Домашняя работа к занятию 7

Решите задачи Коши.

1.1 $\begin{cases} xy'' + y' = x \\ y(-1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases}$ **1.2** $\begin{cases} 2y'' = (y')^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

2.1 $\begin{cases} xy\,y'' = 2x(y')^2 + y\,y' \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = -2 \end{cases}$ **2.2** $\begin{cases} y'' = (y')^2 + y^2y' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$

3.1 Решите задачу Коши $\begin{cases} m\ddot{x} = f(\dot{x}) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$ $(v_0 \neq 0,\ f(v_0) \neq 0).$

Убедитесь, что если $f(v_0) = 0$, то уравнение имеет решение $x = x_0 + v_0t$. Если при этом интеграл $\int\limits_{v_0}^{v} \frac{ds}{f(s)}$ сходится в точке v_0, то рассматриваемое уравнение не может описывать реальный физический процесс. Объясните, почему.

3.2 В момент времени $t = 0$ точка P находится на плоскости xOy в начале координат, а точка Q — на оси Oy на высоте h. Точка P начинает двигаться вдоль оси Ox с постоянной скоростью u, а точка Q устремляется к ней так, что ее вектор скорости всегда направлен в точку P и имеет постоянную длину v. Отношение скоростей $k = \frac{u}{v} < 1$.

Уравнение $yy'' = k \cdot (y')^2\sqrt{1 + (y')^2}$ описывает траекторию погони на плоскости xOy (штрих означает дифференцирование по x). Решите это уравнение.

Ответы и указания

1.1 *Указание*: понижаем порядок уравнения, полагая $y' = u(x)$.

Ответ: $y = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{1}{2}\ln(-x)$.

1.2 *Указание*: полагая $y' = p(y)$, получаем $2p \cdot p' = 1 + p^2$, откуда $dy = \frac{2pdp}{1+p^2}$. Если положить $y' = p(x)$, то $2p' = 1 + p^2$ и $dx = \frac{2dp}{1+p^2}$.

Отсюда $y = \ln(1 + p^2) + C_1$, $x = 2\operatorname{arctg} p + C_2$.

Ответ: $\begin{cases} x = 2\operatorname{arctg} p \\ y = \ln(1+p^2) \end{cases}$ или $y = -2\ln|\cos\frac{x}{2}| = -\ln\frac{1+\cos x}{2}$.

2.1 *Указание*: уравнение однородное, поэтому полагаем $u(x) = y'/y$. Это приводит нас к уравнению Бернулли $xu' = u + xu^2$. Его решение $\frac{1}{u} = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$

Из начальных условий $u(1) = -2$, следовательно $C = 0$. Интегрируя уравнение $\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x}$, получаем $x^2 y = D$

Ответ: $y = \frac{1}{x^2}$.

2.2 *Указание*: понижаем порядок уравнения, полагая $y' = u(y)$.

Ответ: $y = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) - 1$, где $x \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$.

3.1 Полагая $\dot{x} = v(t)$, приходим к уравнению $m\dot{v} = f(v)$. Отсюда $m\int\limits_{v_0}^{v}\frac{ds}{f(s)} = t - t_0$. Полагая $\dot{x} = v(x)$, получаем $mvv' = f(v)$. Отсюда $m\int\limits_{v_0}^{v}\frac{sds}{f(s)} = x - x_0$.

Ответ: $\begin{cases} t - t_0 = m\displaystyle\int\limits_{v_0}^{v} \frac{ds}{f(s)} \\ x - x_0 = m\displaystyle\int\limits_{v_0}^{v} \frac{sds}{f(s)} \end{cases}$

3.2 Дополним уравнение $yy'' = k \cdot (y')^2\sqrt{1+(y')^2}$ начальными условиями $y(0) = h$, $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x) = -\infty$.

Указание: введите параметр $y\,' = \operatorname{tg} p(y)$.

Ответ: кривая погони $x = \dfrac{kh}{1-k^2} - \dfrac{h}{2}\Big(\dfrac{1}{1-k}\big(\dfrac{y}{h}\big)^{1-k} - \dfrac{1}{1+k}\big(\dfrac{y}{h}\big)^{1+k}\Big)$.

Если $0 < k < 1$, то встреча произойдет в точке $x^* = \dfrac{kh}{1-k^2}$, время погони $t^* = x^*/u$.