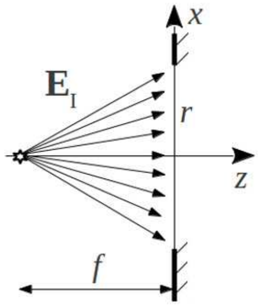
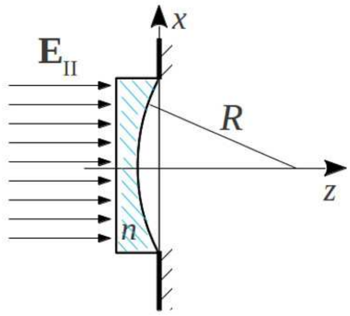
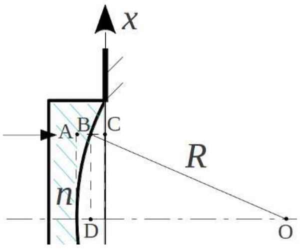
Вспомогательная задача к теме “Голография”





Задача 209.

На плоскую диафрагму произвольной формы падает в случае (I) монохроматическая волна от точечного источника; в случае (II) плоский монохроматический пучок, проходящий через плоско-вогнутую линзу, установленную в плоскости диафрагмы (см. рисунок). $\lambda_I = \lambda_{II}$. Показатель преломления линзы n, радиус кривизны R. На каком расстоянии от диафрагмы нужно расположить точечный источник, чтобы поля за диафрагмой совпадали с точностью до постоянной фазы и предэкспоненциального множителя? Считать, что характерный размер диафрагмы много меньше фокусного расстояния линзы.



Решение.

Пусть координаты точечного источника $(0, -f)$, причем предположим, что $f \gg x_{max}$. Тогда фаза волны E_I в плоскости $z = 0$ составляет

$$\begin{aligned} \phi_I(x,0,t) &= \phi_0 + kr - \omega t = \\ &= \phi_0 + k\sqrt{f^2+x^2} - \omega t = \phi_0 + kf\sqrt{1+\tfrac{x^2}{f^2}} - \omega t \approx \\ &\approx \phi_0 + kf\left(1+\tfrac{x^2}{2f^2}\right) - \omega t = \mathrm{const} + k\tfrac{x^2}{2f} - \omega t, \end{aligned} \tag{1}$$

где было выполнено разложение по малому параметру $x \ll f$.

Теперь рассмотрим луч, падающий горизонтально на линзу в точке x. Фаза волны E_{II} в плоскости $z = 0$ за плоско-вогнутой линзой равна

$$\begin{aligned} \phi_{II}(x,0,t) &= \phi_A + k(nl_{AB} + l_{BC}) - \omega t = \phi_A + k(nl_{AB} + l_{AC} - l_{AB}) - \omega t = \\ &= \mathrm{const} + k(n-1)l_{AB} - \omega t = \mathrm{const} + k(n-1)(R - l_{OD}) - \omega t = \\ &= \mathrm{const} + k(n-1)(R - \sqrt{R^2 - x^2}) - \omega t = \\ &= \mathrm{const} + k(n-1)\left(R - R\sqrt{1+\tfrac{x^2}{R^2}}\right) - \omega t \approx \\ &\approx \mathrm{const} + k(n-1)\left(R - R\left(1+\tfrac{x^2}{2R^2}\right)\right) - \omega t = \\ &= \mathrm{const} + k(n-1)\tfrac{x^2}{2R} - \omega t. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что $\frac{R}{n-1}$ равно фокусному расстоянию f_L нашей рассеивающей линзы, поэтому выражение (2) с точностью до постоянного слагаемого можно переписать в форме

$$\phi_{II}(x,0,t) = k\frac{x^2}{2f_L} - \omega t.$$

Теперь видно, что при $f = f_L = \frac{R}{n-1}$ фазы ϕ_I и ϕ_{II} совпадают. Но тогда совпадают (с точностью до предэкспоненциального множителя) и соответствующие поля за диафрагмой, поскольку они оба выражаются через интеграл Кирхгофа, содержащий одно и то же поле $\hat{E}_0$:

$$\hat{E}_I(\vec{r},t) = \hat{E}_{II}(\vec{r},t) = \frac{1}{i\lambda}\int\limits_S \frac{\hat{E}_0}{r}\mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\cos\psi dS.$$

Примечание 1. По условию задачи $f_L \gg x_{max}$, с другой стороны мы получили, что $f = f_L$. Поэтому разложение по малому параметру, использованное в (1), обоснованно.

Примечание 2. Нетрудно также показать, что в параксиальном приближении собирающая линза с фокусным расстоянием f создает добавку $\left(k\frac{x^2}{2(z-f)}\right)$ к фазе $(kz-\omega t)$ падающей на нее плоской волны, так что образованная за линзой волна эквивалентна волне от точечного источника, помещенного в правый фокус (при распространении волны слева направо).