Дано:

Система ограниченного объема с плотностью тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$. Размер системы a и характерное время τ изменения тока связаны соотношением $a \ll c\tau$.

Найти:

Вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ на больших расстояниях от системы токов.

Решение:

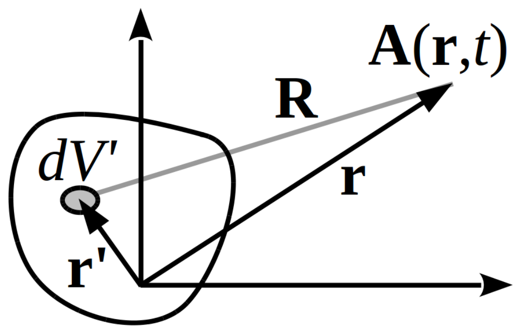
Общее решение для $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид запаздывающего потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV',$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и учтено, что сигнал доходит из точки $\mathbf{r}'$ в точку $\mathbf{r}$ за время $\frac{R}{c}$.

Из малости параметра r'/r следует

$$R \approx r - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}), \quad \frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{r^2}, \tag{1}$$



где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Тогда

$$t - R/c \approx t - r/c + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c} = t' + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c},$$

где введено обозначение $t' = t - r/c$.

С учетом заданного условия величина $\frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c}$ является малым параметром. Поэтому можно разложить $\mathbf{j}(t)$ вблизи t':

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t' + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c}\right) \approx \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'} \cdot \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c}.$$

Теперь запишем подынтегральное выражение с учетом $\frac{1}{R}$ из (1):

$$\frac{\mathbf{j}}{R} \approx \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{r} + \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{r^2} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'} \cdot \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{rc} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'} \cdot \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c} \cdot \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{r^2}.$$

Последнее слагаемое содержит произведение двух малых параметров, поэтому им можно пренебречь. Тогда искомый вектор-потенциал запишется в виде суммы трех интегралов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' + \frac{1}{cr^2} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) dV' + \frac{1}{c^2 r} \int \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) dV',$$

В последнем слагаемом $(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})$ не зависит от t', поэтому $\frac{\partial}{\partial t'}$ можно применить ко всему интегралу:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' + \frac{1}{cr^2} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) dV' + \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t'} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) dV'. \tag{2}$$

Если теперь рассматривать систему как совокупность движущихся точечных зарядов, то каждый интеграл по объему заменится на сумму по частицам. При этом изменится смысл переменной $\mathbf{r}'$: внутри интеграла она характеризовала неподвижную точку, в которой плотность тока менялась со временем, внутри же суммы $\mathbf{r}'_i$ задает положение i-го точечного заряда и уже зависит от t'. О рассмотрении суммы вместо интеграла говорят также как о переходе от *эйлеровых* координат к *лагранжевым*. Выполним этот переход отдельно для каждого интеграла.

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' = \frac{1}{cr} \sum q_i \mathbf{v}'_i = \frac{1}{cr} \sum q_i \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial t'} = \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t'} \sum q_i \mathbf{r}'_i = \frac{1}{cr} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t'} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr},$$

где $\mathbf{d} = \sum q_i \mathbf{r}'_i$ – дипольный момент системы.

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r},t) = \frac{1}{cr^2}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\cdot(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n})dV' = \frac{1}{cr^2}\sum q_i\mathbf{v}'_i(\mathbf{r}'_i\cdot\mathbf{n}) = \frac{1}{cr^2}\sum q_i\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial t'}(\mathbf{r}'_i\cdot\mathbf{n}).$$

Опустим индекс i при $\mathbf{r}'$ и преобразуем выражение внутри суммы:

$$\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial t'}(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}) = \frac{\partial}{\partial t'}\{\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n})\} - \mathbf{r}'\left(\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial t'}\cdot\mathbf{n}\right) \Leftrightarrow \mathbf{v}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}) = \frac{\partial}{\partial t'}\{\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n})\} - \mathbf{r}'(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{n}).$$

Теперь представим левую часть равенства как

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{v}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}) + \tfrac{\partial}{2\partial t'}\{\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n})\} - \tfrac{1}{2}\mathbf{r}'\,(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{n}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{v}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') - \tfrac{1}{2}\mathbf{r}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}') + \tfrac{\partial}{2\partial t'}\{\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n})\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathbf{n}\times[\mathbf{v}'\times\mathbf{r}'] + \tfrac{\partial}{2\partial t'}\{\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n})\} = \tfrac{1}{2}[\mathbf{r}'\times\mathbf{v}']\times\mathbf{n} + \tfrac{\partial}{2\partial t'}\{\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n})\}.$$

Подставим полученное выражение в сумму:

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2cr^2}\sum q_i\,[\mathbf{r}'_i\times\mathbf{v}'_i]\times\mathbf{n} + \frac{\partial}{2cr^2\partial t'}\sum q_i\{\mathbf{r}'_i(\mathbf{r}'_i\cdot\mathbf{n})\}.$$

Первое слагаемое представляет собой $\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}{r^2}$, где $\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum q_i\mathbf{r}'_i\times\mathbf{v}'_i$ – магнитный дипольный момент системы. Второе слагаемое можно переписать в форме $\frac{\partial\mathbf{Q}}{2cr^2\partial t'}$, где $\mathbf{Q}$ – вектор, компоненты которого в тензорном виде выражаются как

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\beta}n_\beta,\ \ Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i x_{i\alpha}x_{i\beta}.$$

Итак,

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}{r^2} + \frac{\dot{\mathbf{Q}}}{2cr^2}.$$

Третий член разложения вектор-потенциала, как видно из (2), равен производной по t' от второго, умноженной на $\frac{r}{c}$:

$$\mathbf{A}_3(\mathbf{r},t) = \frac{\dot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}}{2c^2r}.$$

Первый член $\mathbf{A}_1$ разложения не содержит в качестве множителя никакого малого параметра, поэтому он доминирует над $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_3$. Последние же являются членами одного порядка малости * и поэтому оба их нужно включать в выражение для $\mathbf{A}$. Обычно мультипольное разложение вектор-потенциала записывают в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \approx \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} + \left(\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}{r^2} + \frac{\dot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n}}{cr}\right) + \left(\frac{\dot{\mathbf{Q}}}{2cr^2} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}}{2c^2r}\right).$$

Первый член разложения называют *дипольным*, второй – *магнитно-дипольным*, третий – *квадрупольным*.

ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Определим магнитное поле дипольного излучения. Общая формула:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}_d(t') = \operatorname{rot}\frac{\dot{\mathbf{d}}(t')}{cr},$$

где $t' = t - r/c$, а точка над “d” означает дифференцирование по штрихованному времени t.

* Возможна ситуация, когда один малый параметр меньше другого. Например, на достаточно больших расстояниях $\frac{a}{r} \ll \frac{a}{c\tau} \sim \frac{a}{\lambda}$ и там можно пренебречь членами $\sim \frac{1}{r^2}$.

Используем тождество

$$\operatorname{rot}\{f(\mathbf{r})\boldsymbol{a}(\mathbf{r})\} = [\nabla f \times \boldsymbol{a}] + f \operatorname{rot}\boldsymbol{a},$$

где $f(\mathbf{r})$ – скалярная, $\boldsymbol{a}(\mathbf{r})$ – векторная функция координат.

В нашем случае $f = \frac{1}{cr}$, $\boldsymbol{a} = \dot{\mathbf{d}}(t - r/c)$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left[\nabla\frac{1}{cr} \times \dot{d}\right] + \frac{1}{cr}\operatorname{rot}\dot{d} = -\left[\frac{\mathbf{n}}{cr^2} \times \dot{d}\right] + \frac{1}{cr}\operatorname{rot}\dot{d}.$$

Для вычисления второго слагаемого применим тождество

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left[\nabla\xi \times \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \xi}\right].$$

Взяв $\xi = t' = t - r/c$ и $\boldsymbol{a} = \dot{\mathbf{d}}(t - r/c)$, получим $\nabla\xi = -\frac{\mathbf{n}}{c}$, откуда

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathbf{n} \times \dot{d}}{cr^2} - \frac{\mathbf{n} \times \ddot{d}}{c^2 r} = \frac{\dot{d} \times \mathbf{n}}{cr^2} + \frac{\ddot{d} \times \mathbf{n}}{c^2 r}.$$

Первое слагаемое квадратично по параметру $\frac{1}{kr}$:

$$\frac{\dot{d} \times \mathbf{n}}{cr^2} \sim \frac{1}{c\tau r^2} \sim \frac{1}{\lambda r^2} \sim \frac{k}{r^2} = \frac{k^3}{(kr)^2},$$

второе – линейно:

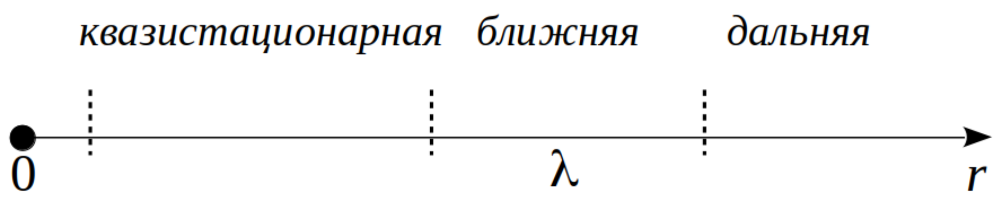
$$\frac{\ddot{d} \times \mathbf{n}}{c^2 r} \sim \frac{1}{c^2\tau^2 r} \sim \frac{1}{\lambda^2 r} \sim \frac{k^2}{r} = \frac{k^3}{kr}.$$

В зависимости от величины kr (всюду предполагается $r \gg a$, $a \ll \lambda$) различают зоны излучения:

$$\text{Квазистационарная зона } (kr \ll 1 \text{ или } a \ll r \ll \lambda).$$

$$\text{Волновая (дальняя) зона } (kr \gg 1 \text{ или } r \gg \lambda).$$

Промежуточную область ($kr \sim 1$ или $a \ll r \sim \lambda$) называют *ближней зоной*.



Дипольному излучению соответствует первый (после нулевого) член разложения *скалярного потенциала*:

$$\phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{Q(t')}{r} + \frac{1}{r}\int \frac{\partial\rho}{\partial t'}\frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c} dV'.$$

$$\phi_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r}\int \frac{\partial\rho}{\partial t'}\frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c} dV'.$$

Учтем, что $\frac{\partial\rho}{\partial t'} = -\operatorname{div}\mathbf{j}$, и выполним интегрирование по частям в интеграле по объему *:

$$\phi_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r}\int \frac{\partial\rho}{\partial t'}\frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c} dV' = -\frac{1}{r}\int \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c} dV' = \frac{1}{rc}\int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dV' = \frac{1}{rc}\mathbf{n} \cdot \int \mathbf{j} dV' = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_1).$$

* Доказательство тождества $\int \mathbf{r}' \operatorname{div}\mathbf{j} dV' = -\int \mathbf{j} dV'$ легко проводится для произвольной α-компоненты:

$$\iiint x_\alpha \frac{\partial j_\beta}{\partial x_\beta} dV = \iiint x_\alpha \frac{\partial j_\beta}{\partial x_\beta} dx_\beta dS_\beta = \iiint x_\alpha dj_\beta dS_\beta = \iint\limits_S (x_\alpha j_\beta)\, dS_\beta - \iint j_\beta dx_\alpha dS_\beta = 0 - \iiint j_\beta \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta dS_\beta =$$

$$= -\iiint j_\beta \delta_{\alpha\beta} dx_\beta dS_\beta = -\iiint j_\alpha dV.$$

Электрическое поле дипольного излучения в волновой зоне равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \mathbf{A}_1}{c\partial t} - \nabla\phi_1(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \mathbf{A}_1}{c\partial t'} - \frac{(\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{d}})}{c}\nabla\frac{1}{r} - \frac{(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{d}})}{cr}\nabla(t-r/c) \approx -\frac{\dot{\mathbf{A}}_1}{c} + \frac{\mathbf{n}}{c}(\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{A}}_1) = \frac{1}{c}\left[\dot{\mathbf{A}}_1\times\mathbf{n}\right]\times\mathbf{n}.$$

ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ВОЛНОВОЙ ЗОНЕ

Электрическое и магнитное поля дипольного излучения в волновой зоне описываются формулами:

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}}{c^2 r}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{H}\times\mathbf{n}.$$

Мгновенное значение вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{c}{4\pi}H^2(t)\mathbf{n} = \frac{c}{4\pi}\frac{\ddot{d}^2(t')\sin^2\theta(t)}{c^4 r^2}\mathbf{n} = \frac{\ddot{d}^2(t')\sin^2\theta(t)}{4\pi c^3 r^2}\mathbf{n}.$$

Теперь введем несколько новых понятий, характеризующих дипольное излучение в волновой зоне.

“Интенсивность излучения в единицу телесного угла” (она же “угловое распределение интенсивности”):

$$\frac{dJ}{d\Omega} = r^2 S = \frac{\ddot{d}^2(t')\sin^2\theta(t)}{4\pi c^3}.$$

Обратим внимание, что по размерности данная величина не интенсивность, а мощность. Поэтому введенный термин здесь заключен в кавычки. Кроме того, настоящая интенсивность – величина, усредненная по времени, угловое же распределение интенсивности может быть как мгновенным, так и средним по времени. Среднее по времени угловое распределение равно

$$\left\langle\frac{dJ}{d\Omega}\right\rangle = \frac{\langle\ddot{d}^2\sin^2\theta\rangle}{4\pi c^3}.$$

Мгновенная мощность излучения в полный телесный угол:

$$J(t) = \int\frac{\ddot{d}^2(t')\sin^2\theta}{4\pi c^3}d\Omega = \int\frac{\ddot{d}^2(t')\sin^2\theta}{4\pi c^3}\sin\theta d\theta d\phi = \frac{2\pi\ddot{d}^2(t')}{4\pi c^3}\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{2\ddot{d}^2(t')}{3c^3}.$$

То обстоятельство, что θ здесь зависит от времени, не влияет на интегрирование по телесному углу.

Средняя по времени мощность излучения в полный телесный угол:

$$\langle J\rangle = \frac{2\langle\ddot{d}^2\rangle}{3c^3},$$

где $\langle\ddot{d}^2\rangle$ – усредненный по времени квадрат модуля *вектора* $\ddot{\mathbf{d}}$ (не путать с модулем *комплексного числа*).

Домножив тождество скалярно на постоянный вектор $\mathbf{n}$, получим

$$\int\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n})dV' = -\int(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})dV'.$$