Предикаты.

Предикатом называется предложение, зависящее от переменной, которое становится высказыванием при фиксированном значении переменной.

Пример. Натуральное число *n* является простым числом.

Обозначение. $A(x)$, $B(x, y)$, xBy

Пример. Выражение $x \leq y$ является предикатом, зависящим от двух числовых переменных.

Кванторы.

Пусть S — множество студентов. Обозначим $A(x)$ предикат, означающий, что студент x знает студента Васю Иванова.

Пример. Высказывание $A=(\forall x \in S)A(x)$ означает, что все студенты знают Васю.

Квантор всеобщности для конечного множества S означает взятие конъюнкции по всем элементам множества.

Пример. Высказывание $A=(\exists x \in S)A(x)$ означает, что существует студент, который знает Васю.

Квантор существования для конечного множества S означает взятие дизъюнкции по всем элементам множества.

Предикаты можно рассматривать и на различных множествах.

Пример. Пусть T — множество задач контрольной работы. Можно рассмотреть предикат $A(x,y)$, означающий, что студент $x \in S$ решил задачу $y \in T$.

Если связать кванторами все переменные, то получится обычное высказывание. От порядка кванторов зависит значение полученного высказывания.

Пример. Дадим два определения легкой контрольной.

$(\exists x \in S)(\forall y \in T)A(x,y)$ — существует студент, который решил все задачи.

$(\forall y \in T)(\exists x \in S)A(x,y)$ — для любой задачи существует студент, который ее решил.

Отрицание выражений с кванторами.

Высказывание $\forall x A(x)$ означает, что для любого x выполнено высказывание $A(x)$.

Высказывание $\overline{\forall x A(x)}$ означает, что не для любого x выполнено высказывание $A(x)$. Или существует x для которого выполнено $\overline{A(x)}$

$$\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}.$$

Аналогично

$$\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}.$$

Правило. Чтобы получить отрицание высказывания с кванторами, нужно поменять все входящие в него кванторы и взять отрицание предиката.

Формальные определения

Определение. Функция $P: \ A^n \to \{0,1\}$ называется *n-местным предикатом* на множестве *A*, а множество *A* — его *основным множеством.*

Определение. Множество $A_P = \{(a_1,\ldots,a_n) \in A^n \mid P(a_1,\ldots,a_n) = 1\}$ называется *областью истинности* предиката *P*.

Связь предикатов и отношений

Определение. Подмножество $R \subset A^n$ называется *n-местным отношением* на множестве *A*.

Для любого отношения *R* на множестве *A* существует предикат P_R, такой что $(a_1,\ldots,a_n)\in R \Leftrightarrow P_R(a_1,\ldots,a_n)=1$.

Отношение является областью истинности некоторого предиката.

Связь предикатов и операций

Определение. Функция $f:\ A^n \to A$ называется *n-местной операцией* на множестве *A*.

Любую *n*-местную операцию f на множестве *A* можно задать (*n*+1)-местным предикатом P_f, таким что

$f\left(a_1,\ldots,a_n\right)=a \Leftrightarrow P_f\left(a_1,\ldots,a_n,a\right)=1$.

Арифметические предикаты

Определение. Определим три предиката на множестве натуральных чисел.

Предикат сложения: $S^3(x, y, z) \equiv (x + y = z)$.

Предикат умножения: $M^3(x, y, z) \equiv (xy = z)$.

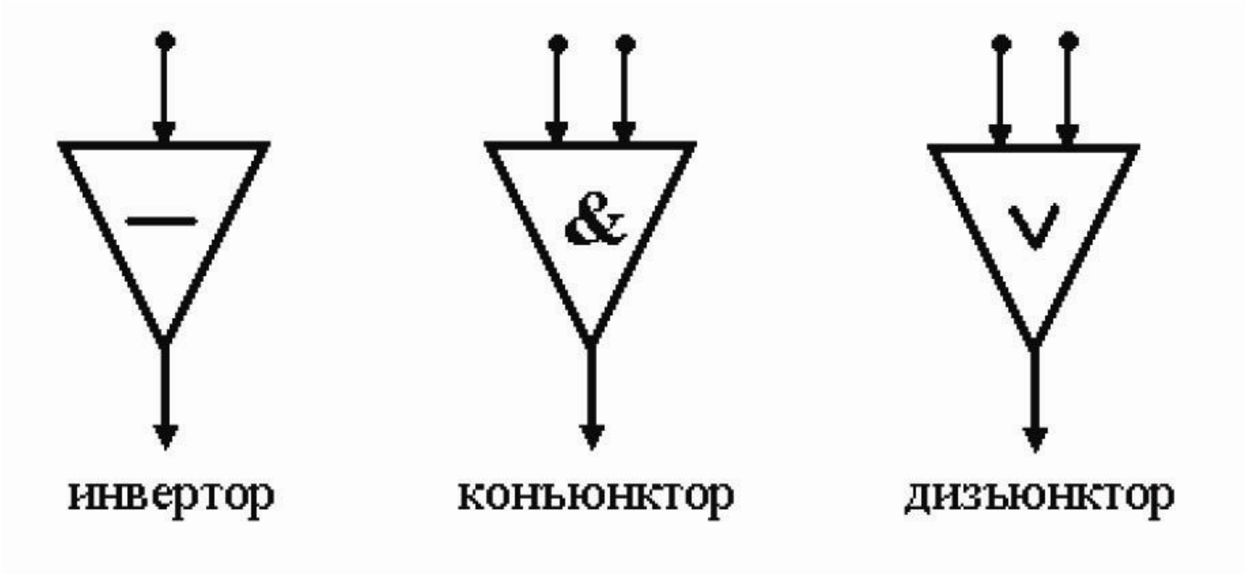
Предикат возведения в степень: $E^3(x, y, z) \equiv (x^y = z)$.

Пример. Примеры предикатов получаемых из предиката сложения.

$(x \le y) \equiv \exists z S^3(x, z, y)$.

$(x = y) \equiv (y \le x) \wedge (x \le y) \equiv (\exists z S^3(x, z, y)) \wedge (\exists z S^3(y, z, x)) \equiv \exists z, t(S^3(x, z, y) \wedge S^3(y, t, x))$.

Схемы функциональных элементов.

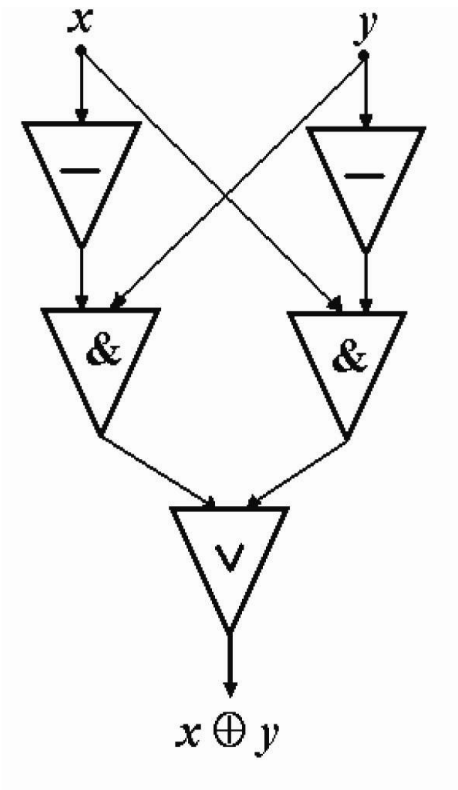


В произвольной СФЭ входами являются переменные $x_1,\ldots,x_n$, а выходов может быть несколько, каждый из которых реализует некоторую булеву функцию.

Утверждение. Любую булеву функцию можно реализовать схемой функциональных элементов.

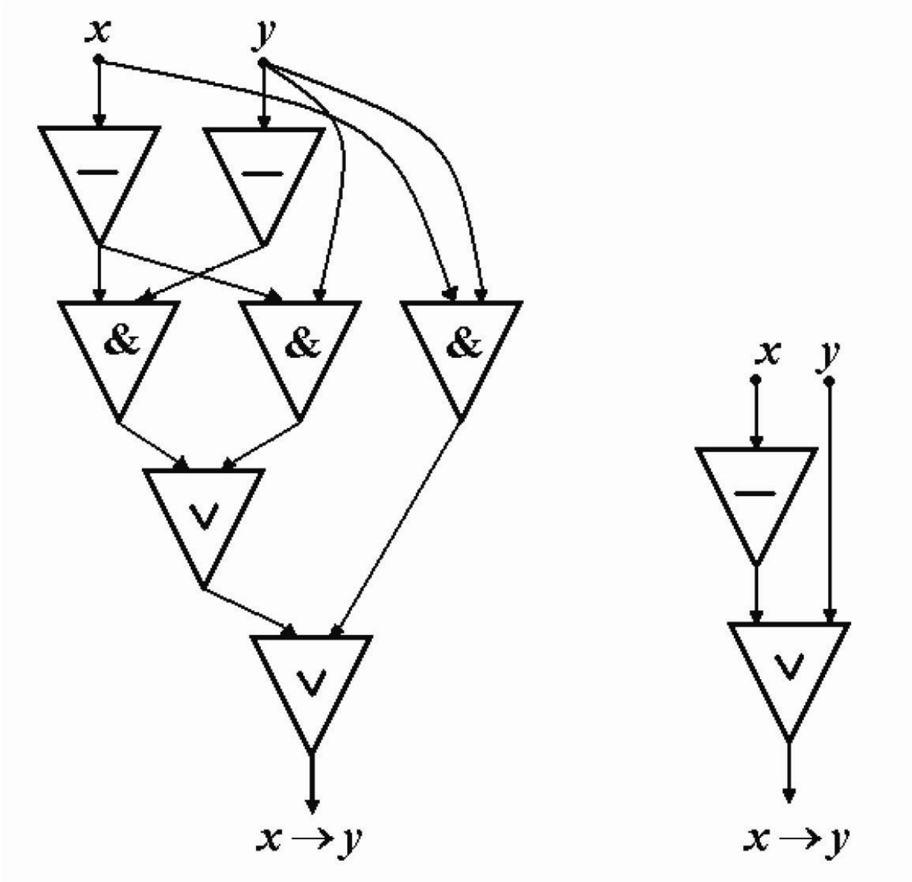
Доказательство. Любую ненулевую булеву функцию можно реализовать СДНФ, по которой можно построить СФЭ. Поскольку $0 = x \wedge \overline{x}$, то нулевая функция тоже представима СФЭ.

Пример.



Одну и ту же функцию можно задать разными схемами исходя из различного выражения формулы через базис.

Пример. $x \to y = \bar{x} \vee y$ и $x \to y = \bar{x} \cdot \bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy$.



Двоичный сумматор.

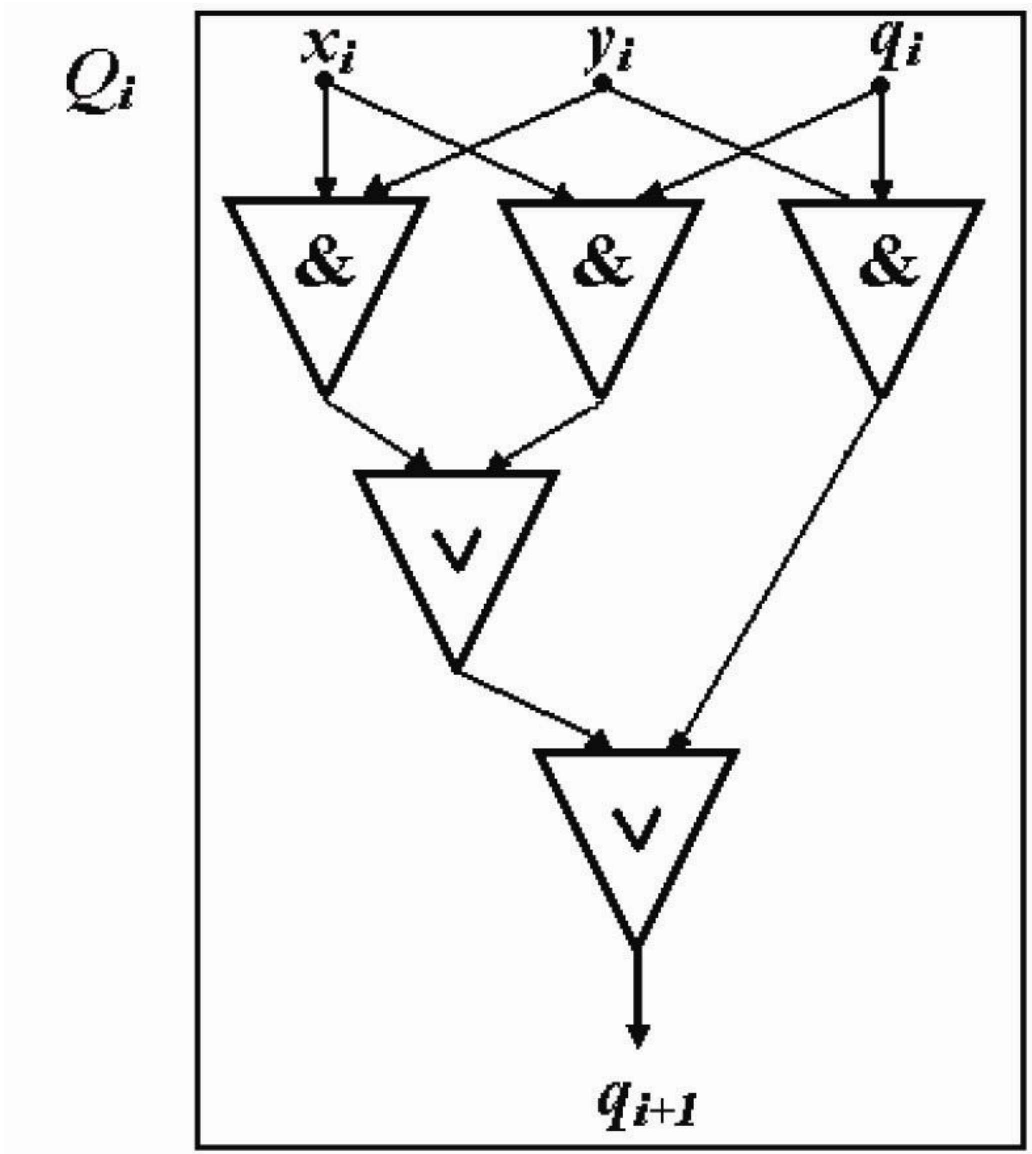
Пусть $x = x_n \ldots x_1$ и $y = y_n \ldots y_1$ два числа, записанные в двоичной системе счисления. Задача состоит в том, чтобы составить схему функциональных элементов, реализующую число $z = z_{n+1} z_n \ldots z_1$, равное их двоичной сумме.

Обозначим q_i функцию переноса в *i*-ый разряд из (*i*-1)-ого.

Очевидно, что $q_1 = 0$.

Утверждение. $q_{i+1} = x_i y_i \vee x_i q_i \vee y_i q_i$.

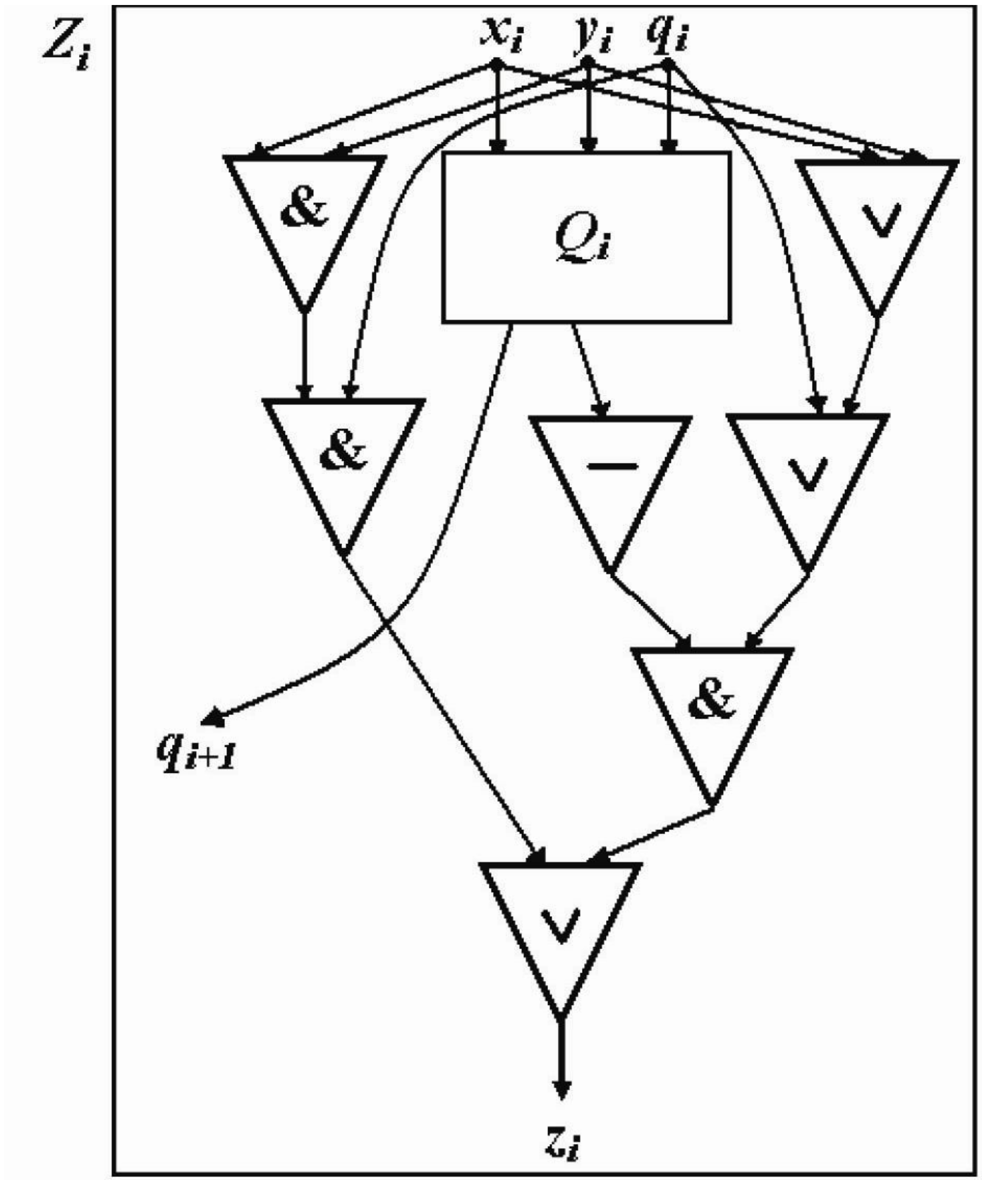
Доказательство. Перенос разряда происходит когда хотя бы два слагаемых равны 1. Выражение слева и реализует такую булеву функцию.


Q_i
x_i
y_i
q_i
&
&
&
∨
∨
q_{i+1}

Утверждение Ф1. $z_i = x_i \oplus y_i \oplus q_i$ для $i \neq 1$.

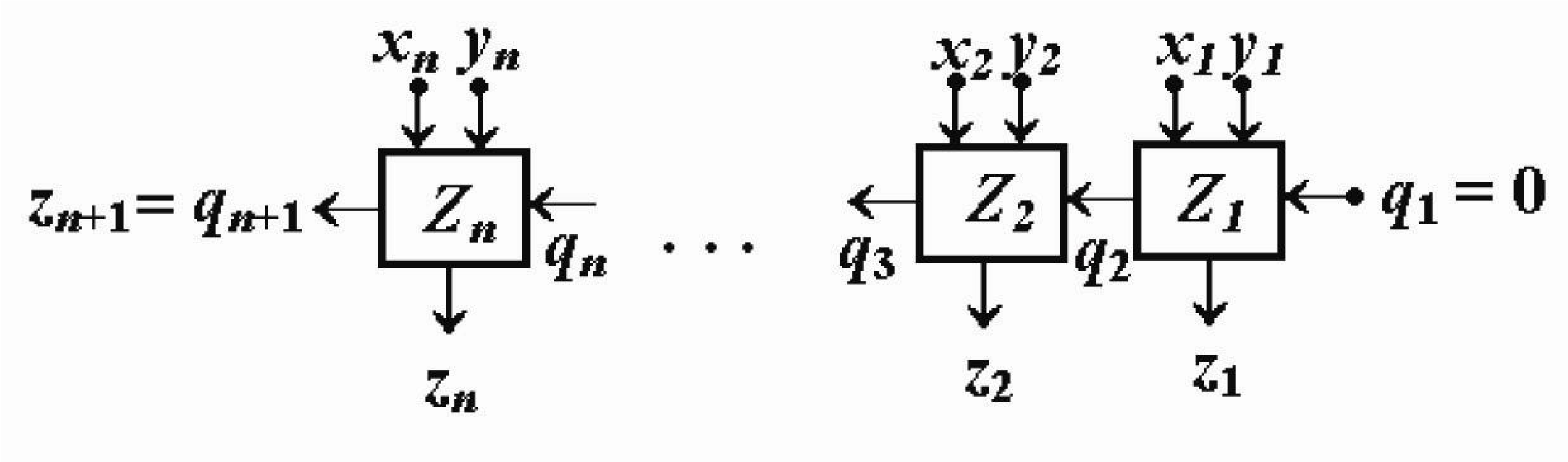
Утверждение Ф2. $z_i = \overline{(x_i y_i \vee x_i q_i \vee y_i q_i)} \wedge (x_i \vee y_i \vee q_i) \vee x_i y_i q_i$.

Доказательство. Формула Ф1 истина если все три переменных истины, либо если истина ровно одна переменная. Второй элемент в последней дизъюнкции формулы Ф2 также принимает значение истина если все три переменные равны 1. Рассмотрим первое слагаемое. Оно является конъюнкцией двух формул. Первая это отрицание выражения для q_{i+1} и, следовательно, истинна, если не более одной переменной равно 1. Вторая формула наоборот истина, если хотя бы одна переменная равна 1. Т.е. первое слагаемое истинно тогда и только тогда, когда ровно одна переменная равна 1.



Z_i
x_i y_i q_i
&
Q_i
∨
&
−
∨
&
q_{i+1}
∨
z_i

Схема двоичного сумматора.



Определение. Сложностью СФЭ называется количество элементов входящих в схему.

Приведенную выше схему двоичного сумматора можно улучшить, если избегать дублирования вычислений.

Стоимость вычислительных устройств существенно зависит от количества функциональных элементов, поэтому задача минимизации сложности СФЭ актуальна.

Задача минимизации сложности СФЭ, соответствующей произвольной заданной булевой функции, не решена.

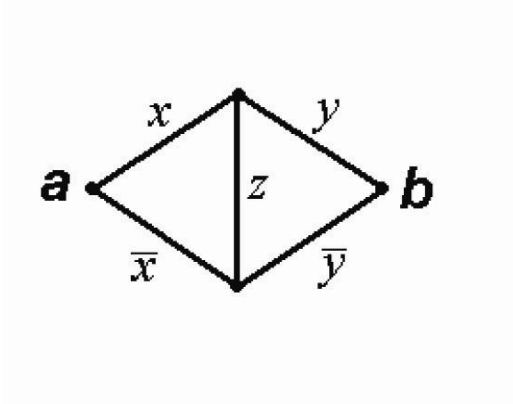
Контактные схемы.

Определение. *Мультиграфом* называется пара $M = \langle V, E \rangle$, где *V* — это произвольное множество *вершин*, *E* — список рёбер, т.е. пар различных вершин.

Определение. Ребро (*a*,*b*) мультиграфа *M*, которому приписан символ x_i^{α} переменной или её отрицания называется *контактом*, а его концевые точки *a* и *b* — *полюсами.* Контакт называется *замыкающим*, если $\alpha = 1$, и *размыкающим* в противном случае. Замыкающий контакт проводит ток при $x = 1$, а размыкающий при $x = 0$.

Определение. *Контактная схема* — это мультиграф с двумя выделенными полюсами *a* и *b,* все ребра которого являются контактами.

Пример.



Определение. Последовательность вершин $(a = v_0, v_1, \ldots, v_k = b)$ называется *цепью,* если нет повторяющихся вершин и все соседние вершины соединены ребром. Последовательность соответствующих рёбер также называют *цепью*.

Определение. *Функция проводимости вдоль* (*a*,*b*) *цепи* равна 1, если все контакты цепи проводят ток, т.е. является конъюнкцией всех контактов цепи.

Определение. *Функция проводимости контактной схемы* является дизъюнкцией проводимостей вдоль всех (*a*,*b*) цепей.

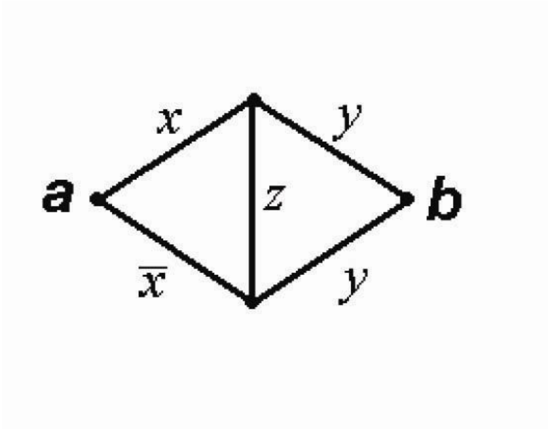
Для предыдущего примера функция проводимости определяется следующим образом:

$$f(x,y)=xy\vee xz\overline{y}\vee\overline{x}\cdot\overline{y}\vee\overline{x}zy=xy\vee xz\vee\overline{x}\cdot\overline{y}\vee\overline{x}z.$$

Реализовать булеву функцию в классе контактных схем, значит построить КС функция проводимости которой совпадает с булевой функцией.

Реализация булевой функции не единственна.

Пример. Функция проводимости данной схемы равна y.



Определение. Сложностью КС называется число контактов схемы.

Определение. *Сложностью реализации булевой функции* называется минимальная сложность контактной схемы реализующей функцию.

Утверждение. Каждая булева функция имеет хотя бы одну реализацию в КС.

Задача определения сложности реализации функции контактной схемой не решена.

π-схемы.

Такое название получили последовательно-параллельные схемы.

Индуктивное определение.

1. контакт (*a*,*b*) есть π-схема.

2. если $S(a_1,b_1)$ и $S(a_2,b_2)$ π-схемы, то схема полученная объединением полюса a_1 с полюсом a_2 и полюса b_1 с полюсом b_2 также будет π-схемой. (Параллельное соединение π-схем есть π-схема)

3. схема $S(a_1,b_2)$ полученная объединением полюса a_2 с полюсом b_1 также будет π-схемой. (Последовательное соединение π-схем есть π-схема)

Утверждение. Сложность реализации в классе π-схем не меньше сложности реализации в классе контактных схем.

Теорема Шеннона.

Определение. Обозначим $\varphi(n)$ максимальную сложность реализации булевых функций от *n* переменных.

Утверждение. $\varphi(n) > n$.

Теорема (Шеннона). Почти все функции от *n* переменных имеют сложность реализации в КС не меньше чем $\frac{2^n}{n^2}$.