При переходе из одной системы отсчета в другую, движущуюся относительно первой с некоторой скоростью, преобразуются не только координаты, но и время, скорость, частота, импульс, энергия, волновой вектор, плотность тока и многие другие величины, включая электрическое и магнитное поля. Для количественного описания этих преобразований удобно какие-то из этих величин рассматривать как компоненты 4-векторов, а какие-то - как элементы 4-тензоров в псевдоевклидовом пространстве. И 4-векторы, и 4-тензоры могут записываться в ко- и контравариантном представлении.

4-вектор события в контравариантом представлении (здесь и всюду ниже величины с верхними индексами - это контравариантые компоненты, а не степени числа):

$$x^i = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4-вектор потенциала в контравариантом представлении:

$$A^i = \begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix},$$

где A_x, A_y, A_z - компоненты обычного 3-мерного вектор-потенциала, а $\varphi(\mathbf{r}, t)$ - скалярная функция, градиент которой удовлетворяет соотношению $-\nabla\varphi = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt}$.

Метрический тензор в ко- и контравариантном представлении:

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Переход между ковариантым и контравариантным представлением векторов осуществляется с помощью соотношений (здесь и ниже суммирование производится по повторяющимся индексам, стоящим на разных уровнях)

$$V_i = g_{ik}V^k, \; V^i = g^{ik}V_k$$

Например, вектор события в ковариантом представлении

$$x_i = g_{ik}x^k = (ct, -x, -y, -z).$$

Формула релятивистских преобразований 4-векторов в контравариантном представлении:

$$V'^i = \Lambda^i_k V^k,$$

где Λ^i_k – матрица преобразования Лоренца, i=0,...,3, k=0,...,3.

Матрица преобразования Лоренца (для случая, когда сопутствующая система отсчета движется относительно лабораторной со скоростью $\boldsymbol{\beta} = \frac{v}{c}\mathbf{e}_x$):

$$\Lambda^i_m = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица обратного преобразования Лоренца (для случая $\boldsymbol{\beta} = \frac{v}{c}\mathbf{e}_x$) *:

$$\left(\Lambda^i_m\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

По форме Λ представляет собой матрицу поворота, поэтому преобразования Лоренца не изменяют скалярного произведения 4-векторов, которое определяется как

$$(V \cdot U) = V_i U^i.$$

Примером релятивистского инварианта является *интервал* s, квадрат которого равен скалярному произведению 4-вектора события на самого себя:

$$s^2 = x_i x^i = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Интервал между двумя событиями ($x_1^{(4)}$ и $x_2^{(4)}$) равен

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta^2 x - \Delta^2 y - \Delta^2 z = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

*Эта же матрица (формально, обратная транспонированная к Λ) описывает прямое преобразование Лоренца в применении к 4-векторам в *ковариантом* представлении.

Применив преобразование Лоренца к 4-мерному волновому вектору $k^{(4)}$, получим количественное описание эффекта Доплера и аберрации света:

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}.$$

Действительно, имеем:

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\frac{\omega}{c} - \beta\gamma k_x = \gamma\frac{\omega}{c} - \beta\gamma k\cos\theta = \gamma\frac{\omega}{c} - \beta\gamma\frac{\omega}{c}\cos\theta = \frac{\omega}{c}\gamma(1-\beta\cos\theta) \Rightarrow \omega' = \omega\gamma(1-\beta\cos\theta).$$

$$\frac{k'_y}{k'_x} = \operatorname{tg}\theta' = \frac{k_y}{-\beta\gamma\frac{\omega}{c}+\gamma k_x} = \frac{\frac{\omega}{c}\sin\theta}{-\beta\gamma\frac{\omega}{c}+\gamma\frac{\omega}{c}\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}.$$

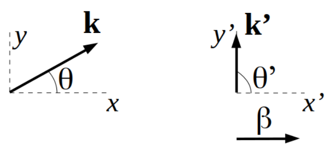
В случае $\theta = \theta' = 0$ (продольный Доплер-эффект):

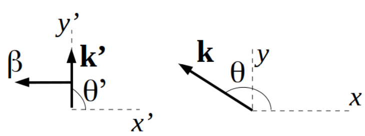
$$\cos\theta = 1 \Rightarrow \omega' = \omega\gamma(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega.$$

При $\beta > 0$ приемник удаляется от излучателя, излучение догоняет приемник и наблюдаемая частота уменьшается: $\omega' < \omega$.

В случае $\theta' = \frac{\pi}{2}$ (поперечный Доплер-эффект):

$$k'_x = \gamma(-\beta\frac{\omega}{c} + k_x) = 0 \Rightarrow \cos\theta = \beta \Rightarrow \omega' = \omega\gamma(1-\beta^2) = \omega\sqrt{1-\beta^2}.$$





Независимо от направления (знака) β, при поперечном Доплер-эффекте приемник всегда удаляется от излучателя. Действительно, если $\beta > 0$, то $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, в системе излучателя приемник находится справа, то есть удаляется от него. Если же $\beta < 0$, то $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, в системе излучателя приемник находится слева от него, то есть также удаляется. При этом наблюдаемая в системе приемника частота уменьшается ($\omega' < \omega$).