Вопросы к экзамену по курсу “Основы Функционального Анализа”

Зелёным цветом обозначены вопросы, входящие в билеты на тройку, четверку и пятерку.

Синим цветом обозначены вопросы, входящие в билеты на четверку и пятерку.

Красным цветом обозначены вопросы, входящие в билеты на пятерку.

Серым цветом обозначены вопросы, которые предлагается не выносить на экзамен

- Лемма Римана-Лебега. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций: ограниченность, непрерывность, асимптотическое поведение.
- Интеграл Фурье, как предельная форма ряда Фурье.
- Преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций: свойства подобия, запаздывания и смещения. Преобразование Лапласа: свойства подобия, запаздывания и смещения.
- Неравенство Бесселя. Задача о наилучшем приближении тригонометрическими многочленами.
- Преобразование Фурье от производной функции. Дифференцирование преобразования Фурье.
- Коэффициенты Фурье для производной функции. Равномерная сходимость рядов Фурье.
- Дифференцирование рядов Фурье. Интегрирование рядов Фурье.
- Равенство Ляпунова для рядов Фурье и равенство Парсеваля для преобразования Фурье.
- Явление Гиббса на примере функции $sgn\ x$.
- Свёртка функций. Преобразование Фурье от свёртки абсолютно интегрируемых функций. Преобразование Лапласа от свёртки оригиналов.
- Фильтрующие свойства свёртки: приближение непрерывных функций дифференцируемыми.
- Преобразование Фурье быстро убывающих функций. Равенство Парсеваля. Прямое и обратное преобразование Фурье от свертки и произведения для быстро убывающих функций.
- Преобразование Лапласа: оригиналы и изображения, формула обращения.
- Преобразование Лапласа от производной (дифференцирование и интегрирование оригиналов).
- Обобщенные функции. δ-функция Дирака и примеры δ-образующих последовательностей. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Линейная замена переменной в обобщенных функциях. Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые. Свёртка обобщённых функций, пример, показывающий, что она не ассоциативна.
- Сходимость последовательности обобщённых функций, формулы Сохоцкого.
- Дифференцирование обобщённых функций. Теорема о связи классической и обобщённой производных для кусочно-гладкой функции.
- Фундаментальные решения дифференциальных уравнений. Фундаментальное решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Частные решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
- Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста, формула Фурье. Дифференцирование и преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста.

- Формула Пуассона для быстро убывающих функций. Формула Пуассона в пространстве обобщённых функций. Преобразование Фурье от функции отсчетов.
- Теорема о представлении кусочно-гладкой функции в точке рядом Фурье.
- Теорема о представлении кусочно-гладкой функции в точке интегралом Фурье.
- Теорема о скорости сходимости рядов Фурье.
- Теорема о приближении абсолютно интегрируемой функции бесконечно дифференцируемыми.
- Теорема отсчётов Котельникова-Шеннона.
- Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.
- Сформулируйте определение метрики и метрического пространства. Сформулируйте и докажите «обратное неравенство треугольника» для метрики.
- Приведите примеры метрик: дискретная метрика; метрики Минковского в пространстве вектор-столбцов; метрики в пространстве последовательностей; равномерная метрика в пространстве непрерывных функций; метрики в лебеговских функциональных пространствах.
- Сформулируйте определение сходящейся последовательности в метрическом пространстве.
- Сформулируйте определение непрерывного (в точке и на всем пространстве) отображения метрических пространств.
- Сформулируйте определения открытого и замкнутого шаров, сферы, диаметра множества, расстояния от точки до множества и ограниченного множества в метрическом пространстве.
- Сформулируйте определения внутренней, внешней и граничной точек множества в метрическом пространстве.
- Сформулируйте определения открытого и замкнутого множеств, а также замыкания множества в метрическом пространстве.
- Сформулируйте определения предельной точки, точки прикосновения и изолированной точки множества в метрическом пространстве.
- Сформулируйте определение всюду плотного подмножества в метрическом пространстве. Сформулируйте определение сепарабельного метрического пространства. Приведите примеры сепарабельных метрических пространств.
- Сформулируйте определение фундаментальной последовательности в метрическом пространстве. Сформулируйте и докажите утверждение о соотношении понятий фундаментальности и сходимости последовательности в метрическом пространстве. Сформулируйте определение полного метрического пространства.
- Сформулируйте и докажите утверждение о соотношении между полнотой и замкнутостью подпространства $\mathbb{M}$ метрического пространства $\mathbb{X}$.
- Сформулируйте определение сжимающего отображения в метрическом пространстве и определение неподвижной точки отображения. Сформулируйте и докажите теорему Банаха о неподвижной точке.
- Сформулируйте определения линейного пространства и подпространства линейного пространства.

- Сформулируйте определение линейно независимых конечной и бесконечной систем векторов в линейном пространстве. Сформулируйте определение конечномерного и бесконечномерного линейных пространств.
- Сформулируйте определение линейной оболочки произвольной системы векторов. Сформулируйте определение алгебраического базиса (базиса Гамеля) в линейном пространстве.
- Сформулируйте определение нормы и нормированного пространства. Сформулируйте определение банахова пространства.
- Сформулируйте определение метрики, порожденной нормой и докажите, что она действительно является метрикой. Сформулируйте и докажите «обратное неравенство треугольника» для нормы. Сформулируйте и докажите утверждение о непрерывности нормы.
- Приведите примеры нормированных пространств вектор-столбцов, последовательностей и функций.
- Сформулируйте неравенства Гёльдера и Минковского в пространствах вектор-столбцов, последовательностей и функций.
- Сформулируйте определение эквивалентных норм и утверждение о равносильности сходимости по эквивалетным нормам. Сформулируйте и докажите теорему об эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве.
- Сформулируйте и докажите теорему о полноте (банаховости) любого конечномерного нормированного пространства над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.
- Сформулируйте определения скалярного произведения, евклидова и унитарного пространств.
- Сформулируйте и докажите теорему о неравенстве Коши–Буняковского–Шварца. Сформулируйте определения ортогональности векторов, угла между векторами в евклидовом пространстве. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
- Сформулируйте определение нормы, порожденной скалярным произведением, и докажите, что она действительно является нормой. Сформулируйте и докажите утверждение о непрерывности скалярного произведения. Сформулируйте теорему фон Неймана–Йордана о норме, порожденной скалярным произведением.
- Сформулируйте определение гильбертова пространства. Приведите примеры гильбертовых пространств векторов, матриц, последовательностей, функций и определения скалярных произведений в них.
- Сформулируйте определение ближайшего вектора в подпространстве нормированного пространства. Сформулируйте определение ортогональной проекции вектора на подпространство.
- Сформулируйте и докажите теорему о соотношении понятий ближайшего вектора в подпространстве и ортогональной проекции на подпространство в пространстве со скалярным произведением.
- Сформулируйте и докажите теорему о ближайшем векторе в замкнутом подпространстве гильбертова пространства.
- Сформулируйте определение ортогонального дополнения к множеству. Докажите, что ортогональное дополнение является замкнутым линейным подпространством. Сформулируйте утверждение об ортогональном дополнении к ортогональному дополнению к множеству M (т.е. об $(M^{\perp})^{\perp}$) в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$.

- Сформулируйте определение прямой суммы подпространств линейного пространства. Сформулируйте и докажите теорему о разложении гильбертова пространства в прямую сумму подпространства и ортогонального дополнения к нему.
- Сформулируйте и докажите теорему о проектировании на конечномерное подпространство.
- Сформулируйте теорему о процессе ортогонализации Грама–Шмидта.
- Сформулируйте определение коэффициентов Фурье и ряда Фурье.
- Сформулируйте и докажите теорему о неравенстве Бесселя.
- Сформулируйте и докажите теорему Рисса–Фишера.
- Сформулируйте определения полной и замкнутой ортонормированной систем, а также определение гильбертова базиса.
- Сформулируйте и докажите теорему о критерии полноты ортонормированной системы.
- Сформулируйте и докажите теорему о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве.
- Сформулируйте определение изоморфизма пространств со скалярным произведением. Сформулируйте и докажите теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых
- пространства.
- Сформулируйте определение последовательности ортогональных многочленов и поясните, что называется их стандартизацией.
- Сформулируйте теорему об общих свойствах ортогональных многочленов (всего 7 свойств). Докажите последние два из этих свойств, а именно трехчленную рекуррентную формулу и свойство ортогональных многочленов, определяемых чётной весовой функцией на симметричном промежутке.
- Сформулируйте определение точки перемены знака. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах нулей ортогональных многочленов (всего 4 свойства) (*последнее из этих свойств (перемежаемость нулей q_n и q_{n+1}) оставьте без доказательства*).
- Нарисуйте таблицу с классификацией классических ортогональных многочленов.
- Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии, при котором весовая функция (с точностью до линейной замены переменной) является весовой функцией одного из классических ортогональных многочленов.
- Сформулируйте специальные свойства классических ортогональных многочленов (всего 4 свойства).
- Запишите формулу Родрига для многочленов Лежандра.
- Запишите соотношение ортогональности для многочленов Лежандра со стандартизацией $P_n(1) = 1$. Выведите это соотношение исходя из формулы Родрига для этих многочленов.
- Запишите производящую функцию многочленов Лежандра. Выведите формулу для этой производящей функции исходя из формулы Родрига для этих многочленов.
- Исходя из формулы Родрига для многочленов Лежандра выведите интегральное представление Шлефли многочленов Лежандра. Исходя из интегрального представления Шлефли многочленов Лежандра получите интегральное представление Лапласа.
- Исходя из производящей функции многочленов Лежандра выведите трехчленную рекуррентную формулу для этих многочленов.

- С помощью дифференциального уравнения Лежандра $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ Докажите ортогональность многочленов Лежандра.
- Сформулируйте теорему о полноте (базисности) системы многочленов Лежандра в $L_2[-1,1]$. Сформулируйте теорему о поточечной сходимости ряда Фурье по многочленам Лежандра.
- Сформулируйте определение линейного оператора, а также его ядра и образа. Сформулируйте определение непрерывного линейного оператора (в точке и на всем пространстве). Сформулируйте и докажите утверждение о соотношении понятий непрерывности в точке и непрерывности во всем пространстве для линейного оператора.
- Сформулируйте определение ограниченного оператора. Сформулируйте и докажите утверждение о том, что для ограниченности линейного оператора необходимо и достаточно, чтобы он отображал шар единичного радиуса с центром в нуле в ограниченное множество. Сформулируйте определение нормы оператора.
- Сформулируйте и докажите теорему о свойствах нормы оператора (всего 3 свойства).
- Сформулируйте и докажите теорему о связи понятий ограниченности и непрерывности линейного оператора.
- Сформулируйте и докажите утверждение о замкнутости ядра любого ограниченного оператора.
- Сформулируйте и докажите утверждение об ограниченности оператора, действующего на конечномерном пространстве.
- Сформулируйте определение сходящейся операторной последовательности. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах сходящихся операторных последовательностей (всего 2 свойства).
- Сформулируйте теорему о полноте пространства ограниченных операторов.
- Сформулируйте определение операторного ряда, его сходимости и его суммы. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах сходимости операторных рядов (всего 2 свойства).
- Сформулируйте определения инъективного, сюръективного и биективного отображений.
- Сформулируйте определения правого и левого обратного отображений. Сформулируйте определение обратного отображения. Сформулируйте утверждение о соотношении перечисленных понятий с понятиями инъективного, сюръективного и биективного отображений.
- Сформулируйте определение обратимого линейного оператора. Сформулируйте и докажите утверждение о связи обратимости линейного оператора с тривиальностью его ядра. Сформулируйте определение обратного линейного оператора.
- Сформулируйте и докажите теорему о свойствах обратного оператора (всего 3 свойства).
- Сформулируйте определение непрерывно обратимого оператора. Сформулируйте теорему Банаха об обратном операторе.
- Сформулируйте и докажите теорему Неймана.
- Сформулируйте определения регулярного значения, резольвентного множества, спектра, резольвенты и спектрального радиуса ограниченного оператора.

- Сформулируйте определения точек точечного, непрерывного и остаточного спектров ограниченного оператора.
- Сформулируйте теорему о свойствах спектра ограниченного оператора (всего 4 свойства). Докажите первые два из этих свойств.
- Сформулируйте определение линейного функционала в гильбертовом пространстве, а также определение сопряженного пространства.
- Сформулируйте и докажите утверждения о связи непрерывности функционала в гильбертовом пространстве со свойствами его ядра (всего 3 утверждения).
- Сформулируйте и докажите теорему Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
- Изложите суть бра- и кет-формализма, предложенного П.А.М. Дираком. В качестве примера применения этого формализма получите разложение тождественного оператора, действующего в конечномерном пространстве в сумму проекторов.
- Сформулируйте определение оператора, сопряженного к ограниченному оператору, действующему на паре гильбертовых пространств.
- Сформулируйте и докажите теорему о свойствах сопряженного оператора (всего 7 свойств).
- Сформулируйте теорему о связи спектров операторов A и A^*. Поясните, как зная точечные спектры операторов A и A^* найти остаточный спектр оператора A.
- Сформулируйте определение нормального, самосопряженного и унитарного операторов в гильбертовом пространстве. Сформулируйте утверждение об остаточном спектре нормального оператора.
- Сформулируйте теорему о норме самосопряженного оператора. Сформулируйте теорему о соотношении между нормой и спектральным радиусом самосопряженного оператора.
- Сформулируйте теорему о действительности спектра самосопряженного оператора. Сформулируйте теорему об ортогональности собственных подпространств самосопряженного оператора. Сформулируйте теорему об инвариантном подпространстве самосопряженного оператора.
- Сформулируйте определение компактного множества в метрическом пространстве в терминах последовательностей. Сформулируйте определение предкомпактного множества в метрическом пространстве.
- Сформулируйте критерий компактности и предкомпактности множества в конечномерном нормированном пространстве.
- Сформулируйте и докажите утверждение о соотношении компактности и ограниченности и замкнутости множества в бесконечномерном нормированном пространстве. В частности, покажите, что шар единичного радиуса с центром в точке 0 не является компактом в бесконечномерном гильбертовом пространстве.
- Сформулируйте определение компактного оператора в банаховых пространствах (в терминах множеств и в терминах последовательностей).
- Приведите простейшие примеры компактных операторов в банаховых пространствах с обоснованием их компактности.
- Сформулируйте и докажите свойства компактных операторов в банаховых пространствах (всего 6 свойств) (*свойство замкнутости подпространства*

компактных операторов в пространстве ограниченных операторов оставьте без доказательства).

- Сформулируйте теорему об эквивалентном определении компактного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.
- Сформулируйте теорему о свойствах спектра компактного оператора в бесконечномерном гильбертовом пространстве (всего 3 свойства).
- Сформулируйте теорему о непустоте точечного спектра компактного самосопряженного оператора.
- Сформулируйте теорему Гильберта-Шмидта.
- Выпишите 4 важнейших класса линейных интегральных уравнений.
- Изложите алгоритм сведения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.
- Сформулируйте определение интегрального оператора Гильберта–Шмидта. Сформулируйте и докажите теорему о его компактности.
- Сформулируйте и докажите теорему об операторе, сопряженном к интегральному оператору Гильберта-Шмидта. Сформулируйте определение симметричности ядра интегрального оператора.
- Сформулируйте определение вырожденного ядра интегрального уравнения. Изложите алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.
- Сформулируйте утверждение альтернативы Фредгольма применительно к вопросу о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода $(I - A)x = f$.
- Изложите алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с малым параметром (метод последовательных приближений). Сформулируйте и докажите лемму о произведении интегральных операторов Гильберта-Шмидта. Сформулируйте теорему о рекуррентной формуле для повторных ядер интегрального оператора. Гильберта-Шмидта (в качестве доказательства достаточно сослаться на лемму). Запишите решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с малым параметром через резольвентное ядро.
- Сформулируйте определения собственной функции интегрального уравнения (собственной функции ядра) и характеристического значения интегрального уравнения. Сформулируйте определение функции, представимой через ядро интегрального оператора Гильберта-Шмидта.
- Сформулируйте теорему Гильберта-Шмидта для интегрального оператора Гильберта-Шмидта с симметричным ядром.
- Изложите алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром путем разложения решения по собственным функциям ядра.
- Сформулируйте и докажите теорему о разложении повторных ядер интегрального оператора Гильберта-Шмидта с симметричным ядром по собственным функциям ядра.
- Сформулируйте и докажите теорему о существовании и единственности решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (*лемму об обобщении теоремы Неймана оставьте без доказательства*)