Семинар 10 [17.10.2022]

Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду.

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}=f_0\left(x,y,u,u_x,u_y\right).$$

Детеримнант $D=b^2-ac$, характеристики

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{D}}{a},\quad\Rightarrow\quad\psi_\pm(x,y)=\mathrm{const}.$$

Типы уравнений:

1. Гиперболический: $D>0$. Замена $\xi=\psi_+(x,y)$, $\eta=\psi_-(x,y)$: первый канонический вид
$$u_{\xi\eta}=f_1\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right).$$
Замена $\alpha=(\xi+\eta)/2$, $\beta=(\xi-\eta)/2$: второй канонический вид
$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=f_2\left(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta\right).$$

2. Параболический: $D=0$. Замена $\xi=\psi_\pm(x,y)$, $\eta=\phi(x,y)$: канонический вид
$$u_{\xi\xi}=f_3\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right).$$

3. Эллиптический: $D<0$. Замена $\xi=\mathrm{Re}\psi_+(x,y)$, $\eta=\mathrm{Im}\psi_+(x,y)$: канонический вид
$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=f_4\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right).$$

Задачи

Задача 1

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду:
а) $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-3u_x-15u_y+27x=0$;
б) $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0$;
в) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-u=0$.

Задача 2

Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности и привести в этих областях к каноническому виду уравнение Трикоми:

$$u_{xx}+yu_{yy}=0.$$

Решения

Задача 1

Случай а):

$$u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-3u_x-15u_y+27x=0.$$

Здесь

$$a=1,\quad b=\frac{1}{2},\quad c=-2.$$

Таким образом

$$D=\frac{9}{4}>0,$$

– гиперболический тип. Уравнения характеристик

$$\frac{dy}{dx}=2,\quad \frac{dy}{dx}=-1,\quad \Rightarrow\quad \psi_+=y-2x,\quad \psi_-=y+x.$$

Сделаем замену переменных

$$\xi=y-2x,\quad \eta=y+x.$$

Можно убедиться, что якобиан

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3,$$

не является особенным. Тогда

$$u_x=-2u_\xi+u_\eta,\quad u_y=u_\xi+u_\eta,$$
$$u_{xx}=4u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},\quad u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},$$
$$u_{yx}=u_{xy}=-2u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

В итоге уравнение приобретает вид

$$u_{\xi\eta}+u_\xi+2u_\eta=\eta-\xi.$$

Случай б):

$$u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0.$$

Здесь

$$a=1,\quad b=1,\quad c=5.$$

Таким образом

$$D=-4<0,$$

– эллиптический тип. Уравнения характеристик

$$\frac{dy}{dx}=1\mp 2i,\quad \Rightarrow\quad \psi_\pm=y-x\pm 2ix.$$

Сделаем замену переменных

$$\xi=y-x,\quad \eta=2x.$$

Можно убедиться, что якобиан

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2,$$

не является особенным. Тогда

$$u_x = -u_\xi + 2u_\eta, \quad u_y = u_\xi,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi},$$
$$u_{yx} = u_{xy} = -u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}.$$

В итоге уравнение приобретает вид

$$u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = 8u.$$

Случай в):

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - u = 0.$$

Здесь

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 1.$$

Таким образом

$$D = 1 - 1 = 0,$$

– параболический тип. Уравнения характеристик

$$\frac{dy}{dx} = -1, \quad \Rightarrow \quad \psi = x + y.$$

Сделаем замену переменных

$$\xi = x + y, \quad \eta = y.$$

Можно убедиться, что якобиан

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

не является особенным. Тогда

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_y = u_\eta,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u_{\eta\eta},$$
$$u_{yx} = u_{xy} = u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

В итоге уравнение приобретает вид

$$u_{\xi\xi} + u_\xi + u_\eta + u_\eta - u = 0.$$

Задача 2

Уравнение Трикоми:

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0.$$

Здесь

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = y.$$

Таким образом

$$D = -y,$$

то есть в области $y < 0$ уравнение имеет гиперболический тип, а в области $y > 0$ – эллиптический. Уравнения характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-y}, \quad \Rightarrow \quad \psi_\pm = x \pm 2\sqrt{-y}.$$

В области $y<0$ выберем новые переменные

$$\xi = x + 2\sqrt{-y}, \quad \eta = x - 2\sqrt{-y},$$

причем $\xi - \eta > 0$, тогда

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{-y}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{-y}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{-y}},$$

то есть во всей области якобиан не имеет особенностей. Далее имеем

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}}\left(u_\xi - u_\eta\right),$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = \frac{1}{2(-y)^{3/2}}\left(u_\xi - u_\eta\right) + \frac{1}{y}\left(2u_{\xi\eta} - u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}\right).$$

В итоге:

$$u_{\xi\eta} + \frac{u_\xi - u_\eta}{2(\xi-\eta)} = 0.$$

Второй канонический вид можно получить заменой

$$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2} = x, \quad \beta = \frac{\xi-\eta}{2} = 2\sqrt{-y},$$

причем $\beta > 0$. Тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}u_\alpha + \frac{1}{2}u_\beta, \quad u_\eta = \frac{1}{2}u_\alpha - \frac{1}{2}u_\beta,$$

$$u_{\xi\eta} = u_{\eta\xi} = \frac{1}{4}u_{\alpha\alpha} - \frac{1}{4}u_{\beta\beta},$$

откуда

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{u_\beta}{\beta} = 0.$$

В области $y>0$ выберем новые переменные

$$\alpha = x, \quad \beta = 2\sqrt{y},$$

причем $\beta > 0$. Тогда

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{y}},$$

то есть во всей области якобиан не имеет особенностей. Далее имеем

$$u_x = u_\alpha, \quad u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}u_\beta,$$

$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha}, \quad u_{yy} = -\frac{1}{2y^{3/2}}u_\beta + \frac{1}{y}u_{\beta\beta}.$$

В итоге:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - \frac{u_\beta}{\beta} = 0.$$