Гл. 3. Интеграл Римана.
§ 3.1. Определение интеграла Римана и его свойства.
3.1.1. Определение интеграла Римана.

Определение 3.1 (разбиения и разбиения с выделенными точками)

Пусть $[a, b]$ — отрезок числовой прямой. Множество точек x_i, $i = 1, \dots, n+1$, таких, что $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, называют разбиением отрезка $[a, b]$ и обычно обозначают буквой P. Наибольшую из длин $\tau(P) = \max\limits_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \dots, n$, называют параметром разбиения P. Разбиение называют разбиением с выделенными точками, если в каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$, выбрана некоторая точка $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Разбиение с выделенными точками обозначают через (P, ξ).

Определений интеграла несколько, наиболее традиционный из них — интеграл Римана, поэтому если не сказано, о каком интеграле идет речь, то подразумевается интеграл Римана.

Определение 3.2 (интеграла Римана)

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — заданная на отрезке числовой прямой функция. Говорят, что f интегрируема по Риману и ее интеграл равен I, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения с выделенными точками (P, ξ), у которого $\tau(P) < \delta$, выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$.

Сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называют интегральной суммой Римана.

Интеграл обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будем обозначать через $\mathcal{R}[a, b]$.

Замечание 3.3

По форме определение интеграла Римана напоминает предел функции. Иногда говорят, что интеграл Римана — это предел интегральных сумм, и пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\tau(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Правда, этот предел понимается в некоем особом смысле, потому что в качестве аргумента выступает разбиение, а не числовой аргумент, и суммы неоднозначно определяются точками разбиения, там еще участвуют дополнительно точки из промежутков разбиения.

Замечание 3.4 (о геометрической интерпретации интеграла)

Изобразим координатную плоскость и нарисуем на ней график функции f. Отметим какое-то разбиение (P, ξ) отрезка $[a, b]$ с выделенными точками и для него составим интегральную сумму Римана. Её можно представить как площадь набора прямоугольников шириной $x_{i+1} - x_i$ и высотой $f(\xi_i)$. Что произойдет при уменьшении параметра разбиения, т. е. уменьшении длин составляющих его промежутков? При неограниченном уменьшении параметра разбиения интегральные суммы неограниченно приближаются к интегралу от функции f по $[a, b]$, а с геометрической точки зрения соответствующие площади наборов прямоугольников неограниченно приближаются к площади подграфика функции f. Поэтому интеграл ассоциируется с площадью подграфика функции. Если функция где-то отрицательна, то площади для этих участков берутся со знаком минус.

3.1.2. Интегральные суммы Дарбу.

Есть еще один подход к интегралу, близкий к изложенному, и ввиду его полезности мы его рассмотрим.

Определение 3.5 (интегральных сумм Дарбу)

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — заданная на отрезке функция. Для разбиения P отрезка $[a, b]$ определим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \Delta x_i,$$

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \Delta x_i.$$

Замечание 3.6

Для представления верхней или нижней суммы Дарбу на рисунке надо взять на каждом из промежутков разбиения прямоугольники с такими высотами, чтобы соответствующая часть графика целиком содержалась в построенном прямоугольнике для верхних сумм или целиком содержала такой прямоугольник для нижних. Ясно, что верхняя сумма Дарбу больше нижней, соответствующей тому же разбиению. А что произойдет при измельчении разбиения? В некотором смысле при измельчении разбиения верхние суммы убывают, а нижние возрастают. А именно, если есть два разбиения P_1, P_2 такие, что все точки первого содержатся во втором, т. е. $P_1 \subset P_2$, то $s(f, P_1) \leq s(f, P_2) \leq S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$. Естественно, что если при измельчении суммы неограниченно сближаются, то функция интегрируема.

Теорема 3.7 (критерий Дарбу)

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману на* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда* $\inf\limits_{P} S(f, P) = \sup\limits_{P} s(f, P) = I$ *и при этом* $I = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Без доказательства.

Упражнение 3.8

Доказать теорему 3.7.

Критерий Дарбу позволяет выяснять, интегрируема функция или нет, а также дает следующее необходимое условие интегрируемости.

Замечание 3.9 (о необходимом условии интегрируемости)

Для того чтобы заданная на отрезке функция была интегрируемой, необходимо, чтобы она была ограниченной. Иначе говоря, не надо пытаться проинтегрировать по Риману неограниченную функцию. Действительно, если функция интегрируема, то ее суммы Дарбу должны быть конечными. Однако если функция неограниченная, к примеру, сверху, то любая из ее верхних сумм Дарбу равна $+\infty$, так как в разбиении есть такой промежуток, на котором супремум функции равен $+\infty$. Тем самым конечного предела таких сумм нет.

Пример 3.10 (ограниченной неинтегрируемой по Риману функции)

Функция Дирихле на отрезке $[0, 1]$, определяется так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \text{ (рационально)}, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \text{ (иррационально)}. \end{cases}$$

Ясно, что точная верхняя граница значений этой функции на любом содержащемся в $[0, 1]$ промежутке равна 1, а точная нижняя — 0 (по той причине, что в каждом открытом промежутке есть как рациональное число, так и иррациональное). Стало быть, любая верхняя сумма Дарбу этой функции равна 1, а любая нижняя — 0, и разность между ними, равная всегда 1, не может стремиться к нулю. Значит, функция Дирихле не интегрируема по Риману.

3.1.3. Свойства интеграла Римана.

Теорема 3.11 (о линейности и аддитивности интеграла)

1. *(Линейность.) Если* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$, *при этом*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *(Аддитивность.) Если* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *то для любого* $c \in (a,b)$ *функция* f *интегрируема как по* $[a,c]$, *так и по* $[c,b]$, *при этом*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Без доказательства.

Упражнение 3.12

Доказать теорему 3.11. Оба утверждения теоремы 3.11 достаточно прозрачны с геометрической точки зрения. Так, если сложить две функции, то площади их подграфиков также сложатся, если умножить функцию на число, то площадь изменится пропорционально этому числу. Наконец, если подграфик разбить вертикальной прямой на две части, то площадь всего подграфика будет равна сумме площадей, полученных в результате разбиения частей.

Теорема 3.13 (об интегрируемости непрерывной и монотонной функций)

1. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и непрерывна, возможно, за исключением конечного множества точек, то она интегрируема на $[a, b]$.
2. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и монотонна, то она интегрируема на $[a, b]$.

Без доказательства.

Упражнение 3.14

Доказать теорему 3.13. Доказательство теоремы 3.13 опирается на критерий Дарбу (теорема 3.7). А при доказательстве первого утверждения обычно ещё используют теорему Кантора о равномерной непрерывности. С понятием равномерной непрерывности и теоремой Кантора можно ознакомиться в рекомендованной литературе.

Теорема 3.15 (о монотонности интеграла)

1. Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ *таковы, что* $f(x) \le g(x)$ *для любого* $x \in [a, b]$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, *то* $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ *и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Без доказательства.

Упражнение 3.16

Доказать теорему 3.15. Геометрически ясно, что если график одной из функций расположен не выше графика другой, то и площадь сохранит это сопоставление — у нижней функции она будет не больше чем у верхней.

Замечание 3.17

Иногда вместо свойства монотонности говорят о свойстве положительности интеграла в том смысле, что если функция неотрицательна на отрезке, то и интеграл от нее также неотрицателен. Ввиду линейности ясно, что монотонность и положительность означают одно и то же — монотонность следует из положительности в результате применения этого свойства к разности большей и меньшей функций.

Теорема 3.18 (первая теорема о среднем)

Пусть
1) функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$*;*
2) $g \in \mathcal{R}[a, b]$, $g(x) \geq 0$ *для любого* $x \in [a, b]$.
Тогда существует такое $\xi \in [a, b]$, *что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Замечание 3.19

Если $g(x) = 1$, то результат теоремы выглядит так: существует такое $\xi \in [a, b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$ и имеет простой геометрический смысл. Пусть для определенности f неотрицательна. Тогда площадь подграфика функции равна площади некоторого прямоугольника, высота которого расположена между наименьшим и наибольшим значениями функции.

Замечание 3.20

Теорему о среднем можно использовать для оценки интеграла от функции. А именно, если известны границы изменения функции $f(x)$, например $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a, b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

§ 3.2. Интеграл и первообразная.

В определении интеграла было существенно использовано то, что рассматривалась функция, заданная на отрезке, т. е. заранее предполагалось, что нижний предел интегрирования меньше верхнего. Полезно распространить определение интеграла на тот случай, когда это условие не выполнено. А именно, для $a < b$ по определению положим

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если $a = b$, то ясно, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Нетрудно показать, что при расширении определения интеграла сохраняется свойство его аддитивности: при естественном предположении об интегрируемости для любых a, b, c имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 3.21 (о связи интеграла и первообразной)

Пусть $f \in \mathcal{R}[a.b]$. *Положим*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(y)\,dy, \quad x \in [a,b].$$

Тогда
1) Функция $F(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$.
2) Если $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то* $F(x)$ *дифференцируема и* $F'(x) = f(x)$ *для любого* $x \in [a,b]$, *т. е.* $F(x)$ *является первообразной функции* $f(x)$.

Замечание 3.22

Условие непрерывности подынтегральной функции в утверждении 2) теоремы 3.21 существенно. Так, для функции $\operatorname{sgn} x$, разрывной в нуле, функция

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn} y \, dy$$

есть не что иное, как модуль: $F(x) = |x|$, который имеет производную во всех точках, кроме нуля.

Теорема 3.23 (формула Ньютона — Лейбница)

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$. *Тогда имеет место формула Ньютона — Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{1}$$

где F *— некоторая первообразная функции* f.

Формула Ньютона — Лейбница и интегрирование по частям дают еще один способ вывести формулу Тейлора, на этот раз с интегральным остаточным членом. Он позволяет оценивать остаток и наиболее удобен в применении.

Теорема 3.24 (формула Тейлора с интегральным остаточным членом)

Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ имеет на $[a,b]$ производные до порядка $n+1$ и $(n+1)$-я производная непрерывна. Тогда имеет место равенство, называемое формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt, \qquad (2)$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка из $[a,b]$.

Замечание 3.25

Из интегрального вида остаточного члена, применяя теорему о среднем, нетрудно вывести форму Лагранжа.

§ 3.3. Несобственный интеграл.

3.3.1. Несобственный интеграл в случае одной особенности.

Интеграл Римана определен для ограниченной функции на замкнутом ограниченном промежутке. Однако нередко возникает потребность интегрировать либо неограниченную функцию, либо функцию, заданную на неограниченном множестве. Опираясь на геометрическую интерпретацию интеграла, можно предложить такой путь распространения, особенно ярко видный в случае бесконечного промежутка вида $[a, +\infty)$. Можно рассматривать отрезки от левого конца интегрирования до какого-то конечного числа, и в предположении, что по любому такому отрезку интеграл есть, устремить правый конец к бесконечности. Если в итоге площадь подграфика на отрезках сойдётся к какому-то числу, его естественно считать площадью всего подграфика.

Рассмотрим промежуток $[a, \omega)$, где $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}}$, и определенную на $[a, \omega)$ функцию f. Говорят, что ω — особая точка функции f, если либо $\omega = +\infty$, либо f неограниченная в любой окрестности точки ω.
Определим понятие несобственного интеграла по отдельности для случая бесконечной и конечной особых точек, так будет нагляднее, хотя достаточно ясно, что это модификации одной и той же конструкции.

Определение 3.26 (несобственного интеграла)

1. Пусть функция f задана на ограниченном промежутке $[a,\omega)$ и $\omega \in \mathbb{R}$ — её особая точка. Предположим, что на любом отрезке $[a,b] \subset [a,\omega)$ функция f интегрируема. Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to\omega} \int_a^b f(x)\,dx,$$

то говорят, что f интегрируема в несобственном смысле по промежутку $[a,\omega)$, а само значение предела называют несобственным интегралом от f по $[a,\omega)$ и обозначают символом $\int_a^\omega f(x)\,dx$.

2. Пусть функция f задана на промежутке $[a, +\infty)$. Предположим, что на любом отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$ функция f интегрируема. Если существует конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

то говорят, что f интегрируема в несобственном смысле по промежутку $[a, +\infty)$, а само значение предела называют несобственным интегралом от f по $[a, +\infty)$ и обозначают символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Если конечного предела в определении несобственного интеграла не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Мы будем рассматривать функцию, заданную на промежутке вида $[a, \omega)$. Все утверждения очевидным образом переносятся на промежуток вида $(\omega, a]$.

Далее будем использовать обозначение $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ для несобственных интегралов как в случае конечного промежутка, так и бесконечного, где ω — особая точка.

Первый вопрос, возникающий при рассмотрении несобственного интеграла, — вопрос о его сходимости. В принципе, поскольку он был определен как предел функции $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, казалось бы, можно использовать все общие теоремы о существовании предела для ответа на вопрос, сходится или нет несобственный интеграл. Однако проблема в том, что исследуется предел не самой функции, а её интеграла $F(b)$ как функции верхнего предела, и использовать регулярные средства можно только в том случае, если есть возможность выразить этот интеграл, например, с использованием первообразной. Так как вопрос нахождения первообразной не столь прост, сколь хотелось бы, надо иметь набор средств, позволяющий по информации о подынтегральной функции судить, сходится интеграл или нет. Такого рода достаточные условия далее будут доказаны и названы признаками сходимости несобственного интеграла.

Второй вопрос — о нахождении интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна, то значение интеграла находится по формуле Ньютона — Лейбница с той лишь разницей, что в особой точке берется не значение, а предел:

$$\int_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega} F(b) - F(a).$$

Несобственный интеграл может сходиться либо за счет скорости роста или убывания функции (в зависимости от того, конечна особая точка или бесконечна), а также за счет компенсации участков, где она положительна, участками, где она отрицательна. Мы будем различать эти ситуации в соответствии со следующим определением.

Определение 3.27 (абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла)

Говорят, что интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл от модуля подынтегральной функции, т. е. интеграл $\int\limits_a^{\omega} |f(x)|\,dx$. Если интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он сходится условно.

Ясно, что для положительных функций сходимость равносильна абсолютной сходимости.

Теорема 3.28 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла)

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $B \in (a,\omega)$, *что для любых* $b_1, b_2 \in (B,\omega)$ *выполнено неравенство* $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Условие Коши для несобственного интеграла с использованием кванторов выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a,\omega)\ \forall b_1, b_2 \in (B,\omega)\ \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Замечание 3.29 (о пределе в случае несобственного интеграла)

Одной из особенностей рассматриваемого случая несобственного интеграла является то, что ω — правый конец промежутка, стало быть, предел рассматривается всегда слева. Напомним, что критерий Коши для функций был у нас сформулирован в случае (двустороннего) предела в конечной точке. Модификация условия Коши для левостороннего предела функции $F : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ в конечной точке $\omega \in \mathbb{R}$ выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in (a, \omega)$$
$$\left(\begin{cases} \omega - \delta < x_1 < \omega \\ \omega - \delta < x_2 < \omega \end{cases} \Rightarrow |F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon \right).$$

Ясно, что найти подходящее δ в последнем высказывании равносильно возможности найти левый конец $\omega - \delta$, который можно обозначить отдельной буквой.

Тогда условие Коши будет выглядеть так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a, \omega)\ \forall x_1, x_2 \in (B, \omega)\ |F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon.$$

Кстати, в таком виде условие Коши подходит и для бесконечной точки $\omega = +\infty$.

3.3.2. Абсолютная сходимость.

В этом пункте будем обсуждать сходимость интегралов от положительных функций. Для таких функций сходимость равносильна абсолютной сходимости. Сначала покажем, как абсолютная сходимость связана со сходимостью для функций без ограничений на знак.

Теорема 3.30 (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)

Абсолютно сходящийся интеграл сходится, т. е. если $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *также сходится*

Как отмечено выше, рассмотрение несобственного интеграла начинается с изучения его сходимости. Для начала покажем сходимость интегралов от некоторых конкретных функций. Затем докажем мажорантный признак и теорему сравнения для интегралов, которые позволят сводить вопрос сходимости интегралов от более сложных функций к изучению интегралов от более простых. Начнем с интегралов от некоторых простых функций.

Теорема 3.31 (об интегрировании основных особенностей)

1. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$, *сходится тогда и только тогда, когда* $\alpha > 1$.

2. Интеграл $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$, $0 < b < +\infty$, *сходится тогда и только тогда, когда* $\alpha < 1$.

3. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ *сходится при любом* $\alpha > 0$.

Степенные функции составляют тот набор функций, к которым будем сводить изучение сходимости несобственного интеграла от положительной функции с помощью следующей теоремы.

Теорема 3.32 (мажорантный признак и теорема сравнения)

Пусть функции $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ неотрицательны и интегрируемы по любому промежутку $[a, b] \subset [a, \omega)$. Тогда
1. (Мажорантный признак.) Если $0 \le f(x) \le g(x)$ по крайней мере для x из некоторой окрестности точки ω и интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ также сходится, а если интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ тоже расходится.
2. (Признак сравнения.) Если функции f и g асимптотически эквивалентны при $x \to \omega$, т. е. $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то интегралы $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 3.33

Исследовать сходимость интегралов

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$
2. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$
3. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^4)^{1/2}}\, dx.$

3.3.3. Условная сходимость.

Функцию, которая меняет знак на промежутке интегрирования, нередко можно представить в виде произведения $f(x)g(x)$, где $f(x)$ меняет знак, а $g(x)$ нет, но обладает каким-то свойством, способствующим сходимости интеграла от произведения, типа монотонности и сходимости к нулю.

Теорема 3.34 (признаки Абеля и Дирихле для несобственных интегралов)

Пусть функции $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ *интегрируемы на каждом промежутке* $[a, b] \subset [a, \omega)$. *Если выполнен хотя бы один из наборов условий*

(D1) функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *ограничена,*

(D2) функция $g(x)$ *монотонно стремится к нулю при* $x \to \omega$,

или

(A1) интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится,*

(A2) функция $g(x)$ *монотонна и ограничена,*

то интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ *сходится.*

Если выполнены условия (D1), (D2), то об утверждении теоремы говорят как о признаке Дирихле, если (A1), (A2), то — Абеля.

Доказательство в случае, когда f непрерывна, а g дифференцируема и имеет непрерывную производную.

Упражнение

Доказать теорему 3.34 без дополнительных условий.

Пример 3.35

Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

3.3.4. Случай нескольких особенностей.

Функция может иметь на промежутке несколько особенностей. Особой может оказаться конечная точка, в любой окрестности которой функция неограниченная, а может бесконечно удаленная точка. При наличии нескольких особенностей каждую из них надо рассматривать отдельно, и если все особенности интегрируемы, то говорят, что интеграл сходится. Точнее, если функция на промежутке (ω_1, ω_2) имеет в качестве особых только точки ω_1, ω_2, т. е. внутри интервала особенностей нет, то берут какую-либо точку $c \in (\omega_1, \omega_2)$, представляют интеграл как сумму интегралов по получившимся промежуткам:

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx = \int\limits_{\omega_1}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{\omega_2} f(x)\,dx$$

и исследуют сходимость каждого из получившихся интегралов с одной особенностью.

Если особой точкой оказывается внутренняя точка интервала, т. е. функция рассматривается на объединении $[a, \omega) \cup (\omega, b]$, то интеграл по $[a, b]$ разбивают на сумму интегралов по $[a, \omega)$ и $(\omega, b]$, в каждом из которых одна особенность:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^b f(x)\,dx.$$

В любом случае ситуацию приводят к случаю одной особенности и сходимость интеграла означает сходимость всех участвующих в процессе интегралов.

Пример 3.36

Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$.

3.3.5. Сходимость несобственного интеграла в смысле главного значения.

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет особенность во внутренней точке $c \in (a, b)$. При изучении интеграла в такой ситуации надо разбить промежуток на два, представить интеграл в виде суммы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

и исследовать каждый из интегралов отдельно. Если они оба сходятся, то весь интеграл сходится. Однако есть подход, при котором эти интегралы рассматриваются не по-отдельности, а совместно, и иногда в сумме они могут дать сходящийся интеграл, даже если каждый из них расходится. Ещё одна ситуация, в которой работает этот подход, это интегрирование по всей числовой прямой.

Определение 3.37 (сходимости несобственного интеграла в смысле главного значения)

1. Говорят, что интеграл от функции $f(x)$ по ограниченному отрезку $[a, b]$ с одной особой точкой $c \in (a, b)$ сходится в смысле главного значения, и используют указанное ниже обозначение, если существует конечный предел

$$v.p. \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right).$$

2. Говорят, что интеграл от функции $f(x)$ по всей числовой прямой, который не имеет конечных особых точек, сходится в смысле главного значения, и используют указанное ниже обозначение, если существует конечный предел

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Пример 3.38

1. $v.p. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$.
2. $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$.

§ 3.4. Эйлеровы интегралы: Γ-функция и B-функция.

Определение 3.39 (Γ- и B-функций)

Гамма- и бета-функции $\Gamma(\alpha)$ и $B(\alpha, \beta)$ определяются следующим образом:

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \qquad \alpha > 0,$$

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Это так называемые специальные функции в том смысле, что они не выражаются через элементарные. Они встречаются в приложениях, так что неслучайны.

Забегая вперед, можно сказать, что гамма-функция — непрерывное продолжение факториала, а бета-функция — непрерывный аналог биномиальных коэффициентов.

Теорема 3.40 (о свойствах Г- и B-функций)

1. Функция $\Gamma(\alpha)$ определена при $\alpha > 0$.
2. Имеет место формула понижения $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$. В частности, $\Gamma(n+1) = n!$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ (по определению полагают $0! := 1$).
3. Имеет место формула дополнения $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$, $0 < \alpha < 1$.
4. Функция $B(\alpha, \beta)$ определена при $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
5. Имеет место связь между гамма- и бета-функциями: $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Пп. 3 и 5 теоремы 3.40. без доказательства.

Упражнение 3.41

Доказать пп. 3 и 5 теоремы 3.40.

Замечание 3.42 (свойства функции $\Gamma(\alpha)$)

Легко найти, что $\Gamma(1) = 1$, а по формуле понижения и $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$. Гамма-функция имеет производные любого порядка, иначе говоря, она бесконечно дифференцируема. Обоснование этого факта будет дано позже, в другом разделе, здесь можно воспользоваться тем, что вторая производная, равная $\Gamma''(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^2 x \, dx$, положительна, так что гамма-функция выпукла и где-то между единицей и двойкой у нее есть минимум. При стремлении аргумента к нулю она ведет себя как функция $\frac{1}{\alpha}$. Это следует из формулы понижения $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. В самом деле, записав последнее равенство так: $\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)$, заметим, что при $\alpha \to +0$ значения $\alpha + 1$ близки к 1, а для них значения $\Gamma(\alpha+1)$ также близки к 1. Следовательно, вблизи нуля гамма-функция имеет вертикальную асимптоту.

При удалении аргумента в бесконечность гамма-функция очень быстро возрастает, что видно по ее значениям в точках $n \in \mathbb{N}$. Можно также сказать, что она возрастает быстрее чем e^α, т. е. $\frac{e^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \to 0$ при $\alpha \to +\infty$.

Возникает естественный вопрос: насколько гамма-функция растет быстрее экспоненты? Укажем взаимоотношение между гамма-функций и экспонентой для натуральных значений аргумента.

Замечание 3.43 (формула Стирлинга)

Имеет место формула Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta(n)}{12}}$, где $\theta(n)$ — некоторое число такое, что $0 < \theta(n) < 1$. При использовании формулы Стирлинга можно использовать основную часть в правой части, а именно выражение $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, опуская множитель $e^{\frac{\theta(n)}{12}}$, поскольку он расположен между 1 и $e^{\frac{1}{12}}$ и влияния на асимптотику не оказывает. Ясно, что корень $\sqrt{2\pi n}$ большого роста не дает, основной рост — в выражении $\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Пример 3.44

1. Интеграл Эйлера — Пуассона или интеграл Гаусса

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

2. $$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\,dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right).$$

§ 3.5. Приложения интеграла.

3.5.1. Площадь подграфика.

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и неотрицательна. Тогда площадь подграфика
$F = \{(x, y) : \ x \in [a, b], \ 0 \le y \le f(x)\}$, представляющего собой криволинейную трапецию, находится по формуле

$$S(F) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Это получается из наших интуитивных представлений о площади и происходит следующим образом. Зададим какое-нибудь разбиение $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} = b$ и точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$. Интуитивно ясно, что площадь фигуры, составленной из прямоугольников, близка к площади, которую хотим определить и найти. При неограниченном уменьшении максимальной из длин промежутков разбиения площади объединения прямоугольников все лучше и лучше приближают площадь подграфика.

Мы не даем строгого определения площади, а лишь опираемся на интуитивные соображения, что площадь объединения прямоугольников неограниченно приближается к площади подграфика. Таким образом, собирая площади прямоугольников и измельчая разбиение, получаем, что, с одной стороны, суммы стремятся к интегралу, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int\limits_a^b f(x)\,dx$, а с другой эти суммы стремятся к площади подграфика, и мы договариваемся, что площадь подграфика равна указанному интегралу, т. е. $S(F) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пример 3.45 (площадь эллипса)

Площадь фигуры $F = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$, $a > 0$, $b > 0$: $S(F) = \pi ab$.

3.5.2. Площадь фигуры, ограниченной кривой в полярных координатах. Сначала коротко обсудим суть полярных координат. Точки плоскости можно описывать при помощи полярных координат, т. е. расстояния r от начала координат до данной точки и углом φ между положительным направлением оси абсцисс и лучом, идущим из начала координат через данную точку. Связь полярных координат с декартовыми задается равенствами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Можно дать выражения и для обратного отображения. С расстоянием r достаточно ясно, а именно $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а с углом хитрее ибо важно, в каком квадранте плоскости расположена точка. Так, если она в первом квадранте, то $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, в остальных надо добавлять соответствующий сдвиг.

При обращении к полярным координатам надо внимательно относиться к точке $(0,0)$, иногда её присутствие критично, иногда нет, это зависит от рассматриваемых задач. Во всяком случае в ней теряется однозначность, и это надо принимать во внимание.

Обратимся теперь к содержанию нашего вопроса. Пусть задана функция $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, которая непрерывна, неотрицательна и $f(0)=f(2\pi)$. Эта функция каждому углу φ сопоставляет расстояние от начала координат до точки на луче, соответствующем углу φ. Получается некоторая замкнутая кривая, состоящая из точек с полярными координатами $(f(\varphi),\varphi)$. Найдем площадь фигуры $F=\{(x,y)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi):\ \varphi\in[0,2\pi],\ 0\le r\le f(\varphi)\}$.

Разобьем промежуток $[0, 2\pi]$ точками $0 = \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n+1} = 2\pi$ на отрезки. В полярных координатах это соответствует разбиению фигуры на секторы. В каждом из участков разбиения выберем по точке: $\xi_i \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что площадь, ограниченная круговым сектором с центром в начале координат и радиусом ξ_i, будет близка к площади сектора нашей фигуры, и чем мельче будут исходные секторы, тем лучше приближение. Стало быть, сумма площадей круговых секторов приближает площадь фигуры. При измельчении качество приближения улучшается. Площадь одного кругового сектора радиусом $f(\xi_i)$ находится как часть площади круга, соответствующая доле $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ угла этого сектора относительно полного угла 2π.

Стало быть, сумма площадей равна $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\frac{\Delta\varphi_i}{2\pi}$ и по определению интеграла $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\frac{\Delta\varphi_i}{2\pi} \to \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} f^2(\varphi)\,d\varphi$.

С другой стороны, эта же сумма согласно нашим интуитивным представлениям стремится к площади фигуры, ограниченной данной кривой. Тем самым $S(F) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} f^2(\varphi)\,d\varphi$.

3.5.3. Масса и центр тяжести стержня.

Пусть функция $\rho : [0, l] \to \mathbb{R}$ непрерывна и положительна. Пусть ρ задает линейную плотность стержня длиной l. Считаем, что в поперечном сечении стержень однороден. Расположим его вдоль координатной прямой так, что его левый конец совпадет с началом координат, а правый соответствует точке l.

Как найти массу стержня? Как и выше, разбиваем отрезок на промежутки $[x_i, x_{i+1}]$, считаем, что длина каждого из отрезков небольшая, плотность в пределах такого отрезка меняется мало и можно считать её приближенно равной значению функции ρ в некоторой точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. При измельчении разбиения точность приближения будет возрастать. Масса стержня на каждом из отрезков разбиения приближенно равна произведению $\rho(\xi_i)\Delta x_i$. Сложив массы всех таких отрезков, получим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$, приближающую массу всего стержня. Устремляя к нулю максимальную из длин промежутков разбиения, в пределе, с одной стороны, получаем интеграл $\int\limits_0^l \rho(x)\,dx$, а с другой согласно нашим интуитивным представлениям — массу стержня. Тем самым масса стержня выражается указанным интегралом.

Перейдем к нахождению центра масс. Фиксируем в пределах стержня точку $c \in [0, l]$. Пусть стержень лежит горизонтально в однородном вертикальном гравитационном поле с ускорением g, т. е. на каждую точку действует сила тяжести. Найдём момент силы тяжести относительно точки c. Это делается так же, как при нахождении массы: отрезок $[0, l]$ разбиваем на небольшие куски, выбираем точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$, и считаем момент силы для каждого из кусков, предполагая, что часть стержня вдоль отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ однородна. На выбранную часть стержня действует сила тяжести, равная произведению массы на ускорение, т. е. $\rho(\xi_i)\Delta x_i g$. При подсчете момента силы надо выбрать направление относительно точки c. Будем считать, что для точек, расположенных справа от точки c, направление положительно, а слева — отрицательно.

Посчитаем моменты всех кусочков: $\sum\limits_{i=1}^{n} g\rho(\xi_i)\Delta x_i(\xi_i - c)$, где $\xi_i - c$ — плечо силы. Получили интегральную сумму Римана, которая по определению при устремлении к нулю максимальной из длин промежутков разбиения в пределе даст интеграл $g\int\limits_0^l \rho(x)(x-c)\,dx$, а с другой стороны, эта же сумма стремится к моменту M. Естественно появляется вопрос: как найти такую точку c, относительно которой момент нулевой? Она и является центром тяжести. Ясно, что надо приравнять к нулю интеграл, выражающий момент инерции. Получаем уравнение $\int\limits_0^l \rho(x)(x-c)\,dx = 0$. Воспользовавшись линейностью интеграла и разбивая его на два интеграла, а затем выражая c, получим формулу $c = \dfrac{\int\limits_0^l \rho(x)x\,dx}{\int\limits_0^l \rho(x)\,dx}$ для координаты центра тяжести.

Интеграл $\int_0^l \rho(x)\,dx$ называют нулевым моментом, так как в нем множитель x отсутствует или, можно сказать, присутствует в нулевой степени.

Интеграл $\int_0^l \rho(x)x\,dx$ называют первым моментом, потому что добавляется множитель x в первой степени. Можно определить второй момент, третий и т. д., но обычно ограничиваются вторым моментом. Так что масса — это нулевой момент, а центр тяжести — отношение первого момента к нулевому.

3.5.4. Объём тела вращения.

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — неотрицательная непрерывная функция, а тело B получается вращением графика f вокруг оси Ox, т. е. $B = \{(x, y, z) : \ x \in [a, b], \ 0 \leq y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$. Надо найти объем тела B.

Поступаем, как обычно: берём разбиение $a = x_1 < \ldots < x_{n+1} = b$ отрезка $[a, b]$. Для тела B это означает, что мы разрезаем его на части плоскостями $x = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, параллельными плоскости yOz и проходящими через точки разбиения. Возьмём какую-либо точку $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и рассмотрим цилиндр с основанием, радиус которого $f(\xi_i)$. Объём части тела между x_i и x_{i+1} приближенно равен объёму соответствующего цилиндра.

Сложив объемы всех таких цилиндров, придём к приближению объёма тела: $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Получилась сумма Римана, которая при стремлении к нулю максимальной из длин промежутков разбиения, с одной стороны, стремится к интегралу $\pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, а с другой стороны, на основании интуитивных представлений, — к объёму $V(B)$ тела B. Тем самым для объёма тела вращения получается формула

$$V(B) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пример 3.46 (объём шара)

Объём шара $B = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$: $V(B) = \frac{4\pi R^3}{3}$.

3.5.5. Длина кривой.

Определение 3.47 (кривой)

(Параметризованной) кривой в $\mathbb{R}^3$ называют множество точек $\gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) : \ t \in [a, b]\}$, где $x(t), y(t), z(t)$ — непрерывные функции, а отображение $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, взаимно однозначно. Это отображение называют параметризацией кривой, а функции $x(t), y(t), z(t)$ — компонентами параметризации.

Замечание 3.48

Всегда будем предполагать, что компоненты дифференцируемы и их производные непрерывны. Это предположение позволяет получать вектор скорости в каждый момент t. Производные $x'(t), y'(t), z'(t)$ характеризуют скорость изменения соответствующих координат и вместе они составляют вектор мгновенной скорости $v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Наша задача — найти длину этой кривой. Покажем, что длина кривой находится по формуле $l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$. Если кривая плоская, то последняя компонента отсутствует. Легко заметить, что под интегралом стоит длина вектора скорости.

Разобьём, как обычно, весь промежуток изменения времени на промежутки точками $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = b$. Если длины промежутков разбиения малы, то на каждом из промежутков можно считать скорость постоянной во всех его точках. Пусть на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ скорость равна $|v(\tau_i)|$, где τ_i — некоторая точка из $[t_i, t_{i+1}]$. Тогда длина пути, соответствующего промежутку $[t_i, t_{i+1}]$, приближенно равна $|v(\tau_i)|\Delta t_i$. Как обычно, просуммировав длины на всех промежутках разбиения, получим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} |v(\tau_i)|\Delta t_i$ и, с одной стороны, она стремится к интегралу $\int\limits_a^b |v(t)|\, dt$ при стремлении к нулю максимальной из длин промежутков разбиения, а с другой, исходя из интуитивных представлений, — к длине кривой. Если расписать длину кривой через координаты, придём к записанной выше формуле.

Замечание 3.49

Возникает вопрос: кривая на самом деле — это множество точек в $\mathbb{R}^3$, но задаём мы его при помощи параметризации, т. е. указываем закон прохождения по кривой. Ясно, что по той же кривой можно пройти по иному закону движения, с другой скоростью. Есть много параметризаций одной и той же кривой, они получаются одна из другой заменой переменной, т. е. заменой времени. Длина кривой была нами определена с использованием параметризации. Имея две параметризации и находя с их помощью длину кривой, мы получим один результат или могут быть разные? Иначе говоря, зависит длина кривой от выбранной параметризации или нет? Не должна, и это можно доказать.

Теорема 3.50 (о длине кривой)

Пусть $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, *и* $(\xi(\tau), \eta(\tau), \zeta(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, *— две параметризации одной и той же кривой* γ. *Пусть эти параметризации связаны следующим образом:* $x(t) = \xi(\tau(t))$, $y(t) = \eta(\tau(t))$, $z(t) = \zeta(\tau(t))$ *и* $\xi(\tau) = x(t(\tau))$, $\eta(\tau) = y(t(\tau))$, $\zeta(\tau) = z(t(\tau))$, *где функции* $t(\tau)$ *и* $\tau(t)$, *связывающие времена* t *и* τ, *дифференцируемы и их производные непрерывны. Тогда*

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\xi'(\tau))^2+(\eta'(\tau))^2+(\zeta'(\tau))^2}\,d\tau.$$

Замечание 3.51

Поясним замену времени. Изобразим кривую γ и отдельно два промежутка $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$. Пусть в момент $t \in [a, b]$ мы попадаем в точку $(x(t), y(t), z(t))$ кривой. В эту же точку мы попадем и в некоторый момент τ промежутка $[\alpha, \beta]$. Получаем отображение $\tau(t)$, которое каждому $t \in [a, b]$ взаимно однозначно сопоставляет некоторое $\tau \in [\alpha, \beta]$. Есть и обратное отображение $t(\tau)$. Возникает пересчет времени. Мы предполагаем, что функции $\tau(t)$ и $t(\tau)$ не только взаимно обратные, но также дифференцируемы и имеют отличные от нуля производные. Такое будет, если движение осуществляется плавно и без остановок.

Замечание 3.52

Если отображения между t и τ убывают, то в процессе доказательства изменится следующее. Во-первых, поменяются пределы интегрирования, а во-вторых, производная функции $t'(\tau)$ будет отрицательна, и эти два обстоятельства приведут к сохранению знака.

Пример 3.53 (длина графика функции)

Если кривая γ является графиком функции f, т. е. $\gamma = \{(x, f(x)) : \ x \in [a, b]\}$, то параметризация — это отображение $x \mapsto (x, f(x))$ и длина такой кривой находится по формуле $l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Пример 3.54 (длина дуги эллипса)

Длина четверти эллипса
$\gamma = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, $a \geq b > 0$:
$l(\gamma) = aE(k)$, где $k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса, показывающий его вытянутость, а $E(k)$ — эллиптический интеграл второго рода.

Можно параметризовать кривую как график функции, а можно с помощью угла. В качестве параметра можно взять угол φ между положительным направлением оси абсцисс и идущим через данную точку лучом, а можно с помощью угла ψ между положительным направлением оси ординат и этим лучом. Эти параметризации задаются формулами $x = a\cos\varphi = a\sin\psi$, $y = b\sin\varphi = b\cos\psi$. Будем использовать параметризацию с помощью угла ψ. Согласно формуле для длины кривой имеем

$$l(\gamma) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

Если a и b равны, под интегралом оказывается константа и он легко находится. Для различных a и b так не получается. Считая, что $a > b$, преобразуем выражение под корнем так, чтобы там остался синус:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}\, d\psi = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \psi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \psi}\, d\psi$$

$$= a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \psi}\, d\psi = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}\, d\psi.$$

Тем самым длина дуги эллипса является функцией от величины большей полуоси и эксцентриситета. Чтобы найти длину численно, надо посчитать интеграл.

Однако оказывается, что этот интеграл как функция от k в элементарных функциях не выражается. Как обычно, в тех случаях, когда полезный интеграл в элементарных функциях не выражается, для него придумывают название и дают обозначение.

Определение 3.55 (эллиптических интегралов)

Функции $F(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\,d\psi$, $E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$

$\Pi(c,k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+c\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\,d\psi$ называются (полными) эллиптическими интегралами первого, второго и третьего рода в форме Лагранжа соответственно.