

Домашняя работа к занятию 24.

1.1 Решите задачу Штурма–Лиувилля
$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y'(0) = 0; \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Сформулируйте утверждение о разложении функции $f(x)$ в ряд по собственным функциям $e_n(x)$ этой задачи. Найдите коэффициенты разложения функции $f(x) = x^2 - \pi^2$. Каков характер сходимости ряда для этой функции? Нарисуйте при помощи компьютерных программ и сравните графики функции $f(x) = x^2 - \pi^2$ и частичной суммы ее ряда Фурье $P_2(x) = a_1 e_1(x) + a_2 e_2(x)$.

2.1 Решите задачу Штурма–Лиувилля
$$\begin{cases} x^2 y'' = \lambda y \\ y'(1) = 0; \quad y'(e) = 0 \end{cases}$$

Сформулируйте утверждение о разложении функции $f(x)$ в ряд по собственным функциям $e_n(x)$ этой задачи. Найдите коэффициенты разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$. Каков характер сходимости ряда для этой функции? Нарисуйте при помощи компьютерных программ и сравните графики функции $f(x) = \sqrt{x}$ и частичной суммы ее ряда Фурье $P_2(x)$.

3.1 Решите задачу Штурма–Лиувилля
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \lambda y \\ y(0) = 0; \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Сформулируйте утверждение о разложении функции $f(x)$ в ряд по собственным функциям $e_n(x)$ этой задачи. Найдите коэффициенты разложения функции $f(x) = \sin x$. Каков характер сходимости ряда для этой функции? Нарисуйте при помощи компьютерных программ и сравните графики функции $f(x) = \sin x$ и частичных сумм ее ряда Фурье $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Ответы и указания.

1.1 Собственные числа $\lambda_n = -\alpha_n^2$, где $\alpha_n = \frac{2n-1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$). Собственные функции $e_n(x) = \cos \alpha_n x = \cos \frac{(2n-1)}{2}x$.

$$(e_n, e_n) = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{32 \cdot (-1)^n}{\pi(2n-1)^3}.$$

$$P_2(x) = \frac{32}{\pi} \left(-\cos \frac{1}{2}x + \frac{1}{27} \cos \frac{3}{2}x \right).$$

2.1 Собственные числа $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = -\frac{1}{4} - (\pi n)^2$ ($n \in \mathbb{N}$). Собственные функции $e_0 \equiv 1$, $e_n(x) = \sqrt{x} \left(\sin(\pi n \ln x) - 2\pi n \cos(\pi n \ln x) \right)$ ортогональны в скалярном произведении с весом $\rho(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$(e_0, e_0) = \frac{e-1}{e}, \quad a_0 = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1}.$$

$$(e_n, e_n) = \frac{4(\pi n)^2 + 1}{2}, \quad a_n = \frac{2}{4(\pi n)^2 + 1} \frac{1 + (-1)^n}{\pi n}.$$

$$P_2(x) = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1} + \frac{2}{\pi(16\pi^2+1)} \sqrt{x} \left(\sin(2\pi \ln x) - 4\pi \cos(2\pi \ln x) \right).$$

3.1 Собственные числа $\lambda_n = -n^2$ ($n \in \mathbb{N}$). Собственные функции $e_n(x) = e^x \sin nx$ ортогональны с весом $\rho(x) = e^{-2x}$.

$$(e_n, e_n) = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{4n \cdot (1 + (-1)^n e^{-\pi})}{\pi(n^4 + 4)}.$$

$$P_2(x) = \frac{4(1 - e^{-\pi})}{5\pi} e^x \sin x + \frac{2(1 + e^{-\pi})}{5\pi} e^x \sin 2x.$$