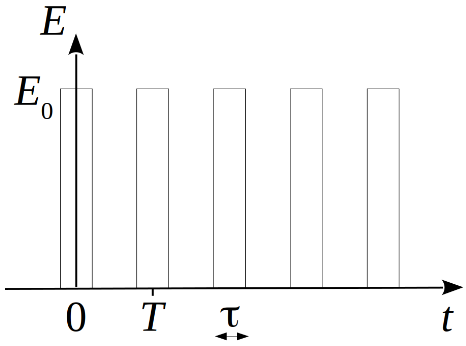
Задача.

Найти спектральную плотность энергии сигнала, представляющего собой функцию



$$f(t) = \begin{cases} E_0, & -\tau/2 \leqslant t \leqslant \tau/2, \\ 0, & \tau/2 < t < T - \tau/2, \end{cases}$$

повторенную N раз с периодом T.

Решение.

Преобразование Фурье от одиночного центрированного импульса равно (см. решение аналогичного примера 2.2(в) в задачнике Меледина, Черкасского, ч. 2):

$$f_{\omega 1} = \frac{\tau E_0}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2}.$$

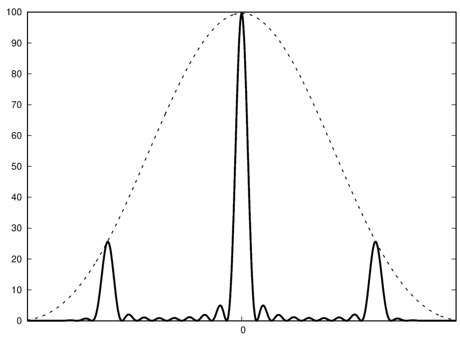
Применив теорему о сдвиге к последовательности эквидистантно расположенных прямоугольных импульсов, получим преобразование Фурье заданной последовательности в виде суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем $e^{i\omega T}$:

$$f_\omega = f_{\omega 1} \frac{1 - e^{iN\omega T}}{1 - e^{i\omega T}} = \frac{\tau E_0}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \cdot \frac{1 - e^{iN\omega T}}{1 - e^{i\omega T}}.$$

Квадрат модуля $\hat{f}_\omega$ равен

$$I(\omega) = \frac{\sin^2 \frac{N\omega T}{2}}{\sin^2 \frac{\omega T}{2}} I_1(\omega) = \frac{\sin^2 \frac{N\omega T}{2}}{\sin^2 \frac{\omega T}{2}} \left(\frac{\tau E_0}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \right)^2, \tag{1}$$

где $I_1(\omega) = |\hat{f}_{\omega 1}|^2$ – спектральная плотность энергии одиночного импульса.



На рисунке приведен пример $I(\omega)$ для $N = 9$.

Отметим характерные свойства функции $I(\omega)$.

1. Нули знаменателя (1) задают положение *главных* максимумов. Величина $I_{max} = N^2 I_1(\omega)$ в них определяется огибающей sinc^2 (пунктирная кривая на рисунке).

2. Между главными максимумами располагаются *дополнительные* максимумы. Дополнительные максимумы находятся примерно посередине между нулями числителя, кроме интервалов между главными максимумами и соседними с ними нулями, где дополнительные максимумы отсутствуют. Число нулей числителя на закрытом интервале между двумя соседними главными максимумами составляет $N + 1$. Число нулей $I(\omega)$ на этом интервале $N - 1$ (вычли две точки, в которых нули числителя приходятся на главные максимумы). Поэтому число дополнительных максимумов равно $N - 2$.

3. Значение первого дополнительного максимума при $N \gg 1$ равно

$$I_{1\text{доп}} = I|_{\frac{N\omega T}{2} = \frac{3\pi}{2N}} \approx \left(\frac{2}{\omega T} \right)^2 = \frac{4N^2}{9\pi^2} I_1 \approx \frac{I_{max}}{22}.$$

До середины между главными максимуми значения в дополнительных максимумах монотонно убывают с увеличением их индекса приблизительно до $\frac{I_{max}}{N^2}$, затем, при приближении к соседнему главному максимуму, нарастают.