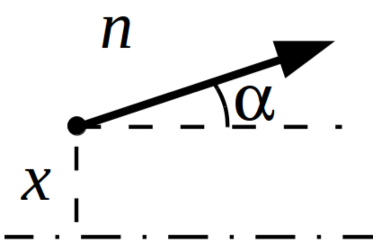
МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ – МАТРИЦЫ ОСНОВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пусть оптическая ось (на рисунке показана штрих-пунктирной линией) расположена горизонтально и показатель преломления в некоторой точке равен n. Тогда в рамках матричного формализма состояние луча в этой точке задается вектор-столбцом



$$\begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix},$$

где x – вертикальная координата точки, отсчитываемая относительно оптической оси, α – угол наклона луча относительно оптической оси. Всюду ниже предполагается, что луч распространяется слева направо, положительное направление оптической оси – вправо и α отсчитывается против хода часовой стрелки. Кроме того мы будем использовать *параксиальное* приближение, состоящее из двух условий:

1) $\alpha \ll 1$;
2) $|x| \ll L$, где L – характерный размер оптической системы (напр., радиус кривизны границы раздела).

Состояние луча может изменяться при его прямолинейном движении в однородной среде, при переходе через границу раздела двух сред и при отражении. В общем случае связь между двумя состояниями луча описывается с помощью *матрицы перехода* M *:

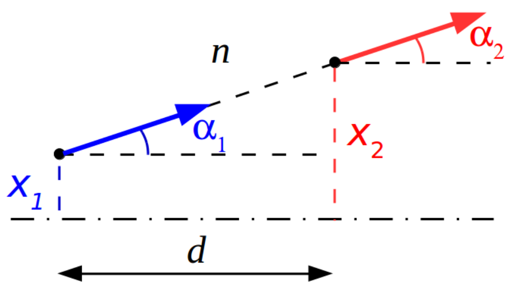
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Теперь мы определим матрицы перехода для простейших преобразований луча.

Матрица M_T пустого промежутка

Пусть луч распространяется в однородной среде, проходя слева направо промежуток с горизонтальным размером d. Имеем

$$\begin{aligned} n\alpha_2 &= m_{21}x_1 + m_{22}n\alpha_1 = n\alpha_1 &&\to m_{21} = 0, m_{22} = 1, \\ x_2 &= m_{11}x_1 + m_{12}n\alpha_1 = x_1 + d\alpha_1 &&\to m_{11} = 1, m_{12} = \tfrac{d}{n}. \end{aligned}$$

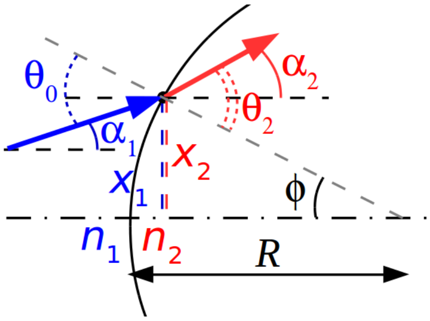


Таким образом, матрица пустого промежутка имеет вид

$$\mathrm{M}_T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*В учебных пособиях для элементов матрицы перехода используются символы A, B, C, D с различными знаками. Здесь мы будем пользоваться привычными алгебраическими обозначениями m_{ij}.

Матрица M_F преломления



Пусть луч переходит через сферическую границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2. Рассмотрим случай выпуклой со стороны падающего луча границы с радиусом кривизны R.

Обозначим за $\phi = \frac{x_2}{R}$ угол, задающий ориентацию нормали к границе раздела. Тогда для углов падения θ_0 и преломления θ_2 имеем

$$\theta_0 = \alpha_1 + \phi, \quad \theta_2 = \alpha_2 + \phi.$$

По закону преломления $n_2\theta_2 = n_1\theta_0$. Тогда

$$n_1(\alpha_1 + \phi) = n_2(\alpha_2 + \phi) \quad \to \quad n_1\alpha_1 + \frac{n_1}{R}x_2 = n_2\alpha_2 + \frac{n_2}{R}x_2.$$

Учтем, что $x_2 = x_1$:

$$n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 - \frac{n_2 - n_1}{R}x_1.$$

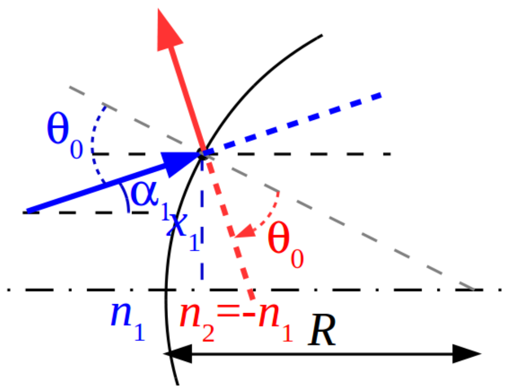
Видим, что

$$m_{11} = 1, \quad m_{12} = 0, \quad m_{21} = -\frac{n_2 - n_1}{R}, \quad m_{22} = 1.$$

Таким образом, матрица преломления имеет вид

$$\mathrm{M}_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица M_R отражения



Пусть луч, распространяющийся в среде с показателем преломления n, отражается от выпуклого сферического зеркала радиуса кривизны R.

Отражение легко свести к случаю преломления. Действительно, продолжение отраженного луча формально можно представить как преломленный луч при переходе из среды с показателем преломления $n_1 = n$ в среду с показателем преломления $n_2 = -n_1 < 0$. По сравнению с обычным преломлением, в этом случае “преломленный” луч выходит под углом падения по другую сторону от нормали. Тогда состояния падающего и “преломленного” лучей связываюся соотношением

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -n\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\frac{n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Однако, учитывая, что отраженный луч находится в среде с показателем преломления $+n$, это соотношение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ n\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\frac{n}{R} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix}$$

с матрицей отражения

$$\mathrm{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\frac{n}{R} & -1 \end{pmatrix}$$

Примечание. Преломлению и отражению от вогнутой поверхности соответствует $R = -|R|$.