

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет  
Кафедра общей физики

**Лабораторный практикум  
“ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ”**

**Учебно-методическое пособие**

**ВЫПУСК 6**

**ПРОНИКНОВЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО  
ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВО**

Новосибирск  
2008

Данный выпуск является последним из шести выпусков сборников описаний лабораторных работ лабораторного практикума «Электричество и магнетизм», выполняемого в рамках учебного плана третьего семестра по специальности «физика». В него входят четыре лабораторные работы, демонстрирующие эффект проникновения переменного электромагнитного поля в проводящие материалы. В последней работе выпуска описан способ выделения сигнала из шума с помощью вэйвлет-анализа.

Составители М. И. Захаров, А. А. Дорошкин, Б. А. Князев, И. А. Котельников, А. В. Сорокин, А. А. Тютин, В. С. Черкасский

Отв. за выпуск Б. А. Князев

Под общей ред. доктора физ.-мат. наук, проф. Б. А. Князева

Рецензент  
канд. физ.-мат. наук, доцент С. А. Бордзиловский

© Новосибирский государственный университет, 2008

© М. И. Захаров, А. А. Дорошкин,  
Б. А. Князев, И. А. Котельников,  
А. В. Сорокин, А. А. Тютин,  
В. С. Черкасский  
2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление .....	3
1. Теоретическая часть .....	5
1.1. Проводник в постоянном поле .....	5
1.2. Проводник в переменном поле .....	6
1.3. Скин-эффект и токи Фуко .....	8
1.4. Сильный скин-эффект .....	9
1.5. Слабый скин-эффект .....	10
1.6. Измерение магнитных аномалий и вейвлет-анализ сигналов .....	12
2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.1. Исследование скин-эффекта .....	13
2.1. Проникновение переменного магнитного поля внутрь проводящей трубки .....	13
2.2. Допуск к эксперименту .....	13
2.3. Экспериментальная установка .....	14
2.4. Порядок выполнения работы .....	16
3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.2. Проводник в переменном магнитном поле. Бесконтактное измерение электропроводности .....	19
3.1. Краткая теория .....	19
3.2. Экспериментальная установка .....	24
3.3. Контрольные вопросы (допуск к эксперименту) .....	26
3.4. Порядок выполнения эксперимента .....	27
3.5. Определение сдвига фазы методом фигур Лиссажу [5] .....	28
3.6. Содержание отчета .....	29
3.7. Приложение. Метод последовательных приближений .....	29
4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.3. Токи Фуко и магнитное трение .....	32
4.1. Движение магнитного диполя в проводящей трубе .....	32
4.2. Движение магнитного диполя в трубе с разрезом .....	37

4.3.	Контрольные вопросы и задания (допуск к работе)	39
4.4.	Эксперимент и обработка данных .....	39
4.4.1.	Экспериментальная установка .....	39
4.4.2.	Порядок выполнения работы .....	41
4.5.	Приложение. Вычисление функции $Q$ .....	43
5.	ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.4. Метод регистрации магнитных аномалий и вейвлет-анализ сигналов.....	45
5.1.	Введение.....	45
5.2.	Магнитное поле Земли.....	46
5.3.	Оценка величины искажения однородного поля магнитной аномалией .....	49
5.4.	Экспериментальная установка .....	50
5.5.	Принципы подобия.....	55
5.6.	Преобразование координат .....	56
5.7.	Контрольные вопросы и задания (допуск к работе)	58
5.8.	Порядок выполнения эксперимента.....	58
5.9.	Обработка данных.....	59
	Библиографический список .....	61

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 1.1. Проводник в постоянном поле

Если поместить проводник в *стационарное магнитное поле*, то за очень короткое время во всем пространстве, включая проводник, вновь возникнет стационарное магнитное поле, в той или иной мере измененное из-за присутствия проводника. Степень изменения поля зависит от типа проводника (*парамагнетик*, *диамагнетик* или *ферромагнетик*) и его геометрии. При этом *ток проводимости* внутри проводника не течет. Проводник во внешнем *стационарном электрическом поле* поляризуется, т. е. некоторая часть *свободных электронов* проводника распределяется по его поверхности таким образом, чтобы полностью скомпенсировать внутри его внешнее поле. Ток в этом случае также не течет.

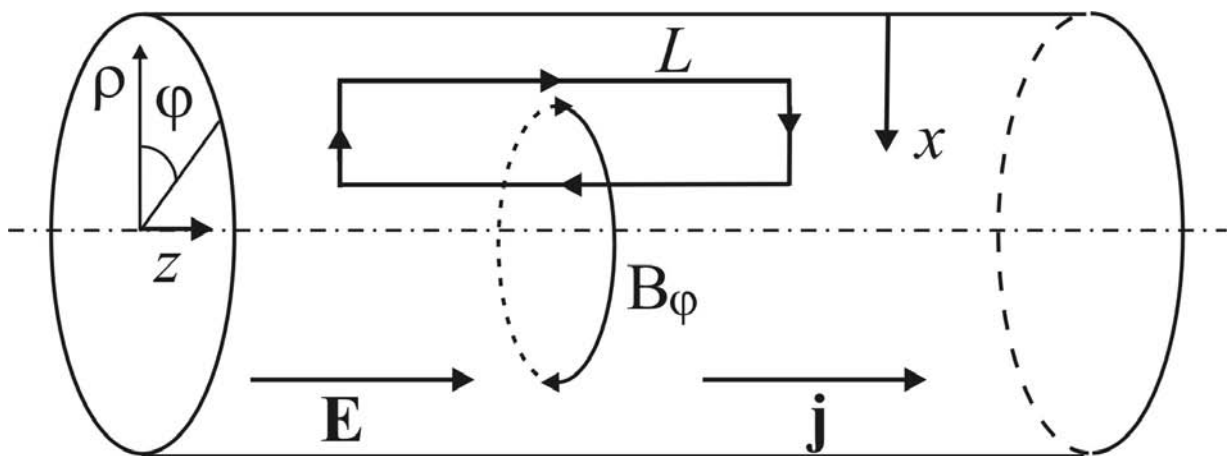


Рис. 1. Схема, поясняющая однородность стационарного тока, а также вытеснение из объема проводника переменного электрического поля и образование скин-слоя

Здесь мы будем рассматривать проводники из неферромагнитных материалов. В этом случае магнитная проницаемость (в системе СГС) близка к единице, и в большинстве лабораторных работ данного выпуска мы будем пренебрегать ее отличием от единицы. Отличие  $\mu$  от единицы будет играть роль при обсуждении энерговыделения в проводнике в работе 6.2.

Если к проводнику приложить и *поддерживать* разность потенциалов, то в нем возникает стационарный ток проводимости. Сво-

бодные заряды располагаются только на поверхности проводника (а также в областях неоднородности проводника, если таковые имеются), но их распределение отличается от электростатического случая [1. С. 176]. Стационарный ток может течь по всему объему проводника. Рассмотрим длинный прямой провод (рис. 1), к концам которого приложено постоянное напряжение  $U$ . По проводнику течет постоянный электрический ток  $I$ .

Покажем, что в этом случае напряженность электрического поля в проводнике однородна по сечению провода. Для доказательства проведем параллельный оси провода замкнутый прямоугольный контур  $L$ . Здесь и далее мы используем в качестве основной *гауссову систему единиц*, приводя для наиболее важных выражений также их вид в системе СИ. Сопоставление всех формул электродинамики для этих двух систем приведено в [1. С. 668]).

Вспомним, что постоянный ток создает линейно нарастающее по радиусу, но постоянное во времени ( $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ ) азимутальное магнитное поле  $B = 2J / cr$  (или в системе СИ:  $B = \mu_0 J / 2\pi r$ ). Из теоремы о циркуляции электрического поля [1. С. 271]

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad (\text{СИ}), \quad (1)$$

где  $L$  – периметр контура, а  $S$  – охватываемая им площадь, сразу следует, что электродвижущая сила (э.д.с.), выражаемая интегралом в левой части уравнения, равна нулю. Это заключение сохраняется при любом перемещении контура и при изменении его размеров, что доказывает сделанное выше утверждение.

## 1.2. Проводник в переменном поле

Ситуация меняется, если к проводнику приложить переменное напряжение. Из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{СИ}), \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{СИ}), \quad (3)$$

следует, что переменное электрическое поле приводит к появлению вихревого магнитного поля и наоборот. Для рассматриваемого нами случая электромагнитного поля *внутри проводника* первый член в правой части выражения (3) практически во всех реальных ситуациях значительно больше второго<sup>1</sup>:

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \gg \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \mathbf{j} \gg \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{СИ}). \quad (4)$$

Тогда уравнение (3) упрощается

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (\text{СИ}). \quad (5)$$

В этом приближении в рассматриваемой нами задаче вихревое электрическое поле создается изменением магнитного поля, а вихревое магнитное поле создается только вихревыми токами (*токами Фуко*), текущими по проводнику:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{СИ}). \quad (6)$$

Очевидно, что током смещения можно пренебречь лишь при достаточно высокой проводимости среды  $\sigma$ .

Поскольку магнитный поток через контур  $L$  (см. рис. 1) теперь изменяется со временем, то циркуляция напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  по этому контуру будет отличаться от нуля. Используя правило, по которому определяется направление циркуляции, находим, что при возрастании магнитного потока направление индуцированного электрического поля будет таким, как это изображено на контуре стрелками, а значит, что индуцированное электрическое поле будет ослаблять исходное поле вблизи оси и увеличивать его на периферии провода.

Из этого качественного описания электромагнитной индукции для переменного тока в проводе ясно, почему переменное электромагнитное поле не проникает внутрь проводников, а сосредоточивается вблизи поверхности (см. также [1. С. 648]). Слой, в котором сосредоточено поле, называют *скин-слоем* (от англ *skin* – кожа), а эффект вытеснения поля на поверхность проводника – скин-эффектом. Этот эффект существует не только в том случае, когда к

---

<sup>1</sup> Напомним, что величину  $4\pi(\partial \mathbf{D} / \partial t)$  называют током смещения, и в отсутствие токов проводимости именно она играет определяющую роль в существовании электромагнитной индукции.

концам проводника приложена разность потенциалов, но и тогда, когда проводник находится в созданном любым способом внешнем переменном электромагнитном поле.

### 1.3. Скин-эффект и токи Фуко

Уравнения, описывающие электромагнитное поле внутри проводника, получают из уравнений Максвелла [2. С. 258]. Они имеют следующий вид:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (8)$$

Задавая внешнее электромагнитное поле на границе проводника, из уравнений (7) и (8) можно найти распределение поля в проводнике. В случае проводника с током это – поле  $E_z$ , а для цилиндра в соленоиде это будет полем  $H_z$ . Индуцированные поля будут в этих случаях  $H_\varphi$  и  $E_\varphi$ , соответственно. Если толщина скин-слоя сравнима с радиусом цилиндра, то решение уравнений (7) и (8) будет выражаться некоторой специальной функцией – функцией Бесселя [3. С. 777]. Если же толщина скин-слоя значительно меньше, чем характерные размеры проводника (*сильный скин-эффект*), то задачу о проникновении поля в проводник можно свести к одномерной задаче. Для такого «плоского» случая решение упрощается. Теория скин-эффекта для конкретных систем более детально рассмотрена в теоретических введениях к следующим двум работам.

Из сказанного выше ясно, что переменное магнитное поле индуцирует в проводнике вихревые токи, которые называются токами Фуко. Это токи играют важную роль в электротехнике. Их изучению посвящены, в частности, вторая и третья лабораторные работы данного выпуска.



### 1.4. Сильный скин-эффект

Пусть снаружи проводника имеется магнитное поле<sup>2</sup>, меняющееся по гармоническому закону с частотой  $\omega$ :

$$H_z(t) = H_0 \exp(-i\omega t). \quad (9)$$

Введем ось  $x$ , направленную по нормали внутрь проводника (в случае цилиндра она направлена противоположно радиусу), и будем искать решение в виде

$$H_z(x, t) = H_z(x) \exp(-i\omega t). \quad (10)$$

Тогда уравнение (8) примет вид:

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} = -\frac{2i}{\delta^2} H_z, \quad (11)$$

где

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}, \quad (12)$$

а  $\mu$  – магнитная проницаемость проводника. Решением уравнения (11) будет выражение

$$H_z(x, t) = H_0 \exp(-x/\delta) \exp[i(x/\delta - \omega t)], \quad (13)$$

Оно означает, что амплитуда поля внутри цилиндра экспоненциально спадает, а его фаза линейно отстает от фазы на поверхности. Очевидно, что выражение (12), определяющее характерный масштаб ослабления поля в  $e$  раз, представляет собой толщину скин-слоя.

Электрическое поле, индуцированное в проводнике, можно найти, используя выражения (3) и (6), откуда получаем

$$\mathbf{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{H}. \quad (14)$$

Подставляя сюда решение (13), находим, что электрическое поле в “плоском” проводнике имеет только составляющую

$$E_y = (i-1) \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}} H_z, \quad (15)$$

---

<sup>2</sup> Здесь и далее предполагается, что размеры системы значительно меньше длины волны электромагнитного поля  $\lambda \ll 2\pi c/\omega$ , т.е. эффектами запаздывания можно пренебречь и рассматривать задачу как квазистационарную [1. С. 552].

перпендикулярную  $x$  и  $z$  и спадающую вглубь проводника с той же постоянной  $\delta$ , что и магнитное поле. В случае цилиндра это означает, что силовые линии электрического поля  $E_y \equiv E_\varphi$  замыкаются по окружности вокруг оси.

### 1.5. Слабый скин-эффект

Экранирующие свойства проводника широко используются на практике для защиты приборов и устройств от переменных и импульсных магнитных и электрических полей, поэтому важно правильно понимать это явление. При анализе выражения (13) часто утверждается, что замкнутый пустотелый проводник эффективно экранирует переменное внешнее поле лишь при высоких частотах  $\omega$ , для которых толщина скин-слоя значительно меньше толщины стенки:  $\delta \ll h$ . Это утверждение ошибочно, поскольку  $\delta$  является не единственным параметром, определяющим ослабление поля в пустотелых проводниках. Действительно, при выводе выражений (13) и (14) с самого начала предполагалось, что  $\delta \ll h$ . В этом случае из решения выпадает такой параметр как радиус цилиндра  $R$ .

Решение для произвольного соотношения  $\delta$ ,  $h$  и  $R$  выражается специальными функциями и не очень удобно для простого анализа, поэтому для выяснения роли размеров цилиндра рассмотрим другой предельный случай:

$$\delta \gg h \quad \text{и} \quad h \ll R. \quad (16)$$

Первое из этих условий означает (см. рис. 2), что индуцированное электрическое поле  $E_\varphi$  и зависящая от него плотность тока  $j = \sigma E_\varphi$  в стенке цилиндра практически однородны и полный азимутальный ток на единицу длины цилиндра равен  $I = \sigma E_\varphi h$ . Тогда циркуляцию магнитного поля по контуру  $L$  с учетом направления индуцированного тока можно записать таким образом:

$$H_0 - H_1 = -\frac{4\pi}{c} \sigma E_\varphi h, \quad (17)$$

где  $H_0$  и  $H_1$  — амплитуды магнитного поля снаружи и внутри цилиндра.

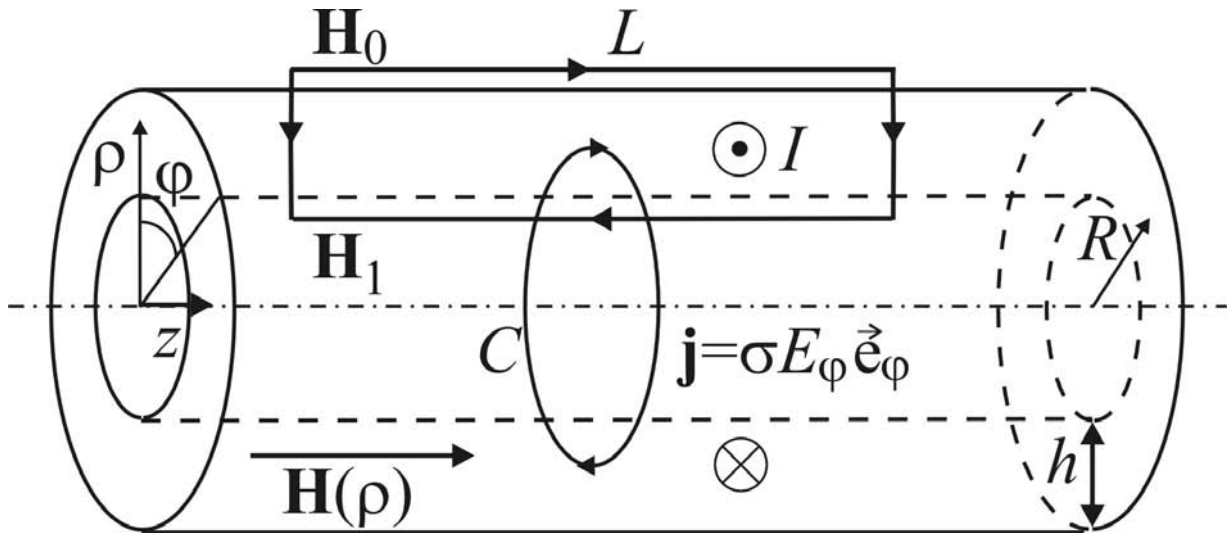


Рис. 2. Экранирование внешнего переменного магнитного поля токами, индуцированными внутри проводящего полого цилиндра

Поскольку из второго условия (16) следует, что сечение стенки цилиндра значительно меньше сечения полости, то можно пренебречь магнитным потоком в стенке и записать теорему о циркуляции для электрического поля в виде:

$$E_{\varphi} \cdot 2\pi R = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = i\omega \frac{\pi R^2}{c} H_1, \quad (18)$$

где  $\Phi$  – магнитный поток внутри цилиндра. Подставляя (18) в (17), найдем выражение для амплитуды переменного магнитного поля внутри цилиндра:

$$H_1 = H_0 \left( 1 - \frac{ihR}{\delta^2} \right)^{-1}. \quad (19)$$

Преобразовав выражение (18) в экспоненциальную форму, получим для поля внутри цилиндра выражение

$$H_1 = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{h^2 R^2}{\delta^4}}} \exp \left\{ i \arctg \left( \frac{hR}{\delta^2} \right) \right\}. \quad (20)$$

Это выражение тем точнее, чем тоньше стенка цилиндра. Безразмерная величина  $hR / \delta^2$  является *параметром подобия* для задачи об экранировании поля при слабом скин-эффекте.

Из выражения (20) видно, что ослабление поля внутри цилиндра зависит не только от  $\delta / h$ , но и от величины отношения  $\delta / R$ . Очевидно, что поле в полости существенно ослабляется, если

$h^2 R^2 / \delta^4 \gg 1$ . Взяв корень четвертой степени от этого выражения, придем к очень слабому неравенству

$$\delta < \sqrt{hR}, \quad (21)$$

являющемуся условием эффективного экранирования переменного поля тонкостенным проводником (достаточно, чтобы  $\delta$  лишь в два раза было меньше правой части, чтобы условие работало). Аргумент функции (20) в этом случае также мал, и сдвиг фазы внутреннего поля по отношению к фазе внешнего поля незначителен. Выражение (20) справедливо вплоть до значений  $\delta \sim h$ . При более высоких частотах оно становится неприменимым, и следует пользоваться выражением (13).

### **1.6. Измерение магнитных аномалий и вейвлет-анализ сигналов**

Последняя работа выпуска посвящена измерению магнитных аномалий индукционными датчиками на установке, моделирующей магнитное поле Земли. На практике такая задача решается при геофизических исследованиях [4] и в военных приложениях [5, 6]. При обработке данных студентам предлагается воспользоваться вейвлет-анализом сигналов [7-10] – методом, который уже блестяще зарекомендовал себя в обработке сигналов, и который может коренным образом изменить подходы к решению многих научных и прикладных задач, но который до сих пор мало известен даже в научной среде.

## 2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.1.

### Исследование скин-эффекта

Цель работы – Экспериментальное исследование проникновения переменного магнитного поля внутрь цилиндрических проводящих экранов из материалов с разной проводимостью; измерение амплитуды и фазы магнитного поля внутри экрана как функции частоты. Проверка теории скин-эффекта. Освоение метода калибровки индукционного датчика.

#### 2.1. Проникновение переменного магнитного поля внутрь проводящей трубки

Лабораторная работа посвящена исследованию проникновения переменного магнитного поля внутрь трубок из проводящих материалов, помещенных в соленоид. «Внешнее» магнитное поле создается переменным током, текущим в соленоиде. Магнитное поле внутри трубки измеряется по величине э.д.с., наводимой переменным магнитным полем в измерительной катушке.

Теория, которую необходимо прочитать до начала работы изложена в разделах 1.1 – 1.5. Из нее следует, что в случае слабого скин-эффекта безразмерная величина  $hR/\delta^2$ , являющаяся комбинацией среднего радиуса трубки, толщины ее стенки и толщины скин-слоя, является параметром подобия для задачи об экранировании поля. После ответа на контрольные вопросы можно приступать к эксперименту. При выполнении работы может быть использован специальный бланк, который предназначен для контроля готовности студента к выполнению работы, а также для внесения в него экспериментальных данных и результатов их обработки.

#### 2.2. Допуск к эксперименту

1 Запишите уравнения (7)–(15) и (20) в системе СИ (правила преобразования уравнений из одной системы в другую см. в [19]).

2 Используя табличные значения проводимости материалов, вычислите и постройте на графике (график I отчета о работе) зави-

симось толщины скин-слоя  $\delta$  от циклической частоты  $f = \omega / 2\pi$  для меди, алюминия и титана в интервале частот от 10 Гц до 100 кГц.

3 Проанализируйте свойства выражения (20). Объясните на этом примере, что такое параметр подобия, и какое значение он имеет для обобщения результатов экспериментов.

4 Как, согласно теории, должна зависеть амплитуда сигнала с индуктивного датчика (см. схему экспериментальной установки) от частоты внешнего поля в отсутствие экранов?

6 Выясните, чему равно входное сопротивление осциллографа. Прочитайте раздел описания осциллографа, указывающий, как определить значение среднеквадратичного значения напряжения за период.

7 Объясните, что такое импеданс нагрузки и как он влияет на величину магнитного поля в соленоиде (воспользуйтесь знаниями, полученными в курсе радиоэлектроники).

### 2.3. Экспериментальная установка

Принципиальная схема экспериментальной установки изображена на рис. 3. Число витков соленоида и сопротивление резистора  $R$  указаны на выданной вам схеме. Необходимые для расчетов геометрические размеры элементов установки необходимо измерить штангенциркулем.

Сигналы регистрируются с помощью двухлучевого цифрового осциллографа TDS 1012 или цифрового регистратора сигналов Handyscope. В качестве источника переменного тока для питания соленоида можно использовать генератор ГЗ-33 или цифровой генератор GFG-8255A. Внимательно изучите форму сигнала на выходе генератора (в том числе и при подключенном соленоиде). Обратите особое внимание на наводки, которые могут появляться на фоне основного гармонического сигнала, и шумы. Изучите их форму и положение, и при анализе данных и автоматических вычислениях с помощью функций осциллографа проверяйте, не вносят ли они серьезные ошибки в расчеты.

Итак, соленоид длиной  $l$  с числом витков  $N$  питается от генератора гармонических колебаний. Внутри генератора может

вставляться проводящий цилиндр и измерительная катушка, имеющая  $n$  витков. Последовательно с соленоидом установлено сопротивление  $R$ , служащее для контроля тока, протекающего через соленоид. Падение напряжения  $U_R$  на этом сопротивлении пропорционально магнитному полю, создаваемому соленоидом. С изменением частоты ток через соленоид может меняться, даже если поддерживать напряжение генератора постоянным, поскольку *импеданс* схемы зависит от частоты приложенного напряжения [1. С. 573]).

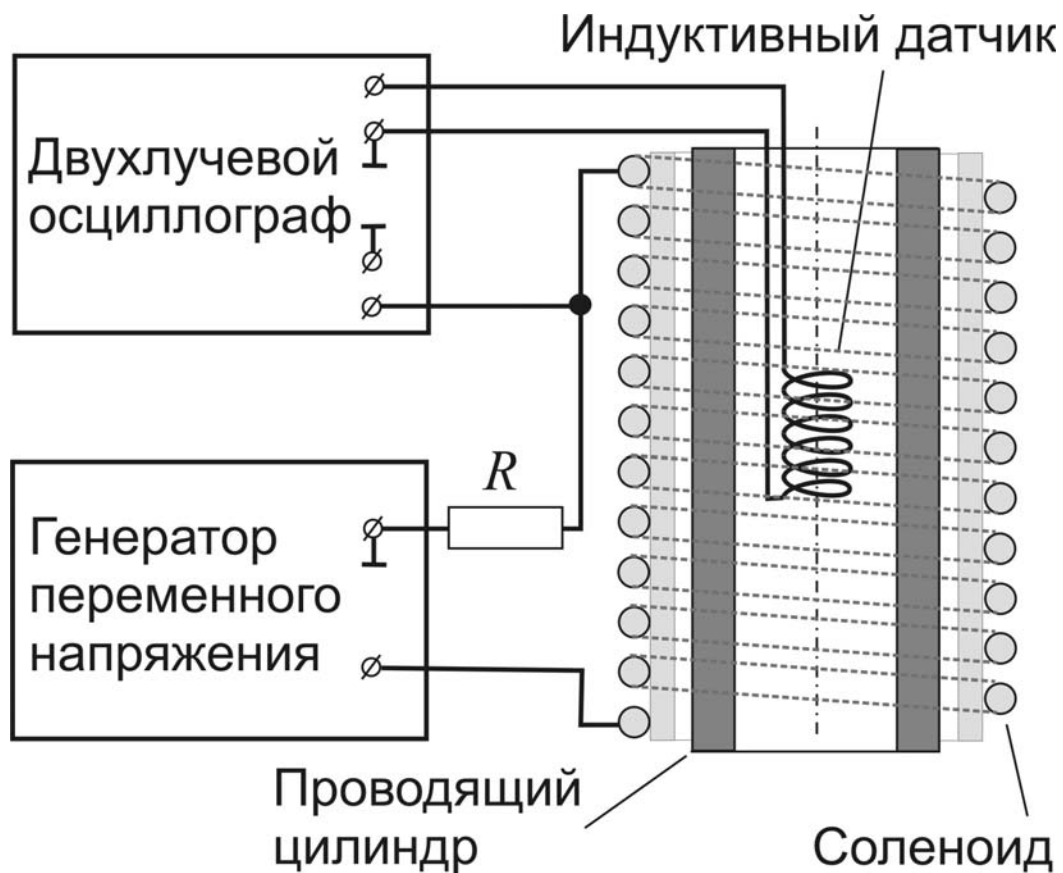


Рис. 3. Схема эксперимента по исследованию экранирования внешнего переменного магнитного поля проводящим цилиндрическим экраном

Напряжение, снимаемое с измерительной катушки  $U_n$ , пропорционально величине магнитного поля на оси соленоида и зависит от частоты и наличия или отсутствия проводящего экрана. Оба напряжения  $U_R$  и  $U_n$  регистрируются двухлучевым цифровым осциллографом, позволяющим измерять как величину сигналов, так и сдвиг фаз между внешним полем и полем внутри экрана.

## 2.4. Порядок выполнения работы

Прежде чем начитать измерения, прочитайте хотя бы бегло, все пункты задания до конца, и лишь после этого приступайте к выполнению работы.

1. Выберите для экспериментов три проводящих экрана, из которых, по крайней мере, два изготовлены из разных материалов. Старайтесь выбрать экраны так, чтобы толщина скин-слоя в них существенно различалась. Запишите номера экранов, материалы, из которых они сделаны, измерьте и запишите их геометрические характеристики в табл. I отчета (здесь и далее оптимальная форма таблиц и графиков определяется студентом).

2. В отсутствие экрана подайте сигналы  $U_R$  и  $U_n$  на первый и второй входы осциллографа соответственно и, варьируя уровень запуска и параметры системы синхронизации и каналов осциллографа, получите стабильный сигнал в режиме однократного запуска во всем диапазоне частот. Подумайте, какой из каналов следует использовать для запуска осциллографа. По форме сигнала с индуктивного датчика («измерительной катушки») определите, используя закон электромагнитной индукции, направление витков пробной катушки относительно направления витков соленоида. Это потребуется вам для правильного определения сдвига фазы магнитного поля внутри экранов. **ВНИМАНИЕ:** чтобы избежать серьезных ошибок при обработке данных, витки пробной катушки должны во всех измерениях располагаться в центре соленоида (на равном расстоянии от его концов).

3. Установите проводящий экран с наибольшей толщиной стенки и/или наилучшей проводимостью и повторите те же действия, что в п. 2, обратив особое внимание на регистрацию слабого сигнала при максимальной частоте.

4. Используя функцию TDS 1012 «ИЗМЕРЕНИЕ» («Руководство пользователя», далее «РП», с. 94), выполните измерения «среднеквадратичного значения первого заверщенного цикла сигнала» – «Сус RMS» для обоих сигналов. Исследуйте воспроизводимость получаемых данных, особенно для минимального сигнала.



Если при слабых сигналах будут наблюдаться сбои в расчетах, вспомните о критерии отброса данных, отклонения которых выходят за величину  $3\sigma$ . Вычисленные величины «Сус RMS» далее будем считать «относительной величиной магнитного поля в соленои-де» и «относительной величиной магнитного поля внутри экрана», значения которых будем далее вносить в таблицы эксперименталь-ных данных. Если показания стабильны и разброс не превышает 10 %, то можно сразу вписывать результат в графу «средняя вели-чина» (в качестве оценки среднеквадратичной ошибки можно запи-сать величину, равную 10 % от каждого значения – при построении графика в логарифмическом масштабе такое завышение ошибки вряд ли будет существенным). Если же разброс значителен, то сле-дует записать не менее семи значений и вычислить среднее значе-ние и среднеквадратичную ошибку.

5. Сдвиг фазы между сигналами  $U_R$  и  $U_n$  в каждом одиночном измерении будем определять с помощью «курсорных измерений» («РП», с. 84), записывая в таблицы данных измеренный временной сдвиг между сигналами  $\tau$  и частоту сигнала  $f$  (также определяе-мую осциллографом).

6. Изменяя частоту генератора  $f$  в пределах от 25 Гц до 25 кГц для значений 2,5, 5 и 10 на каждом порядке логарифмиче-ской шкалы, измерьте и запишите в табл. II отчета величины «Сус RMS» для сигналов  $U_R$  и  $U_n$ , а также  $\tau$  и  $f$  в отсутствие экранов и с тремя wybranными вами экранами.

7. Вычислите отношение  $u(f) = U_n / U_R$  и сдвиг фазы  $\Delta\varphi(f) = (\tau \cdot f + \Delta\psi)$ . Значение дополнительного слагаемого  $\Delta\psi$  зависит как от направления витков измерительной катушки, най-денного вами в п. 2, так и от того, какие части двух синусоидальных сигналов вы выбрали для измерения  $\tau$ . Постройте, используя ре-зультаты, полученные в отсутствие экранов, график  $u(f)$  в двой-ном логарифмическом масштабе (график II). Убедитесь, что полу-ченная зависимость является линейной функцией  $u = Cf$ . Показа-те, используя уравнение электромагнитной индукции, что сигнал с пробной катушки должен линейно расти с частотой. Если в экспе-рименте при каких-то значениях частоты измеряемая зависимость отличается от степенной, найдите возможные причины этого. С по-

мощью программы EXCEL (Mathcad, Matlab) определите из экспериментальных данных методом средних квадратов [11. С. 33] константу  $C$ , после чего определите для пробной катушки «коэффициент чувствительности»  $\alpha$ , имеющий размерность Гс/В·Гц. Для определения абсолютного значения этого коэффициента вам нужно предварительно вычислить абсолютное значение магнитного поля в соленоиде по измеренному току и геометрическим параметрам соленоида. Выполнив это задание, вы освоите один из методов «калибровки» индукционного датчика.

8. Постройте отношение  $\xi = |H_1 / H_0|$  амплитуды магнитного поля, измеряемой индуктивным датчиком внутри экранов, к амплитуде поля без экранов:  $\xi(f) = u(\text{с экраном}) / u(\text{без экрана})$  (График III отчета о работе). На каждой кривой отметьте точку, для которой теоретическое значение толщины скин-слоя равно толщине стенки экрана:  $\delta = h$ . Для каждой кривой выделите интервал, в пределах которого справедливо приближение слабого скин-эффекта – выражение (21).

9. Постройте тот же самый график в координатах  $\xi = \xi(\sqrt{hR} / \delta)$  (график IV). Укажите, при каких значениях параметра подобия начинается эффективное экранирование. Придумайте, как, используя график IV, определить удельное сопротивление трубки из материала с неизвестными параметрами. Значения удельного сопротивления некоторых металлов приведены в таблице.

Удельное сопротивление некоторых металлов и сплавов [12. С. 304]

Материал	Al	Ti	Cu	Sn	Ag	Pb	латунь
$\rho$ , $10^{-6}$ Ом·см	2,68	55	1,67	12,8	1,6	20,6	4,3–21,2

### 3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.2.

#### Проводник в переменном магнитном поле.

#### Бесконтактное измерение электропроводности

Цель работы – Изучение явлений в проводнике, находящемся в переменном магнитном поле и ознакомление с методов бесконтактного измерения электропроводности с помощью дифференциального трансформатора.

Метод – Измерение фазового сдвига между намагниченностью исследуемого образца и внешним магнитным полем. Используя метод дифференциального трансформатора, с помощью фазоизмерительного устройства определяют частотную зависимость фазового сдвига между переменным внешним магнитным полем и намагниченностью образца, помещенного в это поле, а затем, проведя обработку экспериментальных данных, вычисляют удельную проводимость различных металлов и сплавов.

#### 3.1. Краткая теория

При рассмотрении магнитных свойств материальных сред с атомистической точки зрения, прежде всего, необходимо обратить внимание на то, что в последовательно классической теории магнетизм должен отсутствовать [16]. Действительно, Бор в 1911 г. и независимо от него Ван-Леевен в 1920 г., пользуясь методами классической статистики, строго доказали следующую теорему. *В состоянии термодинамического равновесия система электрически заряженных частиц (электронов, атомных ядер и пр.), помещенная в постоянное магнитное поле, не могла бы обладать магнитным моментом, если бы она строго подчинялась законам классической физики.* Такая система может быть намагничена только в неравновесном состоянии. Если она перейдет в равновесное состояние, то намагничивание исчезнет.

Как известно, для корректного объяснения магнетизма требуется привлечение квантовой теории. И все же некоторые магнитные свойства веществ удалось объяснить Ланжевону еще в 1905 г. без использования квантовых представлений. Причина этого заключается в том, что в классических теориях намагничивания молчаливо

вводились представления сугубо квантового характера. В частности, не объяснялось, а лишь предполагалось, что из электрически заряженных частиц можно построить устойчивые образования – атомы и молекулы. Объяснить не только намагничивание, но и устойчивость самих атомов удалось только с помощью квантовой механики. Поскольку квантовую механику изучают после классической электродинамики, то ниже будут использоваться полуклассические представления, изложенные в учебниках [13; 16].

Микротоки, циркулирующие в атомах и молекулах вещества, получили общее название молекулярных токов. Они обусловлены орбитальным движением электронов вокруг атомных ядер, а также спиновыми вращениями электронов и нуклонов (протонов и нейтронов).

Так как микроструктурные элементы веществ – электроны и нуклоны – суть элементарные носители магнитного момента, то и любые их комбинации – атомные ядра и электронные оболочки, а также комбинации этих комбинаций, т. е. атомы, молекулы и макроскопические тела, в принципе могут быть источниками магнетизма. Отсюда следует вывод об универсальном характере магнетизма веществ: магнитные свойства присущи всем веществам, т. е. все они являются магнетиками.

Внешнее магнитное поле оказывает влияние на эти молекулярные токи (магнитные моменты). Известны два основных эффекта внешнего поля. Во-первых, диамагнитный эффект, являющийся следствием закона индукции Фарадея. По правилу Ленца магнитное поле создает такой индукционный ток, магнитное поле которого направлено против начального поля. Поэтому создаваемый внешним полем диамагнитный момент отрицателен по отношению к этому полю. Во-вторых, если в атоме существует результирующий, отличный от нуля магнитный момент (спиновый, орбитальный или оба), то внешнее поле будет стремиться ориентировать этот собственный атомный магнитный момент вдоль своего направления. В результате возникает параллельный полю положительный момент, который называют парамагнитным.

Когда говорят, что среда в магнитном поле намагничивается, то подразумевают, что из-за молекулярных токов любой физически малый объем среды в магнитном поле приобретает магнитный момент. Следовательно, в создании магнитного поля в среде участву-

ют не только внешние источники, но и внутренние токи, циркулирующие в пределах атомов и молекул.

В неферромагнитных телах, в не слишком сильных магнитных полях векторы поля связаны друг с другом линейными соотношениями, причем у изотропных тел линейная связь сводится к простой пропорциональности (наиболее удачное в рамках классической электродинамики объяснение связи между величинами, описывающими магнитное поле в веществе, дано, на наш взгляд, в книге [14, С. 31]):

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (22)$$

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (23)$$

$$\mu = 1 + 4\pi\chi, \quad (24)$$

где  $\mathbf{B}$  – силовой вектор, используемый для обозначения истинного магнитного поля [3; 15];  $\mathbf{H}$  – вспомогательный вектор (аналог вектора  $\mathbf{D}$  в диэлектриках);  $\mathbf{M}$  – вектор намагниченности вещества, представляющий собой магнитный момент единицы объема тела. Здесь использована гауссова система единиц, в которой магнитная проницаемость  $\mu$  и магнитная восприимчивость вещества  $\chi$  являются безразмерными величинами, а  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}$  имеют одинаковую размерность (подробнее о системах единиц см. [1]). В отличие от диэлектрической восприимчивости, магнитная восприимчивость может быть как положительной, так и отрицательной. Вещества с  $\chi > 0$  называются парамагнетиками, вещества с  $\chi < 0$  – диамагнетиками.

В парамагнетиках в отсутствие внешнего поля магнитные моменты атомов ориентированы в пространстве беспорядочно и вектор намагниченности равен нулю. При внесении парамагнетика в магнитное поле магнитные моменты атомов начинают прецессировать и происходит переориентировка магнитных моментов в результате взаимодействия атомов между собой. При этом магнитные моменты атомов ориентируются преимущественно в направлении поля и возникает намагниченность, вектор которой направлен по полю. Таким образом, ориентационный эффект магнитного поля приводит к положительной магнитной восприимчивости.

Атомы диамагнитных веществ не имеют постоянных магнитных моментов – у них спиновые и орбитальные магнитные моменты электронов сбалансированы так, что суммарный магнитный мо-

мент, приходящийся на один атом, равен нулю. Но если такой атом поместить в магнитное поле, то будет иметь место эффект магнитной поляризации, т. е. в атоме индуцируется дополнительный магнитный момент, направленный в соответствии с принципом Ленца против поля. Таким образом, поляризационный эффект магнитного поля приводит к отрицательной магнитной восприимчивости. Так как причиной диамагнетизма является электромагнитная индукция, то он должен проявляться в явной или скрытой форме во всех материальных средах. В тех случаях, когда атомы вещества изначально обладают собственными магнитными моментами, диамагнитный эффект перекрывается значительно более сильным парамагнитным эффектом.

В случае гармонической зависимости от времени, поле  $\mathbf{B}$  может быть представлено в комплексном виде ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$ ), а значит,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}$  также являются комплексными величинами. Поэтому, вообще говоря, и коэффициент связи между ними  $\chi$  (то же самое относится и к  $\mu$ ) также должен рассматриваться как комплексное число:  $\chi = \chi' + i\chi''$ . У диамагнетиков и парамагнетиков магнитная проницаемость очень мало отличается от единицы, а поле в веществе  $H_i$  связано с внешним полем  $H_e$  линейно, поэтому намагниченность тела также линейно зависит от  $H_e$

$$\mathbf{M} = \alpha \mathbf{H}_e. \quad (25)$$

Безразмерный коэффициент  $\alpha$ , называемый магнитной поляризуемостью, также является комплексной величиной:  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ , это означает, что намагниченность не совпадает с внешним полем по фазе.

Найдем магнитную поляризуемость для цилиндрического проводника радиуса  $a$ , помещенного в однородное переменное магнитное поле, параллельное оси цилиндра ( $H_e = H_0 e^{-i\omega t}$ ). Эту задачу можно решить исходя из уравнений (2), (3) и (6).

В уравнении (6) не учтен ток смещения, так как он мал по сравнению с током проводимости при  $\omega \ll 4\pi\sigma / \varepsilon$ . Предполагается также, что длина волны, соответствующая частоте поля  $\omega$ , велика по сравнению с размерами тела ( $c / \omega \gg 1$ ), период изменения поля мал по сравнению с характерным временем микроскопического ме-

ханизма проводимости ( $\omega \ll 1/\tau$ ,  $\tau$  – время свободного пробега электронов), а длина свободного пробега электронов мала по сравнению с масштабом, на котором заметно изменяется поле.

Поле внутри проводника описывается уравнением (8). С учетом временной зависимости поля  $H_e = H_0 e^{-i\omega t}$ , полагая  $\mu = 1$ , получаем уравнение

$$\Delta \mathbf{H} = -\frac{i4\pi\sigma\omega}{c^2} \mathbf{H} \quad (26)$$

Это уравнение вместе с уравнением  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  составляет полную систему, достаточную для определения магнитного поля.

Токи Фуко в цилиндре циркулярны (т. е.  $\mathbf{j}$  имеет в цилиндрических координатах только угловую компоненту  $j_\varphi$ ) и определяются по полю согласно

$$\frac{4\pi j}{c} = -\frac{\partial H}{\partial r}.$$

Магнитный момент единицы длины цилиндра, создаваемый токами проводимости, направлен вдоль его оси и равен

$$M_1 = \frac{1}{2c} \int j r dV = -\frac{1}{4} \int \frac{\partial H}{\partial r} r^2 dr.$$

Приближенное решение данной задачи достаточно подробно рассмотрено в Приложении. Здесь же приведем результат точного решения (задача 3 к § 59 в работе [16] и задача 382 в работе [17]):

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\pi a^2} = -\frac{1}{4\pi} \left[ 1 - \frac{2}{ka} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right], \quad (27)$$

где  $k = \frac{1+i}{\delta}$ ,  $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$  – глубина проникновения магнитного поля в проводник;

$$J_0(kr) = 1 - \frac{(kr)^2}{2^2} + \frac{(kr)^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{(kr)^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots;$$

$$J_1(kr) = \frac{kr}{2} \left( 1 - \frac{(kr)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(kr)^4}{3 \cdot (2 \cdot 4)^2} - \frac{(kr)^6}{4 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \right)$$

– функции Бесселя.

В предельном случае низких частот ( $\delta \gg a$ )

$$\alpha' = -\frac{1}{48} \left( \frac{a}{\delta} \right)^4 = -\frac{\pi a^4 \sigma^2 \omega^2}{12c^4}, \quad \alpha'' = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{a}{\delta} \right)^2 = \frac{a^2 \sigma \omega}{8c^2} \quad (28)$$

Отсюда получим

$$\frac{\chi'}{\chi''} = \frac{\alpha'}{\alpha''} = -\frac{\pi^2 \sigma d^2}{3c^2} f, \quad (29)$$

где  $f = \omega / 2\pi$  – частота, а  $d = 2a$  – диаметр образца.

Таким образом, магнитный момент проводника в переменном магнитном поле создается, в основном, возникающими в теле токами проводимости; он отличен от нуля даже при  $\mu = 1$ , когда статический момент обращается в нуль. Статический магнитный момент должен получаться из  $M(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что вещественная часть магнитной поляризуемости  $\alpha'$  при  $\omega \rightarrow 0$  стремится к постоянному значению (равному нулю при  $\mu = 1$ ). Возникновение вихревых токов сопровождается диссипацией энергии поля, выделяющейся в виде джоулева тепла. Диссипация энергии определяется мнимой частью магнитной поляризуемости  $\alpha''$  [16], причем  $\alpha'' > 0$ .

Полученное приближенное соотношение (29) может использоваться для бесконтактного определения проводимости (на достаточно малых частотах) в тех случаях, когда вещественная часть магнитной поляризуемости  $\alpha' < 0$ , а  $\mu = 1$ . Однако необходимо иметь в виду, что если статический магнитный момент не равен нулю, то при  $\omega \rightarrow 0$   $\alpha'$  стремится к постоянному значению, также отличному от нуля, и его необходимо учитывать в выражениях (28) и, соответственно, в формуле (29).

### 3.2. Экспериментальная установка

Оборудование: Генератор низкой частоты (например, GFG – 8255A), дифференциальный трансформатор, двухканальный осциллограф (например, Tektronix TDS 1012), исследуемые образцы.



Бесконтактные методы измерения электропроводности во многих случаях имеют существенные преимущества перед контактными способами.

Известно, что при низких температурах длина свободного пробега электронов в чистых металлах достигает нескольких миллиметров. Поэтому правильное значение электропроводности можно получить лишь на образцах достаточно большого диаметра. Такие измерения целесообразно проводить бесконтактными методами. В частности, это относится к контролю чистоты металлов по остаточному удельному сопротивлению.

Бесконтактные методы можно использовать для измерения электропроводности металлов, сплавов, полупроводников и электролитов, в том числе и в тех случаях, когда образец помещен в герметичную ампулу для изоляции исследуемого материала от окружающей среды.

В данной работе применяется метод комплексной магнитной восприимчивости цилиндрических образцов в переменном магнитном поле [18] (метод дифференциального трансформатора). Датчиком служит дифференциальный трансформатор, состоящий из двух одинаковых катушек взаимной индуктивности (см. рис. 4). Образец  $I$  помещают внутрь одной из катушек датчика. Первичные обмотки катушек включены последовательно и по ним пропускается ток от генератора низкой частоты. Вторичные обмотки включены встречно, поэтому без образца напряжение на выходе дифференциального трансформатора должно быть равно нулю. При помещении образца  $I$  внутрь рабочей катушки в нем возникают вихревые токи, которые изменяют магнитное поле, и во вторичной обмотке появляется ЭДС. Так как начальная ЭДС (без образца) была скомпенсирована второй катушкой, то возникающий теперь выходной сигнал пропорционален частоте, амплитуде магнитного поля и эффективной магнитной восприимчивости образца:

$$U_{\text{вых}} \propto \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\chi H_0 e^{-i\omega t}) = -i\omega \chi H_0 e^{-i\omega t} =$$

$$= -i\omega \chi_0 e^{i\beta} H_0 e^{-i\omega t} = \omega \chi_0 H_0 e^{-i\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \beta\right)}$$

Здесь мы представили  $\chi$  в виде  $\chi = \chi_0 e^{i\beta}$ , где  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha''}{\alpha'}$  – из соотношения (12). Иначе говоря, выходной сигнал оказывается сдвинут по фазе на величину  $\varphi = (\pi/2 - \beta)$  относительно магнитного поля. Воспользовавшись тем, что  $\operatorname{tg}(\pi/2 - \beta) = \operatorname{ctg} \beta$ , получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \beta = \frac{\alpha'}{\alpha''} = -\frac{\pi^2 \sigma d^2}{3c^2} f. \quad (30)$$

Таким образом, построив график зависимости  $\operatorname{tg} \varphi$  от частоты  $f$ , по коэффициенту наклона линейного участка кривой можно рассчитать проводимость  $\sigma$ .

Если статическая магнитная поляризуемость образца отлична от нуля, т. е.  $\alpha'_1(\omega=0) = \alpha_{01}$ , то вместо формулы (13) следует воспользоваться выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \beta = \frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{16c^2 \alpha_{01}}{\pi d^2 \sigma \mu f} - \frac{\pi^2 \sigma \mu d^2}{3c^2} f. \quad (31)$$

Эта формула, как и выражение (30), правильно описывает ход соответствующей экспериментальной кривой в области низких частот. Следует отметить, что на этой кривой имеется линейный участок вблизи точки  $f = f_0$ , в которой  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ .

### 3.3. Контрольные вопросы (допуск к эксперименту)

1. Объясните суть метода дифференциального трансформатора.
2. Докажите, что напряжение, поступающее на вход усилителя, пропорционально магнитной восприимчивости.
3. Как определяют фазовый сдвиг с помощью фигур Лиссажу? Каковы достоинства и недостатки этого метода?
4. В формуле (31) выразите параметр  $\alpha_{01}$  через  $f_0$  и покажите, что вблизи точки  $f = f_0$ , в которой  $\varphi = \varphi_0 = 0$  справедливо соотношение

$$\Delta \varphi = \varphi = -(2\sigma \mu \pi^2 d^2 / 3c^2) \Delta f, \quad (31a)$$

где  $\Delta f = f - f_0$ .

5. Нарисуйте ожидаемый вид зависимостей  $\operatorname{tg} \varphi$  от частоты  $f$  для рассмотренных выше случаев.

### 3.4. Порядок выполнения эксперимента

1) Соберите схему (см. рис.4, где 1 – образец; 2,3 – катушки взаимной индуктивности;  $N$  – двухканальный осциллограф;  $G$  – генератор низких частот) и проведите измерения  $\varphi$  для двух (или трех) цилиндрических образцов методом фигур Лиссажу.

Выбор полосы частот для проведения измерений зависит от величины проводимости материала образца. Например, для меди можно выбрать полосу частот от 200 Гц до 1 кГц (с интервалом 100 Гц). Для материалов с низкой проводимостью (таких, как титан) имеет смысл начинать измерения с частоты (1 – 2) кГц.

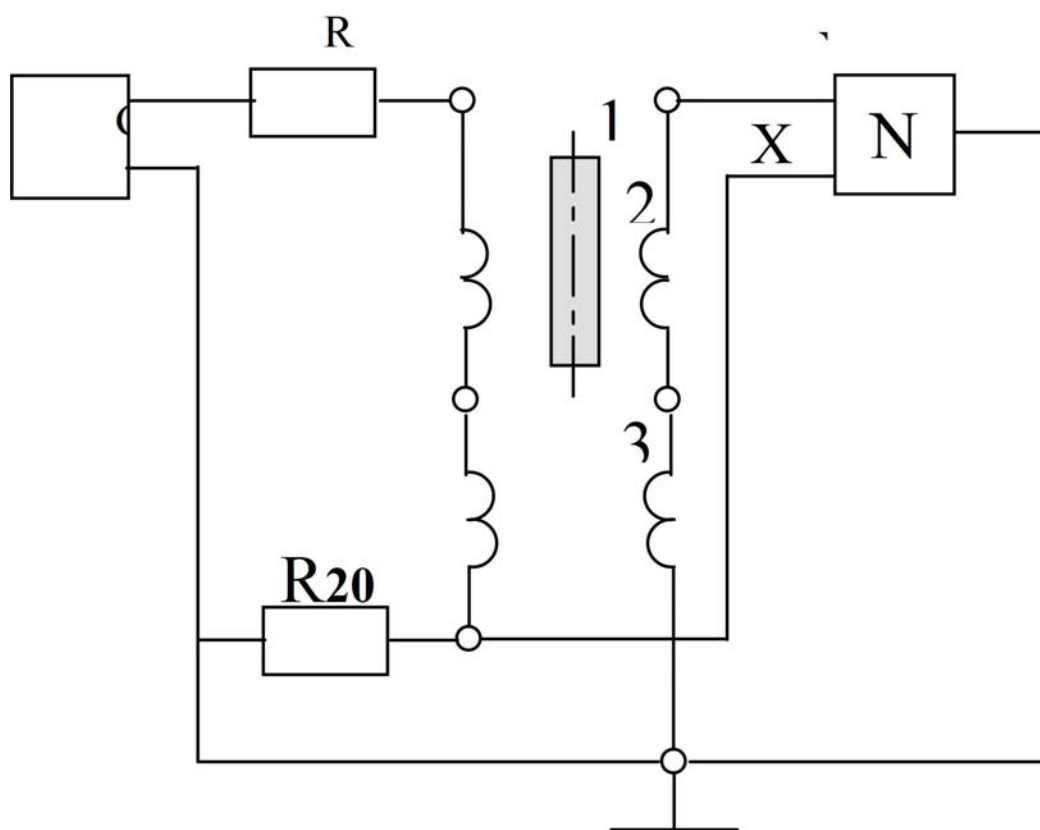


Рис. 4. Схема экспериментальной установки

Что касается материалов, статическая магнитная поляризуемость которых отлична от нуля, то для них наиболее детально следует провести измерения на линейном участке в окрестности частоты

ты  $f_0$  (на этой частоте, в соответствии с формулами (31) и (31a), фазовый сдвиг обращается в нуль). *Примечание.* Исследование влияния параметра  $\mu$  на крутизну участка вблизи  $f_0$ , а также исследование свойств меди и других проводников на высоких частотах можно рекомендовать в качестве курсовой работы.

2) Постройте графики зависимостей тангенса измеренных сдвигов фаз от частоты. По коэффициенту наклона линейного участка соответствующей кривой рассчитайте значения проводимости  $\sigma$  для каждого образца и сравните полученные результаты с табличными значениями.

### 3.5. Определение сдвига фазы методом фигур Лиссажу [5]

На экране двухканального осциллографа результат сложения гармонических колебаний одинаковой частоты имеет вид эллипса. Действительно, если точка  $P$  одновременно колеблется вдоль осей координат  $OX$  и  $OY$  по законам  $x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  и  $y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ , где  $x$  и  $y$  – декартовы координаты точки  $P$ , то уравнение траектории результирующего движения точки  $P$  в плоскости  $XOY$  можно найти, исключив из выражений для координат  $x$  и  $y$  параметр  $t$ :

$$(x/A_1)^2 + (y/A_2)^2 - 2[xy/(A_1 A_2)] \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Очевидно, координаты точек пересечения эллипса с осями координат зависят от величины  $|\varphi_2 - \varphi_1|$ .

Вставьте исследуемый образец в одно из гнезд дифференциального трансформатора. Произведите измерение величины  $|\sin(\varphi_2 - \varphi_1)|$ . После этого вставьте исследуемый образец в другое гнездо дифференциального трансформатора и повторите измерения на той же частоте. Определите среднее значение  $|\varphi| = |\varphi_2 - \varphi_1|$ .

### 3.6. Содержание отчета

Отчет должен содержать следующие измеренные данные, результаты их обработки и анализа:

- расчетные формулы;
- схему измерительной установки;
- графики зависимостей  $\operatorname{tg} \varphi$  от частоты;
- значения удельной проводимости для каждого из исследованных образцов с указанием погрешности и сравнение их с табличными значениями.

### 3.7. Приложение. Метод последовательных приближений

Будем искать магнитную поляризуемость в случае, когда глубина проникновения поля  $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$  велика по сравнению с радиусом проводника ( $\delta \gg a$ , случай *слабого скин-эффекта*), методом последовательных приближений.

В этом случае правую часть в уравнении (26) в первом приближении можно заменить нулем. Найденное таким образом магнитное поле будет соответствовать стационарному случаю  $H_{\text{stat}}$ . С учетом граничных условий в нашей задаче  $H_{\text{stat}} = H_e$ . Следующим шагом будет вычисление с помощью уравнения (2) электрического поля  $E$ , потом, по формуле (6), соответствующих ему токов  $j$ , а затем – создаваемого ими в проводнике поля  $H_i$ . Подставив найденное  $H_i$  в уравнение (26), можно найти следующее приближение и т. д. Такими же последовательными приближениями можно найти и поляризуемость  $\alpha$ , только на каждом шаге нужно вычислять магнитный момент, создаваемый токами  $j$ , с помощью уравнения

$$M_1 = \frac{1}{2c} \int j r dV. \quad (32)$$

Здесь  $M_1$ , в отличие от  $M$ , является магнитным моментом единицы длины цилиндра.

Учитывая аксиальную симметрию задачи, будем использовать цилиндрическую систему координат, где вектор поля будет иметь следующие компоненты:  $\mathbf{H}_e = (0, 0, H_0)$ . Используя вид дифференциальных операторов в цилиндрических координатах, воспользуемся указанным способом:

$$\Delta \mathbf{H}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_e = H_0 \mathbf{e}_z; \quad (32)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_e \Rightarrow E_\varphi = \frac{i\omega}{2c} H_0 r; \quad (33)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \Rightarrow j_\varphi = \frac{i\sigma\omega}{2c} H_0 r; \quad (34)$$

$$M_1 = \frac{1}{2c} \int j r dV = \frac{i\pi\sigma\omega}{8c^2} a^4 H_0. \quad (35)$$

Значит, в первом приближении магнитная поляризуемость единицы длины цилиндра – чисто мнимая величина, равная  $i\alpha'' = \frac{i\pi\sigma\omega}{8c^2} a^4$ . Так как мы рассматриваем случай слабого скин-эффекта, т. е.  $\delta \gg a$ , то полученное значение  $\alpha''$  пропорционально величине второго порядка малости  $(a/\delta)^2$ .

Далее, найдем магнитное поле, создаваемое токами  $j$  из уравнения (34) с помощью выражения (3), подставим в уравнение (26) и повторим процедуру:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \Rightarrow H_z^{(2)} = \frac{i\pi\sigma\omega}{c^2} H_0. \quad (36)$$

Индекс  $^{(2)}$  означает второй порядок приближения; все остальные компоненты магнитного поля, кроме  $z$  компоненты, равны нулю; индекс  $_{(i)}$ , означающий «внутреннее» поле, для краткости опущен. Далее

$$E_\varphi = -\frac{\pi\sigma\omega^2}{2c^3} H_0 r^3; \quad (37)$$

$$j_\varphi = -\frac{\pi\sigma^2\omega^2}{2c^3} H_0 r^3; \quad (38)$$

$$M_1 = \frac{\pi^2\sigma^2\omega^2}{12c^4} a^6 H_0. \quad (39)$$

Другими словами, во втором приближении магнитная поляризуемость действительная величина  $\alpha_1' = -\frac{\pi^2 \sigma^2 \omega^2}{12c^4} a^6$ , пропорциональная величине четвертого порядка малости  $\left(\frac{a}{\delta}\right)^4$ . Используя формулы (39) и (35), получим, что

$$\frac{\chi'}{\chi''} = \frac{\alpha'}{\alpha''} = -\frac{\pi^2 \sigma d^2}{3c^2} f, \quad (40)$$

где  $f = \omega / 2\pi$  – частота, а  $d = 2a$  – диаметр образца. Это приближенное соотношение (для достаточно малых частот) можно получить также из точного решения (27) при  $\delta \gg a$ , разлагая функции Бесселя в ряд по степеням  $ka$  (см. разд. 3.1).

## 4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.3.

### Токи Фуко и магнитное трение

Цель работы – Исследование токов Фуко и явления магнитного трения на примере торможения постоянного магнита, падающего в поле тяжести в проводящих и непроводящих трубках. Экспериментальное определение магнитного момента постоянного магнита и проводимости материала стенок трубы.

#### 4.1. Движение магнитного диполя в проводящей трубе

Эффектной демонстрацией законов электродинамики является опыт с падением постоянного магнита в длинной проводящей трубе. Тормозящая сила, действующая на магнит, существенно замедляет его движение, а время падения магнита увеличивается во много раз.

Процесс возникновения тормозящей силы можно объяснить следующим образом. При прохождении магнита через некоторое сечение трубы меняется магнитный поток, пронизывающий это сечение. По закону электромагнитной индукции изменение магнитного потока наводит ЭДС в сечении трубы, и если стенки трубы проводящие, то в ней возникнут вихревые электрические токи, иначе называемые токами Фуко (см. [1, с.270]). Если магнит перемещается вдоль оси трубки, а его полюса ориентированы вдоль этой оси, вихревые токи текут в азимутальном направлении, как показано на рис. 1. Индуцированные токи создают «вторичное» неоднородное магнитное поле, которое взаимодействует с падающим магнитом и вызывает его торможение.

Найдем выражение, описывающее тормозящую силу, действующую на падающий магнит. Все вычисления выполняются в гауссовой системе, но ряд формул приводится параллельно в системе СИ. Вы должны уметь записать в системе СИ и остальные выражения. Сила взаимодействия магнитного диполя с неоднородным внешним магнитным полем равна (см. [1, с.243]):

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \qquad \mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{СИ}) \qquad (41)$$



где  $\mathbf{m}$  – магнитный момент диполя,  $\mathbf{B}$  – «вторичное» неоднородное магнитное поле. Эта сила будет направлена в сторону, противоположную направлению движения магнита, т.е. будет тормозить движение. Теория движения магнитного диполя в проводящих трубках при произвольной скорости описана в работе [20]. Здесь мы рассмотрим частный случай падения магнита в вертикально расположенной проводящей трубке под действием силы тяжести, который соответствует “малым скоростям движения”. Так как сила торможения в этом случае с ростом скорости увеличивается, в конечном итоге установится постоянная скорость падения магнита в поле тяжести, при которой силы тяжести и торможения уравниваются друг друга.

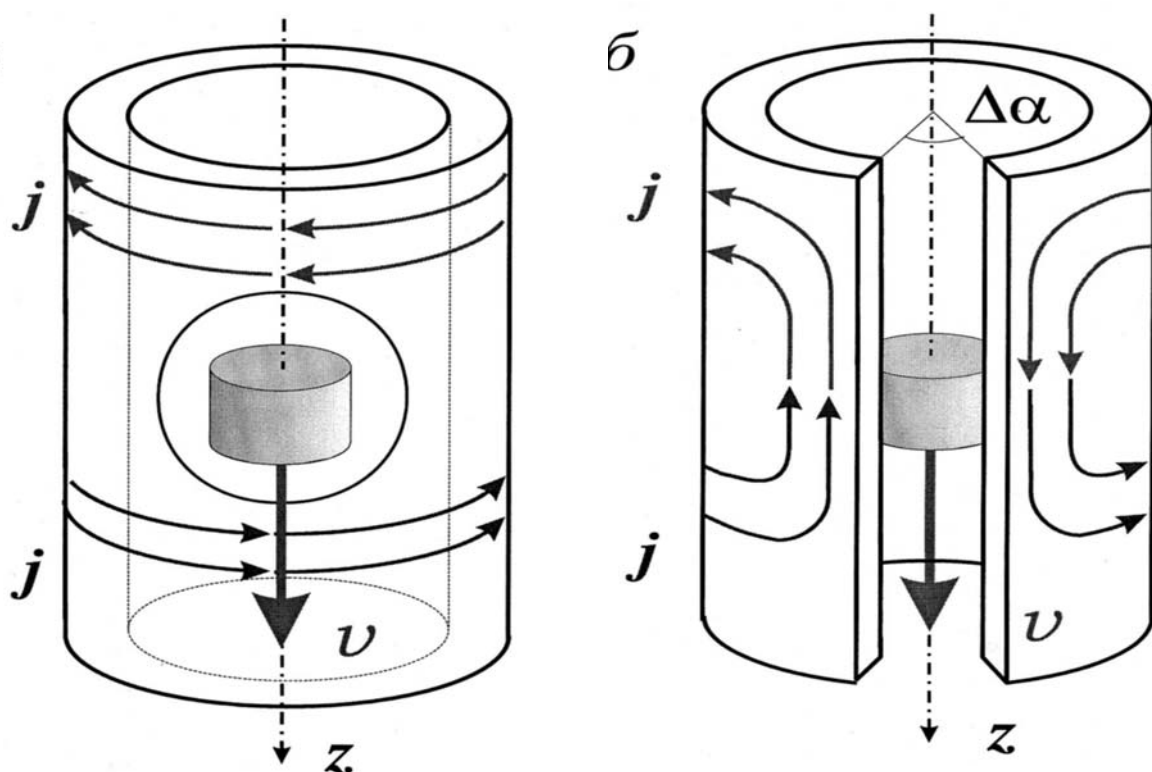


Рис. 5. Схема токов Фуко, возникающих при движении магнита в трубке из проводящего материала и в трубке с продольным разрезом

Поскольку в экспериментах используется достаточно короткий магнит, при расчетах можно с хорошей точностью считать его точечным магнитным диполем с магнитный моментом  $\mathbf{m}$ , направленным вдоль оси  $z$  круглой трубы с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$  (рис. 5, а). Пусть диполь движется вдоль оси

трубы  $z$ , которой соответствует  $r=0$  в цилиндрической системе координат  $(r, \alpha, z)$ , а его положение на оси  $z$  в произвольный момент времени  $t$  задано функцией  $z_m(t)$ .

Из аксиальной симметрии задачи видно, что магнитное поле должно иметь только радиальную и аксиальную компоненты, а электрическое только азимутальную. Т.е.

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= (B_r, 0, B_z) \\ \mathbf{E} &= (0, E_\alpha, 0)\end{aligned}\quad (42)$$

Как известно, поверхность проводника является эквипотенциальной, следовательно, скалярный потенциал  $\varphi$  по всему объему трубки одинаков и мы можем положить его равным нулю. Как известно, для вектора  $\mathbf{B}$  справедливо выражение  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$  (см. [1, с.293]), где вектор  $\mathbf{A}$  называется векторным потенциалом. Поскольку в нашем случае он имеет только азимутальную компоненту  $\mathbf{A} = A_\alpha(r, z, t)\mathbf{e}_\alpha$ , то отличными от нуля окажутся только следующие компоненты электромагнитного поля:

$$\begin{aligned}B_r &= \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, & B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\alpha}{\partial r}, & E_\alpha &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} & \text{(СГС)} \\ B_r &= \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, & B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\alpha}{\partial r}, & E_\alpha &= -\frac{\partial A}{\partial t} & \text{(СИ)}\end{aligned}\quad (43)$$

т.е. условие (42) будет выполнено.

Для трубы, сделанной из немагнитного материала, т.е. когда  $\mu \approx 1$ , и при относительно низкой скорости движения магнита  $\mathbf{v}$ , когда эффективная глубина скин-слоя  $\delta = c / \sqrt{2\pi\sigma\omega}$ , оцененная для характерной частоты изменения поля  $\omega \sim v/a$  и заданной проводимости материала стенки  $\sigma$ , больше радиуса трубы  $a$  (приближение слабого скин-эффекта см. раздел), магнитное поле магнита почти не возмущается стенкой трубы.

Вектор–потенциал магнитного диполя определяется выражением [1, с.242]

$$\mathbf{A} = [\mathbf{m} \times \mathbf{R}] / R^3 \quad \Bigg| \quad \mathbf{A} = [\mathbf{m} \times \mathbf{R}] / R^3 \text{ (СИ)} \quad (44)$$

Тогда, для нашего случая, когда есть только азимутальная компонента векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , можно записать

$$A_\alpha(r, z, t) = \frac{mr}{[r^2 + (z - z_m(t))^2]^{3/2}} \quad (45)$$

Замечая, что  $\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} = -v \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}$ , где  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{z}}_m$  есть мгновенная скорость движения диполя, можно сразу найти индуцированное электрическое поле  $E_\alpha$ .

$$E_\alpha = \frac{v}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} = -\frac{3v}{c} \frac{mr(z - z_m(t))}{[r^2 + (z - z_m(t))^2]^{5/2}} \quad (\text{СГС}) \quad (46)$$

$$E_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} = -\frac{3vmr(z - z_m(t))}{[r^2 + (z - z_m(t))^2]^{5/2}} \quad (\text{СИ})$$

В стенках трубки оно индуцирует вихревой ток с плотностью  $j_\alpha(r, z) = \sigma E_\alpha$ . Этот ток создает «вторичное» магнитное поле. Можно считать, что для каждой координаты  $r$  и  $z$  ток  $j_\alpha(r, z)$  представляет собой элементарный круговой виток с током. На оси  $z$  поле такого витка имеет только  $z$ -компоненту и равно (см. [1. с.224]):

$$dB_z(z) = \frac{1}{c} \frac{2\pi r^2 j}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad \left| \quad dB_z(z) = \frac{\mu_0 r^2 j}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (\text{СИ}) \quad (47)$$

Для вычисления суммарного «вторичного» магнитного поля проинтегрируем выражение (47) по  $r$  и  $z$  по всему объему трубки:

$$B_z(z, t) = \frac{1}{c} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \int_a^b dr' \frac{2\pi r'^2 j_\alpha(r', z')}{[r'^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (48)$$

где  $\pm L/2$  –  $z$ -координаты концов трубы. Для нахождения тормозящей силы необходимо найти градиент поля в точке расположения диполя. Для этого дифференцируем подынтегральное выражение в (48) по  $z$  и приравниваем затем  $z$  к  $z_m(t)$ .

$$\frac{\partial B_z(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{c} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \int_a^b dr' \frac{-6\pi r'^2 (z - z') j_\alpha(r', z')}{[r'^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \quad (49)$$

Умножив результат на  $m$  и вычислив плотность тока с помощью выражений (6) и (46), находим тормозящую силу

$$F = -\frac{18\pi\sigma m^2 v}{c^2} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \int_a^b dr' \frac{r'^3 (z_m - z')^2}{[r'^2 + (z_m - z')^2]^5} \quad (50)$$

Она практически не зависит от координаты диполя  $z_m(t)$ , если тот достаточно удален от концов трубки. В пределе  $|z_m \pm L/2| \gg a$ , из (50) получаем

$$F = -\frac{15\pi^2\sigma m^2 v}{64c^2} \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) \quad (\text{СГС}) \quad (51)$$

$$F = -\frac{15\pi\mu_0\sigma m^2 v}{256} \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) \quad (\text{СИ})$$

В случае тонкостенной трубки,  $b - a \ll a$  это выражение приводится к результату

$$F = -\frac{45\pi^2}{64} \frac{\sigma m^2 v h}{a^4 c^2} \quad F = -\frac{45\pi}{256} \frac{\sigma \mu_0 m^2 v h}{a^4} \quad (\text{СИ}) \quad (52)$$

Знак «минус» здесь явно указывает, что сила направлена против скорости магнита, тем самым, оправдывая название «тормозящая сила».

Теперь получим выражение, описывающее движение магнита во времени. Из выражения (51) видно, что сила торможения пропорциональна скорости и может быть записана в виде  $F = -\beta M \dot{z}_m$ , где

$$\beta = \frac{45\pi^2}{64} \frac{\sigma m^2 h}{M a^4 c^2} \quad (53)$$

– коэффициент магнитного трения,  $M$  – масса магнита, а  $z_m(t)$  – мгновенная координата магнита. Решая уравнение движения магнита

$$\ddot{z}_m(t) + \beta \dot{z}_m(t) = g \quad (54)$$

в поле тяжести с учетом этой силы торможения с начальными условиями  $z_m(0) = 0, \dot{z}_m(0) = v_1$ , получаем:

$$z_m(t) = \frac{gt}{\beta} - \frac{g - \beta v_1}{\beta^2} [1 - \exp(-\beta t)], \quad (55)$$

где  $v_1$  – скорость магнита в центре первой катушки. В случае трубок с высокой проводимостью магнит быстро достигает постоянной предельной скорости, равной  $v_\infty = g / \beta$ . Для таких трубок  $v_1 = v_\infty$ , что легко можно определить по виду осциллограммы. Отсюда находится коэффициент трения  $\beta = g / v_\infty$ .

$$\beta = \frac{g}{v_\infty}. \quad (56)$$

Имеется и другая возможность определения магнитного момента постоянного магнита. Пусть вокруг трубы на некотором расстоянии друг от друга вдоль оси намотаны витки проволоки, соединенные последовательно между собой. Тогда при прохождении магнита через плоскость очередного витка на концах последнего будет возникать разность потенциалов. Для вычисления воспользуемся выражением (46)

$$U_i(t) = E_\alpha(z_i, t) \cdot 2\pi\rho = \frac{6\pi\rho}{c} \frac{m\rho(z_m(t) - z_i)}{\left(\rho^2 + (z_m(t) - z_i)^2\right)^{5/2}}, \quad (57)$$

где  $\rho = b + d / 2$  – радиус измерительного витка,  $d$  – диаметр проволоки,  $z_i$  – координата  $i$ -того витка, а  $z_m(t)$  – координата магнита в момент времени  $t$ , рассчитанная по формуле (54). Если все витки соединены последовательно, то напряжение, снимаемое со всех витков, равно сумме напряжений от каждого из  $N$  витков

$$U(t) = \frac{6\pi\rho}{c} \sum_{i=1}^N \frac{m\rho(z_m(t) - z_i)}{\left(\rho^2 + (z_m(t) - z_i)^2\right)^{5/2}} \quad (\text{СГС})$$

$$U(t) = \frac{3\mu_0\rho}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m\rho(z_m(t) - z_i)}{\left(\rho^2 + (z_m(t) - z_i)^2\right)^{5/2}} \quad (\text{СИ}) \quad (58)$$

#### 4.2. Движение магнитного диполя в трубе с разрезом

Теперь рассмотрим падение магнита в проводящей трубе с продольным разрезом. Такой разрез разрывает азимутальный ток, цир-

кулирующий в стенке трубы, и на первый взгляд кажется, что эффект торможения должен отсутствовать. Тем не менее, торможение магнита в такой трубке все равно наблюдается. Это вызвано тем, что полярность ЭДС, наводимой в стенках трубки, различна впереди и позади от места расположения движущегося магнита. Из-за этого вихревые токи, индуцированные электродвижущей силой, замыкаются по берегам разреза, как показано на рис. 5, б. В квазистатическом приближении электрический заряд не может накапливаться в объеме стенки, распределяясь на поверхностях стенки так, чтобы обеспечить замыкание токов проводимости. Поскольку в трубе с разрезом отсутствует аксиальная симметрия, то выражение (46) для этого случая будет выглядеть следующим образом

$$\mathbf{E} = \frac{v}{c} \left( \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\alpha - \nabla \varphi \quad \left| \quad \mathbf{E} = v \left( \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\alpha - \nabla \varphi \quad (\text{СИ}) \quad (59)$$

где  $A_\alpha$  – вектор-потенциал точечного магнитного диполя  $m$  в свободном пространстве, а  $\varphi$  – скалярный (электрический) потенциал, индуцированный поверхностными зарядами.

Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \varphi = 0$  внутри стенки. Для тонкой стенки уравнение Лапласа можно упростить, приняв во внимание, что внутри стенки отсутствует радиальное электрическое поле,  $\partial \varphi / \partial r = 0$ . Тогда в уравнении Лапласа можно оставить только производные по  $\alpha$  и  $z$ , заменив переменную  $r$  на радиус трубки  $a$ ,

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (60)$$

Отсутствие радиального электрического поля следует из граничных условий для плотности тока  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , который должен исчезать на границе проводящего материала, если можно пренебречь током смещения.

Решение уравнений (59) и (60) позволяет вычислить силу торможения магнита в трубе с продольным разрезом

$$F = -\frac{45\pi^2}{64} \frac{\sigma v h}{c^2} \frac{m^2}{a^4} Q(\pi - \Delta \alpha / 2), \quad (\text{СГС}) \quad (61)$$

$$F = -\frac{45\pi}{256} \frac{\sigma v h \mu_0 m^2}{a^4} Q(\pi - \Delta\alpha / 2) \quad (62)$$

Сравнивая выражения (61) с (51), видим, что падение магнита через разрезанные трубки происходит в  $Q$  раз быстрее.

В работе [20] показано, что функция  $Q$  при значении  $\Delta\alpha \leq 3\pi / 2$  с точностью до нескольких процентов аппроксимируется выражением

$$Q(\pi - \Delta\alpha / 2) \approx 0,77 - 0,16\Delta\alpha. \quad (63)$$

Точное решение для функции  $Q$  приведено в Приложении к работе (раздел 4.5).

### 4.3. Контрольные вопросы и задания (допуск к работе)

- 1 Используя табличные значения проводимости материалов, вычислите толщину скин-слоя  $\delta$  для меди, алюминия и латуни. Проверьте справедливость приближения слабого скин-эффекта.
- 2 Какой эффект обеспечивает замыкание токов в трубе с продольным разрезом.
- 3 Как направлен вектор силы, действующей на магнит в трубах с разрезом и без него.

### 4.4. Эксперимент и обработка данных

#### 4.4.1. Экспериментальная установка

Экспериментальная установка (см. фотографию на рис. 6) состоит из набора вертикальных трубок длиной 70 см, сделанных из различных материалов. Цилиндрический магнит массой  $M$ , равной нескольким граммам (масса магнита указана на наклейке), намагничен вдоль оси. Для исследования явления магнитного торможения, магнит опускается по очереди в трубки из непроводящего материала.

ла (стекло) и проводящих материалов (металлы и сплавы). На внешнюю поверхность каждой из трубок намотаны 7 катушек с периодом 10 см. Каждая катушка состоит из 20 витков и имеет длину 8 мм. Все катушки включены последовательно. Напряжение, наведенное в катушках при падении магнита сквозь них, регистрируется при помощи АЦП National Instruments, интегрированной в компьютер. Характерный вид сигналов, получающихся на данной установке, показан на рис. 3 в [19].

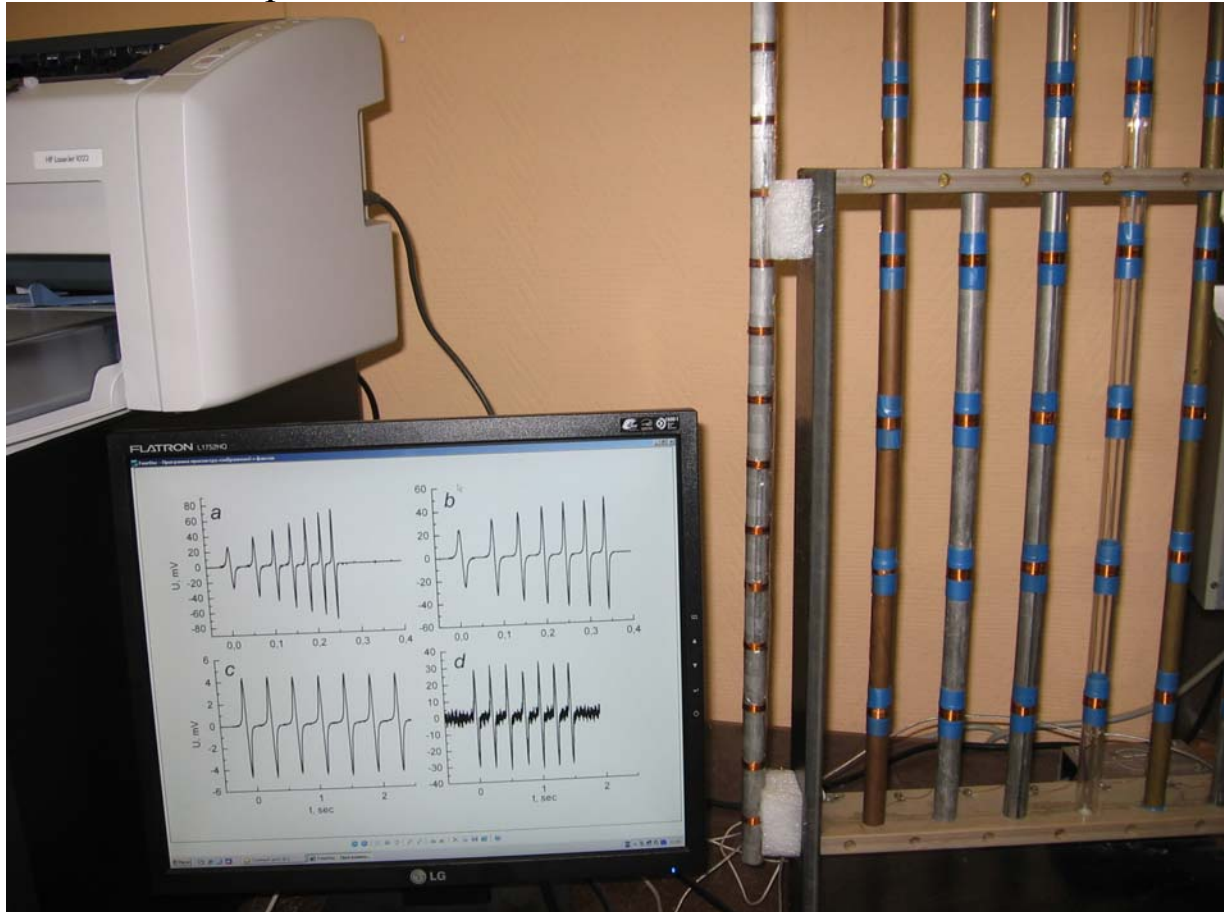


Рис. 6. Фотография установки для исследования магнитного трения

При выполнении эксперимента и обработке данных следует иметь в виду, что некоторые трубки изготовлены из достаточно чистых материалов (медная и титановая трубки), и при обработке данных можно использовать табличные данные об их проводимости. Проводимость меди и титана равны  $\sigma_{\text{Cu}} = 5,3 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$  и  $\sigma_{\text{Ti}} = 1,9 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ , соответственно. Используя эти данные, можно определить неизвестный магнитный момент падающего «диполя» и далее, анализируя соответствующие осциллограммы, использовать полученное значение для определения проводимости сплошных



трубок, изготовленных из сплавов (дюралюминиевая трубка), проводимости которых нам не известны.

Осциллограммы, полученные при падении магнита через трубки с разрезами, используются для проверки правильности выражения (63). Почти наверняка вы получите величину  $Q$ , отличающуюся от теоретического значения. Это явится удобным поводом, чтобы подумать о том, какая не учтенная нами дополнительная составляющая действующей на магнит силы появляется в случае разрезанной трубки. Догадаться об этом можно «на слух». Для этого в экспериментальной установке имеется длинная трубка, в которой разрезанные участки чередуются со сплошными. Бросьте туда магнит и, следя за положением магнита, послушайте звуки, сопровождающие его перемещение.

#### 4.4.2. Порядок выполнения работы

*Прежде чем начитать измерения прочитайте, хотя бы бегло, все пункты задания до конца, и только после этого приступайте к выполнению работы*

1. Измерьте внутренний и внешний диаметры трубок и запишите их в таблицу, указав материал трубки. Если материал не указан и вам не известен, опишите его внешний вид.
2. Опустите магнит в трубку и оцените приблизительное время падения магнита для каждой трубки.
3. Запустите на компьютере программу для работы с АЦП National Instruments. В появившемся окне установите частоту измерений и число измеряемых точек таким, чтобы время измерения всего сигнала превышало время падения магнита. Например, если на все время измерения приходится 1000 точек, а частота измерений составляет 500 Гц, то полное время измерения составит  $1000/500=2$ с. Установите необходимый уровень запуска и опережение запуска АЦП. Выполняйте не менее пяти измерений для каждой трубки для определения статистической точности результата.
4. Результаты каждого измерения сохраните в отдельном файле. Для каждой трубки проведите по 5–7 измерений. Дальнейшую обработку результатов измерений произведите в программе Ex-

cel (MathCAD, Mat Lab...). При определении моментов времени, когда сигнал проходит через нуль, вам может потребоваться процедура сглаживания. Прочитайте раздел 2.3.5 в [20].

5. Используя осциллограммы с установившейся скоростью падения магнита (сплошная медная трубка), вычислите коэффициент трения  $\beta_{\text{Cu}}$  с помощью выражения (56). Подставляя в уравнение (53) вычисленное значение коэффициента трения  $\beta_{\text{Cu}}$  и табличное значение проводимости для меди, вычислите дипольный момент постоянного магнита.
6. Используя осциллограммы, полученные при падении магнита в титановой трубке, определите коэффициент трения путем подгонки величины  $\beta_{\text{Ti}}$  в уравнении (55) до наилучшего совпадения с экспериментальной кривой. Подгонку можно выполнить либо “вручную”, либо используя функции подгонки, имеющиеся в системах Mathcad, Matlab или Origin.
7. Используя взвешенное среднее значение магнитного момента  $\langle m \rangle$ , определите из осциллограмм, полученных для трубок из сплавов, проводимость материала трубок. При вычислениях используйте выражение (56) или, если скорость движения не установилась, выражение (55). Сравните полученные значения с табличными данными, если сплав вам известен.
8. *В качестве дополнительного упражнения (по особому заданию преподавателя или в качестве курсовой работы), можно обработать осциллограммы и вычислить магнитный момент диполя, используя выражение (58). Подбирая значения величин  $v_1$  и  $\beta$  в выражениях (55) и (58), описывающих функцию  $U(t)$ , добейтесь наилучшего соответствия ее периода с периодом экспериментальной зависимости  $U(t)$ . Затем, варьируя значение  $t$ , добейтесь наилучшего соответствия функций по амплитуде. Сравните полученное значение  $t$  со значением, полученным в предыдущем задании.*
9. Вычислите проводимость для остальных трубок и сравните её с табличными значениями.
10. Пример таблицы с результатами измерений

Таблица 1. Размеры и удельное сопротивление трубок (пример заполнения таблицы)

материал	Al	Ti	Cu	латунь	стекло
$2a$ , мм	12,4	11,9	11,6	11,7	11,8
$2b$ , мм	16	14,3	15	13,9	15,0
$\rho$ , $10^{-6}$ Ом·см (табличное)	2,68	55	1,67	4,3–21,2	–
$\rho$ , $10^{-6}$ Ом·см (эксперимент)	xxxx	xxxx	xxxx	xxxx	0

Более детально с теорией движения магнита в проводящих трубках и с деталями обработки данных можно ознакомиться в [20].

#### 4.5. Приложение. Вычисление функции $Q$

Решение уравнения (58) будем искать в виде

$$\phi(\alpha, z) = \int_0^{\infty} dk \sin(kz - kvt) [\mu_k \exp(ka\alpha) + \nu_k \exp(-ka\alpha)], \quad (64)$$

где коэффициенты  $\mu_k$  и  $\nu_k$  определяются из граничных условий для азимутальной компоненты плотности тока  $j_\alpha = 0$  на обоих краях разреза. Обозначив угловую ширину разреза через  $\Delta\alpha$  и приняв, что краям разреза соответствуют азимуты  $\alpha = \pm(\pi - \Delta\alpha / 2)$ , находим

$$\mu_k = -\nu_k = -\frac{mv}{\pi c} \frac{kK_1(ka)}{\operatorname{ch}[(\pi - \Delta\alpha / 2)ka]}, \quad (65)$$

где  $K_1$  – функция Бесселя первого порядка второго рода [3, с. 777].

Мощность, диссипируемая в стенке за счет токов Фуко, равна

$$P = h \int_{-\pi+\Delta\alpha/2}^{\pi-\Delta\alpha/2} d\alpha a \int_{-\infty}^{\infty} dz [j_\alpha^2 + j_z^2] / \sigma \quad (66)$$

где компоненты плотности тока  $j_\alpha$  и  $j_z$  вычисляются с помощью уравнений (57), (61) и (62):

$$\begin{aligned}
j_{\alpha} &= \frac{2m\sigma v}{\pi c} \int_0^{\infty} dk k^2 K_1(ka) \sin[k(z-vt)] \times \\
&\quad \times \frac{\operatorname{ch}[ka\alpha] - \operatorname{ch}[(\pi - \alpha/2)ka]}{\operatorname{ch}[(\pi - \alpha/2)ka]}, \\
j_z &= \frac{2m\sigma v}{\pi c} \int_0^{\infty} dk k^2 K_1(ka) \cos[k(z-vt)] \times \\
&\quad \times \frac{\operatorname{sh}[ka\alpha]}{\operatorname{ch}[(\pi - \alpha/2)ka]}.
\end{aligned} \tag{67}$$

Выполнив интегрирование по  $\alpha$  и  $z$  в уравнении (61) и разделив результат на  $-v$ , находим силу торможения

$$F = -\frac{45\pi^2}{64} \frac{\sigma v h}{c^2} \frac{m^2}{a^4} Q(\pi - \alpha/2),$$

где функция

$$Q(\beta) = \frac{512}{45\pi^3} \int_0^{\infty} d\xi \xi^3 K_1^2(\xi) [\beta\xi - \operatorname{th}(\beta\xi)] \tag{68}$$

дает отношение тормозящей силы в трубе с разрезом и без разреза.

## **5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.4.**

### **Метод регистрации магнитных аномалий и вейвлет-анализ сигналов**

Цель работы – Знакомство со свойствами магнитного поля Земли. Исследование сигналов катушек индукционного датчика, движущегося в магнитном поле, искажаемом локальной магнитной аномалией, на установке с двумя катушками Гельмгольца, моделирующими магнитное поле Земли на произвольной магнитной широте. Знакомство с основами вейвлет-анализа на примере обработки сигналов магнитного датчика.

Оборудование – Две пары катушек Гельмгольца с источниками питания; ферритовый цилиндр, имитирующий магнитную аномалию; измерительные катушки; цифровой регистратор сигналов (осциллограф Tektronix или регистратор типа Handyscope); персональный компьютер с программой Matlab-6; при необходимости – генератор белого шума.

#### **5.1. Введение**

Одним из способов обнаружения и исследования магнитных аномалий является измерение искажения магнитного поля Земли с борта перемещающегося средства. Это может быть задача обнаружения и идентификации геофизической магнитной аномалии с борта летящего самолета или задача обнаружения подводных или надводных кораблей с борта другого перемещающегося судна или самолета [5-6]. Кроме того, подобные задачи возникают при мониторинге окружающей среды – обнаружении невидимых на поверхности отходов, обладающих ферромагнитными свойствами.

Форма регистрируемых сигналов существенным образом зависит от типа датчика: измеряет ли он собственно магнитное поле или его производную. Во втором случае форма сигнала зависит от взаимного направления скорости движения датчика и направления вектора магнитного поля, которое в свою очередь зависит от магнитной широты, на которой производятся измерения.

В данной работе мы познакомимся с методом магнитного зондирования индукционным датчиком. Принципы работы магнитных

датчиков других типов описаны в Лабораторной работе 1.3 (Выпуск 1).

## 5.2. Магнитное поле Земли

Магнитное поле Земли лучше всего описывается полем геоцентрического диполя с наклоном оси по отношению к оси вращения Земли в  $11^\circ$ . Как указано в статье [21] центр диполя смещён в Восточное полушарие от центра Земли на 430 км. По другим данным [22], магнитный дипольный момент Земли составляет  **$7,98 \times 10^{25}$  (????)** ед. СГСМ, а его центр находится на расстоянии 462 км от центра Земли в точке с угловыми координатами  $18,3^\circ$  северной широты,  $147,8^\circ$  восточной долготы.

Силовые линии магнитного поля “входят” в планету вблизи Северного географического полюса и “выходят” вблизи Южного. Там, где силовые линии “входят” в земной шар, располагается Южный магнитный полюс. Следовательно, истинный Южный магнитный полюс находится вблизи Северного географического полюса, но так уж исторически сложилось, что Южный магнитный полюс для удобства договорились считать Северным.

Магнитное поле Земли является векторным и характеризуется положением вектора в пространстве и его напряженностью. Суммарный вектор  $\mathbf{T} \equiv \mathbf{B}$ , разлагается на горизонтальную  $\mathbf{H}$  и вертикальную  $\mathbf{Z}$  составляющие. Угол  $I$  между горизонтальной составляющей  $\mathbf{H}$  и полным вектором  $\mathbf{T}$  называется магнитным наклоном, а угол  $D$  – между направлениями на магнитный и географический полюсы – магнитным склонением. Существуют карты линий равных величин магнитных склонений (изогон), линий равных магнитных наклонов (изоклин) и линий равных значений полной напряженности магнитного поля (изодинам). На Северном магнитном полюсе наклонение равно  $+90^\circ$ , на Южном соответственно  $-90^\circ$ . В пределах магнитного экватора, не совпадающего с географическим, наклонение равно нулю.

Магнитные полюсы Земли, по одним данным, имеют координаты  $77^\circ$  с. ш.,  $102^\circ$  з. д. и  $65,5^\circ$  южной широты,  $139,5^\circ$  восточной долготы по состоянию на 1980-1985 годы. По другим данным [9], северный магнитный полюс (наклонение  $90$  град.) находится в точке с координатами:  $76^\circ$  северной широты,  $101^\circ$  западной долготы.

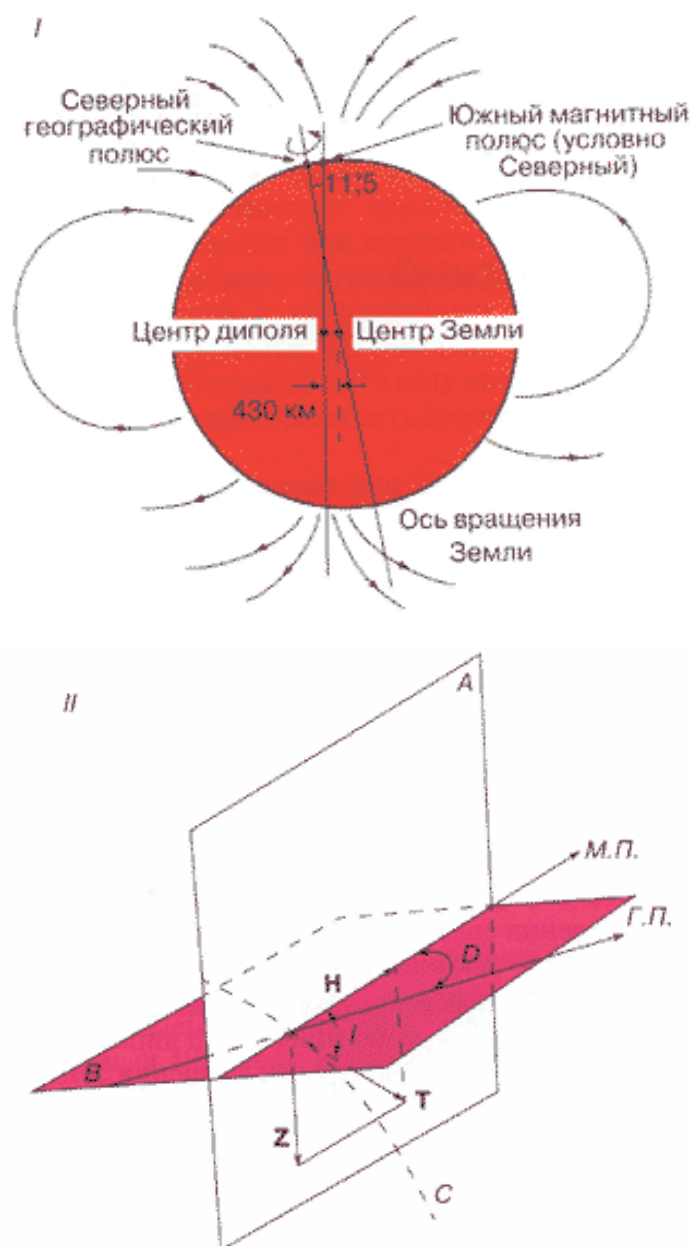


Рис. 7. Элементы магнитного поля Земли: I – соотношение магнитного диполя, силовых линий и оси вращения Земли; II – основные компоненты магнитного поля:  $B$  – поверхность Земли на ограниченном участке;  $A$  – вертикальная плоскость;  $C$  – магнитная силовая линия; составляющие полного вектора  $T$  магнитного поля:  $H$  – горизонтальная,  $Z$  – вертикальная;  $I$  – магнитное наклонение;  $D$  – магнитное склонение; МП – направление на магнитный полюс; ГП – направление на географический полюс [21]

Величина поля на геомагнитных полюсах достигает 0,63 Гс, а на геомагнитном экваторе 0,31 Гс. По другим данным, магнитное поле Земли до расстояний порядка трёх радиусов Земли  $R$  соответствует приблизительно полю однородно намагниченного шара величиной 0,70 Гс у магнитных полюсов Земли и 0,42 Гс на магнитном экваторе.

Рассмотрим простейшую модель, изображённую на рис. 7, где магнитный диполь расположен в центре Земли, направлен вдоль оси вращения  $z$  и имеет величину  $m_0$ . Тогда поле на поверхности Земли описывается формулой

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = -\frac{\mathbf{m}}{R^3} + \frac{3(\mathbf{m}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5}. \quad (69)$$

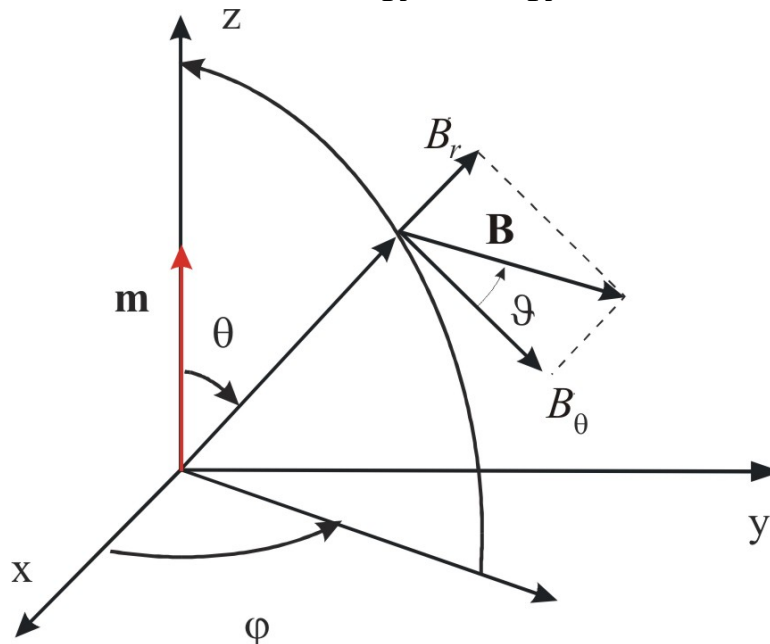


Рис. 8. Простейшая модель магнитного поля Земли

Из этой формулы и рис. 8 следует, что

$$B_\theta = \frac{m_0}{R^3} \sin \theta, \quad B_r = \frac{2m_0}{R^3} \cos \theta. \quad (70)$$

Если принять, что на северном полюсе  $B = B_r = -0,63$  Гс (минус означает, что магнитное наклонение здесь положительно, т.е. поле направлено к центру Земли), а на экваторе  $B = B_\theta = -0,31$  Гс, то получим, что

$$C = m_0 / R^3 = -0,31 \text{ Гс}. \quad (71)$$



Горизонтальная составляющая поля на Земле на её поверхности равно  $B_\theta = -0,31 \cos \theta$  Гс, а вертикальная составляющая –  $H_r = -0,63 \sin \theta$  Гс. Магнитное наклонение вычисляет по формуле

$$\vartheta = \operatorname{arctg}(2 \operatorname{ctg} \theta). \quad (72)$$

Таким образом, если мы хотим промоделировать сигналы магнитных датчиков, регистрирующих искажение магнитного поля Земли исследуемым объектом, то мы должны создавать в экспериментальной установке поле с произвольным направлением.

### 5.3. Оценка величины искажения однородного поля магнитной аномалией

Если магнитный объект (далее называемый “аномалией”) с характерным размером  $a$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  покоится в поле Земли, то он “втягивает” в себя магнитное поле. Его магнитный момент  $\mathbf{m}$  пропорционален магнитному полю Земли  $\mathbf{B}_0$ . Если форма аномалии близка к шарообразной, то магнитный момент коллинеарен магнитному полю Земли, и его величина равна

$$m = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 B_0 \quad (73)$$

Отсюда следует, что точное значение магнитной проницаемости не существенно, поскольку для ферромагнитных материалов  $\mu \gg 1$ , а в пределе  $\mu \rightarrow \infty$  величина индуцированного магнитного момента практически не зависит от значения  $\mu$ . Оценку  $g \sim a^3$  можно использовать для объектов почти любой формы. Для пустотелого объекта оценка

$$g \sim a^3 \quad (74)$$

остаётся в силе, если толщина  $h$  магнитных стенок не слишком мала, а именно если

$$h \gg a / \mu. \quad (75)$$

Для большого объекта отношение  $h/a$  скорее всего значительно меньше 0,01, тогда как магнитная проницаемость материала вряд ли меньше 100. Соответственно, можно считать, что условие (73) выполнено, причём с некоторым запасом. Следовательно, такой объект при магнитном детектировании можно считать сплошным.

На расстоянии  $r \gg a$  от объекта возмущение магнитного поля Земли приближенно является дипольным и по порядку величины равно

$$\delta B_p \sim \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{a^3}{r^3} B_0, \quad (76)$$

т.е. значительно меньше магнитного поля Земли. На малых расстояниях от аномалии,  $r \approx a$ , возмущение магнитного поля по порядку величины близко к величине самого поля.

#### 5.4. Экспериментальная установка

Принципиальная схема экспериментальной установки показана на рис. 9. Магнитное поле создается двумя парами катушек Гельмгольца (рис. 10). Известно, что система из двух катушек, расположенных на расстоянии, равном их радиусу  $R$ , создает однородное магнитное поле в значительном объеме пространства между ними. График, демонстрирующий распределение величины поля в пространстве между катушками, приведен на рис. 11. Величина поля в центре пары катушек легко вычисляется из закона Био-Савара. Она равна (системе СИ)

$$B_c = \frac{32\pi IN}{5\sqrt{5}h} \cdot 10^{-7}. \quad (77)$$

Здесь  $N$  – число витков в одной катушке,  $2h = R$  – расстояние между катушками в см,  $I$  – ток в амперах.

Ось малых (неподвижных) катушек Гельмгольца расположена вдоль поверхности Земли. Средний диаметр катушек – 270 мм, расстояние между ними – 150 мм. Вторая пара катушек расположена перпендикулярно к первой паре и имеет средний диаметр 560 мм при расстоянии между катушками – 300 мм. Она способна поворачиваться вокруг оси, совпадающей с осью малых катушек, на  $\pm 180^\circ$ . Описанная комбинация катушек позволяет (если учесть возможность смены направления тока в любой из пар на противоположную) создавать магнитное поле, вектор которого направлен в любую сторону в полярной системе координат.

Система питания катушек, каждая из которых имеет около 1000 витков, позволяет получать поле в каждой паре катушек более

100 Гс. В работе рекомендуется работать при поле 10 – 20 Гс, при котором не происходит перегрева катушек. Геометрия катушек Гельмгольца, расстояние между которыми в каждой паре по экспериментальным соображениям было выбрано несколько большим, чем стандартное, что позволяет получать в объеме более  $1000 \text{ см}^3$  магнитное поле, однородное с точностью не менее 10%.

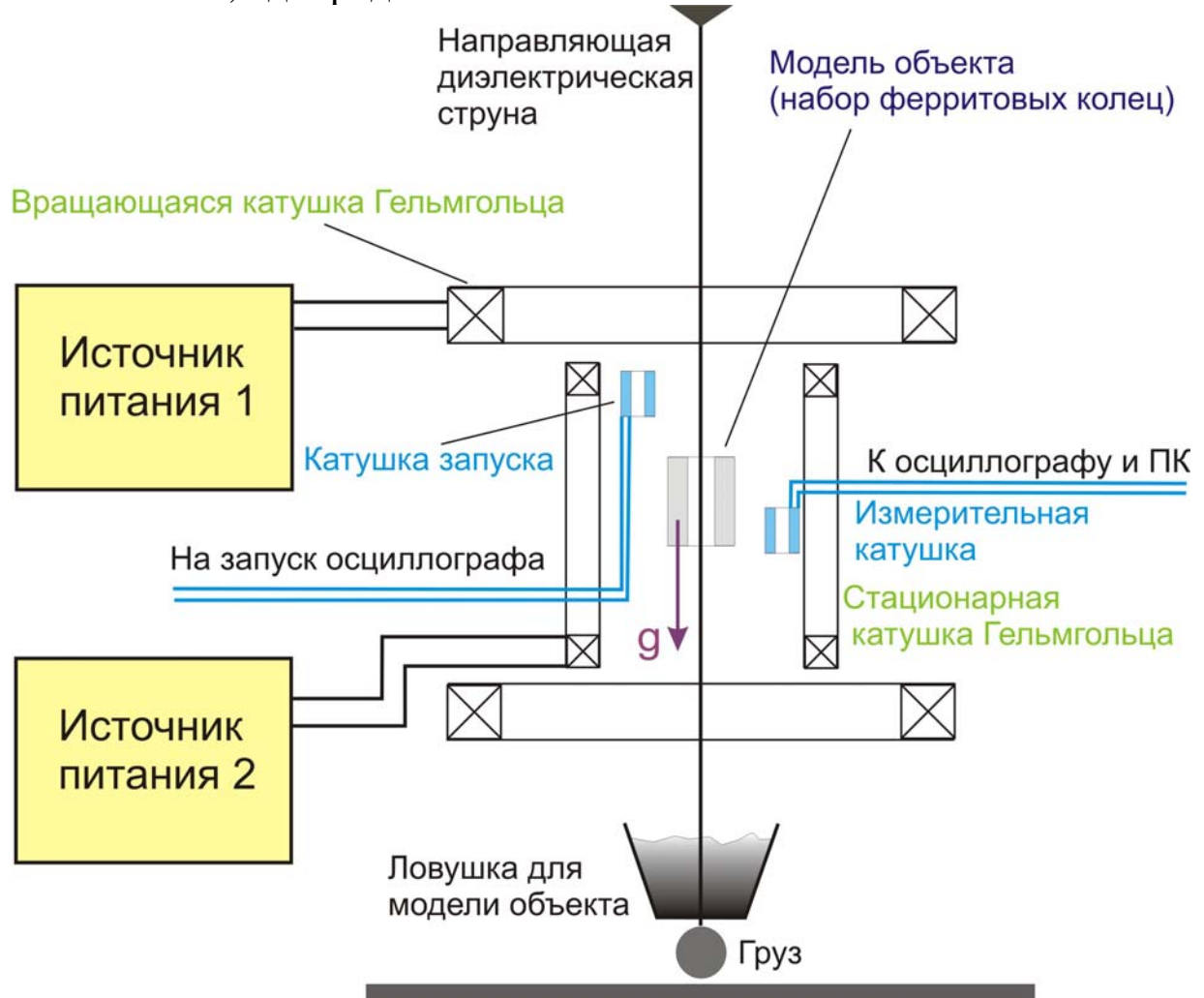


Рис. 9. Схема экспериментальной установки

Относительное движение магнитного датчика и объекта осуществляется путем сбрасывания объекта, моделирующего “магнитную аномалию”, с высоты 1,5 – 2 метра. В качестве объекта, мы использовали набор ферритовых колец. Для уверенности в том, что объект движется по заданной траектории, в центре диэлектрических крышек на торцах ферритового цилиндра просверлены отверстия. Объект надет на натянутую тяжелым грузом диэлектрическую струну и падает вдоль этой направляющей. При пролете через область маг-

нитного поля скорость движения объекта составляет примерно 5 м/с.

Изменение направления магнитного поля позволяет моделировать почти все магнитные широты Земли, за исключением углов, когда обмотки больших катушек Гельмгольца перекрывают траекторию падения модели объекта. Для измерения величины и направления магнитного поля в рабочей зоне можно использовать датчик Холла, прокалиброванный в абсолютных значениях.



Рис. 1 Магнитная система установки с двумя парами катушек Гельмгольца; внешняя пара может вращаться на  $360^\circ$  вокруг горизонтальной оси, видной на рисунке

Две измерительные катушки, оси которых расположены взаимно перпендикулярно, могут перемещаться вблизи оси малой пары катушек Гельмгольца в направлении, перпендикулярном к направлению падения объекта. Катушки имеют около 1000 витков при длине 10 мм, и внешнем и внутреннем диаметрах порядка 15 и 11 мм, соответственно. Третья катушка, расположенная достаточно близко к

к падающему объекту, служит для обеспечения надежного запуска осциллографа Tektronix.

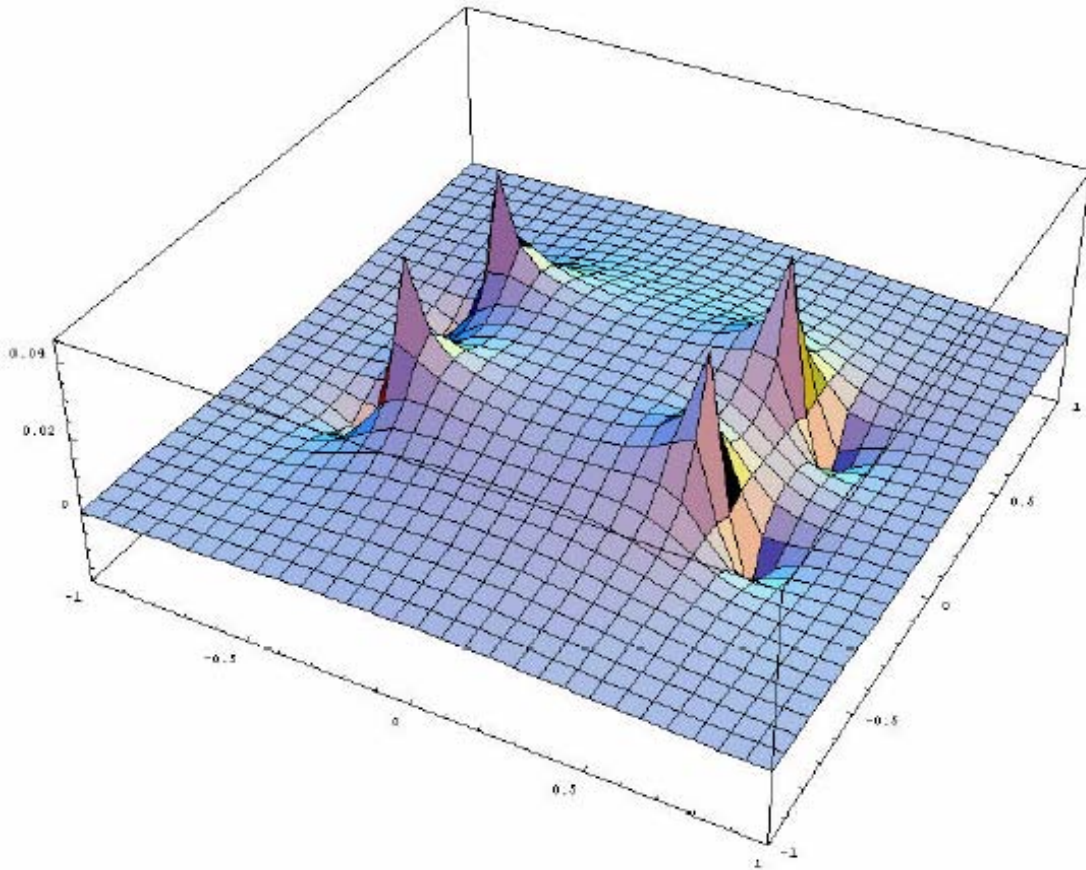


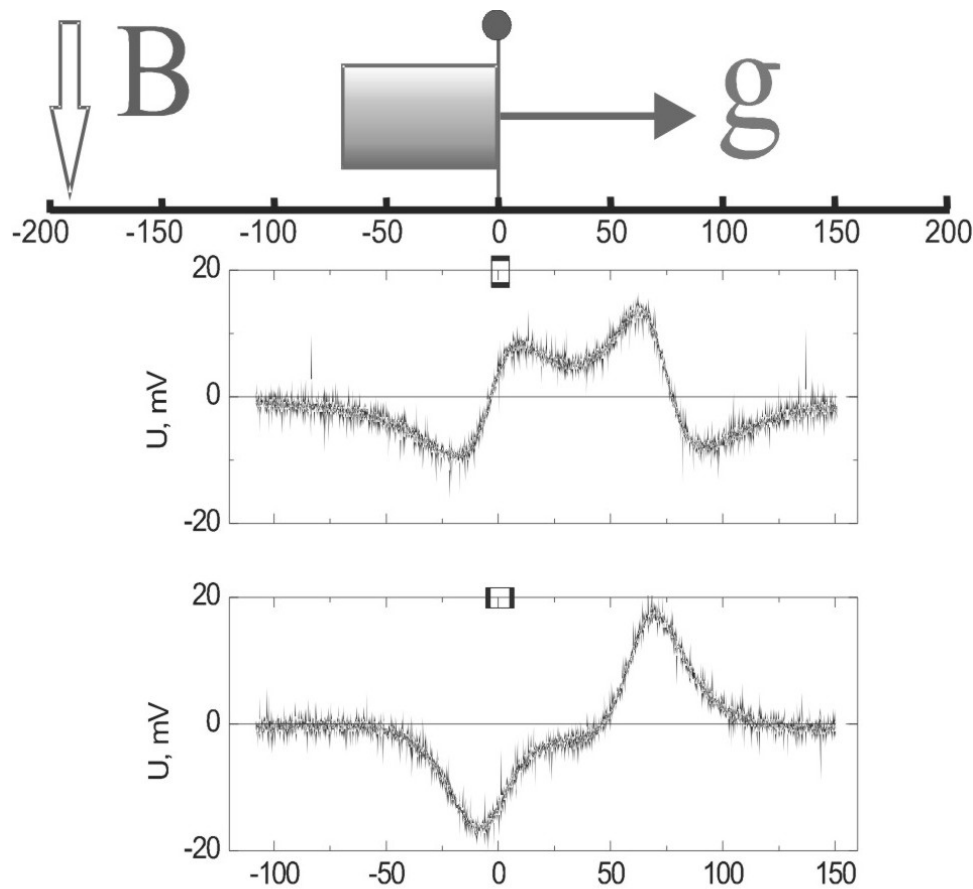
Рис. 11. Магнитное поле катушек Гельмгольца [23]

Почему в качестве объекта используется ферритовый цилиндр, а не просто железо? Ответ простой: железо – проводник, и при его падении через область магнитного поля токи Фуко не дадут проникнуть магнитному полю внутрь, а следовательно вместо втягивания силовых линий внутрь, они будут выталкиваться. В наших экспериментах для того, чтобы искажение магнитного поля пролетающим объектом имело тот же вид, что и неподвижным, необходимо вместо обычного проводящего ферромагнетика использовать модель, представляющую собой магнитодиэлектрик. В противном случае оценки показывают, что даже при малых скоростях в модельных экспериментах время проникновения магнитного поля в ферромагнетик больше или сравнимо с временем пролета модели объекта.

Действительно, толщина скин-слоя в железе ( $\mu = 1000$ ) при частотах 50 – 200 Гц не превышает 1 мм, то есть движущаяся модель из



железа будет вытеснять магнитное поле, а не “втягивать” его, как это должно быть в статике.



Положение переднего края объекта  
относительно измерительной катушки, мм

Рис. 12. Типичные осциллограммы сигналов с измерительной катушки при перемещении мимо нее ферритового цилиндра: верхний сигнал соответствует положению оси катушки поперек магнитного поля, нижний – вдоль. Направление магнитного поля и направление движения цилиндра показаны на рисунке

По этой причине в качестве модели объекта в описываемых ниже экспериментах использовались цилиндры, набранные из ферритовых колец. Согласно (75) полый ферромагнетик не отличается от сплошного, если  $(a / \mu h) \ll 1$ . Для модели при  $\mu = 100$ ,  $a = 4$  см и  $h = 8$  см получим  $(a / \mu h) = 1 / 200$ . Хотя наш модельный объект не имеет полностью замкнутой оболочки, тем не менее, можно ожидать, что искажение магнитного поля ферритовым цилиндром будет

неплохо моделировать реальные объекты, имеющие, как правило, замкнутые оболочки или являющиеся сплошными.

Дополнительным преимуществом того, что измерительная катушка расположена в постоянном поле, является то, что она реагирует только на изменение этого магнитного поля объектом вблизи нее самой. Неоднородность поля в рабочей области никак не влияет на результат. Если бы катушка двигалась, то при пересечении ею неоднородного магнитного поля появлялся бы дополнительный паразитный сигнал, искажающий результаты измерения. Характерная форма сигналов двух взаимно перпендикулярных магнитных катушек приведена на рис. 12.

### 5.5. Принципы подобия

Оценим теперь, насколько сигналы индукционного датчика будут отличаться от сигналов, которые наблюдались бы с помощью таких же катушек в реальных измерениях. Имеются два параметра сигнала, которые нас интересуют – длительность импульса и его амплитуда. Очевидно, что типичной ситуацией, когда при измерениях появляется сигнал еще измеримой величины, является пролет датчика на расстоянии порядка характерного размера магнитной аномалии.

Если характерный размер аномалии равен  $a$ , а скорость относительного движения  $v$ , то характерное время пролета датчика мимо объекта равно  $t = a / v$ . Это и есть длительность импульса. Обозначим индексом “exp” величины в лабораторном эксперименте.

Радиус ферритового кольца равен примерно  $a_{\text{exp}} = 5$  см, а  $v_{\text{exp}} \approx 5$  м/с. Длительность импульса при этом равна  $t_{\text{exp}} = 10$  мс. Приняв размер объекта, равным 170 м, а скорость движения, например, самолета-носителя, 300 км/ч, получим  $t = 2$  с. Э.д.с., возникающая на катушках магнитного датчика вследствие искажения магнитного поля Земли объектом, пропорциональна сечению катушек, числу витков в катушке, скорости изменения магнитного поля, которая пропорциональна произведению обратного времени пролета на величину этого поля, и кубу отношения размера объекта к

«прицельному расстоянию»  $\rho$ , определяемому как характерное расстояние от центра объекта до траектории пролета.

Приняв для простоты, что одна и та же измерительная катушка в обоих случаях пролетает вблизи аномалии,  $r \approx a$ , видим, что амплитуда индукционного сигнала будет прямо пропорциональна величине магнитного поля и обратно пропорциональна времени пролета. Отсюда при поле в установке 10 Гс получаем оценку

$$\frac{\varepsilon_{\text{exp}}}{\varepsilon} = \frac{B_{\text{exp}}}{B} \cdot \frac{a/v}{a_{\text{exp}}/v_{\text{exp}}} \sim 4000$$

Видно, что сигнал в случае использования индукционной катушки в реальных условиях весьма мал, поэтому при таких измерениях используют датчики других типов, которые измеряют не производную поля, а величину самого поля (см. лаб. работу 3.1 в Выпуске 1).

## 5.6. Преобразование координат

Чтобы смоделировать форму сигналов, которые будут наблюдаться при движении измерительного устройства в поле Земли, необходимо на установке создать магнитное поле, вектор которого направлен требуемым образом по отношению к направлению падения модели аномалии. Для этого нужно выбрать магнитный меридиан и вычислить величины компонент магнитного поля, используя выражение (70).

Теперь сопоставим (рис. 13) координаты на местности с координатами лаборатории. Координата  $r$  соответствует вертикальной оси  $z$  лаборатории. Введем угол  $\alpha$ , угол между направлением магнитного меридиана и направлением относительного движения катушки и аномалии, и угол  $\beta$ , Угол, между вертикальной осью и радиусом-вектором, направленным на измерительную катушку (самолет-носитель летит на некоторой высоте над поверхностью  $A$ ).

А теперь мы можем определить, как следует выбрать компоненты вектора  $\mathbf{B}$  в экспериментальной установке, чтобы полностью смоделировать ситуацию, изображенную на рис. 13. Введем систему координат, связанную с экспериментальной установкой. Направим ось  $x$  вдоль направления движения объекта,  $z$  - вдоль оси неподвижных катушек Гельмгольца,  $y$  – перпендикулярно  $x$  и  $z$ . Тогда



компоненты поля в этих координатах выразятся следующим образом

$$B_x = C \cos(\alpha) \sin(\theta)$$

$$B_y = C (2 \sin(\beta) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\theta))$$

$$B_z = C (2 \cos(\beta) \cos(\theta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\theta))$$

Поле  $B_y$  создается неподвижными катушками. Вращающиеся катушки создают поле  $B_1 = \sqrt{B_x^2 + B_z^2}$ , направленное под углом  $\phi = \arctg(B_x / B_z)$  к вертикали. В натурных измерениях величина  $C$  равна значению, указанному в (71). На установке величина поля значительно выше, и для обеспечения подобия необходимо только выдержать правильное отношение между компонентами.

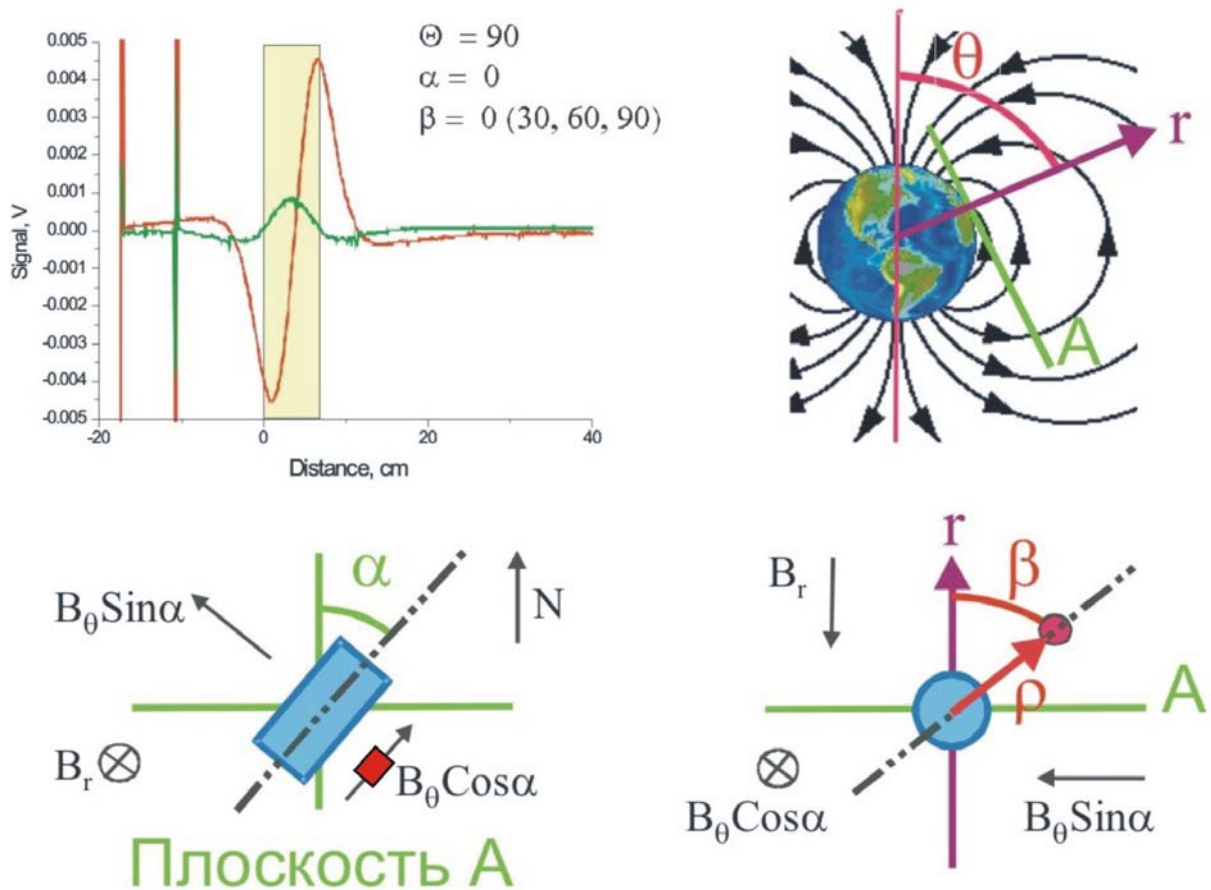


Рис. 13. Схема измерения магнитной аномалии (большой цилиндр) индукционной катушкой (малый цилиндр). Форма импульсов показана для указанных углов и широты

### 5.7. Контрольные вопросы и задания (допуск к работе)

- 1 Оцените величину искажения магнитного поля железным шаром диаметром 5 см; постройте график этой величины как функции расстояния от центра шара.
- 2 Почему в установке используется модель магнитной аномалии в виде ферритового цилиндра?
- 3 Выберите для выполнения экспериментов произвольные значения магнитного склонения  $\theta$ , а также углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Если при выбранных вами значениях величина угла  $\phi$  будет лежать в интервале от 53 до 68 градусов, измените какие-либо параметры. При данных значениях вращающиеся катушки Гельмгольца перекрывают траекторию падения ферритового цилиндра (“магнитной аномалии”).

### 5.8. Порядок выполнения эксперимента

1. Используя значения углов, полученные в пункте 3 раздела “Контрольные вопросы и задания”, поверните нужным образом большую пару катушек Гельмгольца.
2. Подключите к двухканальному осциллографу Tektronix запусковую и измерительные катушки. Добейтесь устойчивого запуска осциллографа при сбрасывании ферритового цилиндра.
3. Проведите измерения сигналов с индукционных катушек, постепенно увеличивая расстояние от пролетающего цилиндра. Продолжайте записывать результаты измерений в файлы даже при уменьшении сигналов ниже уровня шума. Если естественный уровень шума окажется слишком малым, подключите параллельно к входам осциллографов сигнал генератора белого шума. Эти измерения потребуются при обработке результатов с помощью вейвлет-анализа.
4. Перед обработкой данных прочитайте “Введение в вейвлет-анализ”, которое вам выдадут в лаборатории. Основы вейвлет-анализа вы можете найти в работах [7 – 10].

### 5.9. Обработка данных

1. Изучите формы сигналов с индукционных катушек и качественно объясните их.
2. Постройте графики максимальных амплитуд сигналов обеих катушек в зависимости от расстояния, проверьте, спадает ли сигнал в соответствии с теорией.

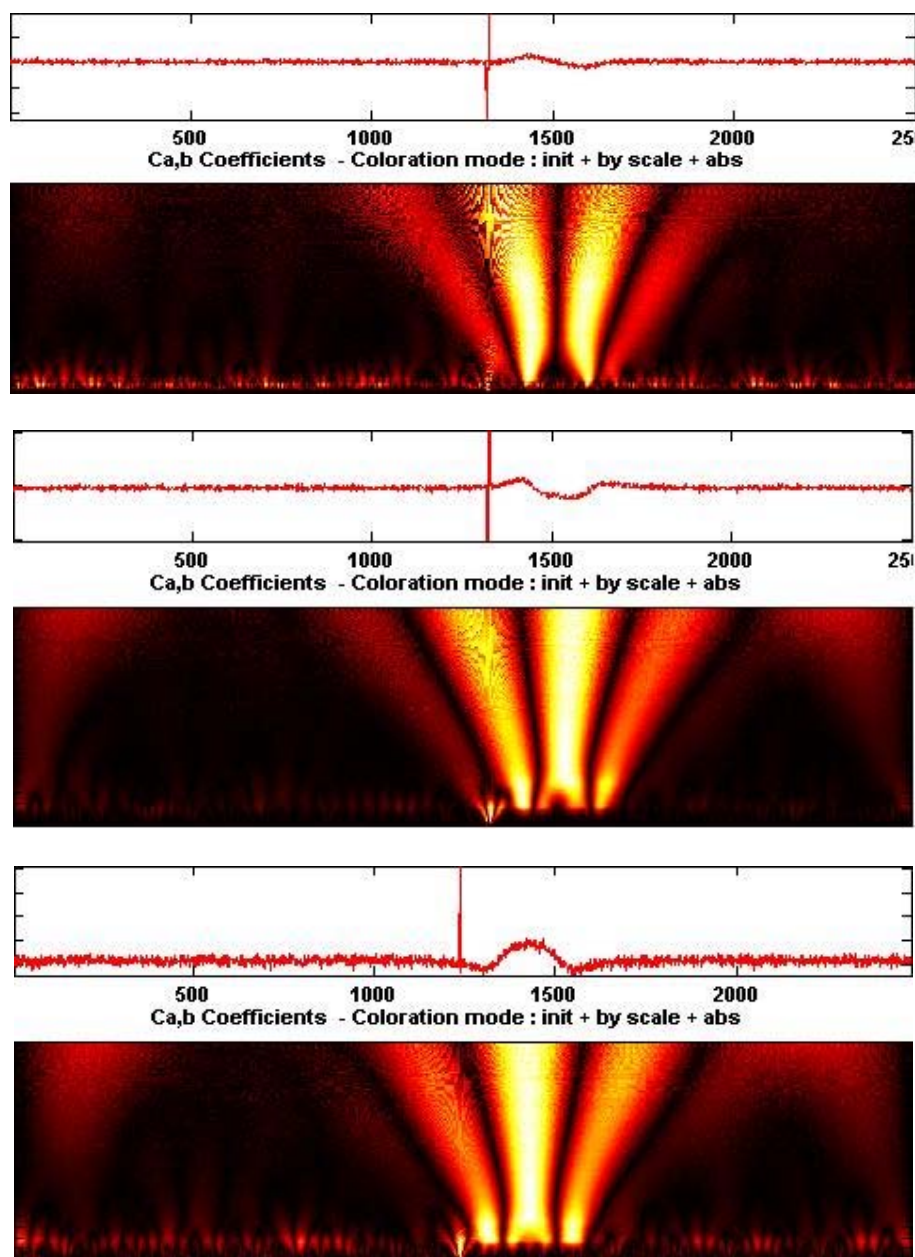


Рис. 14. Результаты вейвлет-анализа сигналов разных видов



3. Используя пакет приложения Matlab, установленного на компьютере в лаборатории, выполните вейвлет-анализ записанных сигналов. При анализе используйте вейвлеты “мексиканская шляпа” (МН) и “антисимметричный вейвлет g1” (G1). Вы получите спектры, похожие на те, что приведены на рис. 14.

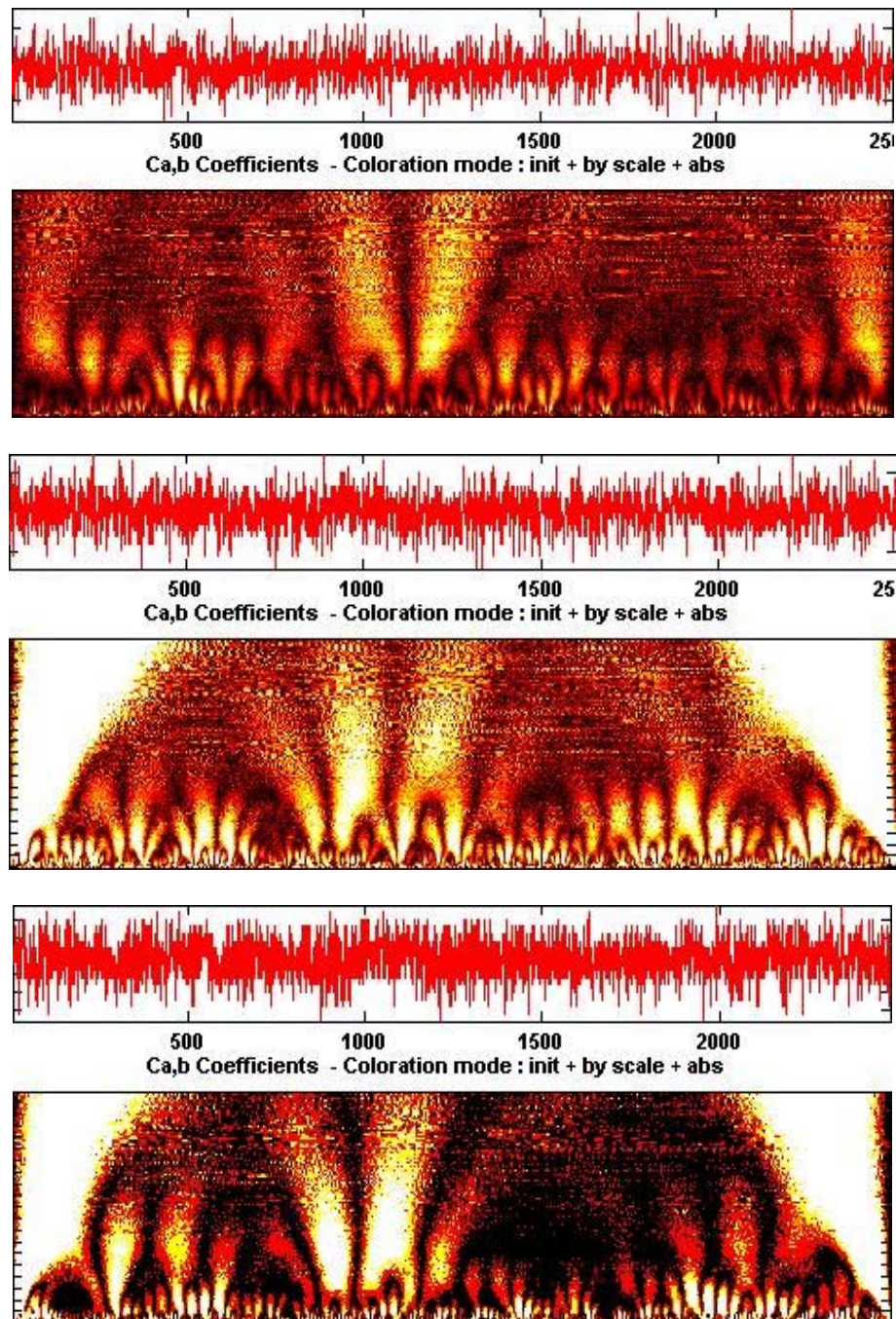


Рис. 15. Вейвлет анализ зашумленных сигналов

4. Обратите внимание, что наличие сигнала можно обнаружить даже в том случае, если он полностью скрыт в шуме Рис 15. Бо-

лее того, по вейвлет-спектру можно восстановить форму импульса сигнала.

5. Можно заранее предположить, что результат преобразования по вейвлету, совпадающему по форме с сигналом, должно отличаться от результата преобразования по «несовпадающему» вейвлету (будем далее называть их «спектрами»). Следовательно, выполняя вейвлет-анализ зашумленных сигналов с двух взаимно перпендикулярных катушек по двум базовым вейвлетам, мы можем смело отбрасывать одиночные импульсы, не имеющие пары, а также пары импульсов, не имеющие правильным образом коррелирующих вейвлет-спектров.
6. Вейвлет-спектр имеет еще одно полезное свойство. Он имеет максимальную амплитуду при той характерной ширине, которая совпадает с шириной сигнала.
7. Объясните, почему вейвлет-анализ в данной задаче не может быть заменен фурье-анализом.

### Библиографический список

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. М.: Физматлит, 2002. Т. 3: Электричество.
2. *Мешков И. Н., Чириков Б. В.* Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1987. Ч. 1.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1974.
4. *Е.Н. Розе, И.М. Марков.* Теория и методы анализа градиентометрических измерений. // Изучение глубинного строения земной коры и верхней мантии на акваториях морей и океанов электромагнитными методами. М., 1981. С. 85—91.
5. *Семевский Р.Б., Аверкиев В.В., Яроцкий В.А.* Специальная магнитометрия. – СПб.: Наука, 2002. – 228 с.
6. *Hirota M., Furuse T., Ebana K. et al.* Magnetic Detection of a Surface Ship by an Airborne LTS SQUID MAD // IEEE Transactions on applied superconductivity, 2001, v. 11, № 1, p. 884-887.
7. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 С.
8. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: ТЕХНО-СФЕРА, 2004. – 280 С.

9. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 С.
10. Маслюк Л.Л. Дайджест вэйвлет-анализа, в двух формулах и 22 рисунках. URL: <http://ru.laser.ru/recycle/wavelets/3.htm>
11. Князев Б. А., Черкасский В. С. Начала обработки экспериментальных данных. Новосибирск: НГУ, 1996.
12. Таблицы физических величин. Справочник. Под. ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.
13. Вонсовский С. В. Магнетизм. М.: Наука: Физматлит, 1984.
14. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. М.: Высш. Шк., 1990 – 352 С.
15. Яковлев В. И. Классическая электродинамика. Часть 1. Новосибирск: НГУ, 2003.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2001.
17. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н., Сборник задач по электродинамике. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
18. Крафтмахер Я.А. Измерение электропроводности по фазовому углу эффективной магнитной восприимчивости. Новосибирск: АН СССР, Сибирское отделение, Институт неорганической химии. Препринт № 89 – 24, 1989
19. Лабораторный практикум “ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ”, Учебно-методическое пособие, ВЫПУСК 1, Новосибирск: НГУ, 2008.
20. Князев. Б. А., Котельников И. А., Тютин А. А., Черкасский В. С. Торможение магнитного диполя, движущегося с произвольной скоростью в проводящей трубе // Успехи физических наук, 2006, Т. 176, № 9, р. 965-974.
21. Н.В. Короновский. Магнитное поле геологического прошлого Земли. // Соросовский образовательный журнал. №6 (1996), с. 65—73.
22. К. У. Аллен. Астрофизические величины. М.: Мир, 1977.
23. D. O'Neill, Mathematical Modeling of the Magnetic Field of a Helmholtz Coil (Интернет-сайта автора).

Лабораторный практикум  
“ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ”  
Выпуск 6

Учебно-методическое пособие

Редактор *С. В. Исакова*

Подписано в печать 11.09.2006 г.  
Формат 60 х 84 / 16. Офсетная печать.  
Уч. изд. л. 1,3. Усл. печ. л. 1,1. Тираж 150 экз.

Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.  
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.