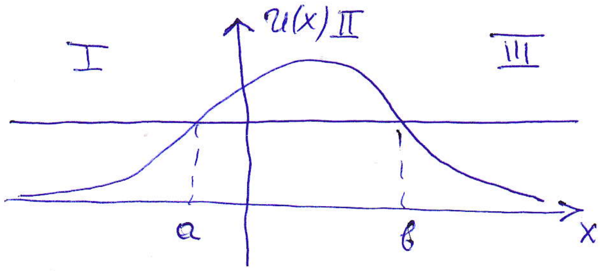
Лекция 14 Квазиклассический метод. (продолжение).

Рассмотрим подбарьерное прохождение частицы — туннельный эффект.



В области III $\psi(x)$ — уходящая волна, нам нужно связать эту функцию / продолжить её в область II.

Один из возможных способов решить эту задачу следующий. Пусть $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — два линейно независимых решения УШ.

$$\psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U(x))\psi_1 = 0 \quad \otimes\ \psi_2$$

$$\psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U(x))\psi_2 = 0 \quad \otimes\ \psi_1$$

и вычтем из первого уравн. второе уравн.

$$\Rightarrow \quad \psi_2\psi_1'' - \psi_1\psi_2'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\psi_2\psi_1' - \psi_1\psi_2'}_{\text{определитель Вронского, или вронскиан.}} = const, \text{ не зависит от } x$$

На прошлой лекции было получено правило соответств.

$$\psi_1(x): \quad \frac{C}{2\sqrt{\varkappa}}\, e^{-\int_x^b \varkappa\, dx} \ \xrightarrow{\ \ } \ \frac{C}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_b^x k\,dx - \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow$$

Это будет функция ψ_1 - одно из линейно незав. решен. У.Ш.

$x < b \qquad\qquad x > b$

$$\psi_2(x): \quad \frac{\tilde{C}}{\sqrt{\varkappa}}\, e^{\int_x^b \varkappa\, dx} \ \xrightarrow{\ \ } \ \frac{-\tilde{C}}{\sqrt{k}} \sin\left(\int_b^x k\,dx - \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow$$

попробуем в качестве ψ_2 второе линейно незав. решен.

$k = \sqrt{2m(E-U(x))}$; $\varkappa = \sqrt{2m(U(x)-E)}$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-U(x))}$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U(x)-E)}$$

Вычисляем Вронскиан: $\psi_2 \psi_1' - \psi_1 \psi_2$

а) при $x < b$

$$\frac{C\tilde{C}}{2\varkappa}\left(+\varkappa + \varkappa\right) = +C\tilde{C}$$

в) при $x > b$

$$-\frac{C\tilde{C}}{k}\left(-k\cos^2(\ldots) + (-k)\sin^2(\ldots)\right) = C\tilde{C}$$

а) и в) – совпало $\Rightarrow$ наша гипотеза о виде ψ_2 – верна

Нам нужна плоская волна в области III $\Rightarrow$

Возьмем линейную комбинацию $\psi(x) = \psi_1(x) - i\psi_2(x)$, при $\tilde{C} = C$

$$\psi(x): \quad \underbrace{\frac{C}{\sqrt{k}} \exp\left\{i\left(\int_b^x k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)\right\}}_{x > b \uparrow} \qquad \underbrace{\frac{C}{2\sqrt{\varkappa}} e^{-\int_x^b \varkappa\,dx} - \frac{iC}{\sqrt{\varkappa}} e^{\int_x^b \varkappa\,dx}}_{x < b \uparrow}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{k}} \exp\left\{i\left(\int_b^x k\,dx + \frac{\pi}{4}\right) - i\frac{\pi}{2}\right\} =$$

$$= \frac{-iC}{\sqrt{k}} \exp\left\{i\left(\int_b^x k\,dx + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

Удержание члена $\sim e^{-\int_x^b \varkappa\,dx}$, если есть член $\sim e^{+\int_x^b \varkappa\,dx}$ – превышение точности

$\Downarrow$

$$\frac{-iC}{\sqrt{\varkappa}} e^{\int_x^b \varkappa\,dx}$$

Итак, мы установили правило соответствия:

$$\underset{x > b}{\frac{C}{\sqrt{k}} \exp\left\{i\left(\int_b^x k\,dx + \frac{\pi}{4}\right)\right\}} \longrightarrow \underset{x < b.}{\frac{C}{\sqrt{\varkappa}} \exp\left\{+\int_x^b \varkappa\,dx\right\}}$$

Возвращаемся к задаче на стр. 1 о коэфф. прохождения:

в области III : $\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{k}} \exp\left\{ i\left(\int_b^x k\,dx + \frac{\pi}{4} \right) \right\}$

в области II : $\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{\varkappa}} \exp\left\{ \int_x^b \varkappa\,dx \right\} =$

$$= \frac{C}{\sqrt{\varkappa}} \exp\left\{ \int_a^b \varkappa\,dx - \int_a^x \varkappa\,dx \right\} =$$

$\Rightarrow$ в области I : $\psi(x) = \left(2 \exp\left\{ \int_a^b \varkappa\,dx \right\} \right) \frac{C}{2\sqrt{\varkappa}} \exp\left\{ -\int_a^x \varkappa\,dx \right\}$

$$\psi(x) = 2C \exp\left\{ \int_a^b \varkappa\,dx \right\} \frac{\cos\left\{ \int_x^a k\,dx - \frac{\pi}{4} \right\}}{\sqrt{k}} =$$

$$= \exp\left\{ \int_a^b \varkappa\,dx \right\} \left\{ \underbrace{\frac{C}{\sqrt{k}} \exp\left\{ i\left(\int_a^x k\,dx + \frac{\pi}{4} \right) \right\}}_{\text{падающая волна}} + \underbrace{\frac{C}{\sqrt{k}} \exp\left\{ -i\left(\int_a^x k\,dx + \frac{\pi}{4} \right) \right\}}_{\text{отраженная волна}} \right\}$$

Сравнивая выражения для $\psi(x)$ в областях I и III находим, что

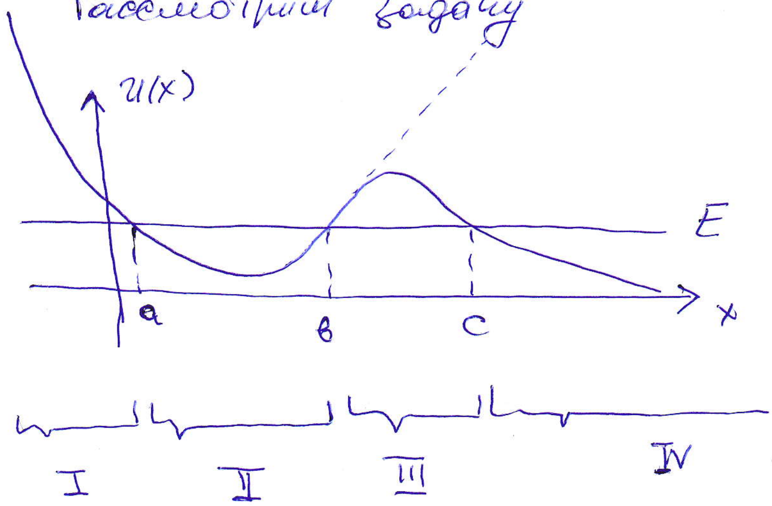
Коэфф. прохождения:

$$D = \exp\left\{ -2\int_a^b \varkappa\,dx \right\} = \exp\left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p|\,dx \right\}$$

Отметим, что в ~~условиях~~ области применимости квазиклас. подхода $D \ll 1$ – коэфф. прохождения экспоненциально мал.

Квазистационарные состояния / Ширина и время жизни.

Рассмотрим задачу



Если $\int_a^в p\,dx = \pi\hbar(n+1/2)$ – связанное состояние.

Но у частицы есть конечная (малая) вероятность протуннелировать через барьер на участке III $\Rightarrow$ состояние частицы в яме (участок II) не является стационарным $|\Psi(x)|^2 \neq const$ – – убывает при эволюции по времени. Сделаем оценку времени нахожд. частицы внутри ямы. С точки зрения класс. механики один раз за классический период $= T_0$ - частица достигает границы класс. области $x = в$, и с вероятностью $w = D$ (D-коэфф. прохожд.) туннелирует через область III и уходит на бесконечность $x \to +\infty$.

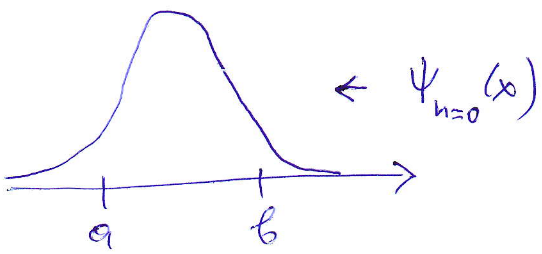
$\Rightarrow$ Оценка времени нахождения внутри ямы – τ

$\tau = \langle n\rangle T_0$ где $\langle n\rangle$ - число классических периодов, требуемых для покидания ямы; $\langle n\rangle \cdot w = 1 \Rightarrow \langle n\rangle = D^{-1} \gg 1$

Попробуем обосновать эту оценку в квантовой механике.

Пусть при $t=0$ $\Psi(x,t=0)=\psi_n(x)$ – волновая ф-ция стационар. сост., если бы $U(x)$ на участках III и IV – бы монотонно рос при увеличении x.

E_n – соотв. энергия связ. состоян.



Тогда эволюция во времени:

$$\Psi(x,t)=\int_0^\infty dE\,\psi_E(x)\,e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\,\langle\psi_E(x)|\Psi(x,t=0)\rangle$$

$\psi_E(x)$ – стацион. состояния нашей задачи –

в области IV $\quad \psi_E(x)\sim\dfrac{e^{-i\left(\int_c^x k\,dx+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k}}+\dfrac{A_E}{\sqrt{k}}\,e^{+i\left(\int_c^x k\,dx+\frac{\pi}{4}\right)}$

падающая волна $\qquad$ отраженная волна

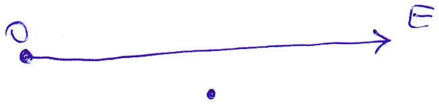
Причем коэфф. отражения $=|A_E|^2=1$ – в следствии сохранения вероятности – у нас нет прошедшей волны.

При $E\sim E_n$ $\quad A_E\approx\dfrac{E-E_n-\frac{i\Gamma_n}{2}}{E-E_n+\frac{i\Gamma_n}{2}}$ – имеет полюс при $E=E_n-\frac{i\Gamma_n}{2}$

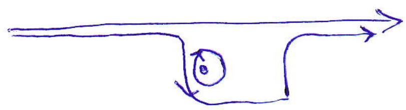
Внутри ямы, область II, и при $E\approx E_n$

$$\psi_E(x)\sim\frac{\psi_n(x)}{E-E_n+\frac{i\Gamma_n}{2}}\Rightarrow\langle\psi_E(x)|\Psi(x,t=0)\rangle\sim\frac{1}{E-E_n+\frac{i\Gamma_n}{2}}$$

Интеграл по E



деформ. контур интегрирования по E →



Вклад вычета – самый главный

$$\Rightarrow \psi(x,t) \sim \psi_n(x)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E_n - \frac{i\Gamma_n}{2}\right)t} = \psi_n(x)\, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\cdot e^{-\frac{\Gamma_n t}{\hbar}}$$

$$|\psi(x,t)|^2 \sim |\psi_n(x)|^2 \cdot e^{-\frac{\Gamma_n t}{\hbar}}$$

Время жизни $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_n}$ – вероятность уменьшается в e – раз.

$$E_n - i\frac{\Gamma_n}{2}$$

↑

энергия квазиуровня $\qquad \Gamma_n$ – ширина квазиуровня.

Связь Γ_n – с коэфф. прохождения.

Попробуем $A_E = 0$ или, что эквивал. коэфф. при падающей волне $= 0$.

У нас есть все необходимые условия сшивки. $\sim \dfrac{e^{-i\int_c^x k\,dx}}{\sqrt{k}}$

Детали вычисления можно посмотреть ниже, в дополнении к этой лекции. Приведём результат:

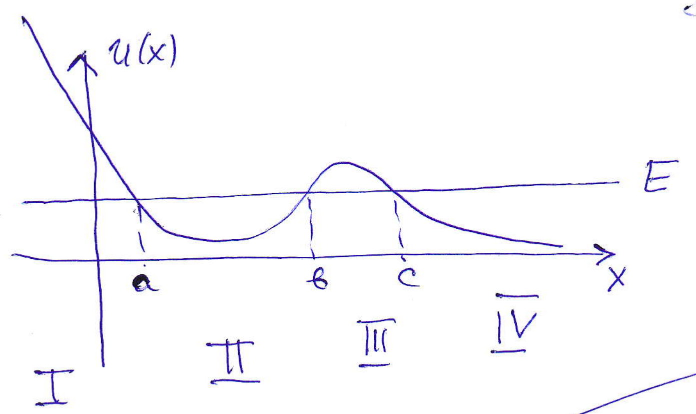
$\operatorname{tg}\alpha = -i\frac{D}{4}$, где $\qquad D = \exp\left\{-2\int_b^c \varkappa\, dk\right\}$ – коэфф. прохождения

$$\alpha = \int_a^b k\,dx - \frac{\pi}{2}$$

Ищем решение этого уравнения как $E = E_n - \frac{i\Gamma_n}{2}$

Дополнение   вывод формулы

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{iD}{4},$$ определяющей энергию и ширину квазистац. состояния.



используя правила соответст. которые мы нашли ранее. Также ранее мы ввели обозначение $\alpha \equiv \int_a^b k\,dx - \frac{\pi}{2}$, $D = e^{-2\int_b^c \varkappa\,dx}$

Строим $\psi(x)$:

область I) $$\frac{C}{2\sqrt{\varkappa}}\, e^{-\int_x^a \varkappa\,dx}$$

область II) $$\frac{C}{\sqrt{k}}\cos\left(\int_a^x k\,dx - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{C}{\sqrt{k}}\cos\left(\left(\int_a^b k\,dx - \frac{\pi}{2}\right) - \left(\int_x^b k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{k}}\cos\alpha\cos\left(\int_x^b k\,dx - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{C}{\sqrt{k}}\sin\alpha\sin\left(\int_x^b k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)$$

область III) $$\frac{C}{2\sqrt{\varkappa}}\cos\alpha\, e^{-\int_b^x \varkappa\,dx} - \frac{C}{\sqrt{\varkappa}}\sin\alpha\, e^{+\int_b^x \varkappa\,dx} =$$

$$= \frac{C\cos\alpha}{2\sqrt{\varkappa}}\, e^{\left(-\int_b^c \varkappa\,dx + \int_x^c \varkappa\,dx\right)} - \frac{C\sin\alpha}{\sqrt{\varkappa}}\, e^{\left(\int_b^c \varkappa\,dx - \int_x^c \varkappa\,dx\right)} = \frac{C\sqrt{D}\cos\alpha}{2\sqrt{\varkappa}}\, e^{\int_x^c \varkappa\,dx} - \frac{C\sin\alpha}{\sqrt{\varkappa}\sqrt{D}}\, e^{-\int_x^c \varkappa\,dx}$$

область IV) $$-\frac{C\sqrt{D}\cos\alpha}{2\sqrt{k}}\sin\left(\int_c^x k\,dx - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2C\sin\alpha}{\sqrt{k}\sqrt{D}}\cos\left(\int_c^x k\,dx - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{e^{i\left(\int_c^x k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k}}\left(-\frac{C\sqrt{D}\cos\alpha}{4} - \frac{C\sin\alpha}{\sqrt{D}\,i}\right) + e^{-i\left(\int_c^x k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{C\sqrt{D}\cos\alpha}{2i} - \frac{C\sin\alpha}{\sqrt{D}}\right)$$

Требование отсутствия налетающей справа волны $\Rightarrow 0$

дает условие $$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{iD}{4}$$