Самостоятельная работа к занятию 25

1. Найдите решение задачи Коши $y' = x + y^3$, $y(0) = 0$ в виде степенного ряда до x^4 включительно.

2. Найдите рекуррентные соотношения для производных $y^{(k)}(0)$ аналитических решений уравнения $y'' = xy$.

3. Найдите ФСР уравнения $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ в виде функций, аналитических в окрестности нуля.

4. Можно ли для уравнения $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0$ найти ФСР в виде обобщенных степенных рядов? Укажите вид этих рядов.

5. Укажите вид решений уравнения $x^2y'' + xy' + (4 - x)y = 0$ в виде обобщенных степенных рядов.

Ответы и указания

1. $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^4)$

2. *Указания:* дифференцируя уравнение n раз, получаем соотношение между производными $y^{(n+2)}(x) = xy^{(n)}(x) + ny^{(n-1)}(x)$.

Положив $x = 0$, получаем рекуррентную формулу

$$y^{(n+2)}(0) = ny^{(n-1)}(0)$$

Если $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, то $y''(0) = y'''(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 2$, $y^{(5)}(0) = y^{(6)}(0) = 0$, $y^{(7)}(0) = 10$ и т.д.

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{3k+1}x^{3k+1} = x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{10}{7!}x^7 + ...$$

Если $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, то $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$, $y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0$, $y^{(6)}(0) = 4$, и т.д.

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{3k}x^{3k} = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4}{6!}x^6 + ...$$

Замечание: Коэффициенты разложения решения в степенной ряд можно считать по формуле $c_k = \frac{c_{k-3}}{k(k-1)}$, $k \geqslant 3$.

Два линейно независимых решения получаются, если взять наборы $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ и $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.

3. $c_{k+2} = \dfrac{c_k(k-1)}{(k+1)}$. Если $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, то $y_1 = x$.
Если $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, то $c_{2k+1} = 0$, $c_{2k} = -\dfrac{1}{2k-1}$ и $y_2 = 1 - x^2 - \dfrac{x^4}{3} + ...$

4. $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 2/3$,

5. $y = A\cos(2\ln x) \cdot \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_kx^k + B\sin(2\ln x) \cdot \sum\limits_{k=0}^{+\infty} d_kx^k$.