Сопряжённый оператор

$$A^{*}$$

Милая счастливая звёздочка

Сопряжённый оператор

φ ← линейный оператор

φ^* ← сопряжённый оператор

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \ \forall \ x, y \in L$$

$\boxed{\text{Евклидово пространство}}$

или

$\boxed{\text{Унитарное пространство}}$

Сопряжённый оператор

A ← линейный оператор

A^* ← сопряжённый оператор

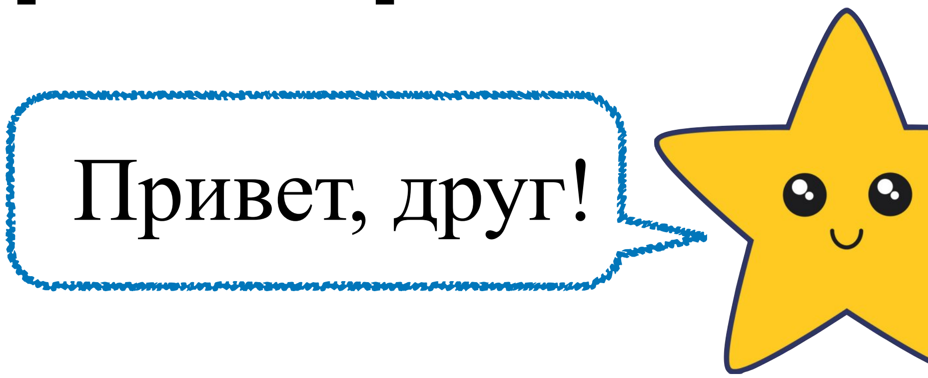
$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \forall\ x, y \in L$$

Евклидово пространство

или

Унитарное пространство

Нормальный оператор



$$\boxed{\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi}$$

Самосопряжённый оператор

$$\boxed{\varphi^* = \varphi}$$

В ОНБ

над $\mathbb{R}$: $\boxed{A^T = A}$ $\longleftarrow$ симметричная матрица

над $\mathbb{C}$: $\boxed{A^\dagger = A}$ $\longleftarrow$ эрмитова матрица

Собственные числа

$$A^* = A$$

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

$$\Big\Downarrow \quad A^* = A$$

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

$$\Big\Downarrow \quad x = y$$

Собственный вектор

$$(Ax, x) = (x, Ax)$$

$$\Big\Downarrow \quad Ax = \lambda x$$

$$(\lambda x, x) = (x, \lambda x)$$

$$\Big\Downarrow$$

$$(x, x) \neq 0$$

$$\bar{\lambda}(x, x) = \lambda(x, x) \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Собственные числа

$$A^* = A$$

$$* \longrightarrow \bar{\ }$$

$$A \longrightarrow \lambda$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Задача 1

ЖНФ
||
Найти канонический вид симметричной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}\, A = 0$

$\det A = -25$

Собств. числа:

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}\, A\, \lambda + \det A$

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 25 = 0$

$\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -5$

$$\Rightarrow \quad D_A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Задача 1

ЖНФ
||
Найти канонический вид симметричной матрицы

+

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

найти канонический базис ↘ ОНБ

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

матрица перехода

$\lambda_1 = 5$

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0, \quad x_1 = 2x_2$$

нормируем

$$\Rightarrow u_1 = (2,1)^T, \ |u_1| = \sqrt{5} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$$

$\lambda_2 = -5$

$$A + 5E = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = (-1,2)^T, \ |u_2| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)^T$$

$(u_1, u_2) = 0$

$\Rightarrow v_1, v_2$ – канонический базис.

Задача 2

№ 1588. Найти канонический вид эрмитовой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$$

$v_1 = (1+i, 1)^T$

$|v_1|^2 = \overline{(1+i)}(1+i) + 1 \cdot 1 = 1+1+1 = 3 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+i, 1)^T$

$v_1 = (1+i, 1)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

$|v_1| = \overline{(1+i)}\,(1+i) + 1 \cdot 1 = 3$

так не писать

Задача 2

№ 1588. Найти канонический вид эрмитовой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$$

\+
найти канонический
базис

Теорема

A – матрица самосопряжённого оператора

$\Downarrow$

1. Все собственные числа матрицы A вещественны.
2. Собственные вектора образуют ортогональный базис.

$\Downarrow$

Для всякого самосопряжённого оператора найдётся ОНБ, в котором его матрица имеет диагональный вид с вещественными числами на диагонали.

Косо

Самосопряжённый оператор

$$\boxed{\varphi^* = -\varphi}$$

В ОНБ

над $\mathbb{R}$: $\boxed{A^T = -A}$ ← Косо симметричная матрица

над $\mathbb{C}$: $\boxed{A^\dagger = -A}$ ← Косо эрмитова матрица

Собственные числа

$$A^* = -A$$

$$* \longrightarrow \bar{\ }$$

$$A \longrightarrow \lambda$$

$\bar{\lambda} = -\lambda \Rightarrow$ λ – чисто мнимое число

$$Re\lambda = 0$$

Задача 3

Найти канонический вид косоэрмитовой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr} A = 0$, $I_2 = 16 + 9 = 25$, $\det A = 0$

$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 25\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5i$, $\lambda_3 = -5i$

$$\Rightarrow D_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5i & 0 \\ 0 & 0 & -5i \end{pmatrix}$$

Задача 3

Найти канонический вид косоэрмитовой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 4x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = (4, 3, 0)^T \cdot \frac{1}{5}$$

$\lambda_2 = 5i$

$$A - 5iE = \begin{pmatrix} -5i & 0 & -3 \\ 0 & -5i & 4 \\ 3 & -4 & -5i \end{pmatrix}$$

$A_{11} = -25 + 16 = -9$

$A_{12} = 12$

$A_{13} = 15i$

$$u_2 = (A_{11}, A_{12}, A_{13})^T = (-9, 12, 15i)^T =$$

$$= 3 \cdot (-3, 4, 5i)^T$$

Задача 3

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} ?$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Найти канонический вид косоэрмитовой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 5i$

$$A - 5iE = \begin{pmatrix} -5i & 0 & -3 \\ 0 & -5i & 4 \\ 3 & -4 & -5i \end{pmatrix}$$

$A_{11} = -25+16 = -9$

$A_{12} = 12$

$A_{13} = 15i$

$u_2 = (A_{11}, A_{12}, A_{13})^T = (-9, 12, 15i)^T =$

$= 3 \cdot (-3, 4, 5i)^T$

$\sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(-3, 4, 5i)^T$

$Av_2 = \lambda_2 v_2 \Rightarrow A\overline{v_2} = \lambda_3 \overline{v_2} \Rightarrow \overline{v_2}$ - с.в. для λ_3

$\lambda_3 = -5i$

$v_3 = \overline{v_2} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(-3, 4, -5i)^T$

Задача 4

Найти канонический вид кососимметричной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 = (4,3,0)^T$

$u_2 = (-3,4,5i)^T$

$u_3 = (-3,4,-5i)^T$

$u_2 = \underline{(-3,4,0)^T} + i\,\underline{(0,0,5)^T} = \underline{\mathrm{Re}\, v_2} + i\,\underline{\mathrm{Im}\, v_2}$

$u_3 = \mathrm{Re}\, v_2 - i\,\mathrm{Im}\, v_2 \Rightarrow \langle u_2, u_3 \rangle = \langle \mathrm{Re}\, v_2, \mathrm{Im}\, v_2 \rangle \perp u_1$

$v_1 = \frac{1}{5}(4,3,0)^T$

$v_2 = \frac{1}{5}(-3,4,0)^T$ — канонический базис.

$v_3 = (0,0,1)^T$

Задача 4

Найти канонический вид кососимметричной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$Av_1 = 0$

$$Av_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -5v_3$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 5v_2$$

$$D_A = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \leftarrow$$

блочно-диагональная
два блока

Задача 4

Найти канонический вид кососимметричной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \in M_4(\mathbb{R})$ — кососимметр.

$\lambda_1 = 3i,\ \lambda_2 = -3i,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$

$$D_A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Теорема

A – матрица кососамосопряжённого оператора

$\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$

Для всякого косоэрмитова оператора найдётся ОНБ, в котором его матрица имеет диагональный вид с чисто мнимыми числами на диагонали.

Для всякого кососимметричного оператора найдётся ОНБ, в котором его матрица имеет блочно-диагональный вид с блоками

$$[0], \quad \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R}.$$

Изометрический оператор

$$\boxed{\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi = id}$$

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) = \rho(x, y)$$

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x - y)|$$

$$|\varphi(x)| = |x|$$

$$|\varphi(x)|^2 = (\varphi(x), \varphi(x)) = (x, \varphi^*\varphi(x)) = (x, x) = |x|^2$$

Изометрический оператор

$$\boxed{\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi = id}$$

В ОНБ

над $\mathbb{R}$: $\boxed{AA^T = A^TA = E}$ $\longleftarrow$ ортогональная матрица

над $\mathbb{C}$: $\boxed{AA^\dagger = A^\dagger A = E}$ $\longleftarrow$ унитарная матрица

Про столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = (A^1, A^2, A^3)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{11} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^1, A^1) & (A^1, A^2) & (A^1, A^3) \\ (A^2, A^1) & (A^2, A^2) & (A^2, A^3) \\ (A^3, A^1) & (A^3, A^2) & (A^3, A^3) \end{pmatrix}$$

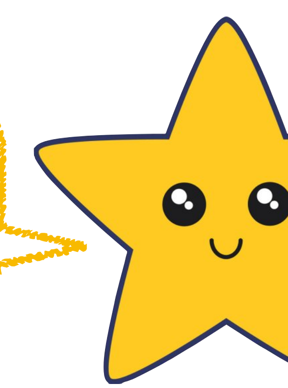
Про столбцы

$$A^TA = \begin{pmatrix} (A^1, A^1) & (A^1, A^2) & (A^1, A^3) \\ (A^2, A^1) & (A^2, A^2) & (A^2, A^3) \\ (A^3, A^1) & (A^3, A^2) & (A^3, A^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^1, A^2, A^3 – ОНБ

А строки?

А в случае $\mathbb{C}$?



Собственные числа

$$AA^* = A^*A = E$$

$$* \longrightarrow \bar{\ }$$

$$A \longrightarrow \lambda$$

$$\lambda\bar{\lambda} = \bar{\lambda}\lambda = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

$i,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},$

$\cos\varphi + i\sin\varphi,\ \boxed{e^{i\varphi}}$

Задача 5

Найти канонический вид ортогональной матрицы

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 6 & 2\sqrt{3} \\ 6 & 5 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$$

$B = kA$

$Bv = \lambda v \Leftrightarrow$

$kAv = \lambda v$

$Av = \underbrace{\frac{1}{k}\lambda}\cdot v$

$\lambda_A = \frac{1}{k}\lambda_B$

$v_A = v_B$

$B = 8A$

$\chi_B(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 + 64\lambda - 512 = 0$

$\lambda_{1,2} = 8$ и $\lambda_3 = -8$

$$\Rightarrow D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Теорема

A – матрица изометрического оператора

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

Для всякого унитарного оператора найдётся ОНБ, в котором его матрица имеет диагональный вид, причём по диагонали стоят числа, по модулю равные 1.

Для всякого ортогонального оператора найдётся вещественный ОНБ, в котором его матрица имеет блочно-диагональный вид с блоками

$$[1], [-1], \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Нормальный оператор

$$\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$$

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Спектральная теорема

$$AA^* = A^*A$$

$$\Updownarrow$$

Существует ОНБ из собственных векторов матрицы A.

$$\Updownarrow$$

Матрица A унитарно подобна диагональной матрице.

Задача 8

Найти канонический вид нормальной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalization

$M = S.J.S^{-1}$

where

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\, i\left(\sqrt{3} + -i\right) & \frac{1}{2}\, i\left(\sqrt{3} + i\right) \\ 1 & \frac{1}{2}\, i\left(\sqrt{3} + i\right) & -\frac{1}{2}\, i\left(\sqrt{3} + -i\right) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}\, i\left(\sqrt{3} + i\right) & -\frac{1}{6}\, i\left(\sqrt{3} + -i\right) & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6}\, i\left(\sqrt{3} + -i\right) & \frac{1}{6}\, i\left(\sqrt{3} + i\right) & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Другие операторы

Paranormal operator

From Wikipedia, the free encyclopedia

In mathematics, especially operator theory, a **paranormal operator** is a generalization of a normal operator. More precisely, a bounded linear operator T on a complex Hilbert space H is said to be paranormal if:

$$\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$$

for every unit vector x in H.

The class of paranormal operators was introduced by V. Istratescu in 1960s, though the term "paranormal" is probably due to Furuta.[1][2]

Every hyponormal operator (in particular, a subnormal operator, a quasinormal operator and a normal operator) is paranormal. If T is a paranormal, then T^n is paranormal.[2] On the other hand, Halmos gave an example of a hyponormal operator T such that T^2 isn't hyponormal. Consequently, not every paranormal operator is hyponormal.[3]

A compact paranormal operator is normal.[4]