих формулах $\vec{\tau}$ – единичный касательный вектор, \vec{n} – единичная нормаль и $\vec{n} = -i\vec{\tau}$.

I. § 3. Плоскопараллельные векторные поля

Рассмотрим *стационарное плоскопараллельное* векторное поле \mathbf{V} в пространстве \mathbf{R}^3 , т.е. будем предполагать, что

1. векторы поля зависят лишь от координат точки приложения и не меняются с течением времени;
2. все векторы поля параллельны некоторой фиксированной плоскости α .

Такое поле однозначно определяется плоским полем векторов в плоскости α , вводя в которой систему декартовых координат (x, y) и полагая $\mathbf{z} = x + iy$, мы будем использовать для поля \mathbf{V} с компонентами (V_x, V_y) и комплексную форму записи $\mathbf{V} = V_x + iV_y$, где $V_x = V_x(x, y) = V_x(z)$, $V_y = V_y(x, y) = V_y(z)$.

Основными интегральными характеристиками плоского векторного поля \mathbf{V} являются *поток* N через кривую γ и *циркуляция* Γ вдоль замкнутого контура C :

$$N = \int_{\gamma} (\mathbf{V}, \vec{n}) dl = \int_{\gamma} -V_y dx + V_x dy, \quad \Gamma = \int_C (\mathbf{V}, \vec{\tau}) dl = \int_C V_x dx + V_y dy,$$

в этих формулах $\vec{\tau}$ – единичный касательный вектор, \vec{n} – единичная нормаль и $\vec{n} = -i\vec{\tau}$.

Если гладкое поле \mathbf{V} является бездивергентным в области $D \subset \mathbb{C}$, т.е.

$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$, то дифференциальная форма потока

$\omega_N = -V_y dx + V_x dy$ является замкнутой в D , т.е. $d\omega_N = 0$. Согласно теореме Пуанкаре форма ω_N является локально точной, и у нее существует первообразная, т.е. такая функция $v = v(x, y)$, что $dv = \omega_N$ и следовательно

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -V_y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = V_x. \quad (1.3.1)$$

Функцию v называют *функцией тока*, поскольку ее линии уровня $L_a = \{(x, y) \in D \mid v(x, y) = a\}$ совпадают с траекториями движения, определяемыми векторным полем \mathbf{V} , т.е. кривая L_a является интегральной линией, поскольку в каждой точке соответствующий вектор поля \mathbf{V} является касательным к кривой L_a . Линию уровня L_a называют *линией тока*, а область, ограниченную двумя линиями тока называют *трубкой тока*. Легко заметить, что поток через любое сечение трубки тока одинаков. Действительно, поток через сечение $\gamma(a, b)$ с началом в точке $z_a \in L_a$ и концом в точке $z_b \in L_b$ вычисляется просто

$$N = \int_{\gamma(a,b)} \omega_N = \int_{\gamma(a,b)} dv = v(z_b) - v(z_a) = b - a.$$

Если гладкое поле \mathbf{V} является бездивергентным в области $D \subset \mathbb{C}$, т.е.

$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$, то дифференциальная форма потока

$\omega_N = -V_y dx + V_x dy$ является замкнутой в D , т.е. $d\omega_N = 0$. Согласно теореме Пуанкаре форма ω_N является локально точной, и у нее существует первообразная, т.е. такая функция $v = v(x, y)$, что $dv = \omega_N$ и следовательно

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -V_y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = V_x. \quad (1.3.1)$$

Функцию v называют *функцией тока*, поскольку ее линии уровня $L_a = \{(x, y) \in D \mid v(x, y) = a\}$ совпадают с траекториями движения, определяемыми векторным полем \mathbf{V} , т.е. кривая L_a является интегральной линией, поскольку в каждой точке соответствующий вектор поля \mathbf{V} является касательным к кривой L_a . Линию уровня L_a называют *линией тока*, а область, ограниченную двумя линиями тока называют *трубкой тока*. Легко заметить, что поток через любое сечение трубки тока одинаков. Действительно, поток через сечение $\gamma(a, b)$ с началом в точке $z_a \in L_a$ и концом в точке $z_b \in L_b$ вычисляется просто

$$N = \int_{\gamma(a,b)} \omega_N = \int_{\gamma(a,b)} dv = v(z_b) - v(z_a) = b - a.$$

Если гладкое поле \mathbf{V} является безвихревым в области $D \subset \mathbb{C}$, т.е.

$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$, то дифференциальная форма работы

$\omega_{\Gamma} = V_x dx + V_y dy$ является замкнутой в D , т.е. $d\omega_{\Gamma} = 0$. Согласно теореме Пуанкаре форма ω_{Γ} является локально точной, и у нее существует первообразная, т.е. такая функция $u = u(x, y)$, что $du = \omega_{\Gamma}$ и следовательно

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{V}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = V_y. \quad (1.3.2)$$

Функцию u называют *потенциальной функцией* поля \mathbf{V} .

Если гладкое поле \mathbf{V} является одновременно бездивергентным и безвихревым в области D , то согласно равенствам (1.3.1) и (1.3.2) потенциальная функция u и функция тока v оказываются связанными условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = V_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = V_y$$

и являются действительной и мнимой частями аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, называемой *комплексным потенциалом* поля \mathbf{V} .

Если гладкое поле \mathbf{V} является безвихревым в области $D \subset \mathbb{C}$, т.е.

$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$, то дифференциальная форма работы

$\omega_{\Gamma} = V_x dx + V_y dy$ является замкнутой в D , т.е. $d\omega_{\Gamma} = 0$. Согласно теореме Пуанкаре форма ω_{Γ} является локально точной, и у нее существует первообразная, т.е. такая функция $u = u(x, y)$, что $du = \omega_{\Gamma}$ и следовательно

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{V}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = V_y. \quad (1.3.2)$$

Функцию u называют *потенциальной функцией* поля \mathbf{V} .

Если гладкое поле \mathbf{V} является одновременно бездивергентным и безвихревым в области D , то согласно равенствам (1.3.1) и (1.3.2) потенциальная функция u и функция тока v оказываются связанными условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = V_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = V_y$$

и являются действительной и мнимой частями аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, называемой *комплексным потенциалом* поля \mathbf{V} .

Если гладкое поле \mathbf{V} является безвихревым в области $D \subset \mathbb{C}$, т.е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0, \text{ то дифференциальная форма работы}$$

$\omega_{\Gamma} = V_x dx + V_y dy$ является замкнутой в D , т.е. $d\omega_{\Gamma} = 0$. Согласно теореме Пуанкаре форма ω_{Γ} является локально точной, и у нее существует первообразная, т.е. такая функция $u = u(x, y)$, что $du = \omega_{\Gamma}$ и следовательно

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{V}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = V_y. \quad (1.3.2)$$

Функцию u называют *потенциальной функцией* поля \mathbf{V} .

Если гладкое поле \mathbf{V} является одновременно бездивергентным и безвихревым в области D , то согласно равенствам (1.3.1) и (1.3.2) потенциальная функция u и функция тока v оказываются связанными условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = V_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = V_y$$

и являются действительной и мнимой частями аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, называемой *комплексным потенциалом* поля \mathbf{V} .

Через комплексный потенциал выражаются все основные характеристики поля \mathbf{V} , и, в частности, само поле $\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + i\mathbf{V}_y = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)}$. (1.3.3)

Интегрируя вдоль замкнутого контура \mathbf{C} производную комплексного потенциала, получаем

$$\int_{\mathbf{C}} f'(z) dz = \int_{\mathbf{C}} \mathbf{V}_x dx + \mathbf{V}_y dy + i \int_{\mathbf{C}} -\mathbf{V}_y dx + \mathbf{V}_x dy = \Gamma + iN. \quad (1.3.4)$$

Если область \mathbf{D} является многосвязной, то локально можно найти однозначно определенную ветвь комплексного потенциала, однако глобально (во всей области) комплексный потенциал может оказаться многозначной функцией.

Если векторное поле задано в явном виде, то комплексный потенциал может быть найден стандартными методами. На практике же ситуация чаще выглядит наоборот: имеется некоторое описание физического процесса, при котором непосредственное нахождение векторного поля представляется проблематичным, однако удастся найти комплексный потенциал, определяемый условиями задачи. В свою очередь знание комплексного потенциала позволяет найти линии тока, соответствующее векторное поле и его интегральные характеристики.

Через комплексный потенциал выражаются все основные характеристики поля \mathbf{V} , и, в частности, само поле $\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + i\mathbf{V}_y = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)}$. (1.3.3)

Интегрируя вдоль замкнутого контура C производную комплексного потенциала, получаем

$$\int_C f'(z) dz = \int_C \mathbf{V}_x dx + \mathbf{V}_y dy + i \int_C -\mathbf{V}_y dx + \mathbf{V}_x dy = \Gamma + iN. \quad (1.3.4)$$

Если область D является многосвязной, то локально можно найти однозначно определенную ветвь комплексного потенциала, однако глобально (во всей области) комплексный потенциал может оказаться многозначной функцией.

Если векторное поле задано в явном виде, то комплексный потенциал может быть найден стандартными методами. На практике же ситуация чаще выглядит наоборот: имеется некоторое описание физического процесса, при котором непосредственное нахождение векторного поля представляется проблематичным, однако удастся найти комплексный потенциал, определяемый условиями задачи. В свою очередь знание комплексного потенциала позволяет найти линии тока, соответствующее векторное поле и его интегральные характеристики.

Через комплексный потенциал выражаются все основные характеристики

поля V , и, в частности, само поле $V = V_x + iV_y = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)}$. (1.3.3)

Интегрируя вдоль замкнутого контура C производную комплексного потенциала, получаем

$$\int_C f'(z) dz = \int_C V_x dx + V_y dy + i \int_C -V_y dx + V_x dy = \Gamma + iN. \quad (1.3.4)$$

Если область D является многосвязной, то локально можно найти однозначно определенную ветвь комплексного потенциала, однако глобально (во всей области) комплексный потенциал может оказаться многозначной функцией.

Если векторное поле задано в явном виде, то комплексный потенциал может быть найден стандартными методами. На практике же ситуация чаще выглядит наоборот: имеется некоторое описание физического процесса, при котором непосредственное нахождение векторного поля представляется проблематичным, однако удастся найти комплексный потенциал, определяемый условиями задачи. В свою очередь знание комплексного потенциала позволяет найти линии тока, соответствующее векторное поле и его интегральные характеристики.

Через комплексный потенциал выражаются все основные характеристики

поля V , и, в частности, само поле $V = V_x + iV_y = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)}$. (1.3.3)

Интегрируя вдоль замкнутого контура C производную комплексного потенциала, получаем

$$\int_C f'(z) dz = \int_C V_x dx + V_y dy + i \int_C -V_y dx + V_x dy = \Gamma + iN. \quad (1.3.4)$$

Если область D является многосвязной, то локально можно найти однозначно определенную ветвь комплексного потенциала, однако глобально (во всей области) комплексный потенциал может оказаться многозначной функцией.

Если векторное поле задано в явном виде, то комплексный потенциал может быть найден стандартными методами. На практике же ситуация чаще выглядит наоборот: имеется некоторое описание физического процесса, при котором непосредственное нахождение векторного поля представляется проблематичным, однако удастся найти комплексный потенциал, определяемый условиями задачи. В свою очередь знание комплексного потенциала позволяет найти линии тока, соответствующее векторное поле и его интегральные характеристики.

I. § 4. Комплексный потенциал в гидродинамике

Рассмотрим векторное поле \mathbf{V} поле скоростей стационарного плоского течения идеальной несжимаемой жидкости в области $D \subset \mathbb{C}$.

Обозначим через $B(z, r)$ – круг, через C_r – его граничную окружность, а через S_r – его площадь. Если в области D нет источников (стоков), то поток N через окружность C_r равен нулю (сколько втекает столько и вытекает). Используя векторный вариант формулы Грина, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{div} \mathbf{V} \, ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{n}) \, dl = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{N}{S_r} = 0.$$

Следовательно поле \mathbf{V} является бездивергентным.

В стационарном течении жидкости при отсутствии внешнего воздействия циркуляция Γ вектора скорости вдоль окружности C_r равна нулю, и векторное поле \mathbf{V} является безвихревым, поскольку

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{rot} \mathbf{V} \, ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{\tau}) \, dl = 0.$$

I. § 4. Комплексный потенциал в гидродинамике

Рассмотрим векторное поле \mathbf{V} поле скоростей стационарного плоского течения идеальной несжимаемой жидкости в области $D \subset \mathbb{C}$.

Обозначим через $B(z, r)$ – круг, через C_r – его граничную окружность, а через S_r – его площадь. Если в области D нет источников (стоков), то поток N через окружность C_r равен нулю (сколько втекает столько и вытекает). Используя векторный вариант формулы Грина, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{div} \mathbf{V} \, ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{n}) \, dl = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{N}{S_r} = 0.$$

Следовательно поле \mathbf{V} является бездивергентным.

В стационарном течении жидкости при отсутствии внешнего воздействия циркуляция Γ вектора скорости вдоль окружности C_r равна нулю, и векторное поле \mathbf{V} является безвихревым, поскольку

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{rot} \mathbf{V} \, ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{\tau}) \, dl = 0.$$

I. § 4. Комплексный потенциал в гидродинамике

Рассмотрим векторное поле \mathbf{V} поле скоростей стационарного плоского течения идеальной несжимаемой жидкости в области $D \subset \mathbb{C}$.

Обозначим через $B(z, r)$ – круг, через C_r – его граничную окружность, а через S_r – его площадь. Если в области D нет источников (стоков), то поток N через окружность C_r равен нулю (сколько втекает столько и вытекает). Используя векторный вариант формулы Грина, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{div} \mathbf{V} \, ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{n}) \, dl = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{N}{S_r} = 0.$$

Следовательно поле \mathbf{V} является бездивергентным.

В стационарном течении жидкости при отсутствии внешнего воздействия циркуляция Γ вектора скорости вдоль окружности C_r равна нулю, и векторное поле \mathbf{V} является безвихревым, поскольку

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{rot} \mathbf{V} \, ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{\tau}) \, dl = 0.$$

I. § 4. Комплексный потенциал в гидродинамике

Рассмотрим векторное поле \mathbf{V} поле скоростей стационарного плоского течения идеальной несжимаемой жидкости в области $D \subset \mathbb{C}$.

Обозначим через $B(z, r)$ – круг, через C_r – его граничную окружность, а через S_r – его площадь. Если в области D нет источников (стоков), то поток N через окружность C_r равен нулю (сколько втекает столько и вытекает). Используя векторный вариант формулы Грина, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{div} \mathbf{V} \, ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{n}) \, dl = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{N}{S_r} = 0.$$

Следовательно поле \mathbf{V} является бездивергентным.

В стационарном течении жидкости при отсутствии внешнего воздействия циркуляция Γ вектора скорости вдоль окружности C_r равна нулю, и векторное поле \mathbf{V} является безвихревым, поскольку

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \iint_{B(z, r)} \operatorname{rot} \mathbf{V} \, ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{S_r} \int_{C_r} (\mathbf{V}, \vec{\tau}) \, dl = 0.$$

Таким образом гладкое стационарное плоское поле скоростей течения идеальной несжимаемой жидкости является одновременно бездивергентным и безвихревым и следовательно описывается некоторым комплексным потенциалом $f(z)$, осуществляющим конформное отображение рассматриваемой области D на некоторую область D^* , строение которой определяется условиями рассматриваемой задачи.

Простейшими примерами векторных полей с особенностями являются точечные источник и вихрь.

1. Источник. Поле скоростей точечного источника, расположенного в начале координат и порождающего безциркулярное течение жидкости, имеет вид

$$\mathbf{V} = \frac{N}{2\pi r} \vec{e}_r = \frac{N}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}}$$

а его комплексный потенциал

$$f(z) = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c,$$

где N – поток через замкнутый контур вокруг начала координат.

Таким образом гладкое стационарное плоское поле скоростей течения идеальной несжимаемой жидкости является одновременно бездивергентным и безвихревым и следовательно описывается некоторым комплексным потенциалом $f(z)$, осуществляющим конформное отображение рассматриваемой области D на некоторую область D^* , строение которой определяется условиями рассматриваемой задачи.

Простейшими примерами векторных полей с особенностями являются точечные источник и вихрь.

1. Источник. Поле скоростей точечного источника, расположенного в начале координат и порождающего безциркулярное течение жидкости, имеет вид

$$\mathbf{V} = \frac{N}{2\pi r} \mathbf{e}_r = \frac{N}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}}$$

а его комплексный потенциал

$$f(z) = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c,$$

где N – поток через замкнутый контур вокруг начала координат.

Таким образом гладкое стационарное плоское поле скоростей течения идеальной несжимаемой жидкости является одновременно бездивергентным и безвихревым и следовательно описывается некоторым комплексным потенциалом $f(z)$, осуществляющим конформное отображение рассматриваемой области D на некоторую область D^* , строение которой определяется условиями рассматриваемой задачи.

Простейшими примерами векторных полей с особенностями являются точечные источник и вихрь.

1. Источник. Поле скоростей точечного источника, расположенного в начале координат и порождающего безциркулярное течение жидкости, имеет вид

$$\mathbf{V} = \frac{N}{2\pi r} \vec{e}_r = \frac{N}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}}$$

а его комплексный потенциал

$$f(z) = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c,$$

где N – поток через замкнутый контур вокруг начала координат.

Функция тока $v = \operatorname{Im} \left(\frac{N}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c \right) = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Arg} z + c_2$ как и следовало ожидать имеет радиальный вид.

Поскольку область $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ является двусвязной то комплексный потенциал в данном случае оказывается многозначной функцией. Проводя в плоскости разрез вдоль положительной (отрицательной) полуоси и выделяя однозначную ветвь, мы получаем отображение на горизонтальную полосу ширины N .

2. Вихрь. Пусть имеется единственный точечный вихрь, расположенный в начале координат. Совершенно аналогичными рассуждениями получаем

$V = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{i}{z}$, где постоянная Γ – циркуляция вектора скорости вдоль любого замкнутого контура, окружающего начало координат. По сравнению с пунктом 1 происходит поворот всех векторов поля на угол $\pi/2$. Комплексный потенциал отличается от предыдущего лишь множителем $1/i$

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z + c.$$

При этом линиями уровня функции тока $v = \operatorname{Im} \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z + c \right) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln |z| + c_1$ являются окружности с центром в начале координат.

Функция тока $v = \text{Im} \left(\frac{N}{2\pi} \text{Ln } z + c \right) = \frac{N}{2\pi} \text{Arg } z + c_2$ как и следовало ожидать имеет радиальный вид.

Поскольку область $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ является двусвязной то комплексный потенциал в данном случае оказывается многозначной функцией. Проводя в плоскости разрез вдоль положительной (отрицательной) полуоси и выделяя однозначную ветвь, мы получаем отображение на горизонтальную полосу ширины N .

2. Вихрь. Пусть имеется единственный точечный вихрь, расположенный в начале координат. Совершенно аналогичными рассуждениями получаем

$V = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{i}{z}$, где постоянная Γ – циркуляция вектора скорости вдоль любого замкнутого контура, окружающего начало координат. По сравнению с пунктом 1 происходит поворот всех векторов поля на угол $\pi/2$. Комплексный потенциал отличается от предыдущего лишь множителем $1/i$

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln } z + c.$$

При этом линиями уровня функции тока $v = \text{Im} \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln } z + c \right) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln |z| + c_1$ являются окружности с центром в начале координат.

I. § 5. Обтекание бесконечной кривой

Рассмотрим течение жидкости в области D , ограниченной кривой γ , проходящей через бесконечно удаленную точку. Мнимая часть комплексного потенциала $v = \text{Im } f(z)$ сохраняет постоянное значение на линии тока, в частности, и на граничной кривой γ функция тока является постоянной $v = C_0 \in \mathbb{R}$. Линии тока проходят через бесконечно удаленную точку, и их образы, лежащие на параллельных прямых, могут иметь в качестве общей точки лишь точку $w = \infty$, т.е. $f(\infty) = \infty$. Следовательно комплексный потенциал отображает область D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > C_0$. Чтобы однозначно определить комплексный потенциал нужно задать еще два параметра: C_0 и значение скорости в некоторой граничной точке (часто фиксируется значение скорости в бесконечно удаленной точке). При нахождении основных характеристик потока основной интерес представляет не сам комплексный потенциал, а его производная, поэтому значение постоянной C_0 можно выбирать из соображений удобства.

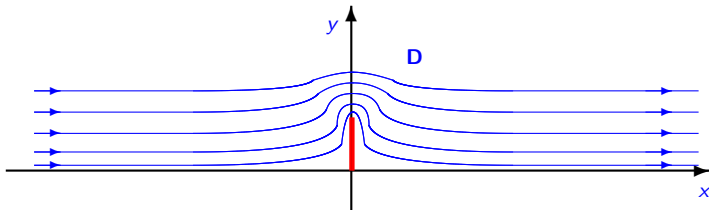
Комплексный потенциал $w = f(z)$ безциркуляционного потока V , обтекающего бесконечную кривую γ , реализует конформное отображение криволинейной области D на верхнюю полуплоскость с нормировкой: $f(\infty) = \infty$, $|f'(\alpha)| = |V(\alpha)| = v_\alpha$, $\alpha \in \gamma$.

I. § 5. Обтекание бесконечной кривой

Рассмотрим течение жидкости в области D , ограниченной кривой γ , проходящей через бесконечно удаленную точку. Мнимая часть комплексного потенциала $v = \operatorname{Im} f(z)$ сохраняет постоянное значение на линии тока, в частности, и на граничной кривой γ функция тока является постоянной $v = C_0 \in \mathbb{R}$. Линии тока проходят через бесконечно удаленную точку, и их образы, лежащие на параллельных прямых, могут иметь в качестве общей точки лишь точку $w = \infty$, т.е. $f(\infty) = \infty$. Следовательно комплексный потенциал отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > C_0$. Чтобы однозначно определить комплексный потенциал нужно задать еще два параметра: C_0 и значение скорости в некоторой граничной точке (часто фиксируется значение скорости в бесконечно удаленной точке). При нахождении основных характеристик потока основной интерес представляет не сам комплексный потенциал, а его производная, поэтому значение постоянной C_0 можно выбирать из соображений удобства.

Комплексный потенциал $w = f(z)$ безциркуляционного потока V , обтекающего бесконечную кривую γ , реализует конформное отображение криволинейной области D на верхнюю полуплоскость с нормировкой: $f(\infty) = \infty$, $|f'(\alpha)| = |V(\alpha)| = v_\alpha$, $\alpha \in \gamma$.

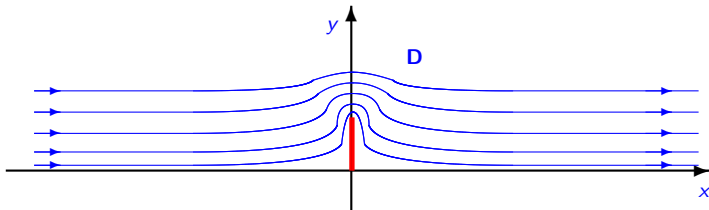
1) Рассмотрим обтекание пластины высоты h бесконечно глубоким потоком жидкости, имеющим в бесконечности скорость v_∞ .



Искомый комплексный потенциал (конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость) реализуется функцией $f(z) = v_\infty \sqrt{z^2 + h^2}$. Поле скоростей находится из равенства $\mathbf{V} = \overline{f'(z)}$, а линии тока $\text{Im } f(z) = C > 0$ удовлетворяют уравнению $(u + iC)^2 = v_\infty^2 [(x + iy)^2 + h^2]$ и имеют вид

$$y = \frac{C}{v_\infty} \sqrt{1 + \frac{v_\infty^2 h^2}{v_\infty^2 x^2 + C^2}}.$$

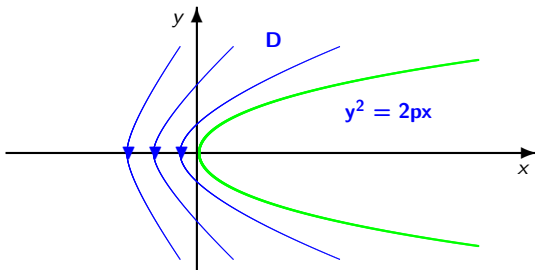
1) Рассмотрим обтекание плотины высоты h бесконечно глубоким потоком жидкости, имеющим в бесконечности скорость v_∞ .



Искомый комплексный потенциал (конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость) реализуется функцией $f(z) = v_\infty \sqrt{z^2 + h^2}$. Поле скоростей находится из равенства $\mathbf{V} = \overline{f'(z)}$, а линии тока $\text{Im } f(z) = C > 0$ удовлетворяют уравнению $(u + iC)^2 = v_\infty^2 [(x + iy)^2 + h^2]$ и имеют вид

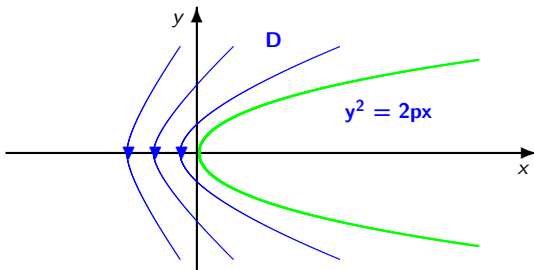
$$y = \frac{C}{v_\infty} \sqrt{1 + \frac{v_\infty^2 h^2}{v_\infty^2 x^2 + C^2}}.$$

2) Рассмотрим обтекание параболы $y^2 = 2px$ потоком жидкости, имеющим в точке $z = 0$ скорость v_0 .



Отображение $w = \sqrt{z - \frac{p}{2}}$, устанавливая соответствие между параболami $y^2 = 4C^2(x + C^2 - p/2)$ с фокусами в точке $z = \frac{p}{2}$ и прямыми $\text{Im } w = v = C > C_0$, отображает область D на полуплоскость $v > \sqrt{p/2}$. При этом $|w'(0)| = \frac{1}{\sqrt{2p}}$. Поскольку скорость течения в точке $z = 0$ равна v_0 , то комплексный потенциал имеет вид $f(z) = v_0 \sqrt{2pz - p^2}$.

2) Рассмотрим обтекание параболы $y^2 = 2px$ потоком жидкости, имеющим в точке $z = 0$ скорость v_0 .



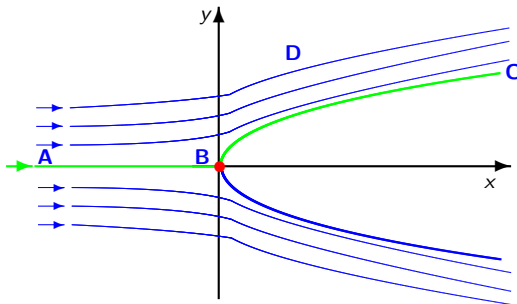
Отображение $w = \sqrt{z - \frac{p}{2}}$, устанавливая соответствие между параболami

$y^2 = 4C^2(x + C^2 - p/2)$ с фокусами в точке $z = \frac{p}{2}$ и прямыми

$\text{Im } w = v = C > C_0$, отображает область D на полуплоскость $v > \sqrt{p/2}$. При этом $|w'(0)| = \frac{1}{\sqrt{2p}}$. Поскольку скорость течения в точке $z = 0$ равна v_0 , то

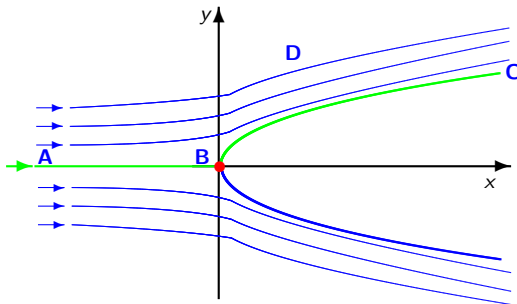
комплексный потенциал имеет вид $f(z) = v_0 \sqrt{2pz - p^2}$.

3) Рассмотрим обтекание параболы $y^2 = 2px$ симметричным относительно действительной оси потоком жидкости, набегающим на параболу слева.



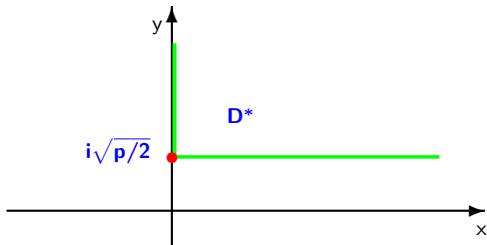
В силу симметрии отрицательная полуось является линией тока. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением потока, обтекающего контур ABC лежащий в верхней полуплоскости. Функция $g(z) = \sqrt{z - \frac{p}{2}}$ отображает область D , ограниченную контуром ABC , на область D^* – внутренность прямого угла.

3) Рассмотрим обтекание параболы $y^2 = 2px$ симметричным относительно действительной оси потоком жидкости, набегающим на параболу слева.



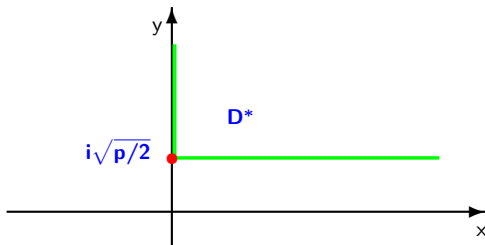
В силу симметрии отрицательная полуось является линией тока. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением потока, обтекающего контур **ABC** лежащий в верхней полуплоскости. Функция $g(z) = \sqrt{z - \frac{p}{2}}$ отображает область **D**, ограниченную контуром **ABC**, на область **D*** – внутренность прямого угла.

Отрицательная полуось отображается на луч $\left[i\sqrt{\frac{p}{2}}, +i\infty\right)$, дуга параболы **BC** отображается на луч $\left[i\sqrt{\frac{p}{2}}, +\infty + i\sqrt{\frac{p}{2}}\right)$.



Поэтому функция $h(z) = \left(\sqrt{z - \frac{p}{2}} - i\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2 = z - p - i\sqrt{2pz - p^2}$ отображает область **D** на верхнюю полуплоскость. Если фиксировать скорость в бесконечности, то искомый комплексный потенциал будет иметь вид $f(z) = v_\infty \left(z - p - i\sqrt{2pz - p^2}\right)$.

Отрицательная полуось отображается на луч $\left[i\sqrt{\frac{p}{2}}, +i\infty\right)$, дуга параболы **BC** отображается на луч $\left[i\sqrt{\frac{p}{2}}, +\infty + i\sqrt{\frac{p}{2}}\right)$.



Поэтому функция $h(z) = \left(\sqrt{z - \frac{p}{2}} - i\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2 = z - p - i\sqrt{2pz - p^2}$

отображает область **D** на верхнюю полуплоскость. Если фиксировать скорость в бесконечности, то искомый комплексный потенциал будет иметь вид

$$f(z) = v_{\infty} \left(z - p - i\sqrt{2pz - p^2} \right).$$

I. § 6. Комплексный потенциал в теплотехнике и электростатике

Теплотехника. Пусть функция $v = v(x, y)$ описывает установившееся распределение температуры в плоской односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, не содержащей тепловых источников. Согласно принципам теплотехники поток тепла $Q = -k \operatorname{grad} v$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{k} Q_x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y$. При постоянном коэффициенте k температура удовлетворяет уравнению Лапласа

$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Поэтому выражение $\omega = -\frac{1}{k} (Q_y dx - Q_x dy)$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, называемой *функцией тока тепла* и связанной с температурой v условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k} Q_x.$$

Линия уровня $u(x, y) = \text{const}$ является линией тока тепла, т.к. касательный вектор к ней параллелен вектору потока тепла $Q = -k \operatorname{grad} v$.

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется *комплексным потенциалом теплового потока*, и

$$Q = -k \operatorname{grad} v = -k \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -ik \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -ik \overline{f'(z)}.$$

I. § 6. Комплексный потенциал в теплотехнике и электростатике

Теплотехника. Пусть функция $v = v(x, y)$ описывает установившееся распределение температуры в плоской односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, не содержащей тепловых источников. Согласно принципам теплотехники поток тепла $Q = -k \operatorname{grad} v$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{k} Q_x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y$. При постоянном коэффициенте k температура удовлетворяет уравнению Лапласа

$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Поэтому выражение $\omega = -\frac{1}{k} (Q_y dx - Q_x dy)$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, называемой *функцией тока тепла* и связанной с температурой v условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k} Q_x.$$

Линия уровня $u(x, y) = \text{const}$ является линией тока тепла, т.к. касательный вектор к ней параллелен вектору потока тепла $Q = -k \operatorname{grad} v$.

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется *комплексным потенциалом теплового потока*, и

$$Q = -k \operatorname{grad} v = -k \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -ik \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -ik \overline{f'(z)}.$$

Электростатика. Пусть \mathbf{E} – вектор напряженности электростатического поля в некоторой односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, не содержащей зарядов. Так как для поддержания электростатического поля не требуется затраты энергии, то циркуляция вектора напряженности \mathbf{E} вдоль любого замкнутого контура равна нулю.^а Следовательно поле \mathbf{E} является потенциальным и $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$.

Поэтому выражение

$$\omega_1 = -(E_x dx + E_y dy)$$

является полным дифференциалом некоторой функции $v = v(x, y)$, называемой *потенциальной функцией* или *потенциалом* поля, а ее линии уровня $v(x, y) = \text{const}$ называют *экипотенциальными линиями*. При этом

$$\mathbf{E} = -\text{grad } v = -\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y},$$

и в каждой точке вектор напряженности \mathbf{E} направлен по нормали к проходящей через эту точку экипотенциальной линии.

^аЕсли бы существовал контур, при обходе которого в определенном направлении работа была бы положительной, то обход контура неограниченное число раз давал бы неограниченный источник энергии (*вечный двигатель!!!*).

Поскольку в области нет зарядов, то поток вектора напряженности через любой замкнутый контур равен нулю, поэтому поле \mathbf{E} является соленоидальным и

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Поэтому выражение $\omega_2 = -E_y dx + E_x dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, называемой *силовой функцией поля* и связанной с потенциалом v условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -E_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = E_x.$$

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется *комплексным потенциалом электростатического поля*, и

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} v = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -i\overline{f'(z)}.$$

I. § 7. Дробно-линейные функции

Во всех рассмотренных в параграфе 5 примерах для построения комплексного потенциала (конформного отображения исходной области на верхнюю полуплоскость) нам удалось обойтись достаточно элементарными соображениями. В более общей ситуации нахождения конформного отображения одной области на другую оказывается довольно сложной задачей. Поэтому в первую очередь нам нужно познакомиться с основными фактами и принципами теории конформных отображений.

Линейная функция $f(z) = \alpha z + \beta$ осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя и сводится к растяжению в $|\alpha|$ раз, повороту на угол $\arg \alpha$ и сдвигу на β .

При линейном отображении прямые переходят в прямые ($f(\infty) = \infty$), а окружности в окружности. Следовательно, линейным отображением верхнюю полуплоскость можно отобразить на любую другую полуплоскость, а единичный круг на любой другой круг.

I. § 7. Дробно-линейные функции

Во всех рассмотренных в параграфе 5 примерах для построения комплексного потенциала (конформного отображения исходной области на верхнюю полуплоскость) нам удалось обойтись достаточно элементарными соображениями. В более общей ситуации нахождения конформного отображения одной области на другую оказывается довольно сложной задачей. Поэтому в первую очередь нам нужно познакомиться с основными фактами и принципами теории конформных отображений.

Линейная функция $f(z) = \alpha z + \beta$ осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя и сводится к растяжению в $|\alpha|$ раз, повороту на угол $\arg \alpha$ и сдвигу на β .

При линейном отображении прямые переходят в прямые ($f(\infty) = \infty$), а окружности в окружности. Следовательно, линейным отображением верхнюю полуплоскость можно отобразить на любую другую полуплоскость, а единичный круг на любой другой круг.

Дробно-линейная функция $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\xi z + \eta}$ осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя и обладает замечательным круговым свойством: *прямые и окружности отображаются либо в прямые, либо в окружности*. Таким образом дробно-линейная функция отображает верхнюю полуплоскость либо на полуплоскость, либо на внутренность некоторого круга, либо на внешность круга. При этом $f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, $f\left(-\frac{\eta}{\xi}\right) = \infty$, $f(\infty) = \frac{\alpha}{\xi}$.

Общий вид дробно-линейных отображений

- 1) верхней полуплоскости на себя: $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, где a, b, c, d – действительные числа и $ad - bc > 0$;
- 2) верхней полуплоскости на единичный круг: $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}$, где θ – действительное число и $\operatorname{Im} \beta > 0$;
- 3) единичного круга на себя: $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$, где θ – действительное число и $|\alpha| < 1$.

Дробно-линейная функция $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\xi z + \eta}$ осуществляет конформное

отображение расширенной комплексной плоскости на себя и обладает замечательным круговым свойством: *прямые и окружности отображаются либо в прямые, либо в окружности*. Таким образом дробно-линейная функция отображает верхнюю полуплоскость либо на полуплоскость, либо на внутренность некоторого круга, либо на внешность круга. При этом

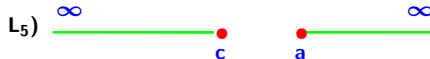
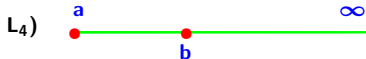
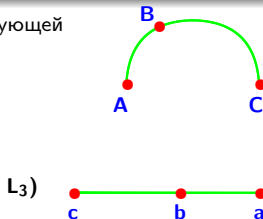
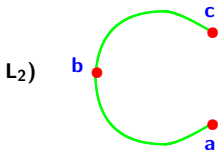
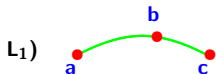
$$f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0, \quad f\left(-\frac{\eta}{\xi}\right) = \infty, \quad f(\infty) = \frac{\alpha}{\xi}.$$

Общий вид дробно-линейных отображений

- 1) верхней полуплоскости на себя: $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, где a, b, c, d – действительные числа и $ad - bc > 0$;
- 2) верхней полуплоскости на единичный круг: $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}$, где θ – действительное число и $\operatorname{Im} \beta > 0$;
- 3) единичного круга на себя: $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$, где θ – действительное число и $|\alpha| < 1$.

Если рассматривать отображение отрезка или дуги окружности, то их образами будут либо „отрезки“ прямой, либо дуги окружностей.

К примеру, дугу полуокружности ABC соответствующей дробно-линейной функцией f_k можно отобразить на любую из линий L_k , изображенных ниже.



Для нахождения соответствующих функций достаточно установить соответствие точек $A \Leftrightarrow a$, $B \Leftrightarrow b$, $C \Leftrightarrow c$ и воспользоваться ангармоническим отношением (в последних двух случаях полуокружность отображается на „бесконечные отрезки“ с соответствием точек $f_4(C) = \infty$ и $f_5(B) = \infty$). При этом дробно-линейная функция $f_m \circ f_n^{-1}$ отображает линию L_n на линию L_m .

I. § 8. Функция Жуковского

В различных приложениях оказывается полезной функция Жуковского, определяемая равенством $w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Функция $f(z)$ конформно отображает внешность круга $|z| \leq 1$ на область $D = \mathbb{C} \setminus I$, представляющую собой всю комплексную плоскость \mathbb{C} с разрезом по отрезку $I = [-1, 1]$. При этом и внутренность круга $|z| \leq 1$ тоже конформно отображается на область D .

Всякая окружность $|z| = R$ ($R \neq 1$) отображается в эллипс $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, где $a = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right)$, $b = \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right)$.

Отображение, осуществляемое функцией Жуковского, является двулистным, а обратная функция, определяемая формулой $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, является многозначной.

Функция Жуковского является однолистной в следующих областях:

- 1) $|z| < 1$ — внутренность единичного круга;
- 2) $|z| > 1$ — внешность единичного круга;
- 3) $\operatorname{Im} z > 0$ — верхняя полуплоскость;
- 4) $\operatorname{Im} z < 0$ — нижняя полуплоскость.

I. § 8. Функция Жуковского

В различных приложениях оказывается полезной функция Жуковского, определяемая равенством $w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Функция $f(z)$ конформно отображает внешность круга $|z| \leq 1$ на область $D = \mathbb{C} \setminus I$, представляющую собой всю комплексную плоскость \mathbb{C} с разрезом по отрезку $I = [-1, 1]$. При этом и внутренность круга $|z| \leq 1$ тоже конформно отображается на область D .

Всякая окружность $|z| = R$ ($R \neq 1$) отображается в эллипс $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, где $a = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right)$, $b = \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right)$.

Отображение, осуществляемое функцией Жуковского, является двулиственным, а обратная функция, определяемая формулой $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, является многозначной.

Функция Жуковского является однолистной в следующих областях:

- 1) $|z| < 1$ — внутренность единичного круга;
- 2) $|z| > 1$ — внешность единичного круга;
- 3) $\operatorname{Im} z > 0$ — верхняя полуплоскость;
- 4) $\operatorname{Im} z < 0$ — нижняя полуплоскость.

I. § 8. Функция Жуковского

В различных приложениях оказывается полезной функция Жуковского, определяемая равенством $w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Функция $f(z)$ конформно отображает внешность круга $|z| \leq 1$ на область $D = \mathbb{C} \setminus I$, представляющую собой всю комплексную плоскость \mathbb{C} с разрезом по отрезку $I = [-1, 1]$. При этом и внутренность круга $|z| \leq 1$ тоже конформно отображается на область D .

Всякая окружность $|z| = R$ ($R \neq 1$) отображается в эллипс $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, где $a = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right)$, $b = \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right)$.

Отображение, осуществляемое функцией Жуковского, является двулиственным, а обратная функция, определяемая формулой $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, является многозначной.

Функция Жуковского является однолистной в следующих областях:

- 1) $|z| < 1$ — внутренность единичного круга;
- 2) $|z| > 1$ — внешность единичного круга;
- 3) $\operatorname{Im} z > 0$ — верхняя полуплоскость;
- 4) $\operatorname{Im} z < 0$ — нижняя полуплоскость.

Функция Жуковского конформно отображает:

- 1) верхний полукруг $K^+ = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$;
- 2) нижний полукруг $K^- = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$;
- 3) область $G^+ = \{|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$;
- 4) область $G^- = \{|z| > 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$;
- 5) единичный круг $K = \{|z| < 1\}$ на внешность отрезка $[-1, 1]$;
- 6) верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на плоскость \mathbb{W} с разрезами на действительной оси по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$;
- 7) нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ на плоскость \mathbb{W} с разрезами на действительной оси по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

Как мы видим, не смотря на простоту определяющей ее формулы, отображение, осуществляемое функцией Жуковского, устроено совсем не так тривиально.

Функция Жуковского конформно отображает:

- 1) верхний полукруг $K^+ = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$;
- 2) нижний полукруг $K^- = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$;
- 3) область $G^+ = \{|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$;
- 4) область $G^- = \{|z| > 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$;
- 5) единичный круг $K = \{|z| < 1\}$ на внешность отрезка $[-1, 1]$;
- 6) верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на плоскость \mathbb{W} с разрезами на действительной оси по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$;
- 7) нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ на плоскость \mathbb{W} с разрезами на действительной оси по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

Как мы видим, не смотря на простоту определяющей ее формулы, отображение, осуществляемое функцией Жуковского, устроено совсем не так тривиально.

I. § 9. Тригонометрические и гиперболические функции

Используя формулу Эйлера, *тригонометрические функции* комплексного аргумента определим равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ аналитичны на всей комплексной плоскости и являются 2π -периодическими, функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ являются π -периодическими.

На комплексной плоскости сохраняются многие стандартные свойства тригонометрических функций действительного переменного: основное тригонометрическое тождество, формулы приведения, формулы для синуса и косинуса суммы и разности аргументов и т.д., при этом появляются и новые, к примеру, на комплексной плоскости синус и косинус, несмотря на выполнение основного тригонометрического тождества, перестают быть ограниченными функциями и принимают сколь угодно большие по модулю значения:

$$\cos(0 + iy) = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |y| \rightarrow \infty.$$

I. § 9. Тригонометрические и гиперболические функции

Используя формулу Эйлера, *тригонометрические функции* комплексного аргумента определим равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ аналитичны на всей комплексной плоскости и являются 2π -периодическими, функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ являются π -периодическими.

На комплексной плоскости сохраняются многие стандартные свойства тригонометрических функций действительного переменного: основное тригонометрическое тождество, формулы приведения, формулы для синуса и косинуса суммы и разности аргументов и т.д., при этом появляются и новые, к примеру, на комплексной плоскости синус и косинус, несмотря на выполнение основного тригонометрического тождества, перестают быть ограниченными функциями и принимают сколь угодно большие по модулю значения:

$$\cos(0 + iy) = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |y| \rightarrow \infty.$$

Пример. Найдем образ полуполосы

$$P = \{| \operatorname{Re} z | < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$$

при отображении, осуществляемом функцией $w = \sin z$.

Поскольку $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{iz}}{i} + \frac{i}{e^{iz}} \right)$, то искомое отображение можно представить в виде композиции простых преобразований

$$z_1 = iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad z_3 = \frac{z_2}{i}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z_3 + \frac{1}{z_3} \right).$$

В результате в плоскости \mathbb{Z}_1 получаем полуполосу

$$iP = \{\operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < \pi/2\},$$

в плоскости \mathbb{Z}_2 правый полукруг $K = \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$,

в плоскости \mathbb{Z}_3 нижний полукруг $K^- = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$

и наконец в плоскости \mathbb{W} получаем верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Гиперболические функции на комплексной плоскости определяются стандартными формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

и для них выполняется стандартное тождество $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

На комплексной плоскости тригонометрические и гиперболические функции выражаются одни через другие $\sin z = -i \operatorname{sh} iz$, $\cos z = \operatorname{ch} iz$.

Обратные тригонометрические и гиперболические функции выражаются через логарифмическую функцию

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right), \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

Гиперболические функции на комплексной плоскости определяются стандартными формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

и для них выполняется стандартное тождество $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

На комплексной плоскости тригонометрические и гиперболические функции выражаются одни через другие $\sin z = -i \operatorname{sh} iz$, $\cos z = \operatorname{ch} iz$.

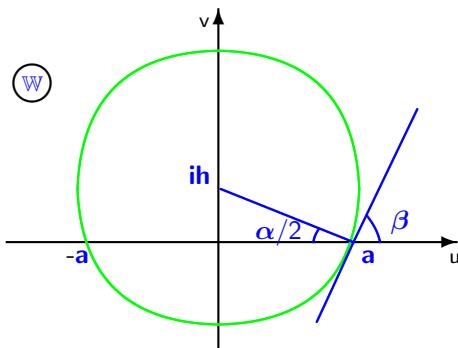
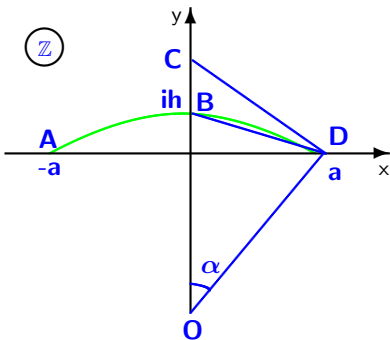
Обратные тригонометрические и гиперболические функции выражаются через логарифмическую функцию

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right), \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

I. § 10. Профили Жуковского

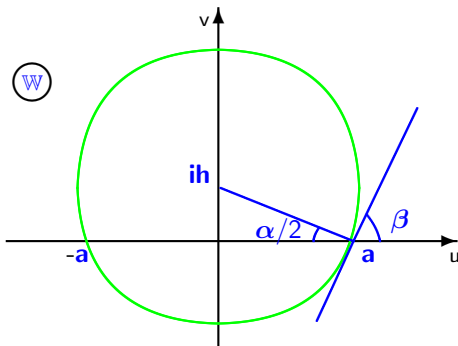
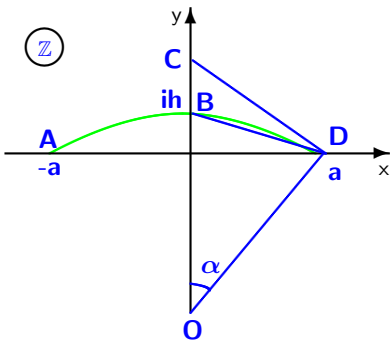
Пусть $a > 0$, $h > 0$. На комплексной плоскости переменной z рассмотрим дугу окружности γ , проходящую через точку ih и соединяющую точки a и $-a$. На комплексной плоскости переменной w рассмотрим окружность C_0 с центром в точке ih , проходящую через точки a и $-a$.



Нас будет интересовать отображение внешности дуги γ , т.е. множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$ на внешность круга K_0 , ограниченного окружностью C_0 .

I. § 10. Профили Жуковского

Пусть $a > 0$, $h > 0$. На комплексной плоскости переменной z рассмотрим дугу окружности γ , проходящую через точку ih и соединяющую точки a и $-a$.
На комплексной плоскости переменной w рассмотрим окружность C_0 с центром в точке ih , проходящую через точки a и $-a$.



Нас будет интересовать отображение внешности дуги γ , т.е. множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$ на внешность круга K_0 , ограниченного окружностью C_0 .

Учитывая круговое свойство и сохранение углов дробно-линейной функцией $t = f_1(z) = \frac{z-a}{z+a}$, легко проверить, что хорда $AD = (-a, a)$ отображается в отрицательную часть действительной оси, а дуга γ в луч L с углом наклона к отрицательной полуоси равным углу между касательной DC и хордой AD $\alpha = \angle ADC = 2 \angle ADB = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$. Таким образом внешность дуги γ отображается на область G – всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча L .

Дробно-линейная функция $\xi = \frac{w-a}{w+a}$, определенная в плоскости W , отображает окружность C_0 в прямую M , проходящую через начало координат и пересекающую действительную ось под углом $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, а внешность круга K_0 отображает на полуплоскость, лежащую ниже прямой M .

Функция $t = \xi^2$ переводит прямую M в луч L , а функция $t = f_2(w) = \left(\frac{w-a}{w+a} \right)^2$ отображает внешность круга K_0 на область G – всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча L .

Учитывая круговое свойство и сохранение углов дробно-линейной функцией $t = f_1(z) = \frac{z-a}{z+a}$, легко проверить, что хорда $AD = (-a, a)$ отображается в отрицательную часть действительной оси, а дуга γ в луч L с углом наклона к отрицательной полуоси равным углу между касательной DC и хордой AD

$$\alpha = \angle ADC = 2 \angle ADB = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{a}.$$

Таким образом внешность дуги γ отображается на область G – всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча L .

Дробно-линейная функция $\xi = \frac{w-a}{w+a}$, определенная в плоскости W , отображает окружность C_0 в прямую M , проходящую через начало координат и пересекающую действительную ось под углом $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, а внешность круга K_0 отображает на полуплоскость, лежащую ниже прямой M .

Функция $t = \xi^2$ переводит прямую M в луч L , а функция $t = f_2(w) = \left(\frac{w-a}{w+a} \right)^2$ отображает внешность круга K_0 на область G – всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча L .

Учитывая круговое свойство и сохранение углов дробно-линейной функцией $t = f_1(z) = \frac{z-a}{z+a}$, легко проверить, что хорда $AD = (-a, a)$ отображается в отрицательную часть действительной оси, а дуга γ в луч L с углом наклона к отрицательной полуоси равным углу между касательной DC и хордой AD

$$\alpha = \angle ADC = 2 \angle ADB = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{a}.$$

Таким образом внешность дуги γ отображается на область G – всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча L .

Дробно-линейная функция $\xi = \frac{w-a}{w+a}$, определенная в плоскости W , отображает окружность C_0 в прямую M , проходящую через начало координат и пересекающую действительную ось под углом $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, а внешность круга K_0 отображает на полуплоскость, лежащую ниже прямой M .

Функция $t = \xi^2$ переводит прямую M в луч L , а функция $t = f_2(w) = \left(\frac{w-a}{w+a} \right)^2$ отображает внешность круга K_0 на область G – всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча L .

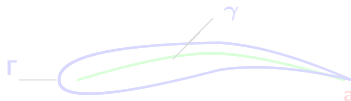
Поскольку образы функций $t = f_1(z)$ и $t = f_2(w)$ совпадают, то искомое отображение внешности дуги γ на внешность круга K_0 , можно найти из равенства $\frac{z-a}{z+a} = \left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2$. Простые преобразования приводят к формулам

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{a^2}{w} \right), \quad w = z + \sqrt{z^2 - a^2}.$$

На плоскости \mathbb{W} рассмотрим еще одну окружность C_1 , касающуюся окружности C_0 в точке a и имеющую радиус больший чем окружность C_0 . При конформном отображении внешности круга K_0 на внешность дуги γ окружности C_1 будет соответствовать лежащая в плоскости \mathbb{Z} замкнутая кривая Γ , охватывающая дугу γ и в силу консерватизма углов с двух сторон касающаяся дуги γ в точке $z = a$.

Такие кривые, напоминающие профиль крыла самолета, называют *профилями Жуковского*.

Профиль Жуковского $\Gamma(a, h, d)$ однозначно определяется тремя параметрами: a – длиной хорды, h – „высотой“ дуги и d – расстоянием между центрами окружностей C_0 и C_1 . Варьируя эти параметры можно получать кривые различного размера и конфигурации.



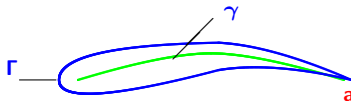
Поскольку образы функций $t = f_1(z)$ и $t = f_2(w)$ совпадают, то искомое отображение внешности дуги γ на внешность круга K_0 , можно найти из равенства $\frac{z-a}{z+a} = \left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2$. Простые преобразования приводят к формулам

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{a^2}{w} \right), \quad w = z + \sqrt{z^2 - a^2}.$$

На плоскости \mathbb{W} рассмотрим еще одну окружность C_1 , касающуюся окружности C_0 в точке a и имеющую радиус больший чем окружность C_0 . При конформном отображении внешности круга K_0 на внешность дуги γ окружности C_1 будет соответствовать лежащая в плоскости \mathbb{Z} замкнутая кривая Γ , охватывающая дугу γ и в силу консерватизма углов с двух сторон касающаяся дуги γ в точке $z = a$.

Такие кривые, напоминающие профиль крыла самолета, называют *профилями Жуковского*.

Профиль Жуковского $\Gamma(a, h, d)$ однозначно определяется тремя параметрами: a – длиной хорды, h – „высотой“ дуги и d – расстоянием между центрами окружностей C_0 и C_1 . Варьируя эти параметры можно получать кривые различного размера и конфигурации.



I. § 11. Общие принципы теории конформных отображений

Теорема существования и единственности

Пусть D и D^* – произвольные односвязные области, границы которых состоят более чем из одной точки, и пусть z_0 и w_0 – любые их внутренние точки, а θ_0 – любое действительное число. Тогда существует единственное конформное отображение $w = f(z)$ области D на область D^* , удовлетворяющее условиям

$$f(z_0) = w_0, \quad \operatorname{Arg} f'(z_0) = \theta_0.$$

Существование отображения является следствием теоремы Римана, а его единственность обеспечивается нормировкой фиксирующей три действительных параметра: равенство двух комплексных чисел сводится к двум действительным уравнениям, а третьим является аргумент производной. Часто используют и другие нормировки, также содержащие три действительных параметра. К примеру, задают образы одной внутренней точки и одной граничной точки:

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1, \quad z_0 \in D, \quad w_0 \in D^*, \quad z_1 \in \partial D, \quad w_1 \in \partial D^*,$$

или задают образы трех граничных точек:

$$f(z_k) = w_k, \quad z_k \in \partial D, \quad w_k \in \partial D^* \quad (k = 1, 2, 3).$$

I. § 11. Общие принципы теории конформных отображений

Теорема существования и единственности

Пусть D и D^* – произвольные односвязные области, границы которых состоят более чем из одной точки, и пусть z_0 и w_0 – любые их внутренние точки, а θ_0 – любое действительное число. Тогда существует единственное конформное отображение $w = f(z)$ области D на область D^* , удовлетворяющее условиям

$$f(z_0) = w_0, \quad \operatorname{Arg} f'(z_0) = \theta_0.$$

Существование отображения является следствием теоремы Римана, а его единственность обеспечивается нормировкой фиксирующей три действительных параметра: равенство двух комплексных чисел сводится к двум действительным уравнениям, а третьим является аргумент производной. Часто используют и другие нормировки, также содержащие три действительных параметра. К примеру, задают образы одной внутренней точки и одной граничной точки:

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1, \quad z_0 \in D, \quad w_0 \in D^*, \quad z_1 \in \partial D, \quad w_1 \in \partial D^*,$$

или задают образы трех граничных точек:

$$f(z_k) = w_k, \quad z_k \in \partial D, \quad w_k \in \partial D^* \quad (k = 1, 2, 3).$$

Отметим, что в теореме говорится лишь об отображении внутренности области D на внутренность области D^* и ничего не говорится об отображении границ. В общем случае это довольно сложный вопрос, изучение которого выходит за рамки нашего курса. Если же границы являются достаточно «хорошими» кривыми, то конформное отображение продолжается по непрерывности на границу области.

Теорема Каратеодори

Пусть области D и D^* ограничены жордановыми кривыми ∂D и ∂D^* . Тогда конформное отображение $f : D \rightarrow D^*$ можно продолжить на границу области D до гомеоморфизма замкнутых областей \bar{D} и \bar{D}^* .

Принцип соответствия границ

Пусть односвязные области D и D^* ограничены соответственно контурами Γ и Γ^* . Если аналитическая в D и непрерывная в \bar{D} функция $w = f(z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между Γ и Γ^* , то она осуществляет взаимно однозначное конформное отображение области D на область D^* .

Принцип сохранения области

Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D и отлична от постоянной, то множество D^* , на которое она отображает D , также является областью.

Отметим, что в теореме говорится лишь об отображении внутренности области D на внутренность области D^* и ничего не говорится об отображении границ. В общем случае это довольно сложный вопрос, изучение которого выходит за рамки нашего курса. Если же границы являются достаточно «хорошими» кривыми, то конформное отображение продолжается по непрерывности на границу области.

Теорема Каратеодори

Пусть области D и D^* ограничены жордановыми кривыми ∂D и ∂D^* . Тогда конформное отображение $f : D \rightarrow D^*$ можно продолжить на границу области D до гомеоморфизма замкнутых областей \bar{D} и \bar{D}^* .

Принцип соответствия границ

Пусть односвязные области D и D^* ограничены соответственно контурами Γ и Γ^* . Если аналитическая в D и непрерывная в \bar{D} функция $w = f(z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между Γ и Γ^* , то она осуществляет взаимно однозначное конформное отображение области D на область D^* .

Принцип сохранения области

Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D и отлична от постоянной, то множество D^* , на которое она отображает D , также является областью.

Отметим, что в теореме говорится лишь об отображении внутренности области D на внутренность области D^* и ничего не говорится об отображении границ. В общем случае это довольно сложный вопрос, изучение которого выходит за рамки нашего курса. Если же границы являются достаточно «хорошими» кривыми, то конформное отображение продолжается по непрерывности на границу области.

Теорема Каратеодори

Пусть области D и D^* ограничены жордановыми кривыми ∂D и ∂D^* . Тогда конформное отображение $f : D \rightarrow D^*$ можно продолжить на границу области D до гомеоморфизма замкнутых областей \bar{D} и \bar{D}^* .

Принцип соответствия границ

Пусть односвязные области D и D^* ограничены соответственно контурами Γ и Γ^* . Если аналитическая в D и непрерывная в \bar{D} функция $w = f(z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между Γ и Γ^* , то она осуществляет взаимно однозначное конформное отображение области D на область D^* .

Принцип сохранения области

Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D и отлична от постоянной, то множество D^* , на которое она отображает D , также является областью.

Отметим, что в теореме говорится лишь об отображении внутренности области D на внутренность области D^* и ничего не говорится об отображении границ. В общем случае это довольно сложный вопрос, изучение которого выходит за рамки нашего курса. Если же границы являются достаточно «хорошими» кривыми, то конформное отображение продолжается по непрерывности на границу области.

Теорема Каратеодори

Пусть области D и D^* ограничены жордановыми кривыми ∂D и ∂D^* . Тогда конформное отображение $f : D \rightarrow D^*$ можно продолжить на границу области D до гомеоморфизма замкнутых областей \bar{D} и \bar{D}^* .

Принцип соответствия границ

Пусть односвязные области D и D^* ограничены соответственно контурами Γ и Γ^* . Если аналитическая в D и непрерывная в \bar{D} функция $w = f(z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между Γ и Γ^* , то она осуществляет взаимно однозначное конформное отображение области D на область D^* .

Принцип сохранения области

Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D и отлична от постоянной, то множество D^* , на которое она отображает D , также является областью.

I. § 12. Принцип симметрии

В этом параграфе мы рассмотрим вопросы продолжения аналитической функции за границу исходной области определения.

Принцип непрерывности

Пусть области D_1 и D_2 примыкают друг к другу по кривой γ , являющейся общей частью границ этих областей, а функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются, соответственно, аналитическими в D_1 и D_2 , непрерывными в $D_1 \cup \gamma$ и $D_2 \cup \gamma$ и $f_1(z) = f_2(z)$ при $z \in \gamma$. Тогда функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{при } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{при } z \in D_2, \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{при } z \in \gamma \end{cases}$$

является аналитической в области $D = D_1 \cup D_2 \cup \gamma$.

Аналитичность является локальным свойством, поэтому достаточно показать, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности произвольной точки $z_0 \in \gamma$. Доказательство основано на интегральной формуле Коши.

Таким образом при непрерывной склейке двух аналитических функций вновь получается аналитическая функция.

I. § 12. Принцип симметрии

В этом параграфе мы рассмотрим вопросы продолжения аналитической функции за границу исходной области определения.

Принцип непрерывности

Пусть области D_1 и D_2 примыкают друг к другу по кривой γ , являющейся общей частью границ этих областей, а функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются, соответственно, аналитическими в D_1 и D_2 , непрерывными в $D_1 \cup \gamma$ и $D_2 \cup \gamma$ и $f_1(z) = f_2(z)$ при $z \in \gamma$. Тогда функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{при } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{при } z \in D_2, \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{при } z \in \gamma \end{cases}$$

является аналитической в области $D = D_1 \cup D_2 \cup \gamma$.

Аналитичность является локальным свойством, поэтому достаточно показать, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности произвольной точки $z_0 \in \gamma$. Доказательство основано на интегральной формуле Коши.

Таким образом при непрерывной склейке двух аналитических функций вновь получается аналитическая функция.

I. § 12. Принцип симметрии

В этом параграфе мы рассмотрим вопросы продолжения аналитической функции за границу исходной области определения.

Принцип непрерывности

Пусть области D_1 и D_2 примыкают друг к другу по кривой γ , являющейся общей частью границ этих областей, а функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются, соответственно, аналитическими в D_1 и D_2 , непрерывными в $D_1 \cup \gamma$ и $D_2 \cup \gamma$ и $f_1(z) = f_2(z)$ при $z \in \gamma$. Тогда функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{при } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{при } z \in D_2, \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{при } z \in \gamma \end{cases}$$

является аналитической в области $D = D_1 \cup D_2 \cup \gamma$.

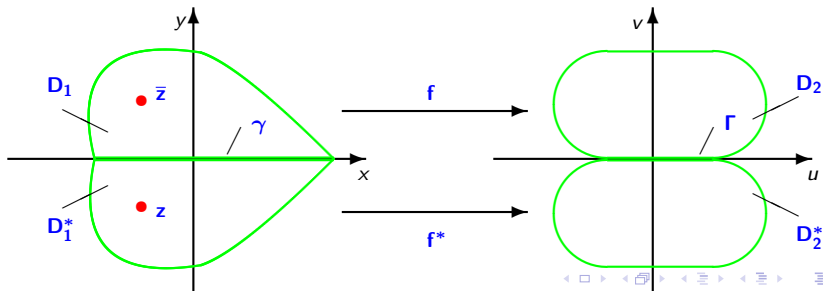
Аналитичность является локальным свойством, поэтому достаточно показать, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности произвольной точки $z_0 \in \gamma$. Доказательство основано на интегральной формуле Коши.

Таким образом при непрерывной склейке двух аналитических функций вновь получается аналитическая функция.

Принцип симметрии. (Б.Риман, Г.Шварц)

Пусть граница области D_1 содержит дугу окружности либо отрезок прямой γ , функция $w = f(z)$ реализует конформное отображение области D_1 на область D_2 такое, что „дуга“ γ переходит в участок Γ границы области D_2 , также являющийся дугой окружности либо отрезком прямой. Тогда функция $f(z)$ допускает аналитическое продолжение $f^*(z)$ через „дугу“ γ в область D_1^* , симметричную области D_1 относительно „дуги“ γ , причем функция $f^*(z)$ реализует конформное отображение области D_1^* на область D_2^* , симметричную области D_2 относительно „дуги“ Γ .

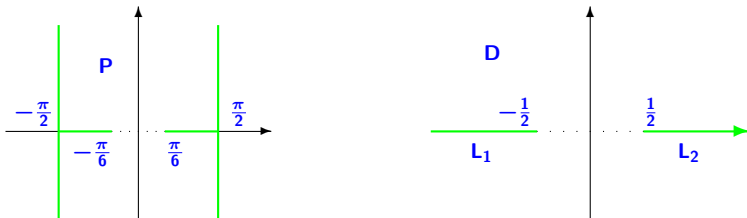
При помощи дробно-линейных отображений общая ситуация может быть сведена к случаю, когда γ и Γ являются отрезками действительной оси.



В этом случае функция $f^*(z)$ для всех $z \in D_1^*$ может быть определена в явном виде равенством $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Аналитичность функции $f^*(z)$ в области D_1^* является следствием аналитичности функции $f(z)$ в области D_1 .

Рассмотрим примеры применения принципа симметрии.

1) Найти конформное отображение на верхнюю полуплоскость полосы $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}$ с разрезами вдоль отрезков $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.



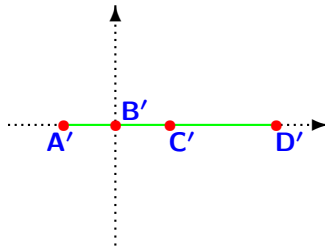
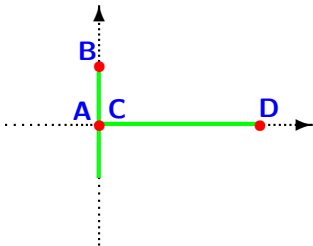
Проведем дополнительный разрез вдоль интервала $I = \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Из §9 мы уже знаем, что функция $t = \sin z$ отображает верхнюю полуполосу P^+ на верхнюю полуплоскость. Применение принципа симметрии к интервалу I показывает, что эта функция отображает нижнюю полуполосу P^- на нижнюю полуплоскость, а всю исходную полосу P с разрезами на область D , представляющую собой плоскость с разрезами вдоль лучей $L_1 = \left[\infty, -\frac{1}{2} \right]$ и $L_2 = \left[\frac{1}{2}, \infty \right]$ [дополнительный разрез I при аналитическом продолжении „затирается“ и отображается в интервал $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$].

Дробно-линейная функция $\xi = \frac{t + \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}}$ отображает область D на всю плоскость с разрезом вдоль положительной полуоси. Остается вспомнить, что при извлечении квадратного корня аргумент комплексного числа уменьшается в два раза. Окончательно получаем

$$w = \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{2t + 1}{2t - 1}} = \sqrt{\frac{2 \sin z + 1}{2 \sin z - 1}}.$$

2) Найти конформное отображение внешности буквы Γ , состоящей из двух отрезков $[0, 2]$ и $[-i, i]$, на верхнюю полуплоскость.



Проведем дополнительные разрезы вдоль отрицательной полуоси и луча $(2, +\infty)$. В §3 мы уже использовали функцию $t = h(z) = \sqrt{z^2 + 1}$, отображающую верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку $[0, i]$ на всю верхнюю полуплоскость. Чтобы найти образы отрезков $l_1 = [0, 2]$ и $l_2 = [0, i]$ при этом отображении нужно учитывать, что при обходе границы отрезок l_2 проходится дважды. Поэтому граничному отрезку l_2 в образе будет соответствовать отрезок $[-1, 1]$, а отрезку l_1 отрезок $[1, \sqrt{5}]$. Соответствие граничных точек изображено на рисунке.

Используя принцип симметрии и продолжая функцию $h(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ через „отрезок действительной прямой“ $I_0 = [-\infty, 0] \cup [2, +\infty]$, мы получаем отображение внешности буквы \overline{T} на всю комплексную плоскость с вырезанным отрезком $J = [-1, \sqrt{5}]$.

Дробно-линейная функция

$$\xi = \frac{\sqrt{5} - t}{1 + t}$$

отображает разрез J на положительную полуось. Для нахождения конформного отображения внешности буквы \overline{T} на верхнюю полуплоскость остается извлечь квадратный корень

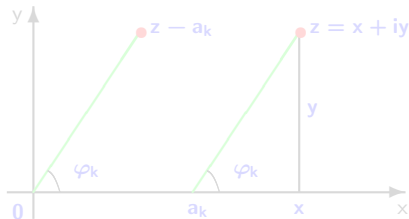
$$w = \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{z^2 + 1}}{1 + \sqrt{z^2 + 1}}}.$$

I. § 13. О решении задачи Дирихле в полуплоскости

Решение задачи Дирихле в верхней полуплоскости, т.е. нахождение гармонической в верхней полуплоскости функции $v(x, y)$, принимающей на действительной оси заданные значения $v(x, 0) = h(x)$, может быть представлено

интегралом Пуассона
$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \frac{y \, dt}{(x - t)^2 + y^2}.$$

Предположим, что на интервалах $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, \infty)$ функция $h(x)$ принимает соответствующие постоянные значения v_0, v_1, \dots, v_n . Рассмотрим точку z , лежащую в верхней полуплоскости и обозначим через φ_k угол между вектором $z - a_k$ и положительным направлением действительной оси.

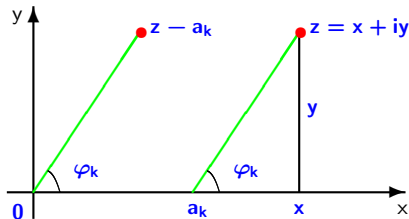


I. § 13. О решении задачи Дирихле в полуплоскости

Решение задачи Дирихле в верхней полуплоскости, т.е. нахождение гармонической в верхней полуплоскости функции $v(x, y)$, принимающей на действительной оси заданные значения $v(x, 0) = h(x)$, может быть представлено

интегралом Пуассона
$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \frac{y \, dt}{(x - t)^2 + y^2}.$$

Предположим, что на интервалах $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, \infty)$ функция $h(x)$ принимает соответствующие постоянные значения v_0, v_1, \dots, v_n . Рассмотрим точку z , лежащую в верхней полуплоскости и обозначим через φ_k угол между вектором $z - a_k$ и положительным направлением действительной оси.



Из рисунка видно, что $\arg(z - a_k) = \varphi_k = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{a_k - x}{y}$.

Положим $a_0 = -\infty, a_{n+1} = +\infty$. Применяя к функции $h(x)$ формулу Пуассона, учитывая аддитивность и вычисляя в явном возникающие интегралы, получаем

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{v_k y}{\pi} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} = \\ &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n) = \\ &= v_n + \operatorname{Im} \left(\frac{v_0 - v_1}{\pi} \ln(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \ln(z - a_n) \right). \end{aligned} \quad (1.13.1)$$

Формулой (1.13.1) мы воспользуемся в следующем примере, и еще она потребуется нам при выводе формулы Кристоффеля – Шварца.

Из рисунка видно, что $\arg(z - a_k) = \varphi_k = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{a_k - x}{y}$.

Положим $a_0 = -\infty, a_{n+1} = +\infty$. Применяя к функции $h(x)$ формулу Пуассона, учитывая аддитивность и вычисляя в явном возникающие интегралы, получаем

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{v_k y}{\pi} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} = \\ &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n) = \\ &= v_n + \operatorname{Im} \left(\frac{v_0 - v_1}{\pi} \ln(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \ln(z - a_n) \right). \end{aligned} \quad (1.13.1)$$

Формулой (1.13.1) мы воспользуемся в следующем примере, и еще она потребуется нам при выводе формулы Кристоффеля – Шварца.

Из рисунка видно, что $\arg(z - a_k) = \varphi_k = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{a_k - x}{y}$.

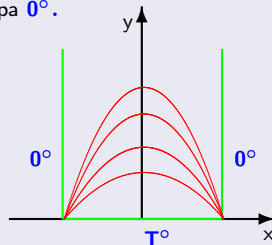
Положим $a_0 = -\infty, a_{n+1} = +\infty$. Применяя к функции $h(x)$ формулу Пуассона, учитывая аддитивность и вычисляя в явном возникающие интегралы, получаем

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{v_k y}{\pi} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} = \\ &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n) = \\ &= v_n + \operatorname{Im} \left(\frac{v_0 - v_1}{\pi} \ln(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \ln(z - a_n) \right). \end{aligned} \quad (1.13.1)$$

Формулой (1.13.1) мы воспользуемся в следующем примере, и еще она потребуется нам при выводе формулы Кристоффеля – Шварца.

Пример. (Распределение температуры в канале). Рассмотрим полуполосу $D = \{|\operatorname{Re} z| < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$, у которой на основании поддерживается температура T° , а на боковых сторонах температура 0° .

В установившемся режиме функция температуры $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической. Конформной заменой $w = \sin z$ рассматриваемую задачу можно свести к нахождению гармонической функции в верхней полуплоскости. При этом основание отображается на интервал $(-1, 1)$, а боковые стороны соответственно на лучи $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$.



Остается воспользоваться формулой (1.13.1), учитывая, что $n = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $v_0 = v_2 = 0$, $v_1 = T$. Получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{T}{\pi} \arg(w + 1) + \frac{T}{\pi} \arg(w - 1) = \frac{T}{\pi} \arg \frac{w - 1}{w + 1} = \frac{T}{\pi} \arg \frac{\sin z - 1}{\sin z + 1} = \\ &= \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x} = \frac{2T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\operatorname{sh} y}. \end{aligned}$$

I. § 14. Отображения многоугольных областей.

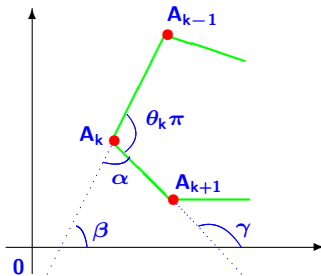
Интеграл Кристоффеля – Шварца

Рассмотрим многоугольник M с вершинами в точках A_1, A_2, \dots, A_n и углами $\theta_1\pi, \theta_2\pi, \dots, \theta_n\pi$ при соответствующих вершинах. Согласно теореме Римана существует конформное отображение $f(z)$ верхней полуплоскости P на многоугольник M . К сожалению теорема Римана не содержит никаких рекомендаций относительно построения искомого отображения. Нас же будет интересовать именно нахождение формулы, определяющей отображение $f(z)$.

Предположим, что известны лежащие на действительной прямой точки a_1, a_2, \dots, a_n , соответствующие вершинам многоугольника, т. е. $f(a_k) = A_k$. На каждом интервале $I_k = (a_k, a_{k+1})$ функция $f(z)$ принимает значения, лежащие на стороне $A_k A_{k+1}$ многоугольника, при этом на интервале I_k

$$\arg f'(z) = \nu_k = \text{const.}$$

Поскольку производная аналитической функции является аналитической функцией, то мнимая часть функции $\ln f'(z)$ является гармонической в верхней полуплоскости функцией, принимающей кусочно-постоянные значения на действительной оси, и к ней применимы результаты предыдущего параграфа.



I. § 14. Отображения многоугольных областей.

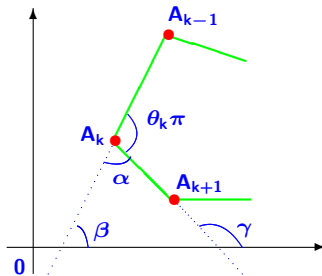
Интеграл Кристоффеля – Шварца

Рассмотрим многоугольник M с вершинами в точках A_1, A_2, \dots, A_n и углами $\theta_1\pi, \theta_2\pi, \dots, \theta_n\pi$ при соответствующих вершинах. Согласно теореме Римана существует конформное отображение $f(z)$ верхней полуплоскости P на многоугольник M . К сожалению теорема Римана не содержит никаких рекомендаций относительно построения искомого отображения. Нас же будет интересовать именно нахождение формулы, определяющей отображение $f(z)$.

Предположим, что известны лежащие на действительной прямой точки a_1, a_2, \dots, a_n , соответствующие вершинам многоугольника, т. е. $f(a_k) = A_k$. На каждом интервале $I_k = (a_k, a_{k+1})$ функция $f(z)$ принимает значения, лежащие на стороне $A_k A_{k+1}$ многоугольника, при этом на интервале I_k

$$\arg f'(z) = v_k = \text{const.}$$

Поскольку производная аналитической функции является аналитической функцией, то мнимая часть функции $\ln f'(z)$ является гармонической в верхней полуплоскости функцией, принимающей кусочно-постоянные значения на действительной оси, и к ней применимы результаты предыдущего параграфа.



Из рисунка видно, что $v_k - v_{k-1} = \gamma - \beta = (1 - \theta_k) \pi$.

Используя формулу (1.13.1), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \ln f'(z) = \arg f'(z) &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n) = \\ &= c_2 + (\theta_1 - 1) \arg(z - a_1) + \dots + (\theta_n - 1) \arg(z - a_n) \end{aligned}$$

и

$$\ln f'(z) = (c_1 + ic_2) + (\theta_1 - 1) \ln(z - a_1) + \dots + (\theta_n - 1) \ln(z - a_n).$$

Потенцируя и интегрируя последнее равенство, получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} (t - a_2)^{\theta_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\theta_n - 1} dt + C_1. \quad (1.14.1)$$

Формулу (1.14.1), которая позволяет найти искомое конформное отображение, называют *интегралом Кристоффеля – Шварца*.

Из рисунка видно, что $v_k - v_{k-1} = \gamma - \beta = (1 - \theta_k) \pi$.

Используя формулу (1.13.1), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \ln f'(z) = \arg f'(z) &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n) = \\ &= c_2 + (\theta_1 - 1) \arg(z - a_1) + \dots + (\theta_n - 1) \arg(z - a_n) \end{aligned}$$

и

$$\ln f'(z) = (c_1 + ic_2) + (\theta_1 - 1) \ln(z - a_1) + \dots + (\theta_n - 1) \ln(z - a_n).$$

Потенцируя и интегрируя последнее равенство, получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} (t - a_2)^{\theta_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\theta_n - 1} dt + C_1. \quad (1.14.1)$$

Формулу (1.14.1), которая позволяет найти искомое конформное отображение, называют *интегралом Кристоффеля – Шварца*.

Из рисунка видно, что $v_k - v_{k-1} = \gamma - \beta = (1 - \theta_k) \pi$.

Используя формулу (1.13.1), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \ln f'(z) &= \arg f'(z) = v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \dots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n) = \\ &= c_2 + (\theta_1 - 1) \arg(z - a_1) + \dots + (\theta_n - 1) \arg(z - a_n) \end{aligned}$$

и

$$\ln f'(z) = (c_1 + ic_2) + (\theta_1 - 1) \ln(z - a_1) + \dots + (\theta_n - 1) \ln(z - a_n).$$

Потенцируя и интегрируя последнее равенство, получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} (t - a_2)^{\theta_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\theta_n - 1} dt + C_1. \quad (1.14.1)$$

Формулу (1.14.1), которая позволяет найти искомое конформное отображение, называют *интегралом Кристоффеля – Шварца*.

Формула получена нами в предположении, что точки a_1, a_2, \dots, a_n , соответствующие вершинам многоугольника M , известны. Однако в практических задачах задаются лишь вершины многоугольника M , а точки a_k и постоянные C, C_1 должны определяться из условий задачи. Поскольку нормировка конформного отображения зависит от трех действительных параметров, то, к примеру, мы можем произвольным образом фиксировать прообразы трех вершин многоугольника, после чего все остальные характеристики должны однозначно находиться из других соображений.

Случаи вырождения

В общем случае не существует методов нахождения явного вида первообразной в интеграл Кристоффеля–Шварца, поэтому особый интерес представляют ситуации, в которых удастся упростить поинтегральное выражение. Кроме этого следует отметить, что формула Кристоффеля–Шварца остается верной и для „странных многоугольников“, у которых одна или даже несколько „вершин“ находятся в бесконечно удаленной точке.

Формула получена нами в предположении, что точки a_1, a_2, \dots, a_n , соответствующие вершинам многоугольника M , известны. Однако в практических задачах задаются лишь вершины многоугольника M , а точки a_k и постоянные C, C_1 должны определяться из условий задачи. Поскольку нормировка конформного отображения зависит от трех действительных параметров, то, к примеру, мы можем произвольным образом фиксировать прообразы трех вершин многоугольника, после чего все остальные характеристики должны однозначно находиться из других соображений.

Случаи вырождения

В общем случае не существует методов нахождения явного вида первообразной в интеграл Кристоффеля–Шварца, поэтому особый интерес представляют ситуации, в которых удастся упростить поинтегральное выражение. Кроме этого следует отметить, что формула Кристоффеля–Шварца остается верной и для „странных многоугольников“, у которых одна или даже несколько „вершин“ находятся в бесконечно удаленной точке.

I. Если одна из точек a_k является бесконечно удаленной, то формула (1.14.1) имеет более простой вид. Пусть все $a_k \neq 0, a_n = \infty, a'_n \in \mathbb{R}$ и $a'_n \neq \infty$. Введем новую переменную $\xi = a'_n - \frac{1}{z}$, тогда точкам a_1, a_2, \dots, a_n будут соответствовать конечные точки a'_1, a'_2, \dots, a'_n , и мы можем воспользоваться интегралом Кристоффеля – Шварца для нахождения функции g , отображающей верхнюю полуплоскость $\xi > 0$ на многоугольник M

$$g(\xi) = C' \int_{\xi_0}^{\xi} (\tau - a'_1)^{\theta_1-1} (\tau - a'_2)^{\theta_2-1} \dots (\tau - a'_n)^{\theta_n-1} d\tau + C'_1.$$

Полагая $\tau = a'_n - \frac{1}{t}$ и делая замену переменной в интеграле, получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= C' \int_{z_0}^z \left(a'_n - a'_1 - \frac{1}{t} \right)^{\theta_1-1} \dots \left(a'_n - a'_{n-1} - \frac{1}{t} \right)^{\theta_{n-1}-1} \left(-\frac{1}{t} \right)^{\theta_n-1} \frac{dt}{t^2} + C'_1 = \\ &= C'' \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1-1} (t - a_2)^{\theta_2-1} \dots (t - a_{n-1})^{\theta_{n-1}-1} \frac{dt}{t^{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1}+2}} + C''_1. \end{aligned}$$

I. Если одна из точек a_k является бесконечно удаленной, то формула (1.14.1) имеет более простой вид. Пусть все $a_k \neq 0, a_n = \infty, a'_n \in \mathbb{R}$ и $a'_n \neq \infty$. Введем новую переменную $\xi = a'_n - \frac{1}{z}$, тогда точкам a_1, a_2, \dots, a_n будут соответствовать конечные точки a'_1, a'_2, \dots, a'_n , и мы можем воспользоваться интегралом Кристоффеля – Шварца для нахождения функции g , отображающей верхнюю полуплоскость $\xi > 0$ на многоугольник M

$$g(\xi) = C' \int_{\xi_0}^{\xi} (\tau - a'_1)^{\theta_1-1} (\tau - a'_2)^{\theta_2-1} \dots (\tau - a'_n)^{\theta_n-1} d\tau + C'_1.$$

Полагая $\tau = a'_n - \frac{1}{t}$ и делая замену переменной в интеграле, получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= C' \int_{z_0}^z \left(a'_n - a'_1 - \frac{1}{t} \right)^{\theta_1-1} \dots \left(a'_n - a'_{n-1} - \frac{1}{t} \right)^{\theta_{n-1}-1} \left(-\frac{1}{t} \right)^{\theta_n-1} \frac{dt}{t^2} + C'_1 = \\ &= C'' \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1-1} (t - a_2)^{\theta_2-1} \dots (t - a_{n-1})^{\theta_{n-1}-1} \frac{dt}{t^{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-n+2}}} + C''_1. \end{aligned}$$

Используя хорошо известное утверждение о сумме внутренних углов n -угольника: $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = n - 2$, окончательно получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} (t - a_2)^{\theta_2 - 1} \dots (t - a_{n-1})^{\theta_{n-1} - 1} dt + C_1. \quad (2.14.3)$$

Таким образом, если одной из вершин многоугольника M соответствует бесконечно удаленная точка, то формула Кристоффеля–Шварца не содержит множитель, соответствующий этой вершине.

Используя хорошо известное утверждение о сумме внутренних углов n -угольника: $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = n - 2$, окончательно получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} (t - a_2)^{\theta_2 - 1} \dots (t - a_{n-1})^{\theta_{n-1} - 1} dt + C_1. \quad (2.14.3)$$

Таким образом, если одной из вершин многоугольника M соответствует бесконечно удаленная точка, то формула Кристоффеля–Шварца не содержит множитель, соответствующий этой вершине.

II. Формула (1.14.1) остается верной и для многоугольника, у которого одна или несколько вершин A_k совпадают с бесконечно удаленной точкой, если при этом условиться понимать под углом между двумя, прямыми пересекающимися в бесконечности, взятый со знаком минус угол в конечной точке их пересечения.

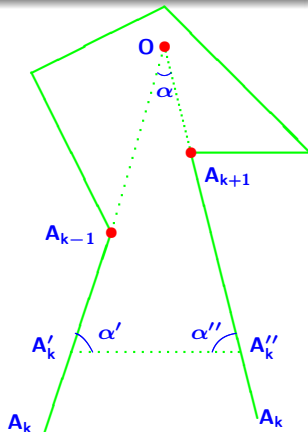
Пусть продолжения сторон $A_{k-1}A_k$ и A_kA_{k+1} пересекаются в конечной точке O под углом α . Проведем дополнительный разрез $A'_kA''_k$ и получим ограниченный многоугольник M' , углы которого при вершинах A'_k, A''_k обозначим соответственно через α' и α'' , а через a'_k и a''_k обозначим точки действительной прямой, соответствующие вершинам A'_k и A''_k . Формула Кристоффеля–Шварца для отображения верхней полуплоскости на многоугольник M' содержит множитель

$$(t - a'_k)^{\alpha' - 1} \cdot (t - a''_k)^{\alpha'' - 1}.$$

При $A'_k \rightarrow A_k$ и $A''_k \rightarrow A_k$ точки a'_k и a''_k стремятся к общему пределу – точке a_k .

Поскольку $\alpha + \alpha' + \alpha'' = 1$, то

$$(\alpha' - 1) + (\alpha'' - 1) = -\alpha - 1.$$



В результате получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} \dots (t - a_k)^{-\alpha - 1} \dots (t - a_n)^{\theta_n - 1} dt + C_1.$$

Отметим, что формула остается верной и в случае, когда несколько вершин многоугольника находятся в бесконечно удаленной точке.

В следующих примерах ищется конформное отображение верхней полуплоскости на соответствующий многоугольник M .

В результате получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} \dots (t - a_k)^{-\alpha - 1} \dots (t - a_n)^{\theta_n - 1} dt + C_1.$$

Отметим, что формула остается верной и в случае, когда несколько вершин многоугольника находятся в бесконечно удаленной точке.

В следующих примерах ищется конформное отображение верхней полуплоскости на соответствующий многоугольник M .

В результате получаем

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (t - a_1)^{\theta_1 - 1} \dots (t - a_k)^{-\alpha - 1} \dots (t - a_n)^{\theta_n - 1} dt + C_1.$$

Отметим, что формула остается верной и в случае, когда несколько вершин многоугольника находятся в бесконечно удаленной точке.

В следующих примерах ищется конформное отображение верхней полуплоскости на соответствующий многоугольник **М**.

1. Полуполоса $M = \{|\operatorname{Re} w| < \pi/2, \operatorname{Im} w > 0\}$ представляет собой „треугольник“ с вершинами $A_1 = -\pi/2$, $A_2 = \pi/2$, $A_3 = \infty$. Выбор точек a_1, a_2, a_3 определяется желанием получить наиболее простую формулу.

A_k	θ_k	a_k
$A_1 = -\pi/2$	$\theta_1 = 1/2$	$a_1 = -1$
$A_2 = \pi/2$	$\theta_2 = 1/2$	$a_2 = 1$
$A_3 = \infty$	$\theta_3 = 0$	$a_3 = \infty$

Интеграл Кристоффеля–Шварца принимает вид

$$f(z) = C \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + C_1 = C \arcsin z + C_1.$$

Используя соответствие между A_1, A_2 и a_1, a_2 , получаем

$$-\frac{\pi}{2} = -C \frac{\pi}{2} + C_1, \quad \frac{\pi}{2} = C \frac{\pi}{2} + C_1,$$

следовательно $C = 1$, $C_1 = 0$.

Таким образом функция, отображающая полуплоскость на полуполосу, имеет вид $w = \arcsin z$. Этот ответ был вполне ожидаемым, поскольку ранее мы уже рассматривали отображение, осуществляемое обратной функцией $z = \sin w$.

1. Полуполоса $M = \{|\operatorname{Re} w| < \pi/2, \operatorname{Im} w > 0\}$ представляет собой „треугольник“ с вершинами $A_1 = -\pi/2$, $A_2 = \pi/2$, $A_3 = \infty$. Выбор точек a_1, a_2, a_3 определяется желанием получить наиболее простую формулу.

A_k	θ_k	a_k
$A_1 = -\pi/2$	$\theta_1 = 1/2$	$a_1 = -1$
$A_2 = \pi/2$	$\theta_2 = 1/2$	$a_2 = 1$
$A_3 = \infty$	$\theta_3 = 0$	$a_3 = \infty$

Интеграл Кристоффеля–Шварца принимает вид

$$f(z) = C \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + C_1 = C \arcsin z + C_1.$$

Используя соответствие между A_1, A_2 и a_1, a_2 , получаем

$$-\frac{\pi}{2} = -C \frac{\pi}{2} + C_1, \quad \frac{\pi}{2} = C \frac{\pi}{2} + C_1,$$

следовательно $C = 1$, $C_1 = 0$.

Таким образом функция, отображающая полуплоскость на полуполосу, имеет вид $w = \arcsin z$. Этот ответ был вполне ожидаемым, поскольку ранее мы уже рассматривали отображение, осуществляемое обратной функцией $z = \sin w$.

1. Полуполоса $M = \{|\operatorname{Re} w| < \pi/2, \operatorname{Im} w > 0\}$ представляет собой „треугольник“ с вершинами $A_1 = -\pi/2$, $A_2 = \pi/2$, $A_3 = \infty$. Выбор точек a_1, a_2, a_3 определяется желанием получить наиболее простую формулу.

A_k	θ_k	a_k
$A_1 = -\pi/2$	$\theta_1 = 1/2$	$a_1 = -1$
$A_2 = \pi/2$	$\theta_2 = 1/2$	$a_2 = 1$
$A_3 = \infty$	$\theta_3 = 0$	$a_3 = \infty$

Интеграл Кристоффеля–Шварца принимает вид

$$f(z) = C \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + C_1 = C \arcsin z + C_1.$$

Используя соответствие между A_1, A_2 и a_1, a_2 , получаем

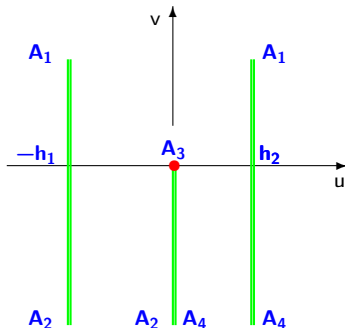
$$-\frac{\pi}{2} = -C \frac{\pi}{2} + C_1, \quad \frac{\pi}{2} = C \frac{\pi}{2} + C_1,$$

следовательно $C = 1$, $C_1 = 0$.

Таким образом функция, отображающая полуплоскость на полуполосу, имеет вид $w = \arcsin z$. Этот ответ был вполне ожидаемым, поскольку ранее мы уже рассматривали отображение, осуществляемое обратной функцией $z = \sin w$.

2. Пусть M – изображенный на рисунке „четыреугольник“, граница которого состоит из двух прямых $L_1 = \{\operatorname{Re} w = -h_1\}$, $L_2 = \{\operatorname{Re} w = h_2\}$ и луча $L_3 = \{\operatorname{Re} w = 0, \operatorname{Im} w < 0\}$. У данного многоугольника три вершины A_1, A_2, A_4 находятся в бесконечности, и углы в этих вершинах равны нулю. Угол в вершине A_3 равен 2π .

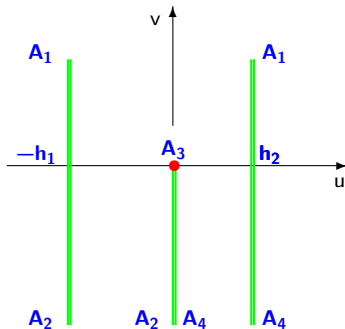
A_k	θ_k	a_k
$A_1 = \infty$	$\theta_1 = 0$	$a_1 = \infty$
$A_2 = \infty$	$\theta_2 = 0$	$a_2 = -1$
$A_3 = 0$	$\theta_3 = 2$	$a_3 = \xi$
$A_4 = \infty$	$\theta_4 = 0$	$a_4 = 1$



В данном случае мы можем фиксировать три точки действительной прямой, соответствующие вершинам, находящимся в бесконечности, а четвертую точку пока обозначим символом ξ .

2. Пусть M – изображенный на рисунке „четыреугольник“, граница которого состоит из двух прямых $L_1 = \{\operatorname{Re} w = -h_1\}$, $L_2 = \{\operatorname{Re} w = h_2\}$ и луча $L_3 = \{\operatorname{Re} w = 0, \operatorname{Im} w < 0\}$. У данного многоугольника три вершины A_1, A_2, A_4 находятся в бесконечности, и углы в этих вершинах равны нулю. Угол в вершине A_3 равен 2π .

A_k	θ_k	a_k
$A_1 = \infty$	$\theta_1 = 0$	$a_1 = \infty$
$A_2 = \infty$	$\theta_2 = 0$	$a_2 = -1$
$A_3 = 0$	$\theta_3 = 2$	$a_3 = \xi$
$A_4 = \infty$	$\theta_4 = 0$	$a_4 = 1$



В данном случае мы можем фиксировать три точки действительной прямой, соответствующие вершинам, находящимся в бесконечности, а четвертую точку пока обозначим символом ξ .

Интеграл Кристоффеля–Шварца

$$\begin{aligned}
 w = f(z) &= C \int (z+1)^{-1}(z-\xi)(z-1)^{-1} dz = C \int \frac{z-\xi}{z^2-1} dz = \\
 &= C \left[\frac{1+\xi}{2} \ln(z+1) + \frac{1-\xi}{2} \ln(z-1) \right] + C_1
 \end{aligned}$$

содержит три неизвестные постоянные C, C_1, ξ , которые нужно найти.

При обходе точки $a_2 = -1$ по малой верхней полуокружности C_r^+ соответствующая точка w должна перейти с прямой A_1A_2 на луч A_2A_3 . Оценивая приращение функции $f(z)$ при обходе полуокружности и $r \rightarrow 0$, получаем $h_1 = \Delta w = -i\pi C \frac{1+\xi}{2}$.

Аналогично, рассматривая обход вокруг точки $a_4 = 1$, приходим к равенству $h_2 = -i\pi C \frac{1-\xi}{2}$.

Интеграл Кристоффеля–Шварца

$$\begin{aligned} w = f(z) &= C \int (z+1)^{-1}(z-\xi)(z-1)^{-1} dz = C \int \frac{z-\xi}{z^2-1} dz = \\ &= C \left[\frac{1+\xi}{2} \ln(z+1) + \frac{1-\xi}{2} \ln(z-1) \right] + C_1 \end{aligned}$$

содержит три неизвестные постоянные C, C_1, ξ , которые нужно найти.

При обходе точки $a_2 = -1$ по малой верхней полуокружности C_r^+ соответствующая точка w должна перейти с прямой A_1A_2 на луч A_2A_3 . Оценивая приращение функции $f(z)$ при обходе полуокружности и $r \rightarrow 0$, получаем $h_1 = \Delta w = -i\pi C \frac{1+\xi}{2}$.

Аналогично, рассматривая обход вокруг точки $a_4 = 1$, приходим к равенству $h_2 = -i\pi C \frac{1-\xi}{2}$.

Интеграл Кристоффеля–Шварца

$$\begin{aligned} w = f(z) &= C \int (z+1)^{-1}(z-\xi)(z-1)^{-1} dz = C \int \frac{z-\xi}{z^2-1} dz = \\ &= C \left[\frac{1+\xi}{2} \ln(z+1) + \frac{1-\xi}{2} \ln(z-1) \right] + C_1 \end{aligned}$$

содержит три неизвестные постоянные C, C_1, ξ , которые нужно найти.

При обходе точки $a_2 = -1$ по малой верхней полуокружности C_r^+ соответствующая точка w должна перейти с прямой A_1A_2 на луч A_2A_3 . Оценивая приращение функции $f(z)$ при обходе полуокружности и $r \rightarrow 0$, получаем $h_1 = \Delta w = -i\pi C \frac{1+\xi}{2}$.

Аналогично, рассматривая обход вокруг точки $a_4 = 1$, приходим к равенству $h_2 = -i\pi C \frac{1-\xi}{2}$.

Из полученных соотношений находим постоянные

$$C = i \frac{h_1 + h_2}{\pi}, \quad \xi = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}.$$

Следовательно искомая функция имеет вид

$$w = f(z) = \frac{i}{\pi} [h_1 \ln(z + 1) + h_2 \ln(z - 1)] + C_1.$$

Учитывая соответствие точек $a_3 = \xi$ и $A_3 = 0$, постоянную C_1 находим из равенства $f(\xi) = 0$

$$C_1 = -h_2 \pi^2 + \pi i \ln h_1^{h_1} h_2^{h_2} \left(\frac{2}{h_1 + h_2} \right)^{h_1 + h_2}.$$

Из полученных соотношений находим постоянные

$$C = i \frac{h_1 + h_2}{\pi}, \quad \xi = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}.$$

Следовательно искомая функция имеет вид

$$w = f(z) = \frac{i}{\pi} [h_1 \ln(z + 1) + h_2 \ln(z - 1)] + C_1.$$

Учитывая соответствие точек $a_3 = \xi$ и $A_3 = 0$, постоянную C_1 находим из равенства $f(\xi) = 0$

$$C_1 = -h_2 \pi^2 + \pi i \ln h_1^{h_1} h_2^{h_2} \left(\frac{2}{h_1 + h_2} \right)^{h_1 + h_2}.$$

Из полученных соотношений находим постоянные

$$C = i \frac{h_1 + h_2}{\pi}, \quad \xi = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}.$$

Следовательно искомая функция имеет вид

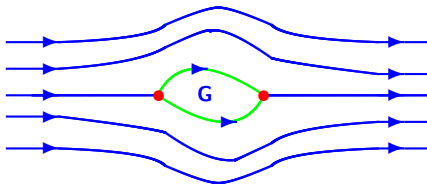
$$w = f(z) = \frac{i}{\pi} [h_1 \ln(z + 1) + h_2 \ln(z - 1)] + C_1.$$

Учитывая соответствие точек $a_3 = \xi$ и $A_3 = 0$, постоянную C_1 находим из равенства $f(\xi) = 0$

$$C_1 = -h_2 \pi^2 + \pi i \ln h_1^{h_1} h_2^{h_2} \left(\frac{2}{h_1 + h_2} \right)^{h_1 + h_2}.$$

I. § 15. Поток во внешности замкнутого контура

Пусть C – замкнутый контур, ограничивающий область $G \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим поток жидкости, обтекающий со скоростью $V(z)$ контур C и имеющий в бесконечности фиксированную скорость V_∞ .

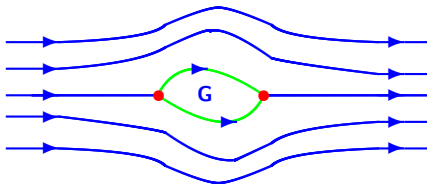


Комплексный потенциал данного течения является аналитической функцией в области $D = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$, а его производная $f'(z) = \overline{V}(z)$ аналитична в D и имеет в бесконечно удаленной точке устранимую особенность. Поэтому в окрестности бесконечности ряд Лорана функции $f'(z)$ не содержит главной части и имеет вид

$$f'(z) = \overline{V}_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

I. § 15. Поток во внешности замкнутого контура

Пусть C – замкнутый контур, ограничивающий область $G \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим поток жидкости, обтекающий со скоростью $V(z)$ контур C и имеющий в бесконечности фиксированную скорость V_∞ .



Комплексный потенциал данного течения является аналитической функцией в области $D = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$, а его производная $f'(z) = \overline{V}(z)$ аналитична в D и имеет в бесконечно удаленной точке устранимую особенность. Поэтому в окрестности бесконечности ряд Лорана функции $f'(z)$ не содержит главной части и имеет вид

$$f'(z) = \overline{V}_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

Согласно формуле (1.3.4) для произвольного замкнутого контура C^* , содержащего внутри себя точку $z = 0$ и охватывающего контур C

$$\Gamma + iN = \int_{C^*} f'(z) dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Поскольку поток через контур C^* равен нулю, то $2\pi i c_{-1} = \Gamma$.

Согласно формуле (1.3.4) для произвольного замкнутого контура C^* , содержащего внутри себя точку $z = 0$ и охватывающего контур C

$$\Gamma + iN = \int_{C^*} f'(z) dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Поскольку поток через контур C^* равен нулю, то $2\pi i c_{-1} = \Gamma$.

Поэтому комплексный потенциал имеет вид

$$f(z) = \bar{V}_\infty z + c + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{c_{-2}}{z} - \dots \quad (1.15.1)$$

Из условия обтекания следует, что контур C должен быть одной из линий тока, а мнимая часть комплексного потенциала – функция $v(x, y)$, являющаяся функцией тока, будет постоянной на контуре C . Следовательно, комплексный потенциал отображает контур C в некоторый отрезок l , параллельный действительной оси.

Согласно формуле (1.3.4) для произвольного замкнутого контура C^* , содержащего внутри себя точку $z = 0$ и охватывающего контур C

$$\Gamma + iN = \int_{C^*} f'(z) dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Поскольку поток через контур C^* равен нулю, то $2\pi i c_{-1} = \Gamma$.

Поэтому комплексный потенциал имеет вид

$$f(z) = \bar{V}_\infty z + c + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{c_{-2}}{z} - \dots \quad (1.15.1)$$

Из условия обтекания следует, что контур C должен быть одной из линий тока, а мнимая часть комплексного потенциала – функция $v(x, y)$, являющаяся функцией тока, будет постоянной на контуре C . Следовательно, комплексный потенциал отображает контур C в некоторый отрезок l , параллельный действительной оси.

В случае, когда циркуляция равна нулю, комплексный потенциал является однолистной функцией и имеет вид

$$f(z) = \bar{V}_{\infty} z + c - \frac{c_{-2}}{z} - \dots$$

Комплексный потенциал $w = f(z)$ безциркуляционного ($\Gamma = 0$) потока V реализует конформное отображения внешности замкнутого контура на внешность некоторого отрезка l , параллельного действительной оси, с нормировкой $f'(z) = \bar{V}_{\infty}$.

В случае, когда циркуляция равна нулю, комплексный потенциал является однолистной функцией и имеет вид

$$f(z) = \bar{V}_{\infty} z + c - \frac{c_{-2}}{z} - \dots$$

Комплексный потенциал $w = f(z)$ безциркуляционного ($\Gamma = 0$) потока V реализует конформное отображения внешности замкнутого контура на внешность некоторого отрезка l , параллельного действительной оси, с нормировкой $f'(z) = \bar{V}_{\infty}$.

I. § 16. Подъемная сила

Выведем классическую *формулу Чаплыгина*, позволяющую выразить подъемную силу, действующую на крыло в установившемся безвихревом потоке, через комплексный потенциал потока.

Будем считать, что крыло расположено неподвижно, а поток \mathbf{V} , имеющий фиксированную скорость в бесконечности \mathbf{V}_∞ , обтекает крыло, сечение которого является плоским замкнутым контуром C . В безвихревом потоке давление определяется формулой Бернулли-Эйлера

$$p = A - \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2.$$

Поскольку давление на контуре C направлено внутрь по нормали, то вектор силы, действующей на элемент $d\mathbf{z}$ контура C , равен $p i d\mathbf{z} = A i d\mathbf{z} - \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2 i d\mathbf{z}$, а полная сила, действующая на контур C , равна

$$P = \int_C p i d\mathbf{z} = -\frac{\rho i}{2} \int_C |\mathbf{V}|^2 d\mathbf{z}. \quad (1.16.1)$$

I. § 16. Подъемная сила

Выведем классическую *формулу Чаплыгина*, позволяющую выразить подъемную силу, действующую на крыло в установившемся безвихревом потоке, через комплексный потенциал потока.

Будем считать, что крыло расположено неподвижно, а поток \mathbf{V} , имеющий фиксированную скорость в бесконечности \mathbf{V}_∞ , обтекает крыло, сечение которого является плоским замкнутым контуром C . В безвихревом потоке давление определяется формулой Бернулли-Эйлера

$$p = A - \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2.$$

Поскольку давление на контуре C направлено внутрь по нормали, то вектор силы, действующей на элемент dz контура C , равен $\mathbf{p} i dz = A i dz - \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2 i dz$, а полная сила, действующая на контур C , равна

$$P = \int_C \mathbf{p} i dz = -\frac{\rho i}{2} \int_C |\mathbf{V}|^2 dz. \quad (1.16.1)$$

I. § 16. Подъемная сила

Выведем классическую *формулу Чаплыгина*, позволяющую выразить подъемную силу, действующую на крыло в установившемся безвихревом потоке, через комплексный потенциал потока.

Будем считать, что крыло расположено неподвижно, а поток \mathbf{V} , имеющий фиксированную скорость в бесконечности \mathbf{V}_∞ , обтекает крыло, сечение которого является плоским замкнутым контуром C . В безвихревом потоке давление определяется формулой Бернулли-Эйлера

$$p = A - \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2.$$

Поскольку давление на контуре C направлено внутрь по нормали, то вектор силы, действующей на элемент $d\mathbf{z}$ контура C , равен $p \mathbf{i} dz = A \mathbf{i} dz - \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2 \mathbf{i} dz$, а полная сила, действующая на контур C , равна

$$\mathbf{P} = \int_C p \mathbf{i} dz = -\frac{\rho \mathbf{i}}{2} \int_C |\mathbf{V}|^2 dz. \quad (1.16.1)$$

Поскольку происходит обтекание контура C , то в точках контура скорость потока направлена по касательной, т.е. $\mathbf{V} = \overline{f'(z)} = \pm |\mathbf{V}| e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg dz$.

Из соотношений $e^{-2i\varphi} dz = e^{-i\varphi} |dz| = \overline{dz}$, и $|\mathbf{V}|^2 = [\overline{f'(z)}]^2 e^{-2i\varphi}$ и равенства (1.16.1) следует, что

$$P = -\frac{\rho i}{2} \int_C [\overline{f'(z)}]^2 e^{-2i\varphi} dz = -\frac{\rho i}{2} \int_C [\overline{f'(z)}]^2 \overline{dz}.$$

Переходя к сопряженным величинам, получаем классическую формулу Чаплыгина

$$\overline{P} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz. \quad (1.16.2)$$

Поскольку происходит обтекание контура C , то в точках контура скорость потока направлена по касательной, т.е. $\mathbf{V} = \overline{f'(z)} = \pm |\mathbf{V}| e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg dz$.

Из соотношений $e^{-2i\varphi} dz = e^{-i\varphi} |dz| = \overline{dz}$, и $|\mathbf{V}|^2 = [\overline{f'(z)}]^2 e^{-2i\varphi}$ и равенства (1.16.1) следует, что

$$P = -\frac{\rho i}{2} \int_C [\overline{f'(z)}]^2 e^{-2i\varphi} dz = -\frac{\rho i}{2} \int_C [\overline{f'(z)}]^2 \overline{dz}.$$

Переходя к сопряженным величинам, получаем классическую формулу Чаплыгина

$$\overline{P} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz. \quad (1.16.2)$$

Поскольку происходит обтекание контура C , то в точках контура скорость потока направлена по касательной, т.е. $\mathbf{V} = \overline{f'(z)} = \pm |\mathbf{V}| e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg dz$.

Из соотношений $e^{-2i\varphi} dz = e^{-i\varphi} |dz| = \overline{dz}$, и $|\mathbf{V}|^2 = [\overline{f'(z)}]^2 e^{-2i\varphi}$ и равенства (1.16.1) следует, что

$$P = -\frac{\rho i}{2} \int_C [\overline{f'(z)}]^2 e^{-2i\varphi} dz = -\frac{\rho i}{2} \int_C [\overline{f'(z)}]^2 \overline{dz}.$$

Переходя к сопряженным величинам, получаем классическую формулу Чаплыгина

$$\overline{P} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz. \quad (1.16.2)$$

Зная явный вид комплексного потенциала (1.15.1), легко заметить, что

$$[f'(z)]^2 = (\bar{V}_\infty)^2 + \frac{\Gamma \bar{V}_\infty}{\pi i} \frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z^3} + \dots$$

Вычисляя интеграл в формуле Чаплыгина (1.16.2), получаем

$$\bar{P} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz = \frac{\rho i}{2} 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} [f'(z)]^2 = \frac{\rho i}{2} 2\pi i \frac{\Gamma \bar{V}_\infty}{\pi i} = i\rho \Gamma \bar{V}_\infty.$$

Переходя к сопряженным величинам, получаем формулу Жуковского

$$P = -i\rho \Gamma V_\infty, \quad (1.16.3)$$

согласно которой подъемная сила, действующая на обтекаемый контур, по величине равна произведению плотности, циркуляции и модуля скорости в бесконечности, а ее направление повернуто относительно V_∞ на прямой угол (при $\Gamma > 0$ поворот происходит по часовой стрелке, а при $\Gamma < 0$ против).

Зная явный вид комплексного потенциала (1.15.1), легко заметить, что

$$[f'(z)]^2 = (\bar{V}_\infty)^2 + \frac{\Gamma \bar{V}_\infty}{\pi i} \frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z^3} + \dots$$

Вычисляя интеграл в формуле Чаплыгина (1.16.2), получаем

$$\bar{P} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz = \frac{\rho i}{2} 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} [f'(z)]^2 = \frac{\rho i}{2} 2\pi i \frac{\Gamma \bar{V}_\infty}{\pi i} = i\rho \Gamma \bar{V}_\infty.$$

Переходя к сопряженным величинам, получаем формулу Жуковского

$$P = -i\rho \Gamma V_\infty, \quad (1.16.3)$$

согласно которой подъемная сила, действующая на обтекаемый контур, по величине равна произведению плотности, циркуляции и модуля скорости в бесконечности, а ее направление повернуто относительно V_∞ на прямой угол (при $\Gamma > 0$ поворот происходит по часовой стрелке, а при $\Gamma < 0$ против).

Зная явный вид комплексного потенциала (1.15.1), легко заметить, что

$$[f'(z)]^2 = (\bar{V}_\infty)^2 + \frac{\Gamma \bar{V}_\infty}{\pi i} \frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z^3} + \dots$$

Вычисляя интеграл в формуле Чаплыгина (1.16.2), получаем

$$\bar{P} = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz = \frac{\rho i}{2} 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} [f'(z)]^2 = \frac{\rho i}{2} 2\pi i \frac{\Gamma \bar{V}_\infty}{\pi i} = i\rho \Gamma \bar{V}_\infty.$$

Переходя к сопряженным величинам, получаем формулу Жуковского

$$P = -i\rho \Gamma V_\infty, \quad (1.16.3)$$

согласно которой подъемная сила, действующая на обтекаемый контур, по величине равна произведению плотности, циркуляции и модуля скорости в бесконечности, а ее направление повернуто относительно V_∞ на прямой угол (при $\Gamma > 0$ поворот происходит по часовой стрелке, а при $\Gamma < 0$ против).

I. § 17. Обтекание кругового цилиндра

Рассмотрим безциркуляционный поток, обтекающего окружность $C_R = \{|z| = R\}$ с заданной скоростью на бесконечности $V_\infty = v_\infty e^{i\theta}$. Учитывая результат § 15 и используя функцию Жуковского легко найти комплексный потенциал данного потока, отображающий внешность круга на плоскость с разрезом по отрезку параллельному действительной оси,

$$f_0(z) = Rv_\infty \left(\frac{ze^{-i\theta}}{R} + \frac{R}{ze^{-i\theta}} \right) = \overline{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z}.$$

Добавляя комплексный потенциал $f_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ чисто циркуляционного потока, обтекающего окружность C_R , окончательно находим

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) = \overline{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad (1.17.1)$$

$$\overline{V} = f'(z) = \overline{V}_\infty - \frac{V_\infty R^2}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \frac{1}{z}. \quad (1.17.2)$$

I. § 17. Обтекание кругового цилиндра

Рассмотрим безциркуляционный поток, обтекающего окружность $C_R = \{|z| = R\}$ с заданной скоростью на бесконечности $V_\infty = v_\infty e^{i\theta}$. Учитывая результат § 15 и используя функцию Жуковского легко найти комплексный потенциал данного потока, отображающий внешность круга на плоскость с разрезом по отрезку параллельному действительной оси,

$$f_0(z) = Rv_\infty \left(\frac{ze^{-i\theta}}{R} + \frac{R}{ze^{-i\theta}} \right) = \overline{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z}.$$

Добавляя комплексный потенциал $f_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ чисто циркуляционного потока, обтекающего окружность C_R , окончательно находим

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) = \overline{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad (1.17.1)$$

$$\overline{V} = f'(z) = \overline{V}_\infty - \frac{V_\infty R^2}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \frac{1}{z}. \quad (1.17.2)$$

Учитывая симметрию и принимая для простоты $\theta = 0$, получаем

$$f'(z) = v_{\infty} - \frac{v_{\infty} R^2}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

Критическими точками потока ($\mathbf{V} = f'(z) = 0$) являются точки

$$z_{1,2} = \frac{1}{4\pi v_{\infty}} \left(\Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 v_{\infty}^2 R^2 - \Gamma^2} \right).$$

Структура рассматриваемого течения существенным образом зависит от величины циркуляции. При $\Gamma \geq 0$ можно выделить четыре случая, в каждом из которых строение линий тока имеет свои качественные особенности.

Учитывая симметрию и принимая для простоты $\theta = 0$, получаем

$$f'(z) = v_{\infty} - \frac{v_{\infty} R^2}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

Критическими точками потока ($\mathbf{V} = f'(z) = 0$) являются точки

$$z_{1,2} = \frac{1}{4\pi v_{\infty}} \left(\Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 v_{\infty}^2 R^2 - \Gamma^2} \right).$$

Структура рассматриваемого течения существенным образом зависит от величины циркуляции. При $\Gamma \geq 0$ можно выделить четыре случая, в каждом из которых строение линий тока имеет свои качественные особенности.

Учитывая симметрию и принимая для простоты $\theta = 0$, получаем

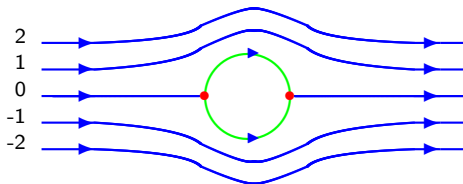
$$f'(z) = v_{\infty} - \frac{v_{\infty} R^2}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

Критическими точками потока ($\mathbf{V} = f'(z) = 0$) являются точки

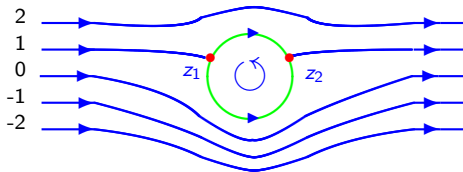
$$z_{1,2} = \frac{1}{4\pi v_{\infty}} \left(\Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 v_{\infty}^2 R^2 - \Gamma^2} \right).$$

Структура рассматриваемого течения существенным образом зависит от величины циркуляции. При $\Gamma \geq 0$ можно выделить четыре случая, в каждом из которых строение линий тока имеет свои качественные особенности.

I. $\Gamma = 0$. Это простейшая ситуация безциркуляционного потока, при котором течение симметрично относительно действительной оси, а критическими являются диаметрально противоположные точки окружности $z_{1,2} = \pm R$.



II. $0 < \Gamma < 4\pi v_\infty R$. В этом случае мы имеем две различные критические z_1 и z_2 , расположенные симметрично относительно мнимой оси. При этом легко проверить, что $|z_1| = |z_2| = R$, т.е. критические точки лежат на окружности.

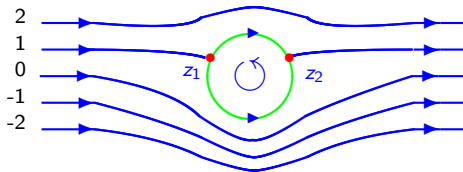


В точке $z_1 = Re^{i\varphi_1}$ соответствующая линия тока разветвляется на две: одна обходит верхнюю дугу окружности, а вторая нижнюю. В точке $z_2 = Re^{i\varphi_2}$ обе линии вновь соединяются. Точку z_1 называют *точкой разветвления*, а точку z_2 называют *точкой схода*.

Циркуляция Γ и точка схода $z_2 = Re^{i\varphi_2}$ связаны простыми соотношениями

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}, \quad \Gamma = 4\pi R v_\infty \sin \varphi_2.$$

II. $0 < \Gamma < 4\pi v_\infty R$. В этом случае мы имеем две различные критические z_1 и z_2 , расположенные симметрично относительно мнимой оси. При этом легко проверить, что $|z_1| = |z_2| = R$, т.е. критические точки лежат на окружности.

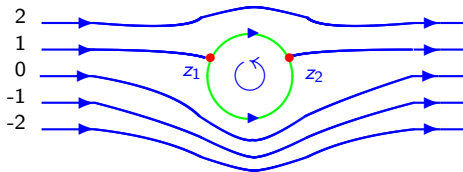


В точке $z_1 = Re^{i\varphi_1}$ соответствующая линия тока разветвляется на две: одна обходит верхнюю дугу окружности, а вторая нижнюю. В точке $z_2 = Re^{i\varphi_2}$ обе линии вновь соединяются. Точку z_1 называют *точкой разветвления*, а точку z_2 называют *точкой схода*.

Циркуляция Γ и точка схода $z_2 = Re^{i\varphi_2}$ связаны простыми соотношениями

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}, \quad \Gamma = 4\pi R v_\infty \sin \varphi_2.$$

II. $0 < \Gamma < 4\pi v_\infty R$. В этом случае мы имеем две различные критические z_1 и z_2 , расположенные симметрично относительно мнимой оси. При этом легко проверить, что $|z_1| = |z_2| = R$, т.е. критические точки лежат на окружности.



В точке $z_1 = Re^{i\varphi_1}$ соответствующая линия тока разветвляется на две: одна обходит верхнюю дугу окружности, а вторая нижнюю. В точке $z_2 = Re^{i\varphi_2}$ обе линии вновь соединяются. Точку z_1 называют *точкой разветвления*, а точку z_2 называют *точкой схода*.

Циркуляция Γ и точка схода $z_2 = Re^{i\varphi_2}$ связаны простыми соотношениями

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}, \quad \Gamma = 4\pi R v_\infty \sin \varphi_2.$$

В общем случае, когда поток направлен под некоторым углом к положительному направлению действительной оси ($\theta \neq 0$), из геометрических соображений видно, что

$$\Gamma = 4\pi R v_{\infty} \sin(\varphi_2 - \theta). \quad (1.17.3)$$

Подставляя равенство (1.17.3) в формулу Жуковского, получаем выражение для величины подъемной силы потока через точку схода

$$|P| = 4\pi \rho R v_{\infty}^2 |\sin(\varphi_2 - \theta)|. \quad (1.17.4)$$

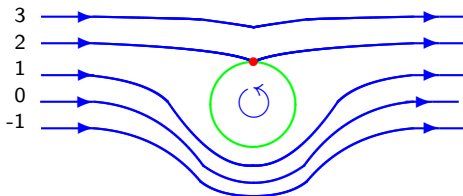
В общем случае, когда поток направлен под некоторым углом к положительному направлению действительной оси ($\theta \neq 0$), из геометрических соображений видно, что

$$\Gamma = 4\pi R v_{\infty} \sin(\varphi_2 - \theta). \quad (1.17.3)$$

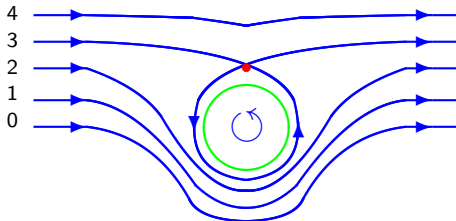
Подставляя равенство (1.17.3) в формулу Жуковского, получаем выражение для величины подъемной силы потока через точку схода

$$|P| = 4\pi \rho R v_{\infty}^2 |\sin(\varphi_2 - \theta)|. \quad (1.17.4)$$

III. $\Gamma = 4\pi v_\infty R$. В этом случае точки разветвления и схода сливаются в одну. Возникает неустойчивая ситуация, поскольку малые изменения величины циркуляции Γ приводят к качественно различным типам течений, соответствующих случаю II и случаю IV.



IV. $\Gamma > 4\pi v_\infty R$. В этом случае $|z_1| \neq |z_2|$ и $|z_1||z_2| = R^2$. Поэтому одна из критических точек лежит внутри круга, а вторая во внешности. В результате появляются замкнутые линии тока, охватывающие исходную окружность.



I. § 18. Обтекание профилей Жуковского

Рассмотрим замкнутый контур C и такое конформное отображение $t = h(z)$ внешности контура C на внешность круга $K_R = \{|t| \leq R\}$, что $h(\infty) = \infty$, $h'(\infty) = 1$.

Учитывая формулу (1.17.1), описывающую комплексный потенциал потока, обтекающего окружность, несложно найти комплексный потенциал $f(z)$ для потока, обтекающего контур C с заданной точкой схода z_0 и заданной скоростью в бесконечности V_∞

$$f(z) = \overline{V_\infty} h(z) + \frac{V_\infty R^2}{h(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln h(z). \quad (1.18.1)$$

Отметим, что циркуляцию Γ можно найти по формуле (1.17.3) через точку t_0 , являющуюся образом точки схода, т.е. $t_0 = h(z_0)$.

При этом для нахождения самой точки схода часто используется *условие Чаплыгина*: при обтекании профиля с острой точкой z_0 в эту точку под влиянием вязкости и вихреобразования смещается точка схода потока.

I. § 18. Обтекание профилей Жуковского

Рассмотрим замкнутый контур C и такое конформное отображение $t = h(z)$ внешности контура C на внешность круга $K_R = \{|t| \leq R\}$, что $h(\infty) = \infty$, $h'(\infty) = 1$.

Учитывая формулу (1.17.1), описывающую комплексный потенциал потока, обтекающего окружность, несложно найти комплексный потенциал $f(z)$ для потока, обтекающего контур C с заданной точкой схода z_0 и заданной скоростью в бесконечности V_∞

$$f(z) = \overline{V_\infty} h(z) + \frac{V_\infty R^2}{h(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln h(z). \quad (1.18.1)$$

Отметим, что циркуляцию Γ можно найти по формуле (1.17.3) через точку t_0 , являющуюся образом точки схода, т.е. $t_0 = h(z_0)$.

При этом для нахождения самой точки схода часто используется *условие Чаплыгина*: при обтекании профиля с острой точкой z_0 в эту точку под влиянием вязкости и вихреобразования смещается точка схода потока.

I. § 18. Обтекание профилей Жуковского

Рассмотрим замкнутый контур C и такое конформное отображение $t = h(z)$ внешности контура C на внешность круга $K_R = \{|t| \leq R\}$, что $h(\infty) = \infty$, $h'(\infty) = 1$.

Учитывая формулу (1.17.1), описывающую комплексный потенциал потока, обтекающего окружность, несложно найти комплексный потенциал $f(z)$ для потока, обтекающего контур C с заданной точкой схода z_0 и заданной скоростью в бесконечности V_∞

$$f(z) = \overline{V_\infty} h(z) + \frac{V_\infty R^2}{h(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln h(z). \quad (1.18.1)$$

Отметим, что циркуляцию Γ можно найти по формуле (1.17.3) через точку t_0 , являющуюся образом точки схода, т.е. $t_0 = h(z_0)$.

При этом для нахождения самой точки схода часто используется **условие Чаплыгина**: при обтекании профиля с острой точкой z_0 в эту точку под влиянием вязкости и вихреобразования смещается точка схода потока.

Рассмотрим обтекание профилей Жуковского, описанных в §10. Функция $\omega = g(z) = z + \sqrt{z^2 - a^2}$ отображает внешность профиля Жуковского $\Gamma(a, h, d)$ на внешность круга K' радиуса $R' = d + \sqrt{a^2 + h^2}$ и с центром в точке $\omega_0 = ih - de^{-i\alpha/2}$, где $\frac{\alpha}{2} = \arctg \frac{h}{a}$. При этом $g'(\infty) = 2$.

Следовательно функция

$$t = h(z) = \frac{1}{2}(g(z) - \omega_0) = \frac{1}{2}\left(z - \omega_0 + \sqrt{z^2 - a^2}\right)$$

отображает внешность профиля Жуковского на внешность круга с центром в нуле и радиуса

$$R = \frac{R'}{2} = \frac{1}{2}\left(d + \sqrt{a^2 + h^2}\right).$$

Подставляя явный вид функции $h(z)$ в формулу (1.18.1), получим комплексный потенциал потока, обтекающего профиль Жуковского.

Рассмотрим обтекание профилей Жуковского, описанных в §10. Функция $\omega = g(z) = z + \sqrt{z^2 - a^2}$ отображает внешность профиля Жуковского $\Gamma(a, h, d)$ на внешность круга K' радиуса $R' = d + \sqrt{a^2 + h^2}$ и с центром в точке $\omega_0 = ih - de^{-i\alpha/2}$, где $\frac{\alpha}{2} = \arctg \frac{h}{a}$. При этом $g'(\infty) = 2$.

Следовательно функция

$$t = h(z) = \frac{1}{2}(g(z) - \omega_0) = \frac{1}{2} \left(z - \omega_0 + \sqrt{z^2 - a^2} \right)$$

отображает внешность профиля Жуковского на внешность круга с центром в нуле и радиуса

$$R = \frac{R'}{2} = \frac{1}{2} \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right).$$

Подставляя явный вид функции $h(z)$ в формулу (1.18.1), получим комплексный потенциал потока, обтекающего профиль Жуковского.

Рассмотрим обтекание профилей Жуковского, описанных в §10. Функция $\omega = g(z) = z + \sqrt{z^2 - a^2}$ отображает внешность профиля Жуковского $\Gamma(a, h, d)$ на внешность круга K' радиуса $R' = d + \sqrt{a^2 + h^2}$ и с центром в точке $\omega_0 = ih - de^{-i\alpha/2}$, где $\frac{\alpha}{2} = \arctg \frac{h}{a}$. При этом $g'(\infty) = 2$.

Следовательно функция

$$t = h(z) = \frac{1}{2}(g(z) - \omega_0) = \frac{1}{2} \left(z - \omega_0 + \sqrt{z^2 - a^2} \right)$$

отображает внешность профиля Жуковского на внешность круга с центром в нуле и радиуса

$$R = \frac{R'}{2} = \frac{1}{2} \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right).$$

Подставляя явный вид функции $h(z)$ в формулу (1.18.1), получим комплексный потенциал потока, обтекающего профиль Жуковского.

Из построения профиля Жуковского видно, что аргумент точки t_0 – образа точки заострения профиля, являющейся согласно условию Чаплыгина точкой схода, находится просто $\varphi_0 = -\frac{\alpha}{2}$.

Формула (1.17.3) позволяет найти циркуляцию

$$\Gamma = -2\pi v_\infty \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Используя равенство (1.17.4), легко найти подъемную силу профиля Жуковского $\Gamma(a, h, d)$

$$|P| = 2\pi \rho v_\infty^2 \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \left| \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right|.$$

Полученная формула позволяет оценить влияние параметров профиля $\Gamma(a, h, d)$ на величину подъемной силы.

Из построения профиля Жуковского видно, что аргумент точки t_0 – образа точки заострения профиля, являющейся согласно условию Чаплыгина точкой схода, находится просто $\varphi_0 = -\frac{\alpha}{2}$.

Формула (1.17.3) позволяет найти циркуляцию

$$\Gamma = -2\pi v_\infty \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Используя равенство (1.17.4), легко найти подъемную силу профиля Жуковского $\Gamma(a, h, d)$

$$|P| = 2\pi \rho v_\infty^2 \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \left| \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right|.$$

Полученная формула позволяет оценить влияние параметров профиля $\Gamma(a, h, d)$ на величину подъемной силы.

Из построения профиля Жуковского видно, что аргумент точки t_0 – образа точки заострения профиля, являющейся согласно условию Чаплыгина точкой схода, находится просто $\varphi_0 = -\frac{\alpha}{2}$.

Формула (1.17.3) позволяет найти циркуляцию

$$\Gamma = -2\pi v_\infty \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Используя равенство (1.17.4), легко найти подъемную силу профиля Жуковского $\Gamma(a, h, d)$

$$|P| = 2\pi \rho v_\infty^2 \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \left| \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right|.$$

Полученная формула позволяет оценить влияние параметров профиля $\Gamma(a, h, d)$ на величину подъемной силы.

Из построения профиля Жуковского видно, что аргумент точки t_0 – образа точки заострения профиля, являющейся согласно условию Чаплыгина точкой схода, находится просто $\varphi_0 = -\frac{\alpha}{2}$.

Формула (1.17.3) позволяет найти циркуляцию

$$\Gamma = -2\pi v_\infty \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Используя равенство (1.17.4), легко найти подъемную силу профиля Жуковского $\Gamma(a, h, d)$

$$|P| = 2\pi \rho v_\infty^2 \left(d + \sqrt{a^2 + h^2} \right) \left| \sin \left(\theta + \frac{\alpha}{2} \right) \right|.$$

Полученная формула позволяет оценить влияние параметров профиля $\Gamma(a, h, d)$ на величину подъемной силы.

II. Некоторые приложения теории вычетов

Традиционно приложения теории вычетов в первую очередь ассоциируются с нахождения значений различных интегралов. Возможность вычисления определенных и контурных интегралов при помощи вычетов без нахождения первообразной безусловно является замечательным результатом, позволяющим по сути свести *операцию интегрирования* к существенно более простой *операции дифференцирования!!!* Однако теория вычетов реально используется и при решении множества других задач различного содержания. К таким приложениям можно отнести нахождение интегральных формул для нулей аналитических функций, вычисление коэффициентов ряда Тейлора для обратной функции, разложение мероморфной функции на элементарные дроби, представление целой функции в виде бесконечного произведения ...

II. § 19. Обобщенный логарифмический вычет

При решении различных задач возникает необходимость нахождения нулей трансцендентных аналитических функций. Существуют итерационные методы, позволяющие находить приближенные значения с любой требуемой точностью, однако эффективность этих методов существенным образом зависит от правильности выбора первоначального приближения. В этом параграфе мы получим интегральные формулы для нулей аналитических функций.

Известно, что для мероморфной функции f разность между количеством нулей N и количеством полюсов P с учетом их кратности, лежащих внутри замкнутого контура Γ , может быть выражена через логарифмический вычет

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

Этот результат допускает довольно простое обобщение.

II. § 19. Обобщенный логарифмический вычет

При решении различных задач возникает необходимость нахождения нулей трансцендентных аналитических функций. Существуют итерационные методы, позволяющие находить приближенные значения с любой требуемой точностью, однако эффективность этих методов существенным образом зависит от правильности выбора первоначального приближения. В этом параграфе мы получим интегральные формулы для нулей аналитических функций.

Известно, что для мероморфной функции f разность между количеством нулей N и количеством полюсов P с учетом их кратности, лежащих внутри замкнутого контура Γ , может быть выражена через логарифмический вычет

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

Этот результат допускает довольно простое обобщение.

Теорема 2.19.1.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении. Функция $\varphi(z)$ является аналитической в D и непрерывной в \overline{D} , а функция $f(z)$ является аналитической в \overline{D} за исключением конечного числа полюсов, лежащих в области D , и $f(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_i n_i \varphi(a_i) - \sum_j m_j \varphi(b_j),$$

где $a_i \in D$ – нули функции $f(z)$ кратности n_i , а $b_j \in D$ – полюсы функции $f(z)$ кратности m_j .

Особыми точками функции $F(z) = \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ являются нули и полюсы функции $f(z)$. Доказательство теоремы является простым следствием разложения в ряд Лорана функции $F(z)$ в окрестности нулей a_i и полюсов b_j .

Если функция $f(z)$ не имеет полюсов, то полагая $\varphi(z) \equiv 1$, мы получаем стандартную формулу количества нулей функции $f(z)$ в области D , т.е.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Применяя теорему 2.19.1 в случае, когда $\varphi(z) = z$, мы получаем интегральную формулу для нахождения простого нуля.

Следствие 2.19.2.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении. Если аналитическая в \bar{D} функция $f(z)$ имеет единственный простой нуль $a \in D$, то

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (2.19.1)$$

Если функция $f(z)$ не имеет полюсов, то полагая $\varphi(z) \equiv 1$, мы получаем стандартную формулу количества нулей функции $f(z)$ в области D , т.е.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Применяя теорему 2.19.1 в случае, когда $\varphi(z) = z$, мы получаем интегральную формулу для нахождения простого нуля.

Следствие 2.19.2.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении. Если аналитическая в \bar{D} функция $f(z)$ имеет единственный простой нуль $a \in D$, то

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (2.19.1)$$

Если в области содержатся два простых нуля, то они могут быть найдены как решения простой алгебраической системы уравнений.

Следствие 2.19.3.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении. Если аналитическая в D функция $f(z)$ имеет два простых нуля $a, b \in D$, то они могут быть найдены из равенств

$$a + b = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^2 \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (2.19.2)$$

Отметим, что универсальных методов решения трансцендентных уравнений не существует, при этом приближенное вычисление интеграла является алгоритмической задачей и может быть легко реализовано при помощи вычислительной техники.^a

^a Было несколько неожиданным увидеть формулы (2.19.2) в статье по физике плазмы.

Если в области содержатся два простых нуля, то они могут быть найдены как решения простой алгебраической системы уравнений.

Следствие 2.19.3.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении. Если аналитическая в D функция $f(z)$ имеет два простых нуля $a, b \in D$, то они могут быть найдены из равенств

$$a + b = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^2 \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (2.19.2)$$

Отметим, что универсальных методов решения трансцендентных уравнений не существует, при этом приближенное вычисление интеграла является алгоритмической задачей и может быть легко реализовано при помощи вычислительной техники.^a

^a Было несколько неожиданным увидеть формулы (2.19.2) в статье по физике плазмы.

II. § 20. Вычисление интегралов

Используемые в комплексном анализе приемы вычисления интегралов являются весьма эффективными и часто технически существенно более простыми по сравнению с другими методами. К сожалению не существует единой универсальной схемы, подходящей для всех интегралов сразу. Для различных типов подинтегральных функций приходится использовать различные контуры интегрирования, различными способами строить вспомогательные функции комплексного переменного, приходится получать дополнительные оценки, однако общим элементом всегда остается использование теории вычетов.

Интегралы в смысле главного значения по Коши.

Пусть Γ – кусочно-гладкая кривая, точка $t_0 \in \Gamma$. Обозначим через C_ϵ окружность $|z - t_0| = \epsilon$, а через Γ_ϵ часть кривой Γ , лежащую вне круга $|z - t_0| \leq \epsilon$.

Если функция $f(z)$ имеет единственную особенность в точке $t_0 \in \Gamma$, то интеграл в смысле главного значения по Коши определяется условием:

$$\text{V.p.} \int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} f(z) dz \quad [\text{V.p.} - \text{Valeur principale (фр.)}]$$

Аддитивность интеграла позволяет естественным образом определить главное значение интеграла в случае конечного числа особых точек.

II. § 20. Вычисление интегралов

Используемые в комплексном анализе приемы вычисления интегралов являются весьма эффективными и часто технически существенно более простыми по сравнению с другими методами. К сожалению не существует единой универсальной схемы, подходящей для всех интегралов сразу. Для различных типов подинтегральных функций приходится использовать различные контуры интегрирования, различными способами строить вспомогательные функции комплексного переменного, приходится получать дополнительные оценки, однако общим элементом всегда остается использование теории вычетов.

Интегралы в смысле главного значения по Коши.

Пусть Γ – кусочно-гладкая кривая, точка $t_0 \in \Gamma$. Обозначим через C_ϵ окружность $|z - t_0| = \epsilon$, а через Γ_ϵ часть кривой Γ , лежащую вне круга $|z - t_0| \leq \epsilon$.

Если функция $f(z)$ имеет единственную особенность в точке $t_0 \in \Gamma$, то интеграл в смысле главного значения по Коши определяется условием:

$$\text{V.p.} \int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} f(z) dz \quad [\text{V.p.} - \text{Valeur principale (фр.)}]$$

Аддитивность интеграла позволяет естественным образом определить главное значение интеграла в случае конечного числа особых точек.

II. § 20. Вычисление интегралов

Используемые в комплексном анализе приемы вычисления интегралов являются весьма эффективными и часто технически существенно более простыми по сравнению с другими методами. К сожалению не существует единой универсальной схемы, подходящей для всех интегралов сразу. Для различных типов подинтегральных функций приходится использовать различные контуры интегрирования, различными способами строить вспомогательные функции комплексного переменного, приходится получать дополнительные оценки, однако общим элементом всегда остается использование теории вычетов.

Интегралы в смысле главного значения по Коши.

Пусть Γ – кусочно-гладкая кривая, точка $t_0 \in \Gamma$. Обозначим через C_ϵ окружность $|z - t_0| = \epsilon$, а через Γ_ϵ часть кривой Γ , лежащую вне круга $|z - t_0| \leq \epsilon$.

Если функция $f(z)$ имеет единственную особенность в точке $t_0 \in \Gamma$, то интеграл в смысле главного значения по Коши определяется условием:

$$\text{V.p.} \int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} f(z) dz \quad [\text{V.p.} - \text{Valeur principale} \text{ (фр.)}]$$

Аддитивность интеграла позволяет естественным образом определить главное значение интеграла в случае конечного числа особых точек.

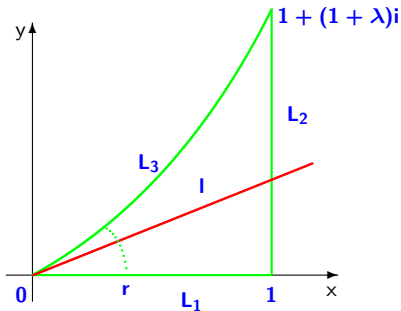
Пример. Рассмотрим криволинейный треугольник Δ_λ , образованный отрезками $L_1 = [0, 1]$, $L_2 = [1, 1 + (1 + \lambda)i]$ и дугой параболы $y = x^2 + \lambda x$, обозначенной через L_3 .

Парабола имеет в нуле касательную, пересекающую действительную ось под углом $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \lambda$. Пусть C_r – дуга окружности радиуса r с центром в нуле, соединяющая действительную ось с параболой. Обозначим через γ_r кусочно-гладкую кривую, образованную отрезками $[r, 1]$, L_2 и частью параболы, соединяющей L_2 с C_r . Согласно интегральной теореме Коши получаем

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \int_{C_r} \frac{dz}{z} = i \int_0^{\varphi_r} d\varphi = i\varphi_r,$$

где φ_r – радианная мера дуги C_r , стремящаяся при $r \rightarrow 0$ к значению φ_0 . Следовательно при $0 \leq \lambda < +\infty$

$$\text{V.p.} \int_{\partial \Delta_\lambda} \frac{dz}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = i \operatorname{arctg} \lambda.$$



В общем случае ситуация вполне аналогичная.

Теорема 2.20.2.

Пусть D – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении, функция $f(z)$ является аналитической в \bar{D} за исключением конечного числа особых точек $b_1, \dots, b_n \in D$ и простых полюсов $a_1, \dots, a_m \in \Gamma$, в которых односторонние касательные к границе образуют углы α_m . Тогда

$$\text{V.p.} \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=b_k} \text{res } f(z) + i \sum \alpha_k \text{res } f(z). \quad (2.20.1)$$

Для расходящихся интегралов на действительной прямой \mathbb{R} , когда особой является бесконечно удаленная точка, главное значение определяется условием:

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

В общем случае ситуация вполне аналогичная.

Теорема 2.20.2.

Пусть D – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении, функция $f(z)$ является аналитической в \overline{D} за исключением конечного числа особых точек $b_1, \dots, b_n \in D$ и простых полюсов $a_1, \dots, a_m \in \Gamma$, в которых односторонние касательные к границе образуют углы α_m . Тогда

$$\text{V.p.} \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=b_k} \text{res } f(z) + i \sum \alpha_k \text{res } f(z). \quad (2.20.1)$$

Для расходящихся интегралов на действительной прямой R , когда особой является бесконечно удаленная точка, главное значение определяется условием:

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

В общем случае ситуация вполне аналогичная.

Теорема 2.20.2.

Пусть D – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной в положительном направлении, функция $f(z)$ является аналитической в \overline{D} за исключением конечного числа особых точек $b_1, \dots, b_n \in D$ и простых полюсов $a_1, \dots, a_m \in \Gamma$, в которых односторонние касательные к границе образуют углы α_m . Тогда

$$\text{V.p.} \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=b_k} \text{res } f(z) + i \sum \alpha_k \text{res } f(z). \quad (2.20.1)$$

Для расходящихся интегралов на действительной прямой R , когда особой является бесконечно удаленная точка, главное значение определяется условием:

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

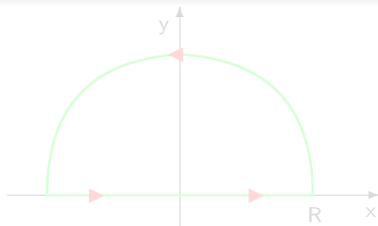
Лемма 2.20.3. (Лемма Жордана.)

Пусть $a > 0$, функция $f(z)$ непрерывна в секторе $S = \{|z| \geq r > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и $M(R) = \max_{z \in C_R^+} |f(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, где C_R^+ – верхняя полуокружность. Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

Вычислим интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

Рассмотрим контур Γ_R , изображенный на рисунке и состоящий из верхней полуокружности C_R^+ и отрезка $[-R, R]$. Чтобы воспользоваться леммой Жордана введем вспомогательную функцию $f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}$, имеющую простой полюс в точке $z = 0$.



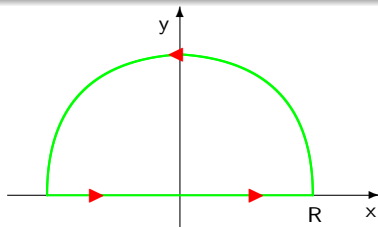
Лемма 2.20.3. (Лемма Жордана.)

Пусть $a > 0$, функция $f(z)$ непрерывна в секторе $S = \{|z| \geq r > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и $M(R) = \max_{z \in C_R^+} |f(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, где C_R^+ – верхняя полуокружность. Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

Вычислим интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

Рассмотрим контур Γ_R , изображенный на рисунке и состоящий из верхней полуокружности C_R^+ и отрезка $[-R, R]$. Чтобы воспользоваться леммой Жордана введем вспомогательную функцию $f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}$, имеющую простой полюс в точке $z = 0$.



Поскольку

$$f(x) = \frac{e^{2ix} - 1}{x^2} = -\frac{2 \sin^2 x}{x^2} + i \frac{\sin 2x}{x^2},$$

то, учитывая нечетность функции $\sin 2x$, лемму Жордана и теорему 2.20.2, получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \text{v.p.} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = -\frac{i\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2iz} - 1}{z^2} = -\frac{i\pi}{2} \cdot 2i = \pi. \end{aligned}$$

Обычно вычисление рационально-тригонометрического интеграла при помощи замены переменной $z = e^{i\varphi}$ сводится к вычислению комплексного интеграла по единичной окружности. Следующий результат представляет собой альтернативный подход к вычислению интегралов от периодических функций.

Теорема 2.20.4.

Пусть 2π -периодическая функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой полосе

$$\bar{P} = \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

за исключением конечного числа особых точек $b_1, \dots, b_n \in P$ и простых полюсов $a_1, \dots, a_m \in (-\pi, \pi)$. Если $f(z) \rightarrow A \neq \infty$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$, то

$$\text{V.p.} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi A + 2\pi i \sum_{z=b_k} \operatorname{res} f(z) + \pi i \sum_{z=a_k} \operatorname{res} f(z).$$

Идея доказательства совсем проста: обрезая полосу P прямой $\operatorname{Im} z = L > 0$ и интегрируя по полученному прямоугольнику, мы видим, что в силу периодичности функции $f(z)$ сумма интегралов по боковым сторонам равна нулю, а интеграл по верхней стороне стремится к $-2\pi A$ при $L \rightarrow +\infty$.

Обычно вычисление рационально-тригонометрического интеграла при помощи замены переменной $z = e^{i\varphi}$ сводится к вычислению комплексного интеграла по единичной окружности. Следующий результат представляет собой альтернативный подход к вычислению интегралов от периодических функций.

Теорема 2.20.4.

Пусть 2π -периодическая функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой полосе

$$\bar{P} = \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

за исключением конечного числа особых точек $b_1, \dots, b_n \in P$ и простых полюсов $a_1, \dots, a_m \in (-\pi, \pi)$. Если $f(z) \rightarrow A \neq \infty$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$, то

$$\text{V.p.} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi A + 2\pi i \sum_{z=b_k} \operatorname{res} f(z) + \pi i \sum_{z=a_k} \operatorname{res} f(z).$$

Идея доказательства совсем проста: обрезая полосу P прямой $\operatorname{Im} z = L > 0$ и интегрируя по полученному прямоугольнику, мы видим, что в силу периодичности функции $f(z)$ сумма интегралов по боковым сторонам равна нулю, а интеграл по верхней стороне стремится к $-2\pi A$ при $L \rightarrow +\infty$.

Вычислим интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi}$ (a) $c > 1$, (b) $0 < c < 1$.

Отметим, что подинтегральная функция удовлетворяет условию теоремы 2.20.4 и при этом $f(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$.

(a). Подинтегральная функция имеет в полосе P один простой полюс z_0 , в котором $\sin z_0 = -i\sqrt{c^2 - 1}$, поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{c + \cos z} = 2\pi i \frac{1}{-\sin z_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}.$$

(b). Подинтегральная функция имеет на интервале $(0, 2\pi)$ два простых полюса z_1, z_2 . При этом $\operatorname{res}_{z=z_2} f(z) = -\operatorname{res}_{z=z_1} f(z)$, поэтому главное значение расходящегося несобственного интеграла равно нулю.

Вычислим интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi}$ (a) $c > 1$, (b) $0 < c < 1$.

Отметим, что подынтегральная функция удовлетворяет условию теоремы 2.20.4 и при этом $f(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$.

(a). Подынтегральная функция имеет в полосе P один простой полюс z_0 , в котором $\sin z_0 = -i\sqrt{c^2 - 1}$, поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{c + \cos z} = 2\pi i \frac{1}{-\sin z_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}.$$

(b). Подынтегральная функция имеет на интервале $(0, 2\pi)$ два простых полюса z_1, z_2 . При этом $\operatorname{res}_{z=z_2} f(z) = -\operatorname{res}_{z=z_1} f(z)$, поэтому главное значение расходящегося несобственного интеграла равно нулю.

Вычислим интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi}$ (a) $c > 1$, (b) $0 < c < 1$.

Отметим, что подынтегральная функция удовлетворяет условию теоремы 2.20.4 и при этом $f(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$.

(a). Подынтегральная функция имеет в полосе P один простой полюс z_0 , в котором $\sin z_0 = -i\sqrt{c^2 - 1}$, поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{c + \cos z} = 2\pi i \frac{1}{-\sin z_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}.$$

(b). Подынтегральная функция имеет на интервале $(0, 2\pi)$ два простых полюса z_1, z_2 . При этом $\operatorname{res}_{z=z_2} f(z) = -\operatorname{res}_{z=z_1} f(z)$, поэтому главное значение расходящегося несобственного интеграла равно нулю.

Вычислим интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi}$ (a) $c > 1$, (b) $0 < c < 1$.

Отметим, что подынтегральная функция удовлетворяет условию теоремы 2.20.4 и при этом $f(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$.

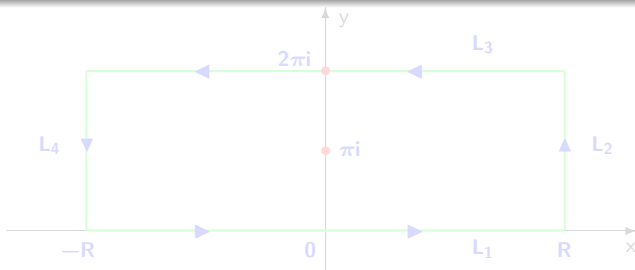
(a). Подынтегральная функция имеет в полосе P один простой полюс z_0 , в котором $\sin z_0 = -i\sqrt{c^2 - 1}$, поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{c + \cos \varphi} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{c + \cos z} = 2\pi i \frac{1}{-\sin z_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}.$$

(b). Подынтегральная функция имеет на интервале $(0, 2\pi)$ два простых полюса z_1, z_2 . При этом $\operatorname{res}_{z=z_2} f(z) = -\operatorname{res}_{z=z_1} f(z)$, поэтому главное значение расходящегося несобственного интеграла равно нулю.

Интегрирование показательных функций

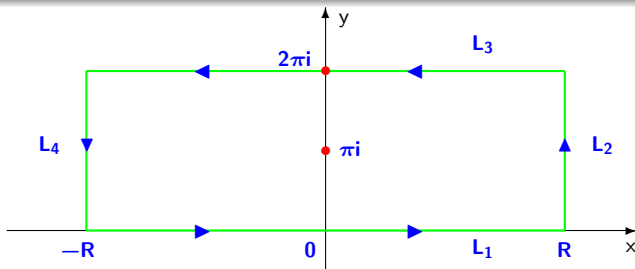
Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad (0 < a < 1).$



Решение. Учитывая периодичность функции e^z , воспользуемся интегрированием функции $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ по изображенному на рисунке контуру Γ_R .

Интегрирование показательных функций

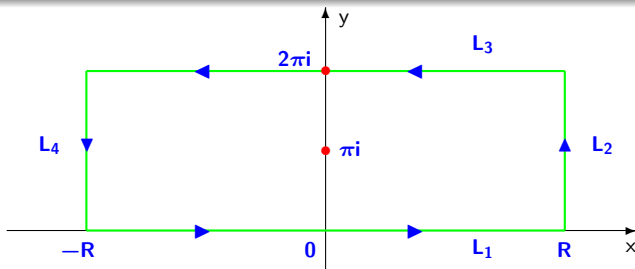
Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad (0 < a < 1).$



Решение. Учитывая периодичность функции e^z , воспользуемся интегрированием функции $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ по изображенному на рисунке контуру Γ_R .

Интегрирование показательных функций

Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad (0 < a < 1).$



Решение. Учитывая периодичность функции e^z , воспользуемся интегрированием функции $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ по изображенному на рисунке контуру Γ_R .

Заметим, что
$$\int_{L_3} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

На отрезке L_2 имеем
$$\left| \int_{L_2} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

На отрезке L_4 имеем
$$\left| \int_{L_4} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{2\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \operatorname{res}_{z=\pi i} f(z).$$

Заметим, что
$$\int_{L_3} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

На отрезке L_2 имеем
$$\left| \int_{L_2} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

На отрезке L_4 имеем
$$\left| \int_{L_4} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{2\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \operatorname{res}_{z=\pi i} f(z).$$

Заметим, что
$$\int_{L_3} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

На отрезке L_2 имеем
$$\left| \int_{L_2} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

На отрезке L_4 имеем
$$\left| \int_{L_4} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{2\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \operatorname{res}_{z=\pi i} f(z).$$

Заметим, что
$$\int_{L_3} f(z) dz = \int_{-R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

На отрезке L_2 имеем
$$\left| \int_{L_2} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

На отрезке L_4 имеем
$$\left| \int_{L_4} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right| \leq 2\pi \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{2\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \operatorname{res}_{z=\pi i} f(z).$$

Функция $f(z)$ внутри контура Γ_R имеет единственную особую точку – простой полюс $z_0 = \pi i$, в котором

$$\operatorname{res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{e^{a\pi i}}{(1+e^z)'_{z=\pi i}} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}} = \pi \frac{2i}{e^{\pi ai} - e^{-\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Следствие.

Деля в рассмотренном интеграле замену переменной $e^x = t$, получаем *формулу дополнения для бета-функции*

$$B(a, 1-a) = \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (0 < a < 1).$$

Функция $f(z)$ внутри контура Γ_R имеет единственную особую точку – простой полюс $z_0 = \pi i$, в котором

$$\operatorname{res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{e^{a\pi i}}{(1+e^z)'_{z=\pi i}} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}} = \pi \frac{2i}{e^{\pi ai} - e^{-\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Следствие.

Деля в рассмотренном интеграле замену переменной $e^x = t$, получаем *формулу дополнения для бета-функции*

$$B(a, 1-a) = \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (0 < a < 1).$$

Функция $f(z)$ внутри контура Γ_R имеет единственную особую точку – простой полюс $z_0 = \pi i$, в котором

$$\operatorname{res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{e^{a\pi i}}{(1+e^z)'_{z=\pi i}} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

Следовательно

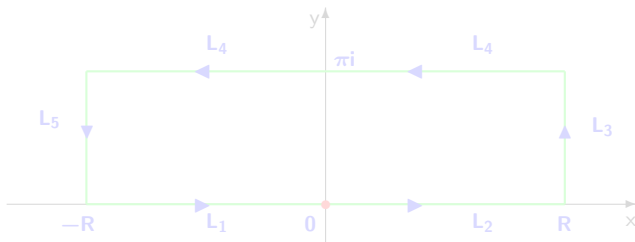
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}} = \pi \frac{2i}{e^{\pi ai} - e^{-\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Следствие.

Делая в рассмотренном интеграле замену переменной $e^x = t$, получаем *формулу дополнения для бета-функции*

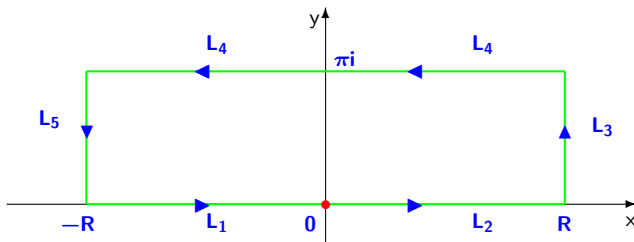
$$B(a, 1-a) = \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (0 < a < 1).$$

Вычислить интеграл: **V.p.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 - e^x} dx$. ($0 < a < 1$)



Рассмотрим контур Γ_R , изображенный на рисунке. Подинтегральная функция внутри контура особенностей не имеет, а на границе есть один простой полюс в точке $z = 0$, $\text{res}_{z=0} f(z) = -1$.

Вычислить интеграл: **V.p.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 - e^x} dx$. ($0 < a < 1$)



Рассмотрим контур Γ_R , изображенный на рисунке. Подинтегральная функция внутри контура особенностей не имеет, а на границе есть один простой полюс в точке $z = 0$, $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -1$.

Как и в предыдущем примере интегралы по отрезкам L_3 и L_5 стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$, а для интеграла по отрезку L_4 имеем равенство

$$\int_{L_4} \frac{e^{az}}{1 - e^z} dz = -e^{\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ и учитывая результат предыдущего примера, получаем

$$\begin{aligned} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 - e^x} dx &= \lim_{R \rightarrow 0} \int_{L_4} \frac{e^{az}}{1 - e^z} dz + \pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{ax}}{1 - e^x} = \\ &= e^{\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx - \pi i = \pi \left(\frac{e^{\pi ai}}{\sin \pi a} - i \right) = \pi \operatorname{ctg} \pi a. \end{aligned}$$

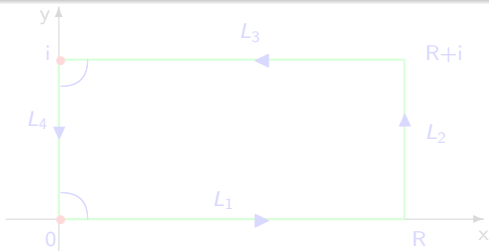
Как и в предыдущем примере интегралы по отрезкам L_3 и L_5 стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$, а для интеграла по отрезку L_4 имеем равенство

$$\int_{L_4} \frac{e^{az}}{1 - e^z} dz = -e^{\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ и учитывая результат предыдущего примера, получаем

$$\begin{aligned} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 - e^x} dx &= \lim_{R \rightarrow 0} \int_{L_4} \frac{e^{az}}{1 - e^z} dz + \pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{ax}}{1 - e^x} = \\ &= e^{\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx - \pi i = \pi \left(\frac{e^{\pi ai}}{\sin \pi a} - i \right) = \pi \operatorname{ctg} \pi a. \end{aligned}$$

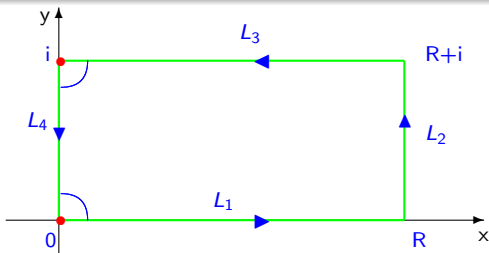
Вычислить интеграл Лежандра $\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx$.



Рассмотрим вспомогательную функцию $\Phi(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$ и заметим, что на действительной оси $2 \operatorname{Im} \Phi(x) = e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x}$.

Контур интегрирования P_R , изображенный на рисунке, содержит два простых полюса функции $\Phi(z)$ в вершинах $z = 0$ и $z = i$.

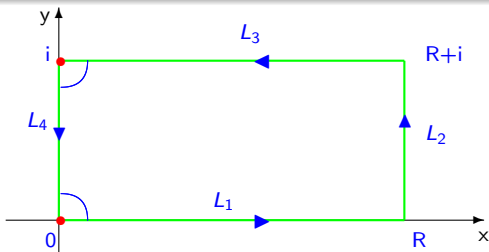
Вычислить интеграл Лежандра $\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx$.



Рассмотрим вспомогательную функцию $\Phi(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$ и заметим, что на действительной оси $2 \operatorname{Im} \Phi(x) = e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x}$.

Контур интегрирования P_R , изображенный на рисунке, содержит два простых полюса функции $\Phi(z)$ в вершинах $z = 0$ и $z = i$.

Вычислить интеграл Лежандра $\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx$.



Рассмотрим вспомогательную функцию $\Phi(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$ и заметим, что на действительной оси $2 \operatorname{Im} \Phi(x) = e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x}$.

Контур интегрирования P_R , изображенный на рисунке, содержит два простых полюса функции $\Phi(z)$ в вершинах $z = 0$ и $z = i$.

Найдем вычеты в точках $z = 0$ и $z = i$:

$$\operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) = \left[\frac{e^{iaz}}{(e^{2\pi z} - 1)'} \right]_{z=0} = \frac{1}{2\pi}; \quad \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z) = \left[\frac{e^{iaz}}{(e^{2\pi z} - 1)'} \right]_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2\pi}.$$

Интеграл от функции $\Phi(z)$ по отрезку L_2 стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.
Поскольку $\Phi(z+i) = e^{-a}\Phi(z)$, то

$$\int_{L_3} \Phi(z) dz = -e^{-a} \int_0^R \Phi(x) dx.$$

Еще нам будет нужна мнимая часть интеграла от функции $\Phi(z)$ по отрезку L_4

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(z) dz &= \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(iy) d(iy) = -\operatorname{Re} \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{2} dy = \frac{1}{2a}(1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

Найдем вычеты в точках $z = 0$ и $z = i$:

$$\operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) = \left[\frac{e^{iaz}}{(e^{2\pi z} - 1)'} \right]_{z=0} = \frac{1}{2\pi}; \quad \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z) = \left[\frac{e^{iaz}}{(e^{2\pi z} - 1)'} \right]_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2\pi}.$$

Интеграл от функции $\Phi(z)$ по отрезку L_2 стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.
Поскольку $\Phi(z + i) = e^{-a}\Phi(z)$, то

$$\int_{L_3} \Phi(z) dz = -e^{-a} \int_0^R \Phi(x) dx.$$

Еще нам будет нужна мнимая часть интеграла от функции $\Phi(z)$ по отрезку L_4

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(z) dz &= \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(iy) d(iy) = -\operatorname{Re} \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{2} dy = \frac{1}{2a}(1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

Найдем вычеты в точках $z = 0$ и $z = i$:

$$\operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) = \left[\frac{e^{iaz}}{(e^{2\pi z} - 1)'} \right]_{z=0} = \frac{1}{2\pi}; \quad \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z) = \left[\frac{e^{iaz}}{(e^{2\pi z} - 1)'} \right]_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2\pi}.$$

Интеграл от функции $\Phi(z)$ по отрезку L_2 стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.
Поскольку $\Phi(z + i) = e^{-a}\Phi(z)$, то

$$\int_{L_3} \Phi(z) dz = -e^{-a} \int_0^R \Phi(x) dx.$$

Еще нам будет нужна мнимая часть интеграла от функции $\Phi(z)$ по отрезку L_4

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(z) dz &= \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(iy) d(iy) = -\operatorname{Re} \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{2} dy = \frac{1}{2a}(1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

Согласно теореме 2.20.2

$$\operatorname{Im} \int_{P_R} \Phi(z) dz = \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) + \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z).$$

Устремляя $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} (1 - e^{-a}) \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx &= 2 \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{L_1} \Phi(z) dz + \int_{L_2} \Phi(z) dz + \int_{L_3} \Phi(z) dz \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) + \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z) - \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(z) dz \right) = \frac{1}{2}(1 + e^{-a}) - \frac{1}{a}(1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + e^{-a})}{(1 - e^{-a})} - \frac{1}{a}.$$

Согласно теореме 2.20.2

$$\operatorname{Im} \int_{P_R} \Phi(z) dz = \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) + \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z).$$

Устремляя $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} (1 - e^{-a}) \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx &= 2 \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{L_1} \Phi(z) dz + \int_{L_2} \Phi(z) dz + \int_{L_3} \Phi(z) dz \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) + \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z) - \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(z) dz \right) = \frac{1}{2}(1 + e^{-a}) - \frac{1}{a}(1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + e^{-a})}{(1 - e^{-a})} - \frac{1}{a}.$$

Согласно теореме 2.20.2

$$\operatorname{Im} \int_{P_R} \Phi(z) dz = \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) + \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z).$$

Устремляя $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} (1 - e^{-a}) \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx &= 2 \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{L_1} \Phi(z) dz + \int_{L_2} \Phi(z) dz + \int_{L_3} \Phi(z) dz \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=0} \Phi(z) + \frac{\pi}{2} \operatorname{res}_{z=i} \Phi(z) - \operatorname{Im} \int_{L_4} \Phi(z) dz \right) = \frac{1}{2}(1 + e^{-a}) - \frac{1}{a}(1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + e^{-a})}{(1 - e^{-a})} - \frac{1}{a}.$$

II. § 21. Преобразование Лапласа. Формула обращения

Функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ будем называть *оригиналом*^a, если

1. Функция $f = 0$ при $t < 0$.

2. На каждом конечном интервале всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, функция f локально удовлетворяет условию Гельдера:

$$|f(t) - f(t+h)| \leq C|h|^\gamma, \quad \gamma \in (0, 1].$$

3. Функция f по модулю ограничена показательной функцией, т.е. существуют постоянная $M > 0$ и называемое *показателем роста* число $\alpha(f) \geq 0$ такие, что при всех t и $\alpha > \alpha(f)$

$$|f(t)| < M e^{\alpha t}.$$

^aИногда в определении оригинала используются несколько иные условия

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция комплексного переменного $p = a + i\lambda$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Изображение $F(p)$ является аналитической функцией в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha(f)$, при этом $F(p) \rightarrow 0$, если $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$.

II. § 21. Преобразование Лапласа. Формула обращения

Функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ будем называть *оригиналом*^a, если

1. Функция $f = 0$ при $t < 0$.

2. На каждом конечном интервале всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, функция f локально удовлетворяет условию Гельдера:

$$|f(t) - f(t+h)| \leq C|h|^\gamma, \quad \gamma \in (0, 1].$$

3. Функция f по модулю ограничена показательной функцией, т.е. существуют постоянная $M > 0$ и называемое *показателем роста* число $\alpha(f) \geq 0$ такие, что при всех t и $\alpha > \alpha(f)$

$$|f(t)| < M e^{\alpha t}.$$

^aИногда в определении оригинала используются несколько иные условия

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция комплексного переменного $p = a + i\lambda$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Изображение $F(p)$ является аналитической функцией в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha(f)$, при этом $F(p) \rightarrow 0$, если $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$.

Преобразование сопоставляющее оригиналу $f(t)$ и его изображение $F(p)$ называют *преобразованием Лапласа*, при этом используются обозначения: $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ или $F(p) \rightleftharpoons f(t)$.

В практических задачах важную роль играет обратное преобразование Лапласа, позволяющее найти оригинал по его изображению.

Формула обращения.

Если функция $f(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ – ее изображение, то в каждой точке $t > 0$, в которой $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, выполняется равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (c \in \mathbb{R}, c > \alpha(f)).$$

Преобразование сопоставляющее оригиналу $f(t)$ и его изображение $F(p)$ называют *преобразованием Лапласа*, при этом используются обозначения: $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ или $F(p) \rightleftharpoons f(t)$.

В практических задачах важную роль играет обратное преобразование Лапласа, позволяющее найти оригинал по его изображению.

Формула обращения.

Если функция $f(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ – ее изображение, то в каждой точке $t > 0$, в которой $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, выполняется равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (c \in \mathbb{R}, c > \alpha(f)).$$

Преобразование сопоставляющее оригиналу $f(t)$ и его изображение $F(p)$ называют *преобразованием Лапласа*, при этом используются обозначения: $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ или $F(p) \rightleftharpoons f(t)$.

В практических задачах важную роль играет обратное преобразование Лапласа, позволяющее найти оригинал по его изображению.

Формула обращения.

Если функция $f(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ – ее изображение, то в каждой точке $t > 0$, в которой $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, выполняется равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (c \in \mathbb{R}, c > \alpha(f)).$$

Лемма 2.21.2. (Еще один вариант леммы Жордана.)

Пусть функция $f(z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек, $M(R) = \sup_{|p|=R} |f(p)|$ и

$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$. Обозначим через $\gamma_1(R)$ дугу окружности $|z| = R$, лежащую в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p \leq c$. Тогда при $t > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1(R)} f(p) e^{tp} dp = 0. \quad (2.21.1)$$

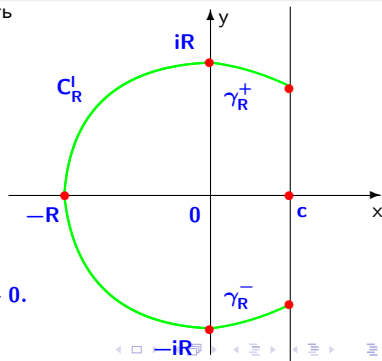
Через C_R^I обозначим левую полуокружность с центром в точке $p = 0$ и радиуса R .

Делая замену переменной $p = iz$ и учитывая стандартную формулировку леммы Жордана, получаем

$$\int_{C_R^I} f(p) e^{tp} dp = i \int_{C_R^+} f(iz) e^{itz} dz \rightarrow 0.$$

Интегралы по дугам γ_R^+ и γ_R^- оцениваются совсем просто

$$\int_{\gamma_R^\pm} |f(p) e^{tp}| |dp| \leq M(R) e^{ct} R \arcsin \frac{c}{R} \rightarrow 0.$$



Найдем изображение оригинала $f(t) = t^a$, где $a > -1$ и не является целым числом.

По определению $\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt$.

Произвольное комплексное число из первого квадранта запишем в виде

$$p = re^{i\theta}, \text{ где } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

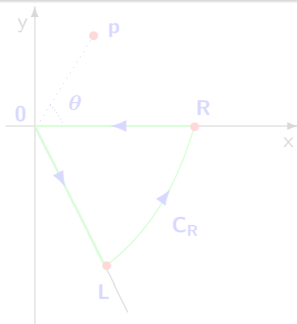
Вводя в новую комплексную переменную интегрирования $q = \frac{t}{p}$, получим

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_L q^a e^{-pq} dq, \quad (2.21.3)$$

интеграл берется по лучу $L : \arg q = -\theta$.

Обозначим через C_R наименьшую из дуг окружности $|q| = R$, соединяющих луч L и положительную полуось. Всякая точка $q \in C_R$ имеет вид $q = R e^{i\varphi}$, где $-\theta < \varphi < 0$. При таких ограничениях на изменение угла φ выполняется оценка $\cos(\theta + \varphi) \geq \alpha > 0$ поскольку $0 < \theta + \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Теперь довольно просто получить нужную оценку для интеграла по дуге C_R при $R \rightarrow \infty$



Найдем изображение оригинала $f(t) = t^a$, где $a > -1$ и не является целым числом.

По определению $\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt$.

Произвольное комплексное число из первого квадранта запишем в виде

$$p = re^{i\theta}, \text{ где } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

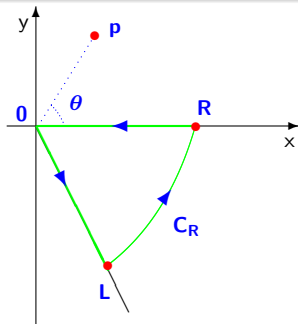
Вводя в новую комплексную переменную интегрирования $q = \frac{t}{p}$, получим

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_L q^a e^{-pq} dq, \quad (2.21.3)$$

интеграл берется по лучу $L : \arg q = -\theta$.

Обозначим через C_R наименьшую из дуг окружности $|q| = R$, соединяющих луч L и положительную полуось. Всякая точка $q \in C_R$ имеет вид $q = Re^{i\varphi}$, где $-\theta < \varphi < 0$. При таких ограничениях на изменение угла φ выполняется оценка $\cos(\theta + \varphi) \geq \alpha > 0$ поскольку $0 < \theta + \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Теперь довольно просто получить нужную оценку для интеграла по дуге C_R при $R \rightarrow \infty$



$$\left| \int_{\tilde{C}_R} q^a e^{-pq} dq \right| \leq R^{a+1} \left| \int_{-\theta}^0 e^{-rR \cos(\theta+\varphi)} d\varphi \right| \leq C R^{a+1} e^{-rR\alpha} \rightarrow 0.$$

Поскольку подинтегральная функция не имеет особенностей в секторе, образованном лучем \mathbf{L} и положительной полуосью, то в формуле (1.3.3) интеграл по лучу \mathbf{L} можно заменить на интеграл по положительной полуоси. Используя для новой переменной интегрирования символ t , получаем

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_0^{\infty} t^a e^{-pt} dt. \quad (2.21.4)$$

С точки зрения преобразования Лапласа равенство (2.21.4) означает, что

$$t^a \doteq \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}. \quad (2.21.5)$$

В частности, при $a = -\frac{1}{2}$ получаем $\frac{1}{\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$

$$\left| \int_{\tilde{C}_R} q^a e^{-pq} dq \right| \leq R^{a+1} \left| \int_{-\theta}^0 e^{-rR \cos(\theta+\varphi)} d\varphi \right| \leq C R^{a+1} e^{-rR\alpha} \rightarrow 0.$$

Поскольку подинтегральная функция не имеет особенностей в секторе, образованном лучем \mathbf{L} и положительной полуосью, то в формуле (1.3.3) интеграл по лучу \mathbf{L} можно заменить на интеграл по положительной полуоси. Используя для новой переменной интегрирования символ t , получаем

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_0^{\infty} t^a e^{-pt} dt. \quad (2.21.4)$$

С точки зрения преобразования Лапласа равенство (2.21.4) означает, что

$$t^a \doteq \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}. \quad (2.21.5)$$

В частности, при $a = -\frac{1}{2}$ получаем $\frac{1}{\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$

Первая теорема разложения.

Если аналитическое в окрестности бесконечно удаленной точки

изображение $F(p)$ имеет лорановское разложение $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{p^k}$, (2.21.6)

то оригиналом для $F(p)$ служит функция $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(k-1)!} t^{k-1} \quad (t > 0)$. (2.21.7)

Поскольку в окрестности бесконечно удаленной точки ряд (2.21.6) сходится равномерно, то используя формулу обращения для достаточно больших значений $c = \operatorname{Re} p$ мы можем интегрировать ряд почленно

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{p^k} \right) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^k} dp = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(k-1)!} t^{k-1}. \end{aligned} \quad (2.21.8)$$

Последнее равенство в формуле (2.21.8) является следствием соотношения (2.21.5).

Первая теорема разложения.

Если аналитическое в окрестности бесконечно удаленной точки

изображение $F(p)$ имеет лорановское разложение $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{p^k}$, (2.21.6)

то оригиналом для $F(p)$ служит функция $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(k-1)!} t^{k-1} \quad (t > 0)$. (2.21.7)

Поскольку в окрестности бесконечно удаленной точки ряд (2.21.6) сходится равномерно, то используя формулу обращения для достаточно больших значений $c = \operatorname{Re} p$ мы можем интегрировать ряд почленно

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{p^k} \right) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^k} dp = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(k-1)!} t^{k-1}. \end{aligned} \quad (2.21.8)$$

Последнее равенство в формуле (2.21.8) является следствием соотношения (2.21.5).

Найдем разложение в степенной ряд функции Бесселя

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} \frac{dz}{z}.$$

Находя интеграл при помощи вычетов, получаем $J_0(x)$ равна коэффициенту c_0 в разложении в ряд Лорана функции $f(z) = e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$. Используя разложение экспоненты в ряд Тейлора, получаем

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{-m}}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m.$$

Следовательно

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Найдем разложение в степенной ряд функции Бесселя

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} \frac{dz}{z}.$$

Находя интеграл при помощи вычетов, получаем $J_0(x)$ равна коэффициенту c_0 в разложении в ряд Лорана функции $f(z) = e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$. Используя разложение экспоненты в ряд Тейлора, получаем

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{-m}}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m.$$

Следовательно

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Покажем, что $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \doteq J_0(2\sqrt{t}) = f(t)$.

Используя первую теорему разложения, получаем

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^{k+1} k!} \doteq \\ &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k!]^2} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k!]^2} \left(\frac{2\sqrt{t}}{2} \right)^{2k} = J_0(2\sqrt{t}) = f(t). \end{aligned}$$

Таким образом, используя формулу обращения, мы теперь можем представить функцию Бесселя интегралом по прямой, параллельной мнимой оси

$$J_0(2\sqrt{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(pt - \frac{1}{p})} \frac{dp}{p}. \quad (2.21.9)$$

Покажем, что $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \doteq J_0(2\sqrt{t}) = f(t)$.

Используя первую теорему разложения, получаем

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^{k+1} k!} \doteq \\ &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k!]^2} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k!]^2} \left(\frac{2\sqrt{t}}{2} \right)^{2k} = J_0(2\sqrt{t}) = f(t). \end{aligned}$$

Таким образом, используя формулу обращения, мы теперь можем представить функцию Бесселя интегралом по прямой, параллельной мнимой оси

$$J_0(2\sqrt{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(pt - \frac{1}{p})} \frac{dp}{p}. \quad (2.21.9)$$

Покажем, что $f(t) = J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} = F(p)$.

Положим $\tau = 2\sqrt{t}$ и в интеграле (2.21.9) сделаем замену переменной $p = \frac{2}{\tau} z$. В результате получаем

$$J_0(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} e^{\frac{\tau}{2}(z - \frac{1}{z})} \frac{dz}{z}. \quad (2.21.10)$$

Делая в интеграле (2.21.10) замену переменной $q = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)$, получаем

$$J_0(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{q\tau}}{\sqrt{q^2 + 1}} dq,$$

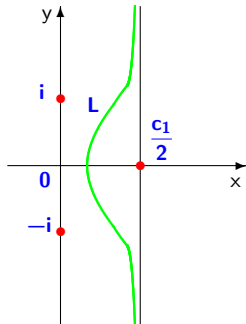
где кривая L является образом прямой $\operatorname{Re} z = c_1$.

При $z \rightarrow c_1 \pm i\infty$ соответствующая точка

$q \rightarrow \frac{c_1 \pm i\infty}{2}$. Поскольку подинтегральная

функция имеет особенности лишь в точках $z = \pm i$, а кривая L проходит правее особых точек, то интегрирование по кривой L может

быть заменено на интегрирование по прямой $\operatorname{Re} q = \frac{c_1}{2}$.



В результате мы получаем в явном виде формулу обращения

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p^2 + 1}} dp,$$

согласно которой

$$f(t) = J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} = F(p).$$

В результате мы получаем в явном виде формулу обращения

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p^2 + 1}} dp,$$

согласно которой

$$f(t) = J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} = F(p).$$

Вторая теорема разложения

Если изображение является дробно-рациональной функцией $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$, то оригиналом является функция

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p=a_k} (F(p) e^{pt}),$$

причем вычеты берутся по всем полюсам a_k функции $F(p)$.

Поскольку изображение должно стремиться к нулю при $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$, то дробно-рациональная функция $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Поэтому доказательство является непосредственным следствием формулы обращения, леммы 2.21.2 и основной теоремы теории вычетов.

В случае простых полюсов вычеты легко вычисляются в явном виде.

Следствие 2.21.5.

Если все полюсы функции $F(p)$ простые, то

$$F(p) \doteq \sum_k \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}.$$

Вторая теорема разложения

Если изображение является дробно-рациональной функцией $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$, то оригиналом является функция

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p=a_k} (F(p) e^{pt}),$$

причем вычеты берутся по всем полюсам a_k функции $F(p)$.

Поскольку изображение должно стремиться к нулю при $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$, то дробно-рациональная функция $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Поэтому доказательство является непосредственным следствием формулы обращения, леммы 2.21.2 и основной теоремы теории вычетов.

В случае простых полюсов вычеты легко вычисляются в явном виде.

Следствие 2.21.5.

Если все полюсы функции $F(p)$ простые, то

$$F(p) \doteq \sum_k \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}.$$

Если все коэффициенты многочлена $Q(p)$ являются действительными, то всякому его комплексному корню b соответствует комплексно сопряженный корень \bar{b} . Это позволяет модифицировать утверждение теоремы.

Следствие 2.21.6.

Если многочлены $P(p)$ и $Q(p)$ имеют действительные коэффициенты, то

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p=a_k} (F(p) e^{pt}) + 2 \operatorname{Re} \sum_m \operatorname{res}_{p=b_m} (F(p) e^{pt}),$$

где a_k — действительные корни многочлена $Q(p)$, а b_m — его комплексные корни, лежащие в верхней полуплоскости.

Если все коэффициенты многочлена $Q(p)$ являются действительными, то всякому его комплексному корню b соответствует комплексно сопряженный корень \bar{b} . Это позволяет модифицировать утверждение теоремы.

Следствие 2.21.6.

Если многочлены $P(p)$ и $Q(p)$ имеют действительные коэффициенты, то

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p=a_k} (F(p) e^{pt}) + 2 \operatorname{Re} \sum_m \operatorname{res}_{p=b_m} (F(p) e^{pt}),$$

где a_k — действительные корни многочлена $Q(p)$, а b_m — его комплексные корни, лежащие в верхней полуплоскости.

Найдем оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{1}{p(p+1) \dots (p+n)}.$$

Поскольку все полюсы простые, то воспользуемся следствием 2.21.5. Пусть $0 \leq k \leq n$, тогда

$$\begin{aligned} [p(p+1) \dots (p+n)]'_{p=-k} &= (-k) \cdot (-k+1) \dots (-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-k) = \\ &= (-1)^k k! (n-k)!. \end{aligned}$$

Учитывая формулу бинома Ньютона, получаем

$$\frac{1}{p(p+1) \dots (p+n)} \doteq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k e^{-kt} = \frac{1}{n!} (1 - e^{-t})^n.$$

Найдем оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{1}{p(p+1) \dots (p+n)}.$$

Поскольку все полюсы простые, то воспользуемся следствием 2.21.5. Пусть $0 \leq k \leq n$, тогда

$$\begin{aligned} [p(p+1) \dots (p+n)]'_{p=-k} &= (-k) \cdot (-k+1) \dots (-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-k) = \\ &= (-1)^k k! (n-k)!. \end{aligned}$$

Учитывая формулу бинома Ньютона, получаем

$$\frac{1}{p(p+1) \dots (p+n)} \doteq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k e^{-kt} = \frac{1}{n!} (1 - e^{-t})^n.$$

Найдем оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^3}.$$

Функция $F(p)$ имеет два полюса третьего порядка в точках $p = \pm i$. Найдем вычет функции $F(p) e^{pt}$ в точке i

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=i} \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{pt}}{(p + i)^3} \right)''_{p=i} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 e^{pt}}{(p + i)^3} - \frac{6t e^{pt}}{(p + i)^4} + \frac{12 e^{pt}}{(p + i)^5} \right)_{p=i} = \frac{1}{2} \left(-\frac{t^2 e^{it}}{8i} - \frac{6t e^{it}}{16} + \frac{12 e^{it}}{32i} \right). \end{aligned}$$

Используя следствие 2.21.6, получаем

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^3} \doteq 2 \operatorname{Re} \frac{1}{2} \left(-\frac{t^2 e^{it}}{8i} - \frac{6t e^{it}}{16} + \frac{12 e^{it}}{32i} \right) = \frac{1}{8} (3 \sin t - 3t \cos t - t^2 \sin t).$$

Найдем оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^3}.$$

Функция $F(p)$ имеет два полюса третьего порядка в точках $p = \pm i$. Найдем вычет функции $F(p) e^{pt}$ в точке i

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=i} \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{pt}}{(p + i)^3} \right)''_{p=i} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 e^{pt}}{(p + i)^3} - \frac{6t e^{pt}}{(p + i)^4} + \frac{12 e^{pt}}{(p + i)^5} \right)_{p=i} = \frac{1}{2} \left(-\frac{t^2 e^{it}}{8i} - \frac{6t e^{it}}{16} + \frac{12 e^{it}}{32i} \right). \end{aligned}$$

Используя следствие 2.21.6, получаем

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^3} \doteq 2 \operatorname{Re} \frac{1}{2} \left(-\frac{t^2 e^{it}}{8i} - \frac{6t e^{it}}{16} + \frac{12 e^{it}}{32i} \right) = \frac{1}{8} (3 \sin t - 3t \cos t - t^2 \sin t).$$

Обобщенная теорема умножения

Пусть функции $G(p)$, $h(p)$ и $g(t, \tau)$ таковы, что

$$g(t, \tau) \equiv G(p) e^{-\tau h(p)}.$$

Если $F(p) \equiv f(t)$, то

$$F(h(p))G(p) \equiv \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau) d\tau. \quad (2.21.11)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau) d\tau &\equiv \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) \left(\int_0^{\infty} g(t, \tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = G(p) \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\tau h(p)} d\tau = G(p)F(h(p)). \end{aligned}$$

Формула (2.21.11) является обобщением классической теоремы Бореля об умножении изображений.

Обобщенная теорема умножения

Пусть функции $G(p)$, $h(p)$ и $g(t, \tau)$ таковы, что

$$g(t, \tau) \doteq G(p) e^{-\tau h(p)}.$$

Если $F(p) \doteq f(t)$, то

$$F(h(p))G(p) \doteq \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau) d\tau. \quad (2.21.11)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau) d\tau &\doteq \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) \left(\int_0^{\infty} g(t, \tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = G(p) \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\tau h(p)} d\tau = G(p)F(h(p)). \end{aligned}$$

Формула (2.21.11) является обобщением классической теоремы Бореля об умножении изображений.

Обобщенная теорема умножения

Пусть функции $G(p)$, $h(p)$ и $g(t, \tau)$ таковы, что

$$g(t, \tau) \equiv G(p) e^{-\tau h(p)}.$$

Если $F(p) \equiv f(t)$, то

$$F(h(p))G(p) \equiv \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau) d\tau. \quad (2.21.11)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau) d\tau &\equiv \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) \left(\int_0^{\infty} g(t, \tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = G(p) \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\tau h(p)} d\tau = G(p)F(h(p)). \end{aligned}$$

Формула (2.21.11) является обобщением классической теоремы Бореля об умножении изображений.

Пусть $F(p) \equiv f(t)$. Покажем, что

$$\text{a) } \frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) \equiv \int_0^{\infty} f(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau; \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \cos(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau = \sin t.$$

а) Положим $G(p) = \frac{1}{p}$, и $h(p) = \frac{1}{p}$ и $g(t, \tau) \equiv \frac{1}{p} e^{-\tau/p}$. Используя теорему подобия для преобразования Лапласа и полученное ранее соотношение $\frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \equiv J_0(2\sqrt{t})$, находим

$$g(t, \tau) = J_0(2\sqrt{t\tau}).$$

Из обобщенной теоремы умножения следует, что

$$\frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) \equiv \int_0^{\infty} f(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau. \quad (2.21.12)$$

Пусть $F(p) \equiv f(t)$. Покажем, что

$$\text{a) } \frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) \equiv \int_0^{\infty} f(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau; \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \cos(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau = \sin t.$$

а) Положим $G(p) = \frac{1}{p}$, и $h(p) = \frac{1}{p}$ и $g(t, \tau) \equiv \frac{1}{p} e^{-\tau/p}$. Используя теорему подобия для преобразования Лапласа и полученное ранее соотношение $\frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \equiv J_0(2\sqrt{t})$, находим

$$g(t, \tau) = J_0(2\sqrt{t\tau}).$$

Из обобщенной теоремы умножения следует, что

$$\frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) \equiv \int_0^{\infty} f(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau. \quad (2.21.12)$$

б) Положим $f(\tau) = \cos \tau$, тогда

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1/p}{1 + (1/p)^2} = F\left(\frac{1}{p}\right).$$

Согласно формуле (2.21.12) получаем

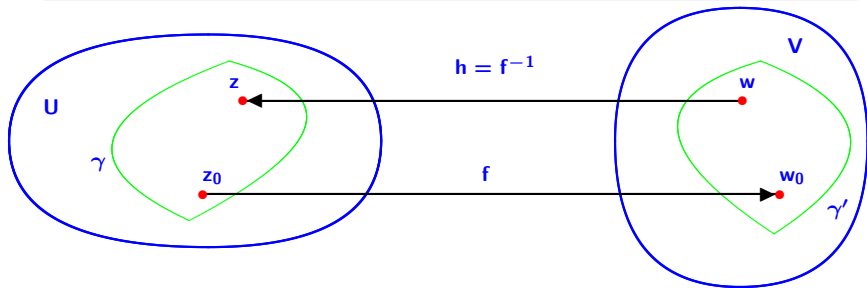
$$\int_0^{\infty} \cos(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) \, d\tau \doteq \frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2 + 1} \doteq \sin t.$$

В силу единственности оригинала

$$\int_0^{\infty} \cos(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) \, d\tau = \sin t.$$

II. § 22. Обращение степенного ряда

Пусть функция $w = f(z)$ является аналитической в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f'(z_0) \neq 0$. Согласно теореме об обратной функции существуют такие окрестности U точки z_0 и V точки $w_0 = f(z_0)$, что отображение $f : U \rightarrow V$ является конформным. Следовательно существует аналитическая функция $z = f^{-1}(w) = h(w)$ являющаяся обратной к функции $w = f(z)$.



Нас будет интересовать разложение функции $h(w)$ в степенной ряд в окрестности точки w_0 , т.е. нахождение коэффициентов ряда

$$z = h(w) = f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n. \quad (2.22.1)$$

Рассмотрим замкнутый контур γ' , содержащий внутри себя точки w_0 и w , а также его прообраз контур γ , содержащий внутри себя точки z_0 и z . Воспользуемся интегральной формулой Коши для функции $f^{-1}(w)$, а затем заменой переменной перейдем к интегрированию по контуру γ

$$\begin{aligned} z = h(w) = f^{-1}(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f^{-1}(\tau) d\tau}{\tau - w} = \left| \begin{array}{l} t = f^{-1}(\tau) \\ \tau = f(t) \\ d\tau = f'(t) dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{tf'(t)}{f(t) - w} dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n. \end{aligned}$$

Коэффициенты ряда Тейлора для аналитической функции $h(w)$ находятся по формуле

$$b_n = \frac{h^{(n)}(w_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{tf'(t)}{(f(t) - w_0)^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi i n} \int_{\gamma} \frac{dt}{(f(t) - w_0)^n}.$$

Рассмотрим замкнутый контур γ' , содержащий внутри себя точки w_0 и w , а также его прообраз контур γ , содержащий внутри себя точки z_0 и z . Воспользуемся интегральной формулой Коши для функции $f^{-1}(w)$, а затем заменой переменной перейдем к интегрированию по контуру γ

$$\begin{aligned} z = h(w) = f^{-1}(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f^{-1}(\tau) d\tau}{\tau - w} = \left| \begin{array}{l} t = f^{-1}(\tau) \\ \tau = f(t) \\ d\tau = f'(t) dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{tf'(t)}{f(t) - w} dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n. \end{aligned}$$

Коэффициенты ряда Тейлора для аналитической функции $h(w)$ находятся по формуле

$$b_n = \frac{h^{(n)}(w_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{tf'(t)}{(f(t) - w_0)^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi i n} \int_{\gamma} \frac{dt}{(f(t) - w_0)^n}.$$

В последнем интеграле подинтегральная функция имеет в точке $t = z_0$ полюс порядка n . Находя вычет в точке z_0 , получаем

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22.2)$$

Если $z_0 = 0$ и $w_0 = 0$, то формулы (2.22.2) приобретают более простой вид

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{z}{f(z)} \right)^n \right]_{z=0}^{(n-1)}. \quad (2.22.3)$$

Исходная функция $f(z)$ часто сама определяется как сумма степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

поэтому полезно знать явные формулы, связывающие коэффициенты рядов для прямой и обратной функций

$$b_0 = z_0, \quad b_1 = \frac{1}{c_1}, \quad b_2 = -\frac{c_2}{c_1^3}, \quad b_3 = \frac{2c_2^2 - c_1 c_3}{c_1^5}, \quad b_4 = \frac{5c_1 c_2 c_3 - 5c_2^3 - c_4 c_1^2}{c_1^7} \dots \quad (2.22.4)$$

В последнем интеграле подинтегральная функция имеет в точке $t = z_0$ полюс порядка n . Находя вычет в точке z_0 , получаем

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22.2)$$

Если $z_0 = 0$ и $w_0 = 0$, то формулы (2.22.2) приобретают более простой вид

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{z}{f(z)} \right)^n \right]_{z=0}^{(n-1)}. \quad (2.22.3)$$

Исходная функция $f(z)$ часто сама определяется как сумма степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

поэтому полезно знать явные формулы, связывающие коэффициенты рядов для прямой и обратной функций

$$b_0 = z_0, \quad b_1 = \frac{1}{c_1}, \quad b_2 = -\frac{c_2}{c_1^3}, \quad b_3 = \frac{2c_2^2 - c_1 c_3}{c_1^5}, \quad b_4 = \frac{5c_1 c_2 c_3 - 5c_2^3 - c_4 c_1^2}{c_1^7} \dots \quad (2.22.4)$$

В последнем интеграле подинтегральная функция имеет в точке $t = z_0$ полюс порядка n . Находя вычет в точке z_0 , получаем

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22.2)$$

Если $z_0 = 0$ и $w_0 = 0$, то формулы (2.22.2) приобретают более простой вид

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{z}{f(z)} \right)^n \right]_{z=0}^{(n-1)}. \quad (2.22.3)$$

Исходная функция $f(z)$ часто сама определяется как сумма степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

поэтому полезно знать явные формулы, связывающие коэффициенты рядов для прямой и обратной функций

$$b_0 = z_0, \quad b_1 = \frac{1}{c_1}, \quad b_2 = -\frac{c_2}{c_1^3}, \quad b_3 = \frac{2c_2^2 - c_1 c_3}{c_1^5}, \quad b_4 = \frac{5c_1 c_2 c_3 - 5c_2^3 - c_4 c_1^2}{c_1^7} \dots \quad (2.22.4)$$

В окрестности точки $w_0 = 0$ для многозначной функции $h(w)$, обратной к функции $w = f(z) = \frac{\sin z}{2 - z}$, найдем первые члены разложения аналитической ветви, определяемой условием $h(0) = 0$.

Достаточно найти первые члены разложения в ряд Тейлора функции $f(z)$, а затем воспользоваться формулами (2.22.4). Используя известные асимптотические равенства, получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \sin z \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \left(z - \frac{z^3}{6} + o(z^4) \right) \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + o(z^3) \right) = \\ &= \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} z^2 + \frac{1}{24} z^3 + o(z^3). \end{aligned}$$

Находим коэффициенты ряда для обратной функции:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = -2, \quad b_3 = \frac{10}{3}.$$

Следовательно

$$z = h(w) = 2w - 2w^2 + \frac{10}{3}w^3 + o(w^3).$$

Найдем разложение в ряд решения $z = z(w)$ трансцендентного уравнения

$$w = ze^{-az}.$$

Согласно формулам (2.22.3)

$$b_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{anz} \right|_{z=0} = \frac{(an)^{n-1}}{n!}$$

Следовательно решение имеет вид

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} w^n.$$

Найдем разложение в ряд решения $z = z(w)$ трансцендентного уравнения

$$w = ze^{-az}.$$

Согласно формулам (2.22.3)

$$b_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{anz} \right|_{z=0} = \frac{(an)^{n-1}}{n!}$$

Следовательно решение имеет вид

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} w^n.$$

Найдем разложение в ряд решения $z = z(w)$ трансцендентного уравнения

$$w = ze^{-az}.$$

Согласно формулам (2.22.3)

$$b_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{anz} \right|_{z=0} = \frac{(an)^{n-1}}{n!}$$

Следовательно решение имеет вид

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} w^n.$$

Используя разложение в ряд по степеням w решения уравнения

$$2 \frac{z - a}{z^2 - 1} = w, \quad (2.22.5)$$

выведем формулы Родрига для многочленов Лежандра.

Положим $z_0 = a$, тогда $w_0 = 0$ и

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n,$$

где

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\left(\frac{z^2 - 1}{2} \right)^n \right] \Big|_{z=a} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[(a^2 - 1)^n \right]. \quad (2.22.6)$$

Из формулы (2.22.5) получаем равенство

$$wz^2 - 2z = w - 2a. \quad (2.22.7)$$

Умножая равенство (2.22.7) на w и прибавляя к обеим частям по единице, получаем

$$(1 - wz)^2 = 1 - 2aw + w^2. \quad (2.22.8)$$

Используя разложение в ряд по степеням w решения уравнения

$$2 \frac{z - a}{z^2 - 1} = w, \quad (2.22.5)$$

выведем формулы Родрига для многочленов Лежандра.

Положим $z_0 = a$, тогда $w_0 = 0$ и

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n,$$

где

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\left(\frac{z^2 - 1}{2} \right)^n \right] \Big|_{z=a} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[(a^2 - 1)^n \right]. \quad (2.22.6)$$

Из формулы (2.22.5) получаем равенство

$$wz^2 - 2z = w - 2a. \quad (2.22.7)$$

Умножая равенство (2.22.7) на w и прибавляя к обеим частям по единице, получаем

$$(1 - wz)^2 = 1 - 2aw + w^2. \quad (2.22.8)$$

Считая z функцией переменных w и a , дифференцируя равенство (2.22.7) по a и учитывая равенство (2.22.8), получаем

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{1 - wz} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2aw + w^2}}.$$

Учитывая равенства (2.22.6) и определение многочленов Лежандра $P_n(a)$ через производящую функцию, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(a) w^n &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2aw + w^2}} = \\ &= \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[(a^2 - 1)^n \right] w^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{da^n} \left[(a^2 - 1)^n \right] w^n. \end{aligned}$$

Следствием единственности разложения производящей функции являются формулы Родрига

$$P_n(a) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{da^n} \left[(a^2 - 1)^n \right].$$

Считая z функцией переменных w и a , дифференцируя равенство (2.22.7) по a и учитывая равенство (2.22.8), получаем

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{1 - wz} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2aw + w^2}}.$$

Учитывая равенства (2.22.6) и определение многочленов Лежандра $P_n(a)$ через производящую функцию, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(a) w^n &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2aw + w^2}} = \\ &= \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[(a^2 - 1)^n \right] w^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{da^n} \left[(a^2 - 1)^n \right] w^n. \end{aligned}$$

Следствием единственности разложения производящей функции являются формулы Родрига

$$P_n(a) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{da^n} \left[(a^2 - 1)^n \right].$$

Обобщенный ряд Бурмана-Лагранжа

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = z_0$, причем $f'(z_0) \neq 0, f(z_0) = w_0$. Если функция $g(z)$ аналитична в окрестности точки $z = z_0$, то

$$g(z) = d_0 + d_1 (f(z) - w_0) + d_2 (f(z) - w_0)^2 + d_3 (f(z) - w_0)^3 + \dots, \quad (2.22.9)$$

где $d_0 = g(z_0)$, а при $n > 0$

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[g'(z) \frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right]. \quad (2.22.10)$$

Ряд (2.22.9) представляет собой разложение одной аналитической функции $g(z)$ по степеням другой аналитической функции $f(z)$ и называется рядом Бурмана-Лагранжа.

Формулы (2.22.10) для коэффициентов ряда Бурмана-Лагранжа являются следствием равенства

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(t)f'(t)}{f(t) - f(z)} dt, \quad (1.4.11)$$

обобщающего интегральную формулу Коши и доказываемого довольно просто.

Обобщенный ряд Бурмана-Лагранжа

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = z_0$, причем $f'(z_0) \neq 0, f(z_0) = w_0$. Если функция $g(z)$ аналитична в окрестности точки $z = z_0$, то

$$g(z) = d_0 + d_1 (f(z) - w_0) + d_2 (f(z) - w_0)^2 + d_3 (f(z) - w_0)^3 + \dots, \quad (2.22.9)$$

где $d_0 = g(z_0)$, а при $n > 0$

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[g'(z) \frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right]. \quad (2.22.10)$$

Ряд (2.22.9) представляет собой разложение одной аналитической функции $g(z)$ по степеням другой аналитической функции $f(z)$ и называется рядом Бурмана-Лагранжа.

Формулы (2.22.10) для коэффициентов ряда Бурмана-Лагранжа являются следствием равенства

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(t)f'(t)}{f(t) - f(z)} dt, \quad (1.4.11)$$

обобщающего интегральную формулу Коши и доказываемого довольно просто.

В окрестности точки $z = 0$ найдем разложение функции $g(z) = e^{bz}$ по степеням функции $f(z) = z e^{-z}$.

В данном случае $z_0 = 0$, $w_0 = 0$ и $d_0 = g(0) = 1$. Согласно формулам (2.22.10) получаем

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [b e^{bz} e^{-nz}] = \frac{b(b+n)^{n-1}}{n!}.$$

Следовательно

$$e^{bz} = 1 + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b+n)^{n-1}}{n!} z^n e^{-nz}.$$

Полагая $z = 1$, из последнего равенства получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b+n)^{n-1}}{n!} e^{-n} = \frac{e^b - 1}{b}.$$

Ряд сходится равномерно по b в окрестности $b = 0$, поэтому, переходя к пределу при $b \rightarrow 0$, получаем удивительное числовое равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} e^{-n} = 1.$$

В окрестности точки $z = 0$ найдем разложение функции $g(z) = e^{bz}$ по степеням функции $f(z) = z e^{-z}$.

В данном случае $z_0 = 0$, $w_0 = 0$ и $d_0 = g(0) = 1$. Согласно формулам (2.22.10) получаем

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [b e^{bz} e^{-nz}] = \frac{b(b+n)^{n-1}}{n!}.$$

Следовательно

$$e^{bz} = 1 + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b+n)^{n-1}}{n!} z^n e^{-nz}.$$

Полагая $z = 1$, из последнего равенства получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b+n)^{n-1}}{n!} e^{-n} = \frac{e^b - 1}{b}.$$

Ряд сходится равномерно по b в окрестности $b = 0$, поэтому, переходя к пределу при $b \rightarrow 0$, получаем удивительное числовое равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} e^{-n} = 1.$$

II. § 23. Разложение функций на элементарные дроби и в бесконечные произведения

В основном курсе теории функций уже изучались разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. В этом параграфе мы рассмотрим новые представления: мероморфных функций в виде рядов специального типа и целых функций в виде бесконечных произведений.

Разложение мероморфных функций на элементарные дроби

Функция $w = f(z)$ называется *мероморфной*, если во всякой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ она является аналитической всюду, за исключением конечного числа полюсов.

Определение

Рассмотрим последовательность $\{\Gamma_n\}$ вложенных замкнутых контуров, содержащих внутри себя точку $z = 0$ (Γ_n лежит внутри Γ_{n+1}). Обозначим через S_n длину контура Γ_n , а через d_n расстояние от начала координат до контура Γ_n . Последовательность контуров называется *правильной*, если $d_n \rightarrow \infty$ и $S_n \leq L d_n$ ($L < +\infty$).

II. § 23. Разложение функций на элементарные дроби и в бесконечные произведения

В основном курсе теории функций уже изучались разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. В этом параграфе мы рассмотрим новые представления: мероморфных функций в виде рядов специального типа и целых функций в виде бесконечных произведений.

Разложение мероморфных функций на элементарные дроби

Функция $w = f(z)$ называется *мероморфной*, если во всякой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ она является аналитической всюду, за исключением конечного числа полюсов.

Определение

Рассмотрим последовательность $\{\Gamma_n\}$ вложенных замкнутых контуров, содержащих внутри себя точку $z = 0$ (Γ_n лежит внутри Γ_{n+1}). Обозначим через S_n длину контура Γ_n , а через d_n расстояние от начала координат до контура Γ_n . Последовательность контуров называется *правильной*, если $d_n \rightarrow \infty$ и $S_n \leq L d_n$ ($L < +\infty$).

II. § 23. Разложение функций на элементарные дроби и в бесконечные произведения

В основном курсе теории функций уже изучались разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. В этом параграфе мы рассмотрим новые представления: мероморфных функций в виде рядов специального типа и целых функций в виде бесконечных произведений.

Разложение мероморфных функций на элементарные дроби

Функция $w = f(z)$ называется *мероморфной*, если во всякой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ она является аналитической всюду, за исключением конечного числа полюсов.

Определение

Рассмотрим последовательность $\{\Gamma_n\}$ вложенных замкнутых контуров, содержащих внутри себя точку $z = 0$ (Γ_n лежит внутри Γ_{n+1}). Обозначим через S_n длину контура Γ_n , а через d_n расстояние от начала координат до контура Γ_n . Последовательность контуров называется *правильной*, если $d_n \rightarrow \infty$ и $S_n \leq L d_n$ ($L < +\infty$).

Теорема 2.23.1.

Пусть все полюсы a_k мероморфной функции $f(z)$ (аналитической в точке $z = 0$) являются простыми и занумерованы в порядке неубывания их модулей. Если функция $f(z)$ ограничена на некоторой правильной системе контуров Γ_n , то

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right), \quad (2.23.1)$$

где $A_k = \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$.

Ряд сходится равномерно на всякой ограниченной области с выколотыми полюсами a_k .

Доказательство является следствием теоремы о вычетах, согласно которой

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{z f(t) dt}{t(t-z)} = -f(0) + f(z) + \sum_{a_k \in G_n} \frac{A_k z}{a_k(a_k - z)}.$$

При этом фиксируя R и предполагая $|z| \leq R$, несложно показать, что $I_n(z)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2.23.1.

Пусть все полюсы a_k мероморфной функции $f(z)$ (аналитической в точке $z = 0$) являются простыми и занумерованы в порядке неубывания их модулей. Если функция $f(z)$ ограничена на некоторой правильной системе контуров Γ_n , то

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right), \quad (2.23.1)$$

где $A_k = \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$.

Ряд сходится равномерно на всякой ограниченной области с выколотыми полюсами a_k .

Доказательство является следствием теоремы о вычетах, согласно которой

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{z f(t) dt}{t(t-z)} = -f(0) + f(z) + \sum_{a_k \in G_n} \frac{A_k z}{a_k(a_k - z)}.$$

При этом фиксируя R и предполагая $|z| \leq R$, несложно показать, что $I_n(z)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Примеры.

а) Доказать следующие разложения мероморфных функций:

$$1) \operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}; \quad 2) \operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2\pi^2};$$

$$3) \frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4k^2\pi^2}; \quad 4) \operatorname{tg} z = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}};$$

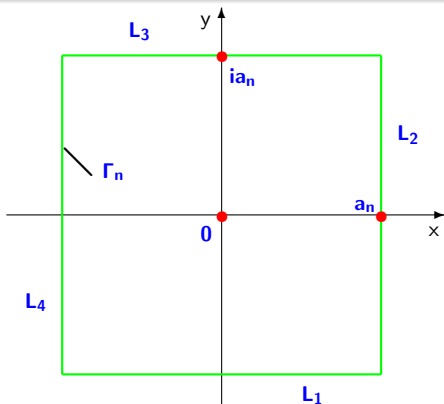
$$5) \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2z}{z^2 - k^2\pi^2}; \quad 6) \frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - k\pi)^2}.$$

б) Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}$.

а1) Непосредственно воспользоваться теоремой мы не можем, т.к. точка $z = 0$ является полюсом функции $\operatorname{ctg} z$. Поэтому рассмотрим вспомогательную функцию $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$, для которой начало координат является устранимой особой точкой. Полагая $f(0) = 0$, получаем аналитическую в точке $z = 0$ функцию, удовлетворяющую условиям теоремы.

Доопределенная функция $f(z)$ является мероморфной, имеет простые полюсы в точках $a_k = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) и $\operatorname{res}_{z=k\pi} f(z) = 1$.

Покажем, что функция $f(z)$ ограничена на специальной правильной системе контуров $\{\Gamma_n\}$, состоящей из квадратов с центром в точке $z = 0$ и сторонами длины $l_n = \pi + 2\pi n$, параллельными осям координат.



Все точки, лежащие на двух вертикальных сторонах L_2 и L_4 квадрата Γ_n , имеют комплексную запись вида $z = \pm \frac{\pi}{2} \pm \pi n + iy$, поэтому

$$|\operatorname{ctg} z| = |\operatorname{tg}(iy)| = \frac{|e^y - e^{-y}|}{|e^y + e^{-y}|} \leq 1.$$

Точки, лежащие на верхней стороне L_3 квадрата Γ_n , имеют вид $z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, поэтому

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|e^{2iz} + 1|}{|e^{2iz} - 1|} = \frac{|e^{2ix} e^{-ln} + 1|}{|e^{2ix} e^{-ln} - 1|} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1} = M.$$

Поскольку $|\operatorname{ctg}(-z)| = |\operatorname{ctg} z|$, то последняя оценка будет выполняться и на нижней стороне квадрата.

Согласно теореме 2.23.1

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (1.5.4)$$

Все точки, лежащие на двух вертикальных сторонах L_2 и L_4 квадрата Γ_n , имеют комплексную запись вида $z = \pm \frac{\pi}{2} \pm \pi n + iy$, поэтому

$$|\operatorname{ctg} z| = |\operatorname{tg}(iy)| = \frac{|e^y - e^{-y}|}{|e^y + e^{-y}|} \leq 1.$$

Точки, лежащие на верхней стороне L_3 квадрата Γ_n , имеют вид $z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, поэтому

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|e^{2iz} + 1|}{|e^{2iz} - 1|} = \frac{|e^{2ix} e^{-ln} + 1|}{|e^{2ix} e^{-ln} - 1|} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1} = M.$$

Поскольку $|\operatorname{ctg}(-z)| = |\operatorname{ctg} z|$, то последняя оценка будет выполняться и на нижней стороне квадрата.

Согласно теореме 2.23.1

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (1.5.4)$$

а2) Является следствием а1) и равенства $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg}(iz)$.

а3) Является следствием а2) и равенства

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2}.$$

а4) Является следствием равенства $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$.

а5) Является следствием равенства

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right).$$

а6) Является следствием дифференцирования формулы (1.5.4).

а2) Является следствием а1) и равенства $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg}(iz)$.

а3) Является следствием а2) и равенства

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2}.$$

а4) Является следствием равенства $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$.

а5) Является следствием равенства

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right).$$

а6) Является следствием дифференцирования формулы (1.5.4).

а2) Является следствием а1) и равенства $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg}(iz)$.

а3) Является следствием а2) и равенства

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2}.$$

а4) Является следствием равенства $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$.

а5) Является следствием равенства

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right).$$

а6) Является следствием дифференцирования формулы (1.5.4).

а2) Является следствием а1) и равенства $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg}(iz)$.

а3) Является следствием а2) и равенства

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2}.$$

а4) Является следствием равенства $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$.

а5) Является следствием равенства

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right).$$

а6) Является следствием дифференцирования формулы (1.5.4).

а2) Является следствием а1) и равенства $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg}(iz)$.

а3) Является следствием а2) и равенства

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2}.$$

а4) Является следствием равенства $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$.

а5) Является следствием равенства

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right).$$

а6) Является следствием дифференцирования формулы (1.5.4).

б) Для нахождения искомого ответа нужно в а2) подставить $z = a\pi$.

В результате получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{cth}(a\pi) - \frac{1}{a\pi} \right).$$

Из последнего равенства при $a \rightarrow 0$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

б) Для нахождения искомого ответа нужно в а2) подставить $z = a\pi$.

В результате получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{cth}(a\pi) - \frac{1}{a\pi} \right).$$

Из последнего равенства при $a \rightarrow 0$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

б) Для нахождения искомого ответа нужно в а2) подставить $z = a\pi$.

В результате получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{cth}(a\pi) - \frac{1}{a\pi} \right).$$

Из последнего равенства при $a \rightarrow 0$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Разложение целых функции в бесконечное произведение

Аналитическая на всей комплексной плоскости функция называется *целой*.

Теорема 2.23.2.

Если целая функция $h(z)$ такова, что мероморфная функция $f(z) = h'(z)/h(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1, то

$$h(z) = h(0)e^{Bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_k} \right) e^{z/a_k} \right]^{n_k}, \quad (2.23.5)$$

где a_k — нули функции $h(z)$, n_k — кратность нуля и $B = f(0) = \frac{h'(0)}{h(0)}$.

Доказательство является следствием теоремы 2.23.1 и интегрирования вдоль кривой от 0 до z функции $f(z)$, имеющей полюсы только в точках, являющихся нулями функции $h(z)$. Поскольку $\operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = n_k$, то

$$\ln h(z) - \ln h(0) = f(0)z + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left[\ln \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) + \frac{z}{a_k} \right].$$

Потенцируя это равенство получаем формулу (2.23.5).

Разложение целых функции в бесконечное произведение

Аналитическая на всей комплексной плоскости функция называется *целой*.

Теорема 2.23.2.

Если целая функция $h(z)$ такова, что мероморфная функция $f(z) = h'(z)/h(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1, то

$$h(z) = h(0)e^{Bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_k} \right) e^{z/a_k} \right]^{n_k}, \quad (2.23.5)$$

где a_k – нули функции $h(z)$, n_k – кратность нуля и $B = f(0) = \frac{h'(0)}{h(0)}$.

Доказательство является следствием теоремы 2.23.1 и интегрирования вдоль кривой от 0 до z функции $f(z)$, имеющей полюсы только в точках, являющихся нулями функции $h(z)$. Поскольку $\operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = n_k$, то

$$\ln h(z) - \ln h(0) = f(0)z + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left[\ln \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) + \frac{z}{a_k} \right].$$

Потенцируя это равенство получаем формулу (2.23.5).

Докажем следующие разложения:

$$\text{a) } \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right); \quad \text{b) } e^z - 1 = z e^{z/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4k^2 \pi^2} \right).$$

а) Рассмотрим целую функцию $h(z) = \frac{\sin z}{z}$, имеющую простые нули в точках $a_k = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Функция

$$f(z) = \frac{h'(z)}{h(z)} = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1, и $h(0) = 1, h'(0) = 0$. По формуле (2.23.5) получаем

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{k\pi} \right) e^{z/k\pi} \left(1 + \frac{z}{k\pi} \right) e^{-z/k\pi} \right] = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right).$$

б) Следует из равенств $e^z - 1 = 2e^{z/2} \operatorname{sh} \frac{z}{2}$ и $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$.

Докажем следующие разложения:

$$\text{a) } \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right); \quad \text{b) } e^z - 1 = z e^{z/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4k^2 \pi^2} \right).$$

а) Рассмотрим целую функцию $h(z) = \frac{\sin z}{z}$, имеющую простые нули в точках $a_k = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Функция

$$f(z) = \frac{h'(z)}{h(z)} = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1, и $h(0) = 1, h'(0) = 0$. По формуле (2.23.5) получаем

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{k\pi} \right) e^{z/k\pi} \left(1 + \frac{z}{k\pi} \right) e^{-z/k\pi} \right] = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right).$$

б) Следует из равенств $e^z - 1 = 2e^{z/2} \operatorname{sh} \frac{z}{2}$ и $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$.

Докажем следующие разложения:

$$\text{a) } \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right); \quad \text{b) } e^z - 1 = z e^{z/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4k^2 \pi^2} \right).$$

а) Рассмотрим целую функцию $h(z) = \frac{\sin z}{z}$, имеющую простые нули в точках $a_k = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Функция

$$f(z) = \frac{h'(z)}{h(z)} = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1, и $h(0) = 1, h'(0) = 0$. По формуле (2.23.5) получаем

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{k\pi} \right) e^{z/k\pi} \left(1 + \frac{z}{k\pi} \right) e^{-z/k\pi} \right] = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right).$$

б) Следует из равенств $e^z - 1 = 2e^{z/2} \operatorname{sh} \frac{z}{2}$ и $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$.