Урок 12

Емкость 1

1. (Задача 2.10) Оценить емкость: а) металлической пластинки с размерами $h \ll a \ll \ell$ и б) цилиндра с $a \ll \ell$.

Решение а) Рассмотрим потенциал пластины на расстояниях $x \gg \ell$. На этом расстоянии можно всю пластину считать точкой и хорошим приближением к потенциалу является кулоновский потенциал точечного заряда

$$\varphi_1(x) \approx \frac{q}{x}$$

На расстоянии x таком, что $a \ll x \ll \ell$ исследуемую пластину можно считать нитью. Тогда

$$\varphi_2(x) \approx -2\frac{q}{\ell}\ln\frac{x}{a} + A,$$

где A – произвольная константа. На расстояниях $x \ll a$ эту пластину можно считать бесконечной плоскостью толщиной h.

$$\varphi_3(x) = -2\pi\left(\frac{q}{al}\right)x + B.$$

Для нахождения констант приравняем потенциалы в промежуточных точках. При $x \sim \ell$ приравниваем φ_1 и φ_2, т.е.

$$\frac{q}{\ell} = -2\frac{q}{\ell}\ln\frac{\ell}{a} + A,$$

откуда

$$A = \frac{q}{\ell}\left(1 + 2\ln\frac{\ell}{a}\right).$$

При $x \sim a$ сшиваем φ_2 и φ_3, т.е.

$$-2\frac{q}{\ell}\ln 1 + \frac{q}{\ell}\left(1 + 2\ln\frac{\ell}{a}\right) = -2\pi\left(\frac{q}{a\ell}\right)a + B,$$

откуда

$$B = \frac{q}{\ell}\left\{2\pi + 1 + 2\ln\frac{\ell}{a}\right\}.$$

Емкость по определению это отношение заряда на проводнике к его потенциалу.

$$C = \frac{q}{\varphi_3(0)} = \frac{q}{B} = \frac{\ell}{1 + 2\pi + 2\ln\frac{\ell}{a}} \sim \frac{\ell}{2\left(\pi + \ln\frac{\ell}{a}\right)}.$$

б) Для цилиндра с радиусом a и длиной цилиндра ℓ, где $a \ll \ell$ потенциал этого цилиндра на расстоянии $x \gg \ell$

$$\varphi_1(x) = \frac{q}{x}.$$

При $a \ll x \ll \ell$ потенциал цилиндра

$$\varphi_2 = -2x \ln \frac{x}{a} + A.$$

Для нахождения константы приравняем потенциалы $\varphi_1 = \varphi_2$ в промежуточной точке $x \sim \ell$

$$-2\frac{q}{\ell} \ln \frac{\ell}{a} + A = \frac{q}{\ell}.$$

Тогда

$$A = \frac{q}{\ell} + 2\frac{q}{\ell} \ln \frac{\ell}{a} = \frac{q}{\ell}\left(1 + 2\ln \frac{\ell}{a}\right)$$

и, окончательно

$$C = \frac{q}{\varphi_2(a)} = \frac{\ell}{1 + 2\ln \frac{\ell}{a}} \approx \frac{\ell}{2\ln \frac{\ell}{a}}.$$

2. (Задача 2.9) Оцените свою электрическую емкость в пикофарадах.

Решение Используя предыдущее решение (емкость цилиндра), можно записать

$$C \simeq \frac{h}{2\ln h/R},$$

где $h \simeq$ рост (в сантиметрах), $2\pi R \simeq$ талия). Тогда получаем $C \simeq 20$ см ≈ 20 пФ.

3. (Задача 2.11) Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по закону $\varepsilon = \varepsilon_0(x + a)/a$, где a – расстояние между обкладками, ось X направлена перпендикулярно обкладкам, площадь которых S. Пренебрегая краевыми эффектами, найти емкость такого конденсатора и распределение в нем связанных зарядов, если к обкладкам приложена разность потенциалов U.

Решение Разделив диэлектрик внутри конденсатора на тонкие пластинки и считая каждую такую пластинку толщиной Δx плоским конденсатором с однородным диэлектриком, мы можем записать емкость такого конденсатора

$$\Delta C = \frac{\varepsilon S}{4\pi \Delta x}.$$

Как известно, полная емкость последовательно соединенных конденсаторов тогда равна

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{\Delta C},$$

или записывая это для бесконечно тонких пластин и заменяя суммирование на интегрирование, получим

$$\frac{1}{C} = \int \frac{4\pi dx}{\varepsilon S} = \frac{4\pi a}{S\varepsilon_0} \int\limits_0^a \frac{dx}{(x+a)} = \frac{4\pi a}{\varepsilon_0 S} \ln{(x+a)}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{4\pi a}{\varepsilon_0 S} \left\{\ln(2a) - \ln(a)\right\} = \frac{4\pi a}{\varepsilon_0 S} \ln 2,$$

следовательно

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi a \ln 2}.$$

Поскольку в объеме диэлектрика нет свободных зарядов, то в самом диэлектрике справедливо уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{своб}} = 0.$$

Так как в задаче мы пренебрегаем краевыми эффектами, то все величины зависят в ней только от x, а компоненты поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ имеют только x-компоненту, мы далее будем писать только E и D. Из приведенного выше уравнения следует, что $D = \text{const}$. Из граничного условия для границы металл-диэлектрик

$$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi \sigma_{\text{своб}}$$

для нормали из металла в диэлектрик с учетом того, что $D_{2n} = 0$, получаем

$$D = 4\pi \sigma_{\text{своб}} = 4\pi Q/S = 4\pi CU/S = \frac{U\varepsilon_0}{a \ln 2}.$$

Откуда получаем

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{U}{(x+a)\ln 2}$$

Плотность связанных зарядов в объеме определяется соотношением

$$\operatorname{div} E = 4\pi \rho_{\text{связ}},$$

откуда

$$\rho_{\text{связ}} = -\frac{CUa}{\varepsilon_0 S} \frac{1}{(x+a)^2}$$

А плотность связанных зарядов на границах металл-диэлектрик определяется из соотношения на границе

$$\sigma_{\text{связ}}|_{x=0} = \frac{E_{1n} - D_{1n}}{4\pi} = -\frac{CU}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0}\right),$$

а

$$\sigma_{\text{связ}}|_{x=a} = -\frac{E_{1n} - D_{1n}}{4\pi} = \frac{CU}{S}\left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_0}\right).$$

4. (Задача 2.13) Внутри сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b диэлектрическая проницаемость меняется по закону

$$\varepsilon\,(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \text{const} & \text{при} \quad a \le r < c \\ \varepsilon_2 = \text{const} & \text{при} \quad c \le r \le b \end{cases},$$

где $a < c < b$. Найти емкость конденсатора, распределение зарядов $\sigma_{\text{связ}}$ и полный связанный заряд в диэлектрике.

Решение Очевидно, что система представляет собой два последовательно соединенных сферических конденсатора. Полная емкость последовательно соединенных конденсаторов определяется соотношением

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{a-c}} + \frac{1}{C_{c-b}}.$$

Для нахождения емкости одного сферического конденсатора рассмотрим 2 вложенные одну в другую концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2, ($R_1 < R_2$). Пространство между ними заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Предположим, что вектор электростатической индукции $\mathbf{D}$ в шаровом слое между обкладками имеет только радиальную компоненту (в силу сферической симметрии задачи), и она выражается в виде

$$D = \frac{aQ_1}{r^2},$$

где Q_1– заряд внутренней обкладки. Граничное условие на границе радиуса R_1 можно рассматривать как следствие теоремы Гаусса.

$$D_{1n} = D|_{r=R_1} = 4\pi\sigma = \frac{Q_1}{R_1^2},$$

откуда следует $a = 1$. Таким образом, в зазоре между сферическими поверхностями

$$D = \frac{Q_1}{r^2}, \quad E = \frac{Q_1}{\varepsilon r^2}.$$

Разность потенциалов между обкладками равна

$$\Delta\varphi = \int\limits_{R_1}^{R_2} E\mathrm{d}r = \frac{Q_1}{\varepsilon}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q_1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Таким образом, емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{Q_1}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}.$$

Откуда получаем емкость 2-х последовательно соединенных конденсаторов

$$C = \left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}.$$

Распределение связанных зарядов получается из описанного выше решения с учетом того, что $D = \frac{Q_1}{r^2}$ во всем пространстве между обкладками, а электрическое поле в области $a < r < cE = D/\varepsilon_1$, а в области $< r < E = D/\varepsilon_2$. Тогда

$$\sigma_{\text{связ}}(a) = \frac{E_{1n} - D_{1n}}{4\pi} = -\frac{Q_1}{4\pi a^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right),$$
$$\sigma_{\text{связ}}(c) = \frac{E_{c+} - E_{c-}}{4\pi} = \frac{Q_1}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right),$$
$$\sigma_{\text{связ}}(b) = \frac{Q_1}{4\pi b^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right).$$

где Q_1 – заряд внутренней обкладки.