Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x),$$

$$a_k(x) \in C[a;b], \quad a_0(x) \neq 0, \; x \in [a;b]$$

Приведем к виду

$$\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = f(x)$$

$$p(x)y'' + p(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + p(x)\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y = p(x)\frac{g(x)}{a_0(x)}$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{a_1}{a_0}$$

$$p(x) = \exp\Big(\int_a^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\Big)$$

$$\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = f(x)$$

$$p(x) \neq 0, \quad p(x) \in C^1[a;b]$$

$$q(x) \in C[a;b], \quad f(x) \in C[a;b]$$

Оператор Штурма — Лиувилля $L[y] = \big(p(x)y'\big)' + q(x)y$

$$L[y(x)] = f(x)$$

Стандартные краевые условия

$$B_l[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$$

$$B_r[y] \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$$

$$D(L) = \{y(x) \in C^2(a;b) \cap C^1[a;b],\ B_l[y] = 0,\ B_r[y] = 0\}$$

Постановка краевой задачи

Найти решение уравнения $L[y(x)] = f(x)$ из $D(L)$

$$L^{-1} : f(x) \mapsto y(x)$$

$kerL =$

$ImL =$

$$(u,v) = \int_a^b u(s)v(s)\,ds$$

$$(L[u],v) = (u, L[v]), \quad u \in D(L), \quad v \in D(L)$$

$$(L[u],v) = \int_a^b \big((pu')' + qu\big)v\,ds =$$

$$(u, L[v]) = \int_a^b u\big((pv')' + qv\big)\,ds =$$

Функция Грина

$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = 0; \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$y = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$$

$$C_1(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad C_2(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$C_1' = \cos x \cdot f(x); \quad C_2' = -\sin x \cdot f(x)$$

$$C_1(x) = -\int\limits_x^{\pi/2} \cos s \cdot f(s) ds$$

$$C_2(x) = -\int\limits_0^{x} \sin s \cdot f(s) ds$$

$$y(x) = -\int_0^x \cos x \sin s \cdot f(s) ds - \int_x^{\pi/2} \sin x \cos s \cdot f(s) ds$$

$$y(x) = \int_0^{\pi/2} G(x,s) f(s) ds$$

$$G(x,s) = \begin{cases} -\cos x \sin s, & 0 \leqslant x \leqslant s; \\ -\sin x \cos s, & s \leqslant x \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Функция Грина

$G(x,s)$ определена на $[a;b]\times[a;b]$,

$\forall s\in(a;b)$ удовлетворяет уравнению $L_x[G(x,s)]=0$, $x\neq s$

$\forall s\in[a;b]$ $G(x,s)$ удовлетворяет краевым условиям как функция от x

$G(x,s)$ непрерывна при $x=s$, а её первая производная имеет при $x=s$ скачок, равный $1/p(s)$, то есть

$$\begin{cases} G(s+0,s)=G(s-0,s) \\ G'_x(s+0,s)-G'_x(s-0,s)=1/p(s) \end{cases}$$

Если существует функция Грина краевой задачи, то $\forall f(x) \in C[a;b]$ решение краевой задачи существует и представляется в виде

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,s) f(s) ds$$

Построение функции Грина

Если $\ker L = \{0\}$, то функция Грина существует.

Лемма 1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения $L[y] = 0$, то $p(x) \cdot W(x) = const \neq 0$

$B_l[y_l] = 0$, $B_r[y_r] = 0$

Лемма 2. Если $\ker L = \{0\}$, то

$\dim\{y(x) \big| L[y] = 0, B_l[y] = 0\} = 1$,

$\dim\{y(x) \big| L[y] = 0, B_r[y] = 0\} = 1$

($y_l(x)$ и $y_r(x)$ определены с точностью до постоянного множителя)

Лемма 3. Если $\ker L = \{0\}$, то $y_l(x)$ и $y_r(x)$ линейно независимы

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)y_l(x), & a \leqslant x < s \\ c_2(s)y_r(x), & s < x \leqslant b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_l & y_r \\ y_l' & y_r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/p \end{pmatrix}$$

$$W \cdot p = A$$

$$c_1(s) = y_r(s)/W \cdot p$$
$$c_2(s) = y_l(s)/W \cdot p$$

$$W \cdot p = A$$

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{y_r(s)y_l(x)}{A}, & a \leqslant x < s \\[2em] \dfrac{y_l(s)y_r(x)}{A}, & s < x \leqslant b \end{cases}$$

Если $\ker L = \{0\}$, то $\forall f(x) \in C[a;b]$ решение краевой задачи единственно.

Теорема. Если $\ker L = \{0\}$, то $\forall f(x) \in C[a;b]$ решение краевой задачи $L[y(x)] = f(x)$, $y(x) \in D(L)$, существует, единственно и представляется в виде

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,s) f(s) ds$$

Вырожденный случай

Найти решение уравнения $L[y(x)] = f(x)$ из $D(L)$

$L[y] = \big(p(x)y'\big)' + q(x)y$ оператор Штурма — Лиувилля

$$D(L) = \{y(x) \in C^2(a;b) \cap C^1[a;b],\ \ B_l[y] = 0,\ \ B_r[y] = 0\}$$

$$B_l[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$$

$$B_r[y]\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$$

$$L^{-1} : f(x) \mapsto y(x)$$

Альтернатива Фредгольма

Если $\ker L \neq \{0\}$, то есть $\exists\ y_0(x) \neq 0$:

$$L[y_0(x)] = 0, \quad y_0(x) \in D(L)$$

$\| \ y_0(x) \ \| = 1$

$(u, v) = \int_a^b u(s)v(s)\, ds$

Лемма. Если $\ker L \neq \{0\}$, то $\dim \ker L = 1$

$$B_l[y_0] = \alpha_0 y_0(a) + \alpha_1 y_0'(a) = 0$$

$$B_l[y_1] = \alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a) = 0$$

$$\begin{pmatrix} y_0(a) & y_0'(a) \\ y_1(a) & y_1'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} y_0(a) & y_0'(a) \\ y_1(a) & y_1'(a) \end{pmatrix} = 0$$

$$W(a) = 0$$

Необходимое условие разрешимости

Если задача $L[y(x)] = f(x)$, $y(x) \in D(L)$ имеет решение, то $f(x) \perp y_0(x)$

$$L[y_*(x)] = f(x)$$

$$(f(x), y_0(x)) = (L[y_*(x)], y_0(x)) = (y_*(x), L[y_0(x)]) = 0$$

Если решение задачи $L[y(x)] = f(x)$, $y(x) \in D(L)$, существует, то оно не единственно.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения задачи $L[y(x)] = f(x)$, $y(x) \in D(L)$, то $y_2(x) = y_1(x) + Cy_0(x)$.

Для однозначной разрешимости наложим требование $y_*(x) \perp y_0(x)$

Лемма. Если $y_*(x)$ — решение задачи $L[y(x)] = f(x)$, $y(x) \in D(L)$, и $y_*(x) \perp y_0(x)$, то оно однозначно определено.

Теорема. Если $f(x) \perp y_0(x)$, то решение краевой задачи $L[y(x)] = f(x)$, $y(x) \in D(L)$, ортогональное $y_0(x)$, существует.

$$y(x) = \int\limits_a^b G_o(x,s) f(s) ds$$

Обобщенная функция Грина

$G_o(x,s)$ определена на $[a;b]\times[a;b]$,

$\forall s\in(a;b)$ удовлетворяет уравнению

$L_x[G_o(x,s)] = -y_0(x)y_0(s)$, $x\neq s$

$\forall s\in[a;b]$ $G_o(x,s)$ удовлетворяет краевым условиям как функция от x

$G(x,s)$ непрерывна при $x=s$, а её первая производная имеет при $x=s$ скачок, равный $1/p(s)$, то есть

$$\begin{cases} G_o(s+0,s) = G_o(s-0,s) \\ (G_o)'_x(s+0,s) - (G_o)'_x(s-0,s) = 1/p(s) \end{cases}$$

$$\int\limits_a^b G_o(x,s)y_0(x)dx = 0$$

Построение обобщенной функции Грина

$L[y_l(x)] = y_0(x)$, $B_l[y_l] = 0$

$L[y_r(x)] = y_0(x)$, $B_r[y_r] = 0$

Лемма. Функции $y_l(x) - y_r(x)$ и $y_0(x)$ образуют ФСР уравнения $L[y(x)] = 0$.

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)y_l(x) + c_2(s)y_0(x), & a \leqslant x < s \\ c_3(s)y_r(x) + c_4(s)y_0(x), & s < x \leqslant b \end{cases}$$

Теорема. Если $\ker L \neq \{0\}$, то $\forall\ f(x) \perp y_0(x)$ решение краевой задачи $L[y(x)] = f(x)$, $y(x) \in D(L)$, существует и дается формулой

$$y(x) = \int\limits_a^b G_o(x,s)f(s)ds + Cy_0(x), \quad C \in \mathbb{R}$$

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x),$$

$$a_k(x) \in C[a;b], \quad a_0(x) \neq 0, \; x \in [a;b]$$

Приведем к виду $\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = f(x)$

$$h(x) = \frac{1}{a_0(x)} \exp\Big(\int_a^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)}\, ds\Big)$$

$f(x) = h(x) \cdot g(x)$

$(u,v)_h = \int\limits_a^b h(x)\, u(x)\, v(x)\, dx$

Задача Штурма – Лиувилля

$L[y(x)] = \big(p(x)y'\big)' + q(x)y$, $y(x) \in D(L)$

Опр. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ — собств. значение оператора L, $y_0(x) \neq 0$ — собств. функция, если $L[y(x)] = \lambda\, y(x)$, $y(x) \in D(L)$

Задача Штурма – Лиувилля: найти собств. значения и собств. функции оператора L

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением, то оператор L невырожден

$\lambda = 0 \Rightarrow L[y(x)] = 0$, $y(x) \in D(L)$

оператор L невырожден $\Rightarrow$ существует функция Грина

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b G(x,s) y(s) ds$$

$$\mu y(x) = \int\limits_a^b G(x,s) y(s) ds$$

$$\mu y(x) = J[y(x)]$$

уравнение Фредгольма 2 рода

$G(x,s)ds$ — непрерывна $\Rightarrow J[y(x)]$ — компактный

$G(x,s)ds$ — симметрична $\Rightarrow J[y(x)]$ — самосопряженный

Свойства инт. уравнений Фредгольма 2 рода с симметрич. непрерывным ядром

1. Множество собств. значений не пусто

2. $\forall\delta > 0$ существует лишь конечное число собств. значений $|\mu| > \delta$

3. каждому собств. значению $\mu \neq 0$ отвечает конечное число лин. независимых собств. функций

4. множество собств. значений $\mu \neq 0$ можно упорядочить по невозрастанию модуля: $|\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant |\mu_3| \geqslant ... > 0$

5. все собств. значения вещественны

6. собств. функции, отвечающие различным собств. значениям, ортогональны в ск. произведении $(u, v) = \int_a^b u(s)v(s)\,ds$

7. если множество собств. значений конечно, то ядро $G(x, s)$ вырождено, то есть

$$G(x, s) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_k(x) y_k(s)$$

Свойства задачи Штурма-Лиувилля

1. Множество собств. значений не пусто

2. $\forall\ \delta > 0$ существует лишь конечное число собств. значений $|\lambda| < \delta$

3. каждому собств. значению отвечает конечное число лин. независимых собств. функций

4. множество собств. значений можно упорядочить по неубыванию модуля: $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \ldots$, причем $|\lambda_k| \to \infty$ (если собст. значений бесконечно много)

5. все собств. значения вещественны

6. собств. функции, отвечающие различным собств. значениям, ортогональны

Лемма. Кратность каждого собственного значения равна 1.

$$L[y(x)] = \lambda\, y(x)$$

$$L[y(x)] - \lambda\, y(x) = 0$$

$$\dim \ker(L - \lambda E) = 1$$

Лемма. Множество собств. значений счетно

Если конечно, то ядро вырождено

$$G(x,s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} y_k(x) y_k(s)$$

$$\frac{1}{\lambda_k} y_k(x) = J[y_k(x)] = \int_a^b G(x,s) y_k(s) ds$$

Лемма. Если $M = \max q(x)$, то $\forall\, k\ \lambda_k \leqslant M$

$$(py_k')' + qy_k = \lambda_k y_k$$

$$\int_a^b \big((py_k')' + qy_k\big) y_k \, ds = \lambda_k \int_a^b y_k^2 \, ds$$

$$\int_a^b \big((py_k')' + qy_k\big) y_k \, ds = \int_a^b (py_k')' y_k \, ds + \int_a^b qy_k^2 \, ds =$$

$$= py_k' y_k \Big|_a^b - \int_a^b p(y_k')^2 \, ds + \int_a^b qy_k^2 \, ds \leqslant \int_a^b qy_k^2 \, ds \leqslant M \int_a^b y_k^2 \, ds$$

Опр. Функция $g(x)$ – истокообразно представима, если $g(t) \in ImJ$, то есть для некоторой функции $f(s) \in C[a;b]$

$$g(x) = \int\limits_a^b G(x,s) f(s) ds$$

Т. Гильберта–Шмидта

Теорема. Если функция $g(x)$ истокообразно представима, то $g(x)$ можно разложить в ряд (Фурье) по собственным функциям оператора J, причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a; b]$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n y_n(x), \quad g_k = \frac{(g, y_k)}{(y_k, y_k)}$$

Теорема Стеклова

Если оператор L невырожден, $y_n(x)$ — собственные функции оператора L, то любая функция $g(x) \in C[a;b] \cap C^2(a;b)$, удовлетворяющая тем же краевым условиям, допускает разложение в равномерно сходящийся ряд (Фурье)

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n y_n(x),$$

$$g_n = \frac{(g, y_n)}{(y_n, y_n)} = \frac{\int\limits_a^b g(x) y_n(x) dx}{\int\limits_a^b y_n^2(x) dx}$$

$g(x) \in D(L)$

$L[g] = f$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow g = L^{-1}[f] = J[f]$

Если оператор L вырожден, то $\lambda = 0$ – собств. значение, y_0 – собств. функция

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n y_n(x),$$

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y(x)$$

$$a_k(x) \in C[a;b], \quad a_0(x) \neq 0,\ x \in [a;b]$$

Приведем к виду

$$\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = \lambda h(x)y(x)$$

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b G(x,s)h(s)y(s)ds$$

$$\sqrt{h(x)}y(x) = \lambda \int\limits_a^b G(x,s)\sqrt{h(x)}h(s)y(s)ds =$$

$$= \lambda \int\limits_a^b G(x,s)\sqrt{h(x)h(s)}(\sqrt{h(s)}y(s))ds$$

$$u(x) = \lambda \int\limits_a^b G_1(x,s)u(s)ds$$

$$(u_k, u_l) = \int\limits_a^b h(s)y_k(s)y_l(s)ds$$

Нули решений линейных однородных уравнений

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$a_k(x) \in C[a;b], \quad a_0(x) \neq 0,\ x \in [a;b]$$

$y(x) = \varphi(x) \cdot z(x)$

$z''(x) + q(x)z(x) = 0,\ q(x) \in C[a;b]$

Лемма. Если $z(x)$ — нетривиальное решение уравнения $z''(x) + q(x)z(x) = 0$ и $z(x_0) = 0$, $x_0 \in (a; b)$, то $z'(x_0) \neq 0$

Лемма. Если $z(x)$ — нетривиальное решение уравнения $z''(x) + q(x)z(x) = 0$, то оно имеет конечное число нулей на $[a; b]$

Т. сравнения (Штурма)

Пусть $u''(x) + A(x)u(x) = 0$ и $v''(x) + B(x)v(x) = 0$, причем $A(x) \leqslant B(x)$ на $[a; b]$. Тогда между соседними нулями любого нетривиального решения $u(x)$ лежит хотя бы один ноль любого нетривиального решения $v(x)$.

x_1 и x_2 — соседние нули решения $u(x)$

$u''v - v''u = (B - A)uv$

$u''v - v''u = (u'v - v'u)'$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (u''v - v''u)\,dx = (u'v - v'u)\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= (u'v)\Big|_{x_1}^{x_2} - (v'u)\Big|_{x_1}^{x_2} = u'v(x_2) - u'v(x_1) =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} (B - A)uv\,dx$$

Следствие. Если $A(x) \leqslant 0$ на $[a;b]$, то любое решение $u''(x) + A(x)u(x) = 0$ имеет на $[a;b]$ не более одного нуля

Следствие. Если $A(x) > 0$ на $[a; b]$, то нули любых линейно независимых решений уравнения $u''(x) + A(x)u(x) = 0$ перемежаются

Пусть u и v — линейно независимые решения уравнения

$u''(x) + A(x)u(x) = 0$ и $v''(x) + A(x)v(x) = 0$

x_1 и x_2 — соседние нули решения $u(x)$

Тогда $v(x_1) \neq 0$ и $v(x_2) \neq 0$

Следствие. Рассмотрим $z''(x) + q(x)z(x) = 0$, где $q(x)$ — непрерывна и $q(x) > 0$ на $[a; b]$. Пусть $M = \max q(x)$, $m = \min q(x)$. Если d — расстояние между соседними нулями решения $z(x)$, то

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant d \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

Уравнение Бесселя

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

$y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}}$

$$z'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)z = 0$$

$|\nu| = \frac{1}{2} \Rightarrow z'' + z = 0$

$$y(x) = C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$d = \pi$

$$z'' + \big(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\big) z = 0$$

$|\nu| < \frac{1}{2}$

$$v'' + (1 + \varepsilon) v = 0$$

$$z'' + \Big(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\Big) z = 0$$

$|\nu| > \frac{1}{2}$

$$v'' + (1 - \varepsilon) v = 0$$

Решение уравнений в виде степенных рядов

$$a_0(z)y'' + a_1(z)y' + a_2(z)y = 0$$

$$a_k(z),\ \ z \in U(z_0)$$

$$y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Определение. Точка z_0 — особая точка уравнения $a_0(z)y'' + a_1(z)y' + a_2(z)y = 0$, если $a_0(z_0) = 0$.

$$a_0(z)y'' + a_1(z)y' + a_2(z)y = 0$$

Если z_0 — не особая точка, то уравнение приводится к виду $y'' + A(z)y' + B(z)y = 0$, где $A(z)$ и $B(z)$ — аналитические функции в $U(z_0)$.

Теорема. Если $A(z)$ и $B(z)$ — аналитические функции в круге $|z - z_0| < R$, то задача Коши $y(z_0) = y_0$, $y'(z_0) = y_1$ имеет единственное аналитическое решение в круге $|z - z_0| < R$.

Определение. Точка z_0 — регулярная особая точка уравнения $y'' + A(z)y' + B(z)y = 0$, если в т. z_0 $A(z)$ имеет полюс порядка не выше 1, а $B(z)$ имеет полюс порядка не выше 2.

$A(z) = \frac{P(z)}{(z-z_0)}$, $B(z) = \frac{Q(z)}{(z-z_0)^2}$

$$y'' + \frac{P(z)}{(z - z_0)}y' + \frac{Q(z)}{(z - z_0)^2}y = 0$$

$$(z - z_0)^2 y'' + (z - z_0)P(z)y' + Q(z)y = 0$$

$$z^2 y'' + zP(z)y' + Q(z)y = 0$$

Обобщенный степенной ряд

$$y(z) = z^{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \quad c_0 \neq 0$$

$$z^2 y'' + zP(z)y' + Q(z)y = 0$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k z^k$$

$$y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda}$$

$$y'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$y''(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2}$$

$$z^2 y'' + P(z) z y' + Q(z) y = 0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda}+$$

$$+\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}p_k z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda}\Big)+$$

$$+\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}q_k z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}c_k z^{k+\lambda}\Big)=0$$

$$c_0[\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0]=0$$

Определяющее уравнение

$$\lambda(\lambda - 1) + P(0)\lambda + Q(0) = 0$$

$$c_n[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + p_0(n+\lambda) + q_0] + F(c_0; c_1; \ldots; c_{n-1}) = 0$$

$$g(t) = t(t-1) + p_0 t + q_0$$

$$c_n g(n+\lambda) + F(\ldots) = 0$$

Теорема. Если λ_1 и λ_2 — корни определяющего уравнения и $\lambda_1 - \lambda_2 \notin Z$, то существует два лин. независимых решения в виде обобщенных степенных рядов.