Самостоятельная работа к занятию 24

1. Найдите собственные функции оператора. Сформулируйте теорему Стеклова.

$$\begin{cases} L[y] = y'' \\ y(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \end{cases}$$

2. Найдите собственные функции оператора. Сформулируйте условие ортогональности. Сформулируйте теорему Стеклова.

$$\begin{cases} L[y] = x^2 y'' + xy' \\ y'(1) = 0, \quad y'(l) = 0. \end{cases}$$

Ответы и указания

1. $\lambda_n = -\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2$, $e_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x$, $n \in \mathbb{N}$

Если $f(x) \in C^2(0;l)$ и $f(0) = 0$, $f'(l) = 0$, то $f(x)$ допускает разложение в равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x,$$

где

$$c_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x dx$$

2. $\lambda_0 = 0$, $e_0(x) \equiv 1$;

$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{\ln l}\right)^2$, $e_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n}{\ln l}\ln x\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Приводим оператор к самосопряженному виду: $(xy')' = \lambda y/x$.

Ортогональность с весом $\rho(x) = 1/x$.

$$(e_n, e_m) = \int\limits_1^l \frac{1}{x} e_n(x) e_m(x) dx = 0,\ n \neq m,$$

$$(e_0, e_0) = \int\limits_1^l \frac{1}{x} dx = \ln l, \quad (e_n, e_n) = \int\limits_1^l \frac{1}{x} e_n^2(x) dx = \frac{\ln l}{2},\ n \in \mathbb{N}$$

Если $f(x) \in C^2(1; l)$ и $f'(1) = 0$, $f'(l) = 0$, то $f(x)$ допускает разложение в равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ln l} \ln x\right),$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\ln l} \int\limits_1^l \frac{1}{x} f(x) dx; \quad c_n = \frac{2}{\ln l} \int\limits_1^l \frac{1}{x} f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{\ln l} \ln x\right) dx,\ n \in \mathbb{N}$$