

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра общей физики

А. Е. Гореликова, В. В. Рандин

**Лабораторная работа 3.7.**  
**ИЗУЧЕНИЕ ЛАМИНАРНОГО И ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМОВ**  
**ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ**

Методические указания

Новосибирск  
2020

## Оглавление

Режимы течения в трубе.....	4
Электрохимический метод измерения касательного напряжения трения на стенке .....	6
Описание установки .....	8
Задания.....	10
Приложение 1. Течение Гагена-Пуазейля в трубе .....	11
Приложение 2. Турбулентное течение в трубах .....	14

## ИЗУЧЕНИЕ ЛАМИНАРНОГО И ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

*Цель работы:* ознакомление с ламинарным и турбулентным режимами течения в трубе; определение критического числа Рейнольдса, закона сопротивления в турбулентном течении; оценка скорости движения турбулентных пробок.

*Оборудование:* гидравлический контур с датчиками, усилитель, осциллограф, вольтметр.

### Режимы течения в трубе

Существует два режима течения вязкой жидкости: ламинарный и турбулентный. Рассмотрим их на примере простейшего течения в круглой трубе постоянного сечения (см. приложение 1). На некотором расстоянии от входа в трубу течение становится установившимся и не зависит от координаты вдоль оси трубы.

При малых скоростях потока движение жидкости оказывается ламинарным (безвихревым и безотрывным), скорости частиц жидкости медленно меняются от точки к точке потока и направлены вдоль оси трубы. В каждой точке скорость постоянна во времени.

Течение жидкости происходит под действием перепада давления в направлении оси трубы, но в каждом поперечном сечении, перпендикулярном оси трубы, давление можно рассматривать постоянным. Вследствие вязкого трения от одного цилиндрического слоя к другому передается напряжение  $\tau$ , пропорциональное градиенту скорости (закон трения Ньютона):

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr}, \quad (1)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости,  $v$  – скорость потока,  $r$  – поперечная координата. Профиль скорости ламинарного течения в трубе параболический (Рис. 1).

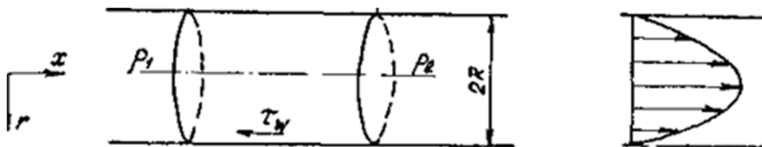


Рис.1. Схема течения жидкости в трубе:  $x$  – продольная координата,  $r$  – поперечная координата.

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2), \quad (2)$$

где  $(p_1 - p_2)$  – разность давлений на длине  $L$ ,  $R$  – радиус трубы.

Полное количество жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы:

$$Q = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu L} (p_1 - p_2). \quad (3)$$

Это – закон Гагена-Пуазейля для течения в круглой трубе.

Сила, действующая со стороны потока на единицу поверхности трубы, называется касательным напряжением трения на стенке  $\tau_w$ . Найдем связь между  $\tau_w$  и градиентом давления в направлении оси  $\frac{dP}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{L}$ , рассмотрев силы, действующие на цилиндр длины  $L$  и радиуса  $R$  (приложение 1):

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{2\tau_w}{R}. \quad (4)$$

Отметим, что (4) справедливо для любого режима течения. Коэффициент сопротивления  $\lambda$  определяется следующим образом (приложение 2, зависимость П2.5):

$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho \bar{v}^2}, \quad (5)$$

где  $\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2}$  – средняя по сечению скорость жидкости, а  $\rho$  плотность жидкости. Подставив в уравнение (5) соотношение (4) и выразив  $\bar{v}$  с помощью (3), получим:

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \quad (6)$$

где

$$Re = \frac{\rho \bar{v} 2R}{\mu} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} \quad (7)$$

безразмерное число Рейнольдса (в гидродинамике обычно в качестве характерного размера берут диаметр, а не радиус трубы).

Соотношение (6) справедливо только для ламинарного режима течения, когда имеет место закон трения (1).

Наблюдения показывают: ламинарное течение в трубе существует только до определенных значений числа Рейнольдса. При более высоких числах  $Re$  упорядоченность движения частиц жидкости нарушается. Возникает сильное общее перемешивание жидкости: на главное течение, направленное вдоль оси трубы, налагаются поперечные движения, перпендикулярные к оси. При турбулентном течении скорость жидкости в каждой точке все время испытывает небольшие отклонения от некоторого среднего для данной точки значения. Вследствие дополнительного перемешивания распределение скоростей по поперечному сечению трубы значительно отличается от параболического распределения. Перепад давления, необходимый для движения жидкости, пропорционален более высокой степени средней скорости, чем в ламинарном течении.

Первые систематические исследования ламинарной и турбулентной форм течения были выполнены О. Рейнольдсом во второй половине XIX в. В результате было найдено, что переход от ламинарного течения в турбулентное происходит при значении критерия  $\frac{\rho \bar{v} D}{\mu}$  (в последствие названного числом Рейнольдса), равном 2300. В дальнейших исследованиях было показано, что критическое число Рейнольдса сильно зависит от условий входа в трубу и от наличия возмущений жидкости. Однако существует нижнее критическое - значение  $Re$ , ниже которого течение остается ламинарным при любых возмущениях.

При течении жидкости в трубе переход к турбулентному режиму начинается с возникновения турбулентных "пробок" – участков турбулизованной жидкости, которые распространяются вдоль трубы, тогда как течение между "пробками" остается ламинарным. С увеличением  $Re$  "пробки" становятся длиннее, и постепенно течение по всей длине становится турбулентным. Коэффициент перемежаемости  $\gamma$  называется отношение времени существования в данной точке турбулентного режима ко всему времени измерения.

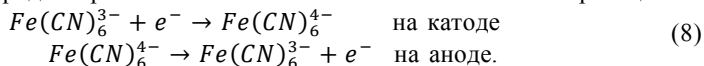
### **Электрохимический метод измерения касательного напряжения трения на стенке**

Для измерения касательного напряжения трения на стенке трубы  $\tau_w$  применяется электрохимический (электродиффузионный) метод. Суть его заключается в следующем.

В качестве рабочей жидкости в данной работе используется раствор, содержащий 1.65 г/л ферри- ( $K_3Fe(CN)_6$ ) и 2.11 г/л ферроцианида ( $K_4Fe(CN)_6$ ) калия и 26.5 г/л углекислого натрия ( $Na_2CO_3$ ) в дистиллированной воде.

В рабочий участок установки (трубу) помещается электрод малого размера – катод, который служит датчиком касательного напряжения трения на стенке. Анодом служит сама металлическая труба, которая заземляется.

Если между катодом и анодом приложить разность потенциалов, то в электрохимической ячейке возникает электрический ток. Особенностью применяемого раствора является то, что в определенном диапазоне напряжений ток не зависит от приложенного напряжения, а определяется только величиной касательного напряжения трения на стенке в точке, где находится датчик. На электродах протекает окислительно-восстановительная реакция:



Эта реакция имеет высокую константу скорости, поэтому каждый ион  $Fe(CN)_6^{3-}$ , попав на катод, превращается практически мгновенно в ион  $Fe(CN)_6^{4-}$ . В результате концентрация ионов  $Fe(CN)_6^{3-}$  на катоде становится равной нулю, и за счет разности концентраций между катодом и анодом воз-

никает процесс диффузии ионов к катоду. При этом во внешней цепи возникает электрический ток.

Основными процессами, определяющими ток в цепи датчика, являются:

1. Электрохимическая реакция на поверхности катода (существенно зависит от напряжения между анодом и катодом).
2. Диффузия активных ионов к катоду (определяется разностью концентраций активных ионов между объемом электролита и поверхностью датчика).
3. Гидродинамика течения вблизи датчика.

Вольтамперная характеристика электрохимической ячейки катод-электролит-анод имеет вид, приведенный на рис. 2. При малых значениях напряжения между анодом и катодом скорость электрохимической реакции мала и ток в цепи определяется электрохимической реакцией. При увеличении напряжения (область А) ток в цепи увеличивается из-за увеличения скорости перезарядки ионов на поверхности катода. В области предельного диффузионного тока (область В) скорость реакции настолько большая, что концентрация активных ионов на поверхности катода равна нулю и при повышении напряжения ток не увеличивается, т.к. полностью определяется диффузией ионов к катоду. При дальнейшем увеличении напряжения (область С) начинает протекать другая электрохимическая реакция (электролиз воды) из-за чего возрастает ток. Измерения можно проводить только в области предельного диффузионного тока, напряжение между анодом и датчиком должно выбираться таким образом, чтобы рабочая точка находилась в середине участка предельного диффузионного тока.

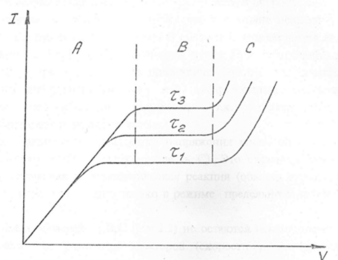


Рис. 2. Вольт-амперная характеристика электрохимической ячейки.

Из-за малого размера датчика толщина диффузионного слоя значительно меньше толщины гидродинамического вязкого подслоя, и весь диффузионный слой находится в линейной части профиля скорости. Таким образом, выполняется соотношение:

$$v = \frac{\tau_w}{\mu} y. \quad (9)$$

Решение уравнения диффузии в приближении пограничного слоя для датчика трения с линейным профилем скорости и граничными условиями равенства нуля концентрации активных ионов на поверхности датчика устанавли-

вает зависимость между диффузионным током датчика и напряжением на стенке, имеющую следующий вид:

$$\tau_w = \frac{1.87\mu}{F^3 C_0^3 D^2 l^2 h^3} I^3, \quad (10)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость,  $F$  – постоянная Фарадея (96500 Кл/моль),  $C_0$  – концентрация активных ионов,  $D$  – коэффициент диффузии,  $l$ ,  $h$  – размеры прямоугольного датчика. Концентрацию ионов, размеры датчиков и коэффициент диффузии определить сложно и точность их определения низка.

Удобнее применять относительный вариант данного метода, который заключается в калибровке датчика в потоке с известным трением. Тогда решение на стенке связано с током функцией:

$$\tau_w = AI^3, \quad (11)$$

где коэффициент  $A$  определяется из калибровки.

Калибровка проводится по известным зависимостям трения для ламинарного потока:

$$\tau_w = \frac{\lambda}{8} \rho \bar{v}^2, \quad (12)$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического сопротивления. Для ламинарного режима течения определяется как  $\lambda = \frac{64}{Re}$ .

## Описание установки

Схема установки представлена на рис. 3. Жидкость из бака центробежным насосом подается в рабочий участок (7), который представляем собой трубку с внутренним диаметром 10 мм. Расход жидкости регулируется краном (4) и измеряется ротаметром (5). В измерительных блоках (7), (8) и (9) установлен электрохимический датчики. Датчик (рис.4) представляет собой отрезок платиновой пластинки, вваренной в стекло, датчик вклеен в отверстие в стенке блока и зашлифован заподлицо со стенкой трубы. Такой датчик не вносит никаких гидродинамических возмущений в поток. Измерительные блоки установлены на достаточном расстоянии от входа, где течение является установившимся. На рис. 4 показан схематически электродиффузионный датчик трения. Примерные размеры электрода датчика  $l = 0.1$  мм,  $h = 0.8$  мм.

При подаче напряжения на датчик и усиления тока датчика используется усилитель, схема которого приведена на рис. 5. Напряжение датчика задается потенциометром  $R_3$  и подается на гнездо  $U_g$ . Операционный усилитель  $A_1$  включен по схеме усиления тока, его коэффициент передачи определяется резистором обратной связи  $R_1$ , переключаемым переключателем  $\Pi_1$ . Усилитель  $A_2$  производит дальнейшее усиление сигнала и компенсацию напряжения  $U_g$ , его коэффициент усиления равен  $R_7/R_5$ . Числа на переключателе задают номинальный входной ток в микроамперах, при котором напряжение на выходе равно +5 В.

Компенсатор (рис. 6) служит для компенсации постоянной составляющей тока датчика, чтобы отделить пульсации тока. Он выполнен по схеме инвертирующего усилителя со сложением токов на входе. Коэффициент усиления равен 2.

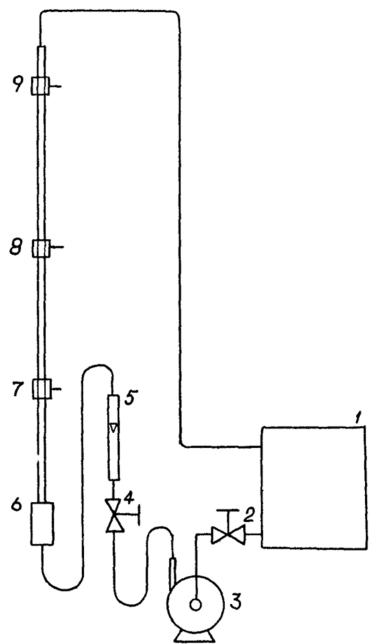


Рис.3. Схема установки: 1 - бак с раствором электролита, 2 - запорный кран, 3 - центробежный насос, 4 - регулирующий кран, 5 - ротаметр, 6 - входная секция, 7, 8, 9 - измерительные участки.

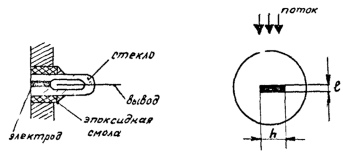
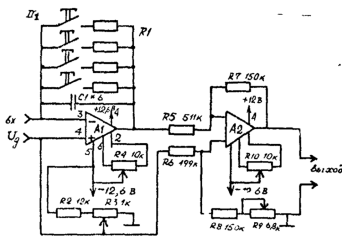


Рис.4. Электрохимический датчик.





### Задания

1. Откройте кран (2) на сливе из бака.
2. Включите измерительные приборы.
3. Включите насос. Постройте калибровочную зависимость для ротаметра. Установите напряжение питания насоса.
4. По температуре раствора в баке определите вязкость по графику.
5. Установите число Рейнольдса, равное 1000, и снимите вольт-амперные характеристики обоих датчиков с шагом 0.1 В. Напряжение  $U_g$  снимите с гнезда на усилителе.
6. Подключите осциллограф к входу усилителя. Определите критическое число Рейнольдса для данного эксперимента, повторив опыт не менее 3 раз. Следите за тем, чтобы расход жидкости изменялся монотонно в сторону увеличения.
7. Определите калибровочные коэффициенты  $A$  в формуле (11) для обоих датчиков при  $Re = 500, 1000, 1500$ ;  $\tau_w$  определите из соотношения (12).
8. Измерьте  $\tau_w$  в турбулентном режиме при трех числах  $Re = 4 \cdot 10^3; 6 \cdot 10^3; 8 \cdot 10^3$ .
9. Постройте в логарифмической шкале данные  $\lambda(Re)$  для турбулентного течения. Здесь же нанесите зависимость (6) и зависимость (приложение 2, П2.6) Определите коэффициенты  $B$  и  $m$  в формуле (для турбулентного течения):  $\lambda = B \cdot Re^m$ .
10. Увеличивая  $Re$  от  $Re_{кр}$ , шагами по 100, сделайте записи токов двух датчиков на запоминающем осциллографе.
11. Определите коэффициент перемежаемости в зависимости от  $Re$  и вычислите скорость перемещения турбулентных "пробок". Сравните со средней скоростью жидкости.

**ПОСЛЕ ОКОНЧАНИЯ РАБОТЫ ЗАКРОЙТЕ КРАН (2) НА СЛИВЕ ИЗ БАКА!**

## Приложение 1. Течение Гагена-Пуазейля в трубе

Элементарный закон трения для течения чистого сдвига, можно записать в следующем виде:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (\text{П1.1})$$

Этот закон находит важное применение для расчета течения в прямой круглой трубе с постоянным по всей длине диаметром  $D = 2R$ . Скорость течения на стенках трубы вследствие прилипания равна нулю в середине же трубы она имеет наибольшее значение (рис. П1.1). В точках цилиндрических поверхностей с осями, совпадающими с осью трубы, скорость течения постоянна. Отдельные концентрические слои скользят один по другому, и притом так, что скорость везде имеет осевое направление. Движение такого вида называется *ламинарным течением* (от латинского слова «lamina» – слой). На достаточно большом расстоянии от входа в трубу распределение скоростей течения вдоль радиуса не зависит от координаты в продольном направлении.

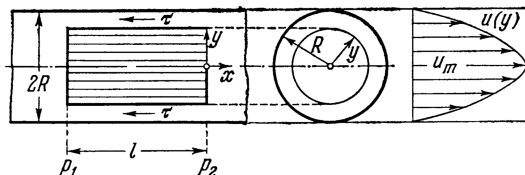


Рис. П1.1. Ламинарное течение в трубе.

Движение жидкости в трубе происходит под действием перепада давления в направлении оси трубы, но в каждом поперечном сечении, перпендикулярном к оси трубы, давление можно рассматривать как постоянное. Вследствие трения от одного цилиндрического слоя к другому передается касательное напряжение, пропорциональное градиенту скорости  $du/dy$ . Следовательно, движение каждого элемента жидкости ускоряется вследствие перепада давления и замедляется вследствие напряжения сдвига, вызванного трением. Другие силы на жидкость не действуют, в частности, не действуют и силы инерции, так как для каждой жидкой струйки скорость в продольном направлении постоянна. Для составления уравнения равновесия мысленно вырежем из жидкости, содержащейся в трубе, цилиндр длиной  $l$ , радиусом  $y$  и с осью, совпадающей с осью трубы (см. рис. П1.1). В направлении оси  $x$  на вырезанный цилиндр действуют силы давления  $p_1\pi y^2$  и  $p_2\pi y^2$ , приложенные к левому и правому основаниям цилиндра, и касательная сила  $2\pi y l \tau$ , действующая на боковую поверхность цилиндра. Приравняв разность сил давления  $(p_1 - p_2)\pi y^2$  касательной силе, мы получим в качестве условия равновесия в направлении  $x$  уравнение:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{y}{2}. \quad (\text{П1.2})$$

Для рассматриваемого случая скорость и уменьшается с увеличением координаты  $y$ , поэтому на основании элементарного закона трения (П1.1) следует принять, что

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}. \quad (\text{П1.3})$$

Подставив это значение  $\tau$  в уравнение (П1.2), мы получим

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu l} y, \quad (\text{П1.4})$$

или, после интегрирования,

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \left( C - \frac{y^2}{4} \right). \quad (\text{П1.5})$$

Постоянную интегрирования  $C$  следует определить из условия прилипания жидкости к стенкам трубы, т. е. из условия, что  $u(y)=0$  при  $y=R$ . Отсюда  $C = R^2/4$ , следовательно,

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - y^2). \quad (\text{П1.6})$$

Таким образом, имеет место параболическое распределение скоростей по радиусу трубы (см. рис. П1.1). Наибольшее значение скорость имеет в середине трубы, где она равна

$$u_m = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2. \quad (\text{П1.7})$$

Полное количество  $Q$  жидкости, протекающей сквозь поперечное сечение трубы (расход жидкости), определяется совсем просто, так как объем параболоида вращения равен половине произведения площади основания параболоида на его высоту. Следовательно,

$$Q = \frac{\pi}{2} R^2 u_m = \frac{\pi R^4}{8\mu l} (p_1 - p_2), \quad (\text{П1.8})$$

т. е. расход  $Q$  пропорционален первой степени перепада давления  $(p_1 - p_2)/l$  на единицу длины и четвертой степени радиуса трубы. Введем в рассмотрение среднюю скорость течения через поперечное сечение трубы, равную

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2}. \quad (\text{П1.9})$$

Тогда формулу (П1.8) можно переписать также в виде

$$p_1 - p_2 = 8\mu \frac{l}{R^2} \bar{u}. \quad (\text{П1.10})$$

Закон, выражаемый формулой (П1.8), впервые был выведен Г. Хагеном и вскоре повторно был найден Ж. Пуазейлем и называется *законом Хагена-Пуазейля ламинарного течения в трубе*.

Формулу (П1.8) можно использовать для экспериментального определения коэффициента вязкости  $\mu$ . Это производится следующим образом. Берется узкая труба (капилляр) определенного диаметра, и для заданной длины трубы определяется перепад давления и расход; имея эти числа, легко вычислить из формулы (П1.8) величину  $\mu$ .

Течение, описываемое формулами (П1.6) и (П1.8), в действительности может происходить только в трубах со сравнительно небольшим диаметром и при сравнительно небольших скоростях. При больших скоростях течения и большем диаметре трубы характер течения совершенно изменяется. А имен-

но, в этом случае перепад давления уже не пропорционален первой степени средней скорости течения в соответствии с формулой (П1.10), а приближенно пропорционален второй степени от  $\bar{u}$ . Кроме того, скорость течения распределяется по поперечному сечению значительно более равномерно и вместо упорядоченного слоистого течения происходит течение, в котором на продольную скорость налагаются беспорядочные поперечные составляющие, вызывающие сильное перемешивание жидкости в поперечном направлении. Такая форма течения называется *турбулентным течением*. Для турбулентных течений закон трения Ньютона, выражаемый формулой (П1.1), перестает быть применимым.

## Приложение 2. Турбулентное течение в трубах

Если жидкость втекает в трубу с круглым поперечным сечением из большого резервуара, то на протяжении некоторого участка трубы, начиная от входа в нее, образуется *входное течение*, в котором распределение скоростей по поперечному сечению изменяется по мере удаления от входа. Около самого входа распределение скоростей по поперечному сечению почти равномерно, но дальше от входа профиль скоростей под воздействием сил трения начинает постепенно вытягиваться, пока, наконец, на некотором расстоянии от входа не принимает свою окончательную, в дальнейшем не изменяющуюся форму. Длина *входного*, или *начального*, участка трубы при ламинарном течении равна

$$l_{\text{вх}} = 0.03dRe, \quad (\text{П2.1})$$

следовательно, при  $Re = 5000$  и  $Re = 10\,000$  составляет соответственно 150 или 300 диаметров трубы. При *турбулентном течении* длина начального участка значительно короче, чем при ламинарном течении, и составляет от 50 до 100 диаметров трубы, а по другим данным от 25 до 40 диаметров. В дальнейшем мы будем заниматься только развитым турбулентным течением.

Рассмотрим прямолинейную трубу с круглым поперечным сечением. Радиальную координату  $y$  будем измерять от оси трубы. Выделим в жидкости, в области развитого турбулентного течения, цилиндр, имеющий длину  $L$  и радиус  $y$ . Так как в данном случае силы инерции отсутствуют, то цилиндр находится в равновесии под действием касательных напряжений  $\tau$ , приложенных к его боковой поверхности, и разности давлений  $p_1 - p_2$ , действующих на его основания. Следовательно,

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{y}{2}. \quad (\text{П2.2})$$

Эта формула применима как к ламинарным, так и к турбулентным течениям. Сейчас в ней  $\tau$  обозначает сумму ламинарного и турбулентного касательных напряжений. Согласно формуле (П2.2) касательное напряжение распределяется по поперечному сечению линейно. Наибольшее касательное напряжение имеет место около стенки трубы, где оно равно

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{R}{2}. \quad (\text{П2.3})$$

Следовательно, касательное напряжение  $\tau_0$  на стенке может быть определено экспериментально путем измерения перепада давления.

Для ламинарного течения связь между перепадом давления и количеством протекающей жидкости  $Q = \pi R^2 \bar{u}$  (расход) определяется чисто теоретически, и при этом получается хорошее совпадение с экспериментом. Для турбулентного течения такую связь можно установить только на основе измерений, так как чисто теоретический расчет турбулентных течений в настоящее время пока еще невозможен. Связь между перепадом давления и расходом устанавливается *законом сопротивления* для движения в трубе. В литературе известно большое число формул, определяющих сопротивление в трубе, причем

более старые из них выведены без учета закона подобия Рейнольдса и зависят от выбора единиц. В настоящее время таким формулам придают безразмерный вид, для чего вводят безразмерный коэффициент сопротивления  $\lambda$ , определяемый соотношением

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\lambda}{d} \frac{\rho \bar{u}^2}{2}, \quad (\text{П2.4})$$

где  $d=2R$  есть диаметр трубы. Сравнив равенства (П2.3) и (П2.4), мы получим формулу

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho \bar{u}^2, \quad (\text{П2.5})$$

которой в дальнейшем будем часто пользоваться.

В 1911 г. Г. Блазиус впервые критически рассмотрел накопившийся к тому времени обширный экспериментальный материал и обработал его с учетом закона подобия Рейнольдса. Для коэффициента сопротивления в гладких трубах с круглым поперечным сечением он получил следующую эмпирическую формулу:

$$\lambda = 0.3164 Re^{-1/4}, \quad (\text{П2.6})$$

называемую в настоящее время *законом сопротивления Блазиуса*. Согласно этой формуле безразмерный коэффициент сопротивления есть функция только числа Рейнольдса. Закон Блазиуса применим для чисел Рейнольдса  $Re \leq 100\,000$ . В этом диапазоне этот закон дает очень хорошее совпадение с измерениями.