

Контрольная работа 3. Вариант 1

1. Решите задачу Дирихле методом конформных отображений:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{в области } \pi < y - x < 2\pi, \\ u|_{y-x=\pi} &= 1 + \operatorname{sgn}(x), \\ u|_{y-x=2\pi} &= 0.\end{aligned}$$

2. Найдите значение потенциала простого слоя внутри и вне шара радиуса R . Дана плотность потенциала на сфере: $\mu(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$.

3. Пользуясь подходящим интегральным преобразованием, найдите одно из решений задачи. Функция считается $f(x)$ известной.

$$\begin{aligned}u_t - u_{tx} + 2u_x - u - u_{xx} &= 0 \quad \text{в } \{x \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ u|_{t=0} &= f(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. Пользуясь подходящим интегральным преобразованием, решите задачу:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} \quad \text{в области } 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x|_{x=0} &= \frac{1}{2t\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4t}}, \quad u|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{t}}, \\ u|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

5. Дана система уравнений

$$\begin{cases} u_t + v_x - w_x = 0, \\ v_t + 2v_x = 0, \\ w_t - u_x + v_x = 0. \end{cases}$$

а) В полуплоскости $t \geq 0$ решите задачу Коши:

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 3x^2, \quad w|_{t=0} = 0.$$

б) В предположении, что при $t = 0$ заданы функции

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad w|_{t=0} = w_0(x),$$

укажите и объясните, какие из следующих смешанных задач в полуполосе $\{t \geq 0, 0 < x < 1\}$ поставлены правильно:

$$\begin{aligned}(i) \quad & (u + w)|_{x=0} = a(t), & (u - v)|_{x=0} = b(t), & w|_{x=1} = c(t); \\ (ii) \quad & (u + w)|_{x=0} = a(t), & v|_{x=0} = b(t), & (u + v)|_{x=1} = c(t).\end{aligned}$$

Контрольная работа 3. Вариант 2

1. Решите задачу Дирихле методом конформных отображений:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{в области } \pi < x + y < 2\pi, \\ u|_{x+y=\pi} &= \operatorname{sgn}(x) - 1, \\ u|_{x+y=2\pi} &= 0.\end{aligned}$$

2. Найдите значение потенциала простого слоя внутри и вне шара радиуса R . Дана плотность потенциала на сфере: $\mu(\theta, \varphi) = \sin 2\theta \cos \varphi$.

3. Пользуясь подходящим интегральным преобразованием, найдите одно из решений задачи. Функция считается $f(x)$ известной.

$$\begin{aligned}u_t + u_{tx} + 2u_x + u + u_{xx} &= 0 \quad \text{в } \{x \in \mathbb{R}, t > 0\}, \\ u|_{t=0} &= f(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. Пользуясь подходящим интегральным преобразованием, решите задачу:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} \quad \text{в области } 0 < x < 1, t > 0, \\ u|_{x=0} &= \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad u|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4t}}, \\ u|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

5. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} u_t - v_x + 2w_x = 0, \\ v_t + v_x = 0, \\ w_t + 2u_x - v_x = 0. \end{cases}$$

а) В полуплоскости $t \geq 0$ решите задачу Коши:

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = x^2, \quad w|_{t=0} = 0.$$

б) В предположении, что при $t = 0$ заданы функции

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad w|_{t=0} = w_0(x),$$

укажите и объясните, какие из следующих смешанных задач в полуполосе $\{t \geq 0, 0 < x < 1\}$ поставлены правильно:

$$\begin{aligned}(i) \quad & (u - v)|_{x=0} = a(t), & w|_{x=0} = b(t), & (u + w)|_{x=1} = c(t); \\ (ii) \quad & (u + w)|_{x=0} = a(t), & (u - v)|_{x=0} = b(t), & w|_{x=1} = c(t).\end{aligned}$$