I

В в е д е н и е.

«*Теоретическая механика*» разработала уравнения равновесия тел, считая их абсолютно твёрдыми и неразрушимыми.

Курс «*Сопротивление материалов*», следующий шаг в механике, позволяет понять, что происходит внутри нагруженных тел простой формы; предсказать их деформации, место и условия поломки.

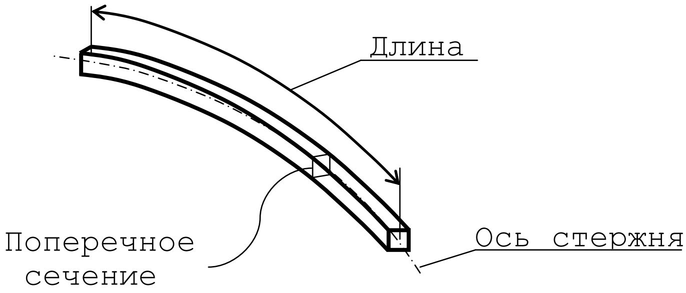
«*Сопротивление материалов*» это наука о прочности и жёсткости окружающих предметов.

Прочность – способность тела воспринимать внешнюю нагрузку без разрушения;

Жёсткость – способность тела сохранять свои геометрические размеры под действием внешней нагрузки.

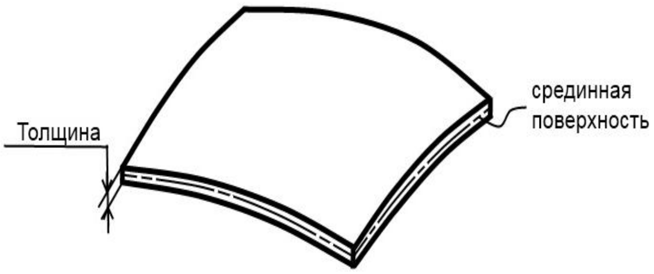
При всём многообразии конструктивных элементов машин и сооружений их все приближённо можно представить в виде комбинаций тел трёх основных форм: *стержень; оболочка; массив.*

Стержень это тело, один из размеров которого много больше двух других (как минимум, на порядок):



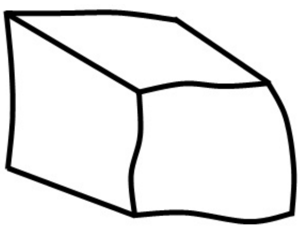
Этот наибольший размер называется ***длиной*** стержня. Объём тела может быть образован перемещением плоской фигуры вдоль некоторой линии, проходящей через её центр. Линия называется ***осью*** стержня, а промежуточные положения фигуры при движении задают ***поперечные сечения*** стержня (всегда перпендикулярные оси).

Оболочка это тело, один из размеров которого много меньше двух других:



Этот наименьший размер называется ***толщиной*** оболочки

Массив это тело, все три размера которого соизмеримы (одного порядка):



Основные гипотезы о свойствах материала:

В расчётах достаточно учесть только три реальные статистические характеристики материала: удельную жёсткость (модуль упругости E), удельную прочность (предел прочности $\sigma_{В}$ или предел текучести $\sigma_{Т}$) и относительное сужение (коэффициент Пуассона ν). Остальные особенности расчётчика не интересуют.

Поэтому материал рассматриваемых объектов предполагается:

Однородным: свойства материала во всех его точках одинаковы;

Сплошным: без пустот;

В большинстве задач курса материал также предполагается:

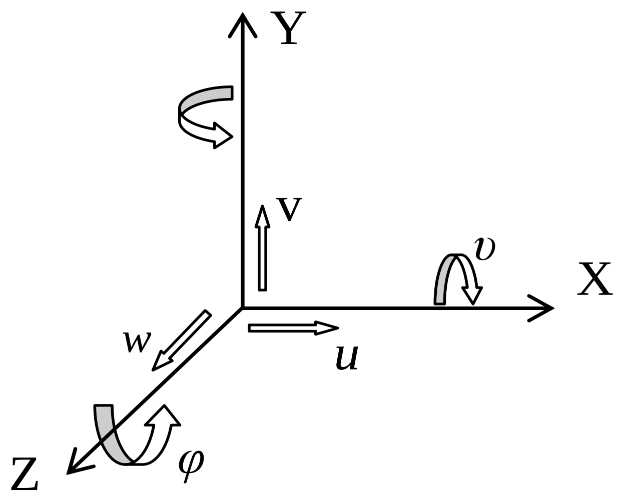
Изотропным: свойства материала одинаковы по всем направлениям в нём (анизотропны – кристалл, дерево и т.д.);

Упругим: восстанавливает первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

Упругие свойства проявляются в материалах только на начальной стадии деформирования. Курс «Сопротивление материалов» посвящён расчёту поведения конструкций, форма которых при нагружении меняется незначительно.

Связи:

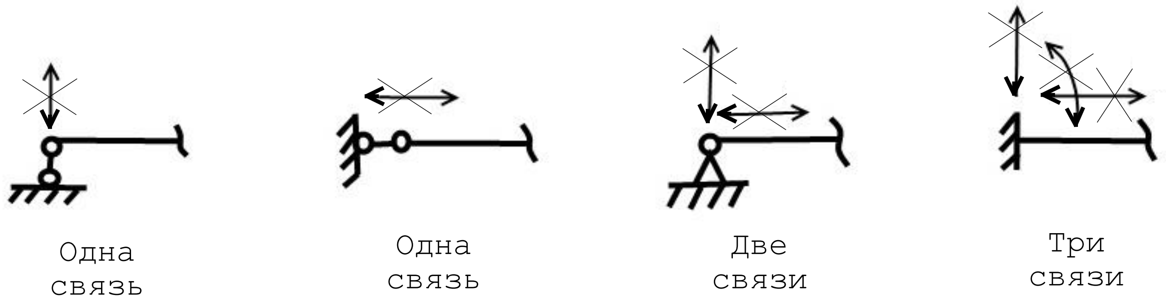
Количество степеней свободы тела это количество независимых возможных его перемещений. В пространстве у тела шесть степеней свободы; на плоскости – три; если тело может перемещаться только вдоль одной линии, либо поворачиваться только в одной плоскости, значит оно имеет одну степень свободы.



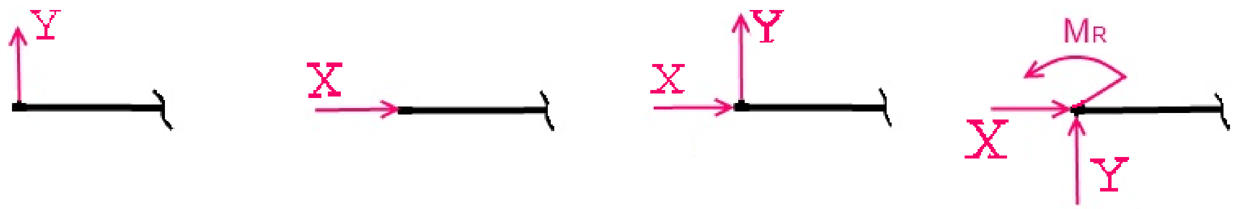
Внешняя связь это любое ограничение перемещений точек рассматриваемого тела, наложенное извне.

Количеством связей, наложенных на точку тела, принято считать количество степеней свободы, по которым её перемещение запрещено или ограничено.

Наиболее простыми являются связи, полностью исключающие те или иные перемещения сечений стержня – опоры и заделка:



Для тела, находящегося в равновесии, внешнюю связь можно заменить обобщённым усилием – ***реакцией связи***, оказывающим на тело, точно такое же действие:



Вообще говоря, реакция – это сила, с которой связь действует на тело.

Расчётная модель

Воображаемые тела, составленные из трёх основных форм и похожие на реальные объекты, называются ***расчётными моделями*** этих объектов.

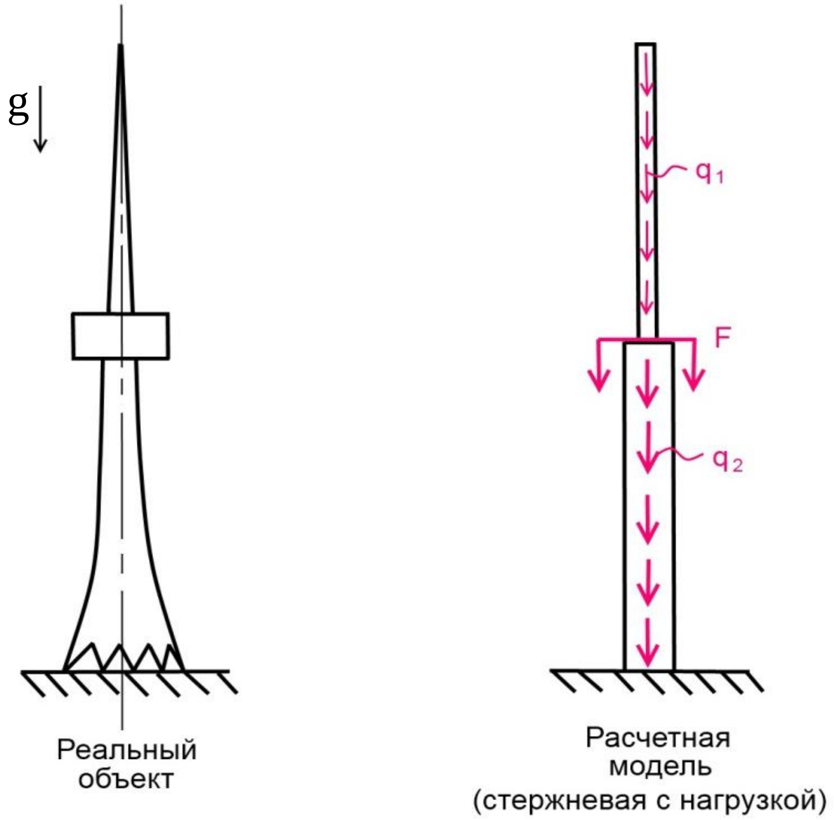


Рис. I.1.

Расчётная модель предполагается выполненной из идеализированного материала (однородного, сплошного) с физическими свойствами материала реального.

Строгая формулировка:

Расчётная модель – это реальный объект, освобождённый от несущественных для данной задачи особенностей.

Основные принципы

Принцип (от лат. *principium* – «начало, основа») – утверждение, принятое на веру без доказательства. В достоверности принципа можно убедиться только путём многократных экспериментов.

1) ***Принцип Сен–Венана:*** особенности приложения нагрузок не сказываются на расстояниях, превышающих размер области их приложения:

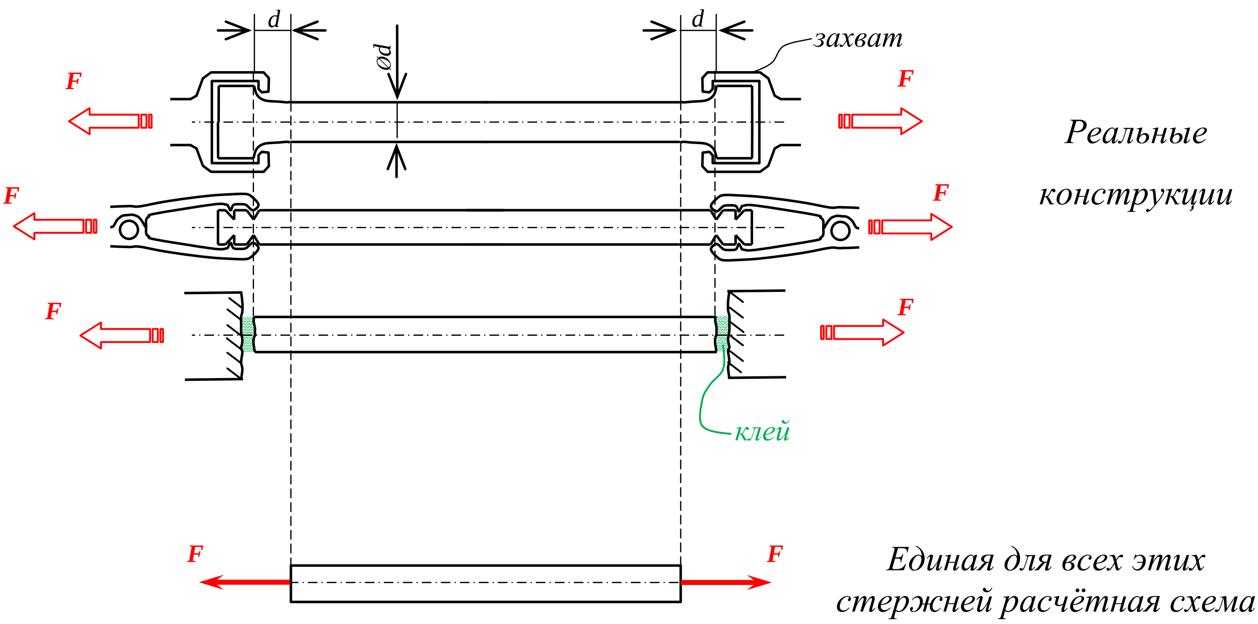


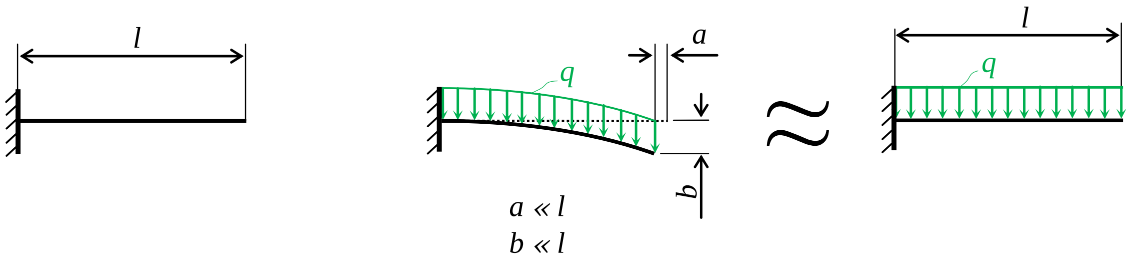
Рис. I.2.

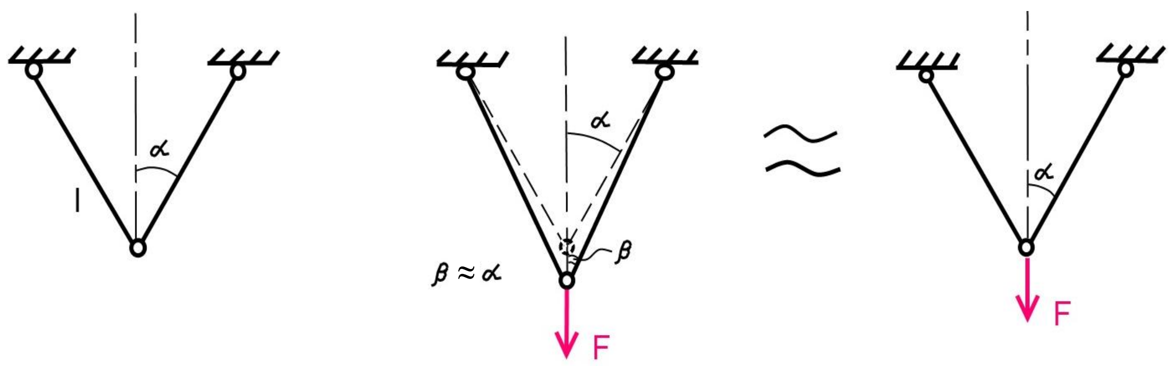
Принцип Сен-Венана универсален. Следующие два принципа применимы только к ***линейным конструкциям:*** конструкциям, перемещения точек которых прямо пропорциональны нагрузкам, их вызвавшим (подобные свойства присущи упругим объектам, деформации которых малы).

2) ***Принцип независимости действия сил:*** суммарный эффект от воздействия на тело нескольких сил равен сумме эффектов от каждой из этих сил в отдельности.

3) ***Принцип неизменности начальных размеров:*** при составлении уравнений равновесия рассматриваемых тел изменениями длин их частей и углов между частями в процессе нагружения можно пренебречь.

До нагружения: *После нагружения:*

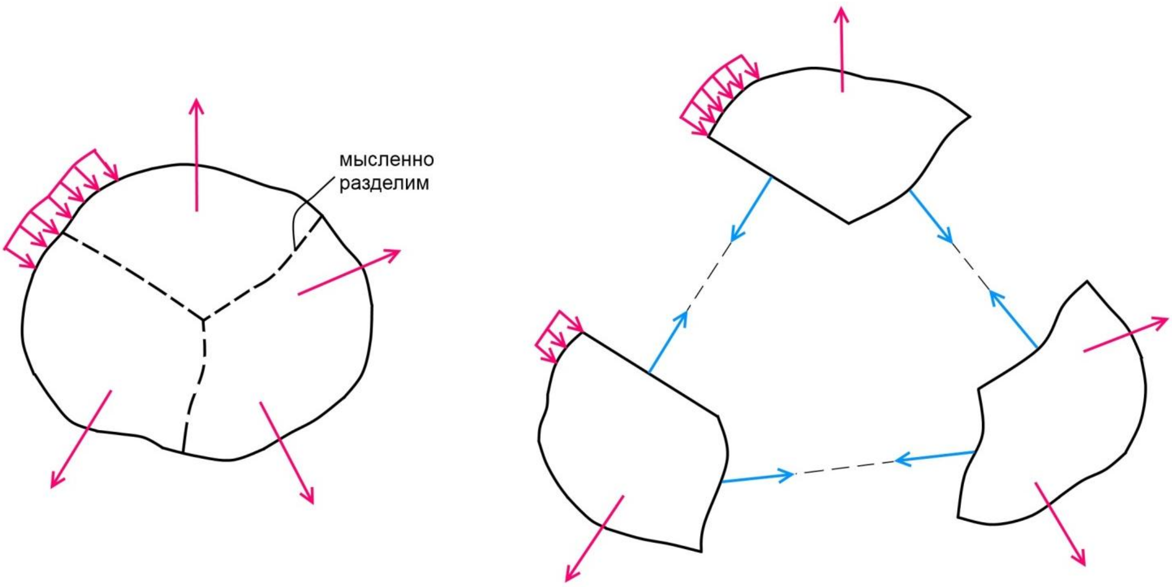




Этот принцип касается *только процесса составления уравнений равновесия!* Сами перемещения рассчитываются по особым методикам и нулевыми не считаются.

Силы внешние и внутренние

Внешними называются силы, действующие на рассматриваемое тело со стороны других тел. ***Внутренними*** называются силы, с которыми части тела действуют друг на друга вследствие его деформирования.



а) б) Внутренние моменты не показаны.

Рис. I.3.

Части тела действуют друг на друга внутренними усилиями, равными по модулю и противоположенными по направлению («действие равно противодействию»).

Если тело (рис. I.3.а) находится в равновесии, то и каждая из его частей (рис. I.3.б) также находится в равновесии. Исходя из этого правила, внутренние силы и моменты определяют ***методом сечений***.

Простейший вариант метода сечений ***метод* РОЗУ**:

Разрезаем нагруженное тело мысленно на две части плоскостью

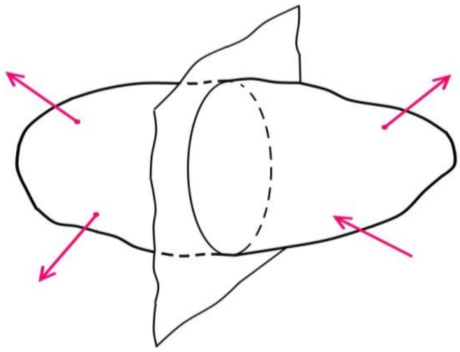


Рис. I.4.

Отбрасываем мысленно одну из двух образовавшихся частей, неважно какую

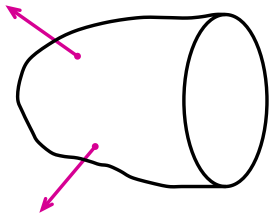


Рис. I.5.

Заменяем действие отброшенной части на оставшуюся главным вектором (раскладывается на три силы: Q_X, Q_Y и $Q_Z \triangleq N$) и главным моментом относительно центра сечения (раскладывается на: M_X, M_Y и $M_Z \triangleq M_{KP}$)

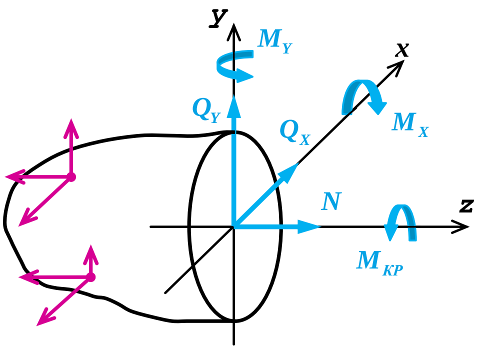


Рис. I.6.

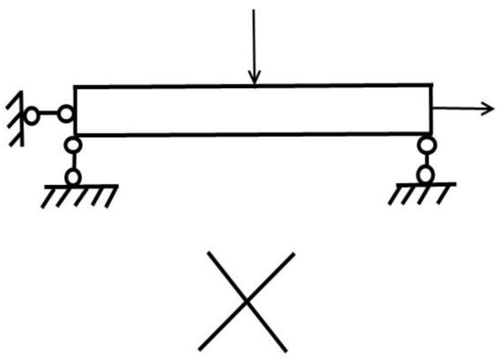
Уравновешиваем: из шести условий равновесия отсечённой части

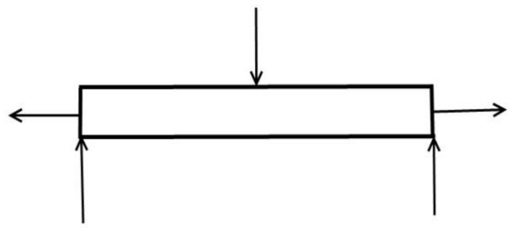
$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_{ox} = 0, \quad \sum M_{oy} = 0, \quad \sum M_{oz} = 0$$

находим шесть обобщённых усилий (Q_x, Q_y, N, M_x, M_y, $M_{кр}$). Эти усилия называются ***внутренними силовыми факторами*** в данном сечении.

Более сложные варианты метода сечений (несколько разрезов и решение систем уравнений) будут рассмотрены на практических занятиях.

Метод сечений применим только к телам, находящимся в равновесии под действием одних лишь внешних *сил*. Перед его использованием все связи должны быть заменены их реакциями!

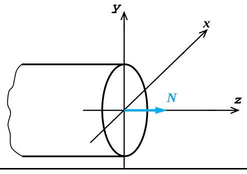
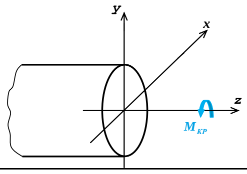
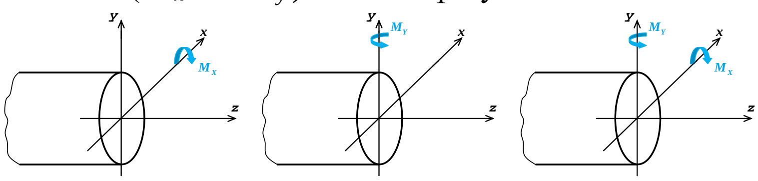
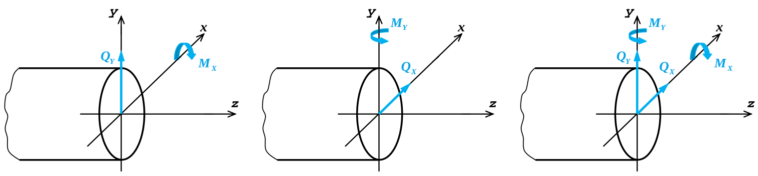
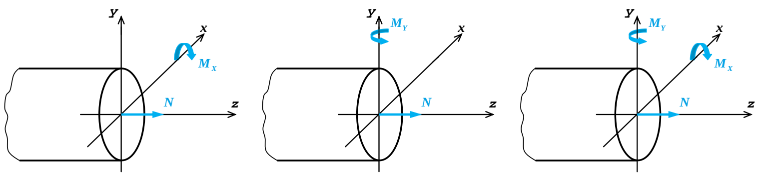




Силовая схема

Виды нагружения стержня

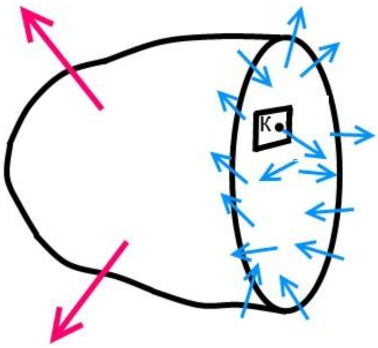
Основной объект исследования в курсе «Сопротивление материалов» - стержень. В зависимости от комбинаций ненулевых силовых факторов в поперечном сечении стержня различают следующие виды его нагружения:

<table>
<tr><th colspan="2">Вид нагружения</th><th>Иллюстрация</th></tr>
<tr><td colspan="2">Растяжение (сжатие)</td><td>Все силовые факторы равны нулю, кроме осевой растягивающей силы N :

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Кручение</td><td>Все силовые факторы равны нулю, кроме крутящего момента $M_{кр}$:

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Изгиб</td><td>Чистый</td><td>В сечении действует только один из двух изгибающих моментов (M_x или M_y) или оба сразу:

</td></tr>
<tr><td>Поперечный</td><td>Чистый изгиб дополняется перерезывающей силой:

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Внецентренное растяжение (сжатие)</td><td>Изгиб дополнен осевой растягивающей силой:

</td></tr>
</table>

Все остальные варианты называются «комбинированным нагружением» или «нагружением общего вида». Заметьте: в определении вида нагружения не упоминаются внешние силы, только силы внутренние.

Н а п р я ж е н и я

Q_x, Q_y, N, M_x, M_y, $M_{кр}$ (три силы, три момента) это всего лишь приведенные к центру сечения равнодействующие ***внутренних сил***, распределённых по сечению (внутренними называют силы, с которыми отброшенная часть действует на оставшуюся):



В окрестности произвольной точки «*K*» в сечении выделим площадку площадью ΔA. Равнодействующую внутренних сил на этой площадке обозначим ΔR (*рис. I.7а*).

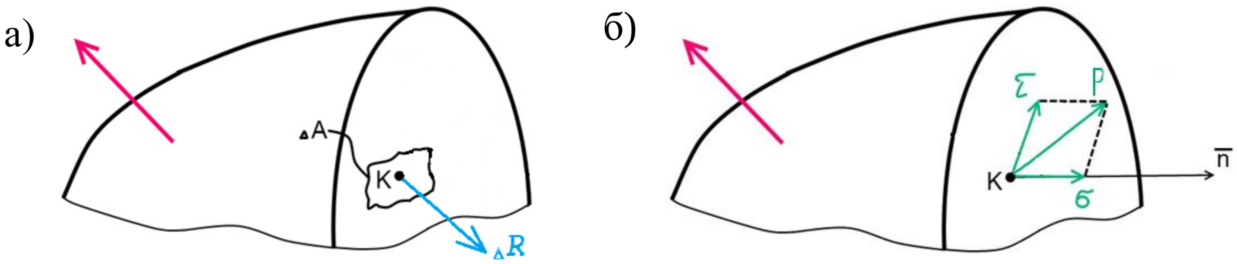


Рис. I.7.

Предел отношения ΔR к ΔA при $\Delta A \to 0$ называют ***полным напряжением*** в точке «*K*»:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}; \qquad [Н/м^2] = [Па] \qquad (I.1)$$

Различное направление ΔR *и* p на *рис. I.7а* *и* *рис. I.7б* объясняется тем, что в процессе стягивании площадки в точку направление вектора ΔR не обязательно остаётся постоянным.

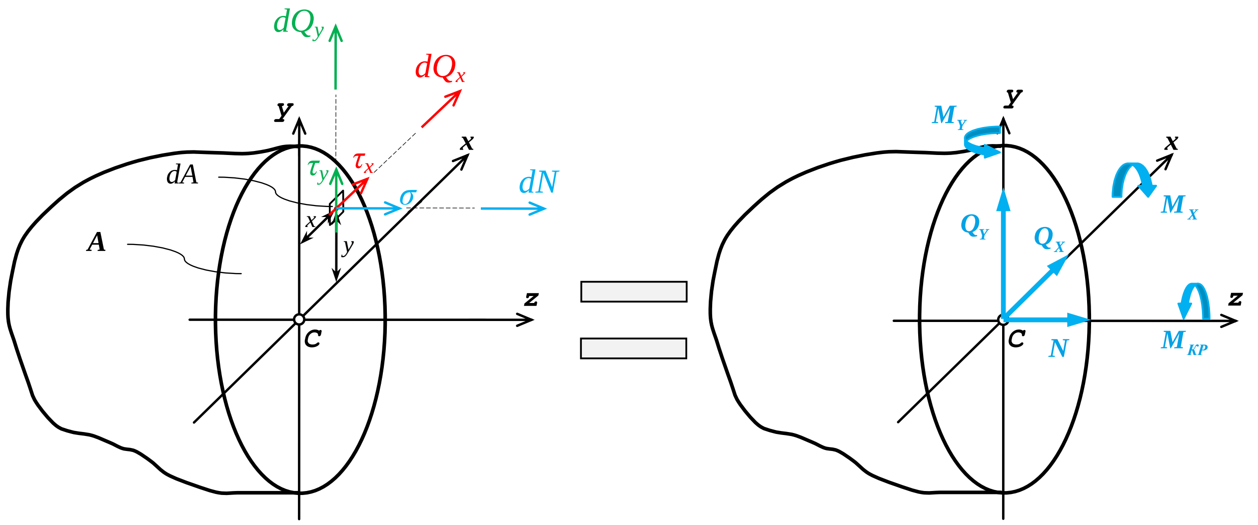
Упрощённо напряжения можно трактовать, как «распределённые силы, которыми части тела воздействуют друг на друга». Вектор p полного напряжения в точке раскладывается на вектор ***нормального напряжения*** σ, перпендикулярный плоскости сечения и вектор ***касательного напряжения*** τ, лежащий в этой плоскости $\overline{p} = \overline{\sigma} + \overline{\tau}$ *(рис. I.7б)*..

Через произвольную точку *«K»* в теле можно провести различные сечения.

Совокупность напряжений для всего множества площадок, проходящих, через точку образует ***напряжённое состояние (н.с.)*** в этой точке.

Нормальные напряжения σ имеют знак. Положительными считаются растягивающие напряжения, отрицательными – сжимающие.

Зависимости между напряжениями и внутренними силовыми факторами



Элементарные усилия вычисляются, как произведения соответствующего напряжения на площадь элементарной площадки:

$dN = \sigma \cdot dA$; $dQ_x = \tau_x \cdot dA$; $dQ_y = \tau_y \cdot dA$.

Внутренние силовые факторы есть результирующие действия напряжений, приведенные к центру тяжести поперечного сечения:

$$N = \int dN = \int_A \sigma \cdot dA$$

$$Q_x = \int dQ_x = \int_A \tau_x \cdot dA$$

$$Q_y = \int dQ_y = \int_A \tau_y \cdot dA$$

$$M_x = \int dN \cdot y = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$$

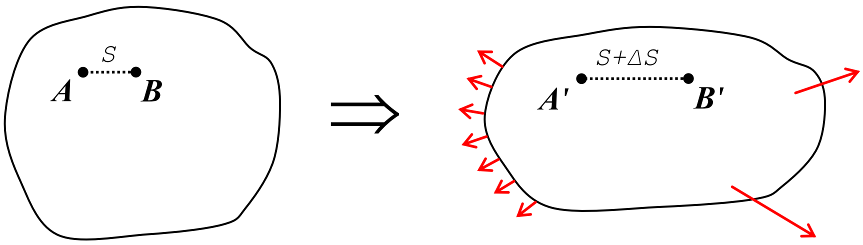
$$M_y = \int dN \cdot x = \int_A \sigma \cdot x \cdot dA$$

$$M_{кр} = -\int dQ_x \cdot y + \int dQ_y \cdot x = \int_A \left(-\tau_x \cdot y + \tau_y \cdot x\right) \cdot dA$$

Знак момента $M_{кр}$ определяется по правилу буравчика. Знаки моментов M_x и M_y определяются иначе (см. конспект «Изгиб»).

Деформации

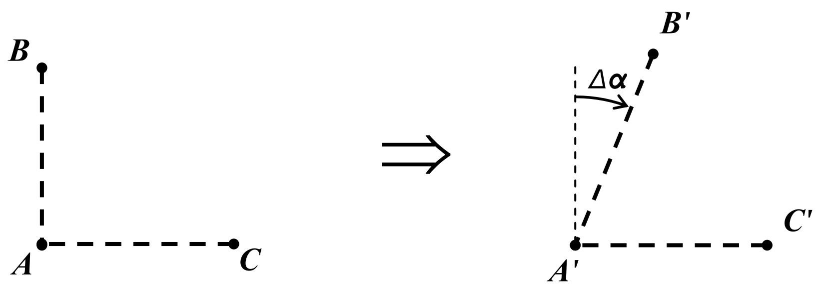
Пусть отрезок длинной S, соединяющий точки A и B тела при нагружении удлинится на ΔS. Тогда ***линейной деформацией*** в точке A по направлению AB называется безразмерная величина:



$$\varepsilon_{AB} = \lim_{B \to A} \frac{\Delta S}{S} \quad ; \qquad (I.2)$$

Линейные деформации в направлении координатных осей x, y или z, нижние индексы имеют соответствующие: $\boldsymbol{\varepsilon_x}$, $\boldsymbol{\varepsilon_y}$ или $\boldsymbol{\varepsilon_z}$.

Пусть прямой угол α, образованный тремя точками тела A, B и C при нагружении *уменьшился* на $\Delta\alpha$ (считаем в радианах):



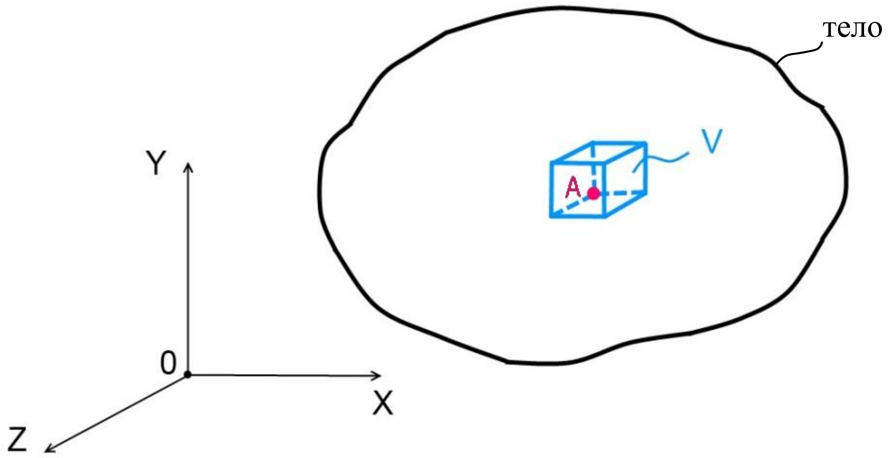
Тогда ***угловой деформацией*** в точке A тела в плоскости ABC называется безразмерная величина:

$$\gamma = \lim_{\substack{B \to A \\ C \to A}} \Delta\alpha \quad ; \qquad (I.3)$$

Координатная плоскость, в которой действует угловая деформация отображается в её нижнем индексе: γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} и т.д.

Совокупность линейных деформаций для всего множества направлений, проходящих через точку тела и угловых деформаций для всего множества проходящих через неё плоскостей образуют ***деформированное состояние*** в точке.

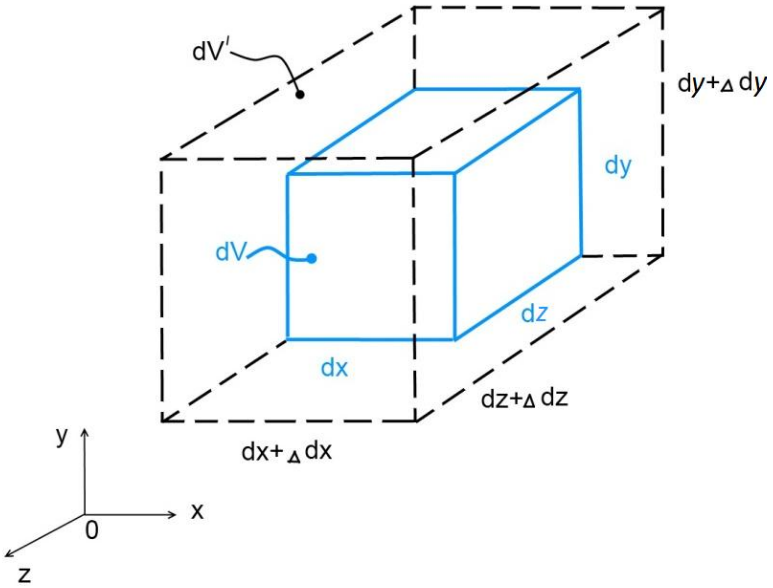
Пусть кусочек тела объёмом V в окрестности рассматриваемой точки (например, параллелепипед с рёбрами вдоль координатных осей)



при нагружении изменил свой объём на ΔV. Тогда ***объёмной деформацией*** в точке A называется безразмерная величина

$$e = \lim_{V \to 0} \frac{\Delta V}{V} \; ; \qquad (I.4)$$

Можно вывести зависимость между объёмной и линейными деформациями в точке:



$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$ - элементарный объём

$$dV' = (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz) =$$
$$= (dx + \varepsilon_x \cdot dx) \cdot (dy + \varepsilon_y \cdot dy) \cdot (dz + \varepsilon_z \cdot dz) =$$
$$= dx \cdot dy \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z)$$

$$\Delta dV = dV' - dV =$$
$$= dx \cdot dy \cdot dz \times$$
$$\times (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \overset{\approx 0}{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y} + \overset{\approx 0}{\varepsilon_y \cdot \varepsilon_z} + \overset{\approx 0}{\varepsilon_z \cdot \varepsilon_x} + \overbrace{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z}^{\approx 0} - 1) \approx$$
$$\approx dx \cdot dy \cdot dz \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\mathrm{e} = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (I.5)$$