

### Задача

Экспонирование и восстановление голограммы осуществляется плоскими опорными пучками на длине волны  $\lambda$  и  $\lambda' = \alpha\lambda$  соответственно. Определить тип, положение и размеры изображений.

### Решение:

Пусть опорный  $v$  и восстанавливающий  $v'$  пучки горизонтальны. Тогда

$$v(z, t) = b e^{i(kz - \omega t)}, \quad v'(z, t) = b' e^{i(k'z - \omega' t)}.$$

Рассмотрим точку предмета с координатами  $(x_0, z_0)$ ,  $z_0 < 0$  (слева от плоскости  $z = 0$  голограммы). Предметная волна от точечного источника во всем пространстве с точностью до постоянной фазы \*:

$$u(x, z, t) = a \exp i \left( k \frac{(x - x_0)^2}{2(z + |z_0|)} + kz - \omega t \right),$$

а в плоскости голограммы:

$$u(x, 0, t) = a \exp i \left( k \frac{(x - x_0)^2}{2|z_0|} - \omega t \right).$$

Часть  $E_1 = v^* u v'$  волны при восстановлении, сразу за голограммой (при  $z = +0$ ), равна:

$$E_1(x, 0, t) = v^*(x) u(x) v'(x, t) = a b b' \exp i \left( k \frac{(x - x_0)^2}{2|z_0|} - \omega' t \right).$$

Та же волна справа от голограммы при восстановлении:

$$E_1(x, z, t) = a b b' \exp i \left( k \frac{(x - x_0)^2}{2(z + |z_0|)} + k'z - \omega' t \right)$$

(решение с  $-k'z$  отброшено, так как описываемая этим решением волна распространяется справа налево, то есть не от голограммы, а к ней).

Если представить фазу полученной волны в виде

$$k' \frac{\alpha(x - x_0)^2}{2(z + |z_0|)} + k'z - \omega' t = k' \left( \frac{(x - x_0)^2}{2(z + |z_0|/\alpha)} + z - ct \right),$$

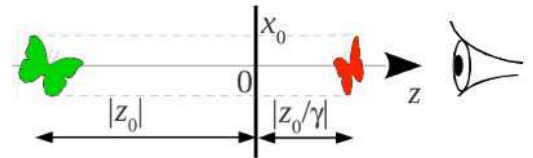
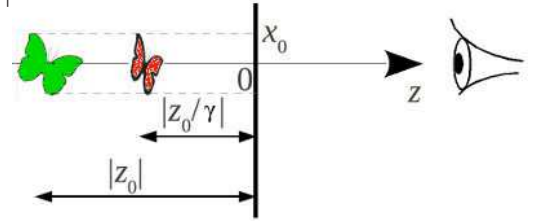
то станет видно, что она описывает волну от точечного источника с координатами  $(x'_0, z'_0) = (x_0, -\frac{|z_0|}{\alpha})$  (мнимое изображение).

Значения  $x_0, z_0$  выбирались произвольными, поэтому полученный результат применим к любой точке предмета. Получается, что размер мнимого изображения по  $x$  не изменяется, а по  $z$  уменьшается в  $\alpha$  раз.

Аналогично можно получить часть  $E_2(x, z, t) = v u^* v'$  волны при восстановлении:

$$E_2(x, z, t) = a b b' \exp i \left( -k \frac{(x - x_0)^2}{2(z - |z_0|)} + k'z - \omega' t \right).$$

Фаза  $k' \left( -\frac{(x - x_0)^2}{2(z - |z_0|/\alpha)} + z - ct \right)$  описывает волну от точечного источника с координатами  $(x''_0, z''_0) = (x_0, +\frac{|z_0|}{\alpha})$  (действительное псевдоскопическое изображение).



\*Такой же фазой в параксиальном приближении обладает плоская волна  $\sim e^{i(kz - \omega t)}$ , прошедшая через рассеивающую линзу с фокусным расстоянием  $|z_0|$ . Линза расположена в плоскости  $z = 0$ , а ее оптическая ось лежит на прямой  $x = x_0$ .