# 1. Электростатика

## Урок 6

### Разделение переменных в декартовых координатах

1.1. (Задача 1.49) Плоскость $z=0$ заряжена с плотностью $\sigma(x,y)=\sigma_0\sin(\alpha x)\cdot\sin(\beta y)$, где $\sigma_0, \alpha, \beta$ – постоянные. Найти потенциал этой системы зарядов.

**Решение** Потенциал $\varphi$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

На заряженной плоскости нормальная составляющая электрического поля терпит разрыв

$$E_{2z}\big|_{z=0}-E_{1z}\big|_{z=0}=4\pi\sigma. \tag{2}$$

Поскольку поверхностная плотность $\sigma$ есть произведение двух функций, одна из которых зависит только от координаты $x$, а другая от $y$, будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\varphi(x,y,z)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z). \tag{3}$$

Подставим функцию (3) в уравнение (1) и поделим каждое слагаемое на $\varphi$, получим

$$\frac{f_3''(z)}{f_3(z)}=-\left(\frac{f_1''(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2''(y)}{f_2(y)}\right). \tag{4}$$

Чтобы уравнение (4) удовлетворялось при всех $x$, $y$, $z$, нужно приравнять каждое слагаемое константе. Пусть

$$\frac{f_3''(z)}{f_3(z)}=-\gamma^2.$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$f_3(z)=Ae^{-\gamma z}+B\,e^{\gamma z}.$$

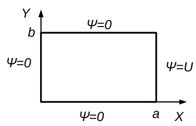
Понятно, что при стремлении $z\to\pm\infty$, $f_3(z)$ не должна стремиться к бесконечности, поскольку поле создается знакопеременными зарядами. Этому условию можно удовлетворить, если записать решение, например, так:

$$f_3(z)=A\,e^{-\gamma|z|}.$$

Пусть
$$\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} = -\gamma_1^2\,, \quad \frac{f_2''(y))}{f_2(y)} = -\gamma_2^2\,, \quad \gamma^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2.$$
Решениями этих уравнений являются гармонические функции. Чтобы удовлетворить гармоническому условию (2), нужно выбрать:
$$f_1(x) = \sin\alpha x\,, \quad \alpha^2 = \gamma_1^2\,; \quad f_2(y) = \sin\beta y\,, \quad \gamma_2^2 = \beta^2;$$
значит, $\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Итак,
$$\varphi = A\,e^{-\gamma|z|}\sin\alpha x\,\sin\beta y.$$

Нормальная составляющая электрического поля $E_z = -\partial\varphi/\partial z$. Поэтому
$$E_{2z}\big|_{z=0} = \gamma A\sin\alpha x\,\sin\beta y,$$
$$E_{1z}\big|_{z=0} = -\gamma A\sin\alpha x\,\sin\beta y.$$
Подставляя эти выражения в уравнение (2), найдем, что $A = 2\sigma_0/\gamma$. Окончательно распределение потенциала будет иметь вид
$$\varphi(x,y,z) = \frac{2\sigma_0}{\gamma}\,e^{-\gamma|z|}\sin\alpha x\,\sin\beta y,$$
где $\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

1.2. Металлическая труба, бесконечная вдоль оси $z$, имеет прямоугольное сечение $a\times b$. Одна из сторон имеет потенциал $U$, а остальные - потенциал 0. Найти распределение потенциала внутри трубы.




**Решение** Расположим сечение $z=0$ по отношению к осям как показано на рисунке. Поскольку труба бесконечна вдоль $z$, то зависимость от $z$ отсутствует и мы имеем задачу с двумя переменными. Поскольку внутри трубы зарядов нет, потенциал внутри удовлетворяет уравнению Лапласа
$$\triangle\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$
и граничным условиям $\psi(0,y) = \psi(x,0) = \psi(x,b)$, $\psi(a,y) = U$. Предположим, что решение уравнения (1) (или, хотя бы частное его решение) можно представить в виде
$$\psi(x,y) = X(x)\cdot Y(y). \tag{2}$$

Тогда, разделив уравнение (1) на $X(x)Y(y)$, его можно переписать в виде

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0. \tag{3}$$

Перенеся одно из слагаемых в правую часть уравнения, получим, что функция от $x$ равна во всей области определения функции от $y$, что возможно только в случае когда обе эти функции – константы, причем

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2. \tag{4}$$

Можно было бы просто в правой части записать константу и не определять ее знак. Впрочем приведенная запись не гарантирует положительность правой части (например, если $\lambda$ – мнимая). На самом деле далее будет показано, что только такой выбор знака для нашей задачи позволяет получить нетривиальное решение. Очевидно, что вместо 1 уравнения с частными производными мы получили систему двух уравнений, каждое из которых - обыкновенное дифференциальное уравнение.

$$\begin{aligned} &Y'' + \lambda^2 Y = 0, \\ &X'' - \lambda^2 X = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Общее решение первого уравнения имеет вид

$$Y(y) = A\sin(\lambda y) + B\cos(\lambda y).$$

Граничные уравнения для этого уравнения получаются из общих граничных условий

$$\psi(x,0) = \psi(x,b) = 0, \Rightarrow X(x)Y(0) = 0, X(x)Y(b) = 0,$$

откуда получаем требуемые два условия

$$Y(0) = 0, Y(b) = 0. \tag{6}$$

Из уравнения для $Y$ и приведенных выше граничных условий следует, что если бы в первом уравнении системы (5) знак у константы был противоположным, то полученные в этом случае экспоненциальные решения не смогли бы одновременно удовлетворить граничным условиям (6). Используя граничные условия можно получить следующий набор (бесконечный) частных решений, удовлетворяющих и уравнению и граничным условиям

$$Y_n(y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \;\; \lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \;\; n = 1, 2, ...$$

Подставив значение $\lambda_n$ во второе уравнение системы (5), получим решение этого уравнения
$$X(x) = A\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{b}x + B\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{b}x.$$
Из граничного условия на границе $x = 0$ следует, что $X(0) = 0$, откуда получается, что частные решения этого уравнения, удовлетворяющее условию на левой границе имеют вид
$$X_n = B_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{b}x. \tag{7}$$
Используя полученные частные решения для $X$ и $Y$, а также принцип суперпозиции, можно записать общее решение всей задачи (удовлетворяющее только 3 граничным условиям) в виде
$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{b}x \sin\frac{n\pi}{b}y. \tag{8}$$
Теперь можно использовать четвертое граничное условие ($\varphi(a, y) = U$) для определения коэффициентов $A_n$. Это граничное условие переписывается в виде
$$\varphi(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi a}{b}\sin\frac{n\pi}{b}y = U. \tag{9}$$
Для определения коэффициентов этого ряда можно воспользоваться формулами для определения коэффициентов ряда Фурье, поскольку именно ряд Фурье по $y$ записан в выражении для граничного условия. А можно явно домножить правую и левую часть уравнения (9) на $\sin\frac{m\pi}{b}y$ проинтегрировать обе стороны полученного равенства по $y$ от 0 до $b$/ Поскольку на этом интервале функции $\sin\frac{m\pi}{b}y$ для разных $n$ и $m$ ортогональны, то в сумме останется только член с $n = m$.
$$A_m\,\mathrm{sh}\,\frac{m\pi a}{b}\int\limits_0^b \sin^2\frac{m\pi y}{b}dy = U\int\limits_0^b \sin\frac{m\pi y}{b}dy. \tag{10}$$
Интеграл слева вычисляется следующим образом
$$\int\limits_0^b \sin^2\frac{m\pi y}{b}dy = \frac{b}{m\pi}\int\limits_0^{m\pi}\sin^2 t dt = \frac{b}{m\pi}\frac{m\pi}{2} = \frac{b}{2}.$$
Интеграл справа вычисляется элементарно
$$\int\limits_0^b \sin\frac{m\pi y}{b}dy = -\frac{b}{m\pi}\int\limits_0^{m\pi} d(\cos t) = -\frac{b}{m\pi}\left(\cos m\pi - 1\right)$$

Из этого выражения ясно, что отличны от нуля коэффициенты только при нечетном $m$, т.е. при $m = 2k + 1$. Окончательно получаем

$$A_{2k+1} = \frac{4U}{(2k+1)\pi \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{b}},$$

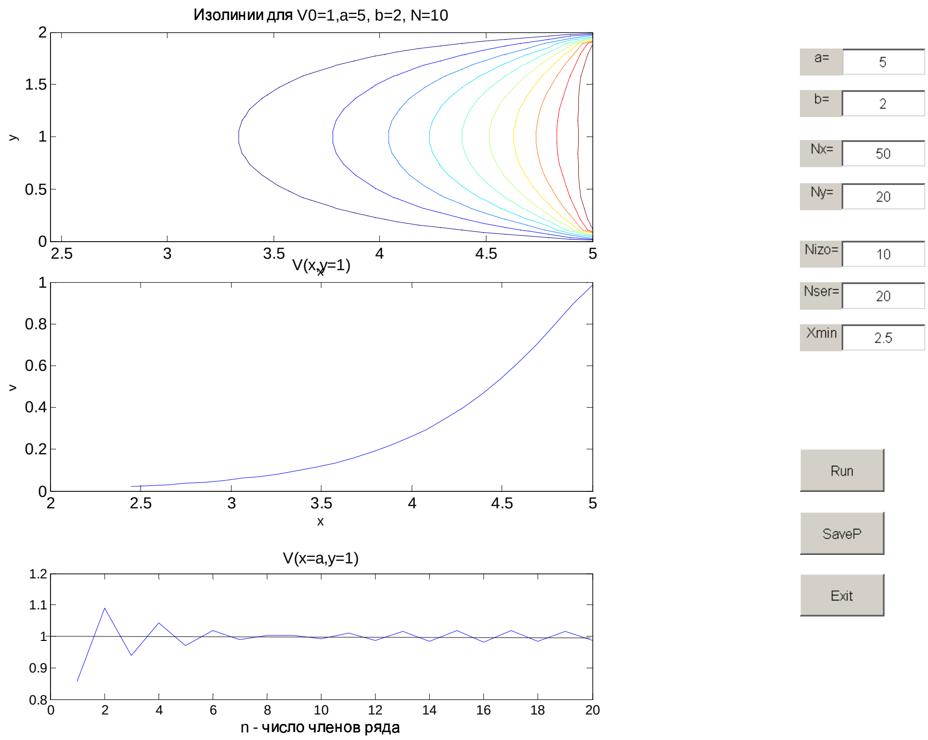
или, окончательно получаем

$$\varphi(x, y) = \frac{4U}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{b}} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{b}.$$

таким образом, использованный метод разделения переменных позволил нам получить общее решение о потенциале внутри прямоугольника в общем виде. При этом следует сделать два замечания

1. Если необходимо решить задачу с разными значениями потенциала на всех четырех границах, то это делается на основании принципа суперпозиции, используя полученное выше решение.
2. Ряд сходится довольно плохо, особенно вблизи правой границы.

Для демонстрации этого была написана программа для расчета численного примера. Результаты расчета показаны на графиках. Видно (на третьем графике) что даже при использовании 20 членов ряда значение потенциала на границе колеблется, т.е. граничное условие выполняется приближенно.




1.3. Найти потенциал между двумя бесконечными плоскостями, если потенциал плоскости $x = 0$ равен $A \sin \beta y$, а потенциал плоскости $x = d$ равен $\varphi_0 + B \sin \beta y$.

**Решение** Сформулируем математическую задачу: найти решение уравнения Лапласа в области $0 \leqslant x \leqslant d$

$$\triangle \varphi(x, y) = 0,$$

с граничными условиями $\varphi(x = 0, y) = A \sin \beta y$, $\varphi(x = d, y) = \varphi_0 + B \sin \beta y$. Эта задача не сводится очевидным образом к методу разделения переменных, поэтому, используя принцип суперпозиции, разобъем эту задачу на две, точнее, представим решение задачи в виде суммы двух решений $\varphi(x, y) = \varphi(x, y)_1 + \varphi(x, y)_2$.

| Система I | Система II |
|---|---|
| $\triangle \varphi_1 = 0,$ | $\triangle \varphi_2 = 0,$ |
| $\varphi_1(x = 0, y) = 0,$ | $\varphi_2(x = 0, y) = A \sin \beta y,$ |
| $\varphi_1(x = d, y) = \varphi_0,$ | $\varphi_2(x = d, y) = B \sin \beta y,$ |

Решаем сначала уравнение I. Поскольку граничные условия не зависят от $y$, можно предположить, что решение этого уравнения будет зависеть только от $x$. Тогда уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = 0, \quad \text{при условиях} \quad \varphi_1(0) = 0, \varphi_1(d) = \varphi_0.$$

Откуда получаем

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_0}{d}x.$$

Теперь решим второе уравнение методом разделения переменных. Как обычно, предположим, что искомое решение можно представить в виде $\varphi_2(x, y) = X(x)Y(y)$ и подставим это в исходное уравнение для $\varphi_2(x, y)$. Тогда, разделив обе части уравнения на $X(x)Y(y)$, получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \gamma^2.$$

Каждая из дробей равна константе, поскольку если функция только от $x$ равна во всей области определения функции от $y$? то такая функция может быть только константой. Знак константы выбран из соображений удобства и из тех (эвристических) соображений, что функция от $y$ должна быть скорее всего $\sim \sin(y)$. Используя сделанные предположения, получим частное решение $Y(y) = \sin\gamma y$, откуда делаем вывод, что $\gamma = \beta$. Тогда уравнение для $X(x)$ имеет решение

$$X(x) = C_1 \exp(-\gamma x) + C_2 \exp(\gamma x).$$

Используя приведенные выше граничные условия для решения задачи II, запишем систему уравнений для констант $C_1$ и $C_2$

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2)\sin\beta y =& A\sin\beta y, \\ \left(C_1 e^{-\gamma d} + C_2 e^{\gamma d}\right)\sin\beta y =& B\sin\beta y. \end{aligned}$$

Сокращая левую и правую части этих уравнений на $\sin\beta y$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2) =& A, \\ \left(C_1 e^{-\gamma d} + C_2 e^{\gamma d}\right) =& B, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{Ae^{\gamma d} - B}{e^{\gamma d} - e^{-\gamma d}}, \\ C_2 &= \frac{Ae^{-\gamma d} + B}{e^{\gamma d} - e^{-\gamma d}}. \end{aligned}$$

Тогда окончательное решение можно записать в виде

$$\varphi(x,y) = \varphi(x,y)_1 + \varphi(x,y)_2 = \frac{\varphi_0}{d}x + \left(\frac{Ae^{\gamma d} - B}{e^{\gamma d} - e^{-\gamma d}}e^{-\gamma x} + \frac{Ae^{-\gamma d} + B}{e^{\gamma d} - e^{-\gamma d}}e^{\gamma x}\right)\sin\beta y.$$

1.4. Рассмотрим плоскую задачу, т.е. потенциал не зависит от $z$. Область определения представляет собой полубесконечную полосу $0\leqslant x\leqslant\infty,\ \ 0\leqslant y\leqslant b$. Потенциал $\Psi(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, $\Psi(0,y) = V, \Psi(x,0) = \Psi(x,b) = 0$.

**Решение** Уравнение Лапласа в декартовой системе координат записывается в виде

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0.$$

Предположим, как обычно, что решение представимо в виде

$$\Psi(x,y) = X(x)\cdot Y(y).$$

Подставив это в исходное уравнение и разделив уравнение на функцию $\Psi(x,y)$, получим

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \gamma^2.$$

Поскольку функция $x$ (в левой части уравнения) равна во всей области определения функции $y$ (в правой части уравнения) эти комбинации функций должны равняться константе. Рассмотрим эти получившиеся уравнения по отдельности.

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \gamma^2 Y = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Y(y) = A\sin\gamma y + B\sin\gamma y.$$

Из граничных условий для потенциала можно получить условия для функции $Y$

$$\Psi(x,0) = \Psi(x,b) = 0, \ \Rightarrow\ Y(0) = Y(b) = 0.$$

Из этих условий следует, что $B = 0$ и $\gamma_k = \frac{k\pi}{b},\ \ k = 1, 2, ...$ Подставляя полученные допустимые значения для $\gamma$ в уравнение для $X$, получим

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \gamma_k^2 X = 0.$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее условию ограниченности решения, имеет вид

$$X_k = Ce^{-\gamma_k x},$$

а общее решение исходной задачи записывается в виде

$$\Psi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} \sin\frac{k\pi y}{b}.$$

Для определения коэффициентов $a_k$ используем граничное условие на левой границе

$$\Psi(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi y}{b} = V.$$

Для нахождения коэффициентов $a_k$ можно воспользоваться общими формулами рядов Фурье, а можно вычислить их явно, для чего домножим левую и правую части граничного условия на $\sin\frac{m\pi y}{b}$ и проинтегрируем левую и правую части по $y$. В силу ортогональности функций $\sin\frac{m\pi y}{b}$ и $\sin\frac{k\pi y}{b}$ при $m \neq k$ в сумме останется только один член с $m = k$, а уравнение для вычисления коэффициента будет иметь вид

$$a_m \int_0^b \sin^2\frac{m\pi y}{b} dy = V \int_0^b \sin\frac{m\pi y}{b} dy,$$

или, преобразуя переменные под интегралом

$$a_m = V\frac{\int_0^{m\pi} \sin t dt}{\int_0^{m\pi} \sin^2 t dt} = \frac{4V}{m\pi}, \quad \text{при} \;\; m = 2n+1, \;\; n = 0, 1, ...$$

окончательное выражение приобретает вид

$$\Psi(x,y) = \frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi y}{b}\right]}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)\pi x}{b}}.$$

Самое удивительное, что этот ряд можно свернуть в конечное выражение. Для этого перепишем полученное выражение в виде

$$\Psi(x,y) = \frac{4V}{\pi} Im\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[e^{-\frac{\pi x}{b}} \cdot e^{i\frac{\pi y}{b}}\right]^{2n+1}}{2n+1}\right\}.$$

Введя обозначение $Z = e^{-\frac{\pi x}{b}} \cdot e^{i\frac{\pi y}{b}}$ и используя соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+Z}{1-Z},$$

получаем в результате

$$\Psi(x,y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{b}} \right].$$