Матроиды

Лекция 9

Матроидом *будем называть произвольную пару* $M = [E, \mathcal{I}]$, *где* E *— конечное множество, а* $\mathcal{I}$ *— непустое семейство подмножеств множества E, удовлетворяющее условиям:*

(M0) $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$

(M1) $A \in \mathcal{I}, B \subseteq A \implies B \in \mathcal{I}$

(M2) $A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B| \implies \exists e \in B \backslash A : A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

Множества семейства $\mathcal{I}$ назовем **независимыми множествами**, а все другие подмножества E — зависимыми множествами матроида M.

База матроида *— любое максимальное по включению независимое множество.*

Цикл матроида *— любое минимальное по включению зависимое множество.*

Примеры

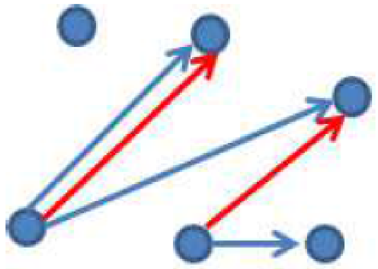
- *Матричный матроид.* Элементами множества E являются столбцы некоторой матрицы A. Подмножество столбцов считается независимым, если оно линейно независимо (в обычном смысле).

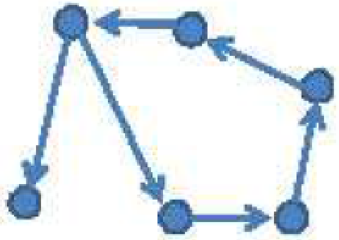
(M0) $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$
(M1) $A \in \mathcal{I}, B \subseteq A \implies B \in \mathcal{I}$
(M2) $A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B| \implies \exists e \in B \setminus A : A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

- База:Базис матрицы $\{e_1, \ldots, e_n\}$
- Цикл:$\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$,$\{e_1, e_2, e_3, \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\}$

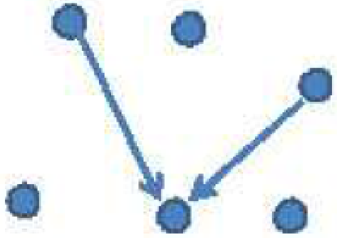
- *Матроид разбиений*. Дан орграф. Элементами множества E являются дуги орграфа G, и подмножество множества дуг G считается независимым, если никакие две дуги из этого подмножества не заходят в одну и ту же вершину.

(M0) $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$
(M1) $A \in \mathcal{I}, B \subseteq A \implies B \in \mathcal{I}$
(M2) $A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B| \implies \exists e \in B \backslash A : A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$





База



Цикл

- k–*матроид*. E — произвольное конечное множество. Его подмножество A является независимым, если $|A| \leq k$.

(M0) $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$
(M1) $A \in \mathcal{I}, B \subseteq A \implies B \in \mathcal{I}$
(M2) $A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B| \implies \exists e \in B \backslash A : A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

- *Графический матроид*. Дан граф G, E — множество ребер графа. Подмножество ребер A является независимым, если A не содержит циклов в G.

(M0) $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$

(M1) $A \in \mathcal{I}, B \subseteq A \implies B \in \mathcal{I}$

(M2) $A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B| \implies \exists e \in B \backslash A : A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

- База
- Цикл

- *Рюкзак*. Пусть заданы вещи с весами w_i и грузоподъемность рюкзака V. Подмножество вещей A является независимым, если $\sum_{i \in A} w_i \leq V$

(M0) $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$
(M1) $A \in \mathcal{I}, B \subseteq A \implies B \in \mathcal{I}$
(M2) $A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B| \implies \exists e \in B \backslash A : A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

Вещи $w_i : \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$, $V = 12$, $A = \{8, 4\}$, $B = \{2, 4, 5\}$
Ничего из B нельзя добавить к A. Значит это не матроид!

Теорема

Пусть E — конечное множество, а $\mathcal{I}$ — непустой набор подмножеств множества E, удовлетворяющее условию (M1). $M = [E, \mathcal{I}]$ является матроидом, если и только если выполняется условие:
(M3) Пусть $C \subseteq E$, и A, B — максимальные по включению независимые подмножества C. Тогда $|A| = |B|$.

Пусть M — матроид, но не выполняется (M3). Рассмотрим A, B — два максимальных по включению независимых подмножества некоторого $C \subseteq E$ такие, что $|A| < |B|$. Из (M2), $\exists e \in B \backslash A$: $A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$. Это противоречит максимальности A.
Допустим теперь, что не выполняется (M2). Тогда найдутся такие $A, B \subseteq E$, $|A| < |B|$, что $A \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ для любого $e \in B \backslash A$. Значит, для $C = A \cup B$ не выполняется (M3): A — максимальное по включению независимое подмножество множества C, но $|A| < |B|$.

Следствие. *Базы матроида равномощны.*

Пусть $(E, \mathcal{I})$ — независимая система и $c : E \to R_+$ функция весов, ставящая в соответствие каждому элементу $e \in E$ неотрицательное число $c(e)$ — *вес* элемента e. Для множества $X \subseteq E$ вес $c(X)$ определим как сумму весов всех элементов множества X:

$$c(X) = \sum_{x \in X} c(X).$$

. Требуется решить задачу

$$\sum_{e \in S} c(e) \to \max_{S \in \mathcal{I}} \tag{1}$$

«Жадный» алгоритм

1. *Упорядочить E так, чтобы $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \cdots \geq c(e_n)$;*
2. *$S \leftarrow \varnothing$;*
3. *for $i := 1$ to n do*
    1. *if $S \cup \{e_i\} \in \mathcal{I}$ then $S := S \cup \{e_i\}$;*

Теорема (Радо–Эдмондс)

Если $M = [E, \mathcal{I}]$ *— матроид, то множество* S*, найденное «жадным» алгоритмом, является решением задачи* (1)*. Напротив, если* $M = [E, \mathcal{I}]$ *— не матроид, то найдется функция* $c : E \to R^+$*, для которой это* S *не будет оптимальным.*

Очевидно, что жадный алгоритм строит базу. Пусть это база $B_0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$, и $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \ldots \geq c(e_p)$. Покажем, что вес базы B_0 максимален. Пусть это не так. Среди всех баз максимального веса выберем такую базу B, которая имеет наибольшее число общих элементов с B_0. Так как $B \neq B_0$ и $|B| = |B_0|$, то $B_0 \setminus B \neq \emptyset$. Выберем в $B_0 \setminus B$ элемент e_i с минимальным номером i. Множество $B \cup e_i$ содержит цикл C. Так как база матроида циклов не содержит, то существует $e \in C \setminus B_0$. Пусть $B' = (B \setminus e) \cup e_i$. Множество B' не содержит циклов, поскольку C — единственный цикл в $B \cup e_i$. Кроме того, $|B'| = |B|$. Следовательно, B' является максимальной базой. Далее имеем

$$B' \cap B_0 = (B \cap B_0) \cup e_i, \quad |B' \cap B_0| > |B \cap B_0|.$$

Поэтому $c(B') < c(B)$, иное противоречило бы выбору базы B.
С другой стороны, $c(B') = c(B) - c(e) + c(e_i)$, но это означает, что $c(e) > c(e_i)$. Последнее неравенство не может быть верным, поскольку на i-м шаге алгоритм выбрал e_i, а не e. Это доказывает первую часть теоремы.

В обратную сторону.
Пусть (M1) выполняется для $\mathcal{I}$, но найдутся $B \in \mathcal{I}$ и $A \in \mathcal{I}$ такие, что $|A| < |B|$ и $A \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ для любого $e \in (B \backslash A)$.
Обозначим $m = |A|$. Положим

$$c(e) = \begin{cases} m+2, e \in A \\ m+1, e \in B \backslash A \\ 0, e \in E \backslash (B \cup A) \end{cases}$$

Тогда «жадный» алгоритм сначала включит в S все элементы множества A, а затем ни один элемент множества $B \backslash A$ не добавится к S. Следовательно, суммарный вес элементов множества S будет равен $m(m+2) = m^2 + 2m$.
Но оптимальное решение задачи не меньше, чем вес B, который не меньше чем $(m+1)(m+1)$.