Урок 3. Фурье-анализ

Разложение в интеграл Фурье по плоским монохроматическим волнам:

$$f(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int f_{\mathbf{k},\omega}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}\omega, \tag{1}$$

где

$$f_{\mathbf{k},\omega}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int f(\mathbf{r},t)e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t.$$

Разложение по монохроматическим волнам (спектральное разложение):

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{2}$$

где

$$f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t \text{ – спектр волны.}$$

Разложение по плоским волнам:

$$f(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int f(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}}\mathrm{d}^3k. \tag{3}$$

1. (Задача 2.2.) Найти спектры следующих сигналов:
а) $f(t)=\cos(\omega_0 t)$[1];
б) $f(t)=\exp(-\beta^2t^2)$;
в) $f(t)=0$ при $|t|>\frac{\tau}{2}$ и $f(t)=1$ при $|t|\leqslant\frac{\tau}{2}$;
г) $f(t)=0$ при $|t|>\frac{\tau}{2}$ и $f(t)=\cos(\frac{\pi t}{\tau})$ при $|t|\leqslant\frac{\tau}{2}$;
д) $f(t)=0$ при $|t|>\frac{\tau}{2}$, $1+2\frac{t}{\tau}$ при $-\frac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant 0$ и $1-2\frac{t}{\tau}$ при $t\leqslant\frac{\tau}{2}$.

Решение

$$\text{а) } f_\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right)e^{i\omega t}\right]\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right];$$

[1]Здесь и далее используется следующая форма прямого и обратного преобразования Фурье соответственно: $f_\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\,(t)\,e^{i\omega t}\mathrm{d}t$, $f\,(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_\omega e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$.

$$\text{б) } f_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\beta^2 t^2\right) e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\beta^2 t^2 - i\omega t\right]\right\}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta^2\left[t^2 - 2i\frac{\omega}{2\beta^2}t + \left(\frac{i\omega}{2\beta^2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2\beta^2}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta^2\left[\left(t - i\frac{\omega}{2\beta^2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2\beta^2}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4\beta^2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta^2\left(t - i\frac{\omega}{2\beta^2}\right)^2\right\}\mathrm{d}t.$$

Введя под интегралом новую переменную $z = \beta\left(t - i\frac{\omega}{2\beta^2}\right)$, и используя табличное значение интеграла $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}$, получаем после преобразования

$$f_\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta}e^{-\omega^2/4\beta^2};$$

$$\text{в) } f_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i\omega}\left[e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2}\right] =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi}\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \equiv \frac{\tau}{2\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right);$$

$$\text{г) } f_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\left[\frac{e^{i\pi t/\tau} + e^{-i\pi t/\tau}}{2}\right] e^{i\omega t}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\left[e^{i(\pi/\tau+\omega)t} + e^{-i(\pi/\tau-\omega)t}\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\left\{\frac{\exp\left[i(\pi/\tau+\omega)t\right]}{\pi/\tau+\omega} - \frac{\exp\left[-i(\pi/\tau-\omega)t\right]}{\pi/\tau-\omega}\right\}\Bigg|_{t=-\tau/2}^{t=\tau/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin[\pi/2+\omega\tau/2]}{\pi/\tau+\omega}+\frac{\sin[\pi/2-\omega\tau/2]}{\pi/\tau-\omega}\right\} =$$
$$= \frac{\cos(\omega\tau/2)}{2\pi}\left\{\frac{1}{\pi/\tau+\omega}-\frac{1}{\pi/\tau-\omega}\right\} = \frac{\tau}{2\pi^2}\frac{\cos(\omega\tau/2)}{1-\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}.$$

д) $$f_\omega = \frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\tau/2}^{0}\left[1+2\frac{t}{\tau}\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}t+\int\limits_{0}^{\tau/2}\left[1-2\frac{t}{\tau}\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2e^{-i\tau\omega/2}\left(1-e^{i\tau\omega/2}\right)^2}{i\tau\omega^2} = \frac{\tau}{4\pi}\left(\frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4}\right)^2.$$

2. (Задача 2.3.) Записать уравнения Максвелла относительно компонент Фурье полей и потенциалов в однородной изотропной диспергирующей среде (при разложении на монохроматические, плоские и плоские монохроматические волны).

Решение Перед тем, как продолжить вычисления, вычислим некоторые выражения: Фурье-образ (разложение на монохроматические волны) производной от времени

$$\left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right]_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{H}e^{i\omega t}\right]-i\omega\mathbf{H}e^{i\omega t}\right\}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\mathbf{H}e^{i\omega t}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty}-i\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{H}e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right\} = -i\omega\mathbf{H}_\omega;$$

тогда

а) $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H}_\omega$, $\mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{E}_\omega = 4\pi\rho_\omega$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_\omega = -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\mathbf{E}_\omega + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\omega$, $\mathrm{div}\,\mu\mathbf{H}_\omega = 0$.

Фурье-образ (точнее, разложение по плоским волнам) div и rot вектора

$$[\mathrm{rot}\,\mathbf{A}]_\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\cdot e^{-i\mathbf{kr}}\right\}\mathrm{d}^3r$$

б) $i\left[\mathbf{k}\times\mathbf{E}_\mathbf{k}\right] = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}_\mathbf{k}$, $i\left(\mathbf{k}\mathbf{D}_\mathbf{k}\right) = 4\pi\rho_\mathbf{k}$,
$i\left[\mathbf{k}\times\mathbf{H}_\mathbf{k}\right] = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}_\mathbf{k} + \frac{4\pi}{c}j_\mathbf{k}$, $\left(\mathbf{k}\mathbf{B}_\mathbf{k}\right) = 0$.

в) $\left[\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\right] = -\frac{\omega\mu}{c}\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}$, $i\left(\mathbf{k}\mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega}\right) = 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}$,
$i\left[\mathbf{k}\times\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}\right] = \frac{i\omega}{c}\mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}$, $\left(\mathbf{k}\mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega}\right) = 0$.

3. (Задача 2.4.) Найти связь между компонентами Фурье полей и потенциалов (при разложении на монохроматические, плоские и плоские монохроматические волны).

Решение а) $\mathbf{E}_\omega(r) = -\operatorname{grad}\varphi_\omega(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$.

б) $\mathbf{E}_\mathbf{k}(t) = -i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}(t) - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{k}(t)$, $\mathbf{H}_\mathbf{k}(t) = i\left[\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\mathbf{k}(t)\right]$.

в) $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}\omega} + \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = i\left[\mathbf{k}\times\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}\right]$.

4. (Задача 2.5.) а) Разложить по плоским волнам кулоновский потенциал неподвижного точечного заряда; б) то же для векторного потенциала прямого тока J (плотность тока $J = j\delta(x)\delta(y)$).

Решение а) Рассмотрим потенциал точечного заряда, помещенного в начало координат. Этот потенциал удовлетворяет уравнению:

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}).$$

Разложим φ в пространственный интеграл Фурье (разложение по плоским статическим волнам):

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\varphi_\mathbf{k}\mathrm{d}^3k,$$

при этом

$$\varphi_\mathbf{k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r})\mathrm{d}V.$$

Взяв Фурье-образ от Лапласиана, получим

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\varphi_\mathbf{k}\mathrm{d}^3k,$$

откуда следует, что

$$(\Delta\varphi)_\mathbf{k} = -k^2\varphi_\mathbf{k}.$$

Вычислив Фурье-образ от правой части уравнения Пуассона, получим

$$(\Delta\varphi)_\mathbf{k} = -4\pi e\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\mathrm{d}V = -4\pi e.$$

Сравнивая оба выражения, получим

$$\varphi_\mathbf{k} = \frac{e}{2\pi^2k^2}.$$

б) Аналогично получаем для векторного потенциала

$$(A_z)_{\mathbf{k}} = J/(\pi c k^2).$$

5. (Задача 2.6.) а) Разложить по плоским волнам поле $\mathbf{E}$ неподвижного точечного заряда; б) то же для поля $\mathbf{H}$ поля прямого тока J .

Решение а) $\mathbf{E_k} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{ie\mathbf{k}}{2\pi^2 k^2}$, б) $\mathbf{H_k} = i\left[\mathbf{k} \times \mathbf{A_k}\right] = \frac{iJ}{\pi c}\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{e}_z]}{k^2}$.

6. (Задача 2.7.) Точечный заряд движется в вакууме равномерно и прямолинейно. Разложить его поля и потенциалы на плоские монохроматические волны.

Решение Уравнение для потенциала поля заряда, движущегося вдоль прямой равномерно имеет вид

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t).$$

Умножая левую и правую части на $e^{-i\mathbf{kr}}$ и интегрируя по объему, получим с одной стороны

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -4\pi e \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{v}t\right) e^{-i\mathbf{kr}} \mathrm{d}V = -4\pi e \cdot e^{-i\mathbf{kv}t},$$

а с другой стороны

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta\varphi e^{-i\mathbf{kr}} \mathrm{d}V.$$

Беря этот интеграл два раза по частям и учитывая, что потенциал и поле на бесконечности равны нулю, получим

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{-i\mathbf{kr}} \mathrm{d}V = -k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

Тогда дифференциальное уравнение для $\varphi_{\mathbf{k}}$ примет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\varphi_{\mathbf{k}}}{dt^2} + k^2\varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi e \cdot e^{-i\mathbf{kv}t}.$$

Ищем решение для $\varphi_{\mathbf{k}}$ в виде

$$\varphi_{\mathbf{k}} = B_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kv}t}.$$

Тогда

$$\left\{k^2 - \left[\frac{\mathbf{kv}}{c}\right]^2\right\} B_\mathbf{k} = 4\pi e,$$

откуда

$$\varphi_\mathbf{k} = B_\mathbf{k} e^{-i\mathbf{kv}t} = \frac{4\pi e}{k^2 - \left[\frac{\mathbf{kv}}{c}\right]^2} e^{-i\mathbf{kv}t}.$$

Вычислим Фурье-образ (по времени) от полученного уравнения

$$\varphi_{\mathbf{k},\omega} = \frac{4\pi e}{k^2 - \left[\frac{\mathbf{kv}}{c}\right]^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{kv}t} e^{i\omega t} \mathrm{d}t = \frac{4\pi e}{k^2 - \left[\frac{\mathbf{kv}}{c}\right]^2} \delta(\mathbf{kv} - \omega).$$

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e}{2\pi^2} \frac{\delta\left(\mathbf{kv} - \omega\right)}{k^2 - \omega^2/c^2}, \;\; \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e\mathbf{v}}{2\pi^2 c} \frac{\delta\left(\mathbf{kv} - \omega\right)}{k^2 - \omega^2/c^2};$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = i\frac{e}{2\pi^2} \frac{\delta\left(\mathbf{kv} - \omega\right)}{k^2 - \omega^2/c^2} \left(-\mathbf{k} + \frac{\omega \mathbf{v}}{c^2}\right), \;\; \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = i\frac{e}{2\pi^2 c} \left[\mathbf{k} \times \mathbf{v}\right] \frac{\delta\left(\mathbf{kv} - \omega\right)}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$