Занятие 17

Устойчивость решений линейных уравнений и систем

Мы уже говорили, что все линейные однородные системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \quad (\det A \neq 0)\,,$$

можно разбить на группы, положив в основу классификации поведение их траекторий. При этом в центре внимания оказывается нулевое решение, или положение равновесия $(0, 0)$. Анализируя ситуацию, мы видим, что возможны три принципиально различных случая:

1. существуют траектории, двигаясь по которым точка при $t \to +\infty$ «уходит» от положения равновесия (неустойчивые узлы, седло, неустойчивые фокусы)
2. двигаясь по любой траектории, точка остаётся в некоторой окрестности (может быть, достаточно большой) точки равновесия, не стремясь к ней при $t \to +\infty$ (центр)
3. двигаясь по любой траектории, точка при $t \to +\infty$ стремится к положению равновесия (устойчивые узлы и фокусы)

В первом случае говорят, что нулевое решение неустойчиво, во втором — устойчиво, и в третьем — асимптотически устойчиво.

Дадим строгое определение этого важного понятия для нелинейной неавтономной системы

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y}) \tag{17.1}$$

Рассмотрим некоторое решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ системы (17.1), определённое при всех $t \geqslant t_0$. Пусть $\vec{y} = \vec{y}(t)$ — любое другое решение той же системы, которое также определено при $t \geqslant t_0$.

Решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\|\vec{y}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$ следует, что $\forall t \geqslant t_0$ выполнено неравенство $\|\vec{y}(t) - \vec{\varphi}(t)\| < \varepsilon$.

Если решение устойчиво по Ляпунову и существует такое число $h > 0$, что при $\|\vec{y}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < h$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\vec{y}(t) - \vec{\varphi}(t)\| = 0$, то решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ называется асимптотически устойчивым.

Исследование на устойчивость решения $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ системы (17.1) можно свести к исследованию на устойчивость тривиального, то есть тождественно равного нулю, решения другой системы того же вида. Для этого достаточно перейти к новой искомой функции $\vec{z} = \vec{y} - \vec{\varphi}(t)$.

Устойчивость тривиального решения допускает удобную геометрическую интерпретацию не только в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $(t, \vec{y})$, но и в n-мерном пространстве переменных $\vec{y}$. Интегральная линия $\vec{y}(t) \equiv 0$ проектируется в начало координат. Устойчивость нулевого решения означает, что если выбрать начальные данные в окрестности $\|\vec{y}(t_0)\| < \delta$, то траектория соответствующего решения не выйдет из окрестности начала координат $\|\vec{y}(t)\| < \varepsilon$.

Пример 1. Исследуем на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = -\sin^2 x$$

Сразу отметим, что уравнение имеет стационарные решения $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Остальные решения описываются общим интегралом $\operatorname{ctg} x = t + C$. Решение задачи Коши с начальными данными $x\big|_{t=0} = x_0 \neq \pi k$ дается формулой $\operatorname{ctg} x = t + \operatorname{ctg} x_0$. Картина интегральных линий показана на рис. 17.1.

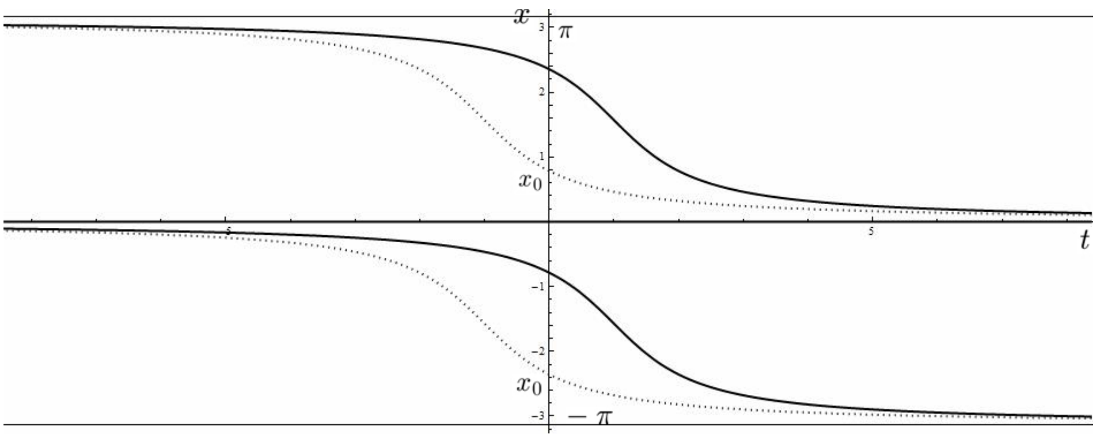

Рис. 17.1. В примере 1 нулевое решение неустойчиво.

На этой картине хорошо видно, что если выбрать начальные данные $x_0 \in (0;\pi)$, соответствующее решение $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Однако если $x_0 \in (-\pi;0)$, то $x(t) \to -\pi$ при $t \to +\infty$.

Другими словами, если положить $\varepsilon = \pi/2$, то каким бы маленьким ни было значение $\delta > 0$, можно указать $x_0 \in (-\pi;0)$ такое, что $|x_0| < \delta$, но $|x(t)| > \varepsilon$ начиная с некоторого момента $t = t_1$.

Таким образом, нулевое решение неустойчиво, как, впрочем, и все другие стационарные решения этого уравнения.

Тот же самый вывод можно было сделать гораздо быстрее, если нарисовать фазовую прямую. Как мы помним, движение точки по этой прямой определяется знаком правой части уравнения. В нашем случае $-\sin^2 x < 0$, если $x \neq \pi k$. Таким образом, движение происходит в направлении уменьшения значения x. Поэтому, начав движение в левой полуокрестности нуля, точка удаляется от него, притягиваясь к соседней стационарной точке $x = -\pi$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим систему $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x^3 \end{cases}$ Покажем, что ее положение равновесия устойчиво, но не асимптотически.

На занятии 15 (см. пример 4) мы получили первый интеграл системы $x^4+y^2=C$. Его линии уровня задают на фазовой плоскости траектории системы. Мы видим, что эти траектории являются замкнутыми линиями, что соответствует периодическим решениям.

Рассмотрим изменение функции $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ вдоль траектории. На компакте $x^4+y^2=C$ она достигает максимального значения $M(C)$ и минимального значения $m(C)$. Причем функции $M(C)$ и $m(C)$ являются монотонно возрастающими.

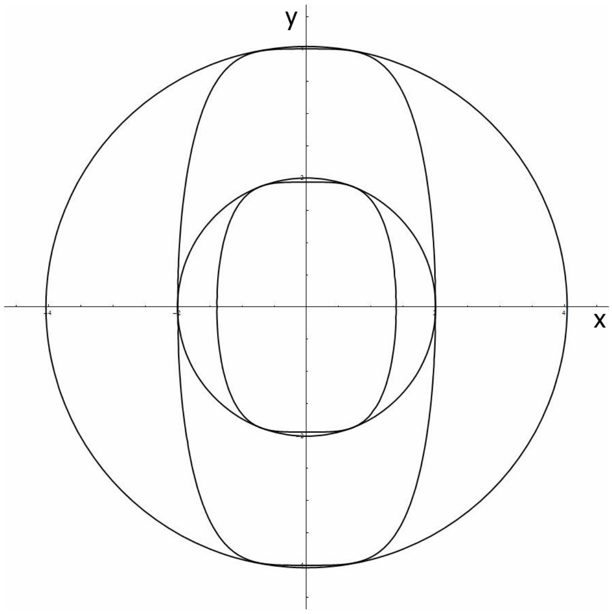

Рис. 17.2. Отсутствие асимптотической устойчивости в примере 2.

Выбрав произвольное значение $\varepsilon>0$, найдем траекторию, для которой $M(C)=\varepsilon$. Определив для нее значение $m(C)$, положим $\delta=m(C)$. Тогда, в силу монотонности функций $M(C)$ и $m(C)$, все траектории, начинающиеся в указанной δ-окрестности начала координат, не выйдут из ε-окрестности при всех $t>0$ (рис. 17.2).

С другой стороны, для каждого решения расстояние до начала координат $\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$ не может стать меньше значения $m(C)$, то есть $\|(x(t);y(t))\|$ не стремится к нулю и асимптотической устойчивости нет. $\square$

Для нелинейных систем устойчивость решения — это свойство самого решения. Так, у системы $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$ (см. пример 7 занятия 15) четыре положения равновесия — два неустойчивых (седло) и два устойчивых (центр).

Для линейных уравнений и систем ситуация гораздо проще.

1) любое решение *неоднородной* линейной системы (или уравнения) будет устойчивым (асимптотически устойчивым, неустойчивым), если и только если таковым является нулевое решение *однородной* системы.

2) устойчивость нулевого решения однородной системы зависит от структуры фундаментальной матрицы (или фундаментальной системы решений в случае уравнения), а именно:

а) если фундаментальная матрица состоит из ограниченных функций, то нулевое решение будет устойчивым.

б) если фундаментальная матрица состоит из функций, которые стремятся к нулю при $t \to +\infty$, то нулевое решение будет асимптотически устойчивым.

в) если существует решение, которое является неограниченным при $t \to +\infty$, то нулевое решение будет неустойчивым.

Поясним сказанное на примерах.

Пример 3. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$\dot{x} + x = 2e^t$$

Покажем, что его частное решение $\varphi(t) = e^t$ асимптотически устойчиво (хотя и неограничено!)

Общее решение уравнения имеет вид $x = Ce^{-t} + e^t$, поэтому для любого решения $|x(t) - \varphi(t)| = |C| \cdot e^{-t}$. Достаточно положить в определении устойчивости и асимптотической устойчивости $\delta = \varepsilon$, и убедиться в том, что эти определения выполняются. $\square$

Пример 4. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -tx \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

Эта линейная однородная система имеет частное решение $x = 0$, $y = Ce^t$, которое является бесконечно большим при $t \to +\infty$. Следовательно, нулевое решение неустойчиво. $\square$

Пример 5. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y + e^t z \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = -z \end{cases}$$

Решим эту систему. Из последнего уравнения найдём $z = C_1 e^{-t}$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y + C_1 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Однородная система

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Следовательно, если $y = C_2 e^{-t} \sin t + C_3 e^{-t} \cos t$, то $x = -\dot{y} = C_2 e^{-t}(\sin t - \cos t) + C_3 e^{-t}(\cos t + \sin t)$.

Частное решение неоднородной системы ищем в виде $x = A$, $y = B$. Тогда

$$\begin{cases} -2A + 2B + C_1 = 0, \\ -A = 0. \end{cases}$$

Отсюда $B = -0,5C_1$, $A = 0$. Итак,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t}(\sin t - \cos t) & e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ -0,5 & e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \\ e^{-t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Анализируя функции, образующие фундаментальную матрицу, мы видим, что элемент $a_{21} = -0,5$ является ограниченной функцией и при $t \to +\infty$ не стремится к нулю. Все остальные элементы при $t \to +\infty$ стремятся к нулю. Следовательно, нулевое решение будет устойчивым, но не асимптотически. $\square$

Пример 6. Исследовать на устойчивость нулевое решение.

$$t^2\ddot{y} + 4t\dot{y} + 2y = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Ищем его частные решения в виде $y = t^k$ и приходим к формуле общего решения

$$t = C_1\frac{1}{t} + C_2\frac{1}{t^2}$$

Так как при $t \to +\infty$ функции, образующие ФСР стремятся к нулю, то нулевое решение будет асимптотически устойчиво. $\square$

Обратимся теперь к линейным уравнениям и системам с постоянными коэффициентами. Для построения ФСР уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{17.2}$$

надо знать корни характеристического уравнения

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n. \tag{17.3}$$

Анализируя классическую ФСР, изученную на занятии 9, приходим к следующим утверждениям.

1. Если характеристический многочлен имеет все корни с отрицательной вещественной частью, то нулевое решение асимптотически устойчиво. В этом случае говорят, что «многочлен $P_n(\lambda)$ устойчив».
2. Если характеристический многочлен имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то нулевое решение не устойчиво.
3. Если характеристический многочлен имеет чисто мнимые, но однократные корни, при этом все остальные корни имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.
4. Если характеристический многочлен имеет кратные чисто мнимые корни, то нулевое решение не устойчиво.

Изобразим точками на комплексной плоскости корни многочлена (17.3). Тогда каждому многочлену будет соответствовать некоторый «спектральный портрет». Если все точки лежат строго в левой полуплоскости ($\forall j \ \operatorname{Re}\lambda_j < 0$), то это «портрет» устойчивого многочлена и нулевое решение соответствующего уравнения асимптотически устойчиво. Если есть точки в правой полуплоскости ($\exists j \ \operatorname{Re}\lambda_j > 0$), то нулевое решение не устойчиво. Если же точки попадают на мнимую ось, то надо разбираться с кратностью соответствующих собственных чисел.

Для многочлена второго порядка $P_2(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ необходимым и достаточным условием того, что все его корни лежат строго в левой полуплоскости является условие $a > 0$, $b > 0$.

Для многочлена $P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ <u>необходимым</u> условием того, что все корни лежат строго в левой полуплоскости, является положительность всех коэффициентов: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, ... , $a_n > 0$.

Необходимые и достаточные условия довольно громоздкие. Приведём одно из них — критерий Рауса-Гурвица. Введем в рассмотрение матрицу Гурвица порядка n

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Чтобы правильно «сконструировать» эту матрицу, следует поставить на главную диагональ числа a_1, a_2, $\ldots a_n$. Затем разместить числа a_j в строках по следующему правилу: двигаясь от числа a_k, стоящего на диагонали, вправо по строке следует уменьшать индекс каждого следующего числа на единицу до a_0, а оставшиеся места заполнить нулями. Двигаясь от a_k влево по строке, следует увеличивать индекс на единицу и, дойдя до a_n, заполнить оставшиеся места нулями. Процесс заполнения, конечно, может оборваться и раньше, если Вы дошли до конца (или начала) строки.

Все корни уравнения $P_n(\lambda) = 0$ имеют отрицательную вещественную часть, если и только если все главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны.

$$\Delta_1 = a_1 > 0\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,, \quad \ldots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Мы будем называть это первым критерием Гурвица.

Вторым критерием Гурвица (или критерием Ленара-Шипара) называется следующее утверждение: все корни многочлена $P_n(\lambda)$ лежат строго в левой полуплоскости, если и только если $\forall j\ a_j > 0$ и $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0$, $\dots$, где Δ_j — те же диагональные миноры матрицы Гурвица.

Пример 7. Исследовать на асимптотическую устойчивость нулевое решение уравнения $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0$.

Характеристический многочлен

$$P_5(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda + 4$$

и $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 7$, $a_4 = 4$, $a_5 = 4$. Матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 3\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 11\,, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 53\,,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -20\,, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-20) = -80$$

Здесь хорошо видно, что пользоваться вторым вариантом критерия удобнее. Мы сразу обнаруживаем, что $\Delta_4 < 0$ и делаем вывод о том, что есть корни, лежащие в правой полуплоскости или на мнимой оси, то есть в любом случае у нас нет асимптотической устойчивости нулевого решения. $\square$

Для многочлена третьей степени

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

необходимые и достаточные условия того, что корни лежат строго в левой полуплоскости следующие: $a_1 > 0\,, \quad a_1a_2 > a_3\,, \quad a_3 > 0$. Эти неравенства легко следуют из условий Гурвица.

$$a_1 > 0\,, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

Обратим внимание на случай, когда $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, но $a_1a_2 = a_3$. Тогда

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_1a_2 = \lambda^2(\lambda + a_1) + a_2(\lambda + a_1) = (\lambda + a_1)(\lambda^2 + a_2).$$

Таким образом, мы имеем один отрицательный вещественный корень и два чисто мнимых. Решение соответствующего уравнения будет устойчивым, но не асимптотически.

Займёмся изучением устойчивости нулевого решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами $\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y}$.

Этот вопрос прямо связан с расположением на комплексной плоскости корней характеристического многочлена

$$P_n(\lambda) = \det|A - \lambda E|.$$

Нулевое решение асимптотически устойчиво, если все корни лежат строго в левой полуплоскости (в этом случае говорят, что матрица A устойчивая). Нулевое решение не устойчиво, если есть корень, лежащий в правой полуплоскости. Если характеристический многочлен имеет чисто мнимые корни, то асимптотической устойчивости нет.

Для систем уравнений есть одна тонкость: если характеристический многочлен имеет кратные чисто мнимые корни, то нельзя сразу сделать вывод о неустойчивости нулевого решения (в отличие от уравнения). Может случиться, что и в случае кратных чисто мнимых корней фундаментальная матрица состоит только из ограниченных функций, и нулевое решение будет устойчивым. Это произойдёт, если алгебраическая кратность соответствующего корня совпадёт с его геометрической кратностью. В противном случае возникнут неограниченные решения и нулевое решение будет неустойчивым.

Пример 8. Рассмотрим две системы уравнений.

$$\text{I.}\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 \\ \dot{y}_3 = -y_4 \\ \dot{y}_4 = y_3 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + y_3 \\ \dot{y}_2 = -y_1 - y_4 \\ \dot{y}_3 = -y_4 \\ \dot{y}_4 = y_3 \end{cases}$$

Несмотря на то, что матрицы у этих систем различны, характеристический многочлен обеих имеет вид $P_4(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2$. Первая система имеет общее решение

$$
\begin{aligned}
y_1 &= C_1 \sin t + C_2 \cos t \\
y_2 &= C_1 \cos t - C_2 \sin t \\
y_3 &= C_3 \sin t + C_4 \cos t \\
y_4 &= -C_3 \cos t + C_4 \sin t
\end{aligned}
$$

Фундаментальная матрица состоит из ограниченных функций и, следовательно, нулевое решение устойчиво. Вторая же система имеет неограниченное решение $y_1 = t\cos t$, $y_2 = -t\sin t$, $y_3 = \cos t$, $y_4 = \sin t$ и, следовательно, нулевое решение не устойчиво. $\square$

Пример 9. Определить (не находя решений) характер точки покоя для систем.

$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$	неустойчива
$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda^2 - 4 = 0$	неустойчива
$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$	асимпт. устойчива
$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -5x - 2y \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$	$\lambda^2 + 1 = 0$	устойчива, не асимпт.

В этих примерах мы воспользовались критерием расположения корней квадратного уравнения.

Пример 10. Исследовать на асимптотическую устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z \\ \dot{y} = -x - 3y + 5z \\ \dot{z} = x + 4y + 8z \end{cases}$$

Напомним, что характеристический многочлен для матриц порядка 3 имеет вид

$$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} \mathbf{A}\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det \mathbf{A}$$

Так как в нашем случае $\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2 - 3 + 8 = 7$, то очевидно, что характеристический многочлен имеет коэффициенты разных знаков, и необходимое условие асимптотической устойчивости нулевого решения не выполнено.

Пример 11. Исследовать на устойчивость периодическое (с периодом 2π) решение уравнения

$$y''' + 2y'' + 3y' + y = \sin x$$

Мы знаем, что характер устойчивости периодического решения (как и любого другого) зависит от устойчивости нулевого решения однородного уравнения

$$y''' + 2y'' + 3y' + y = 0$$

В характеристическом многочлене $P_3(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 1$ имеем $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$. Так как $\forall j \; a_j > 0$ и $a_1 \cdot a_2 > a_3$, то все корни этого уравнения лежат в левой полуплоскости. Следовательно, нулевое решение однородного уравнения асимптотически устойчиво, а вместе с ним устойчиво и периодическое решение. (Заметим, что мы не искали это решение!)

Самостоятельная работа

Исследуйте на устойчивость нулевое решение систем

1. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = -2y - 4z \qquad (\lambda_1 = -3,\ \lambda_{2,3} = 0) \\ \dot{z} = -x + z \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 2x + y - 2z \qquad (\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = \pm i) \\ \dot{z} = 3x + 2y - 3z \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -tx \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

4. Исследуйте на устойчивость нулевое решение уравнения $\dddot{x} + 2\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$

5. Исследуйте на устойчивость решение задачи Коши $(1 + x^2)y'' + 2xy' = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ответы и указания к самостоятельной работе

1. Ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 2, значит собственному значению $\lambda = 0$ соответствует только один собственный вектор. Но кратность собственного числа $\lambda = 0$ равна двум. Это означает, что фундаментальная система решений содержит вектор вида $\vec{v}t + \vec{u}$.

Поскольку в ФСР входит решение, которое является неограниченным при $t \to +\infty$, то нулевое решение неустойчиво.

Примечание: фундаментальная матрица системы

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-1 & 4e^{-3t} \\ -2 & 1-2t & 4e^{-3t} \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix},$$

однако для исследования устойчивости находить ее не надо.

2. Корни $\lambda_{2,3} = \pm i$ имеют кратность 1. Поэтому в ФСР входят функции вида $\vec{v}\sin t + \vec{u}\cos t$, но нет функций, содержащих степенной множитель. Следовательно, нулевое решение устойчиво, но не является асимптотически устойчивым.

3. Первое уравнение системы имеет частное решение $x \equiv 0$. Тогда второе уравнение превращается в $\dot{y} = y$. Его решение $y(t) = Ce^t$ неограничено, поэтому нулевое решение неустойчиво.

4. В характеристическом многочлене $P_3(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2$ коэффициенты $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$. Так как все $a_k > 0$ и $a_1 \cdot a_2 > a_3$, то все корни этого уравнения лежат в левой полуплоскости. Следовательно, нулевое решение однородного уравнения асимптотически устойчиво.

5. Исследование на устойчивость любого решения неоднородного линейного уравнения сводится к исследованию устойчивости нулевого решения однородного уравнения, а точнее, его ФСР.

Понижая порядок в однородном уравнении заменой $u = y'$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными $(1+x^2)u' + 2xu = 0$. Его общее решение $u = \dfrac{C}{1+x^2}$. Интегрируя его, получаем $y = C\operatorname{arctg} x + D$.

Таким образом, ФСР состоит из функций $\operatorname{arctg} x$ и 1, которые ограничены, но не стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Следовательно, любое решение уравнения $(1+x^2)y'' + 2xy' = e^x$ устойчиво, но не асимптотически.