Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x),$$

$$a_k(x) \in C[a;b], \quad a_0(x) \neq 0, \ x \in [a;b]$$

Приведем к виду

$$\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = f(x)$$

$$p(x)y'' + p(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + p(x)\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y = p(x)\frac{g(x)}{a_0(x)}$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{a_1}{a_0}$$

$$p(x) = \exp\Big(\int_a^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\Big)$$

$$\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = f(x)$$

$$p(x) \neq 0, \quad p(x) \in C^1[a;b]$$

$$q(x) \in C[a;b], \quad f(x) \in C[a;b]$$

Оператор Штурма — Лиувилля $L[y] = \big(p(x)y'\big)' + q(x)y$

$$L[y(x)] = f(x)$$

Уравнение Бесселя

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

$y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}}$

$$z'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)z = 0$$

$|\nu| = \frac{1}{2} \Rightarrow z'' + z = 0$

$$y(x) = C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$d = \pi$

$$z'' + \big(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\big) z = 0$$

$|\nu| < \frac{1}{2}$

$$v'' + (1 + \varepsilon) v = 0$$

$$z'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0$$

$|\nu| > \frac{1}{2}$

$$v'' + (1 - \varepsilon) v = 0$$

Решение уравнений в виде степенных рядов

$$a_0(z)y'' + a_1(z)y' + a_2(z)y = 0$$

$$a_k(z), \; z \in U(z_0)$$

$$y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Определение. Точка z_0 — особая точка уравнения $a_0(z)y'' + a_1(z)y' + a_2(z)y = 0$, если $a_0(z_0) = 0$.

$$a_0(z)y'' + a_1(z)y' + a_2(z)y = 0$$

Если z_0 — не особая точка, то уравнение приводится к виду $y'' + A(z)y' + B(z)y = 0$, где $A(z)$ и $B(z)$ — аналитические функции в $U(z_0)$.

Теорема. Если $A(z)$ и $B(z)$ — аналитические функции в круге $|z - z_0| < R$, то задача Коши $y(z_0) = y_0$, $y'(z_0) = y_1$ имеет единственное аналитическое решение в круге $|z - z_0| < R$.

Определение. Точка z_0 — регулярная особая точка уравнения $y'' + A(z)y' + B(z)y = 0$, если в т. z_0 $A(z)$ имеет полюс порядка не выше 1, а $B(z)$ имеет полюс порядка не выше 2.

$A(z) = \frac{P(z)}{(z-z_0)}$, $B(z) = \frac{Q(z)}{(z-z_0)^2}$

$$y'' + \frac{P(z)}{(z - z_0)}y' + \frac{Q(z)}{(z - z_0)^2}y = 0$$

$$(z - z_0)^2 y'' + (z - z_0)P(z)y' + Q(z)y = 0$$

$$z^2 y'' + zP(z)y' + Q(z)y = 0$$

Обобщенный степенной ряд

$$y(z) = z^{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \quad c_0 \neq 0$$

$$z^2 y'' + z P(z) y' + Q(z) y = 0$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k z^k$$

$$y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda}$$

$$y'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1}$$

$$y''(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2}$$

$$z^2 y'' + P(z) z y' + Q(z) y = 0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda}+$$

$$+\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}p_k z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda}\Big)+$$

$$+\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}q_k z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}c_k z^{k+\lambda}\Big)=0$$

$$c_0[\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0]=0$$

Определяющее уравнение

$$\lambda(\lambda - 1) + P(0)\lambda + Q(0) = 0$$

$$c_n[(n+\lambda)(n+\lambda-1)+p_0(n+\lambda)+q_0]+F(c_0;c_1;...;c_{n-1}) = 0$$

$$g(t) = t(t-1) + p_0 t + q_0$$

$$c_n g(n+\lambda) + F(...) = 0$$

Теорема. Если λ_1 и λ_2 — корни определяющего уравнения и $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, то существует два лин. независимых решения в виде обобщенных степенных рядов.

Пусть λ_1 и λ_2 — корни определяющего уравнения и $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, например, $\lambda_1 = \lambda_2 + m$, где $m \in \mathbb{N}_0$.

Тогда существует решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \quad c_0 \neq 0$$

Второе лин. независимое решение строим по формуле Лиувилля:

$$W = \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) \end{vmatrix}$$

$$\frac{W'}{W} = -\frac{P(z)}{z} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k =$$

$$= -\frac{p_0}{z} - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k z^{k-1}$$

$$\ln W = -p_0 \ln z - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \frac{z^k}{k} = -p_0 \ln z + \varphi(z)$$

$$W = z^{-p_0} \cdot e^{\varphi(z)} = z^{-p_0} \cdot \Phi(z), \quad \Phi(0) \neq 0$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) \end{vmatrix} = \left(\frac{y_2(z)}{y_1(z)}\right)' \cdot y_1^2(z)$$

$$y_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = z^{\lambda_1} \Psi(z), \quad \Psi(0) \neq 0$$

$$\left(\frac{y_2(z)}{y_1(z)}\right)' = \frac{W}{y_1^2(z)} = \frac{z^{-p_0} \cdot \Phi(z)}{z^{2\lambda_1} \Psi^2(z)} = z^{-p_0 - 2\lambda_1} \cdot \chi(z)$$

$\chi(0) \neq 0$

$$\lambda(\lambda-1)+P(0)\lambda+Q(0)=0$$

$$\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0=0$$

$$\lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0=0$$

$$\lambda_1+\lambda_2=-(p_0-1)=1-p_0$$

$$-p_0-2\lambda_1=(\lambda_1+\lambda_2)-1-2\lambda_1=(\lambda_2-\lambda_1)-1$$

$$\lambda_1=\lambda_2+m\Rightarrow -p_0-2\lambda_1=-m-1$$

$$\left(\frac{y_2(z)}{y_1(z)}\right)' = z^{-p_0-2\lambda_1} \cdot \chi(z) = z^{-m-1} \cdot \chi(z)$$

$$\left(\frac{y_2(z)}{y_1(z)}\right) = \int z^{-m-1} \cdot \chi(z)\ dz = \int \frac{a_0 + a_1 z + ...}{z^{m+1}} dz =$$

$$= \int \left(\frac{a_0}{z^{m+1}} + \frac{a_1 z}{z^{m+1}} + ... + \frac{a_m z^m}{z^{m+1}} + \frac{a_{m+1} z^{m+1}}{z^{m+1}} + ...\right) dz =$$

$$= \int \frac{a_m}{z} dz + \int (\frac{a_0}{z^{m+1}} + \frac{a_1}{z^m} + \ldots + + a_{m+1} + \ldots) dz =$$

$$= a_m \ln z + \sum_{k=-m}^{+\infty} b_k z^k$$

$$y_2(z) = y_1(z) \cdot (a_m \ln z + \sum_{k=-m}^{+\infty} b_k z^k) =$$

$$= y_1(z) a_m \ln z + y_1(z) \sum_{k=-m}^{+\infty} b_k z^k =$$

$$= y_1(z)a_m \ln z + (z^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k)(\sum_{k=-m}^{+\infty} b_k z^k) =$$

$\lambda_1 = \lambda_2 + m$

$$y_2(z) = y_1(z)a_m \ln z + z^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^k, \quad d_0 \neq 0$$

Второе линейно независимое решение может быть обобщенным степенным рядом, а может иметь в точке $z = 0$ логарифмическую особенность.

Теорема. Если λ_1 и λ_2 — корни определяющего уравнения и $\lambda_1 - \lambda_2 = m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, то ФСР состоит из функций $y_1(z) = z^{\lambda_1} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$, $c_0 \neq 0$, и

$y_2(z) = \beta y_1(z) \ln z + z^{\lambda_2} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} d_k z^k$, $d_0 \neq 0$

Замечание. Если корни определяющего уравнения λ_1, λ_2 вещественны и равны, то диф. уравнение имеет решение в виде обобщенного степенного ряда, а второе линейно независимое решение обязательно имеет в точке $x = 0$ логарифмическую особенность.

Уравнение Бесселя

$$z^2y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2)y(z) = 0$$

$P(z) = 1$, $Q(z) = z^2 - \nu^2$
определяющее уравнение $\lambda(\lambda - 1) + P(0)\lambda + Q(0) = 0$

$$\lambda^2 - \nu^2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm\nu$,
$\lambda_1 - \lambda_2 = 2\nu$

1. $2\nu \notin \mathbb{Z}$

$$J_\nu(z) = z^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \quad c_0 \neq 0$$

$$J_{-\nu}(z) = z^{-\nu} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^k, \quad d_0 \neq 0$$

2. $2\nu \in \mathbb{Z}$

$2\nu = 2n$ или $2\nu = 2n + 1$, то есть $\nu = n$ или $\nu = n + \frac{1}{2}$

$\nu = n$

$$J_n(z) = z^n \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \quad c_0 \neq 0$$

$$N_n(z) = \beta y_1(z) \ln z + z^{-\nu} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^k, \quad d_0 \neq 0$$

$\nu = n + \frac{1}{2}$

$$J_{n+1/2}(z) = z^{n+1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \quad c_0 \neq 0$$

$$J_{-(n+1/2)}(z) = z^{-(n+1/2)} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^k, \quad d_0 \neq 0$$