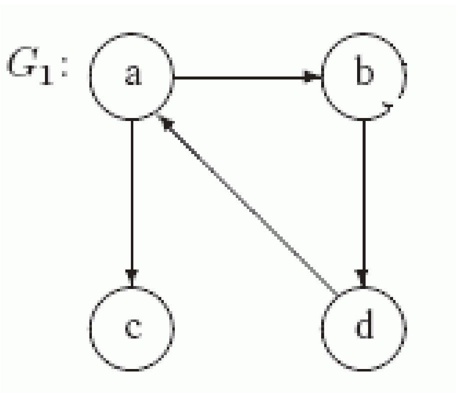
Введение в теорию графов.

Определение. *Ориентированным графом* G называется пара (V, E), где V — конечное множество вершин графа, а E — некоторое подмножество множества $V \times V$ или бинарное отношение на V. Элементы E называют *ребрами* (*дугами*). Для ребра $e = (u, v) \in E$ вершина u называется *началом* e, а вершина v — *концом* e, говорят, что ребро e ведет из u в v.

Пример.



В нашем курсе мы ограничимся рассмотрением графов, не содержащих ребер вида (u,u), называемых *петлей*.

Утверждение. Пусть ориентированный граф имеет n различных вершин. Тогда существует $2^{n(n-1)}$ различных графов с n вершинами.

Утверждение. Пусть ориентированный граф $G=(V, E)$ имеет n различных вершин и m дуг. Тогда существует $C_{n(n-1)}^{m}$ различных графов.

Определение. Графы (V_1, E_1) и (V_2, E_2) называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначная функция $f : V_1 \to V_2$, такая, что дуга (u,v) принадлежит E_1 тогда и только тогда когда дуга $(f(u),f(v))$ принадлежит E_2. Будем говорить, что f *реализует* изоморфизм графов.

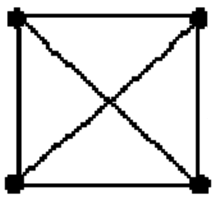
Утверждение. Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности.

Определение. Геометрический ориентированный граф G — это пара $G=(V, E)$, где V — непустое конечное множество точек трехмерного пространства, а E — множество направленных простых кривых, удовлетворяющих следующим условиям:

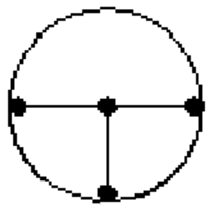
1. каждая кривая множества E содержит ровно две точки множества V, которые являются ее граничными точками;
2. кривые множества E не имеют общих точек, за исключением точек из множества V.

Очевидно, что любой абстрактный граф изоморфен некоторому геометрическому графу.

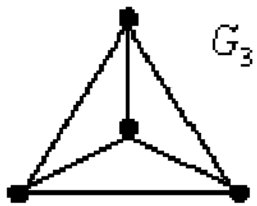
Различные внешне геометрические графы могут быть изоморфны.



K_4



G_2



G_3

Решение задачи об изоморфизме даже при маленьких размерностях затруднительно.

Утверждение. Существует $n!$ Различных взаимно-однозначных отображений вершин n-вершинного графа.

Пример. Обозначим $\varphi(n,m)$ количество неизоморфных ориентированных графов с n вершинами и m дугами.

$\varphi(n,0)=1$, $\varphi(n,1)=1$, $\phi(3,2)=4$.

Все неизоморфные графы для третьего случая приведены на рисунке.

Определение. В ориентированном графе *полустепенью исхода* $\delta^{+}(v)$ *вершины* v называется число исходящих из нее ребер, а *полустепенью захода* $\delta^{-}(v)$ — число входящих в вершину v ребер.

Утверждение. В ориентированном графе $G=(V, E)$

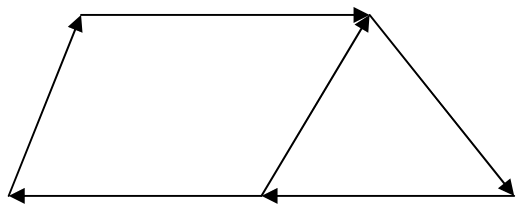
$$\sum_{v\in V}\delta^{+}(v)=\sum_{v\in V}\delta^{-}(v)=|E|.$$

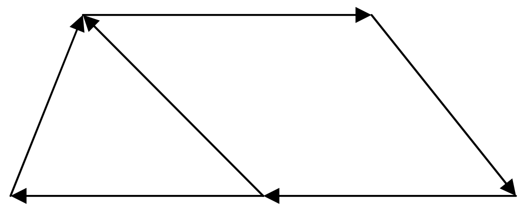
Необходимое условие изоморфизма.

Утверждение. Пусть ориентированные графы (V_1, E_1) и (V_2, E_2) изоморфны и функция $f: V_1 \to V_2$ реализует изоморфизм. Тогда для $\forall v \in V_1$ $\delta^-(v) = \delta^-(f(v))$ и $\delta^+(v) = \delta^+(f(v))$.

Следствие. Для изоморфных графов (V_1, E_1) и (V_2, E_2) множества пар значений $\{(\delta^-(v), \delta^+(v)) / v \in V_1\}$ и $\{(\delta^-(v), \delta^+(v)) / v \in V_2\}$ должны совпадать.

Пример. Приведенные на рисунке графы имеют совпадающие наборы пар полустепеней захода и исхода, но не изоморфны.





Способы задания графов.

Пусть орграф $G=(V, E)$ имеет n различных вершин и m дуг

Матрицей инцидентности называется $n\times m$ матрица I, в которой $i_{ve}=1$ если v начало дуги e, $i_{ve}=-1$ если v конец дуги e и равно 0 в остальных случаях.

Матрицей смежности называется $n\times n$ матрица A, в которой $a_{vu}=1$ если $(v,u)\in E$ и равно 0 в противном случае.

Списком смежности вершины v называется список вершин u, таких что $(v,u)\in E$.

Определение. *Маршрут* в графе G — это такая последовательность $R = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_s, v_s$ вершин и ребер в G, что ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1} при всех $0 \le i \le s - 1$. Если $v_0 \neq v_s$, то говорят, что R *соединяет* вершины v_0 и v_s; если к тому же все вершины в R различны, то он называется *путем*. Количество ребер в пути называется *длиной пути*.

Можно использовать сокращенную запись для маршрута и пути
$R = v_0, v_1, \ldots, v_s$.

Утверждение. Из любого маршрута соединяющего вершины v_0 и v_n можно выделить путь соединяющего вершины v_0 и v_n.

Определение. Орграф G называется *сильно связным*, если каждая пара его вершин соединена путем (или, что равносильно, маршрутом).

В отличие от изоморфизма, связность графа проверяется достаточно легко.

Определение. Маршрут R, в котором $v_0 = v_n$, называется *замкнутым*, а если при этом он не имеет других повторяющихся вершин, то называется *циклом*.

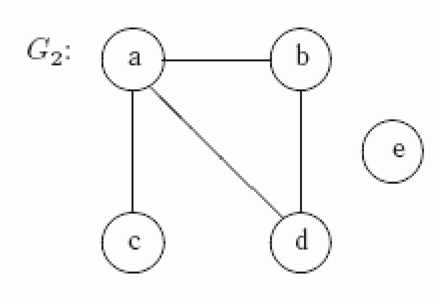
Утверждение. Из любого замкнутого маршрута можно выделить цикл.

Неориентированный граф

Определение. *Неориентированным графом* G называется пара (V, E), где V — конечное множество вершин графа, а E — некоторое подмножество неупорядоченных пар вершин из V. Элементы E называют *ребрами*.

Неупорядоченный граф можно рассматривать как ориентированный граф в котором множество E вместе с каждой дугой содержит встречную дугу. Если это не оговаривается особо, то обычно под графом подразумевается неориентированный граф. Ребра графа изображают отрезком или ненаправленной кривой.

Пример.



Утверждение. Пусть неориентированный граф имеет n различных вершин. Тогда существует $2^{C_n^2}$ различных графов с n вершинами.

Утверждение. Пусть неориентированный граф $G=(V, E)$ имеет n различных вершин и m дуг. Тогда существует $C_{C_n^2}^m$ различных графов.

Определение. Ребро (u, v) и вершина v *инцидентны*. *Степенью* $d(v)$ *вершины* v называется число инцидентных ей ребер.

Лемма. (Лемма о рукопожатиях). Сумма степеней вершин любого графа G равна удвоенному числу его ребер

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2|E(G)|.$$

Следствие. (теорема Эйлера о нечетных вершинах). Количество вершин графа с нечётной степенью всегда чётно.

Определение. Вершина v называется *изолированной*, если $d(v)=0$, и *висячей*, если $d(v)=1$.

Определение. Последовательность $R = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_s, v_s$ вершин и ребер в G таких, что $v_0 \neq v_s$, ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1} при всех $0 \leq i \leq s-1$ и все вершины различны, называется *путем*.

Определение. Последовательность $R = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_s, v_s$ вершин и ребер в G таких, что $v_0 = v_s$, ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1} при всех $0 \leq i \leq s-1$ и все вершины и ребра различны, называется *циклом*.

Замечание. Длина минимального цикла в неориентированном графе 3.

Лемма. Если в графе есть хотя бы одно ребро, но нет изолированных и висячих вершин, то в нем есть цикл.

Части графов

Определение. Граф $G_1=(V_1, E_1)$ называется подграфом графа $G=(V, E)$, если $V_1 \subset V$ и $E \subset \{(u,v) \in E / u,v \in V_1\}$.

Определение. Граф $G_1=(V_1, E_1)$ называется подграфом графа $G=(V, E)$ порожденным множеством V_1, если $V_1 \subset V$ и $E = \{(u,v) \in E / u,v \in V_1\}$.

Определение. *Операция удаления ребра e* преобразует граф $G=(V, E)$ в подграф $G = (V, E \setminus \{e\})$.

Определение. *Операция удаления вершины v* преобразует граф $G=(V, E)$ в подграф $G = \left(V \setminus \{v\}, E \setminus \{(v,u) / \forall u \in V\}\right)$.

Определение. Граф G называется *связным*, если каждая пара его вершин соединена путем.

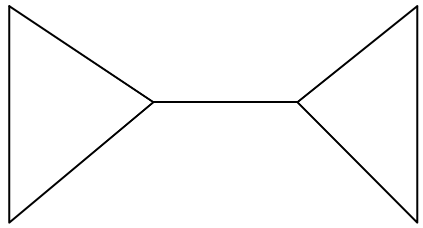
k-связные графы.

Определение. *Реберной связностью* $\lambda(G)$ графа G называется наименьшее число ребер, после удаления которых граф становится несвязным. Говорят, что граф G *рёберно k-связен*, если $\lambda(G) \geq k$.

Определение. *Вершинной связностью* $k(G)$ графа G называется наименьшее число вершин, после удаления которых граф становится несвязным или одновершинным.
Говорят, что граф G *k-связен*, если $k(G) \geq k$.

Утверждение. (необходимое условие k-связности). Если граф G k-связен (*рёберно k-связен*), то для любой вершины v $d(v) \geq k$.

Пример. Условие не является достаточным.



Теорема. Для любого графа G $\lambda(G) \geq k(G)$.

Необходимое условие изоморфизма неориентированных графов.

Утверждение. Для изоморфных графов (V_1, E_1) и (V_2, E_2) множества $\{d(v) / v \in V_1\}$ и $\{d(v) / v \in V_2\}$ должны совпадать.

Задача изоморфизма подграфа.

Пусть даны графы G=(V, E) и G_1=(V_1, E_1). Существует ли подграф графа G изоморфный графу G_1.

Определение. Граф на n вершинах называется полным графом или *кликой*, если любые две вершины соединены ребром. Обозначается K_n.

Задача о клике.

Существует ли подграф графа G изоморфный K_n.

29

ределение. Множество $V_1 \subset V$ называется независимым в графе G=(V, E), если для любых вершин u и v из V_1 $(u,v) \notin E$.

Задача о независимом множестве.

Существует ли подграф графа G изоморфный вырожденному графу на n вершинах.

Определение. Граф $\overline{G} = (V, \overline{E})$ называется дополнением к графу G=(V, E), если $\overline{E} \cap E = \varnothing$ и $(V, \overline{E} \cup E)$ полный граф.

Утверждение. Клика графа G=(V, E) является независимым множеством графа $\overline{G} = (V, \overline{E})$.