Домашняя работа к занятию 16.

1.1 Найдите первые интегралы автономной системы

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy(1+z^2)}$$

1.2 Убедитесь, что функции $F_1 = x+u$ и $F_2 = y+v$ являются первыми интегралами автономной системы $\begin{cases} \dot{x} = y - v \\ \dot{y} = u - x \\ \dot{u} = v - y \\ \dot{v} = x - u \end{cases}$ Используя эти первые интегралы, решите систему.

Проверьте, что функция $F_3 = (x-u)^2 + (y-v)^2$ также является первым интегралом, независимым с найденными ранее.

1.3 Найдите первые интегралы автономной системы

$$\frac{dx}{x(x-z)} = \frac{dy}{x^2 - zy} = \frac{dz}{z(y-x)}$$

2.1 Найдите первые интегралы и решите с их помощью задачу Коши для системы $\begin{cases} \dot{x} = x^2 y, & x(0) = 1 \\ \dot{y} = (x^2 + y^2)(x+z), & y(0) = 2 \\ \dot{z} = yz^2, & z(0) = 1 \end{cases}$

2.2 Убедитесь, что для решений системы $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2 - t}{y} \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ выполнено соотношение $t^2 + 2xy = C$.

Решите с его помощью задачу Коши с условиями $x(0) = 0, y(0) = 1$.

Укажите область определения полученного решения.

3.1 Покажите, что в области, содержащей особую точку типа узла или фокуса для системы $\begin{cases} \dot{x} = P(x;y) \\ \dot{y} = Q(x;y) \end{cases}$ не может существовать первый интеграл вида $F(x;y) = C$ с непрерывной функцией $F(x;y)$.

Ответы.

1.1 Указания: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = C_1$

$\dfrac{ydx + xdy}{2xyz} = \dfrac{dz}{xy(1+z^2)} \Rightarrow d(xy) = \dfrac{2zdz}{1+z^2} \Rightarrow xy - \ln(1+z^2) = C_2$

Ответ: $\dfrac{y}{x} = C_1$, $xy - \ln(1+z^2) = C_2$

1.2 Указания: исключите из системы функции x и y и найдите функции u и v. Затем, используя эти же первые интегралы, найдите x и y.

$$\begin{cases} \dot{u} = 2v - C_2 \\ \dot{v} = C_1 - 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u_1} = 2v_1 \\ \dot{v_1} = -2u_1, \end{cases} \quad \text{где } u_1 = u - \frac{C_1}{2},\ v_1 = v - \frac{C_2}{2}$$

$$\begin{cases} u = C_3 \sin 2t + C_4 \cos 2t + \dfrac{C_1}{2} \\ v = C_3 \cos 2t - C_4 \sin 2t + \dfrac{C_2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 - u = -C_3 \sin 2t - C_4 \cos 2t + \dfrac{C_1}{2} \\ y = C_2 - v = -C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t + \dfrac{C_2}{2} \end{cases}$$

1.3 Ответ: $x - y - z = C_1$, $\ln|z| + \dfrac{y}{x} = C_2$

2.1 $\dfrac{dx}{x^2 y} = \dfrac{dy}{(x^2+y^2)(x+z)} = \dfrac{dz}{yz^2}$

1) $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dz}{z^2} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{z} + C_1$

Из начальных условий $C_1 = 0 \Rightarrow x = z$.

2) $\dfrac{d(x+z)}{(x^2+z^2)y} = \dfrac{dy}{(x^2+y^2)(x+z)} \Rightarrow (x+z)^2 = y^2 + C_2$

Из начальных условий $C_2 = 0 \Rightarrow |x+z| = |y|$. Поскольку $x = z$ и все начальные данные положительны, то $y = 2z$.

3) $\dot{z} = 2z^3 \Rightarrow z^{-2} = -4t + C_3$, $C_3 = 1$ и $z = \dfrac{1}{\sqrt{1-4t}}$

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-4t}} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{1-4t}} \quad t \in (0; \dfrac{1}{4}) \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{1-4t}} \end{cases}$

2.2 Ответ: $x = -\dfrac{t^2}{2\sqrt{1-\frac{t^3}{3}}}$, $y = \sqrt{1-\dfrac{t^3}{3}}$, $t \in (-\infty; \sqrt[3]{3})$