Самостоятельная работа к занятию 8

Решите уравнения, понижая их порядок.

1. $y^{(5)} = y^{(4)} + x$

2. $y'' - x \cdot y''' - (y''')^3 = 0$

3. $y''' \cdot (y')^2 = (y'')^3$

4. Решите задачу Коши $\begin{cases} y' \cdot y''' = (y'')^2 + (y')^2 \cdot y'' \\ y(1) = 0,\ y'(1) = -1,\ y''(1) = 1 \end{cases}$

5. Для уравнения $y\,y'y''' - 2(y')^2y'' = y(y'')^2$ найдите *семейство* интегральных линий, проходящих через точку (x_0, y_0).

Ответы и указания

1. $y = C_1e^x - \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^4}{24} + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$

2. $y = \dfrac{C_1}{6}x^3 + \dfrac{C_1^3}{2}x^2 + C_2x + C_3$ — общее решение, получаемое из $y'' = C_1x + C_1^3$, и частные решения $\begin{cases} x = -3p^2 \\ y = -\dfrac{72}{35}p^7 - 3C_1p^2 + C_2 \end{cases}$, получаемые из $\begin{cases} x = -3p^2 \\ y'' = -2p^3 \end{cases}$

3. Общее решение $\begin{cases} x = \ln|p| + 2C_1p + C_2 \\ y = p + C_1p^2 + C_3 \end{cases}$ и частные решения $y = C_1x + C_2$

4. *Указание*: уравнение можно представить в виде полной производной $\left(\dfrac{y''}{y'}\right)' = (y')'$.

Ответ: $y = -\ln x$.

5. $y' = C_1 y^3 + C_2;\quad \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{C_1\tau^3 + C_2} = x - x_0,\quad y = y_0.$