Домашняя работа к занятию 26.

1.1 Докажите трехчленную рекуррентную формулу

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

1.2 Решите задачу Коши $\begin{cases} x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0 \\ y(1) = 0;\ y'(l) = 1 \end{cases}$

1.3 Решите краевую задачу $\begin{cases} xy'' + y' + xy = x^2 + 1 \\ y(0)\text{— ограничено} \\ y'(l) = 0 \end{cases}$

1.4 Докажите, что $x\Big(J_\nu(x)\cdot J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)\cdot J'_\nu(x)\Big) = \mathrm{const}$

2.1 Покажите, что функция $y(x) = x^\alpha J_\nu(ax)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x} y' + (a^2 + \frac{\alpha^2-\nu^2}{x^2})y = 0$$

2.2 Докажите, что $\sin x = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x)$

2.3 Докажите, что $\int\limits_0^1 x^{n+1} J_n(ax)\,dx = \frac{J_{n+1}(a)}{a}$, $n \geqslant 0$.

2.4 Найдите общее решение уравнения

$$x^2y'' + 2xy' + (x^2 - (n+1)n)y = 0$$

3.1 Используя формулу $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \dfrac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ для вычисления коэффициентов разложения в ряд Лорана функции $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ и производящую функцию $\exp(\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} z^n J_n(x)$, покажите, что

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\theta + ix\sin\theta}\, d\theta$$

Преобразуйте последний интеграл и получите интегральное представление функций Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta$$

3.2 Докажите, что

$$\int\limits_0^1 x J_n^2(\lambda x)\, dx = \frac{1}{2}(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}) J_n^2(\lambda) + \frac{1}{2}(J_n'(\lambda))^2$$

3.3 Опираясь на теорему Стеклова, сформулируйте теорему о разложении функции $f(x)$ на отрезке $[0;1]$ в ряд Фурье–Бесселя

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k J_1(\lambda_k x), \quad \text{где} \quad J_1(\lambda_k) = 0$$

Найдите коэффициенты разложения c_k для функции $f(x) = x$.

Ответы и указания.

1.2 Общее решение $y(x) = C_1 J_1(x) + C_2 N_1(x)$.

Ответ: $y(x) = \dfrac{J_1(1)N_1(x) - N_1(1)J_1(x)}{J_1(1)N_1'(x) - N_1(1)J_1'(x)}$

1.3 Общее решение $y(x) = x + C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x)$. Из условия ограниченности в нуле $C_2 = 0$. Учитывая, что $J_0'(x) = -J_1(x)$, получаем $y'(l) = 1 + C_1 J_0'(l) = 1 - C_1 J_1(l) = 0$, откуда $C_1 = \dfrac{1}{J_1(l)}$.

Ответ: $y(x) = x + \dfrac{J_0(x)}{J_1(l)}$

1.4 *Указание*: Вычислите Вронскиан функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$.

2.2 *Указание*: положите в производящей функции $z = i$.

2.3 *Указание*: воспользуйтесь формулой (26.8).

2.4 Указание: заменой $y = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$ сведите это уравнение к уравнению Бесселя. *Ответ*: $y(x) = C_1 \dfrac{J_{n+1/2}(x)}{\sqrt{x}} + C_2 \dfrac{J_{-(n+1/2)}(x)}{\sqrt{x}}$.

3.2 *Указание*: Сделайте замену $t = \lambda x$ и воспользуйтесь формулой интегрирования по частям, учитывая, что $J_n(0) = 0$ и функция $J_n(t)$ является решением соответствующего дифференциального уравнения.

3.3 *Указание*: воспользуйтесь результатами задач 2.3 и 3.2, а также тем, что $J_1'(\lambda_k) = -\dfrac{1}{\lambda_k} J_2(\lambda_k)$.

Ответ: коэффициенты разложения для функции $f(x) = x$

$$c_k = \frac{\int\limits_0^1 x^2 J_1(\lambda_k x)\,dx}{\int\limits_0^1 x J_1^2(\lambda_k x)\,dx} = \frac{\frac{2}{\lambda_k} J_2(\lambda_k)}{(J_1'(\lambda_k))^2} = \frac{2\lambda_k}{J_2(\lambda_k)}$$