Домашняя работа к занятию 4

1.1 Убедитесь, что уравнение $\cos\frac{x}{y}dx + (1 + \sin\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y})dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах и найдите его общий интеграл.

1.2 Решите уравнение, выделяя интегрируемые комбинации:

$$e^{xy}(xdy + ydx) + \frac{x}{y^3}(ydx - xdy) = 0$$

1.3 Найдите интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ и сведите уравнение $2(x^2y + 1)dx + (x^3 + xy)dy = 0$ к уравнению в полных дифференциалах.

Решите уравнения **2.1 — 2.2**, подобрав интегрируемые комбинации.

2.1 $(2xy\,dx + x^2dy)(xy^2 + 1) = (x^2y + 1)(y^2dx + 2xy\,dy)$

2.2 $y\cos x(\sin^2 y\,dx + x\sin 2y\,dy) + (\cos x\,dy - y\sin x\,dx) = 0$

2.3 Решите уравнение $(2xy + 3y\ln^2 y)dx = 2x\ln y dy$, подобрав интегрирующий множитель вида $\mu = x^a y^b$

3.1 Решите уравнение $(x\,dy - y\,dx)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, переходя к полярным координатам.

3.2 Покажите, что интегрирующий множитель однородного уравнения $M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0$ равен $\dfrac{1}{xM(x;y) + yN(x;y)}$.

3.3 Покажите, что если уравнение $M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0$ является однородным и уравнением в полных дифференциалах одновременно, то его общий интеграл имеет вид $x\cdot M(x;y)\,dx + y\cdot N(x;y)\,dy = C$.

Ответы и указания

1.1 Общий интеграл $y(1+\sin\dfrac{x}{y})=C$

1.2 *Указание*: $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.
Ответ: общий интеграл $2e^{xy}+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=C$

1.3 *Указание*: Умножая на $\mu(x)=\dfrac{1}{x}$, получаем уравнение в полных дифференциалах $2(xy+\dfrac{1}{x})dx+(x^2+y)dy=0$. При этом теряется решение $x\equiv 0$.
Ответ: общий интеграл уравнения $2x^2y+y^2+\ln x^4=C$ и $x\equiv 0$.

2.1 *Указание*: $u=xy^2$, $v=x^2y$.
Ответ: общий интеграл $(xy^2+1)=C(x^2y+1)$, а также $x^2y+1=0$.

2.2 *Указание*: $u=y\cos x$, $v=x\sin^2 y$.
Ответ: общий интеграл $x\sin^2 y+\ln|y\cos x|=C$, а также $y\cos x=0$.

2.3 *Указание*: домножив дифференциальное уравнение на $\mu=x^ay^b$, запишем условие того, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. После деления на x^ay^b получаем:

$$2(b+1)+6\ln y+3(b+1)\ln^2 y=-2(a+1)\ln y$$

Отсюда $b+1=0$, $-2(a+1)=6$. Таким образом, $\mu=\dfrac{1}{x^4y}$.

Ответ: общий интеграл $x+\ln^2 y=Cx^3$.

3.1 *Указание*: в полярных координатах уравнение принимает вид $d\varrho=\pm\varrho\sqrt{\varrho^2-1}d\varphi$; его общий интеграл $\arcsin\dfrac{1}{\varrho}=\pm\varphi+C$, а также $\varrho\equiv 1$. Возвращаясь к декартовым координатам, получаем семейство прямых $y\cdot\cos C+x\cdot\sin C=1$, их огибающая — окружность $x^2+y^2=1$.