

## Домашняя работа к занятию 29.

**1.1** Покажите, что любое решение уравнения  $y'' + e^{-x}y = 0$  является колеблющимся на интервале  $[0; +\infty)$ . Покажите, что расстояние между последовательными нулями любого решения больше, чем  $\pi$ , и увеличивается с ростом  $x$ . Покажите, что при  $x \rightarrow -\infty$  расстояние между последовательными нулями любого решения стремится к нулю.

**1.2** Покажите, что расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения  $x^2y'' - 2xy' + (3 + 4x^2)y = 0$  меньше  $\frac{\pi}{2}$  и при  $x \rightarrow \pm\infty$  как угодно близко к  $\frac{\pi}{2}$ .

**2.1** Покажите, что при условии  $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$  расстояние между соседними нулями функции Бесселя  $J_\nu(x)$  меньше  $\pi$  и становится как угодно близким к  $\pi$  при достаточно больших значениях  $x$ . Покажите, что при условии  $\nu > \frac{1}{2}$  расстояние между соседними нулями функции Бесселя  $J_\nu(x)$  больше  $\pi$  и становится как угодно близким к  $\pi$  при достаточно больших значениях  $x$ .

**3.1** Оценивая снизу число нулей уравнения  $y'' - 2e^xy' + e^{2x}y = 0$  на отрезке  $[\varepsilon; 10]$ , мы получаем функцию  $N(\varepsilon)$ . При каком значении  $\varepsilon$  эта оценка гарантирует наибольшее число нулей? Оцените число нулей данного уравнения на отрезке  $[0; 10]$ .

## Ответы и указания.

**1.2** *Указание:* замена  $y = x \cdot u$  приводит уравнение к виду  $u'' + (\frac{3}{x^2} + 4)u = 0$ . Сравниваем с уравнением  $u'' + 4u = 0$ , у которого расстояние между нулями решения равно  $\frac{\pi}{2}$ .

**2.1 Указание:** замена  $u(x) = \frac{J_\nu(x)}{\sqrt{x}}$  приводит уравнение Бесселя к виду  $u'' + (1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2})u = 0$ . Сравниваем с уравнением  $u'' + (1 \pm \varepsilon)u = 0$ , у которого расстояние между нулями решения близко к  $\pi$  при  $\varepsilon$  близких к нулю.

**3.1 Указание:** сравнивая с уравнением  $y'' + e^{2x}y = 0$ , получаем оценку снизу  $N(\varepsilon) = \frac{10 - \varepsilon}{\pi}e^\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 9$  получаем наибольшее значение функции  $N(9) = \frac{e^9}{\pi} \approx 3570$