ВОЛНОВОДЫ

Волноводом называется замкнутая металлическая труба произвольной формы, которая служит для канализации электромагнитной энергии, обычно в диапазоне СВЧ. Дело в том, что передача электромагнитных волн по проводам становится совершенно непригодной, когда длина волны сравнима с расстоянием между проводами. В этом случае провода работают просто как антенна, электромагнитная энергия излучается. Простейшее решение этой проблемы состоит в использовании металлической трубы. Электромагнитная волна не может пройти через достаточно толстую металлическую стенку и благодаря этому может распространяться вдоль трубы без заметных потерь энергии.

Сначала получим соотношения между компонентами электромагнитной волны в прямом бесконечно длинном волноводе произвольного сечения, одинакового вдоль длины волновода. Будем рассматривать случай, когда объем волновода заполнен однородной средой с проницаемостями ε и μ. Пусть ось z направлена вдоль волновода.

Будем искать решение в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(x,y)\mathrm{e}^{i(k_z z-\omega t)}, \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(x,y)\mathrm{e}^{i(k_z z-\omega t)}. \tag{1}$$

Такое решение в общем виде удовлетворяет уравнениям Максвелла. Граничные условия на стенках волновода задают конкретный вид $\mathbf{E}(x,y)$ и $\mathbf{H}(x,y)$, а также интервал возможных значений ω.

Далее представим векторы электрического и магнитного полей как

$$\begin{gathered}\mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y + E_z\mathbf{e}_z = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_z,\\ \mathbf{H} = H_x\mathbf{e}_x + H_y\mathbf{e}_y + H_z\mathbf{e}_z = \mathbf{H}_\perp + \mathbf{H}_z.\end{gathered} \tag{2}$$

Запишем пару уравнений Максвелла

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\tfrac{\mu}{c}\tfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \tfrac{\varepsilon}{c}\tfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.\end{gathered} \tag{3}$$

Учтем, что

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = [\nabla\times\mathbf{A}] = [\nabla_\perp\times\mathbf{A}] + [\nabla_z\times\mathbf{A}],$$

где $\mathbf{A}$ – некоторая векторная функция пространственных координат, а оператор ∇ разложен на компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z = \nabla_\perp + \nabla_z.$$

Тогда, оставив в уравнениях (3) только $\perp$-компоненты, получим:

$$\begin{gathered}[\nabla_\perp\times\mathbf{E}_z] + [\nabla_z\times\mathbf{E}_\perp] = i\tfrac{\mu\omega}{c}\mathbf{H}_\perp,\\ [\nabla_\perp\times\mathbf{H}_z] + [\nabla_z\times\mathbf{H}_\perp] = -i\tfrac{\varepsilon\omega}{c}\mathbf{E}_\perp.\end{gathered} \tag{4}$$

Выразим из второго уравнения $\mathbf{E}_\perp$:

$$\mathbf{E}_\perp = i\frac{c}{\varepsilon\omega}[\nabla_\perp\times\mathbf{H}_z] + i\frac{c}{\varepsilon\omega}[\nabla_z\times\mathbf{H}_\perp]$$

и подставим $\mathbf{E}_\perp$ в первое уравнение. При этом распишем получившееся двойное векторное произведение по формуле $\boldsymbol{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]=\mathbf{b}(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b})$. С учетом (1) получим:

$$i\frac{\mu\omega}{c}\mathbf{H}_\perp=[\nabla_\perp\times\mathbf{E}_z]+i\frac{c}{\varepsilon\omega}\nabla_z\times[\nabla_\perp\times\mathbf{H}_z]+i\frac{c}{\varepsilon\omega}\nabla_z\times[\nabla_z\times\mathbf{H}_\perp]=$$

$$=[\nabla_\perp\times\mathbf{E}_z]+i\frac{c}{\varepsilon\omega}\nabla_\perp(\nabla_z\cdot\mathbf{H}_z)-i\frac{c}{\varepsilon\omega}\mathbf{H}_z(\nabla_z\cdot\nabla_\perp)+i\frac{c}{\varepsilon\omega}\nabla_z(\nabla_z\cdot\mathbf{H}_\perp)-i\frac{c}{\varepsilon\omega}\mathbf{H}_\perp(\nabla_z\cdot\nabla_z)=$$

$$=\nabla_\perp\times\mathbf{E}_z+i\frac{c}{\varepsilon\omega}\nabla_\perp(\nabla_z\cdot\mathbf{H}_z)-0+0-i\frac{c}{\varepsilon\omega}(-k_z^2)\mathbf{H}_\perp=\nabla_\perp\times\mathbf{E}_z+i\frac{c}{\varepsilon\omega}ik_z\nabla_\perp H_z+ik_z^2\frac{c}{\varepsilon\omega}\mathbf{H}_\perp=$$

$$=\nabla_\perp\times\mathbf{E}_z-\frac{c}{\varepsilon\omega}k_z\nabla_\perp H_z+ik_z^2\frac{c}{\varepsilon\omega}\mathbf{H}_\perp.$$

Домножим полученное равенство на $\frac{\varepsilon\omega}{ic}$ и перенесем в левую часть слагаемое, содержащее $\mathbf{H}_\perp$:

$$\left(\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}-k_z^2\right)\mathbf{H}_\perp=i\left(-\frac{\varepsilon\omega}{c}\nabla_\perp\times\mathbf{E}_z+k_z\nabla_\perp H_z\right).\tag{5}$$

Поскольку уравнения (3) переходят одно в другое при замене $\mathbf{E}\leftrightarrow\mathbf{H}$, $\varepsilon\leftrightarrow-\mu$, то из полученного уравнения можно той же заменой получить

$$\left(\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}-k_z^2\right)\mathbf{E}_\perp=i\left(\frac{\mu\omega}{c}\nabla_\perp\times\mathbf{H}_z+k_z\nabla_\perp E_z\right).\tag{6}$$

Введем обозначение $\varkappa^2=\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}-k_z^2$ и выразим поперечные компоненты полей:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_\perp&=\frac{i}{\varkappa^2}\left(k_z\nabla_\perp H_z-\frac{\varepsilon\omega}{c}\nabla_\perp\times\mathbf{E}_z\right),\\ \mathbf{E}_\perp&=\frac{i}{\varkappa^2}\left(k_z\nabla_\perp E_z+\frac{\mu\omega}{c}\nabla_\perp\times\mathbf{H}_z\right).\end{aligned}\tag{7}$$

Соотношения (7) позволяют выразить мгновенные значения поперечных компонент полей через продольные. Заметим, что при замене $k_z\leftrightarrow-k_z$, $\omega\leftrightarrow-\omega$ в правых частях соотношений (7) появляется общий множитель (-1). Это может показаться странным, поскольку выражения (1) с противоположными знаками в экспоненте описывают одну и ту же волну, и при такой замене соотношение между компонентами полей никак не должно изменяться. Дело в том, что на самом деле одновременная замена знаков k_z и ω не равносильна домножению (7) на (-1), а изменяет только мнимые части уравнений. Предлагаем убедиться самостоятельно в том, что действительные части остаются при этом неизменными.

Соотношения (7) имеют ряд важных следствий. Например, из них следует, что волна в волноводе с *односвязным* сечением не может быть поперечной для электрического и магнитного полей одновременно. (В случае *многосвязного* сечения возможно решение в виде ТЕМ-волны при условии $\varkappa=0$, которое не предполагалось при выводе уравнений (7)). Если же z-компонента отлична от нуля только для вектора $\mathbf{H}$ (“Н-волна”), то с учетом (7) *граничные условия* на стенках можно записать в виде

$$H_n=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\partial H_z}{\partial x_n}=0,$$

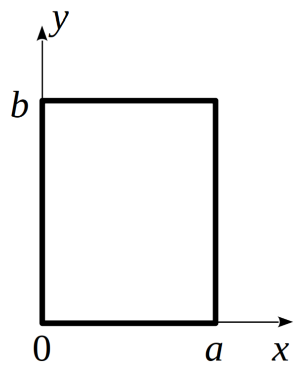
$$E_\tau=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\partial H_z}{\partial x_n}=0.$$

Видно, что на стенках волновода условия $E_\tau = 0$ и $H_n = 0$ оказываются эквивалентными. Это является следствием уравнения Максвелла $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Действительно, внутри металлической стенки $E = 0$, следовательно, и $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$, откуда следует, что в металле *переменное* магнитное поле $B = 0$. Для нормальной составляющей это означает, что на стенке волновода со стороны внутренней области $B_n = H_n = 0$.

Случай $E_z = 0$ относится к "Е-волне". Для Е-волны аналогично получим эквивалентость граничных условий

$$E_\tau = 0 \to \frac{\partial E_z}{\partial x_\tau} = 0.$$

ВОЛНОВОД ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ



Пусть сечение волновода – прямоугольник размерами $w_x \times w_y = a \times b$ (см. рисунок).

Рассмотрим случай **Н-волны**. Будем искать решение в виде

$$H_z = (A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x)) \cdot (B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y))\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Запишем граничные условия $E_\tau = 0$ на границах

$$\begin{aligned}
x = 0: \;& E_y \sim \tfrac{\partial H_z}{\partial x} \sim A_2 k_x \cdot (B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y))\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} = 0 \to A_2 = 0,\\
x = a: \;& E_y \sim \tfrac{\partial H_z}{\partial x} \sim A_1 k_x \sin(k_x a) \cdot (B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y))\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} = 0 \to k_x = \tfrac{m\pi}{a}\\
y = 0: \;& E_y \sim \tfrac{\partial H_z}{\partial y} \sim B_2 k_y \cdot A_2 \cos(k_y y)\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} = 0 \to B_2 = 0,\\
y = b: \;& E_y \sim \tfrac{\partial H_z}{\partial y} \sim A_2 k_y \sin(k_y b)\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} = 0 \to k_y = \tfrac{n\pi}{b}.
\end{aligned}$$

Таким образом, компонента H_z в Н-волне имеет вид

$$H_z = H_0 \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)},\;\; m = 0, 1, 2, ...,\;\; n = 0, 1, 2, ...,\;\; (m, n) \neq (0, 0).$$

Компоненты H_x, H_y, E_x, E_y находятся по формуле (7).

Рассмотрим случай **Е-волны**. Будем искать решение в виде

$$E_z = (A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x)) \cdot (B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y))\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Запишем граничные условия $E_\tau = 0 \to \frac{\partial E_z}{\partial x_\tau} = 0$ на границах

$$\begin{aligned}
x = 0: \;& E_y \sim \tfrac{\partial E_z}{\partial y} \sim B_1 k_y \cdot (A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x))\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} = 0 \to B_1 = 0,\\
x = a: \;& E_y \sim \tfrac{\partial E_z}{\partial y} \sim B_1 k_x \sin(k_y b) \cdot (A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x))\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} = 0 \to k_y = \tfrac{m\pi}{b}\\
y = 0: \;& E_x \sim \tfrac{\partial E_z}{\partial x} \sim A_2 k_x \cdot B_2 \cos(k_y y)\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} = 0 \to A_2 = 0,\\
y = b: \;& E_x \sim \tfrac{\partial E_z}{\partial x} \sim A_2 k_x \sin(k_y b)\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} = 0 \to k_y = \tfrac{n\pi}{b}.
\end{aligned}$$

Таким образом, компонента E_z в Е-волне имеет вид

$$E_z = E_0 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)},\;\; m = 1, 2, ...,\;\; n = 1, 2, ...$$

Компоненты H_x, H_y, E_x, E_y находятся по формуле (7).

Подставляя решение для поля в волноводе прямоугольного сечения в волновое уравнение

$$\Delta\mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad \Delta\mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t^2},$$

получим закон дисперсии $\omega(k_z)$:

$$\omega^2 = c^2k_z^2 + c^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + c^2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = c^2k_z^2 + \omega_{min}^2, \tag{8}$$

При частотах $\omega < \omega_{min} = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + c^2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$ оказывается $k_z^2 < 0$, следовательно, данная мода волны экспоненциально затухает по z, то есть не может распространяться по волноводу. Никакая мода волны не возможна в волноводе при частотах $\omega < \omega_0 = \frac{\pi c}{b}$, где ω_0 соответствует H_{01}–волне (предполагается $a < b$).

Продифференцируем обе части уравнения (8) по k_z:

$$2\omega\frac{\partial}{\partial k_z} = 2c^2k_z \Rightarrow \frac{\partial}{\partial k_z}\cdot\frac{\omega}{k_z} = u_{\text{гр}}v_{\text{ф}} = c^2. \tag{9}$$

Поскольку всегда $u_{\text{гр}} < c$, то соотношение (9) показывает, что в волноводе прямоугольного сечения всегда $v_{\text{ф}} > c$ *

Подставляя из закона дисперсии (8) $k_z^2 = \frac{\omega^2-\omega_{min}^2}{c^2}$ в выражение для фазовой скорости, получим

$$v_{\text{ф}}^2 = \frac{\omega^2}{k_z^2} = \frac{c^2}{1-\frac{\omega_{min}^2}{\omega^2}} \Rightarrow v_{\text{ф}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_{min}^2}{\omega^2}}}, \quad u_{\text{гр}} = c\sqrt{1-\frac{\omega_{min}^2}{\omega^2}}.$$

Вернемся теперь к случаю произвольного поперечного сечения волновода. Пусть оно представляет собой многосвязную область. Тогда остаются в силе уравнения (4), но оказывается возможным нетривиальное решение с нулевыми z-компонентами полей (ТЕМ-волна). В этом случае уравнения (4) принимают вид

$$\mathbf{H}_\perp = -i\frac{c}{\mu\omega}\left[\nabla_z \times \mathbf{E}_\perp\right],$$

$$\mathbf{E}_\perp = i\frac{c}{\varepsilon\omega}\left[\nabla_z \times \mathbf{H}_\perp\right].$$

Выразим из первого уравнения $\mathbf{H}_\perp$ и подставим во второе:

$$\mathbf{E}_\perp = -i\frac{c}{\mu\omega}\cdot i\frac{c}{\varepsilon\omega}\nabla_z \times \nabla_z \times \mathbf{E}_\perp = -\frac{c^2}{\varepsilon\mu\omega^2}\Delta_z\mathbf{E}_\perp = \frac{c^2k_z^2}{\varepsilon\mu\omega^2}\mathbf{E}_\perp,$$

откуда видно, что необходимое условие существования ТЕМ-волны

$$\varkappa^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - k_z^2 = 0.$$

*Вывод соотношения $u_{\text{гр}}v_{\text{ф}} = c^2$ остается в силе и для более общего вида волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{i(k_zz-\omega t)}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0\,\mathrm{e}^{i(k_zz-\omega t)}$ где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ не зависят от z и k_z.