1. Магнитостатика

Урок 20

Магнитное поле в среде *Закон Био–Савара* в среде:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{c}\frac{J\left[d\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{r}\right]}{r^3} = \frac{\mu}{c}\frac{\left[\mathbf{j}\times\mathbf{r}\right]dV}{r^3} = \frac{\mu\left[\mathbf{v}\times\mathbf{r}\right]}{cr^3}dq.$$

Сила Ампера в среде:

$$d\mathbf{F} = \frac{J\left[d\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}\right]}{c} = \frac{\left[\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right]dV}{c} = \frac{\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right]dq}{c}.$$

Вектор намагниченности $\mathbf{M}$ – средний магнитный момент единицы объема

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}dV,\ \ \mathbf{j}_{\text{мол}} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M};$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}.$$

Дифференциальные уравнения Максвела в среде:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0,\ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\ \text{где}\ \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}.$$

В интегральной форме:

$$\oiint B_n dS = 0,\ \ \oint H_l dl = \frac{4\pi}{c}\iint j_n dS.$$

Граничные условия:

$$B_{1n}| = B_{2n}|,\ \ \mathbf{H}_{1\tau}| - \mathbf{H}_{2\tau}| = \frac{4\pi}{c}\left[\mathbf{I}_{\text{пов}}\times\mathbf{n}_{21}\right].$$

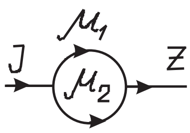
Магнитная проницаемость $\mu = 1$ – вакуум, $\mu \gtrsim 1$ – парамагнетик, $\mu \lesssim 1$ – диамагнетик, $\mu = 0$ – сверхпроводник (эффект Мейснера), $\mu \gg 1$ – ферромагнетик.
Энергия магнитного поля $W = \int \frac{\mu H^2}{8\pi}dV$, сила давления магнитного поля $F_n = \int p dS = \int \frac{\mu H^2}{8\pi}dS$.
Правила Кирхгофа для потока магнитного поля:

$$\sum \Phi_k = 0,\ \ \sum \mathcal{E}_M = \sum \Phi_k J_k,$$

где

$$\mathcal{E}_M = \frac{4\pi}{c}JN.$$

1.1. (Задача 5.1) В пространстве, заполненном магнетиком с проницаемостью



μ_1, расположен бесконечный прямолинейный проводник с током J вдоль оси Z. Проводящая сфера с центром в начале координат (радиус a) заменяет соответствующую часть линейного проводника. Внутри сферы – магнетик с проницаемостью μ_2. Найти **B** и **H** всюду.

Решение В силу осевой симметрии силовые линии магнитного поля имеют только α-составляющую т. е.

$$H_z = H_r = 0.$$

Записывая теорему Стокса с использованием интеграла по силовой линии вне сферы и проводника мы получим

$$\oint \mathbf{H} d\boldsymbol{\ell} = H_\alpha 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I,$$

откуда

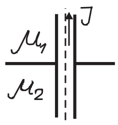
$$H_\alpha = \frac{2J}{cr}, \quad \mathbf{B}_\alpha = \mu_1 \mathbf{H}_\alpha.$$

Внутри сферы

$$\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = 0.$$

Легко показать, что на сфере выполняются все граничные условия - непрерывность нормальной составляющей **B** (она равна нулю с обеих сторон поверхности), и граничное условие для $\mathbf{H}_\tau$. Покажите это сами.

1.2. (Задача 5.2) Цилиндрический проводник радиуса a проходит перпендикулярно через плоскую границу раздела двух магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2. По проводнику идет постоянный ток J. Найти распределение полей **H** и **B** во всем пространстве.



Решение Так же как и в предыдущей задаче система осесимметрична, поэтому $H_r = H_z = B_r = B_z = 0$ всюду. Отлична от нуля только α-составляющая **H** и **B**. Предположим также, что ток распределен равномерно по сечению проводника. Тогда, используя теорему Стокса, мы можем записать внутри проводника $r \leqslant a$

$$\oint \mathbf{H} d\boldsymbol{\ell} = H_\alpha 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \frac{J\pi r^2}{\pi a^2},$$

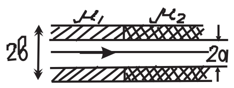
откуда

$$H_\alpha = B_\alpha = \frac{2Jr}{ca^2}, \quad \text{при} \quad r \leqslant a.$$

Снаружи при $r > a$

$$H_\alpha = \frac{2J}{cr} \text{ и } B_\alpha = \frac{2\mu_1 J}{cr} \text{ для } z > 0 \text{ и } B_\alpha = \frac{2\mu_2 J}{cr} \text{ для } z < 0.$$

1.3. (Задача 5.3) Прямой провод с постоянным током J проходит по оси симметрии толстой трубы с радиусами a, b $(a < b)$. Одна половина трубы имеет магнитную проницаемость μ_1, вторая – μ_2. Найти **B** во всем пространстве.



Решение Задача решается аналогично предыдущим. $B_r = B_z = 0$ всюду, $(B_\alpha)_i = \mu_i \frac{2J}{cr}$ для $i = 1, 2$ при $a \leqslant r \leqslant b$; $B_\alpha = \frac{2J}{cr}$ в остальном пространстве.

1.4. (Задача 5.4) Ток J течет по прямолинейному проводу, совпадающему с осью Z. От оси расходятся веерообразно три полуплоскости, образующие три двугранных угла α_1, α_2, α_3, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi)$. Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным магнетиком с магнитными проницаемостями соответственно μ_1, μ_2, μ_3. Определить магнитное поле во всем пространстве.

Решение Предположим, что по-прежнему имеется только α-ая составляющая векторов **B** и **H**. Используя теорему Стокса для окружности с центром на проводе, получим (подразумевая $H_i = H_{\alpha,i}$)

$$\sum_i H_i r \alpha_i = \frac{4\pi}{c} J = r \sum_i H_i \alpha_i.$$

Умножая и деля каждый член под суммой на μ_i, получим

$$\frac{4\pi J}{cr} = \sum_i H_i \alpha_i = \sum_i \frac{\mu_i}{\mu_i} H_i \alpha_i,$$

используя определение $B_i = \mu_i H_i$ и непрерывность нормальных компонент (т. е. B_α) на каждой из границ, выражение перепишется в виде

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_\alpha = \frac{2J}{cr} \frac{2\pi}{(\alpha_1/\mu_1 + \alpha_2/\mu_2 + \alpha_3/\mu_3)}.$$

$$H_{\alpha,i} = B_\alpha / \mu_i, \; i = 1, 2, 3.$$

1.5. (Задача 5.5) Найти магнитное поле в тонкой плоской щели, если поле в среде (μ) можно считать однородным.

Решение Предположим, что поле в среде вдали от щели направлено под углом θ к нормали к щели и обозначим индексом 0 поле в щели, а индексом 1 поле в среде. Тогда из граничных условий можно написать

$$
\begin{aligned}
H_{0n} =& B_{n1} = B\cos\theta \\
H_{0\tau} =& H_{1\tau} = \frac{B_{1\tau}}{\mu} = \frac{B}{\mu}\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Это можно записать в векторном виде

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{n}\left(\mathbf{Bn}\right) + \frac{1}{\mu}\mathbf{n}\times\left[\mathbf{B}\times\mathbf{n}\right],$$

или используя известное соотношение для двойного векторного произведения, можно это выражение переписать в виде

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\mathbf{Bn}\right)\mathbf{n}.$$

1.6. (Задача 5.7) В однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$ вносится шар радиуса a с магнитной проницаемостью μ_1. Определить результирующее поде, индуцированный магнитный момент шара $\mathbf{m}$ и плотность токов $\mathbf{j}_{\text{мол}}$, эквивалентных приобретаемой шаром намагниченности. Магнитная проницаемость окружающей среды μ_2.

Решение В области, в которой нет токов, магнитное поле определяется системой уравнений

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0;$$

С граничными условиями на границе раздела сред (на границе шар-окружающая среда)

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}; \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$, то можно ввести скалярную функцию ψ такую, что $\mathbf{H} = -\nabla\psi$. Если записать уравнения и граничные условия через потенциал, то мы получим в точности такую же математическую задачу, как и задачу о электростатическом поле при наличии границы раздела двух диэлектриков (задача 2.8а). Тогда, выполнив замену

$$\varepsilon_{1,2} \to \mu_{1,2}, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} \to \mathbf{D}$$

можно записать решение для магнитного поля, используя ранее полученное решение для электростатического поля

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 =& \frac{3\mu_2\mathbf{H}_0}{\mu_1+2\mu_2},\\ \mathbf{H}_2 =& \mathbf{H}_0 - \frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\left(\mathbf{m}\mathbf{r}\right)\mathbf{r}}{r^5},\\ \mathbf{m} =& \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}\mathbf{H}_0 a^3.\end{aligned}$$

Поскольку поле внутри шара однородное, то намагниченность

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{4/3\pi a^3},$$

плотность объемных токов

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = c \operatorname{rot}\mathbf{M} = 0,$$

а плотность поверхностных токов

$$\mathbf{i}_{\text{мол}} = c\left[\mathbf{n}\times\left(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1\right)\right], \quad i_\alpha = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}cH_0\sin\theta$$

.