# 1. Электростатика

## Урок 2

### Теорема Гаусса

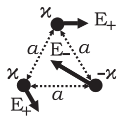
1.1. (1.19 из задачника) Используя теорему Гаусса, найти: а) поле плоскости, заряженной с поверхностной плотностью $\sigma$; б) поле плоского конденсатора; в) поле равномерно заряженной прямолинейной бесконечной нити с линейной плотностью $\varkappa$.

**Решение** а) $\mathbf{E} = 2\pi\sigma\mathbf{z}/|z|$; б) внутри конденсатора $|E| = 4\pi q/S$, вне $\mathbf{E} = 0$; в) $\mathbf{E} = \frac{2\varkappa}{r^2}\mathbf{r}$.

1.2. (1.20 из задачника) Найти величину и направление сил, действующих на единицу длины для каждой из трех параллельных бесконечных прямых нитей, находящихся друг от друга на расстоянии $a$ и заряженных одна с линейной плотностью $-\varkappa$, а две других – с линейной плотностью $+\varkappa$.

**Решение** Направление сил показано на рисунке.

$$E_+ = \frac{2\varkappa}{a}, E_- = \frac{2\varkappa}{a}\sqrt{3}.$$




1.3. (1.21 из задачника) Вывести граничные условия для нормальных компонент электрического поля и соответствующих производных потенциала, если граница заряжена с поверхностной плотностью $\sigma$.

**Решение** $\mathrm{E}_{2\mathrm{n}} - E_{1n} = 4\pi\sigma$, где внешняя нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности раздела направлена из среды 1 в среду 2.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma.$$

1.4. (1.22 из задачника) Показать, что поле вблизи поверхности металла $\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности, а $\sigma$ – поверхностная плотность зарядов.

1.5. (1.23 из задачника) Используя теорему Гаусса, найти поля равномерно заряженных:

а) шарика радиуса $a$ с объемной плотностью $\rho$;

б) бесконечного цилиндра радиуса $a$ с линейной плотностью $\eta$;

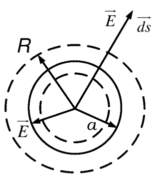
в) бесконечного плоского слоя толщины $2a$ с объемной плотностью заряда $\rho$.

**Решение** Эти задачи, обладают такой симметрией распределения зарядов, что можно, не решая, указать поверхности, на которых напряженность электрического поля **E** перпендикулярна ей в каждой точке и постоянна по величине. Для нахождения поля **E** в таких задачах достаточно применения теоремы Гаусса, смысл которой для вакуума состоит в следующем: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность $S$ равен полному заряду, заключенному внутри нее (умноженному на $4\pi$ в системе $CGSE$). Математическое выражение теоремы Гаусса имеет вид

$$\oint\limits_S (\mathbf{E}\, d\mathbf{s}) = 4\pi \int\limits_V \rho dv, \tag{1}$$

где $d\mathbf{s}$ – вектор, по величине равный величине элементарной площадки $ds$, а по направлению совпадает с направлением внешней нормали к этой площадке, т. е. нормали, направленной наружу; $\rho$ – объемная плотность заряда. Интеграл с левой стороны есть поток вектора **E** через замкнутую поверхность $S$. Под интегралом соответсвенно стоит скалярное произведение векторов **E** и $d\mathbf{s}$, равное потоку вектора **E** через малую площадку $ds$. Интеграл с правой стороны берется по объему, заключенному внутри поверхности, и равен полному заряду, находящемуся в нем. Успех решения с помощью соотношения (1) обусловливается тем, что, выбирая поверхность интегрирования, на которой напряженность поля $E$ постоянна, можно $E$ вынести за знак интеграла и тогда это соотношение дает возможность найти **E**.

а) Совместим начало сферической системы координат с центром шара.




Ввиду сферической симметрии распределения заряда ясно, что вектор **E** может быть направлен только вдоль радиуса и зависеть только от величины радиуса. Поток вектора **E** через сферическую поверхность радиуса $R$ независимо от величины радиуса запишется так:

$$\Phi = \oint\limits_S (\mathbf{E}\, d\mathbf{s}) = E \oint\limits_S ds = E \cdot 4\pi R^2,$$

если **E** параллелен радиус-вектору **R** и $\Phi = -E \cdot 4\pi R^2$, если **E** антипараллелен **R**, поскольку косинус угла между **E** и $d\mathbf{s}$ будет равен (-1).

С другой стороны,

$$4\pi \int\limits_V \rho dv = 4\pi\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \text{при} \qquad R \leqslant a$$

и

$$4\pi \int\limits_V \rho dv = 4\pi\rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \qquad \text{при} \qquad R > a.$$

Поэтому

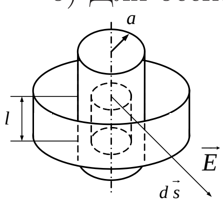
$$\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{R} \qquad \text{при} \qquad R \leqslant a,$$

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho a^3\frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{Q}{R^3}\mathbf{R} \qquad \text{при} \qquad R > a,$$

где $Q = \frac{4}{3}\pi a^3\rho$ – полный заряд шара.

Таким образом, равномерно заряженный шар создает во внешнем пространстве такое поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в его центре. Этот результат остается справедливым при любом сферически симметричном распределении заряда по объему шара.

б) Для бесконечного равномерно заряженного цилиндра вектор напряженности




электрического поля лежит в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, и может зависеть только от расстояния от точки наблюдения до оси цилиндра. В цилиндрической системе координат с осью $Z$ вдоль оси цилиндра вектор напряженности $\mathbf{E}$ направлен вдоль $\mathbf{r}$. Построим два коаксиальных цилиндра длины $\ell$ с радиусами $r < a$ и $r > a$. Поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность каждого из цилиндров запишется так:

$$\Phi = \oint_S (\mathbf{E}d\mathbf{s}) = E\oint_S ds = E \cdot 2\pi r\ell.$$

При вычислении потока мы считали, что $\rho > 0$, и, значит, вектор $d\mathbf{s}$ направлен по $\mathbf{r}$. Поток вектора $\mathbf{E}$ через торцы цилиндров равен нулю, поскольку на них $\mathbf{E}$ и $\mathbf{r}$ перпендикулярны.

С другой стороны,

$$4\pi\int_V \rho\, dv = 4\pi\frac{\eta}{\pi a^2}\int_V dv = \frac{4\eta}{a^2}\pi r^2\ell \qquad \text{при} \qquad r < a,$$

$$4\pi\int_V \rho\, dv = 4\pi\rho\cdot\pi a^2\ell = 4\pi\eta\ell \qquad \text{при} \qquad r \geq a.$$

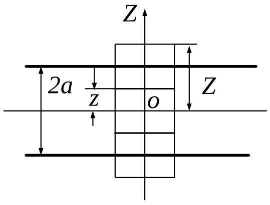
Подставляя найденные значения в уравнение (1), получаем:

$$\mathbf{E} = \frac{2\eta}{a^2}\mathbf{r} \qquad \text{при} \qquad r \leqslant a,$$

$$\mathbf{E} = \frac{2\eta}{r^2}\mathbf{r} \qquad \text{при} \qquad r > a.$$

в) Пусть средняя плоскость пластинки занимает положение плоскости $(x, y)$. В силу симметрии распределения заряда относительно плоскости $(x, y)$, вектор $\mathbf{E}$ может зависеть только от координаты $z$ и направлен от плоскости, если пластина заряжена положительно, и к плоскости, если ее заряд отрицателен.

Построим куб с основаниями, симметрично расположенными по разные стороны от средней плоскости. Если $S$ – площадь каждого основания, то поток вектора $\mathbf{E}$



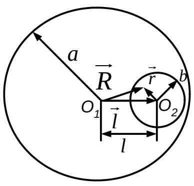

через оба основания равен $2ES$. Поток через боковую поверхность куба равен нулю, так как на ней векторы $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{s}$ взаимно перпендикулярны. Значит, поток через поверхность куба равен $2ES$. С другой стороны, правая сторона выражения (1) будет равна: $4\pi\rho S \cdot |2z|$, если $z \leqslant a$, и $4\pi\rho S \cdot 2a$, если $z > a$. Поэтому

$$\mathbf{E} = 4\pi\rho\mathbf{z} \quad \text{при} \quad |z| \leqslant a \ ,$$

$$\mathbf{E} = 4\pi\rho a \frac{\mathbf{z}}{z} \quad \text{при} \quad |z| > a \ .$$

1.6. (1.24 из задачника) Внутри шара радиуса $a$, равномерно заряженного по объему с плотностью $\rho$, имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой $b$, а центр отстоит от центра шара на расстоянии $\ell$ таком, что $(\ell + b < a)$. Найти электрическое поле $\mathbf{E}$ в полости.

**Решение** Поле, создаваемое шаром с полостью, можно рассматривать как суперпо-

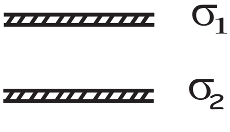



зицию двух полей: поля сплошного шара радиуса $a$, заряженного с плотностью $\rho$, и поля сплошного шара радиуса $b$, заполняющего полость с объемной плотностью $-\rho$. Нулевой заряд полости представлен как $\rho + (-\rho) = 0$. Тогда, используя результат задачи 1.23 а, находим поле в полости

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{R} - \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r} = \frac{4}{3}\pi\rho\,\boldsymbol{\ell}.$$

Поле внутри полости однородное и направлено по линии, соединяющей центр шара с центром полости, в сторону центра полости.

1.7. (1.25 из задачника) Два очень больших металлических листа, расположен-




ных один над другим, имеют поверхностную плотность зарядов $\sigma_1$ и $\sigma_2$ соответственно. Найти поверхностные плотности зарядов на внешних $\sigma_1'$, $\sigma_2'$ и внутренних $\sigma_1''$, $\sigma_2''$ сторонах листов.

**Решение** Электрическое поле **E** внутри металлических пластин, которые мы будем считать бесконечными, равно 0, поэтому поток вектора **E** через поверхность, ограниченную плоскостями внутри металла и вертикальными стенками, равен нулю. Тогда из теоремы Гаусса

$$4\pi\left(\sigma_1' + \sigma_1''\right) = 0.$$

Исходя из закона сохранения заряда получим

$$\sigma_2' + \sigma_2'' = 0,$$

$$\sigma_1' + \sigma_1'' = 0.$$

Поле внутри первой пластины, которое равно 0, образовано зарядами $\sigma_1''$ и противоположно направленным полем от остальных трех поверхностей. Тогда мы можем записать

$$\sigma_1' - \sigma_1'' - \sigma_2'' - \sigma_2' = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, получим

$$\sigma_1' = \sigma_2' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right),$$

$$\sigma_1'' = -\sigma_2'' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right).$$