

II

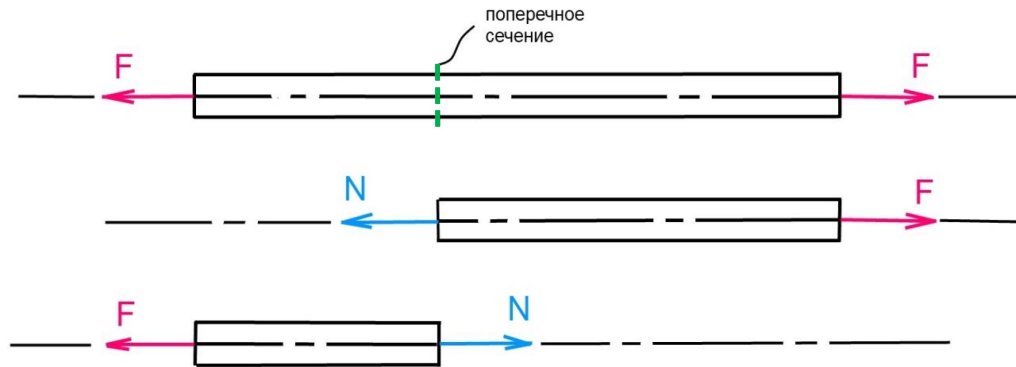
Р а с т я ж е н и е

и

с ж а т и е.

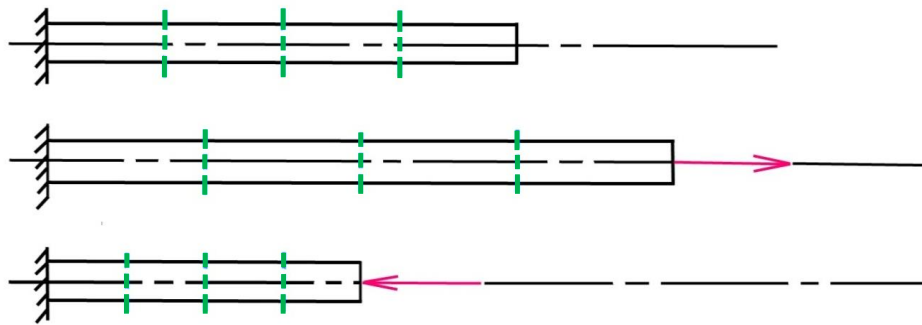
Растяжение–сжатие прямого стержня

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения стержня, при котором из 6 внутренних силовых факторов в его поперечных сечениях не равна нулю только осевая растягивающая сила N (рис. 1.6):



$N > 0$ – растяжение; $N < 0$ – сжатие.

Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли): при растяжении (сжатии) поперечные сечения стержня остаются плоскими и перемещаются вдоль оси стержня.



В поперечном сечении действуют только нормальные напряжения σ . В силу гипотезы Бернулли, распределены они по сечению равномерно.

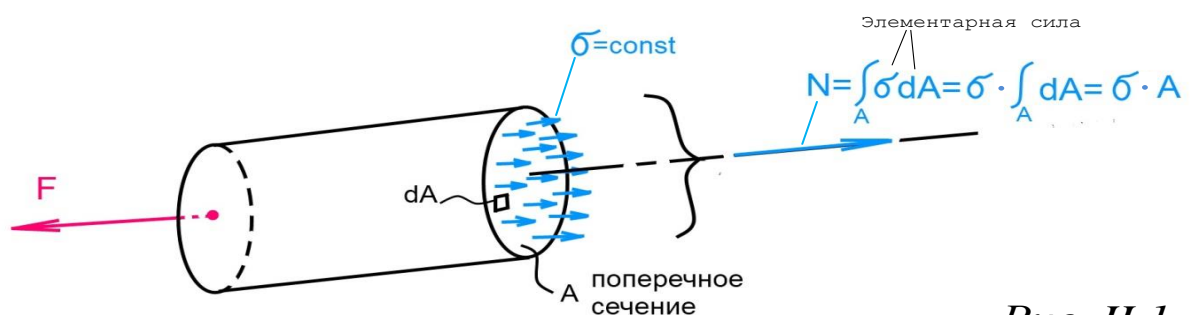
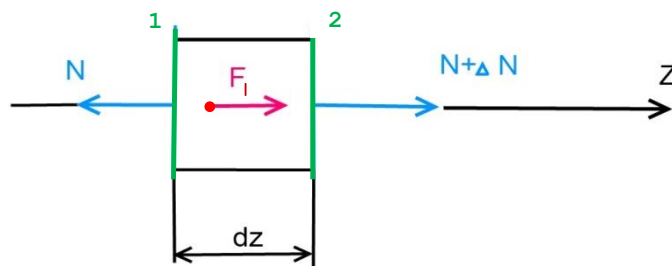
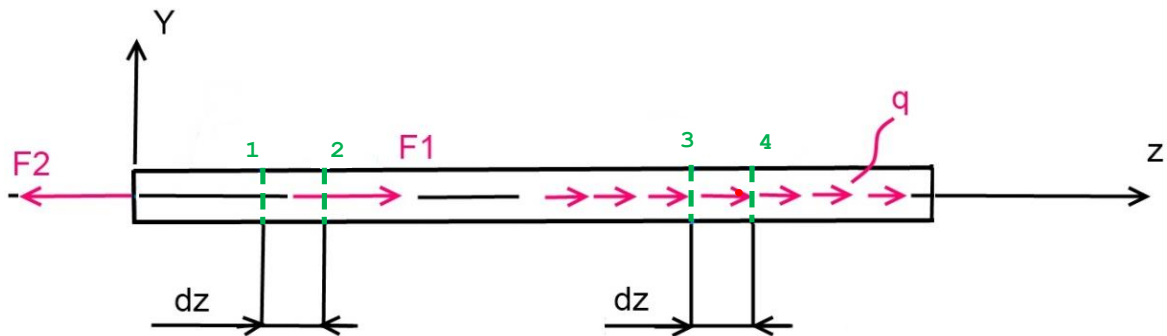


Рис. 1.1.

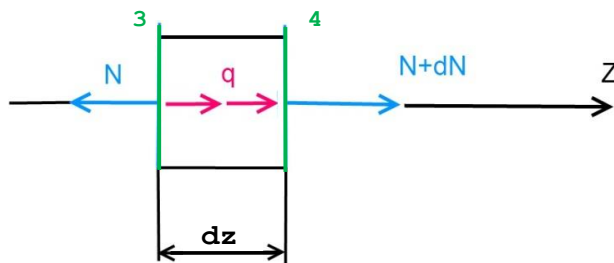
Связь внутренних сил с внешними нагрузками

Рассмотрим равновесие двух бесконечно коротких участков сжатого/растянутого стержня:



$$\begin{aligned}\Sigma F_z = 0 &= -N + F_1 + N + \Delta N \\ \Delta N &= -F_1\end{aligned}\quad (II.2)$$

Внешняя сосредоточенная сила скачкообразно изменяет значение N на величину своего модуля.



$$\begin{aligned}\Sigma F_z = 0 &= -N + q \cdot dz + N + dN \\ q \cdot dz &= -dN \\ q &= -\frac{dN}{dz}\end{aligned}\quad (II.1)$$

Внешняя распределённая нагрузка q является производной от внутренней растягивающей осевой силы N по осевой координате.

Перемещения и деформации при растяжении (сжатии)

При растяжении и при сжатии стержня перемещения его точек возможны лишь вдоль оси Oz . Обозначаются эти перемещения w и имеют размерность [м].

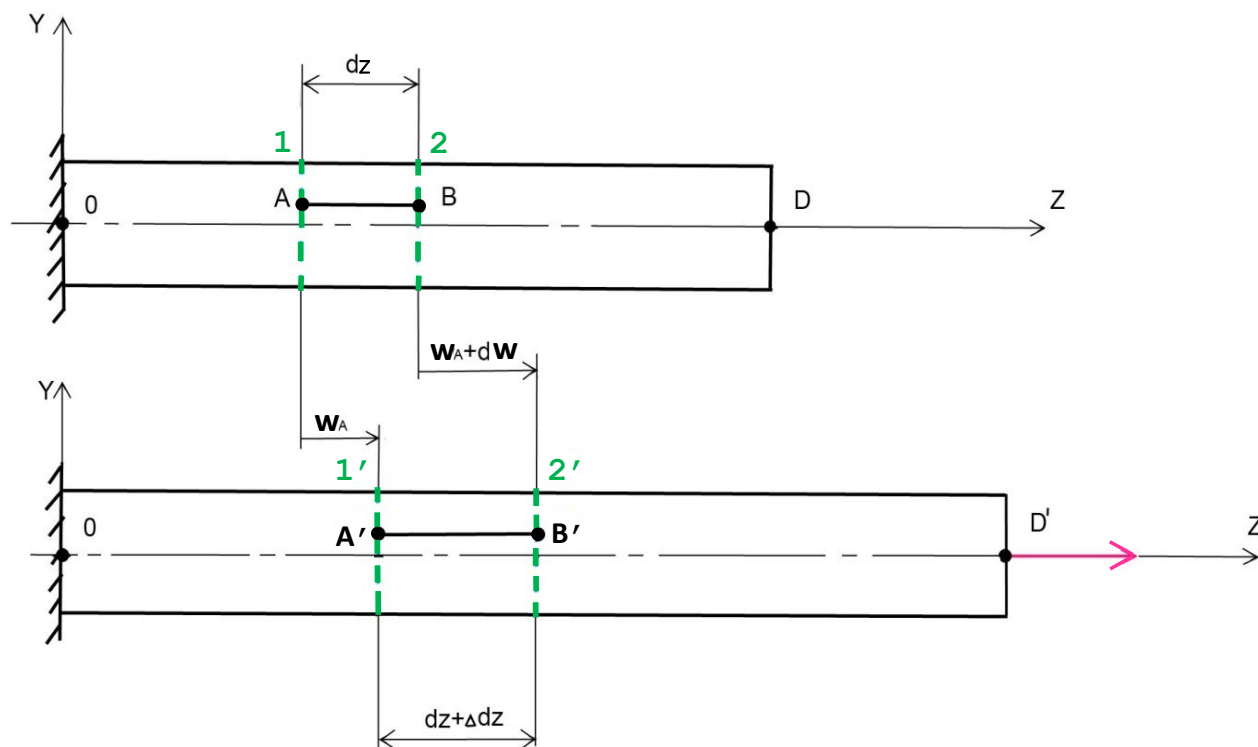


Рис. II.2.

При растяжении стержня его поперечные сечения сместятся на разные расстояния. Более всех сместится сечение с точкой D ; сечение с точкой O не сдвинется вообще.

Сечения **1** и **2** первоначально расположенные на бесконечно малом расстоянии dz друг от друга также сместятся на разные расстояния: w_A и $w_A + dw$, соответственно.

Удлинение продольного отрезка AB между ними составит:

$$\Delta dz = (w_A + dw) - w_A = dw$$

Продольная деформация:

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{dw}{dz}$$

Таким образом, продольная деформация ε_z есть производная от продольного перемещения w по осевой координате z :

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}} \quad (II.3)$$

При растяжении стержень становится тоньше, при сжатии – толще:

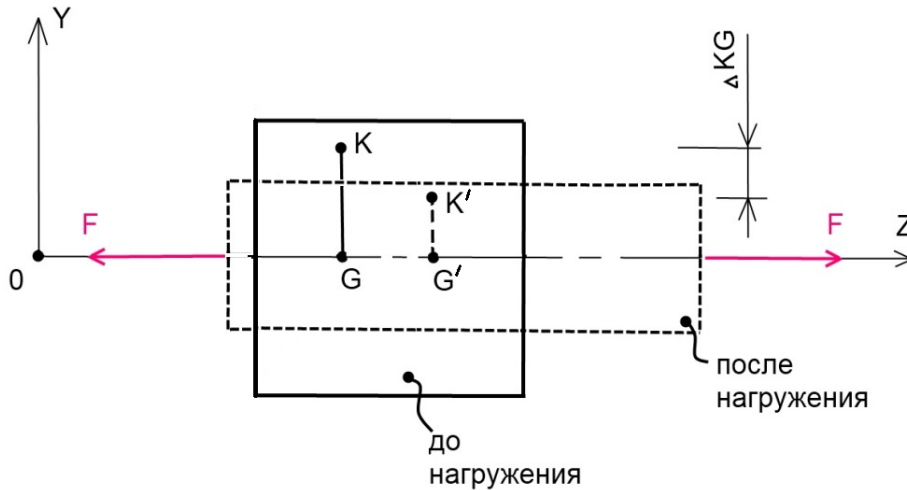


Рис. II.3.

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta KG}{KG} \quad \begin{aligned} <0 \text{ – при растяжении стержень утончается, } KG \text{ укорачивается;} \\ >0 \text{ – при сжатии стержень утолщается, } KG \text{ удлиняется.} \end{aligned}$$

Продольная деформация ε_z и поперечная ε_y всегда разных знаков:

Растяжение $\rightarrow \varepsilon_z > 0$ (удлинение), $\varepsilon_y < 0$ (сужение);

Сжатие $\rightarrow \varepsilon_z < 0$ (укорочение), $\varepsilon_y > 0$ (утолщение).

Экспериментально установлено, что поперечная деформация пропорциональна продольной:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{прод}}} \right| \text{ — коэффициент Пуассона} \quad (II.4)$$

$$\nu_{\text{металл}} = 0,25 \dots 0,3 ;$$

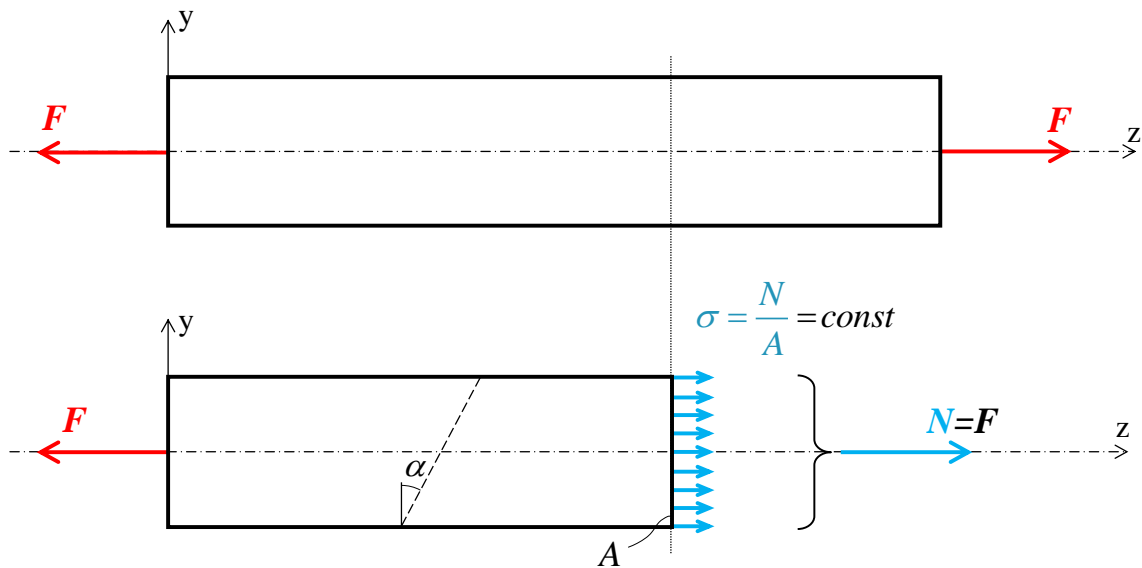
$$\nu_{\text{резина}} = 0,5 ;$$

$$\nu_{\text{пробка}} = 0.$$

У любого материала: $0 \leq \nu \leq 0,5$

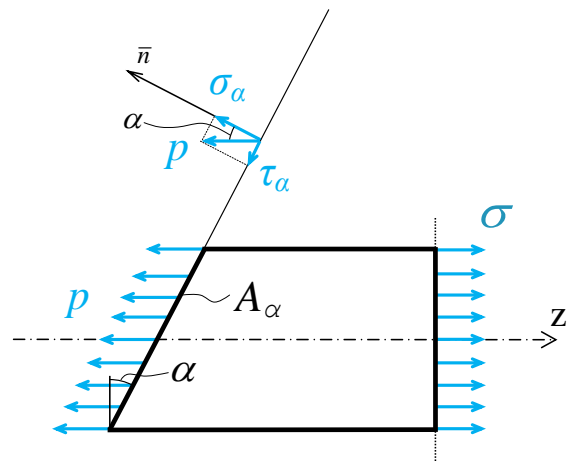
Напряжения при растяжении/сжатии

В поперечных сечениях стержня действуют только равномерно распределенные нормальные напряжения σ :



В наклонной площадке, составляющей угол α с поперечной плоскостью, полные напряжения p будут направлены также вдоль оси z , иначе отсеченная часть не была бы уравновешена по вертикали.

$$A_{\alpha} = \frac{A}{\cos \alpha} \text{ — площадь наклонного сечения;}$$



$$\sum F_z = 0 = -p \cdot A_{\alpha} + \sigma \cdot A \quad \Rightarrow \quad p = \sigma \frac{A}{A_{\alpha}} = \sigma \cdot \cos \alpha$$

Раскладываем полное напряжение p на нормальную σ_{α} и касательную τ_{α} составляющие:

$$\sigma_{\alpha} = p \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = p \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sin 2\alpha$$

(II.5)

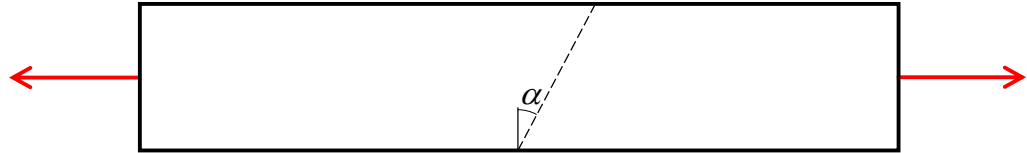
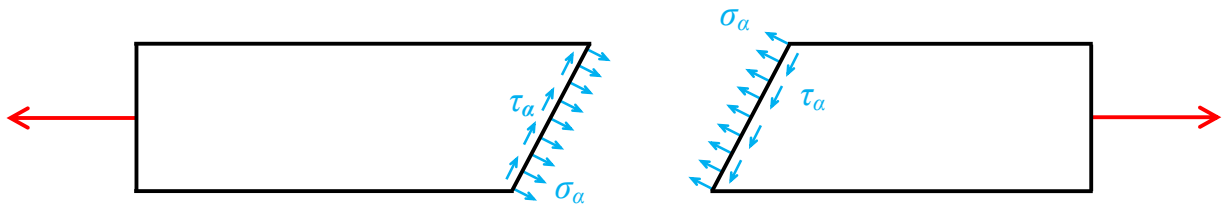


Рис. II.4.



Наибольшие касательные напряжения действуют в сечениях, наклонённых под 45° :

$$\tau_{\max} = \tau_{45} = \frac{\sigma}{2}$$

В продольных сечениях ($\alpha = 90^\circ$): $\sigma_{90} = 0$, $\tau_{90} = 0$.

Закон Гука при растяжении (сжатии)

На гранях элементарных объёмов, ориентированных вдоль оси растянутого (сжатого) стержня, действуют только нормальные напряжения только по направлению одной координатной оси Z :

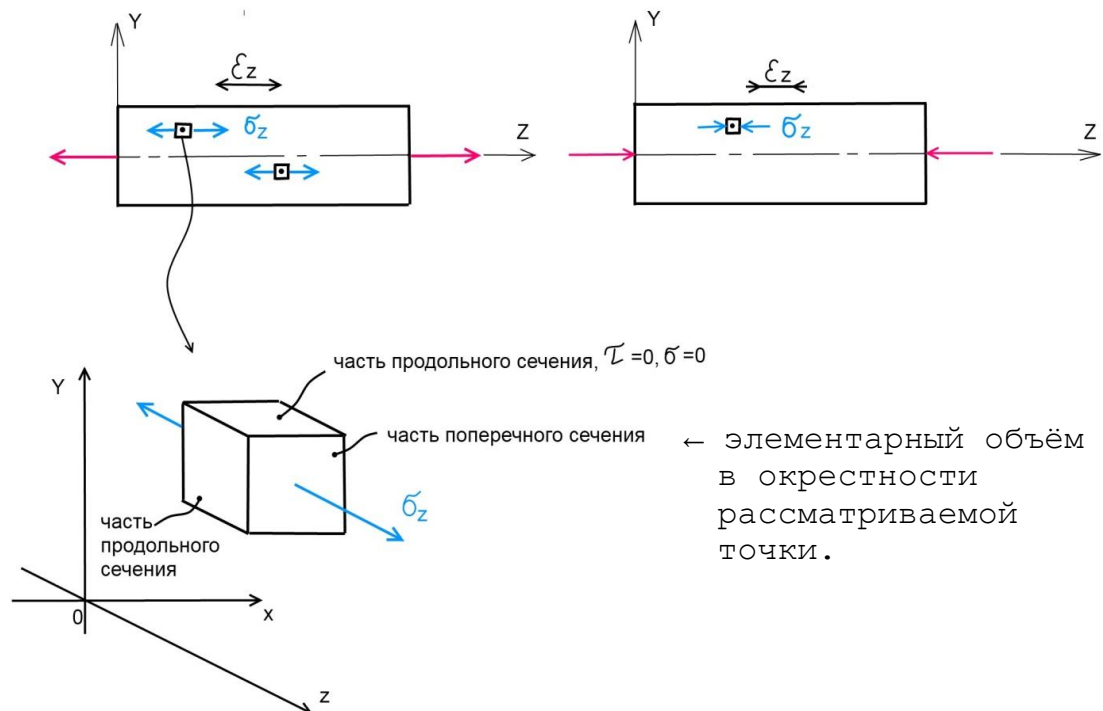


Рис. II.5.

Такое напряжённое состояние (н.с.) точек стержня называют «одноосным». Экспериментально установлено, что в случае упругого одноосного н.с., напряжения и деформации по указанному направлению пропорциональны друг другу:

$$\boxed{\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z} - \text{закон Гука} \quad (II.6)$$

Коэффициент E [Па] называется **модулем упругости первого рода** (модулем Юнга). Определяется экспериментально. Чем больше модуль Юнга, тем больше жёсткость материала:

Алмаз: $E = 10,5 \cdot 10^5$ МПа

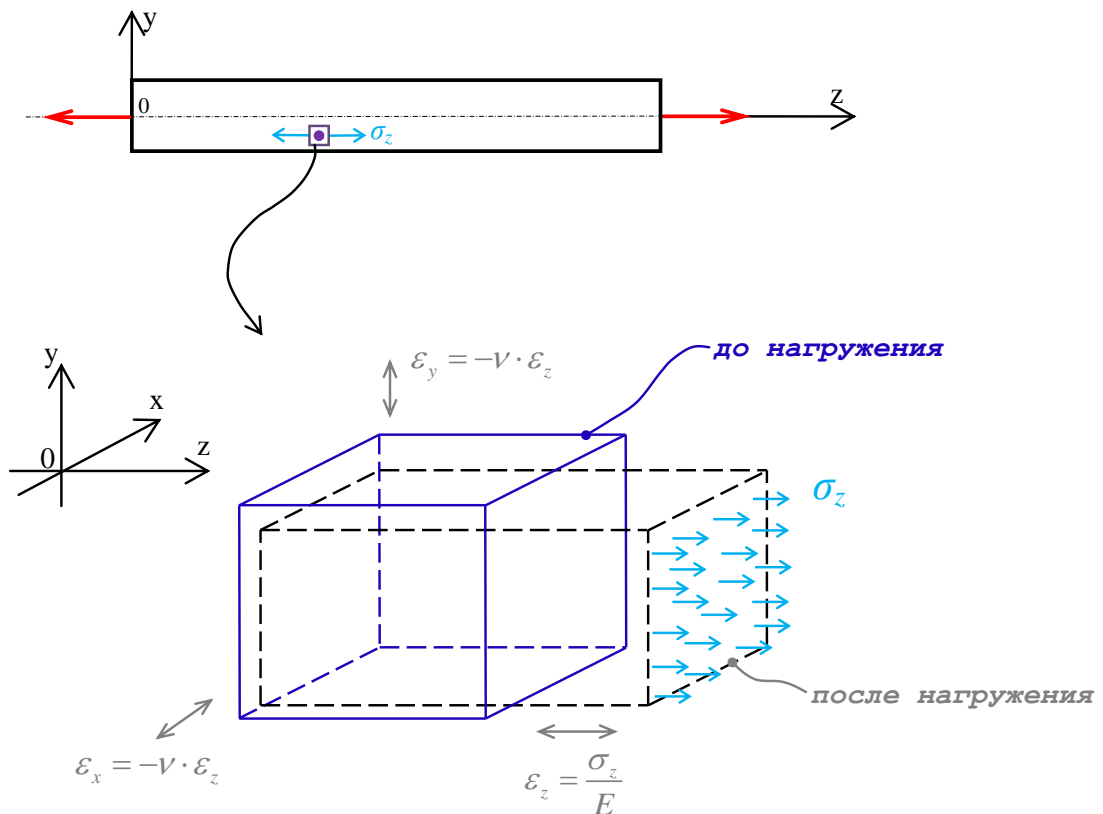
Сталь: $E \approx 2 \cdot 10^5$ МПа

Алюминий: $E \approx 0,7 \cdot 10^5$ МПа

Дерево: $E = 0,1 \cdot 10^5$ МПа

Изменение объёма при растяжении/сжатии

Объёмная деформация в произвольной точке стержня:



Элементарный объем в окрестностях точки

Рис. II.6.

При растяжении: $\begin{cases} \epsilon_z > 0 \\ \epsilon_x < 0, \quad \epsilon_y < 0 \end{cases}$ — продольный размер увеличивается;
— поперечные размеры уменьшаются.

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma_z}{E} (1 - 2 \cdot \nu) \quad (II.7)$$

$\nu = 0,5 \Rightarrow e = 0$ — «несжимаемый материал»;

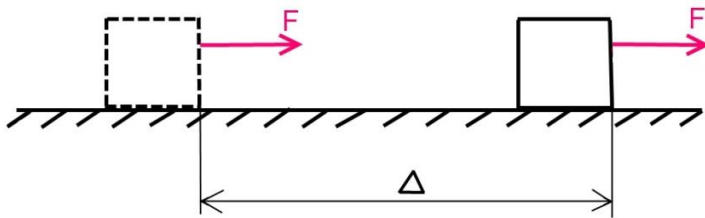
$\nu < 0,5$ — материал увеличивает объем при растягивающих нагрузках и уменьшает при сжимающих;

$\nu > 0,5$ — нонсенс.

Работа внешних сил при растяжении/сжатии.

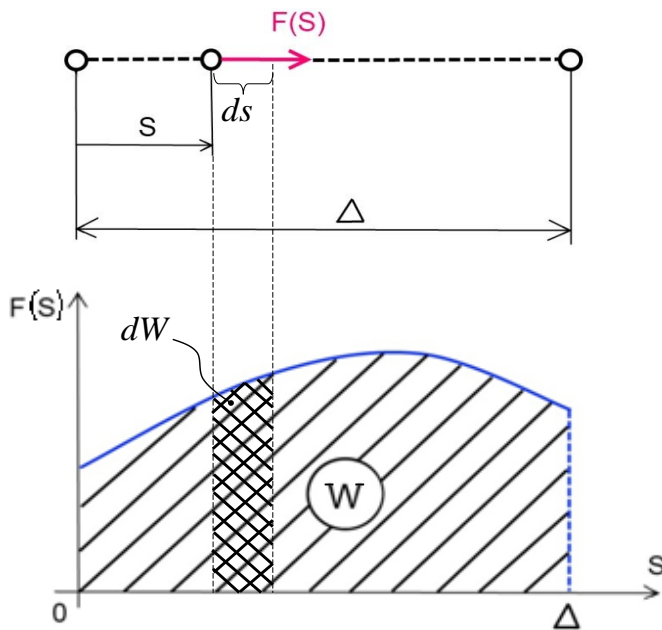
Вспоминаем физику.

Работа постоянной силы:



$$W = F \cdot \Delta$$

Работа переменной силы:



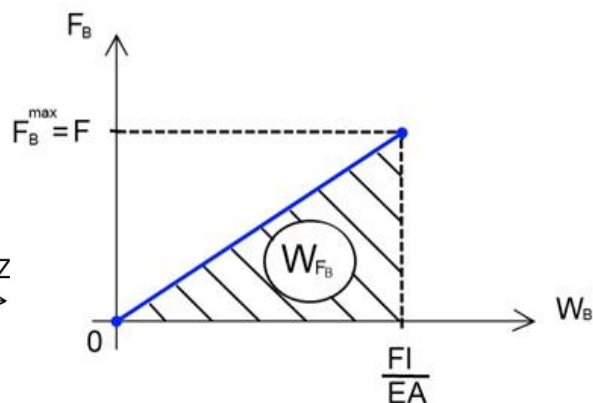
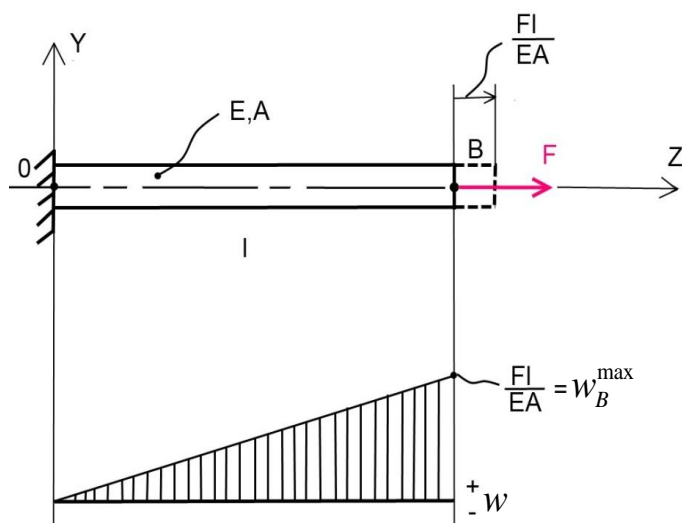
$$W = \int_0^{\Delta} F(s) \cdot ds \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{dW} \text{ - площадь под графиком зависимости силы от перемещения точки её приложения.}$$

В курсе «сопротивление материалов» мы рассматриваем статическое нагружение: внешние силы прикладываются к конструкции медленно (силы инерции пренебрежимо малы), равномерно возрастают от нуля до своих конечных значений.

Пропорционально силам увеличиваются перемещения точек тела.

На перемещениях точек своих приложений внешние силы и совершают работу.

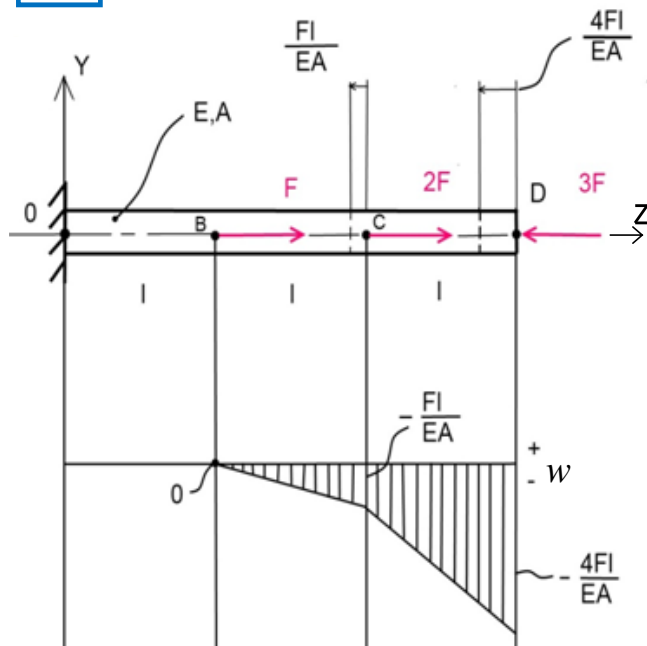
1



$$W_{F_B} = \frac{1}{2} \cdot F_B^{\max} \cdot w_B^{\max} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \frac{F^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \quad [\text{Дж}]$$



2



$$\begin{aligned} W &= W_{F_B} + W_{F_C} + W_{F_D} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot F_B^{\max} \cdot w_B^{\max} + \frac{1}{2} \cdot F_C^{\max} \cdot w_C^{\max} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot F_D^{\max} \cdot w_D^{\max} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot F \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot F \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot A} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot 3F \cdot \frac{4 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} = \\ &= \frac{5 \cdot F^2 \cdot l}{E \cdot A} \quad [\text{Дж}] \end{aligned}$$

Работа отдельной силы может быть <0 ,
суммарная работа всегда >0 !



Следует помнить: перемещение точки приложения внешней силы есть результат действия всех сил системы, а не только её одной. Поэтому принцип независимости действия сил к вычислению работы неприменим.

Потенциальная энергия деформации.

Внешние нагрузки порождают по всему объёму тела силы внутренние, изменяющие его форму и запаасающие, таким образом, в его частицах потенциальную энергию упругой деформации.

При снятии внешних нагрузок эта энергия высвобождается, возвращая упругому телу первоначальные размеры. Этот эффект используется, например, в заводных пружинах часов.

При вычислении потенциальной энергии исходят из предположения: в упругом теле накапливается энергия, в точности равная работе внутренних сил при нагружении на перемещениях точек тела:

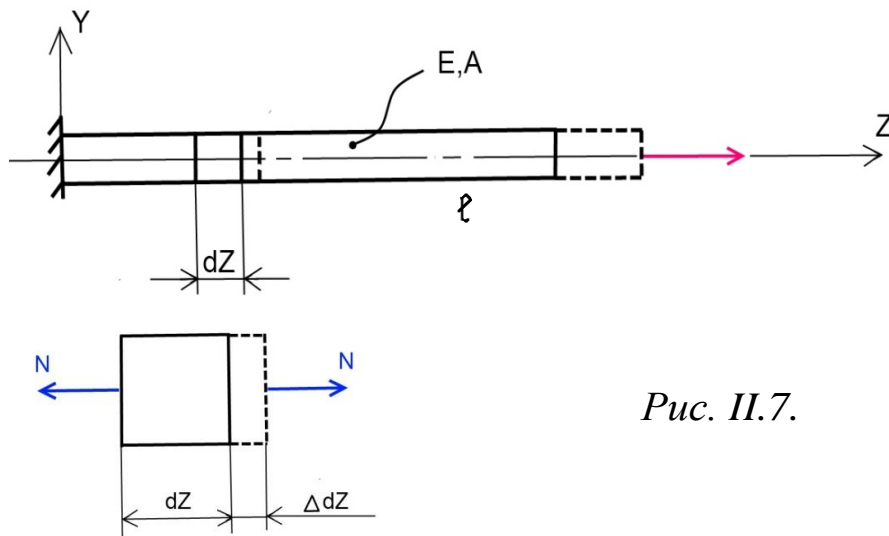


Рис. II.7.

$$\Delta dz = \varepsilon_z \cdot dz = \frac{\sigma_z}{E} \cdot dz = \frac{N}{E \cdot A} \cdot dz$$

$$dU = dW_N = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Delta dz = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \frac{N}{E \cdot A} \cdot dz = \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} \cdot dz$$

$$U = \int dU = \int_0^l \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} \cdot dz$$

(II.8)

Связь потенциальной энергии
и работы внешних сил.

При нагружении без нагрева упругого тела, работа внешних сил в точности равна потенциальной энергии, накопленной в теле:

$$W = U$$

(II.9)

В упругой, нагретой конструкции, это правило уже, не соблюдается – свой вклад вносит тепловая энергия через коэффициент теплового расширения.

Стадии решения статически определимых задач на осевое растяжение/сжатие прямого стержня:

- 1) Ввести глобальную систему координат XYZ , направив Z по оси стержня. Начало отсчета целесообразно установить на закреплённом конце стержня;
- 2) Избавиться от заделки, заменив её реакцией опоры, исходя из уравнения равновесия всего стержня:

$$\sum F_z = 0$$

- 3) Разбить стержень на участки: ①, ②, ③... и т.д.

Границами участков служат:

- а) Концы стержня;
 - б) Точки приложения сосредоточенных сил;
 - в) Границы действия распределённых сил;
 - г) Изменения площади поперечного сечения;
 - д) Изменения значения модуля упругости.
- 4) На каждом из участков ввести свои локальные системы координат $X_l, Y_l, Z_l, \dots, X_i, Y_i, Z_i, \dots$. Оси Z_i локальных систем координат целесообразно направить по направлению оси Z глобальной системы;
 - 5) Методом сечений (РОЗУ) определить распределение внутренней осевой растягивающей силы N по стержню:

$$\sum F_{z_i} = 0 \text{ — уравнение равновесия отсечённой части}$$

- 6) На каждом из участков построить эпюру осевых напряжений:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \text{ где } A_i \text{ — площадь поперечного сечения на } i^{\text{м}} \text{ участке};$$

- 7) По эпюрам напряжений построить эпюры деформаций:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i} \text{ где } E_i \text{ — модуль упругости материала на } i^{\text{м}} \text{ участке};$$

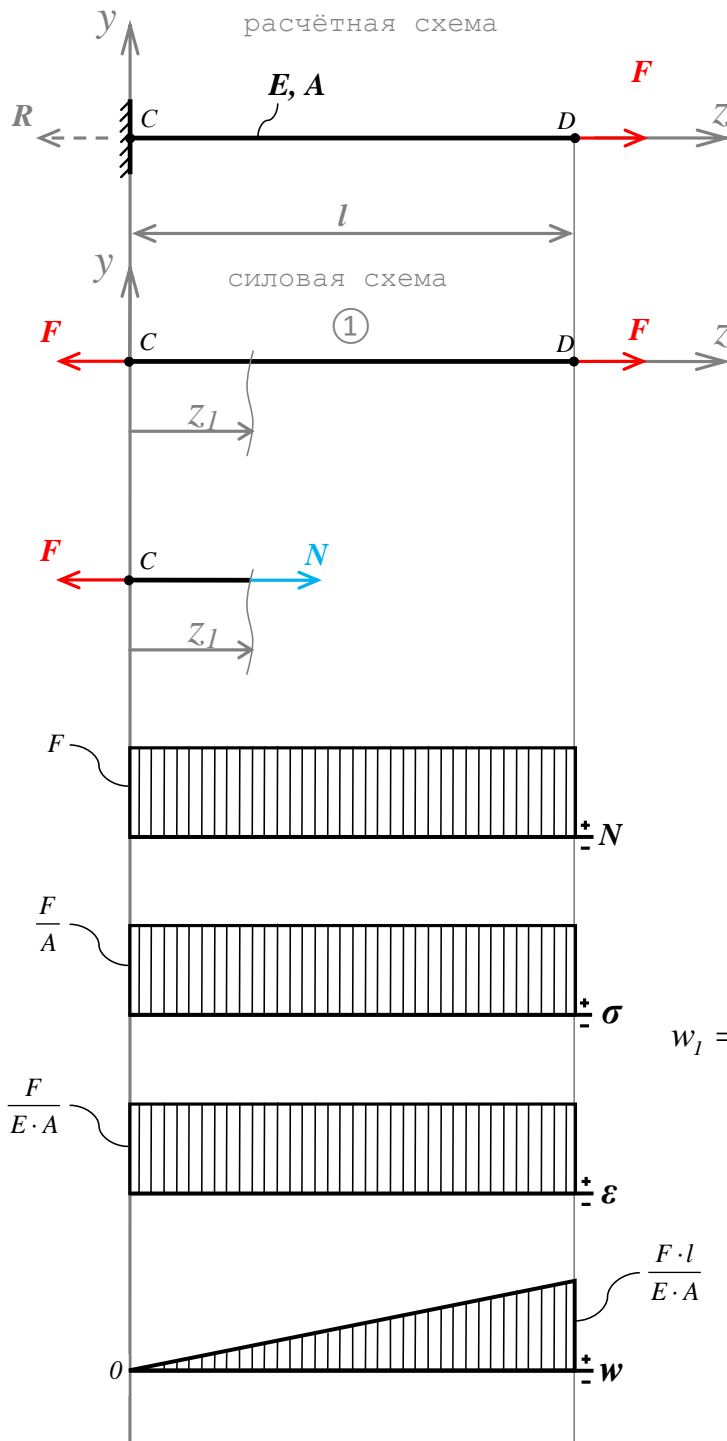
- 8) Построить эпюры осевых перемещений:

$$w_i = w_{i-1}^{\text{кон}} + \int_0^i \varepsilon_i \cdot dz_i \text{ где } w_{i-1}^{\text{кон}} \text{ — перемещение в конце предыдущего участка.}$$

Признаки правильности полученного решения:

- 1) На свободном от сосредоточенных сил конце стержня значения эпюр N , σ и ε равны нулю;
- 2) Если на конце стержня приложена сосредоточенная сила, значение эпюры N в этой точке численно равно значению силы;
- 3) В точках приложения сосредоточенных сил эпюра N имеет скачки, равные по величине этим силам;
- 4) На эпюре w разрывов не бывает;
- 5) $q=N'$;
- 6) $\varepsilon=w'$;
- 7) В заделке $w=0$;
- 8) Проверить правильность построения эпюры N можно, пересчитав задачу при направлениях локальных осей z_i против глобальной оси Z .

Пример II.1



Условие равновесия:

$$\sum F_z = 0 = -R + F \Rightarrow R = F$$

Реакция R положительна, значит направление её на расчётной схеме указано пунктиром верно. Если расчёт показывает $R < 0$, значит реакция направлена в другую сторону.

$$\sum F_{z_l} = 0 = -F + N_l \Rightarrow N_l = F$$

$$\sigma_l = \frac{N_l}{A_l} = \frac{F}{A}$$

$$\epsilon_l = \frac{\sigma_l}{E_l} = \frac{F}{E \cdot A}$$

$$w_l = w_0^{кон} + \int_0^{z_l} \epsilon_l \cdot dz_l = 0 + \int_0^{z_l} \frac{F}{E \cdot A} \cdot dz_l = \frac{F \cdot z_l}{E \cdot A}$$

Начало участка:

$$\text{т. C: } z_l = 0: w_l^{нач} = 0$$

Конец участка:

$$\text{т. D: } z_l = l: w_l^{кон} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

Работа внешних сил:

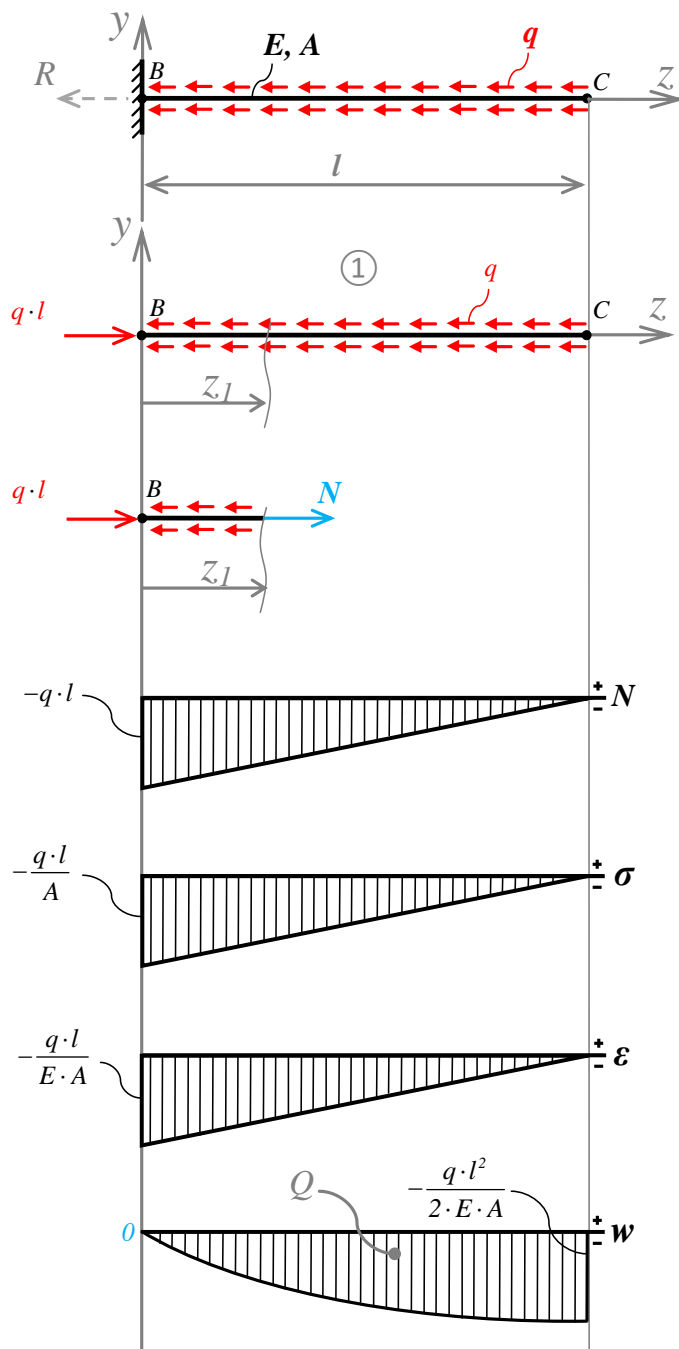
$$W = \sum_j \frac{1}{2} \cdot F_j \cdot w_j = \frac{1}{2} \cdot F_C \cdot w_C + \frac{1}{2} \cdot F_D \cdot w_D = \frac{1}{2} \cdot F \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \frac{F^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \quad [\text{Дж}]$$

Потенциальная энергия деформации:

$$U = \sum_i \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot E_i \cdot A_i} = \frac{N_l^2 \cdot l_l}{2 \cdot E_l \cdot A_l} = \frac{F^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \quad [\text{Дж}]$$

$$W = U$$

Пример II.2



$W=?$, $U=?$

$$\sum F_z = 0 = -R - q \cdot l$$

$$R = -q \cdot l$$

$R < 0$ значит реакция
будет направлена
в другую сторону

$$\sum F_{z_l} = 0 = q \cdot l - q \cdot z_l + N_l$$

$$N_l = q \cdot (z_l - l)$$

$$m. B: z_l = 0: N_l = -q \cdot l$$

$$m. C: z_l = l: N_l = 0$$

$$\sigma_l = \frac{N_l}{A_l} = \frac{q \cdot (z_l - l)}{A}$$

$$m. B: z_l = 0: \sigma_l = -\frac{q \cdot l}{A}$$

$$m. C: z_l = l: \sigma_l = 0$$

$$\epsilon_l = \frac{\sigma_l}{E_l} = \frac{q \cdot (z_l - l)}{E \cdot A}$$

$$m. B: z_l = 0: \epsilon_l = -\frac{q \cdot l}{EA}$$

$$m. C: z_l = l: \epsilon_l = 0$$

$$w_l = w_0^{кон} + \int_0^{z_l} \epsilon_l \cdot dz_l =$$

$$= \int_0^{z_l} \frac{q \cdot (z_l - l)}{E \cdot A} \cdot dz_l = \frac{q \cdot z_l^2}{2 \cdot E \cdot A} - \frac{q \cdot l}{E \cdot A} \cdot z_l$$

$$m. B: z_l = 0: w_l^{нач} = 0; \quad m. C: z_l = l: w_l^{кон} = -\frac{q \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot A}$$

Площадь эпюры перемещений:

$$Q = \int_0^l w_l(z_l) \cdot dz_l = \int_0^l \left(\frac{q \cdot z_l^2}{2 \cdot E \cdot A} - \frac{q \cdot l \cdot z_l}{E \cdot A} \right) \cdot dz_l = -\frac{q \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot A};$$

Работа внешних сил:

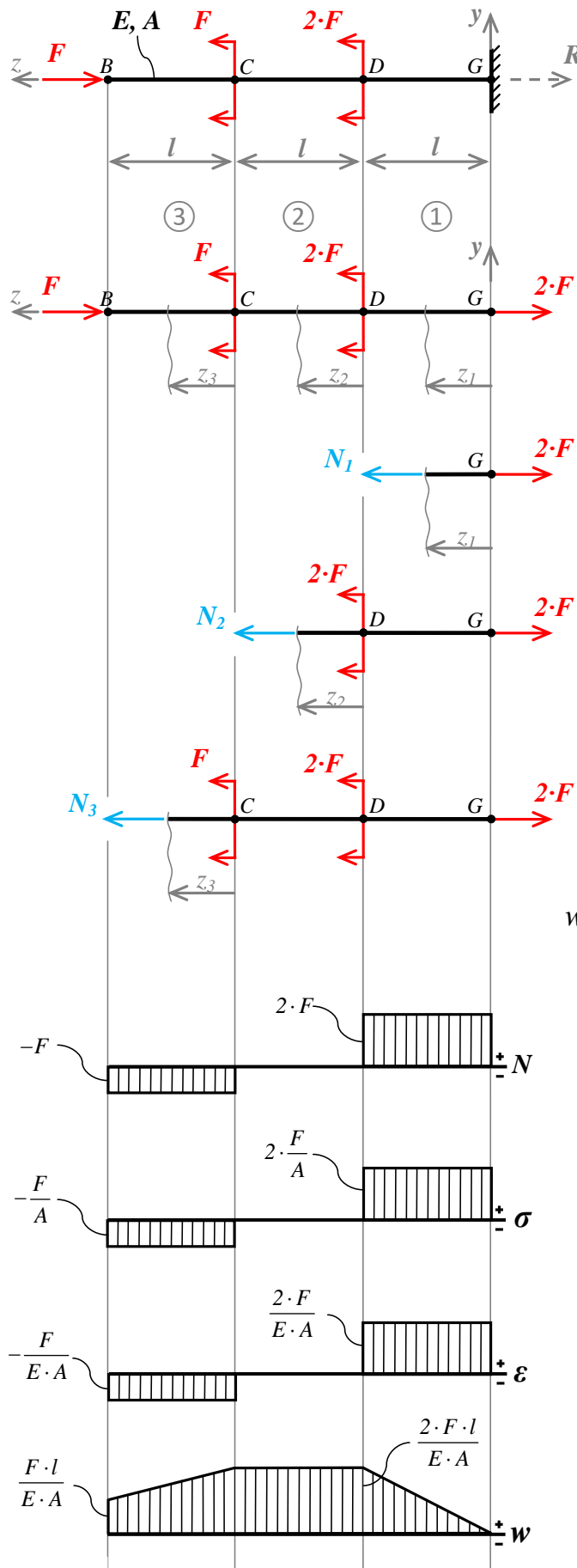
$$W = \int_0^l \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (-q) \cdot dz_l}_{\text{сила}} \cdot \underbrace{w_l(z_l)}_{\text{перемещение}} = \frac{1}{2} \cdot (-q) \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot (-q) \cdot \left(-\frac{q \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot A} \right) = \frac{q^2 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot A} \quad [Дж]$$

Потенциальная энергия деформации:

$$U = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_i^2 \cdot dz_i}{2 \cdot E_i \cdot A_i} = \int_0^l \frac{N_l^2 \cdot dz_l}{2 \cdot E_l \cdot A_l} = \int_0^l \frac{q^2 \cdot (z_l - l)^2 \cdot dz_l}{2 \cdot E \cdot A} = \frac{q^2 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot A} \quad [Дж]$$

$$W = U$$

Пример II.3



$W=?$, $U=?$

$$\sum F_z = 0 = -F + F + 2 \cdot F - R \Rightarrow R = 2 \cdot F$$

$$\sum F_{z_1} = 0 = N_1 - 2 \cdot F \Rightarrow N_1 = 2 \cdot F$$

$$\sum F_{z_2} = 0 = N_2 - 2 \cdot F + 2 \cdot F \Rightarrow N_2 = 0$$

$$\sum F_{z_3} = 0 = N_3 - 2 \cdot F + 2 \cdot F + F \Rightarrow N_3 = -F$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2 \cdot F}{A};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 0;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{F}{A};$$

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{2 \cdot F}{E \cdot A};$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = 0;$$

$$\epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} = -\frac{F}{E \cdot A};$$

$$w_1 = w_0^{KOH} + \int_0^{z_1} \epsilon_1 \cdot dz_1 = \int_0^{z_1} \frac{2 \cdot F}{E \cdot A} \cdot dz_1 = \frac{2 \cdot F \cdot z_1}{E \cdot A};$$

т. G: $z_1 = 0$: $w_1^{HAY} = 0$

т. D: $z_1 = l$: $w_1^{KOH} = \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot A};$

$$w_2 = w_1^{KOH} + \int_0^{z_2} \epsilon_2 \cdot dz_2 = \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + 0 = \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot A};$$

$$w_3 = w_2^{KOH} + \int_0^{z_3} \epsilon_3 \cdot dz_3 =$$

$$= \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + \int_0^{z_3} \left(-\frac{F}{E \cdot A} \right) \cdot dz_3 =$$

$$= \frac{F \cdot (2 \cdot l - z_3)}{E \cdot A};$$

т. C: $z_3 = 0$: $w_3^{HAY} = \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot A};$

т. B: $z_3 = l$: $w_3^{KOH} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}.$

Работа внешних сил:

$$\begin{aligned} W &= \sum_j \frac{l}{2} \cdot F_j \cdot w_j = \\ &= \frac{l}{2} \cdot F_G \cdot w_G + \frac{l}{2} \cdot F_D \cdot w_D + \frac{l}{2} \cdot F_C \cdot w_C + \frac{l}{2} \cdot F_B \cdot w_B = \\ &= \frac{l}{2} \cdot (-2 \cdot F) \cdot 0 + \frac{l}{2} \cdot (2 \cdot F) \cdot \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{l}{2} \cdot F \cdot \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{l}{2} \cdot (-F) \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \frac{5}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot l}{E \cdot A} \quad [Дж] \end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформации:

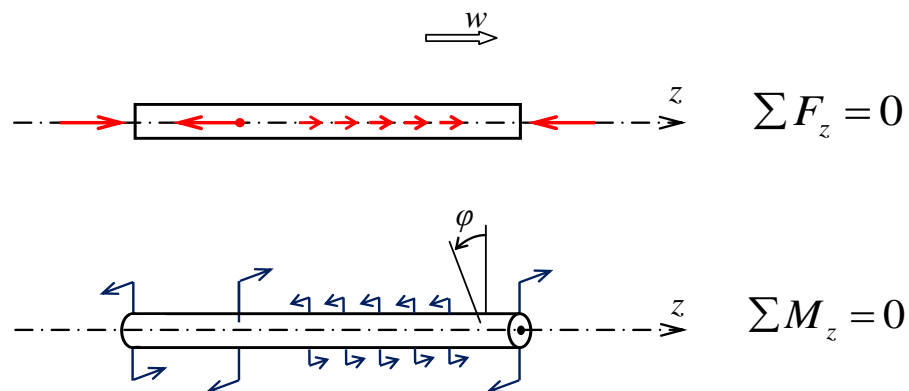
$$\begin{aligned} U &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_i^2 \cdot dz_i}{2 \cdot E_i \cdot A_i} = \\ &= \int_0^{l_1} \frac{N_1^2 \cdot dz_1}{2 \cdot E_1 \cdot A_1} + \int_0^{l_2} \frac{N_2^2 \cdot dz_2}{2 \cdot E_2 \cdot A_2} + \int_0^{l_3} \frac{N_3^2 \cdot dz_3}{2 \cdot E_3 \cdot A_3} = \\ &= \int_0^l \frac{(2 \cdot F)^2 \cdot dz_1}{2 \cdot E \cdot A} + 0 + \int_0^l \frac{(-F)^2 \cdot dz_3}{2 \cdot E \cdot A} = \frac{4}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot l}{E \cdot A} + \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} = \frac{5}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot l}{E \cdot A} \quad [Дж] \end{aligned}$$

$$W = U$$

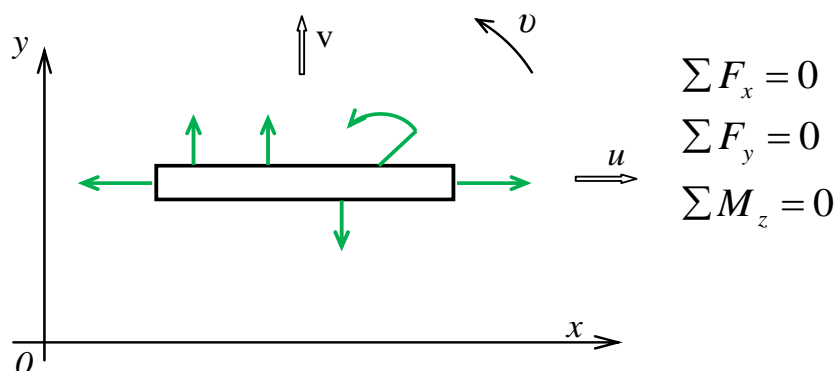
Статически неопределимые задачи

От размерности задачи зависит количество независимых уравнений статического равновесия тела:

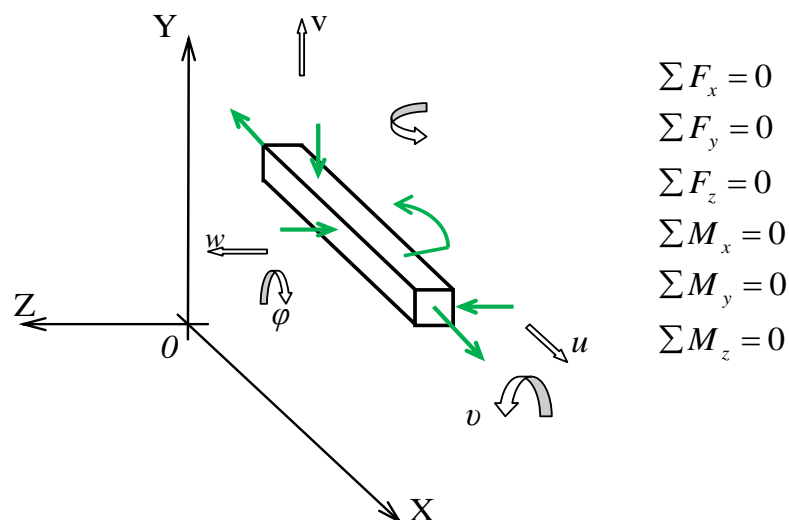
Одномерные задачи – *одно* уравнение равновесия:



Двумерные (плоские) задачи – *три* уравнения равновесия:



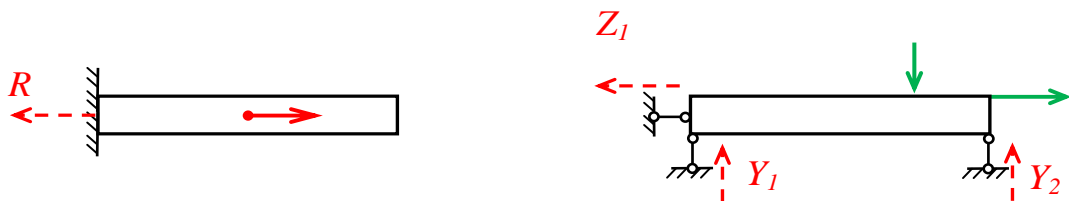
Трёхмерные задачи – *шесть* уравнений равновесия



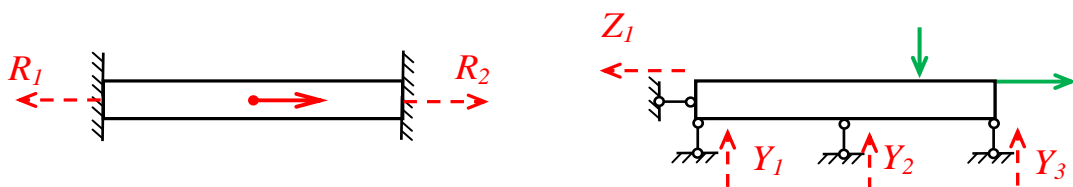
Если количество внешних связей *меньше* количества уравнений равновесия – перед нами однозначно **механизм**.



Если количество внешних связей *равно* количеству уравнений равновесия (и они, препятствуют перемещению тела по каждой из степеней свободы) – перед нами **статически определимая система**. Реакции связей полностью определяются из системы уравнений равновесия:



Если количество внешних связей *превышает* число уравнений равновесия и они препятствуют перемещению тела по каждой из степеней свобод – перед нами **статически неопределимая система**:



Здесь уравнений статики уже не хватает для определения всех реакций связей. Нужны дополнительные уравнения.

Необходимое количество дополнительных уравнений называется **степенью статической неопределимости** системы:

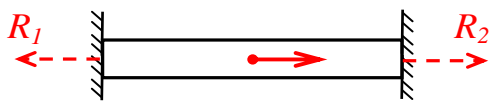
$$n = n_{\text{неизв.}} - n_{\text{ур.}} \quad (II.10)$$

где

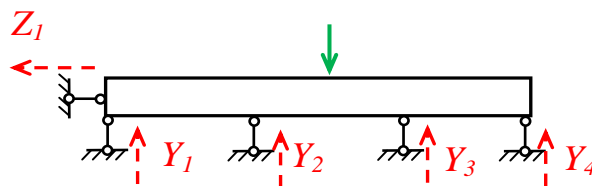
$n_{\text{неизв.}}$ — количество неизвестных (реакций связи);

$n_{\text{ур.}}$ — количество независимых уравнений равновесия.

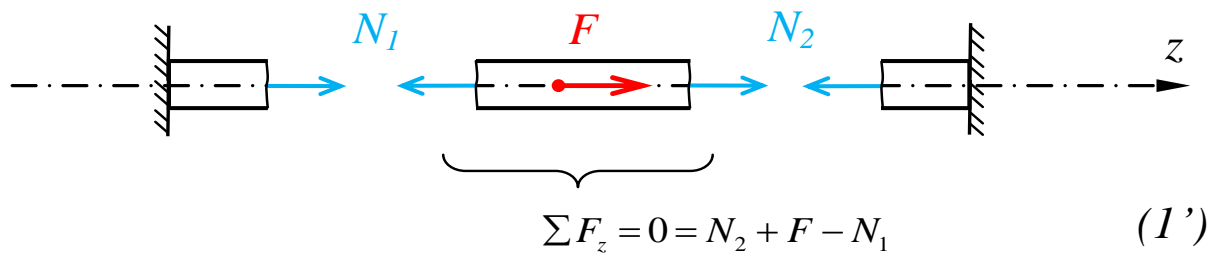
$$n = 2 - 1 = 1$$



$$n = 5 - 3 = 2$$



Используя метод сечений, можно в качестве неизвестных вместо реакций рассматривать внутренние силовые факторы. Значение n это не меняет:



$$n_{\text{неизв.}} = 2 \quad (N_2 \text{ и } N_1)$$

$$n_{\text{ур.}} = 1 \quad (\text{уравнение } (I'))$$

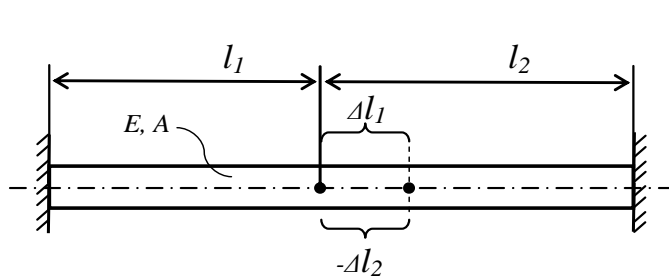
$$n = n_{\text{неизв.}} - n_{\text{ур.}} = 2 - 1 = 1$$

Дополнительные уравнения не используют условия равновесия.

В стержневых системах при растяжении/сжатии они отражают соотношения между удлинениями участков стержней при перемещении точек системы. Внешняя нагрузка при этом не учитывается!

Потом через закон Гука $\left(\Delta \ell_i = \varepsilon \cdot \ell_i = \frac{\sigma_i}{E_i} \cdot \ell_i = \frac{N_i \cdot \ell_i}{E_i \cdot A_i} \right)$ соотношения

между $\Delta \ell_i$ пересчитываются в соотношения между N_i :

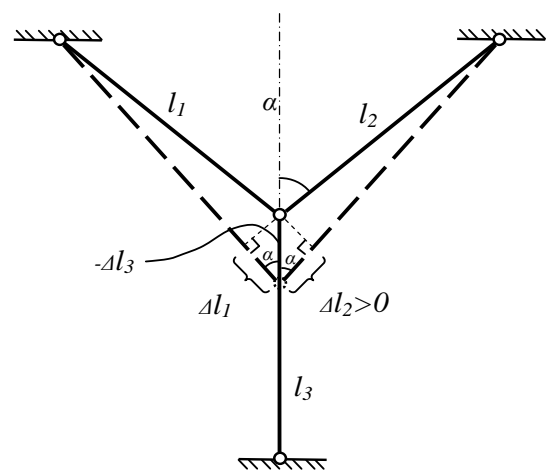


$$\Delta \ell_1 = -\Delta \ell_2$$

$$\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = 0$$

$$\frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot A} + \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot A} = 0 \quad (2')$$

Решая совместно (1') и (2'), находим неизвестные N_1 и N_2 .



$$\Delta \ell_1 = -\Delta \ell_3 \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta \ell_2 = -\Delta \ell_3 \cdot \cos \alpha$$

Дополнительные уравнения также называются **уравнениями перемещений** или **уравнениями совместности деформаций**.

З а м е ч а н и е:

При нагреве:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t = \frac{N_i}{E_i \cdot A_i} + \alpha \cdot \Delta t$$

Упругая составляющая
Температурная составляющая

тогда:

$$\Delta \ell_i = \varepsilon \cdot \ell_i = \frac{N_i \cdot \ell_i}{E_i \cdot A_i} + \alpha \cdot \Delta t \cdot \ell_i$$

Механические характеристики материалов

В случаях одноосного напряжённого состояния при возрастании нагрузки малоуглеродистая сталь ведет себя следующим образом:

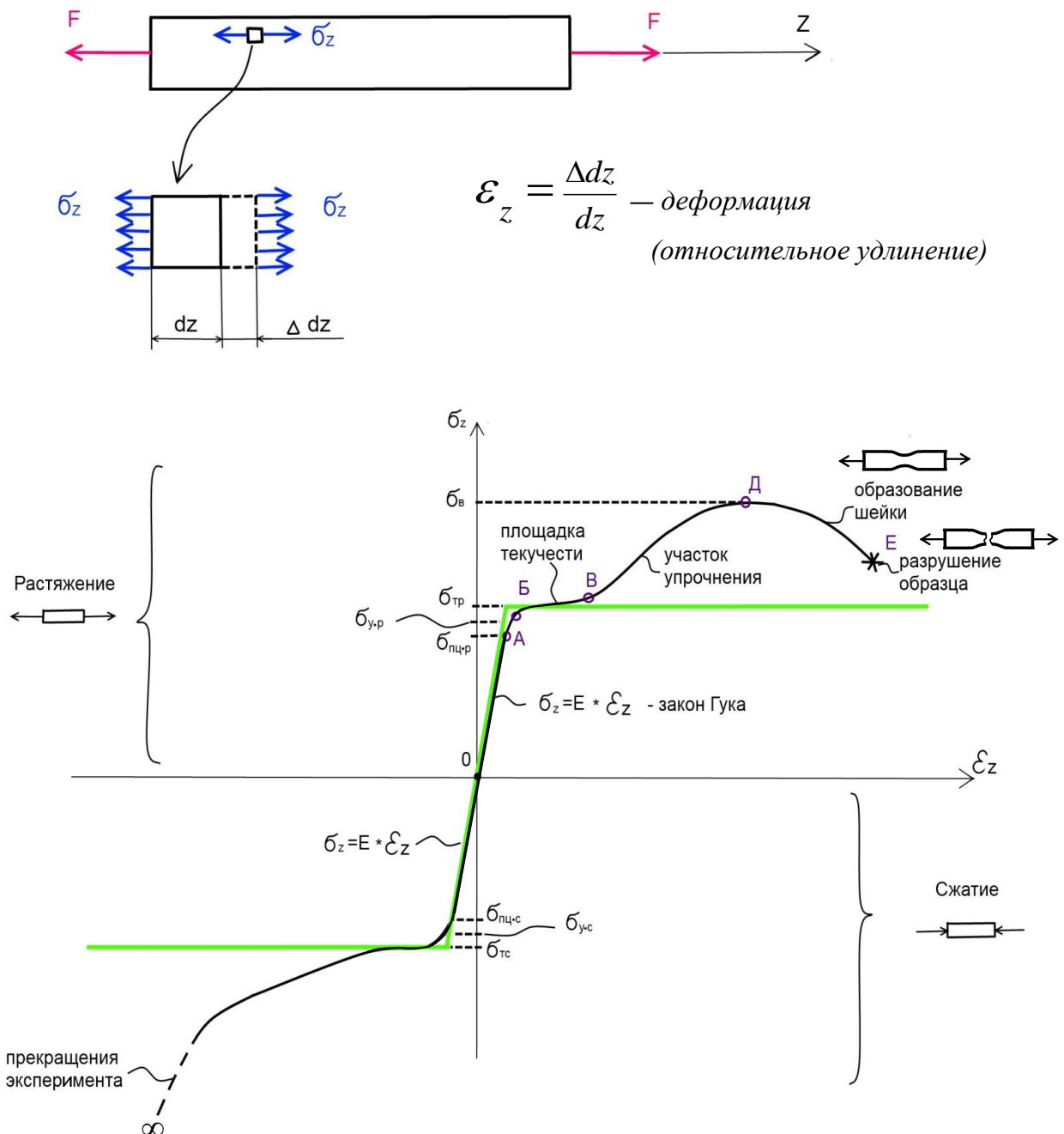


Рис. II.8.

■ - схематизация Прандтля (**идеальный упруго-пластический материал**).

$$\sigma_{TP} \approx -\sigma_{TC} = \sigma_T$$

Эта диаграмма растяжения/сжатия называется **условной**, ибо напряжение σ_z вычисляется приблизительно, делением растягивающей стержень силы на первоначальную площадь поперечного сечения:

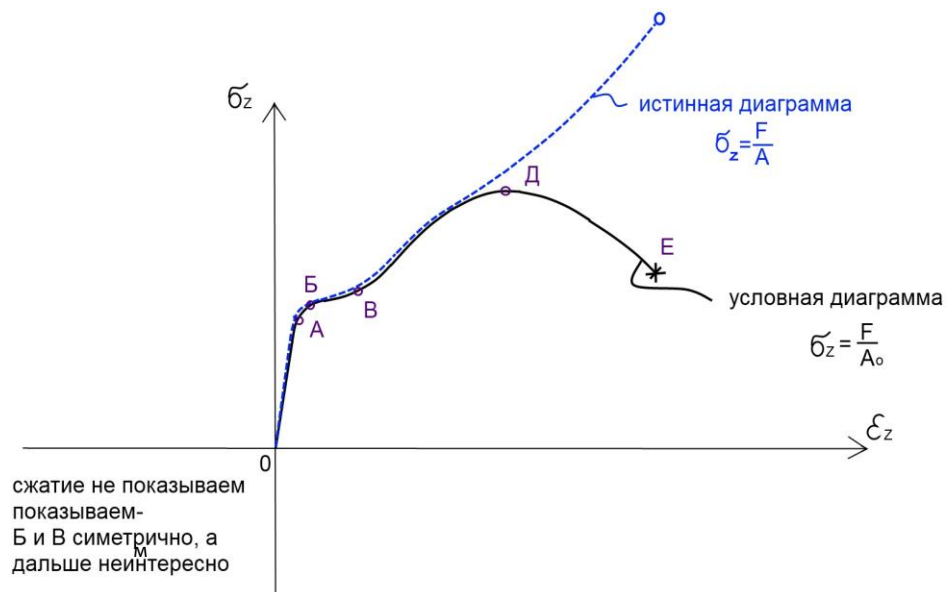
$$\sigma_z \approx \frac{F}{A_o} \quad (\sigma_z \approx \frac{N}{A_o} = |N = F| = \frac{F}{A_o})$$

На самом же деле, стержень утончается при растяжении и утолщается при сжатии. А при напряжениях, выше точки D вообще образуется местное утонение – **шейка** – площадь поперечного сечения и ε_z в которой значительно отличаются от первоначальных.

Если бы мы вычисляли осевое напряжение σ_z делением текущей силы F на текущую площадь поперечного сечения A

$$\sigma_z = \frac{F}{A}$$

то получили бы **истинную** диаграмму растяжения/сжатия:



Puc.II.9.

HO!

- 1) Постоянно замерять текущую площадь поперечного сечения образца (и, особенно, рассчитываемой конструктором детали) для постоянного сравнения с диаграммой – задача трудоёмкая;
- 2) На участке OB (самом используемом) эти диаграммы мало отличаются.

Поэтому на практике всегда пользуются диаграммой условной.

Характерные напряжения условной диаграммы называются **пределами**:

$\sigma_{пц}$ – *предел пропорциональности* – наибольшее напряжение до которого справедлив закон Гука: $\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$;

σ_y – *предел упругости* – наибольшее напряжение, до которого материал проявляет только упругие свойства;

σ_T – *предел текучести* – напряжение, по достижении которого начинается интенсивный рост деформаций без заметного приращения нагрузки (материал «течёт»);

σ_B – *предел прочности* – наибольшее напряжение, которое способен выдержать материал. У пластичных материалов есть только σ_{BP} (далее – шейка и разрыв) и нет σ_{BC} (плющить можно до бесконечности). У хрупких есть и σ_{BP} и σ_{BC} .

$\sigma_{пц} \approx \sigma_y \approx \sigma_T$ — поэтому в расчётах чаще всего используют σ_T .

Примечание:

Предел текучести и предел прочности по диаграмме растяжения определяются однозначно.

Определения пределов пропорциональности и упругости весьма условны. Так эти величины и называются: *условные (технические) характеристики*. Если остановиться на них, то разными исследователями будут названы для одного и того же материала субъективно разные цифры, ведь никаких идеально прямых участков на реальных диаграммах нет и быть не может (вы это видели на первой лабораторной работе), а пластические деформации в отдельных кристаллах возникают с самого начала нагружения.

Необходимы чёткие определения понятий «заканчивается линейный участок» и «проявляются только упругие свойства». Такие определения есть, они рассмотрены ниже, но для их понимания требуется предварительно ознакомиться с физическим явлением «закон разгрузки».

Закон разгрузки

Линия разгрузки пластичного материала представляет собой прямую, параллельную начальному участку диаграммы. Повторное нагружение осуществляется по этой же прямой.

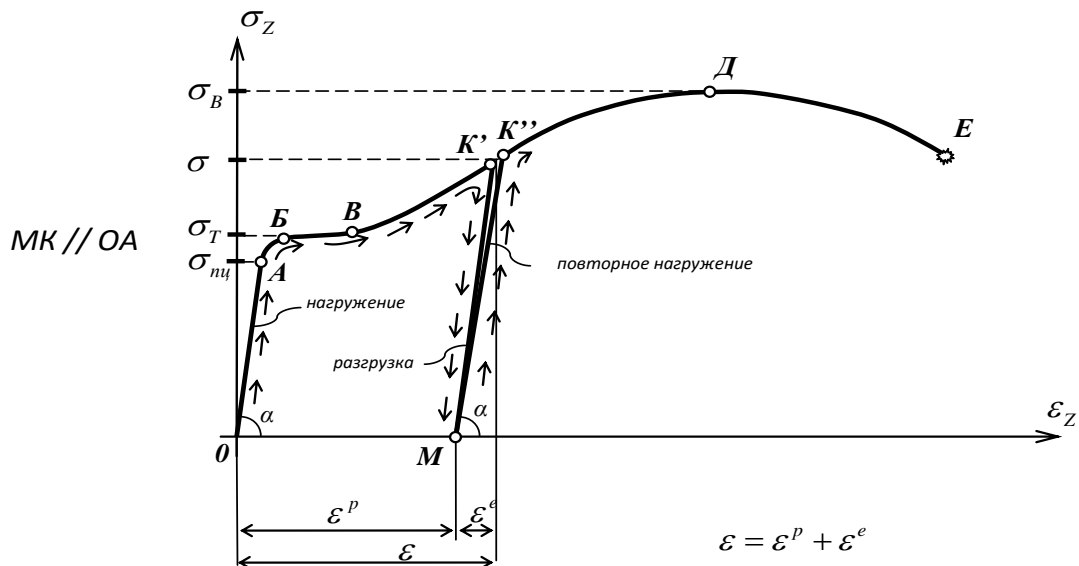
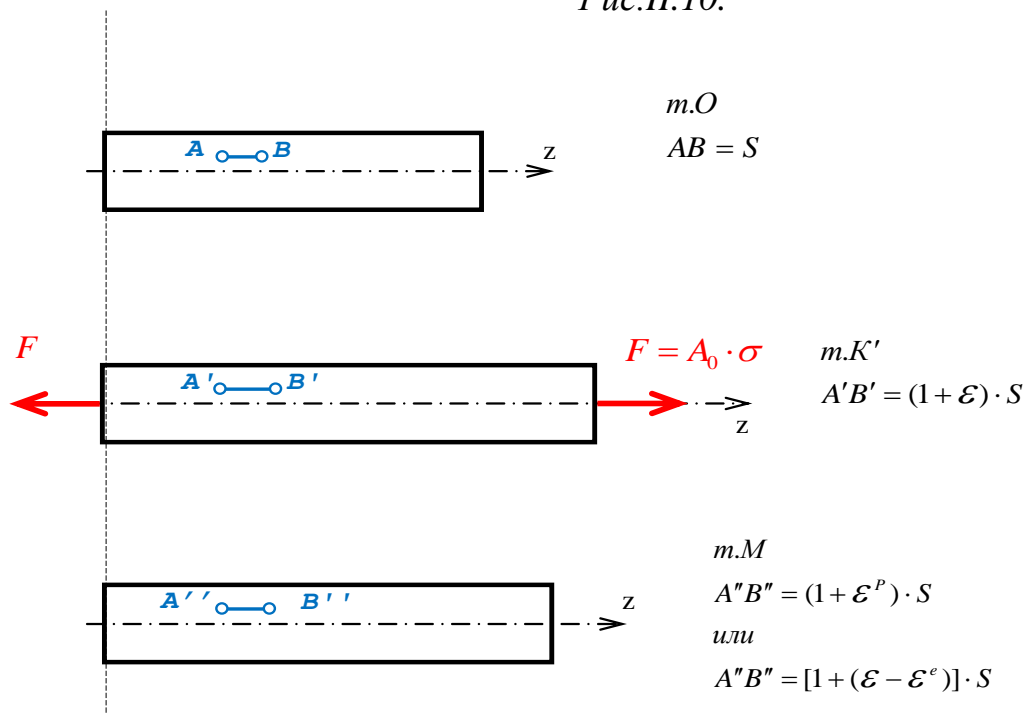


Рис. II.10.



В т. *M* предел текучести материала стержня $\tilde{\sigma}$ уже больше первоначального σ_T . Такое «поднятие» предела текучести, предела упругости и предела пропорциональности предварительным нагружением называется **наклёпом** или **нагартовкой**.

Предел прочности σ_B наклёп изменить не может.

Технические (условные) характеристики механических свойств материалов

Процедура определения условных механических характеристик материалов одинакова для всех отраслей машиностроения. Отличаются цифры, принятые для себя каждой отраслью. Приведём наиболее распространённые:

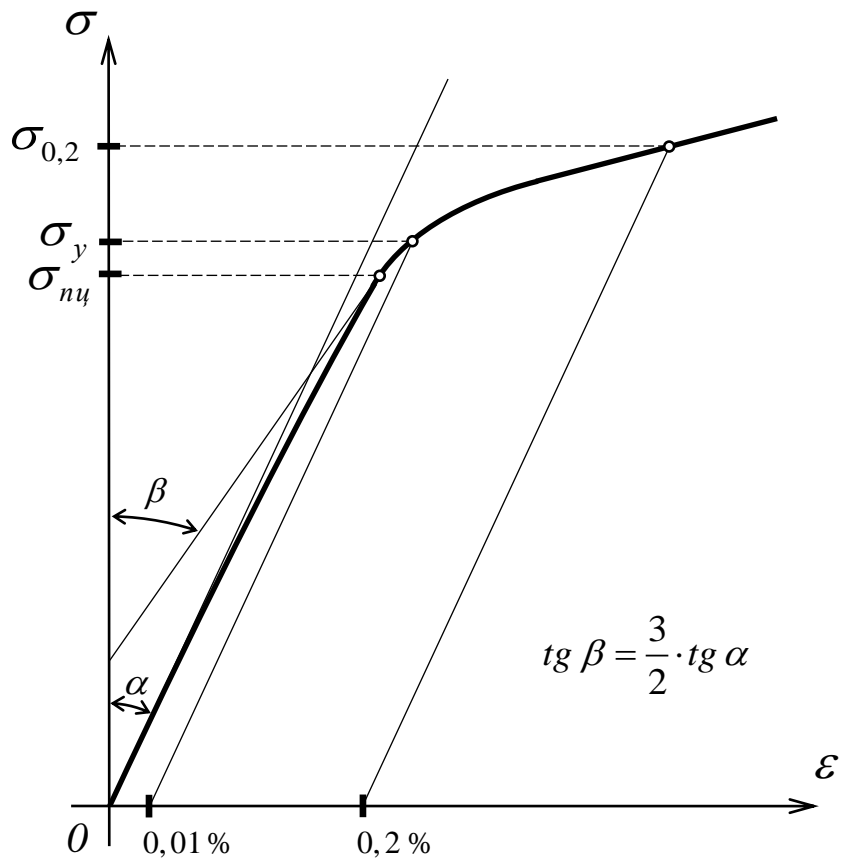


Рис. II.11.

Предел пропорциональности: напряжение, на уровне которого тангенс угла наклона касательной к диаграмме в полтора раза больше тангенса такого же угла в начале нагружения;

Предел упругости: напряжение, при котором остаточные деформации составляют $0,01\% = 0,0001$;

Для сталей, диаграмма нагружения которых не имеет площадки текучести, вводят *условный предел текучести*: напряжение, при котором остаточные деформации составляют $0,2\% = 0,002$.

Схематизация диаграмм

Использовать в прочностных расчётах диаграмму растяжения/сжатия столь сложной формы затруднительно. Да и участок $B-E$ в технике почти не используется. Удобно провести **схематизацию** – заменить реальную диаграмму её упрощённым аналогом.

Схематизация диаграммы малоуглеродистой стали – диаграмма идеального упруго-пластического материала – показана на *рис. II.8*. схематизации диаграмм некоторых других материалов (зона сжатия не показана, она считается симметричной):

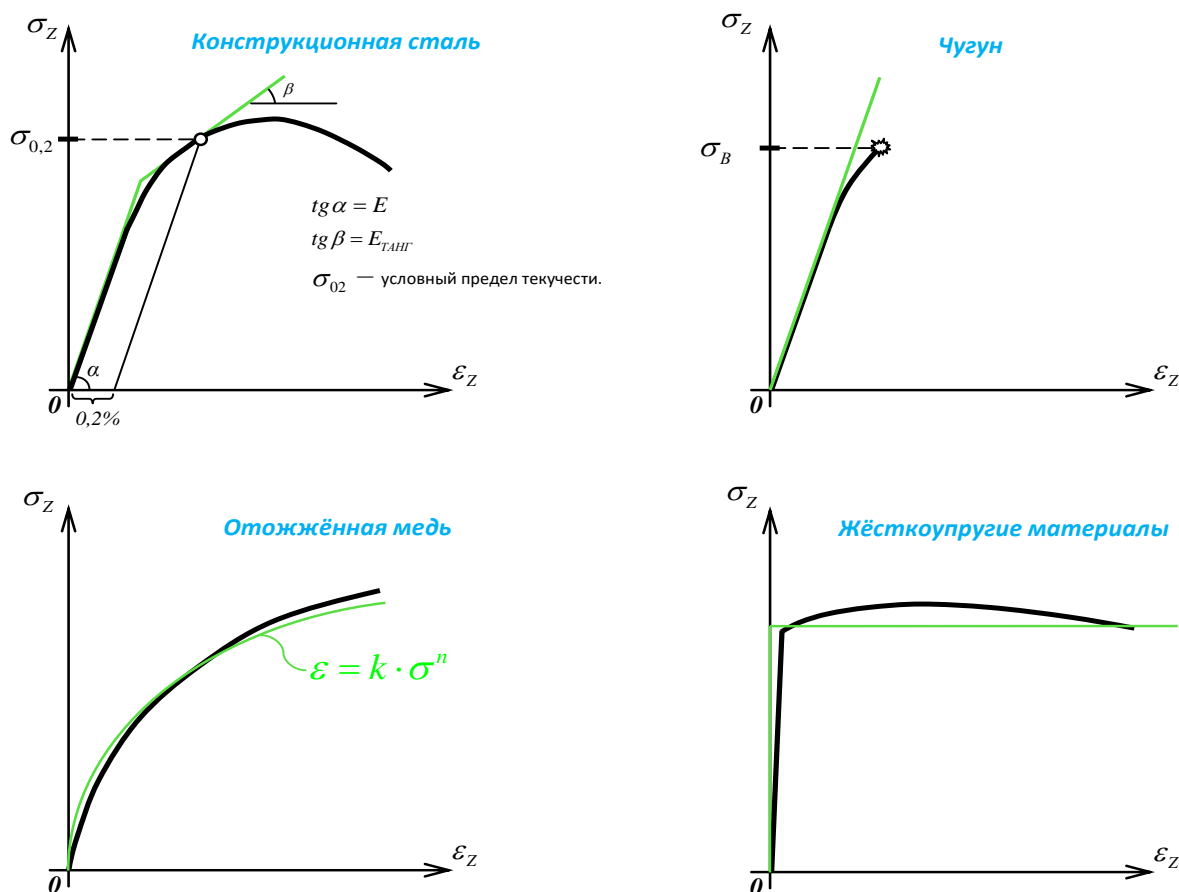


Рис. II.12.

Расчёт на прочность

В зависимости от назначения детали, её способность противостоять разрушению может быть предсказана (рассчитана) двумя способами: 1) *Расчётом по напряжениям*; 2) *Расчётом по нагрузкам*. Первый способ применяется чаще, его рассмотрением и ограничимся в дальнейшем.

Общее условие прочности конструкции:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{пред}} \quad (II.11)$$

где

σ_{\max} — максимальное напряжение в конструкции;

$\sigma_{\text{пред}}$ — предельное напряжение — напряжение, при котором в материале происходят качественные изменения:

$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$ — для пластичных материалов;

$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_B$ — для хрупких материалов.

Расчётный коэффициент запаса прочности показывает во сколько раз ожидаемое максимальное напряжение в конструкции меньше предельного для данного материала:

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\max}} \quad (II.12)$$

n всегда ≥ 1 (условие II.11). Из-за неточности определения нагрузок и погрешностей расчёта реальное напряжение в конструкции может превысить ожидаемое. Из-за отклонения свойств материала от заявленных может понизиться $\sigma_{\text{пред}}$. Для того, чтобы условие II.11 заведомо не нарушалось и предусматривается некоторый запас по прочности. Чем меньше конструктор уверен в достоверности результатов расчёта, тем с большим n он проектирует конструкцию.

Минимально допустимые (из опыта проектирования) значения n законодательно установлены для каждой отрасли и называются **нормативными коэффициентами запаса прочности**:

$$[n] = n_{\min} \quad (II.13)$$

Условие *гарантированной* прочности конструкции:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (II.14)$$

где

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]} \text{ — } \text{допустимое напряжение.}$$



При своём создании конструкция проходит через два расчёта:

I) **Проектировочный**:

Составляется общая схема будущего изделия (компоновка); размеры деталей подбираются такими, чтобы удовлетворить условию гарантированной прочности (II.14).

Выпускаются чертежи.

II) **Проверочный (поверочный)**:

По размерам деталей на чертежах вычисляются расчётные коэффициенты запасов прочности n деталей. Все вычисленные n должны быть больше, или равны $[n]$, только тогда изделие идёт в производство.

Наименьший из вычисленных при проверочном расчёте n называется коэффициентом запаса прочности всей конструкции.

Расчёт несущей способности упруго-пластических конструкций

(«расчёт по предельным нагрузкам»)

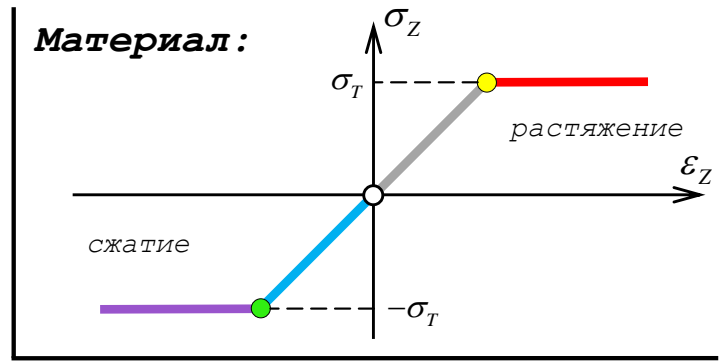
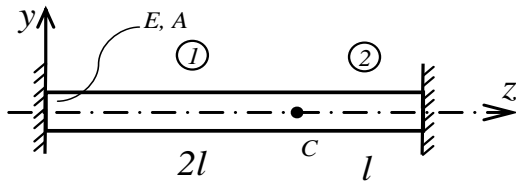
Большинство элементов конструкций и деталей машин работают упруго.

Есть, однако, такие, в которых допускаются небольшие пластические деформации: корпуса турбин, заклёпочные швы и т.д.

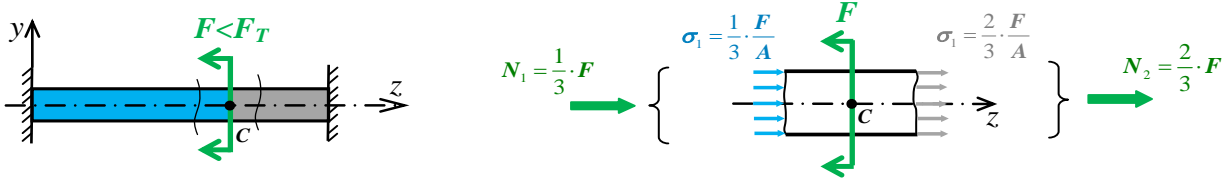
Пока не потеряна упругая связь области приложения нагрузки с опорами, конструкция способна удерживать возрастающую нагрузку, даже имея «потёкшие» части.

II.4 Цвет участков соответствует деформациям:

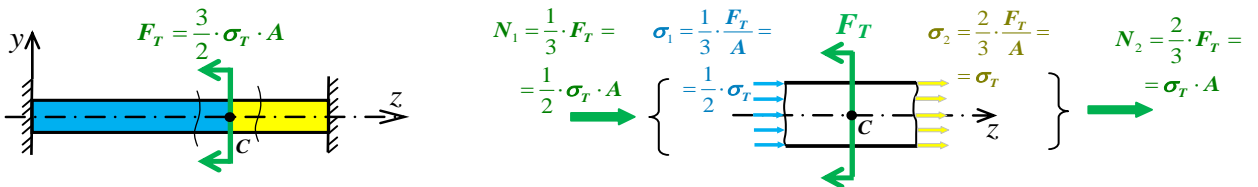
а) Конструкция не нагружена:



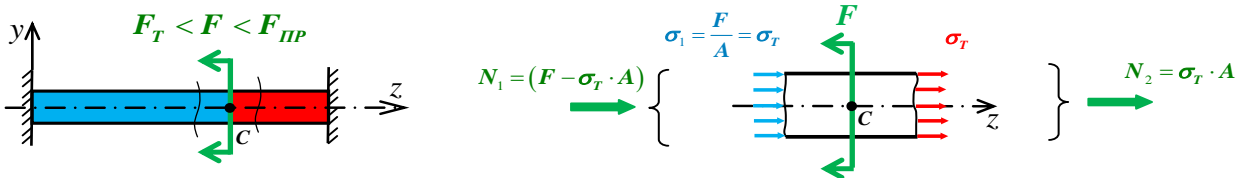
б) Оба участка упруги:



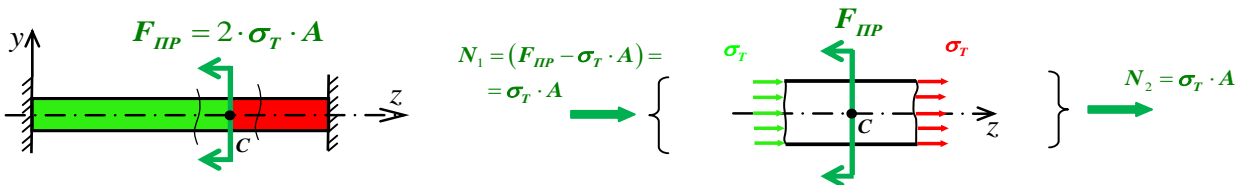
в) Второй участок на пределе упругости:



г) Второй участок течёт:



д) Первый участок на пределе упругости, второй течёт (предельное состояние):



е) Механизм – оба участка текут:

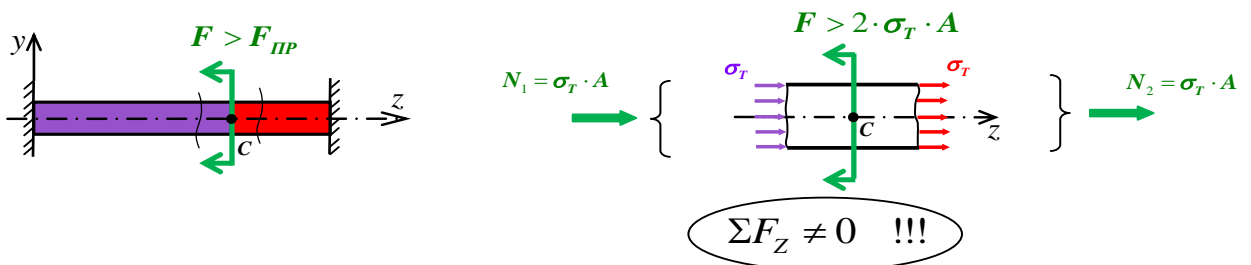


Рис. II.13.

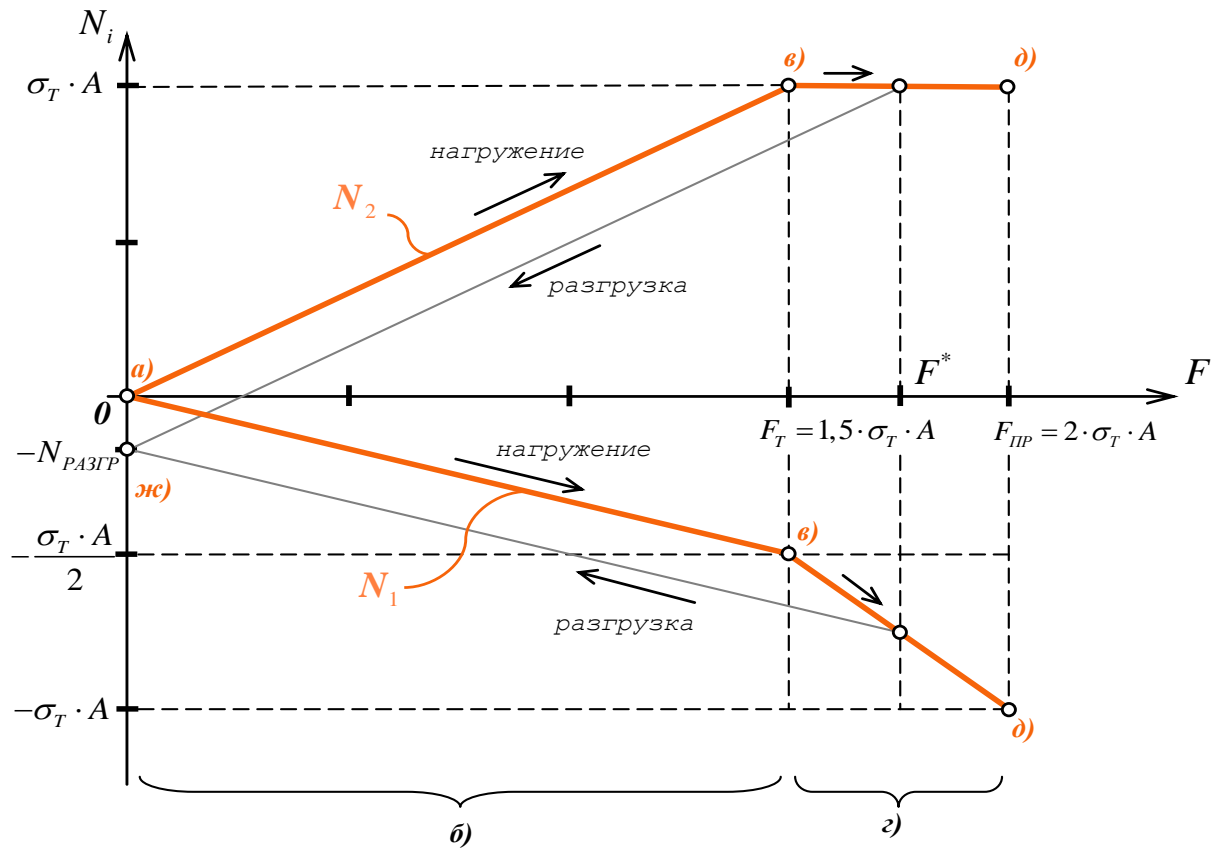
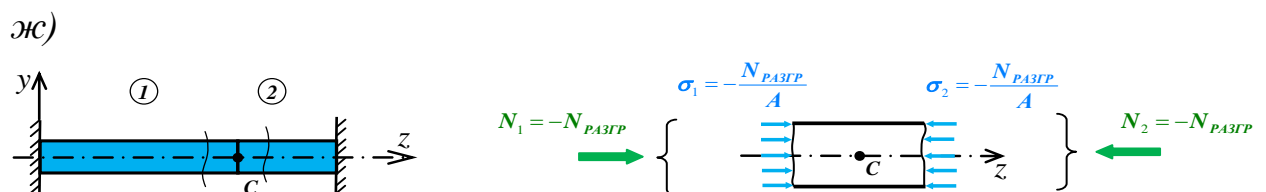


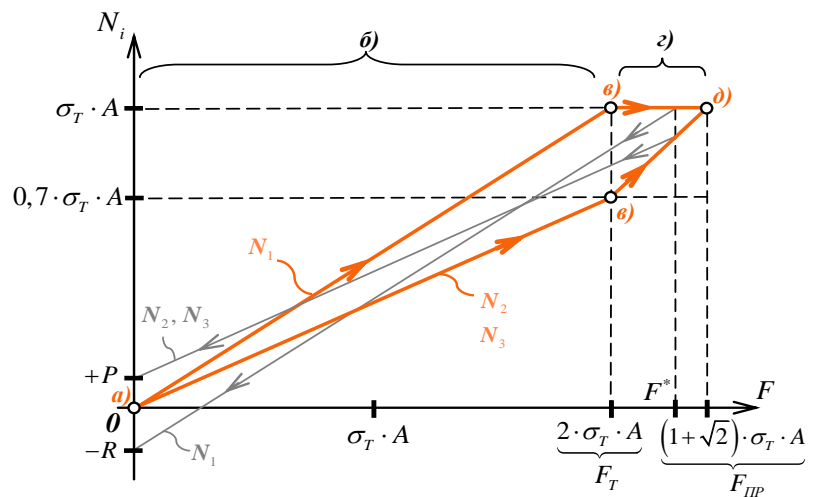
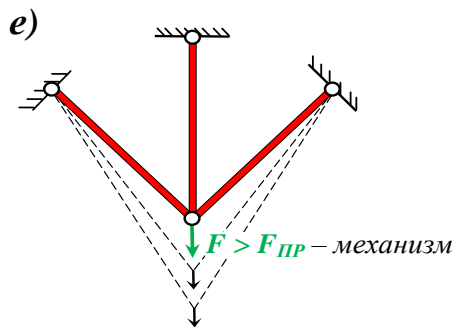
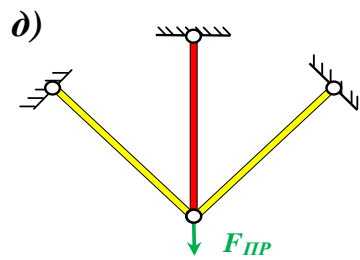
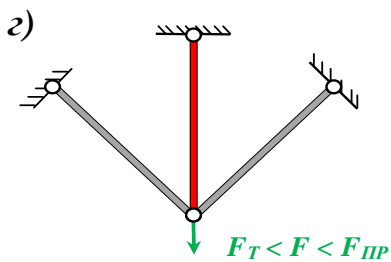
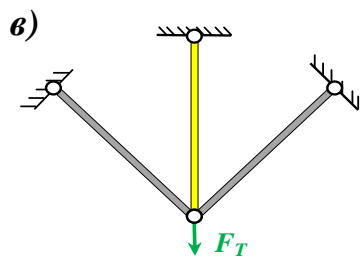
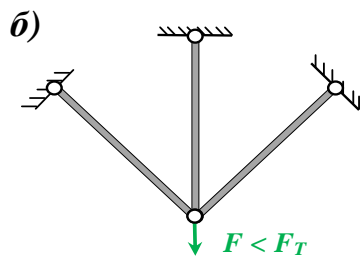
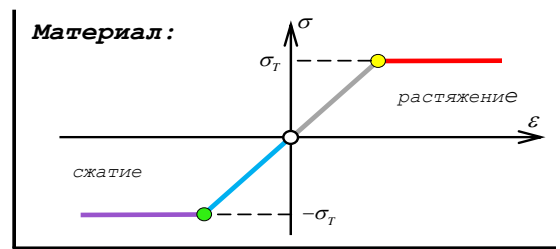
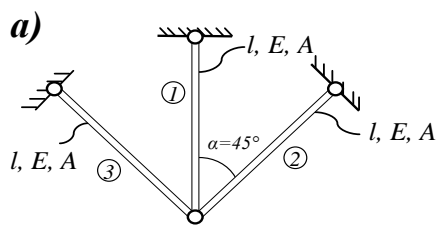
Рис. II.14.

Если на стадии “г)” остановить возрастание нагрузки (допустим, при значении $F=F^*$) и медленно разгрузить конструкцию, то напряжение σ_i , внутренние силы N_i и перемещения точек стержней w_i , подчиняясь закону разгрузки (рис. II.10.) будут убывать по прямым, параллельным начальным (рис. II.14.).

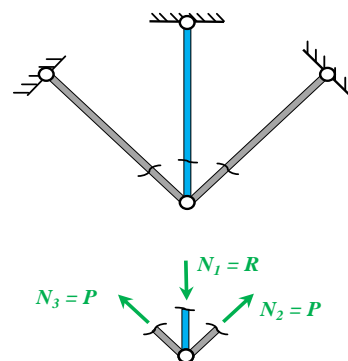
При этом в участке ② накопились остаточные пластические деформации ε^P (подобные рис. II.10., т. М). Пытаясь раздвинуть свои поперечные сечения на длину, большую первоначальной, участок ② сжимает участок ① и сам остается сжатым:



II.5 Цвет стержней соответствует деформациям:

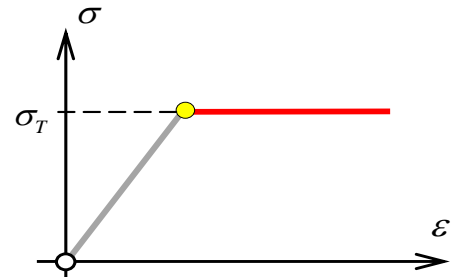
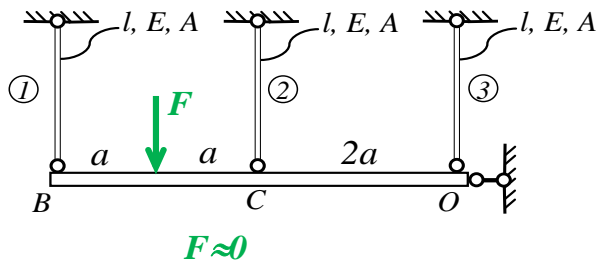


разгрузка

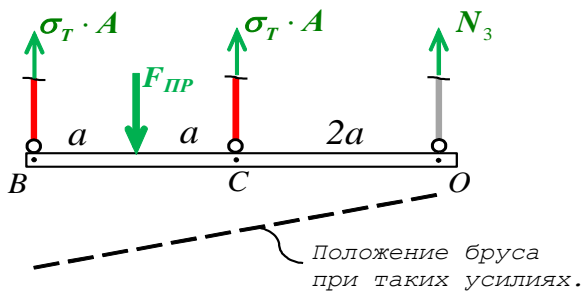


Значение предельной нагрузки можно определить без поэтапного расчёта. Следует рассмотреть все возможные варианты предельных состояний и выбрать тот, для поддержания которого требуется *минимальная* нагрузка.

II.6 Цвет стержней соответствует деформациям:



Вариант 1 — начинают течь первый и второй участки:

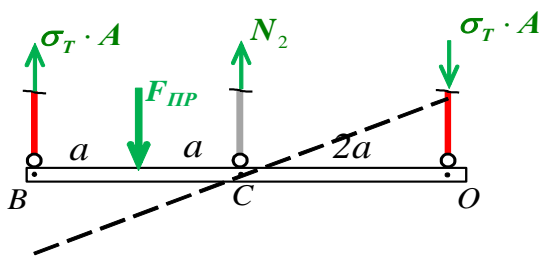


$$\begin{aligned}\sum M_0 &= 0 = \\ &= -\sigma_T \cdot A \cdot 4 \cdot a + F_{пр} \cdot 3 \cdot a - \\ &\quad - \sigma_T \cdot A \cdot 2 \cdot a\end{aligned}$$

$$F_{пр} = 2 \cdot \sigma_T \cdot A$$

$F_{пр\min}$

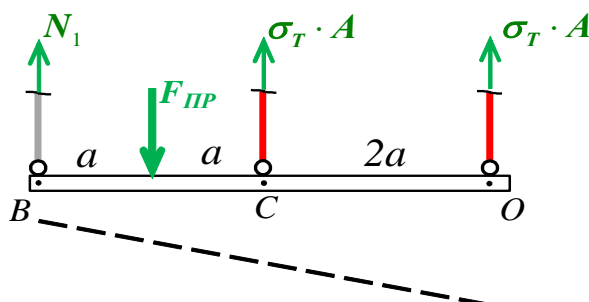
Вариант 2 — начинают течь первый и третий участки :



$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0 = \\ &= -\sigma_T \cdot A \cdot 2 \cdot a + F_{пр} \cdot a - \\ &\quad - \sigma_T \cdot A \cdot 2 \cdot a\end{aligned}$$

$$F_{пр} = 4 \cdot \sigma_T \cdot A$$

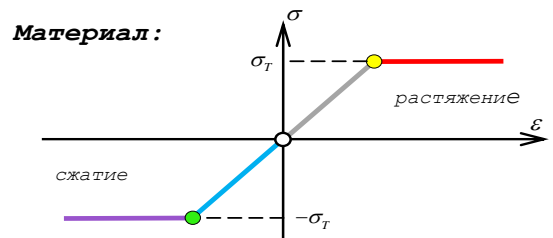
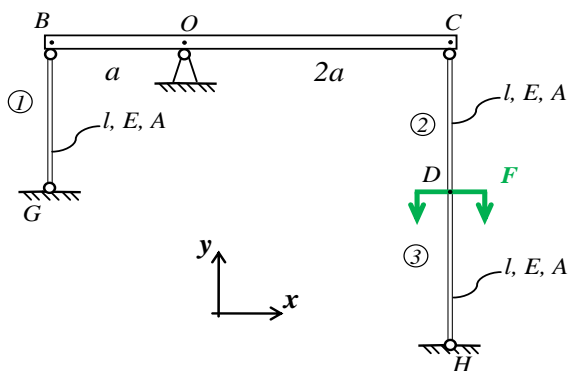
Вариант 3 — начинают второй и третий участки:



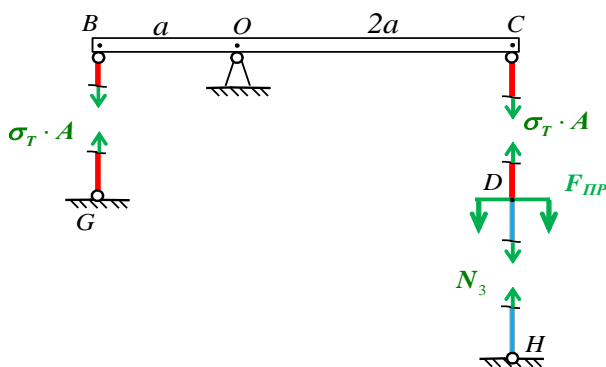
$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 = \\ &= -F_{пр} \cdot a + \sigma_T \cdot A \cdot 2 \cdot a + \\ &\quad + \sigma_T \cdot A \cdot 4 \cdot a\end{aligned}$$

$$F_{пр} = 6 \cdot \sigma_T \cdot A$$

II.7 Цвет стержней соответствует деформациям:

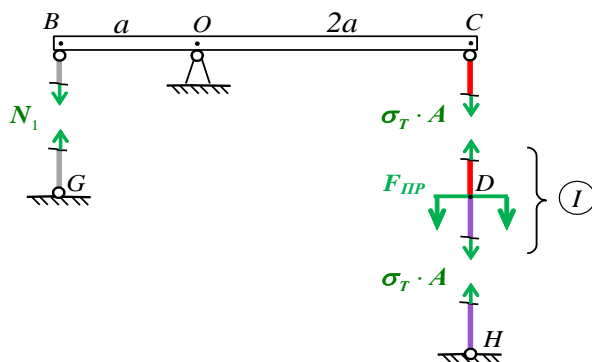


Вариант 1 — начинают течь первый и второй участки:



$\sum M_0 \neq 0$ – нереализуемо;

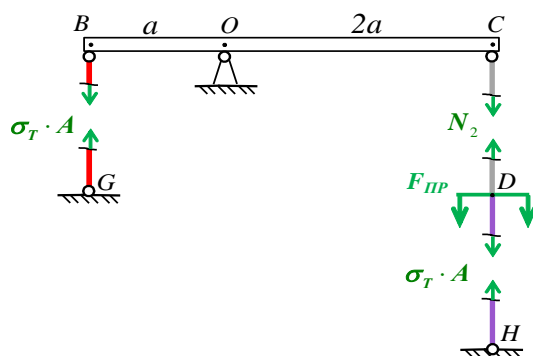
Вариант 2 — начинают течь второй и третий участки:



$$\textcircled{I}: \sum F_y = 0 = -F_{нр} + \sigma_T \cdot A + \sigma_T \cdot A;$$

$$F_{нр} = 2 \cdot \sigma_T \cdot A$$

Вариант 3 — начинают течь первый и третий участки:

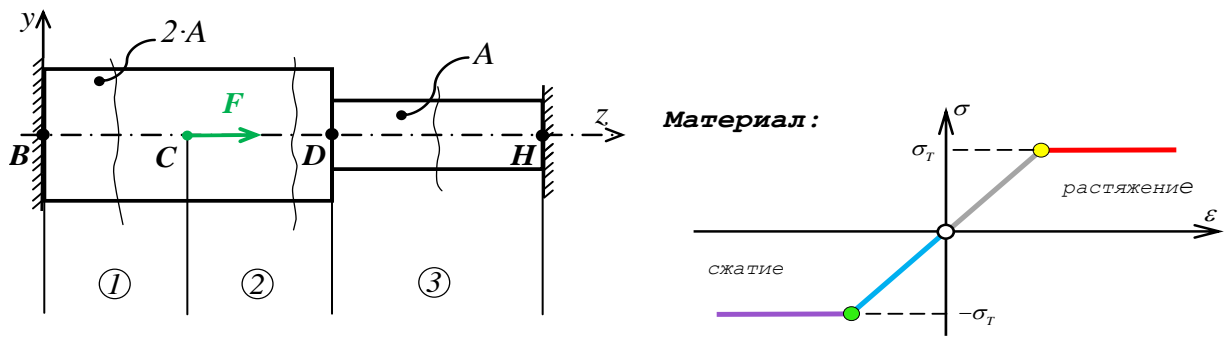


$$\sum M_0 = 0 = \sigma_T \cdot A \cdot a - F_{нр} \cdot 2 \cdot a + \sigma_T \cdot A \cdot 2 \cdot a;$$

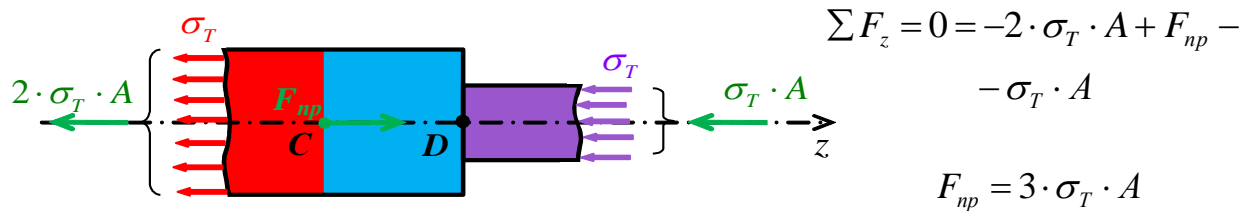
$$F_{нр} = \frac{3}{2} \cdot \sigma_T \cdot A$$

$F_{нр_{\min}}$

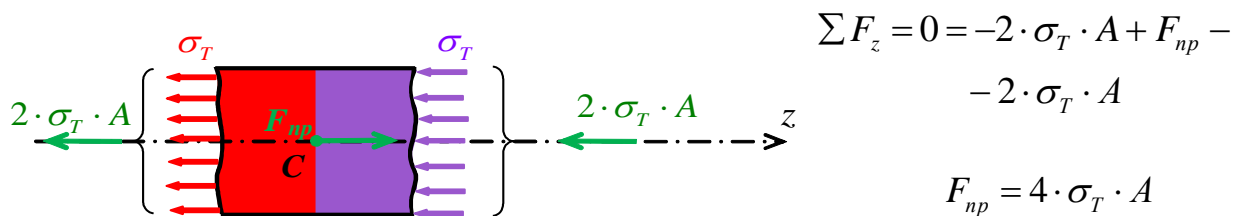
II.8 Цвета участков соответствуют деформациям:



Вариант 1 — начинают течь первый и третий участки:



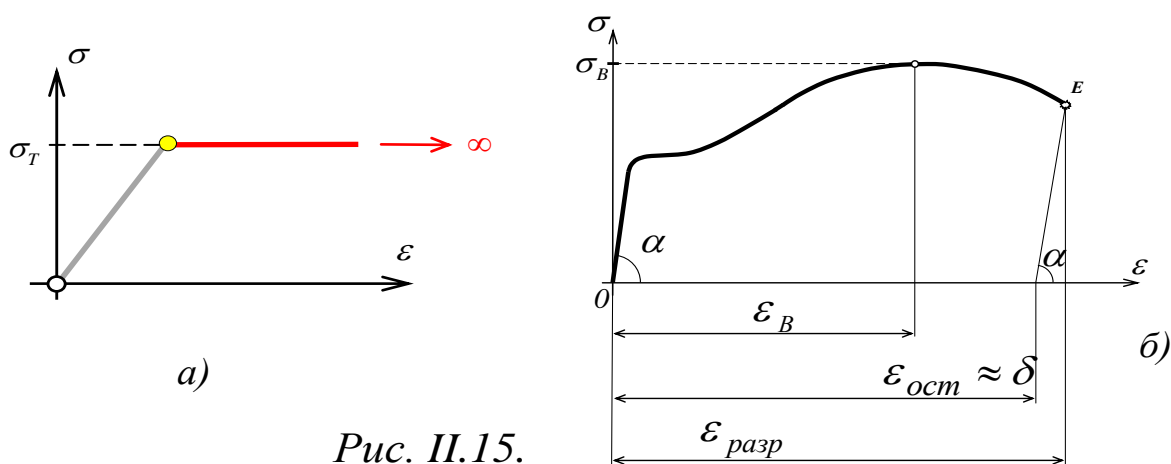
Вариант 2 – начинают течь первый и второй участки:



$F_{np_{min}} = 3 \cdot \sigma_T \cdot A$, значит, на практике реализуется Вариант 1.

Характеристики пластичности материалов при растяжении

Примеры [II.4](#) ... [II.8](#) решены в предположении о том, что «потёкший» стержень тянуться (сокращаться) может до бесконечности (рис. II.15а.). А это, естественно, не так. При каком-то ε_A начинается процесс разрушения (рис. II.15б.).



В этом случае используют справочную характеристику, называемую **относительное удлинение при разрыве**:

$$\delta = \frac{l_e - l_0}{l_0} \cdot 100\% \quad (II.15)$$

Образец до и после испытания на растяжение (1, 2 и 3 – поперечные сечения до нагружения, смещающиеся в положения 1', 2' и 3' соответственно после нагружения):

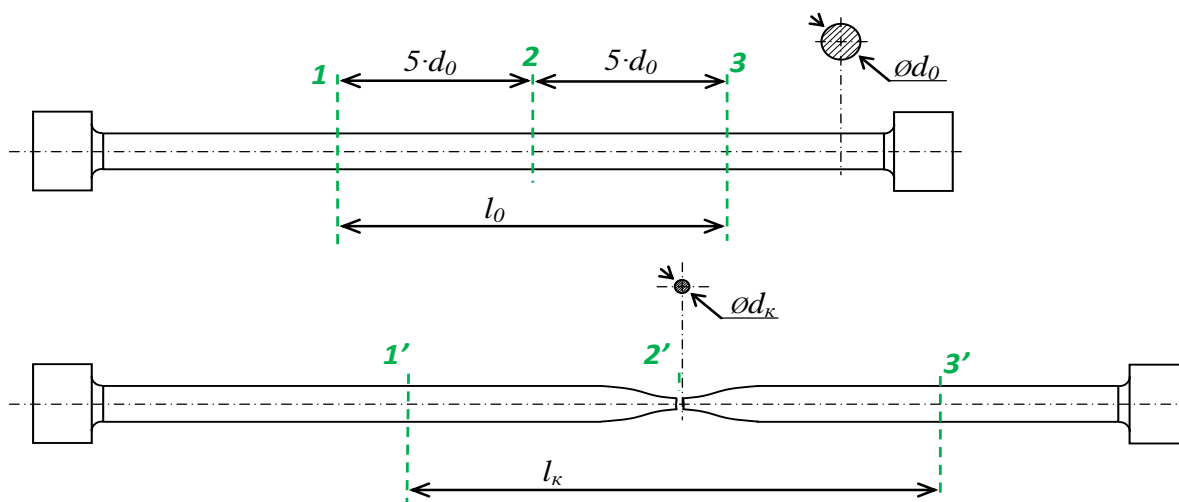


Рис. II.16.

Относительное удлинение при разрыве δ примерно равно остаточной деформации при разрушении $\varepsilon_{ост}$ (рис. II.15б.).

δ - основная характеристика пластичных свойств материала (отожжённая медь, например, имеет $\delta = 60\%$; материал с $\delta > 8\%$ уже можно считать пластичным). Однако для специалистов, занимающихся штамповкой или волочением, одной этой величины бывает недостаточно.

Второй характеристикой пластичности материала является **относительное сужение при разрыве**:

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100\% \quad (II.16)$$

где (см. рис. II.16.)

$A_0 = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4}$ - поперечное сечение рабочей части образца до испытания;

$A_{\varepsilon} = \frac{\pi \cdot d_{\varepsilon}^2}{4}$ - наименьшее поперечное сечение рабочей части образца после испытания.

Ни в какие расчётные формулы ψ и δ не входят.

Величину δ , впрочем, за неимением лучшей справочной информации инженеры используют при схематизации диаграмм деформирования материала для определения ε_B (рис. II.15б.):

$$\varepsilon_B \approx \delta + \frac{\sigma_B}{E} \quad (II.17)$$

Влияние различных факторов на механические характеристики материалов при растяжении и сжатии

Диаграммы растяжения или сжатия, приведенные ранее, получены при определённых условиях: комнатной температуре, статическом нагружении (силы инерции ничтожно малы) без остановок в процессе испытания.

Подобную нагрузку испытывают большинство деталей машин, работающих рядом с нами. Но не все. Детали двигателей, например, работают в экстремальных условиях. Случается, что и весь аппарат для таких условий работы создан (ракета, например). Иногда необходимо моделировать поведение проектируемого изделия в аварийных ситуациях.

Нужно знать факторы, изменяющие механические свойства привычных для нас материалов и степень их влияния на эти свойства. Эти факторы:

- скорость изменения нагрузки;
- температура;
- период нагружения.

Скорость изменения нагрузки:

В этом случае различают «статическое нагружение» и «быстрое нагружение». Определение зависит от того, успевают ли в процессе нагружения пластические деформации реализоваться в полной мере или нет. В первом случае материал проявляет пластические свойства, во втором ведёт себя, как хрупкий и более прочный (рис. II.17). Качественно так же на металл влияет, например, закалка – он становится хрупким и более прочным.

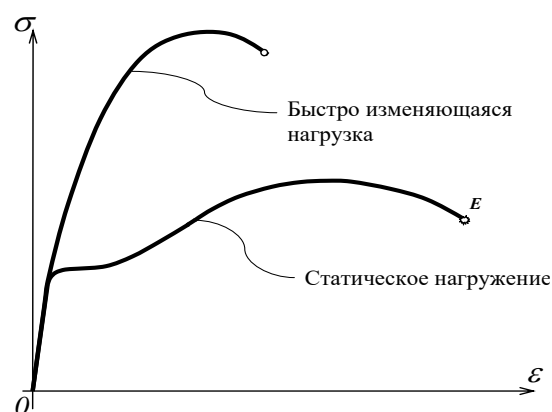


Рис. II.17.

Температура:

С повышением температуры металла уменьшаются его модуль упругости E , предел текучести σ_T (или σ_{02}) и предел прочности σ_B . На этом эффекте, кстати, основана ковка. Меняются они, примерно так, как показано на *рис. II.18*.

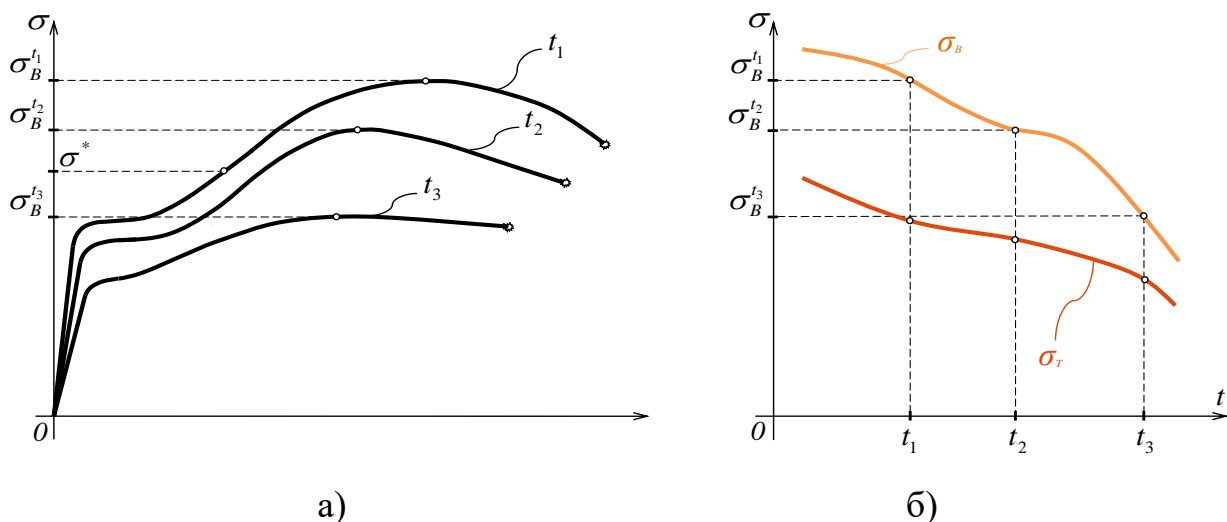


Рис. II.18.

Следует, однако, заметить, что изменение механических свойств материала «отстаёт» от изменения температуры. Графики, показанные на *рис. II.18a*, получены при условии длительной выдержки металла при указанной температуре перед испытаниями.

Поэтому, например, в ракетостроении, где нагрев изделий при эксплуатации происходит очень быстро, пренебрегают изменением свойств материала, если нагрев произошёл за 5-10 минут до расчётного периода.

Период нагружения:

Зависимости, показанные на *рис. II.18.* получены на основе наблюдений за всё время эксперимента. Эксперимент длится минуты. Действительно в продолжении этого времени образец под действием, допустим, напряжения σ^* (*рис. II.18a.*), не сломается. А, если под действием этого напряжения его оставить в испытательной машине на 100 часов? 1000 часов? 10000 часов? Не факт, что не лопнет.

При высоких температурах (свыше 300°C) необходимы исследования **длительной прочности** с коррекцией обеих кривых $\sigma_T(t^\circ)$ $\sigma_B(t^\circ)$. Кривые длительной прочности для стали 12МХ показаны на *рис. II.19.* Предел прочности, как функция времени и температуры называется **пределом длительной прочности**.

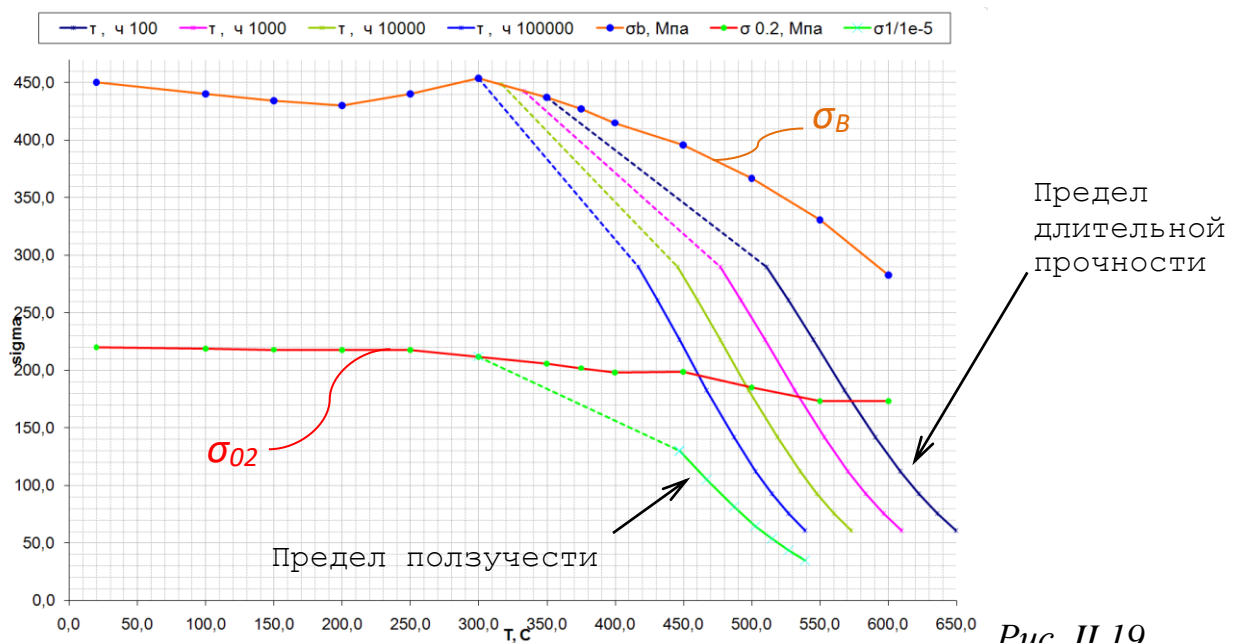


Рис. II.19.

Столь обширные экспериментальные исследования чрезвычайно дороги. Поэтому, чаще всего, построение кривых длительной прочности проводят по приближённым методикам, например Ларсона-Миллера.

Предел текучести, как функция времени и температуры называется **пределом ползучести**. Его изучением (как и явлением ползучести вообще) занимается отдельная наука **Теория ползучести**.