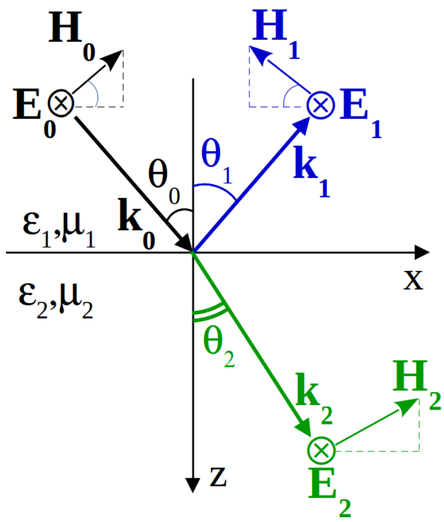
Формулы Френеля для TE-волны



Задано:

Плоская монохроматическая TE-волна $\vec{E}_0 = -|E_0|e^{i(k_{0x}x+k_{0z}z-\omega t)}\vec{e}_y$ падает на плоскую $z = 0$ границу раздела (г.р.) двух абсолютно прозрачных сред с параметрами ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 соответственно. Индексы "0,1,2" при E и H относятся в падающей, отраженной и преломленной волнам соответственно. Ось z направлена из среды 1 в среду 2.

Вывод формул Френеля.

Граничные условия для тангенциальных компонент $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\begin{cases} E_{0y} & +E_{1y} & = & E_{2y} \\ H_{0x} & +H_{1x} & = & H_{2x} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь E_i и H_i - комплексные числа (напр., $E_0 = E_{0m}e^{i(k_{0x}x-\omega t+\phi_0)}$).
В заданной геометрии общее соотношение для плоских волн $\vec{H} = \frac{c}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E}$ дает

$$H_{ix} = -\frac{c}{\omega\mu_i}k_{iz}E_{iy} \tag{2}$$

Тогда после подстановки (2) в (1) и сокращений на общий множитель $-\frac{c}{\omega}$ получим систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} E_0 & +E_1 & = & E_2 \\ \frac{k_{0z}}{\mu_1}E_0 & +\frac{k_{1z}}{\mu_1}E_1 & = & \frac{k_{2z}}{\mu_2}E_2 \end{cases}$$

Далее учтем, что $k_{1z} = -k_{0z}$, и перейдем к переменным $\xi_1 = \frac{E_1}{E_0}$ и $\xi_2 = \frac{E_2}{E_0}$:

$$\begin{cases} \xi_1 & -\xi_2 & = & -1 \\ \frac{k_{0z}}{\mu_1}\xi_1 & +\frac{k_{2z}}{\mu_2}\xi_2 & = & \frac{k_{0z}}{\mu_1} \end{cases}$$

Запишем систему в матричной форме и найдем решение по правилу Крамера:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{k_{0z}}{\mu_1} & \frac{k_{2z}}{\mu_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{k_{0z}}{\mu_1} \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{k_{0z}}{\mu_1} - \frac{k_{2z}}{\mu_2}}{\frac{k_{0z}}{\mu_1} + \frac{k_{2z}}{\mu_2}},\ \xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{2k_{0z}}{\mu_1}}{\frac{k_{0z}}{\mu_1} + \frac{k_{2z}}{\mu_2}} \tag{3}$$

Выразим проекции $\vec{k}_0$ и $\vec{k}_2$ через углы θ_0 и θ_2 *:

$$k_{0z} = k_0\cos\theta_0 = k_0\frac{\sin\theta_2\cos\theta_0}{\sin\theta_2},\quad k_{2z} = k_2\cos\theta_2 = k_0\cos\theta_2\frac{k_2}{k_0} = k_0\frac{\sin\theta_0\cos\theta_2}{\sin\theta_2} \tag{4}$$

С учетом (4) соотношение (3) приобретает вид первой пары формул Френеля – для TE-волны:

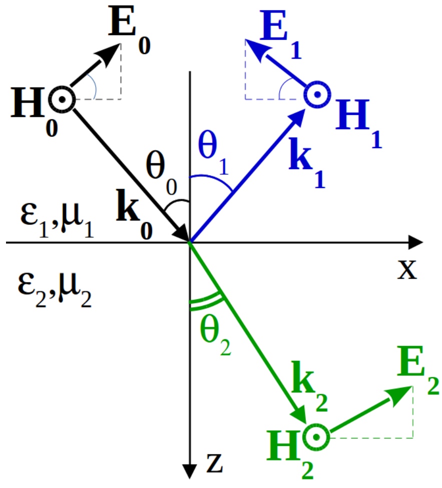
$$\xi_1 = \frac{\frac{\sin\theta_2\cos\theta_0}{\mu_1} - \frac{\sin\theta_0\cos\theta_2}{\mu_2}}{\frac{\sin\theta_2\cos\theta_0}{\mu_1} + \frac{\sin\theta_0\cos\theta_2}{\mu_2}},\ \xi_2 = \frac{\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_0}{\mu_1}}{\frac{\sin\theta_2\cos\theta_0}{\mu_1} + \frac{\sin\theta_0\cos\theta_2}{\mu_2}} = \frac{2\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_0}{\mu_2\sin\theta_2\cos\theta_0 + \mu_1\sin\theta_0\cos\theta_2}$$

В случае $\mu_1 = \mu_2$ (для оптически прозрачных сред обычно $\mu \approx 1$) формулы Френеля упрощаются:

$$\xi_1 = \frac{E_1}{E_0} = \frac{\sin\theta_2\cos\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_2}{\sin\theta_2\cos\theta_0 + \sin\theta_0\cos\theta_2} = \frac{\sin(\theta_2-\theta_0)}{\sin(\theta_2+\theta_0)} = -\frac{\sin(\theta_0-\theta_2)}{\sin(\theta_0+\theta_2)},\ \xi_2 = \frac{E_2}{E_0} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_0}{\sin(\theta_0+\theta_2)}$$

* Мы предположили, что θ_0 меньше угла полного внутреннего отражения (если $\frac{n_2}{n_1} = \frac{k_2}{k_0} > 1$, то это всегда так).

Формулы Френеля для ТМ-волны



Задано:

Плоская монохроматическая ТМ-волна $\vec{H}_0 = |H_0| e^{i(k_{0x}x + k_{0z}z - \omega t)} \vec{e}_y$ падает границу $z = 0$ раздела (г.р.) двух сред с параметрами ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 соответственно. Ось z направлена из среды 1 в среду 2.

Вывод формул Френеля.

Граничные условия для тангенциальных компонент $\vec{E}$ и $\vec{H}$

$$\begin{cases} H_{0y} & +H_{1y} & = & H_{2y} \\ E_{0x} & +E_{1x} & = & E_{2x} \end{cases}$$

С учетом заданной геометрии э.-м. поля имеем:

$$\begin{cases} H_{0\tau} & +H_{1\tau} & = & H_{2\tau} \\ E_0 \cos\theta_0 & -E_1 \cos\theta_1 & = & E_2 \cos\theta_2 \end{cases} \tag{5}$$

Здесь E_i и H_i - комплексные числа (напр., $E_0 = E_{0m} e^{i(k_{0x}x - \omega t + \phi_0)}$).

Перепишем систему уравнений (5) с учетом $\cos\theta_0 = \frac{k_{0z}}{k_0}$, $\cos\theta_1 = \frac{k_{1z}}{k_1}$, $\cos\theta_2 = \frac{k_{2z}}{k_2}$ и $H_i = \frac{ck_i}{\omega\mu_i} E_i$

$$\begin{cases} \frac{k_0}{\mu_1} E_0 & +\frac{k_1}{\mu_1} E_1 & = & \frac{k_2}{\mu_2} E_2 \\ \\ E_0 \frac{k_{0z}}{k_0} & -E_1 \frac{k_{1z}}{k_1} & = & E_2 \frac{k_{2z}}{k_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_2 E_1 & -\mu_1 \frac{k_2}{k_0} E_2 & = & -\mu_2 E_0 \\ \\ \frac{k_{0z}}{k_0} E_1 & +\frac{k_{2z}}{k_2} E_2 & = & \frac{k_{0z}}{k_0} E_0 \end{cases}$$

Далее удобно перейти к переменным $\zeta_1 = \frac{E_1}{E_0}$ и $\zeta_2 = \frac{E_2}{E_0}$:

$$\begin{cases} \mu_2 \zeta_1 & -\mu_1 \frac{k_2}{k_0} \zeta_2 & = & -\mu_2 \\ \\ \frac{k_{0z}}{k_0} \zeta_1 & +\frac{k_{2z}}{k_2} \zeta_2 & = & \frac{k_{0z}}{k_0} \end{cases}$$

Запишем систему в матричной форме и найдем решение по правилу Крамера:

$$\begin{pmatrix} \mu_2 & -\mu_1 \frac{k_2}{k_0} \\ \\ \frac{k_{0z}}{k_0} & \frac{k_{2z}}{k_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_2 \\ \\ \frac{k_{0z}}{k_0} \end{pmatrix} \Rightarrow \zeta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\mu_1 \frac{k_2}{k_0} \frac{k_{0z}}{k_0} - \mu_2 \frac{k_{2z}}{k_2}}{\mu_2 \frac{k_{2z}}{k_2} + \mu_1 \frac{k_{0z}}{k_0} \frac{k_2}{k_0}}, \ \zeta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2\mu_2 \frac{k_{0z}}{k_0}}{\mu_2 \frac{k_{2z}}{k_2} + \mu_1 \frac{k_{0z}}{k_0} \frac{k_2}{k_0}} \tag{6}$$

С учетом $\frac{k_{0z}}{k_0} = \cos\theta_0$, $\frac{k_{2z}}{k_2} = \cos\theta_2$, $\frac{k_2}{k_0} = \frac{n_2}{n_1}$ формулы Френеля для ТМ-волны принимают вид:

$$\zeta_1 = \frac{\mu_1 \frac{n_2}{n_0} \cos\theta_0 - \mu_2 \cos\theta_2}{\mu_1 \cos\theta_0 \frac{n_2}{n_0} + \mu_2 \cos\theta_2} = \frac{\mu_1 \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_2} \cos\theta_0 - \mu_2 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_2} \cos\theta_2}{\mu_1 \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_2} \cos\theta_0 + \mu_2 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_2} \cos\theta_2} = \frac{\mu_1 \sin 2\theta_0 - \mu_2 \sin 2\theta_2}{\mu_1 \sin 2\theta_0 + \mu_2 \sin 2\theta_2}$$

$$\zeta_2 = \frac{2\mu_2 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_2} \cos\theta_0}{\mu_1 \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_2} \cos\theta_0 + \mu_2 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_2} \cos\theta_2} = \frac{4\mu_2 \sin\theta_2 \cos\theta_0}{\mu_1 \sin 2\theta_0 + \mu_2 \sin 2\theta_2}$$

В случае $\mu_1 = \mu_2$ формулы упрощаются:

$$\zeta_1 = \frac{E_1}{E_0} = \frac{2\mu \sin(\theta_0 - \theta_2) \cos(\theta_0 + \theta_2)}{2\mu \sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} = \frac{\mathrm{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\mathrm{tg}(\theta_0 + \theta_2)}$$

$$\zeta_2 = \frac{E_2}{E_0} = \frac{2 \sin\theta_2 \cos\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)}$$