

Х

*К р и т е р и и
п л а с т и ч н о с т и
и
р а з р у ш е н и я.*

Материал подавляющего большинства машин, механизмов и приборов, созданных человеком, работает в пределах упругости, ибо появление в нём необратимых (пластических) деформаций или трещин приводит к поломке машины.

Предельным называют состояние напряжённого материала, непосредственно предшествующее появлению в нём пластических деформаций (у пластических материалов) или трещин (у хрупких материалов).

Число n называется **коэффициентом запаса прочности** в точке тела, если пропорциональное увеличение в n раз всех компонент напряжённого состояния в этой точке приводит к возникновению предельного состояния в её окрестности:

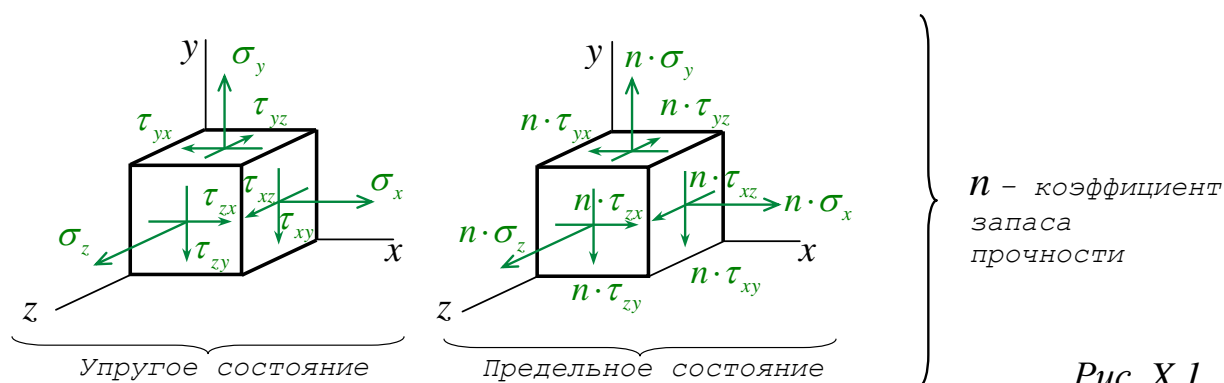


Рис. X.1.

Два напряжённых состояния называются **эквивалентными** в смысле прочности (**равноопасными**), если их коэффициенты запаса равны между собой:

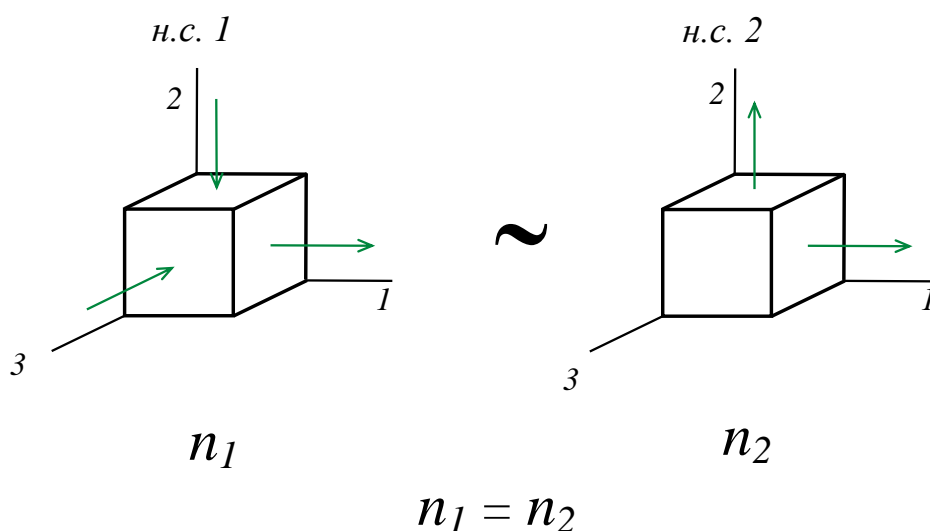


Рис. X.2.

Напряжение одноосного растяжения, создающее напряжённое состояние, равноопасное заданному, называется **эквивалентным напряжением $\sigma_{\text{экв}}$** :

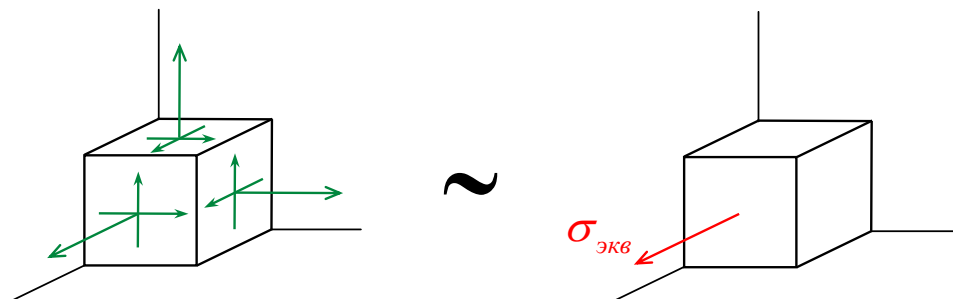


Рис. X.3.

При известном эквивалентном напряжении $\sigma_{\text{экв}}$ коэффициент запаса прочности для данного напряжённого состояния вычисляется по простой формуле:

$$n = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{\text{экв}}} \quad (X.1)$$

или

$$n = \frac{\sigma_{BP}}{\sigma_{\text{экв}}} \quad (X.2)$$

Само $\sigma_{\text{экв}}$ вычисляется по формуле, содержащей все или некоторые компоненты напряжённого состояния σ_i и τ_{ij} . Проще работать с главными напряжениями – обнуляются все τ .

Механизмы деформирования различных материалов также могут различаться. Поэтому и теорий прочности существует несколько. Теории, в которых за предельным состоянием предполагается начало пластических деформаций, называются **теориями текучести**, а теории, в которых за предельным состоянием предполагается начало трещинообразования, называются **теориями разрушения**.

Теория максимального касательного напряжения

Пластические деформации в металлах – это результат взаимного
проскальзывания слоев в кристаллических решетках под действием
касательных напряжений τ :

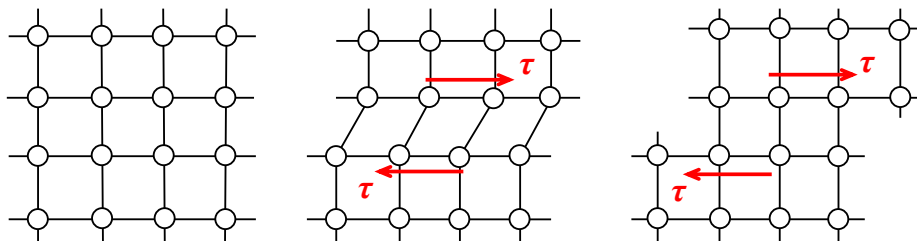
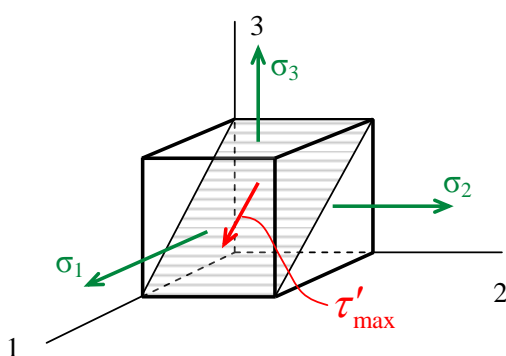


Рис. X.4.

На основании вышесказанного, критерием равноопасности напряжённых состояний в двух точках тела может служить равенство в них максимальных касательных напряжений τ_{max} , которые, как известно (рис. VIII.9.), равны полуразностям главных напряжений σ_1 и σ_3 .



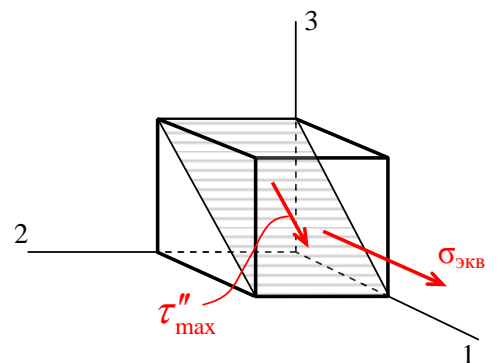
$$\tau'_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau'_{max} = \tau''_{max}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{экв}}{2}$$

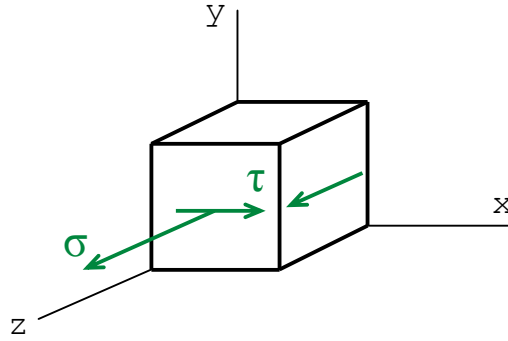
$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3$

(X.3)



$$\tau''_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{экв} - 0}{2} = \frac{\sigma_{экв}}{2}$$

В частном случае для упрощённого плоского напряжённого состояния:



$$\sigma' = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma''''' &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} = \\ &= \frac{0 + \sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - \sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\end{aligned}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

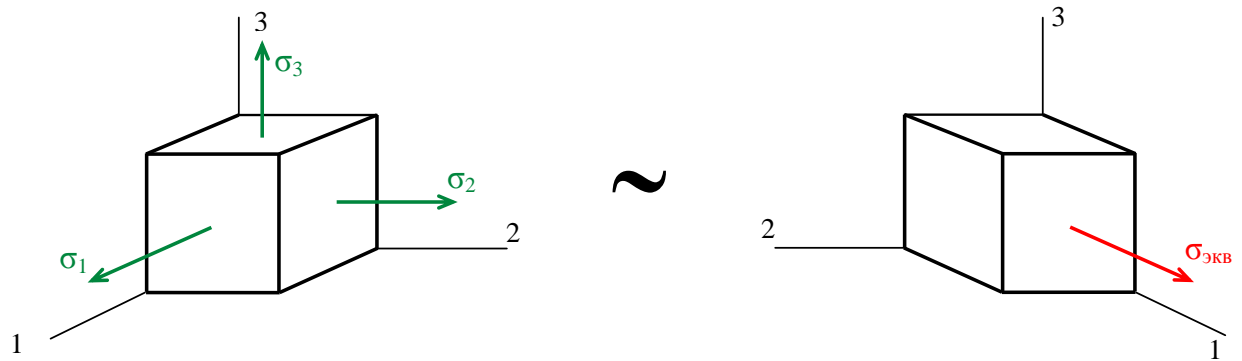
$$\sigma_{\text{эКБ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_{\text{эКБ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

(X.4)

Энергетическая теория

Два напряжённых состояния считаются равноопасными, если им соответствует одна и та же энергия формоизменения. Именно эта часть удельной потенциальной энергии участвует в разрушении материала. В общем случае напряжённого состояния:



$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{экв}}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$u_{\phi}' = \frac{1+\nu}{6 \cdot E} \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

$$u_{\phi}'' = \frac{(1+\nu)}{6 \cdot E} \cdot 2 \cdot \sigma_{\text{экв}}^2$$

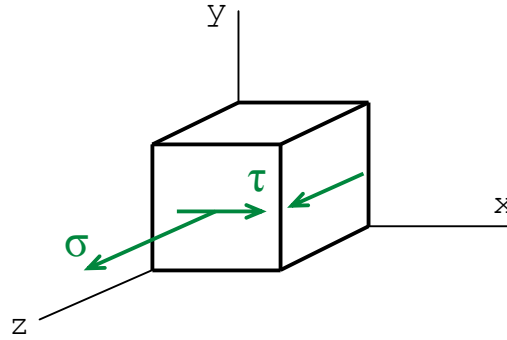
$$u_{\phi}' = u_{\phi}''$$

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = 2 \cdot \sigma_{\text{экв}}^2$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$$

(X.5)

В частном случае для упрощённого плоского напряжённого состояния:



$$\sigma' = 0$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z + \cancel{\sigma_x}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \cancel{\sigma_x}}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эКБ}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right)^2 + \left(-\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}} + \frac{1}{4} \cdot (\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2) + \left(-\frac{\sigma}{2}\right)^2 - \cancel{\frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}} + \frac{1}{4} \cdot (\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2) + (\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \frac{6}{4} \cdot (\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \frac{3}{4} \cdot \sigma^2 + \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{эКБ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

(X.6)

Теория прочности Мора

Рассмотренные ранее теории прочности применимы для расчёта весьма пластичных материалов, имеющих равные по модулю пределы текучести (рис. II.7.) при растяжении и при сжатии $\sigma_{TP} = |\sigma_{TC}|$.

При расчётах конструкций из умеренно пластичных ($\sigma_{TP} < |\sigma_{TC}|$) и хрупких ($\sigma_{BP} < |\sigma_{BC}|$, а σ_T нет вообще) материалов пользуются формулой теории прочности Мора:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 \quad (X.7)$$

где

$$k = \frac{\sigma_{TP}}{|\sigma_{TC}|} \text{ - для умеренно пластичных материалов;}$$

$$k = \frac{\sigma_{BP}}{|\sigma_{BC}|} \text{ - для хрупких материалов.}$$

Формула Мора является результатом обобщения экспериментальных данных и имеет несколько толкований. Наиболее простое из них – схематизация экспериментальной диаграммы предельных состояний (см. рис. X.5.):

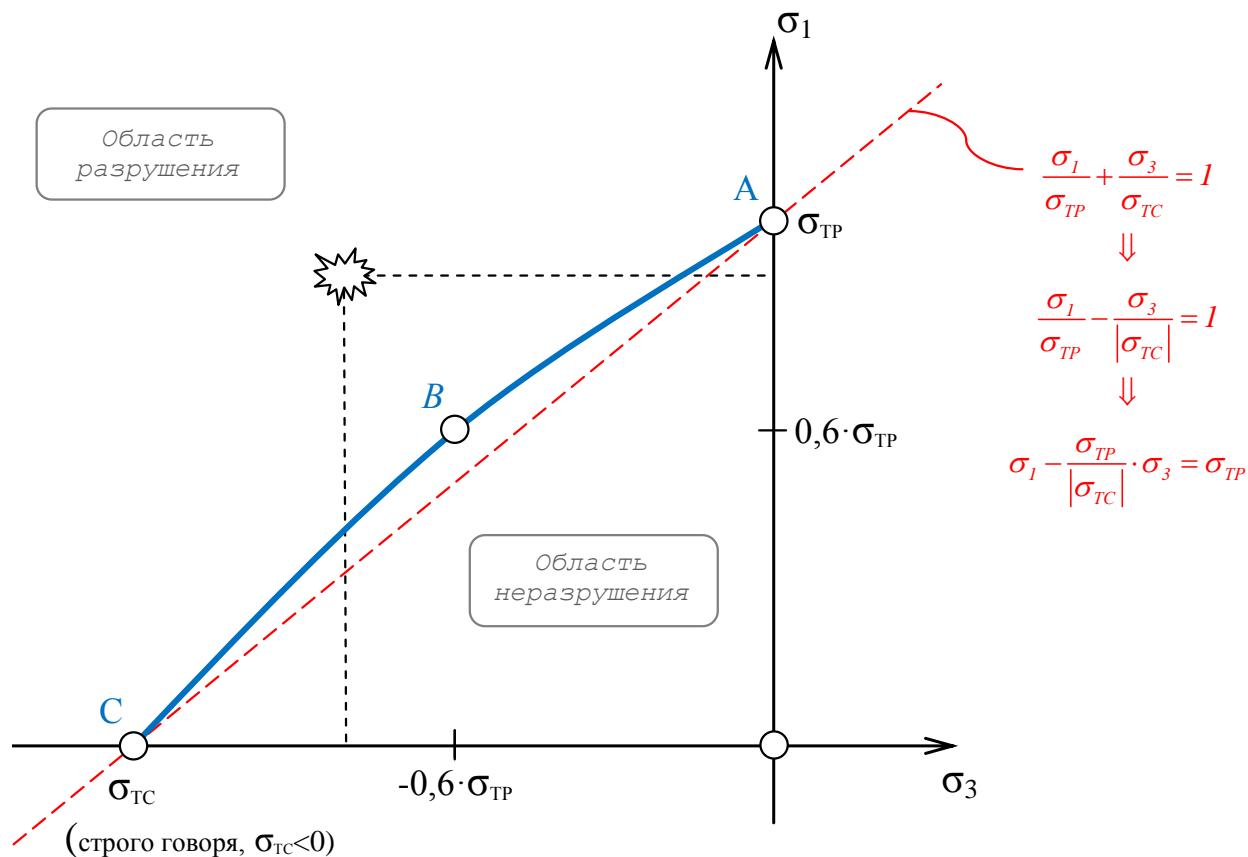
ABC – диаграмма предельных состояний;

AC – схематизация диаграммы предельных состояний: прямая, уравнение

$$\text{которой } \sigma_{TP} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{TP}}{|\sigma_{TC}|} \cdot \sigma_3.$$

Условия наступления предельного состояния: $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{TP}$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{TP} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{TP}}{|\sigma_{TC}|} \cdot \sigma_3 = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3$$

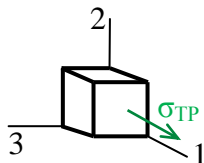


т. А – предельное состояние при одноосном растяжении:

$$\sigma_1 = \sigma_{TP}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = 0$$

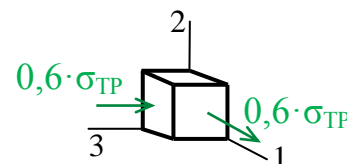


т. В – предельное состояние при чистом сдвиге:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{TP}}{\sqrt{3}} \approx 0,6 \cdot \sigma_{TP}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -0,6 \cdot \sigma_{TP}$$



При этом (рис. III.13.): $\tau_T = \sigma_1 = -\sigma_3 = \frac{\sigma_{TP}}{\sqrt{3}}$

По энергетической теории: $\sigma_{экв} = \sqrt{3 \cdot \tau^2} = \sigma_{TP}$ – предельное состояние.

т.С – предельное состояние при одноосном сжатии:

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_{TC}$$

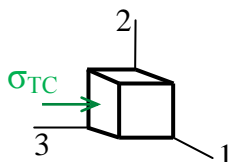
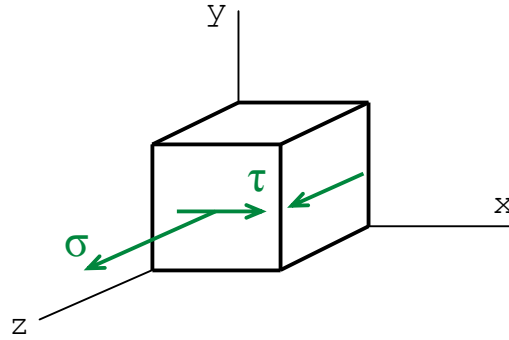


Рис. X.5.

В частном случае для упрощённого плоского напряжённого состояния:



$$\sigma' = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 =$$

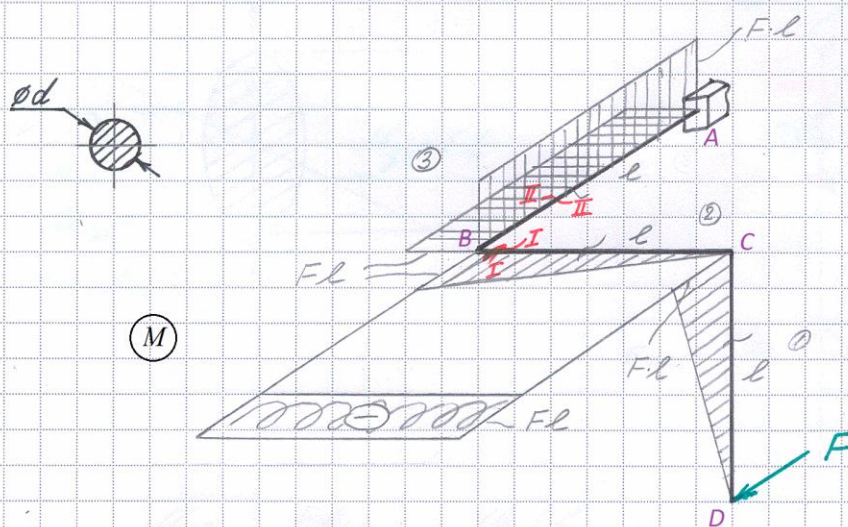
$$= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} - k \cdot \frac{\sigma}{2} + \frac{k}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} =$$

$$= \frac{1-k}{2} \cdot \sigma + \frac{1+k}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

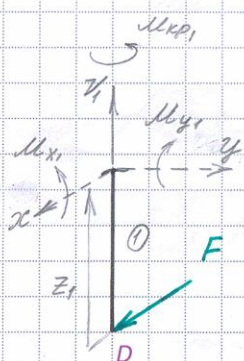
$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1-k}{2} \cdot \sigma + \frac{1+k}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

(X.8)

1) Пример расчёта коэффициента запаса прочности пространственной рамы:



Дано: d ,
 l ,
 $\sigma_T = \sigma_{Tp} = -\sigma_{Tc}$



$$\sum M_{z1} = 0 = M_{kr1}$$

$$M_{kr1} = 0$$

$$\sum M_{y1} = 0 = M_{y1} + F \cdot z_1$$

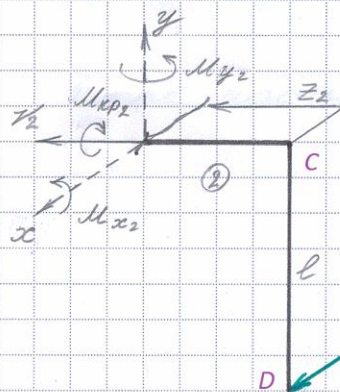
$$M_{y1} = -F \cdot z_1$$

$$z_1 = 0: M_{y1} = 0$$

$$z_1 = l: M_{y1} = -Fl$$

$$\sum M_{x1} = 0 = M_{x1}$$

$$M_{x1} = 0$$



$$\sum M_{z2} = 0 = M_{kr2} + Fl$$

$$M_{kr2} = -Fl$$

$$\sum M_{y2} = 0 = M_{y2} - F \cdot z_2$$

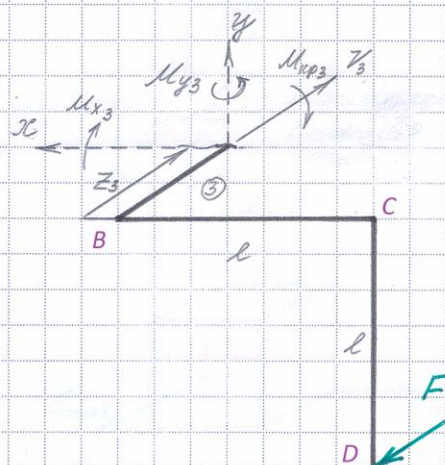
$$M_{y2} = F \cdot z_2$$

$$z_2 = 0: M_{y2} = 0$$

$$z_2 = l: M_{y2} = F \cdot l$$

$$\sum M_{x2} = 0 = M_{x2}$$

$$M_{x2} = 0$$



$$\sum M_{z3} = 0 = M_{kr3}$$

$$M_{kr3} = 0$$

$$\sum M_{y3} = 0 = M_{y3} - F \cdot l$$

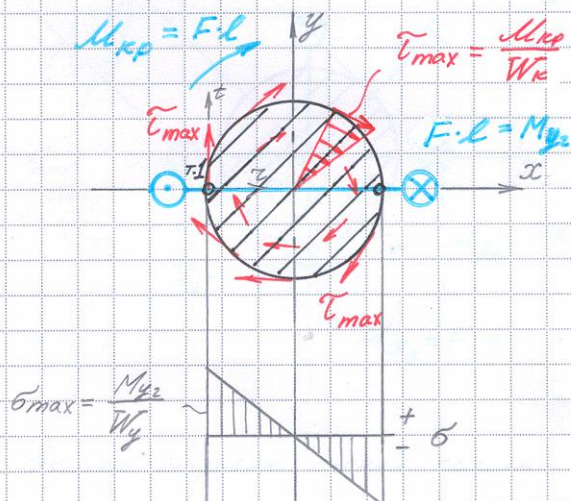
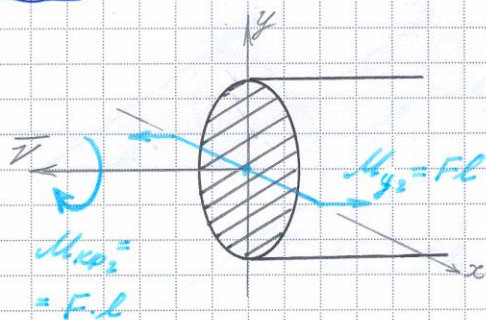
$$M_{y3} = Fl$$

$$\sum M_{x3} = 0 = M_{x3} + F \cdot l$$

$$M_{x3} = -F \cdot l$$

Опасные сечения: I-I и II-II

I-I ($z=l$)



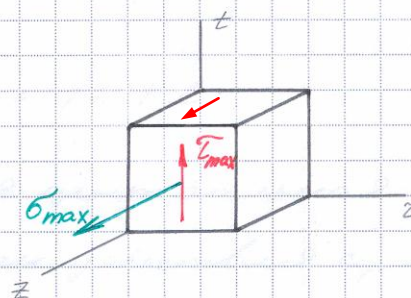
$$\tau_{\max} = \frac{M_{x2}}{W_x} = \frac{F \cdot l}{\pi d^3 / 16} = \frac{16 \cdot F \cdot l}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y2}}{W_y} = \frac{F \cdot l}{\pi d^3 / 32} = \frac{32 \cdot F \cdot l}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{I-I} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2} = \frac{F \cdot l}{\pi d^3} \sqrt{32^2 + 3 \cdot 16^2} \approx \frac{42 F \cdot l}{\pi d^3}$$

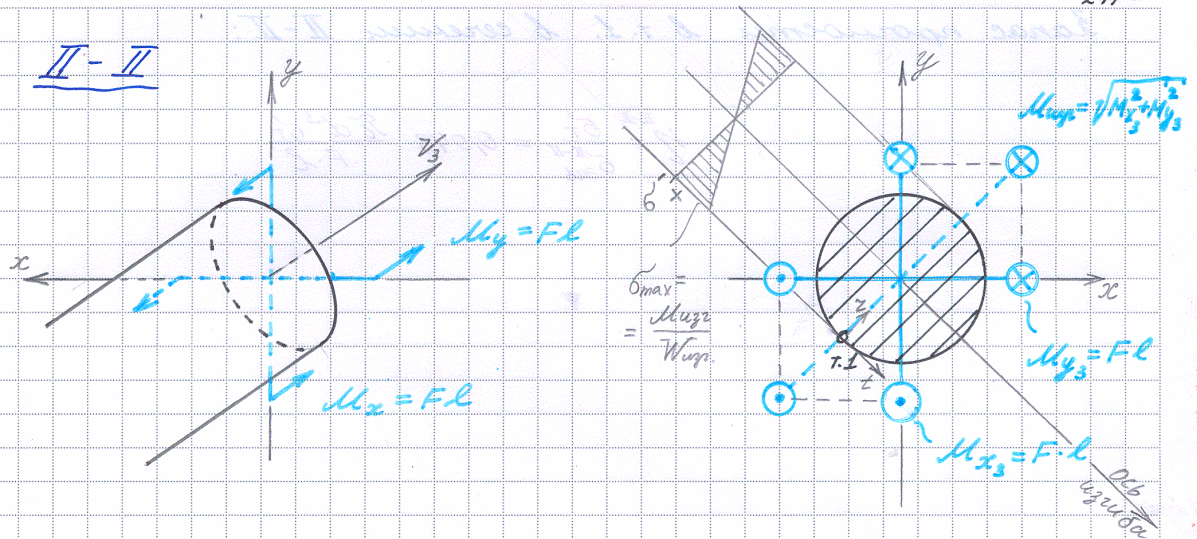
Энергетическая теория прочности, т.к. $\sigma_{\text{тр}} = |\sigma_{\text{тс}}|$

т. 1 - наиболее опасная точка.



Запас прочности в сечении I-I:

$$\eta^{I-I} = \frac{\sigma_{\text{т-т}}}{\sigma_{\text{экв}}^{I-I}} = \frac{\pi d^3 \cdot \sigma_{\text{т}}}{F \cdot l} \cdot 0,024$$



Для фигур, имеющих три и более осей симметрии, любая центральная ось является главной. Для таких фигур поперечных сечений (квадрат, круг) изгибающие моменты можно векторно складывать, у таких сечений косоуго изгиба нет.

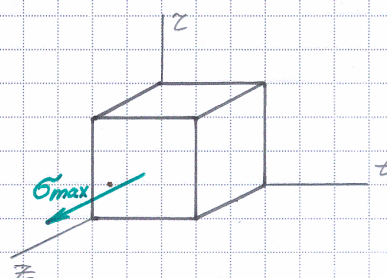
$$M_{uz3} = \sqrt{M_{x3}^2 + M_{y3}^2} = \sqrt{(Fl)^2 + (Fl)^2} = \sqrt{2} \cdot Fl$$

а осью изгиба будет главная центральная ось, перпендикулярная плоскости действия суммарного изгибающего момента.

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{uz3}}{W_{uz3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot Fl}{\pi d^3 / 16} = \\ &= \frac{16 \sqrt{2} \cdot Fl}{\pi d^3} \approx 23 \frac{Fl}{\pi d^3} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{изб}}^{\text{II-II}} = \sigma_{\max} = \frac{23 \cdot Fl}{\pi \cdot d^3}$$

т. 1 - опасная точка.



Запас прочности в т. л. в сечении II-II:

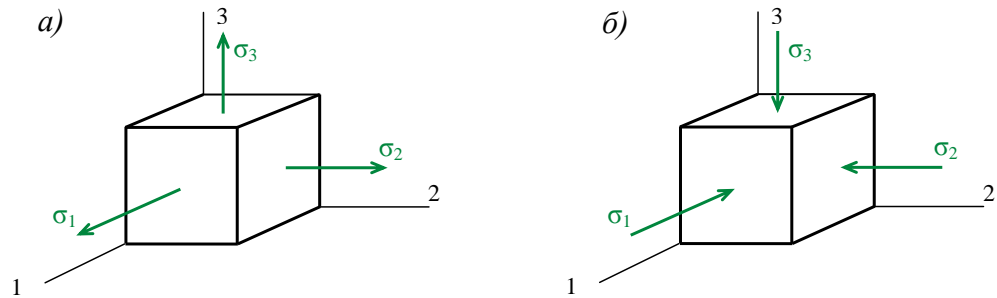
$$\eta^{II-II} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{нл}}^{II-II}} = 0,043 \frac{\pi d^3 \sigma_T}{F \cdot l}$$

Запас прочности всей конструкции — наименьший из запасов прочности её точек:

$$\eta = \min(\eta^{I-I}, \eta^{II-II}) = \eta^{II-II} = 0,024 \frac{\pi d^3 \sigma_T}{F \cdot l}$$

В заключении хотелось бы заметить: расчёты по всем, существующим на данный момент теориям прочности, дают удовлетворительные результаты только в том случае, когда в напряжённом состоянии доминирует девиатор, то есть экстремальные главные напряжения σ_1 и σ_3 имеют разные знаки, либо одно из них равно нулю.

В случае, когда все главные напряжения одного знака



в напряжённом состоянии доминирует шаровой тензор и на результаты расчётов $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ по формулам теорий прочности полагаться нельзя, необходимо проводить экспериментальные исследования.

Схема а) пусть не вводит в заблуждение схожестью с предыдущими рисунками, просто, когда значения главных напряжений неизвестны, их принято изображать в положительном направлении.

Теория Гриффитса хрупкого трещинообразования

Из-за структурных дефектов (трещин, микропор, включений, дислокаций, вакансий) реальная прочность материала оказывается значительно ниже теоретической.

Хрупким называется материал, сохраняющий упругие свойства вплоть до разрушения.

Разрушение хрупкого материала – результат развития трещин, присутствовавших в нём изначально. Гриффитс попытался определить условие (критерий), по достижении которого первоначально «спящие» в материале трещины начинают интенсивно расти.

Гриффитс предположил, что:

- 1) Чтобы увеличить существующую трещину, нужно дополнительно «порвать» материал у её вершины: создать внутри детали две свободные поверхности и **затратить** на это некоторую энергию ΔW ;
- 2) Увеличение трещины понижает напряжения в её окрестности; при этом **высвобождается** потенциальная энергия ΔU ;

ΔW – величина постоянная для данного материала, а $\Delta U \sim (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Когда напряжения достигнут определённого уровня, ΔU сравняется с ΔW и трещина начнёт расти самопроизвольно.

Представим себе сквозную поперечную трещину длиной l у края растянутой полоски из хрупкого материала (рис. X.6a.). Во всём объёме полоски напряжения σ распределены равномерно, за исключением вершины трещины (там локальный всплеск напряжений) и области сверху и снизу от трещины (там напряжения будут снижены вплоть до нуля). Для удобства расчёта зоной напряжений, существенно меньших σ будем считать полуокруг радиусом l (рис. X.6a.), это недалеко от истины.

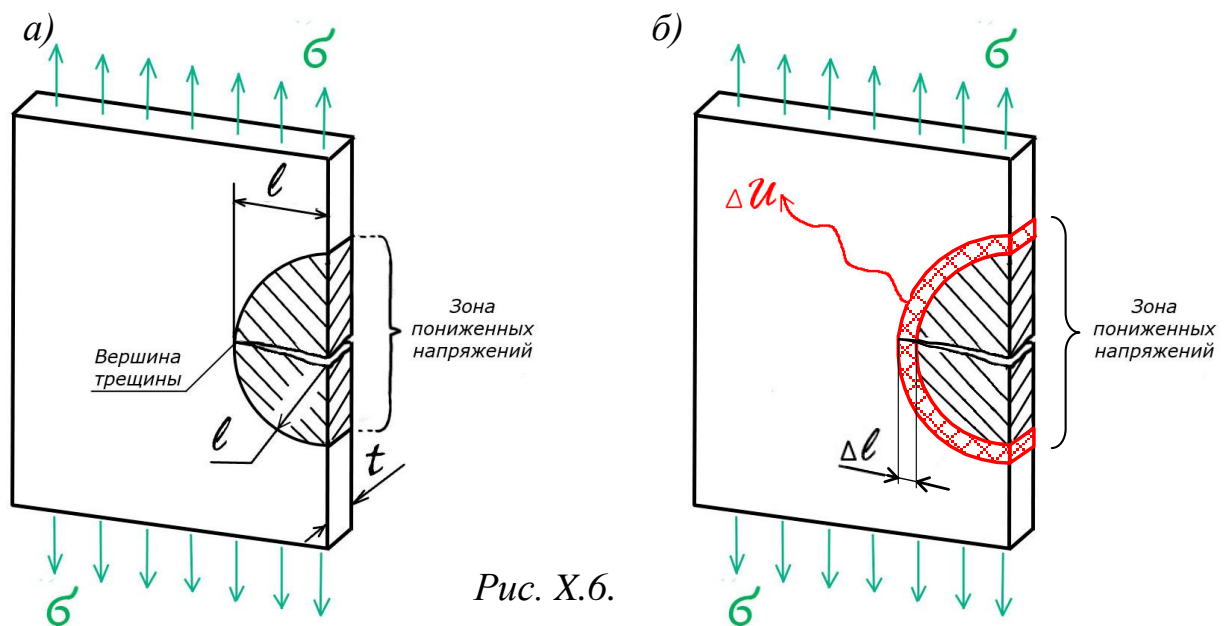


Рис. X.6.

Потенциальная энергия в единице напряжённого объёма (см. формулу VIII.15):

$$u_0 = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[\sigma^2 + \cancel{\sigma_2^2} + \cancel{\sigma_3^2} - 2 \cdot \nu \cdot (\cancel{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \cancel{\sigma_2 \cdot \sigma_3} + \cancel{\sigma_3 \cdot \sigma_1}) \right] = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}$$

Трещина получает небольшое приращение Δl (рис. X.6б.). Объём зоны пониженных напряжений, радиусом которой является длина трещины, увеличится на

$$\Delta V = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \pi \cdot l)}_{\substack{\text{длина} \\ \text{полуокружности}}} \cdot \underbrace{\Delta l}_{\text{толщина}} \cdot \overset{\text{ширина}}{t} = \pi \cdot l \cdot \Delta l \cdot t$$

Потенциальная энергия изменится на

$$\Delta u = u_0 \cdot \Delta V = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta l \cdot t$$

Работа по раскрытию трещины (работа, затраченная на образование двух свободных поверхностей):

$$\Delta W = 2 \cdot \gamma \cdot \Delta l \cdot t$$

/ площадь
две
поверхности

где

$$\gamma \approx 0,01 \cdot E \cdot r_0 \left[\frac{H \cdot m}{m^2} \right] - \text{работа образования единицы площади свободной поверхности;}$$

r_0 – расстояние между атомами в ненагруженном состоянии

(Л.М.Качанов, «Основы механики разрушения», стр. 212).

$\Delta u < \Delta W$ – трещина не растёт;

$\Delta u \geq \Delta W$ – самопроизвольный рост трещины;

$\Delta u = \Delta W$ – критерий роста трещины.

$$\frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot \pi \cdot l \cdot \cancel{\Delta l} \cdot \cancel{t} = 2 \cdot \gamma \cdot \cancel{\Delta l} \cdot \cancel{t}$$

$$\boxed{\frac{\sigma^2 \cdot \pi \cdot l}{E} = 4 \cdot \gamma} \quad \text{Энергетический критерий Гриффитса (X.9)}$$

роста трещины (1920 г.).

Польза формулы (X.9) – в установлении связи между растягивающими напряжениями σ и длиной трещины l .

Если известно напряжение σ , можно быть уверенными, что трещины, длиной меньше l расти не будут. Тем более, что формула (X.9) выведена для идеального хрупкого материала и не учитывает свойств материала реального, тормозящих развитие трещины: пластичность, неоднородности и т.д.

В вершине реальной трещины происходит пластическая деформация металла, причём затрачиваемая на неё работа может быть гораздо больше поверхностной энергии γ идеально хрупкого разрушения.

Эту работу, как заметили Ирвин и Орован в 1952 г., можно учесть в рамках той же схемы Гриффитса, если приписать поверхностной энергии более широкий смысл и в формуле (X.9) заменить γ на $(\gamma + \gamma_p)$:

$$\boxed{\frac{\sigma^2 \cdot \pi \cdot \ell}{E} = 4 \cdot (\gamma + \gamma_p)} \quad (X.10)$$

где

γ_p – работа пластической деформации при образовании единицы

поверхности; для стали: $\gamma_p \approx 10^3 \cdot \gamma$ (Качанов, стр. 214) – именно

столь значительная пластическая работа и обеспечивает хорошее сопротивление металлов разрушению.

Критерий Ирвина развития трещины

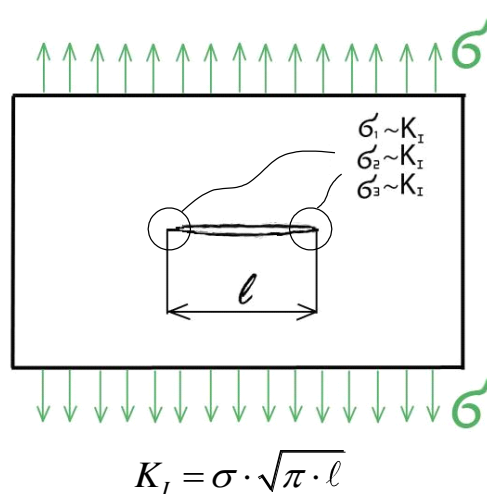
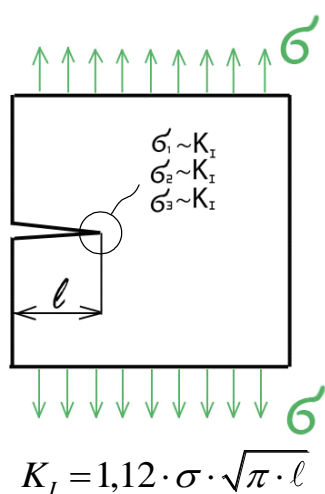
Кроме энергетического подхода (Гриффитса) к анализу развития трещин, основанного на законе сохранения и превращения энергии, существует также силовой подход (Ирвина) к рассмотрению данного явления, предполагающий начало развития трещины в том случае, когда напряжения при её вершине достигнут определённого уровня.

Расчёты методами теории упругости и теории пластичности показали: величины главных напряжений при вершине пропорциональны множителю, именуемому **коэффициентом интенсивности напряжений (КИН)**

$$K = \sigma \cdot \sqrt{\ell} \cdot C$$

где

C – безразмерный числовой коэффициент, зависящий от формы трещины:



и т.д.

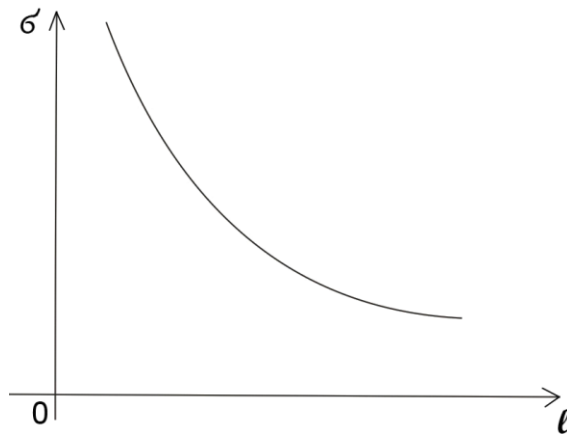
При увеличении напряжения σ в детали страгивание трещины с места начинается по достижении коэффициентом K некоторого критического значения K_C .

K_C такая же характеристика материала, как модуль упругости, определяется экспериментально.

Формула

$$K_c = \sigma \cdot \sqrt{\ell} \cdot C \quad (X.11)$$

так же, как и формула (X.9) устанавливает связь между равномерными напряжениями σ , действующими на трещину и длиной ℓ этой трещины, начиная с которой трещина растёт самопроизвольно:

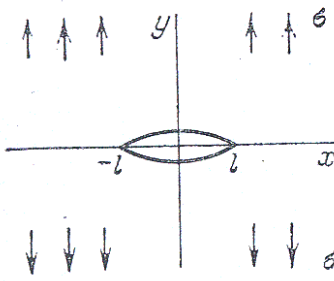
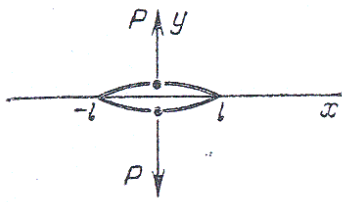
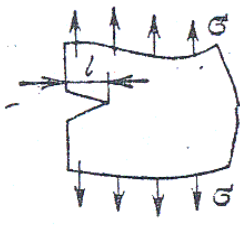
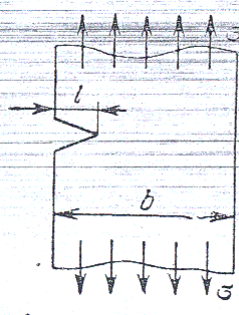
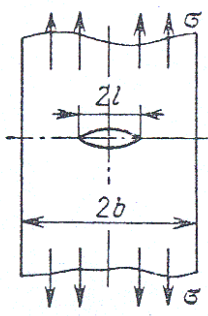


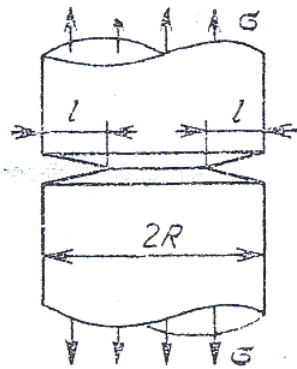
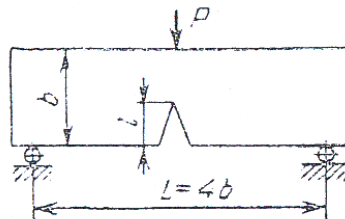
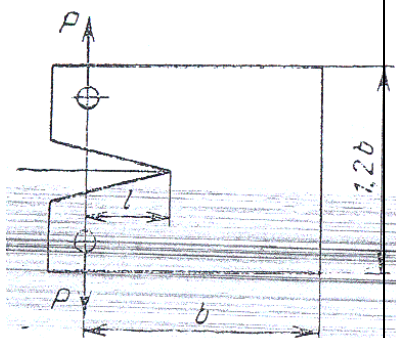
Условие прочности:

$$\sigma < \frac{K_c}{C \cdot \sqrt{\ell}} \quad (X.12)$$

Рис. X.7.

Коэффициенты интенсивности напряжений

Номер схемы	Форма образца и схема нагружения	Условие нагружения	Формула для коэффициента интенсивности напряжений
1		Неограниченная плоскость с трещиной, растяжение перпендикулярн о трещине	$K = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot \ell}$
2		Неограниченная плоскость с трещиной, растяжение сосредоточенны ми силами	$K = \frac{P}{\sqrt{\pi \cdot \ell}}$
3		Полуплоскость с краевой поперечной трещиной, растяжение перпендикулярн о трещине	$K = 1,12 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot \ell} =$ $= 1,99 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\ell}$
4		Полоса с краевой поперечной трещиной, осевое растяжение	$K = \sigma \cdot \sqrt{\ell} \cdot C(\lambda),$ $\lambda = \frac{l}{b} \quad (\lambda < 0,7)$ $C(\lambda) = 1,99 - 0,41 \cdot \lambda +$ $+ 18,70 \cdot \lambda^2 - 38,48 \cdot \lambda^3 +$ $+ 53,85 \cdot \lambda^4$
5		Полоса с центральной поперечной трещиной, осевое растяжение	$K = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot \ell} \cdot C(\lambda),$ $\lambda = \frac{l}{b} \quad (\lambda < 0,7)$ $C(\lambda) = 1 + 0,128 \cdot \lambda -$ $- 0,288 \cdot \lambda^2 - 1,525 \cdot \lambda^3$

Номер схемы	Форма образца и схема нагружения	Условие нагружения	Формула для коэффициента интенсивности напряжений										
6		Цилиндр с внешней кольцевой трещиной, осевое растяжение	$K = \sigma \cdot \sqrt{\ell} \cdot C(\lambda),$ $\lambda = \frac{l}{R}$ <table><tr><td>$\lambda = 0,03$</td><td>$C = 1,88$</td></tr><tr><td>0,05</td><td>1,82</td></tr><tr><td>0,1</td><td>1,66</td></tr><tr><td>0,2</td><td>1,41</td></tr><tr><td>0,4</td><td>1,01</td></tr></table>	$\lambda = 0,03$	$C = 1,88$	0,05	1,82	0,1	1,66	0,2	1,41	0,4	1,01
$\lambda = 0,03$	$C = 1,88$												
0,05	1,82												
0,1	1,66												
0,2	1,41												
0,4	1,01												
7		Балка с краевой поперечной трещиной, изгиб сосредоточенной силой	$K = \frac{6 \cdot P \cdot \sqrt{\ell}}{t \cdot b} \cdot C(\lambda),$ $\lambda = \frac{l}{b} \quad (\lambda < 0,6)$ $C(\lambda) = 1,93 - 3,07 \cdot \lambda +$ $+ 14,53 \cdot \lambda^2 - 25,1 \cdot \lambda^3 +$ $+ 25,8 \cdot \lambda^4$										
8		«Компактный» образец, растяжение сосредоточенны ми силами	$K = \frac{P \cdot \sqrt{\ell}}{t \cdot b} \cdot C(\lambda),$ $\lambda = \frac{l}{b}$ $C(\lambda) = 29,6 - 185 \cdot \lambda +$ $+ 655 \cdot \lambda^2 - 1017 \cdot \lambda^3 +$ $+ 639 \cdot \lambda^4$										

В.З.Партон, «Механика разрушения. От теории к практике.»

Пластическая поправка Ирвина: при вычислении КИН следует искусственно (фиктивно) увеличить длину трещины на половину длины пластической зоны.

Вычисление КИН
методом конечных элементов:

В.З.Партоң, Е.М.Морозов

«Механика упруго-пластического разрушения», стр. 57, 61.

① Энергетический метод
(метод податливости):

Метод не требует мелких элементов и местного сгущения сетки. Отличается хорошей точностью.

1. Рассчитывается тело с трещиной длиной ℓ , подсчитывается упругая энергия U , либо непосредственно, либо, как работа внешних сил;
2. Трещине даётся приращение длины $\Delta\ell$, снова производится расчёт, определяется приращение ΔU ;
3. Рассчитывается интенсивность освобождения упругой энергии:

$$G = \pm \frac{\partial U}{\partial \ell} \approx \frac{\Delta U}{\Delta \ell} \quad (X.13)$$

4. КИН с интенсивностью освобождения упругой энергии связан формулами:

$$G = (1 - \nu^2) \cdot \frac{K^2}{E} - \text{для плоского деформированного состояния} \quad (X.14)$$

$$G = \frac{K^2}{E} - \text{для плоского напряжённого состояния} \quad (X.15)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона.

② Прямой метод:

Напряжения в окрестности вершин трещины выражаются формулами:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{r}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad \begin{array}{c} \nearrow \sigma_{ij} \\ r \\ \searrow \theta \end{array} \quad (X.16)$$
A schematic diagram of a crack tip. Two horizontal lines representing the crack arms meet at a point on the left. From this point, a line segment extends upwards and to the right at an angle theta from the horizontal. A point is marked at the end of this segment, with a distance r indicated between the crack tip and the point. A stress vector sigma_ij is shown as an arrow pointing away from the point.

Зная σ_{ij} из численного расчёта и $f_{ij}(\theta)$ из расчёта аналитического можно вычислить K_I . Метод требует значительного сгущения сетки КЭ в окрестности вершин трещины. Использовать следует квадратичные КЭ, длина стороны которых при удалении от вершины трещины увеличивается пропорционально \sqrt{r} .