Гл. 2. Дифференциальное исчисление функций одной вещественной переменной.

§ 2.1. Дифференцируемые функции.

2.1.1. Определение производной функции.

Определение 2.1 (производной)

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на промежутке $\langle a, b\rangle$ и $x_0 \in \langle a, b\rangle$ — фиксированная точка этого промежутка. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то его называют производной функции f в точке x_0 и обозначают через $f'(x_0)$ или $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Если $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке $x \in \langle a, b\rangle$, то возникает функция $x \mapsto f'(x)$, которую также называют производной функции $f(x)$ (на промежутке).

Замечание 2.2

Таким образом, когда говорят о производной, то либо имеют в виду число, если это производная в фиксированной точке, либо функцию, если рассматривают производную в каждой точке промежутка. В дальнейшем для нас производная будет ассоциироваться преимущественно с функцией.

Замечание 2.3

Существование конечного предела в определении производной с учетом равенства нулю предела знаменателя гарантирует, что предел числителя также равен нулю, а это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, следовательно, если функция имеет производную в некоторой точке, то она в такой точке непрерывна. Обратное утверждение неверно — непрерывность не гарантирует наличия производной.

2.1.2. Физический и геометрический смысл производной.

Физическая интерпретация производной. Если x — время, а $f(x)$ — координата прямолинейно движущегося тела, то отношение $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ — это средняя скорость на промежутке $[x_0, x]$, а $f'(x_0)$ — мгновенная скорость в момент времени x_0.

Геометрическая интерпретация производной. Рассмотрим функцию $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ и зафиксируем точку $x_0 \in (a,b)$. Выберем произвольно еще одну точку $x_1 \in (a,b)$. и проведем прямую, проходящую через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ графика $f(x)$. Эта пряамая называется секущей, проходящей через данные точки. Ее уравнение имеет вид

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то при $x_1 \to x_0$ угловой коэффициент секущей стремится к производной $f'(x_0)$, а уравнение секущей переходит в уравнение

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0),$$

которое задает некоторую прямую. Ее называют касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0. Имея в виду эти построения, говорят, что касательная является предельным положением секущей, а производная — угловым коэффициентом касательной к графику функции.

2.1.3. Определение дифференциала.

Определение 2.4 (дифференциала)

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на промежутке $\langle a, b\rangle$, и $x_0 \in \langle a, b\rangle$ — фиксированная точка данного промежутка. Если существует такое линейное отображение $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(h)$ при $h \to 0$, то говорят, что f дифференцируема в точке x_0, а отображение L называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают символом $df(x_0)(h)$.

Замечание 2.5

Некоторая необычность ситуации в определении дифференциала в том, что здесь функция зависит от двух переменных, каждый из которых заключен в отдельные скобки. Первый аргумент — та точка, в которой все происходит, в контексте определения она фиксирована. Второй аргумент — это величина приращения. В этой записи набор символов $df(x_0)$ надо воспринимать как единое обозначение для дифференциала в данной точке.

Замечание 2.6 (о линейных и аффинных функциях)

Отображение $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ x, y \in \mathbb{R},$$

называют линейным. Иначе говоря, отображение линейно, если оно переводит линейную комбинацию элементов из области определение в соответствующую линейную комбинацию образов этих элементов. Линейное отображение можно рассматривать не только на $\mathbb{R}$, но и на любом векторном пространстве — важна возможность составлять линейные комбинации элементов со скалярами, т. е. числами.
В случае, когда L рассматривается на $\mathbb{R}$, разнообразие линейных отображений невелико — все они имеют вид $L(h) = a \cdot h$, $h \in \mathbb{R}$. Заметим, что график любого линейного отображения проходит через начало координат.

В школе линейными называли функции вида $f(x) = ax + b$ в честь того, что график такого отображения — прямая на плоскости, не обязательно проходящая через начало координат. У нас такое отображение будет называться аффинным.

Замечание 2.7

Оперируя имеющимися в нашем распоряжении понятиями, можно сказать, что дифференциал — это главная линейная часть приращения функции. Действительно, запишем определяющее дифференциал равенство в виде

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L(h) + o(h), \ \ h \to 0.$$

В левой части последнего равенства стоит приращение функции на приращении аргумента h. В правой части первое слагаемое — это дифференциал, т. е. линейная функция вида $L(h) = a \cdot h$. Наконец, завершает сумму слагаемое, бесконечно малое по сравнению с h, что указывает на то, что $L(h)$ — не что иное как главная часть того, что расположено слева, т. е. приращения исходной функции.

Замечание 2.8

В равенстве, характеризующем дифференциал, приращение аргумента записано с использованием величины h отклонения точки от фиксированной точки x_0. Можно записывать это приращение, используя не величину отклонения, а положение точки x, т. е. используя величину $h = x - x_0$:

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + o(x - x_0), \;\; x \to x_0.$$

Замечание 2.9

Сопоставляя равенство, характеризующее дифференциал, т. е.

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0), \; x \to x_0.$$

и уравнение касательной, т. е.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

можно обнаружить, что они похожи между собой, и это намек на связь дифференциала с производной. С другой стороны, видно, насколько различаются касательная и сама функция вблизи данной точки, а именно они различаются на добавку $o(x - x_0)$. Ясно, что если x приближается к x_0, то разность между функцией и касательной стремится к нулю, причем довольно быстро: скорость ее исчезновения выше скорости, с которой происходит приближение x к x_0.

2.1.4. Связь производной и дифференциала.

Теорема 2.10 (о производной и дифференциале)

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. *Тогда функция* $f(x)$ *имеет производную* $f'(x_0)$ *в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда* f *имеет дифференциал* $df(x_0)$, *т. е. дифференцируема в точке* x_0, *при этом*

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Замечание 2.11 (о форме записи дифференциала)

Сначала разберемся с тем, как воспринимать символ dx. Есть две точки зрения на этот символ — как у математиков и как у физиков. Сначала посмотрим, как на это смотрят математики.

Рассмотрим тождественное отображение $y = x$ на некотором промежутке. Его производная в каждой точке x_0 равна 1, т. е. $x'(x_0) = 1$ (возможно, не самое удачное обозначение для производной функции $y = x$, но возможное — так обозначается сама функция). По предыдущей теореме у этого отображения есть дифференциал и в каждой точке он действует по формуле

$$dx(x_0)(h) = 1 \cdot h = h.$$

Поскольку действие не зависит от точки x_0, первый аргумент x_0 опускают и пишут $dx(h) = h$. Таким образом, dx — это просто дифференциал тождественного отображения, который также действует тождественно. Однако между тождественным отображением и его дифференциалом есть существенная разница: первое действует на точки $x \in \langle a, b\rangle$, а дифференциал, будучи линейным отображением, определен на $\mathbb{R}$ и действует на приращения h.

Имея отображение dx, можно записать без указания аргументов связь между производной и дифференциалом

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h = f'(x_0)\,dx(h),$$

установленную в теореме 2.10 и представляющую собой равенство линейных функций или, можно сказать, разные записи одного и того же линейного отображения. Опуская последний аргумент h, приходим к такому выражению:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx,$$

где в каждой из частей равенства находятся линейные функции. Эта формула означает, что дифференциал $df(x_0)$ получается из тождественного линейного отображения dx при помощи умножения на $f'(x_0)$ или что $f'(x_0)$ — коэффициент пропорциональности между функциями $df(x_0)$ и dx. Это объясняет обозначение $\frac{df}{dx}(x_0)$ для производной $f'(x_0)$.

Теперь обсудим, как dx воспринимают физики. Если приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$ большое, то дифференциал приближает приращение функции с некоторой ошибкой:

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

где ошибка $o(\Delta x)$ исчезает быстрее, чем приращение аргумента. А если приращение настолько малое, что ошибкой можно пренебречь, то такое приращение называют бесконечно малым приращением и обозначают через dx, при этом имеет место равенство $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$, в котором dx — бесконечно малое приращение аргумента, а $df(x_0)$ — бесконечно малое приращение функции, $f'(x_0)$ — коэффициент пропорциональности между ними.

Тем самым у физиков dx — это просто приращение аргумента, $df(x_0)$ — приращение функции, только бесконечно малое. И когда физики говорят «записать дифференциал функции», то имеют в виду намерение выразить бесконечно малое приращение функции через бесконечно малое приращение аргумента. У математиков это линейная функция, т. е. другой объект.

Мы можем говорить о скорости изменения функции на двух языках — на языке производных и на языке дифференциалов. Для функций одной переменной эти языки очевидно эквивалентны. Понятнее язык производной, поэтому дальнейшие результаты будем формулировать на языке производных, хотя их можно переформулировать на языке дифференциалов.

2.1.5. Доказательство правил дифференцирования.

Теорема 2.12 (о производной и алгебраических операциях)

Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *имеют производные в точке* $x_0 \in \langle a, b\rangle$.
Тогда их сумма $f + g$, *произведение* fg *и частное* $\dfrac{f}{g}$ *тоже имеют производные в точке* x_0, *причем*
1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
(последнее при условии, что $g(x_0) \neq 0$*).*

Пп. 1) и 3) теоремы 2.12 без доказательства.

Упражнение 2.13

Доказать пп. 1) и 3) теоремы 2.12.

Теорема 2.14 (о производной композиции)

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ *имеет производную* $f'(x_0)$ *в точке* $x_0 \in \langle a, b\rangle$, $g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ *имеет производную* $g'(y_0)$ *в точке* $y_0 = f(x_0)$, *то композиция* $g \circ f$ *имеет производную в точке* x_0 *и* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Теорема 2.15 (о производной обратной функции)

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *обратима и* $x_0 \in \langle a, b\rangle$. *Если* $f(x)$ *имеет ненулевую производную* $f'(x_0) \neq 0$ *и обртная функция* $f^{-1}(y)$ *непрерывна в точке* $y_0 = f(x_0)$, *то* $f^{-1}(y)$ *имеет производную в точке* y_0, *причем*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема 2.16 (о производных элементарных функций)

$(a^x)' = a^x \ln a,\ x \in \mathbb{R};$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ x > 0;$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ x > 0;$

$(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R};$

$(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R};$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ \ k \in \mathbb{Z};$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi\ \ k \in \mathbb{Z};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1;$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1;$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R};$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$

Формулы для производных $(\cos x)'$, $(\operatorname{ctg} x)'$, $(\arccos x)'$, $(\operatorname{arctg} x)'$, $(\operatorname{arcctg} x)'$ без доказательства.

§ 2.2. Приращения дифференцируемых функций.

2.2.1. Производная в точке экстремума.

Определение 2.17 (локального экстремума)

Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — функция на промежутке $\langle a, b \rangle$. Точку $x_0 \in \langle a, b \rangle$ называют точкой локального максимума f, если существует такая окрестность U точки x_0, что для любого $x \in U \cap \langle a, b \rangle$ выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, при этом говорят, что f имеет локальный максимум в точке x_0. Точку $x_0 \in \langle a, b \rangle$ называют точкой локального минимума f, если существует такая окрестность U точки x_0, что для любого $x \in U \cap \langle a, b \rangle$ выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, при этом говорят, что f имеет локальный минимум в точке x_0. Точки локального максимума и минимума называют точками локального экстремума.

Определение 2.18 (внутренней точки)

Точку $x_0 \in X$ называют **внутренней** точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если существует ее окрестность $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ с некоторым $\delta > 0$, которая содержится в X.

Замечание 2.19

Внутренние точки промежутка $\langle a, b \rangle$ — это точки интервала (a, b).

Теорема 2.20 (Ферма о необходимом условии локального экстремума)

Если функция $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$
1) имеет локальный экстремум во внутренней точке $x_0 \in (a, b)$;
2) имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0,
то $f'(x_0) = 0$.

2.2.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

Теорема 2.21 (Ролля)

Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
1) непрерывна на $[a, b]$*;*
2) имеет производную (по крайней мере) на (a, b)*;*
3) $f(a) = f(b)$*,*
то существует такая точка $\xi \in (a, b)$*, в которой* $f'(\xi) = 0$*.*

Замечание 2.22

Теореме Ролля можно дать физическую интерпретацию: если точка, плавно двигаясь по прямой, возвращается в начальную точку, значит в какой-то момент она имеет нулевую скорость.

Теорема 2.23 (Лагранжа о конечном приращении)

Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
1) непрерывна на $[a, b]$*;*
2) имеет производную (по крайней мере) на (a, b)*,*
то существует такая точка $\xi \in (a, b)$*, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{1}$$

Замечание

Содержание теоремы 2.23 имеет простую геометрическую интерпретацию. В равенстве (1) слева записан угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, а справа — угловой коэффициент касательной в некоторой точке ξ. Теорема утверждает, что внутри промежутка есть хотя бы одна точка, в которой эти величины окажутся равными, т. е. касательная будет параллельна секущей.

Следствие 2.24 (о конечном приращении)

Если функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа и существует такое C, что $|f'(x)| \leq C$ для любого $x \in (a, b)$, то $|f(b) - f(a)| \leq C|b - a|$.

Теорема 2.25 (Коши о конечном приращении)

Если функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$
1) непрерывны на $[a, b]$*;*
2) имеют производную (по крайней мере) на (a, b)*,*
то существует такая точка $\xi \in (a, b)$*, что*
$\det \begin{pmatrix} f'(\xi) & f(b) - f(a) \\ g'(\xi) & g(b) - g(a) \end{pmatrix} = 0.$
Если $g(b) \neq g(a)$*, то результат теоремы можно записать в виде отношения:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{2}$$

Замечание 2.26

Ясно, что теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа.

Замечание 2.27

Геометрическая интерпретация теоремы Коши следущая. Если значения функций f и g суть координаты точки на плоскости, т. е. это точка $(g(t), f(t))$, то при изменении параметра $t \in [a, b]$ на плоскости появляется кривая с начальной точкой $(g(a), f(a))$ и конечной $(g(b), f(b))$. В левой части формулы (2) записан тангенс угла наклона секущей, проходящей через точки $(g(a), f(a))$ и $(g(b), f(b))$, а правой — тангенс угла наклона касательной к кривой в некоторой точке. Согласно теореме существует такая точка на кривой, в которой касательная будет наклонена под тем же углом к оси абсцисс, что и секущая.

§ 2.3. Формула Тейлора.

2.3.1. Производные высших порядков.

Определение 2.28 (старших производных)

Пусть функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеет производную в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0. Если функция $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ имеет производную $(f')'(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0)$, то говорят, что f имеет вторую производную или производную второго порядка в точке x_0 и обозначают ее через $f''(x_0)$ или $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$.

Старшие производные, называемые также производными высших порядков, определяют по индукции: если f имеет $(k-1)$-ю производную $f^{(k-1)}(x) = \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 и эта производная дифференцируема в точке x_0, то говорят, что f имеет k-ю производную в точке x_0 и обозначают ее через $f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0)$ или $\frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right)(x_0)$.

Замечание 2.29

Важно понимать, что для определения производной порядка k в некоторой точке x_0 надо иметь производные порядка $k-1$ в точках x из некоторой окрестности точки x_0.

2.3.2. Глобальная формула Тейлора.

Теорема 2.30 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *имеет* $n+1$ *производную на* (a, b) *и* $x_0 \in (a, b)$. *Тогда для любого* $x \in (a, b)$ *имеет место равенство, называемое* ***формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа****:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad x \in (a.b), \qquad (3)$$

где ξ *— некоторая точка, лежащая строго между* x *и* x_0.

Определение 2.31 (полинома Тейлора и остаточного члена в формуле Тейлора)

Полином $p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ называется полиномом Тейлора функции f степени n в точке x_0. Разность $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ называется остаточным членом в формуле Тейлора.

Замечание 2.32

Теорема 2.30 дает представление для остаточного члена в формуле Тейлора в форме Лагранжа $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Замечание 2.33

В формулировке теоремы 2.30 имеется в виду, что сначала берется точка x и затем гарантируется существование точки ξ.

Замечание 2.34

В условиях теоремы 2.30 для $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, и произвольной функции $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, непрерывной на отрезке I с концами в точках x_0 и x и имеющую ненулевую производную $\varphi'(t) \neq 0$ внутри этого отрезка, справедливо равенство

$$r_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n, \tag{4}$$

для некоторого ξ, лежащего строго между x и x_0.
Представление (4) для $r_n(x)$ называют общей формой для остаточного члена в формуле Тейлора.

2.3.3. Локальная формула Тейлора.

Теорема 2.35 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *имеет* n *производных в точке* $x_0 \in (a, b)$. *Тогда для* $x \in (a, b)$ *имеет место формула*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{при } x \to x_0. \tag{5}$$

Кроме того, если $q_n(x)$ *— многочлен степени* n *такой, что* $f(x) = q_n(x) + o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$, *то* $q_n(x) \equiv p_n(x)$.

Замечание 2.36

Теорема 2.35 дает представление для остаточного члена в формуле Тейлора в форме Пеано
$r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Замечание 2.37

Формула Тейлора — это представление функции $f(x)$ в виде $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$, где $p_n(x)$ — полином Тейлора, а $r_n(x)$ — остаточный член. Вид полинома Тейлора для всех формул один и тот же, а остаточный член, представляющий собой ошибку приближения, записывается в различных формах — Лагранжа, Пеано, Коши, интегральной. Выбор вида остаточного члена зависит от задачи, которую вы решаете с помощью этого разложения. Если считаете пределы, то надо использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, а если приближаете функцию, то — в форме Лагранжа.

Замечание 2.38 (о формуле Тейлора и ряде Тейлора)

Предположим, что $f(x)$ имеет все производные на (a, b). Зафиксируем $x_0 \in (a, b)$ и запишем формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x).$$

Пусть x тоже фиксировано, а $n \in \mathbb{N}$ меняется. Что может произойти при $n \to \infty$? В нормальном случае будет $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и функция $f(x)$ становится равной пределу:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Этот предел называют суммой ряда Тейлора и обозначают через $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Итак, в хорошем случае $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Надо понимать разницу между формулой Тейлора и рядом Тейлора.
Формула Тейлора дает приближение функции полиномом Тейлора с некоторой точностью, которую можно оценивать. Она выражена остаточным членом.
Ряд Тейлора — это точное представление функции в виде предела последовательности полиномов.

Теорема 2.39 (формула Тейлора для элементарных функций)

Имеют место равенства при $x \to 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k + o(x^n) =$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n).$$

§ 2.4. Исследование функции при помощи производной

2.4.1. Монотонность и точки экстремума.

В § 2.2 была доказана теорема Ферма, согласно которой для дифференцируемой функции необходимым условием экстремума является обращение в нуль производной в точке экстремума. Однако необходимое условие не позволяет гарантировать наличие экстремума в данной точке, оно лишь может гарантировать, что в каких-то точках экстремума нет, а именно если производная во внутренней точке отлична от нуля, то в такой точке экстремума нет. Для исследования точки на экстремум нужны достаточные условия, и один из вариантов таких условий будет дан в следующей теореме.

Теорема 2.40 (достаточное условие локального экстремума)

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *имеет вторую производную* $f''(x)$ *на* (a, b) *и* $x_0 \in (a, b)$. *Тогда*
1) если $f'(x_0) = 0$ *и* $f''(x_0) > 0$, *то* x_0 *— точка (строгого) локального минимума;*
2) если $f'(x_0) = 0$ *и* $f''(x_0) < 0$, *то* x_0 *— точка (строгого) локального максимума;*
3) если $f'(x_0) = 0$ *и* $f''(x_0) = 0$, *то ничего об экстремуме в точке* x_0 *утверждать невозможно.*

Упражнение 2.41

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ имеет производную $f^{(2n)}(x)$ на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Доказать, что

1) если $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка (строгого) локального минимума;

2) если $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка (строгого) локального максимума;

3) если $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = f^{(2n)}(x_0) = 0$, то ничего об экстремуме в точке x_0 утверждать невозможно.

Упражнение 2.42

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ имеет производную $f^{(2n+1)}(x)$ на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Доказать, что если $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n)}(x_0) = 0$ и $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, то x_0 не является точкой локального экстремума

Теорема 2.43 (критерий монотонности)

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и дифференцируема на* (a, b). *Тогда*
1) $f(x)$ *неубывающая тогда и только тогда, когда* $f'(x) \geq 0$ *на* (a, b);
2) $f(x)$ *(строго) возрастающая тогда и только тогда, когда* $f'(x) \geq 0$ *на* (a, b) *и не существует интервала, на котором* $f'(x) = 0$;
3) $f(x)$ *невозрастающая тогда и только тогда, когда* $f'(x) \leq 0$ *на* (a, b);
4) $f(x)$ *(строго) убывающая тогда и только тогда, когда* $f'(x) \leq 0$ *на* (a, b) *и не существует интервала, на котором* $f'(x) = 0$;
5) $f(x)$ *постоянна тогда и только тогда, когда* $f'(x) = 0$ *на* (a, b).

Пп. 3)–5) теоремы 2.43 без доказательства.

Упражнение 2.44

Доказать пп. 3)–5) теоремы 2.43.

2.4.2. Выпуклость функции и точки перегиба.

Определение 2.45 (выпуклой функции)

Функцию $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, заданную на промежутке $\langle a, b\rangle$, называют выпуклой, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ и любых чисел $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \tag{6}$$

Выпуклую функцию $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называют строго выпуклой, если для $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ неравенство (6) строгое. Выражение $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ с указанными в определении выпуклости требованиями к α_1, α_2 называют выпуклой комбинацией точек x_1, x_2 с коэффициентами α_1, α_2.

Определение 2.46 (вогнутой функции)

Функцию $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, заданную на промежутке $\langle a, b \rangle$, называют **вогнутой**, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ и любых чисел $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \tag{7}$$

Вогнутую функцию $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ называют **строго вогнутой**, если для $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ неравенство (7) строгое.

Замечание 2.47

Иногда о выпуклых функциях говорят как о выпуклых вниз, а о вогнутых функциях — как о выпуклых вверх.
Заметим также, что вогнутость f равносильна выпуклости $-f$.

Замечание 2.48 (о геометрическом смысле выпуклости функции)

Изобразим координатную плоскость, на оси абсцисс возьмем какой-либо промежуток $\langle a, b\rangle$ и выберем в нем пару точек $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$. Точка $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ с указанными выше требованиями к α_1, α_2 расположена между x_1 и x_2 и делит отрезок $[x_1, x_2]$ в отношении $\alpha_1 : \alpha_2$, считая от x_1. Это можно пронаблюдать, беря конкретные значения α_1 и α_2. Если $\alpha_1 = 1$, тогда $\alpha_2 = 0$, мы находимся в левом конце x_1. При $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$ попадаем в правый конец x_2. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, то точка расположена в середине промежутка.

В левой части неравенства (6) стоит значение функции в некоторой точке промежутка $[x_1, x_2]$. В правой части расположена выпуклая комбинация значений $f(x_1)$, $f(x_2)$, т. е. точка из промежутка с концами $f(x_1)$, $f(x_2)$ на оси ординат, расположенная в той же пропорции, что и значения аргумента x_1, x_2 на отрезке $[x_1, x_2]$. График функции, сопоставляющей точке $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ значение $\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, представляет собой отрезок с концами $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, и неравенство (6) означает следующее. Взяв произвольные точки x_1, x_2 промежутка $\langle a, b\rangle$ и рассмотрев часть графика функции на промежутке с концами в x_1, x_2, можно увидеть, что она расположена не выше отрезка, соединяющего концы графика. Об этом также говорят, что дуга графика выпуклой функции на любом отрезке из данного промежутка расположена ниже (не выше) хорды, соединяющей концы этой дуги.

Определение 2.49 (выпуклого множества)

Множество M в векторном пространстве называют выпуклым, если $\forall P_1, P_2 \in M \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \in M$, т. е. вместе с любыми двумя точками множество содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Определение 2.50 (надграфика функции)

Для функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ множество
$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) : x \in \langle a, b\rangle, \ y \geq f(x)\}$
называют надграфиком функции f.

Замечание 2.51 (о геометрическом смысле выпуклости функции (продолжение))

Функция выпукла тогда и только тогда, когда ее надграфик — выпуклое множество.

Теорема 2.52 (критерий выпуклости функции)

Непрерывная на $\langle a, b\rangle$ *функция* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, *имеющая вторую производную* $f''(x)$ *на* (a, b), *выпукла на* $\langle a, b\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $f''(x) \geq 0$ *на* (a, b).

Замечание 2.53

По ходу доказательства мы получим еще пару критериев выпуклости, однако, по-видимому, критерий в терминах второй производной наиболее наглядный и чаще всего применяемый на практике.

Утверждение 2.54 (другое определение выпуклости)

Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, *заданная на промежутке* $\langle a, b\rangle$, *выпукла тогда и только тогда, когда для любых* $x_1, x, x_2 \in \langle a, b\rangle$ *таких, что* $x_1 < x < x_2$, *выполнено неравенство*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Утверждение 2.55 (критерий выпуклости в терминах первой производной)

Функция f *выпукла тогда и только тогда, когда её производная* $f'(x)$ *неубывающая.*

Замечание 2.56

Полезность свойства выпуклости по крайней мере в том, что у выпуклой на отрезке функции всегда есть глобальный минимум. Кроме того, из соображений выпуклости можно получить много весьма полезных неравенств, которые другим путем не получаются.

Упражнение 2.57

Доказать, что для любых $x_1, x_2 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, справедливы неравенства:
1) $\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$;
2) $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$;
3) $\frac{1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \leq \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2}$.
В частности, для $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ получаем неравенства $\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$, связывающие среднее гармоническое (в левой части), среднее геометрическое (в центральной) и среднее арифметическое (в правой).

Упражнение 2.58 (неравенство Юнга)

Докажите для $a, b > 0$ и $p, q > 1$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, справедливость неравенства Юнга $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Упражнение 2.59 (неравенство Йенсена)

Докажите, что для выпуклой функции $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ верно более общее, чем в ее определении, неравенство, а именно для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b \rangle$ и любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, верно неравенство Йенсена $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$. Оно аналогично неравенству выпуклости, но в отличие от него содержит n элементов вместо двух. Доказательство неравенства Йенсена можно провести по индукции.

Упражнение 2.60

Используя неравенство Йенсена, доказать, что для $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Определение 2.61 (точки перегиба)

Если существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \langle a, b \rangle$ такая, что на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ функция $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ имеет разный характер выпуклости, то x_0 называется **точкой перегиба** функции f.

2.4.3. Асимптоты.

Определение 2.62 (асимптот)

Пусть даны функция $f : X \to \mathbb{R}$ и x_0 — предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$. Говорят, что f имеет **вертикальную асимптоту в точке x_0**, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен $+\infty$ или $-\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$. Может получиться и так, что оба односторонних предела бесконечны.

Пусть $+\infty$ — предельная точка множества X. Говорят, что f имеет **наклонную асимптоту $y = ax + b$ при $x \to +\infty$**, если $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$. Аналогичное определение даётся для **наклонной асимптоты при $x \to -\infty$**.

Замечание 2.63

Мы будем подробно рассматривать только случай $x \to +\infty$, случай $x \to -\infty$ полностью аналогичен.

Утверждение 2.64 (о нахождении асимптот)

Функция $f(x)$ *имеет асимптоту* $y = ax + b$ *при* $x \to +\infty$ *в том и только в том случае, если существуют соответственно равные коэффициентам пределы*

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax). \tag{8}$$

2.4.4. Правило Бернулли — Лопиталя.

Теорема 2.65 (правило Бернулли — Лопиталя)

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *— предельная точка интервала* (a, b), *где* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. *Пусть функции* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в проколотой окрестности точки* x_0 *и* $g'(x) \neq 0$ *в этой окрестности. Пусть либо* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, *либо* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$. *Тогда если существует в* $\overline{\mathbb{R}}$ *предел* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Без доказательства.

2.4.5. Метод Ньютона (метод касательных) приближенного решения уравнений.

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, определенная на отрезке $[a, b]$, непрерывна, причем $f(a)f(b) < 0$. Тогда по теореме Больцано — Коши о промежуточных значениях уравнение $f(\xi) = 0$ имеет хотя бы одно решение, лежащее в интервале (a, b). Метод последовательных делений отрезка пополам, использованный в доказательстве теоремы Больцано — Коши, может быть также использован и для практических целей как средство приближенного решения уравнения.

Теорема 2.66 (метод Ньютона (метод касательных))

Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *принимает значения разных знаков на концах отрезка, т. е.* $f(a)f(b) < 0$, *и имеет непрерывные первую и вторую производные, постоянного знака на* $[a, b]$. *Пусть* $x_1 = \begin{cases} a, & \text{если } f(a)f''(a) > 0, \\ b, & \text{если } f(b)f''(b) > 0, \end{cases}$ $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $x_n \to \xi$ *при* $n \to \infty$, *где* $\xi \in (a, b)$ *— единственное решение уравнения* $f(x) = 0$ *на интервале* (a, b).

Без доказательства.

§ 2.5. Первообразная.
2.5.1. Определение первообразной.

Определение 2.67 (первообразной)

Функцию $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называют первообразной или неопределенным интегралом функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \langle a, b\rangle$.
Функцию $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называют обобщенной первообразной функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, если
1) F непрерывна на $\langle a, b\rangle$;
2) $F'(x) = f(x)$ на $\langle a, b\rangle$ за исключением, возможно, конечного числа точек.
Для (обобщенной) первообразной функции $f(x)$ используют обозначение $\int f(x)\,dx$.

Замечание 2.68 (об интеграле и первообразной)

Первообразная — это операция, обратная к операции дифференцирования, а интеграл, который рассматривается в следующей главе, — это площадь подграфика. Интеграл по отрезку $[a,b]$ от функции f обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Тем самым в результате нахождения первообразной находится функция, а результат нахождения интеграла — число. Их обозначения похожи друг на друга, но имеют отличия. Это является отражением тесной связи интеграла и первообразной, а именно если есть некоторая первообразная $F(x)$ функции f на $[a,b]$, то при некоторых условиях на функцию f есть равенство $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, называемое формулой Ньютона — Лейбница, связывающее интеграл с первообразной. Но это будет подробно рассмотрено в следующей главе.

Записываемый в обозначении символ dx указывает на то, что взятие первообразной есть операция, обратная к операции нахождения дифференциала. А именно, если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ и мы хотим проверить, что это действительно первообразная, то надо ее продифференцировать, т. е. взять от нее дифференциал, и тогда мы должны получить дифференциал с исходной функцией, т.е. равенство $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$, в котором появляется dx.

Замечание 2.69

Если добавить к функции константу, то ее производная не изменится.

Теорема 2.70 (о множестве первообразных)

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *— некоторая функция.*
1) Если $F(x)$ *— (обобщенная) первообразная* $f(x)$*, то* $F(x) + C$*, где* C *— произвольная константа, тоже (обобщенная) первообразная* $f(x)$*.*
2) Если $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *— две (обобщенные) первообразные* $f(x)$*, то* $F_2(x) = F_1(x) + C$ *с некоторой константой* $C \in \mathbb{R}$*.*

Замечание 2.71

Теорема 2.70 указывает причину, по которой первообразную рассматривают на промежутке. Если рассматривать функцию при нахождении ее первообразной например на двух несоприкасающихся промежутках, то теорема 2.70 была бы неверна. Имея две первообразных и пытаясь выразить одну через другую, мы на одном из промежутков имели бы одну константу, а на втором — другую, и поскольку эти промежутки не соприкасаются и никак друг с другом не связаны, появился бы разнобой, т. е. первообразные отличались бы на свою константу на каждом из промежутков, что нежелательно (как будет видно из дальнейшего).

Замечание 2.72 (об обозначении первообразной)

Знаком $\int$ обычно обозначают множество всех первообразных или какую-либо из этих первообразных. Поэтому если найдена какая-то первообразная F функции f, то пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Здесь отражено следующее содержание: найдя одну из первообразных, мы находим их все.

2.5.2. Линейность, интегрирование по частям и замена переменной для первообразных.

Возникает естественный вопрос: как искать первообразную? Для этого используется некоторый базис в виде таблицы первообразных, которая получается из таблицы производных, если в ней считать заданной производную и получать функцию, от которой эта производная была взята. Кроме этого есть три утверждения, которые помогают искать первообразные функций, получаемых из тех, первообразные которых указаны в таблице. Это линейность, интегрирование по частям и замена переменной.

Таблица простейших неопределенных интегралов:

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,\ x > 0;\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0;$

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R};\quad \int e^x\,dx = e^x + C,\ x \in \mathbb{R};$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ x \in \mathbb{R};\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C,\ x \in \mathbb{R};$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z};$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi),\ k \in \mathbb{Z};$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \quad x \in [-1; 1];$$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,\ |x| \neq 1;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C,\ x \in \mathbb{R};$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C,\ |x| > 1.$

Теорема 2.73 (о линейности первообразной)

Если $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *имеют (обобщенные) первообразные, то любая их линейная комбинация* $\alpha f(x) + \beta g(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *тоже имеет (обобщенную) первообразную, причем*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

Теорема 2.74 (формула интегрирования по частям для первообразной)

Если $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы и $f'g$ имеет первообразную, то fg' тоже имеет первообразную и

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx. \tag{9}$$

Замечание 2.75

На практике формулу интегрирования по частям записывают также в виде:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x)$$
$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx. \tag{10}$$

Теорема 2.76 (о замене и подстановке в неопределенном интеграле)

Пусть даны функции $f : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $\varphi : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ *такие, что определена композиция* $f(\varphi(x))$.
1) *<u>Замена.</u> Если a)* φ *дифференцируема,*
b) f *имеет первообразную* F,
то $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ *тоже имеет первообразную и*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)).$$

2) *<u>Подстановка.</u> Если a)* φ *дифференцируема, строго монотонна и имеет дифференцируемую обратную* φ^{-1},
b) $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ *имеет первообразную* $G(x)$,
то $f(y)$ *тоже имеет первообразную и*

$$\int f(y)\,dy = G(\varphi^{-1}(y)).$$

Замечание 2.77

Надо обратить внимание на то, что при выполнении подстановки, функция должна быть обратимой.

Замечание 2.78

Замена осуществляется в том случае, если в результате преобразований подынтегральная функция приобрела вид $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$. В этот момент подынтегральное выражение надо представить в виде $\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x)$. после чего заменить выражение $\varphi(x)$ одной буквой, например $y=\varphi(x)$, и перейти к поиску первообразной $\int f(y)\,dy$. Найдя её, вернуться к прежней переменной x.

Пример 2.79 (на замену)

Найдем первообразную $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$. Подынтегральную функцию можно записать как произведение $\ln x \cdot \frac{1}{x}$. Тогда правый сомножитель есть не что иное как производная от логарифма. Следовательно,
$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int \ln x \cdot (\ln x)'\,dx = \int \ln x\, d\ln x$. Полагая $\ln x = y$, перейдем к поиску первообразной: $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + C$. Возвращаясь к переменной x, получаем $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$.

Определение 2.80 (гиперболических функций)

Функции косинус гиперболический $\operatorname{ch} x$ и синус гиперболический $\operatorname{sh} x$ определяются равенствами $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Свойства гиперболических функций:
$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

Пример 2.81 (на подстановку)

Найдем первообразную $\int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy$. Используем записанное выше тождество для гиперболических функций в виде $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$, Оно подсказывает, что если на место y в нашем интеграле подставить $\operatorname{sh} x$, т. е. положить $y = \operatorname{sh} x$ и учесть, что $dy = \operatorname{sh}' x\,dx = \operatorname{ch} x\,dx$, то получится значительно более простое выражение:
$\int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = \int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x}} = \int dx = x + C$. В найденную первообразную на место x надо подставить выражение для функции, обратной к функции $\operatorname{sh} x$. Найдем его (существование обратной гарантируется строгим возрастанием исходной функции). Для этого из равенства $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ выразим x через y. Записывая последнее равенство в виде квадратного относительно e^x уравнения $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, находим, что $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. В итоге $x = \operatorname{sh}^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

2.5.3. Первообразная рациональной функции.

При взятии производных мы всегда действуем по правилам нахождения производных, и если функция элементарна, то получаемый результат окажется в этом же классе функции. С первообразными дело обстоит иначе. Оказывается, что не всегда первообразная элементарной функции выражается через элементарные функции. Примерами таких функций служат функции $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, e^{-x^2}. Как узнать, выражается ли первообразная той или иной функции через элементарные? Ответ на этот вопрос довольно сложен, и мы этот вопрос рассматривать не будем. С практической точки зрения можно поступить так: взять какой-либо фундаментальный справочник по первообразным или обратиться к какому-либо программному средству, приспособленному для нахождения первообразных, и если в нем нет первообразной интересующей вас функции, то, скорее всего, она через элементарные не выражается.

Однако не все так плохо: есть большой класс функций, для которых первообразная выражается через элементарные — это класс рациональных функций.

Определение 2.82 (рациональной функции)

Функции вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, называются рациональными. Такие функции определены всюду на $\mathbb{R}$ за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

Теорема 2.83 (о первообразной рациональной функции)

Любая рациональная функция на каждом из промежутков своей области определения имеет первообразную, причем эта первообразная выражается через рациональные функции, а также функции $\ln x$ *и* $\operatorname{arctg} x$.

Определение 2.84 (простейших дробей)

Рациональные функции вида $\frac{a}{(x-x_0)^k}$ и $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, где $p^2 - 4q < 0$, называются **простейшими дробями** над полем $\mathbb{R}$.

Замечание 2.85 (о разложение рациональной функции на простейшие дроби)

Пусть $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная функция, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с вещественными коэффициентами. Из курса алгебры известно, что $R(x)$ представляется в виде

$$R(x) = p(x) + \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2 + p_j x + q_j)^k},$$

где многочлен $p(x)$ — частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$, числа x_j, p_j, q_j определяются разложением многочлена $Q(x)$ над полем $\mathbb{R}$:

$$Q(x)=\alpha(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{m_n},$$

а числа a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} определяются методом неопределенных коэффициентов.

Утверждение 2.86 (первообразная вида $\int \frac{dx}{(x-x_0)^k}$)

$$\int (x-x_0)^{-k}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1} + C, & k \neq 1,\\ \ln|x-x_0| + C, & k = 1. \end{cases}$$

Утверждение 2.87 (первообразная вида $\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^k}$)

Пусть $a \neq 0$. *Тогда*

$$\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{1}{-k+1}(u^2+a^2)^{-k+1} + C, & k \neq 1,\\ \ln(u^2+a^2) + C, & k = 1. \end{cases}$$

Утверждение 2.88 (рекурентная формула для первообразной вида $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$)

Пусть $a \neq 0$ *и* $I_k(u) = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$. *Тогда* $I_1(u) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{u}{a}) + C$;

$$I_{k+1}(u) = \frac{1}{2ka^2}\left(\frac{u}{(u^2+a^2)^k} + (2k-1)I_k(u)\right),\ k \in \mathbb{N}.$$

2.5.4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Определение 2.89 (обыкновенного дифференциального уравнения)

Обыкновенным дифференциальным уравнением называются уравнения вида $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, где F — заданная функция, x — вещественный аргумент (переменная), y — неизвестная (искомая) функция, зависящая от аргумента x. Кратко записывают $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ называются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого пордка.

Уравнения вида $F(x, y, y', y'') = 0$ называются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго пордка.

В частности, одними из самых просто решаемых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка являются так называемые уравнения с разделяющимися переменными.

Определение 2.90 (уравнений с разделяющимися переменными)

Уравнения, которые можно представить в виде

$$y' = f(x)g(y), \tag{11}$$

называются уравнениями с разделяющимися переменными

Заметим, что если в какой-либо точке $y = c_0$ функция $g(y)$ обращается в ноль, то функция $y(x) \equiv c_0$ является решением уравнения (11), так как обращает его в тождество.
Чтобы найти другие решения, представим производную y' как отношение дифференциалов: $y' = \frac{dy}{dx}$, и «разделим переменные», приведя уравнение (11) к виду

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx. \tag{12}$$

Естественно предположить, что функции $f(x)$ и $\frac{1}{g(y)}$ имеют первообразные соответственно $F(x)$ и $G(y)$ и первообразная G обратима. Так как $y = y(x)$, то в развернутом виде левую часть в (12) можно записать $\frac{1}{g(y(x))}y'(x)\,dx$. По теореме 2.76 о замене переменной в неопределенном интеграле $\frac{1}{g(y(x))}y'(x)$ имеет первообразную $G(y(x))$. Поэтому получаем

$$G(y(x)) = F(x) + C \tag{13}$$

или кратко $G(y) = F(x) + C$. В уравнении (13) функция y искомая. Ввиду предположения обратимости функции G из (13) имеем

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C). \tag{14}$$

Заметим, что в качестве решения получаем не одну функцию, а семейство функций, параметризованное константой C, т. е. для любой константы C функция y в (14) является решением.

Для получения конкретного решения к уравнению необходимо добавить дополнительное условие. Так, если зафиксировать значение функции y в какой-либо точке, например, задав условие $y(x_0) = y_0$, называемое начальным условием, то можно найти константу C. Задача о поиске решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется задачей Коши. Чтобы решить задачу Коши для уравнения (11) надо подставить начальное условие в (14): $y_0 = y(x_0) = G^{-1}(F(x_0) + C)$, или в (13): $G(y_0) = F(x_0) + C$. Из последнего соотношения C легко выражается. Решение, соответствующее найденной из начальных условий константе C, есть решение задачи Коши.

2.5.5. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 2.91 (линейного дифференциального уравнения второго порядка)

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называют уравнения вида

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x). \tag{15}$$

Здесь $y(x)$ — искомая функция, $p(x)$ и $q(x)$ — функции от x, называемые коэффициентами, а $f(x)$ называют правой частью. Если правая часть тождественно равна нулю, т. е. $f(x) \equiv 0$, то уравнение называют однородным.

Рассматрим только частный случай однородного уравнения, у которого коэффициенты p и q постоянны, т. е. линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \tag{16}$$

где p и q — константы. В этом случае можно получить явное решение и его проанализировать. Будем искать решение в виде $y(x) = e^{\lambda x}$. Подставим в уравнение (16):

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0. \tag{17}$$

Подбираем λ так, чтобы это уравнение выполнялось тождественно. Функция $e^{\lambda x}$ всюду отлична от нуля, поэтому уравнение (17) равносильно такому:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{18}$$

называемому характерестическим уравнением для дифференциального уравнения (16).

Способ решения уравнения (18) известен. Рассмотрим разные возможности для дискриминанта $D = p^2 - 4q$ характеристического уравнения:

I. $D > 0$. Характеристическое уравнение (18) имеет два различных вещественных корня $\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. В этом случае функции

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

являются различными решениями уравнения (16). Они различны в том смысле, что невозможно одно из них выразить через другое умножением на константу (т. е. они линейно независимы). Любая линейная комбинация этих решений

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{19}$$

тоже будет решением. Получили семейство решений, зависящих от двух параметров C_1, C_2.

Для получения единственного решения надо поставить начальные условия. Добавим к уравнению начальные условия

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \tag{20}$$

Задача о поиске решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего начальным условиям (20), является задачей Коши для такого уровнения.
Добавление к уравнению (16) условий (20) позволяет однозначно найти соответствующие константы и получить одно решение.
В случае $x_0 = 0$ начальные условия (20) примут вид

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \tag{21}$$

Для решения (19), удовлетворяющего начальным условиям (21), имеем

$$y(0) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + C_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} = y_0,$$
$$y'(0) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} = y_1,$$

Получили систему

$$\begin{cases} C_1 + C_{=} y_0, \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = y_1, \end{cases} \tag{22}$$

Поскольку числа λ_1, λ_2 различны, система (22) имеет единственное решение.

Замечание 2.92

Заметим, что количество условий, налагаемых для получения одного решения, зависит от того, до какого порядка производные участвуют в уравнении. Так, в уравнении первого порядка, рассмотренном выше, такое условие одно, в рассматриваемом сейчас уравнении второго порядка — два. Будь уравнение третьего порядка, для обеспечения единственности решения понадобилось бы три условия, и т. д.

II. $D = 0$. Характеристическое уравнение (18) имеет единственный вещественный корень кратности два $\lambda_{1,2} = \lambda_0 = \frac{-p}{2}$.
В этом случае функции

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, \quad y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (16).
III. $D < 0$. Характеристическое уравнение (18) не имеет вещественных корней.
Будем искать решения в модифицированном виде

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

с вещественными α, β. Найдем, что для $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \pm\frac{\sqrt{-D}}{2} = \pm\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, указанные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (16).

Для определенности считаем, что $\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} > 0$. Отметим, что в рассматриваемом случае комплексные числа $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \frac{-p \pm i\sqrt{-D}}{2} = \frac{-p \pm i\sqrt{4q-p^2}}{2}$ являются различными корнями (парой комплесно-сопряженных корней $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \overline{\alpha + i\beta} = \overline{\lambda_1}$) характеристического уравнения (18). При этом комплекснозначные функции

$$z_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha + i\beta}x = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = y_1(x) + iy_2(x),$$
$$z_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha - i\beta}x = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) = y_1(x) - iy_2(x)$$

также являются парой линейно независимых (над полем $\mathbb{C}$) решений уравнения (16). Здесь для комлекснозначной функции от вещественного аргумента производные вычисляются по формуле $z^{(n)}(x) = (\operatorname{Re} z)^{(n)}(x) + i(\operatorname{Im} z)^{(n)}(x)$.