Композиция отношений

Определение:

Композицией (произведением, суперпозицией) бинарных отношений (англ. *composition of binary relations*) $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ называется такое отношение $(R \circ S) \subseteq A \times C$, что: $\forall a \in A, c \in C : a(R \circ S)c \iff \exists b \in B : (aRb) \land (bSc)$.

Примером такого отношения может служить отношение на некотором множестве A населенных пунктов $R \subseteq A \times A$ — отношение "можно доехать на поезде", а $S \subseteq A \times A$ — отношение "можно доехать на автобусе". Тогда отношение $R \circ S \subseteq A \times A$ — отношение "можно добраться из пункта А в пункт Б, сначала проехав на поезде, а потом на автобусе (только по одному разу)".

Содержание

- 1 Степень отношений
- 2 Обратное отношение
- 3 Свойства
- 4 См. также
- 5 Источники информации

Степень отношений

Определение:

Степень отношения (англ. *power of relation*) $R^n \subseteq A \times A$, определяется следующим образом:

- $R^n = R^{n-1} \circ R$;
- $R^1 = R$;
- $R^0 = \{(x, x) \mid x \in A\}$;

В связи с этим понятием, также вводятся обозначения:

$R^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$ — Транзитивное замыкание (англ. *transitive closure*) отношения R;

$R^* = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} R^i$ — Транзитивно-рефлексивное замыкание отношения R

Обратное отношение

Определение:

Отношение $R^{-1} \subseteq B \times A$ называют **обратным** (англ. *inverse relation*) для отношения $R \subseteq A \times B$, если: $bR^{-1}a \iff aRb$

Определение:

Ядром отношения (англ. *kernel of relation*) R называется отношение $R \circ R^{-1}$

Свойства

Композиция отношений обладает следующими свойствами:

- Ядро отношения R симметрично: $a(R \circ R^{-1})b \iff b(R \circ R^{-1})a$
- Композиция отношений ассоциативна: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- Обратное отношение для отношения, являющемуся обратным к R есть само R : $(R^{-1})^{-1} = R$
- Обратное отношение к композиции отношений R и S есть композиция отношений, обратных к R и S : $(R \circ S)^{-1} = (S^{-1}) \circ (R^{-1})$
- Обратное отношение к объединению отношений R и S есть объединение отношений, обратных к R и S : $(R \cup S)^{-1} = (R^{-1}) \cup (S^{-1})$
- Обратное отношение к пересечению отношений R и S есть пересечение отношений, обратных к R и S : $(R \cap S)^{-1} = (R^{-1}) \cap (S^{-1})$

См. также

- Бинарное отношение
- Транзитивное замыкание

Источники информации

- Новиков Ф. А. — Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. — СПБ.: Питер, 2009 — 52 с.
- Wikipedia — Composition of relations (http://en.wikipedia.org/wiki/Composition_of_relations)

- UNC Charlotte — Lectures in Discrete Mathematics: Composition of Relations and Directed Graphs. (http://math2.uncc.edu/~hbreiter/m1165/Lecture10.pdf)