

Кубарев В.В.

ИЗУЧЕНИЕ ЭФФЕКТА ТАЛЬБОТА

Методическое руководство

2018

Аннотация

Работа посвящена изучению эффекта Тальбота (Тальбо) в оптике – периодическому самовоспроизведению поперечного распределения поля волны на определенных расстояниях – расстояниях Тальбота вдоль продольной оси её распространения после прохождения этой волной какой-либо амплитудной решетки, периодической в поперечном направлении. Измеряются зависимости расстояний Тальбота от периодов одномерных и двумерной решеток, поперечный сдвиг интерференционной картины на половину периода для срединных расстояний между расстояниями Тальбота. Исследуется аппаратное пространственное разрешение восстанавливаемых на расстояниях Тальбота изображений решетки.

Введение

Эффект Тальбота является одним из наиболее интересных и распространенных волновых явлений, которое возникает в задачах, использующих по необходимости разложение поля по поперечным гармоникам. Этот эффект наблюдается во многих разделах физики где используется волновое представление физических параметров: в оптике и квантовой механике, акустике, гидродинамике и т.д. Фактически эта общность обусловлена одинаковой математической формой волновых уравнений для различных физических параметров.

Эффект был открыт экспериментально в 1836 году английским физиком Ф. Тальботом (W.H.Fox Talbot), который обнаружил периодические контрастные цветные изображения – самовоспроизведения дифракционной решетки на некоторых расстояниях от этой решетки при ее освещении белым светом [1]. Сам Тальбот описал эффект только в общем виде, без количественных измерений и без объяснения физической природы этого явления. Спустя 50 лет Рэлей, ознакомившись с работой Тальбота, повторил его эксперименты, измерил количественные закономерности и дал этому явлению физическое объяснение [2].

Он же предложил назвать это дифракционное самовоспроизведение поля эффектом Тальбота.

С тех пор эффект Тальбота много раз «переоткрывался», что говорит, с одной стороны, о его широкой распространенности, а с другой – о проблемах в получении научной информации в прошлом. В настоящее время таких проблем нет и можно легко найти множество работ, в которых на практике используется этот эффект. Например, в мощных многоканальных лазерах – так называемых лазерных решетках эффект Тальбота используется для синхронизации отдельных каналов и снижении дифракционных потерь [3]. Это позволяет во много раз увеличить мощность лазерной установки и уменьшить дифракционную расходимость лазерного луча. В работе [4] эффект Тальбота позволил измерить соотношение амплитудной и фазовой составляющей решетки инверсной населённости в твердотельном ИАГ:Nd-лазере при четырёхволновом смещении. Элементарным и практически полезным применением эффекта Тальбота является его использование для профилометрии периодических структур и их смещений [5].

Рассмотренные выше применения относятся к так называемым «открытым» в поперечном направлении структурам, в которых поперечные пространственные гармоники возникают из-за присутствия поперечной периодической решетки. Однако поле раскладывается на поперечные гармоники – моды и в различных волноводах. Поэтому эффект Тальбота характерен для многих устройств, в которых используются волноводы. Например, элементарная задача проводки микроволнового излучения через узкую и глубокую щель, может быть решена фокусировкой излучения в волновод. В том случае, когда длина волновода кратна расстоянию Тальбота, поля на входе и выходе волновода будут идентичными, что важно для многих применений. Ознакомиться с описанием эффекта Тальбота в различных волноводах можно в статье [6] и в приведенной в ней библиографии.

Заметим, что под эффектом Тальбота обычно понимается точное самовоспроизведение поля, характерное для относительно простых

модовых разложений. Однако для более сложных модовых конфигураций может наблюдаться приблизительное самовоспроизведение поля, имеющее по сути ту же физическую природу. Так в оптимальных лазерных резонаторах, использующих как волноводные так и «открытые» участки, обнаруживается оптимальное расстояние между зеркалом и волноводом равное длине Рэлея гауссовых мод разложения – своеобразный аналог расстояния Тальбота, при котором поле самовоспроизводится на торце волновода с эффективностью 98 %, а потери резонатора минимальны [7, 8].

Теория эффекта Тальбота

Простейшее теоретическое объяснение эффекта Тальбота, описываемое в нижеприведенной литературе, состоит в следующем. Рассмотрим сначала плоскую электромагнитную волну $E(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz)$, падающую по направлению оси z на поперечную одномерную (по поперечной координате x) амплитудную решетку с периодом d и с бесконечными поперечными размерами ($D \rightarrow \infty$, Рис.1). Пропускание решетки будет иметь вид периодической функции $T(x) = T(x \pm nd)$. Эту периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье по тригонометрическим функциям с периодами d/m , где $m = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$:

$$T(x) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m \cos(k_m^{(x)} x), \quad k_m^{(x)} = \frac{2\pi}{d} m \quad (1)$$

Световая волна после решетки будет иметь вид:

$$E(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m E_0 \cos(k_m^{(x)} x) \cos(\omega t - kz) \quad (2)$$

или

$$E(x, z, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} T_m E_0 [\cos(\omega t - kz - k_m^{(x)} x) + \cos(\omega t - kz + k_m^{(x)} x)] \quad (3)$$

Выражение (3) представляет собой суперпозицию пространственных гармоник (плоских волн), распространяющихся под углами $\theta_m = \pm \frac{k_m^{(x)}}{k}$ к оси z . Величины этих углов малы $\theta_m \ll 1$, т. к. мы предполагаем, что период решетки много больше длины волны излучения.

Найдем, как изменяется разность фаз между этими гармониками вдоль оси z . Начнем с рассмотрения разности фаз между нулевой гармоникой, распространяющейся вдоль оси z , и одной из первых наклонных гармоник (Рис.1).

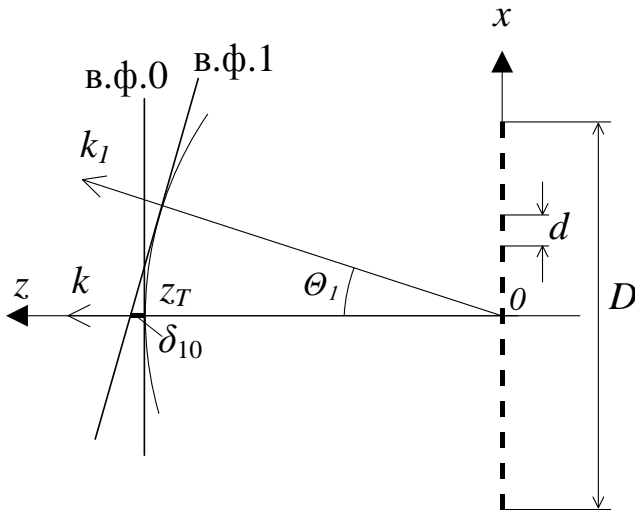


Рис. 1. Распространение нулевой и первой пространственных гармоник: D – размер решетки, d – период решетки; k, k_1 – волновые вектора нулевой и первой гармоник; в.ф.0 и в.ф.1 – волновые фронты нулевой и первой гармоник; δ_{10} – разность путей между волновыми фронтами нулевой и первой гармоник, z_T – расстояние Тальбота, на котором $\delta_{10} = \lambda$.

Очевидно, что волновой фронт наклонной первой гармоники опережает нулевую гармонику на расстоянии z на величину δ_{10} (фазовая скорость наклонной гармоники больше скорости света):

$$\delta_{10}(z) = \frac{z}{\cos \theta_1} - z = z \left(\frac{\sqrt{k^2 + (k_1^{(x)})^2}}{k} - 1 \right) \approx \frac{(k_1^{(x)})^2}{2k^2} z \quad (4)$$

Из выражения (4) получаем, что сдвиг фазы первой гармоники относительно нулевой будет равен:

$$\Delta\varphi_{10}(z) = \delta_{10}(z)k = \frac{(k_1^{(x)})^2}{2k} z \quad (5)$$

Очевидно, что сдвиг фаз m -той гармоники относительно нулевой будет в m^2 раз больше, т.е.

$$\Delta\varphi_{m0}(z) = \frac{(k_1^{(x)})^2 m^2}{2k} z \quad (6)$$

Расстояние Тальбота определяется равенством $\Delta\varphi_{10}(z) = 2\pi$. Для этого расстояния все пространственные гармоники находятся в фазе, поскольку разность фаз между ними кратна 2π , согласно (6). Поэтому на этом расстоянии будет наблюдаться самовосстановление исходного распределения поля. Величина расстояния Тальбота будет равна:

$$z_T = \frac{4\pi k}{(k_1^{(x)})^2} = \frac{2d^2}{\lambda} \quad (7)$$

Таким образом, получаем, что на расстояниях кратных расстоянию Тальбота поле излучения будет воспроизводить поле сразу после решетки (2).

Поскольку обычно в эксперименте (нашем в частности) наблюдаемой величиной является интенсивность поля в виде некоего изображения, то на расстояниях Тальбота наблюдаются четкие контрастные изображения освещаемых дифракционных решеток.

Заметим, что на срединных расстояниях Тальбота $z_T \left(n + \frac{1}{2} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ все пространственные гармоники с четными индексами m будут находиться в фазе с нулевой гармоникой, а с нечетными – в противофазе к ней. В частном случае решеток с равными по ширине прозрачными и непрозрачными участками разложение (1) будет состоять из гармоник с нулевым и нечетными индексами. При этом, очевидно, что на срединных расстояниях Тальбота будут также наблюдаться четкие контрастные изображения освещаемых дифракционных решеток, но сдвинутые в поперечном направлении на половину периода решетки. Таким образом, в эксперименте с такими решетками наблюдаются контрастные изображения дифракционных решеток на расстояниях кратных $z_T/2$.

В заключение теоретического раздела рассмотрим степень приближения реального эксперимента к вышеизложенному идеализированному рассмотрению с помощью модели плоских волн и связь этой работы с другими работами оптического практикума.

Ясно, что реальный пучок излучения всегда имеет ограниченный поперечный размер D , в пределах которого и проводятся наблюдения. Поскольку в нашем рассмотрении должны интерферировать заметное число поперечных мод (минимум $3 \div 5$), то поперечное отклонение этих мод на расстоянии Тальбота должно быть много меньше D . Отсюда получаем:

$$(3 \div 5) \frac{\lambda}{d} \times \frac{2d^2}{\lambda} = (6 \div 10)d \ll D \quad (8)$$

Таким образом, для образования четкого контрастного изображения решетки на расстоянии Тальбота необходимо освещать параллельным пучком лучей минимум $30 \div 50$ периодов решетки ($D/d \approx 30 \div 50$). Заметим при этом, что требование перекрытия дифракционных порядков означает, что мы находимся в зоне дифракции Френеля. Т.е. в открытых системах эффект Тальбота является частным случаем дифракции Френеля на периодических структурах.

Оценку (8) можно также получить, рассматривая дифракционный предел разрешения системы, подобный рассмотрению предельного разрешения дифракционной решетки (лаб. работа 5-2). Ограничение пучка размером D приводит к размытию воспроизводимой картины на величину $(\lambda/D)(2d^2/\lambda)=2d^2/D$. Для получения четкой картины необходимо, чтобы это размытие не превышало величины $d/20$. Отсюда получаем критерий $D \geq 40 d$, что практически совпадает с критерием (8).

Установка и практические задания

Оптическая схема установки для исследования эффекта Тальбота показана на Рис.2, а ее фотография для идентификации элементов на Рис. 3.

Установка состоит из источника параллельного пучка света (лазерного диода красного света) 1 с поляризационным ослабителем 2, набора разных дифракционных решеток и диафрагм различной ширины 3, оптического рельса 4 для параллельного перемещения видеокамеры 5, и компьютера 6.

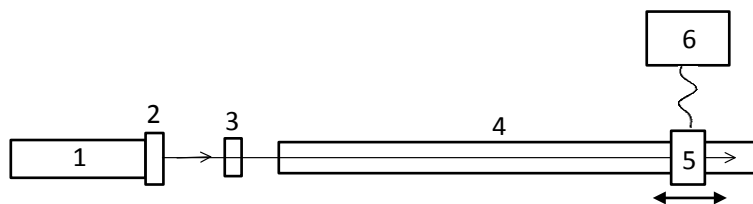


Рис. 2. Оптическая схема экспериментальной установки:

1 – источник параллельного пучка красного света на основе лазерного диода, 2 – поляризатор-ослабитель, 3 – исследуемая решетка из набора дифракционных решеток, 4 – оптический рельс, 5 – видеокамера, 6 – компьютер.

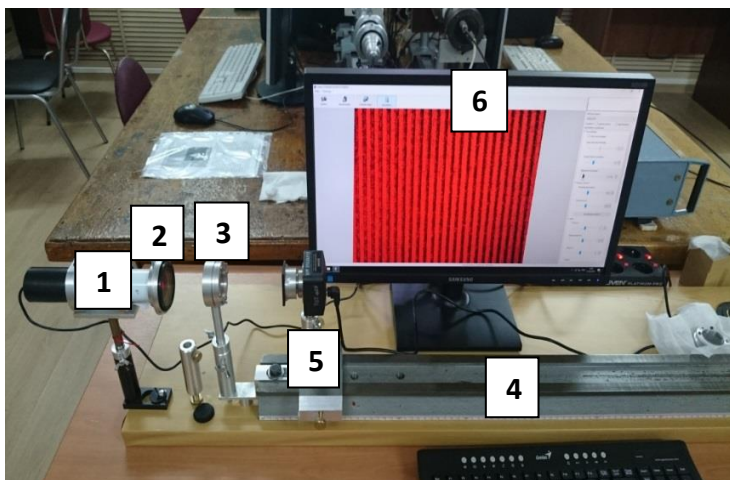


Рис. 3. Фото экспериментальной установки:

1 – источник параллельного пучка красного света на основе лазерного диода, 2 – поляризатор-ослабитель, 3 – исследуемая решетка на держателе из набора дифракционных решеток, 4 – оптический рельс, 5 – видеокамера, 6 – компьютер (системный блок находится на задней части монитора).

Задание 1. Измерение расстояний Тальбота одномерных решеток

Включить компьютер и запустить программу видеокамеры. Включить источник света. Установить на держатель дифракционную решетку №1 с равными ширинами прозрачных и непрозрачных участков. Установить оптимальные параметры камеры, перечисленные в инструкции на рабочем месте (при оптимальных параметрах должны наблюдаться черные полосы на красном фоне).

Переместить камеру максимально близко к решетке. Передвигая камеру вдоль рельса найти положения камеры, на которых наблюдаются четкие контрастные изображения решетки (черные и красные полосы примерно равной ширины с резкими границами). Фиксируя камеру на рельсе винтом записать несколько (от 3 до 5)

таких контрастных изображений, измеряя при этом расстояния от решетки до камеры – расстояния кратные половинным расстояниям Тальбота. Вычислить среднюю величину расстояния Тальбота для этой решетки. Измерить на одном из контрастных изображений период решетки, используя программу “Optimizer”. Сравнить полученное среднее расстояние Тальбота с теоретическим значением по формуле (7), учитывая, что средняя длина волны источника красного цвета – 0.63 мкм.

Проделать то же самое для решеток №2 и №3 с той же геометрией, но другим периодом.

Построить график зависимости средних расстояний Тальбота от периода решетки. Сравнить этот график с расчетным графиком по формуле (7).

Установить решетку №1 так, чтобы ее штрихи были направлены вертикально (это положение соответствует горизонтальному расположению полос на экране, т.к. камера повернута относительно решетки на 90°). Тщательно отъюстировать горизонтальное направление пучка параллельно рельсу. Записать четыре последовательных контрастных изображения решетки №1 на расстояниях $1/2 \cdot z_T$, z_T , $3/2 \cdot z_T$, $2z_T$ и с помощью программы “Optimizer” (или другой), построить одномерные сечения этих изображений по центру экрана в направлении перпендикулярном к штрихам решетки. Убедиться в том, что последовательные сечения сдвинуты относительно друг друга на половину периода. Если картины изображений на $1/2 \cdot z_T$ и $3/2 \cdot z_T$ не совпадают из-за небольшого наклона осей светового пучка и рельса, вычесть этот наклон при обработке изображений.

Задание 2. Измерение расстояний Тальбота двумерной решетки с разными периодами

Установить на держателе двумерную решетку №4 со слегка различающимися периодами по поперечным координатам. Перемещая камеру вдоль рельса, наблюдать сначала контрастные изображения двумерной решетки в виде чередующихся одномерных вертикальных и горизонтальных полос, а затем

появление контрастного двумерного изображения решетки. Измерить расстояния Тальбота и периоды этой решетки по двум поперечным координатам и сравнить их с теоретическими значениями, используя методику, изложенную в *Задании 1*. Наблюдать восстановление исходного изображения двумерной решетки при совпадении положений кратных расстояний Тальбота для обоих поперечных направлений.

Задание 3. Исследование пространственного разрешения самовоспроизведения изображения на расстояниях Тальбота

Установить решетку №1. Снять изображения решетки на первом расстоянии Тальбота с диафрагмами шириной 12, 6 и 3 мм в направлении перпендикулярном направлению штрихов (при вертикальном направлении полос на экране полосы решетки горизонтальны), ограничивающими число освещаемых периодов решетки. Получить сечения этих изображений при помощи программы “Optizer”. Построить эти сечения на одном графике. Проследить, как изменяется контраст (размытие границ полос) изображений. Уметь объяснить наблюдаемый эффект на основе вышеизложенной теории.

При сдаче всех заданий иметь при себе цветные изображения на любом носителе.

Литература

- [1] W. H. Fox Talbot, *Philos. Mag.* 9 no. IV (1836) 401-405.
- [2] Lord Rayleigh, *Philos. Mag.* 11 (1881) 196-205.
- [3] В.П. Кандидов, “Лазерные решетки”, Соросовский образовательный журнал (1999) 68-75.
- [4] Н.Н. Ильичев, В.В. Туморин, “Использование эффекта Тальбота для определения соотношения амплитудной и фазовой составляющих решетки инверсной населенности в кристалле ИАГ:Nd при ламповой накачке”, *Квантовая электроника*, 34 (2004) 283-287.

- [5] G. Schirripa Spagnolo, D. Ambrosini and D. Paoletti, “Displacement measurement using the Talbot effect with a Ronchi grating”, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 4 (2002) S376–S380.
- [6] L. Praxmeyer, K. W’odkiewicz, “Talbot effect in cylindrical waveguides”, arXiv:physics/0604057v1 [physics.optics] 7 Apr 2006.
- [7] В.В. Кубарев, “Оптимальные лазерные резонаторы с полым круглым волноводом”, Квантовая электроника 37(3) (1999) 241-245.
- [8] В.В. Кубарев, “Потери связи в лазерных резонаторах с полым прямоугольным или планарным волноводом”, Квантовая электроника 25(5) (1998) 419-423.