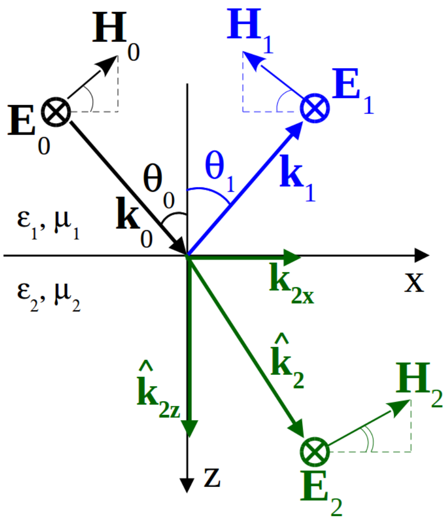
Полное внутреннее отражение



Задача:

Плоская монохроматическая TE-волна $\mathbf{E}_0 = -E_{0m}e^{i(k_{0x}x+k_{0z}z-\omega t)}\mathbf{e}_y$ падает под углом, превышающим угол полного внутреннего отражения, на плоскую $z = 0$ границу раздела (г.р.) двух прозрачных сред с параметрами ε_1, ε_2 и $\mu_1 = \mu_2 = 1$ соответственно. Индексы "0,1,2" при E и H относятся в падающей, отраженной и преломленной волнам соответственно. Ось z направлена из среды 1 в среду 2. Найти амплитудные коэффициенты отражения и пропускания.

Решение.

Граничные условия для тангенциальных компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

$$\begin{cases} E_{0\tau} & +E_{1\tau} & = & E_{2\tau} \\ H_{0\tau} & +H_{1\tau} & = & H_{2\tau} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь E_i и H_i - комплексные числа (напр., $E_0 = E_{0m}e^{i(k_{0x}x-\omega t+\phi_0)}$). Перепишем систему уравнений (1) с учетом $\mathbf{H} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\times\mathbf{E}]$ (в частности, $H_x = -\frac{c}{\omega}k_zE_y$):

$$\begin{cases} E_0 & +E_1 & = & E_2 \\ k_0E_0\frac{k_{0z}}{k_0} & -k_1E_1\frac{k_{1z}}{k_1} & = & k_2E_2\frac{k_{2z}}{k_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_0 & +E_1 & = & E_2 \\ k_{0z}E_0 & -k_{1z}E_1 & = & k_{2z}E_2 \end{cases}$$

Далее удобно перейти к переменным $\xi_1 = \frac{E_1}{E_0}$ и $\xi_2 = \frac{E_2}{E_0}$:

$$\begin{cases} \xi_1 & -\xi_2 & = & -1 \\ k_{0z}\xi_1 & +k_{2z}\xi_2 & = & k_{0z} \end{cases}$$

Запишем систему в матричной форме и найдем решение по правилу Крамера:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ k_{1z} & k_{2z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ k_{0z} \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{k_{0z}-k_{2z}}{k_{0z}+k_{2z}},\ \ \xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2k_{0z}}{k_{0z}+k_{2z}} \tag{2}$$

Выразим проекции волновых векторов так, чтобы получить зависимость от θ_0, n_1 и n_2:

$$k_{0z} = k_0\cos\theta_0,\ \ k_{2z} = \pm\sqrt{k_2^2-k_{2x}^2} = \pm\sqrt{k_0^2\frac{n_2^2}{n_1^2}-k_{0x}^2} = \pm ik_0\sqrt{\sin^2\theta_0-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \pm i|k_{2z}|. \tag{3}$$

Мы учли, что, поскольку угол падения больше угла полного внутреннего отражения, то подкоренное выражение $k_2^2-k_{2x}^2$ в (3) отрицательно. Это приводит к зависимости амплитуды волны $E_2 = E_{2m}\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k_2 r}-\omega t)} = E_{2m}\,\mathrm{e}^{\pm i(i|k_{2z}|z)}\,\mathrm{e}^{i(k_{2x}x-\omega t)}$ от z. Причем, в выражении для $k_{2z} = \pm i|k_{2z}|$ нужно выбрать знак "+", иначе амплитуда волны, распространяющейся в глубь среды 2, будет неограниченно возрастать.

С учетом (3) формулы (2) приобретают вид:

$$\xi_1 = \frac{\cos\theta_0 - i\sqrt{\sin^2\theta_0-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\theta_0 + i\sqrt{\sin^2\theta_0-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}},\quad \xi_2 = \frac{2\cos\theta_0}{\cos\theta_0 + i\sqrt{\sin^2\theta_0-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \tag{4}$$

Проанализируем результат (4).

1. Полученные выражения оказались комплексными. Это означает, что при отражении и преломлении волны возникает сдвиг по фазе. Этот сдвиг равен нулю при $\theta_0 = \theta_{\text{по}}$ и растет при дальнейшем увеличении угла падения.

2. Волна в среде 2 затухает по амплитуде с увеличением z. Таким образом, эта волна уже не является плоской. В то же время она удовлетворяет волновому уравнению и соотношению, справедливому для плоской монохроматической волны:

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k} \times \mathbf{E}],$$

но теперь компоненты вектора $\mathbf{k}$ – комплексные числа (на рисунке $\mathbf{k_2}$ условно показан ориентированным наклонно к горизонтали, чтобы отразить наличие у него также и $z-$компоненты; если рассматривать только действительные части от компонент вектора, то $\mathrm{Re}\{\mathbf{k_2}\} = \mathbf{k_{2x}}$). Волну можно назвать поперечной в смысле ортогональности векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ по отношению к $\mathbf{k}$. Кроме того, для этой волны $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$.

3. Магнитное поле электромагнитной волны в среде 2 можно представить в виде суперпозиции $\mathbf{H_{2z}}$ и $\mathbf{H_{2x}}$. Для второго слагаемого имеем

$$\mathbf{H}_{2x} = \frac{c}{\omega}[i\mathbf{k}_{2z} \times \mathbf{E}_{2y}],$$

где $k_{2z} = k_0\sqrt{\sin^2\theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$ – действительное число. Сама волна распространяется вдоль x и, таким образом, является в отношении $\mathbf{H_{2x}}$ продольной. Отметим еще одну особенность этой части электромагнитной волны: E сдвинуто по фазе относительно H на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому $z-$компонента вектора Пойтинга, усредненная по времени, равна нулю:

$$\langle S_{2z} \rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left\{E_y H_x^*\right\} \sim \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

т. е. средний по времени поток энергии в направлении z отсутствует. Сами поля при этом отличны от нуля, хотя и затухают в глубь среды 2.